On the modeling of the concept: “The Contents of the Empty Set" using the Activity Orderings family $(\sqsubseteq^w)_{w \in L}$ in a distributive lattice $(L, \leq)$. An interpretation of those order relations $\sqsubseteq^w$ as alternative inclusions (“*w*-Inclusions") and of its associated inf- operators $\sqcap^w$ as additional intersections (“*w*-Intersections”), both in the Intuitive Set Theory and in the *L*-Fuzzy Set Theory. (In Spanish).

Ramón Fuentes-González. (rfuentes@unavarra.es)
https://ramonfuentesgonzalez.academia.edu/

Research group: *“Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados”*.
Universidad Pública de Navarra, (Spain).

Keywords: Sets, Empty Set, Lattices, Formal Concept Lattices, Mathematical Morphology, Activity Orderings, Fuzzy Logic, Set Functions, Risk Maps, Isochronous Lines, Uncertainty in Data, Data Preprocessing, Discrete Mathematics, Distributive Bilattices, Multisets, Rough Sets, Probability, Conditional Probability, Topology.

Santa Pola.
Febrero 2021.

On the modeling of the concept: "The Contents of the Empty Set" using the Activity Orderings family $(\sqsubseteq^{w})_{w \in L}$ in a distributive lattice $(L, \leq)$. An interpretation of those order relations $\sqsubseteq^{w}$ as alternative inclusions ("*w*-Inclusions") and of its associated inf- operators $\sqcap^{w}$ as additional intersections ("*w*-Intersections"), both in the Intuitive Set Theory and in the *L*-Fuzzy Set Theory. (In Spanish).

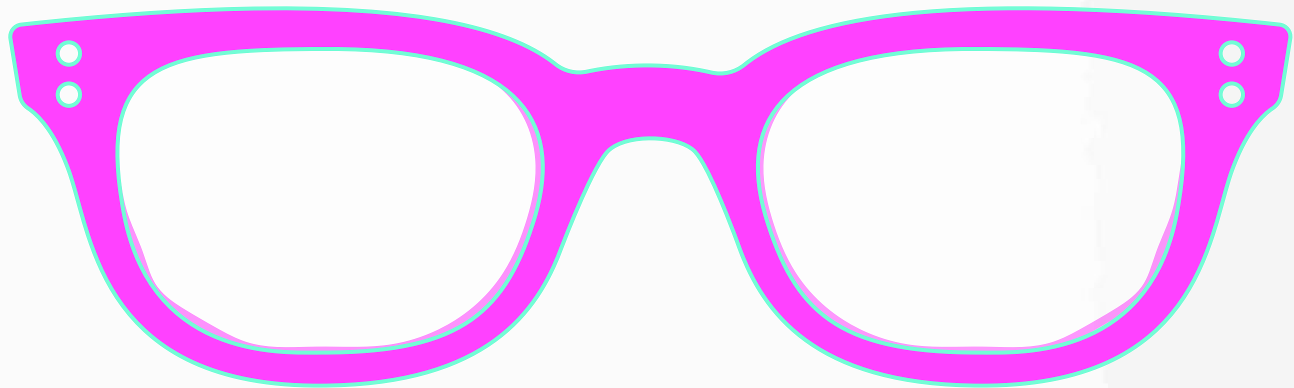
(**Subtitled**: On a re-interpretation of the "Symmetric Difference" operator, on its replacement by "activity orderings in distributive lattices" and on some of its possible applications in crisp and *L*-fuzzy subsets).

Ramón Fuentes-González. (rfuentes@unavarra.es)
https://ramonfuentesgonzalez.academia.edu/

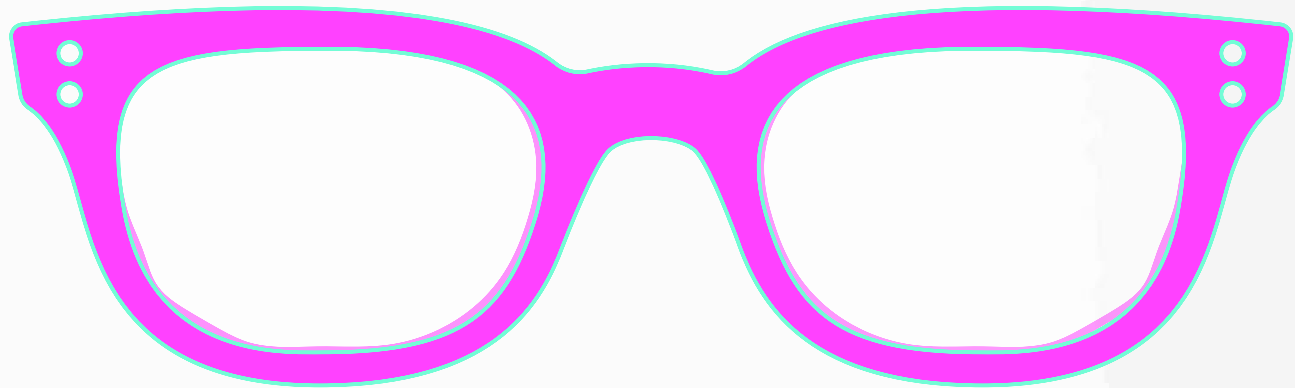
Research group: *"Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados"*.
Universidad Pública de Navarra, (Spain). 

Keywords: Sets, Empty Set, Lattices, Formal Concept Lattices, Mathematical Morphology, Activity Orderings, Fuzzy Logic, Set Functions, Risk Maps, Isochronous Lines, Uncertainty in Data, Data Preprocessing, Discrete Mathematics, Distributive Bilattices, Multisets, Rough Sets, Probability, Conditional Probability, Topology.

Santa Pola.
Febrero 2021.

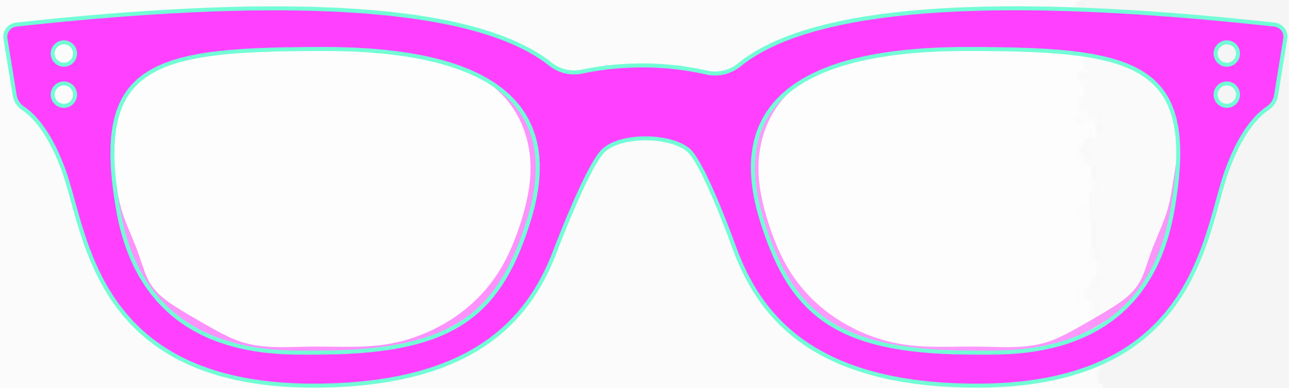


Gafas para "perspectiva de lejos"



Gafas para "perspectiva de lejos"

Gafas para "perspectiva de cerca"


Gafas para "perspectiva de lejos"


Gafas para "perspectiva de cerca"

Sobre la modelización del concepto: "El Contenido del Conjunto Vacío" fundamentada en los Órdenes de Actividad $(\sqsubseteq^{w})_{w\in L}$ en retículos distributivos $(L,\leq)$, así como sobre las interpretaciones de esos órdenes $\sqsubseteq^{w}$ como "W-Inclusiones" y de sus operadores ínfimo asociados $\sqcap^{w}$ como "W-Intersecciones" adicionales; tanto en la Teoría Intuitiva de Conjuntos como en la Teoría de Subconjuntos Borrosos.

R. Fuentes-González

Grupo de Investigación: "Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados". Universidad Pública de Navarra.

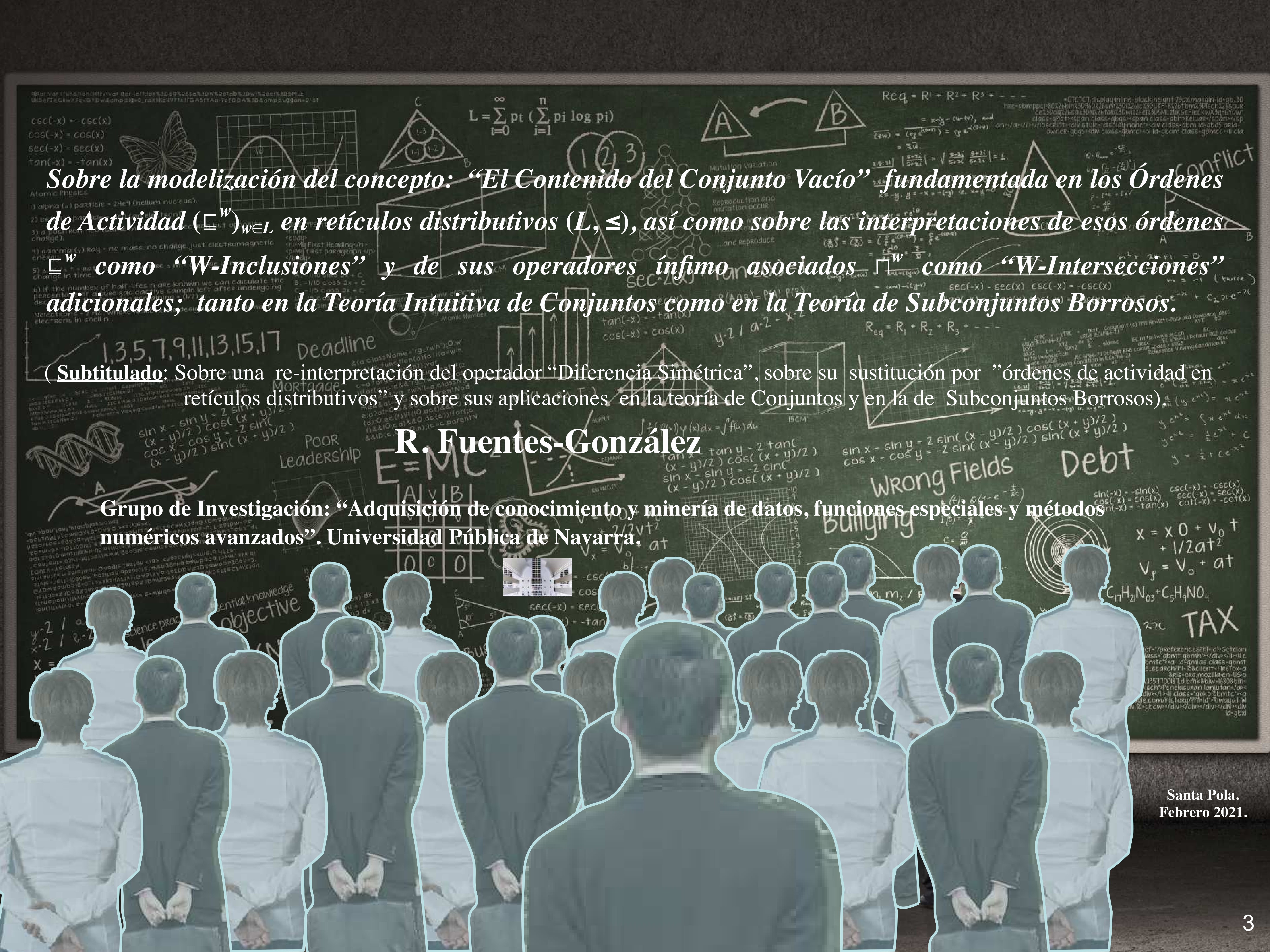
Santa Pola.
Febrero 2021.

Sobre la modelización del concepto: "El Contenido del Conjunto Vacío" fundamentada en los Órdenes de Actividad $(\sqsubseteq^w)_{w \in L}$ en retículos distributivos $(L, \leq)$, así como sobre las interpretaciones de esos órdenes $\sqsubseteq^w$ como "W-Inclusiones" y de sus operadores ínfimo asociados $\sqcap^w$ como "W-Intersecciones" adicionales; tanto en la Teoría Intuitiva de Conjuntos como en la Teoría de Subconjuntos Borrosos.

R. Fuentes-González

Grupo de Investigación: "Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados". Universidad Pública de Navarra.

Santa Pola.
Febrero 2021.



Sobre la modelización del concepto: "El Contenido del Conjunto Vacío" fundamentada en los Órdenes de Actividad $(\sqsubseteq^w)_{w\in L}$ en retículos distributivos $(L, \leq)$, así como sobre las interpretaciones de esos órdenes $\sqsubseteq^w$ como "W-Inclusiones" y de sus operadores ínfimo asociados $\sqcap^w$ como "W-Intersecciones" adicionales; tanto en la Teoría Intuitiva de Conjuntos como en la Teoría de Subconjuntos Borrosos.

(**Subtitulado**: Sobre una re-interpretación del operador "Diferencia Simétrica", sobre su sustitución por "órdenes de actividad en retículos distributivos" y sobre sus aplicaciones en la teoría de Conjuntos y en la de Subconjuntos Borrosos).

R. Fuentes-González

Grupo de Investigación: "Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados". Universidad Pública de Navarra.

Santa Pola.
Febrero 2021.

Presentación y resumen

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones.

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones.

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{W} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{W} B$, intersecciones $A \sqcap^{W} B$ y uniones $A \sqcup^{W} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

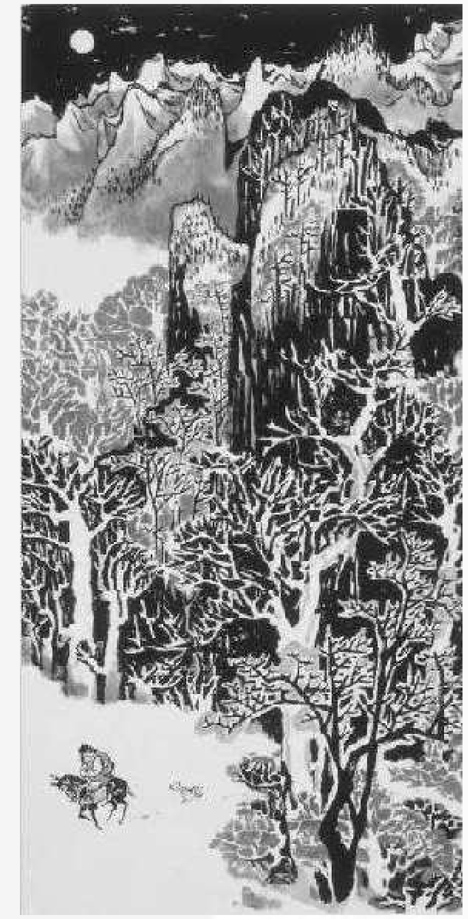
Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones.

Imágenes en blanco y negro

Imágenes binarias

“YinYangmoji”

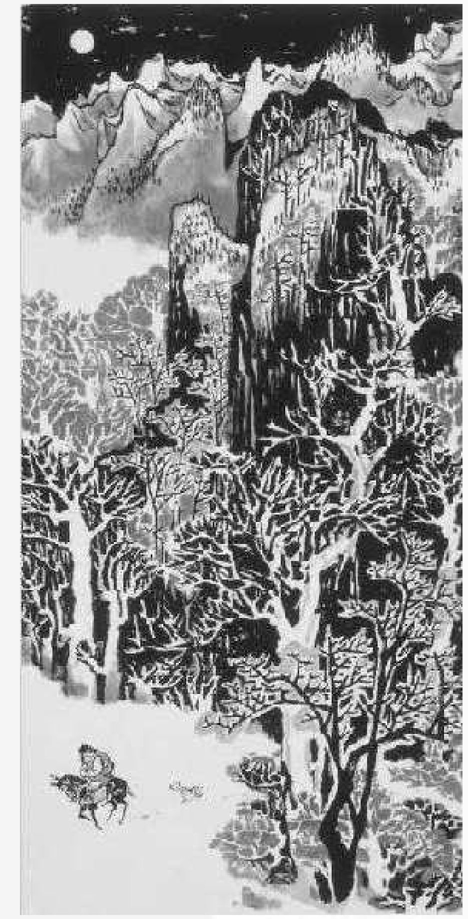


Imágenes con tonos de grises

Imágenes como subconjuntos ordinarios:

$$A \subseteq Z^2$$

“YinYangmoji”

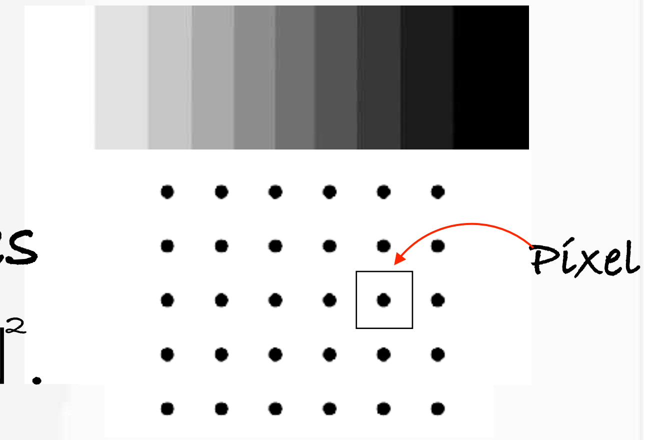


Todas sin distinción:

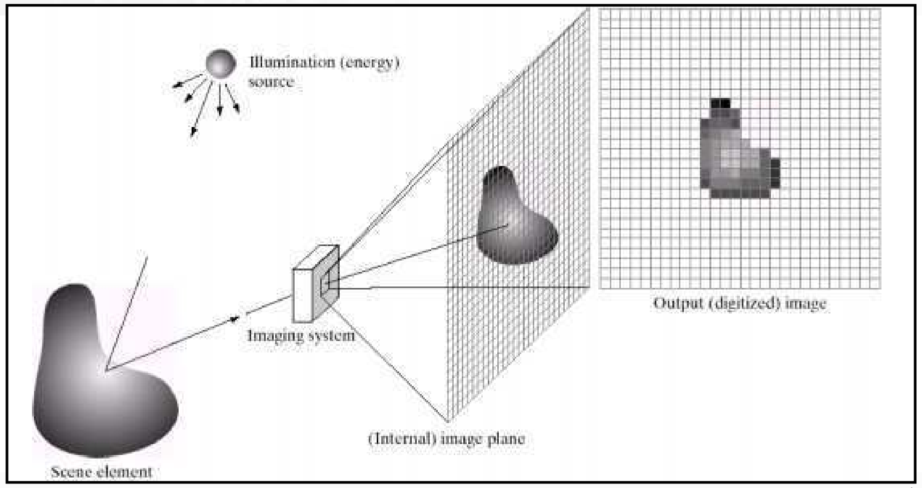
Imágenes digitales como aplicaciones $A\colon Z^2 \longrightarrow \{\, 0, 1, \dots, 255 \,\}$

Representación de imágenes digitalizadas

- La cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ como escala de grises.

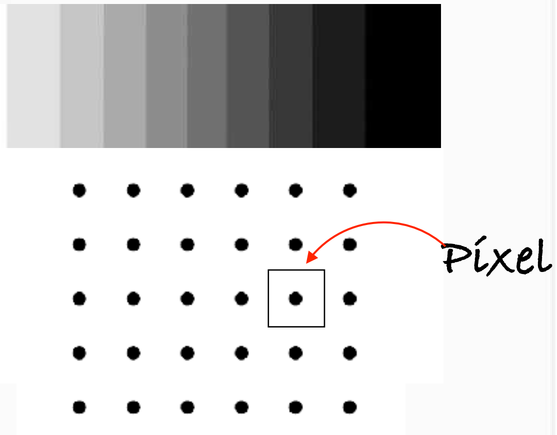


- Un subconjunto acotado $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$ como referencial y sus píxeles asociados: $\boldsymbol{E}=\{p, p+1, \ldots, p+s\} X \{p, p+1, \ldots, p+t\}$, $p\in\mathbb{Z}$, $(s,t)\in\mathbb{N}^2$.



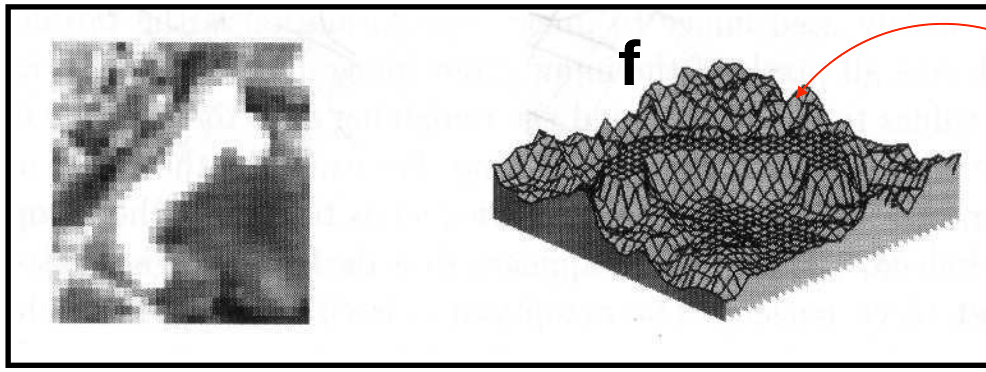
$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \ldots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \ldots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \ldots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)



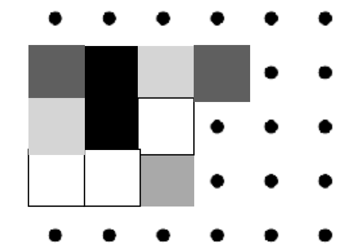
– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$$L^{\boldsymbol{E}} = \{ \boldsymbol{M} \,/\, \boldsymbol{M}: \boldsymbol{E} \rightarrow L \},$$



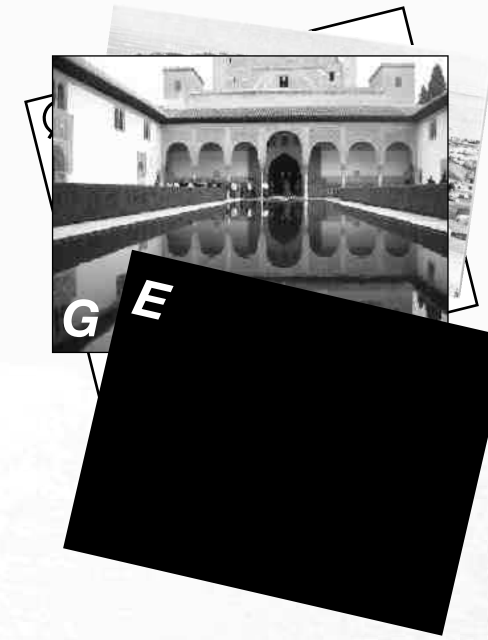
$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \ldots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \ldots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \ldots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

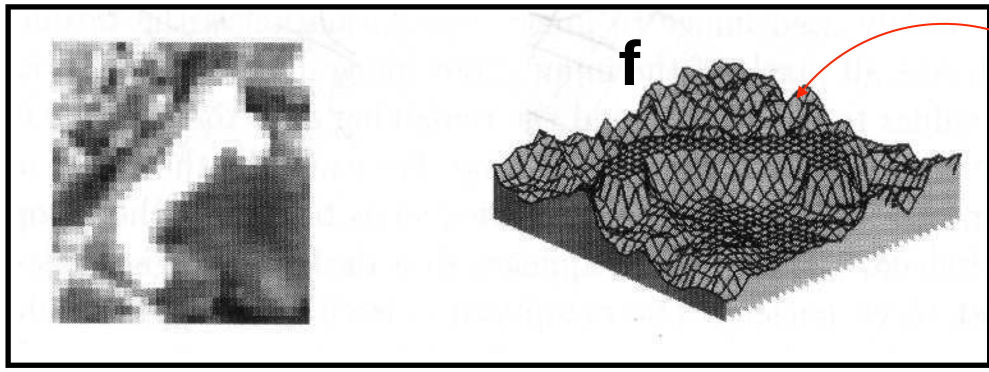
Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)



– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

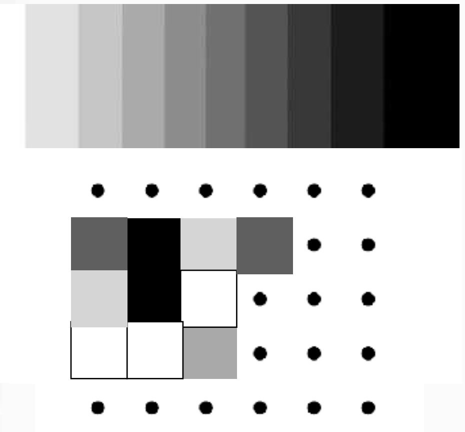
$$L^{E} = \{ M \,/\, M: E \to L \},$$





$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \dots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)

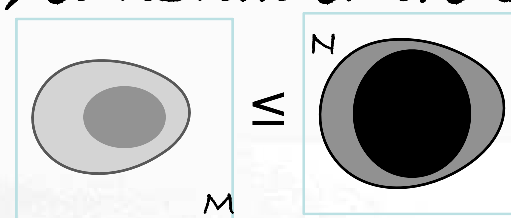


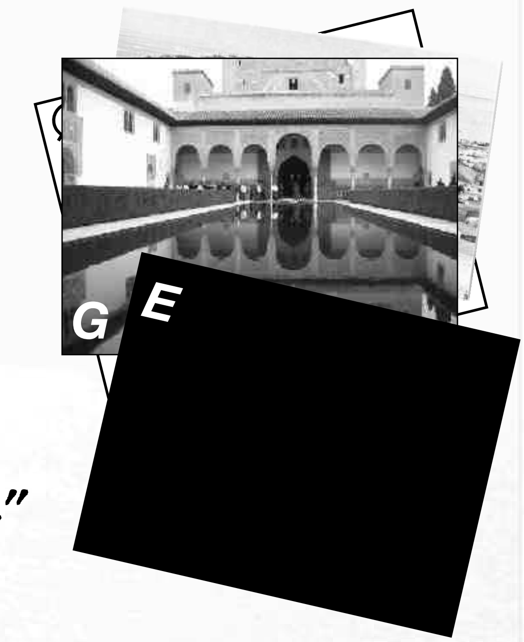
– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$$L^{E} = \{ M \,/\, M : E \rightarrow L \},$$

– Un orden entre imágenes. Por ejemplo, el usual entre borrosos:

$$(M \leq N) \Leftrightarrow (M(x,y) \leq N(x,y)\ \forall (x,y) \in E).$$



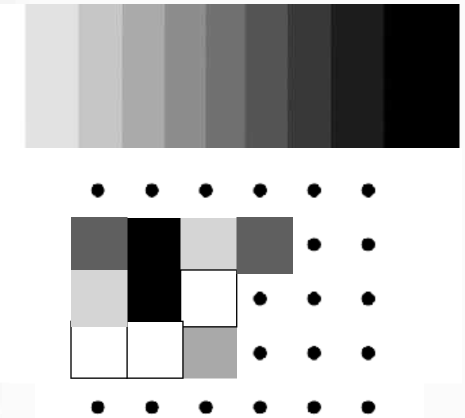


– Y los operadores asociados inf (·), sup (+), ("intersección" y "unión" generalizadas de imágenes), tales que $\forall (x,y) \in E$, $\forall (M, N) \in L^E \times L^E$:

$$(M \cdot N)(x,y) = \min(M(x,y), N(x,y)),\ (M + N)(x,y) = \max(M(x,y), N(x,y)).$$

$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \dots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)

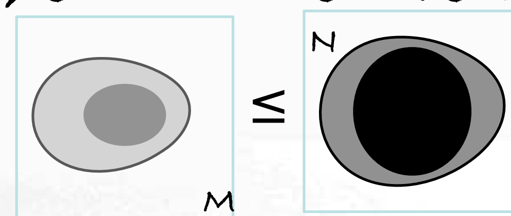


– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$$L^{\boldsymbol{E}} = \{ \boldsymbol{M} \,/\, \boldsymbol{M}: \boldsymbol{E} \rightarrow L \},$$

– Un orden entre imágenes. Por ejemplo, el usual entre borrosos:

$$(\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{N}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}(x,y) \leq \boldsymbol{N}(x,y)\ \forall (x,y) \in \boldsymbol{E}).$$

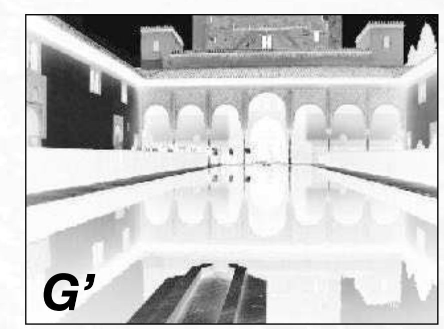


– Y los operadores asociados inf (·), sup (+), ("intersección" y "unión" generalizadas de imágenes), tales que $\forall (x,y) \in \boldsymbol{E},\ \forall (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \in L^{\boldsymbol{E}} \times L^{\boldsymbol{E}}$:

$$(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N})(x,y) = \min(\boldsymbol{M}(x,y), \boldsymbol{N}(x,y)),\ (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N})(x,y) = \max(\boldsymbol{M}(x,y), \boldsymbol{N}(x,y)).$$

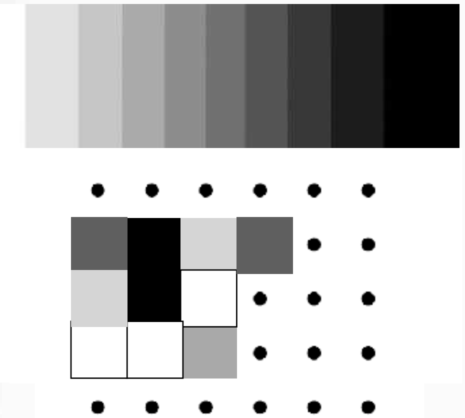
– La negación fuerte $'$: $L^{\boldsymbol{E}} \rightarrow L^{\boldsymbol{E}}$ tal que

$$\boldsymbol{M}'(x,y) = (255 - \boldsymbol{M}(x,y))\ \forall \boldsymbol{M} \in L^{\boldsymbol{E}},\ \forall (x,y) \in \boldsymbol{E}.$$ (El negativo de $\boldsymbol{M}$)



$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \cdots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

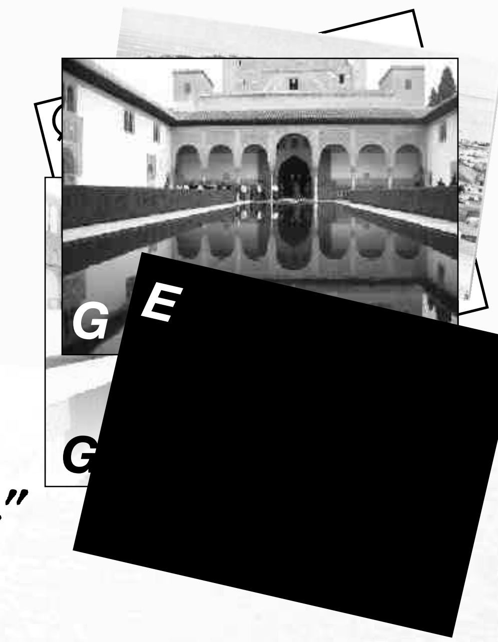
Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)



– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

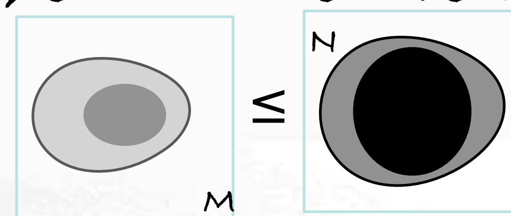
$$L^E = \{\, M \,/\, M: E \to L \,\},$$

$(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$



– Un orden entre imágenes. Por ejemplo, el usual entre borrosos:

$$(M \leq N) \Leftrightarrow (M(x,y) \leq N(x,y)\ \forall (x,y) \in E).$$



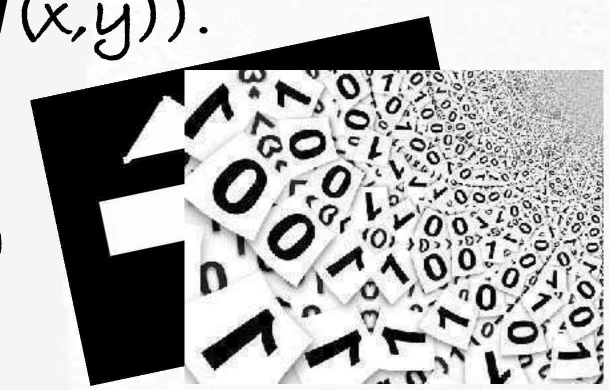
– Y los operadores asociados inf $(\cdot)$, sup $(+)$, ("intersección" y "unión" generalizadas de imágenes), tales que $\forall (x,y) \in E$, $\forall (M, N) \in L^E \times L^E$:

$$(M \cdot N)(x,y) = \min(M(x,y), N(x,y)),\ (M + N)(x,y) = \max(M(x,y), N(x,y)).$$

– La negación fuerte $'$: $L^E \to L^E$ tal que

$$M'(x,y) = (255 - M(x,y))\ \forall M \in L^E,\ \forall (x,y) \in E.$$ (El negativo de M)

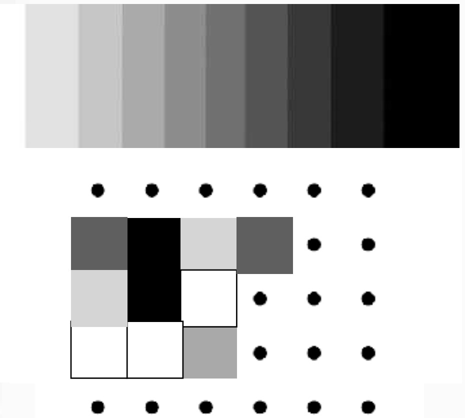
– Si $M(E) \subseteq \{0, 255\}$, entonces M es una imagen binaria.



...

El álgebra $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ de imágenes con tonos de grises de E, determinada por un retículo acotado distributivo $(L^E, \leq)$ y una negación fuerte.

$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0, s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1, s-1) \\ & & & \\ f(r-1,0) & f(r-1,1) & \cdots & f(r-1, s-1) \end{bmatrix}$$

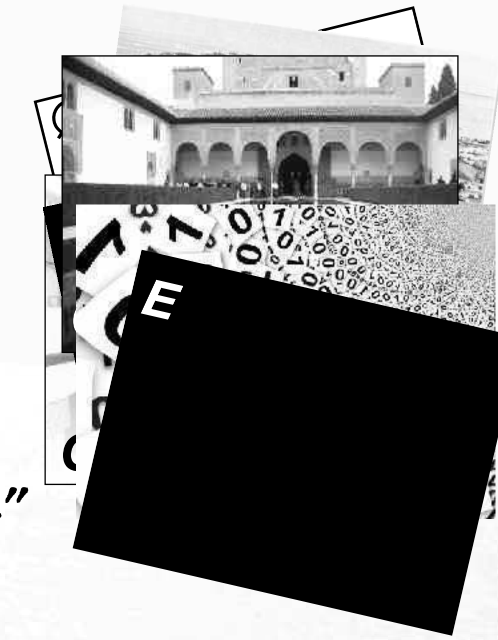


Discrete Images,Objects,and Functions in $\mathbb{Z}^n$,
Klaus Voss, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)

– Imágenes con tonos de grises (o subconjuntos L-borrosos) del marco $E \subseteq \mathbb{Z}^2$:

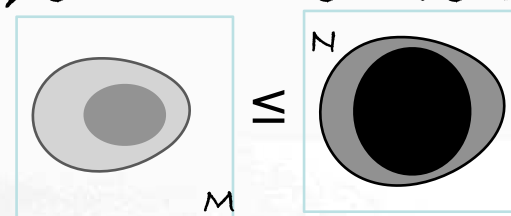
$$L^E = \{ M \,/\, M: E \rightarrow L \},$$

$(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$



– Un orden entre imágenes. Por ejemplo, el usual entre borrosos:

$$(M \leq N) \Leftrightarrow (M(x,y) \leq N(x,y) \ \forall (x,y) \in E).$$



– Y los operadores asociados inf $(\cdot)$, sup $(+)$, ("intersección" y "unión" generalizadas de imágenes), tales que $\forall (x,y) \in E$, $\forall (M, N) \in L^E \times L^E$:

$$(M \cdot N)(x,y) = \min(M(x,y), N(x,y)), \ (M + N)(x,y) = \max(M(x,y), N(x,y)).$$

– La negación fuerte $'$: $L^E \rightarrow L^E$ tal que

$M'(x,y) = (255 - M(x,y)) \ \forall M \in L^E, \forall (x,y) \in E$. (El negativo de M)

– Si $M(E) \subseteq \{0, 255\}$, entonces M es una imagen binaria.

El álgebra $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$ de imágenes con tonos de grises de E, determinada por un retículo acotado distributivo $(L^E, \leq)$ y una negación fuerte.

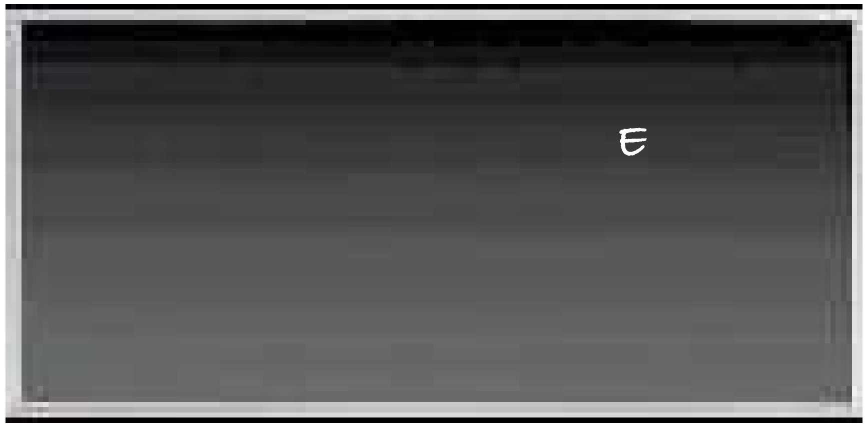
Contiene al Álgebra de Boole $(P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),^c)$ de las imágenes binarias.

Sobre una interpretación de ciertas relaciones de orden adicionales $\sqsubseteq^{W}$ en el retículo $(L^{E},\leq)$ de imágenes binarias y con tonos de grises, como "<u>Perspectivas</u>" en L^{E}.

“Perspectivas” en L^E.

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:



"<u>Perspectivas</u>" en L^E.

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:

Sea $((L^E, \leq), ')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E, \leq)$ de imágenes $A, B, \ldots$ binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y) \in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $' : L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A \in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y) \in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:

Sea $((L^E, \leq), ')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E, \leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y) \in E),$$

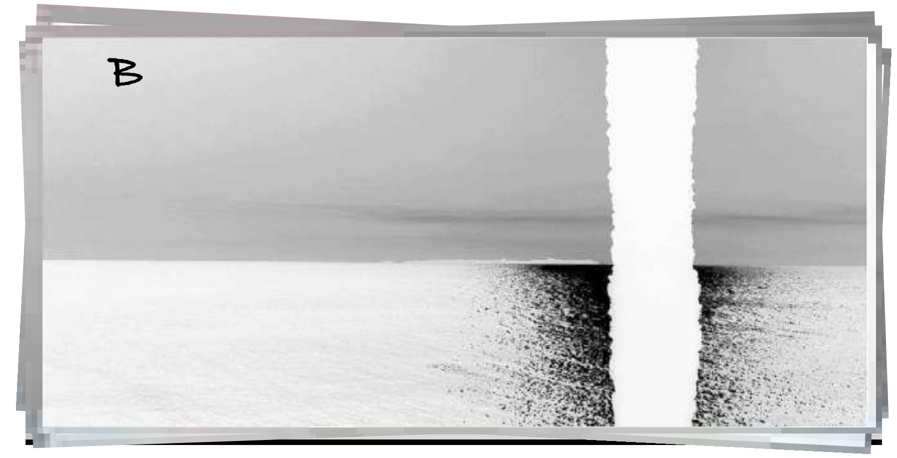
y

2. La aplicación involutiva $' : L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A \in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y) \in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:



Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

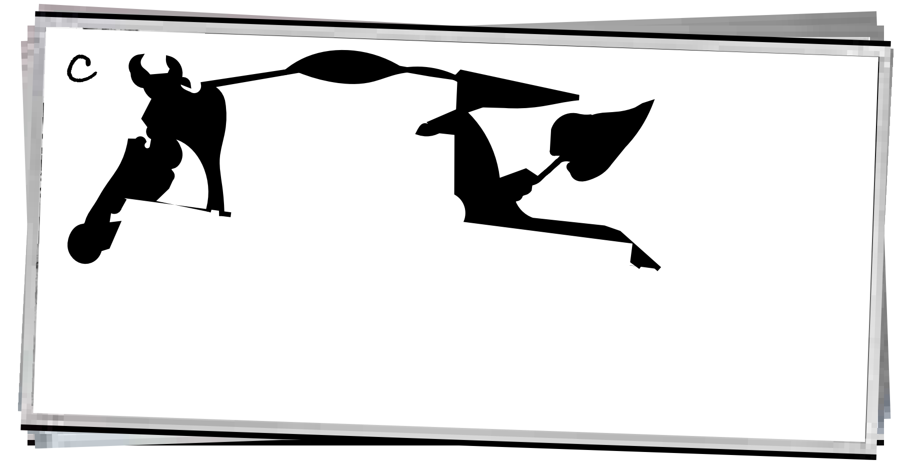
y

2. La aplicación involutiva $':L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E\neq\emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:



Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $':L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$$A'(x,y)=(255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E\neq\emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:

Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

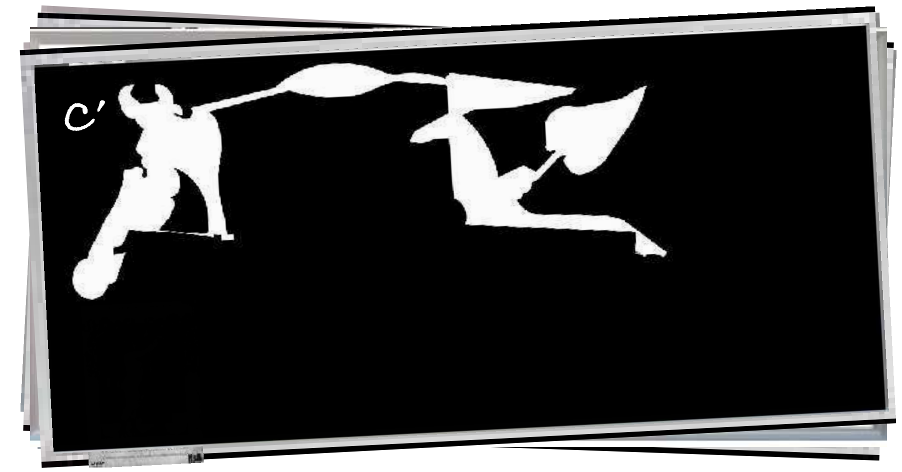
y

2. La aplicación involutiva $':L^E\rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$$A'(x,y)=(255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E\neq\emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:



Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes $A,B,\ldots$ binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $':L^E\rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$$A'(x,y)=(255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E).$$

Sea la cadena $L = \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:

Sea $((L^E, \leq), ')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E, \leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

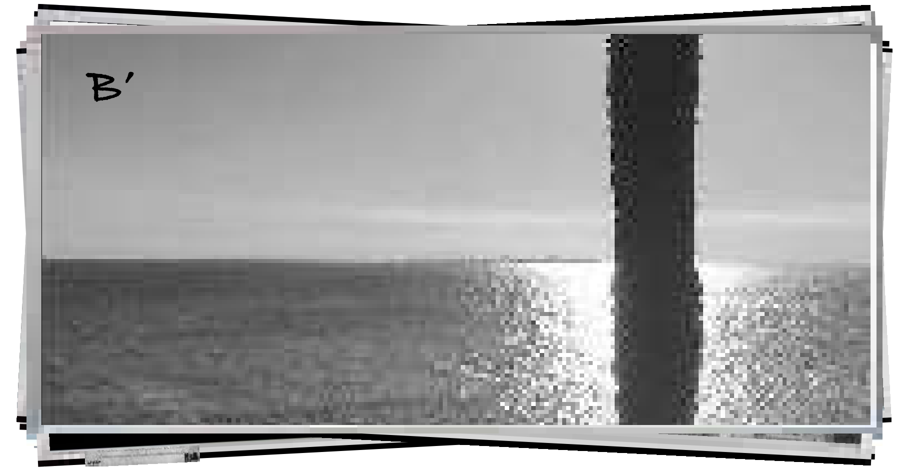
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y) \in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $' : L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A \in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y) \in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \ldots \leq 255$.



Sea $E\neq\emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:

Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

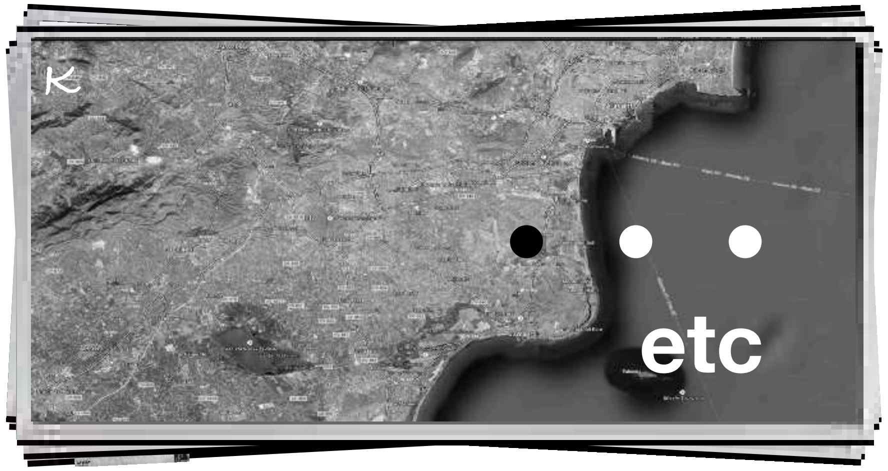
y

2. La aplicación involutiva $':L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E).$$

Sea la cadena $L=\{0,1,\dots,255\}$ con el orden usual: $0 \leq 1 \leq \dots \leq 255$.

Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}^2$ y que representamos mediante:



Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y) \ \forall (x,y) \in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $' : L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A \in L^E$:

$$A'(x,y) = (255 - A(x,y)) \ (\forall (x,y) \in E).$$

Sea $((L^E,\leq),')$ el álgebra determinada por:

1. El retículo distributivo $(L^E,\leq)$ de imágenes A,B,... binarias o con tonos de grises incluidas en E con el orden usual:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x,y) \leq B(x,y)\ \forall (x,y)\in E),$$

y

2. La aplicación involutiva $':L^E \rightarrow L^E$ (negación) tal que, si $A\in L^E$:

$A'(x,y) = (255 - A(x,y))\ (\forall (x,y)\in E)$.

Sea $\mathcal{L}$ un subconjunto de L^E tal que

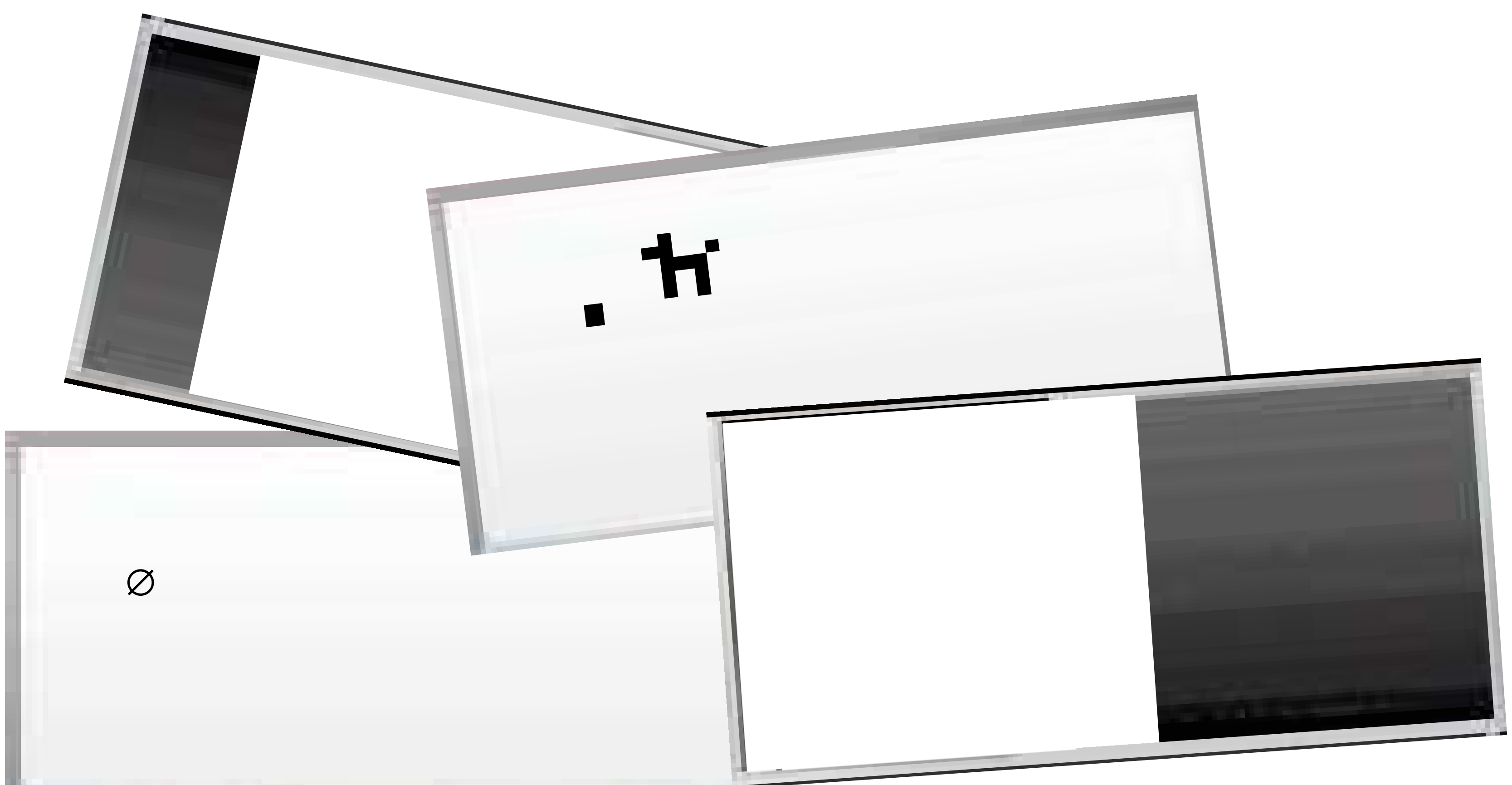
3. $\mathcal{L}$ es cerrado para la negación:

Si $X'\in L^E$ representa el "negativo" de $X\in L^E$ y $\mathcal{L}'=\{A' / A\in \mathcal{L}\}$ entonces $\mathcal{L}'\subseteq \mathcal{L}$.

4. Con la restricción del orden usual $\leq$ en L^E:

El par $(\mathcal{L},\leq)$ es un $\{\emptyset,E\}$-subrretículo de $(L^E,\leq)$. (Que será distributivo).

Ejemplo de subconjunto $\mathscr{L} \subseteq L^E$:

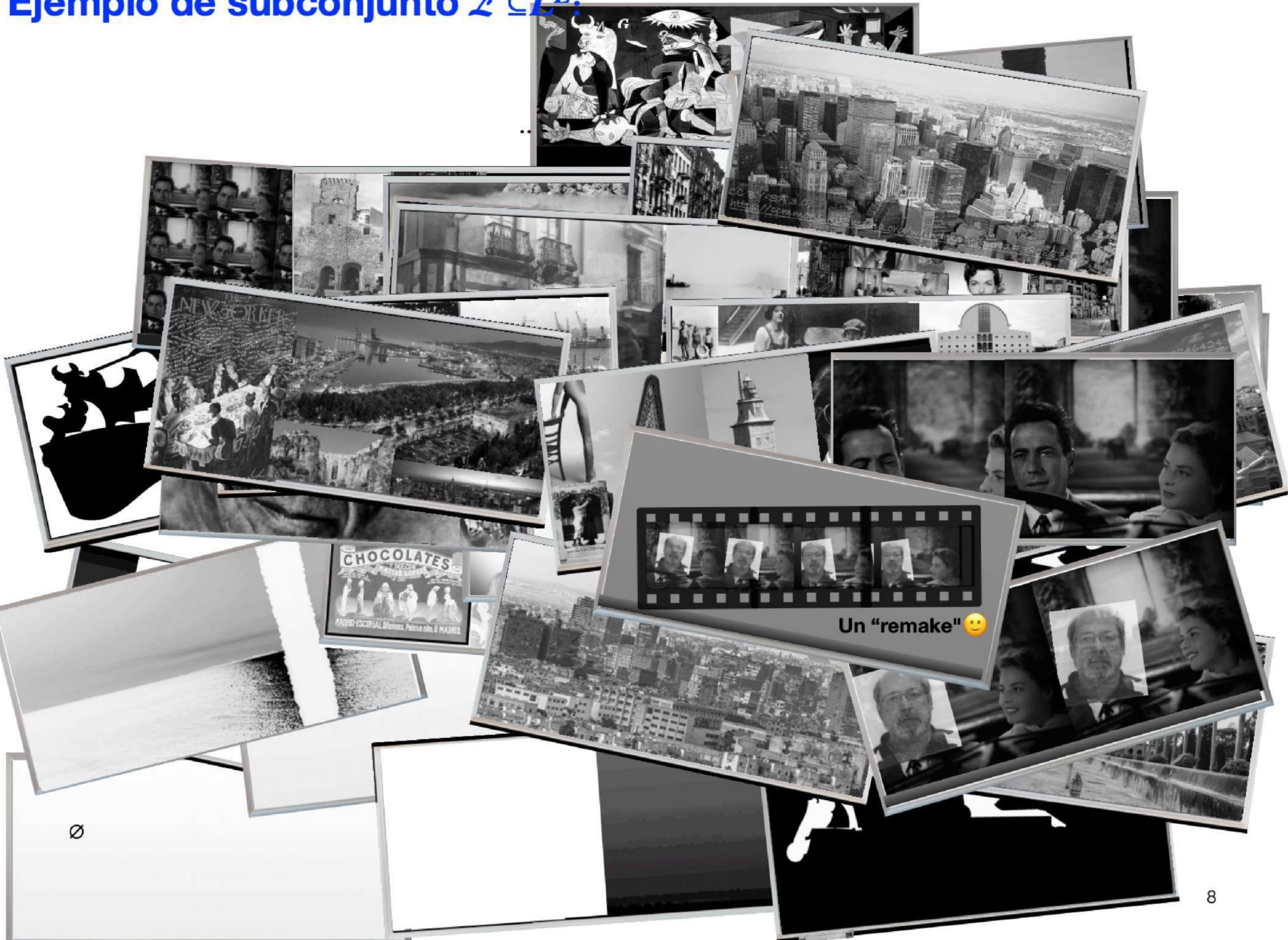


Ejemplo de subconjunto $\mathcal{L} \subseteq L^E$:

Ejemplo de subconjunto $\mathscr{L} \subseteq L^E$:

Ejemplo de subconjunto $\mathscr{L} \subseteq L^E$:

Ejemplo de subconjunto $\mathscr{L} \subseteq L^E$:



Ejemplo de subconjunto $\mathcal{L} \subseteq L^E$:

Ejemplo de subconjunto $\mathcal{L} \subseteq L^E$:

Ejemplo de subconjunto $\mathscr{L} \subseteq L^E$:

Retículo ($\mathcal{L}$, $\leq$):

Supondremos que $\mathcal{L}$ es tal que:

El par $(\mathcal{L},\leq)$ es un $\{\emptyset,E\}$-subrretículo de $(L^E,\leq)$. (Que será distributivo).

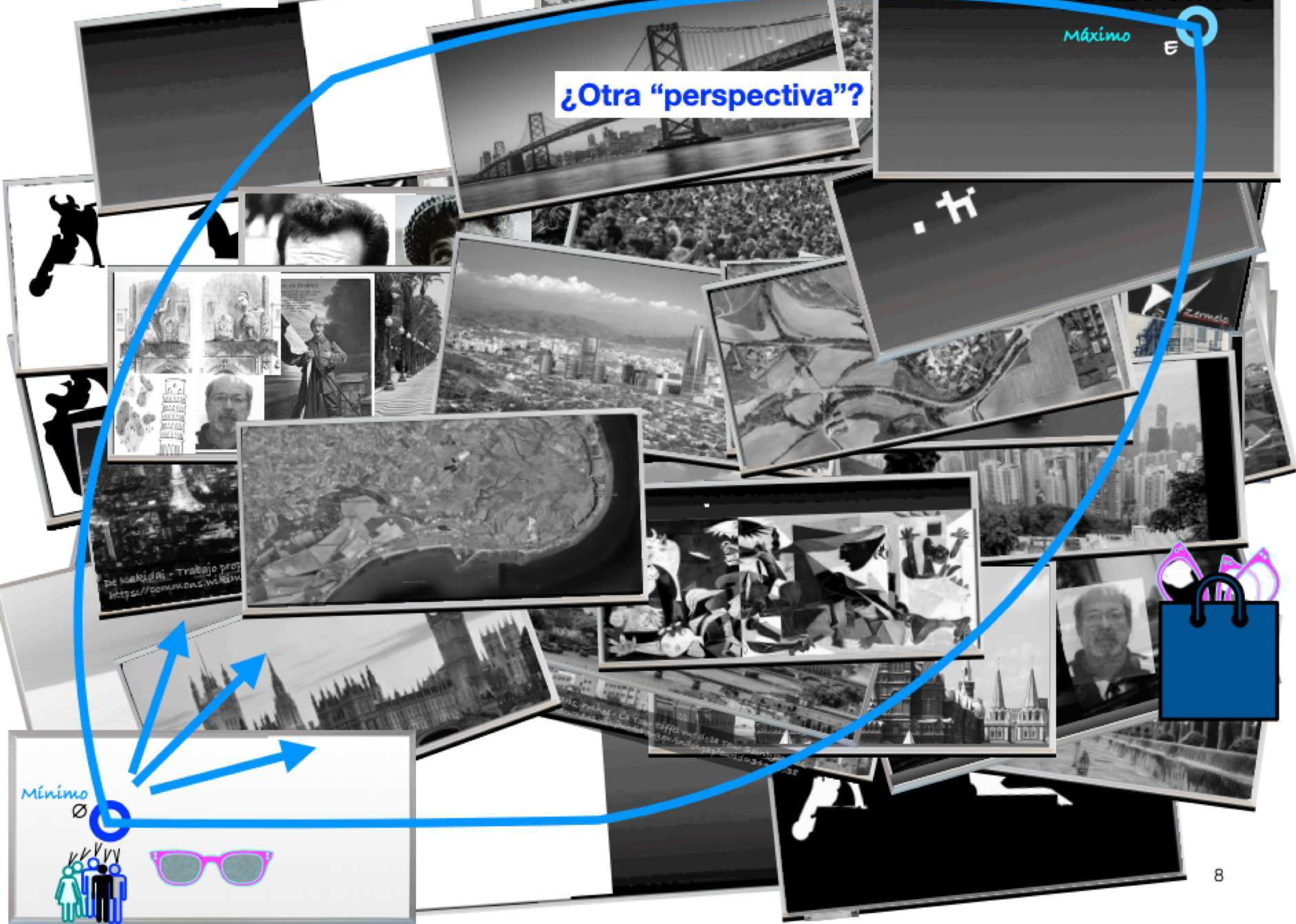
Y es cerrado para la negación: $A\in\mathcal{L}\Rightarrow A'\in\mathcal{L}$.

Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^{\varnothing}$):

Contemplamos este retículo como una "perspectiva desde la imagen en blanco" (conjunto vacío): (($\sqsubseteq^{\varnothing}$)$\overset{\text{def}}{=}$($\leq$)).

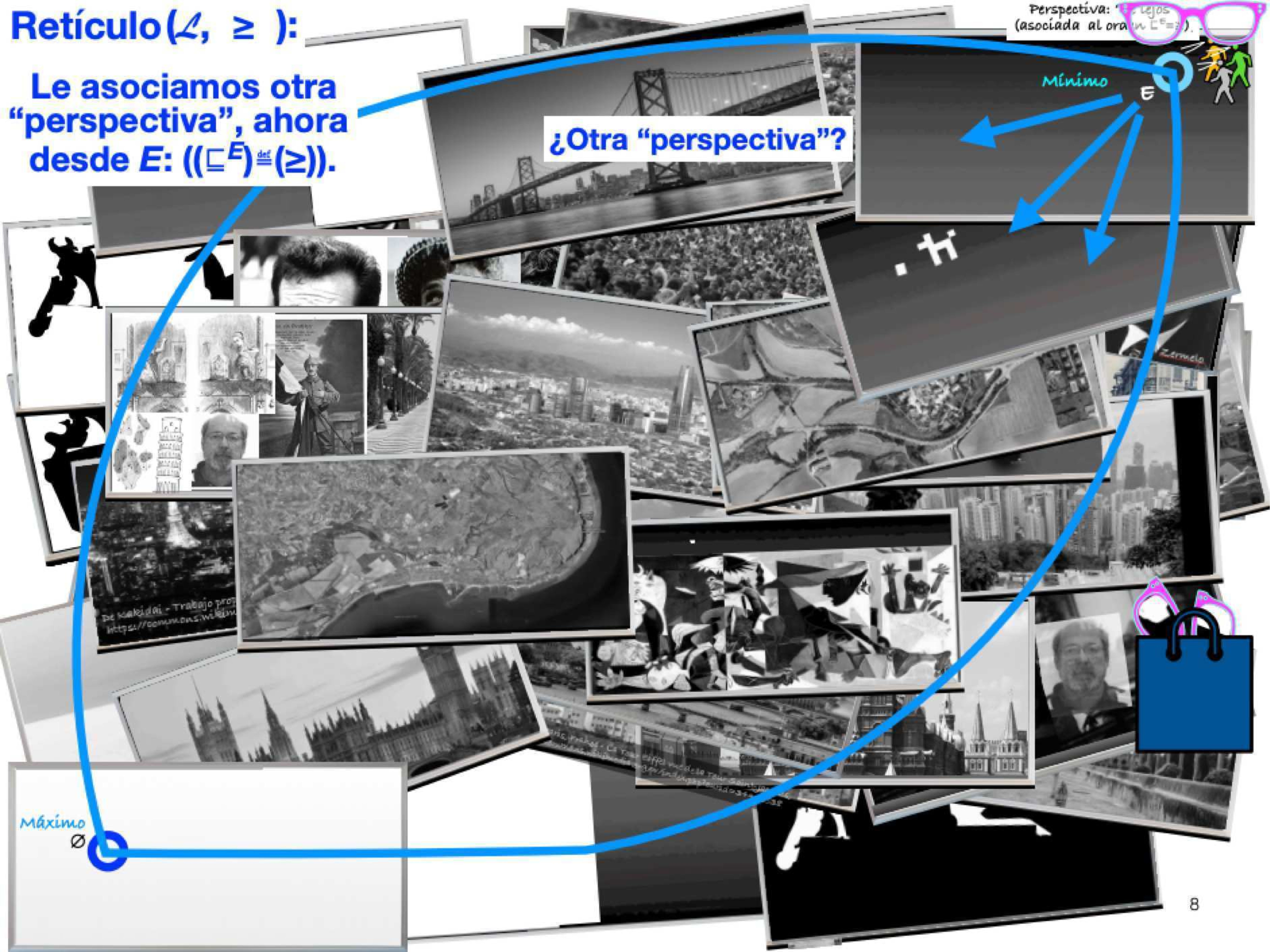
Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^{\varnothing}$):

Retículo ($\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\varnothing}$):



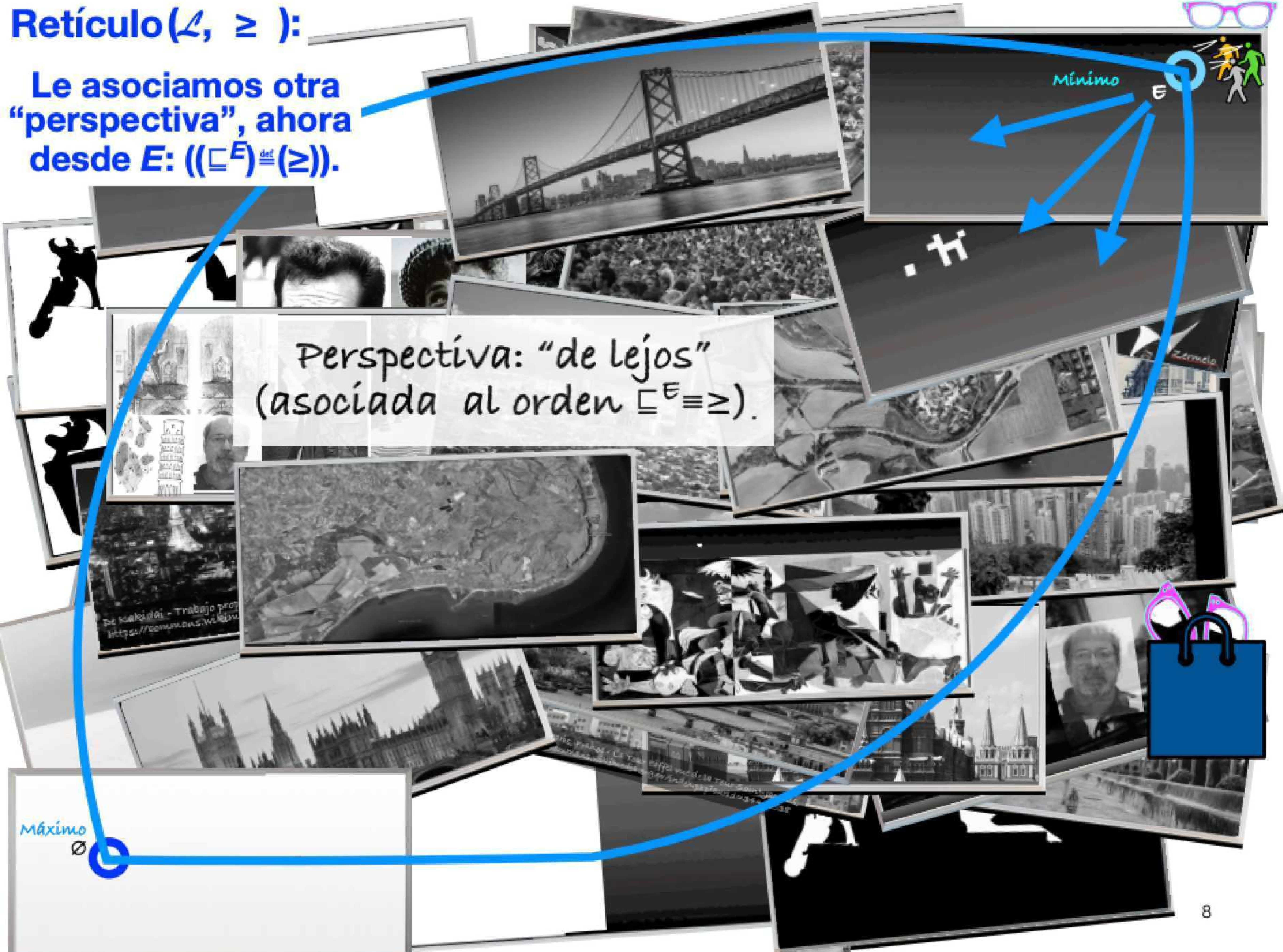
Retículo ($\mathcal{L}$, $\geq$):

Le asociamos otra "perspectiva", ahora desde E: $((\sqsubseteq^E) \stackrel{\text{def}}{=} (\geq))$.



Retículo($\mathcal{L}$, $\geq$):

Le asociamos otra "perspectiva", ahora desde *E*: (($\sqsubseteq^E$)$\stackrel{\text{def}}{=}$($\geq$)).



Retículo($\mathcal{L}$, $\geq$):

Le asociamos otra "perspectiva", ahora desde E: (($\sqsubseteq^{E}$)$\stackrel{def}{=}$($\geq$)).

Mínimo

E

Está relacionada con los "negativos" A', B',... de las imágenes A, B,...

Perspectiva: "de lejos"
(asociada al orden $\sqsubseteq^{E} \equiv \geq$).

Zermelo

Máximo

$\varnothing$

Retículo ($\mathcal{L}$, $\geq$):

Le asociamos otra "perspectiva", ahora desde *E*: (($\sqsubseteq^E$) $\stackrel{\text{def}}{=}$ ($\geq$)).

Mínimo

E

Está relacionada con los "negativos" *A'*, *B'*,... de las imágenes *A*, *B*,...

Perspectiva: "de lejos"
(asociada al orden $\sqsubseteq^E \equiv \geq$).

Zermelo

Máximo

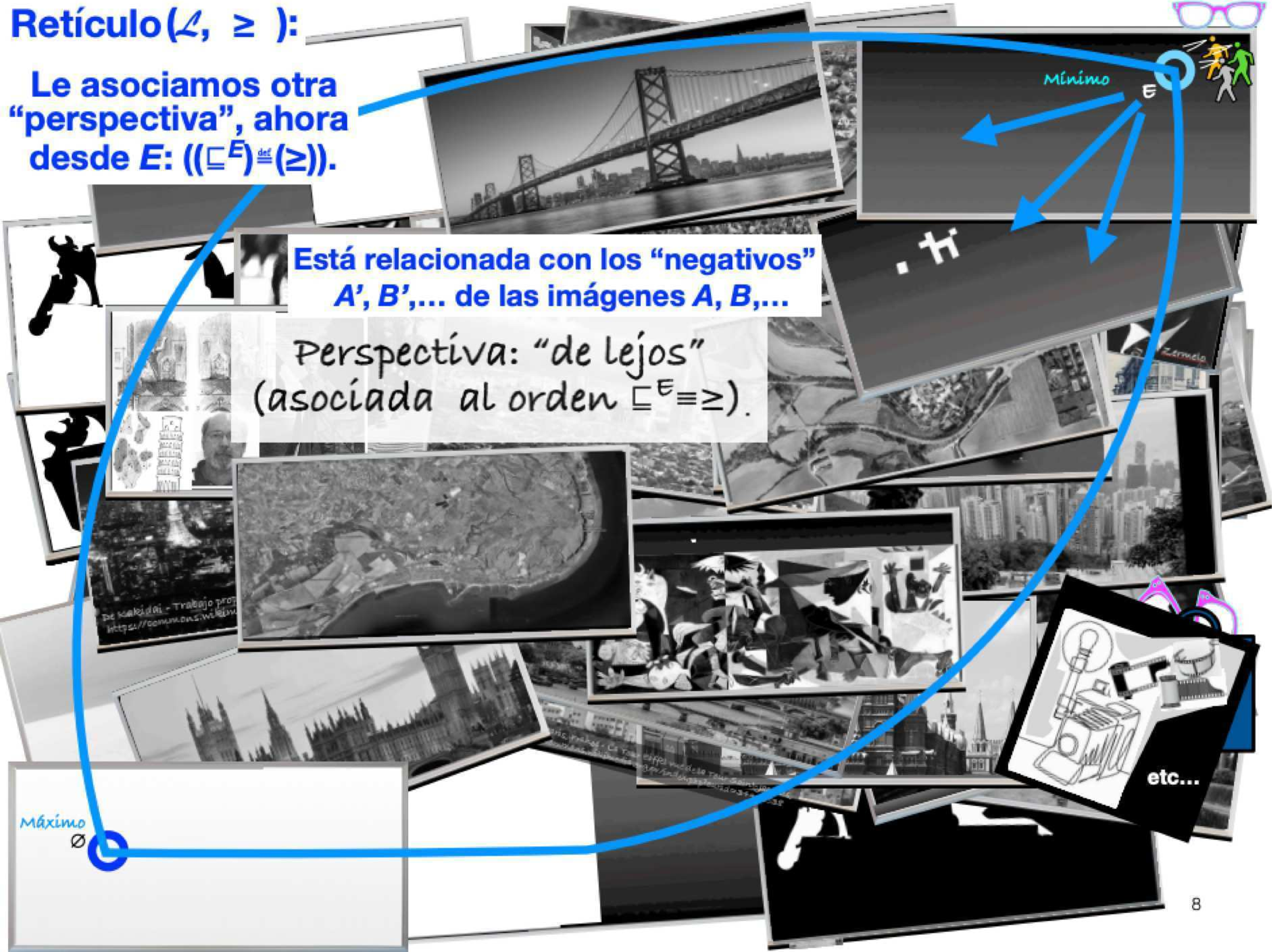
$\emptyset$

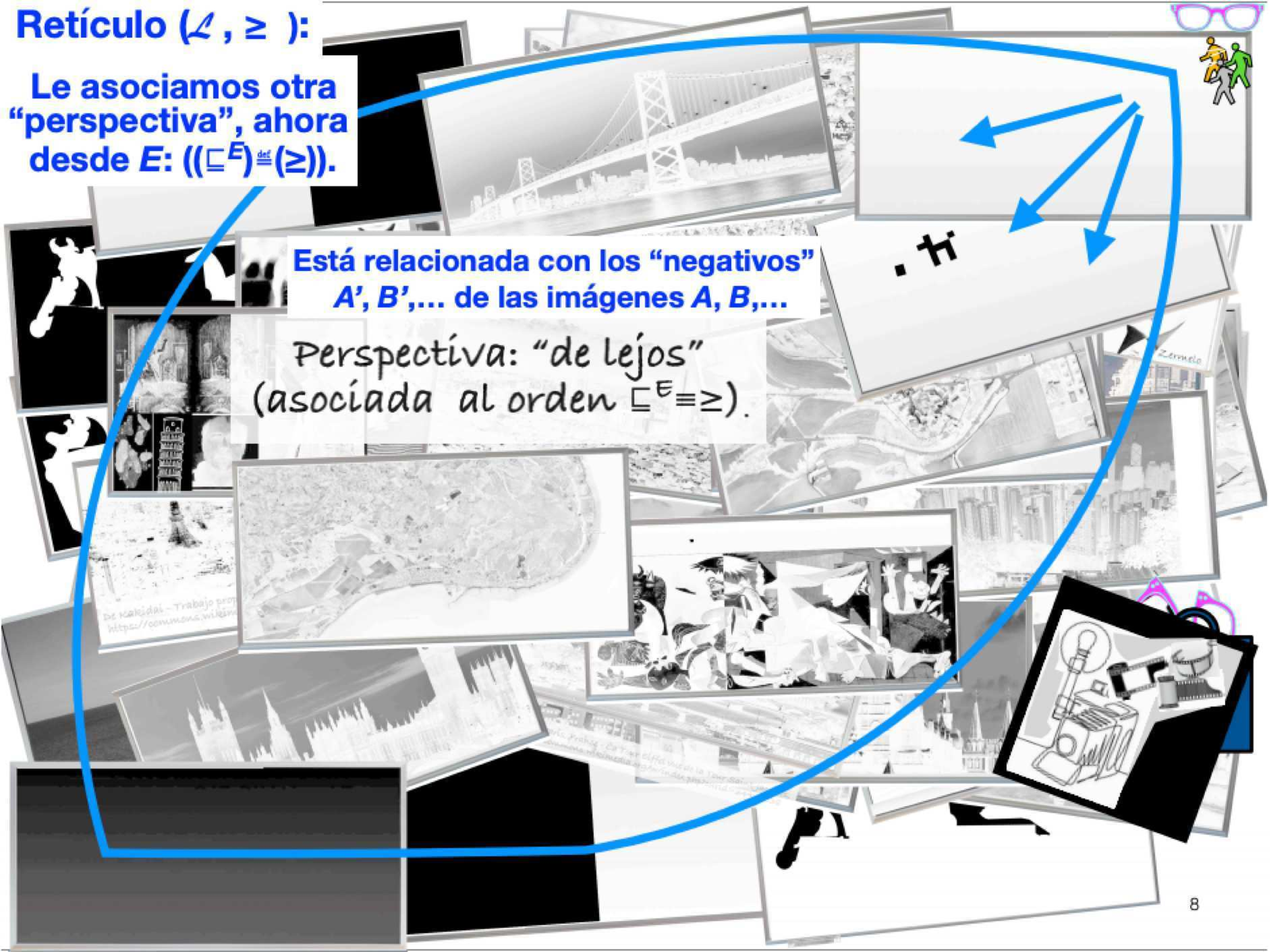
Retículo ($\mathcal{L}$, $\geq$):

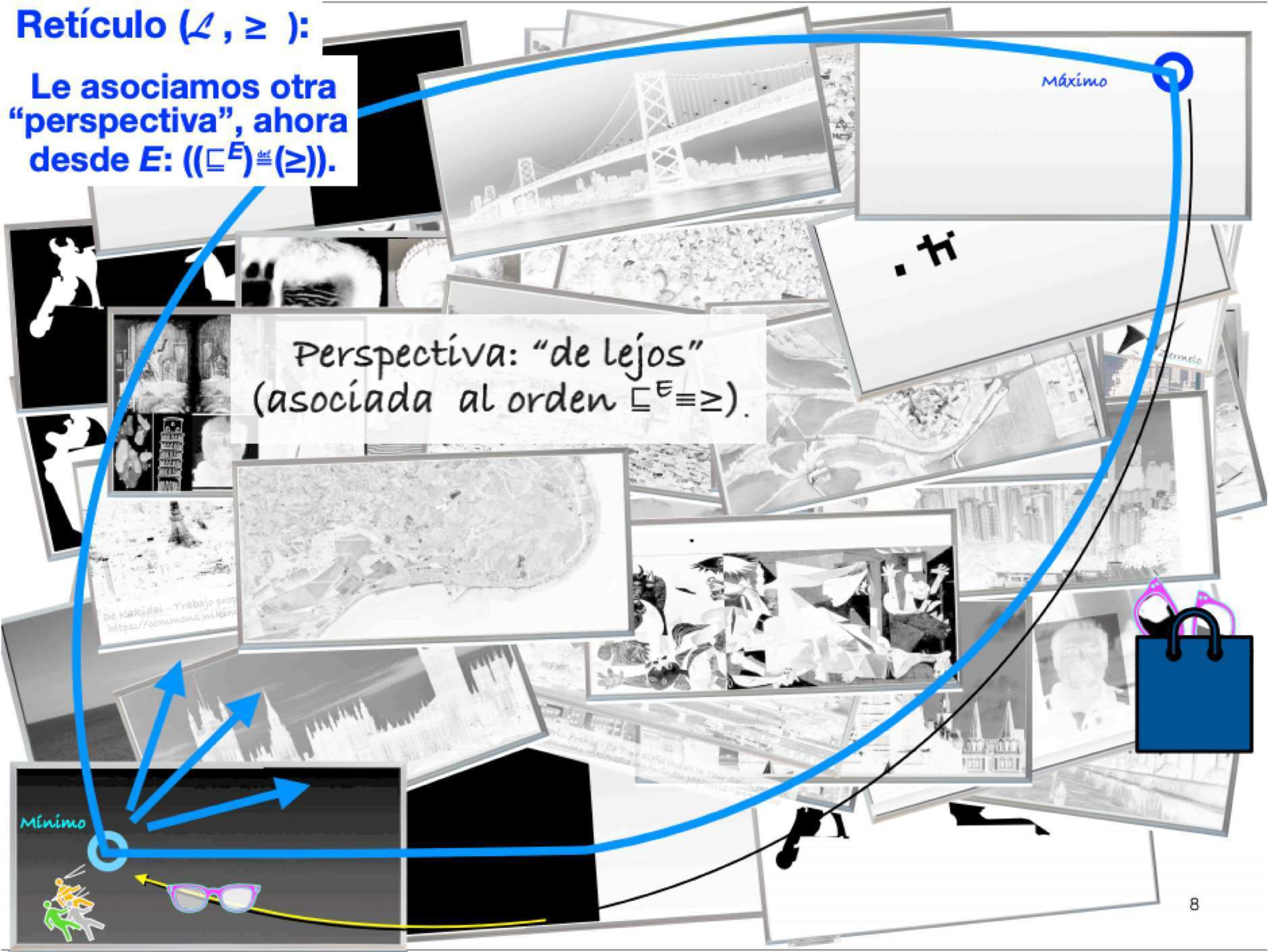
Le asociamos otra “perspectiva”, ahora desde *E*: (($\sqsubseteq^E$) $\stackrel{\text{def}}{=}$ ($\geq$)).

Está relacionada con los “negativos” *A’*, *B’*,… de las imágenes *A*, *B*,…

Perspectiva: “de lejos” (asociada al orden $\sqsubseteq^E \equiv \geq$).




Retículo ($\mathcal{L}$, ≥):
Le asociamos otra “perspectiva”, ahora desde *E*: $((\sqsubseteq^E) \stackrel{\text{def}}{=} (\geq))$.
Está relacionada con los “negativos” *A’*, *B’*,… de las imágenes *A*, *B*,…
Perspectiva: “de lejos” (asociada al orden $\sqsubseteq^E \equiv \geq$).
Zermelo
De Kakidai - Trabajo propio, https://commons.wikimedia


Retículo ($\mathcal{L}$, ≥):
Le asociamos otra “perspectiva”, ahora desde E: $((\sqsubseteq^E) \stackrel{\text{def}}{=} (\geq))$.
Perspectiva: “de lejos” (asociada al orden $\sqsubseteq^E \equiv \geq$).
Máximo
Mínimo

Retículo ($\mathcal{L}$, $\geq$):

Le asociamos otra "perspectiva", ahora desde E: $((\sqsubseteq^{E}) \overset{\text{def}}{\equiv} (\geq))$.

Máximo

Perspectiva: "de lejos"
(asociada al orden $\sqsubseteq^{E} \equiv \geq$).

Retículos isomorfos $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\varnothing}) \cong (\mathcal{L}, \sqsubseteq^{E}))$:

Si $\varphi(X) = X' \quad \forall X \in \mathcal{L}$ entonces

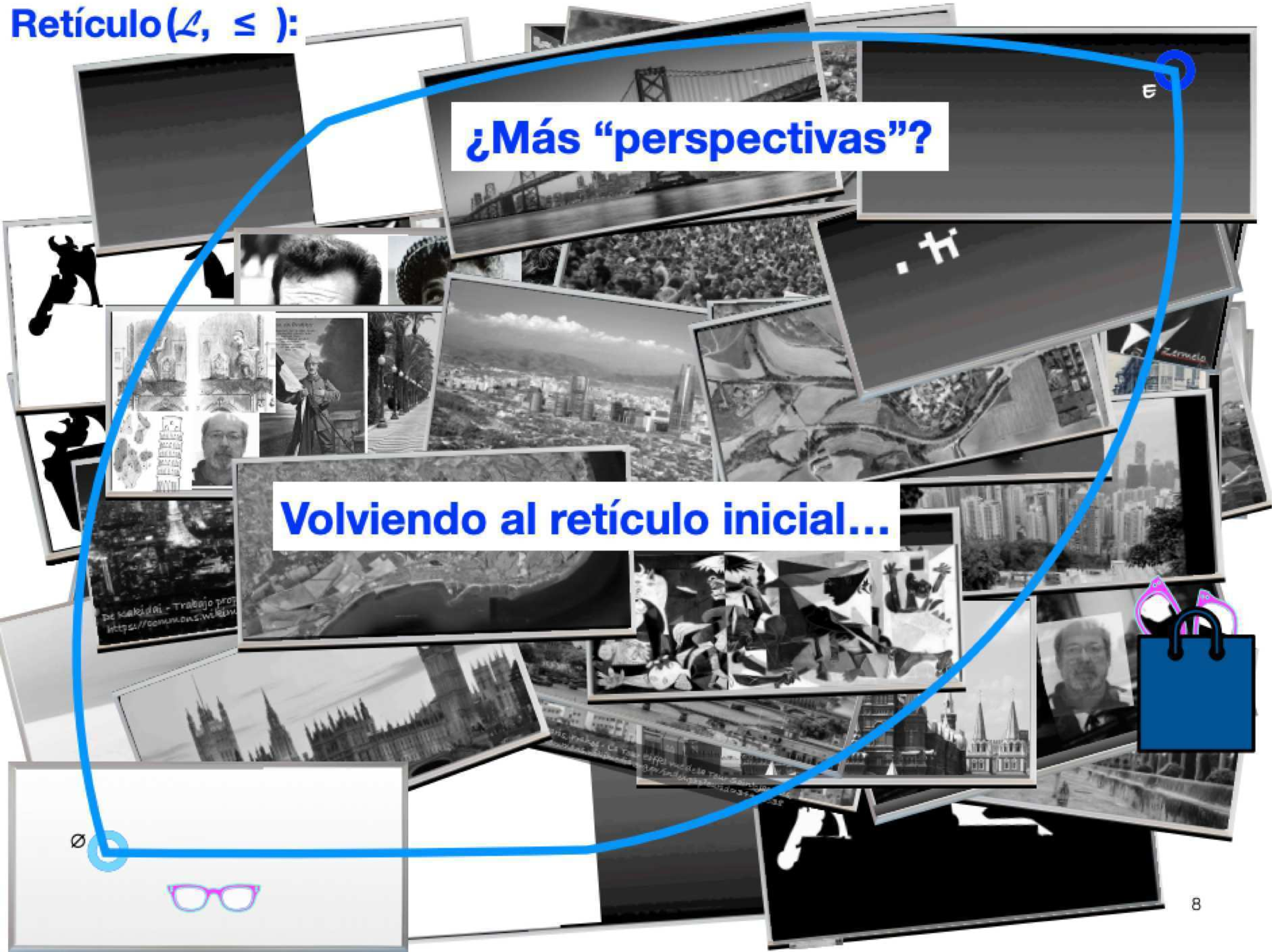
$$(A \sqsubseteq^{\varnothing} B) \Leftrightarrow (A \leq B) \Leftrightarrow (B' \leq A') \Leftrightarrow (A' \sqsubseteq^{E} B') \Leftrightarrow (\varphi(A) \sqsubseteq^{E} \varphi(B))$$

Mínimo

Perspectiva: "de lejos"
(asociada al orden $\sqsubseteq^{E} \equiv \geq$).

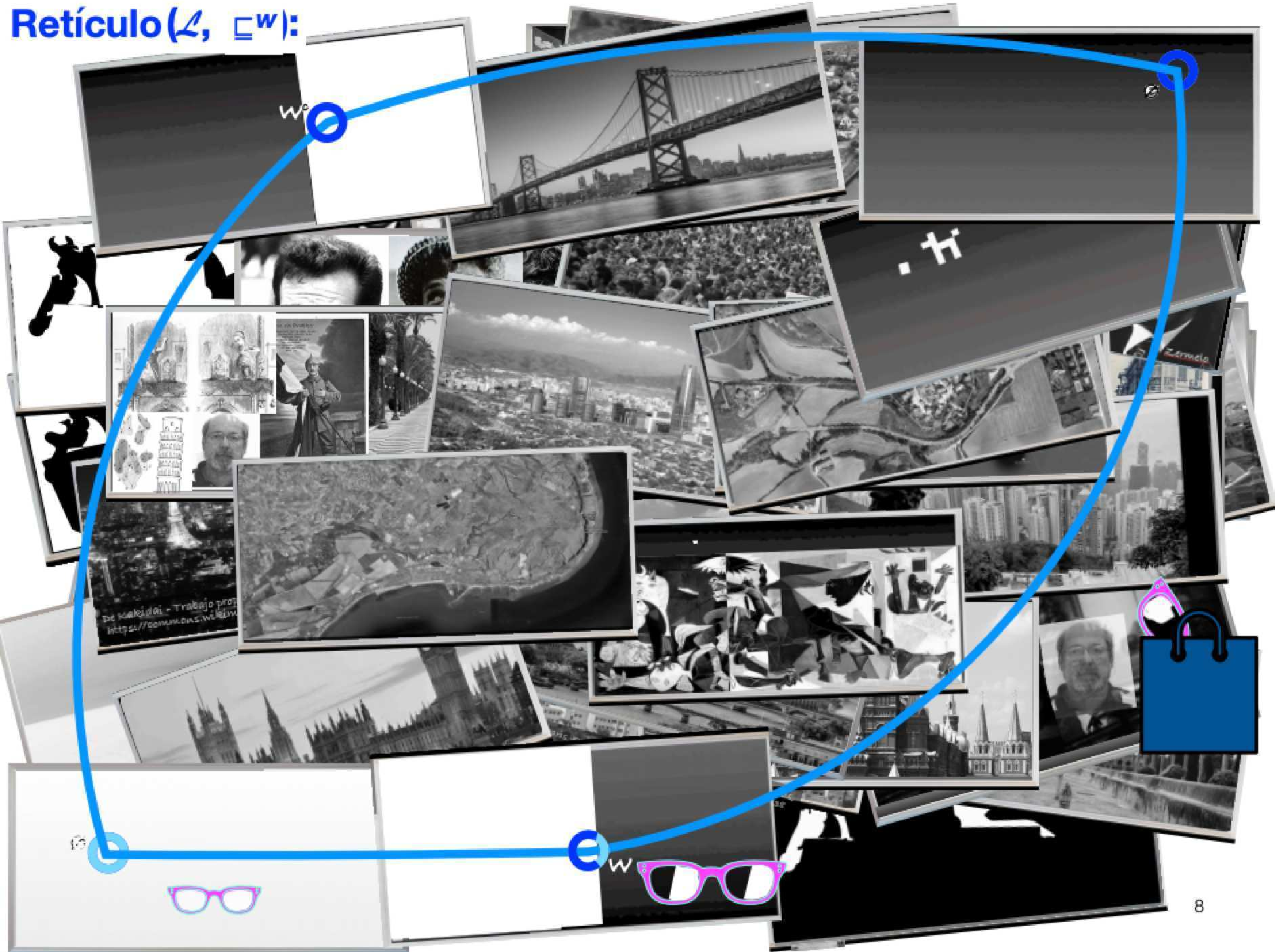
Retículo($\mathcal{L}$, $\leq$):

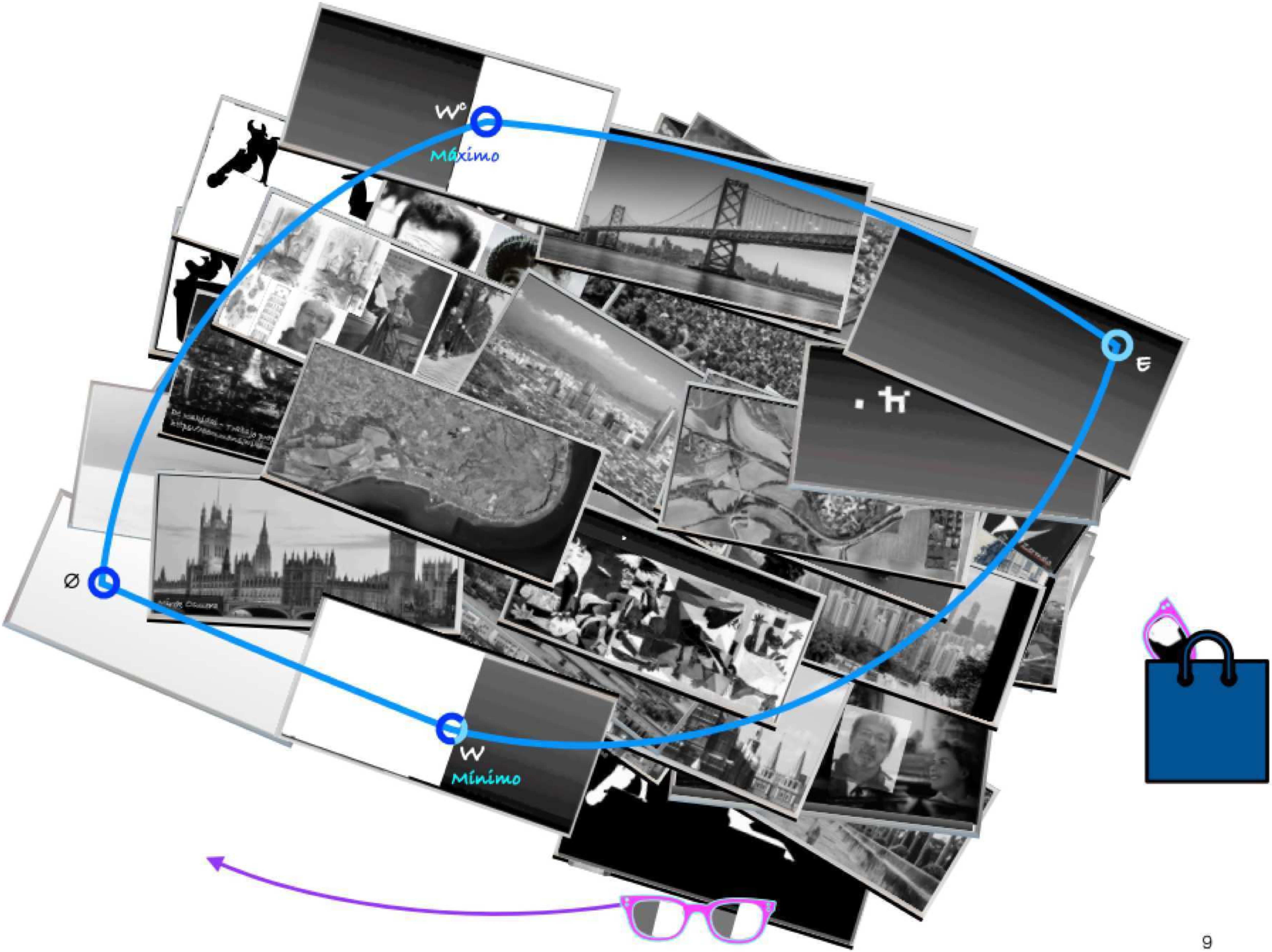
Retículo($\mathcal{L}$, $\leq$):



Retículo($\mathcal{L}$, ≤):

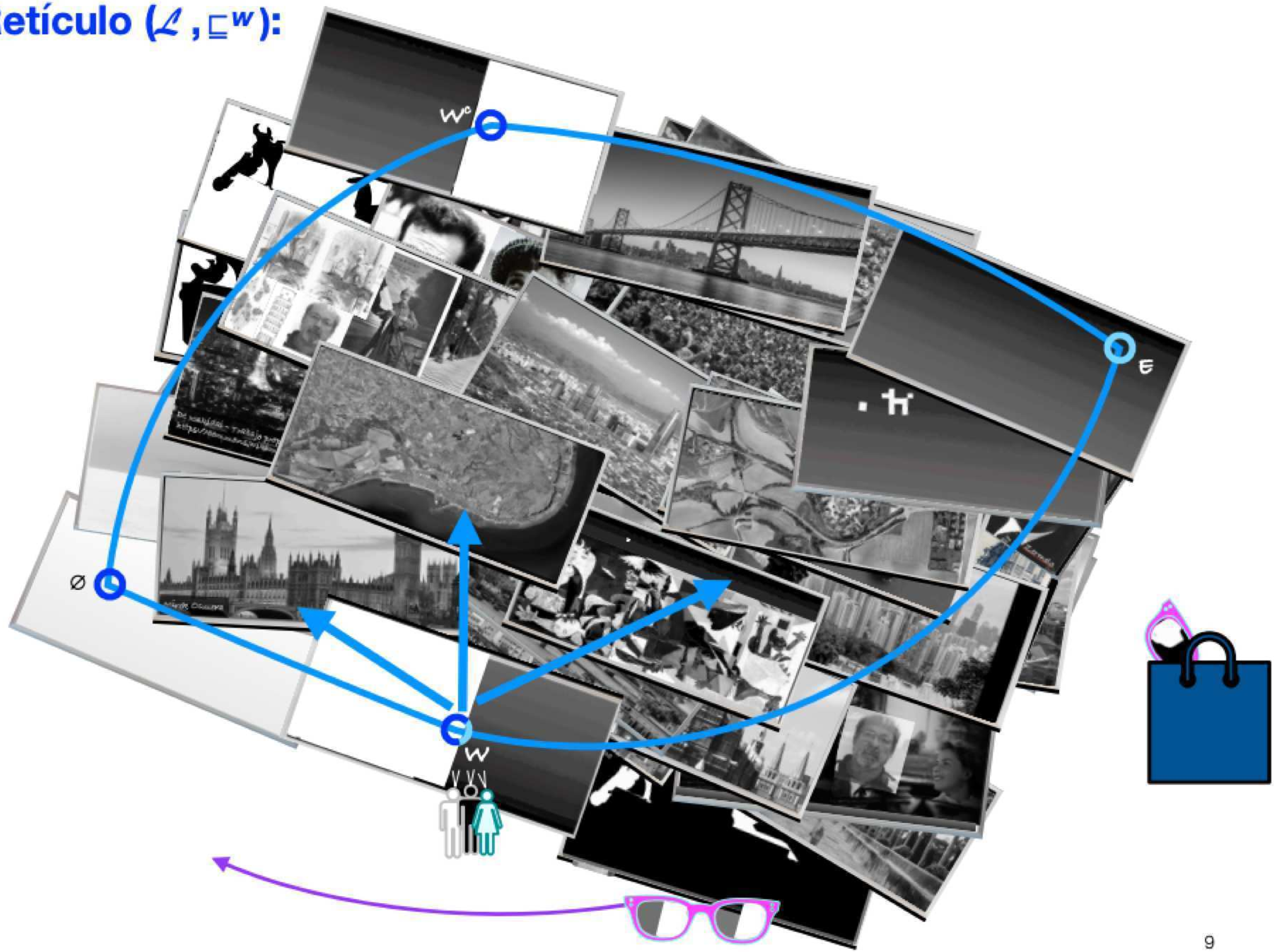
Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^w$):



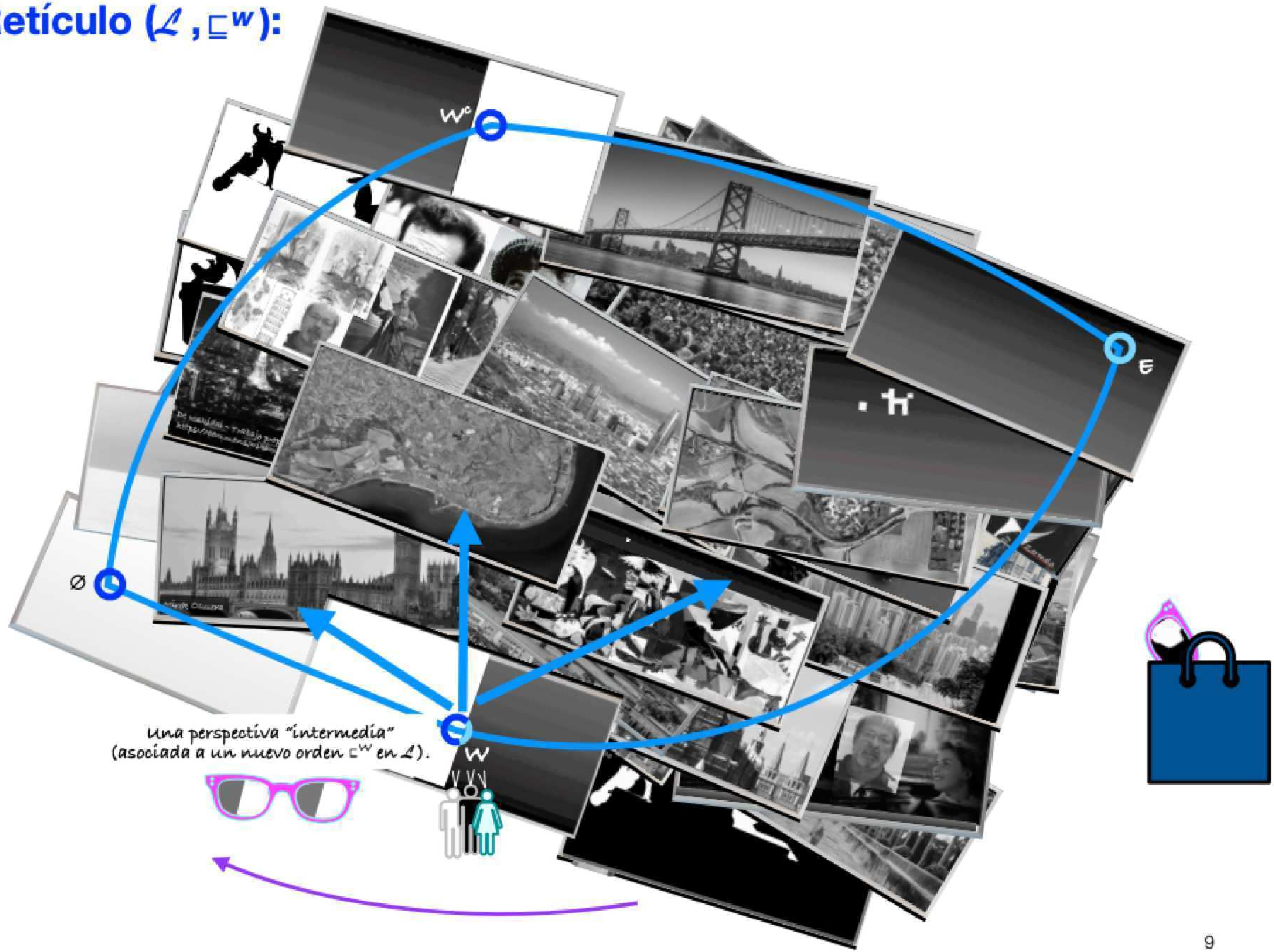


W^c
Máximo
E
Ø
W
Mínimo

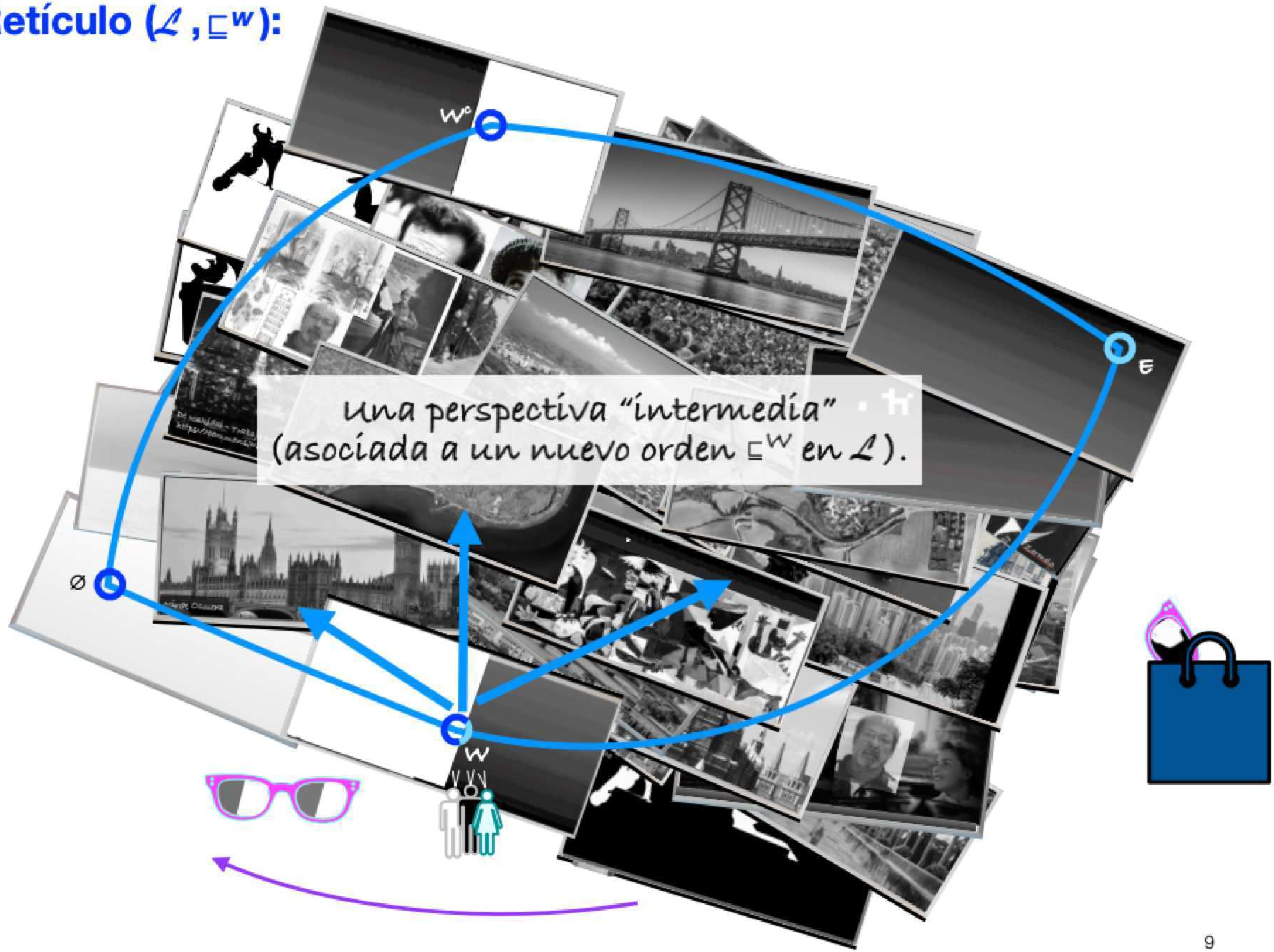
Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^w$):



Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^w$):

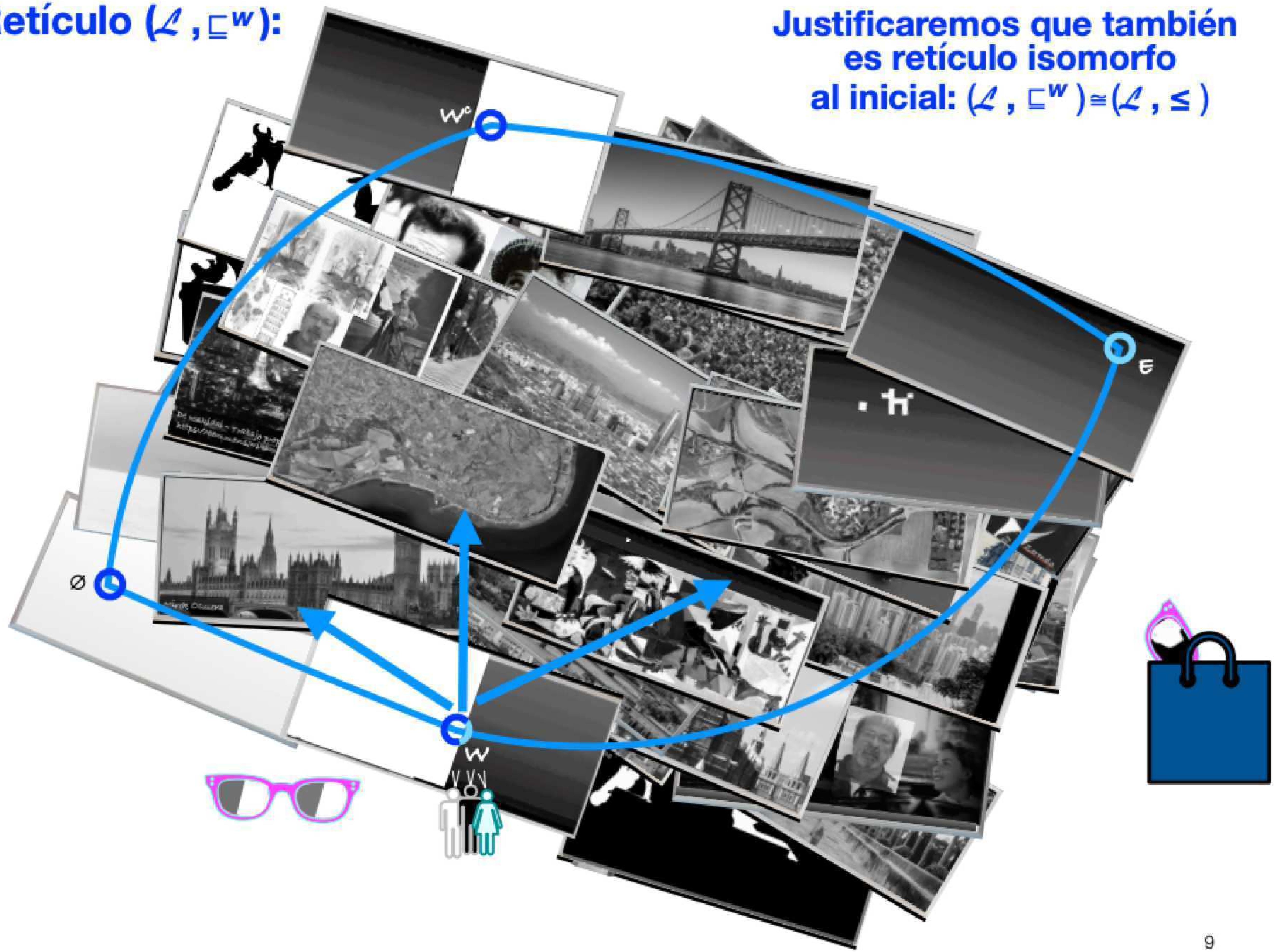


Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^w$):

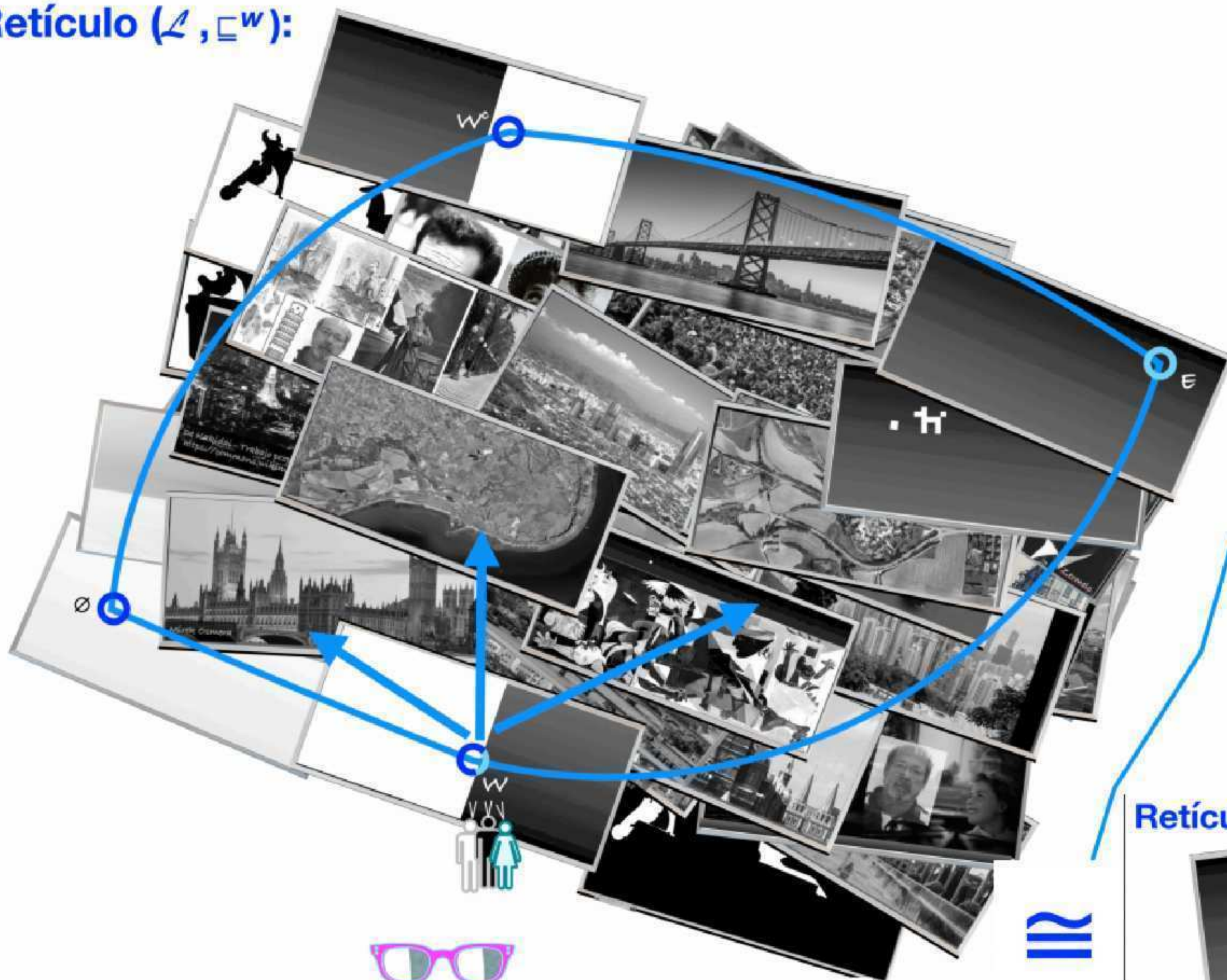


Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$



Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:



Una perspectiva "intermedia"
(asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).

Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

$\cong$

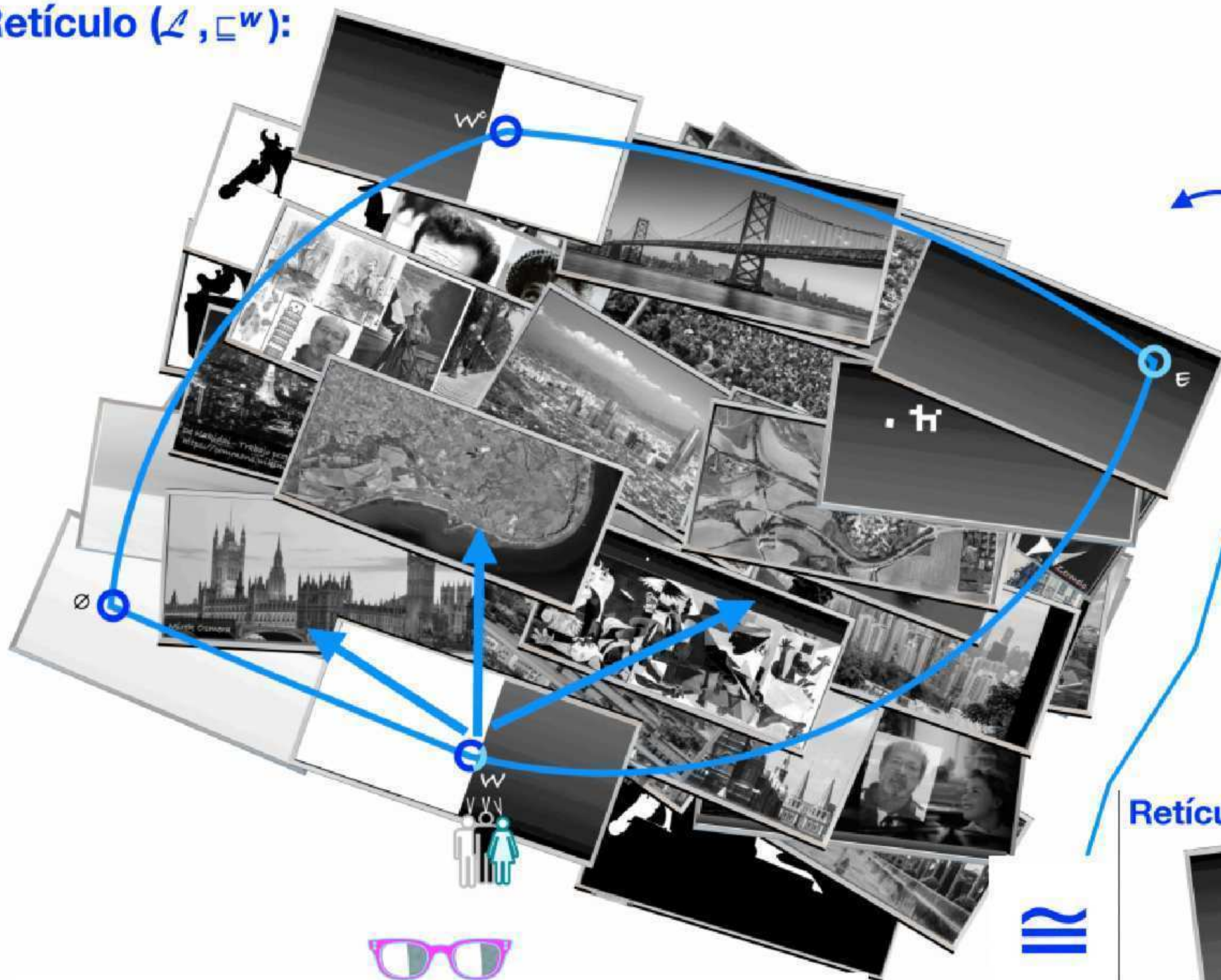
Perspectiva: "de cerca"
(asociada al orden $\sqsubseteq^{\emptyset} \equiv \leq$)

Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\emptyset})$:

Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

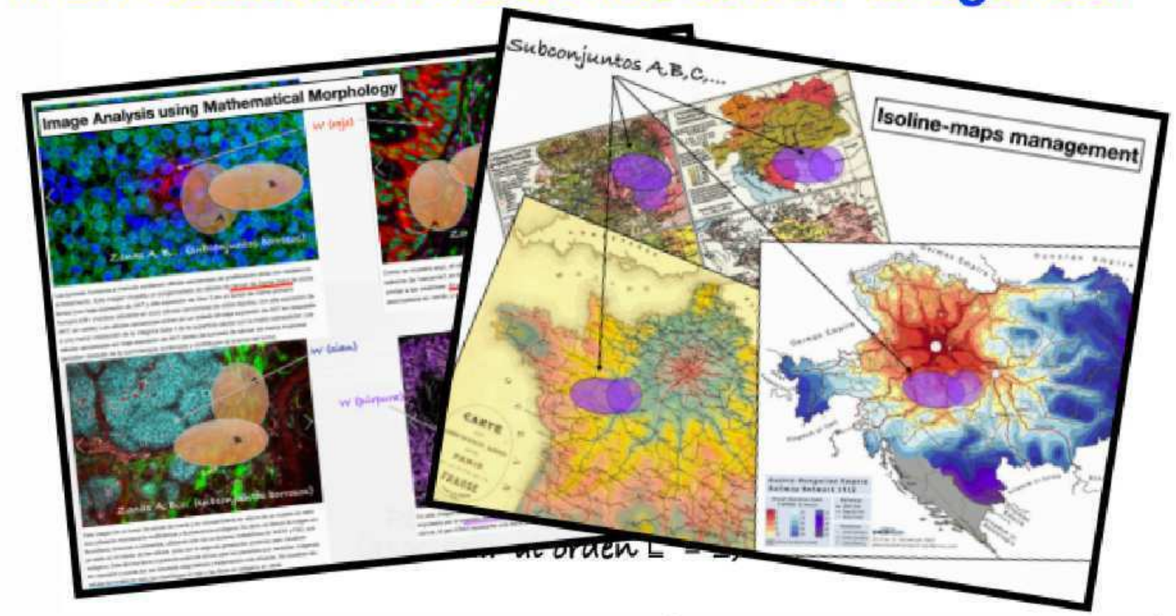
Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^W$):



Una perspectiva "intermedia"
(asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).

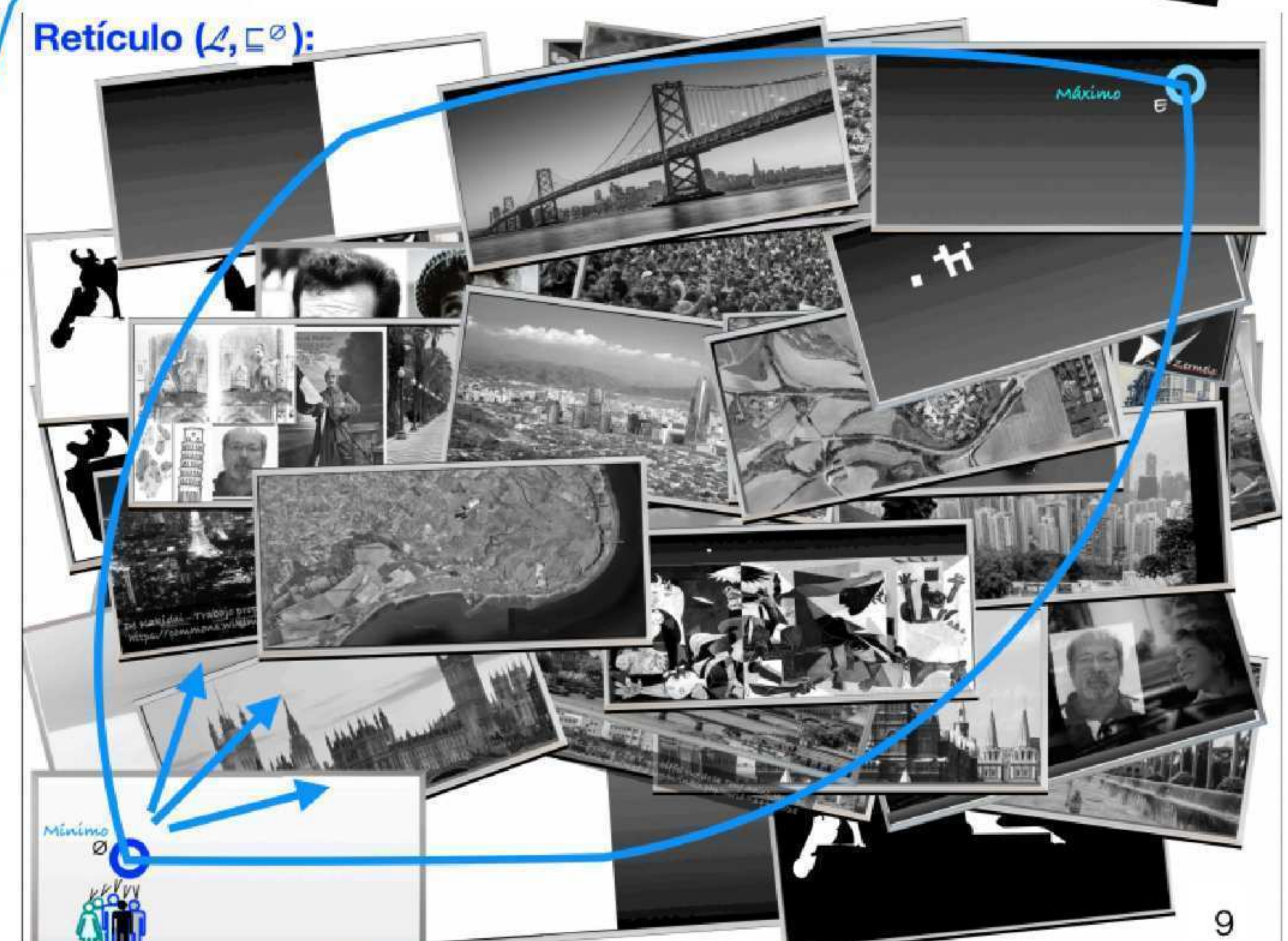
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.



$\cong$

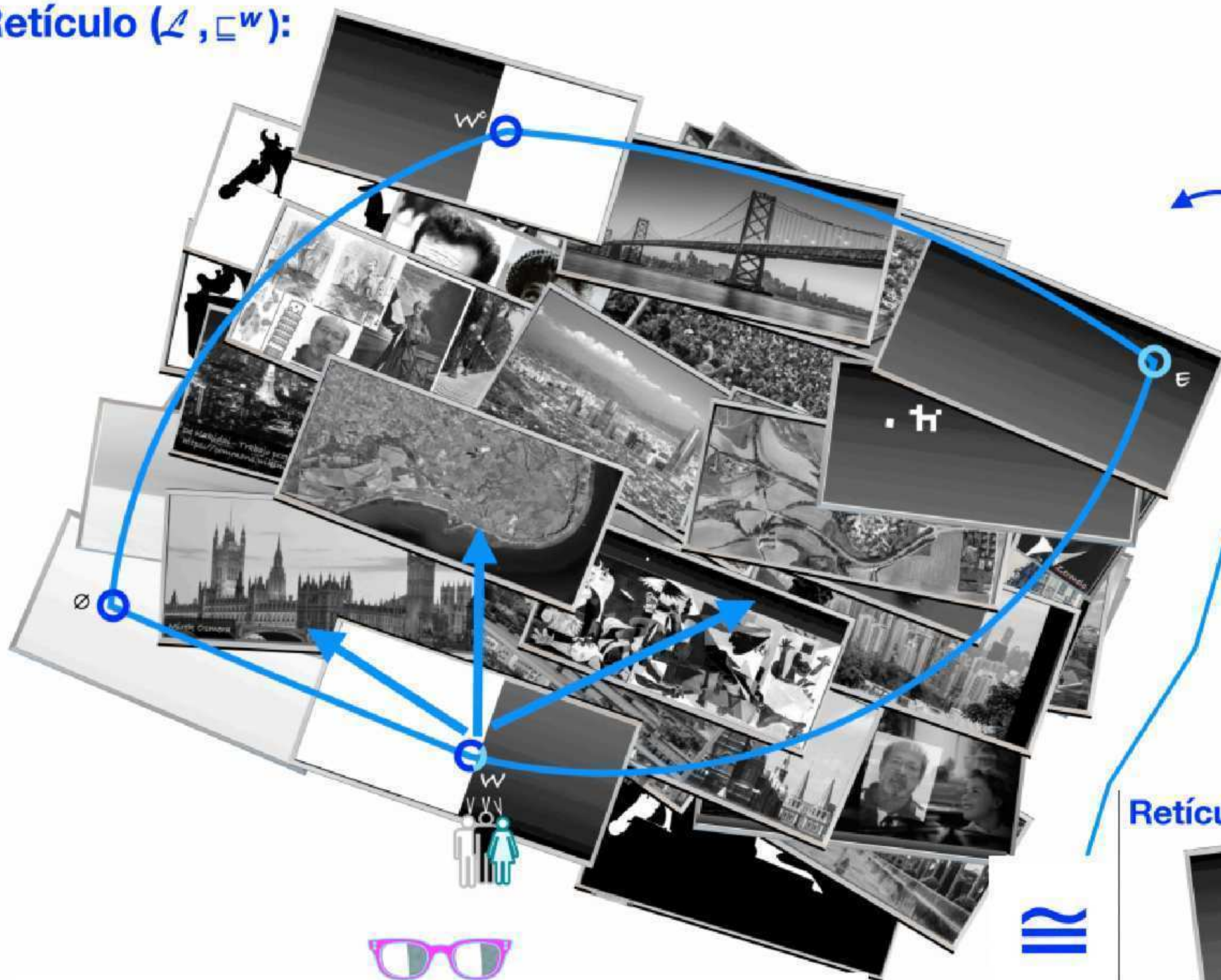
Retículo ($\mathcal{L}$, $\sqsubseteq^\varnothing$):



Existe una involución $\varphi_W: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

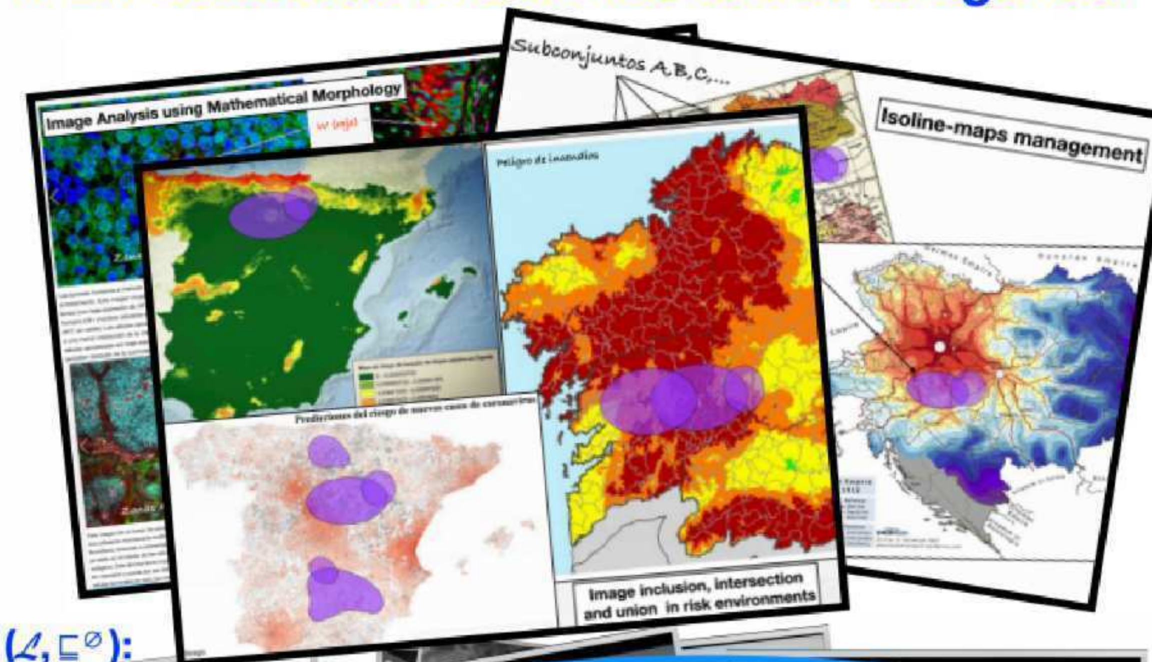
Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:



Una perspectiva "intermedia"
(asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).

Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.



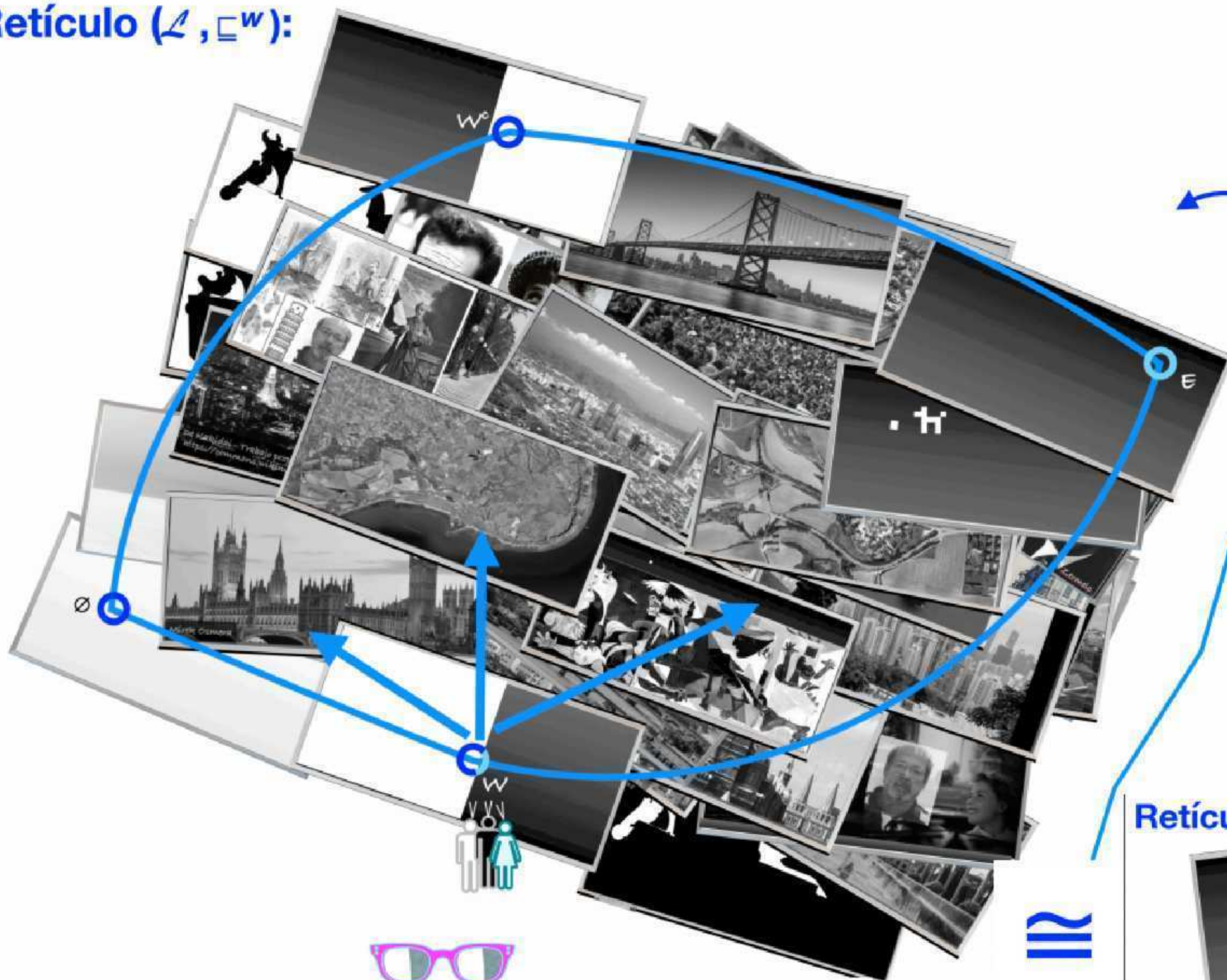
$\cong$

Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\emptyset})$:

Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

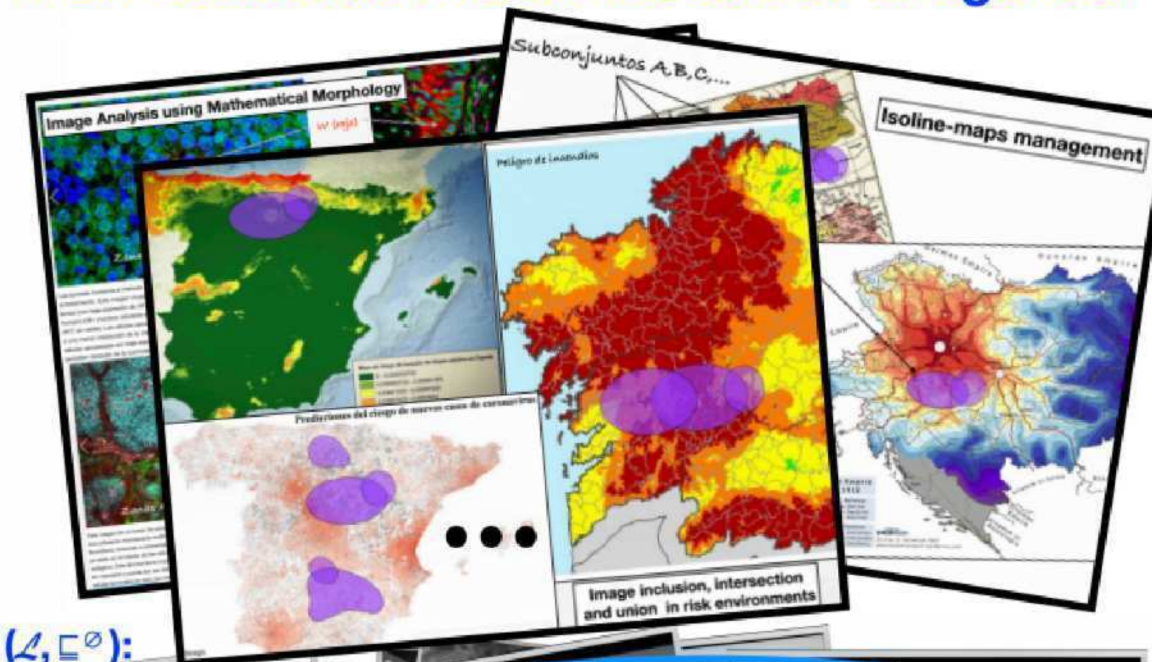
Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:



Una perspectiva "intermedia"
(asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^{W}$ en $\mathcal{L}$).

Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.



$\cong$

Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\varnothing})$:

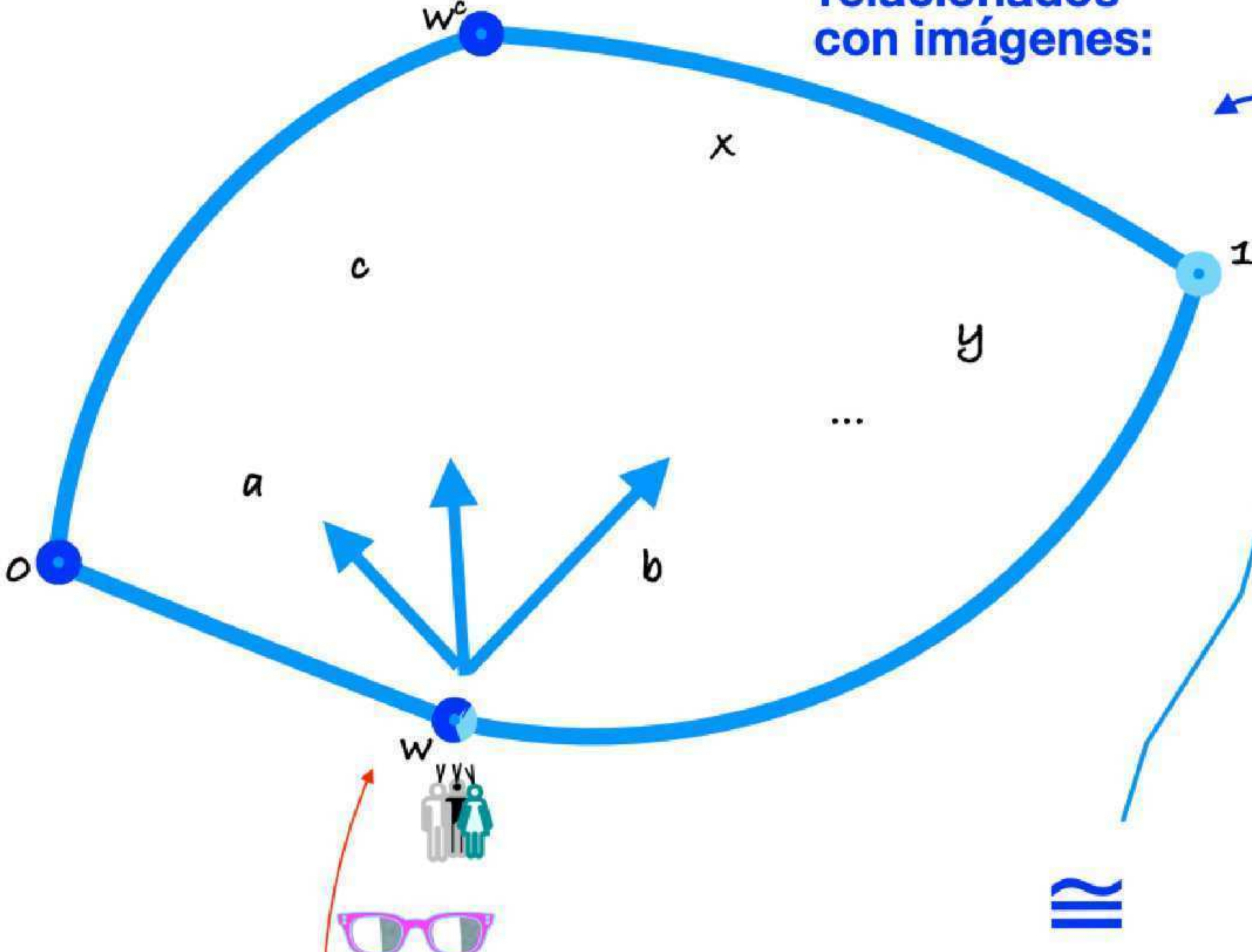
Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B))$$

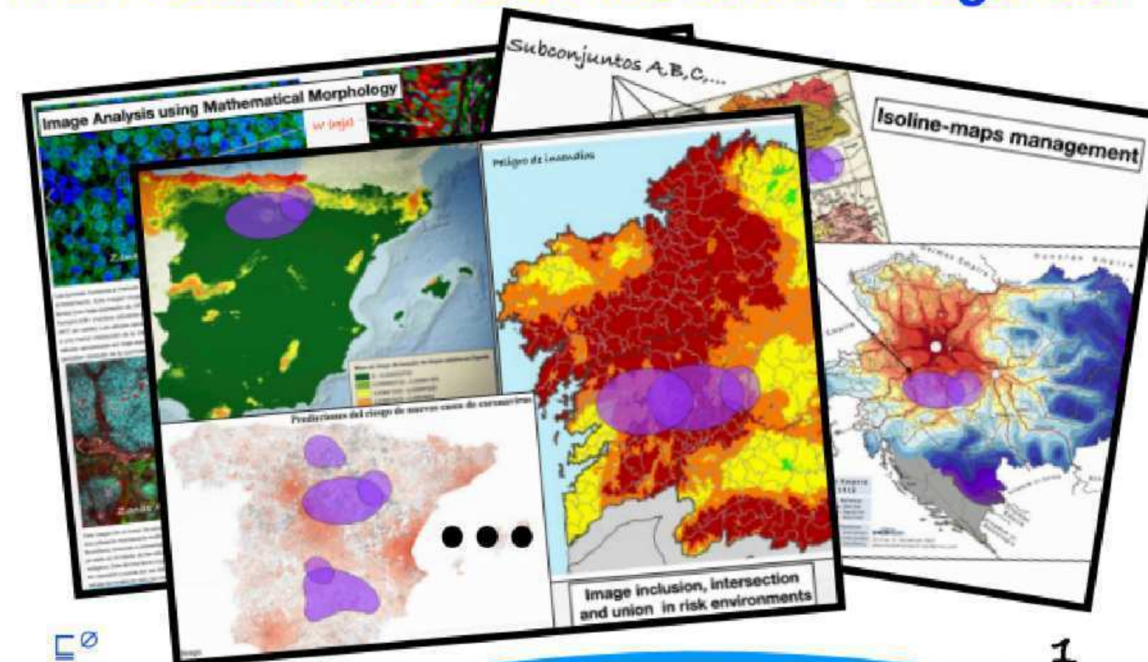
2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:

Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas “perspectivas”:
1. En contextos relacionados con imágenes.

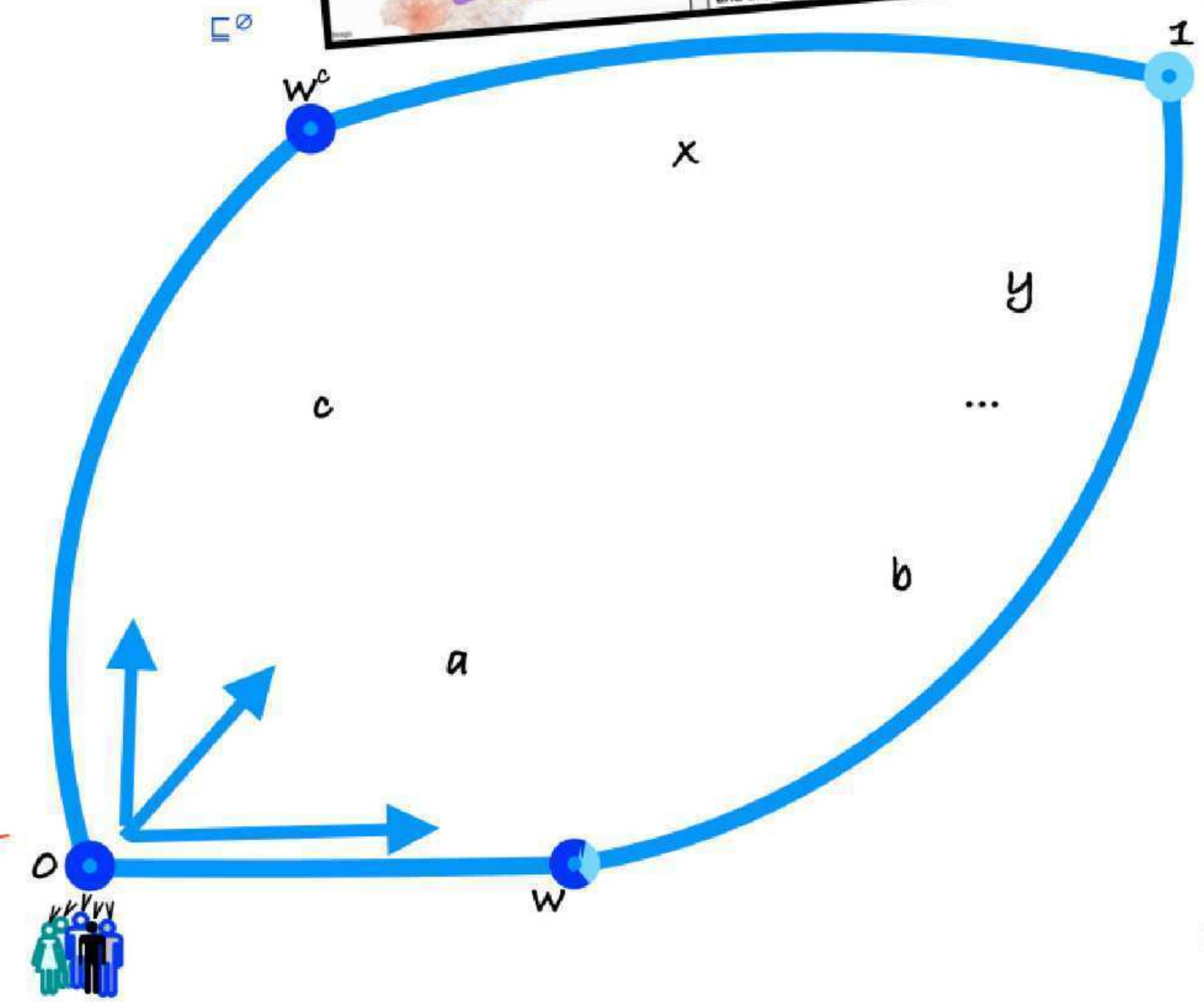


Una perspectiva “intermedia” (asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).



$\sqsubseteq^{\emptyset}$

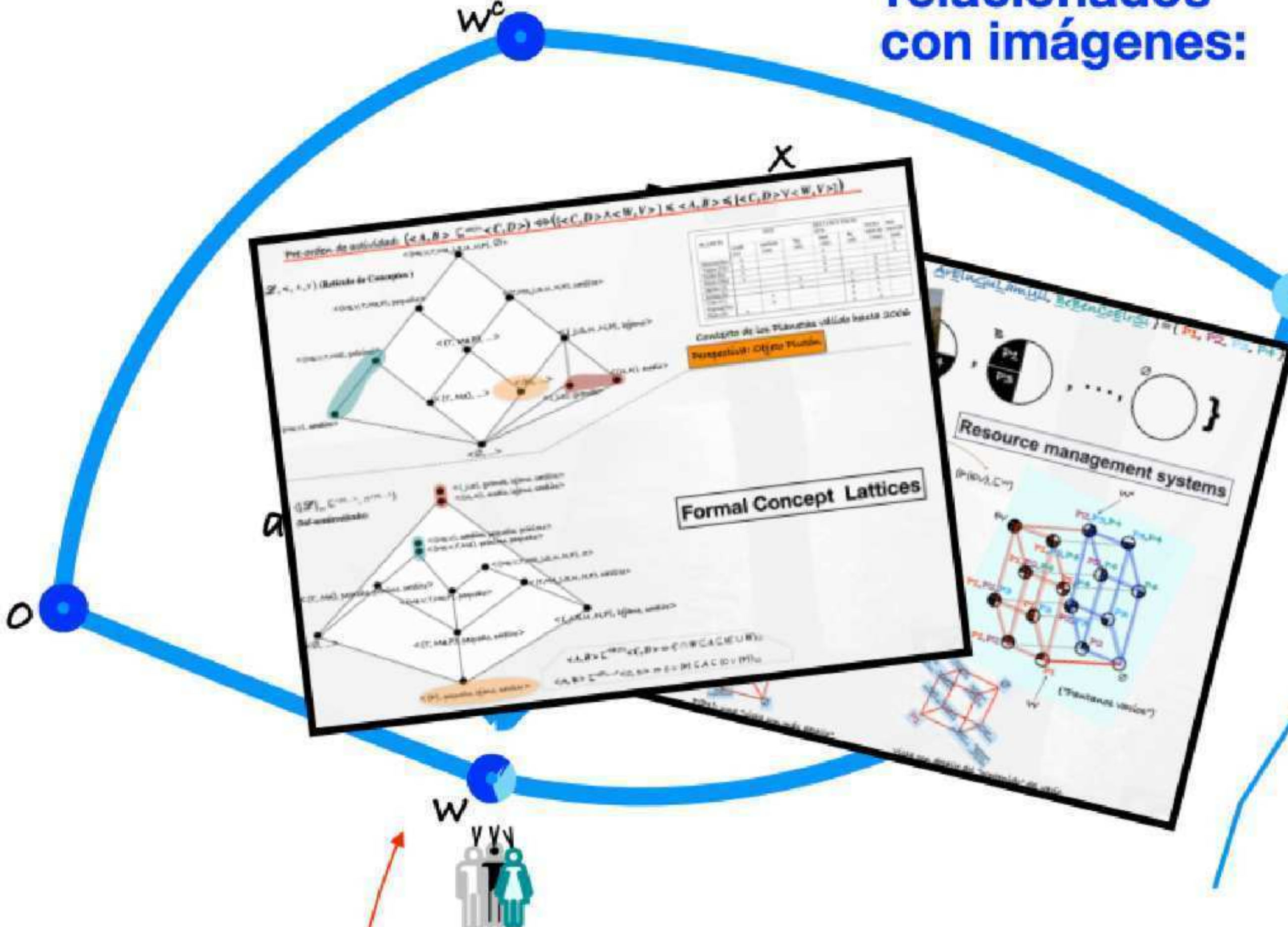
$\cong$



Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:

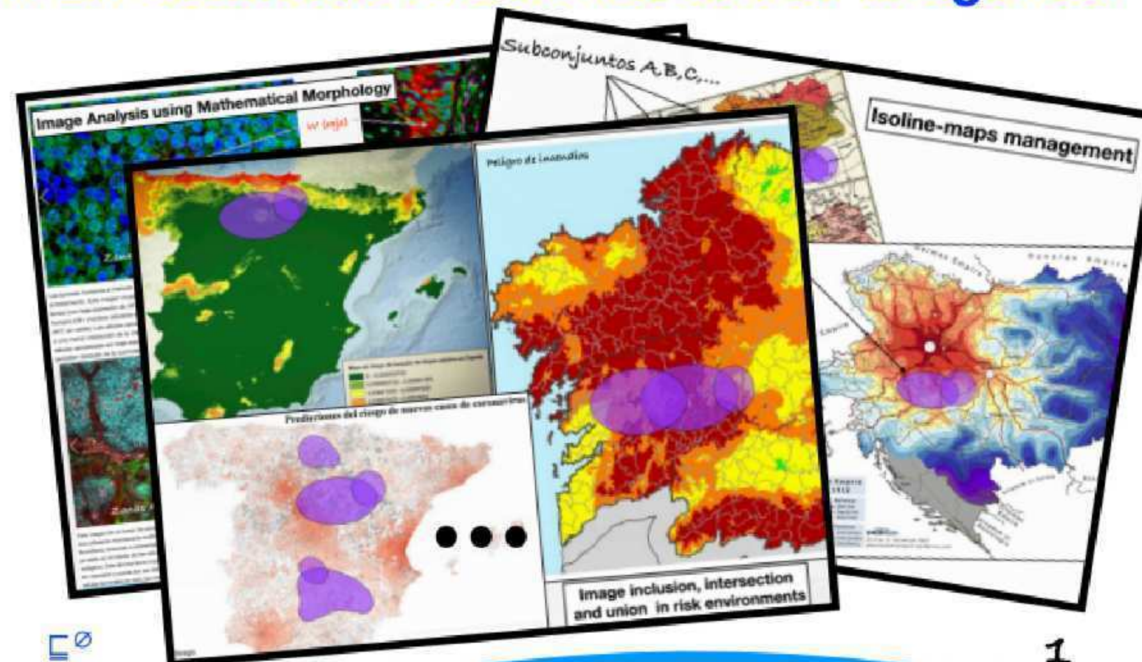


Una perspectiva "intermedia" (asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).

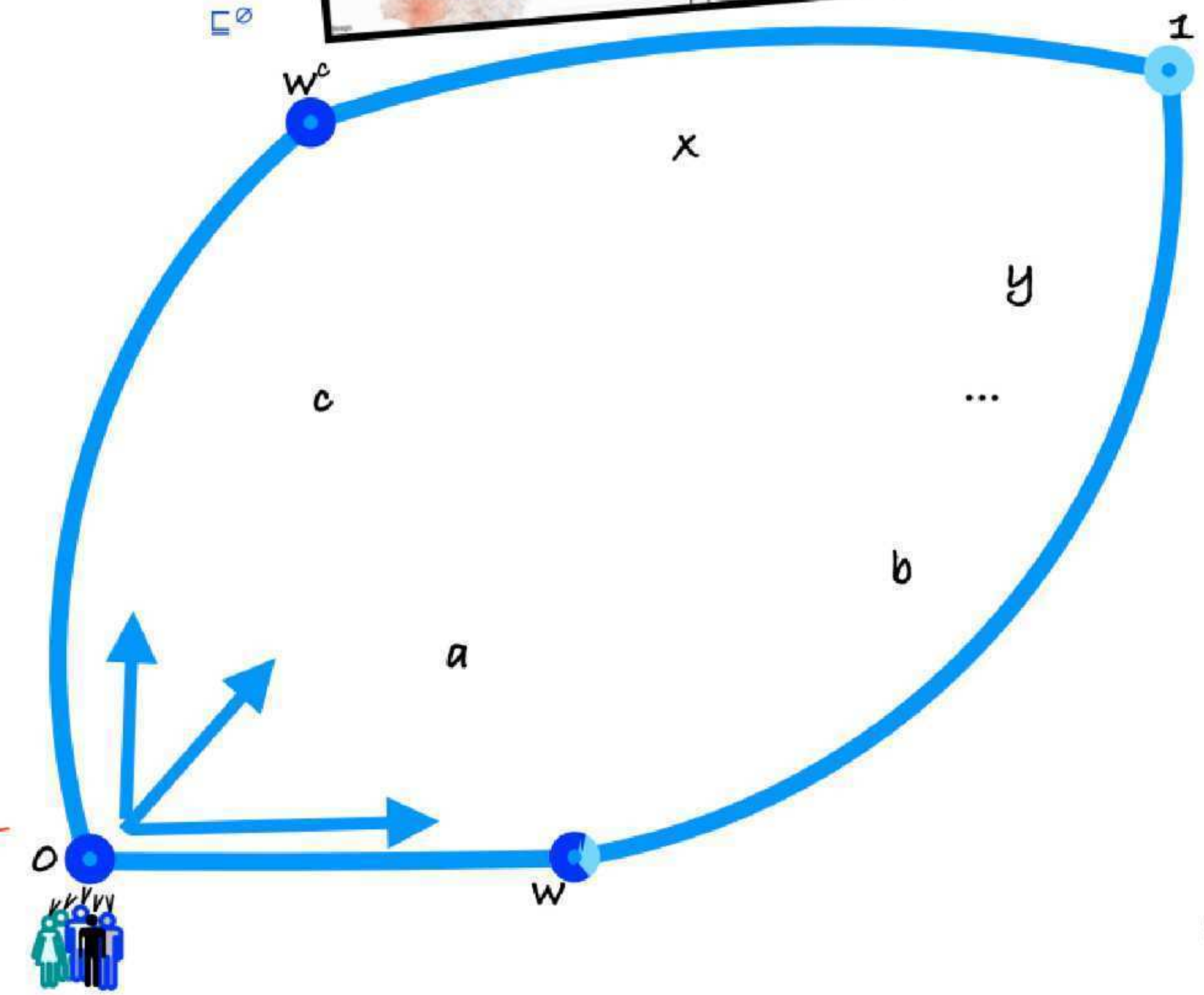
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":

1. En contextos relacionados con imágenes.



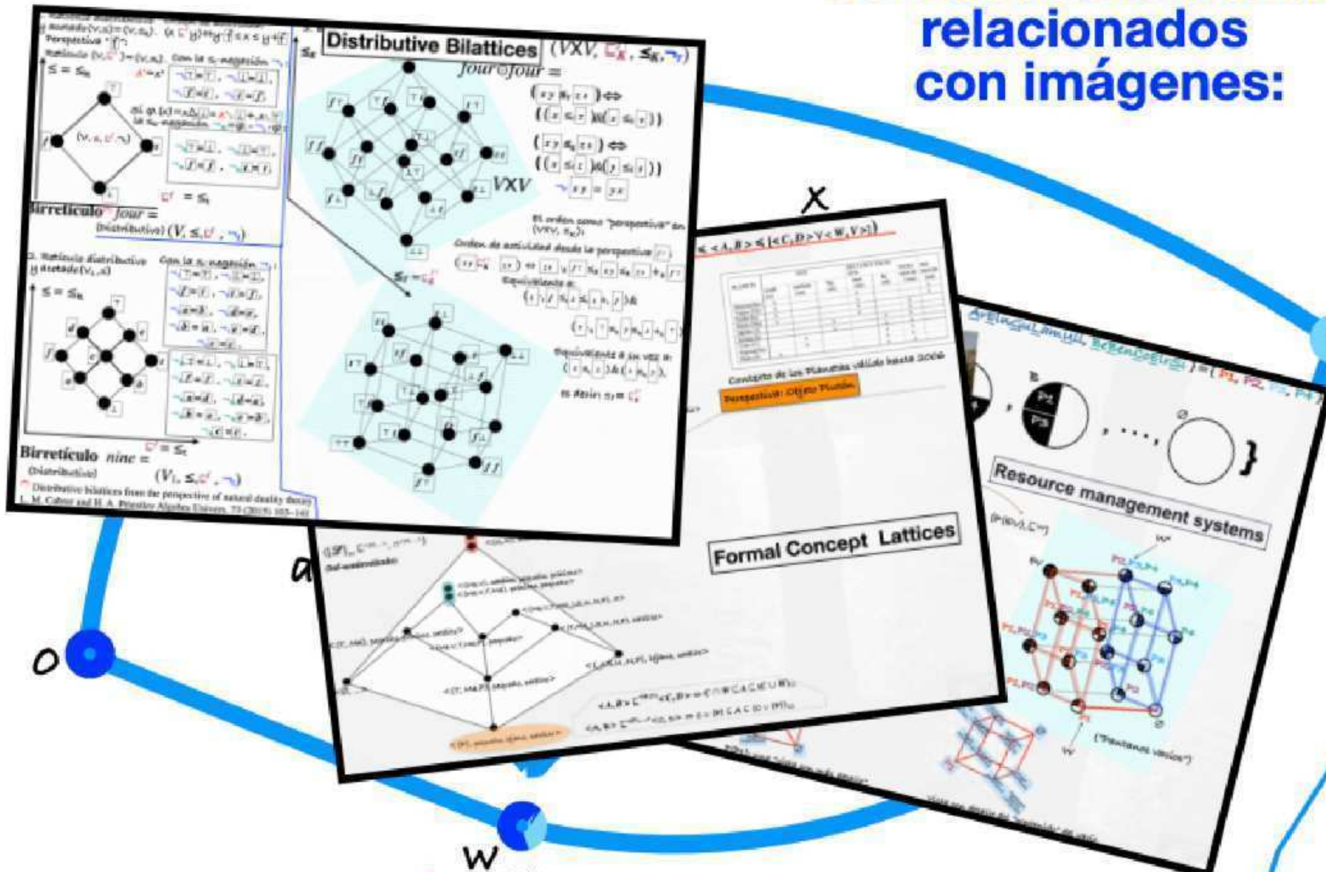
$\cong$



Existe una involución $\varphi_W: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

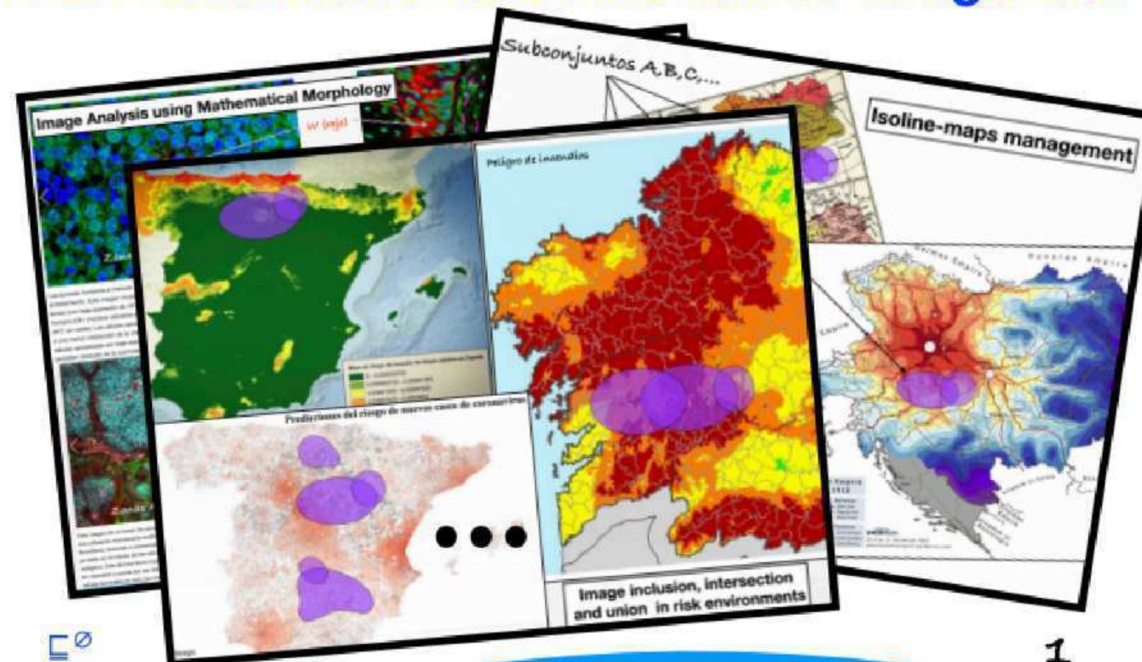
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



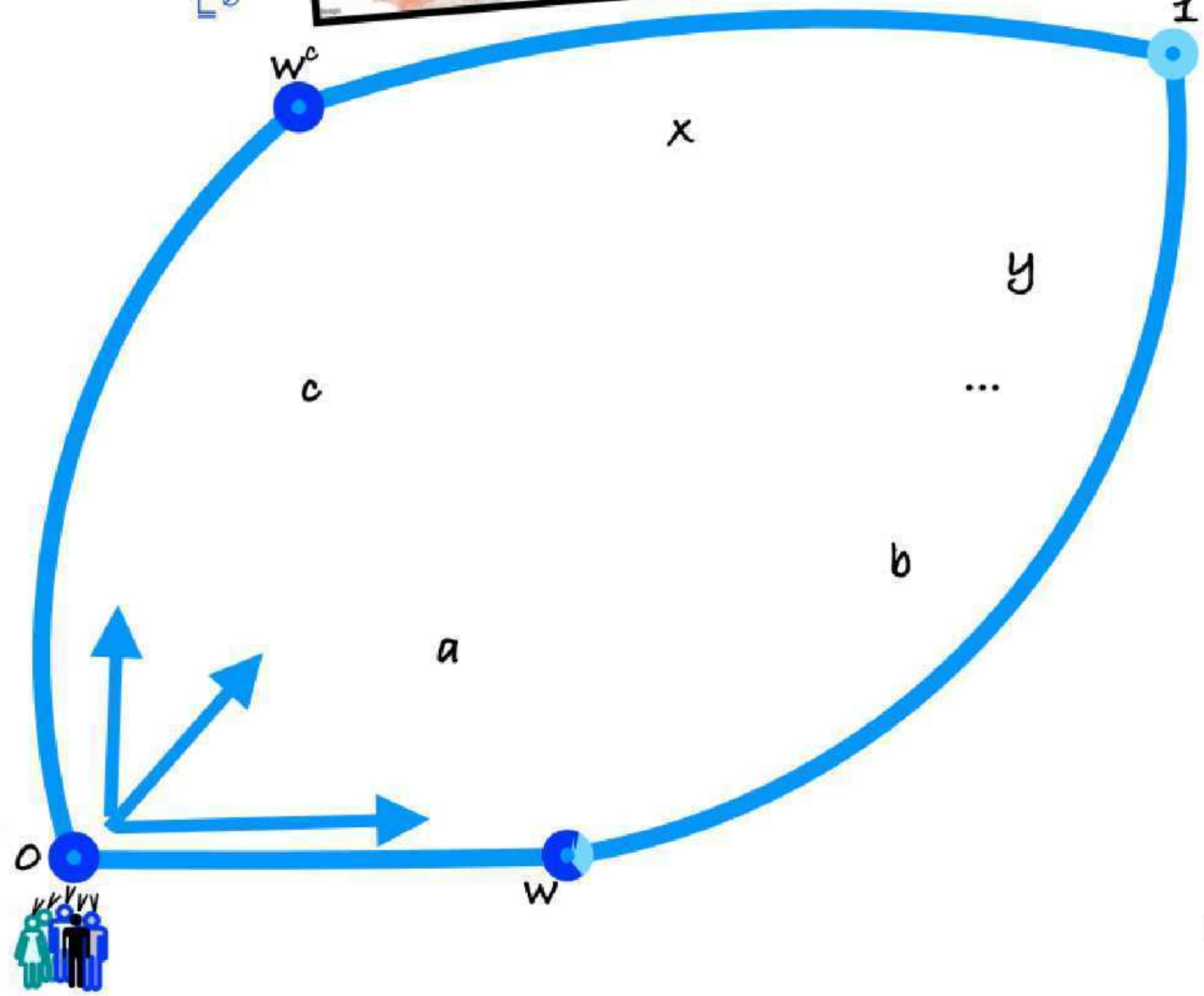
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.



$\cong$

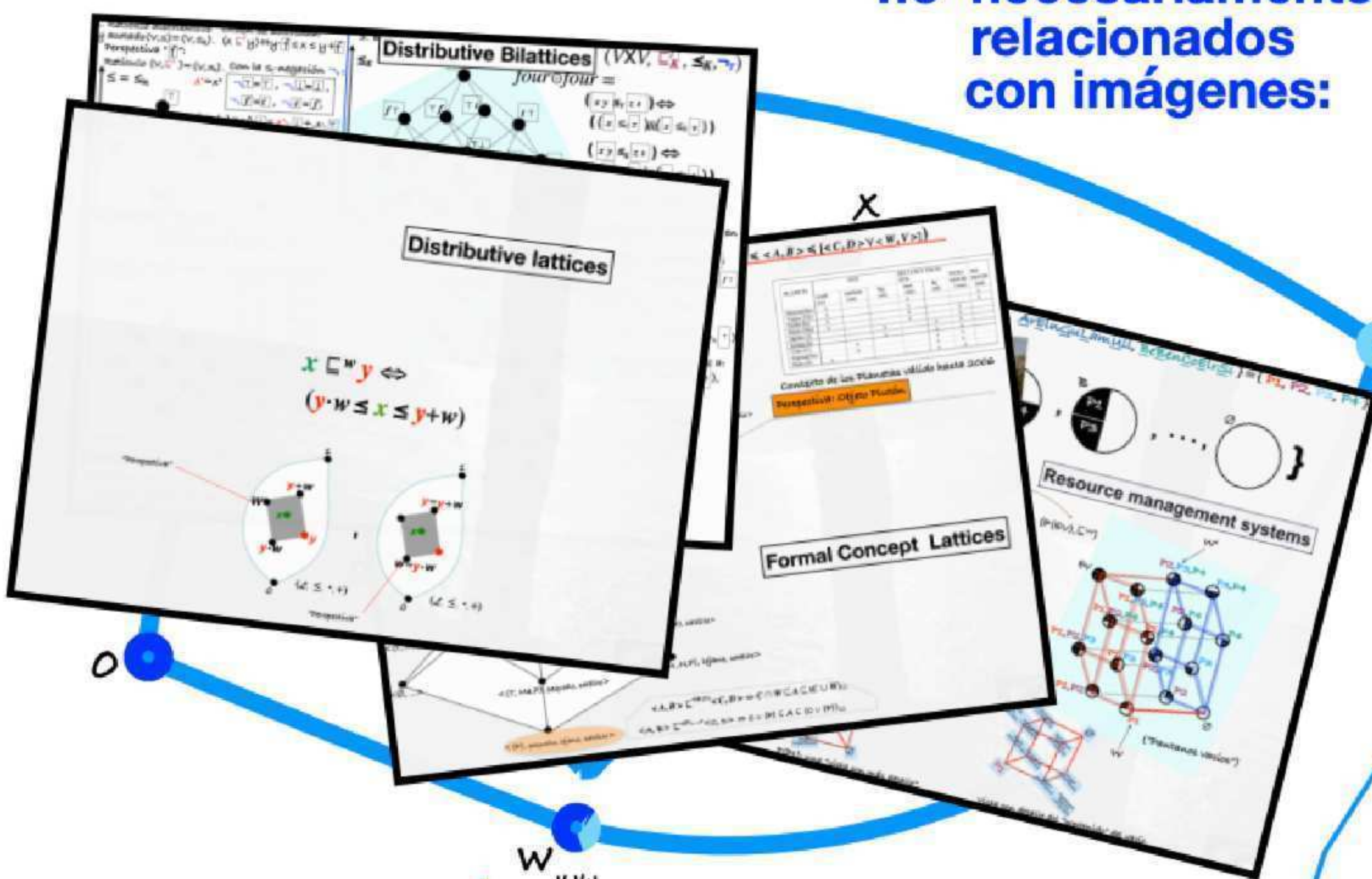
Una perspectiva "intermedia" (asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^{W}$ en $\mathcal{L}$).



Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

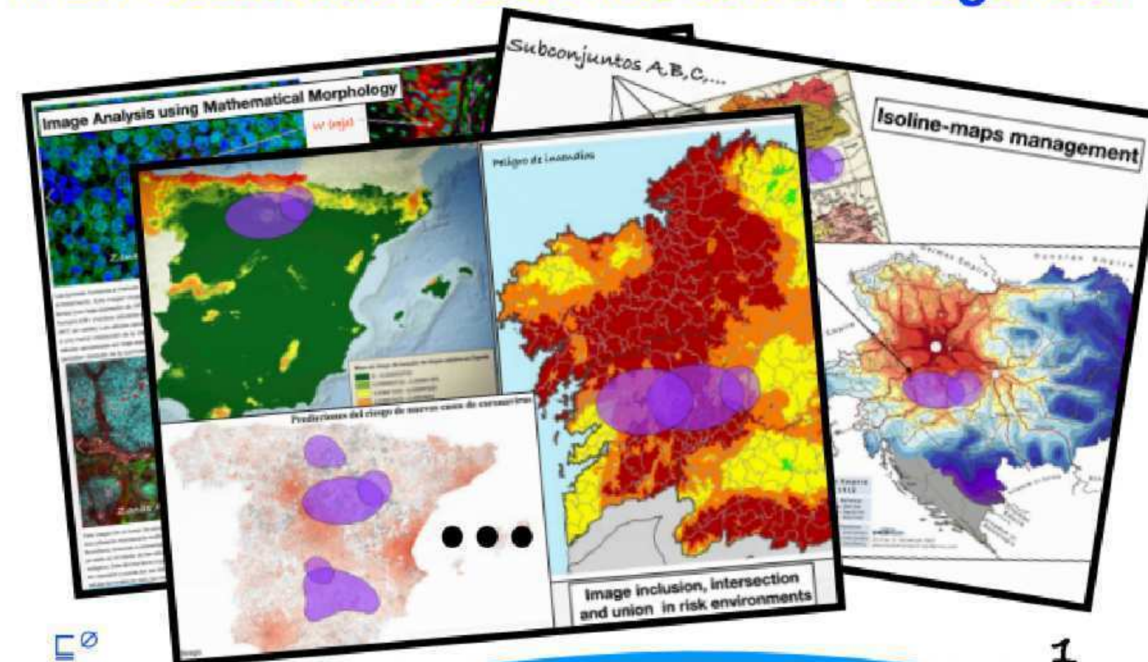
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B))$$

2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



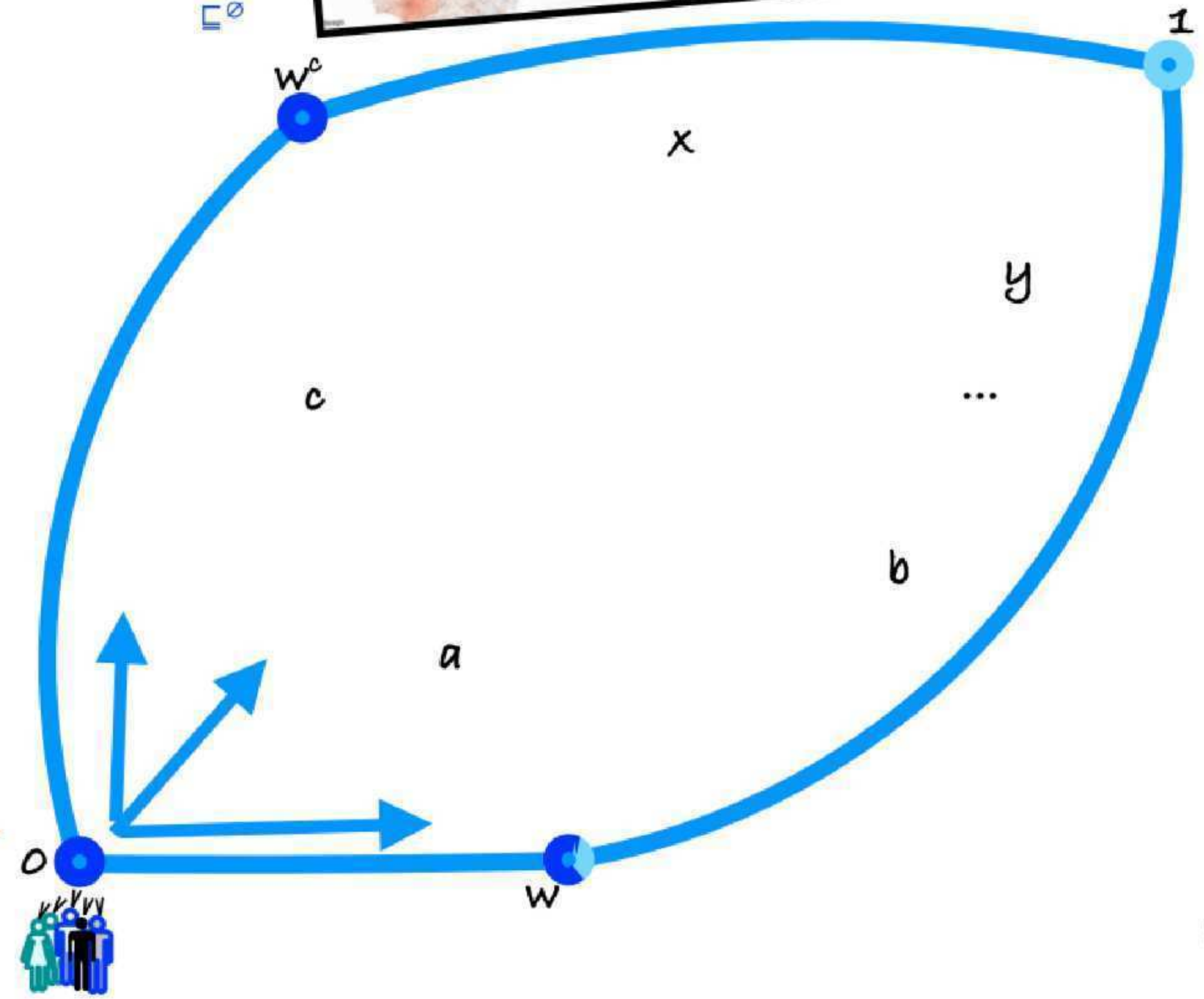
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.



$\cong$

Una perspectiva "intermedia" (asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$).



Existe una involución $\varphi_W: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

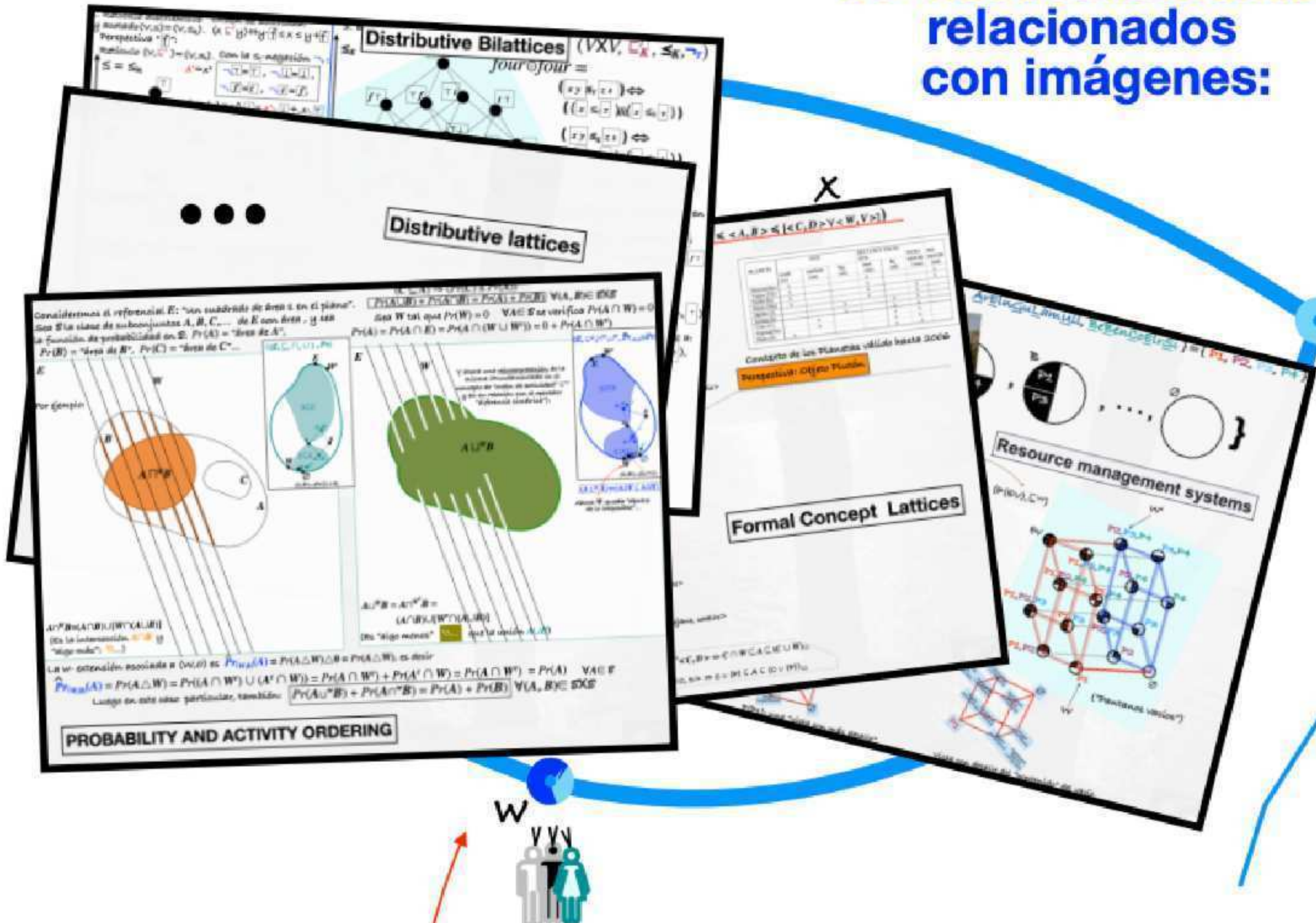
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

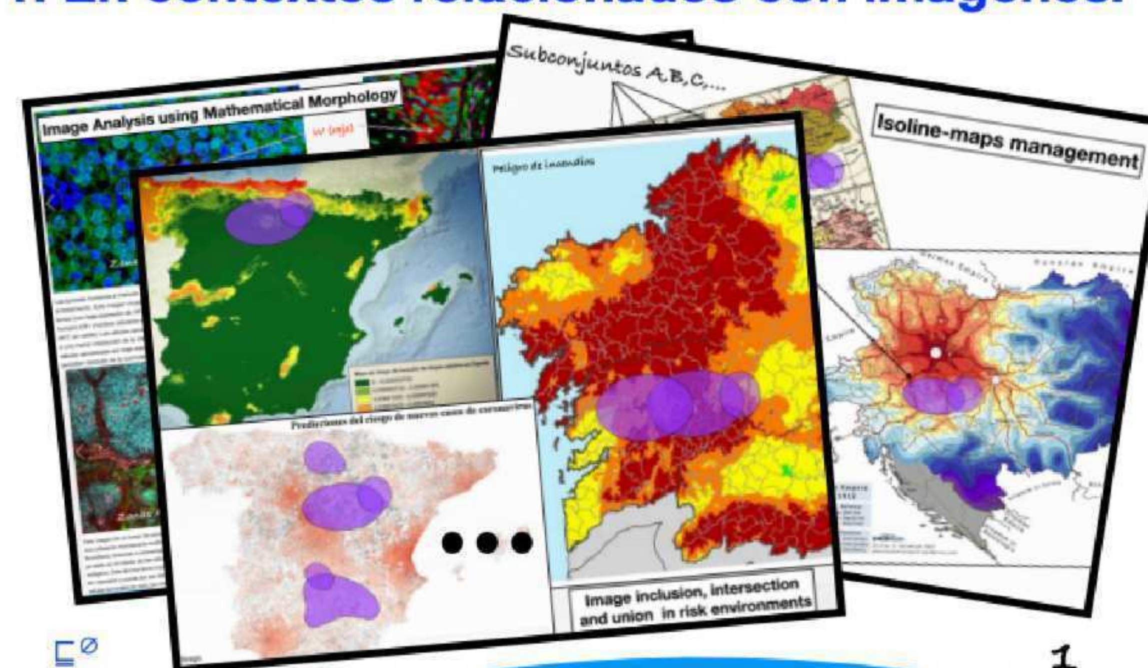
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas “perspectivas”:

1. En contextos relacionados con imágenes.

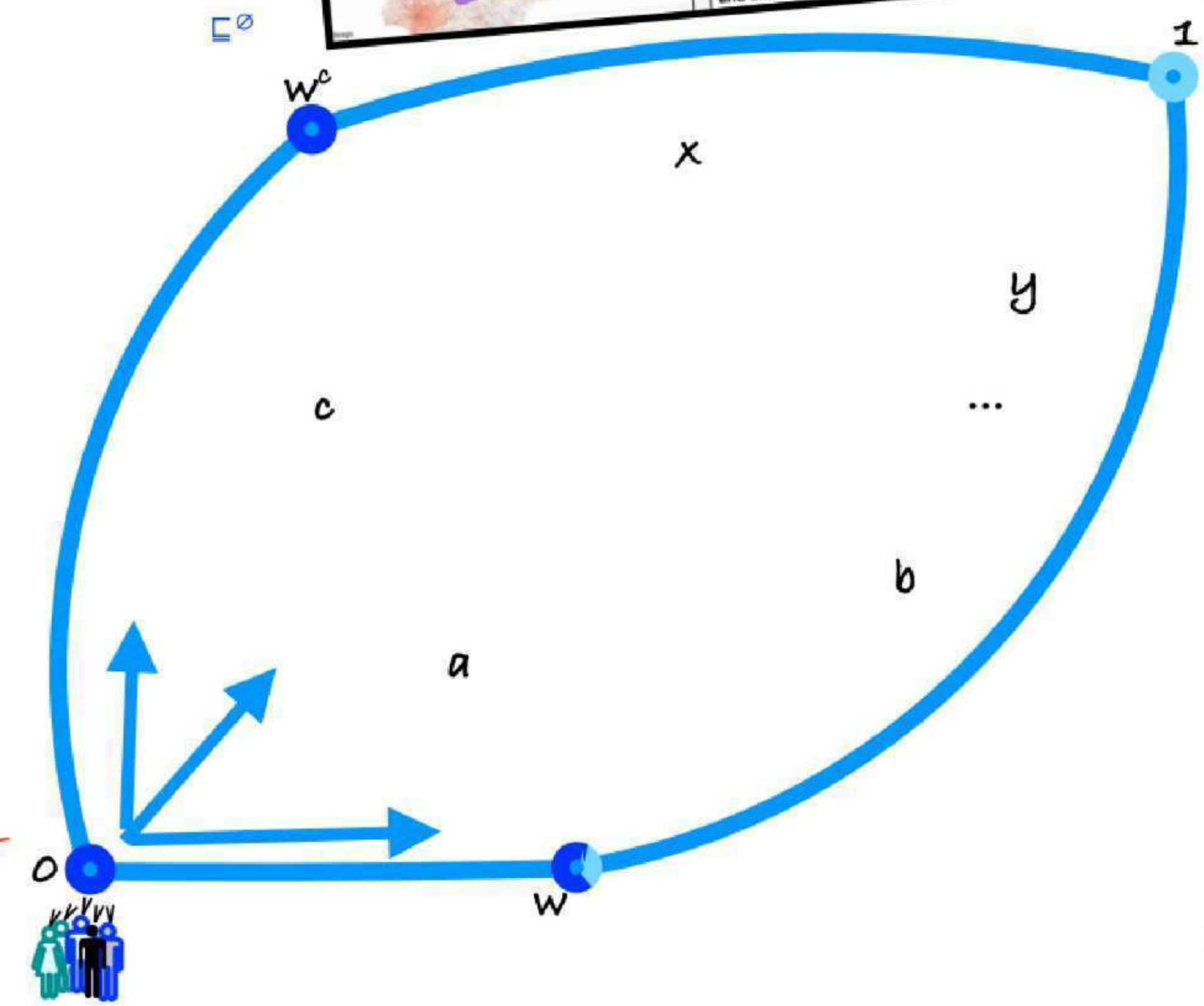
2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:





$\cong$

Una perspectiva “intermedia” (asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^{W}$ en $\mathcal{L}$).



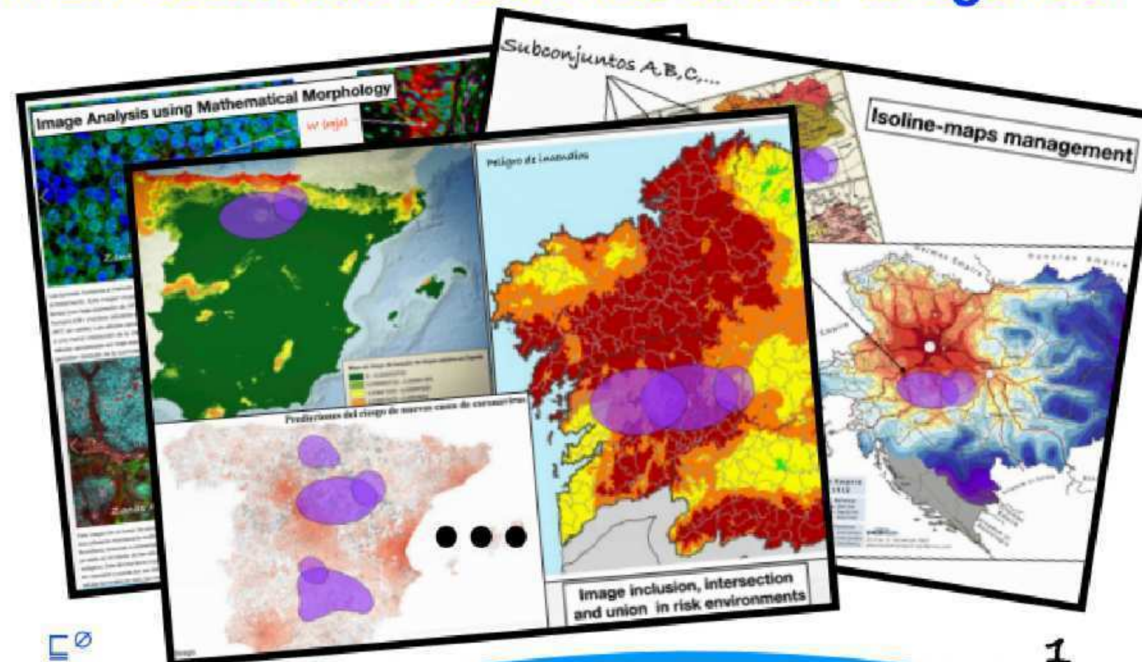
Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L},\leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B))$$

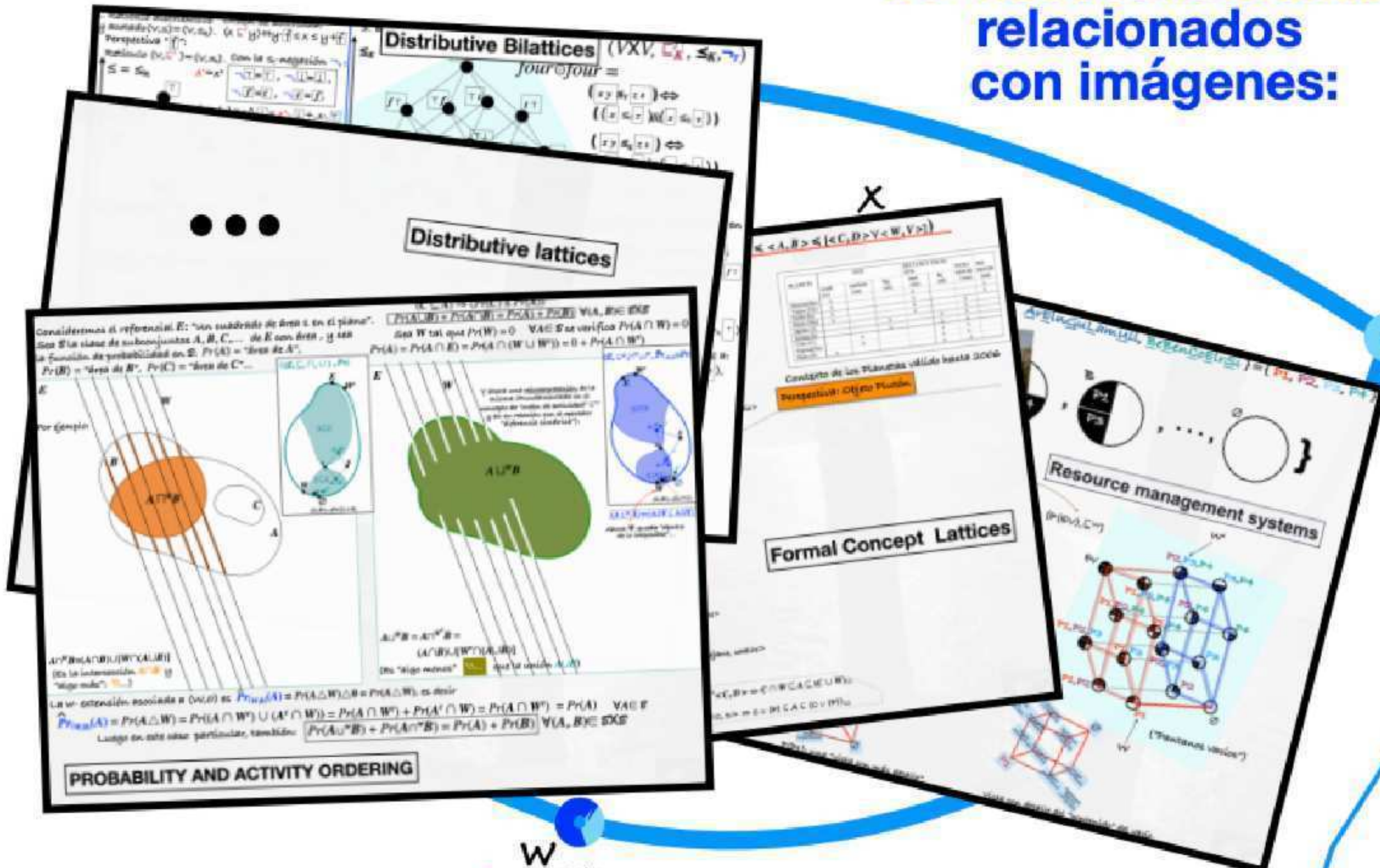
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":

1. En contextos relacionados con imágenes.

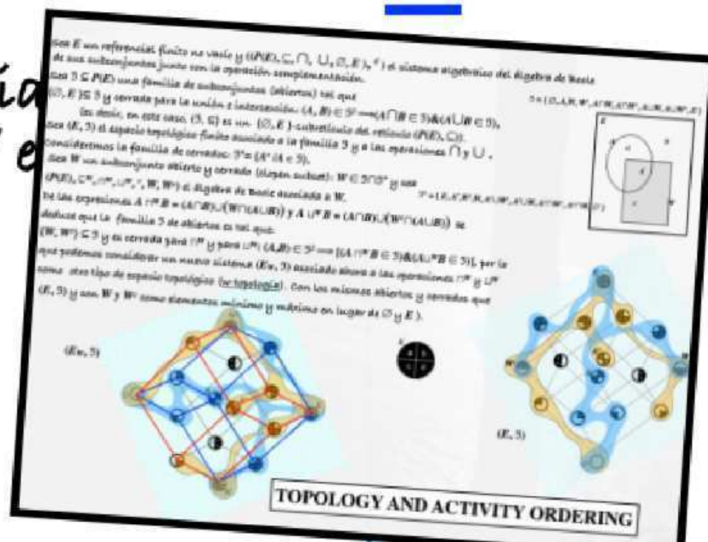


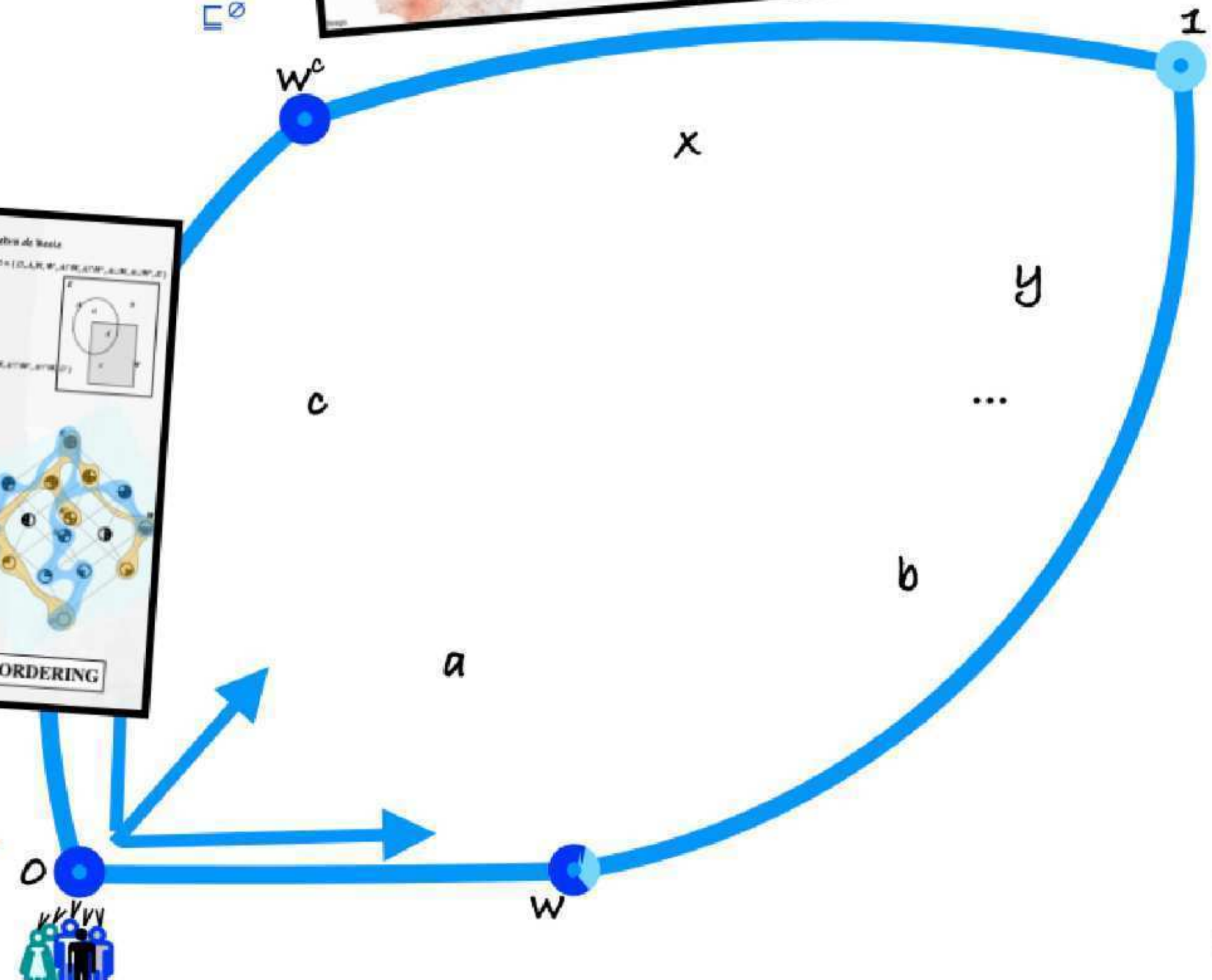
2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



Una perspectiva "intermedia
(asociada a un nuevo orden $\sqsubseteq^{W}$ e

$\cong$





3. En retículos que aparecen asociados a la estructura que organiza ciertos elementos distinguidos de ramas diversas de la Matemática: Topología, Fuzzy Sets, Rough Sets, Matemáticas Discretas,...

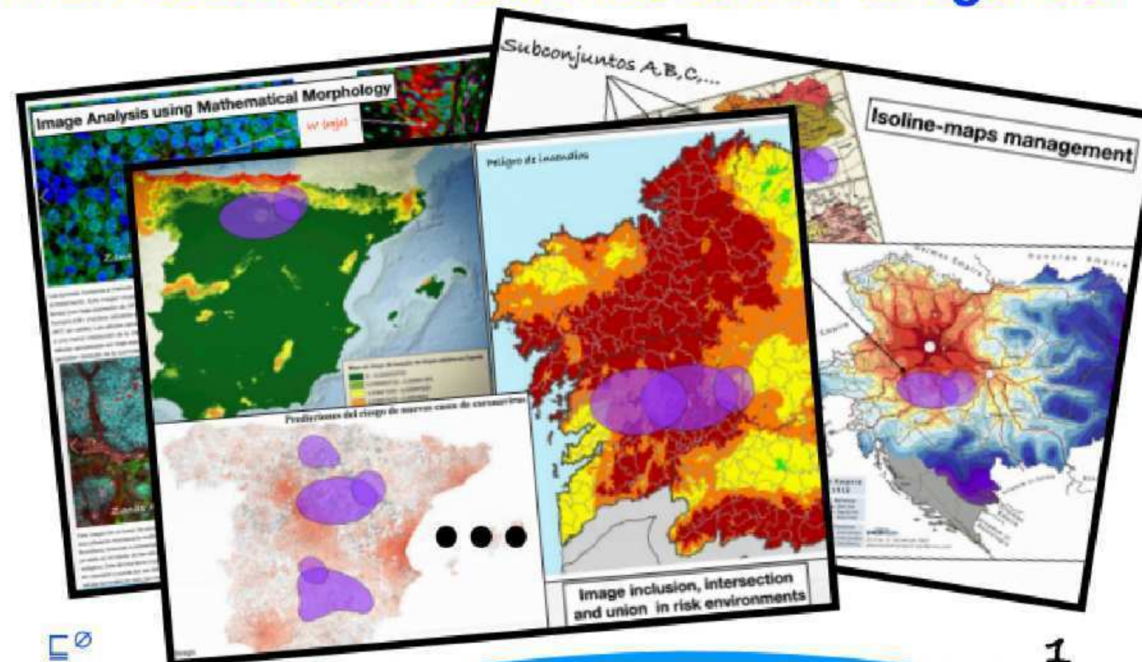
Existe una involución $\varphi_W: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B))$$

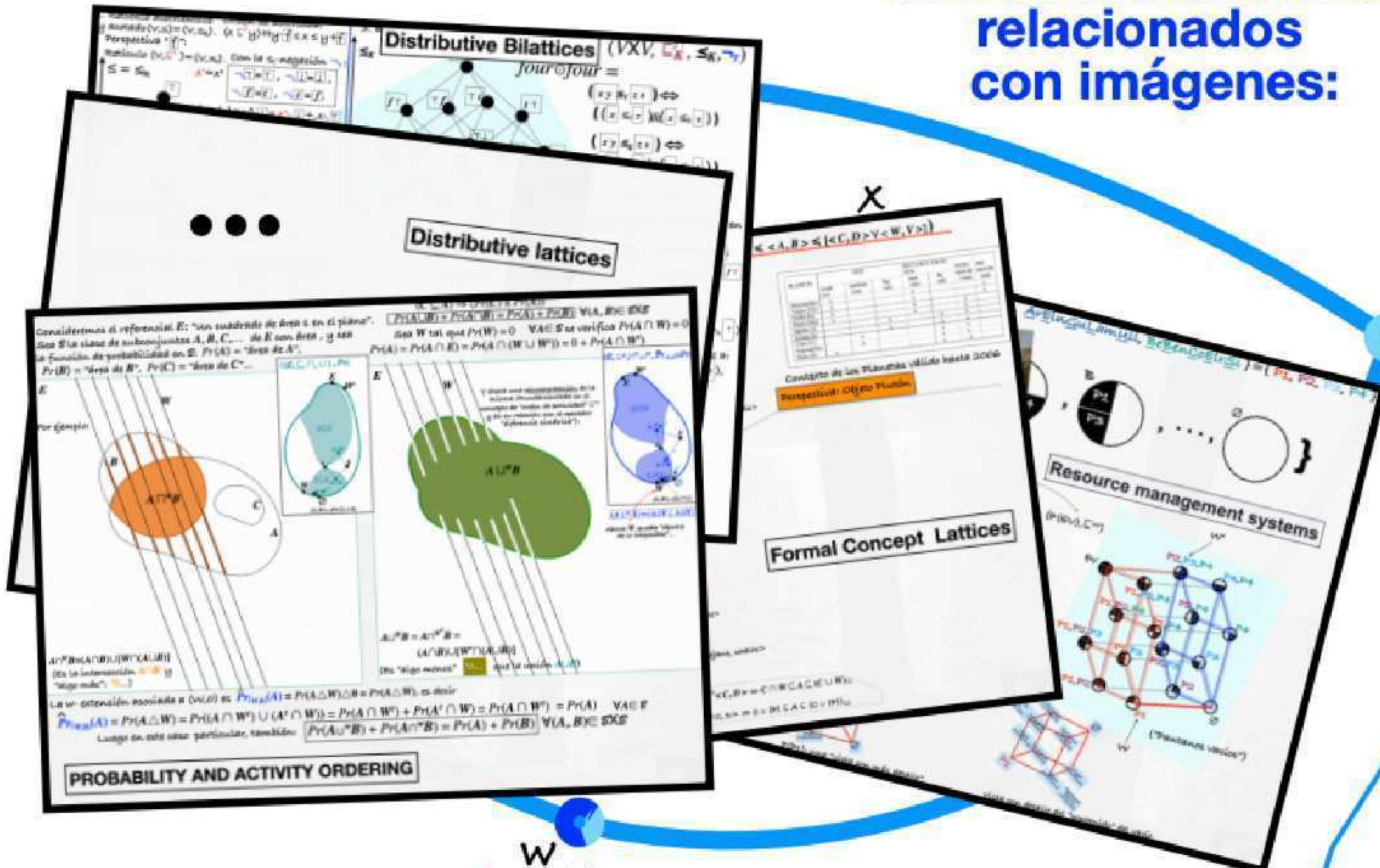
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":

1. En contextos relacionados con imágenes.

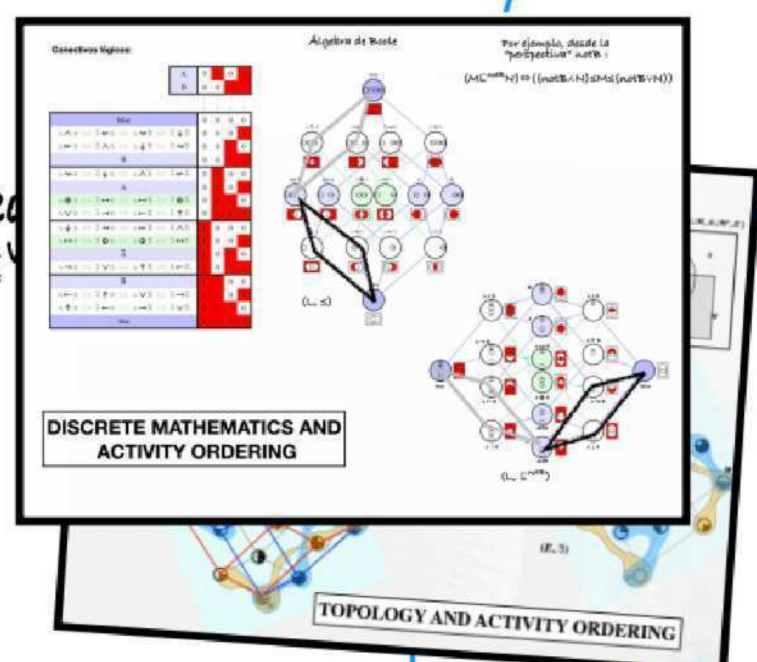


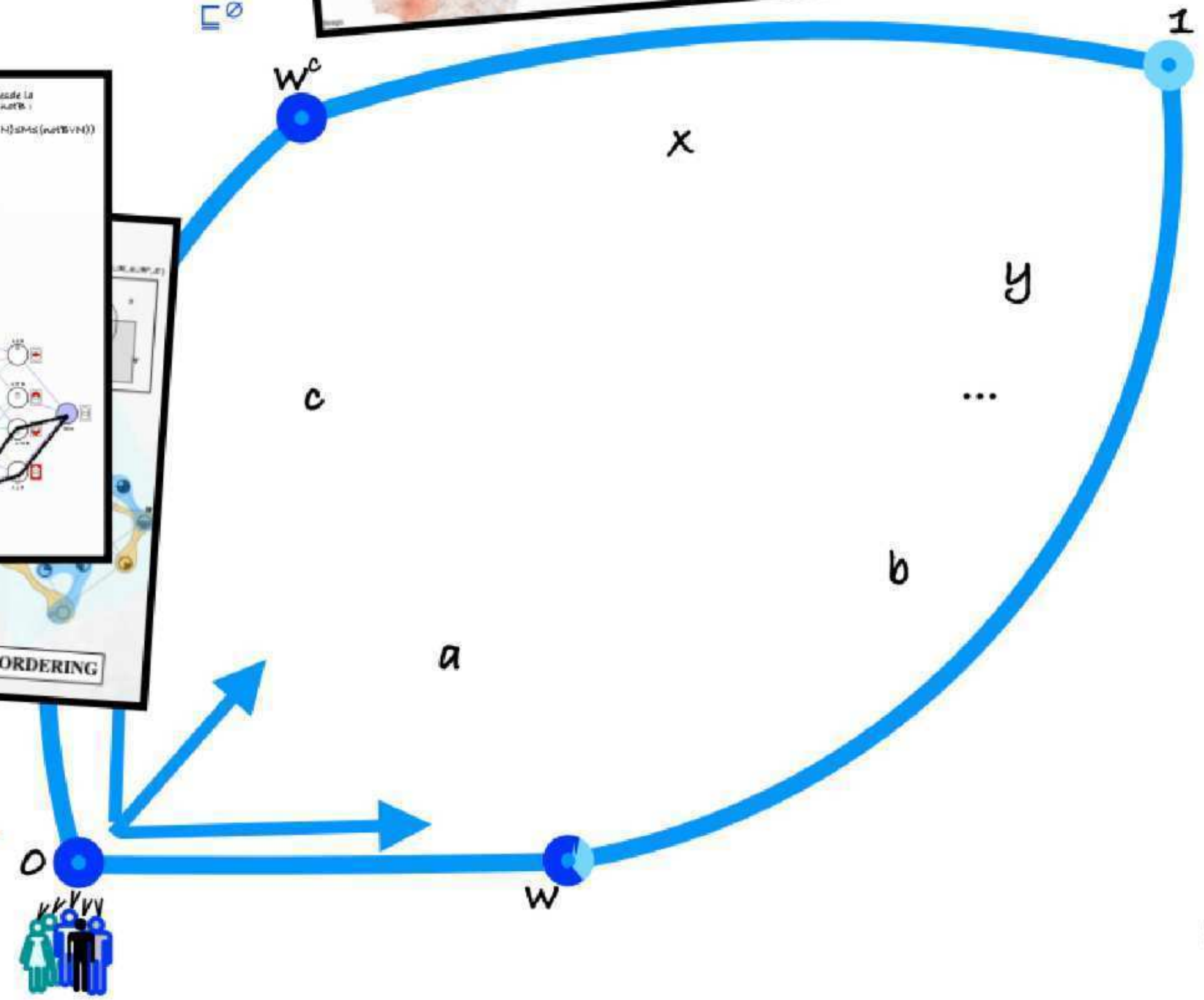
2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



Una perspectiva "intermed
(asociada a un nuevo orden ⊑

3. En retículos que aparecen asociados a la estructura que organiza ciertos elementos distinguidos de ramas diversas de la Matemática: Topología, Fuzzy Sets, Rough Sets, Matemáticas Discretas,...

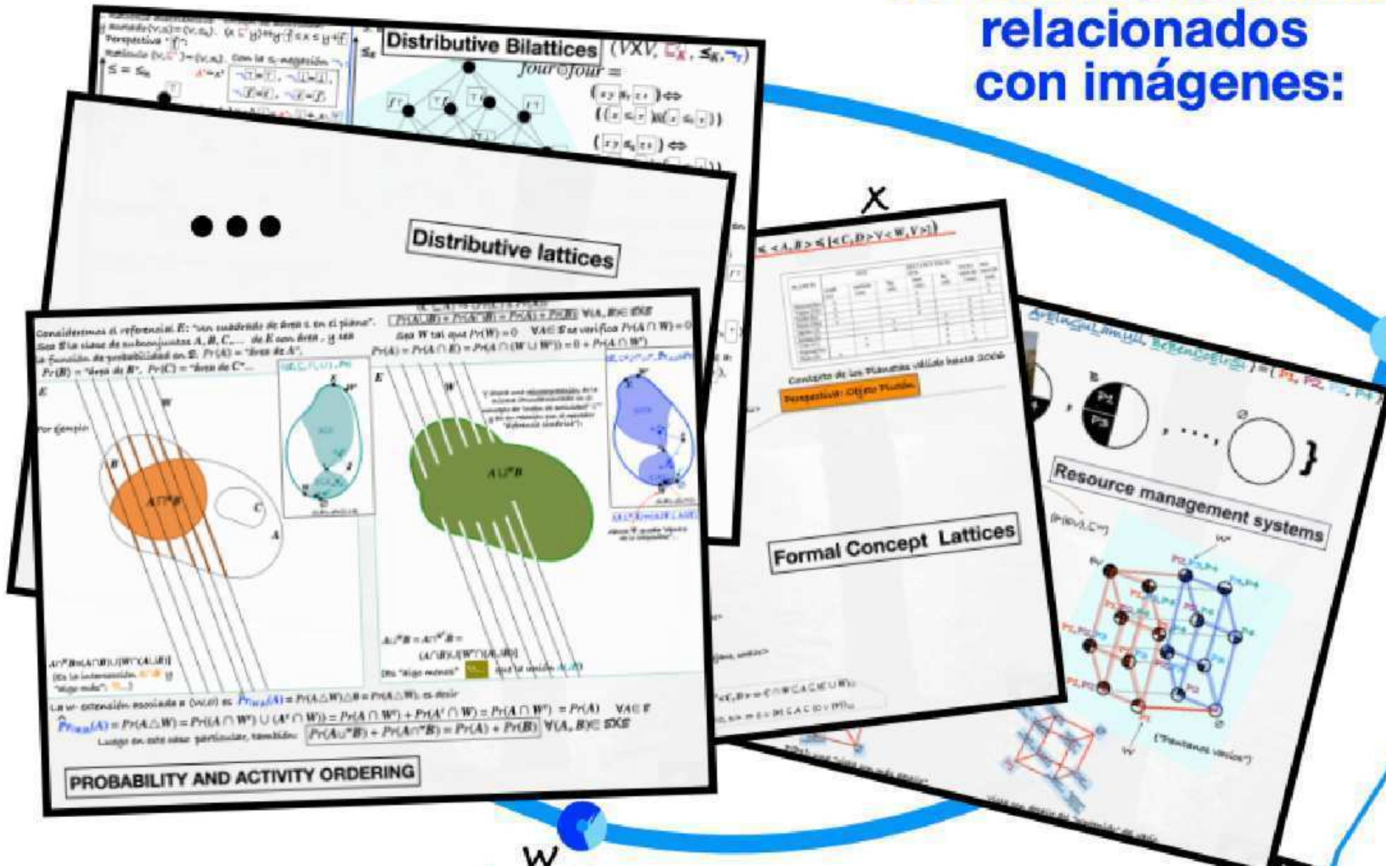




Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B))$$

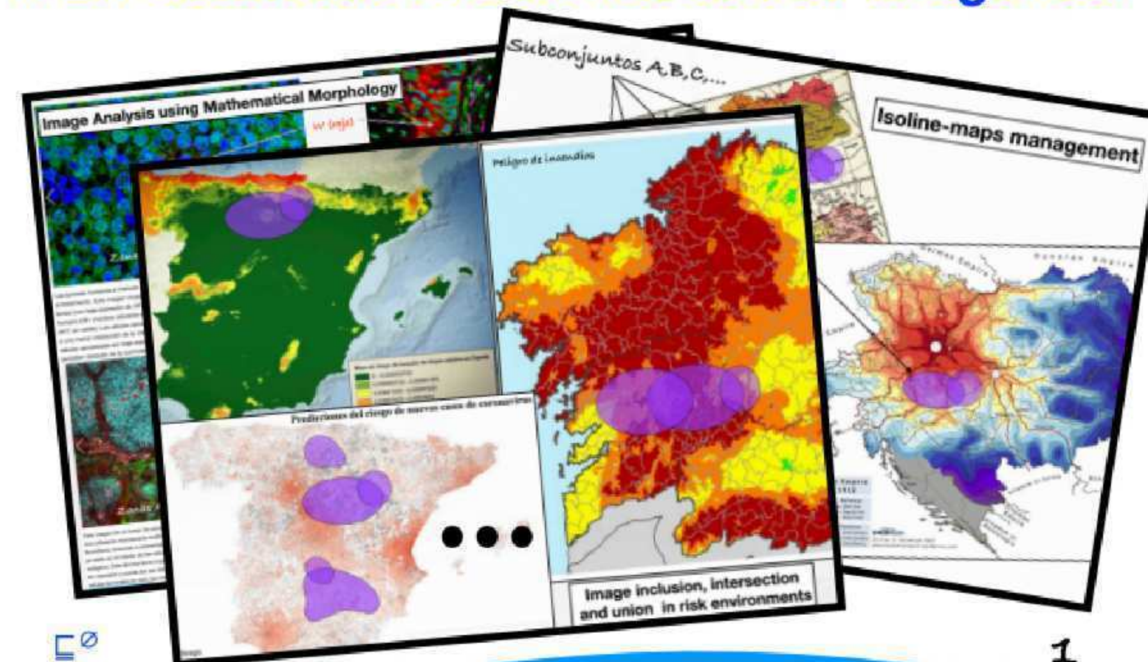
2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":

1. En contextos relacionados con imágenes.



Una perspectiva "intermed
(asociada a un nuevo orden ⊑

3. En retículos que aparecen asociados a la estructura que organiza ciertos elementos distinguidos de ramas diversas de la Matemática: Topología, Fuzzy Sets, Rough Sets, Matemáticas Discretas,...

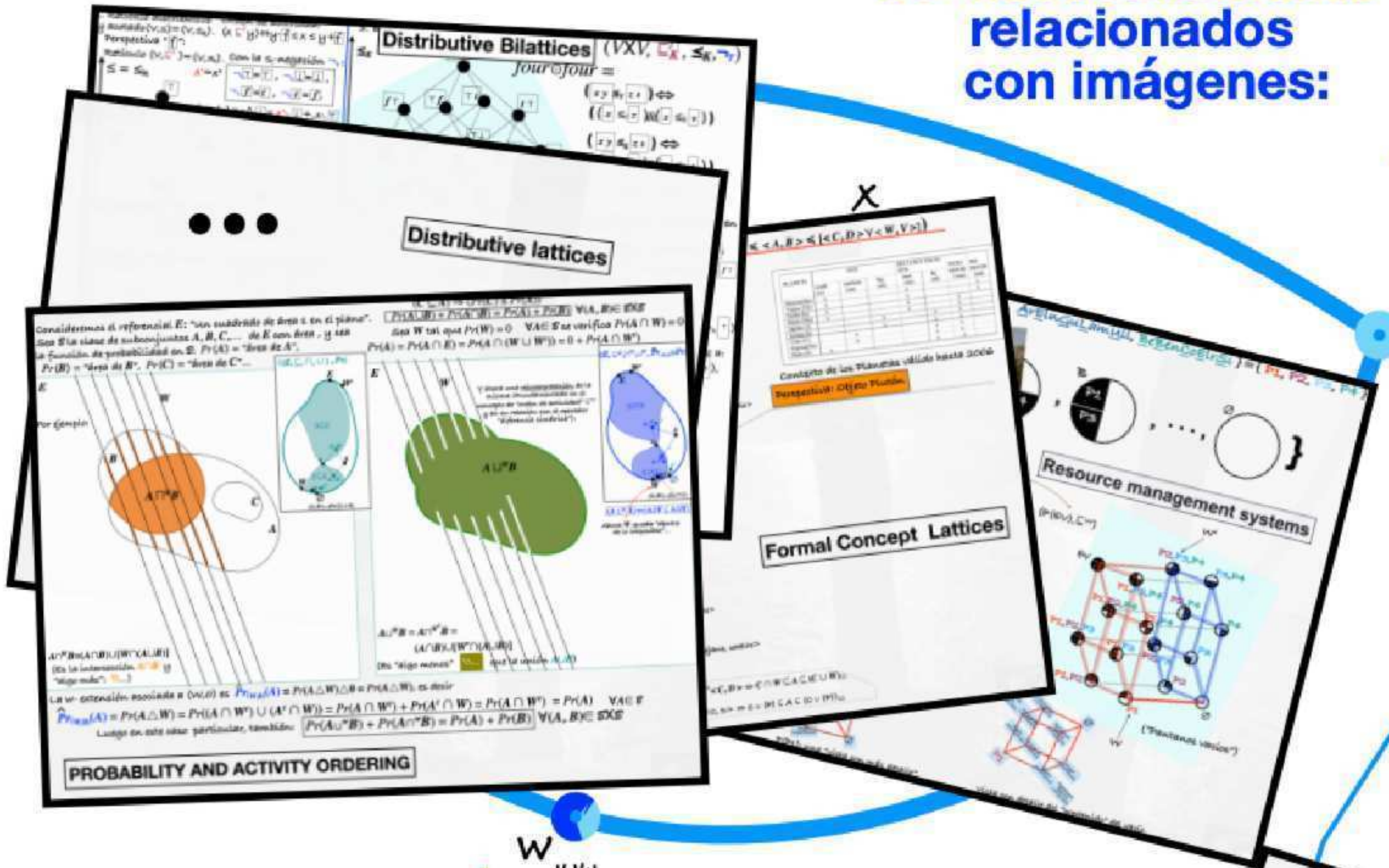
Existe una involución $\varphi_W: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L},\leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

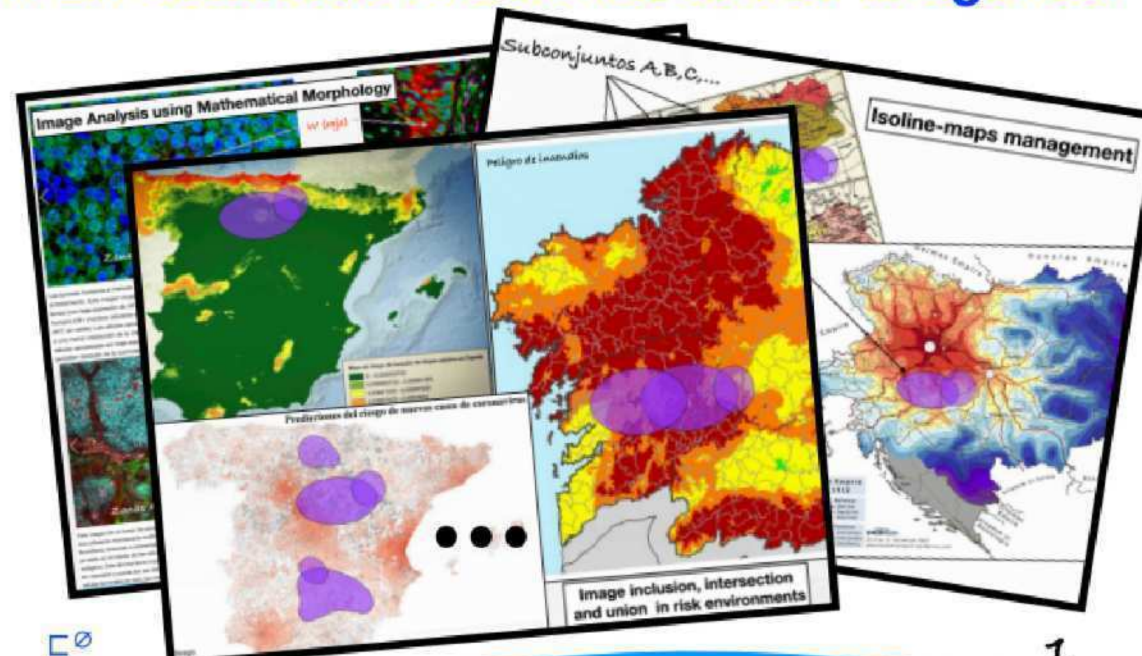
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:

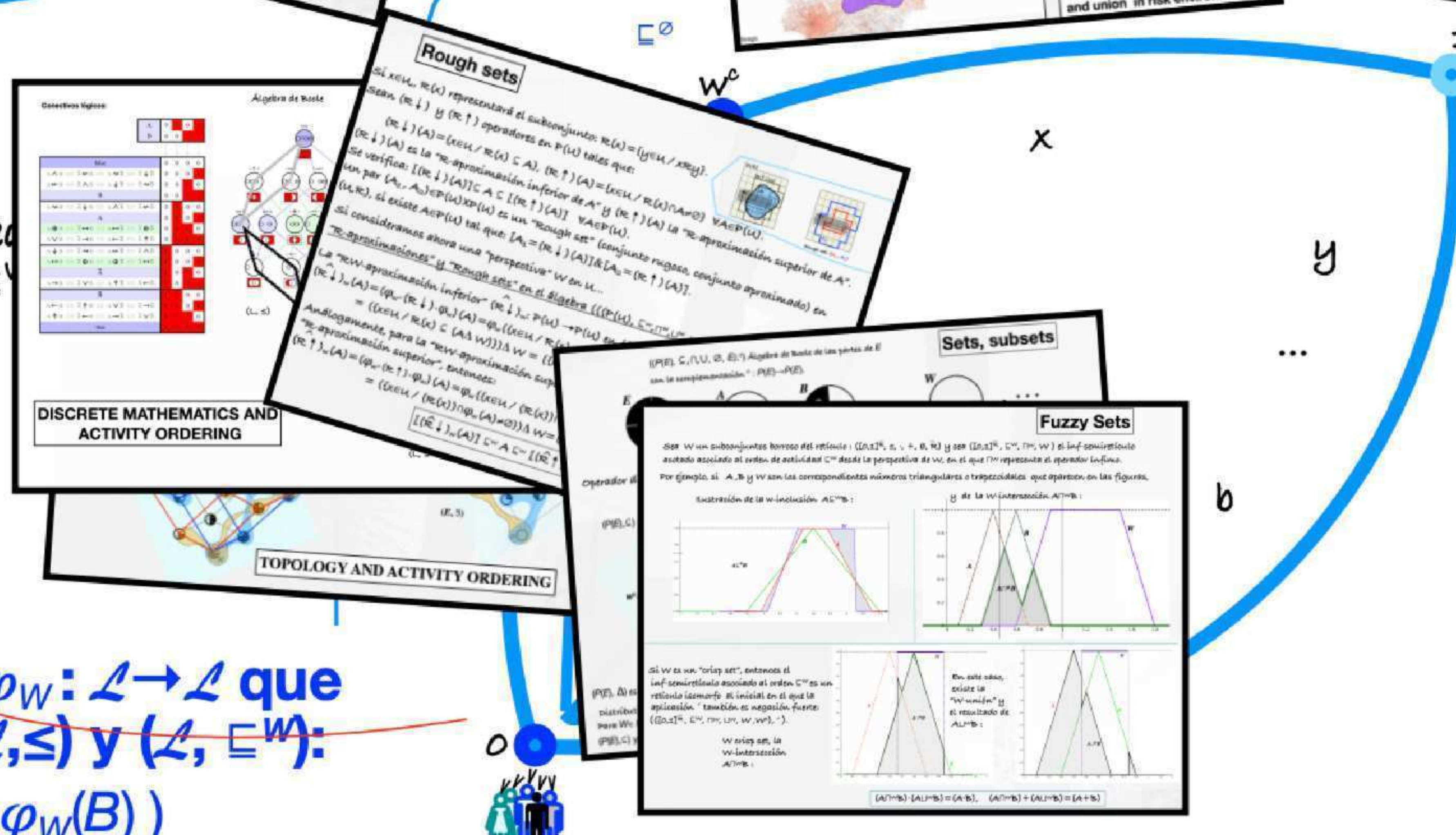
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}\,,\,\sqsubseteq^{W}) \cong (\mathcal{L}\,,\,\leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":
1. En contextos relacionados con imágenes.





Una perspectiva "intermed
(asociada a un nuevo orden ⊑



3. En retículos que aparecen asociados a la estructura que organiza ciertos elementos distinguidos de ramas diversas de la Matemática: Topología, Fuzzy Sets, Rough Sets, Matemáticas Discretas,...

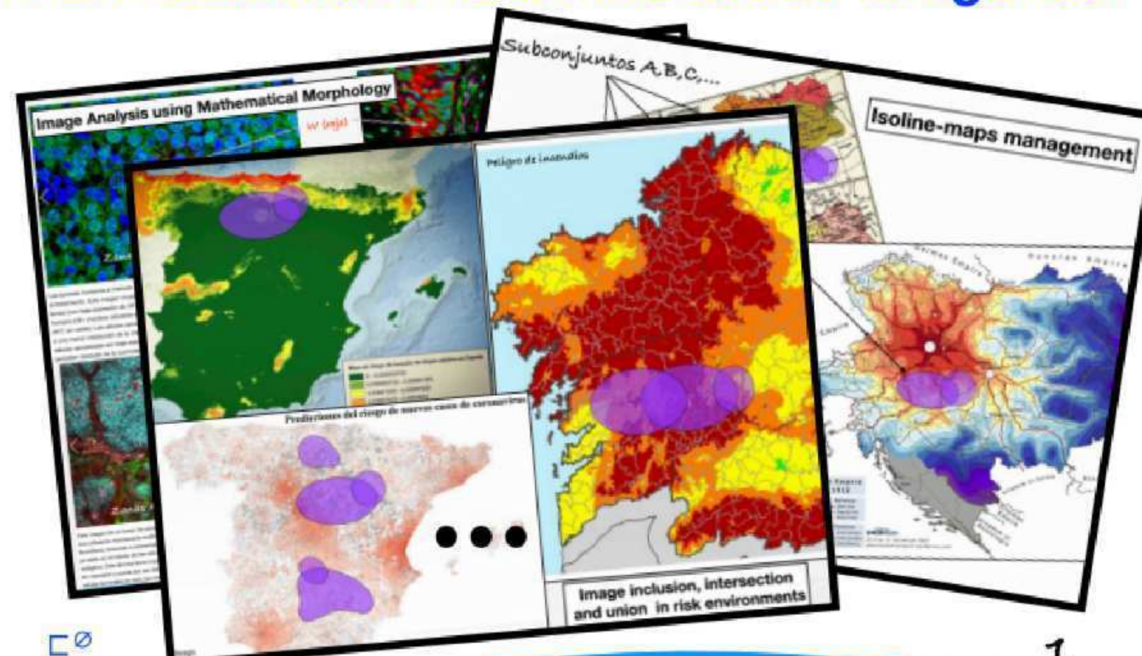
Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L},\leq)$ y $(\mathcal{L},\sqsubseteq^{W})$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\,\varphi_W(A) \sqsubseteq^{W} \varphi_W(B)\,)$$

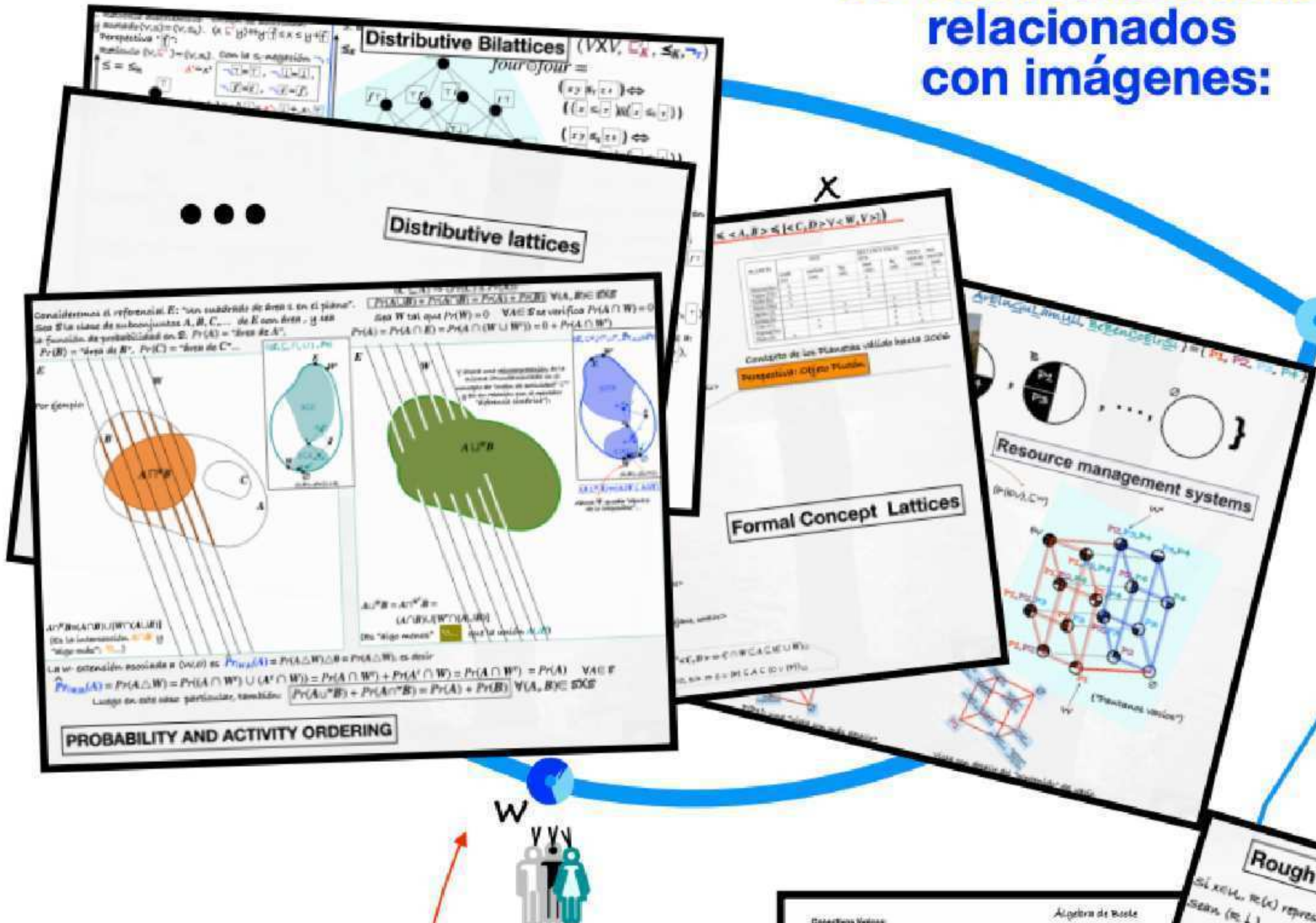
Justificaremos que también es retículo isomorfo al inicial: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \cong (\mathcal{L}, \leq)$

Veremos la utilidad de estas "perspectivas":

1. En contextos relacionados con imágenes.

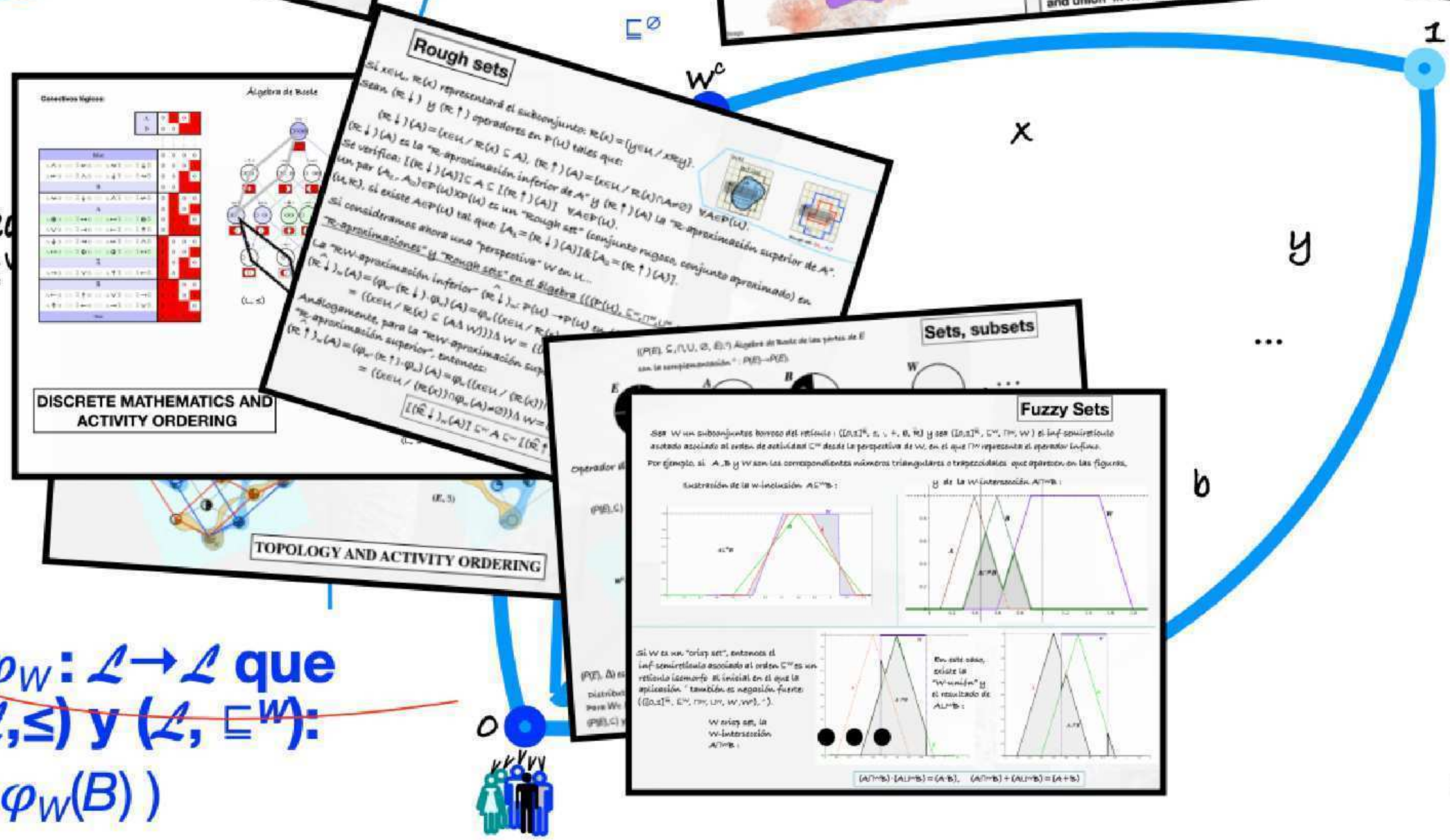


2. En retículos con elementos no necesariamente relacionados con imágenes:



Una perspectiva "intermed
(asociada a un nuevo orden ⊑

3. En retículos que aparecen asociados a la estructura que organiza ciertos elementos distinguidos de ramas diversas de la Matemática: Topología, Fuzzy Sets, Rough Sets, Matemáticas Discretas,…



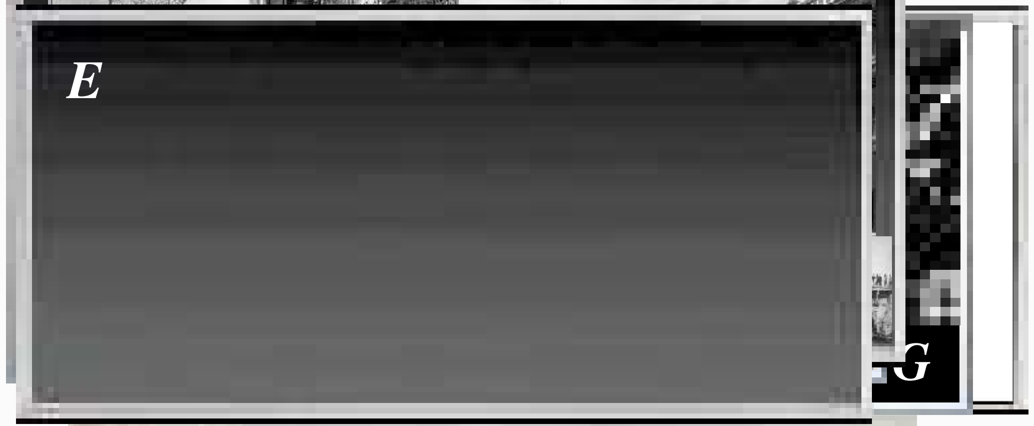
Existe una involución $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que es isomorfismo entre $(\mathcal{L}, \leq)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B))$$

En resumen:

Estructura que aparecerá asociada a las distintas “perspectivas”

Cadena L={0,...,255}
E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$.
(L^E, ≤) retículo de imágenes



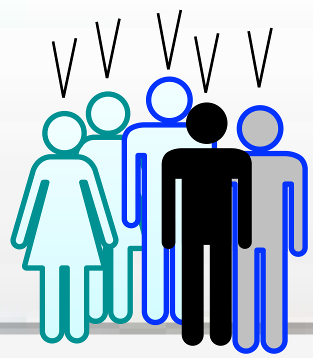
Imágenes (binarias y en tonos de grises).

Cadena $L=\{0,\ldots,255\}$

E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$.

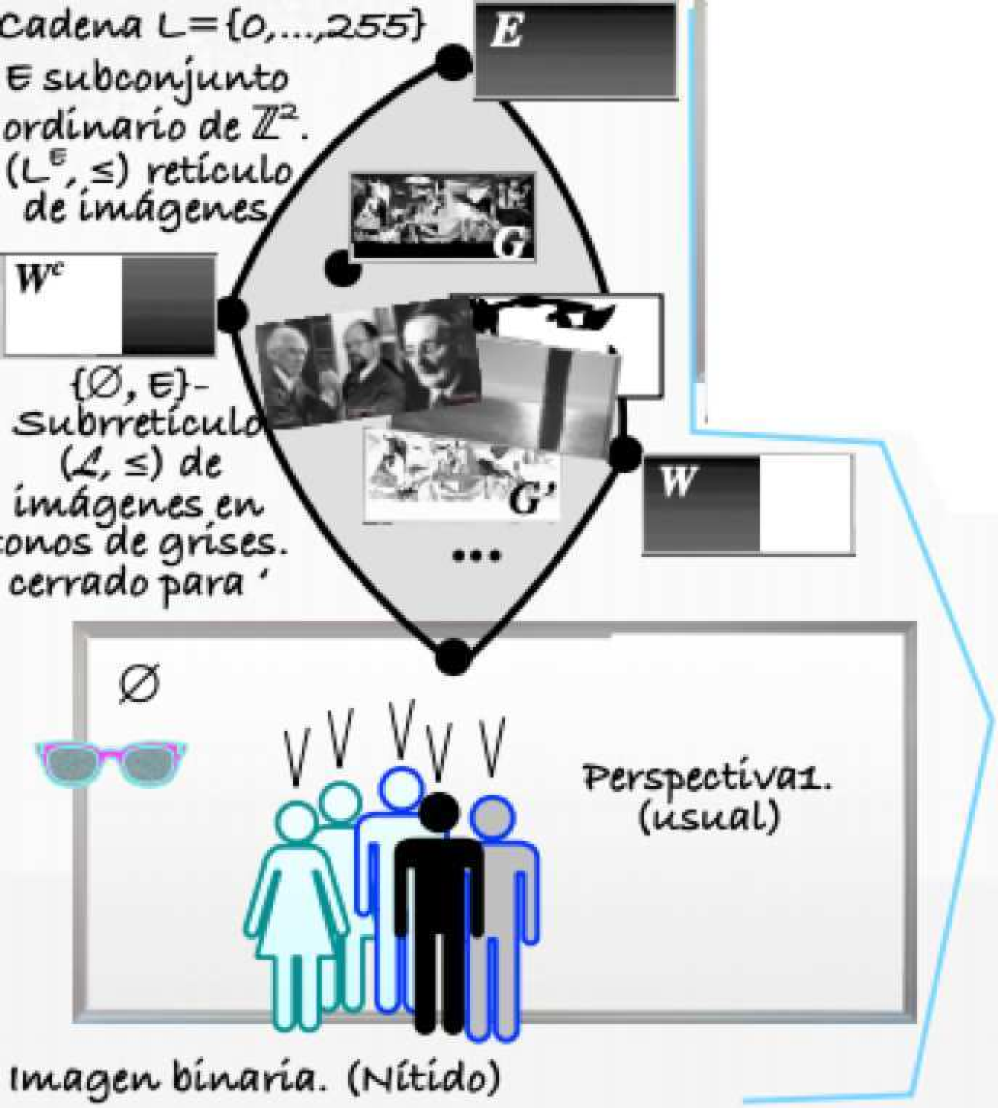
$(L^E, \leq)$ retículo de imágenes

$\varnothing$



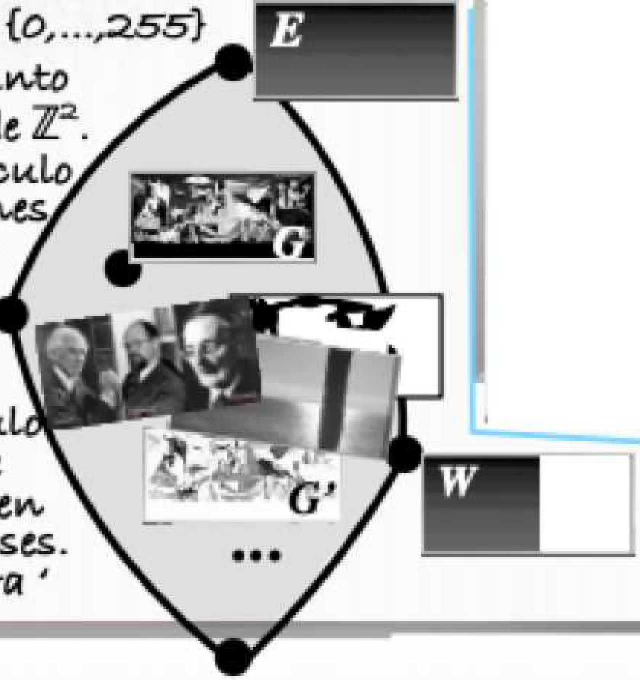
Perspectiva1. (usual)

Imagen binaria. (Nítido)



Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

Cadena $L=\{0,\ldots,255\}$
E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$.
$(L^E, \leq)$ retículo de imágenes



$\{\emptyset, E\}$-Subrretículo $(\mathcal{L}, \leq)$ de imágenes en tonos de grises. cerrado para '

Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \emptyset, E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

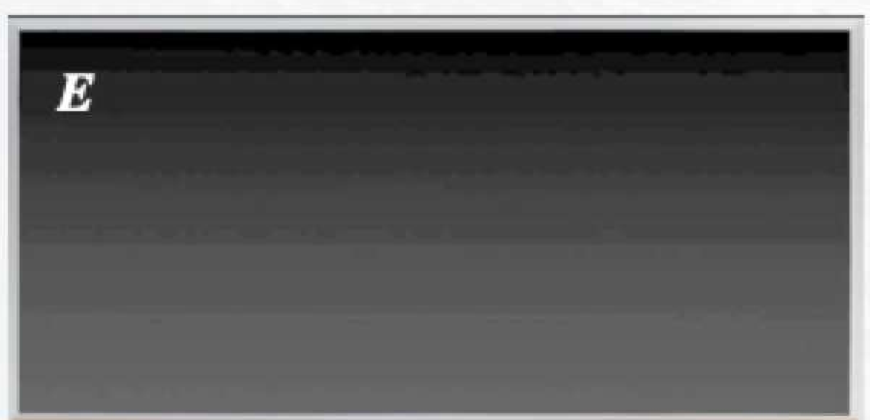


Imagen binaria (Nítido)

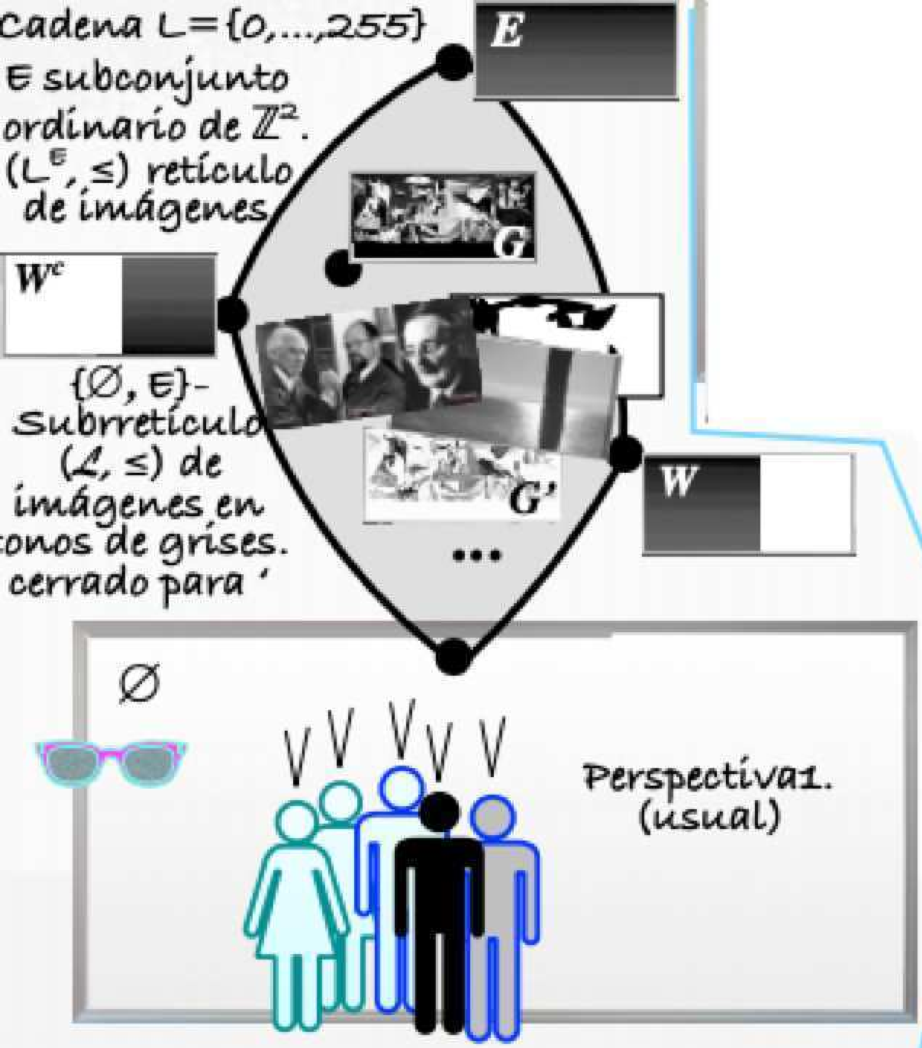


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo (($\mathcal{L}$, ≤, ·, +, ∅, E), ') con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

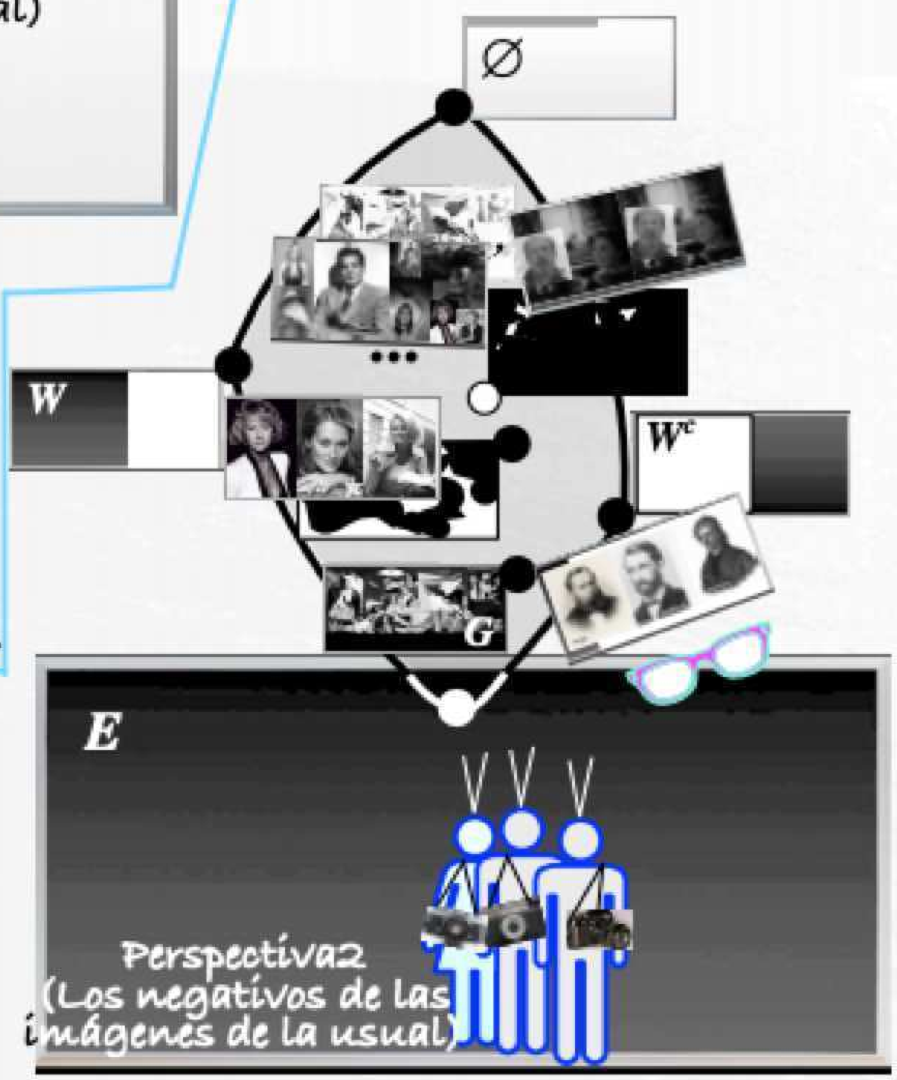


Imagen binaria (Nítido)

Cadena $L=\{0,\ldots,255\}$
E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$.
$(L^E, \leq)$ retículo de imágenes

$\{\emptyset, E\}$-Subrretículo $(\mathcal{L}, \leq)$ de imágenes en tonos de grises. cerrado para '

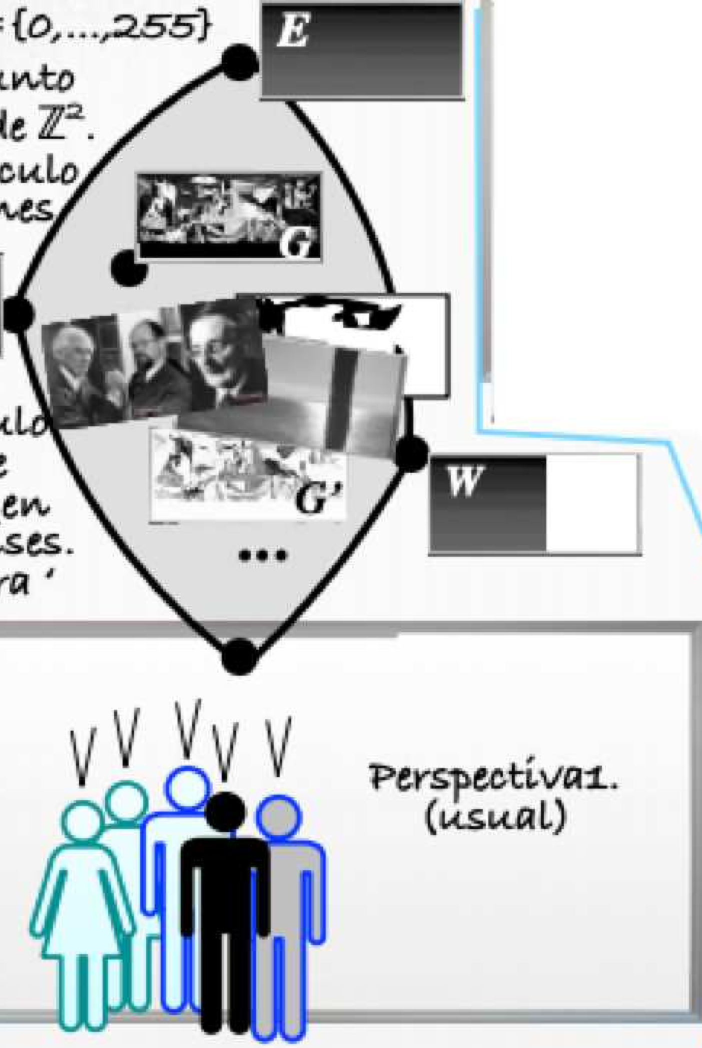
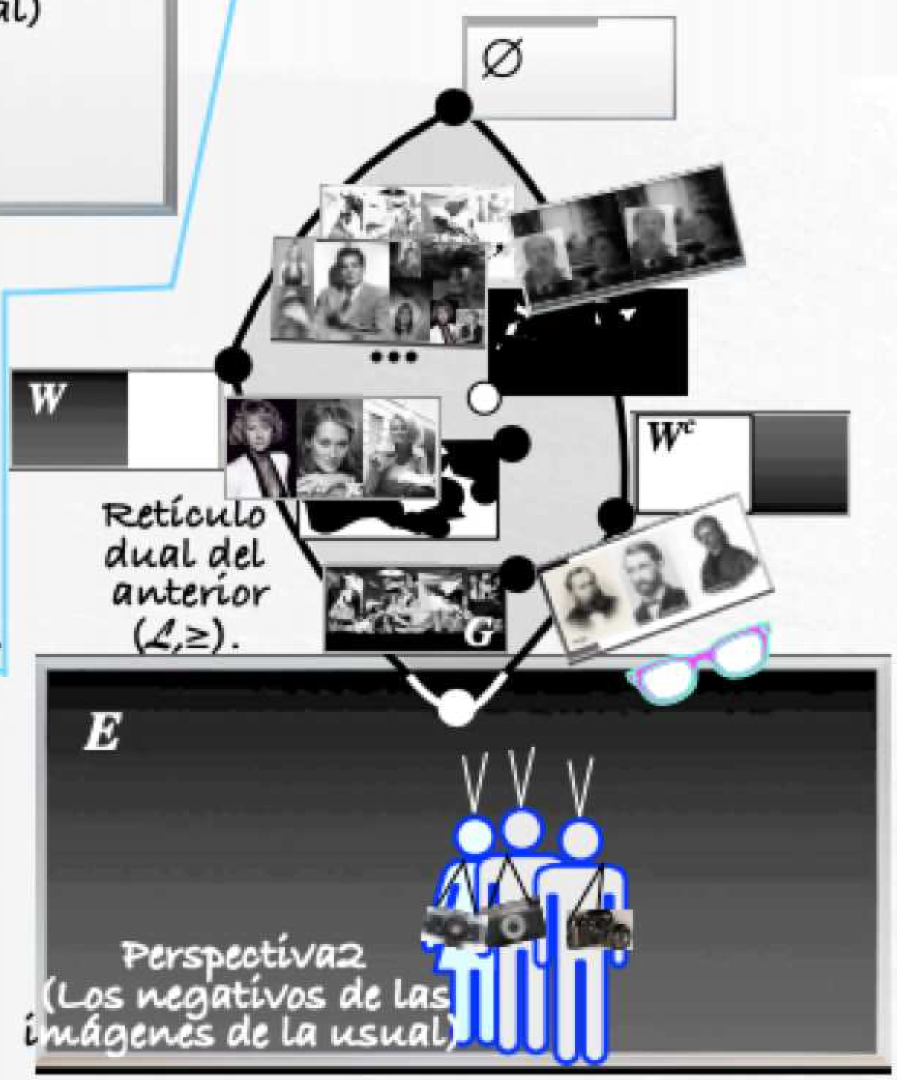


Imagen binaria. (Nítido)

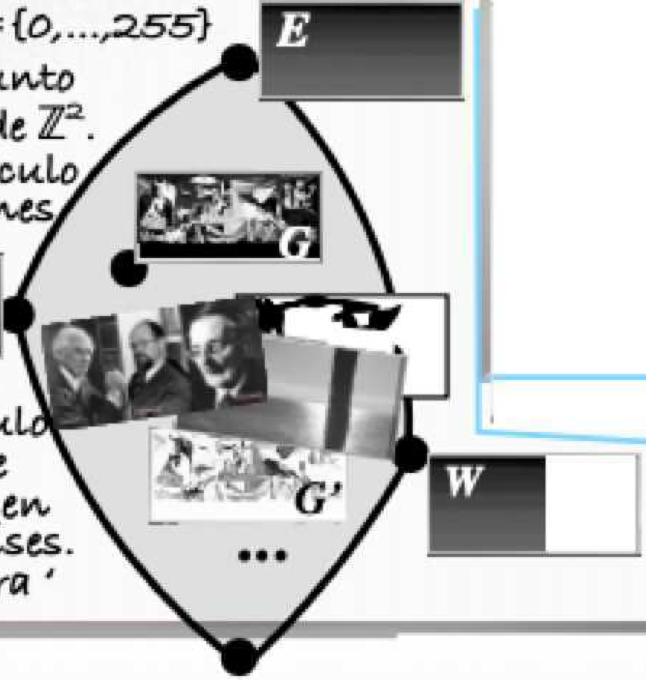
Con la relación de orden $\leq$ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.



Con la relación de orden $\geq$ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

Imagen binaria (Nítido)

Cadena L={0,...,255}
E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$. (L^E, ≤) retículo de imágenes



{∅, E}-Subrretículo (ℒ, ≤) de imágenes en tonos de grises. cerrado para '

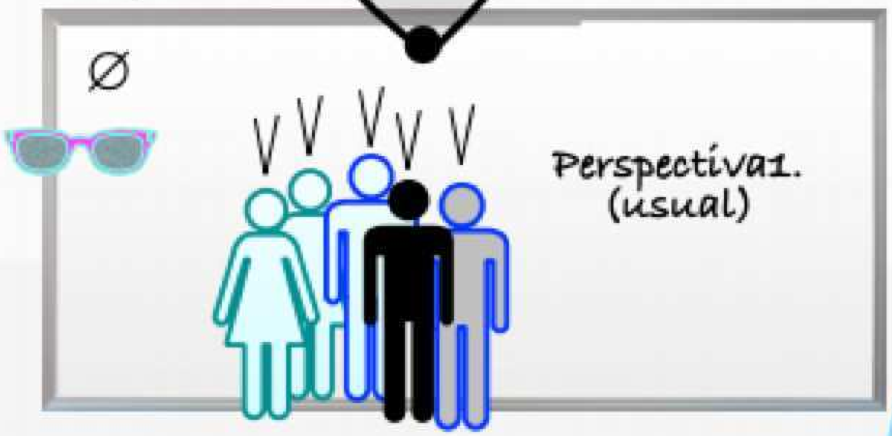


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo ((ℒ, ≤, ·, +, ∅, E), ') con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

Retículo dual del anterior (ℒ,≥).

Imagen binaria (Nítido)

Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación ((ℒ, ≥, +, ·, E, ∅), ') es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

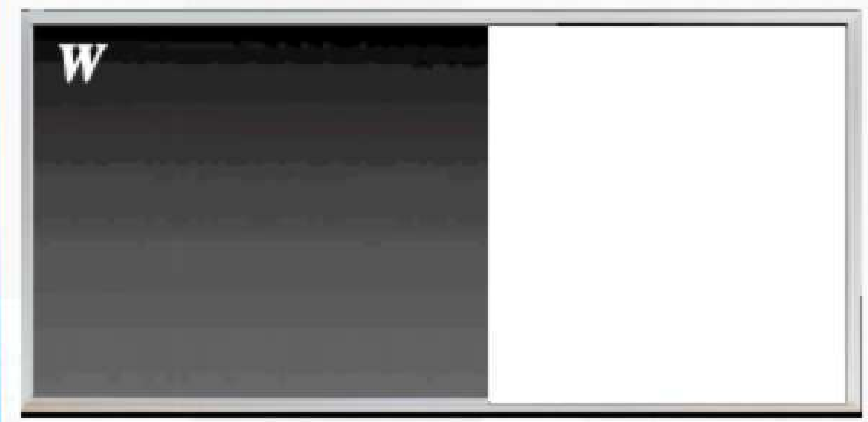


Imagen binaria (Nítido)

Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

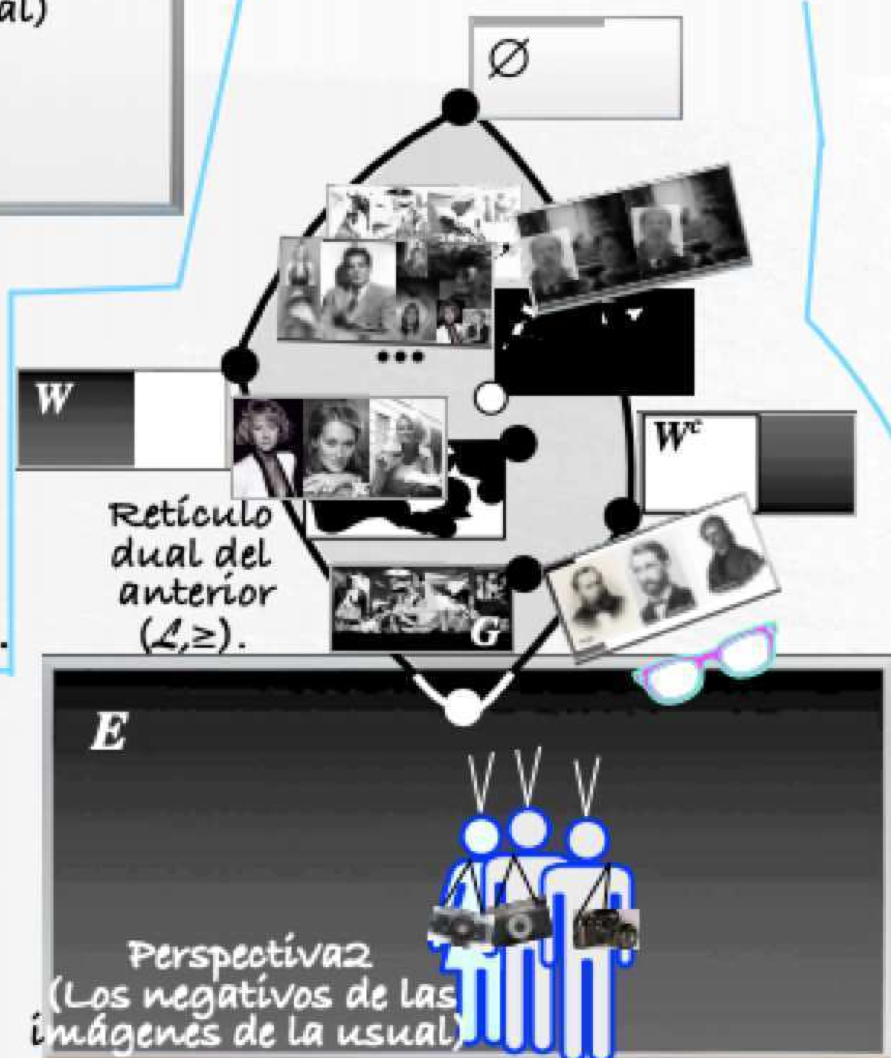


Imagen binaria (Nítido)

Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

Imagen binaria (Nítido)

Justificaremos aquí que, para el conjunto $N(\mathcal{L})$ de imágenes nítidas de $\mathcal{L}$, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^{w})_{w \in N(\mathcal{L})}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, W, W^{c}),')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$:

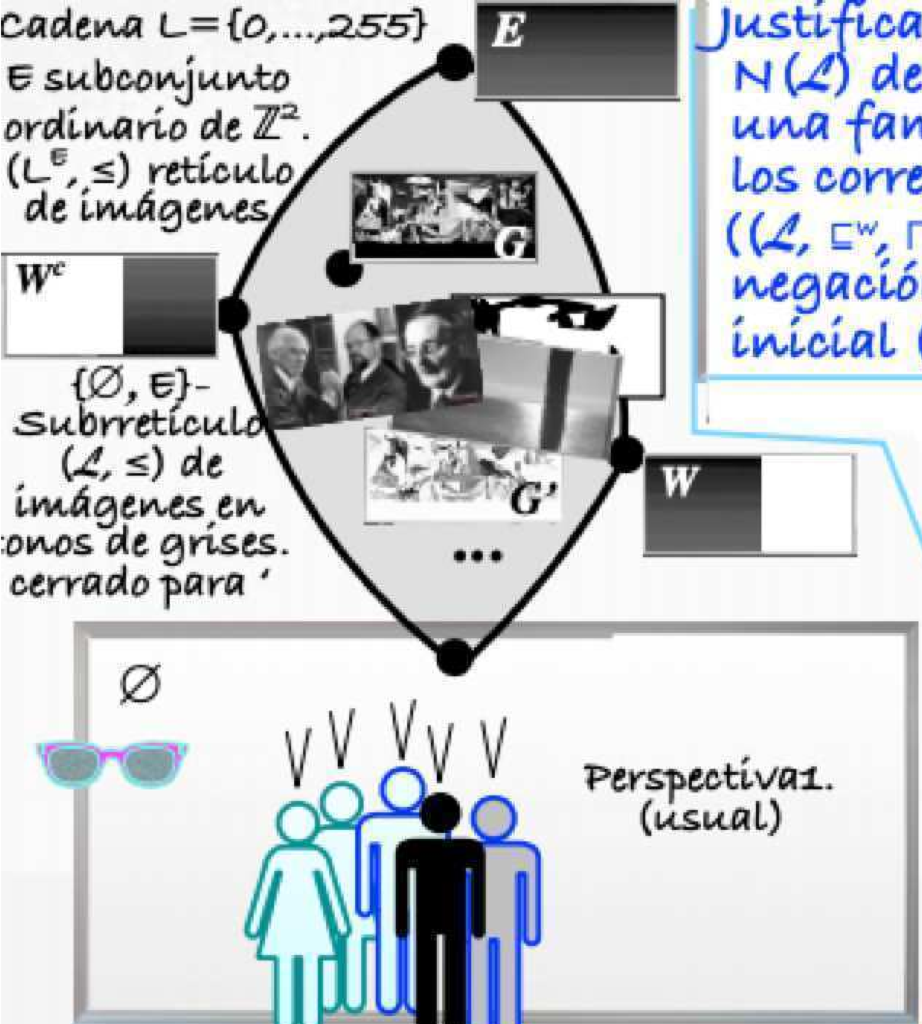


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

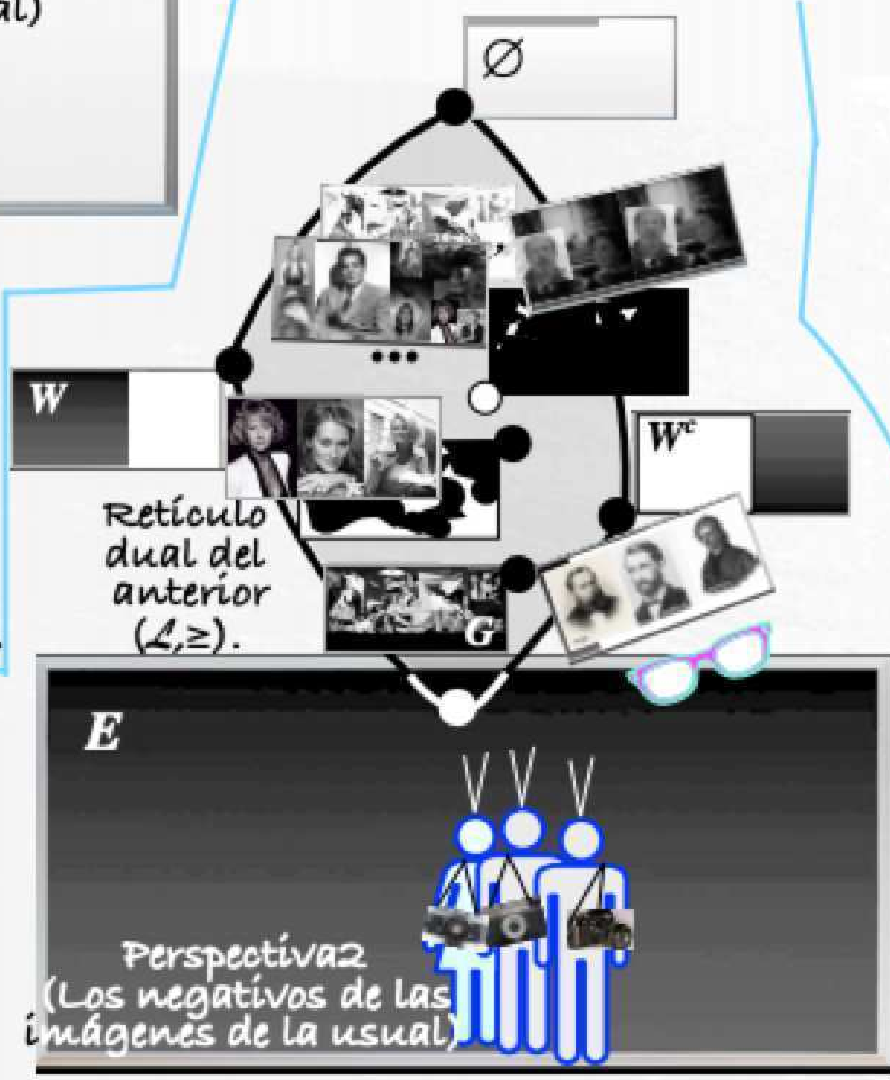


Imagen binaria (Nítido)

Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \geq, +, \cdot, E, \varnothing),')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

Imagen binaria (Nítido)

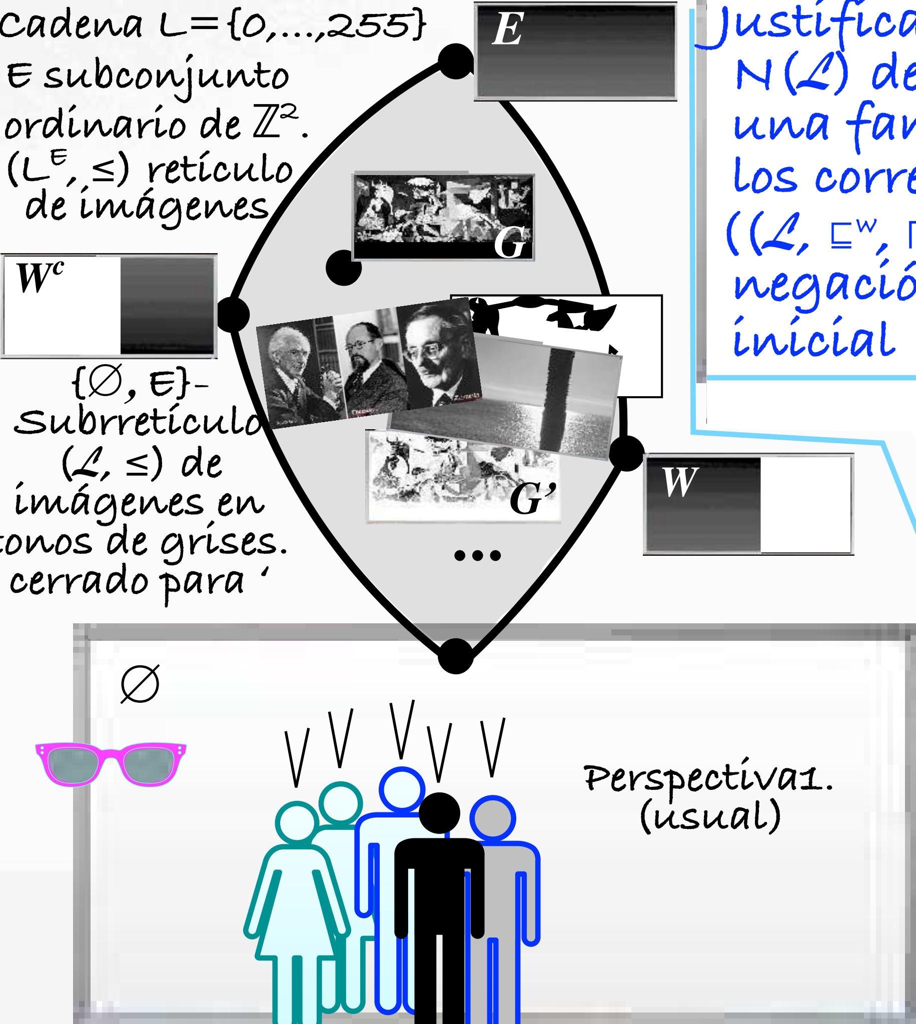
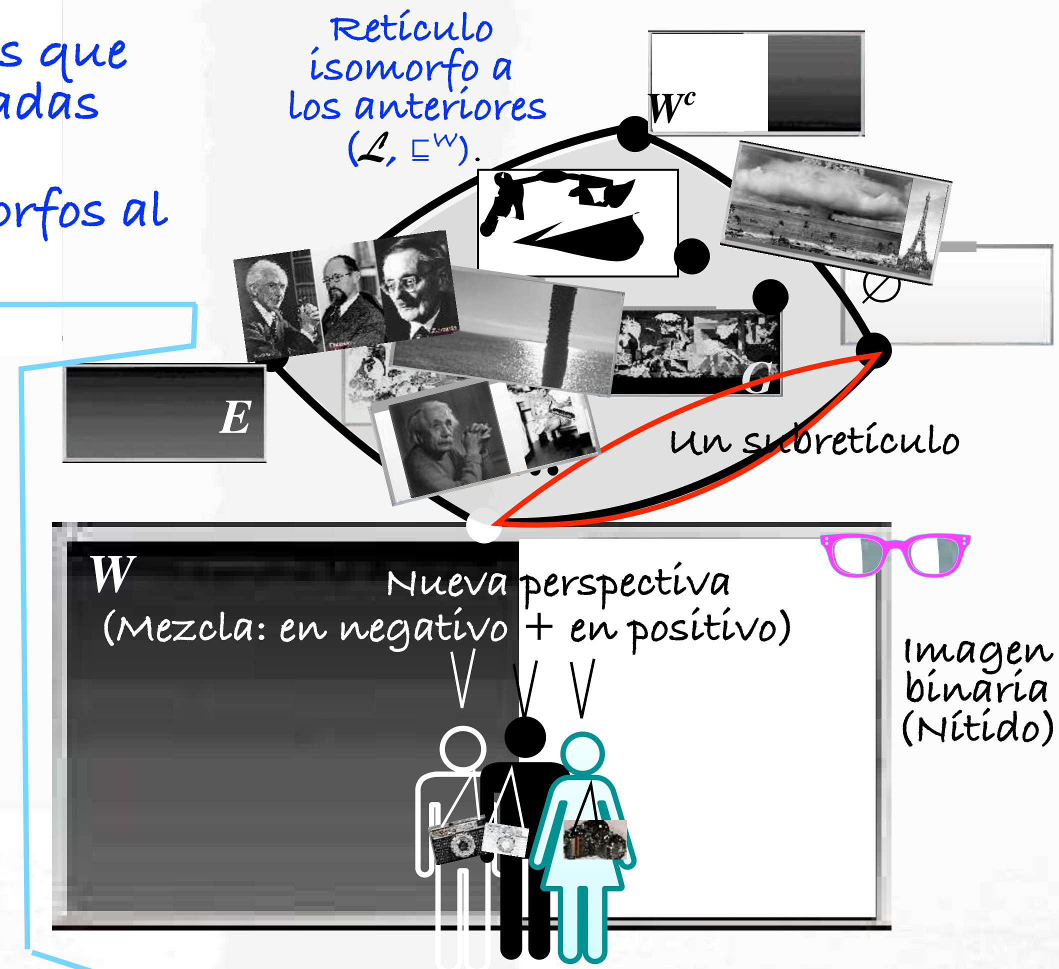
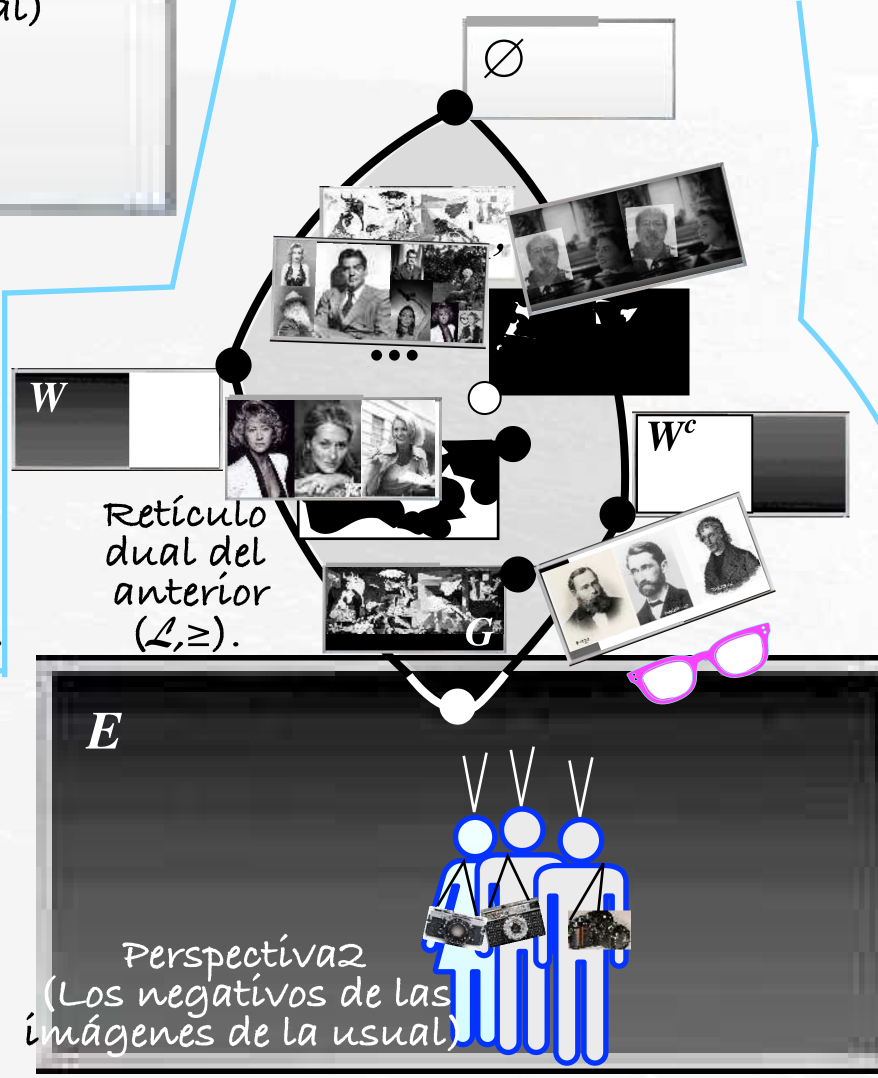


Imagen binaria. (Nítido)

Justificaremos aquí que, para el conjunto N($\mathcal{L}$) de imágenes nítidas de $\mathcal{L}$, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^W)_{W\in N(\mathcal{L})}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$:



Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.



Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

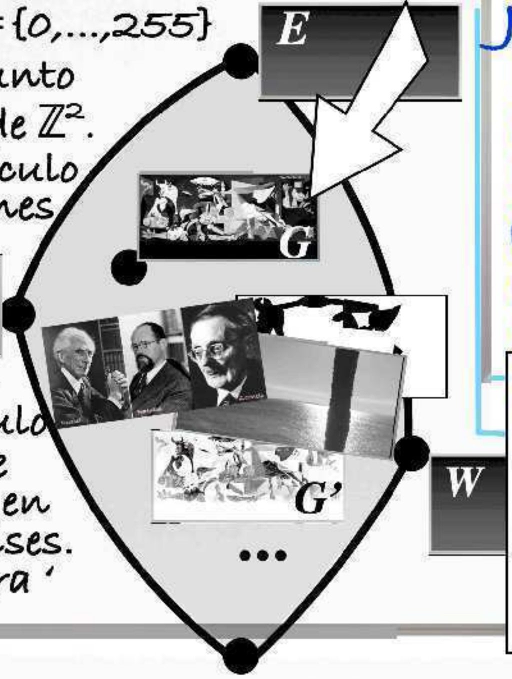
Imagen binaria (Nítido)

Cadena $L=\{0,\ldots,255\}$

E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$.

$(L^E,\le)$ retículo de imágenes

$\{\varnothing, E\}$-Subretículo $(\mathcal{L},\le)$ de imágenes en tonos de grises. cerrado para '



Justificaremos aquí que, para el conjunto $N(\mathcal{L})$ de imágenes nítidas de $\mathcal{L}$, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^W)_{W\in N(\mathcal{L})}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((\mathcal{L},\le,\cdot,+,\varnothing,E),')$:

¿Qué ocurre cuando $G\in\mathcal{L}$ no es una imagen binaria?

Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^g$ que proporciona una “perspectiva”:

Retículo isomorfo a los anteriores $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Imagen binaria (Nítido)

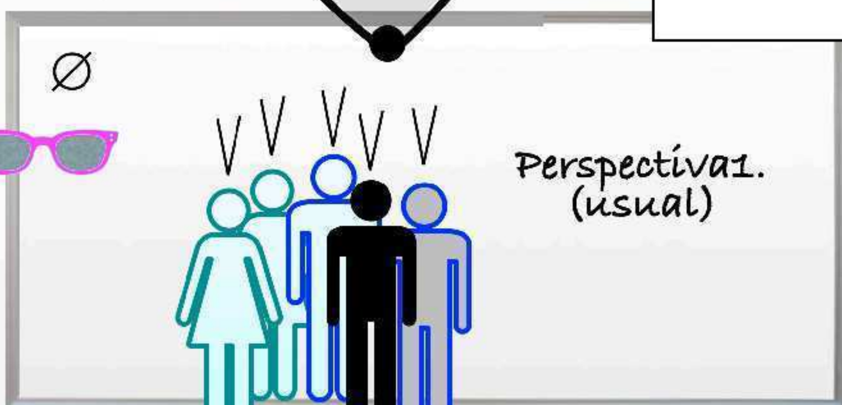
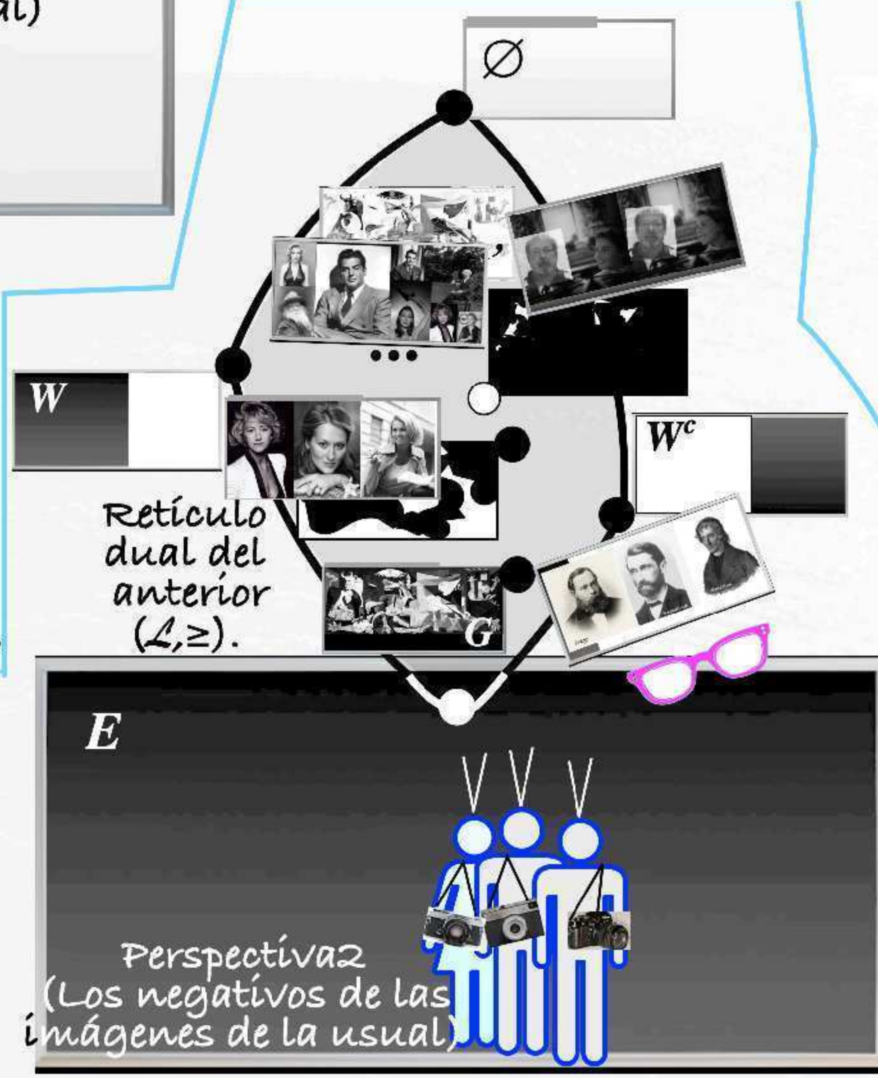


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden $\le$ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L},\le,\cdot,+,\varnothing,E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.



Retículo dual del anterior $(\mathcal{L},\ge)$.

Con la relación de orden $\ge$ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L},\ge,+,\cdot,E,\varnothing),')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde “los negativos” de las mismas imágenes.

Imagen binaria (Nítido)

Cadena L={0,...,255}

E subconjunto ordinario de $\mathbb{Z}^2$. $(L^E, \le)$ retículo de imágenes

{∅, E}-Subretículo $(\mathcal{L}, \le)$ de imágenes en tonos de grises. cerrado para '

Justificaremos aquí que, para el conjunto $N(\mathcal{L})$ de imágenes nítidas de $\mathcal{L}$, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^W)_{W\in N(\mathcal{L})}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((\mathcal{L}, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ')$:

¿Qué ocurre cuando $G\in\mathcal{L}$ no es una imagen binaria?
Demostraremos que
también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^G$
que proporciona una "perspectiva":

Retículo isomorfo a los anteriores $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Nueva perspectiva (Mezcla: en negativo + en positivo)

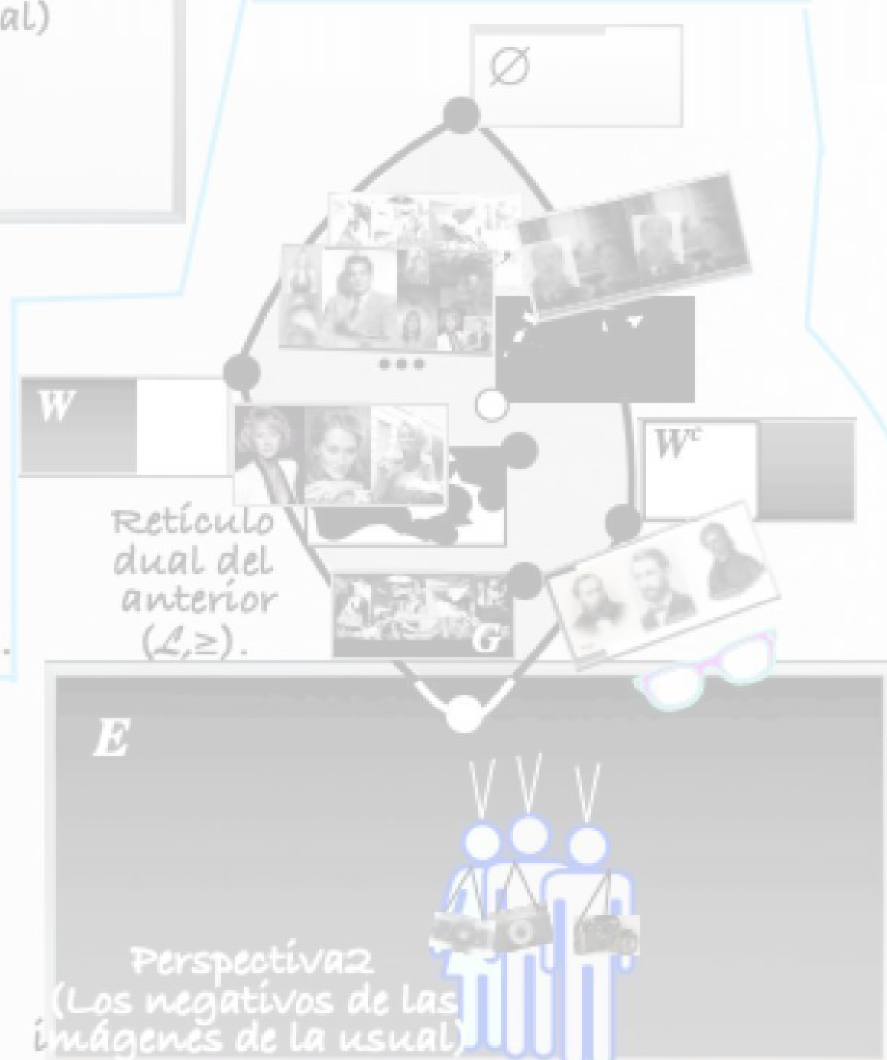
Imagen binaria (Nítido)

Perspectiva1. (usual)

Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \ge, +, \cdot, E, \varnothing), ')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.



Retículo dual del anterior $(\mathcal{L}, \ge)$.

Perspectiva2 (Los negativos de las imágenes de la usual)

Imagen binaria (Nítido)

¿Qué ocurre cuando $G \in \mathcal{L}$ no es una imagen binaria?

Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^{G}$ que proporciona una "perspectiva":

Imagen en tonos de grises

¿Qué ocurre cuando $G \in \mathcal{L}$ no es una imagen binaria?
Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^G$ que proporciona una "perspectiva":

Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden $\leq$ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

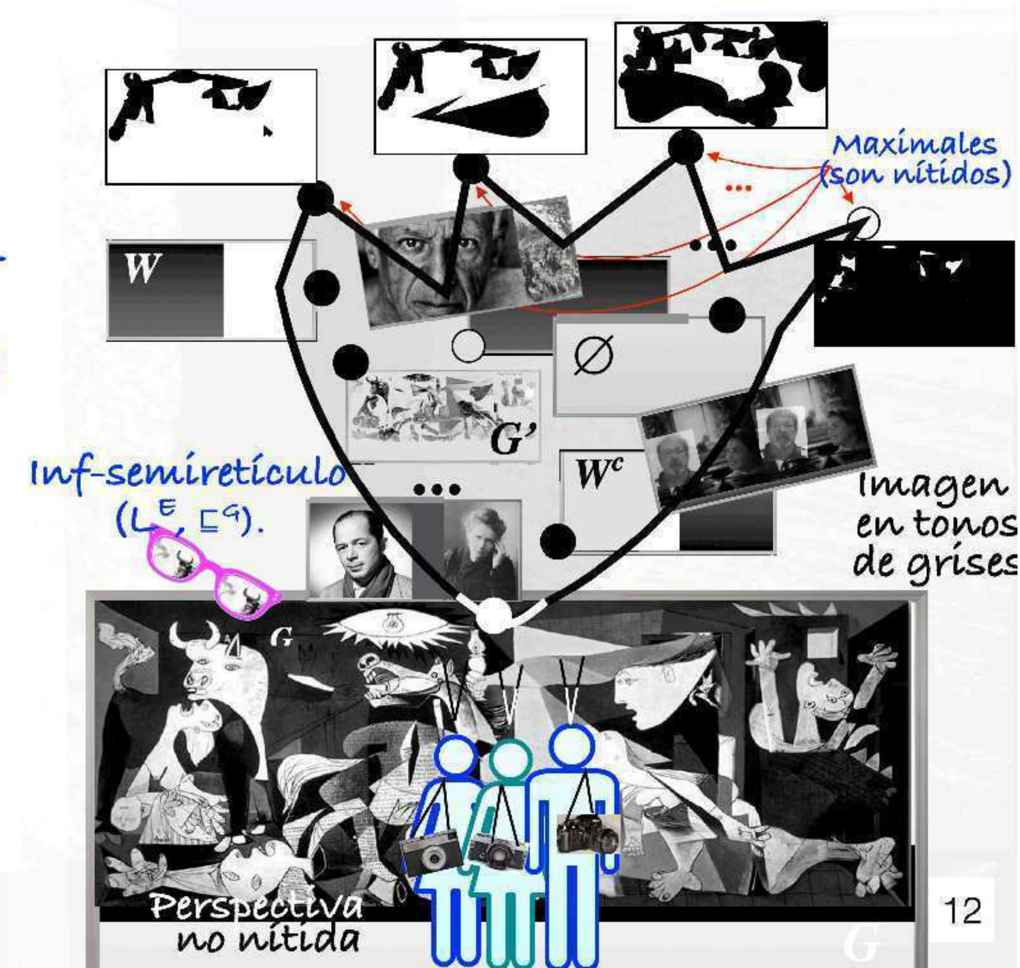
Con la relación de orden $\geq$ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((\mathcal{L}, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

¿Qué ocurre cuando $G \in \mathcal{L}$ no es una imagen binaria?

Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^G$ que proporciona una "perspectiva":

Perspectiva$_G$:
Una perspectiva "intermedia" (asociada a un orden $\sqsubseteq^G$).

Aunque ahora sólo obtendremos un <u>inf-semirretículo</u> acotado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^G, \sqcap^G, G)$ con elemento mínimo G e imágenes binarias como maximales:

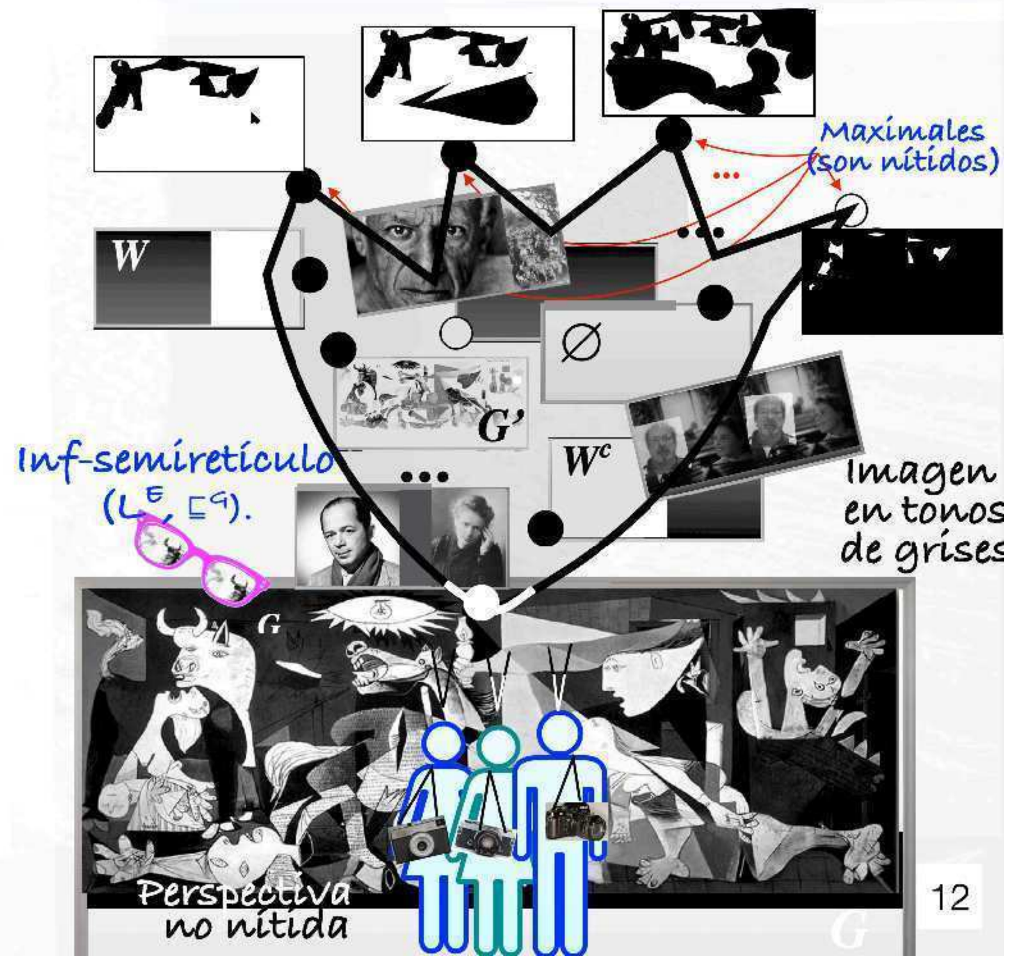


¿Qué ocurre cuando $G \in \mathcal{L}$ no es una imagen binaria?
Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^G$ que proporciona una "perspectiva":

Perspectiva$_G$:
Una perspectiva "intermedia"
(asociada a un orden $\sqsubseteq^G$).

(No es isomorfo a $(\mathcal{L}, \leq)$)

Aunque ahora sólo obtendremos un inf-semirretículo acotado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^G, \sqcap^G, G)$ con elemento mínimo G e imágenes binarias como maximales:

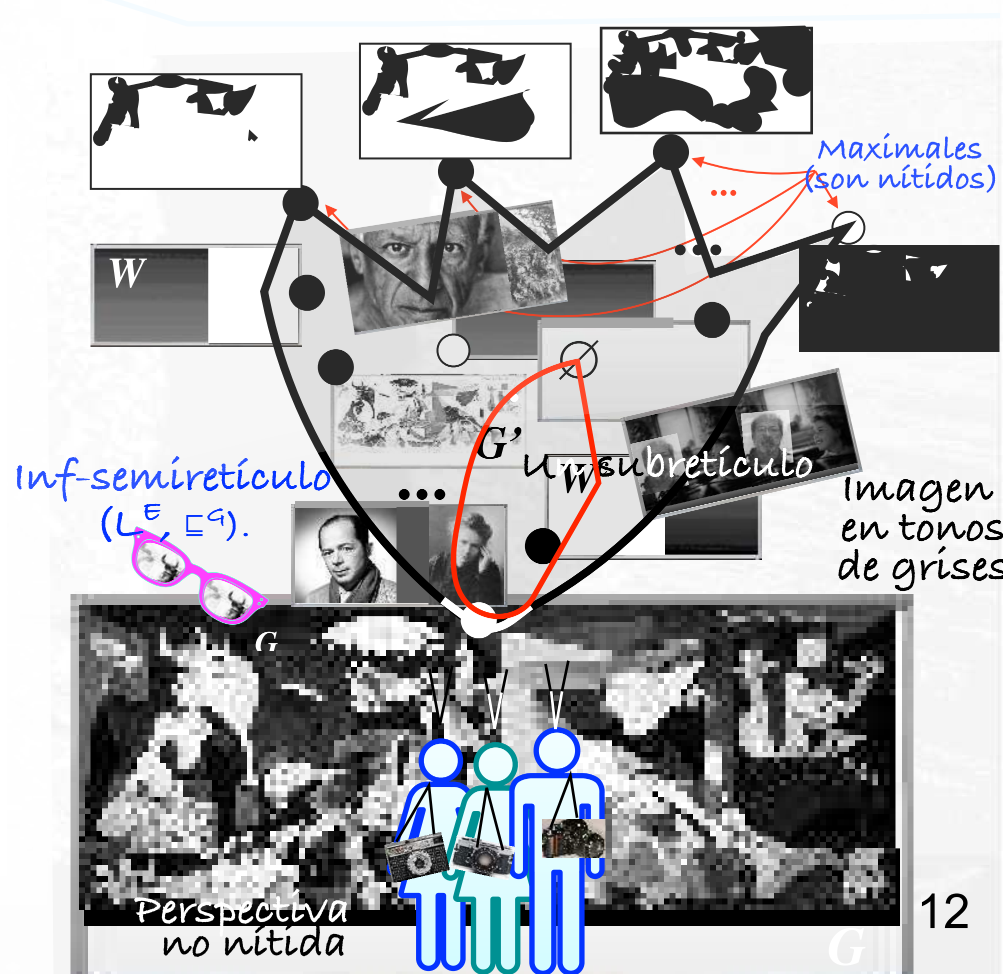


¿Qué ocurre cuando $G \in \mathcal{L}$ no es una imagen binaria?
Demostraremos que también existe en $\mathcal{L}$ un orden $\sqsubseteq^G$ que proporciona una "perspectiva":

Perspectiva$_G$:
Una perspectiva "intermedia" (asociada a un orden $\sqsubseteq^G$).

(No es isomorfo a $(\mathcal{L}, \leq)$)

Aunque ahora sólo obtendremos un inf-semirretículo acotado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^G, \sqcap^G, G)$ con elemento mínimo G e imágenes binarias como maximales:



Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \emptyset$, $B \sqsubset^{s} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de “perspectivas” y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término “vacío” y sobre la introducción de “contenidos propios” del conjunto vacío: $A \sqsubset^{W} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

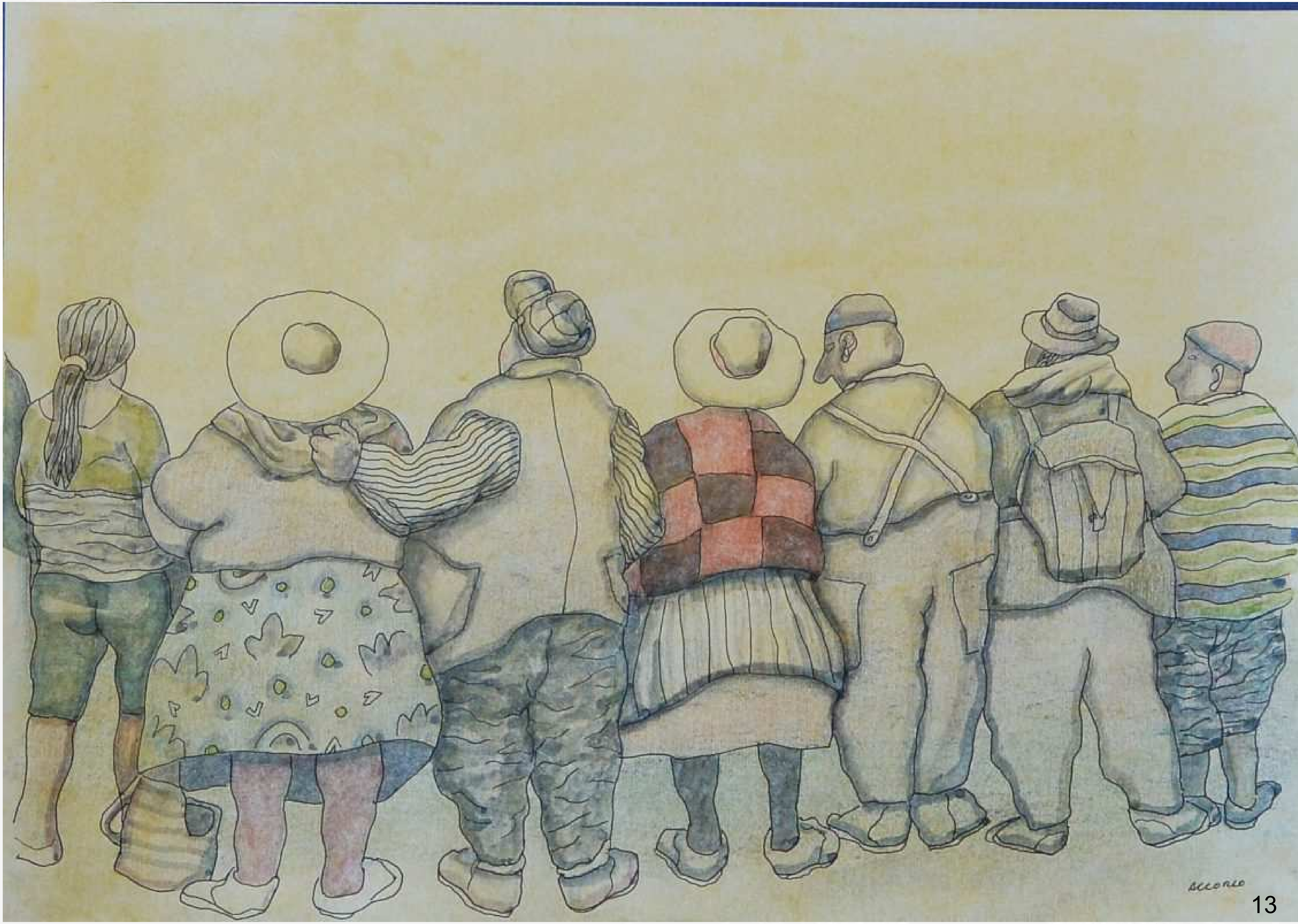
Sobre la introducción de “nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{W} B$, intersecciones $A \sqcap^{W} B$ y uniones $A \sqcup^{W} B$” entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" $A \sqsubset^{W} \varnothing$, $B \sqsubset^{S} \varnothing$, ..., del conjunto vacío.



“Contemplando el vacío”
(Manuel Alcorio)

Consultando la Wikipedia…

El vacío en Matemáticas

Conjunto vacío

Desde fines del siglo XX, en la matemática, particularmente en la Teoría axiomática de Conjuntos de ZF o la teoría intuitiva de conjuntos, el **conjunto vacío** es el que no posee elemento alguno. Puesto que lo único que define a un conjunto es la propiedad que satisfacen sus elementos, el conjunto vacío es único.

Algunas propiedades de los conjuntos son obviamente ciertas para el conjunto vacío. En una teoría axiomática de conjuntos, la existencia de un conjunto vacío se postula.

"Contemplando el vacío"

(Manuel Alcorio)

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío» y no de «un conjunto vacío». El conjunto vacío posee ciertas propiedades:

- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo:

$$A \subseteq \varnothing \text{ si y solo si } A = \varnothing$$

- El número de elementos o cardinal del conjunto vacío es cero:

$$|\varnothing| = 0$$

En particular, el conjunto vacío es un conjunto finito.

X

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío» y no de «un conjunto vacío». El conjunto vacío posee ciertas propiedades:

- El único subconjunto del conjunto vacío

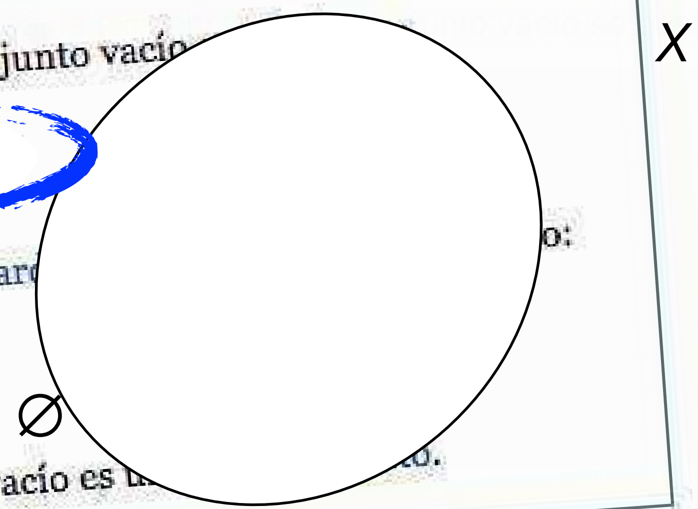
  ∅

  o:

- El número de elementos o car

  ∅

  En particular, el conjunto vacío es u to.



El vacío en Matemáticas

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío» y no de «un conjunto vacío». El conjunto vacío posee ciertas propiedades:

- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo:

  $\varnothing$

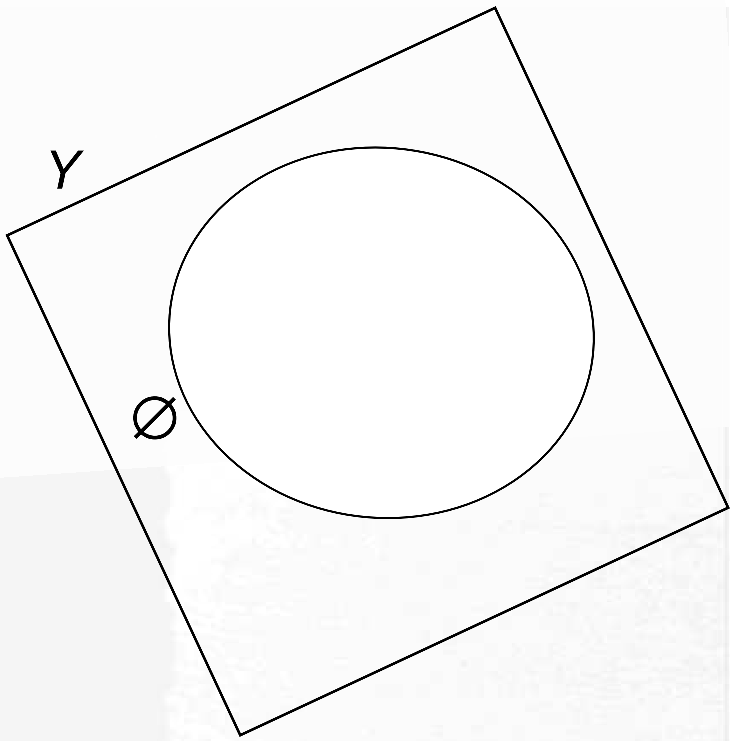
- El número de elementos o cardinal del conjunto vacío es cero:

  $\varnothing$

  En particular, el conjunto vacío es un conjunto finito.

X

¿Distintas representaciones del conjunto vacío o representaciones aproximadas de él?



El vacío en Matemáticas

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío» y no de «un conjunto vacío». El conjunto vacío posee ciertas propiedades:

- El único subconjunto del conjunto vacío es é

  ∅

- El número de elementos o cardinal del con

  ∅

  En particular, el conjunto vacío es un con

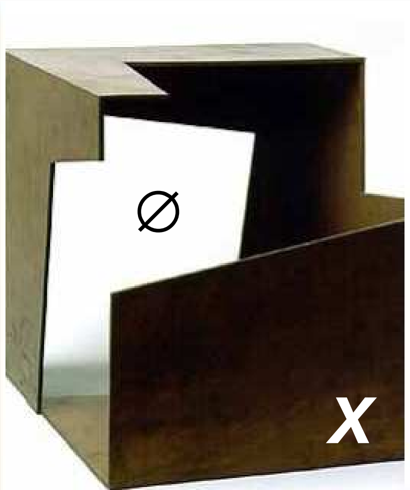
El **suprematismo** fue un movimiento artístico enfocado en formas geométricas fundamentales, que se formó en Rusia entre 1915 y 1916. Fue fundado por Kazimir Malévich.

Clasificado en su momento por los críticos como un cuadro vacío.

¿Distintas representaciones del conjunto vacío o representaciones aproximadas de él?

Z

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Jorge Oteiza

Bruno Catalano

El vacío en Matemáticas

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío» y no de «un conjunto vacío». El conjunto vacío posee ciertas propiedades:

- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo:

$$A \subseteq \varnothing \text{ si y solo si } A = \varnothing$$

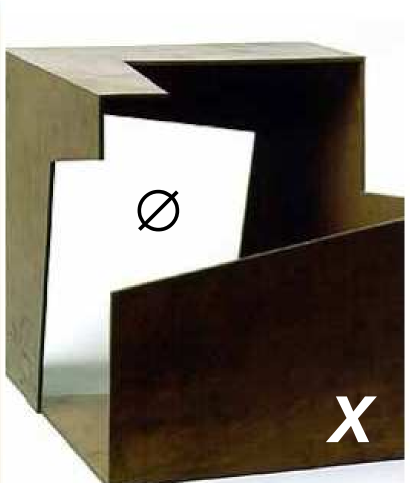
- El número de elementos o cardinal del con

$$|\varnothing| = 0$$

En particular, el conjunto vacío es un con

Z

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Jorge Oteiza

Bruno Catalano

Conjunto vacío único, representado por distintos recintos, curvas o superficies.

El vacío en Matemáticas

Conjunto vacío

Propiedades

Es necesario y legítimo hablar de «el conjunto vacío

- El único subconjunto del conjunto vac

$$A \subseteq \varnothing \text{ si y solo si } A = \varnothing$$

- El número de elementos o cardinal d

$$|\varnothing| = 0$$

- En particular, el conjunto vacío es u

- Para todo conjunto A, el conjunto vacío es subconjunto de A:

$$\varnothing \subseteq A$$

- Para todo conjunto A, la unión de A con el conjunto vacío es A:

$$A \cup \varnothing = A$$

- Para todo conjunto A, la intersección de A con el conjunto vacío resulta en el conjunto vacío:

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- Para todo conjunto A, el producto cartesiano de A y el conjunto vacío es vacío:

Otras propiedades

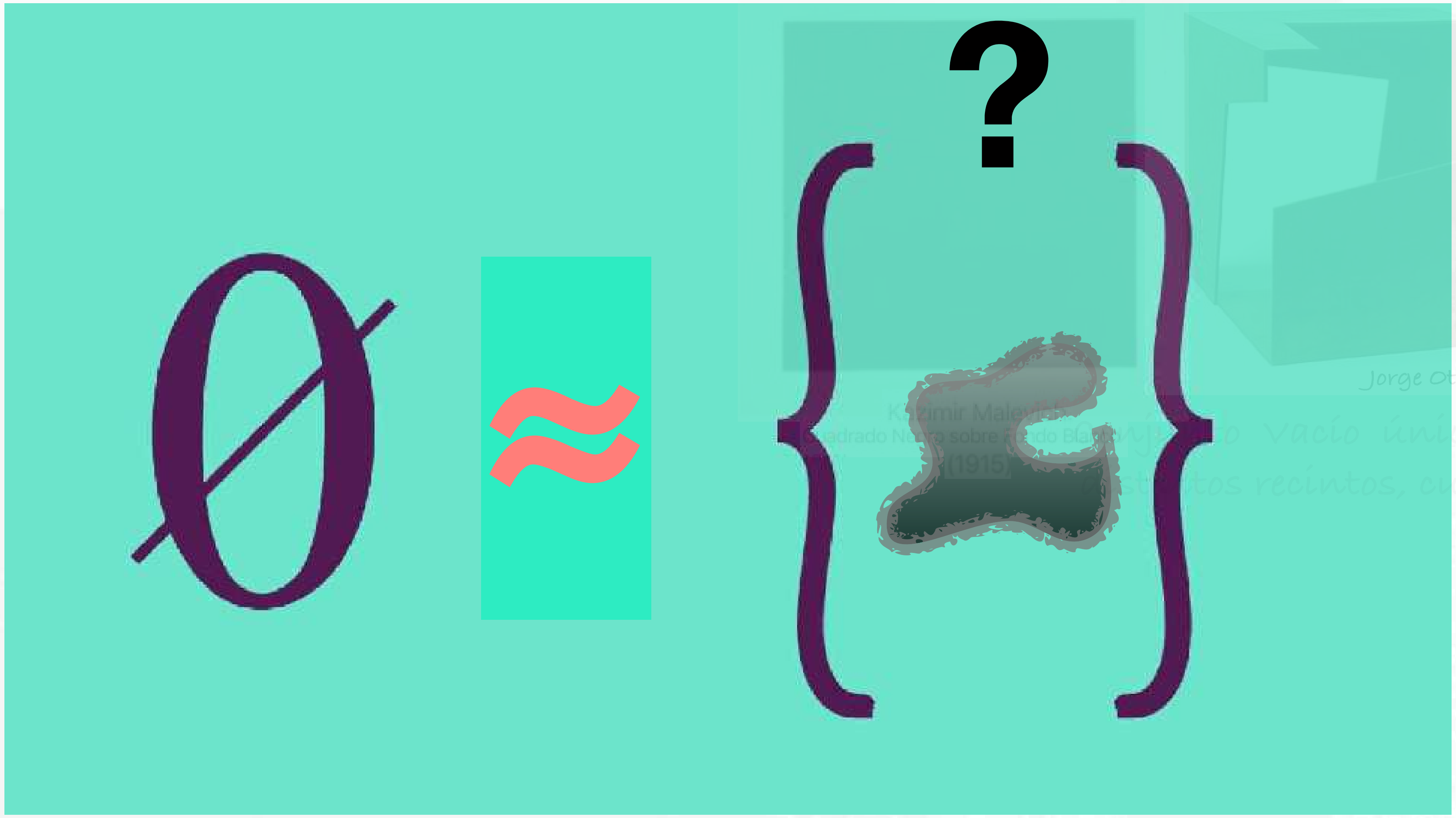
- La intersección de un conjunto y su complementario es el conjunto vacío.En símbolos: $A \cap A^c = \varnothing$
- El conjunto $\varnothing$ es abierto y cerrado.
- La diferencia de cualquier conjunto consigo mismo es el conjunto vacío. $A \setminus A = \varnothing$
- En la diferencia simétrica definida en un conjunto potencia , el conjunto vacío es el elemento neutro, esto es, $A \,\Delta \varnothing = A$
- En una partición de un conjunto inducida por una relación de equivalencia, la intersección de dos clases distintas es el conjunto vacío. $k \neq l \Rightarrow A_k \cap A_l = \varnothing$
- El conjunto vacío es elemento del conjunto potencia de cualquier conjunto, necesariamente. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ [3]
- La unión de una familia vacía de conjuntos es el conjunto vacío
- la intersección de una familia vacía de conjuntos es el conjunto vacío.
- $\varnothing$ figura como elemento propio de toda topología sobre X. Notación: $\varnothing \in T(X)$. Y es cerrado, a la vez que abierto en cualquier topología.[4]
- La intersección del interior del conjunto **A** con el interior de su complementario es $A^\circ \cap B^\circ = \varnothing$ donde $B = X \setminus A$
- La intersección del interior con su frontera es $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$
- El conjunto $A = \{x / x \in \mathcal{R}\}$ tal que $|x| < 0$ es igual a $\varnothing$ [5]
- En cálculo de probabilidades el conjunto vacío representa el suceso imposible y P(∅) = 0 [6]

$(\nexists x : x \in \emptyset)$

$$\emptyset = \{\ \}$$

Aunque...

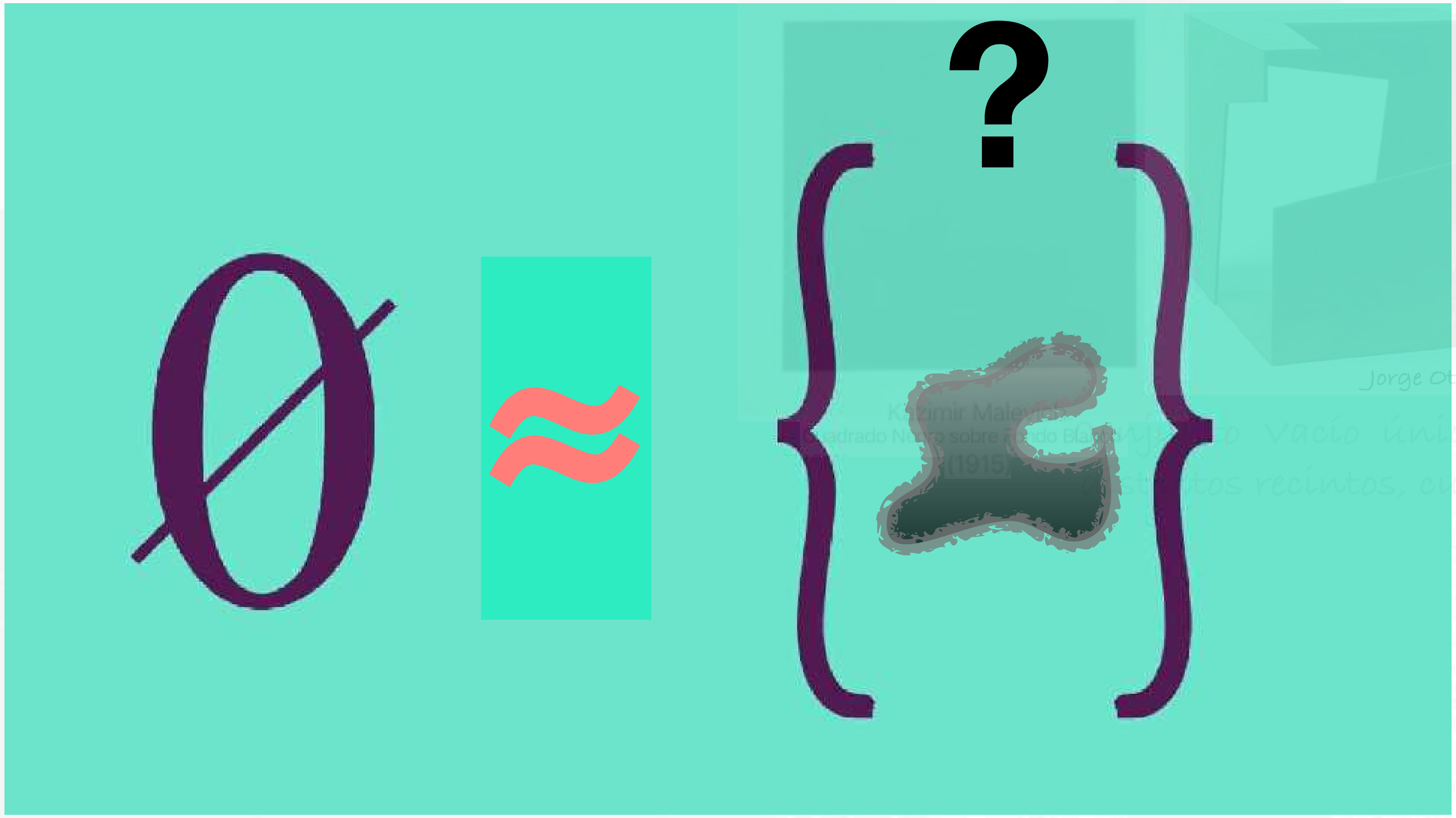
(∄x: x ∈∅)



Aunque...

$(\nexists x: x \in \varnothing)$

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia



Aunque...

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío

El **vacío** (del latín *vacīvus*) es la ausencia total de material en los elementos (materia) en un determinado espacio o lugar, o la falta de contenido en el interior de un recipiente. Por extensión, se denomina también vacío a la condición de una región donde la densidad de partículas es muy baja, como por ejemplo el espacio interestelar; o la de una cavidad cerrada donde la presión del aire u otros gases es menor que la atmosférica.

Aunque...

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío cuántico

En la teoría cuántica de campos, el **vacío cuántico** (o simplemente el **vacío**) es el estado cuántico con la menor energía posible. Generalmente no contiene partículas físicas. El término «energía del punto cero» es usado ocasionalmente como sinónimo para el vacío cuántico de un determinado campo cuántico.

Concepto

De acuerdo a lo que se entiende actualmente por vacío cuántico o «estado de vacío», este «no es desde ningún punto de vista un simple espacio vacío»,[1] y otra vez: «es un error pensar en cualquier vacío físico como un absoluto espacio vacío».[2] De acuerdo con la mecánica cuántica, el vacío cuántico no está realmente vacío, sino que contiene ondas electromagnéticas fluctuantes y partículas que saltan dentro y fuera de la existencia.[3 4 5]

Según las modernas teorías de las partículas elementales, el vacío es un objeto físico, se puede cargar de energía y convertir en varios estados distintos. Dentro de su terminología, los físicos hablan de vacíos diferentes. El tipo de partículas elementales, su masa y sus interacciones, están dados por el vacío subyacente. La relación entre las partículas y el vacío es similar a la relación entre las ondas del sonido y la materia por la que se propagan. Los tipos de ondas y la velocidad a la que viajan varía dependiendo del material.

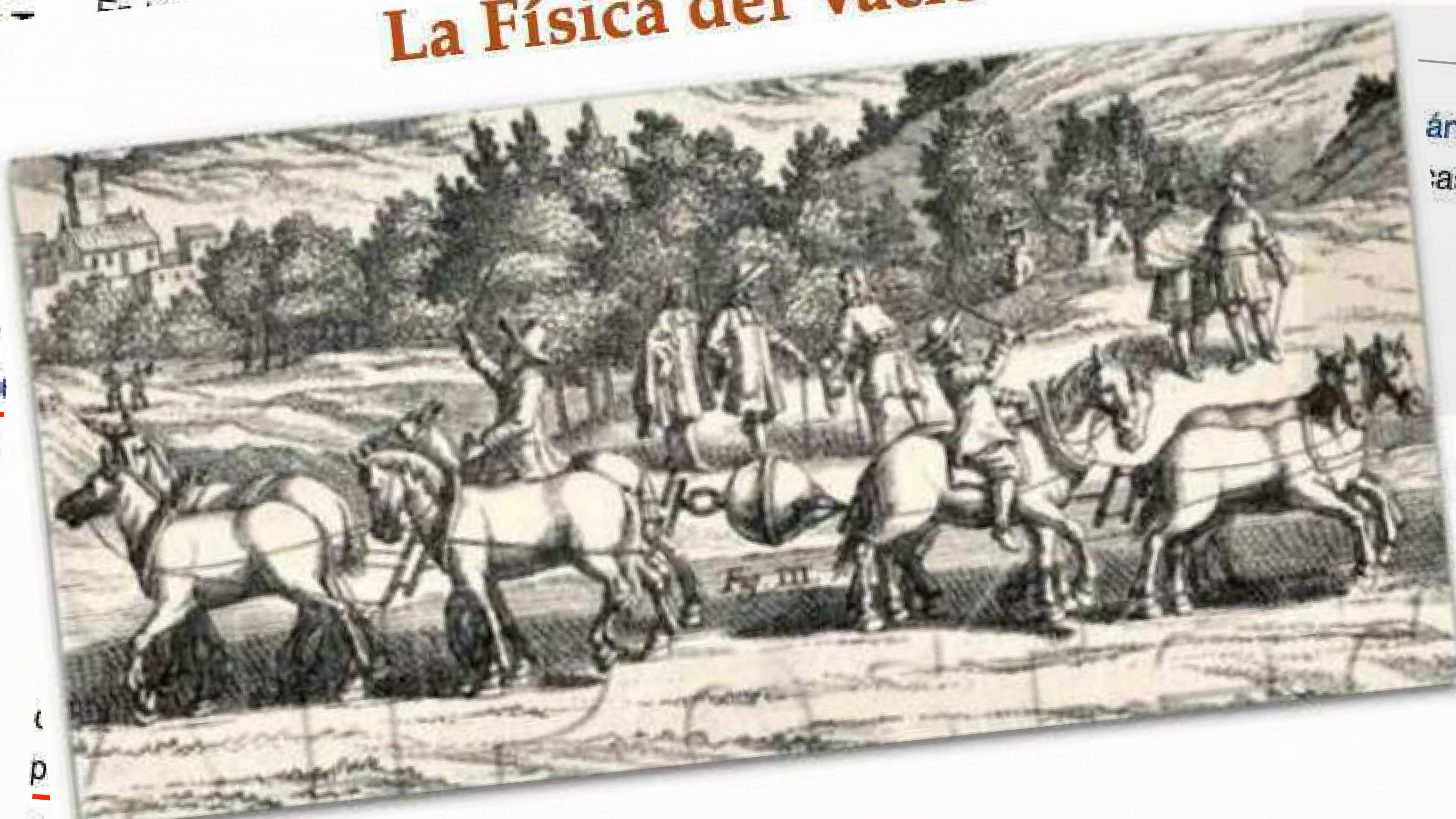
Aunque...

(∄x: x ∈∅)?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío cuántico

La Física del Vacío



Bert Janssen

Dpto. de Física Teórica y del Cosmos - UGR

ántico con la menor energía posible.
asionalmente como sinónimo para el

o lugar, o la falta
n donde la
la presión del aire

Jorge Oteiza

Bruno Catalano

Kazimir Malevich
Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

Conjunto vacío, único, representado por distintos recintos, curvas o superficies

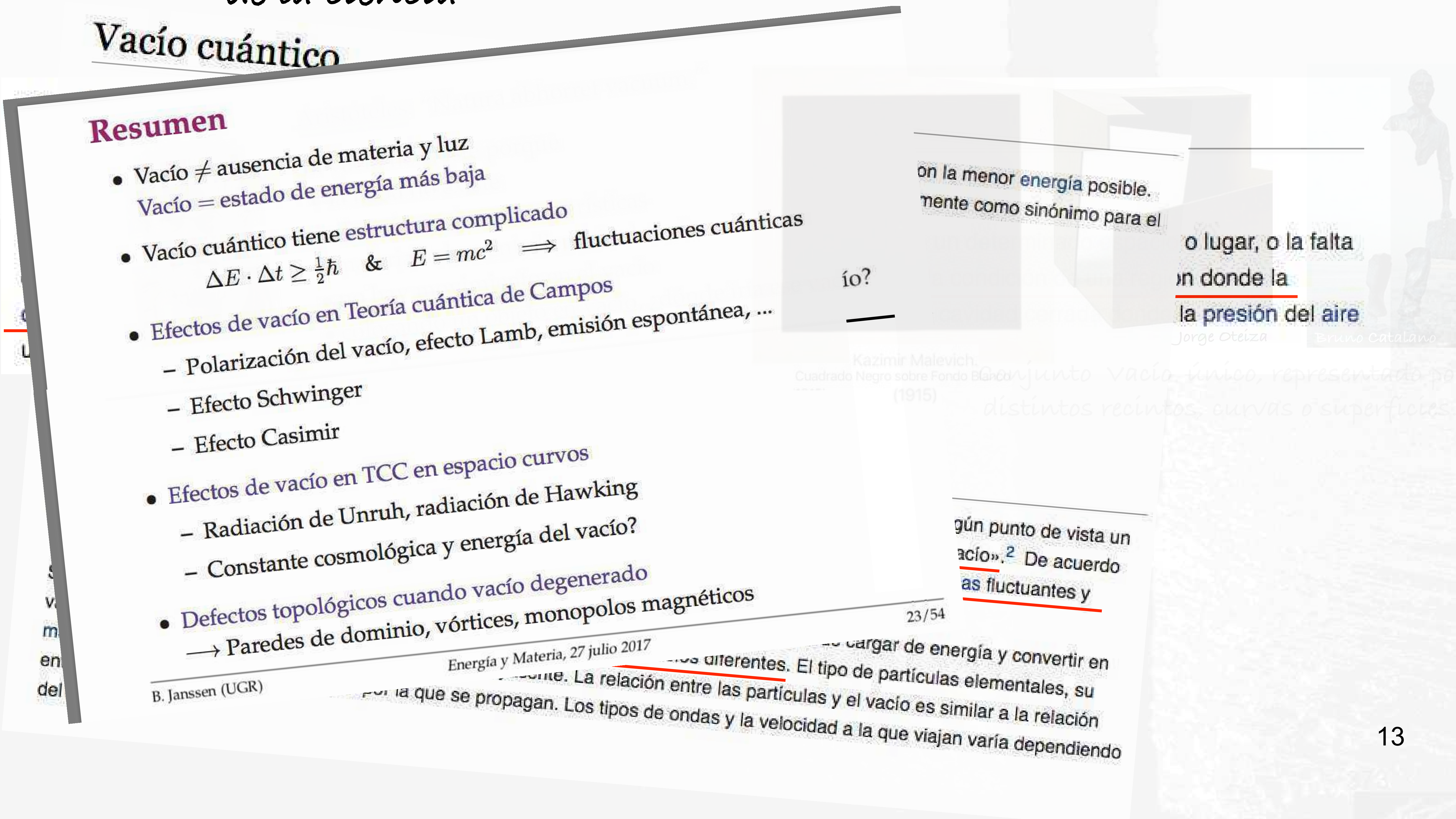
sde ningún punto de vista un
pacio vacío».[2] De acuerdo
agnéticas fluctuantes y

objeto físico, se puede cargar de energía y convertir en
físicos hablan de vacíos diferentes. El tipo de partículas elementales, su
por el vacío subyacente. La relación entre las partículas y el vacío es similar a la relación
sonido y la materia por la que se propagan. Los tipos de ondas y la velocidad a la que viajan varía dependiendo
del material.

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia



Vacío cuántico

Resumen

- Vacío $\neq$ ausencia de materia y luz
  Vacío = estado de energía más baja
- Vacío cuántico tiene estructura complicado
  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar \quad \& \quad E = mc^2 \quad \Longrightarrow$ fluctuaciones cuánticas
- Efectos de vacío en Teoría cuántica de Campos
  - Polarización del vacío, efecto Lamb, emisión espontánea, ...
  - Efecto Schwinger
  - Efecto Casimir
- Efectos de vacío en TCC en espacio curvos
  - Radiación de Unruh, radiación de Hawking
  - Constante cosmológica y energía del vacío?
- Defectos topológicos cuando vacío degenerado
  $\longrightarrow$ Paredes de dominio, vórtices, monopolos magnéticos

B. Janssen (UGR) — Energía y Materia, 27 julio 2017 — 23/54

Aunque...

($\nexists x: x \in \varnothing$)?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío cuántico

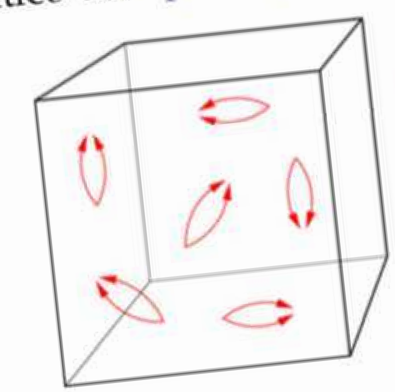
Aristóteles: "Natura abhorret vacuum."

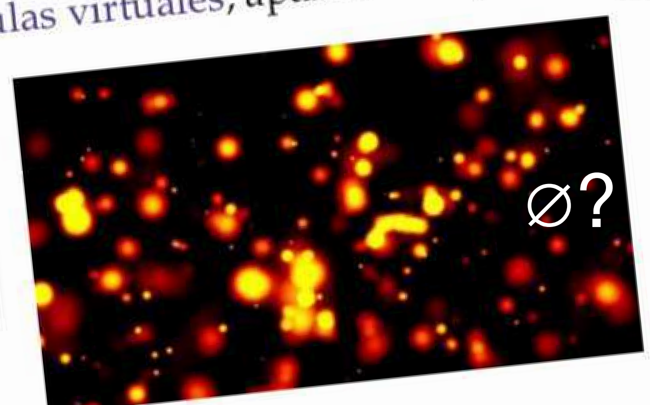
El vacío no existe porque

- la nada no existe
- el vacío no tiene características
- material adyacente llenaría el vacío
- no hay movimiento en el vacío
- colocando un objeto en vacío, ¿dónde iría ese vacío?

Vacío cuántico no es espacio vacío, tras quitar moléculas, átomos y fotones

Vacío cuántico es sopa de partículas virtuales, apareciendo y desapareciendo





B. Janssen (UGR) Energía y Materia, 27 julio 2017 23/54

on la menor energía posible.
mente como sinónimo para el

o lugar, o la falta
on donde la
la presión del aire

gún punto de vista un
acío».[2] De acuerdo
as fluctuantes y

cargar de energía y convertir en
diferentes. El tipo de partículas elementales, su
La relación entre las partículas y el vacío es similar a la relación
por la que se propagan. Los tipos de ondas y la velocidad a la que viajan varía dependiendo

Aunque...

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío cuántico

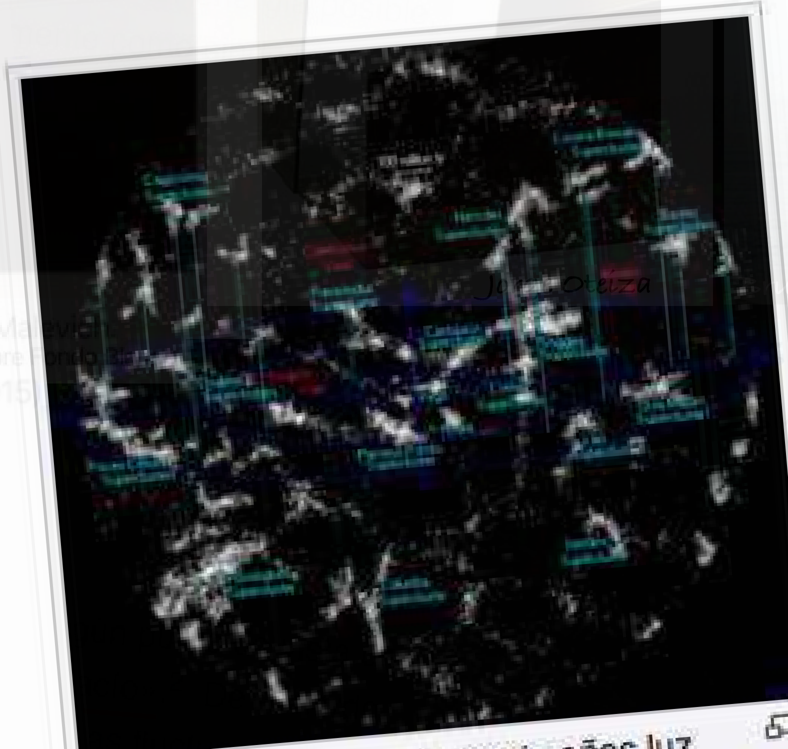
Aristóteles: "Natura abhorret vacuum."

El vacío no existe porque

Vacío (astronomía)

En astronomía los **vacíos** son los espacios entre filamentos, la estructura de mayor escala en el Universo, que contiene muy pocas o ninguna galaxia. Fueron descubiertos por primera vez en 1978 durante un estudio pionero llevado a cabo por Stephen Gregory y Laird A. Thompson en el Observatorio Nacional de Kitt Peak.[1] Los vacíos tienen normalmente un diámetro que va desde 11 a 150 Mpc; particularmente, nos referimos a los vacíos grandes, definidos por la ausencia de ricos supercúmulos, como **supervacíos**. Los vacíos que se encuentran en entornos de alta-densidad son más pequeños que los situados en los espacios de baja-densidad del universo.[2]

Se cree que los vacíos se formaron debido a la oscilación acústica de bariones en el Big Bang a causa del colapso de masas seguido de implosiones de materia comprimida de bariones. El exterior de los vacíos es lo que queda de los choques frontales que se ocasionaron debido a este proceso. El desacoplamiento de la materia respecto a la radiación cuando el universo se volvió transparente "congeló" los vacíos y los choques frontales.[cita requerida]



El universo 1000 millones de años luz (307 Mpc) alrededor de la Tierra, mostrando el supercúmulo local y los vacíos

... la relación
... a la que viajan varía dependiendo

Aunque...

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

Vacío cuántico

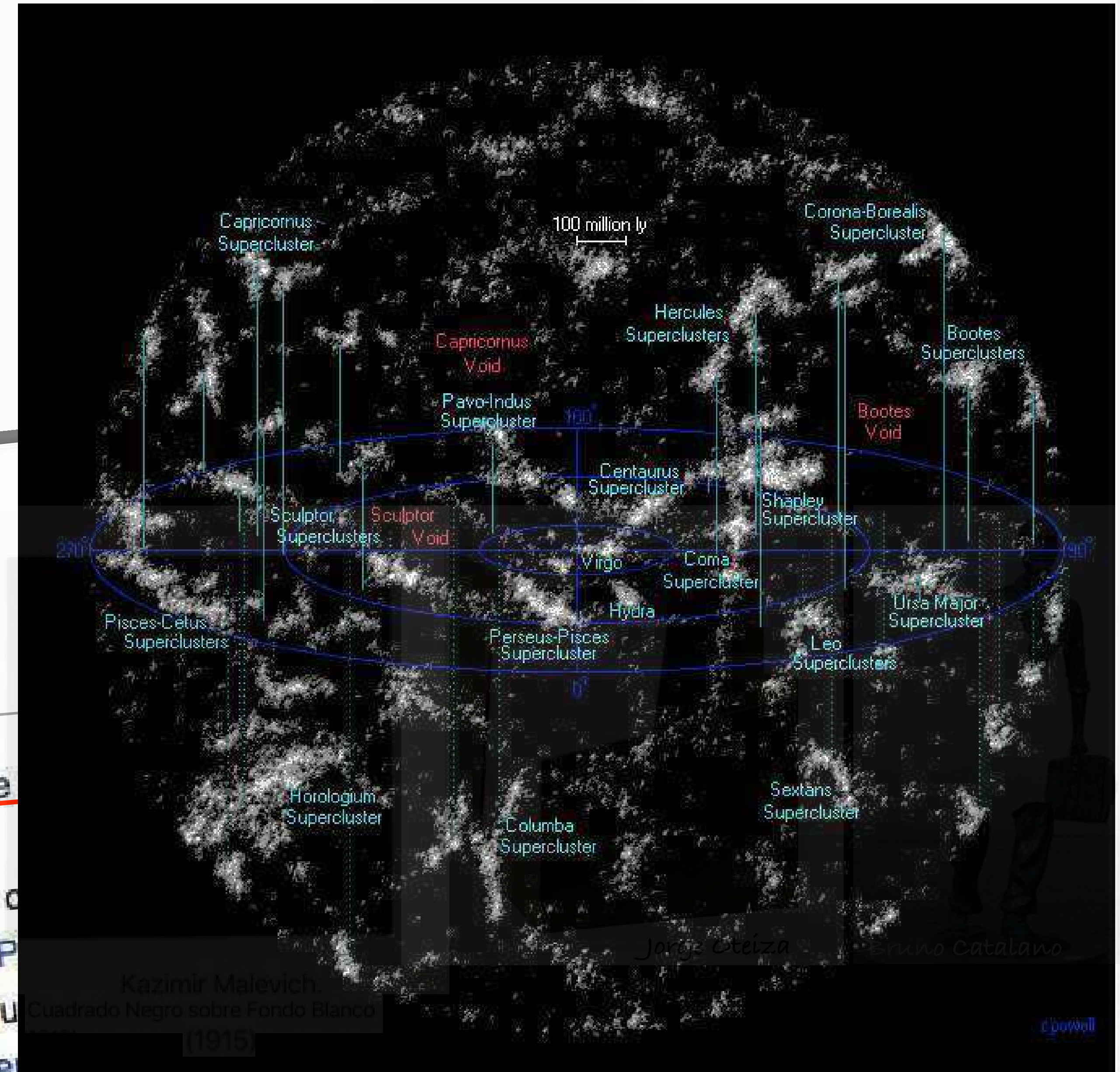
Aristóteles: "Natura abhorret vacuum."

El vacío no existe porque

Vacío (astronomía)

En astronomía los **vacíos** son los espacios entre filamentos, la estructura de escala en el Universo, que contiene muy pocas o ninguna galaxia. Fueron descubiertos por primera vez en 1978 durante un estudio pionero llevado a c Stephen Gregory y Laird A. Thompson en el Observatorio Nacional de Kitt P vacíos tienen normalmente un diámetro que va desde 11 a 150 Mpc; particu nos referimos a los vacíos grandes, definidos por la ausencia de ricos supe como **supervacíos**. Los vacíos que se encuentran en entornos de alta-den más pequeños que los situados en los espacios de baja-densidad del unive

Se cree que los vacíos se formaron debido a la oscilación acústica de bariones en el Big Bang a causa del colapso de masas seguido de implosiones de materia comprimida de bariones. El exterior de los vacíos es lo que queda de los choques frontales que se ocasionarion debido a este proceso. El desacoplamiento de la materia respecto a la radiación cuando el universo se volvió transparente "congeló" los vacíos y los choques frontales.[cita requerida]



1000 millones de años luz (307 Mpc) alrededor de la Tierra, mostrando el supercúmulo local y los vacíos

El universo 1000 millones de años luz (307 Mpc) alrededor de la Tierra, mostrando el supercúmulo local y los vacíos

... la relación ... a la que viajan varía dependiendo

Aunque…

El término "vacío" en otros contextos de la ciencia

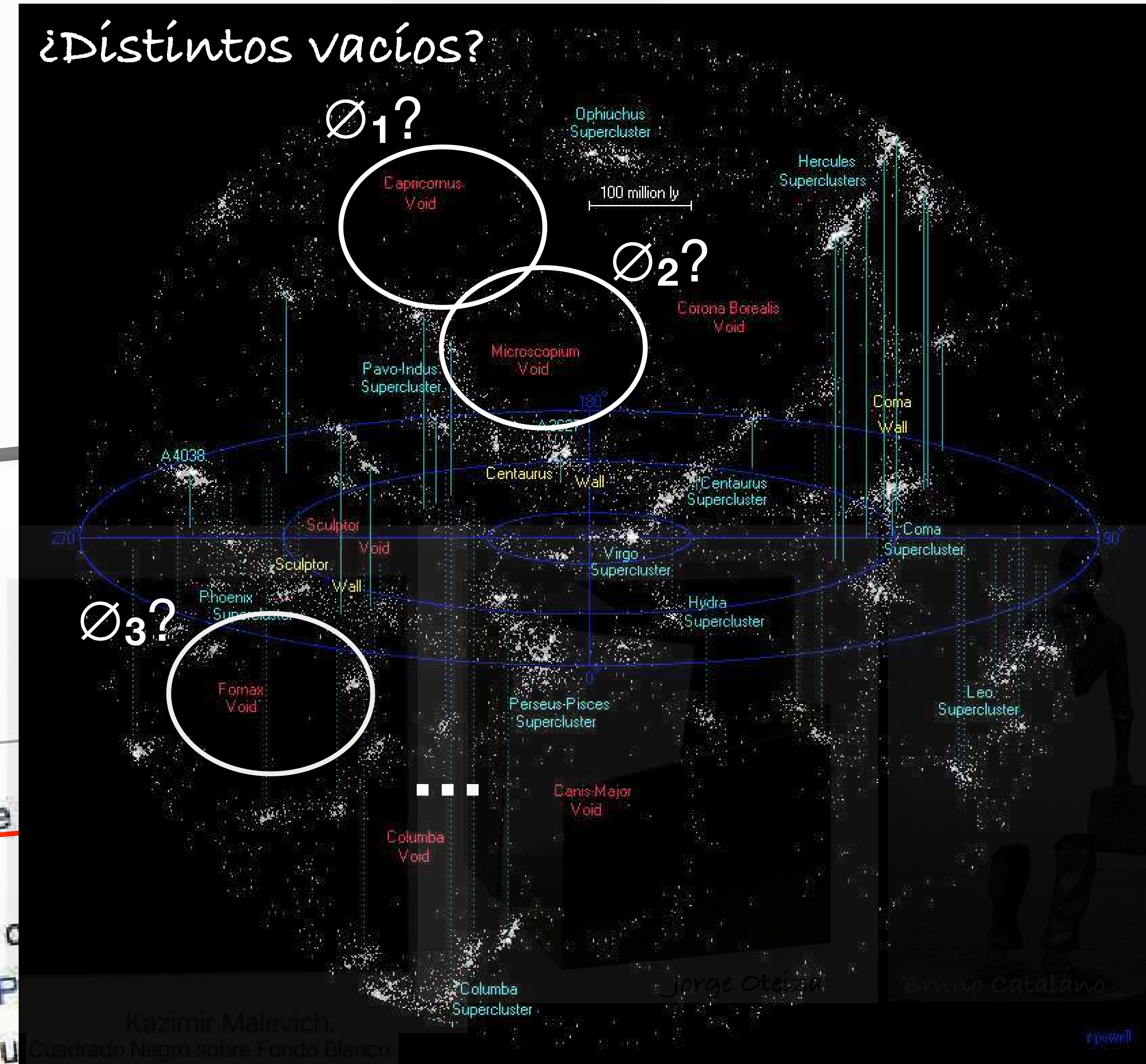
Aristóteles: "Natura abhorret vacuum."

El vacío no existe porque…

Vacío (astronomía)

En astronomía los **vacíos** son los espacios entre filamentos, la estructura de… escala en el Universo, que contiene muy pocas o ninguna galaxia. Fueron descubiertos por primera vez en 1978 durante un estudio pionero llevado a c… Stephen Gregory y Laird A. Thompson en el Observatorio Nacional de Kitt P… vacíos tienen normalmente un diámetro que va desde 11 a 150 Mpc; particu… nos referimos a los vacíos grandes, definidos por la ausencia de ricos supe… como **supervacíos**. Los vacíos que se encuentran en entornos de alta-den… más pequeños que los situados en los espacios de baja-densidad del univ…

Se cree que los vacíos se formaron debido a la oscilación acústica de bariones en el Big Bang a causa del colapso de masas seguido de implosiones de materia comprimida de bariones. El exterior de los vacíos es lo que queda de los choques frontales que se ocasionaron debido a este proceso. El desacoplamiento de la materia respecto a la radiación cuando el universo se volvió transparente "congeló" los vacíos y los choques frontales.[cita requerida]



500 millones de años luz alrededor de la Tierra, mostrando el filamento de galaxias más cercano

El universo 1000 millones de años luz (307 Mpc) alrededor de la Tierra, mostrando el supercúmulo local y los vacíos

Aunque...

El término “vacío” en otros contextos de la ciencia

Aristóteles: “Natura abhorret vacuum.”

El vacío no existe porque

Vacío (astronomía)

En astronomía los **vacíos** son los espacios entre filamentos, la estructura de escala en el Universo, que contiene muy pocas o ninguna galaxia. Fueron descubiertos por primera vez en 1978 durante un estudio pionero llevado a Stephen Gregory y Laird A. Thompson en el Observatorio Nacional de Kitt P vacíos tienen normalmente un diámetro que va desde 11 a 150 Mpc; particu nos referimos a los vacíos grandes, definidos por la ausencia de ricos supe como **supervacíos**. Los vacíos que se encuentran en entornos de alta-den más pequeños que los situados en los espacios de baja-densidad del unive

Se cree que los vacíos se formaron debido a la oscilación acústica de bariones en el Big Bang a causa del colapso de masas seguido de implosiones de materia comprimida de bariones. El exterior de los vacíos es lo que queda de los choques frontales que se ocasionarion debido a este proceso. El desacoplamiento de la materia respecto a la radiación cuando el universo se volvió transparente "congeló" los vacíos y los choques frontales.[cita requerida]

O un único vacío con “contenido”, ¡aunque posiblemente unión de subconjuntos desconectados!

500 millones de años luz alrededor de la Tierra, mostrando el filamento de galaxias más cercano

El universo 1000 millones de años luz (307 Mpc) alrededor de la Tierra, mostrando el supercúmulo local y los vacíos

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

Los términos "vacío", "vacía" en historia, sociología,...

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

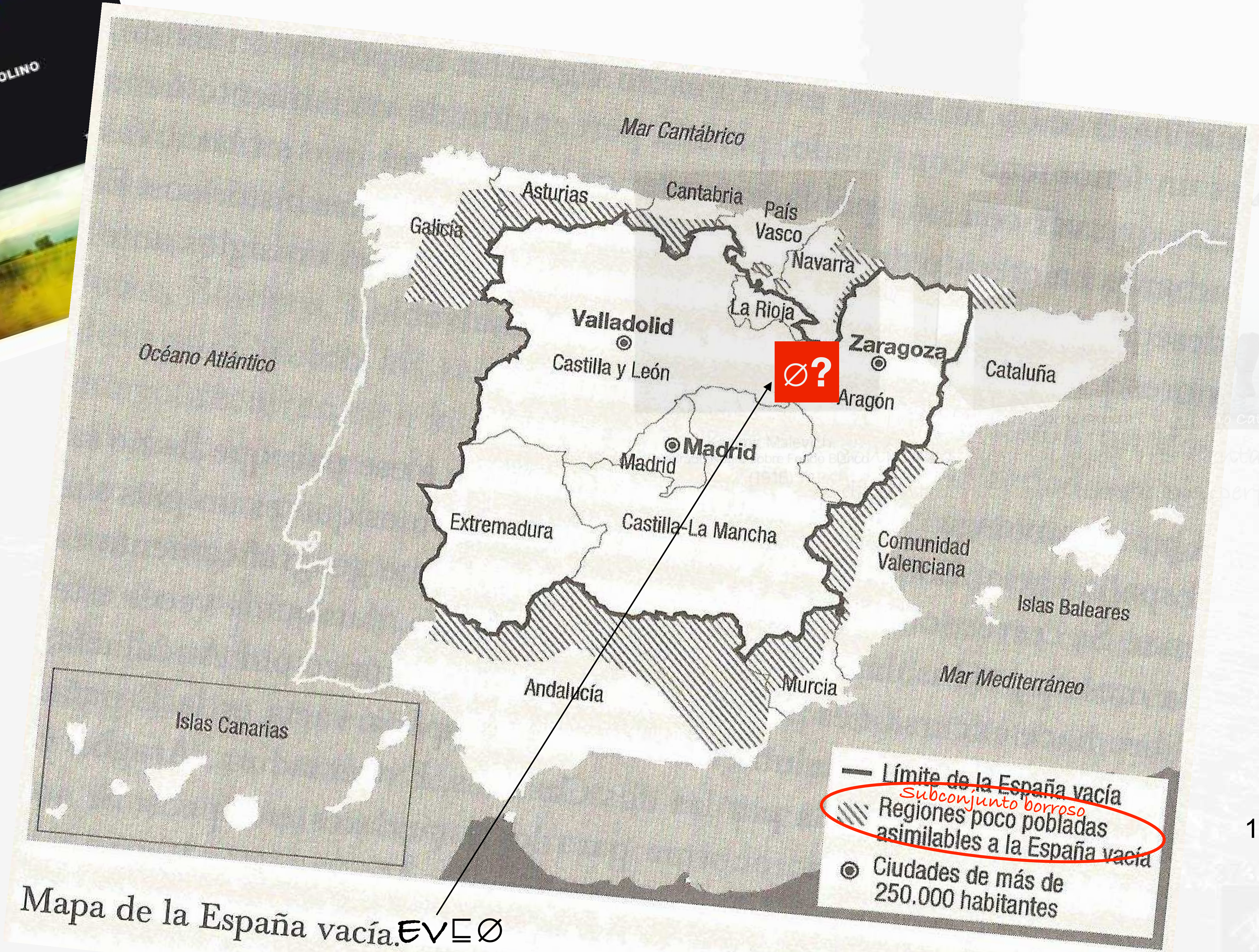
Los términos "vacío", "vacía" en historia, sociología,...

Mapa de la España vacía.

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

Los términos “vacío”, “vacía” en historia, sociología,...



Mapa de la España vacía. $EV \sqsubseteq \emptyset$

Aunque...

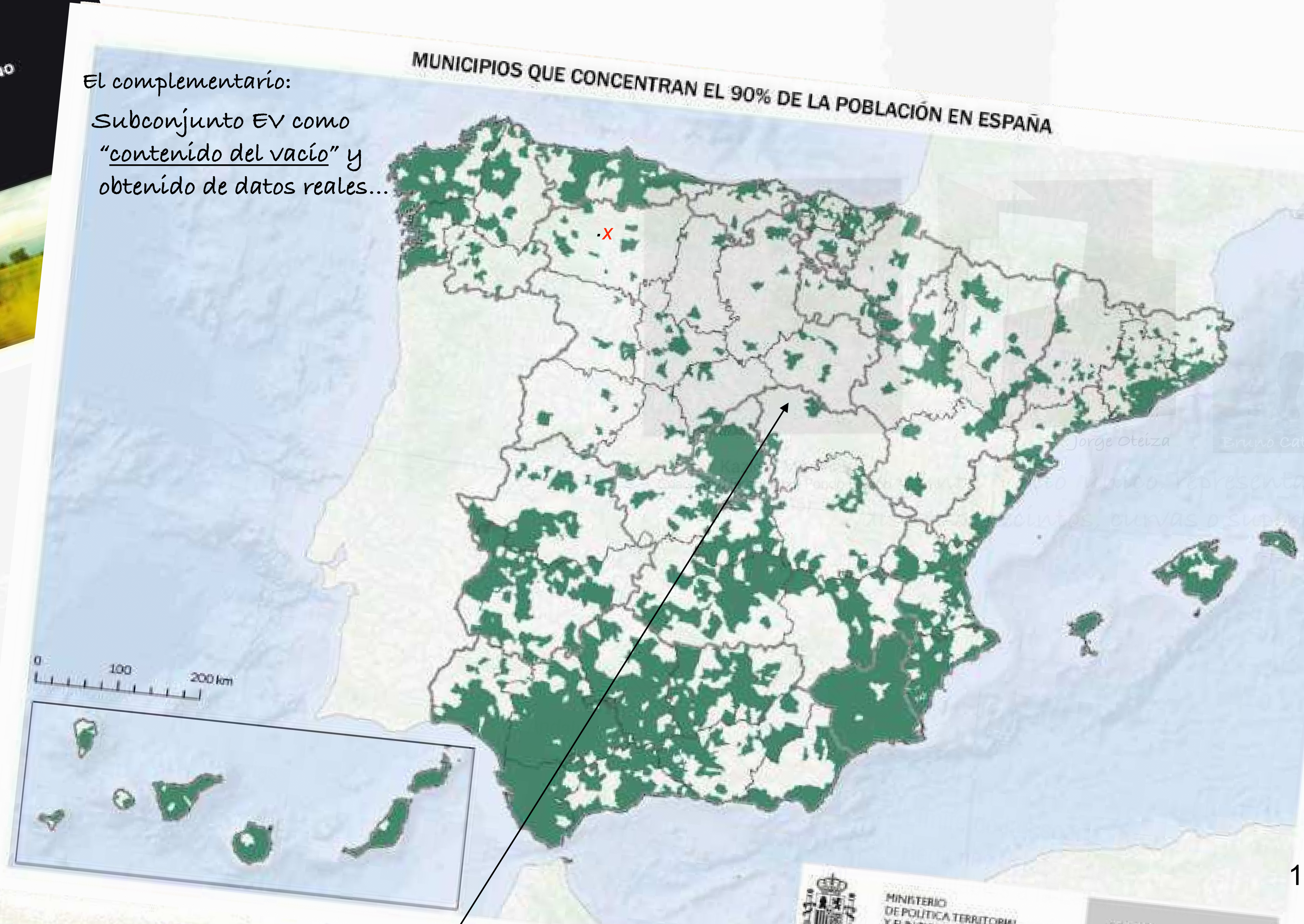
$(\nexists x:\ x \in \varnothing)$?

Los términos "vacío", "vacía" en historia, sociología,...

El complementario:

Subconjunto EV como "<u>contenido del vacío</u>" y obtenido de datos reales...

·x



Mapa de la España vacía. $EV \sqsubseteq \varnothing$

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

vacío, vacía

adjetivo

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada.
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos están casi vacíos a causa de la sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías en el verano"

El término "vacío" en el lenguaje usual

Aunque...

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

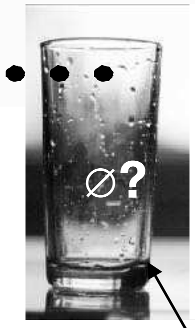
vacío, vacía

adjetivo

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada.
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos están casi vacíos a causa de la sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías en el verano"

El término "vacío" en el lenguaje usual

Aunque...



?

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

vacío, vacía

adjetivo

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada.
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos están casi vacíos a causa de la sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías en el verano"

El término "vacío" en el lenguaje usual

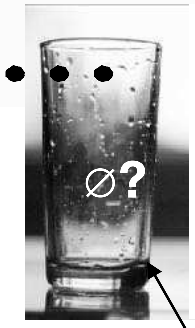
Aunque...

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

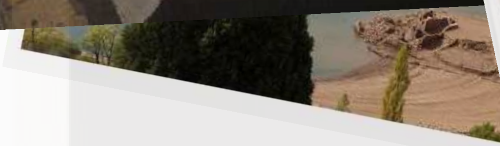
vacío, vacía

adjetivo

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada.
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos e[...] sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías er[...]"



?



El paro nacional en fotos: calles vacías en Buenos Aires

LAP informó que desde la madrugada se han cancelado ocho vuelos hacia Argentina, que vive un paro de transporte de 24 horas. (Foto: El Comercio)

Daniel Bedoya
25.06.2018 / 7:40 am

Las consecuencias del **paro nacional que vive Argentina** este lunes también se sienten en nuestro país. Y es que desde muy temprano se han reportado una serie de retrasos y cancelaciones en los vuelos con destino a diferentes puntos del país sureño.

El término "vacío" en el lenguaje usual

El "contenido" del vacío, ¿depende del contexto?

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

vacío, vacías

adjetivo

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada.
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos e[...] sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías er[...]"

?

El paro nacional en fotos: calles vacías en Buenos Aires

LAP informó que desde la madrugada se han cancelado ocho vuelos hacia Argentina, que vive un paro de transporte de 24 horas. (Foto: El Comercio)

Daniel Bedoya

Las consecuencias del **paro nacional que vive Argentina** este lunes también se sienten en nuestro país. Y es que desde muy temprano se han reportado una serie de retrasos y cancelaciones en los vuelos con destino a diferentes puntos del país sureño.

El término "vacío" en el lenguaje usual

¿Cómo podrían estar relacionados "contenidos distintos" del vacío?

Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

¿Cómo podrían estar relacionados "contenidos distintos" del vacío?

Kazimir Malevich:
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Cómo podrían estar relacionados “contenidos distintos” del vacío?

Kazimir Malevich:
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Cómo podrían estar relacionados "contenidos distintos" del vacío?

Kazimir Malevich:
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Cómo podrían estar relacionados "contenidos distintos" del vacío?

$\varnothing \subseteq W_1$

$W_1 \sqsubset \varnothing$

$\varnothing \subseteq W_2$

$W_2 \sqsubset \varnothing$

$W_2 \subset W_1$

$¿W_2 \sqsubset W_1?$

Kazimir Malevich:
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Cómo podrían estar relacionados "contenidos distintos" del vacío?

$\varnothing \subseteq W_1$
$W_1 \sqsubset \varnothing$

$\varnothing \subseteq W_2$
$W_2 \sqsubset \varnothing$

$W_2 \subset W_1$

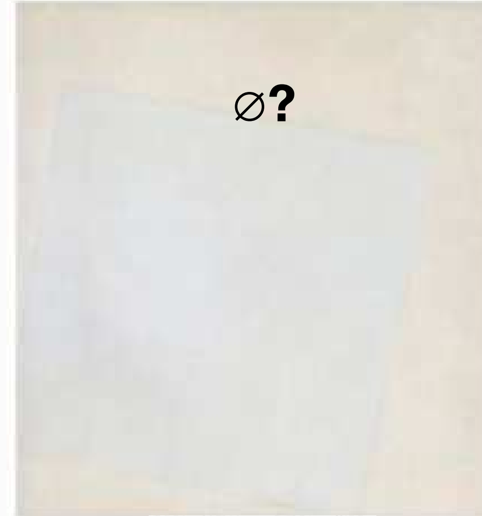
¿$\cancel{W_2 \sqsubset W_1}$?

¡¡$W_1 \sqsubset W_2$!!

(¡pues hay menos "vacío" en W_2 que en W_1!)

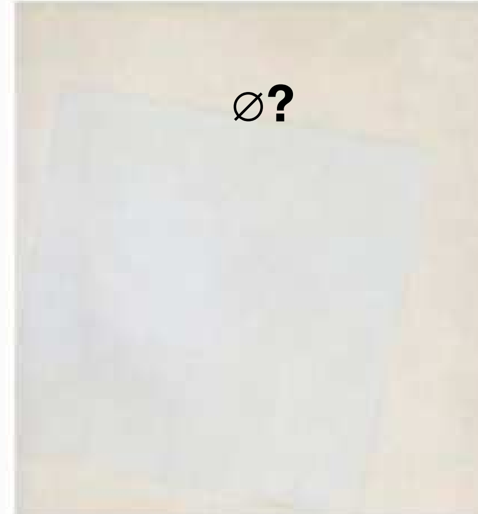
Kazimir Malevich:
Blanco sobre Blanco (1918)

nto vacío, único, representado por
tos recintos, curvas o superficies



Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

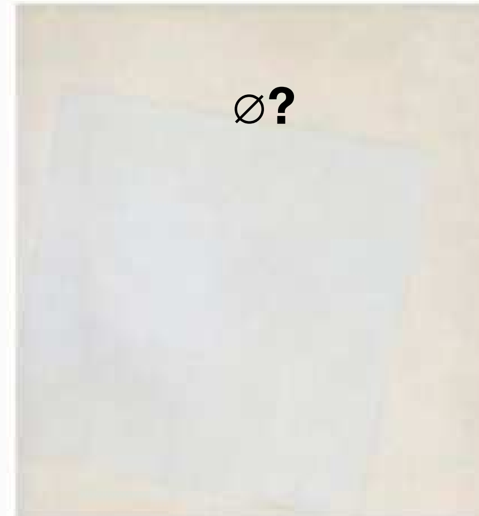
Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

“Intitulado”. Donald Judd. 1974

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Distintos vacíos que tienen algún contenido?

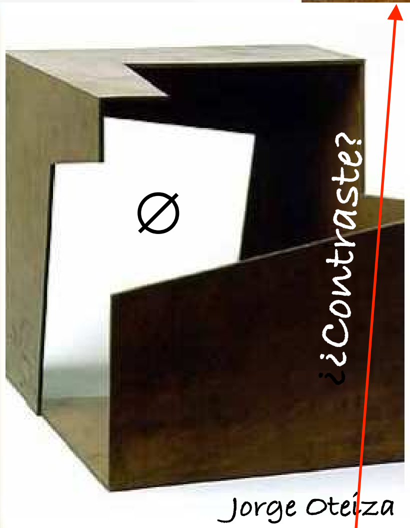
"Intitulado". Donald Judd. 1974

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

¿Distintos vacíos que tienen algún contenido?

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo B
(1915)



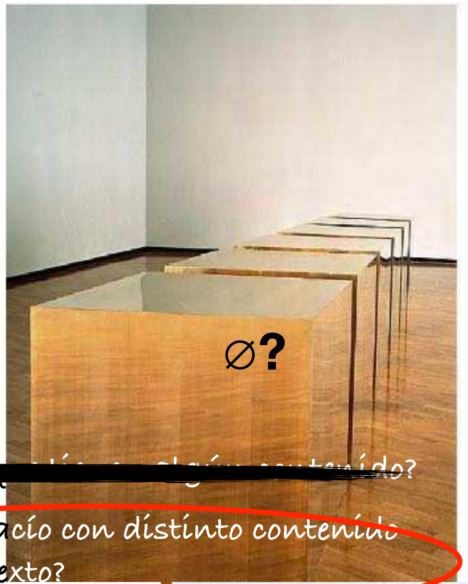
¿¿Contraste?

Jorge Oteiza

Bruno Catalano

Conjunto vacío único, representado por distintos recintos, curvas o superficies.

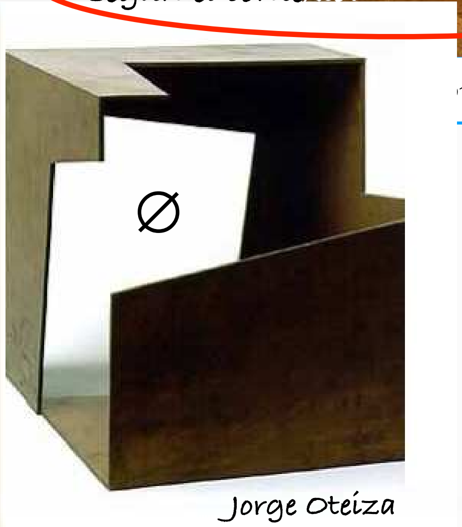
Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)



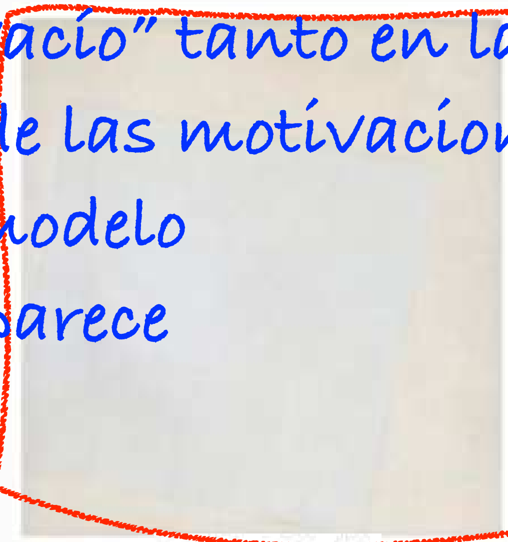
¿[redacted]do?

o ¿un único vacío con distinto contenido según el contexto?

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "<u>contenido propio dentro del vacío</u>".

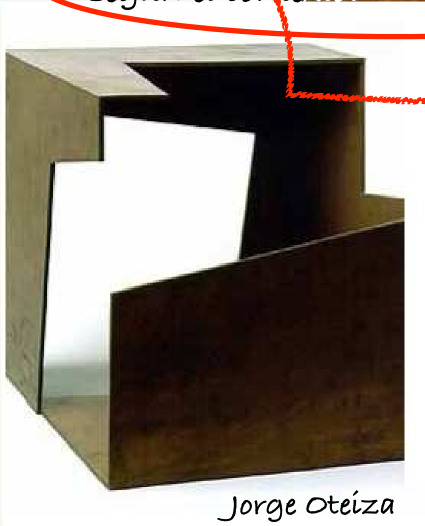


Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

¿[redacted]do?

o ¿un único vacío con distinto contenido según el contexto?

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "contenido propio dentro del vacío".

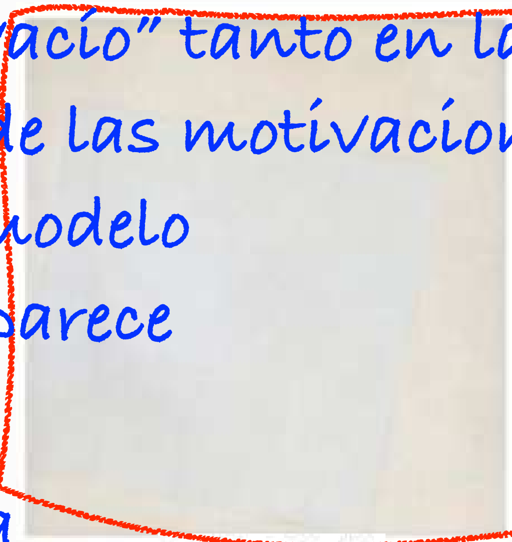
En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de inclusión, de unión, de intersección y de pertenencia para que tenga sentido alguno de los predicados:

$(\exists x: x \in \varnothing), (\exists W: W \subset \varnothing), (|\varnothing| > 0)$

$(\varnothing \text{ NO es finito}), (\exists B: \varnothing \not\subseteq B), (A \cap \varnothing \neq \varnothing),$

$(A \cup \varnothing \neq A), (A \cap A^c \neq \varnothing) \ldots$?

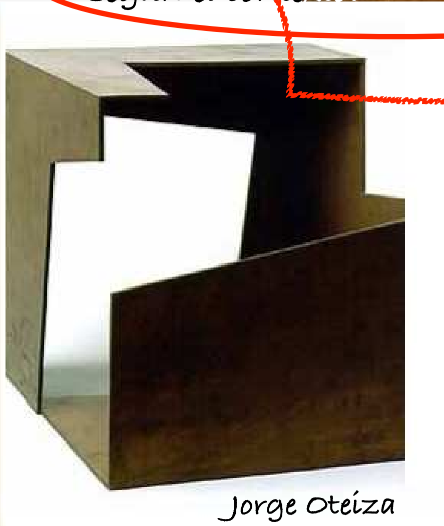


Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

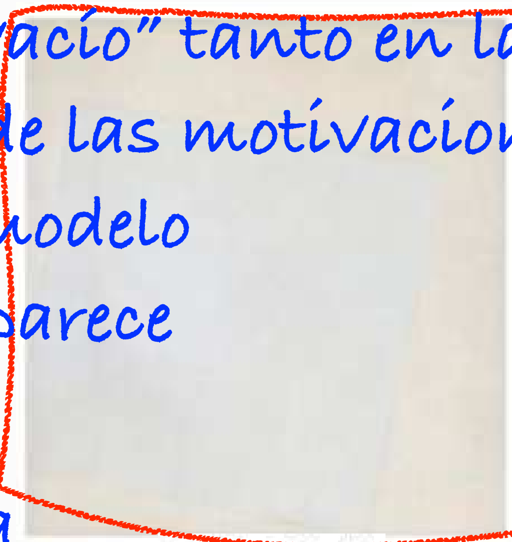
¿[redacted]do?

o ¿un único vacío con distinto contenido según el contexto?

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)



Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "<u>contenido propio dentro del vacío</u>".



Kazimir Malevich.
Blanco sobre Blanco (1918)

René Magritte

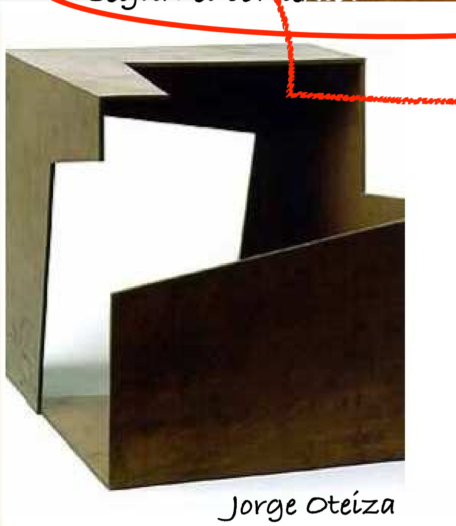
[redacted]

o ¿un único vacío con distinto contenido según el contexto?

En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de <u>inclusión</u>, de <u>unión</u>, de <u>intersección</u> y de <u>pertenencia</u> para que tenga sentido alguno de los predicados:

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco (1915)



Jorge Oteiza

Bruno Catalano

$\bar{\in}$? ⊏? alternativa? aplicaciones de conjunto

$(\exists x: x \in \emptyset), (\exists W: W \subset \emptyset), (|\emptyset| > 0)$

alternativa?

$(\emptyset$ NO es finito$), (\exists B: \emptyset \not\subseteq B), (A \cap \emptyset \neq \emptyset),$

$\not\sqsubseteq$? ⊓?

$(A \cup \emptyset \neq A), (A \cap A^c \neq \emptyset) \ldots$?

⊔? ⊓?

Objetivo: Considerar, en clases $P(E)$ o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas <u>relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas</u> y hablar de "<u>contenido del conjunto vacío</u>", en lugar de "conjunto vacío"

Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "<u>contenido propio dentro del vacío</u>".

En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de <u>inclusión</u>, de <u>unión</u>, de <u>intersección</u> y de <u>pertenencia</u> para que tenga sentido alguno de los predicados:

$\bar{\in}$? $\quad$ ⊏? $\quad$ alternativa? $\quad$ aplicaciones de conjunto

$(\exists x: x$ [redacted] $\varnothing)$, $(\exists W: W$ [redacted] $\varnothing)$, $($[redacted]$\varnothing$[redacted]$> 0)$

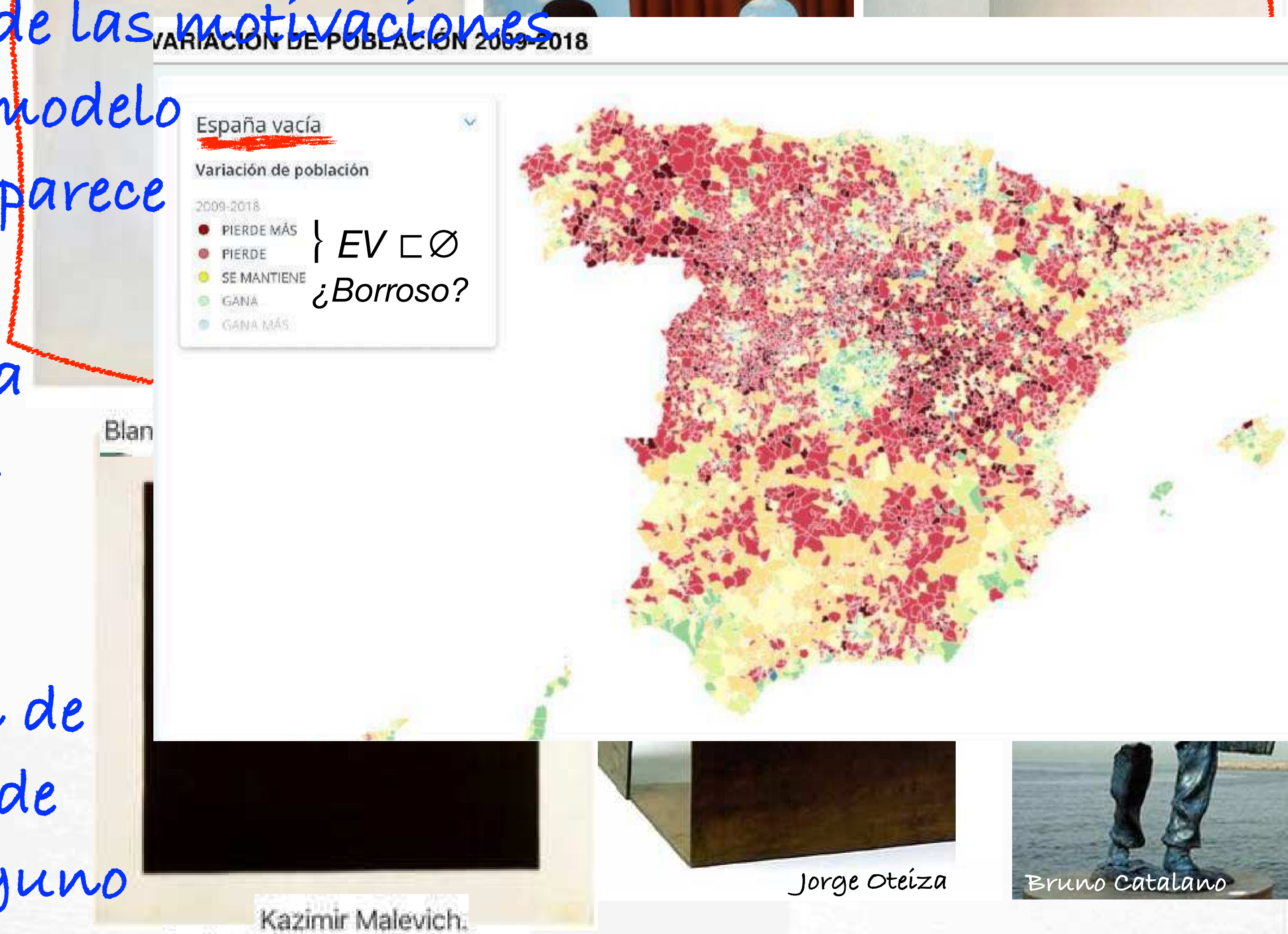
alternativa?

$(\varnothing$ NO es finito$)$, $(\exists B: \varnothing$ [redacted] $B)$, $(A$ [redacted] $\varnothing \neq \varnothing)$,

$\not\sqsubset$? $\quad$ ⊓?

$(A$ [redacted] $\varnothing \neq A)$, $(A$ [redacted] $A^c \neq \varnothing)$ ... ?

⊔? $\quad$ ⊓?



Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

Objetivo: Considerar, en clases $P(E)$ o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas <u>relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas</u> y hablar de "<u>contenido del conjunto vacío</u>", en lugar de "conjunto vacío"

Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "contenido propio dentro del vacío".

En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de <u>inclusión</u>, de <u>unión</u>, de <u>intersección</u> y de <u>pertenencia</u> para que tenga sentido alguno de los predicados:

$\bar{\in}$? ⊏? alternativa? aplicaciones de conjunto

(∃x: x [redacted]∅), (∃W: W [redacted]∅), ([redacted]∅[redacted]>0)

alternativa?

(∅ NO es finito), (∃B: ∅[redacted]B), (A[redacted]∅≠∅),

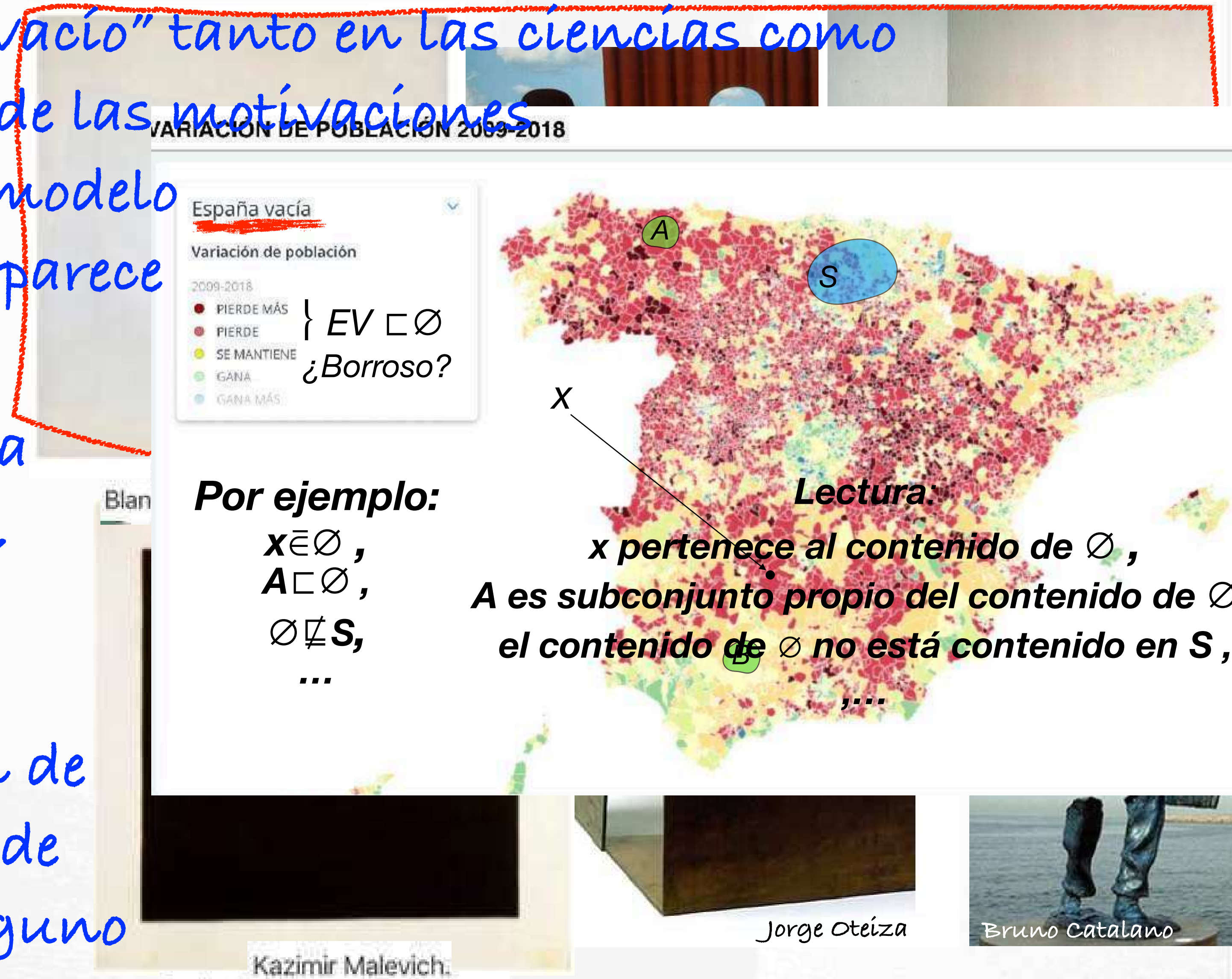
⋢? ⊓?

(A[redacted]∅≠A), (A[redacted]A^c≠∅)... ?

⊔? ⊓?

Objetivo: Considerar, en clases P(E) o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas <u>relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas</u> y hablar de "<u>contenido del conjunto vacío</u>", en lugar de "conjunto vacío"

Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "contenido propio dentro del vacío".



Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de inclusión, de unión, de intersección y de pertenencia para que tenga sentido alguno de los predicados:

$\in$? $\sqsubset$? alternativa? aplicaciones de conjunto

$(\exists x: x$ [redacted] $\emptyset)$, $(\exists W: W$ [redacted] $\emptyset)$, ([redacted] $\emptyset$ [redacted] $> 0)$

alternativa?

$(\emptyset$ NO es finito$)$, $(\exists B: \emptyset$ [redacted] $B)$, $(A$ [redacted] $\emptyset \neq \emptyset)$,

$\not\sqsubseteq$? $\sqcap$?

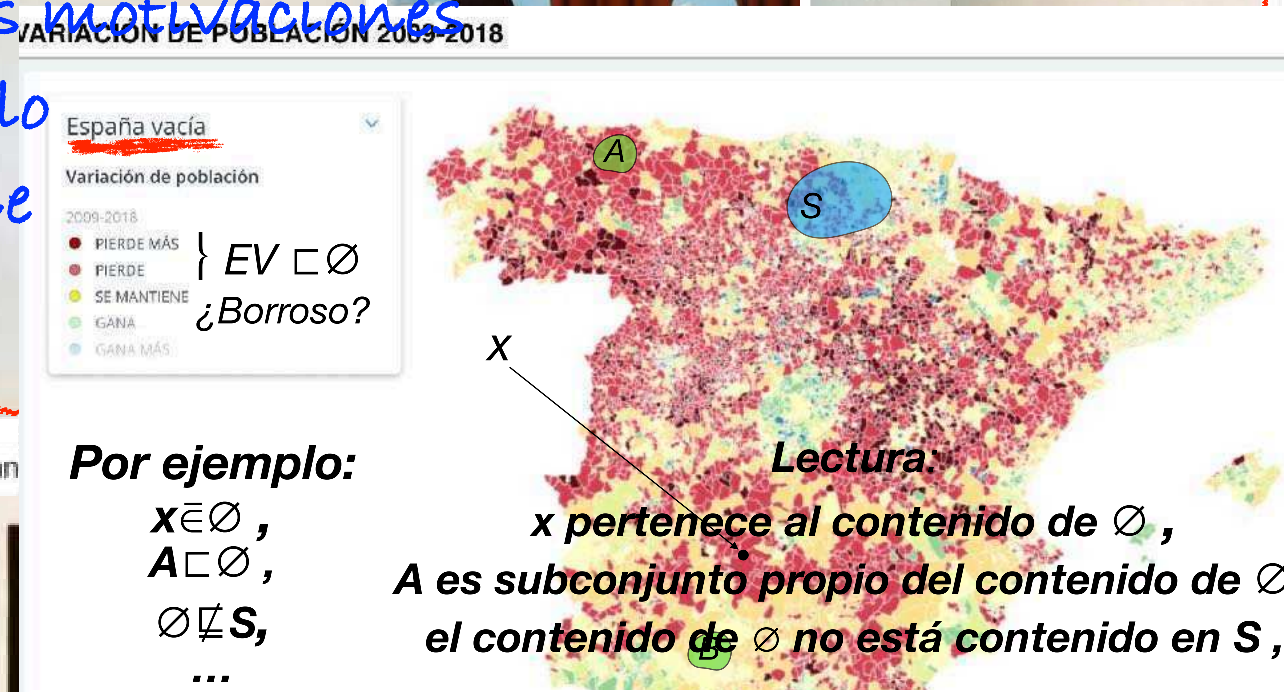
$(A$ [redacted] $\emptyset \neq A)$, $(A$ [redacted] $A^c \neq \emptyset)$... ?

$\sqcup$? $\sqcap$?

Objetivo: Considerar, en clases $P(E)$ o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas y hablar de "contenido del conjunto vacío", en lugar de "conjunto vacío"

Veremos que la consideración de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos acotados $(L, \leq)$, contemplados como nuevas "inclusiones", constituye una herramienta para este fin.

Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "contenido propio dentro del vacío".



En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

Por ejemplo:

$x \bar{\in} \emptyset$,
$A \sqsubset \emptyset$,
$\emptyset \not\sqsubseteq S$,
...

Lectura:

x pertenece al contenido de ∅ ,
A es subconjunto propio del contenido de ∅
el contenido de ∅ no está contenido en S ,

¿Como puede modificarse la definición de inclusión, de unión, de intersección y de pertenencia para que tenga sentido alguno de los predicados:

Posteriormente, justificaremos que el orden de actividad también modeliza "contenido borroso" propio en ∅.

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

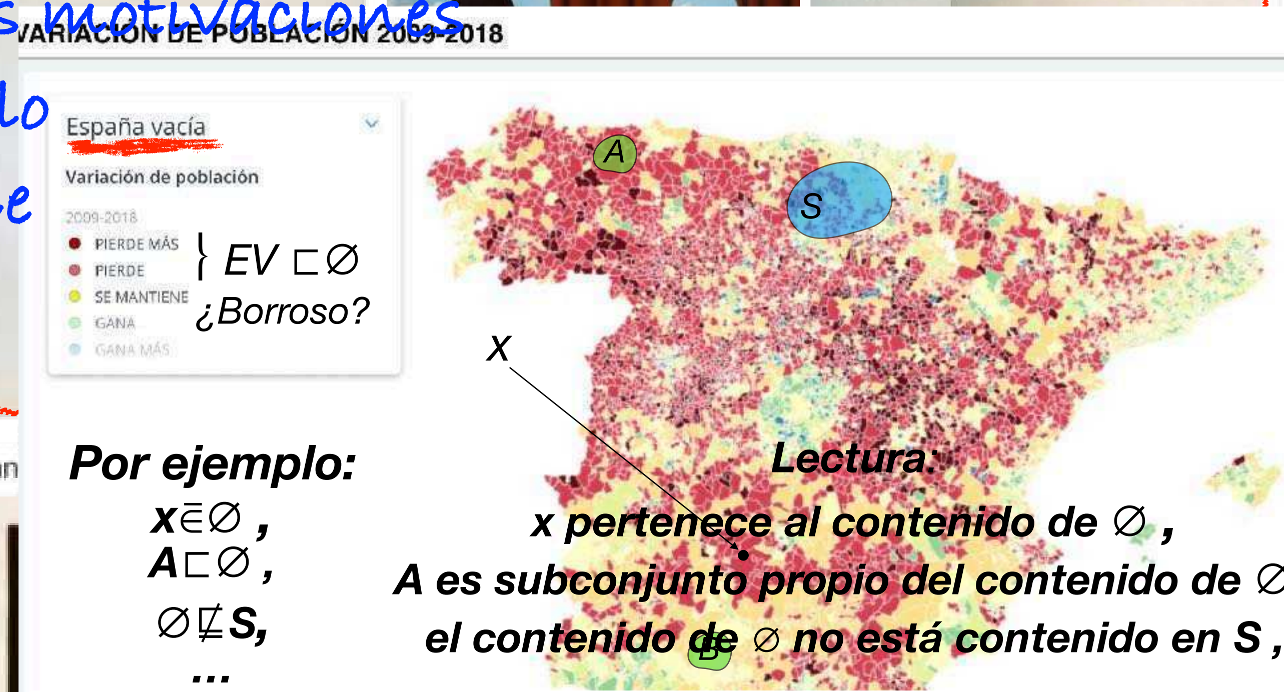
$(\exists x: x$ [redacted] $\emptyset)$, $(\exists W: W$ [redacted] $\emptyset)$, ([redacted] $\emptyset$ [redacted] $> 0)$
($\emptyset$ NO es finito), $(\exists B: \emptyset$ [redacted] $B)$, $(A$ [redacted] $\emptyset \neq \emptyset)$,
$(A$ [redacted] $\emptyset \neq A)$, $(A$ [redacted] $A^c \neq \emptyset)$... ?

$\bar{\in}$? $\sqsubset$? alternativa? aplicaciones de conjunto
alternativa? $\not\sqsubseteq$? $\sqcap$?
$\sqcup$? $\sqcap$?

Objetivo: Considerar, en clases $P(E)$ o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas y hablar de "contenido del conjunto vacío", en lugar de "conjunto vacío"

Veremos que la consideración de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos acotados $(L, \leq)$, contemplados como nuevas "inclusiones", constituye una herramienta para este fin.

Estas últimas acepciones del término "vacío" tanto en las ciencias como en el lenguaje usual constituyen otra de las motivaciones de este trabajo, en el que se propone un modelo para gestionar situaciones en las que aparece "<u>contenido propio dentro del vacío</u>".



Por ejemplo:
$x \bar{\in} \emptyset$,
$A \sqsubset \emptyset$,
$\emptyset \not\sqsubseteq S$,
...

Lectura:
x pertenece al contenido de $\emptyset$,
A es subconjunto propio del contenido de $\emptyset$
el contenido de $\emptyset$ no está contenido en S ,

En esta línea, utilizando recursos de la TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS, intentaremos responder a la siguiente cuestión:

¿Como puede modificarse la definición de <u>inclusión</u>, de <u>unión</u>, de <u>intersección</u> y de <u>pertenencia</u> para que tenga sentido alguno de los predicados:

Posteriormente, justificaremos que el orden de actividad también modeliza "contenido borroso" propio en $\emptyset$.

Blan

Kazimir Malevich.
Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco
(1915)

$\bar{\in}$? $\sqsubset$? alternativa? aplicaciones de conjunto

$(\exists x: x$ [redacted] $\emptyset), (\exists W: W$ [redacted] $\emptyset)$, ([redacted] $\emptyset$ [redacted] $> 0)$

alternativa?

$(\emptyset$ NO es finito$), (\exists B: \emptyset$ [redacted] $B), (A$ [redacted] $\emptyset \neq \emptyset)$,

$\not\sqsubseteq$? $\sqcap$?

$(A$ [redacted] $\emptyset \neq A), (A$ [redacted] $A^c \neq \emptyset)$... ?

$\sqcup$? $\sqcap$?

Objetivo: Considerar, en clases $P(E)$ o L^E de conjuntos usuales o borrosos, nuevas <u>relaciones, operaciones o aplicaciones alternativas</u> y hablar de "contenido del conjunto vacío", en lugar de "conjunto vacío"

Veremos que la consideración de los <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos acotados $(L, \leq)$, contemplados como nuevas "inclusiones", constituye una herramienta para este fin.

<u>Posibles interpretaciones de un subconjunto W "contenido" en $\emptyset$ y distinto de él:</u>

Formado por elementos que son irrelevantes, o no deseados, o perjudiciales, y tal que los de su complemento W^c son relevantes, deseados, beneficiosos ,...
O también, por elementos con incertidumbre, distinguidos por alguna razón, etc.

Motivación (I):

procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \varnothing$, $B \sqsubset^{s} \varnothing$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (I):

procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

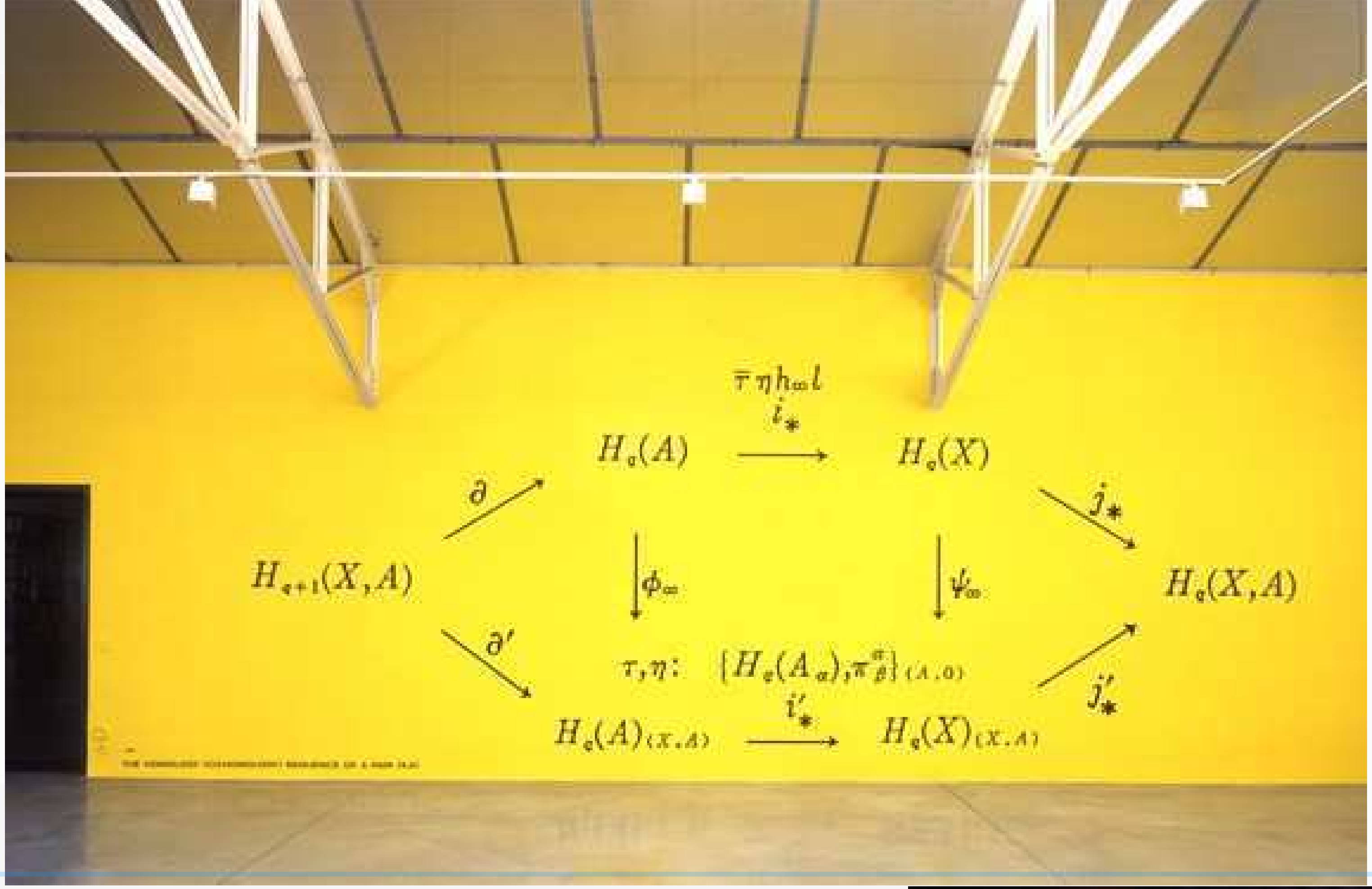
Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \varnothing$, $B \sqsubset^{s} \varnothing$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción



Bernar Venet, «Related to: The Homology (Cohomology) Sequence of a Pair (X,A)», acrílico sobre pared, 2001; un diagrama del álgebra homológica

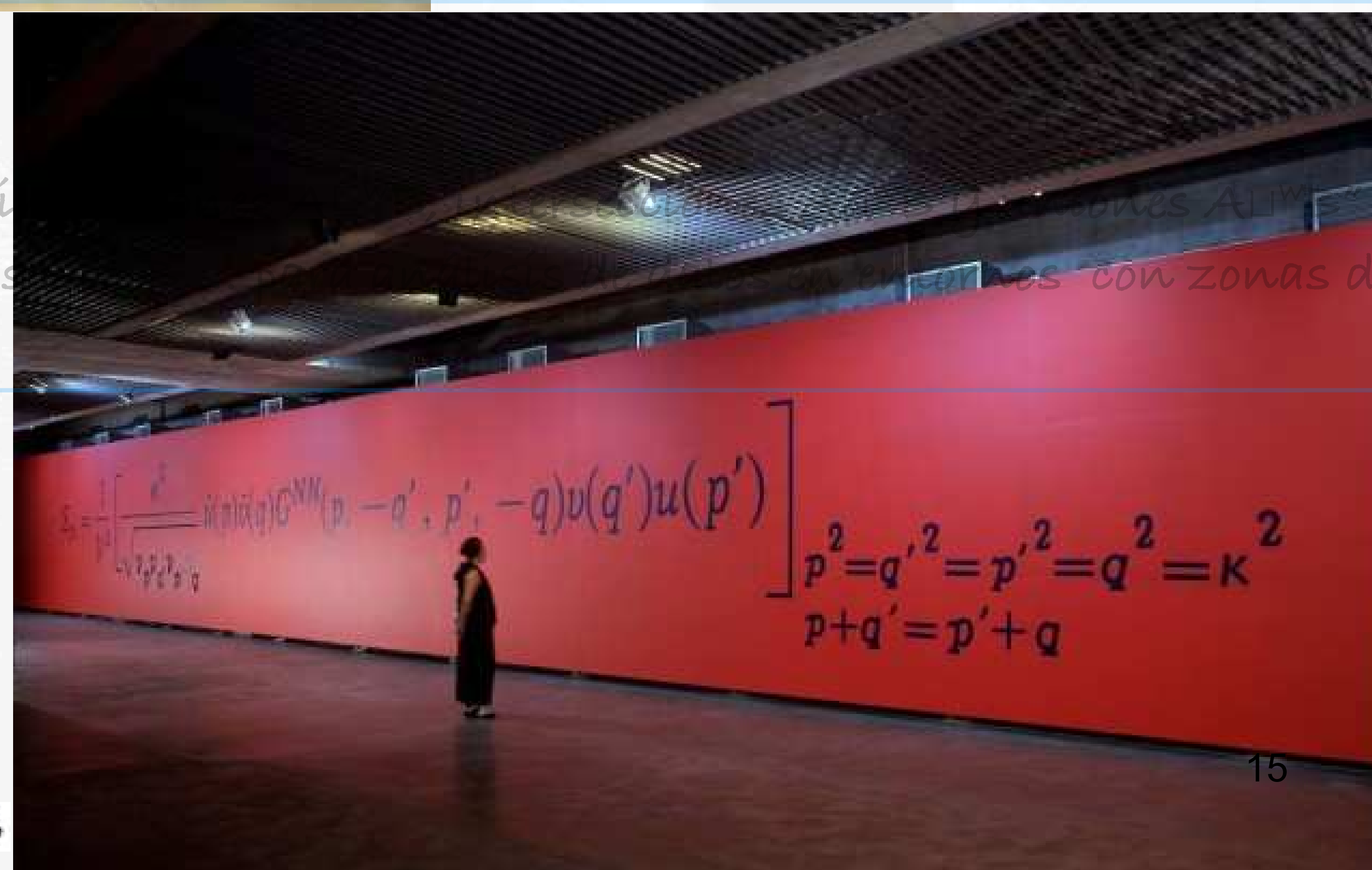
Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas i

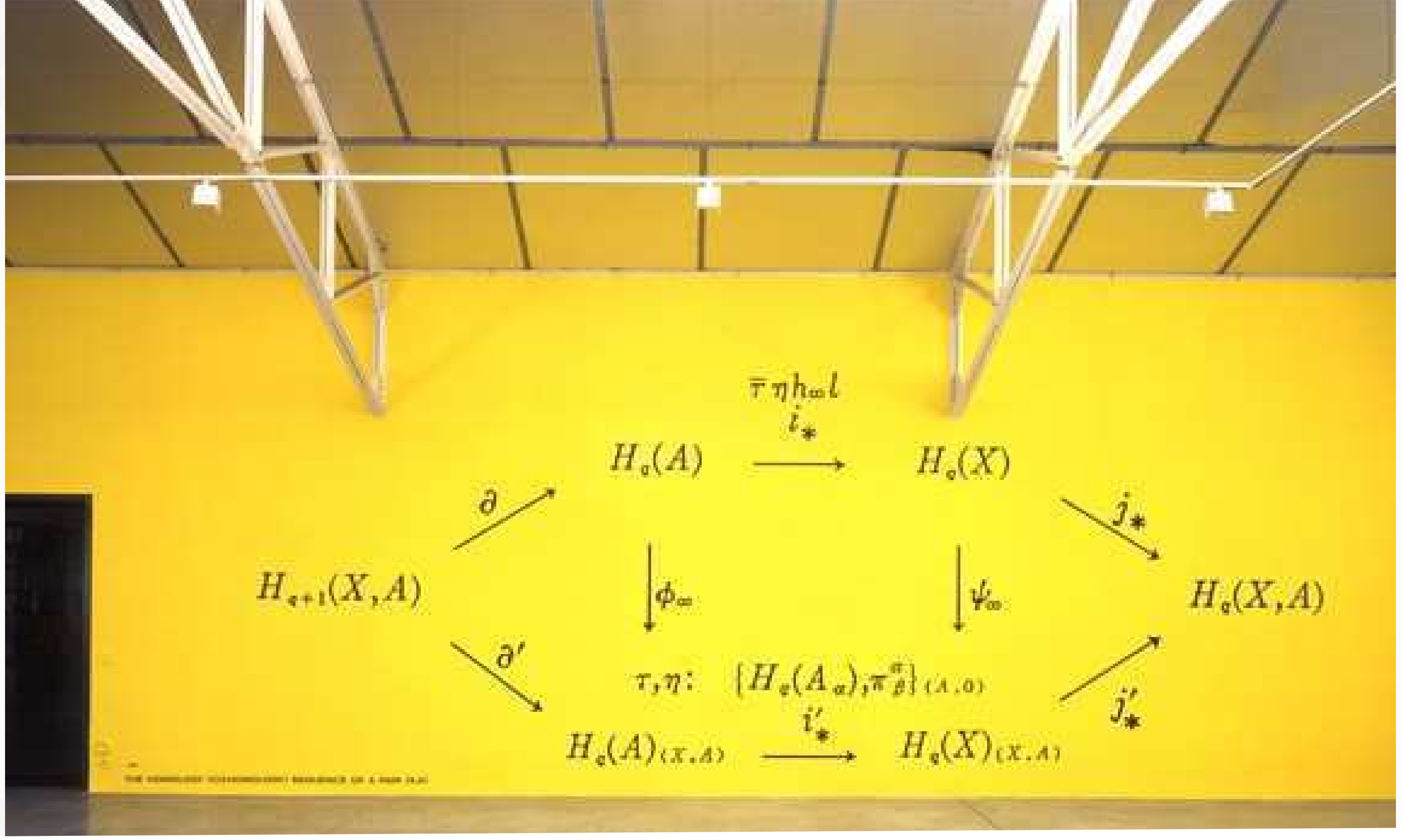
entre subconjuntos nítidos o borros

riesgo.

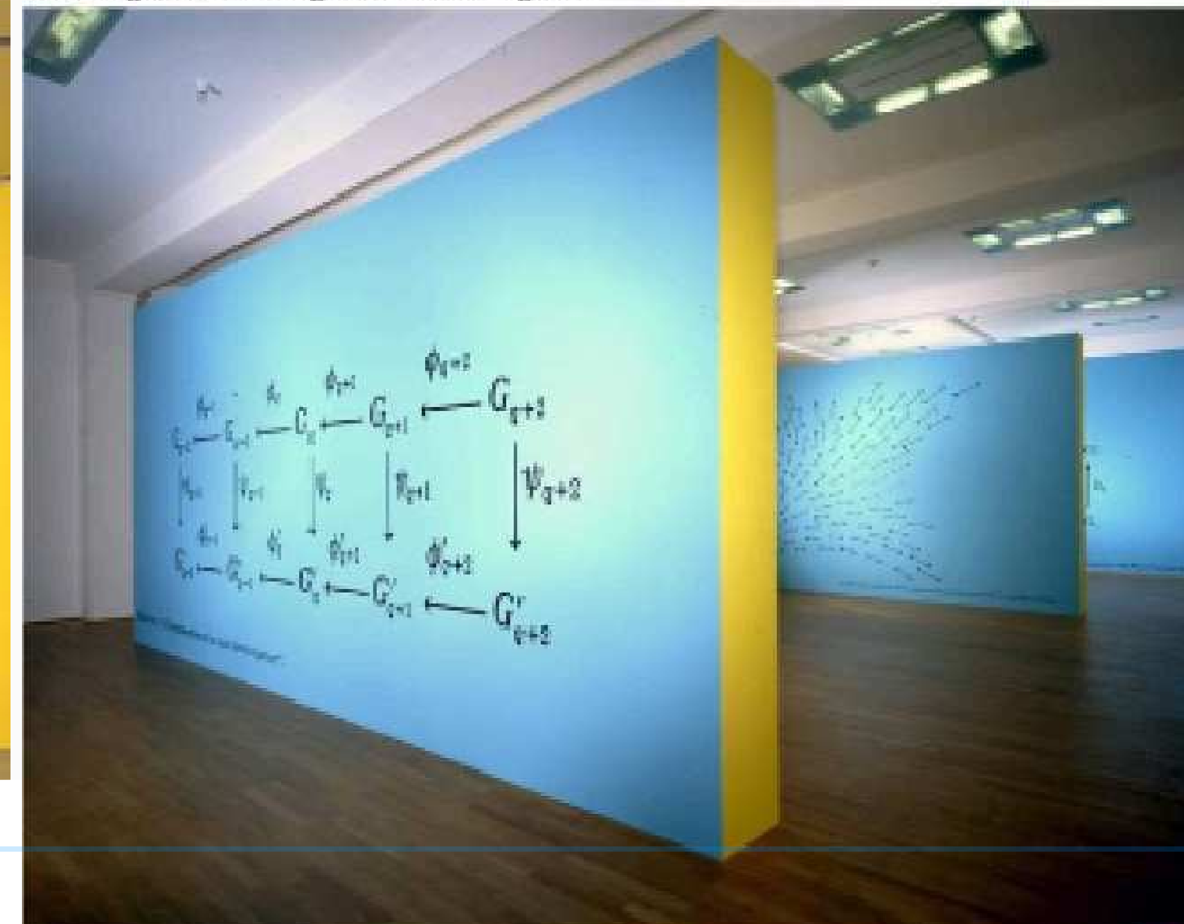
Una pequeña pausa par mostrar murales con motivos matemáticos…



Pintura mural «The S Matrix element» (acrílico sobre lona) en la exposición en el Museu Brasileiro da Escultura, São Paulo, Brasil, en 2001

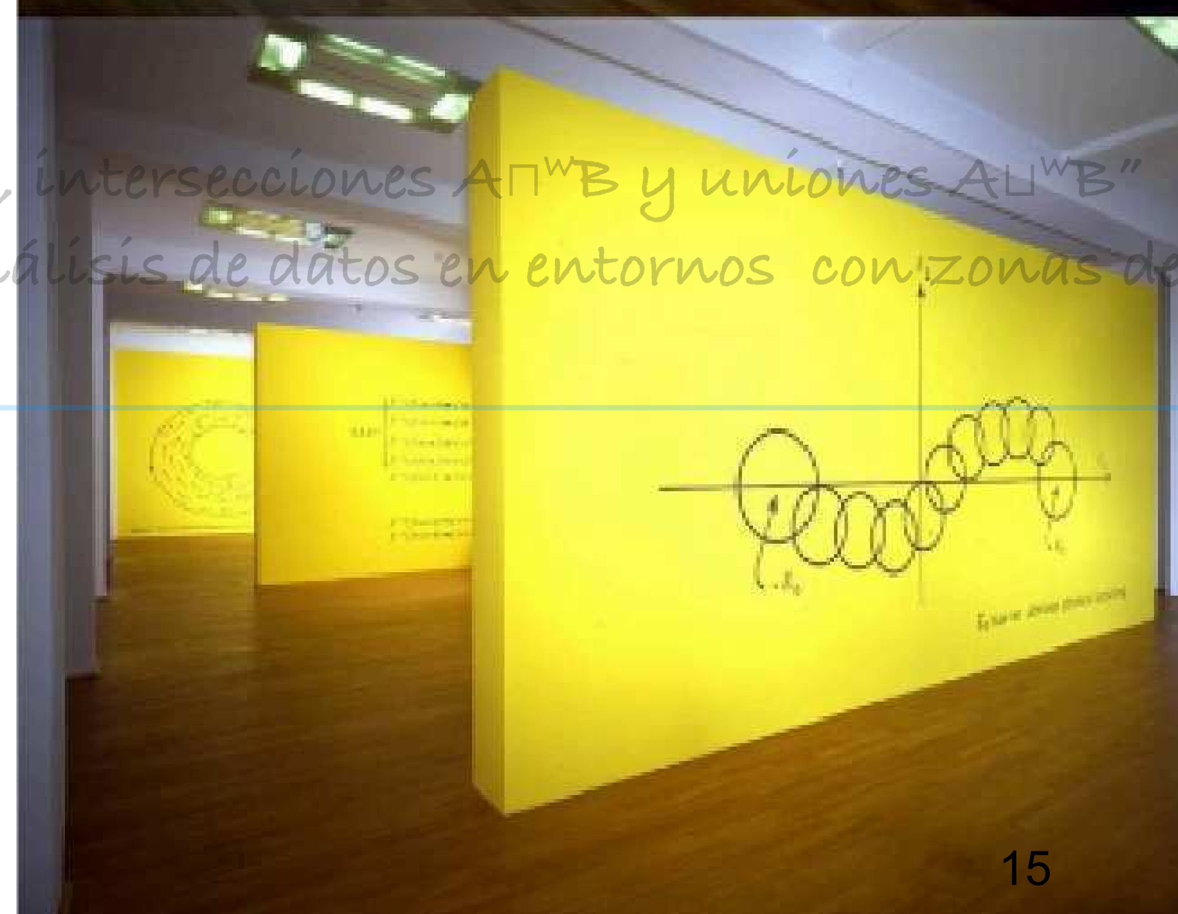


Bernar Venet, «Related to: The Homology (Cohomology) Sequence of a Pair (X,A)», acrílico sobre pared, 2001; un diagrama del álgebra homológica



Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

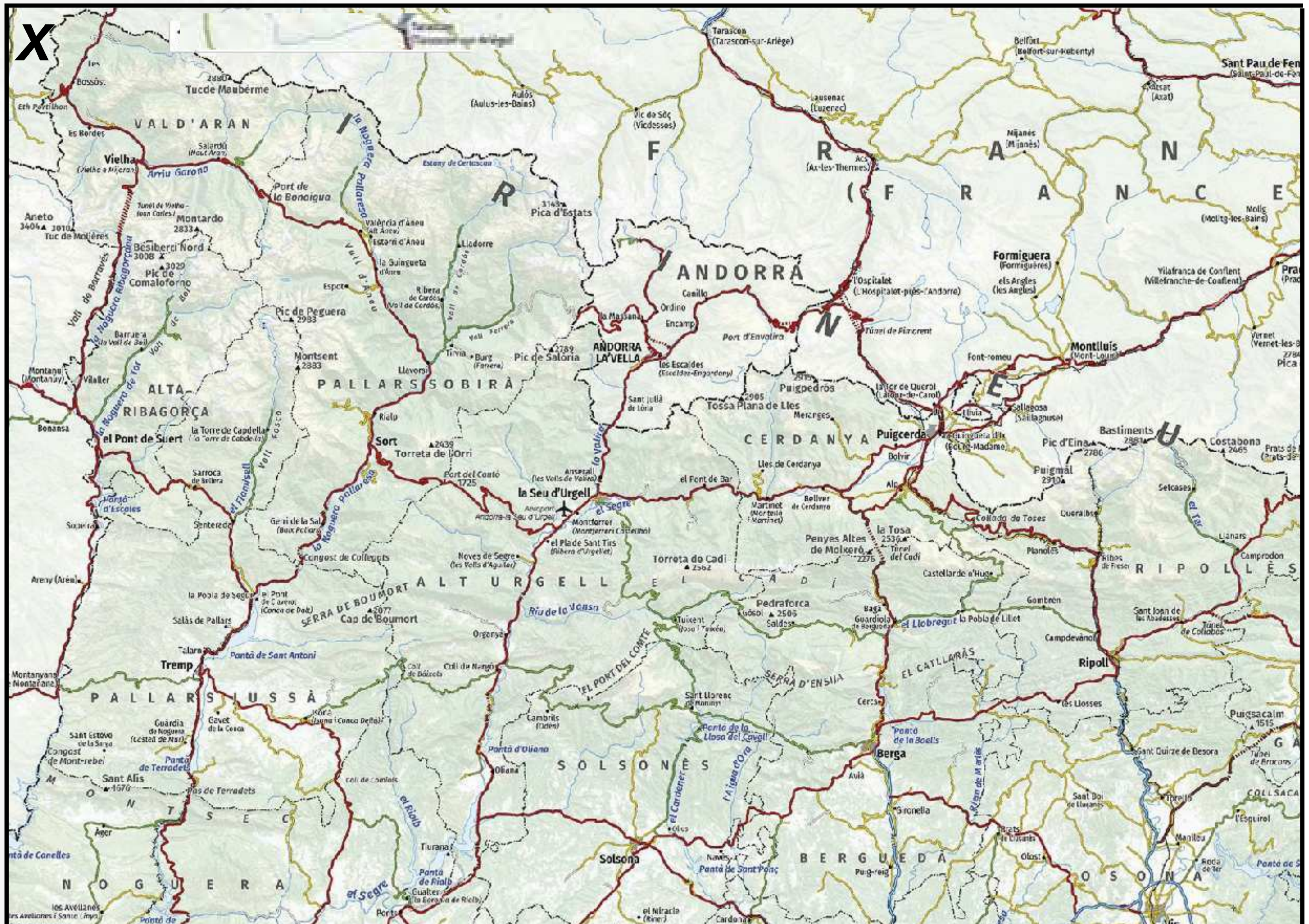


pinturas murales «Ecuación». de Bernar Venet, Ludwing Museum, Alemania, en 2002

Continuamos…

Motivación (III):

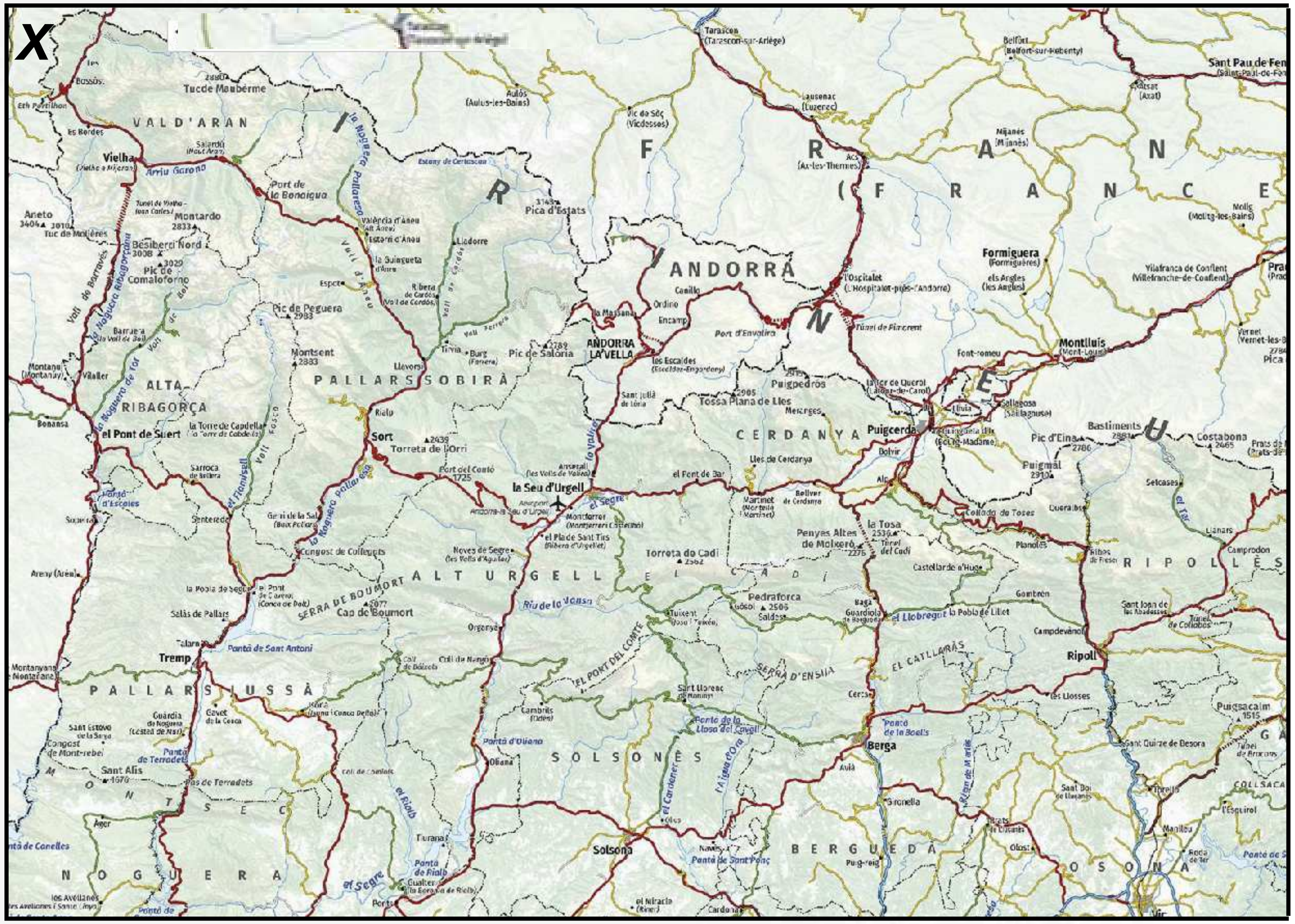
Sobre la introducción de “nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$” entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,… para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.



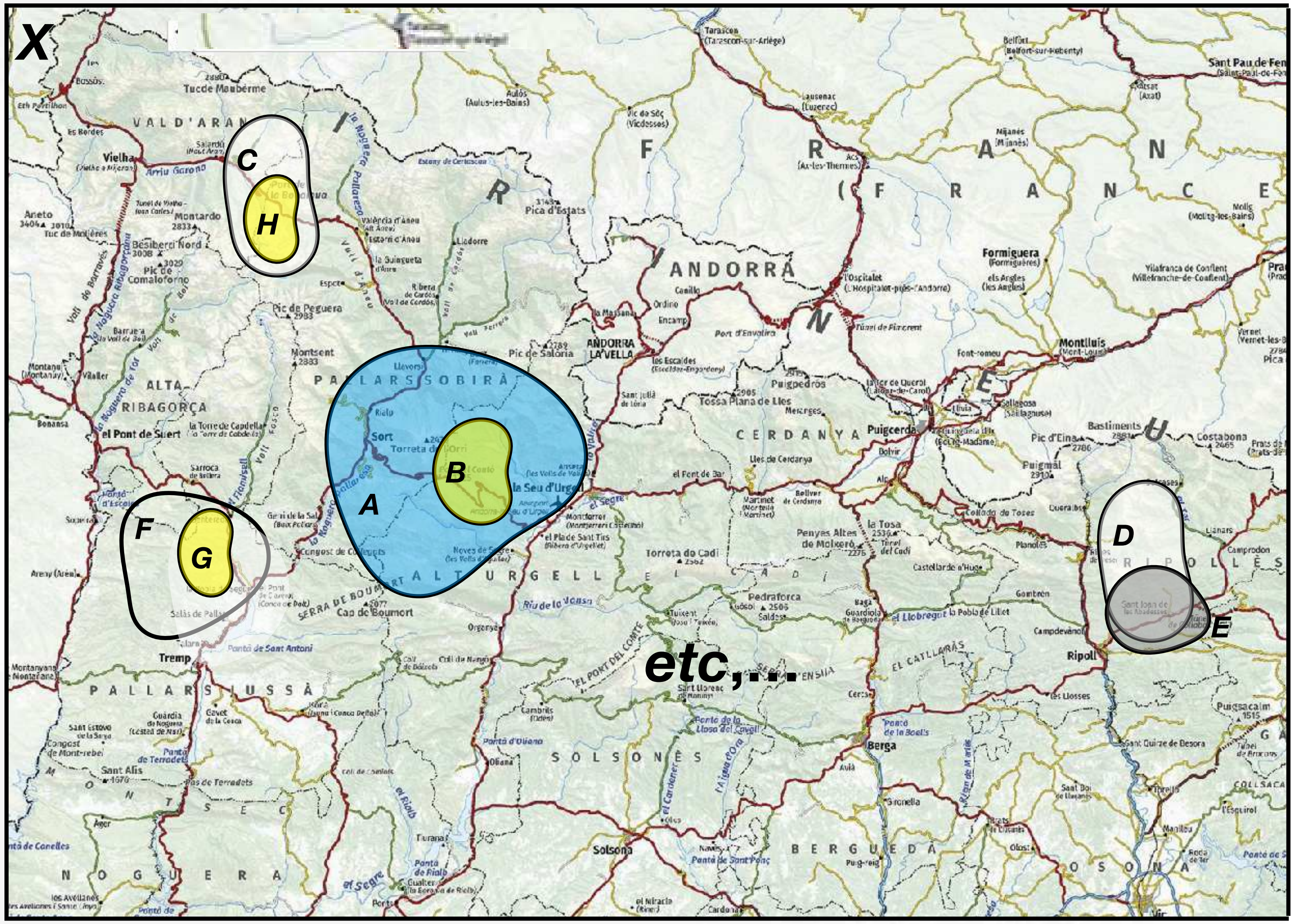
X una región del Pirineo

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.



X una región del Pirineo

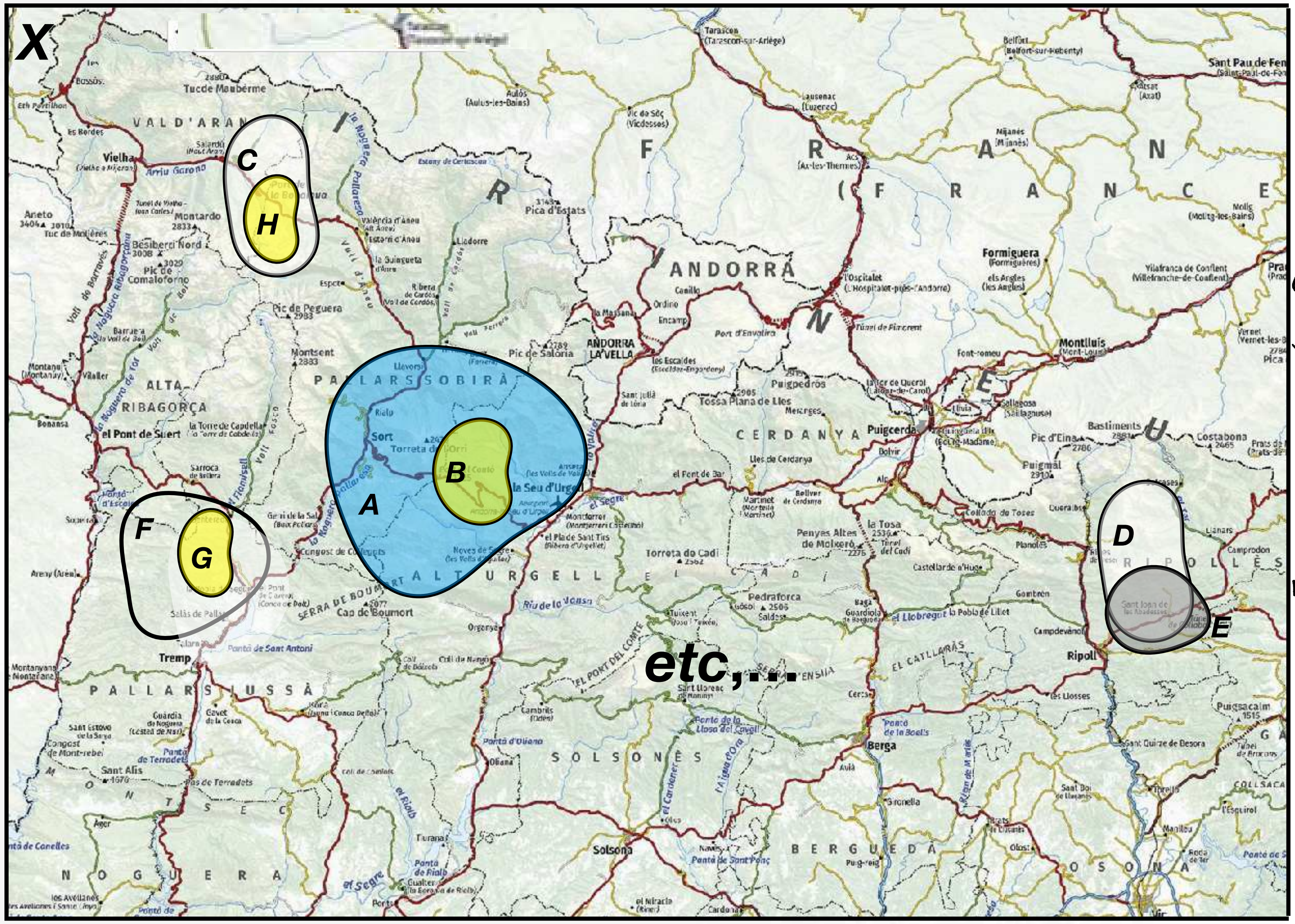


X una región del Pirineo

($P(X)$, $\subseteq$) Álgebra de Boole de las partes de X:

$A, B, \ldots, D, \ldots,$ elementos de $P(X)$.

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...



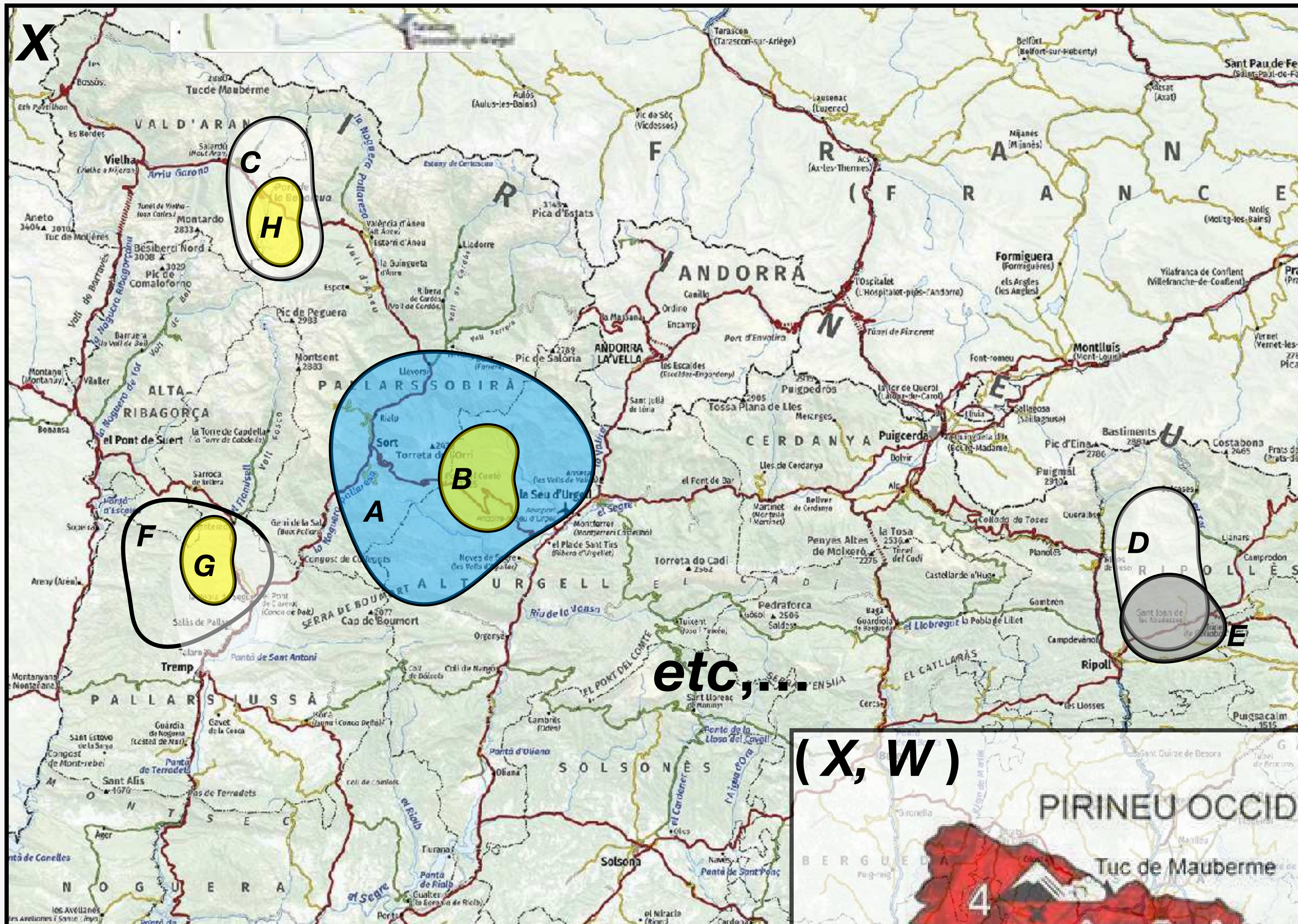
X una región del Pirineo

(***P*(*X*)**, ⊆) Álgebra de Boole de las partes de ***X***:

***A*, *B*,..., *D*,...,** elementos de ***P*(*X*).**

B ⊆ ***A*, *H*** ⊆ ***C*, *G*** ⊆ ***F*, *E*** ⊄ ***D*, *D*** ⊄ ***E***, etc,...

Con la inclusión podemos establecer una jerarquía entre zonas. Por ejemplo, después de un recorrido que incluya toda la zona ***A***, tendremos más información que si se recorre sólo ***B***, (en este sentido, ***B*** ⊆ ***A*** indica que ***B*** es menos favorable que ***A***, que ***E*** y ***D*** no están relacionados con este criterio, etc...).



X <u>una región del Pirineo</u>

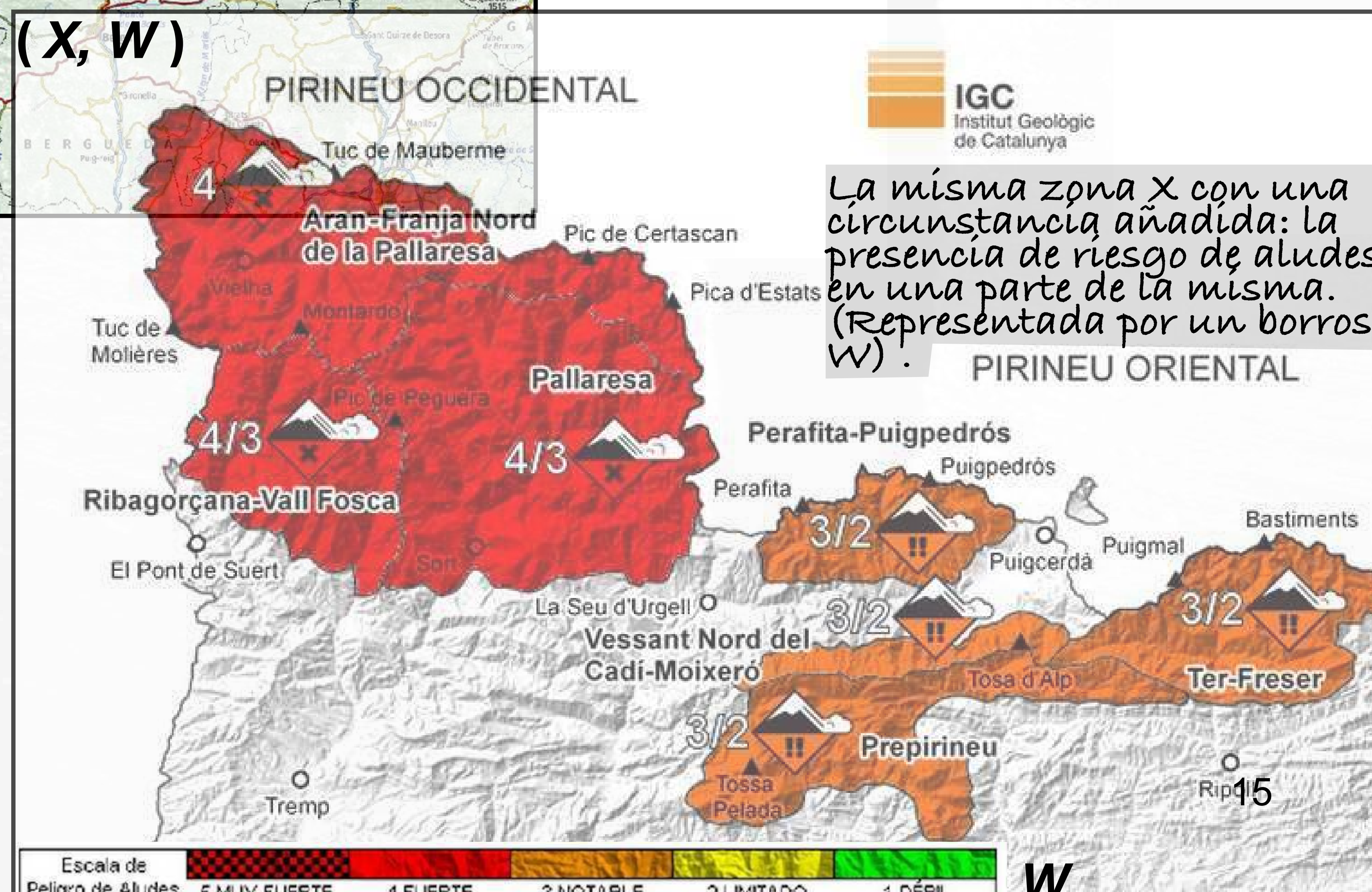
(***P*(*X*)**, ⊆) Álgebra de Boole de las partes de ***X***:

A, B,…, D,…, elementos de ***P*(*X*)**.

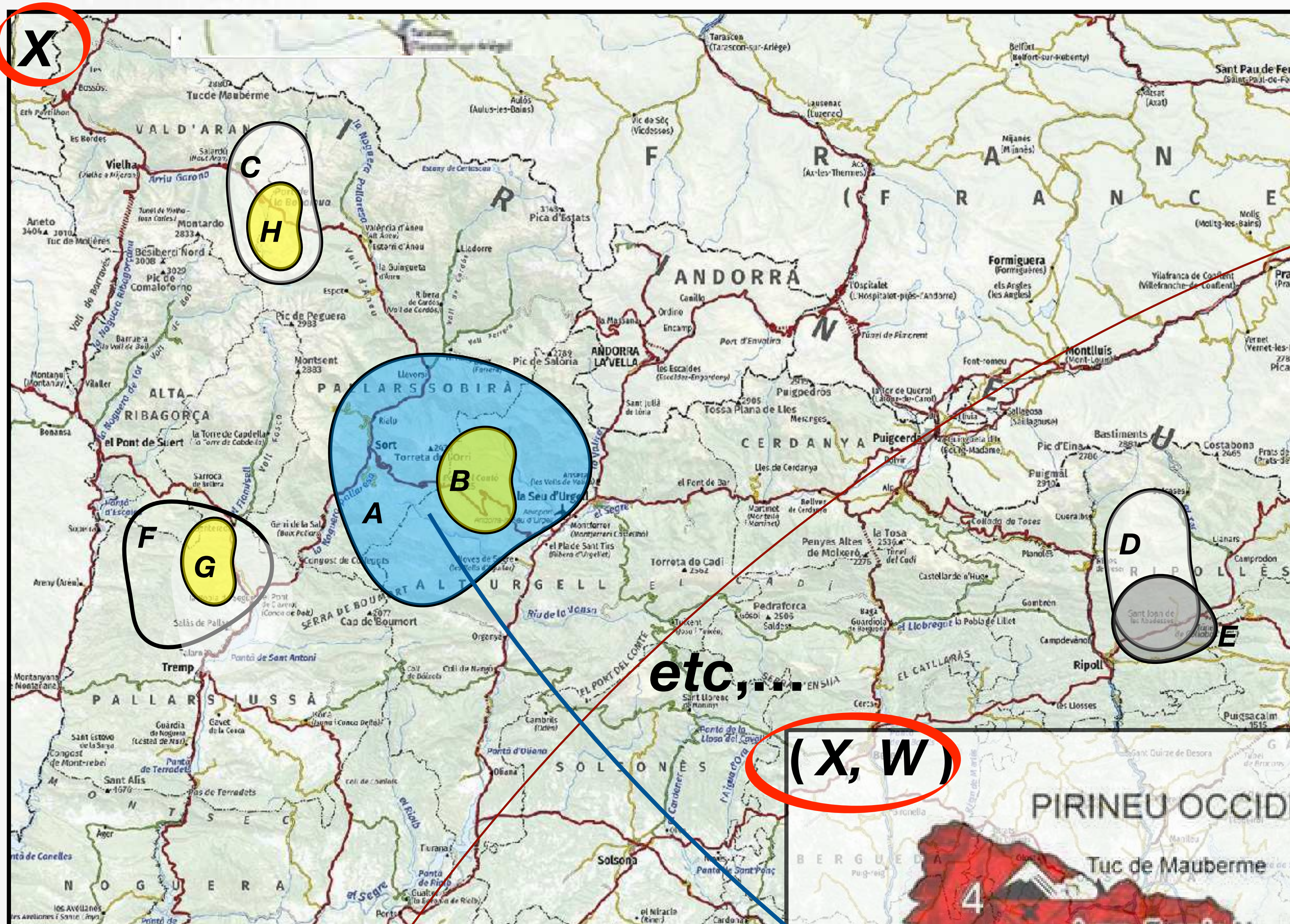
B ⊆ ***A***, ***H*** ⊆ ***C***, ***G*** ⊆ ***F***, ***E*** ⊄ ***D***, ***D*** ⊄ ***E***, etc,…

Con la inclusión podemos establecer una jerarquía entre zonas. Por ejemplo, después de un recorrido que incluya toda la zona ***A***, tendremos más información que si se recorre sólo ***B***, (en este sentido, ***B*** ⊆ ***A*** indica que ***B*** es menos favorable que ***A***, que ***E*** y ***D*** no están relacionados con este criterio, etc…).

Si L={1,2,3,4,5}, el par **(*X*, *W*)** es el <u>mapa **X**</u> con un subconjunto L-borroso ***W*** de ***X*** y que <u>representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.</u>



La misma zona X con una circunstancia añadida: la presencia de riesgo de aludes en una parte de la misma. (Representada por un borroso W).

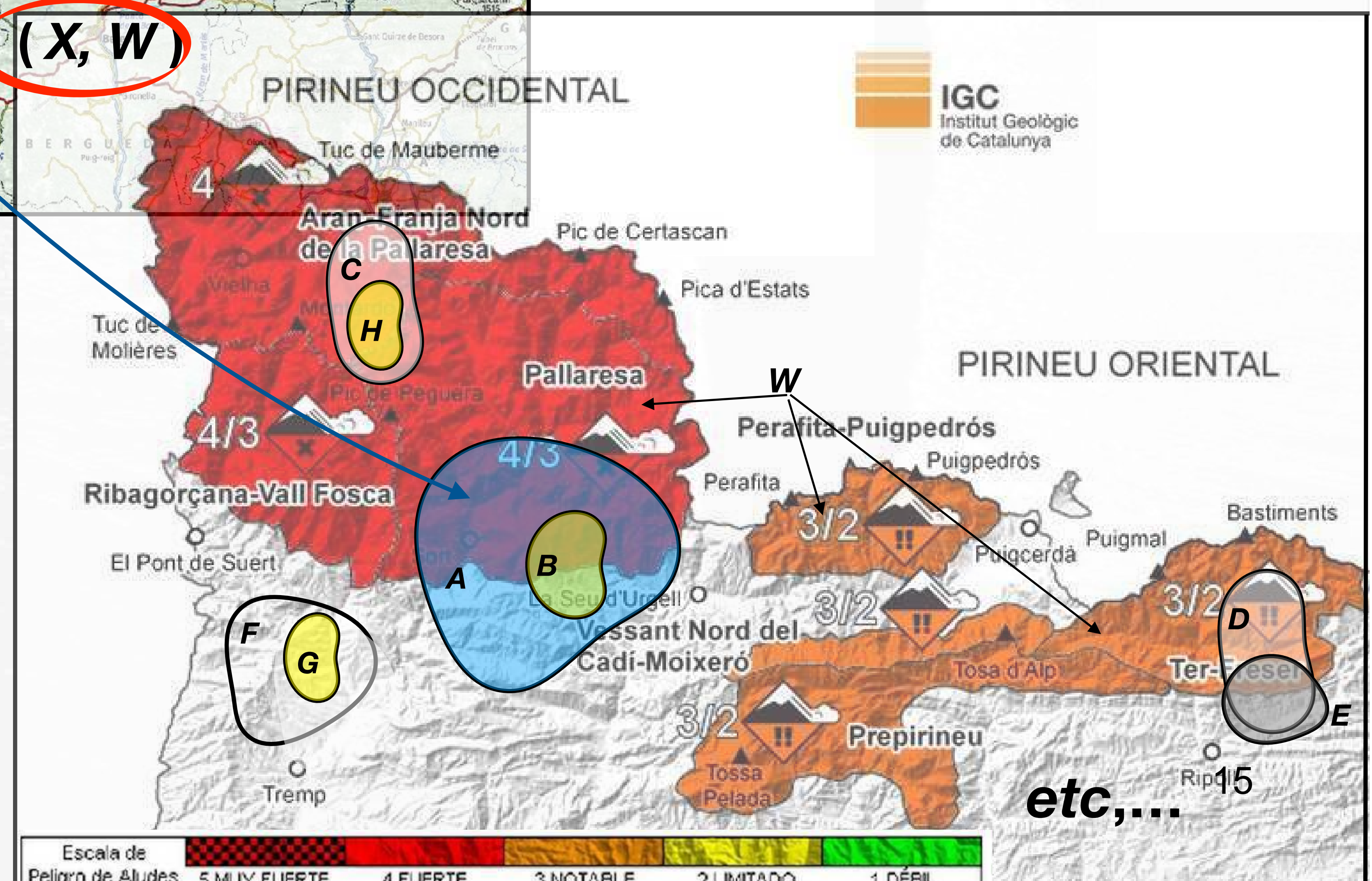


X una región del Pirineo

($P(X)$, $\subseteq$) Álgebra de Boole de las partes de X:
$A, B, \ldots, D, \ldots$, elementos de $P(X)$.

(*) $B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

Con la inclusión podemos establecer una jerarquía entre zonas. Por ejemplo, después de un recorrido que incluya toda la zona A, tendremos más información que si se recorre sólo B, (en este sentido, $B \subseteq A$ indica que B es menos favorable que A, que E y D no están relacionados con este criterio, etc...).



Si $L=\{1,2,3,4,5\}$, el par (X, W) es el <u>mapa X</u> con un subconjunto L-borroso W de X y que <u>representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.</u>

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación)(*), no refleja exactamente esta exigencia;

X una región del Pirineo

$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de X, (contiene a $(P(X), \subseteq)$)

$A, B, \ldots, D, \ldots$, elementos de $P(X)$.

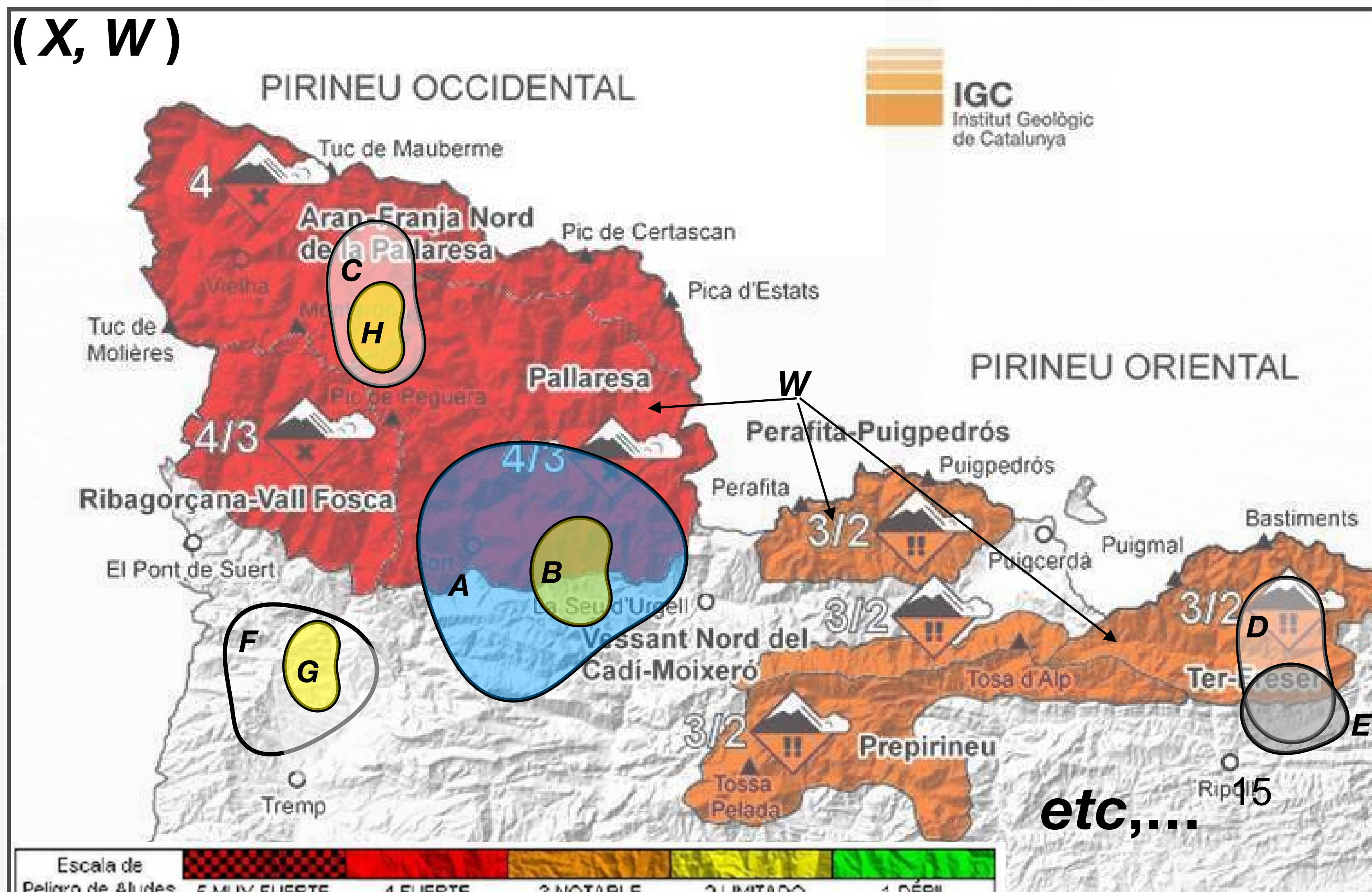
$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,...

Si $L=\{1,2,3,4,5\}$, el par (X, W) es el mapa X con un subconjunto L-borroso W de X y que representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación) , no refleja exactamente esta exigencia;

Sería más interesante una nueva relación $\sqsubseteq^W$, (inclusión desde la perspectiva W), tal que pueda representar la preferencia en esta nueva situación:



X una región del Pirineo

$\boxed{(L^X, \leq)}$ Retículo de L-borrosos de ***X*** , (contiene a (***P***(***X***), $\subseteq$))

A, ***B***,..., ***D***,..., elementos de ***P***(***X***).

$B \subseteq A, H \subseteq C, \; G \subseteq F, \; E \not\subseteq D, D \not\subseteq E$, etc,...

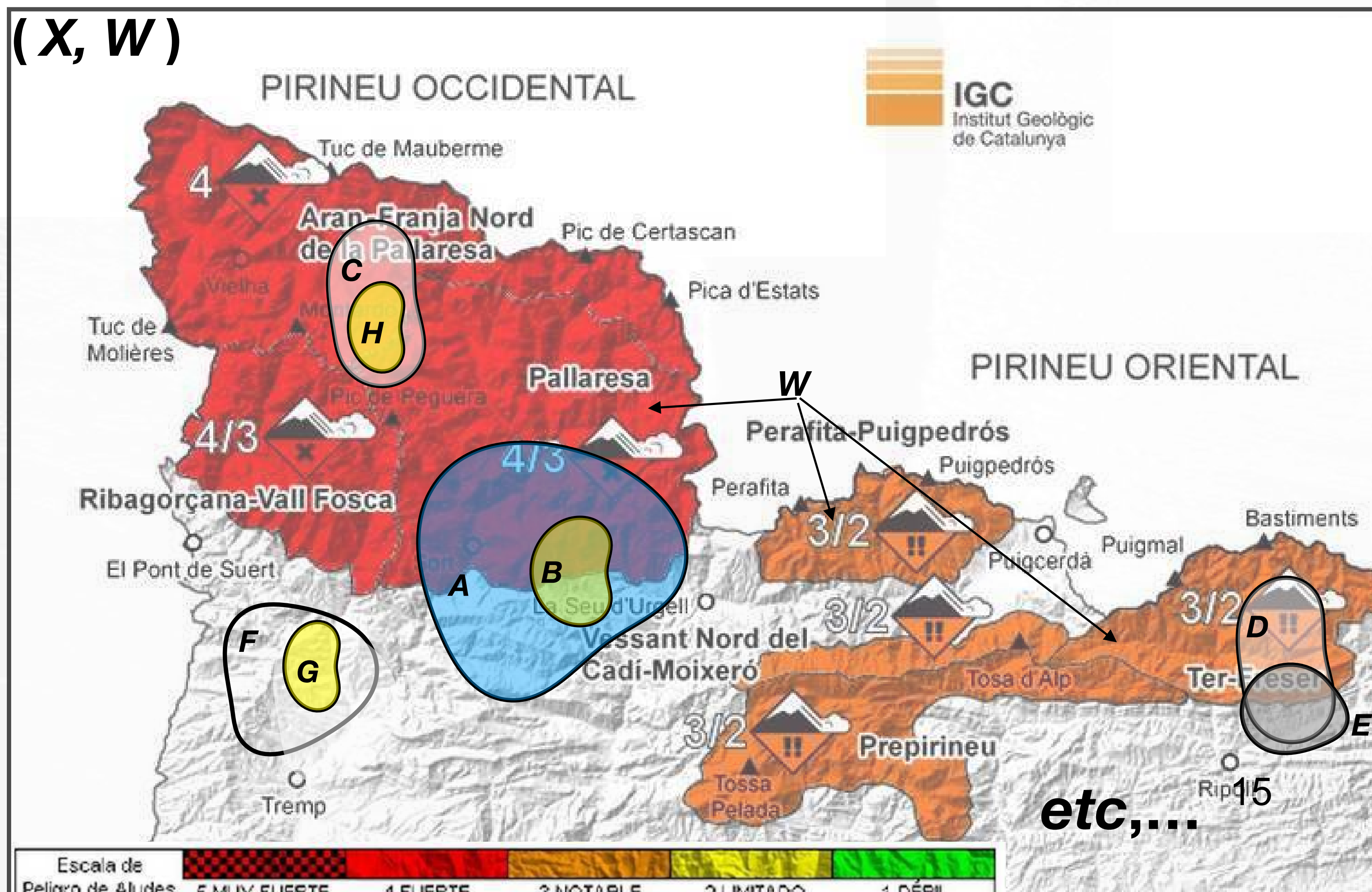
$B \not\sqsubseteq^W A, A \not\sqsubseteq^W B, C \sqsubseteq^W H, G \sqsubseteq^W F, D \sqsubseteq^W E$, etc,...

En estas condiciones, ***A*** y ***B*** no son comparables" .
(***B*** tiene menos zona de riesgo, pero ***A*** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).

Si L={1,2,3,4,5}, el par **(*X*, *W*)** es el mapa ***X*** con un subconjunto L-borroso ***W*** de ***X*** y que representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación) , no refleja exactamente esta exigencia;

Sería más interesante una nueva relación $\sqsubseteq^W$, (inclusión desde la perspectiva ***W***), tal que pueda representar la preferencia en esta nueva situación:



15

X *una región del Pirineo*

$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de **X**, (contiene a $(P(X), \subseteq)$)

A, B,…, D,…, elementos de **P(X).**

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,…

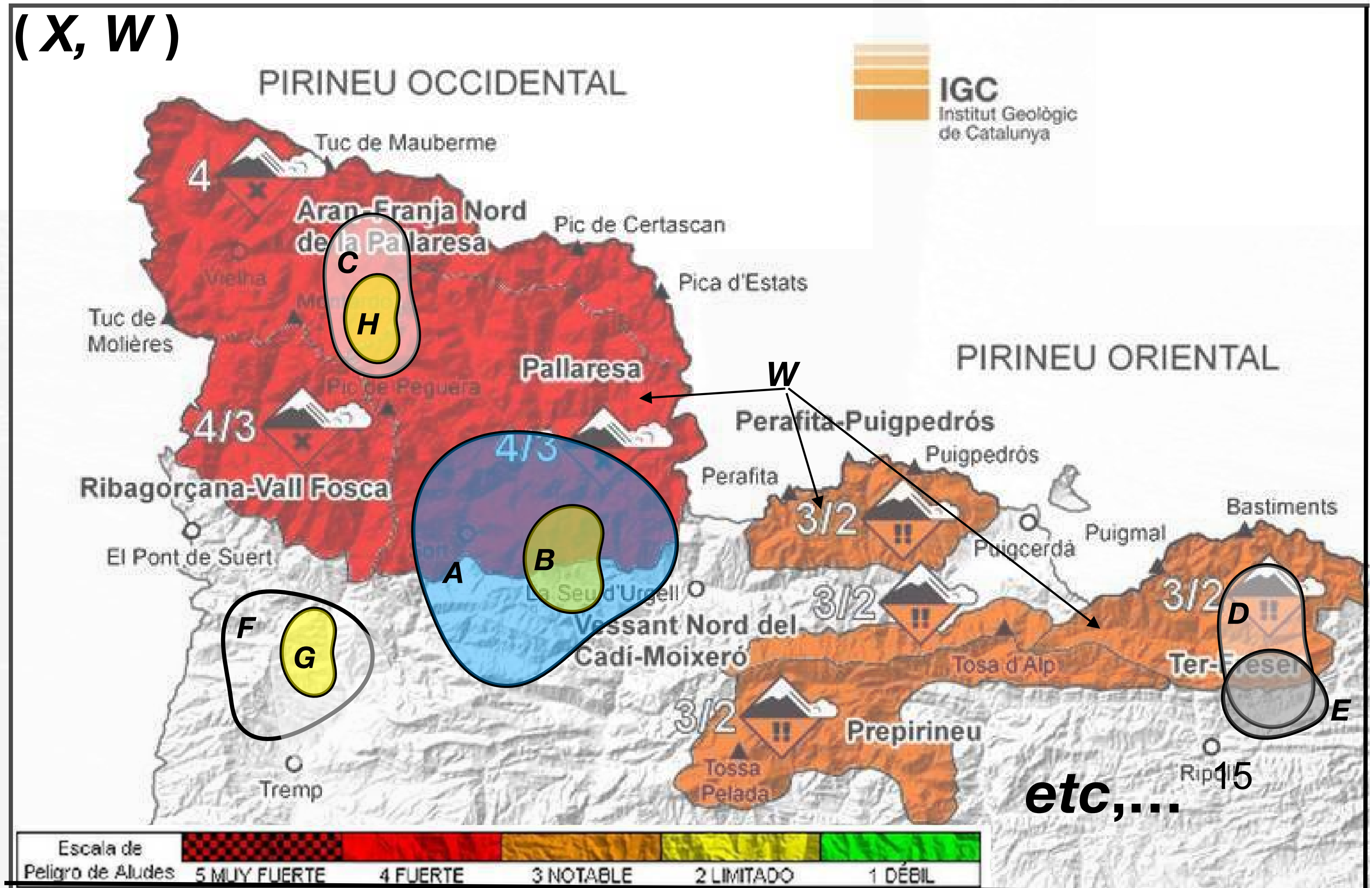
$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,…

En estas condiciones, **A** y **B** no son comparables" .
(**B** tiene menos zona de riesgo, pero **A** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".

Si L={1,2,3,4,5}, el par **(X, W)** es el mapa **X** con un subconjunto L-borroso **W** de **X** y que representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación) , no refleja exactamente esta exigencia;

Sería más interesante una nueva relación $\sqsubseteq^W$, (inclusión desde la perspectiva **W**), tal que pueda representar la preferencia en esta nueva situación:



X una región del Pirineo

$\boxed{(L^X, \leq) \text{ Retículo de L-borrosos de } X \text{, (contiene a } (P(X), \subseteq))}$

$A, B, \ldots, D, \ldots,$ elementos de $P(X)$.

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

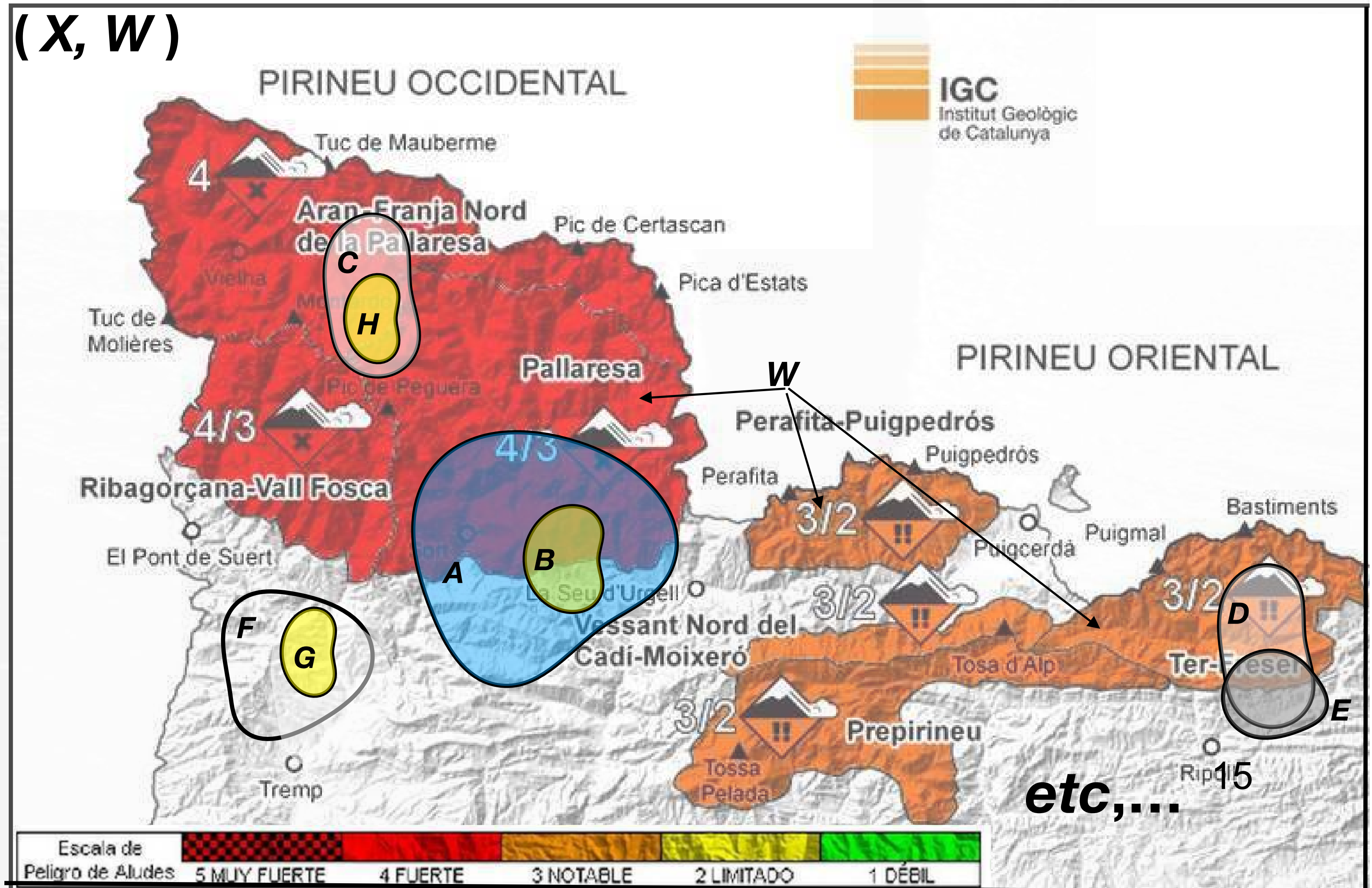
$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,...

En estas condiciones, A y B no son comparables" .
(B tiene menos zona de riesgo, pero A tiene más zona de conocimiento sin riesgo).
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".
"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".

Si $L=\{1,2,3,4,5\}$, el par (X, W) es el mapa X con un subconjunto L-borroso W de X y que representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación) , no refleja exactamente esta exigencia;

Sería más interesante una nueva relación $\sqsubseteq^W$, (inclusión desde la perspectiva W), tal que pueda representar la preferencia en esta nueva situación:



X una región del Pirineo

(L^X, $\leq$) Retículo de L-borrosos de **X**, (contiene a (**P**(**X**),$\subseteq$))

A, B,..., D,..., elementos de **P**(**X**).

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

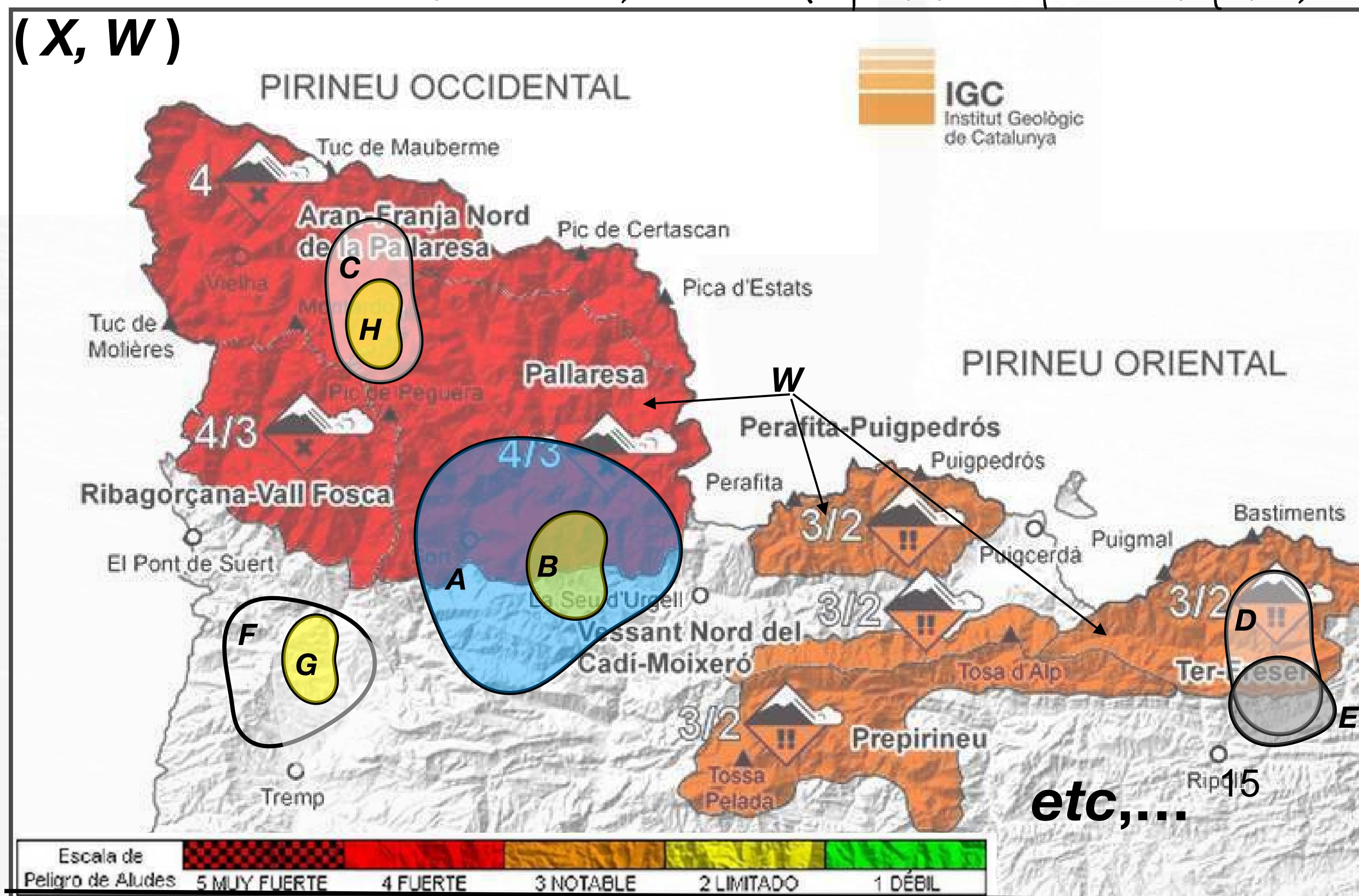
$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,...

En estas condiciones, **A** y **B** no son comparables".
(**B** tiene menos zona de riesgo, pero **A** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".
"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".
"**E** posee más zona de no-riesgo y menos de riesgo que **D**, por lo que en esta nueva relación, **E** y **D** que no estaban relacionados, ahora sí". (**E** parece más favorable que **D**).

Si L={1,2,3,4,5}, el par (**X, W**) es el mapa **X** con un subconjunto L-borroso **W** de **X** y que representa una zona con riesgo de que aparezca un alud.

Si se considera ahora un equilibrio entre el proceso de conocimiento de las zonas y la seguridad en sus recorridos, (y si prevalece ésta sobre el conocimiento), en la mayoría de los casos la inclusión usual $\subseteq$ (o su negación), no refleja exactamente esta exigencia;

Sería más interesante una nueva relación $\sqsubseteq^W$, (inclusión desde la perspectiva **W**), tal que pueda representar la preferencia en esta nueva situación:



En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

X una región del Pirineo

$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de ***X***, (contiene a $(P(X), \subseteq)$)

***A*, *B*,…, *D*,…,** elementos de ***P*(*X*).**

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,…

$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,…

En estas condiciones, ***A*** y ***B*** no son comparables".

(***B*** tiene menos zona de riesgo, pero ***A*** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).

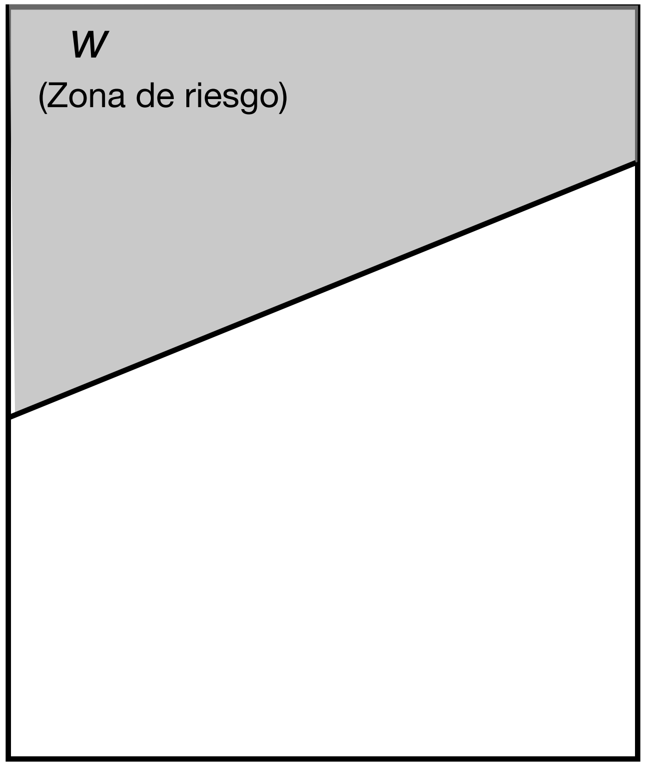
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".

"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".

"***E*** posee más zona de no-riesgo y menos de riesgo que ***D***, por lo que en esta nueva relación, ***E*** y ***D*** que no estaban relacionados, ahora sí". (***E*** parece más favorable que ***D***).

Subconjuntos nítidos:
W, A, B, A_1, etc.

E



"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

X una región del Pirineo

$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de **X**, (contiene a $(P(X), \subseteq)$)

A, B,…, D,…, elementos de **P(X).**

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,…

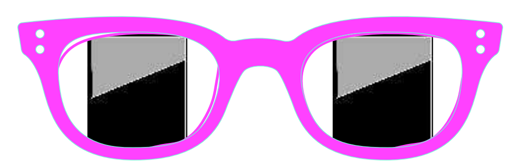
$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,…

En estas condiciones, **A** y **B** no son comparables".
(**B** tiene menos zona de riesgo, pero **A** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).

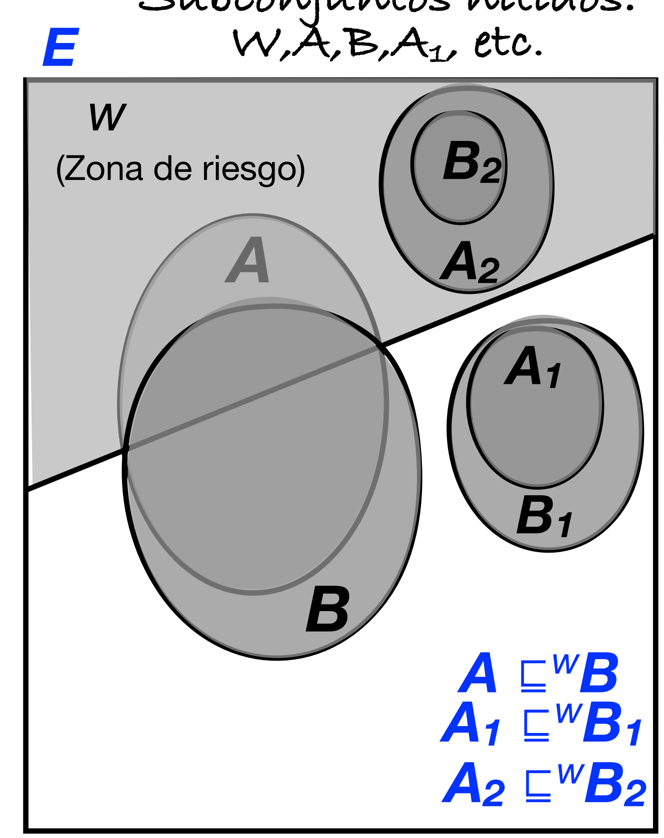
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".

"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".

"**E** posee más zona de no-riesgo y menos de riesgo que **D**, por lo que en esta nueva relación, **E** y **D** que no estaban relacionados, ahora sí". (**E** parece más favorable que **D**).



Subconjuntos nítidos:
W,A,B,A_1, etc.



"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

<u>**X** una región del Pirineo</u>

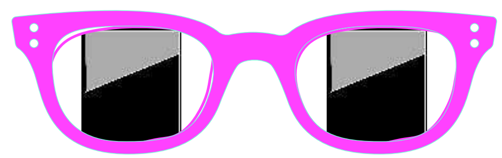
$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de **X**, (contiene a $(P(X), \subseteq)$

A, B,..., D,..., elementos de **P(X).**

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

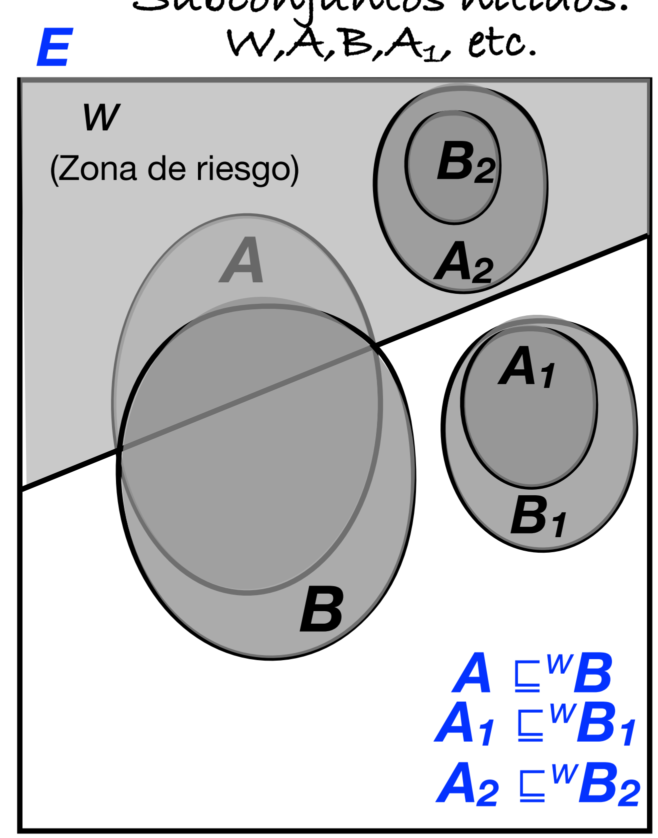
$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,...

En estas condiciones, **A** y **B** no son comparables".
(**B** tiene menos zona de riesgo, pero **A** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).
"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".
"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".
"**E** posee más zona de no-riesgo y menos de riesgo que **D**, por lo que en esta nueva relación, **E** y **D** que no estaban relacionados, ahora sí". (**E** parece más favorable que **D**).



o...

Subconjuntos nítidos: W,A,B,A_1, etc.



"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

<u>***X*** **una región del Pirineo**</u>

$(L^X, \leq)$ Retículo de L-borrosos de ***X***, (contiene a $(P(X), \subseteq)$)

A, B,..., D,..., elementos de $P(X)$.

$B \subseteq A$, $H \subseteq C$, $G \subseteq F$, $E \not\subseteq D$, $D \not\subseteq E$, etc,...

$B \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W B$, $C \sqsubseteq^W H$, $G \sqsubseteq^W F$, $D \sqsubseteq^W E$, etc,...

En estas condiciones, ***A*** y ***B*** no son comparables".

(***B*** tiene menos zona de riesgo, pero ***A*** tiene más zona de conocimiento sin riesgo).

"Si, como parece lógico, priorizamos el minimizar el riesgo, en este caso se invierte la preferencia".

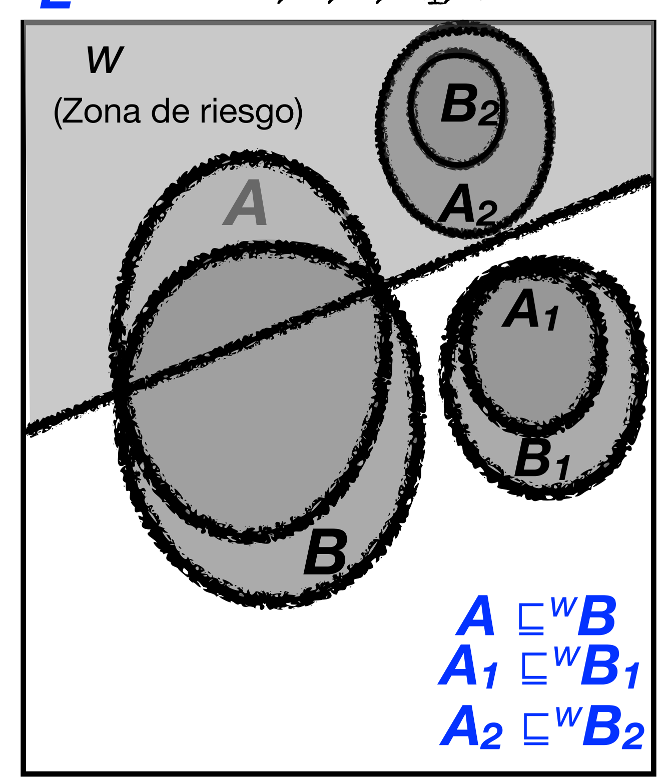
"la ausencia de riesgo hace que no cambie la preferencia".

"***E*** posee más zona de no-riesgo y menos de riesgo que ***D***, por lo que en esta nueva relación, ***E*** y ***D*** que no estaban relacionados, ahora sí". (***E*** parece más favorable que ***D***).

o...

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

E

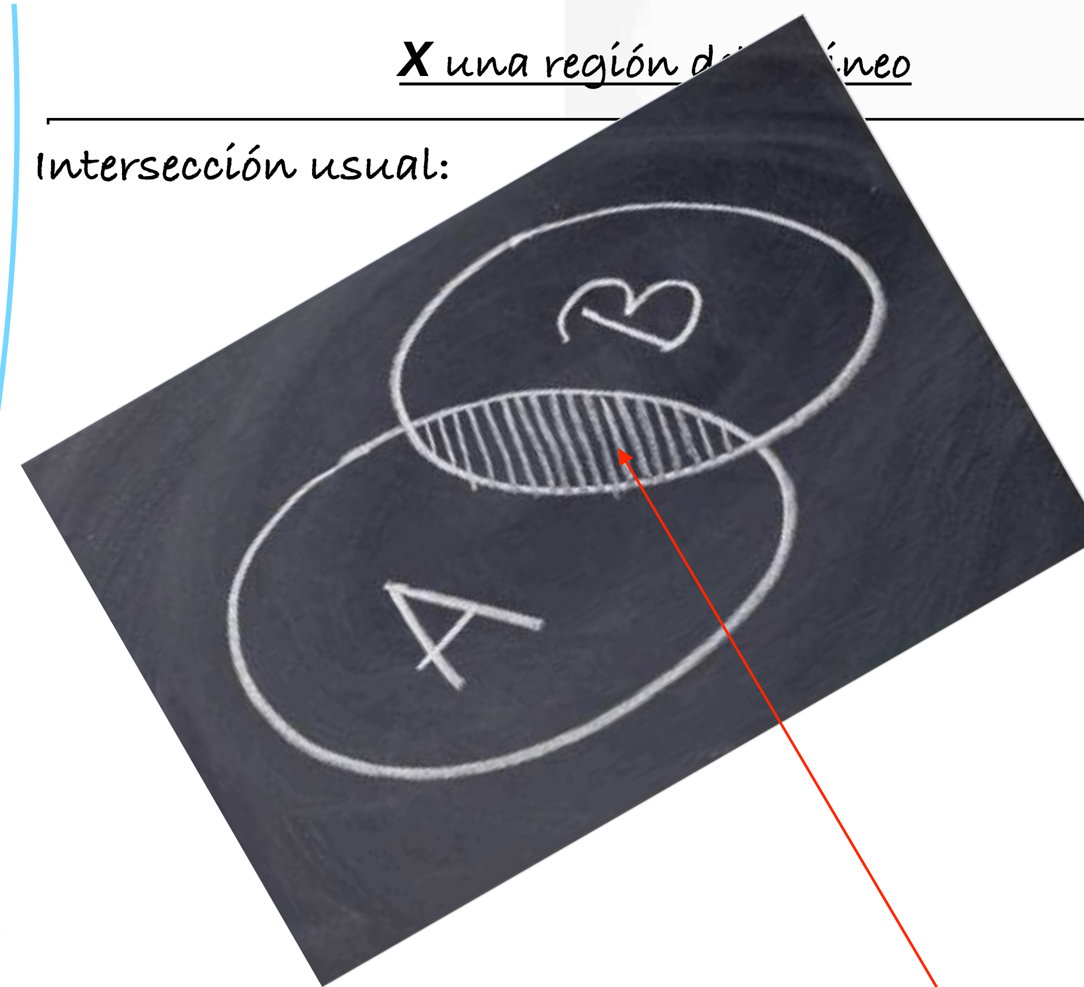


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

X una región d… íneo

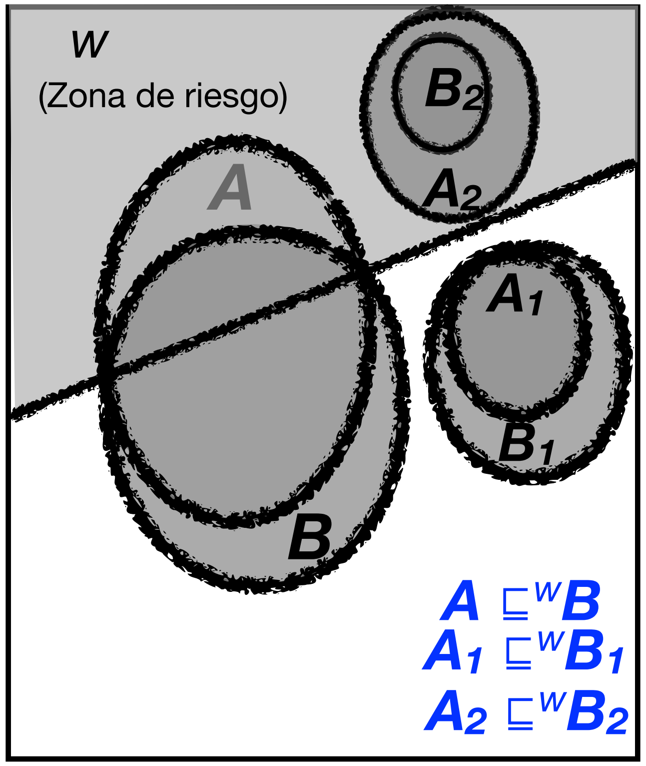
Intersección usual:



$A \cap B$

Subconjuntos borrosos:
W, A, B, A_1, etc.

E

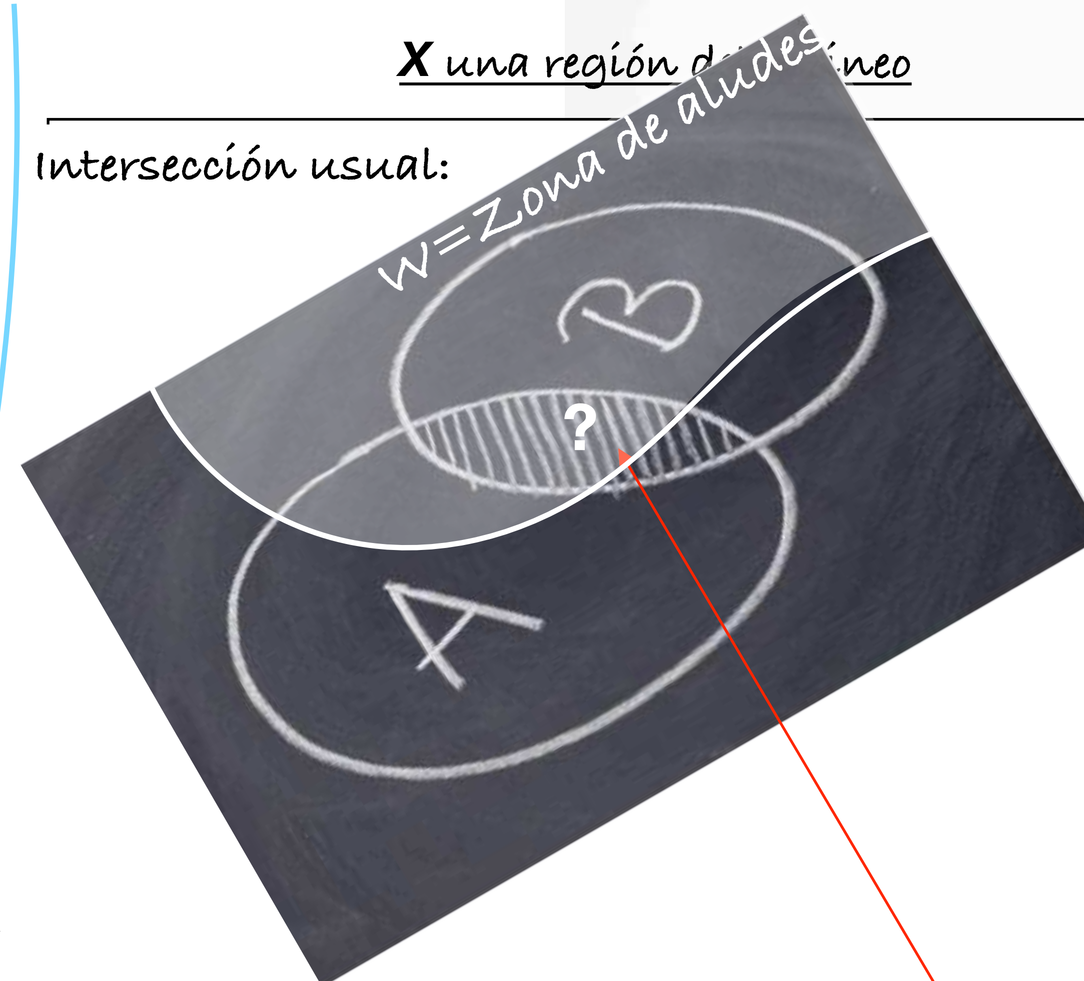


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^{W}$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

X una región d… ineo

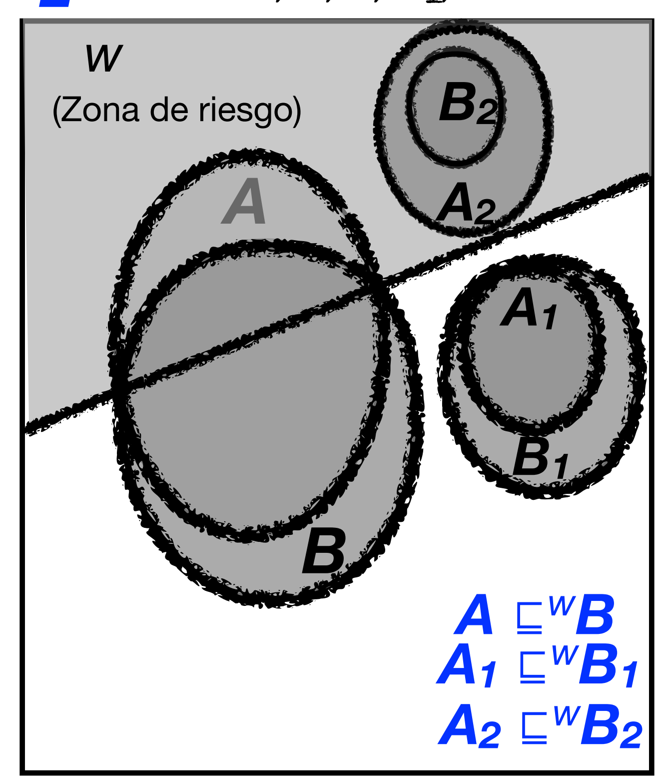
Intersección usual:



$A \cap B$

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

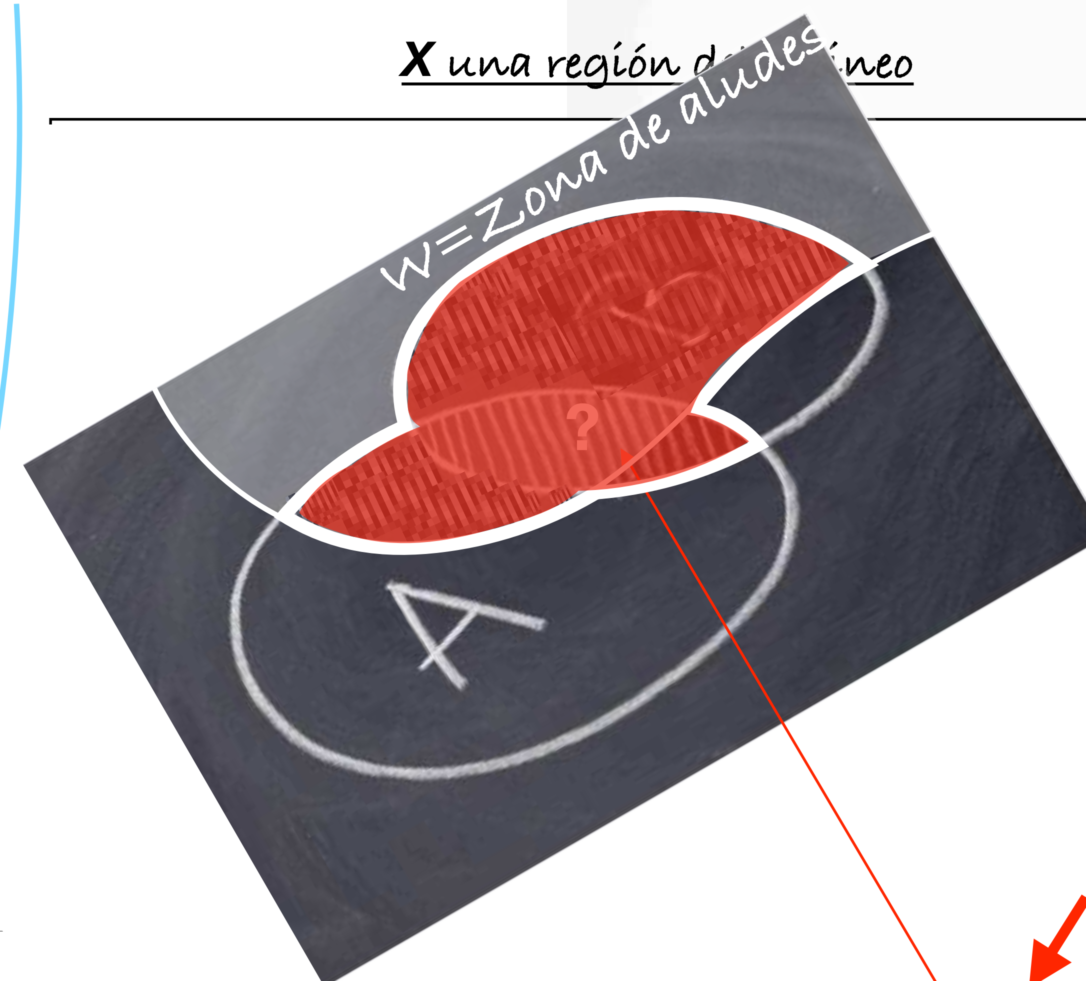
E



"Inclusiones" $\sqsubseteq^{W}$ en entornos con riesgo.

X una región d… neo

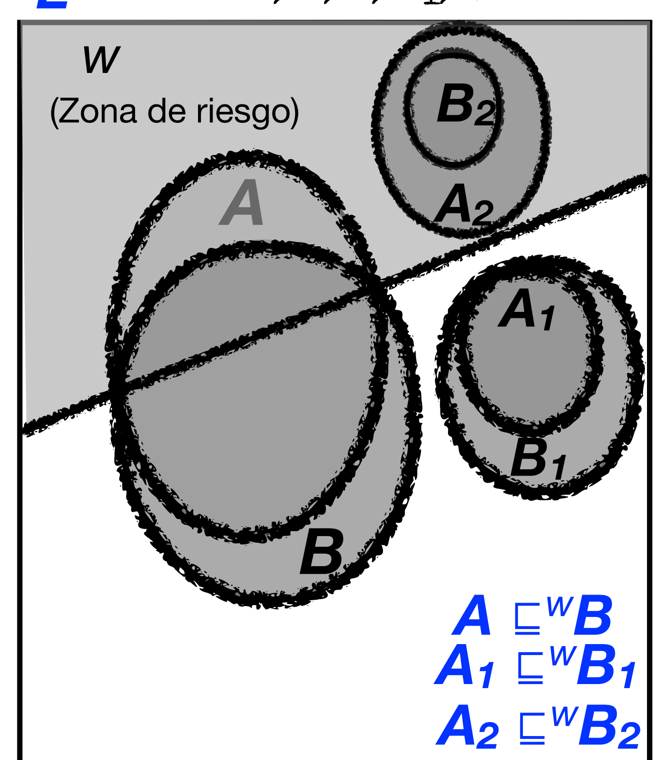
En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.



$A \sqcap^W B$

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

E

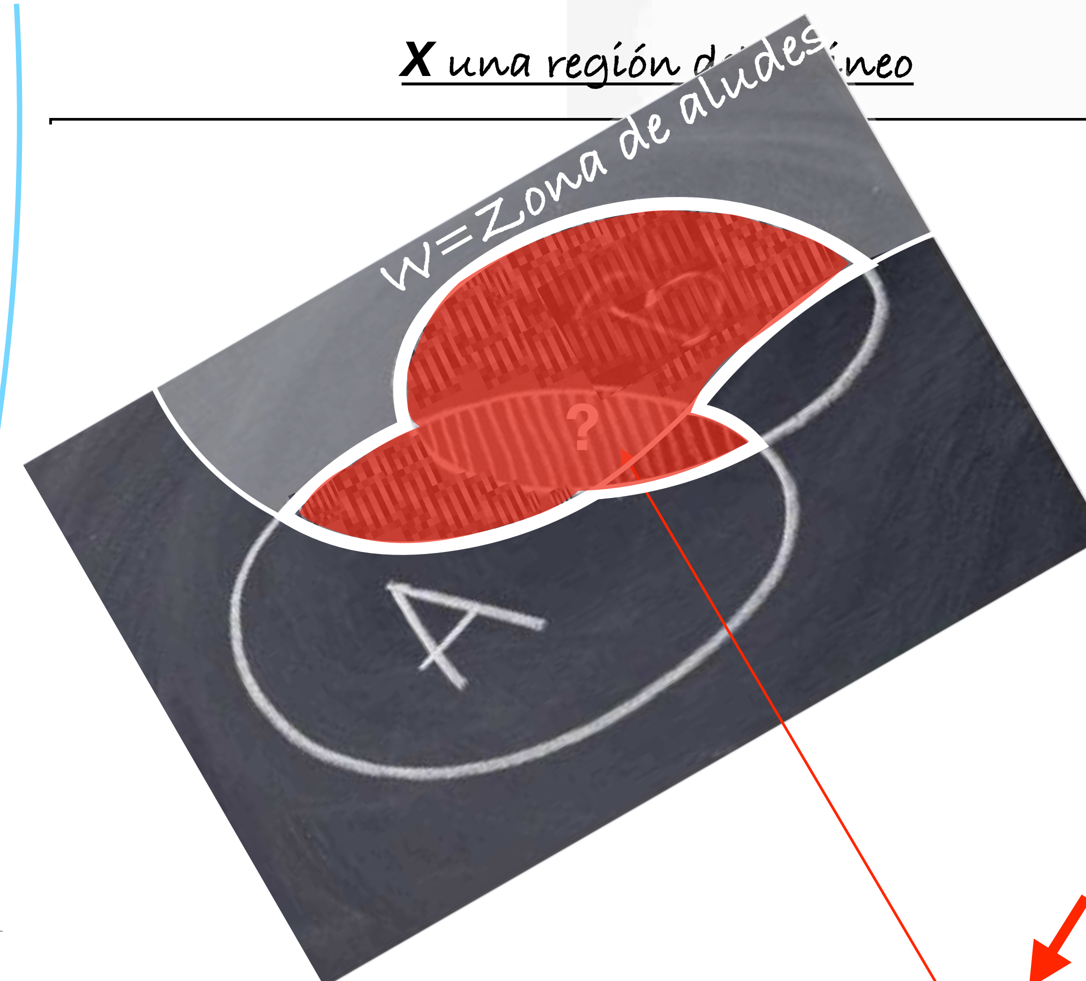


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "w-intersección" entre zonas, ($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

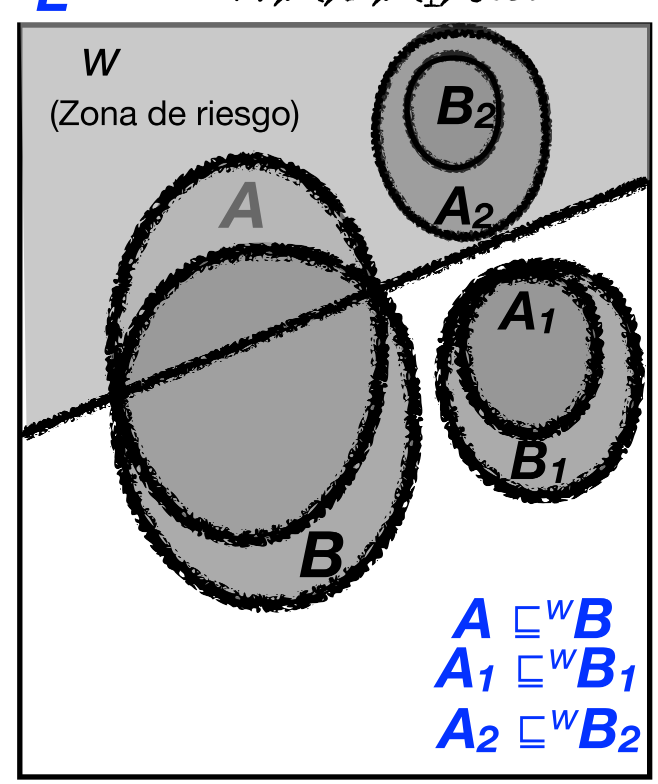
***X* una región d… neo**



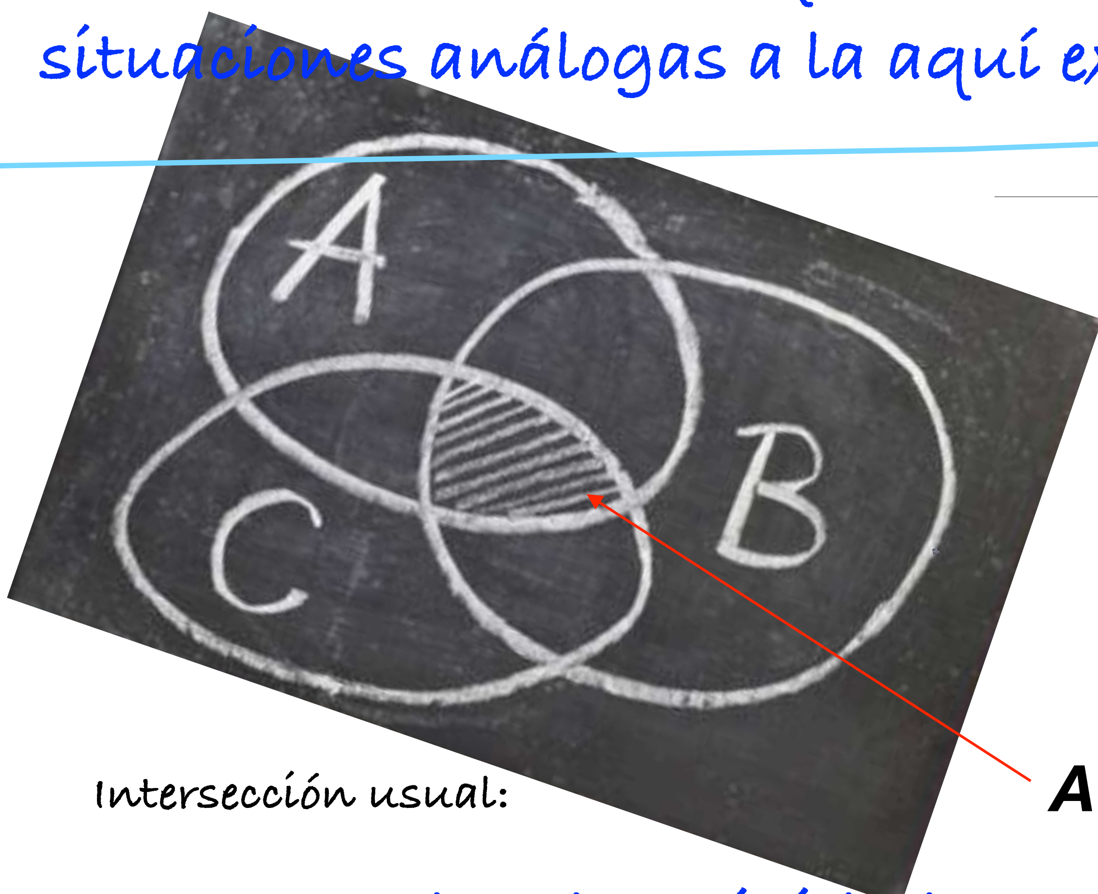
$A \sqcap^W B$

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

E



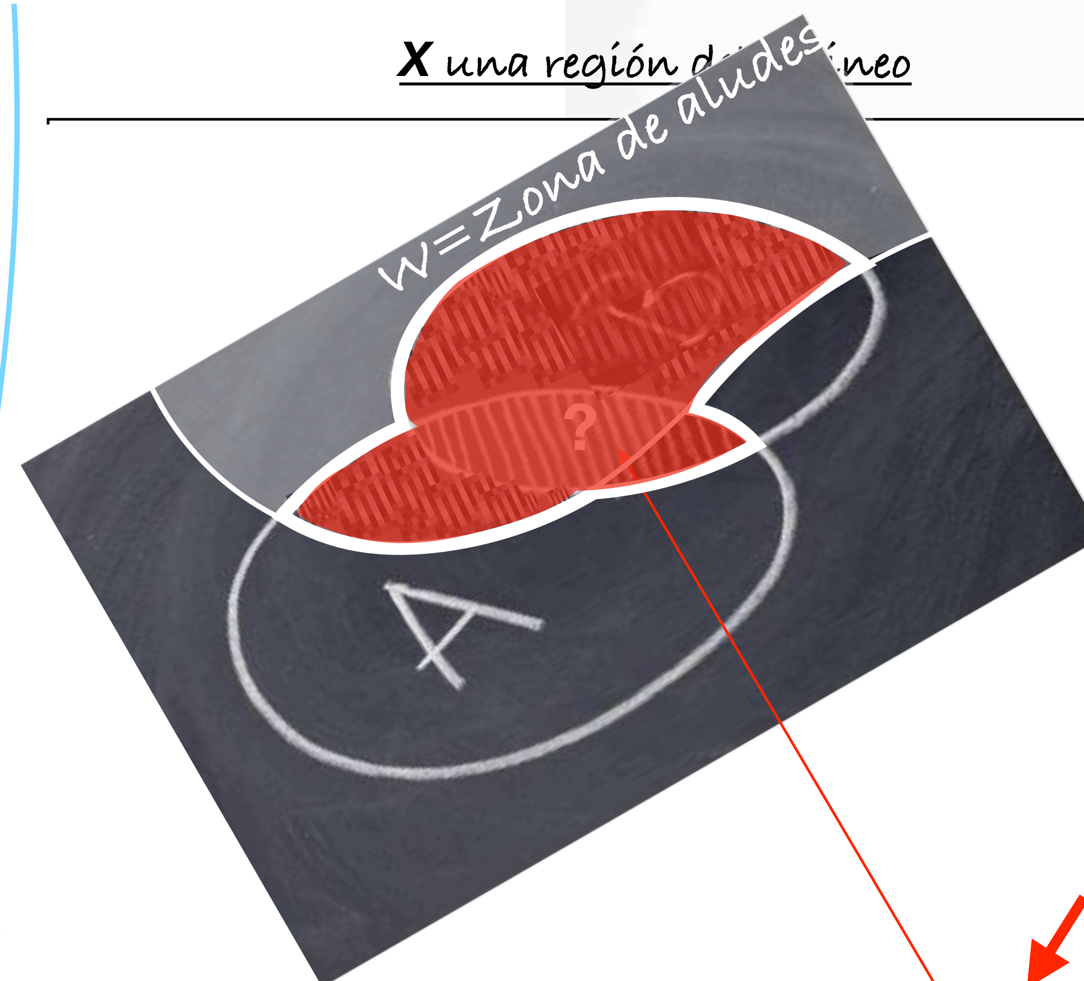
"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.



Intersección usual: $A \cap B \cap C$

En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "<u>w-intersección</u>" entre zonas, ($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

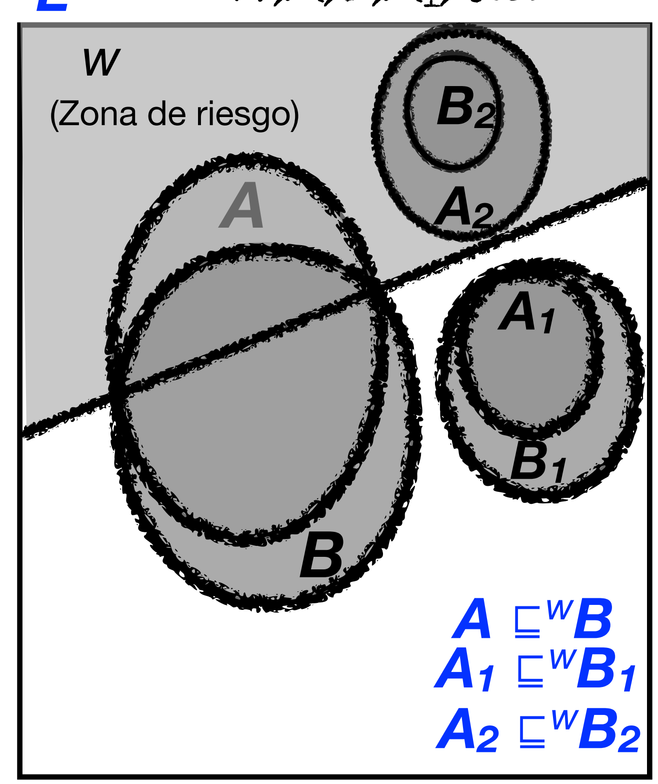
X una región d ...neo



En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

$A \sqcap^W B$

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.



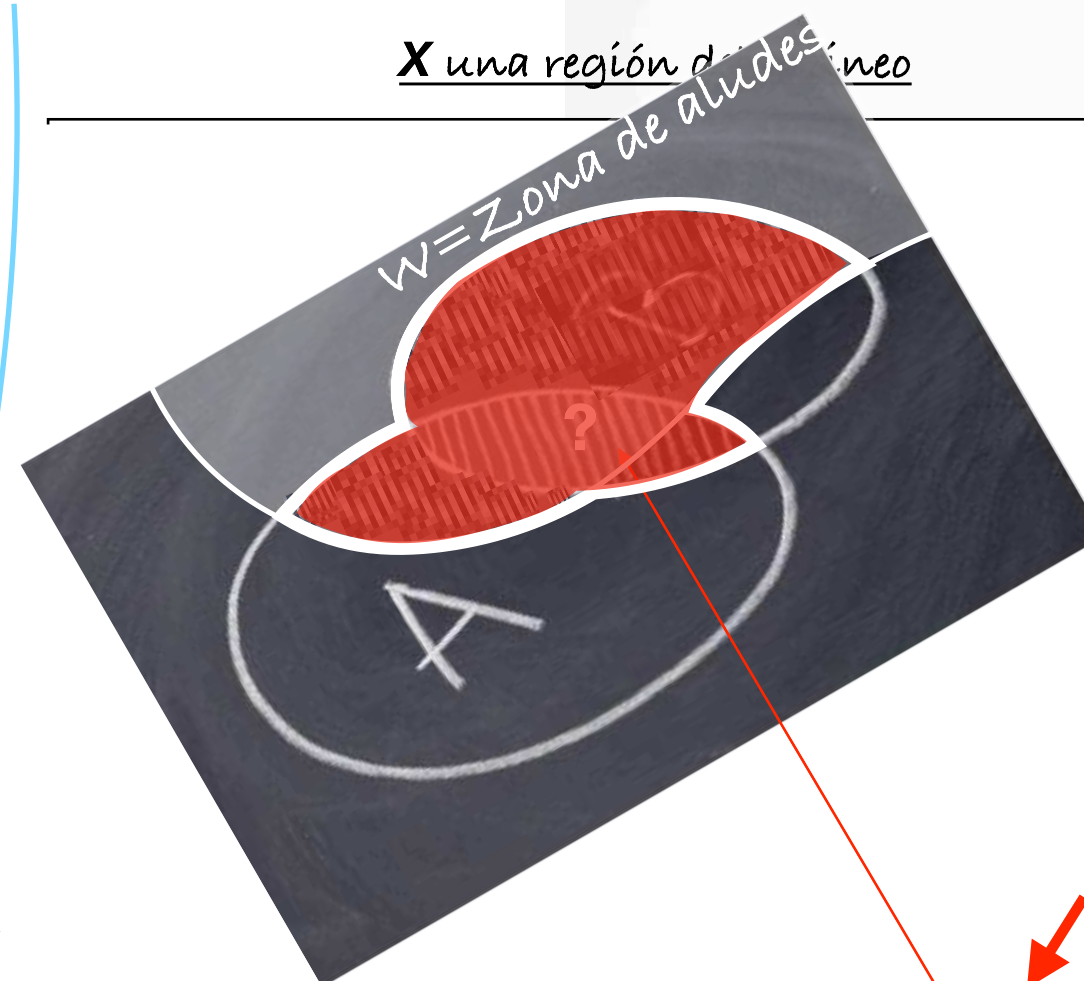
"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

Intersección usual: $A \cap B \cap C$

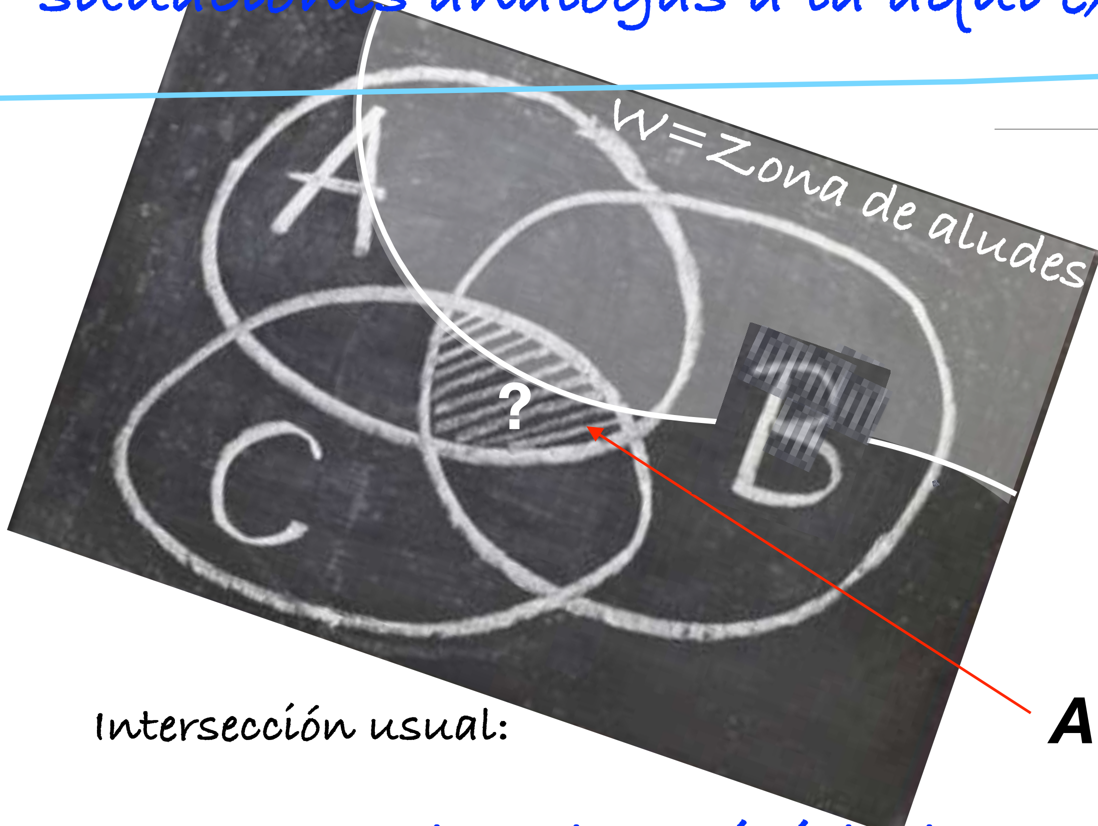
En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "w-intersección" entre zonas, ($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

X una región d ... neo

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

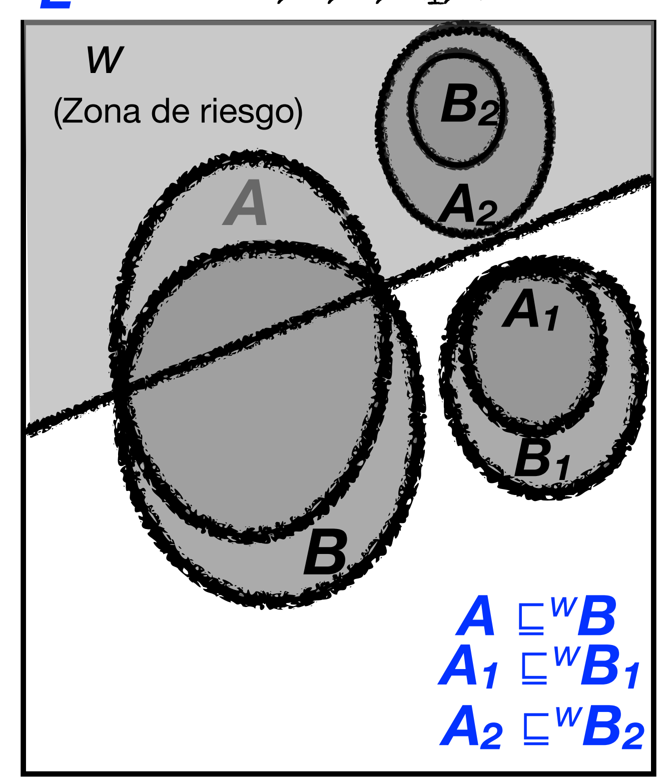


$A \sqcap^W B$



Intersección usual: $A \cap B \cap C$

Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

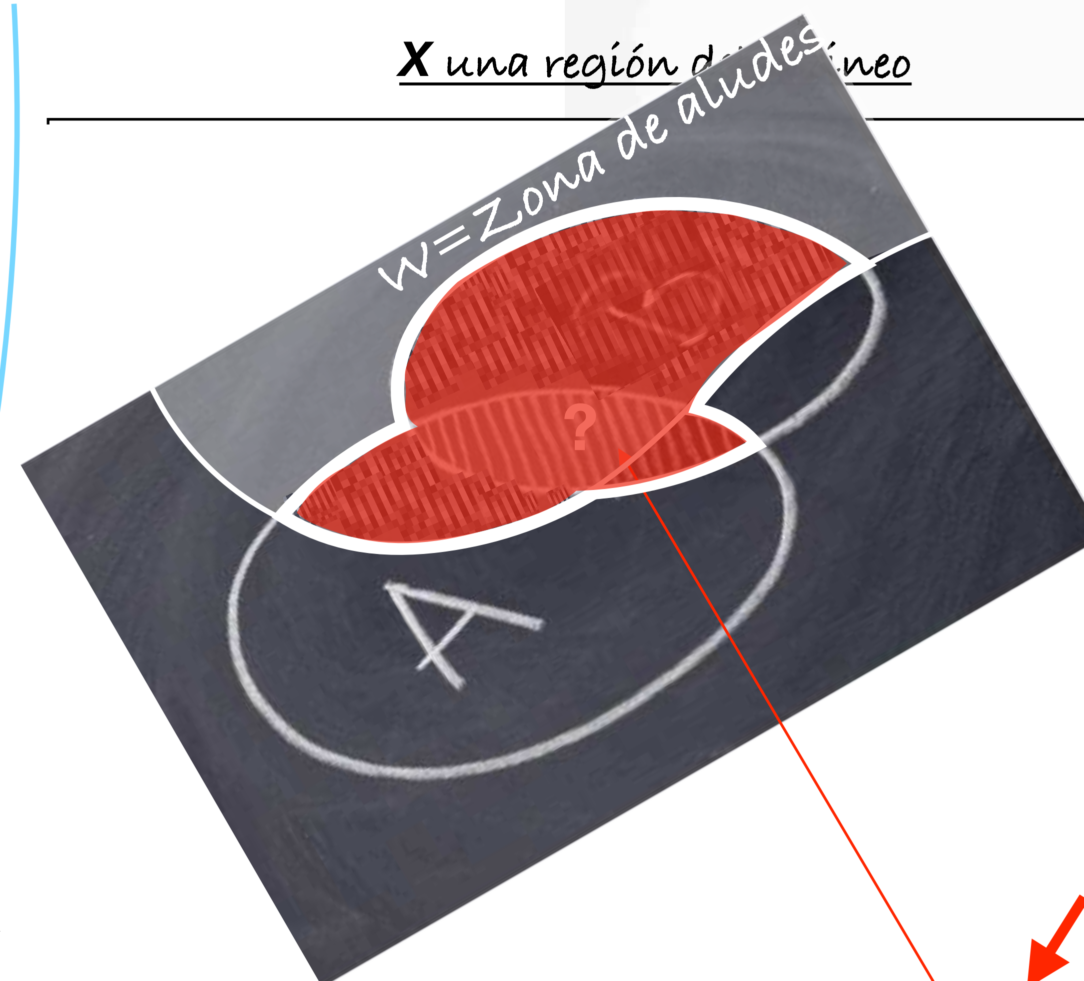


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

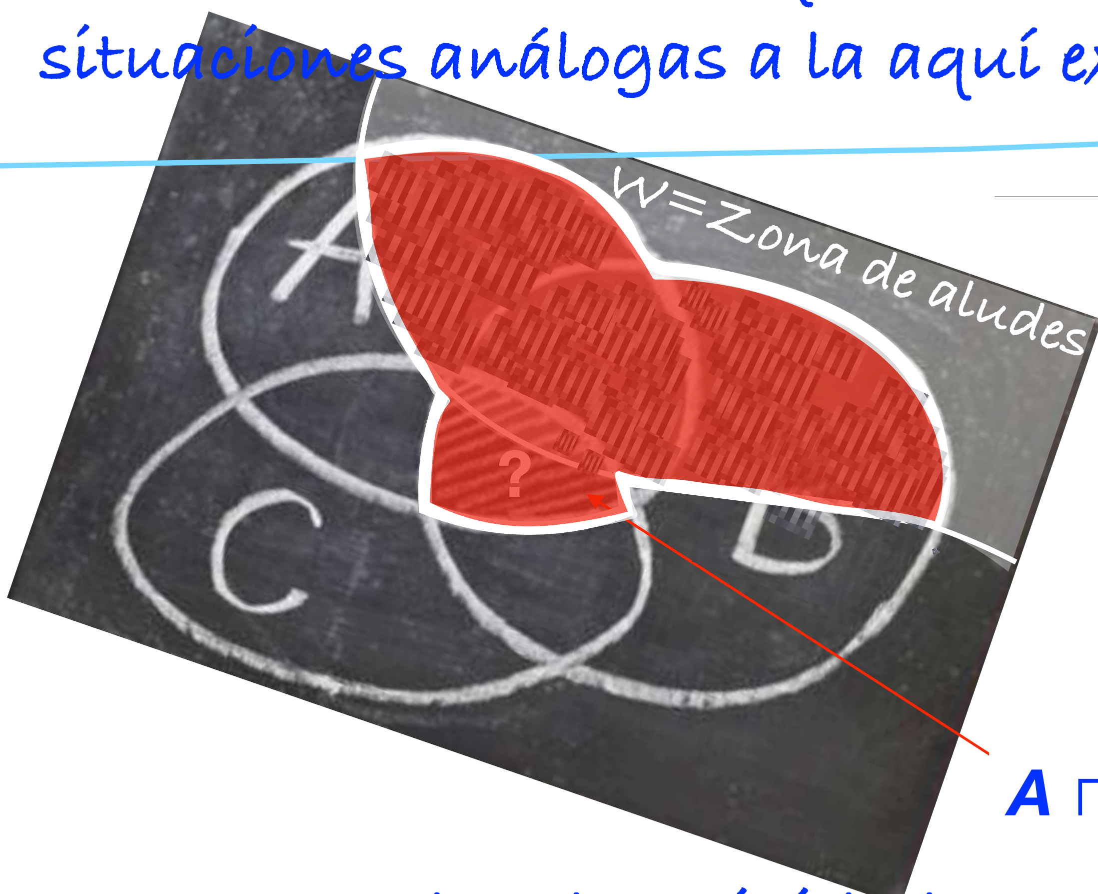
En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "w-intersección" entre zonas, ($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

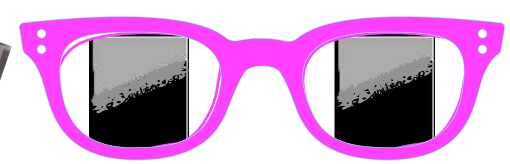
X una región d ... neo

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.



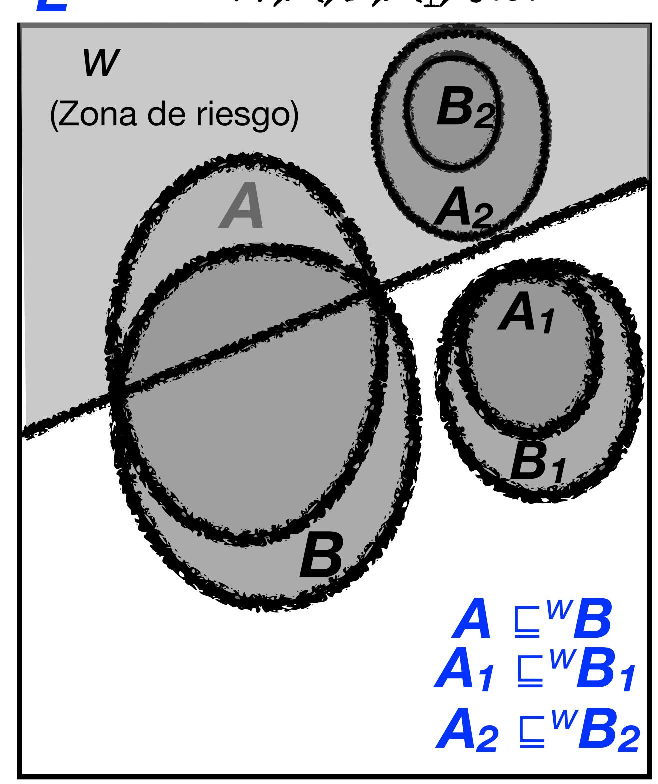
$A \sqcap^W B$





$A \sqcap^W B \sqcap^W C$, etc

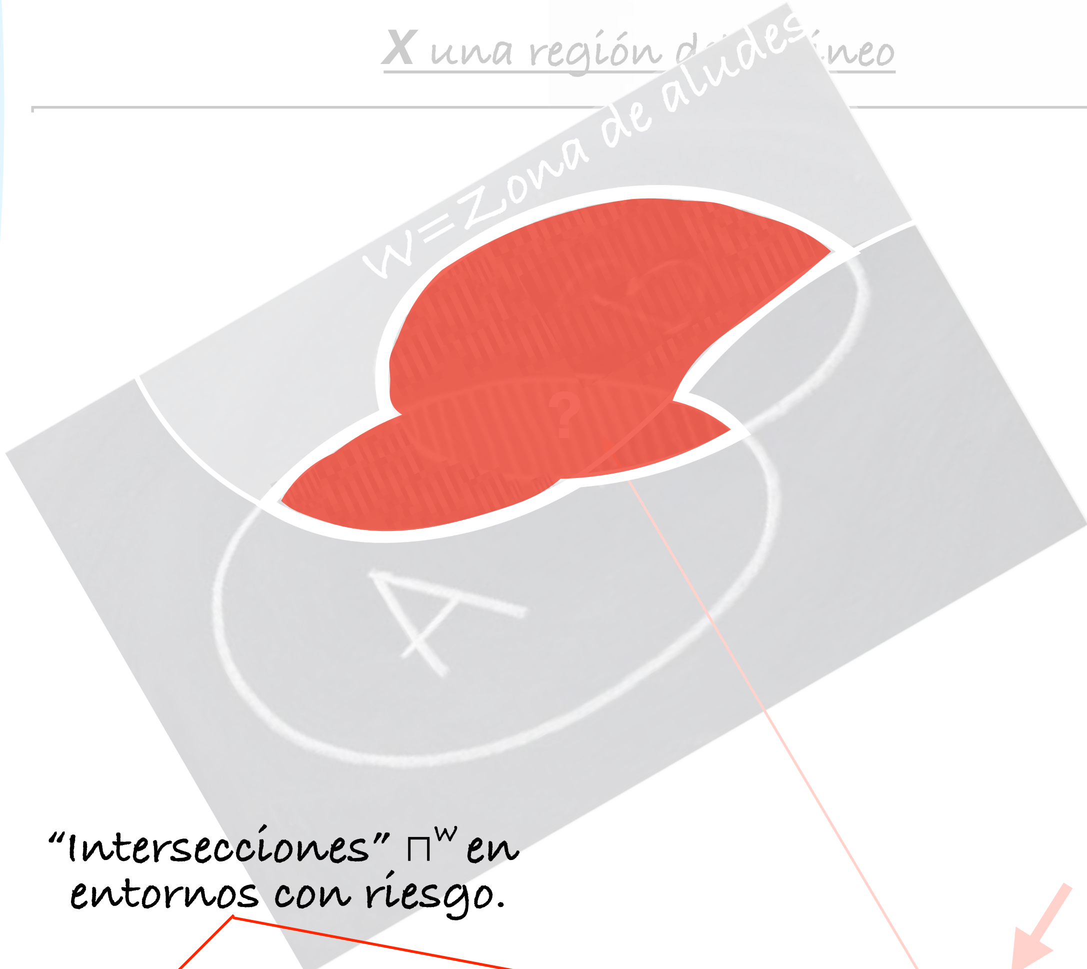
Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.



"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "w-intersección" entre zonas,
($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos órdenes de actividad $\sqsubseteq^{W}$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también constituyen nuevas "inclusiones" en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.

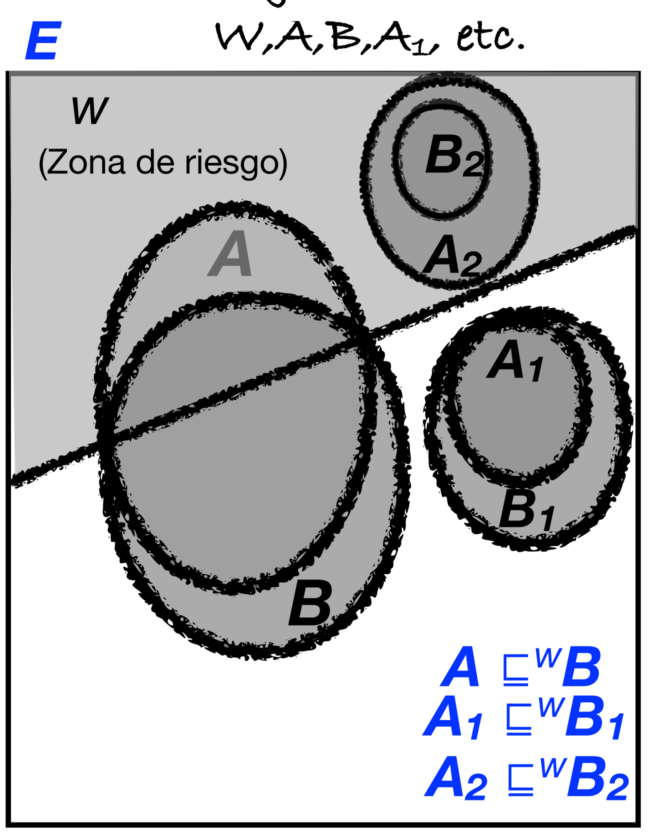


"Intersecciones" $\sqcap^{W}$ en entornos con riesgo.

$A \sqcap^{W} B$

$A \sqcap^{W} B \sqcap^{W} C$, etc

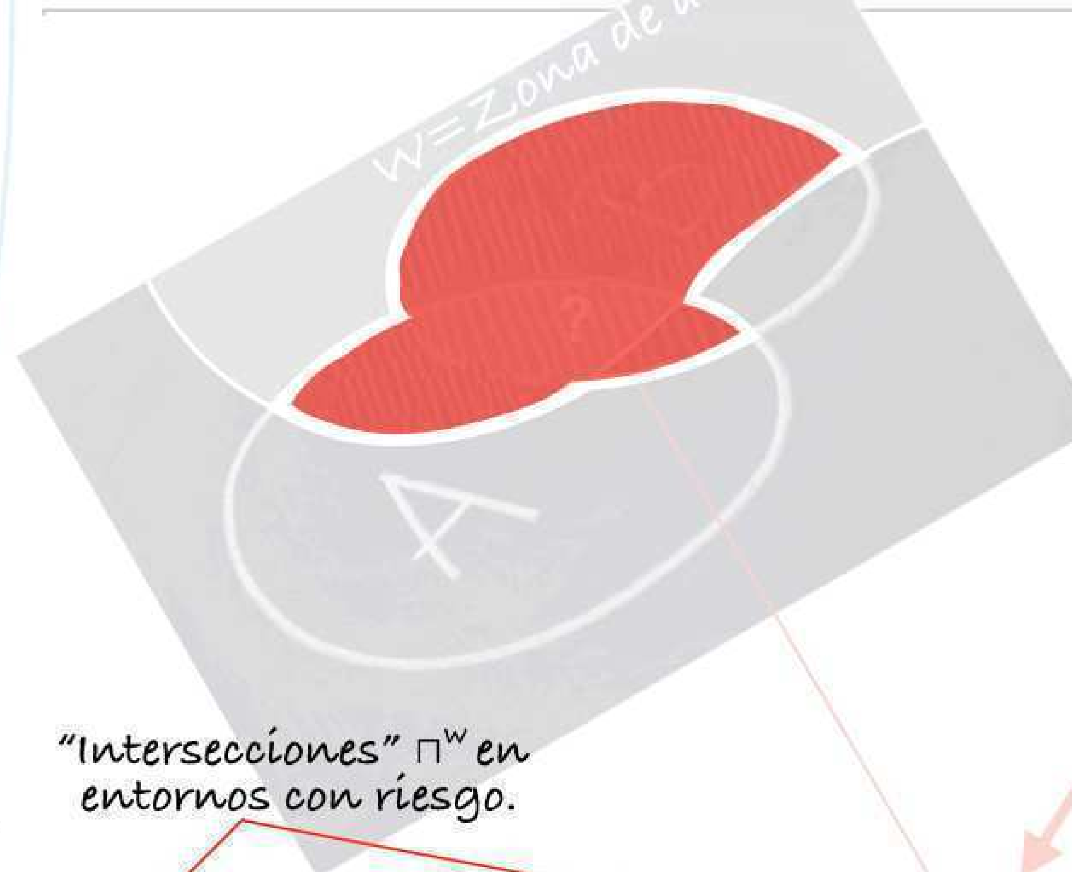
Subconjuntos borrosos: W, A, B, A_1, etc.

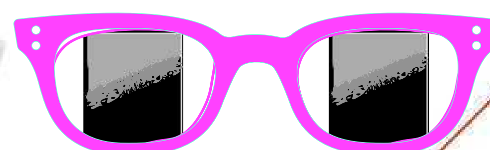


"Inclusiones" $\sqsubseteq^{W}$ en entornos con riesgo.

En L^{E}, el orden de actividad $\sqsubseteq^{W}$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^{W}$), que se interpreta como una nueva "w-intersección" entre zonas, ($A \sqcap^{W} B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

En lo que sigue, veremos que la consideración de los mismos <u>órdenes de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ que hemos mencionado como elementos de expresión del "contenido del vacío", también <u>constituyen nuevas "inclusiones"</u> en $P(X)$ que modelizan situaciones análogas a la aquí expuesta.





"Intersecciones" $\sqcap^W$ en entornos con riesgo.

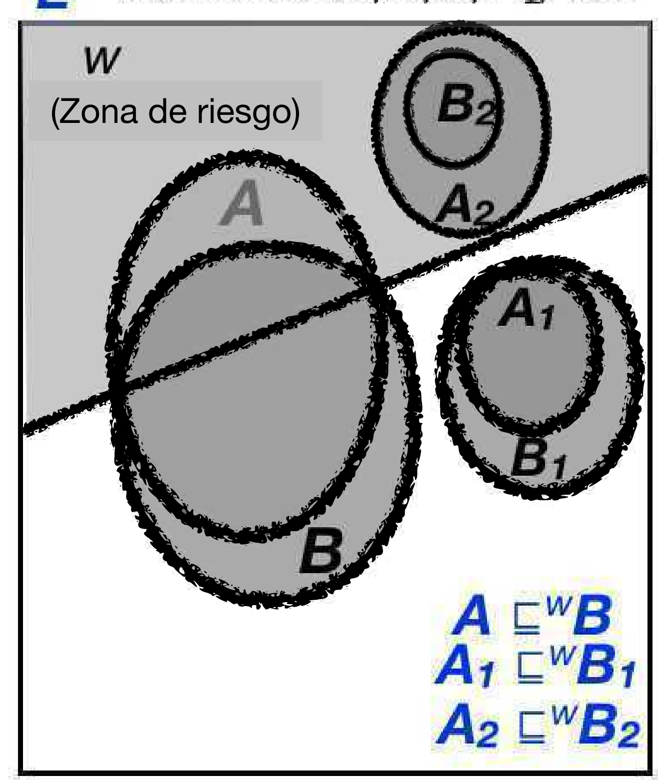
$A \sqcap^W B$

$A \sqcap^W B \sqcap^W C$, etc

En L^E, el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf, (representado mediante $\sqcap^W$), que se interpreta como una nueva "<u>w-intersección</u>" entre zonas, ($A \sqcap^W B$ es la intersección de A y B desde la perspectiva de W) :

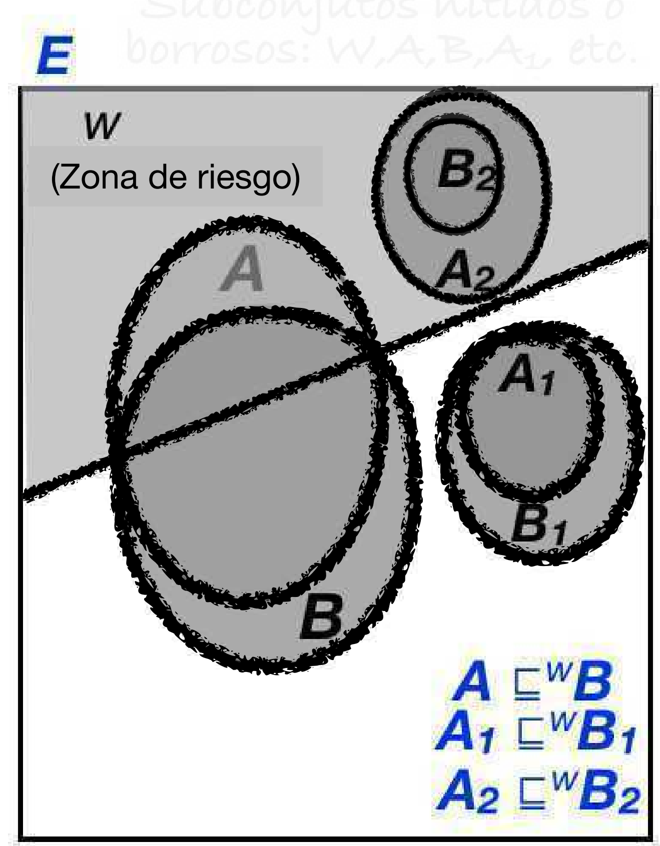
Subconjutos nítidos o borrosos: W, A, B, A_1, etc.

E



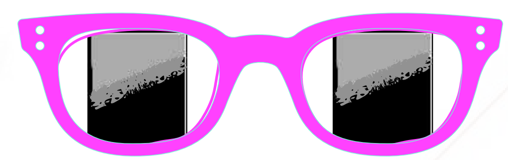
"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En algunos casos, también hay "w-uniones":
($A \sqcup^W B$), ($A \sqcup^W B \sqcup^W C$), ... etc.

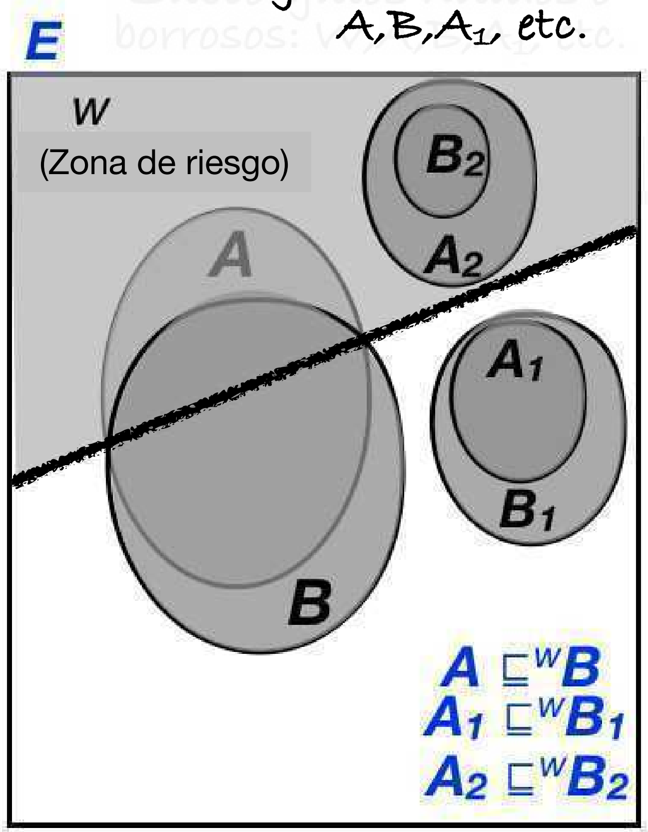


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

En algunos casos, también hay "w-uniones":
$(A \sqcup^W B)$, $(A \sqcup^W B \sqcup^W C)$, ... etc.

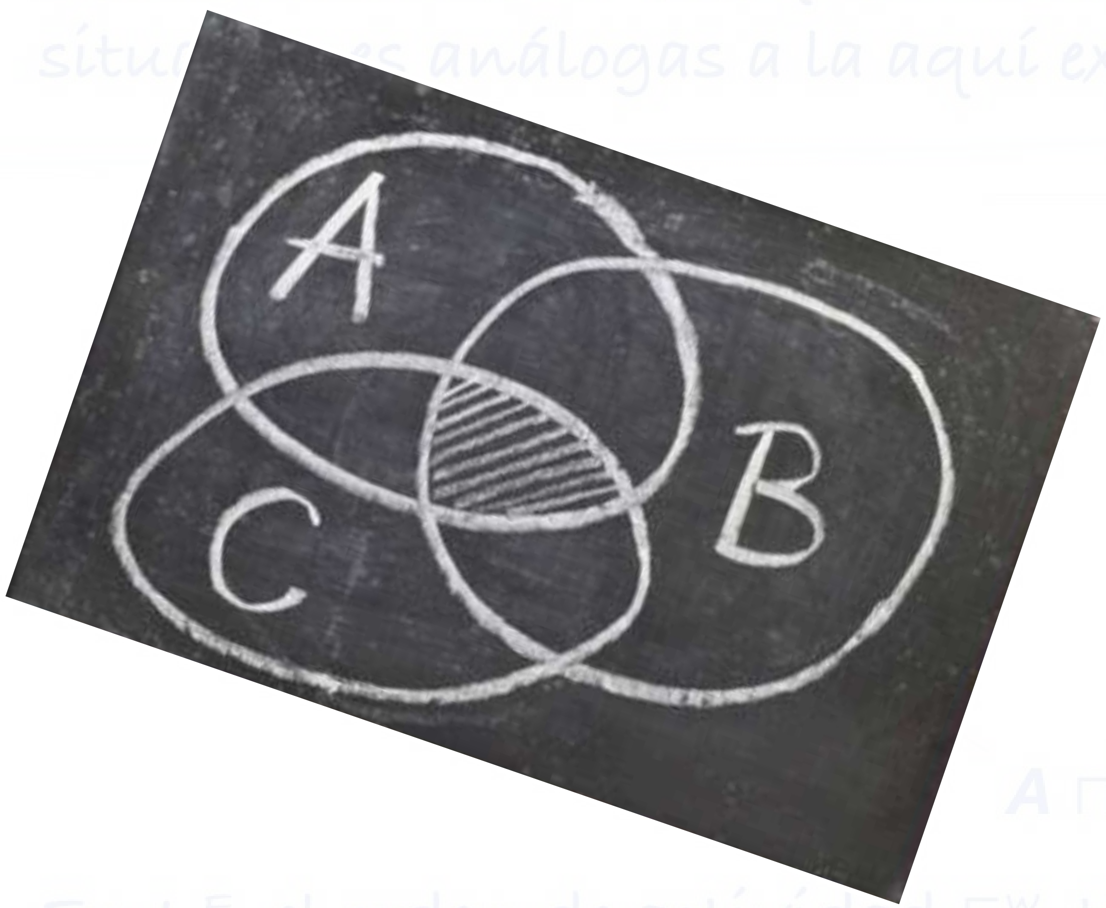


Subconjuntos nítidos
A,B,A_1, etc.

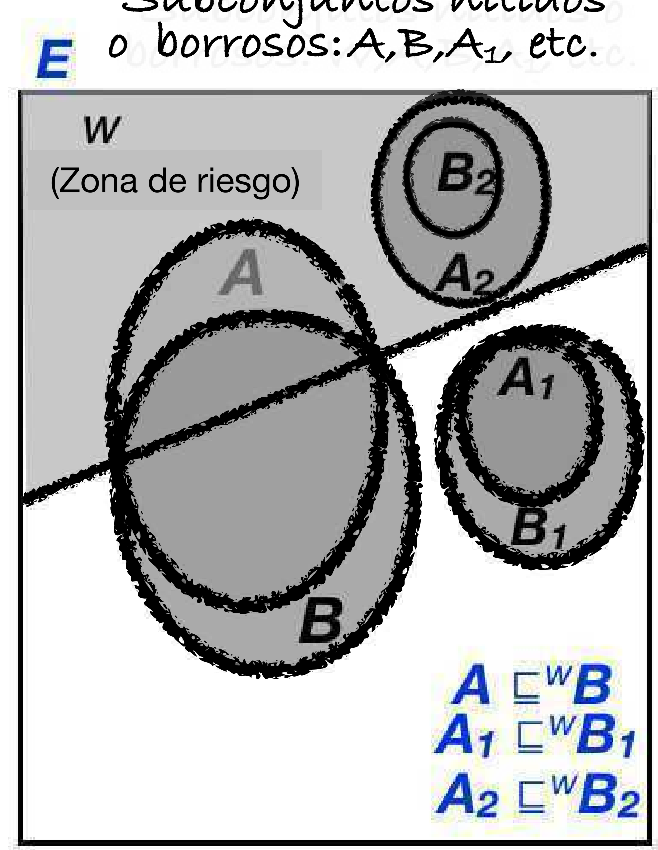


"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en
entornos con riesgo.

En algunos casos, también hay "w-uniones":
$(A \sqcup^{W} B)$, $(A \sqcup^{W} B \sqcup^{W} C)$, ... etc.

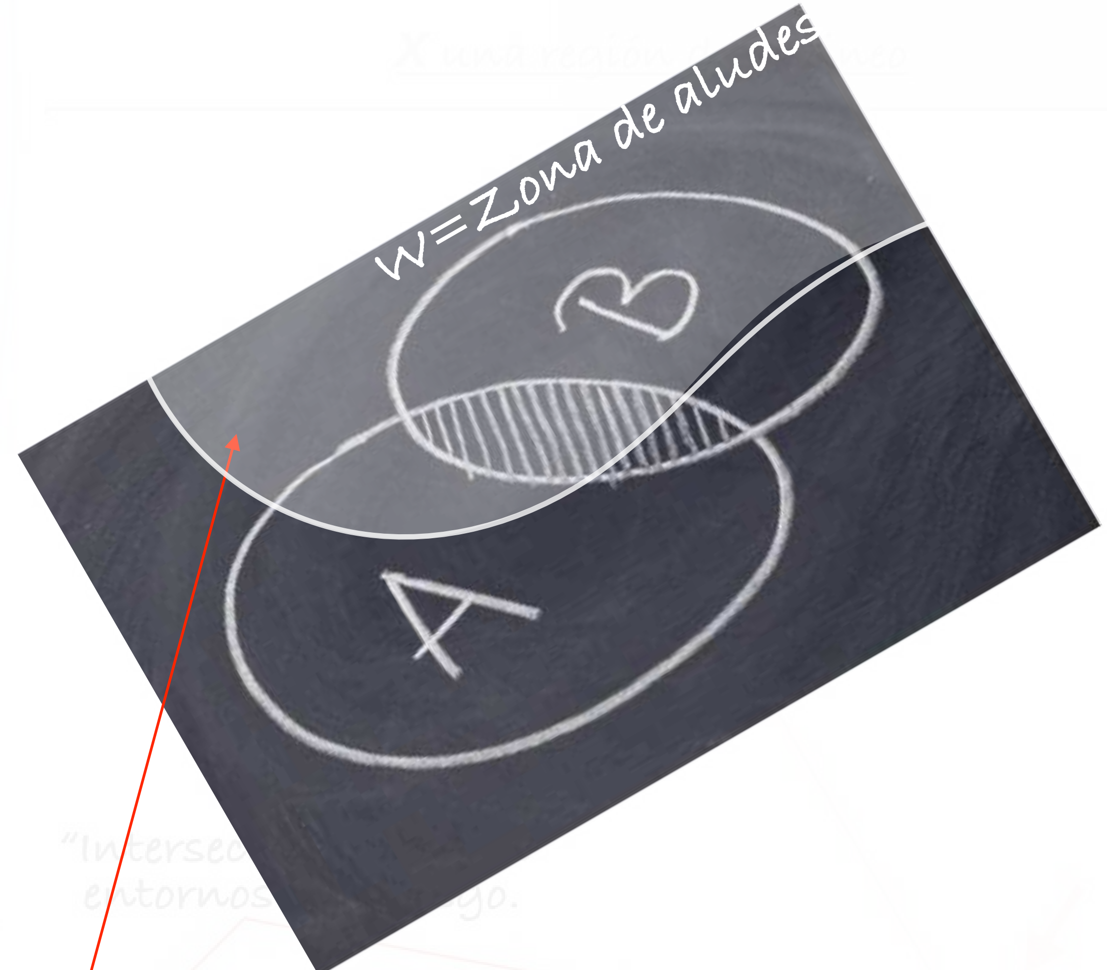


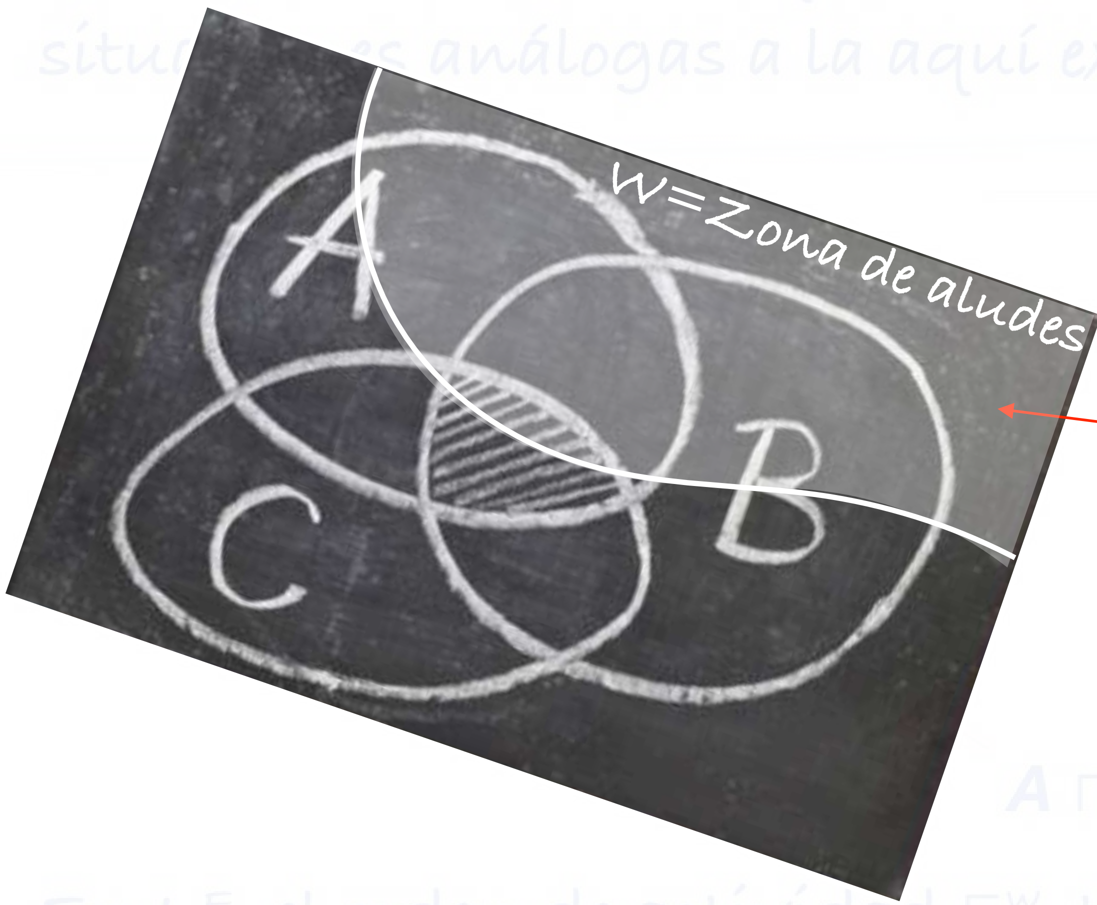
Subconjuntos nítidos
o borrosos: A, B, A_1, etc.

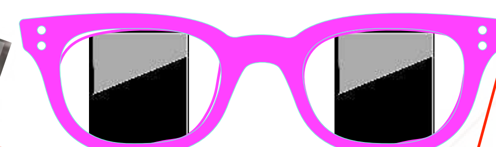


"Inclusiones" $\sqsubseteq^{W}$ en
entornos con riesgo.

En algunos casos, también hay "w-uniones":
$(A \sqcup^W B)$, $(A \sqcup^W B \sqcup^W C)$, ... etc.

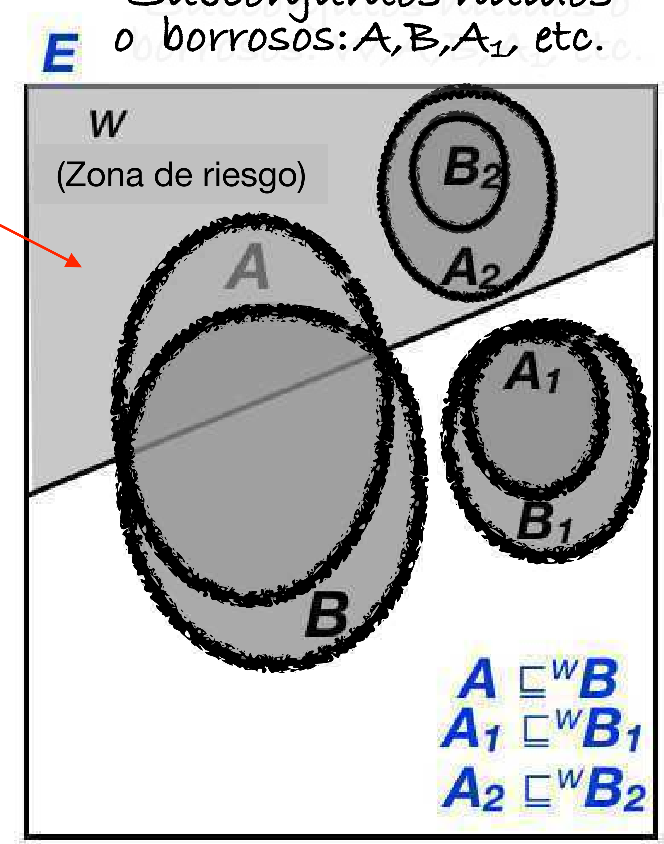






Si w es subconjunto nítido

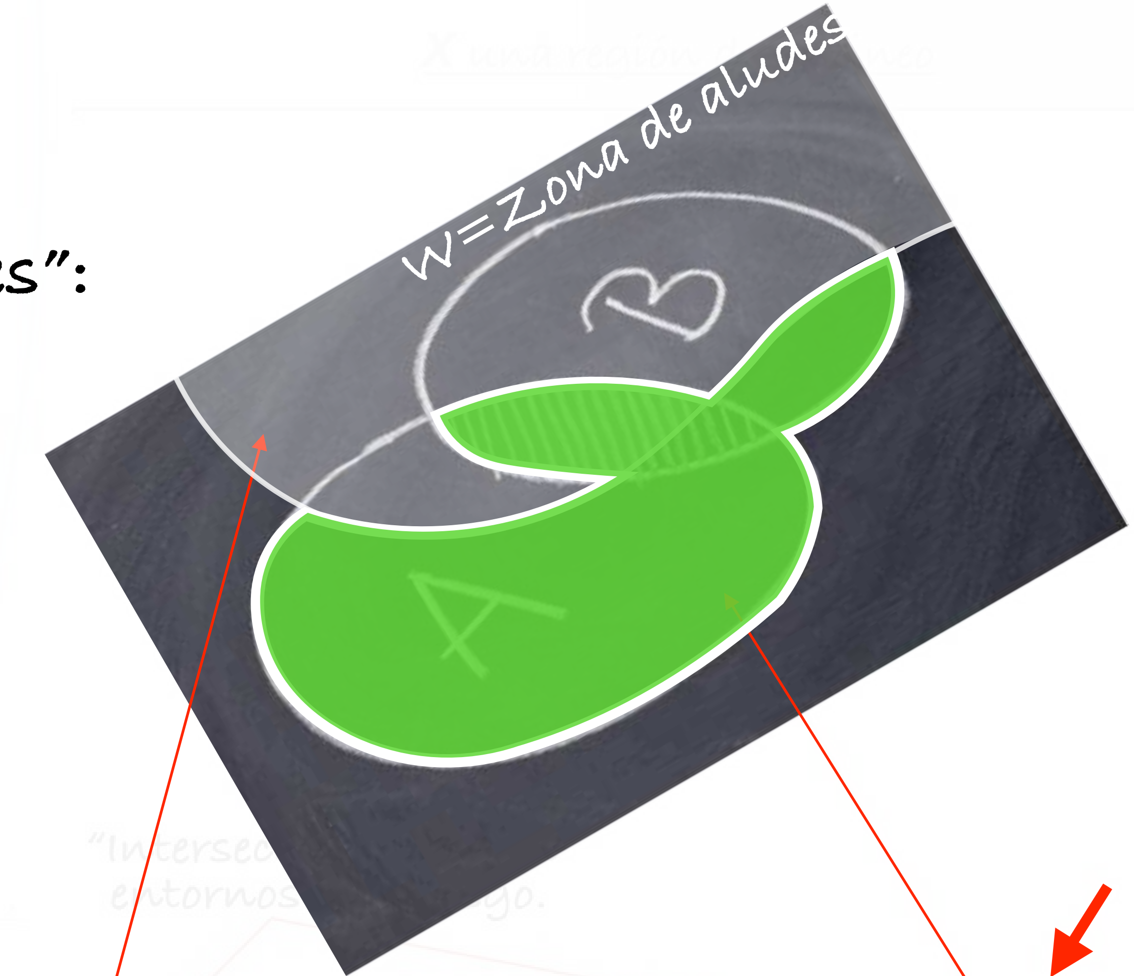
Subconjuntos nítidos
o borrosos: A, B, A_1, etc.



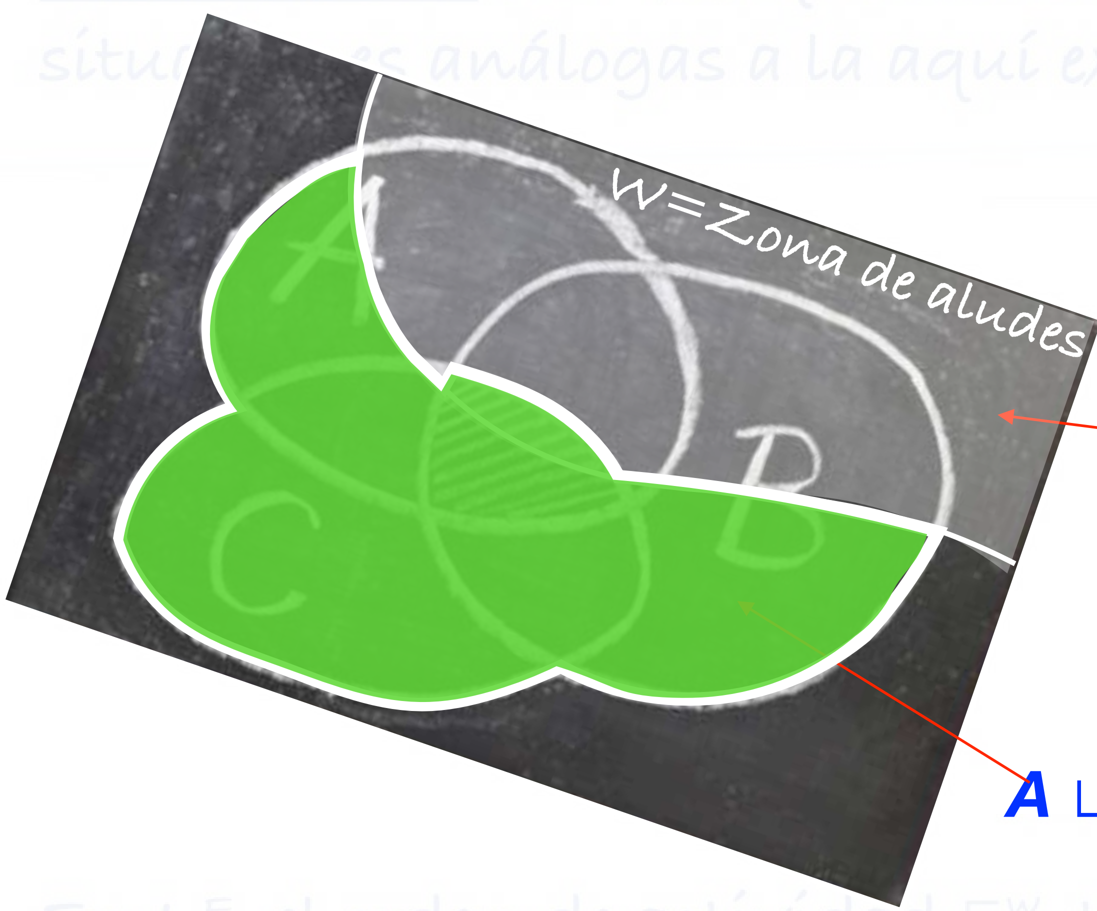
"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en
entornos con riesgo.

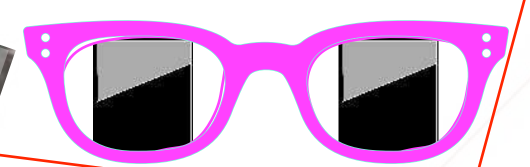
Si W es ¡NÍTIDO! también hay "w-uniones":

$(A \sqcup^W B)$, $(A \sqcup^W B \sqcup^W C)$, ... etc.



$A \sqcup^W B$

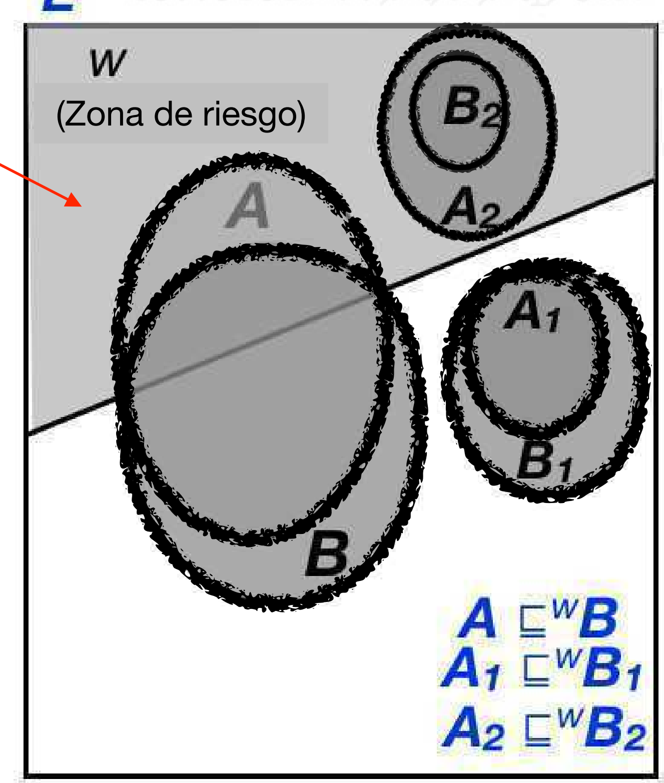




Si w es subconjunto nítido

$A \sqcup^W B \sqcup^W C$, etc

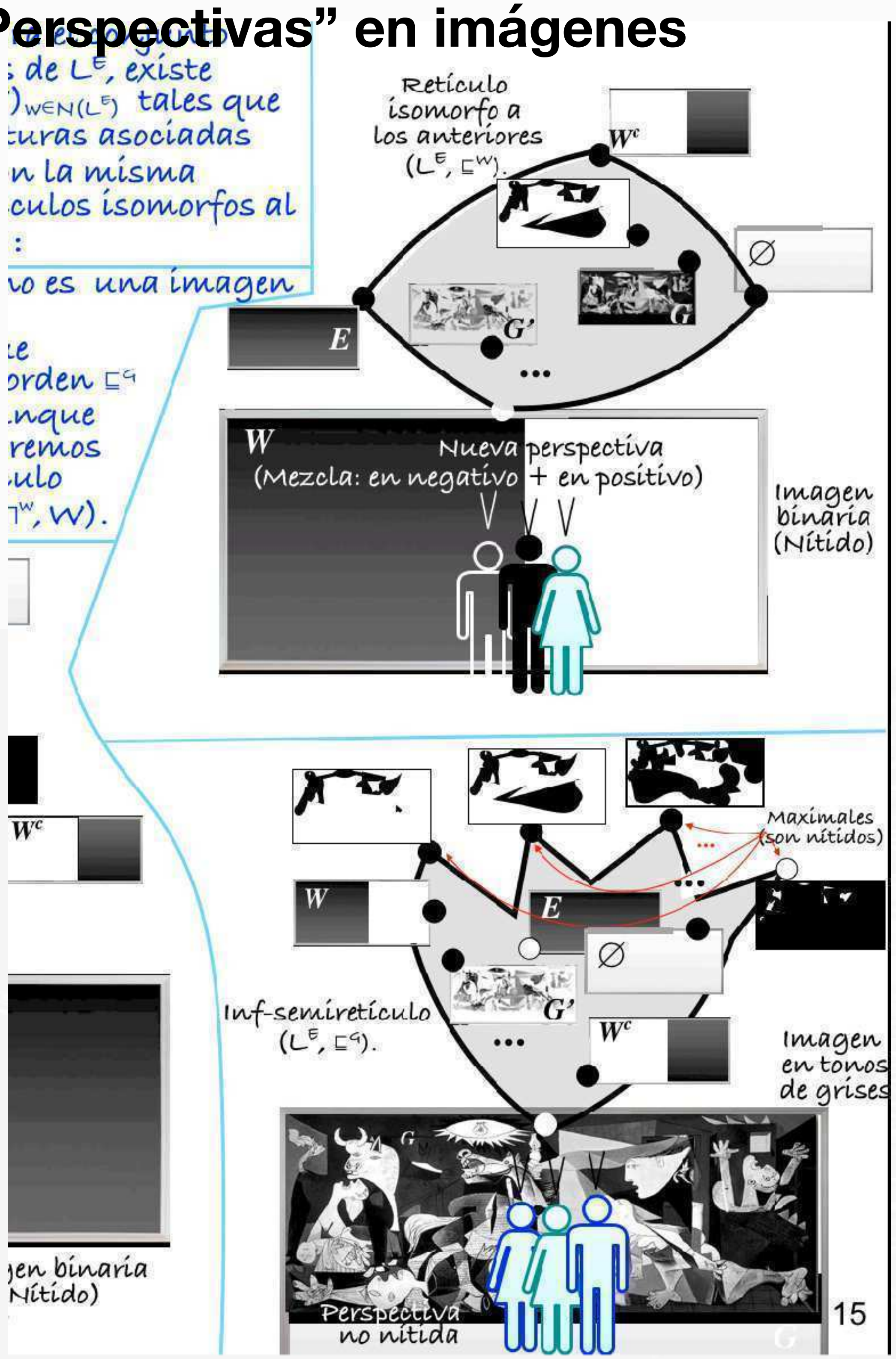
Subconjuntos nítidos o borrosos: A, B, A_1, etc.



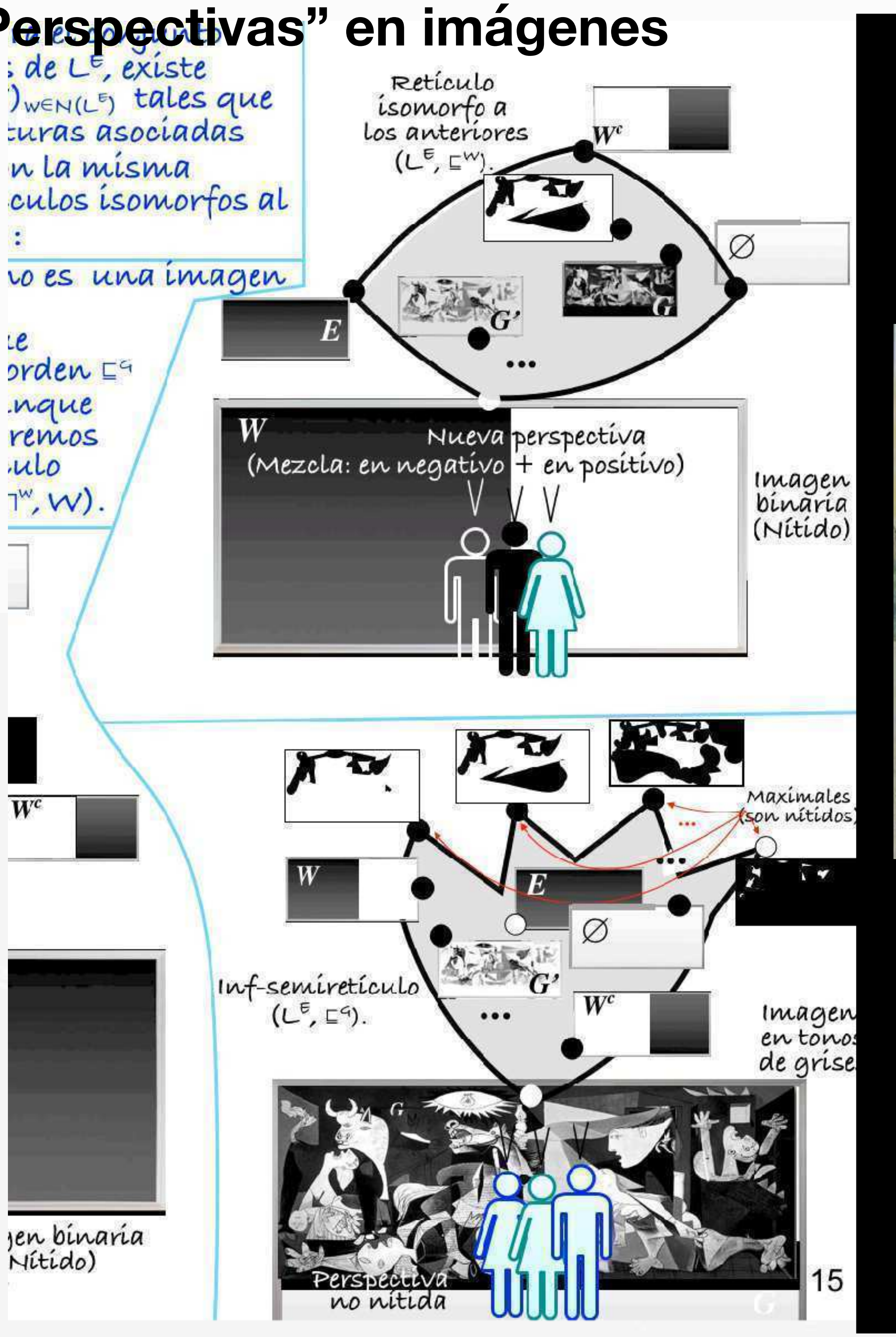
"Inclusiones" $\sqsubseteq^W$ en entornos con riesgo.

Hasta aquí, tres situaciones planteadas…

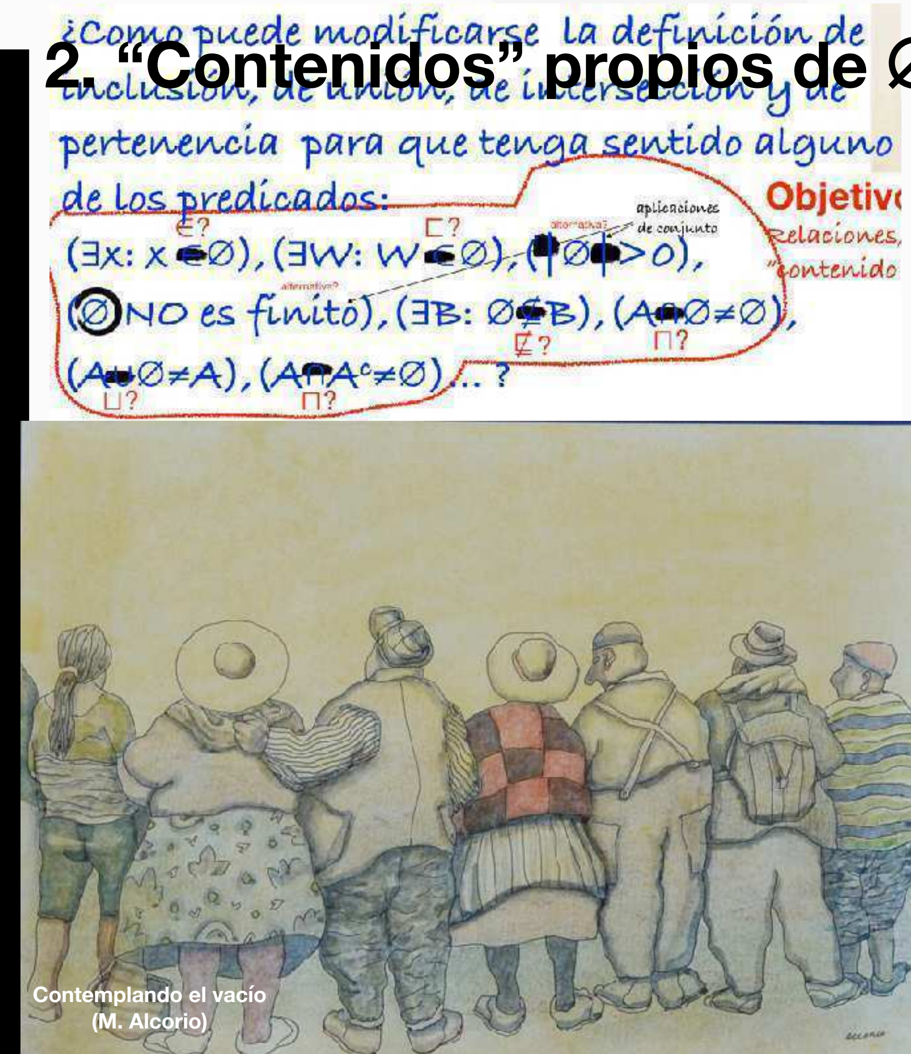
1. “Perspectivas” en imágenes



1. “Perspectivas” en imágenes

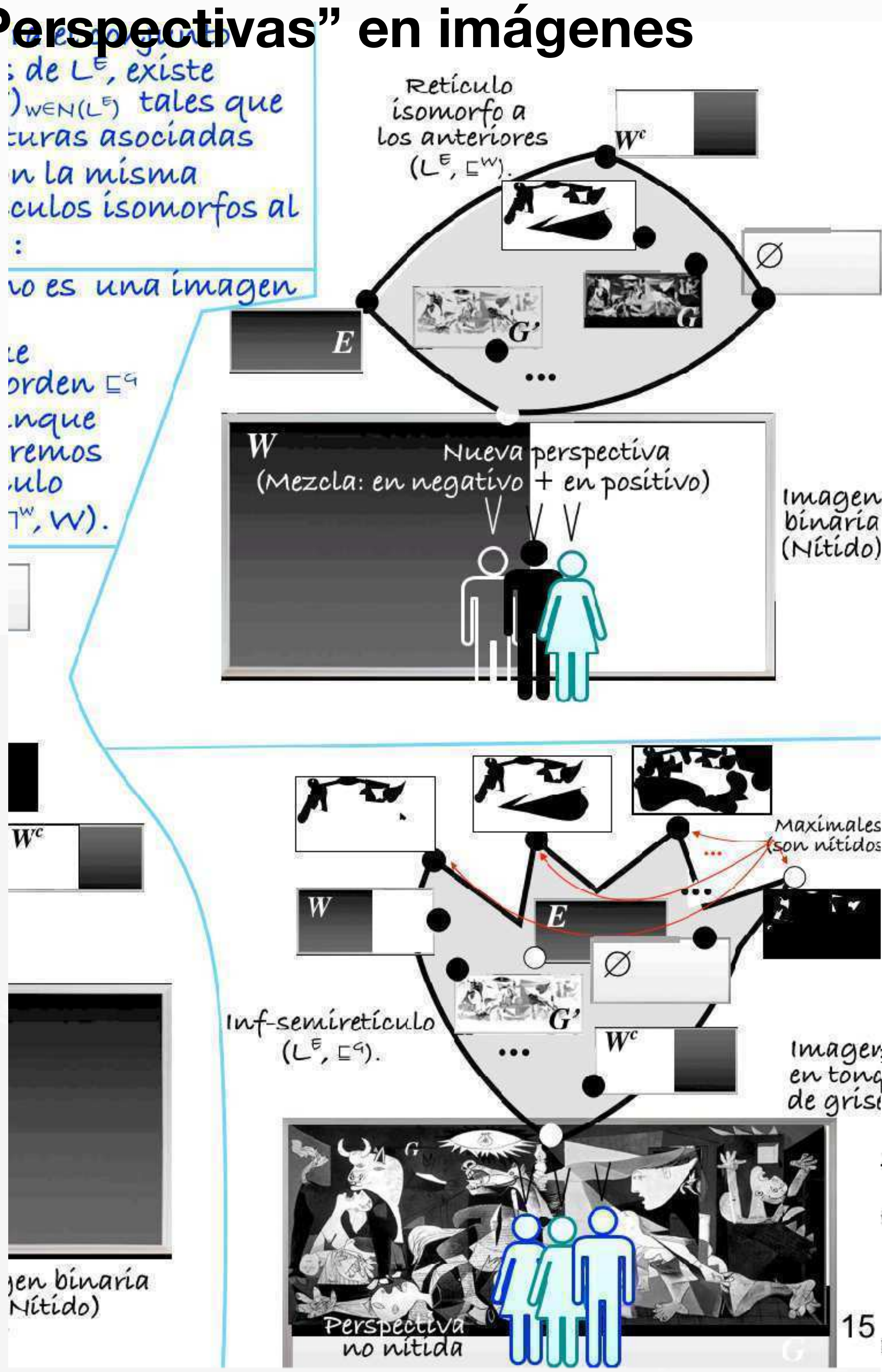


2. “Contenidos” propios de ∅

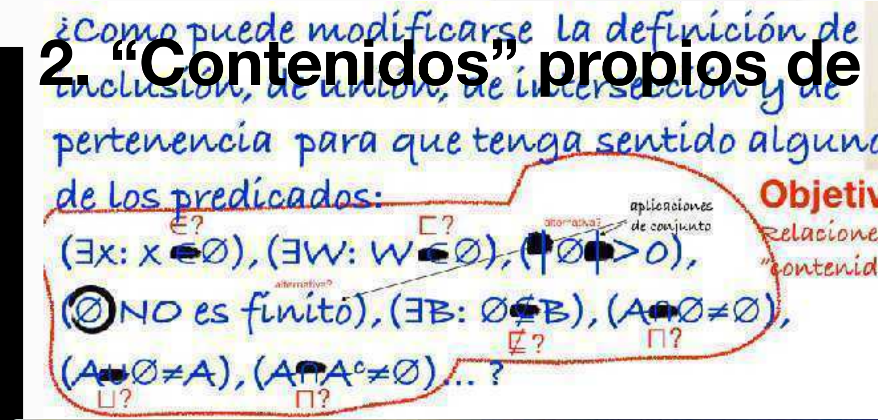


Contemplando el vacío (M. Alcorio)

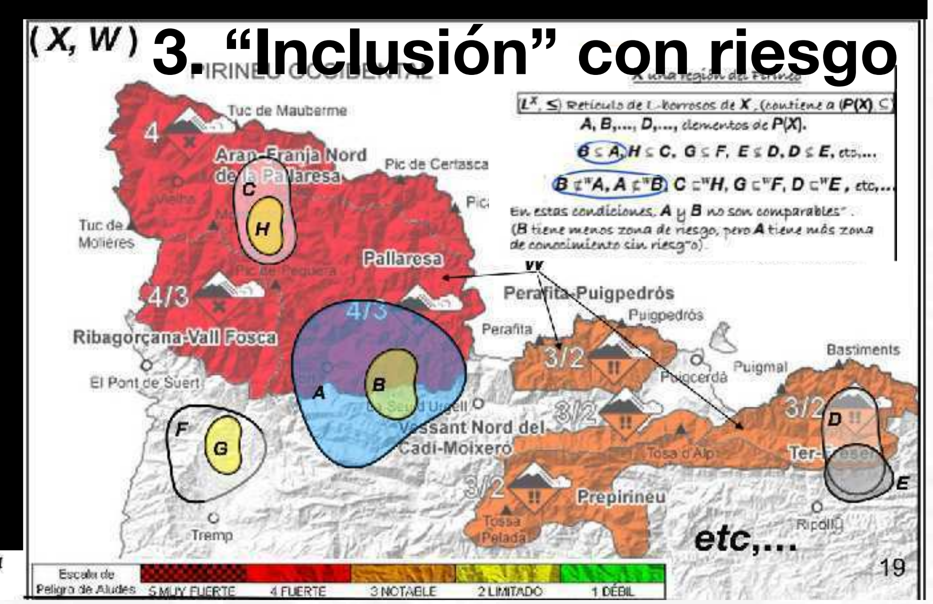
1. “Perspectivas” en imágenes



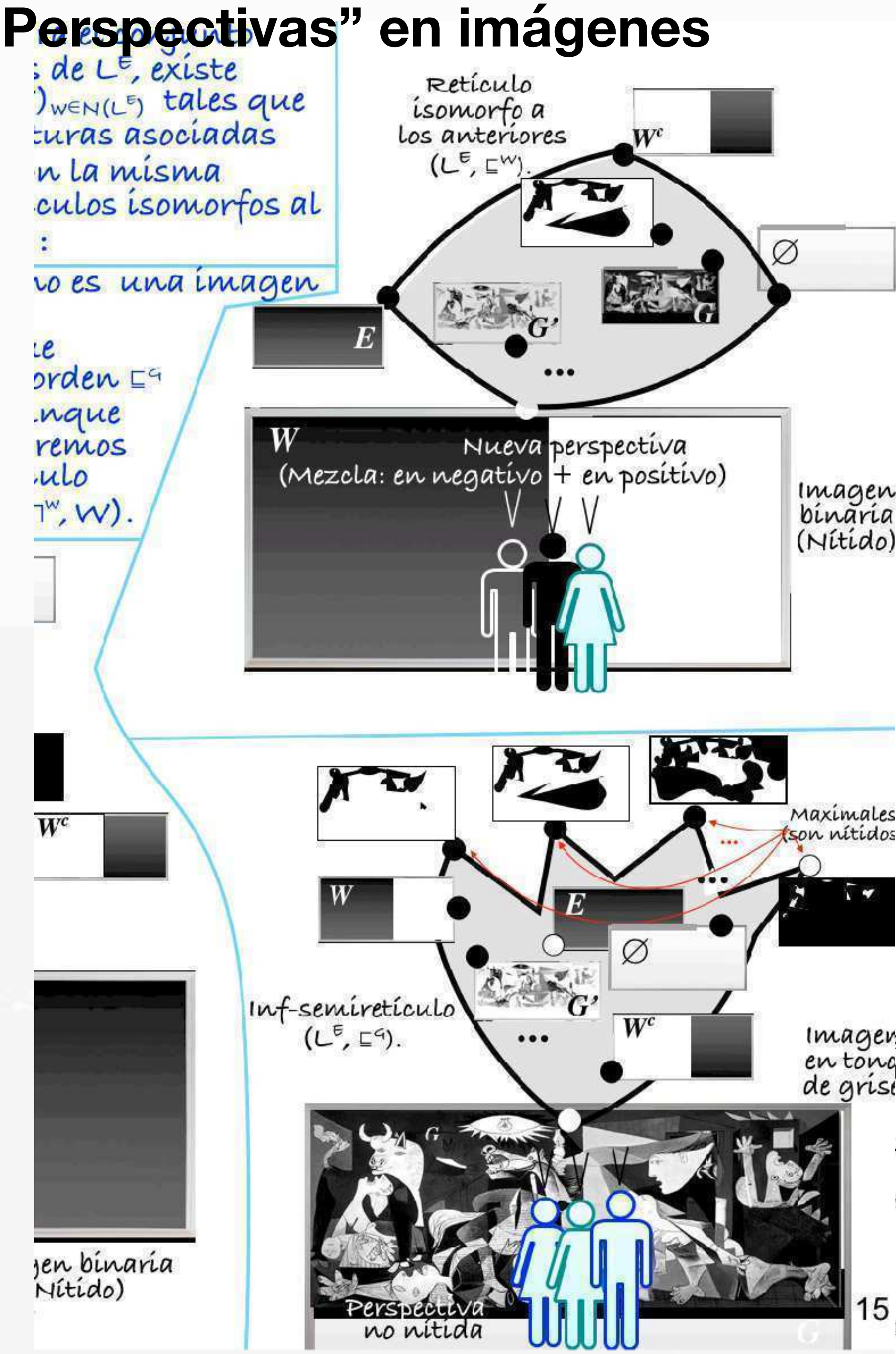
2. “Contenidos” propios de ∅



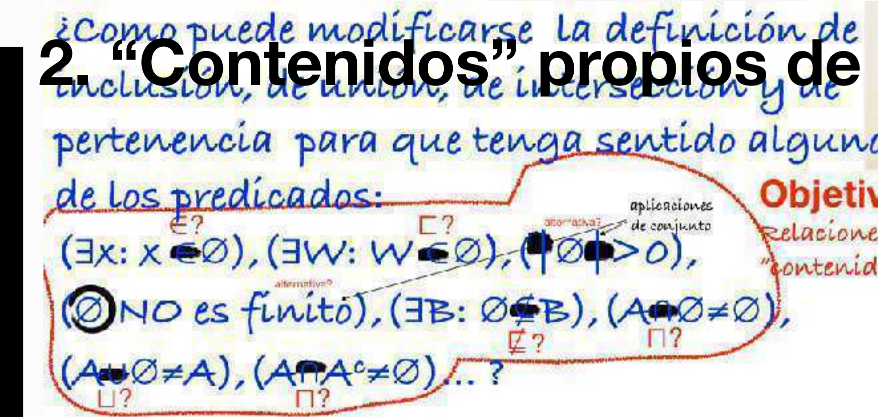
3. “Inclusión” con riesgo



1. “Perspectivas” en imágenes

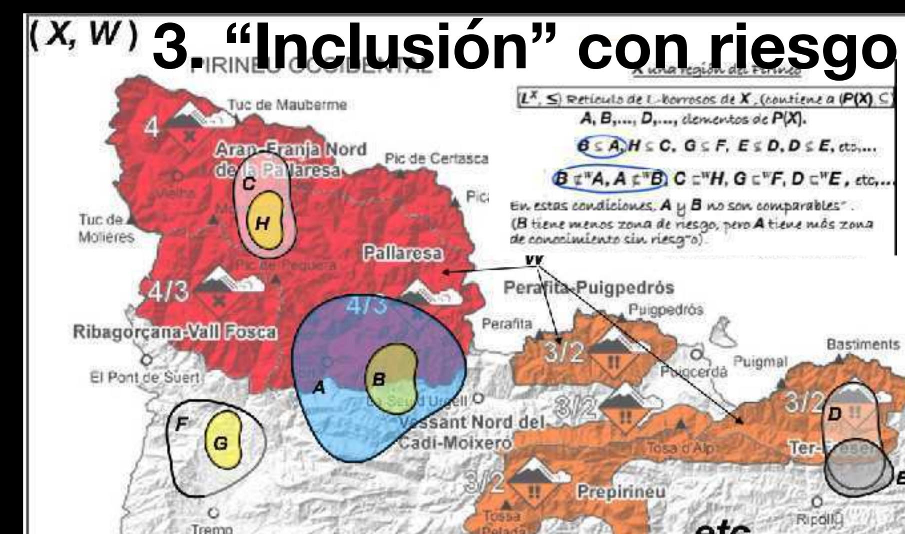


2. “Contenidos” propios de ∅



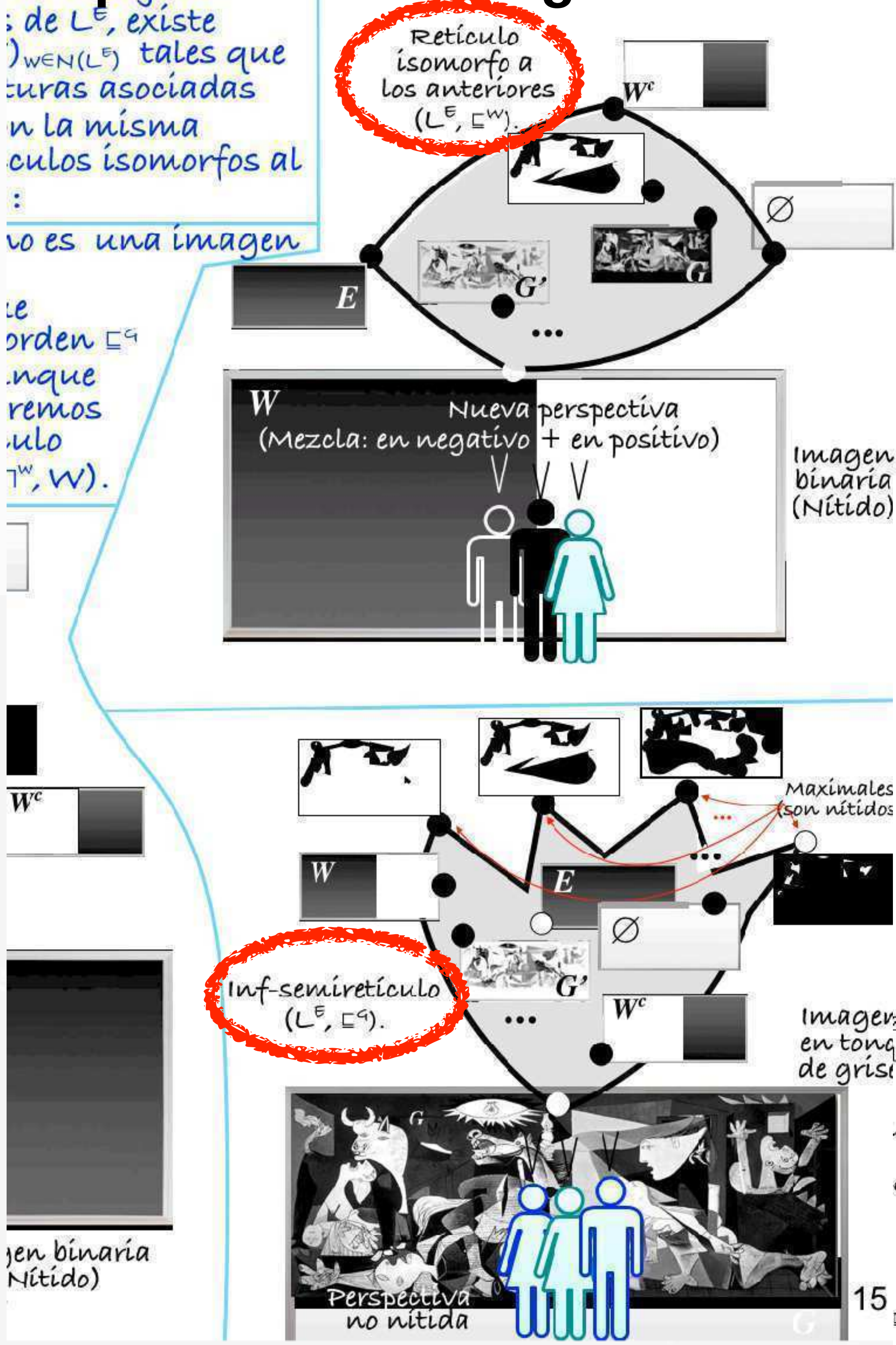

Contemplando el vacío (M. Alcorio)

3. “Inclusión” con riesgo

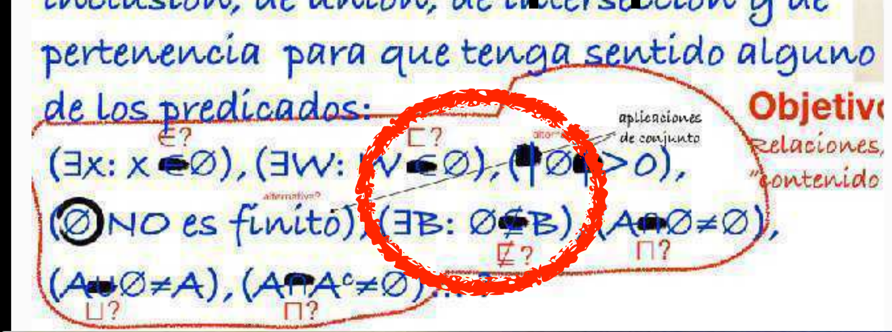


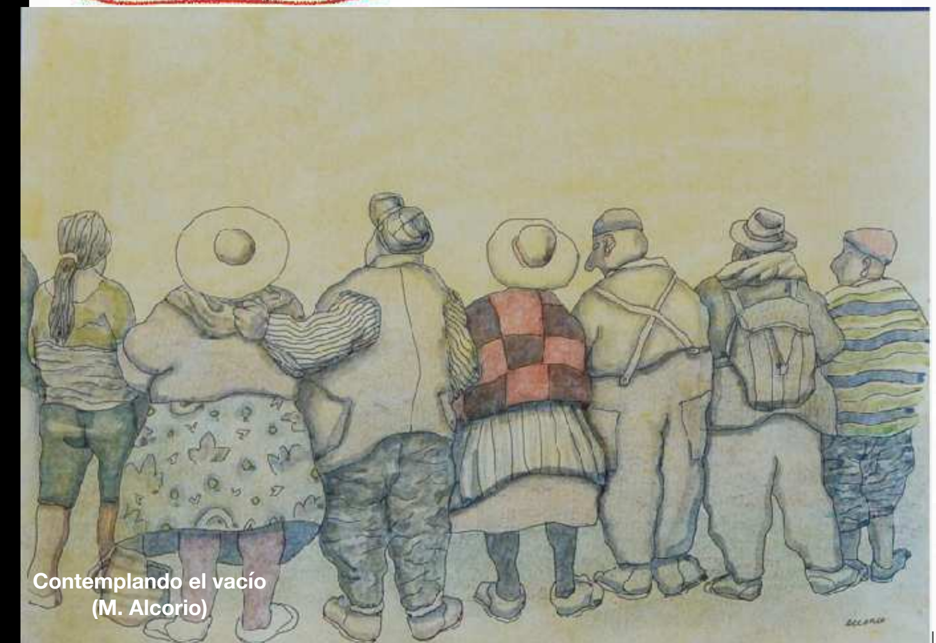
¿Qué tendrán en común?

1. “Perspectivas” en imágenes

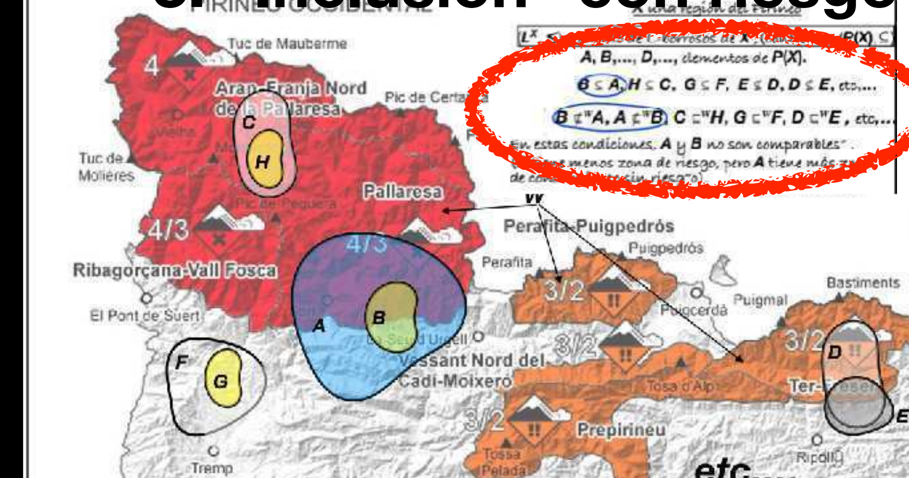


2. “Contenidos” propios de ∅





3. “Inclusión” con riesgo



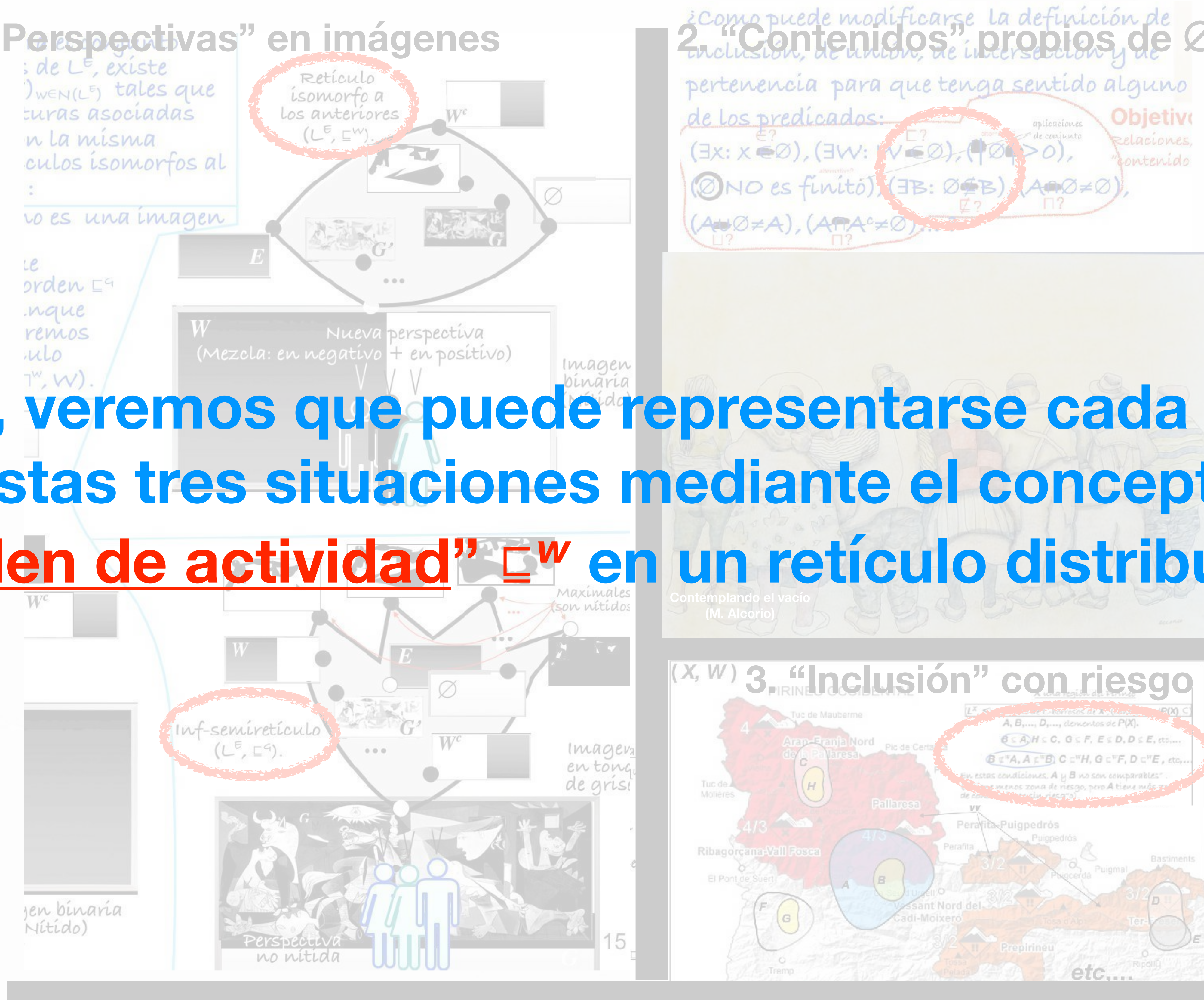
¿Qué tendrán en común?

Su interpretación mediante relaciones de orden $\sqsubseteq^{W}$
que juegan el papel de “inclusiones generalizadas”.

1. “Perspectivas” en imágenes

2. “Contenidos” propios de ∅

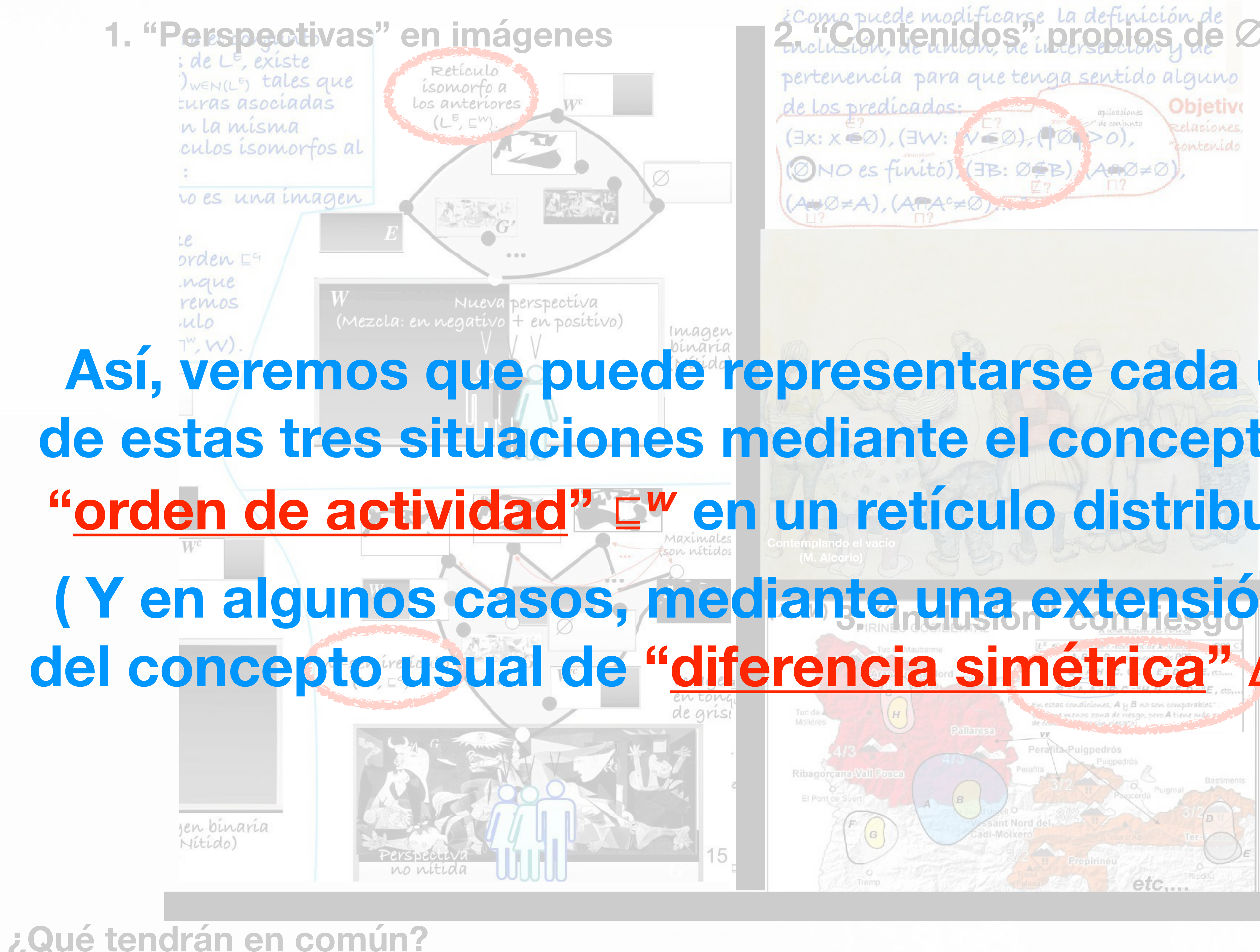
3. “Inclusión” con riesgo



Así, veremos que puede representarse cada una de estas tres situaciones mediante el concepto de “orden de actividad” $\sqsubseteq^w$ en un retículo distributivo.

¿Qué tendrán en común?

Su interpretación mediante relaciones de orden $\sqsubseteq^w$ que juegan el papel de “inclusiones generalizadas”.



Así, veremos que puede representarse cada una de estas tres situaciones mediante el concepto de “<u>orden de actividad</u>” $\sqsubseteq^{w}$ en un retículo distributivo.

(Y en algunos casos, mediante una extensión del concepto usual de “<u>diferencia simétrica</u>” Δ).

Su interpretación mediante relaciones de orden $\sqsubseteq^{w}$ que juegan el papel de “inclusiones generalizadas”.

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de “perspectivas” y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término “vacío” y sobre la introducción de “contenidos propios” del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de “nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$” entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \emptyset$, $B \sqsubset^{s} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

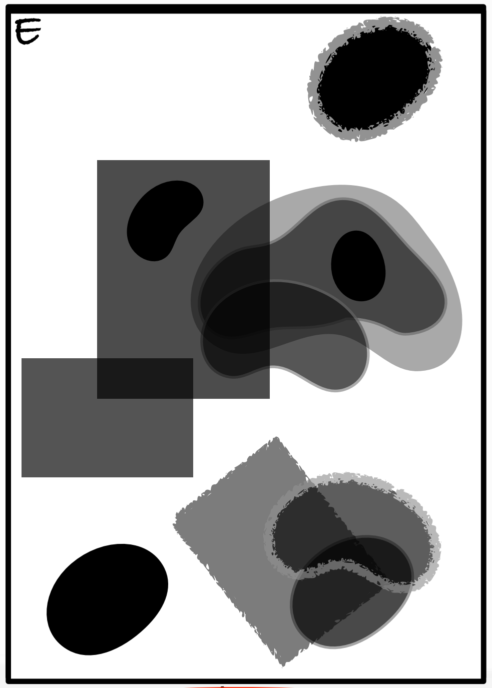
Introducción

Resumen

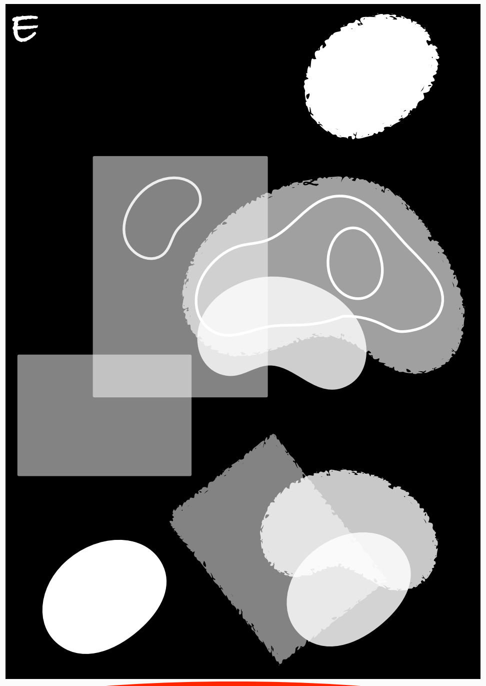
<u>Introducción</u>: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones A:E→{0,1,…,255} con el orden usual ∅≤E, A≤E, B≤E,… , E≤E)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos



o Imágenes digitalizadas

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \rightarrow \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$)

$\emptyset$

Asociamos esta representación al subconjunto vacío...

Por ejemplo: Subconjuntos borrosos

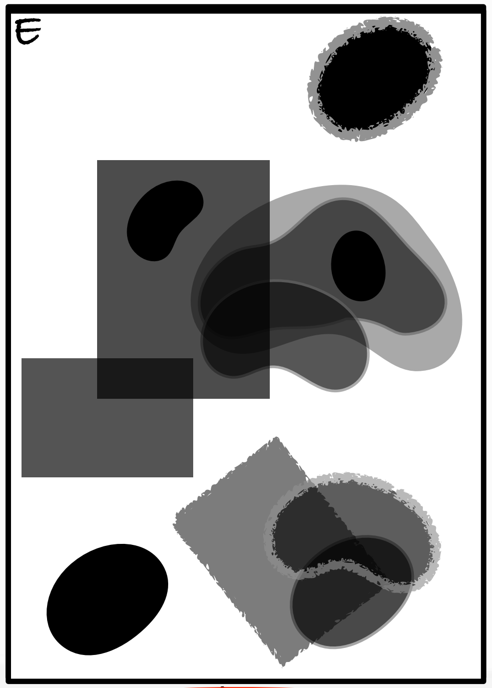
E

Y asociamos esta otra al conjunto referencial

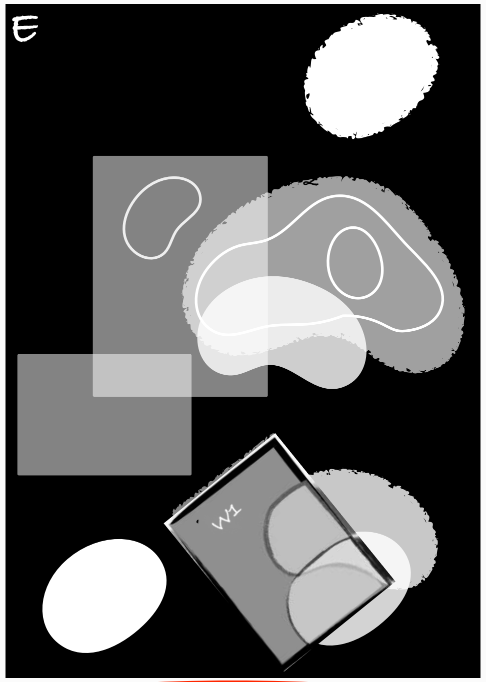
o Imágenes digitalizadas

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones A:E→{0,1,…,255} con el orden usual ∅≤E, A≤E, B≤E,… , E≤E)



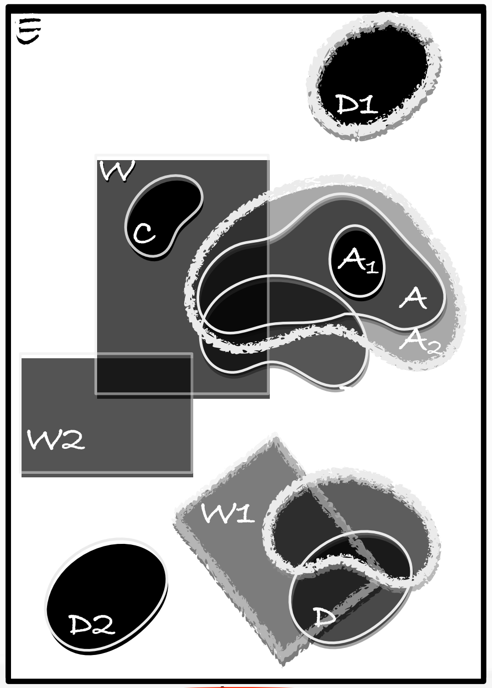
Por ejemplo: Subconjuntos borrosos



o Imágenes digitalizadas

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

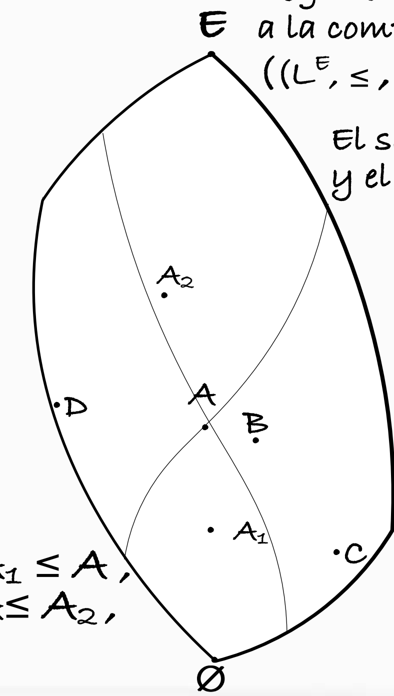
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A: E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \le E$, $A \le E$, $B \le E, \ldots$, $E \le E$)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

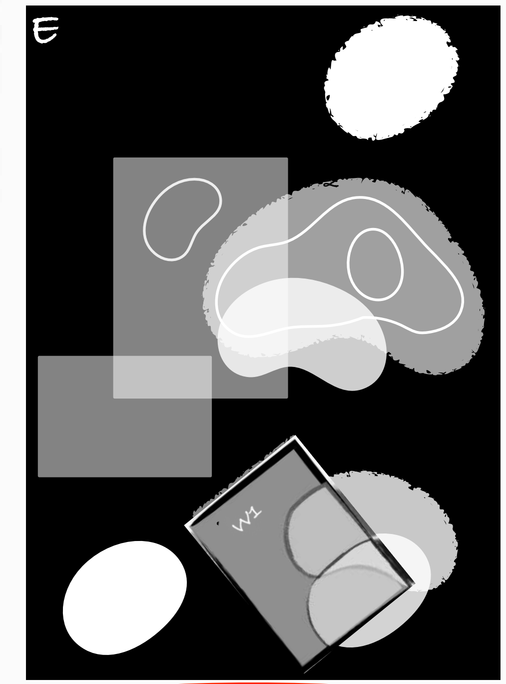
<u>Estrutura en las imágenes</u>
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

El símbolo $(\cdot)$ representa ínfimo y el $(+)$ supremo en el retículo L.



$A_1 \le A$,
$A \le A_2$,

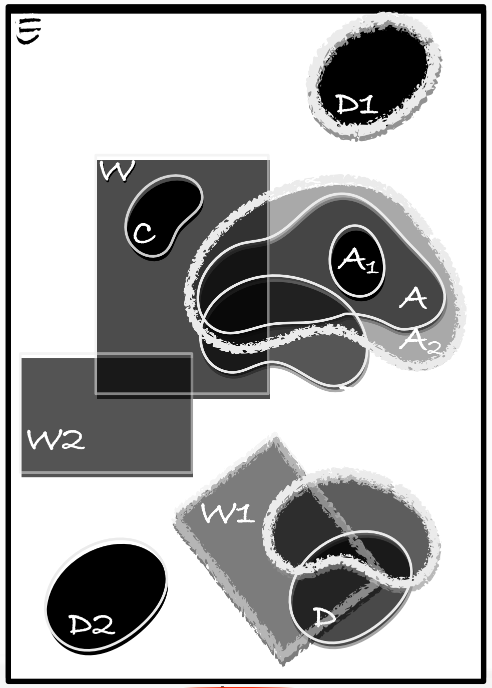
$A \not\le B$, $B \not\le A$, ...



o Imágenes digitalizadas

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

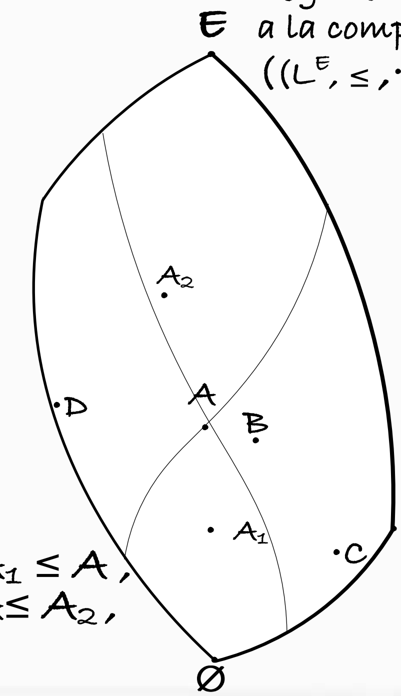
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \le E$, $A \le E$, $B \le E, \ldots$, $E \le E$)



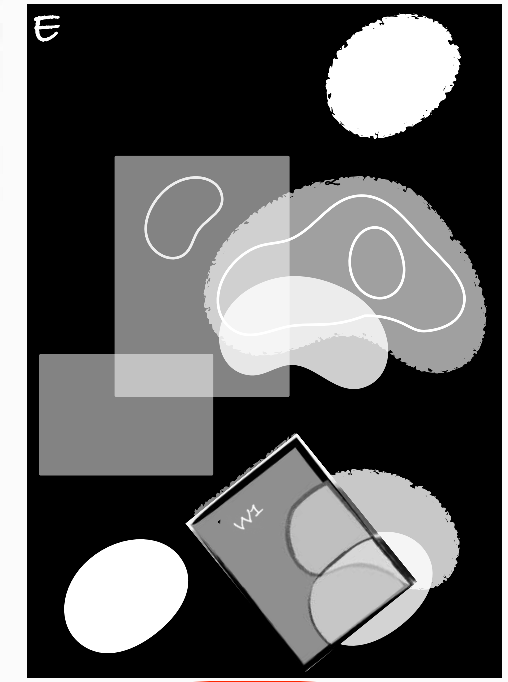
Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

$A \not\le B$, $B \not\le A$,…

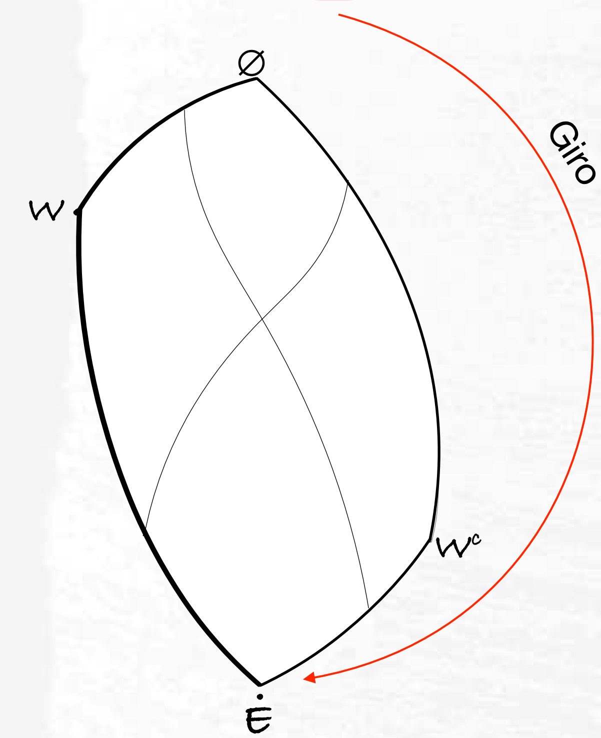
Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$A_1 \le A$,
$A \le A_2$,



o Imágenes digitalizadas

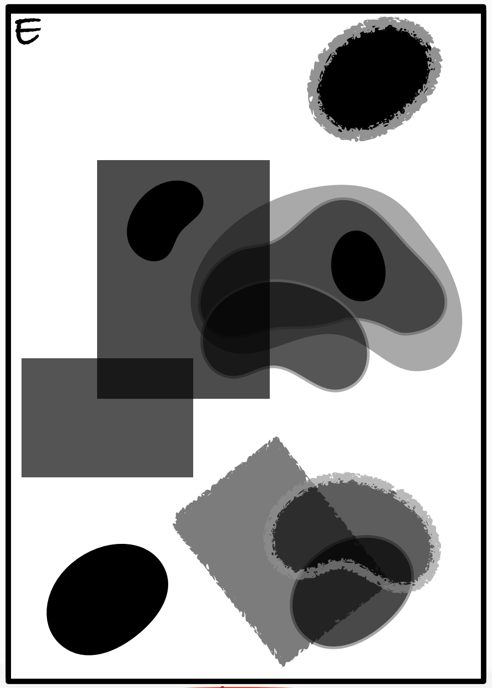


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

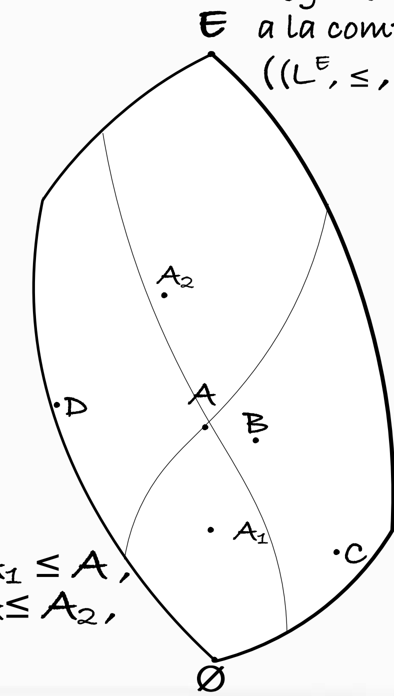
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones A:E→{0,1,…,255} con el orden usual Ø≤E, A≤E, B≤E,… , E≤E)



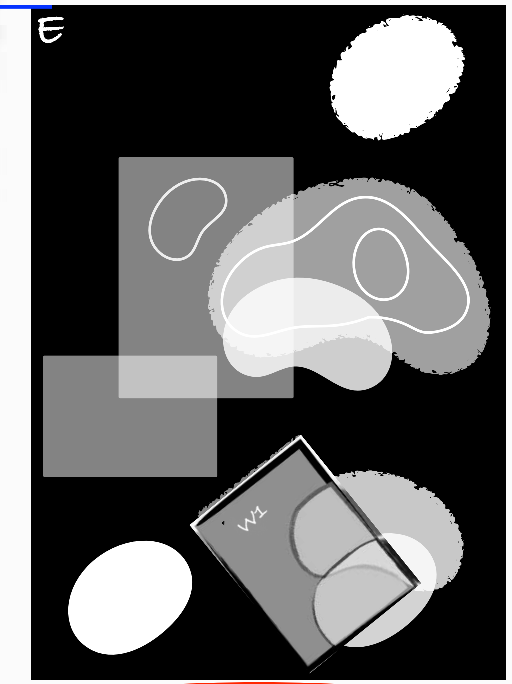
Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

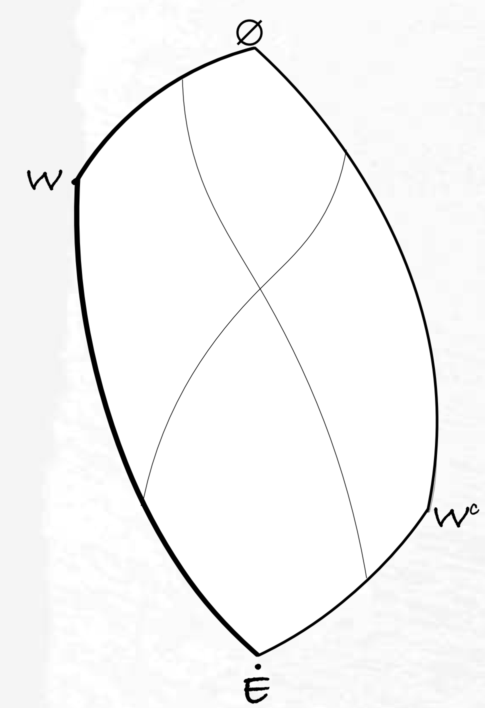


$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

$A \nleq B$, $B \nleq A$, …



o Imágenes digitalizadas



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

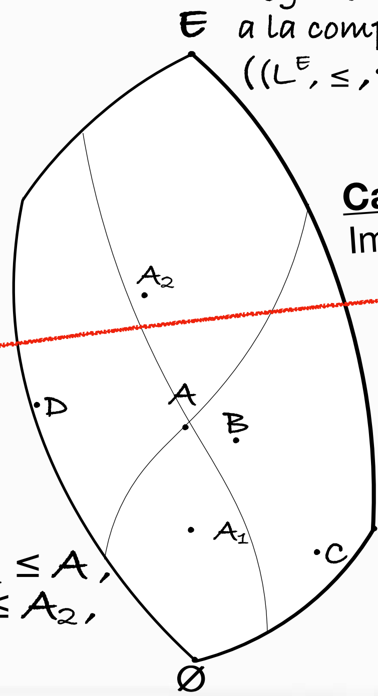
Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A: E \to \{0,1,\dots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$)

Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

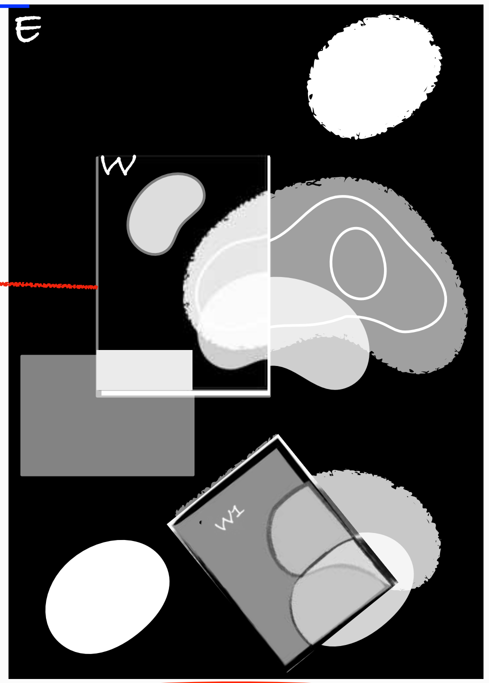


$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

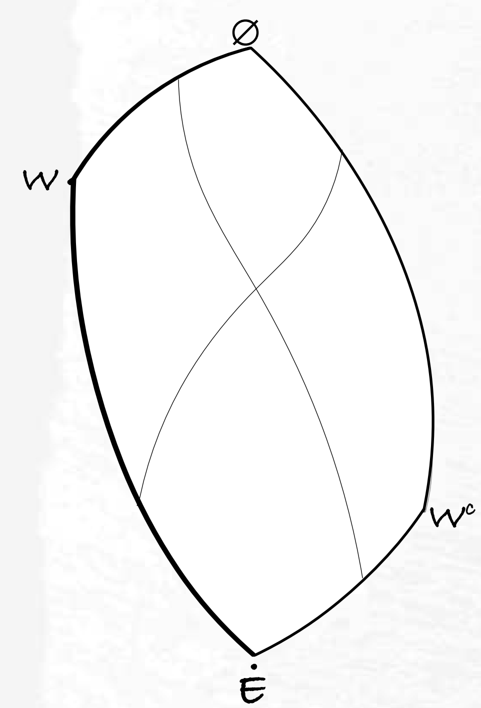
$A \nleq B$, $B \nleq A$, …

Caso 1:
Imagen binaria

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$



o Imágenes digitalizadas

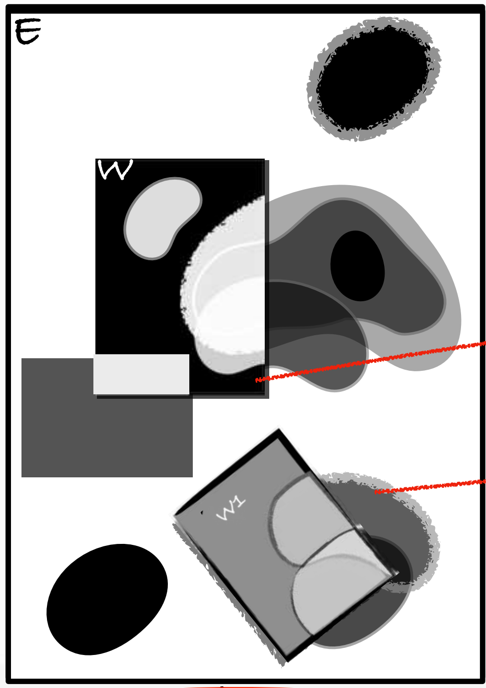


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

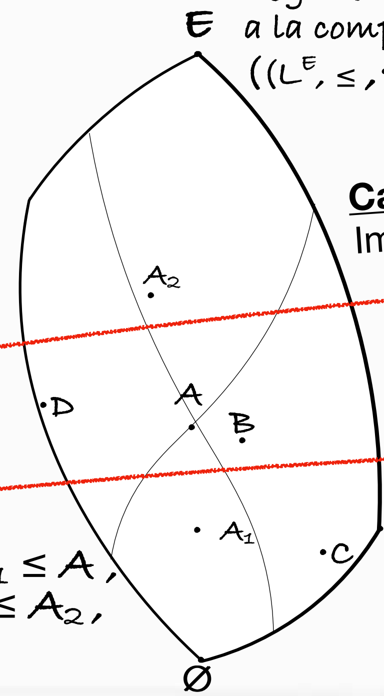
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones A:E→{0,1,...,255} con el orden usual Ø≤E, A≤E, B≤E,... , E≤E)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

$A \not\leq B, B \not\leq A, \ldots$

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

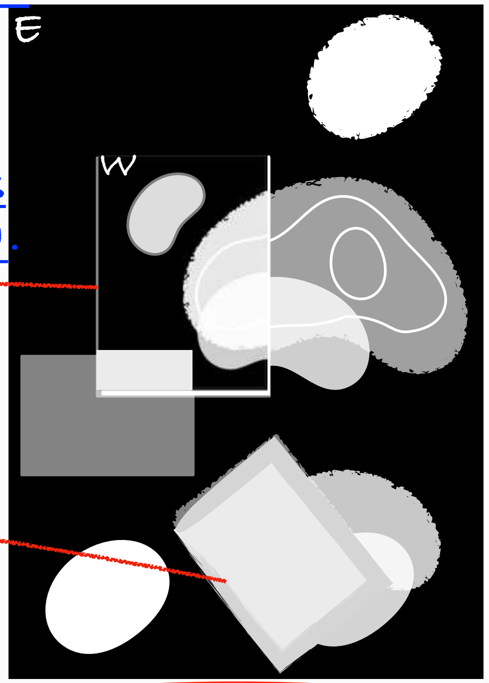


$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

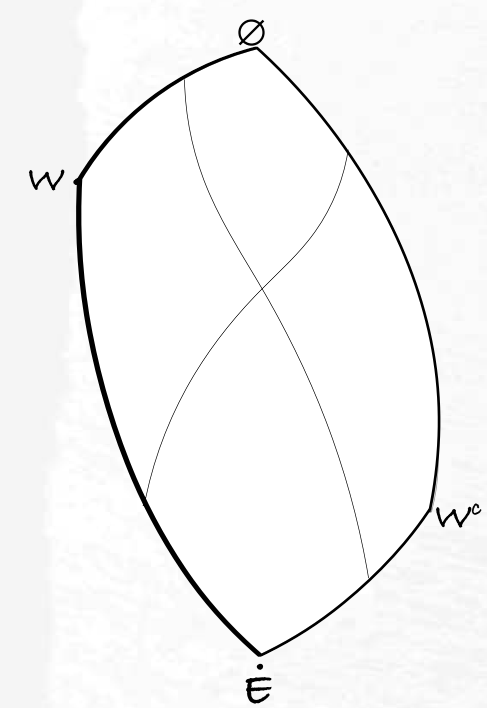
Caso 1:
Imagen binaria

Caso 2:
Imagen con tonos de grises

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$ y luego a borrosos propios W_1, es decir, tales que $W_1 \neq Sop(W_1)$).



o Imágenes digitalizadas

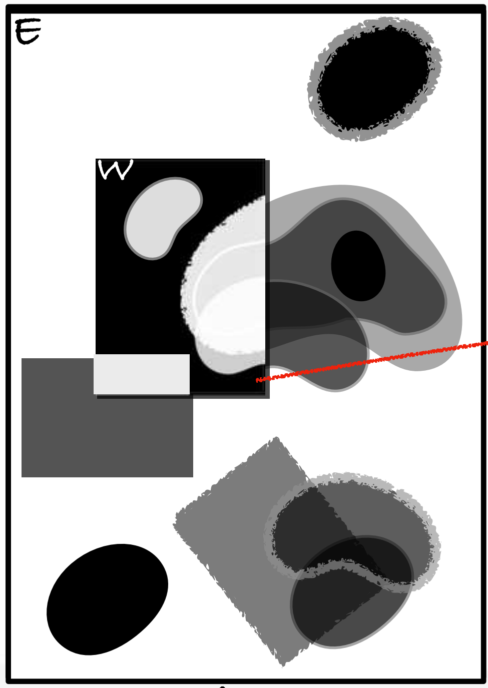


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

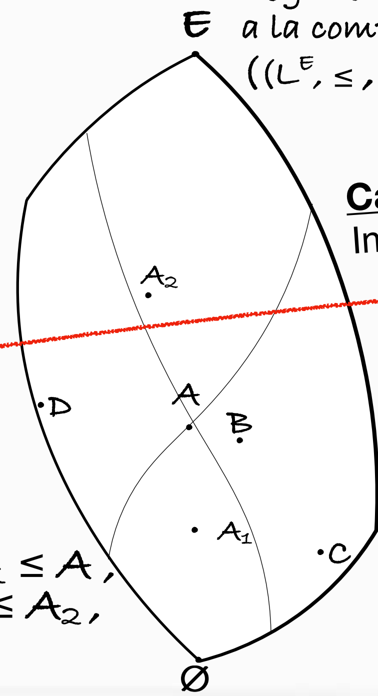
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos,

$A \nleq B$, $B \nleq A$,...

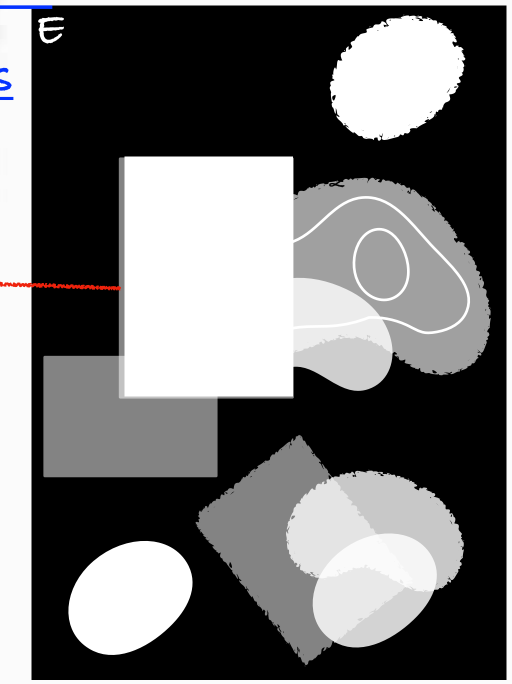
Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



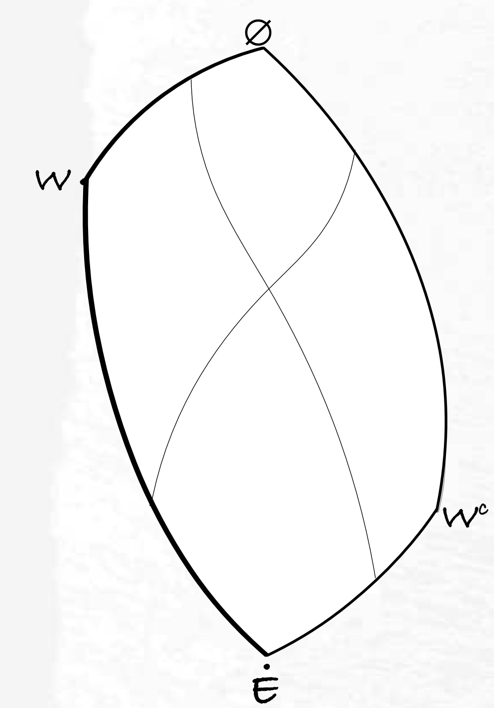
$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$



o Imágenes digitalizadas

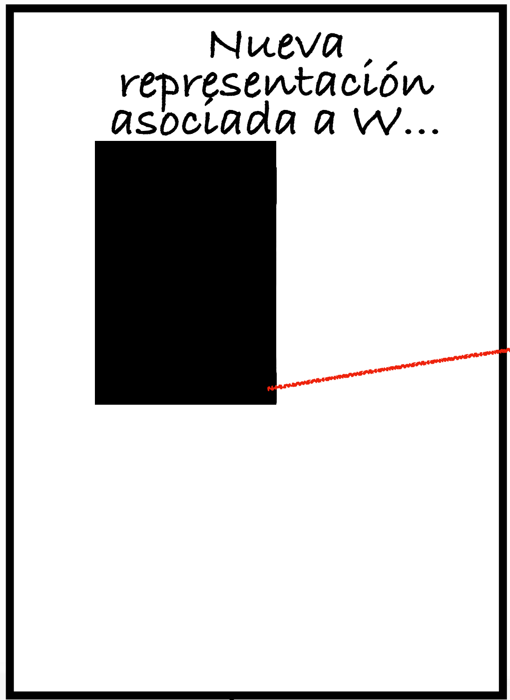


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

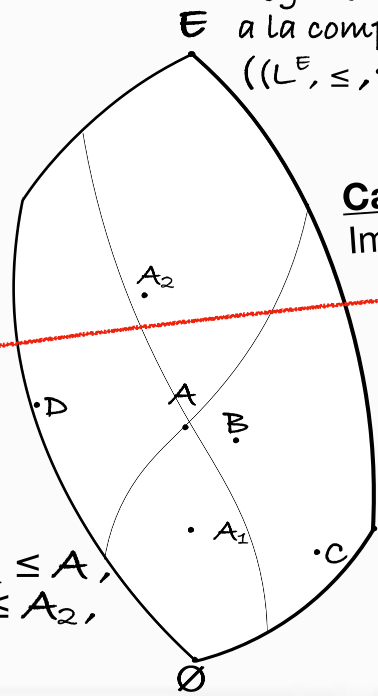
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \le E$, $A \le E$, $B \le E, \ldots, E \le E$)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...

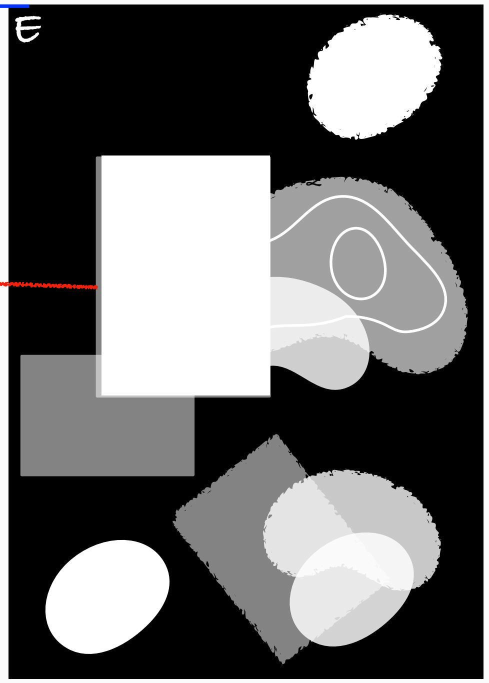
Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



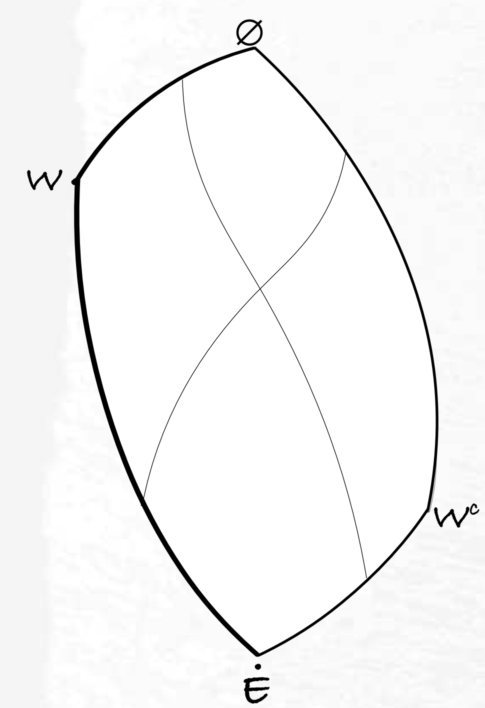
$A_1 \le A$,
$A \le A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$



o Imágenes digitalizadas



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

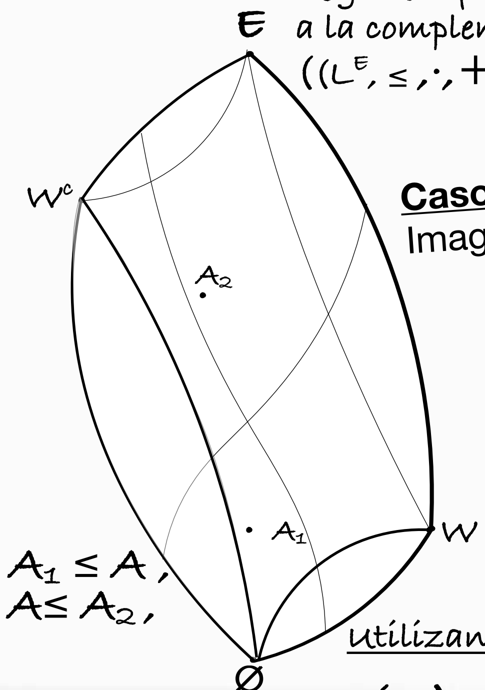
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\dots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \dots, E \leq E$)

Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



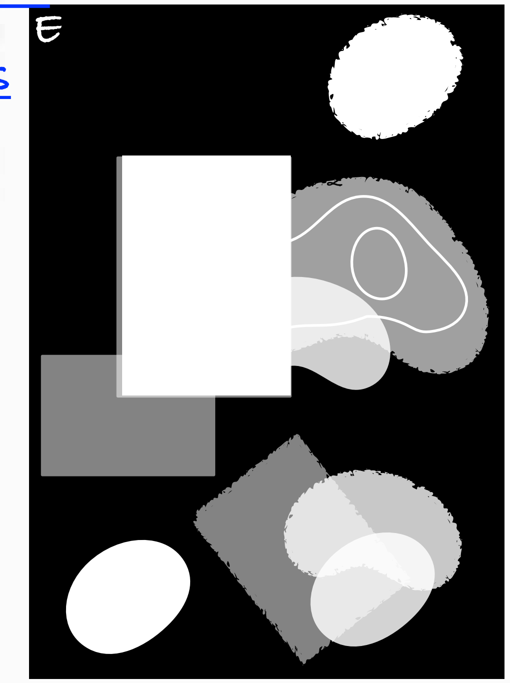
$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

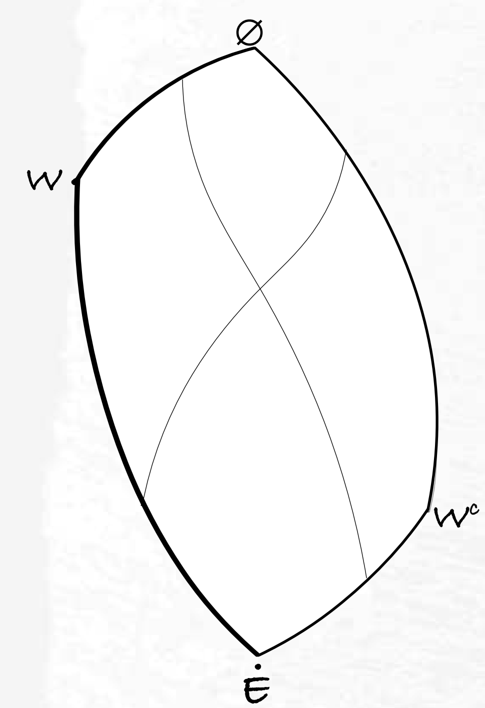
Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S \Delta W = S \cdot W^c + S' \cdot W$$



o Imágenes digitalizadas



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

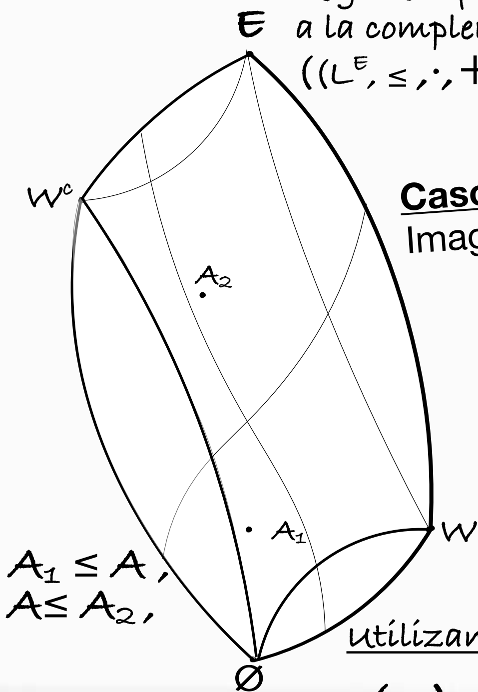
Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W'=W^c$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \rightarrow \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$)

Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

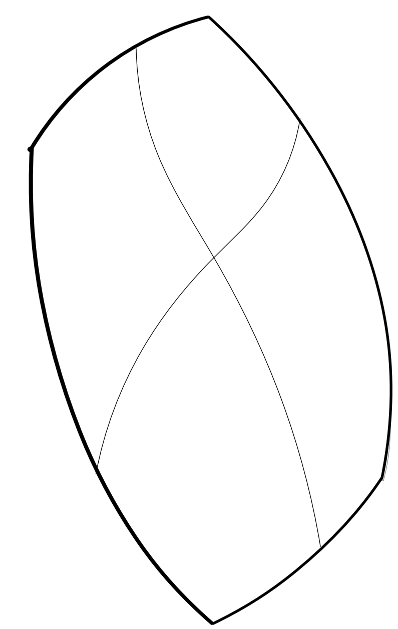


Caso 1:
Imagen binaria

$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S \Delta W = S \cdot W^c + S' \cdot W$$



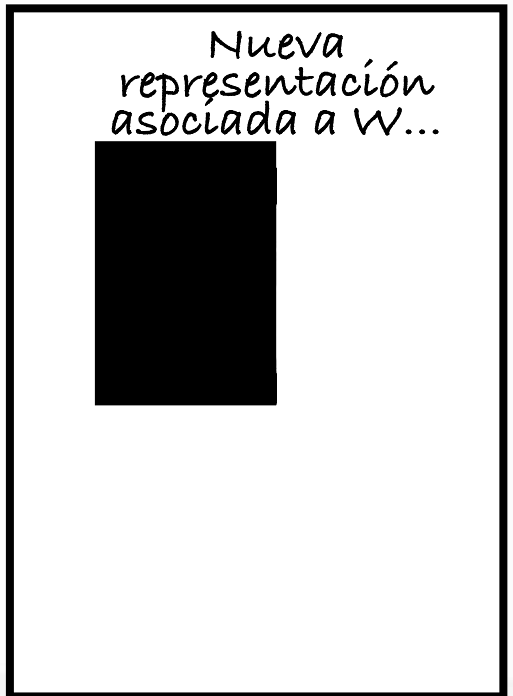
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W'=W^c$

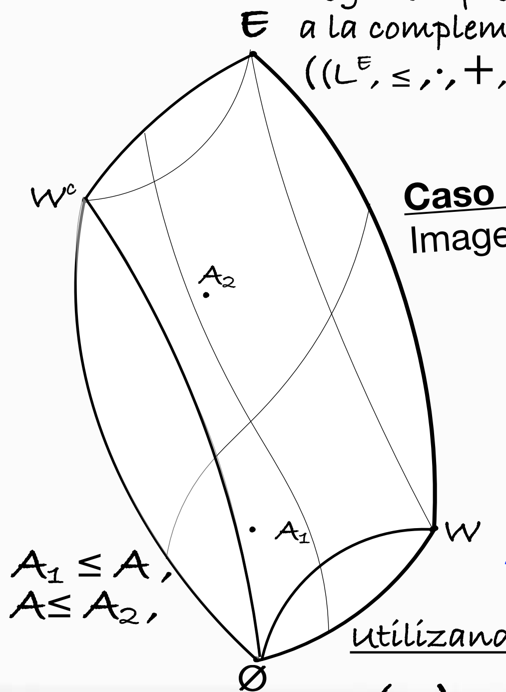
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E\to\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\varnothing\le E$, $A\le E$, $B\le E,\ldots$, $E\le E$)



Por ejemplo:
subconjuntos borrosos,
mezclados con
imágenes digitalizadas

$A \not\le B$, $B \not\le A$, ...

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$

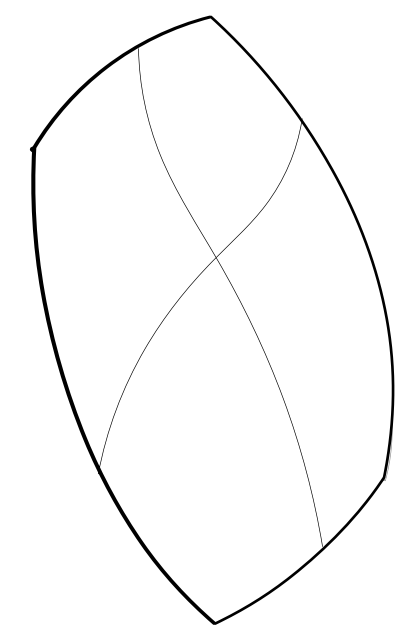


Caso 1:
Imagen binaria

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S)=S\Delta W=S\cdot W^c+S'\cdot W$$

Interpretaremos la aplicación φ_W como una "nueva perspectiva" del retículo L^E, proporcionada por un giro asociado a "W":

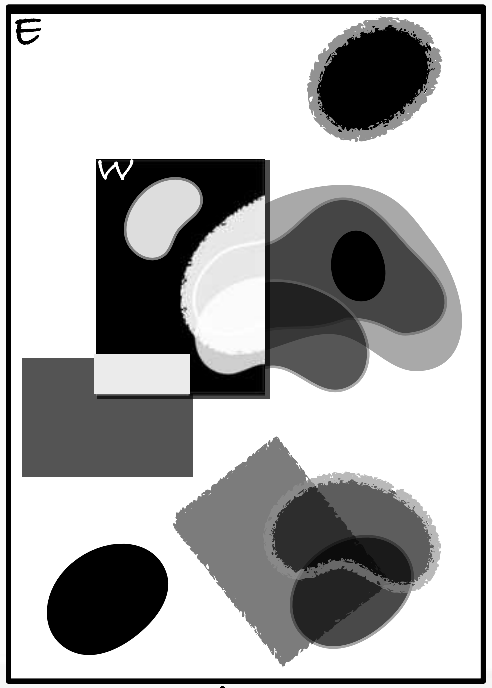


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

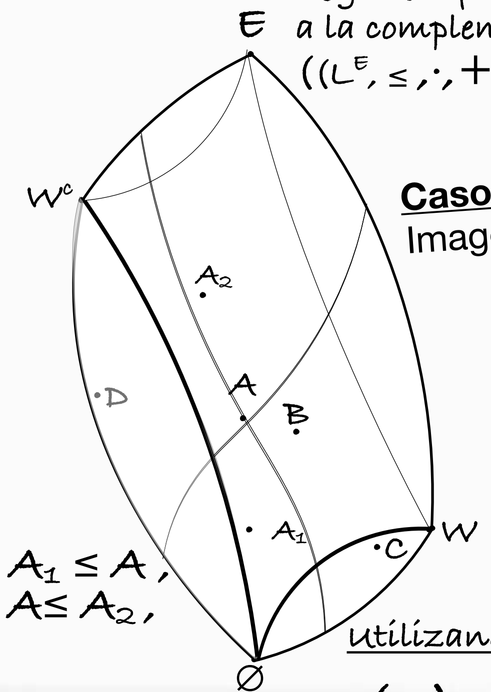
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\dots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \dots$, $E \leq E$)



Estrutura en las imágenes

Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Caso 1: Imagen binaria

$A_1 \leq A$, $A \leq A_2$,

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$

Utilizando la involución:

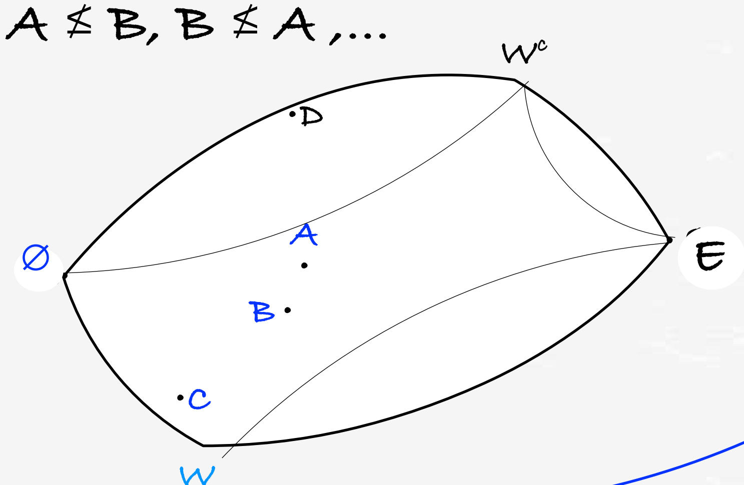
$\varphi_W(S) = S \Delta W = S \cdot W^c + S' \cdot W$

Por ejemplo:

Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

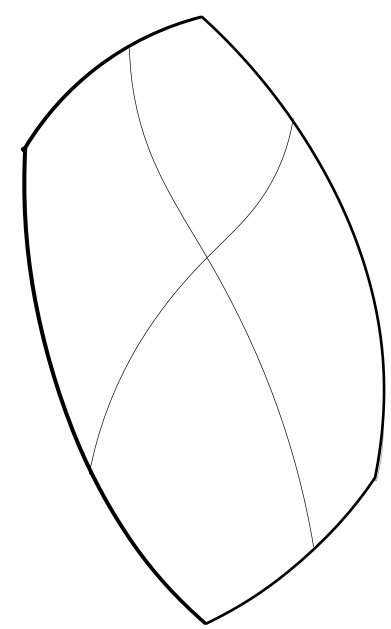
Interpretaremos la aplicación φ_W como una "nueva perspectiva" del retículo L^E, proporcionada por un giro asociado a "W":

$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...



"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

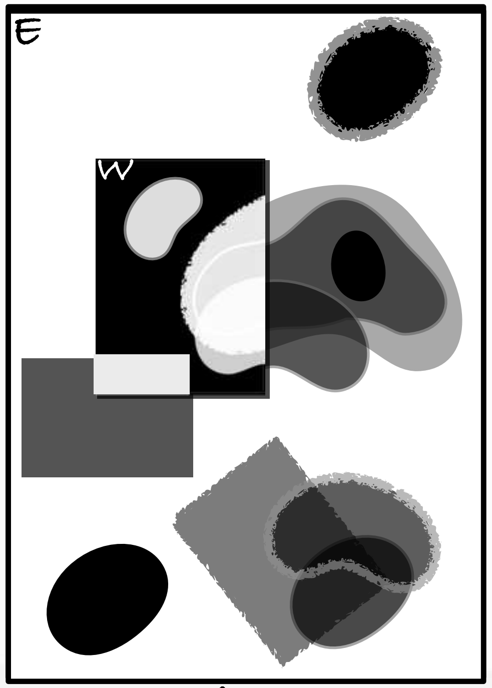


Sistema algebraico: Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte $((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

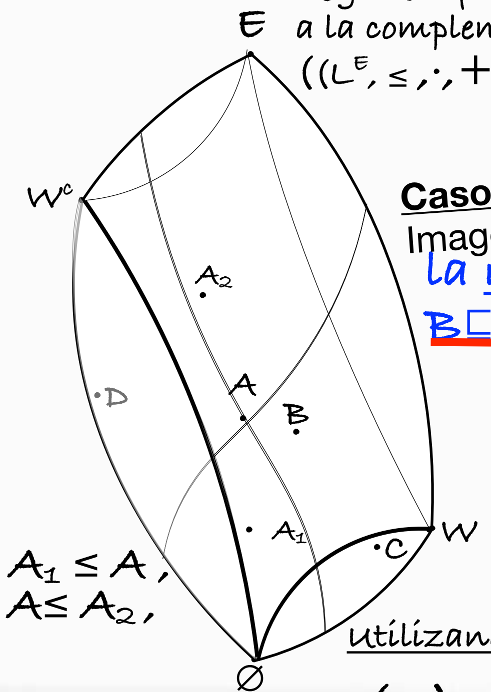
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A: E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$)



Por ejemplo:
subconjuntos borrosos,
mezclados con
imágenes digitalizadas

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W' = W^c$

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:
$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A \cdot W \leq B \leq A + W) \Leftrightarrow (B \triangle W \leq A \triangle W)$.

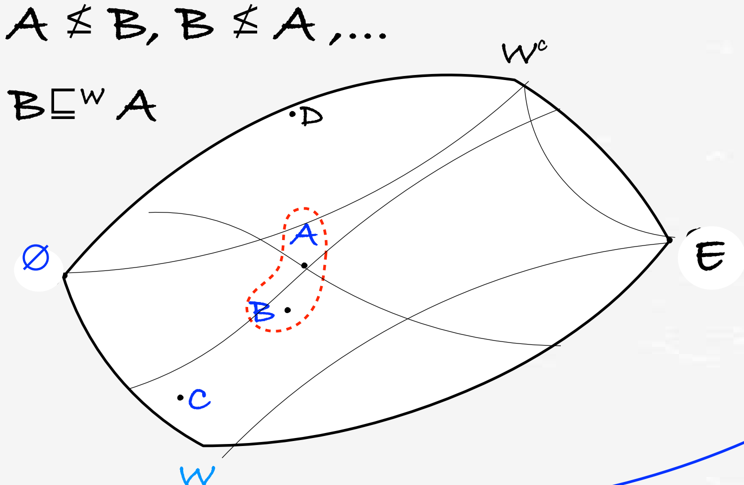
Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S \Delta W = S \cdot W^c + S' \cdot W$$

Interpretaremos la aplicación φ_W como una "nueva perspectiva" del retículo L^E, proporcionada por un giro asociado a "W":

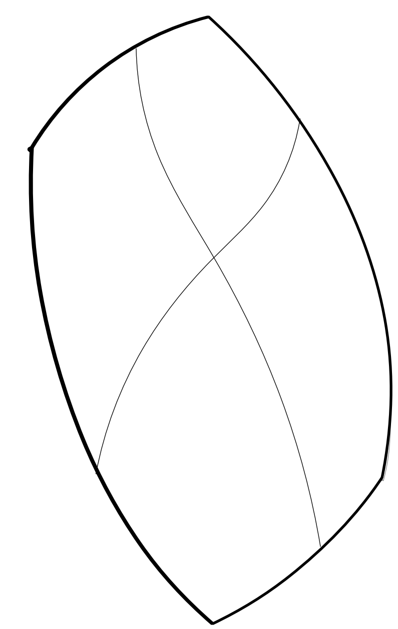
$A \not\leq B$, $B \not\leq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$



"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

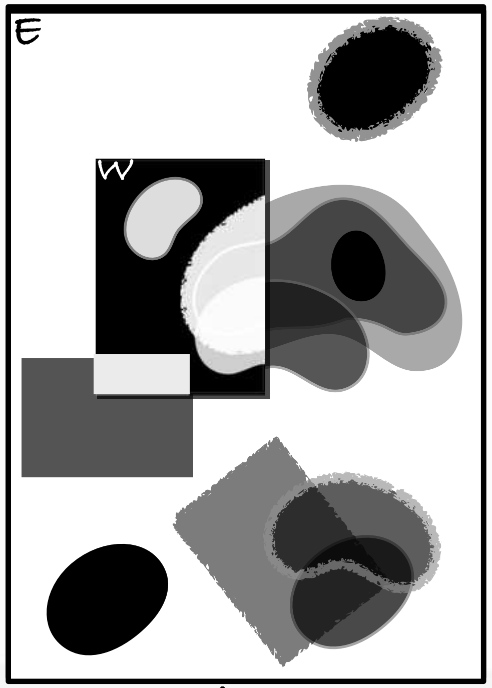


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

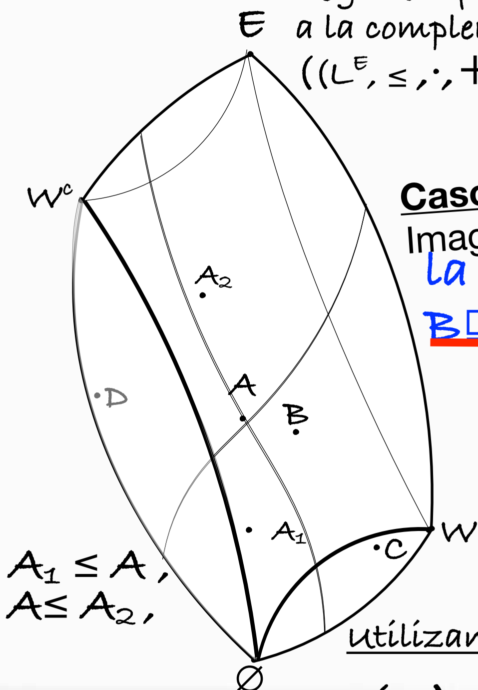
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A{:}E\to\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset\leq E$, $A\leq E$, $B\leq E,\ldots$, $E\leq E$)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación $((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),{}',{}^c)$



$A_1\leq A$, $A\leq A_2$,

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W'=W^c$

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

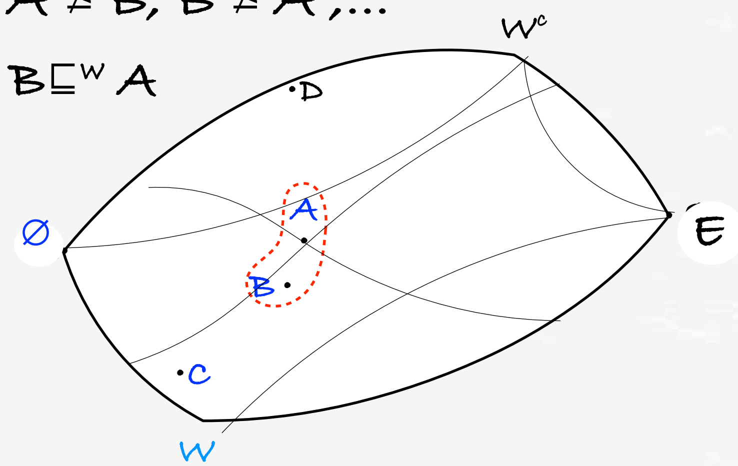
$B\sqsubseteq^W A\Leftrightarrow(A\cdot W\leq B\leq A+W)\Leftrightarrow(B\triangle W\leq A\triangle W)$.

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S)=S\Delta W=S\cdot W^c+S'\cdot W$$

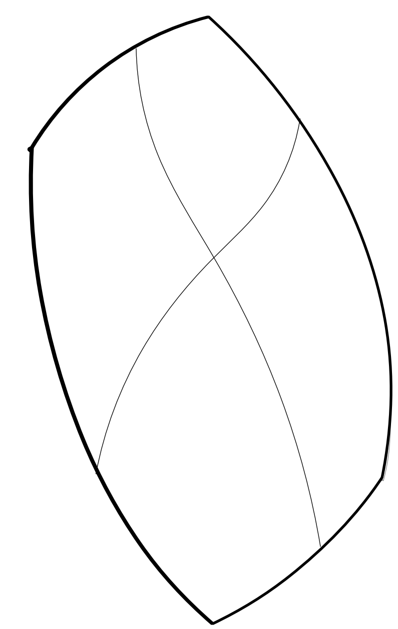
$A\nleq B$, $B\nleq A$,...

$B\sqsubseteq^W A$



"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),{}',{}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A\longrightarrow\varphi_W(A)=A\Delta W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)}$

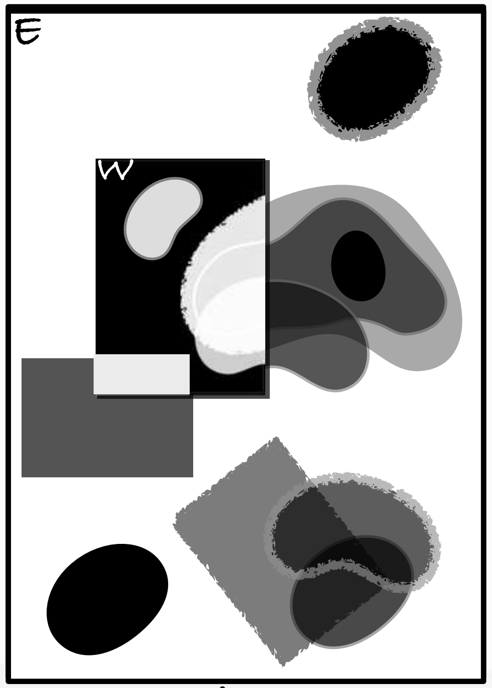


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E,\geq,+,\cdot,E,\emptyset),{}',{}^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

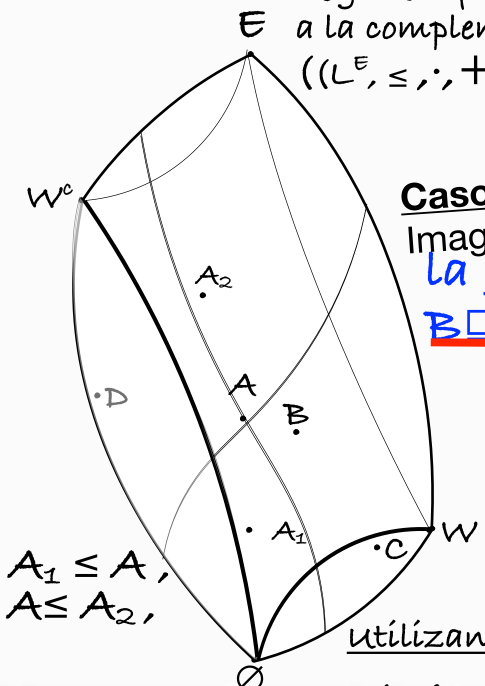
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E\to\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset\le E$, $A\le E$, $B\le E$, … , $E\le E$)



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos, mezclados con imágenes digitalizadas

Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E,\le,\cdot,+,\emptyset,E),{}',{}^c)$



$A_1\le A$,
$A\le A_2$,

Proponemos aquí nuevas representaciones asociadas a subconjuntos W, (en principio nítidos tales que $W'=W^c$

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

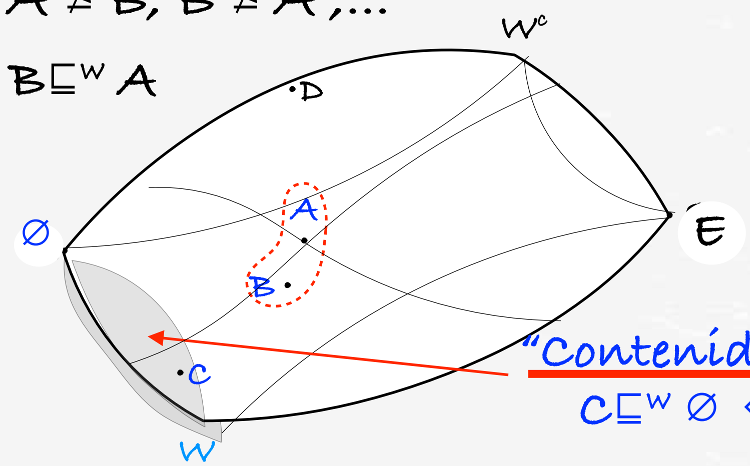
$B\sqsubseteq^W A\Leftrightarrow(A\cdot W\le B\le A+W)\Leftrightarrow(B\triangle W\le A\triangle W)$.

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S)=S\Delta W=S\cdot W^c+S'\cdot W$$

$A\not\le B$, $B\not\le A$, …

$B\sqsubseteq^W A$

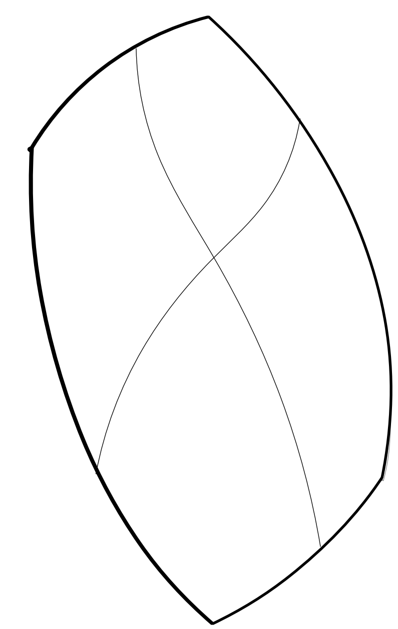


"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:

$C\sqsubseteq^W\emptyset\ \Leftrightarrow(C\le W)\Leftrightarrow(C\triangle W\le W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),{}',{}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A\longrightarrow\varphi_W(A)=A\Delta W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)}$

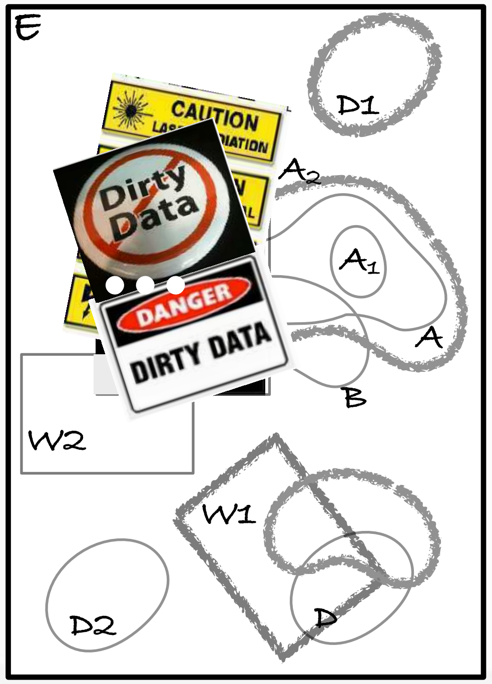


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E,\ge,+,\cdot,E,\emptyset),{}',{}^c)$

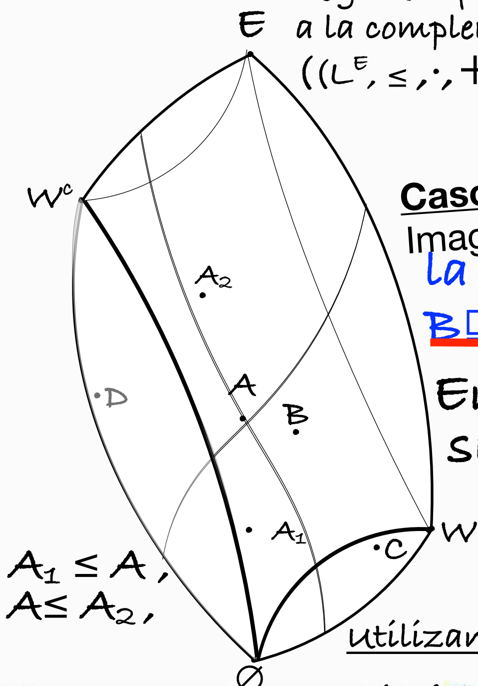
Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E\rightarrow\{0,1,\dots,255\}$ con el orden usual $\emptyset\leq E$, $A\leq E$, $B\leq E,\dots$, $E\leq E$)



Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),',^c)$



$A_1\leq A$,
$A\leq A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

$B\sqsubseteq^W A\Leftrightarrow(A\cdot W\leq B\leq A+W)\Leftrightarrow(B\triangle W\leq A\triangle W)$.

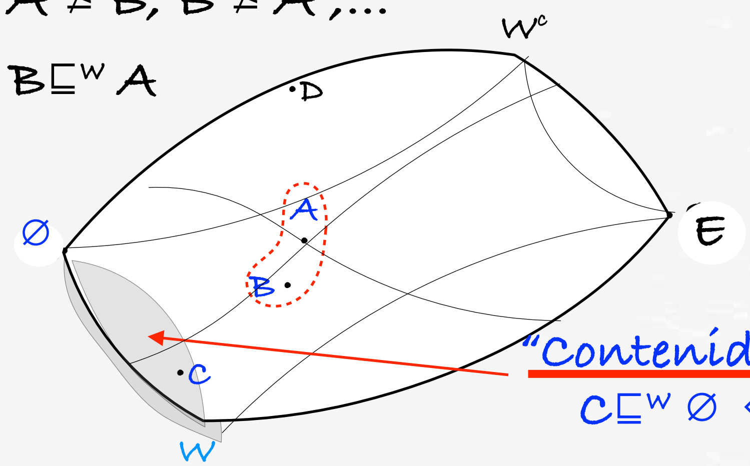
En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso

Utilizando la involución:

$\varphi_W(S)=S\triangle W=S\cdot W^c+S'\cdot W$

$A\not\leq B$, $B\not\leq A$, ...

$B\sqsubseteq^W A$

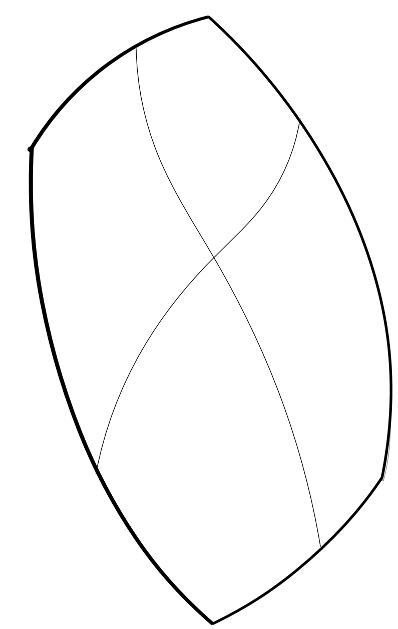


"Contenido" del vacío ∅ asociado a W:

$C\sqsubseteq^W\emptyset\Leftrightarrow(C\leq W)\Leftrightarrow(C\triangle W\leq W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),',^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A\longrightarrow\varphi_W(A)=A\triangle W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)$

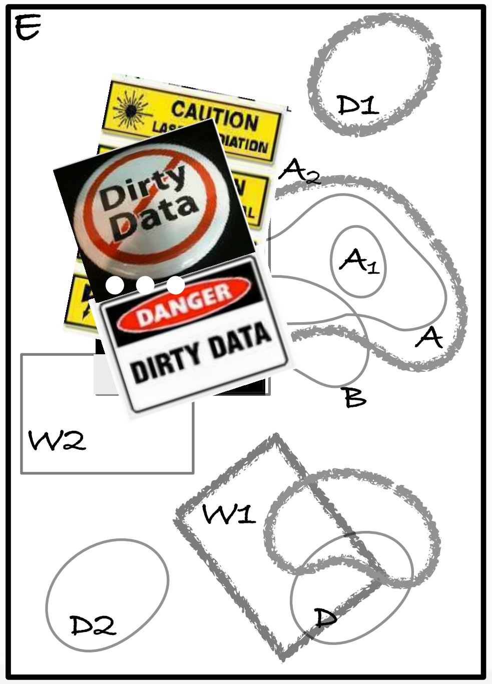


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E,\geq,+,\cdot,E,\emptyset),',^c)$

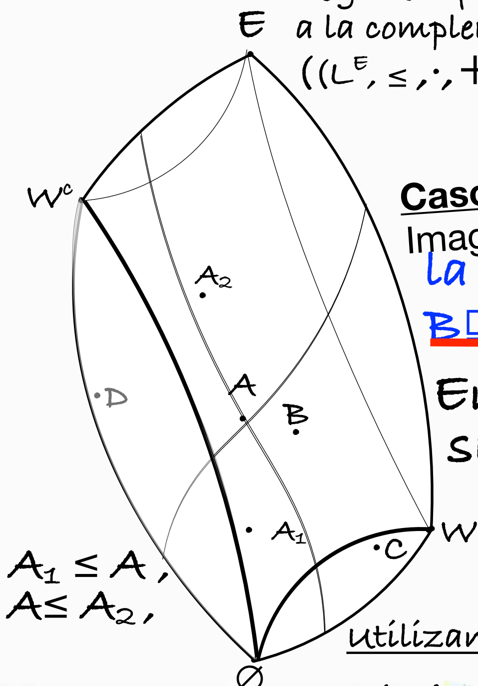
Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones A:E→{0,1,...,255} con el orden usual ∅≤E, A≤E, B≤E,... , E≤E)



Estrutura en las imágenes
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



$A_1 \leq A$, $A \leq A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A \cdot W \leq B \leq A + W) \Leftrightarrow (B \triangle W \leq A \triangle W)$.

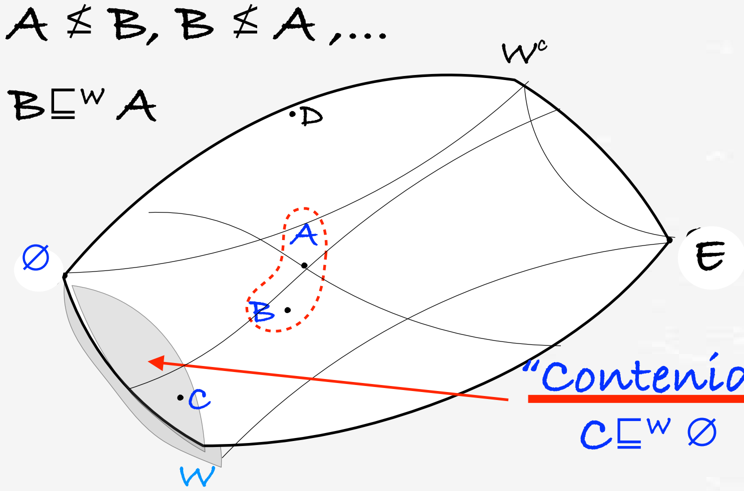
En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso aunque también uno valioso, interesante,.

Utilizando

$\varphi_W(S)$

$A \not\leq B$, $B \not\leq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$

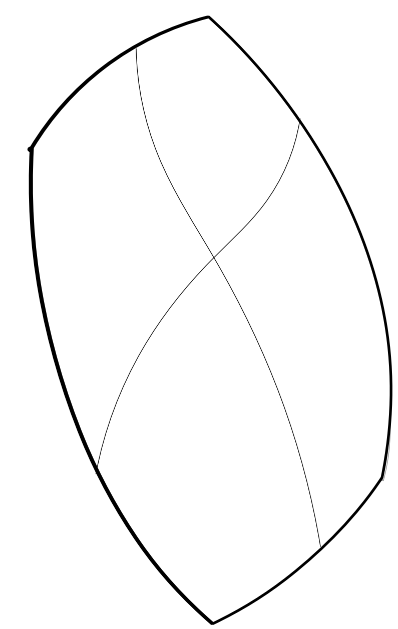


"Contenido" del vacío ∅ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \varnothing \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \triangle W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

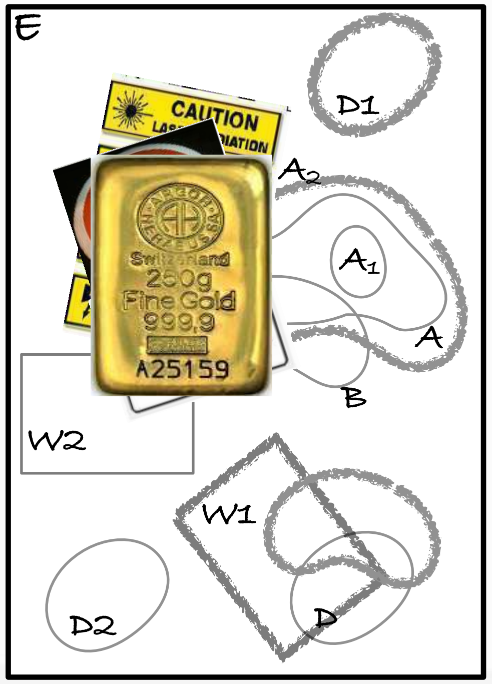


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

Introducción: Las dos representaciones usuales de las imágenes con tonos de grises:

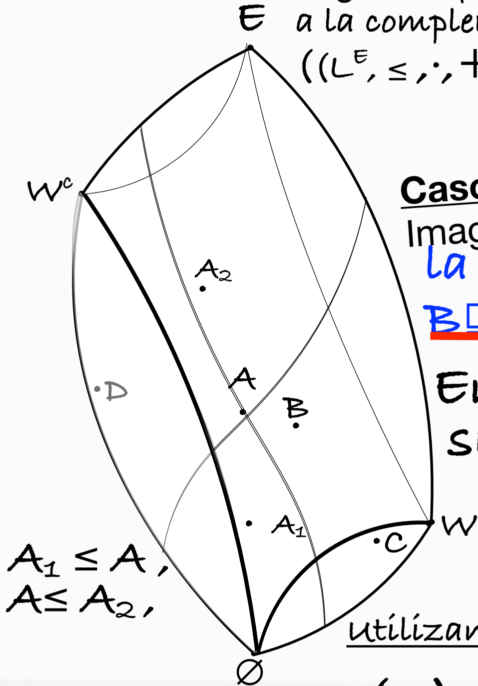
¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A:E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$)



Estrutura en las imágenes

Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$A_1 \leq A$, $A \leq A_2$,

Caso 1:

Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A\cdot W \leq B \leq A+W) \Leftrightarrow (B \triangle W \leq A \triangle W)$.

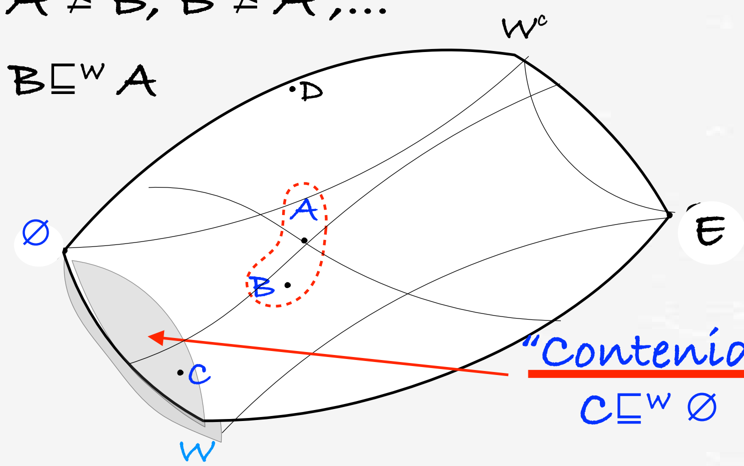
En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso aunque también uno valioso, interesante,.

Utilizando la involución:

$\varphi_W(S) = S \Delta W = S\cdot W^c + S'\cdot W$

$A \nleq B$, $B \nleq A, \ldots$

$B \sqsubseteq^W A$

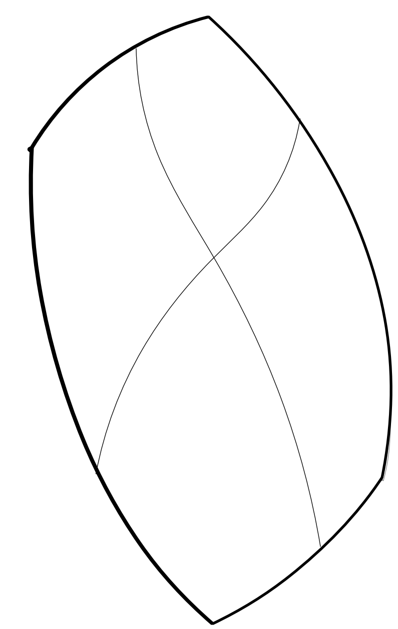


"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

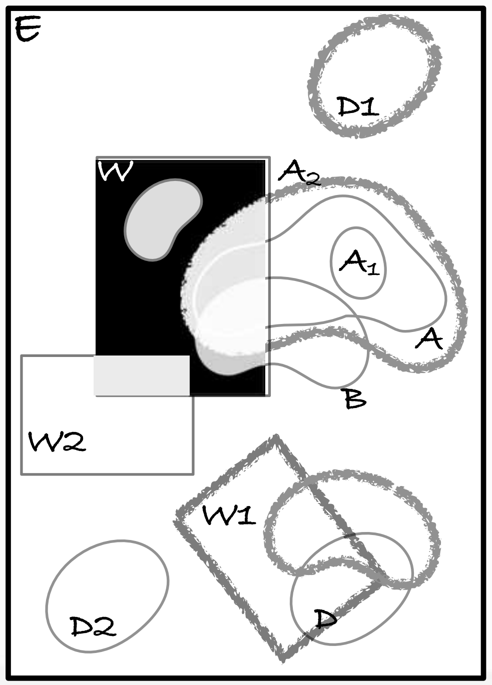
"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A'\cdot W) + (A\cdot W^c)$



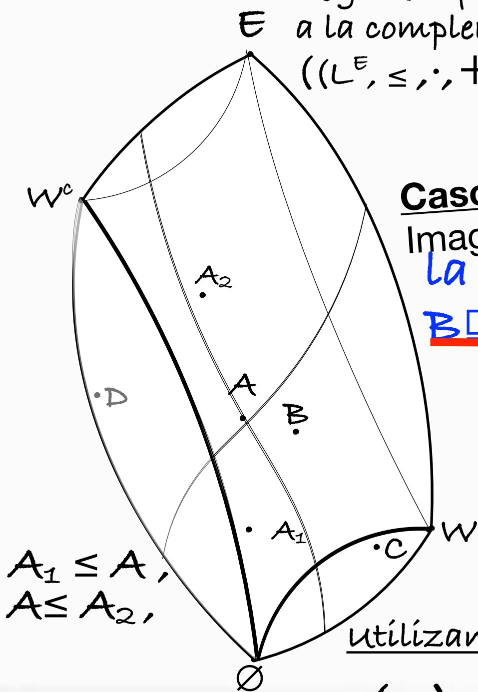
Sistema algebraico: Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte $((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A: E \to \{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\emptyset \le E$, $A \le E$, $B \le E, \ldots, E \le E$)



Estrutura en las imágenes

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$A_1 \le A$, $A \le A_2$,

¿Qué presentamos en este trabajo?

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

$$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A \cdot W \le B \le A + W) \Leftrightarrow (B \triangle W \le A \triangle W).$$

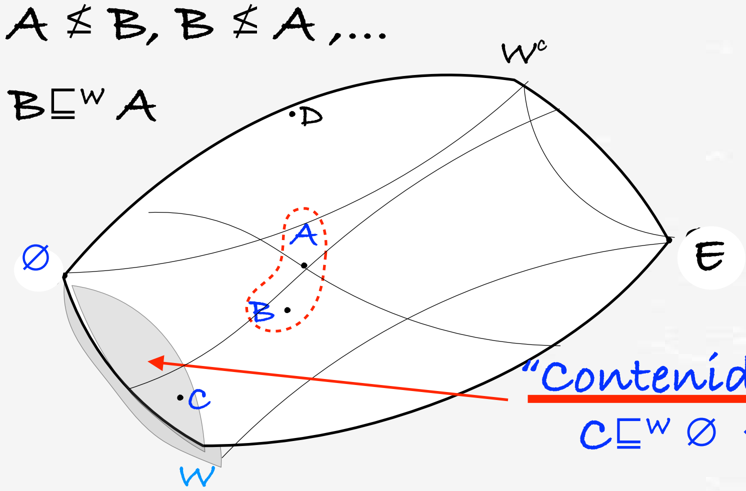
Los operadores ínfimo $\sqcap^W$ y supremo $\sqcup^W$ son las nuevas "intersección" y "unión" asociadas a la inclusión $\sqsubseteq^W$

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S \triangle W = S \cdot W^c + S' \cdot W$$

$A \not\le B$, $B \not\le A, \ldots$

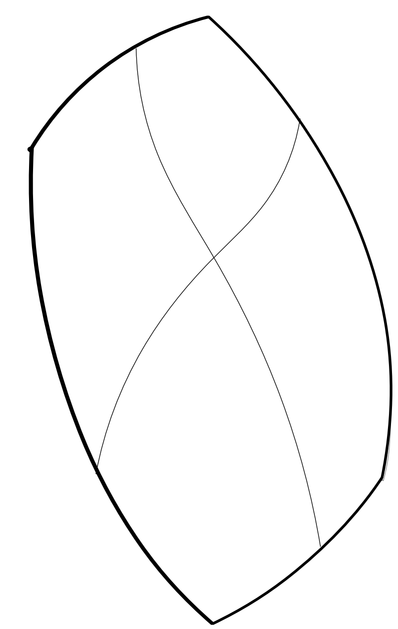
$B \sqsubseteq^W A$



"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:

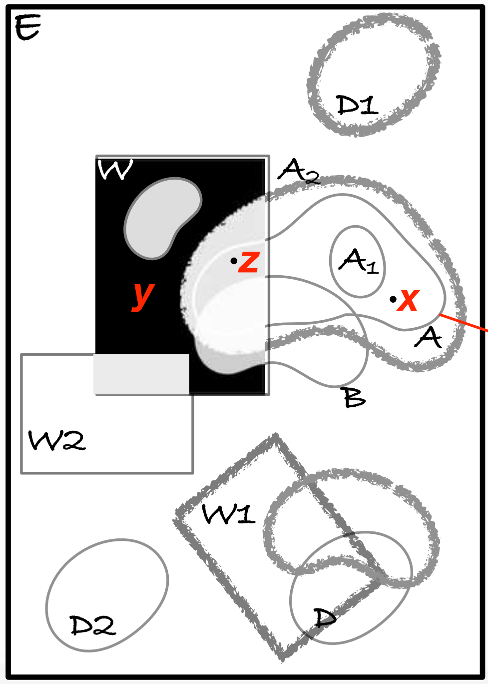
$$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \le W) \Leftrightarrow (C \triangle W \le W).$$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \triangle W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

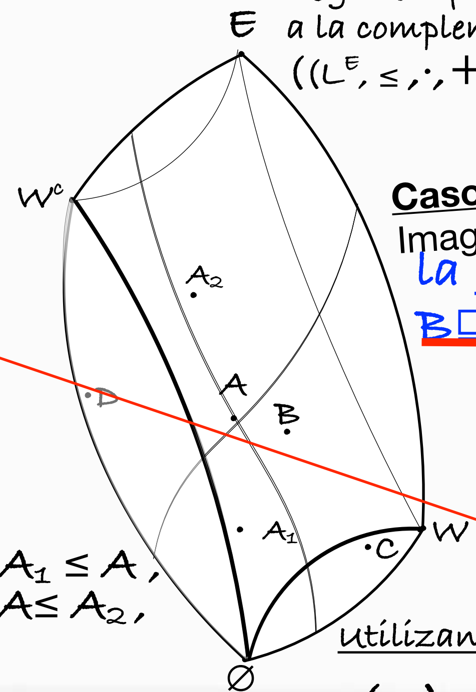
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos, (aplicaciones $A{:}E\rightarrow\{0,1,\ldots,255\}$ con el orden usual $\varnothing\leq E$, $A\leq E$, $B\leq E$, ..., $E\leq E$)



Estrutura en las imágenes

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), {}', {}^c)$

¿Qué presentamos en este trabajo?



$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

Caso 1:
Imagen binaria

la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:

$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A\cdot W \leq B \leq A+W) \Leftrightarrow (B\triangle W \leq A\triangle W)$.

Los operadores ínfimo $\sqcap^W$ y supremo $\sqcup^W$ son las nuevas "intersección" y "unión" asociadas a la inclusión $\sqsubseteq^W$

Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S\Delta W = S\cdot W^c + S'\cdot W$$

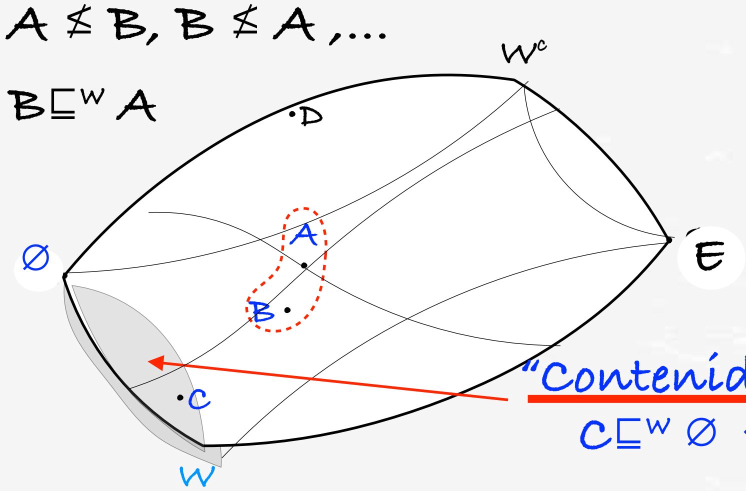
$x \in^W A$, $y \in^W A$, $z \notin^W A$

Se introduce una relación $\in^W \subseteq E \times L^E$ que verifica propiedades de "pertenencia":

$$(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle W))$$

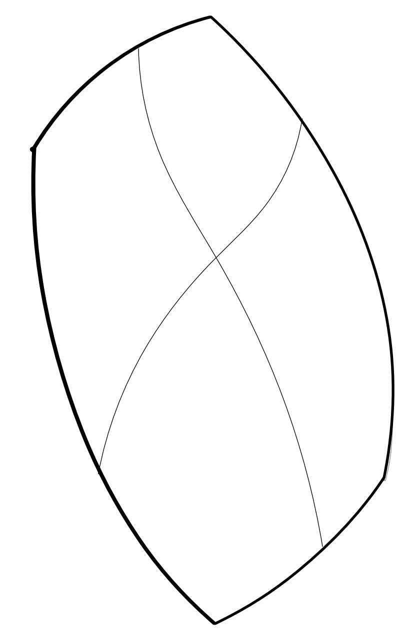
$A \not\leq B$, $B \not\leq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$



"Contenido" del vacío $\varnothing$ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \varnothing \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C\triangle W \leq W)$.

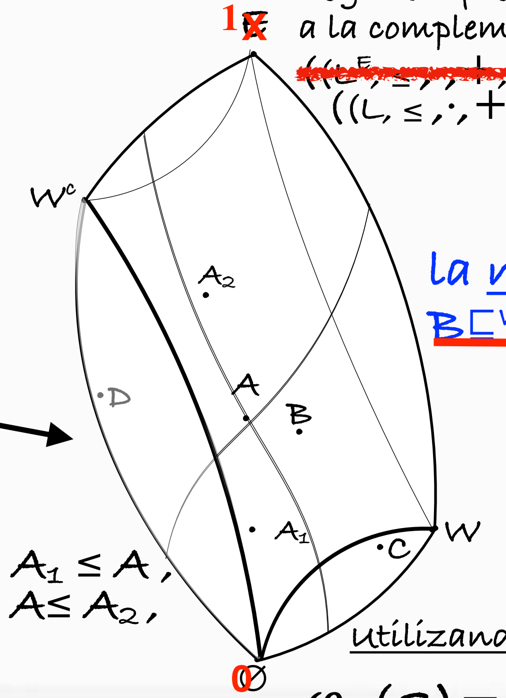


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A\Delta W = (A'\cdot W) + (A\cdot W^c)}$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), {}', {}^c)$

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

<u>Estrutura en las imágenes</u>
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$\cancel{((L^E,\le,\cdot,+,\emptyset,E),',^c)}$
$((L,\le,\cdot,+,0,1),',^c)$



¿Qué presentamos en este trabajo?

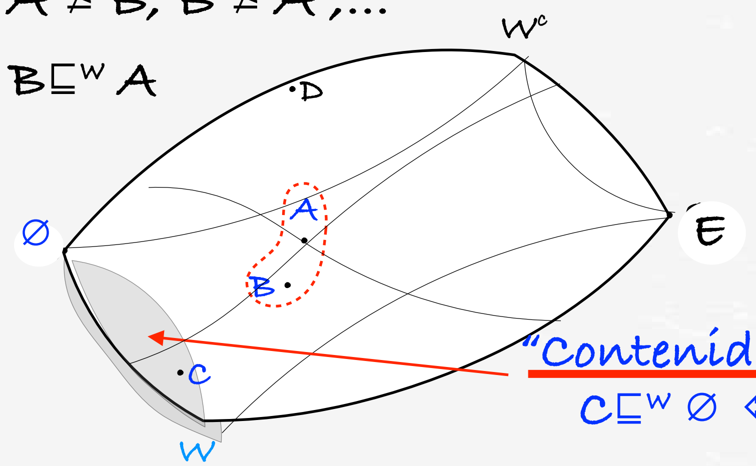
la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:
$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A\cdot W \le B \le A+W) \Leftrightarrow (B \triangle W \le A \triangle W)$.

Los operadores ínfimo $\sqcap^W$ y supremo $\sqcup^W$ son las nuevas "intersección" y "unión" asociadas a la inclusión $\sqsubseteq^W$

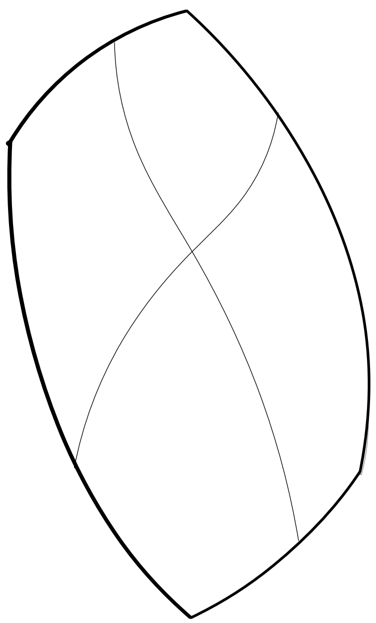
Utilizando la involución:

$$\varphi_W(S) = S\Delta W = S\cdot W^c + S'\cdot W$$

$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...
$B \sqsubseteq^W A$



"Contenido" del vacío ∅ asociado a W:
$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \le W) \Leftrightarrow (C\triangle W \le W)$.

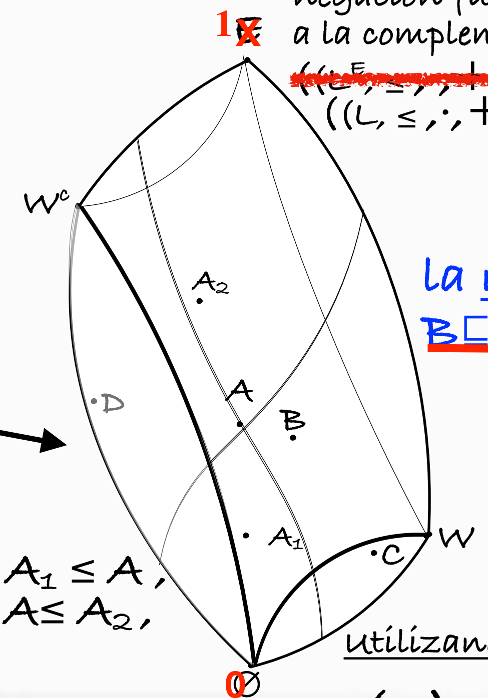


Caso 3:

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

<u>Estrutura en las imágenes</u>
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$\cancel{((L^E, \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ', ^c)}$
$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', ^c)$



$A_1 \leq A$,
$A \leq A_2$,

¿Qué presentamos en este trabajo?

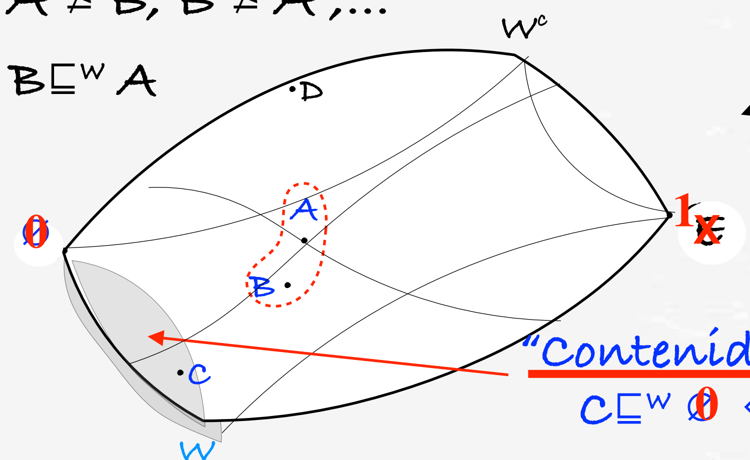
la nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ asociada al nítido W:
$B \sqsubseteq^W A \Leftrightarrow (A \cdot W \leq B \leq A + W) \Leftrightarrow (B \triangle W \leq A \triangle W)$.

Los operadores ínfimo $\sqcap^W$ y supremo $\sqcup^W$ son las nuevas "intersección" y "unión" asociadas a la inclusión $\sqsubseteq^W$

<u>Utilizando la involución:</u>
$\varphi_W(S) = S\Delta$

Retículo distributivo imagen isomorfa del anterior y con la misma negación fuerte

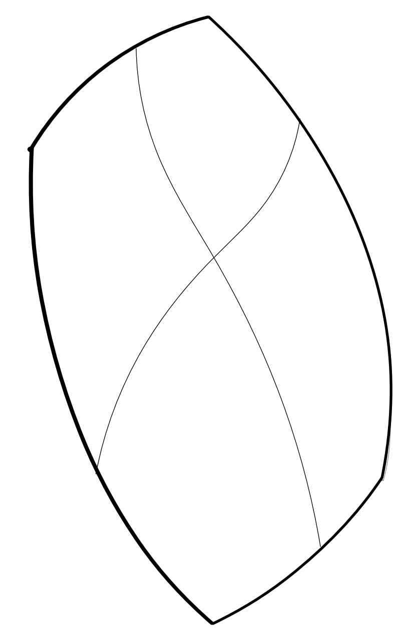
$A \not\leq B, B \not\leq A, \ldots$
$B \sqsubseteq^W A$



elemento 0
"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:
$C \sqsubseteq^W \cancel{\emptyset}\, 0 \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

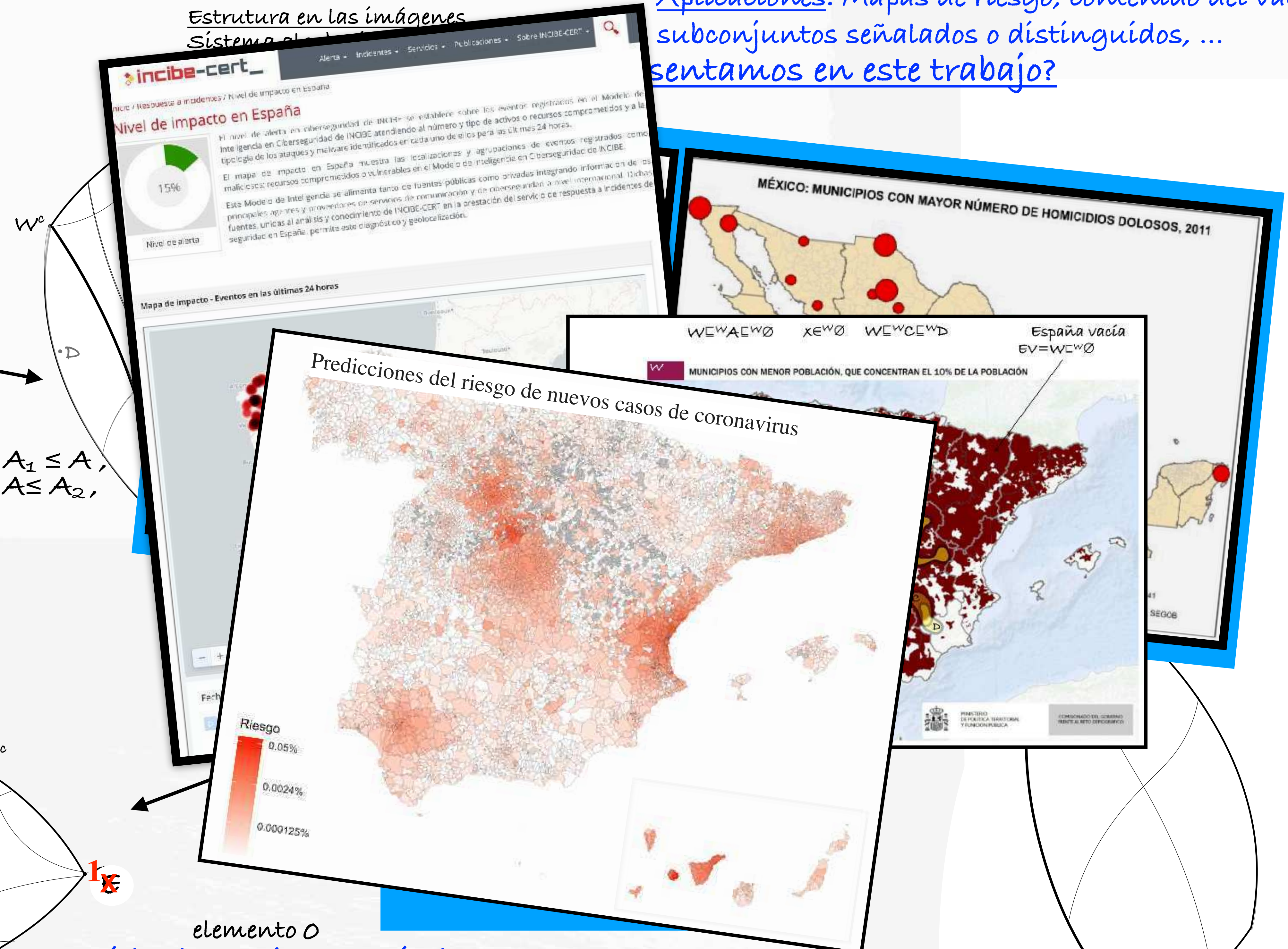
Caso 3:



Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

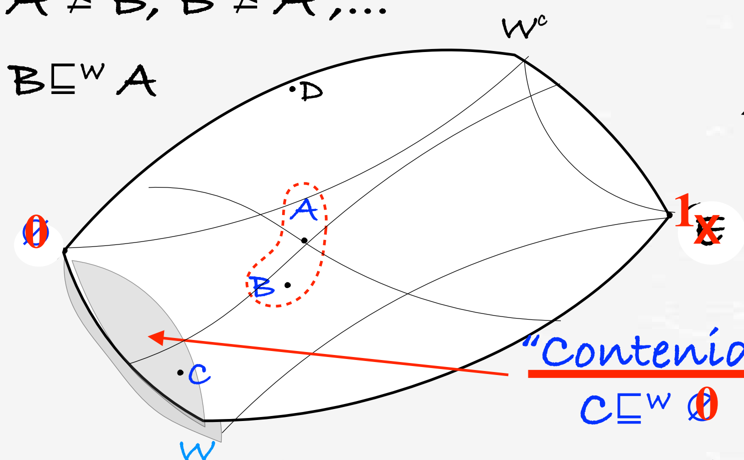
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados o distinguidos, ...
sentamos en este trabajo?

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



$A \not\leq B$, $B \not\leq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$



elemento 0

"Contenido" del ~~vacío $\emptyset$~~ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}', {}^c)$

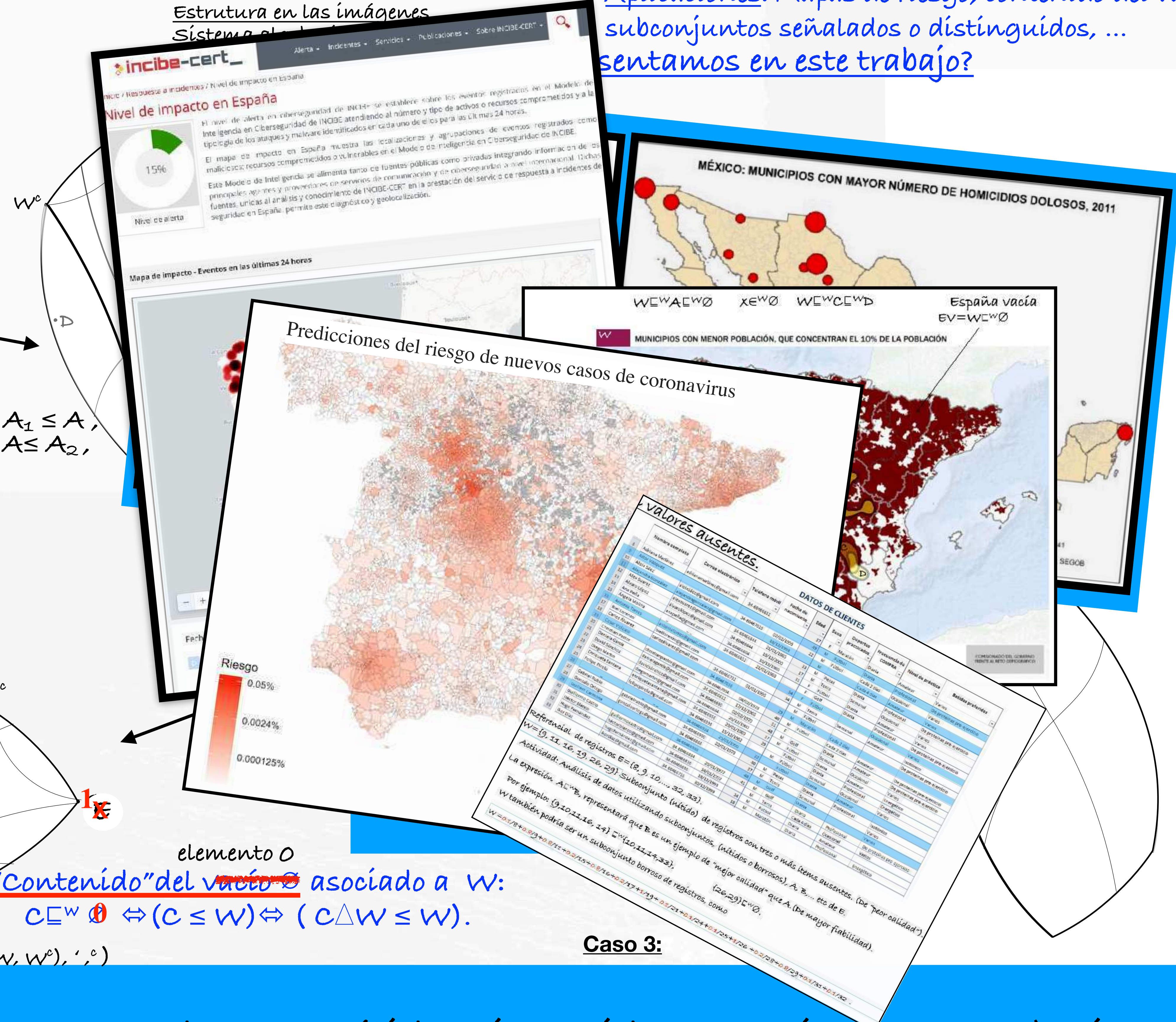
Caso 3:

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados o distinguidos, ...

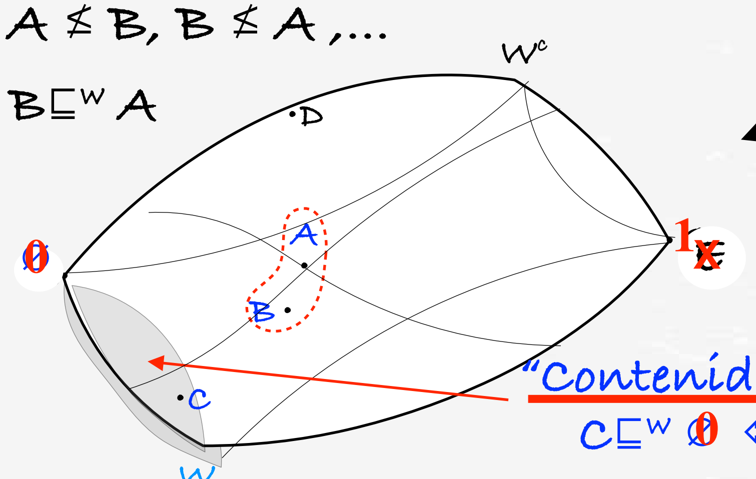
sentamos en este trabajo?

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



$A \nleq B$, $B \nleq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$



elemento 0

"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \le W) \Leftrightarrow (C \triangle W \le W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados o distinguidos, ...

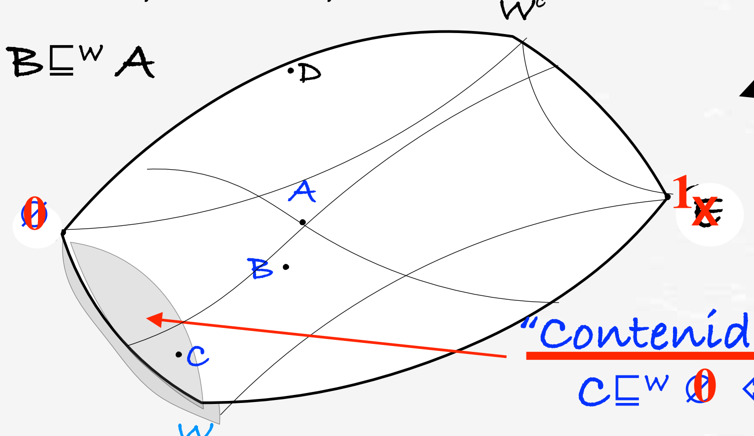
sentamos en este trabajo?

Estrutura en las imágenes

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

$A \not\leq B, B \not\leq A, \ldots$

$B \sqsubseteq^W A$



$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

elemento O

"Contenido" del ~~vacío $\emptyset$~~ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

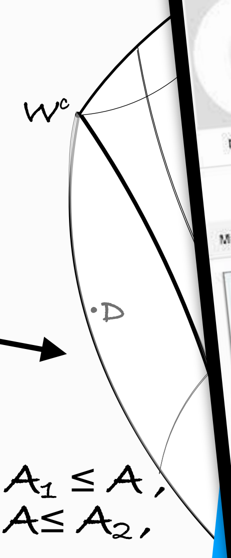
Caso 3:

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Estrutura en las imágenes

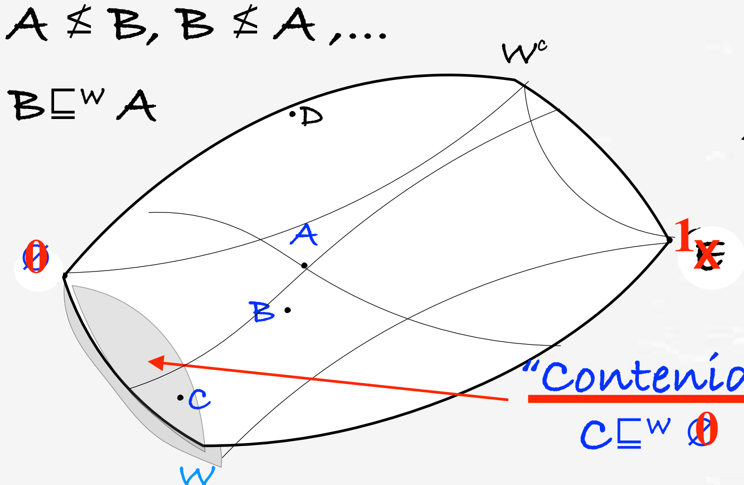
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados o distinguidos, ...
sentamos en este trabajo?

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



$A \not\leq B$, $B \not\leq A$, ...

$B \sqsubseteq^W A$



elementoO

"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:

$C \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (C \leq W) \Leftrightarrow (C \triangle W \leq W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

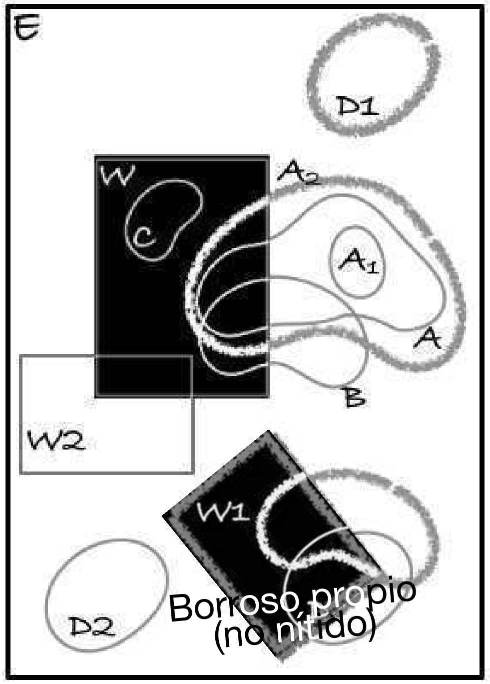
Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Volviendo al **Caso 2:**

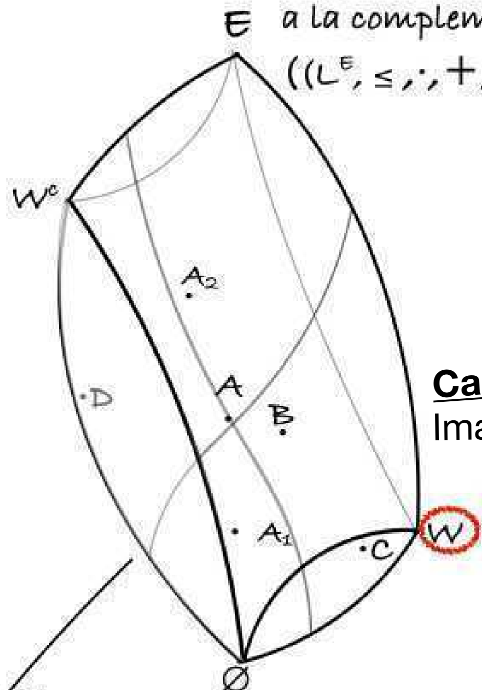
Pero, ¿y si W_1 es un borroso propio (no nítido)?

¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, ..., $E \leq E$



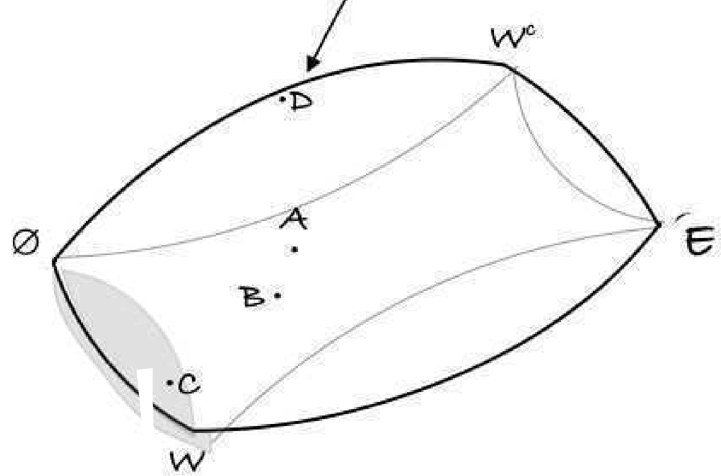
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$

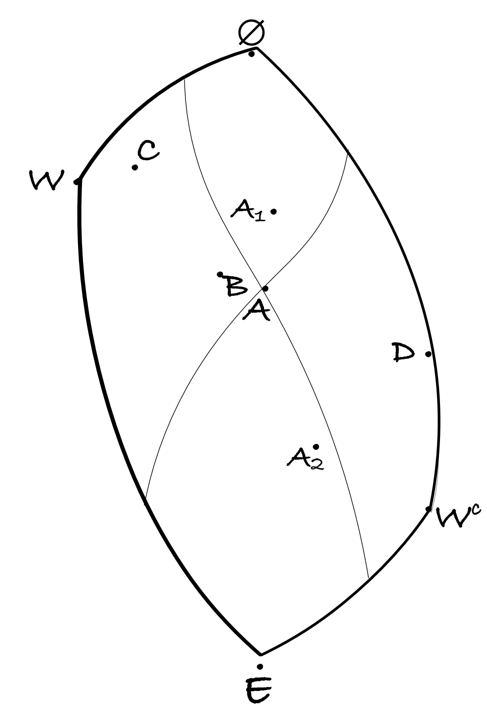


Caso 2:
Imagen con tonos de grises

φ_W

$$\varphi_W(S)=S\Delta W$$

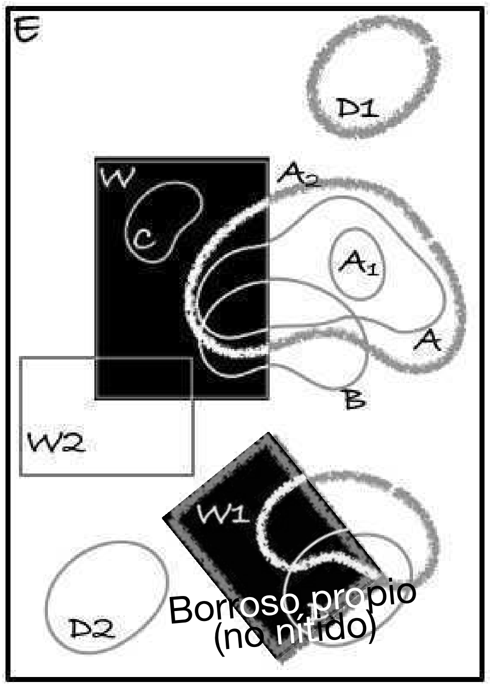




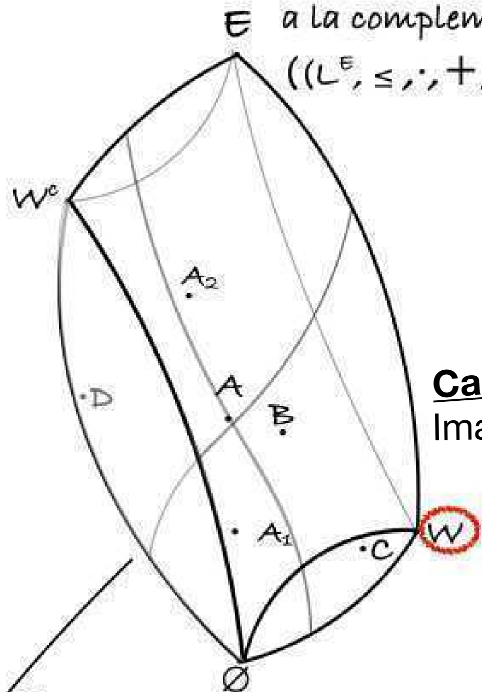
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A)=A\Delta W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)}$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



Pero, ¿y si W_1 es un borroso propio (no nítido)?

¿Qué presentamos en este trabajo?

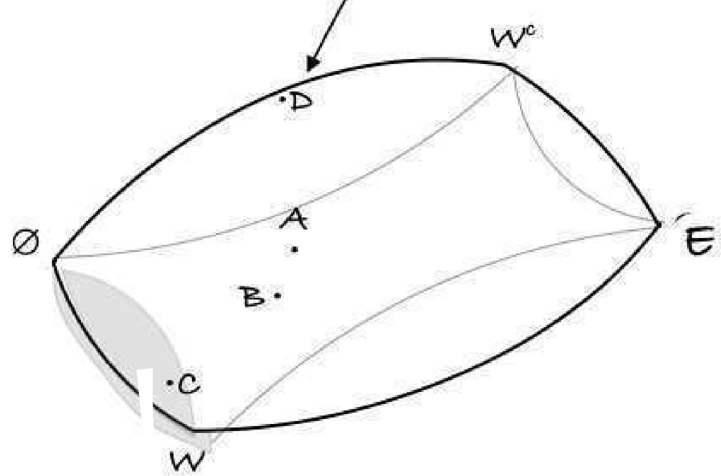
Caso 2:
Imagen con tonos de grises

Entonces…

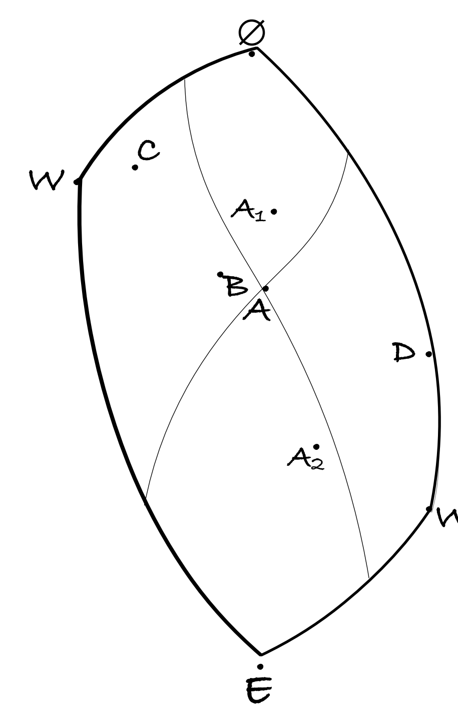
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

φ_W

El resultado es más pobre en estructura …

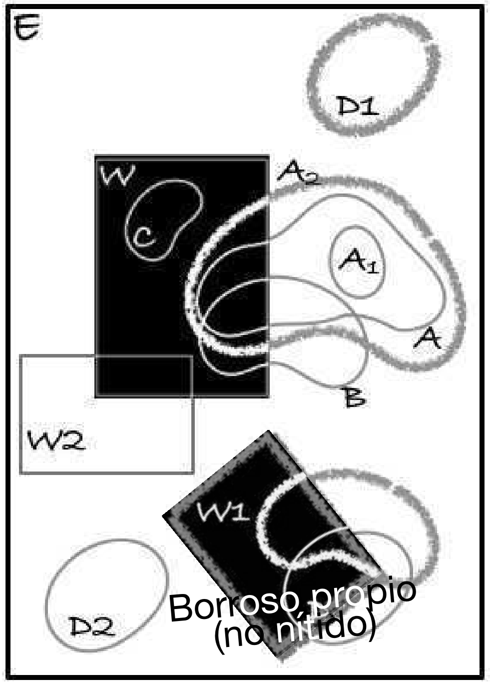


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

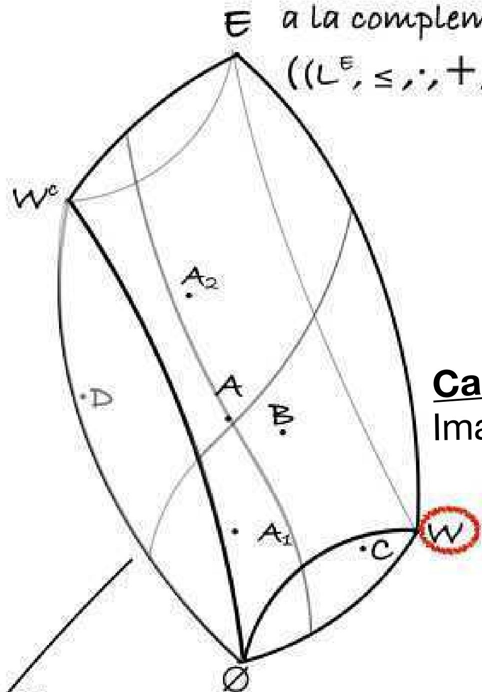
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Pero, ¿y si W_1 es un borroso propio (no nítido)?

¿Qué presentamos en este trabajo?



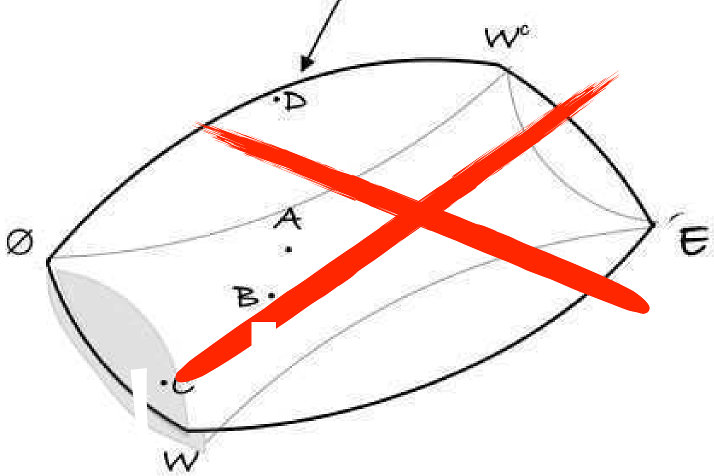
Caso 2:
Imagen con tonos de grises

Entonces…

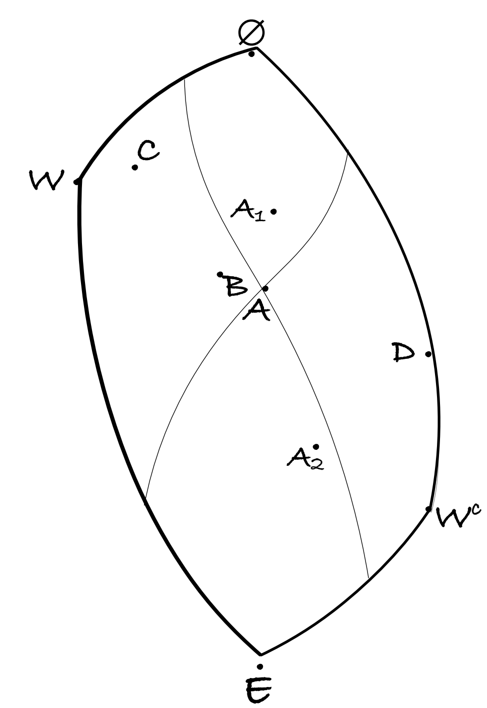
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

φ_W

El resultado es más pobre en estructura …

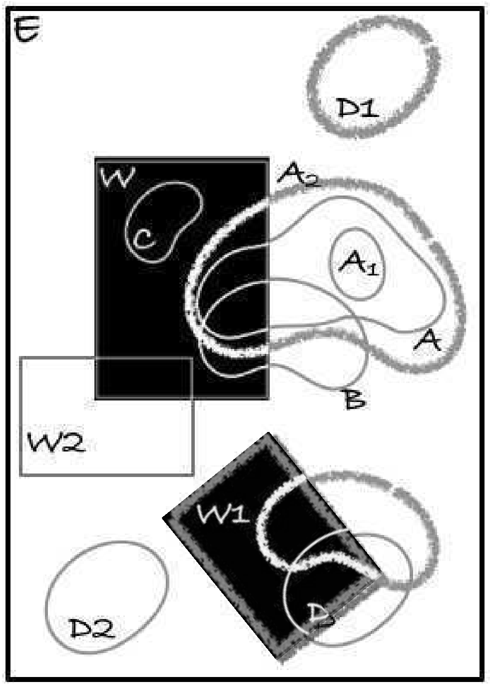


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$



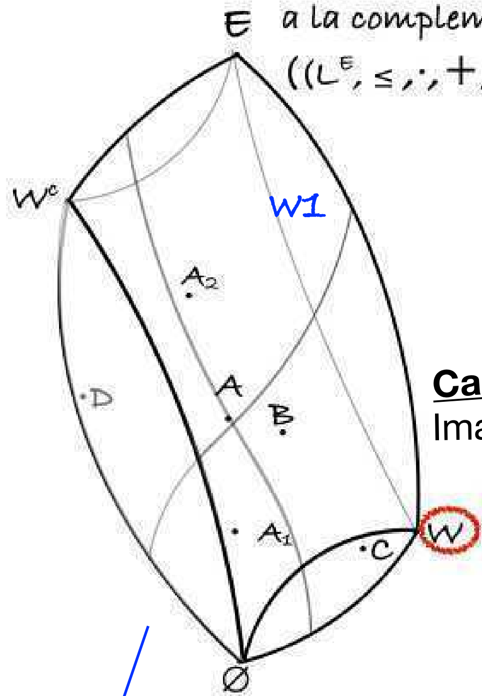
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



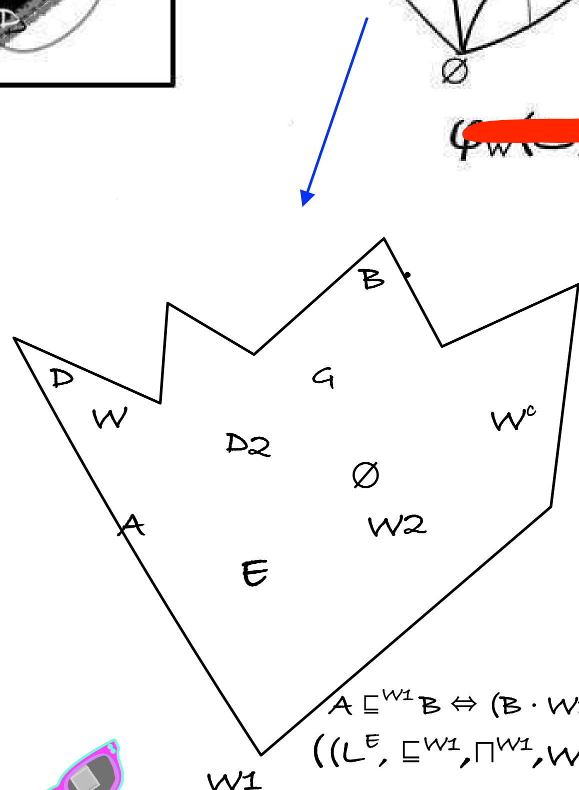
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$

¿Qué presentamos en este trabajo?

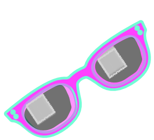


Caso 2:
Imagen con tonos de grises

~~$\varphi_W(C) = C \triangle W$~~



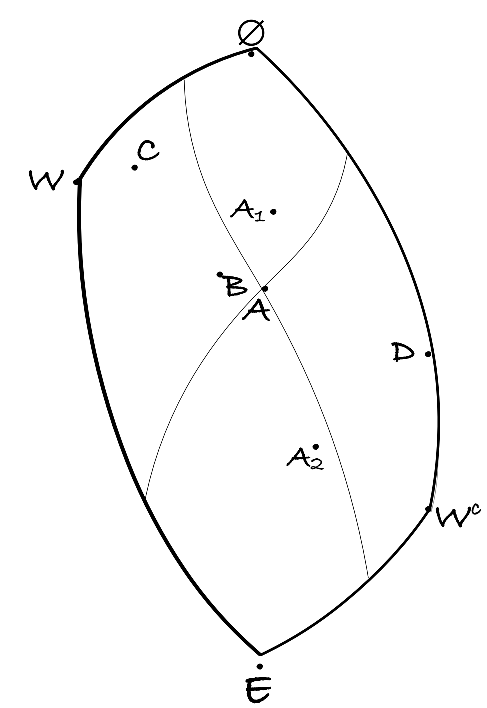
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$



"Perspectiva"

[redacted]

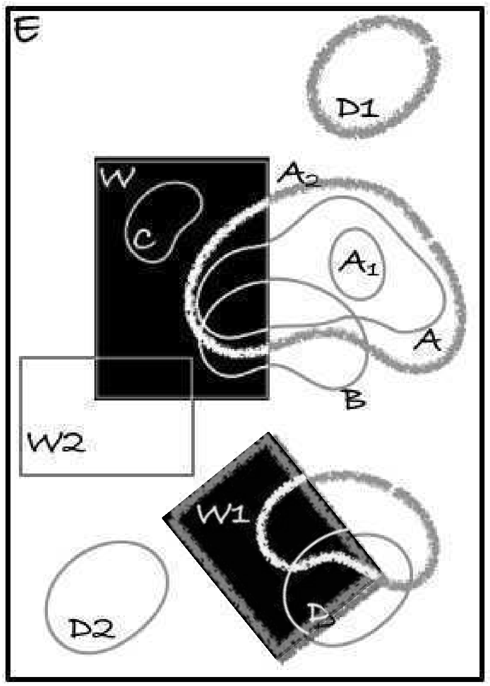
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo. (Sólo se asegura la "inclusión" y la "intersección").



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

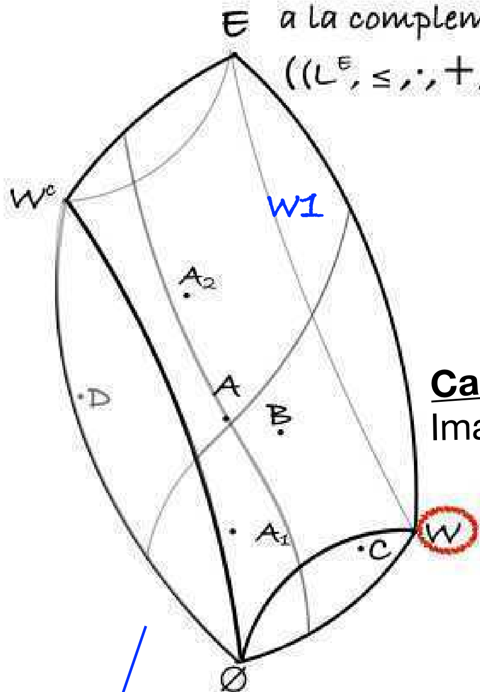
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, ... , $E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

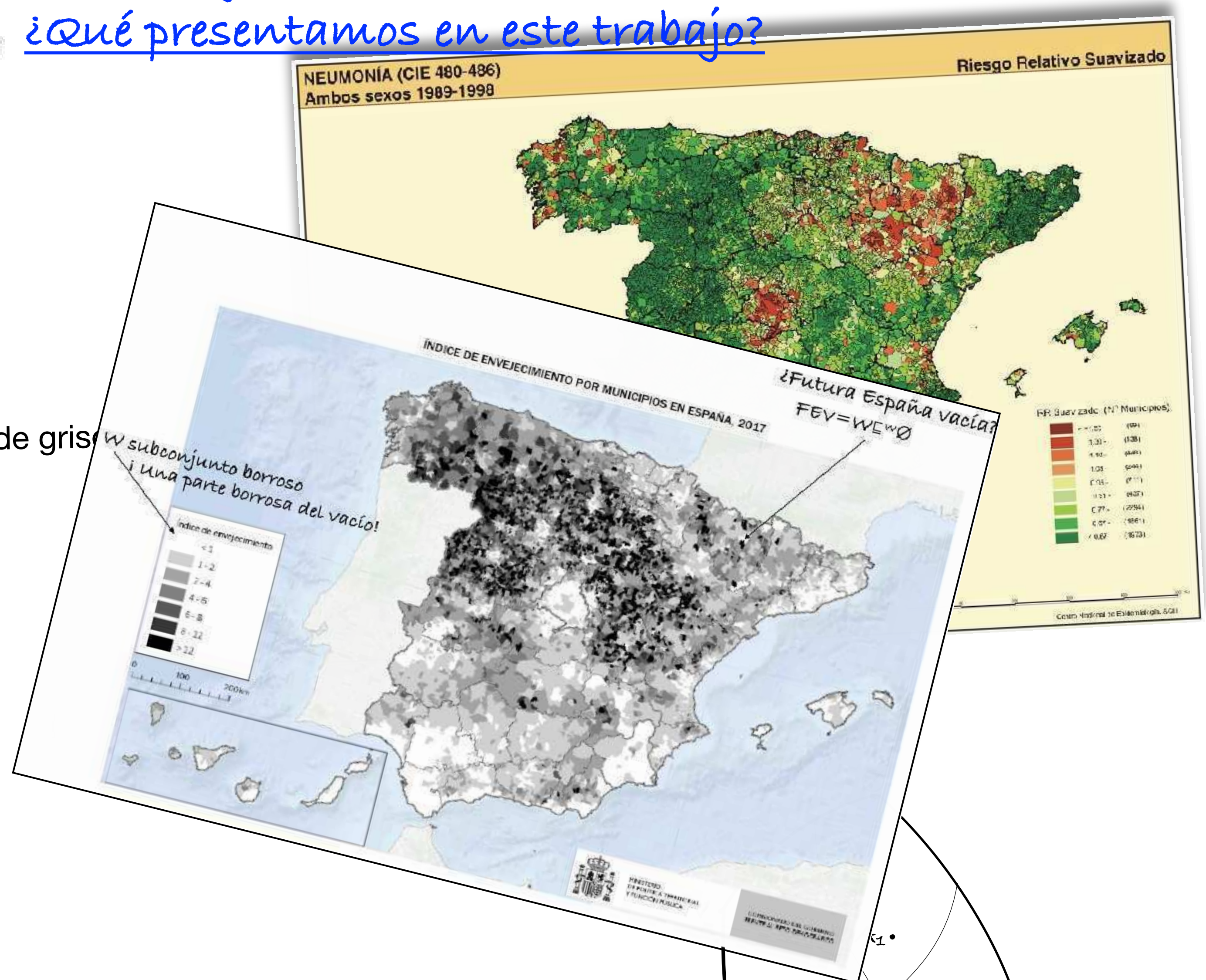
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

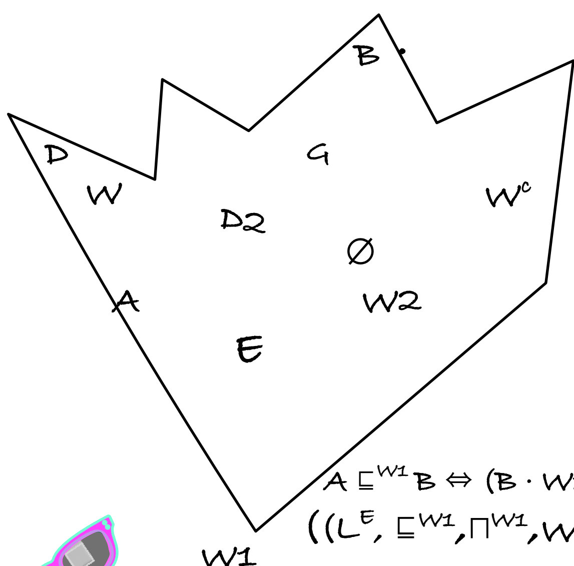


Caso 2:
Imagen con tonos de gris

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ... Ahora todos ellos con "matices"

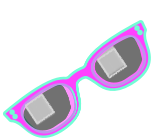
¿Qué presentamos en este trabajo?





$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

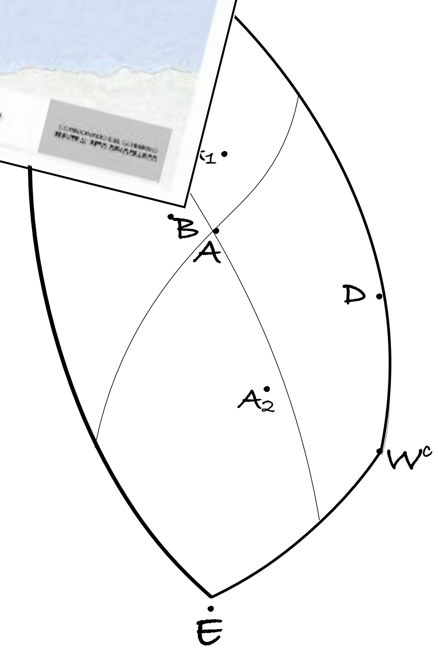
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$



"Perspectiva"

[redacted]

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo. (Sólo se asegura la "inclusión" y la "intersección").



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

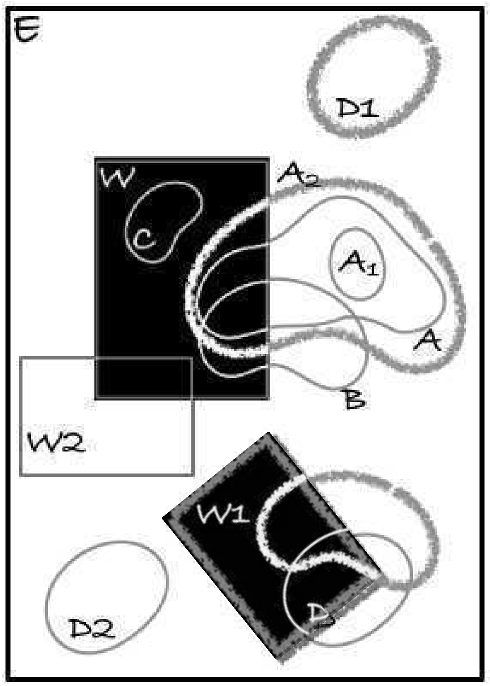
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ... Ahora todos ellos con "matices"

¿Qué presentamos en este trabajo?

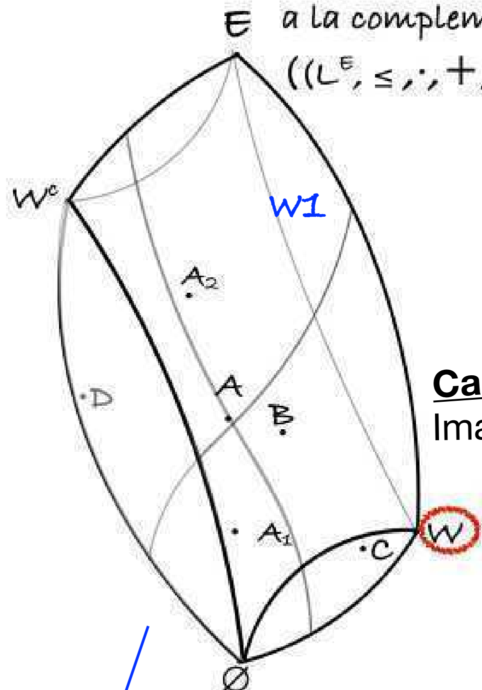
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, ..., $E \leq E$



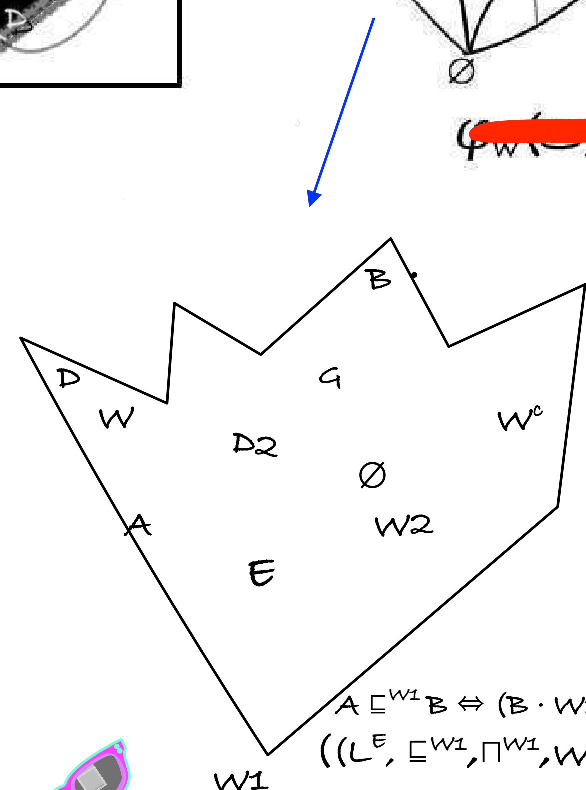
Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



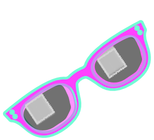
Caso 2:
Imagen con tonos de gris

~~$\varphi_W(C) = CZW$~~



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

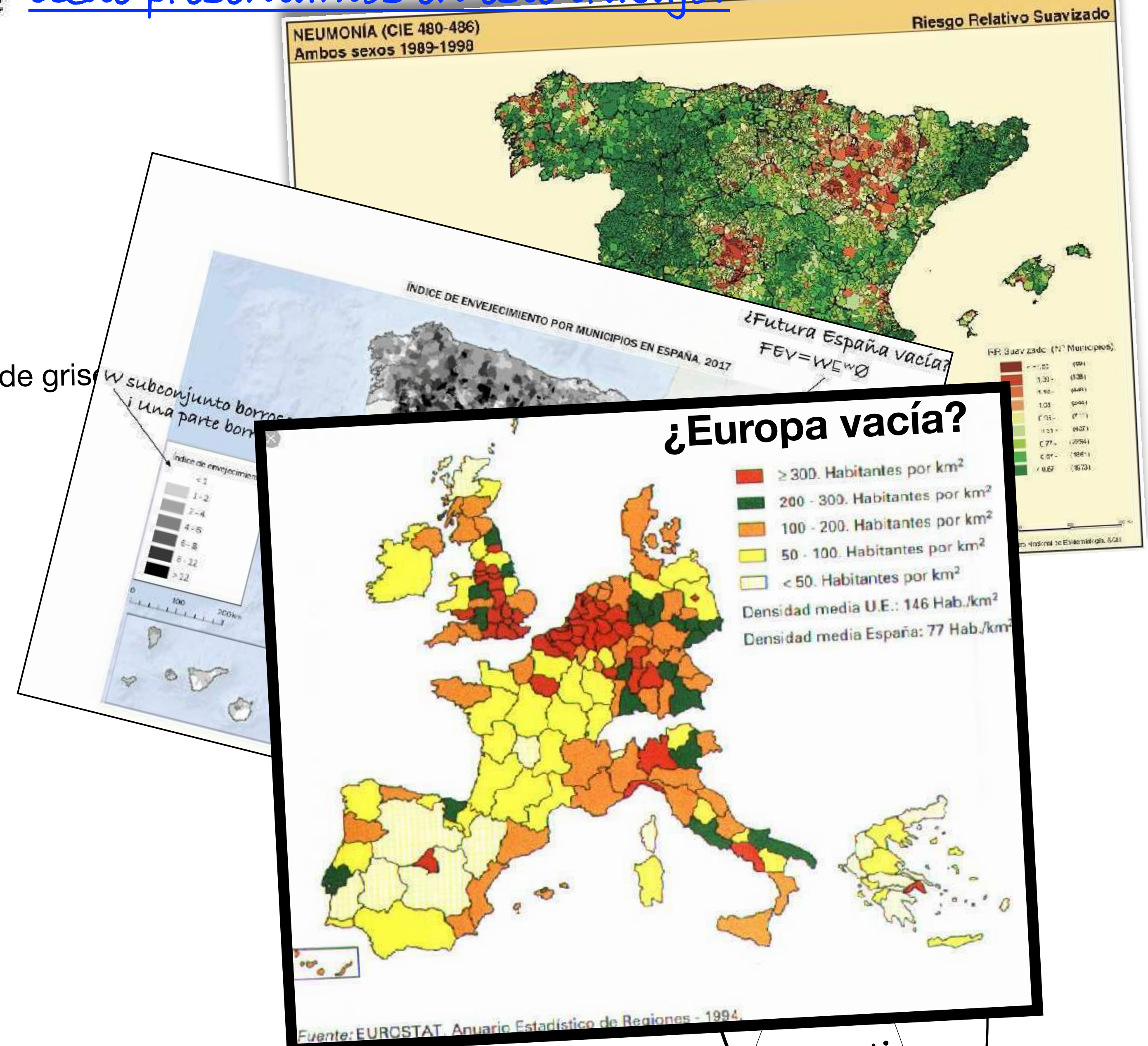
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

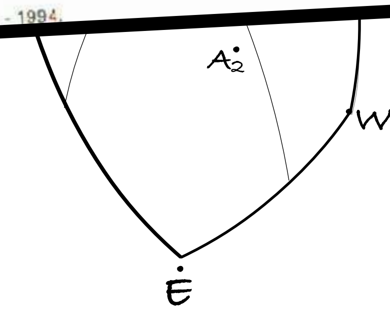


"Perspectiva"

[redacted]

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo. (Sólo se asegura la "inclusión" y la "intersección").

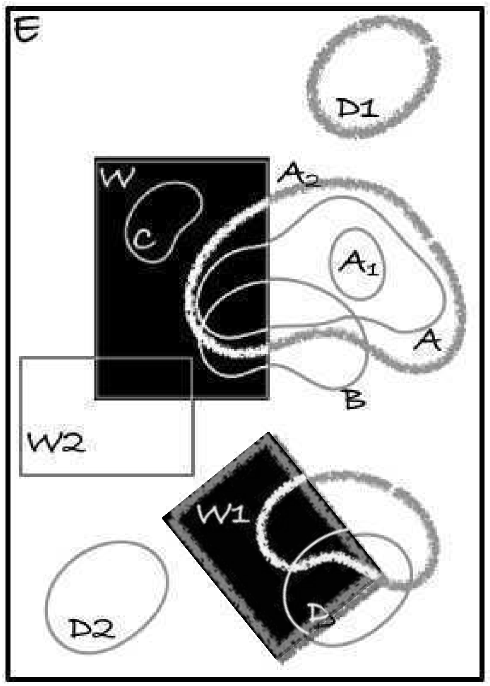




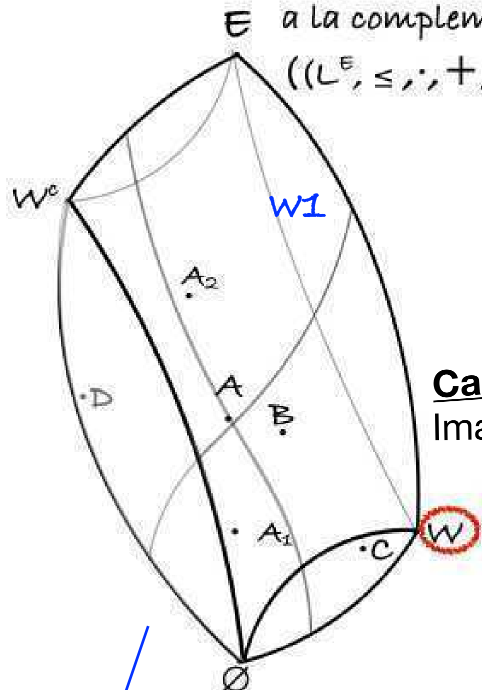
Sistema algebraico: Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con
negación fuerte que contiene
a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^\circ)$

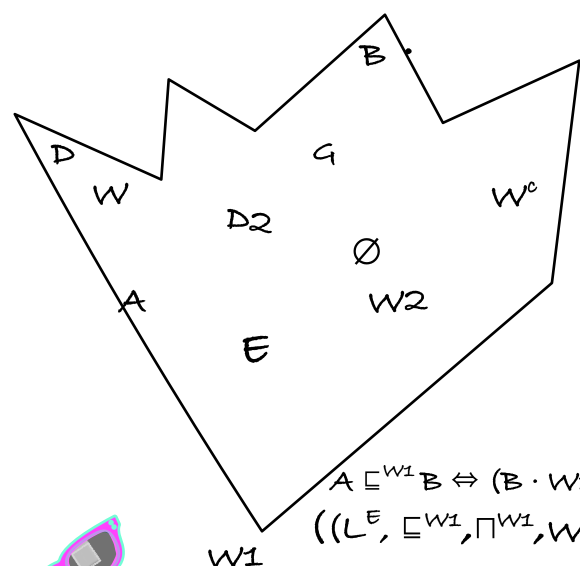


[redacted]

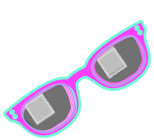
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ... Ahora todos ellos con "matices"

¿Qué presentamos en este trabajo?

Caso 2:
Imagen con tonos de gris

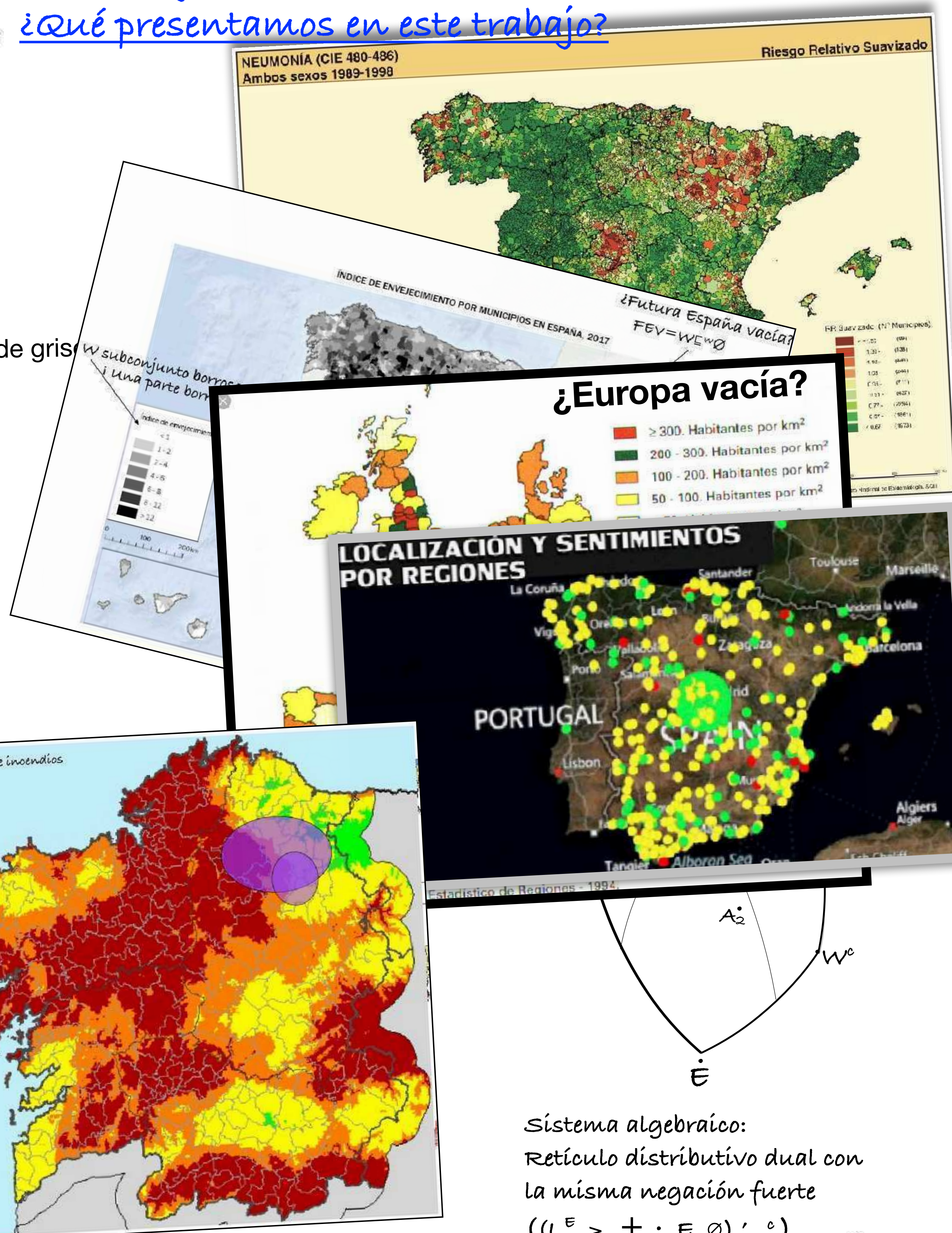


$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$



"Perspectiva"

[redacted]



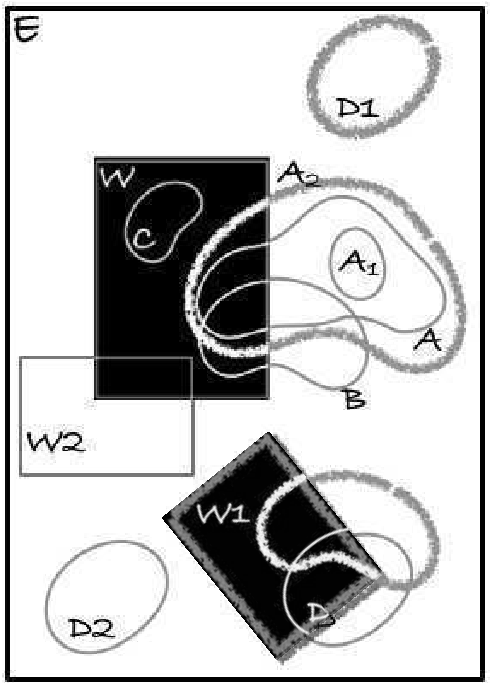
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo. (Sólo se asegura la "inclusión" y la "intersección").

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con
la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^\circ)$

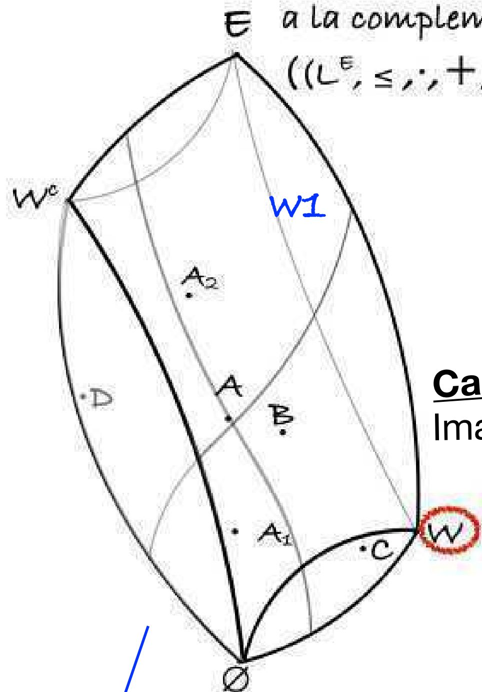
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, … Ahora todos ellos con "matices"

¿Qué presentamos en este trabajo?

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \dots,\ E \le E$

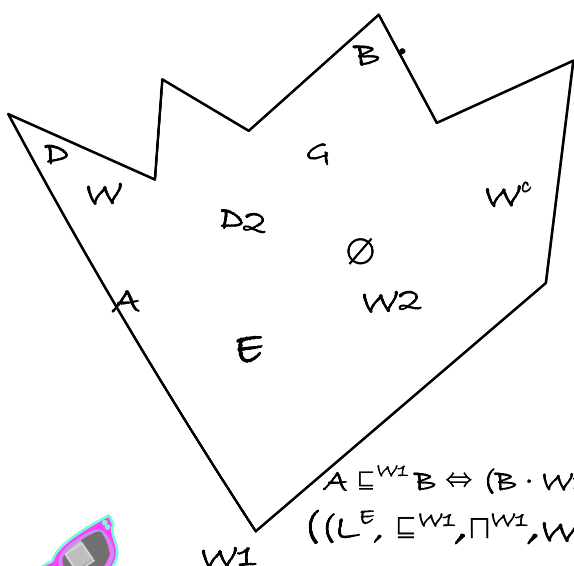


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^{c})$

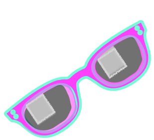


~~$\varphi_W(C) \subseteq W$~~

Caso 2:
Imagen con tonos de gris



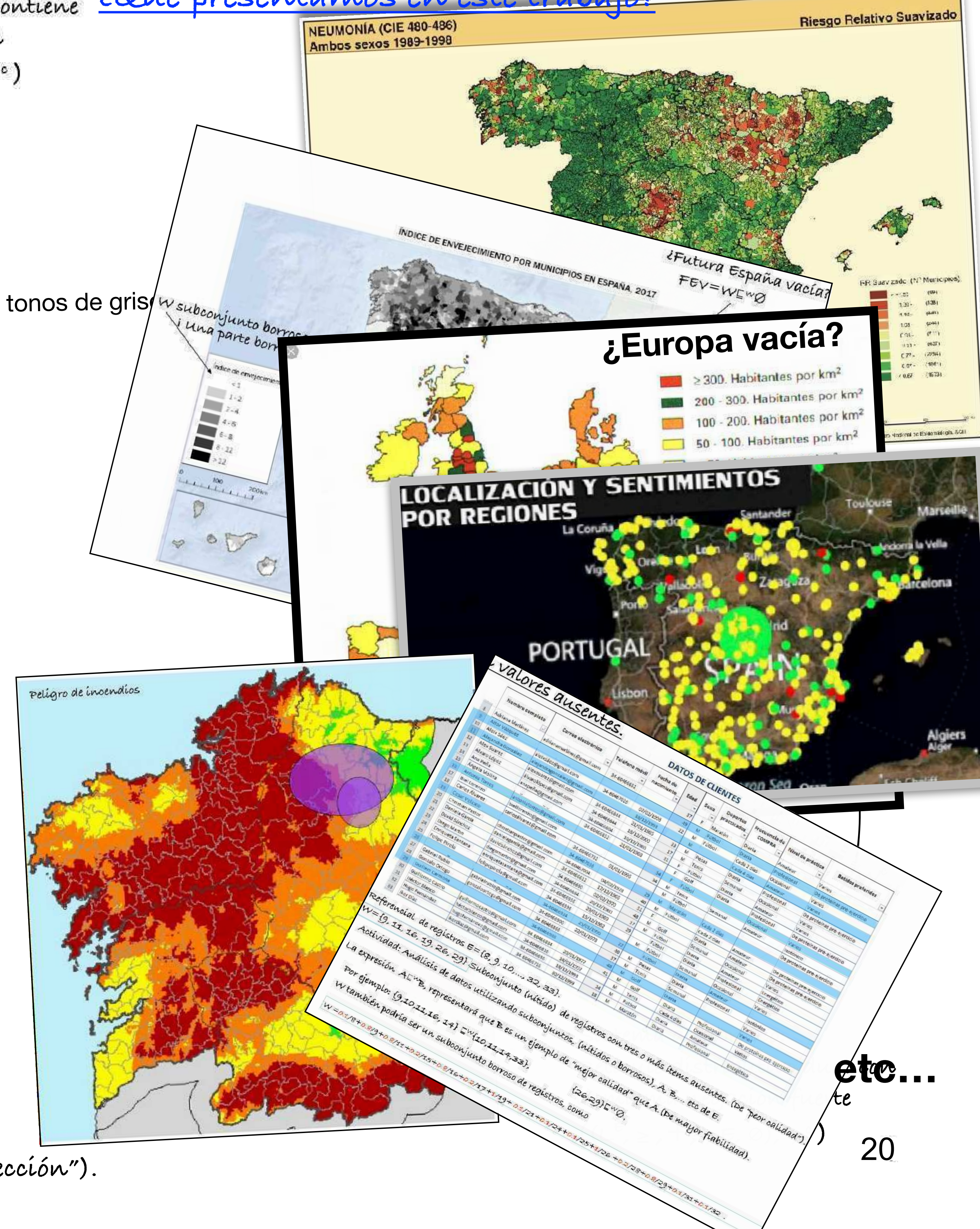
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \le A \le (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$



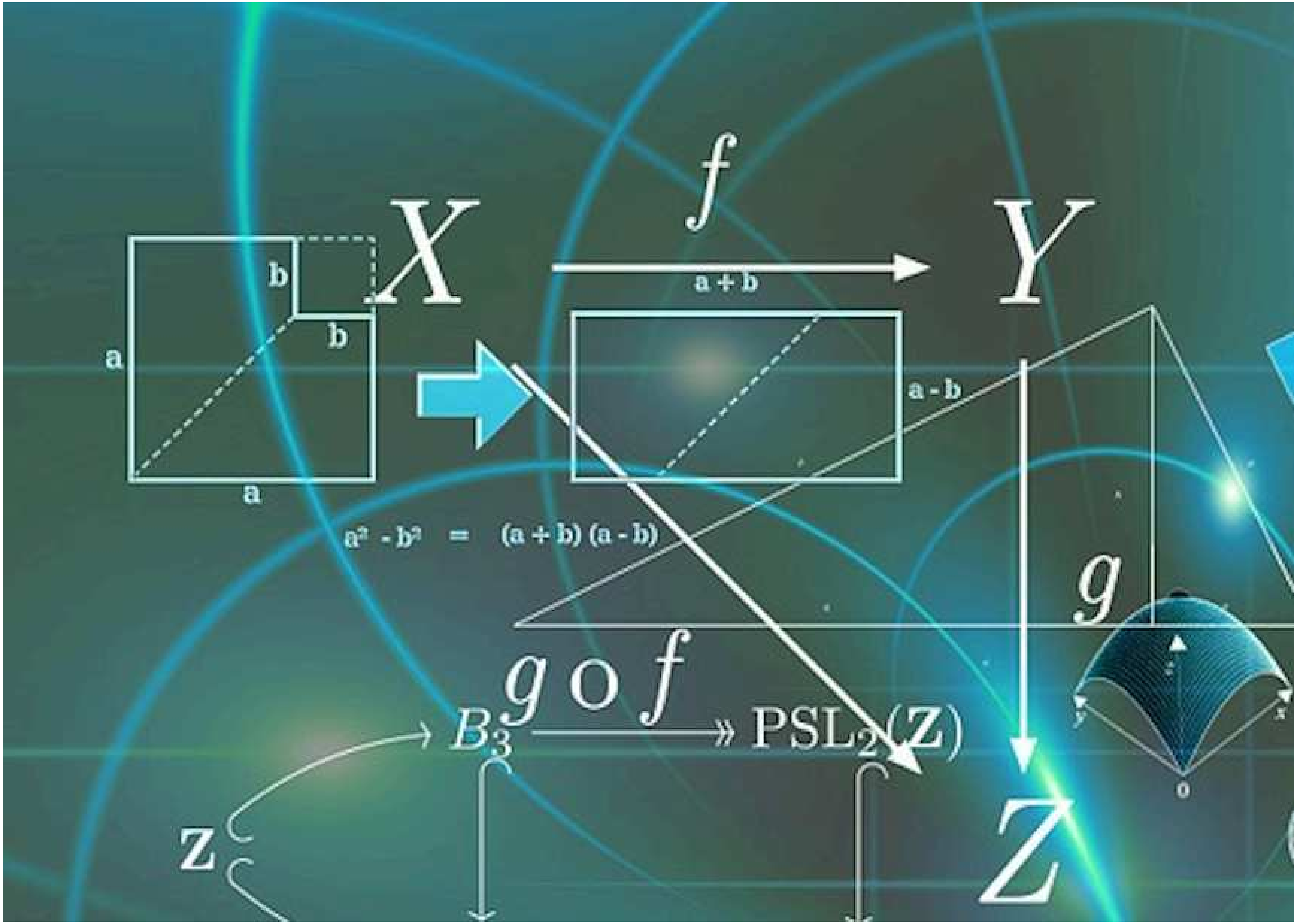
"Perspectiva"

[redacted]

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo. (Sólo se asegura la "inclusión" y la "intersección").

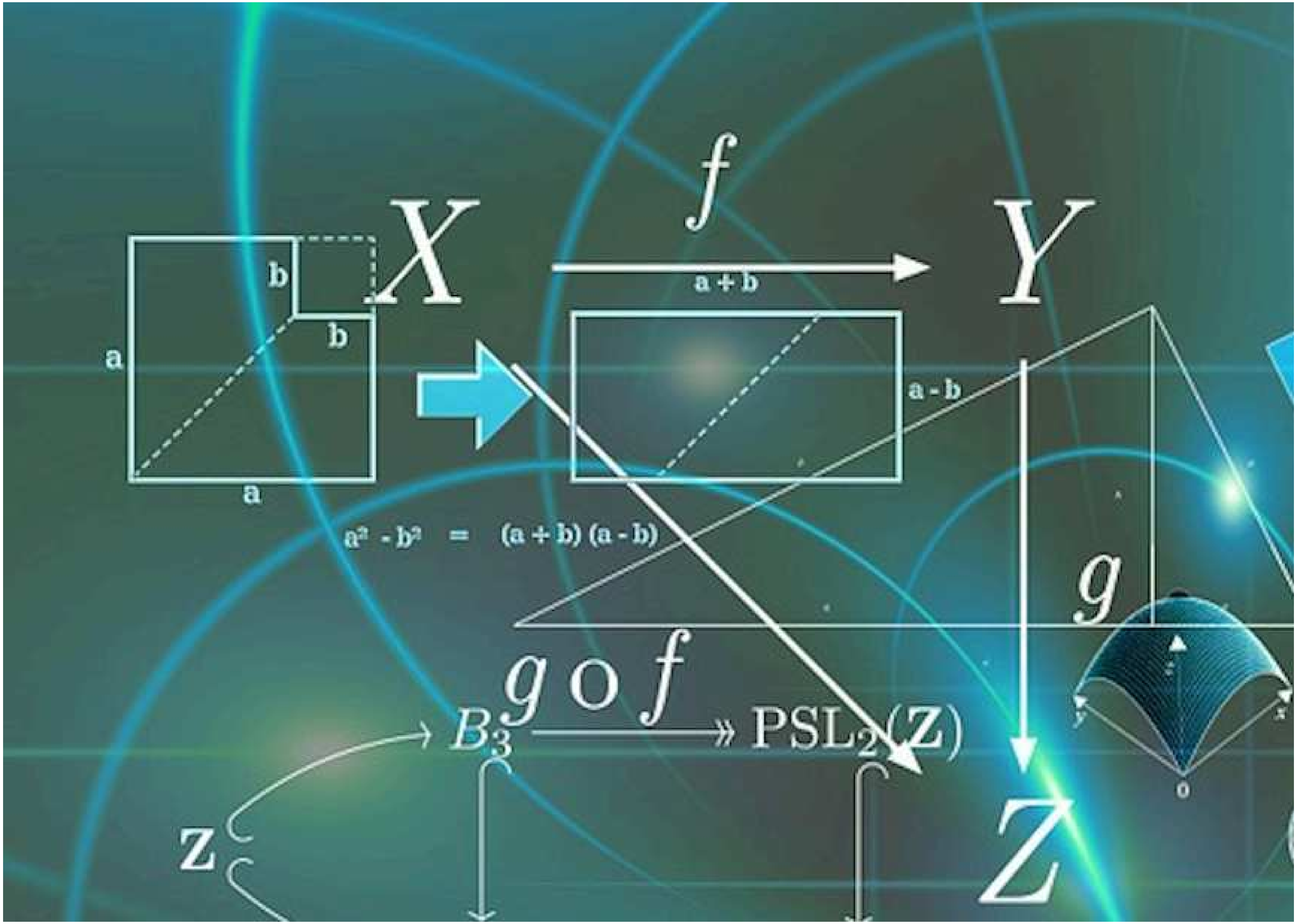


¿Qué presentamos en este trabajo?



Resumen (continuación): Sobre los morfismos.

¿Qué presentamos en este trabajo?

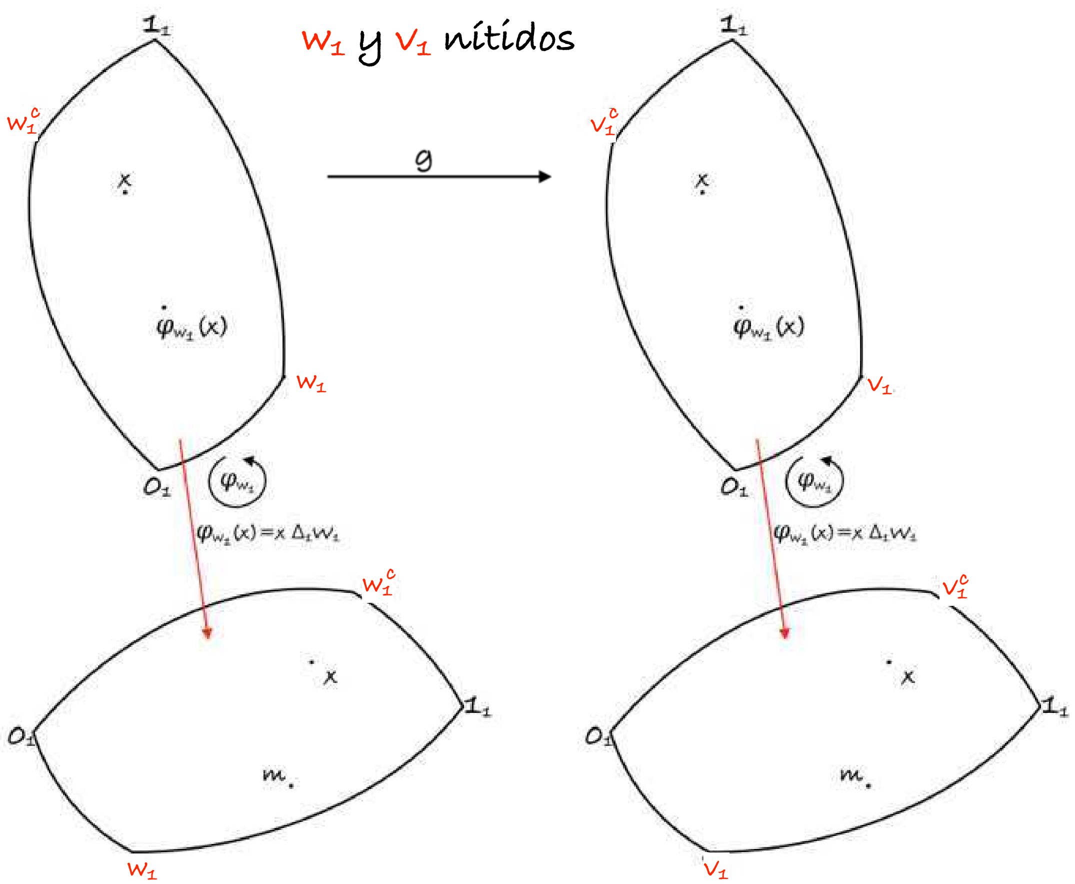


Resumen (continuación): Sobre los morfismos.

Resumen (continuación): Sobre los morfismos.

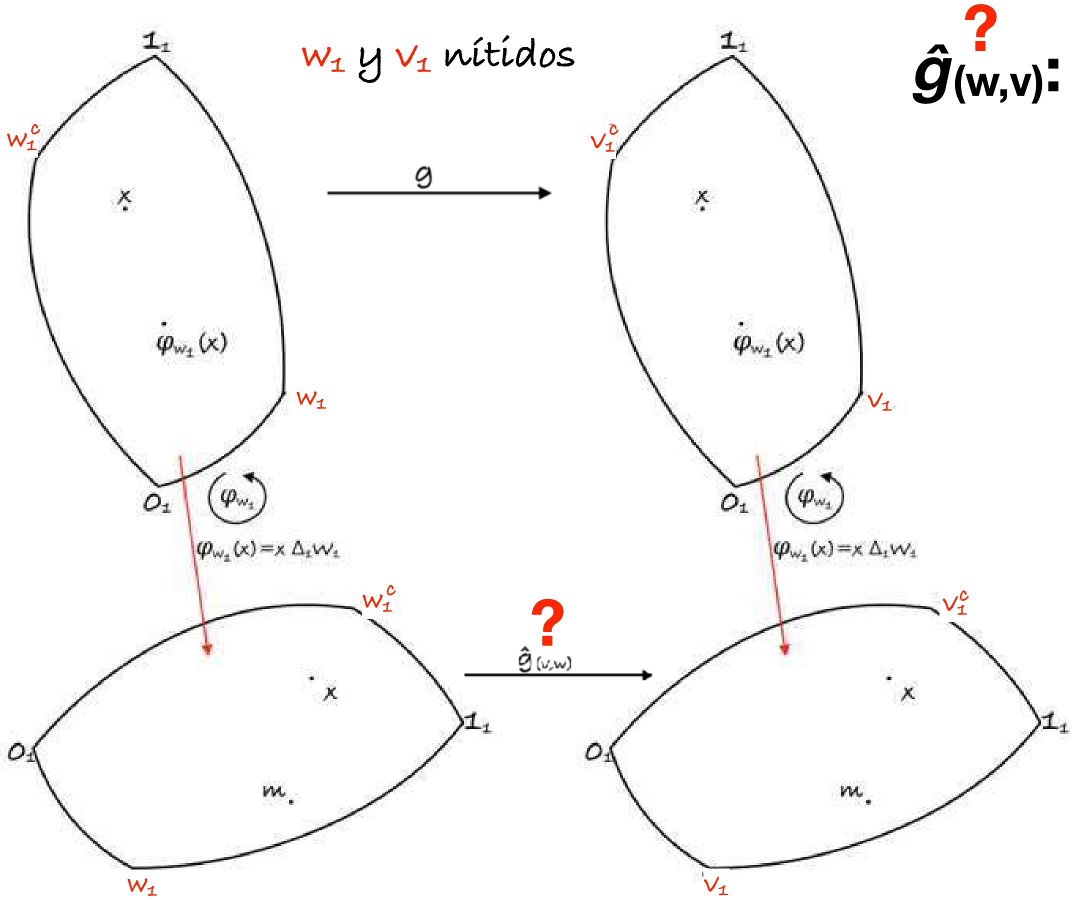
Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \rightarrow (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

¿Qué presentamos en este trabajo?



Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

¿Qué presentamos en este trabajo?

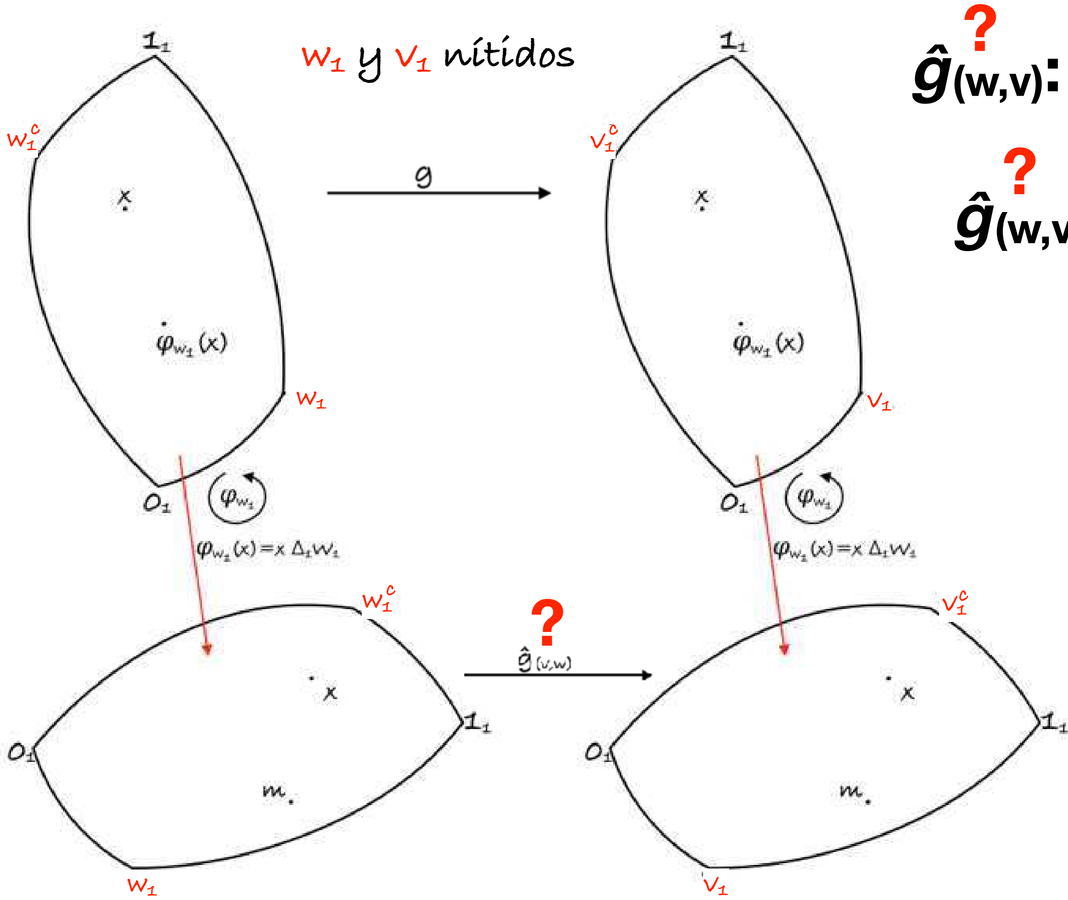


?

$\hat{g}_{(w,v)}$: $(L_1, \sqsubseteq_1^w) \to (L_2, \sqsubseteq_2^v)$

Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

¿Qué presentamos en este trabajo?

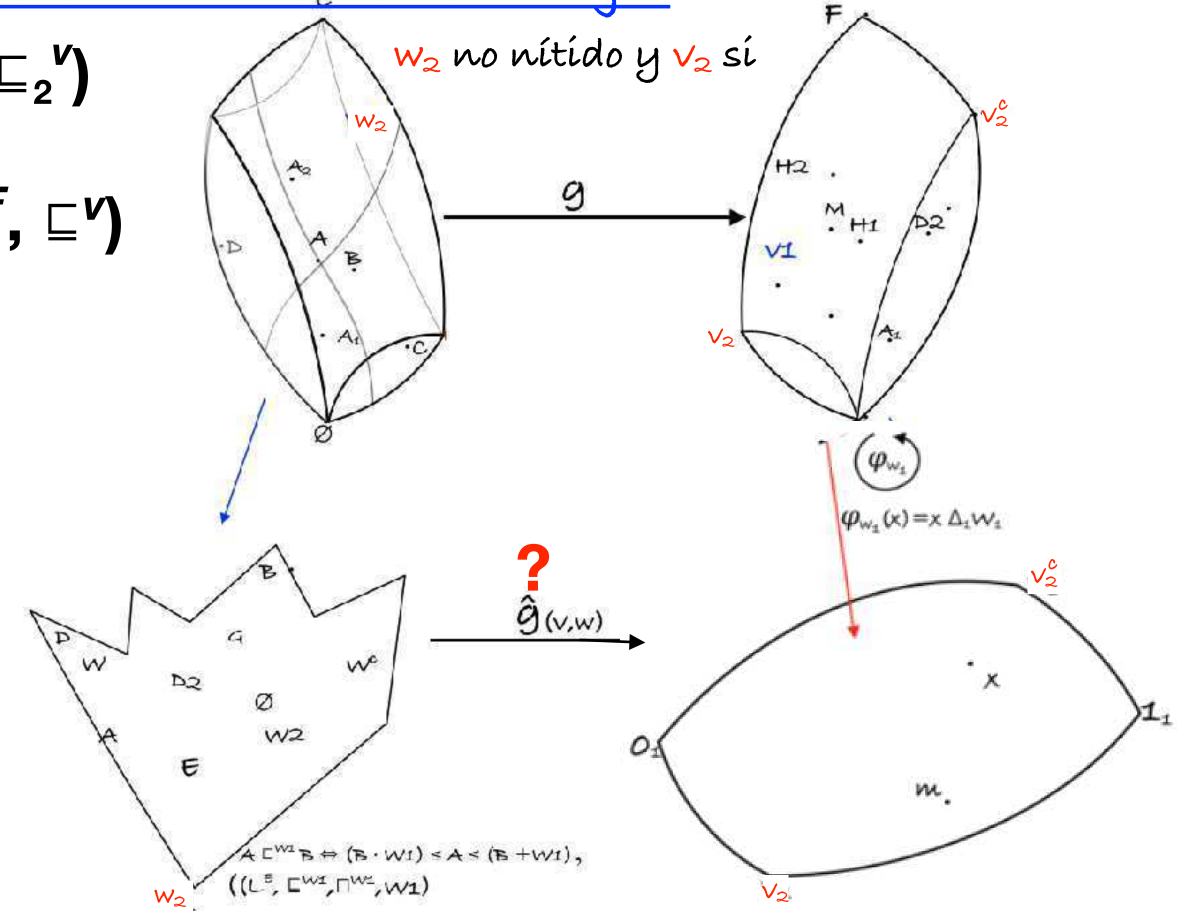


?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^{w}) \to (L_2, \sqsubseteq_2^{v})$

?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^{W}) \to (L^F, \sqsubseteq^{V})$



Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \rightarrow (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

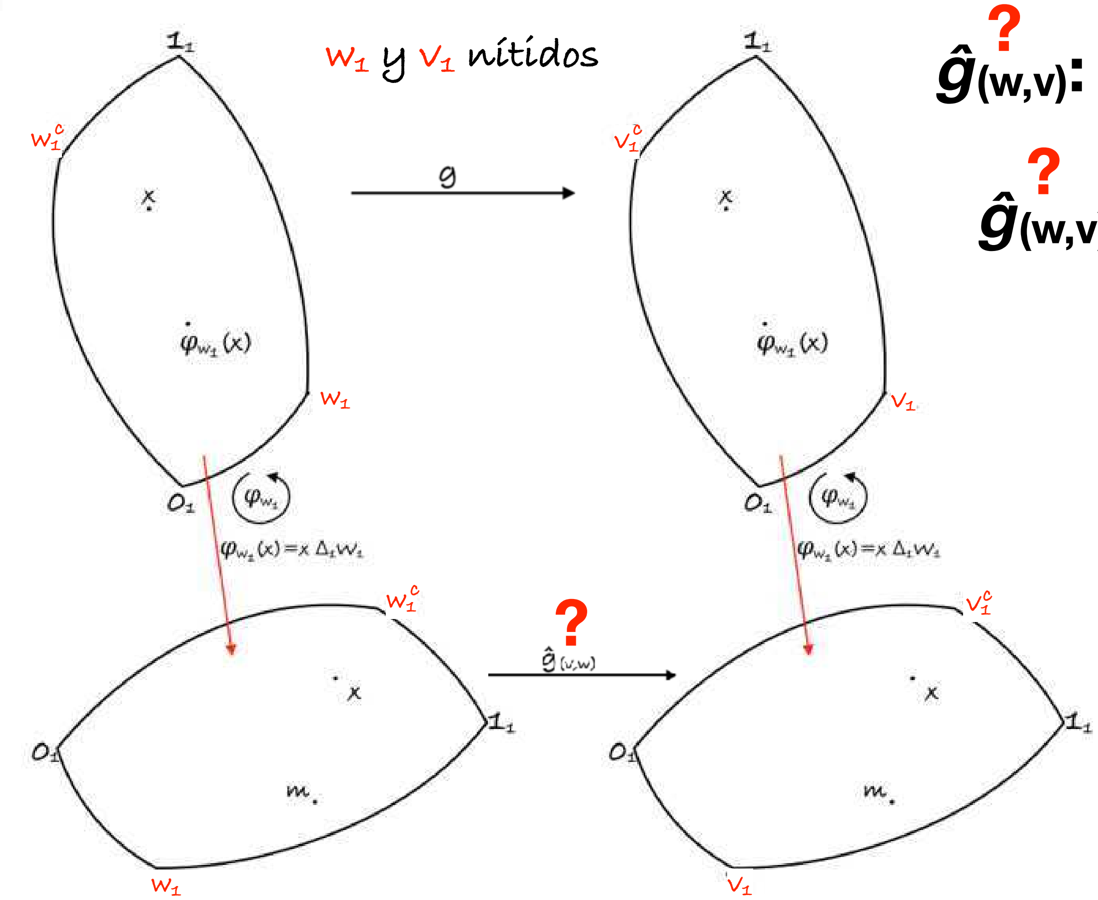
¿Qué presentamos en este trabajo?

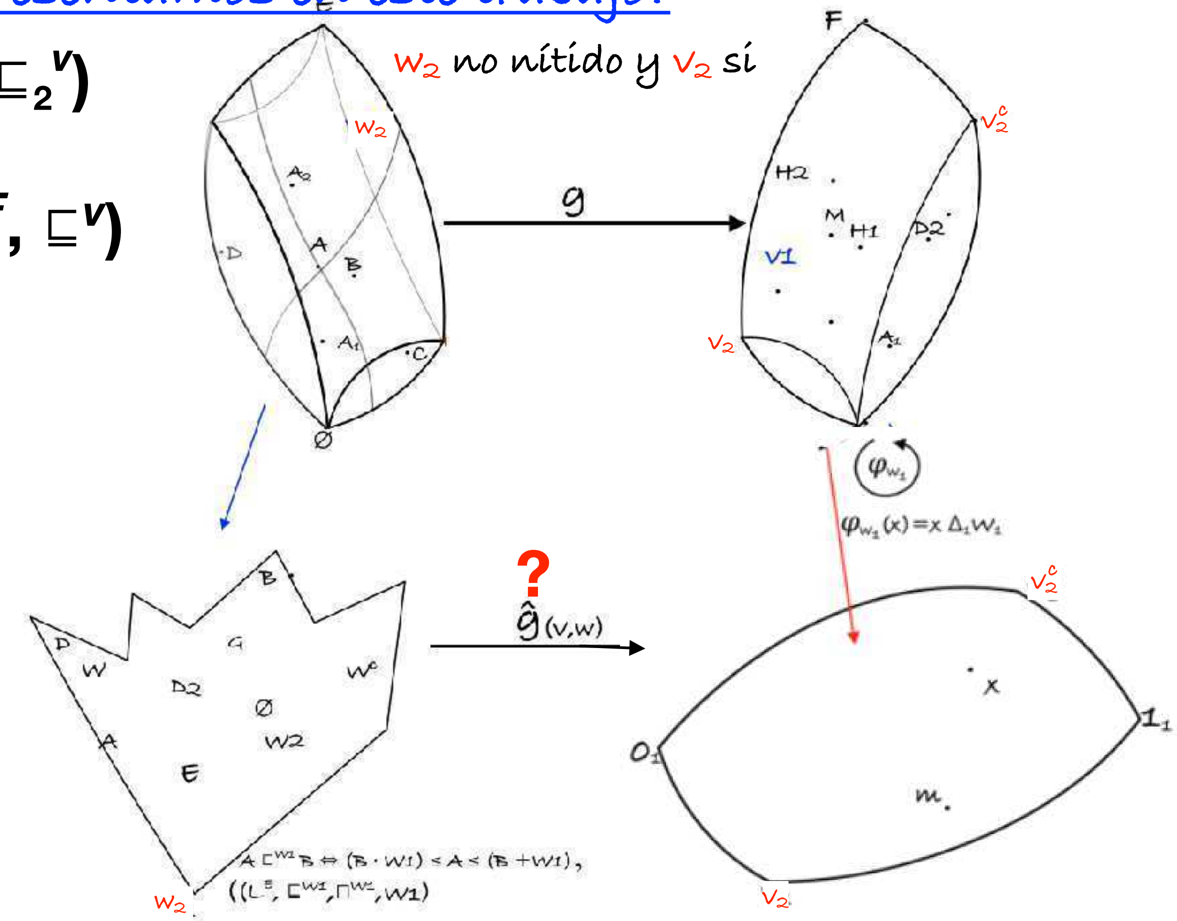
?

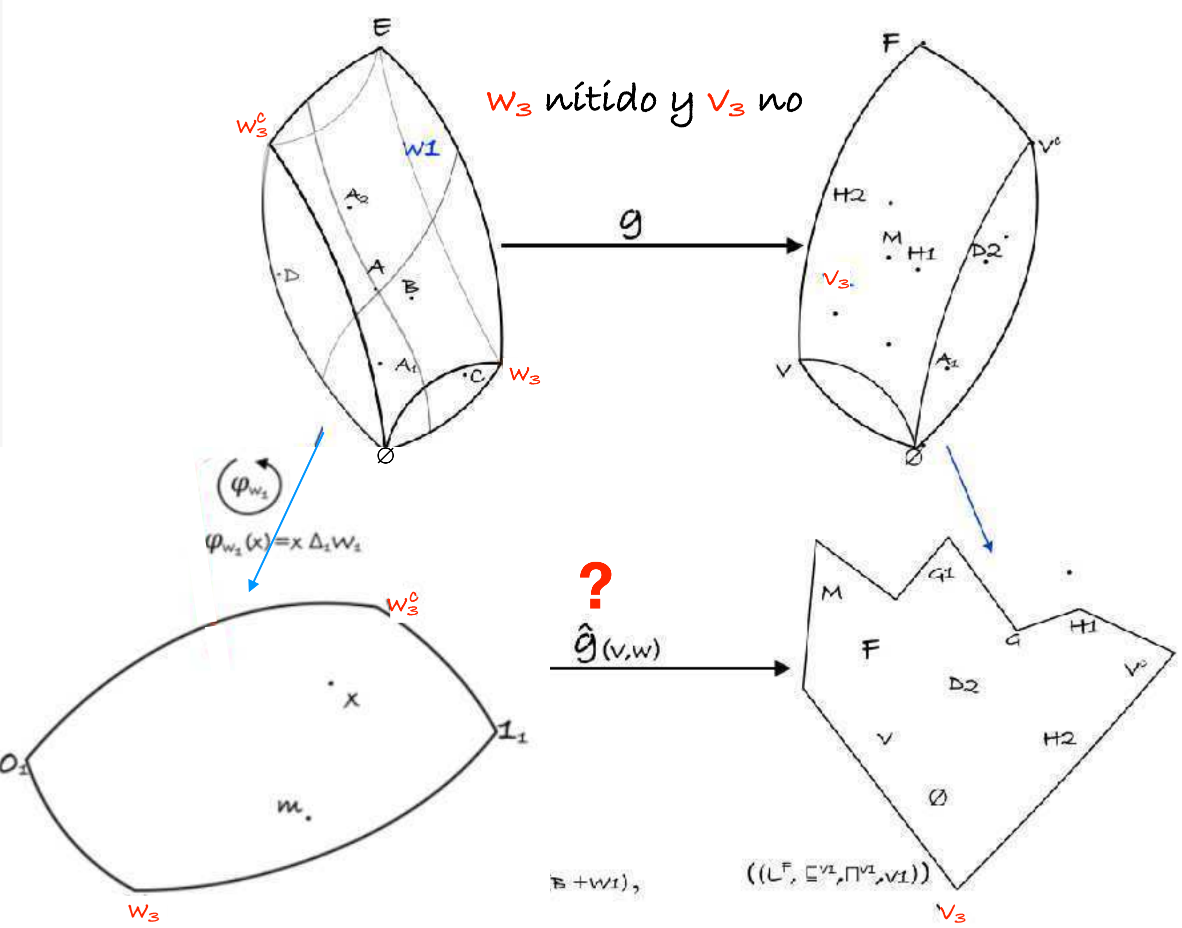
$\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^{w}) \rightarrow (L_2, \sqsubseteq_2^{v})$

?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^{W}) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^{V})$





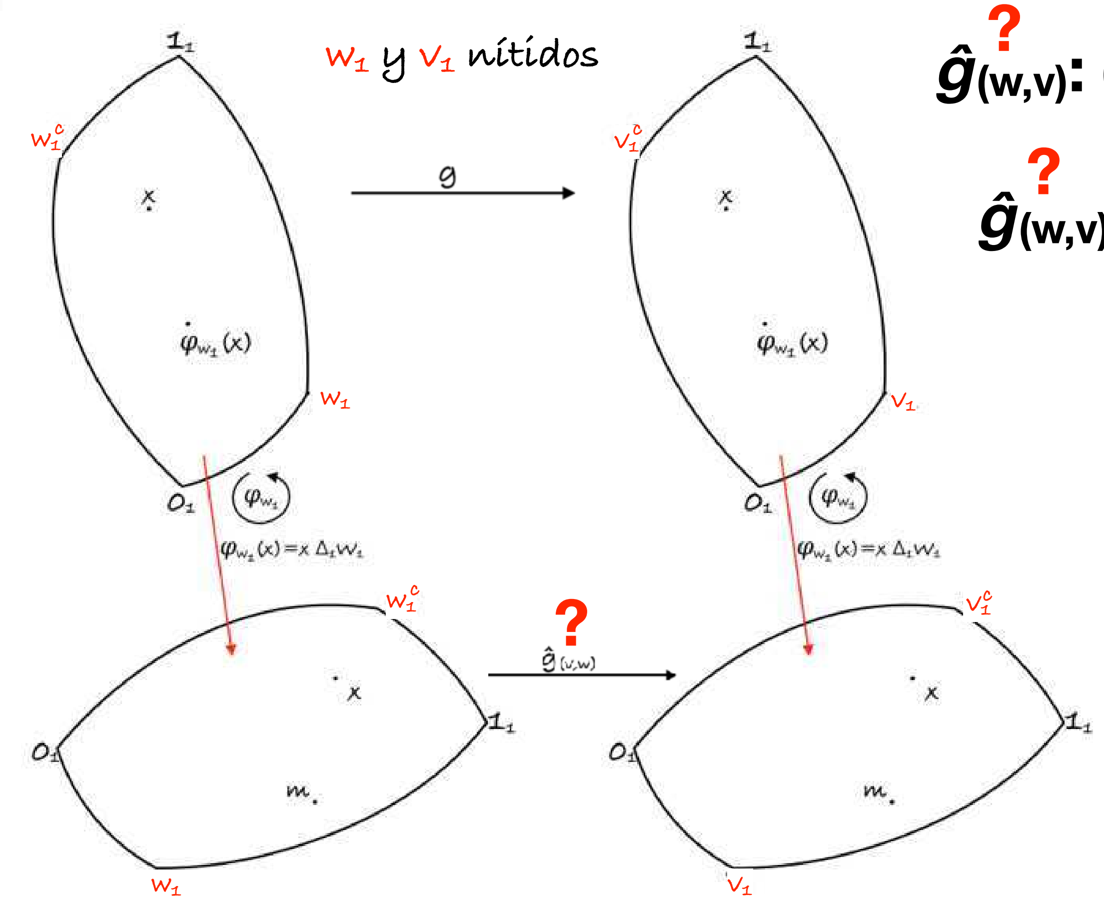


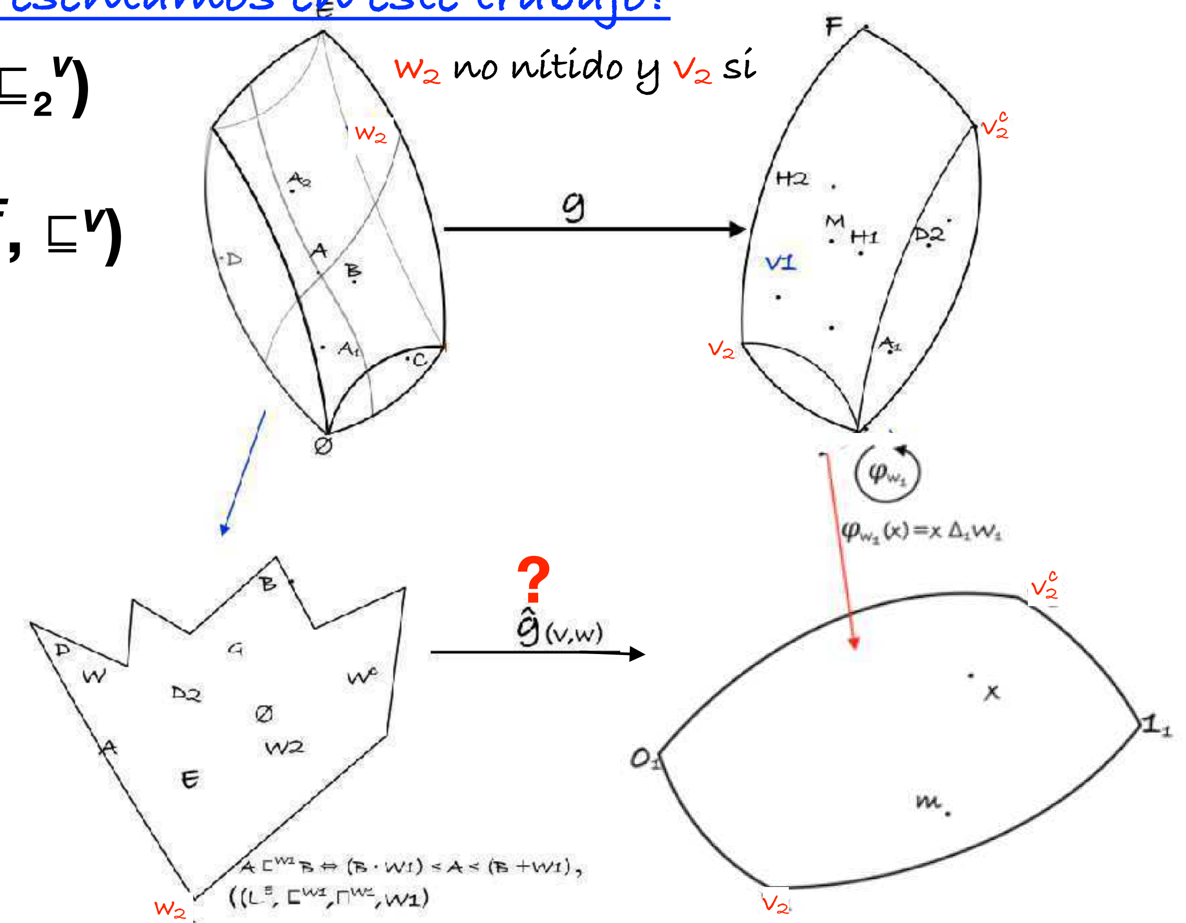
Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir “perspectivas” $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

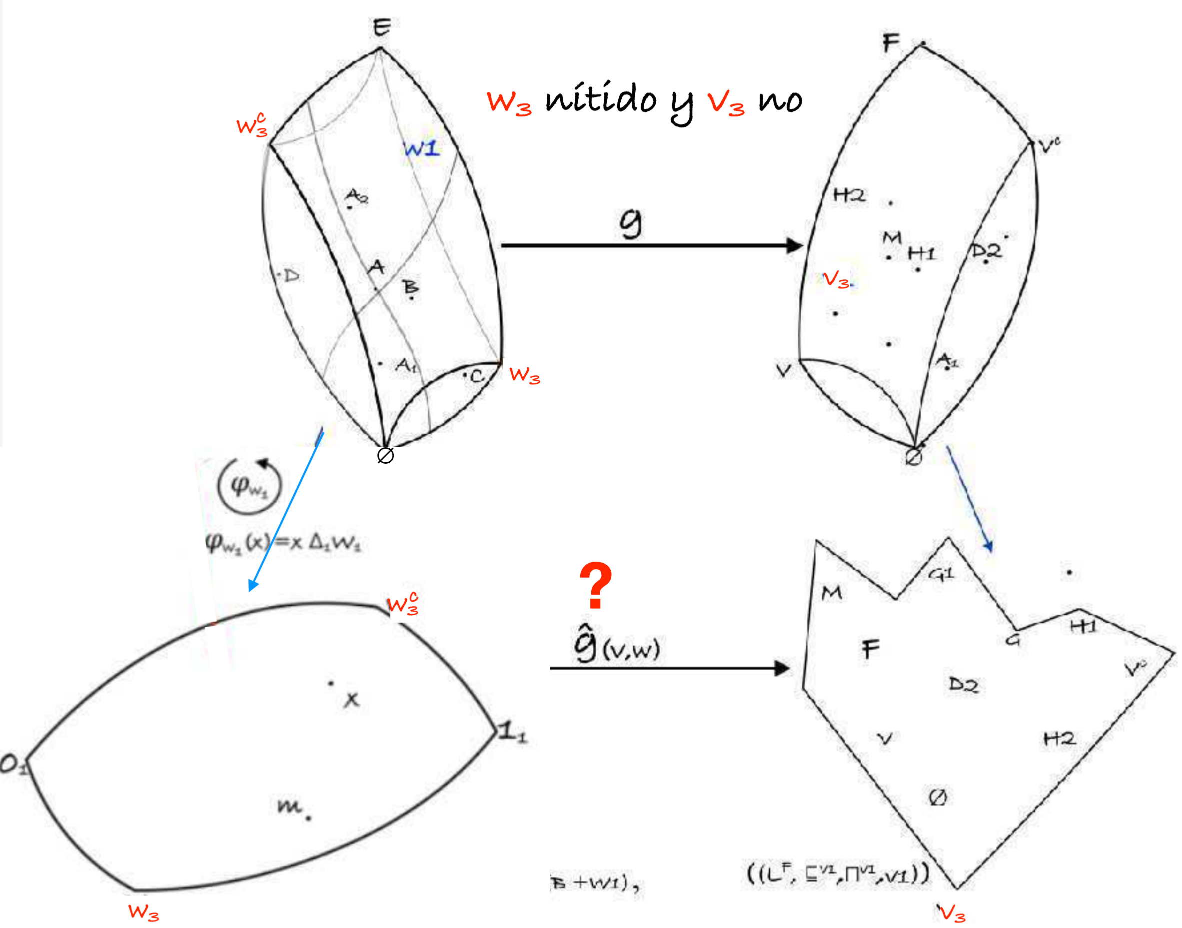
¿Qué presentamos en este trabajo?

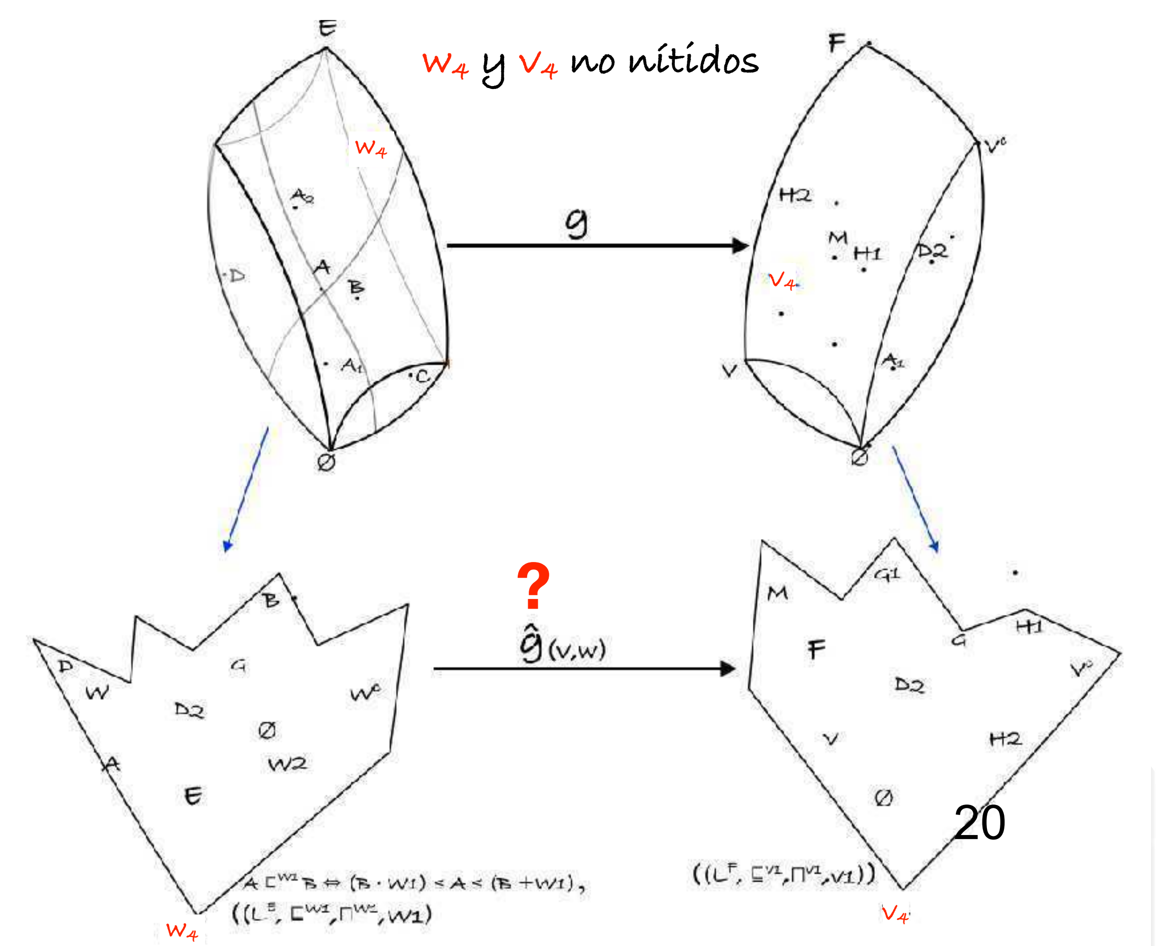
?
$\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^{w}) \to (L_2, \sqsubseteq_2^{v})$

?
$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$



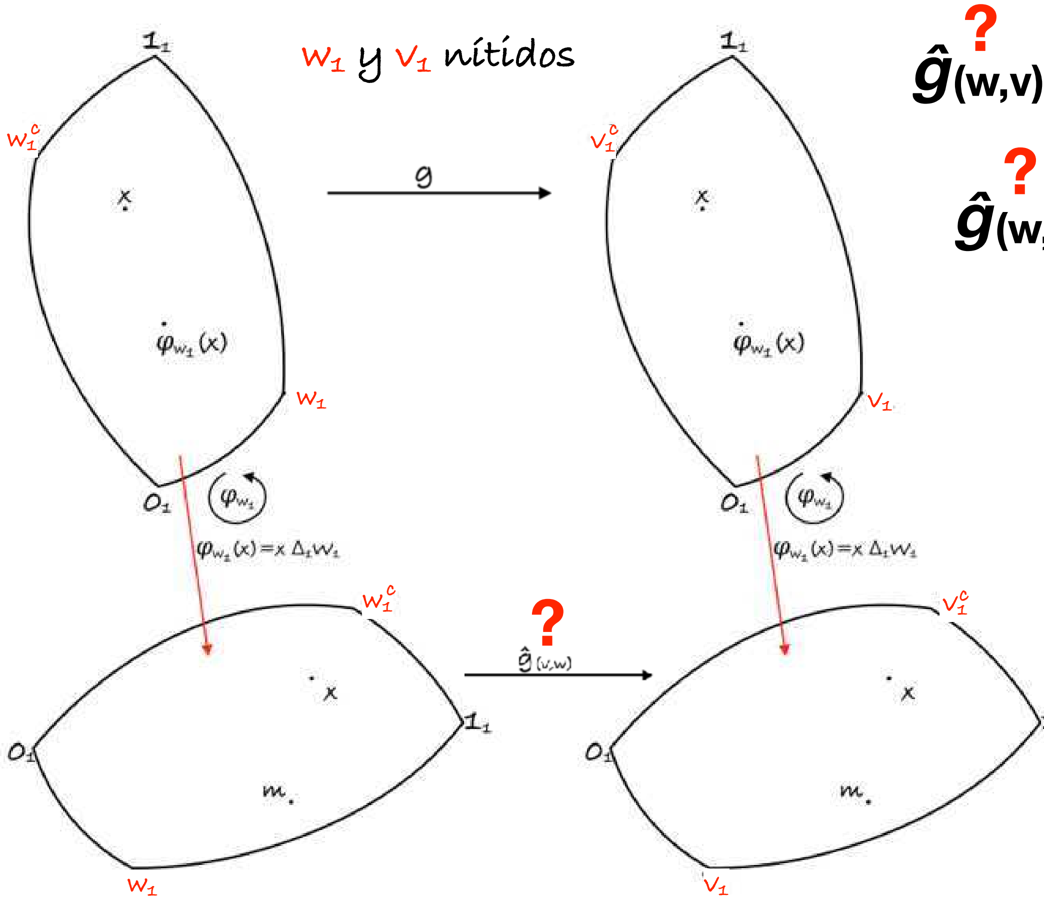






Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

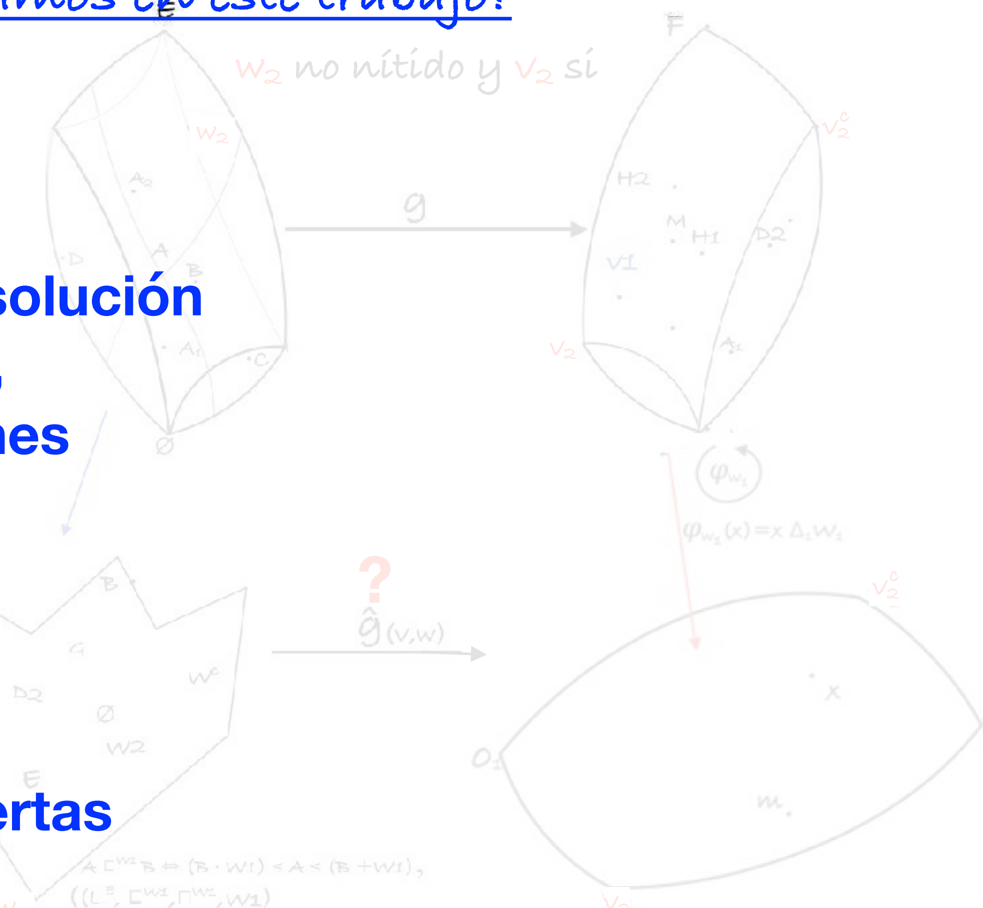
¿Qué presentamos en este trabajo?

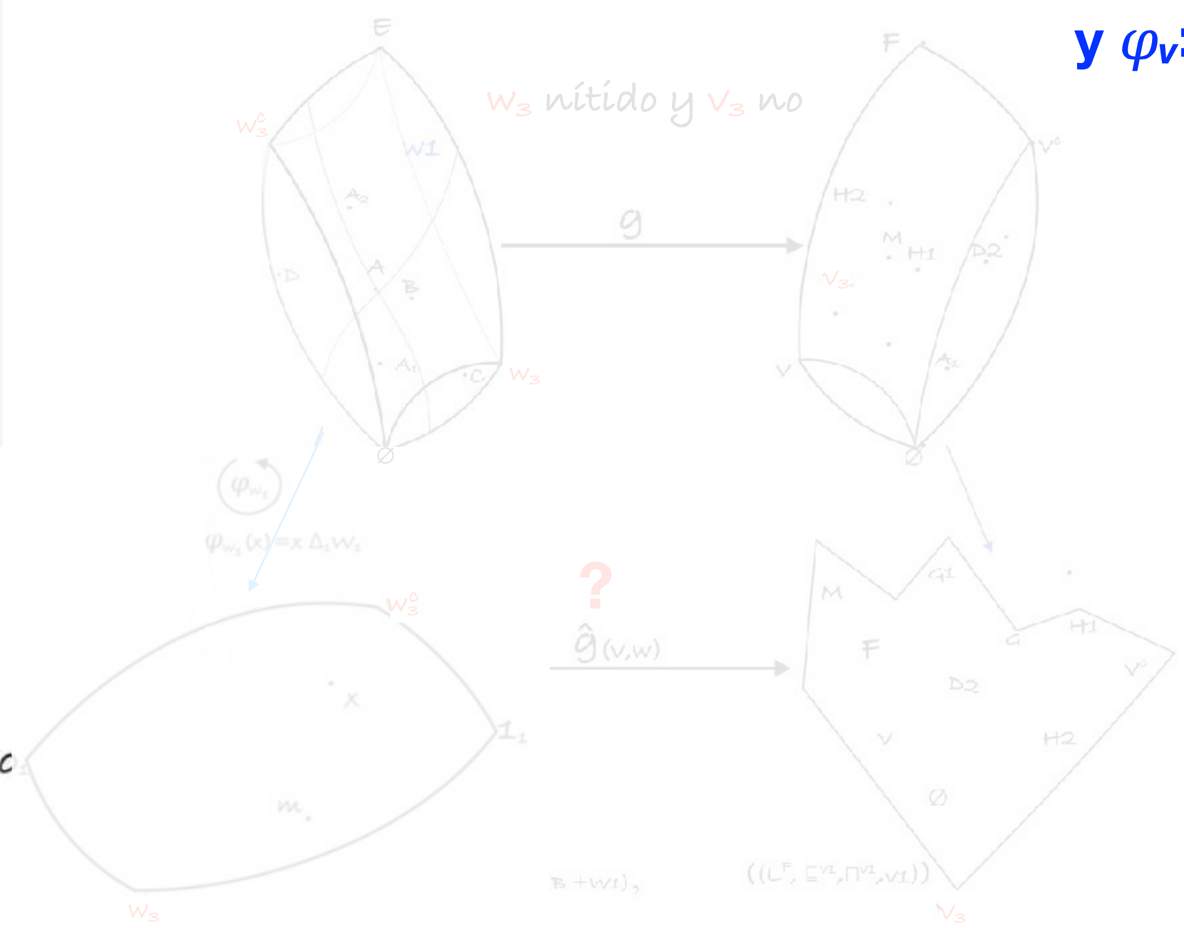


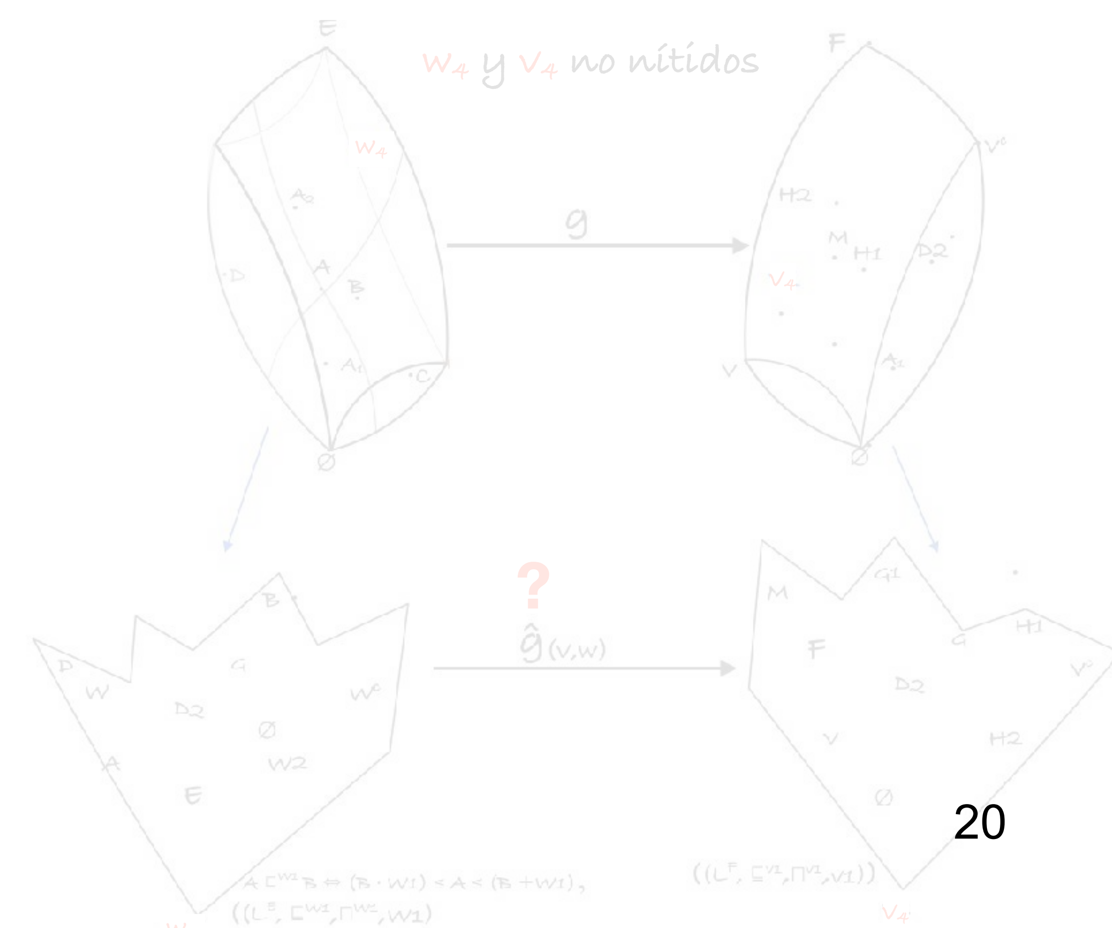
?
$\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^{w}) \to (L_2, \sqsubseteq_2^{v})$

?
$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^{W}) \to (L^F, \sqsubseteq^{V})$

(a) Propondremos una solución en el caso w y v nítidos, extendiendo las funciones g para obtener otras $\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^{W}) \to (L^F, \sqsubseteq^{V})$ fundamentadas en la composición de g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ con ciertas involuciones φ_w: $L^E \to L^E$ y φ_v: $L^F \to L^F$.







Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos $g: (L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o $g: (L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

¿Qué presentamos en este trabajo?

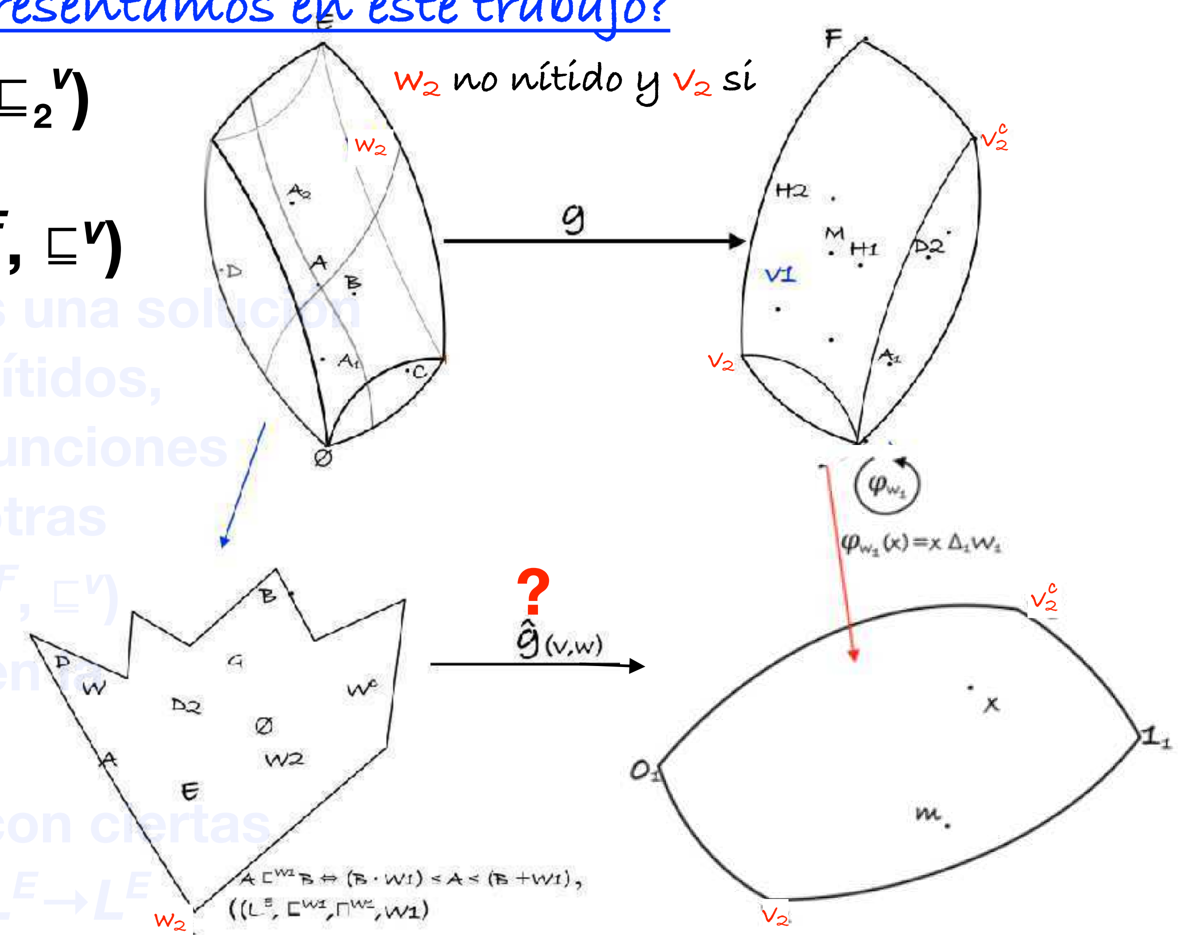
? $\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^w) \to (L_2, \sqsubseteq_2^v)$

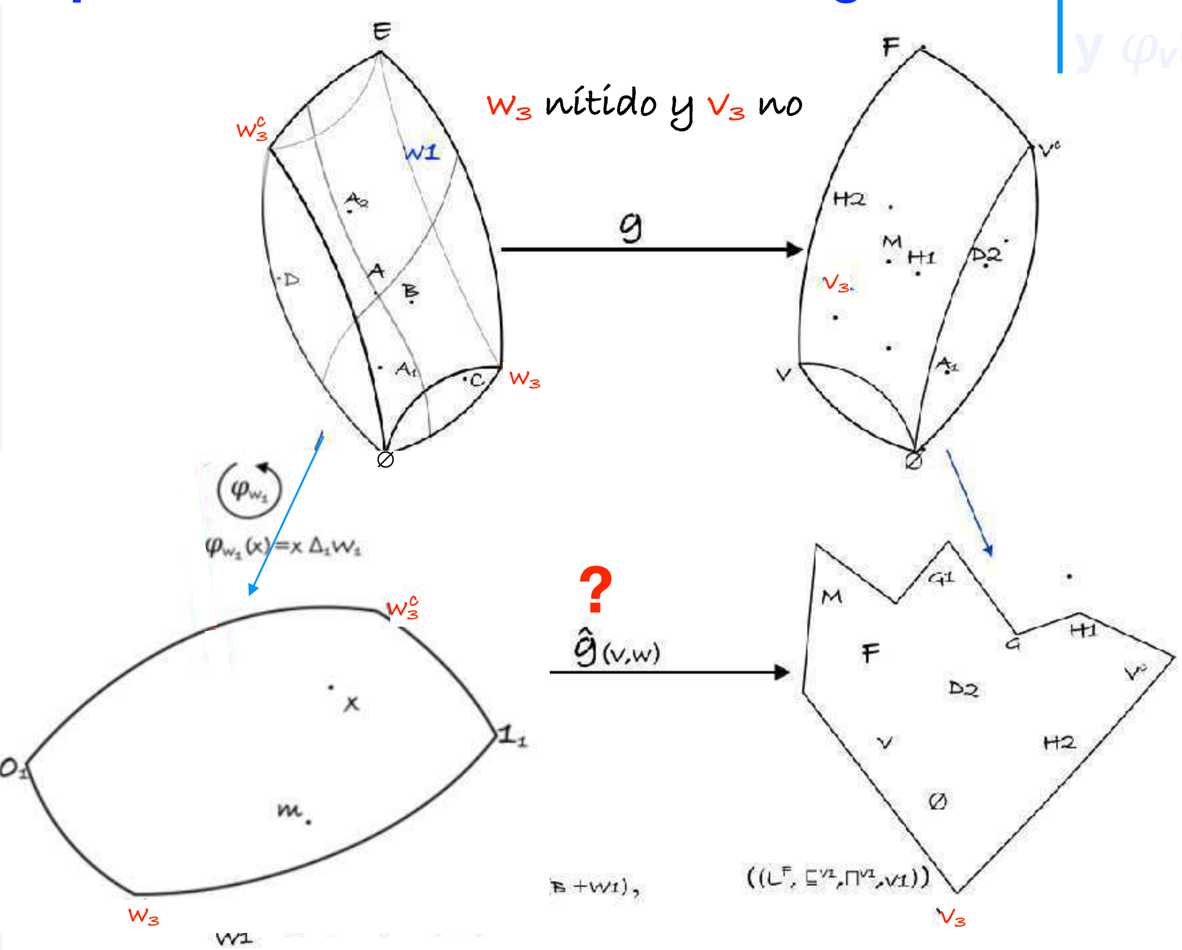
? $\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$

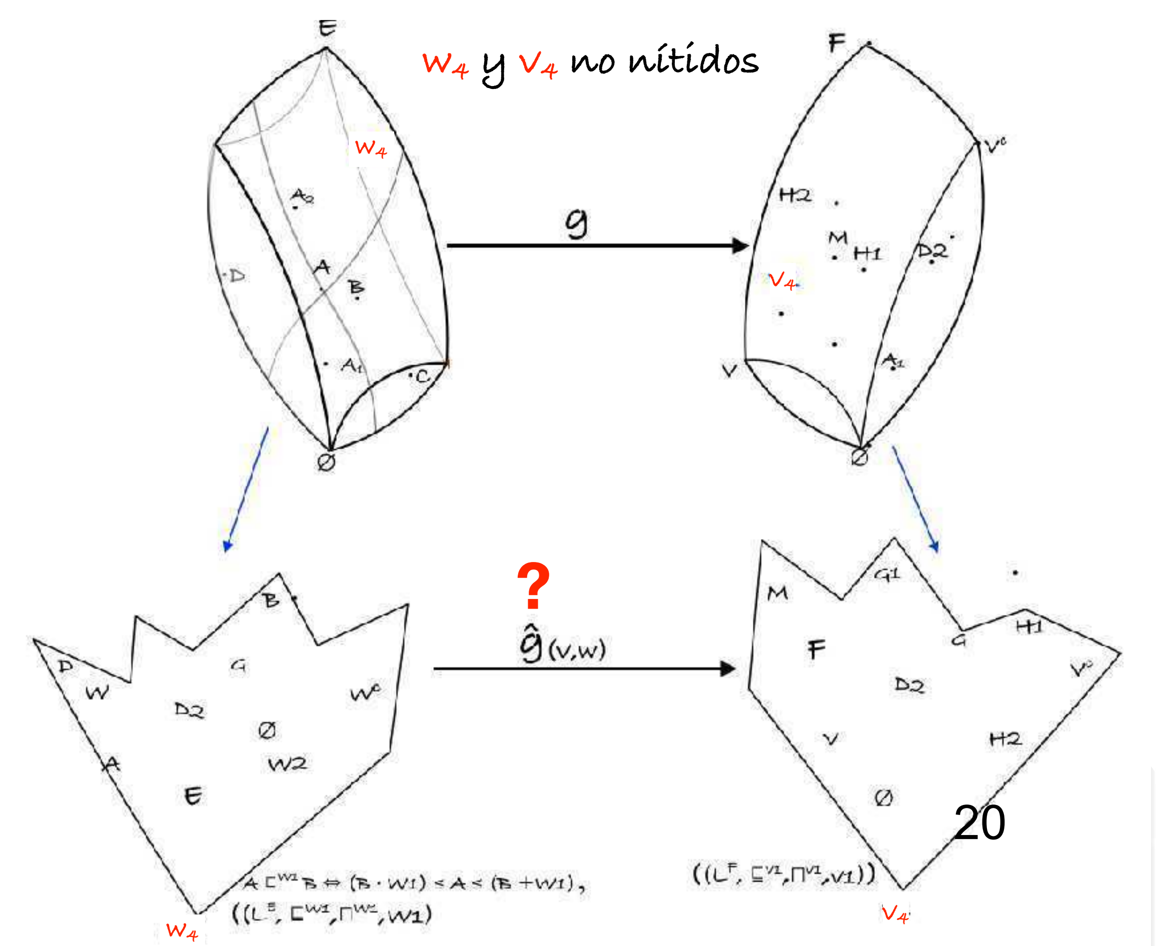
(a) Propondremos una solución en el caso **w** y **v** nítidos, extendiendo las funciones g para obtener otras $\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$ fundamentadas en la composición de $g: (L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ con ciertas involuciones $\varphi_w: L^E \to L^E$ y $\varphi_v: L^F \to L^F$.

(b) Con respecto a la extensión en los casos en los que al menos uno de los elementos **w** o **v** es no nítido, proponemos una solución parcial en un contexto relacionado con subconjuntos borrosos:

- En retículos $(L^E, \leq)$ de aplicaciones A de E en una cadena L.
- Finalmente, expondremos otras ideas para la extensión en el caso general.







Objetivo: ¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ o g: $(L_1, \leq_1) \to (L_2, \leq_2)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$ o $(w,v) \in L_1 \times L_2$?

¿Qué presentamos en este trabajo?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L_1, \sqsubseteq_1^w) \to (L_2, \sqsubseteq_2^v)$

$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$

(b) Con respecto a la extensión en los casos en los que al menos uno de los elementos w o v es no nítido, proponemos una solución parcial en un contexto relacionado con subconjuntos borrosos:

- **En retículos (L^E, ≤) de aplicaciones A de E en una cadena L.**
- **Finalmente, expondremos otras ideas para la extensión en el caso general.**

(a) Propondremos una solución en el caso w y v nítidos, extendiendo las funciones g para obtener otras $\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$ fundamentadas en la composición de g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ con ciertas involuciones $\varphi_w: L^E \to L^E$ y $\varphi_v: L^F \to L^F$.

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{w} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{w} B$, intersecciones $A \sqcap^{w} B$ y uniones $A \sqcup^{w} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción

Motivación (I):

Sobre procesos de obtención de imágenes digitales en tonos de grises de un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la introducción, en el análisis del retículo de las mismas, de "perspectivas" y de nuevas ordenaciones..

Motivación (II):

Sobre interpretaciones en distintos contextos del término "vacío" y sobre la introducción de "contenidos propios" del conjunto vacío: $A \sqsubset^{W} \emptyset$, $B \sqsubset^{S} \emptyset$, ...

Motivación (III):

Sobre la introducción de "nuevas inclusiones $A \sqsubseteq^{W} B$, intersecciones $A \sqcap^{W} B$ y uniones $A \sqcup^{W} B$" entre subconjuntos nítidos o borrosos A,B,... para análisis de datos en entornos con zonas de riesgo.

Resumen

Introducción:

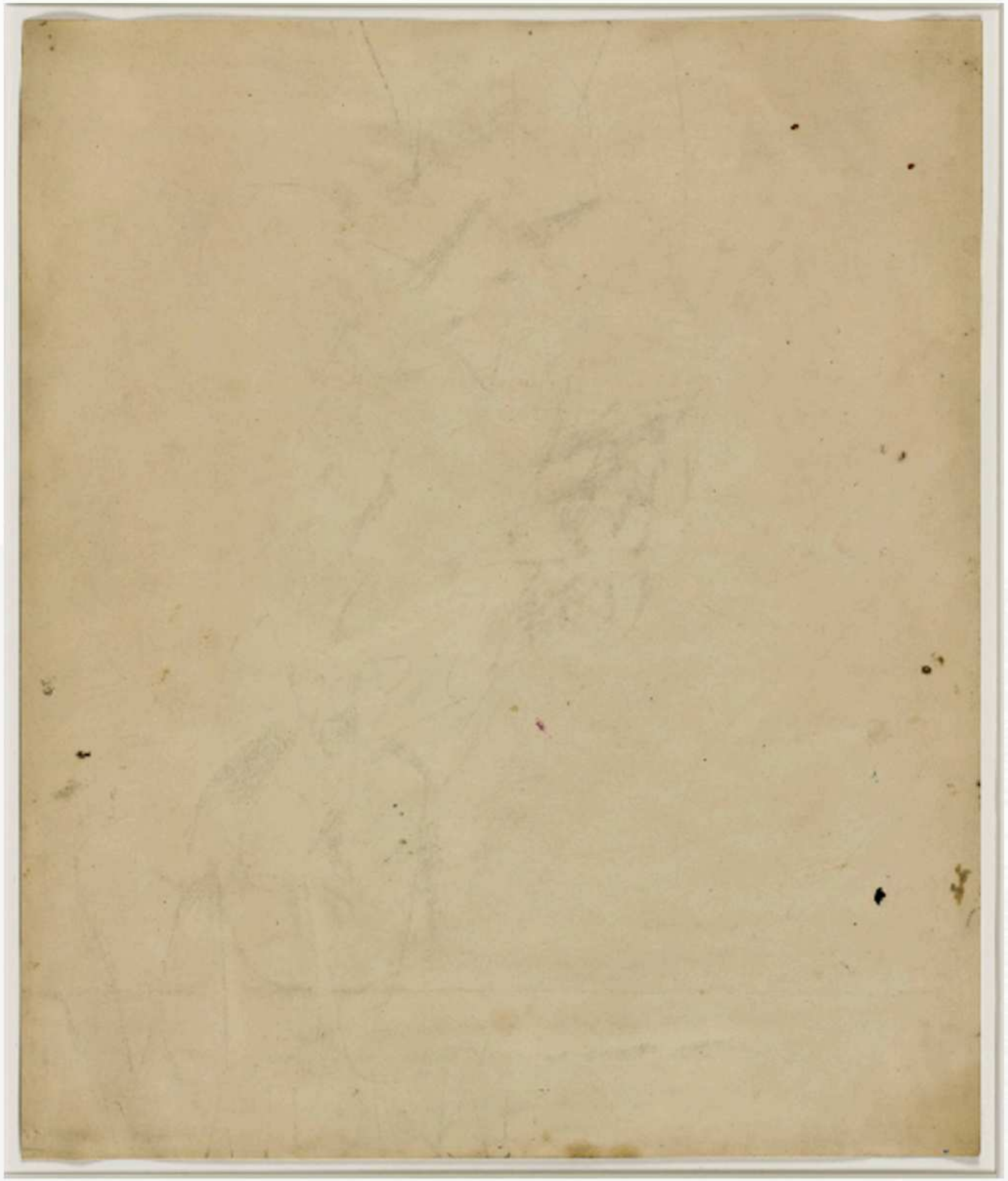
Un lienzo "vacio con contenido":

"ERASED de KOONING DRAWING"

(R. Rauschenberg 1953)

Un lienzo “vacio con contenido”:
“ERASED de KOONING DRAWING”
(R. Rauschenberg 1953)

Lienzo vacío (∅)

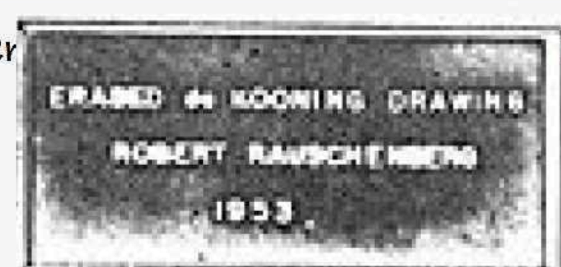


R. Rauschenberg "ERASED de KOONING DRAWING" 1953
(Colección SFMOMA)

Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra "Erased de Kooning drawing" de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

Lienzo vacío (∅)

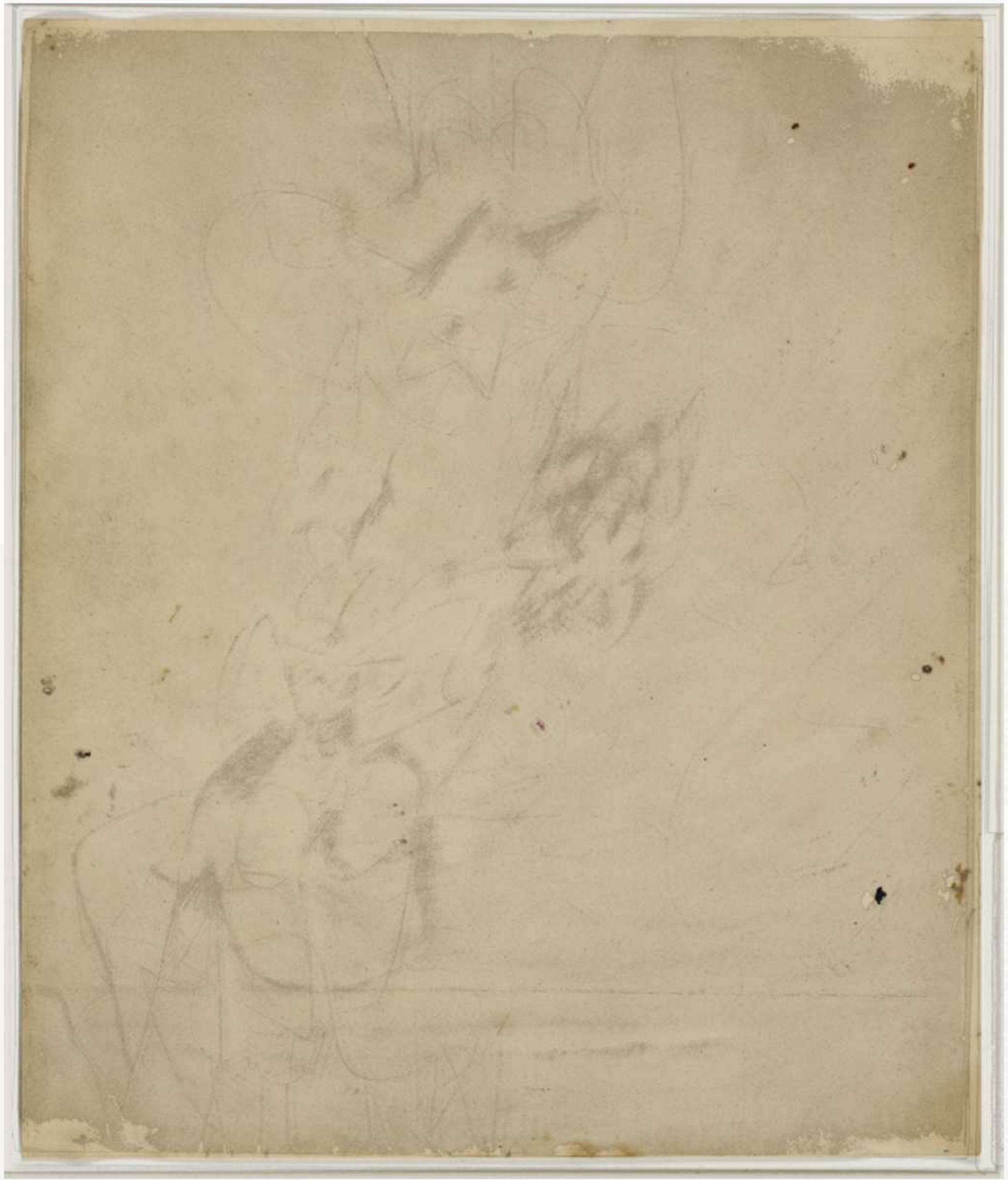
R. Rauschenber



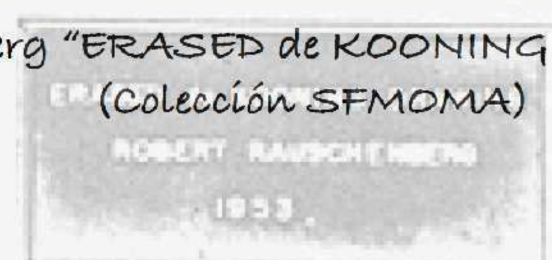
DRAWING” 1953

Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra “Erased de Kooning drawing” de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

Lienzo vacio (∅)

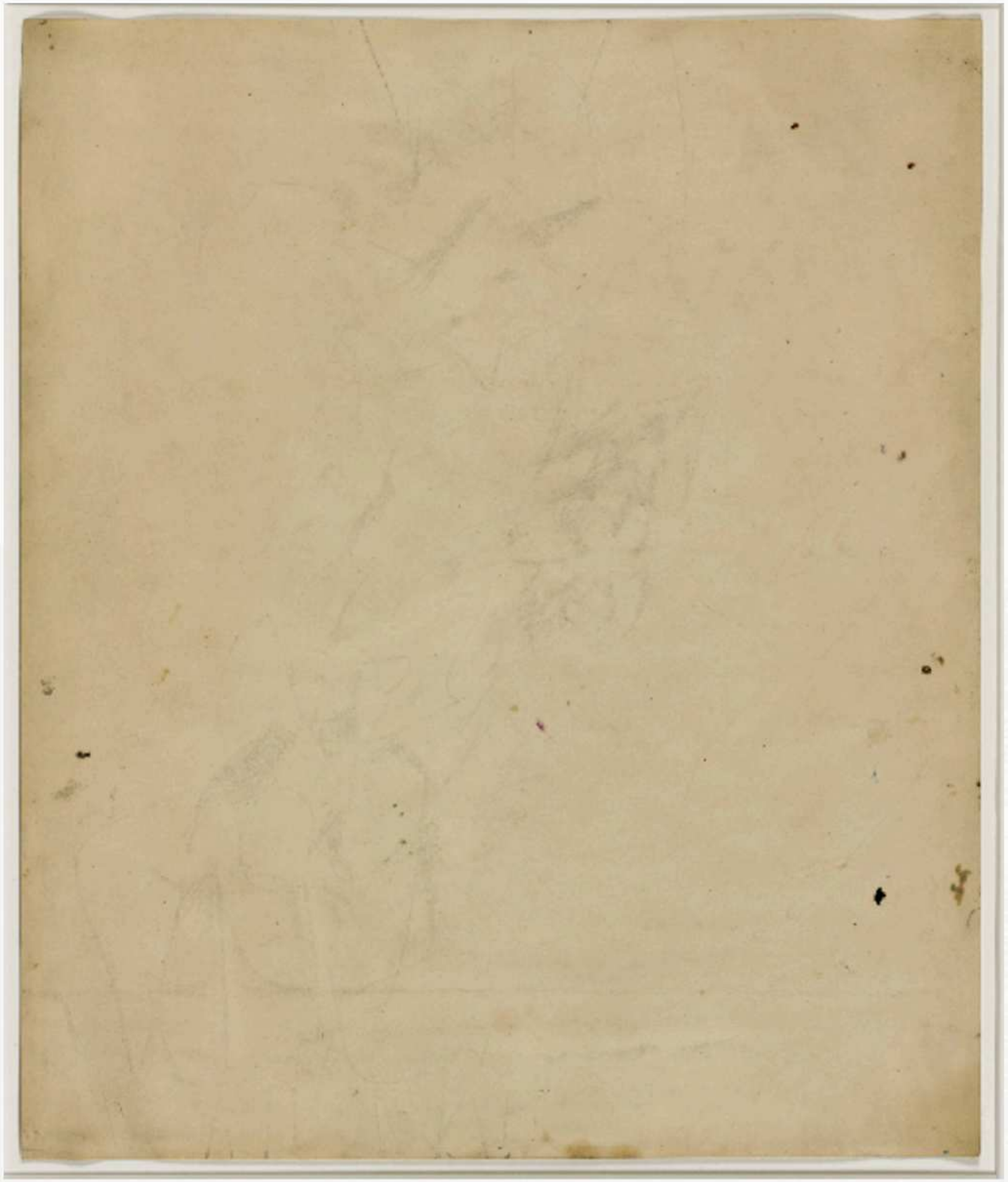


R. Rauschenberg "ERASED de KOONING DRAWING" 1953
(Colección SFMOMA)



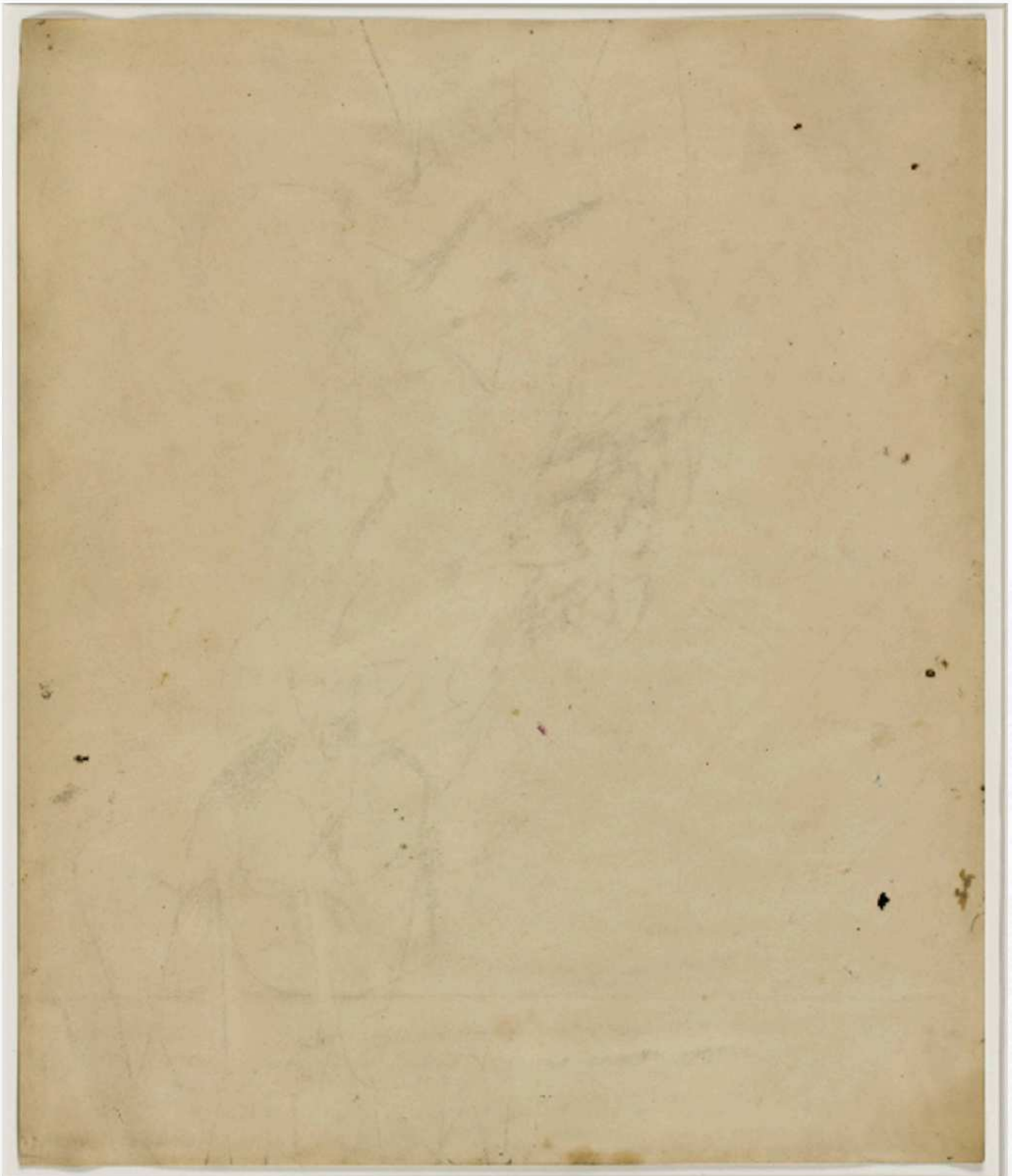
Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra "Erased de Kooning drawing" de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

~~Lienzo vacío~~ (∅) ¡Con contenido!:



R. Rauschenberg "ERASED de KOONING DRAWING" 1953
(Colección SFMOMA)

Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra "Erased de Kooning drawing" de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

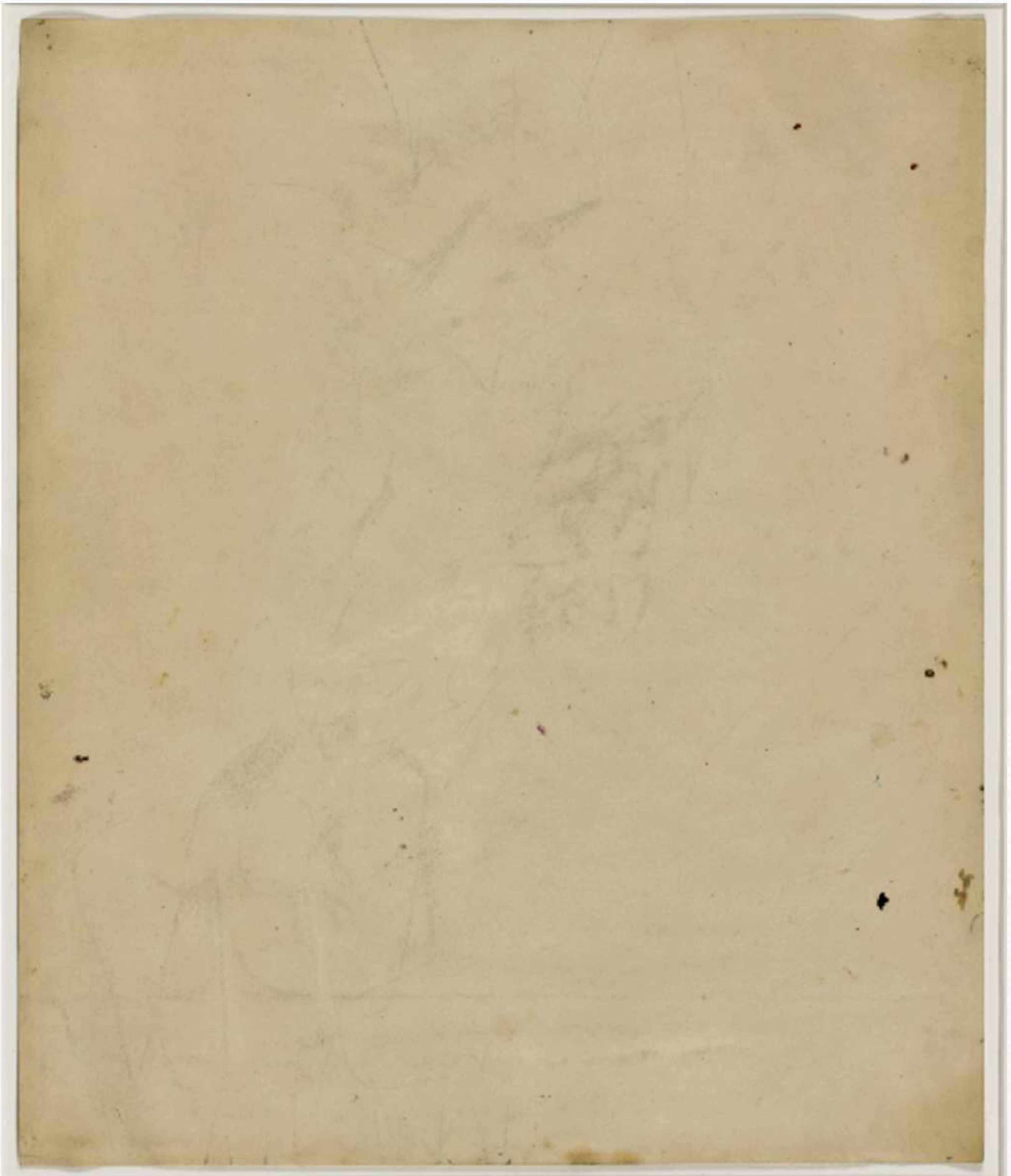


R. Rauschenberg "ERASED de KOONING DRAWING" 1953
(Colección SFMOMA)

Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra "Erased de Kooning drawing" de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

~~Lienzo vacío~~ (∅)

¿Un tipo de "subconjunto" propio de ∅? **K**⊏∅!



R. Rauschenberg "ERASED de KOONING DRAWING" 1953
(Colección SFMOMA)

Exploración por infrarrojos, mejorada digitalmente, de la obra "Erased de Kooning drawing" de Robert Rauschenberg (1953), que muestra rastros del dibujo original de Willem de Kooning

Con el propósito de motivar la introducción del concepto de "contenidos propios del conjunto vacío $\emptyset$", proponemos la siguiente:

Con el propósito de motivar la introducción del concepto de "contenidos propios del conjunto vacío $\emptyset$", proponemos la siguiente:

Interpretación, (en un retículo $(L^E,\leq)$ de imágenes digitalizadas de $\mathbb{Z}^2$), de los procesos de obtención del dibujo de "de Kooning" y de obtención de la obra de "Rauschenberg", (mediante el "borrado" del anterior).

un referencial $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ y una cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$

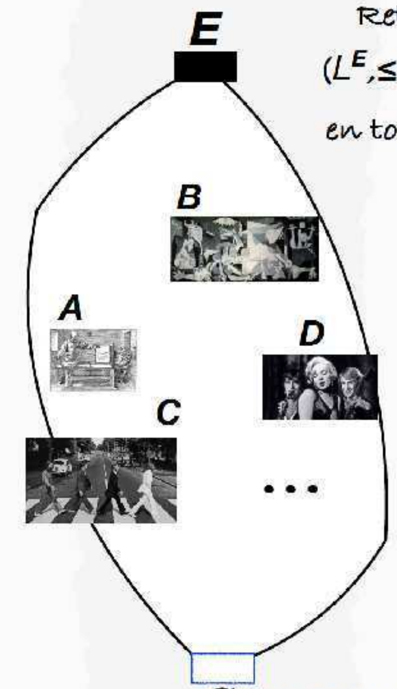
$L^E = \{ M \,/\, M : E \rightarrow L \}$. Conjunto de imágenes con tonos de gris:

• • •

Un referencial $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$ y una cadena $L=\{0,1,\ldots,255\}$

$L^{\boldsymbol{E}}=\{\, \boldsymbol{M} \,/\, \boldsymbol{M} : \boldsymbol{E}\to L \,\}$. Conjunto de imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{M}\le \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \boldsymbol{M}(x)\le \boldsymbol{N}(x)\ \ \forall x\in \boldsymbol{E}$ (Orden entre imágenes)

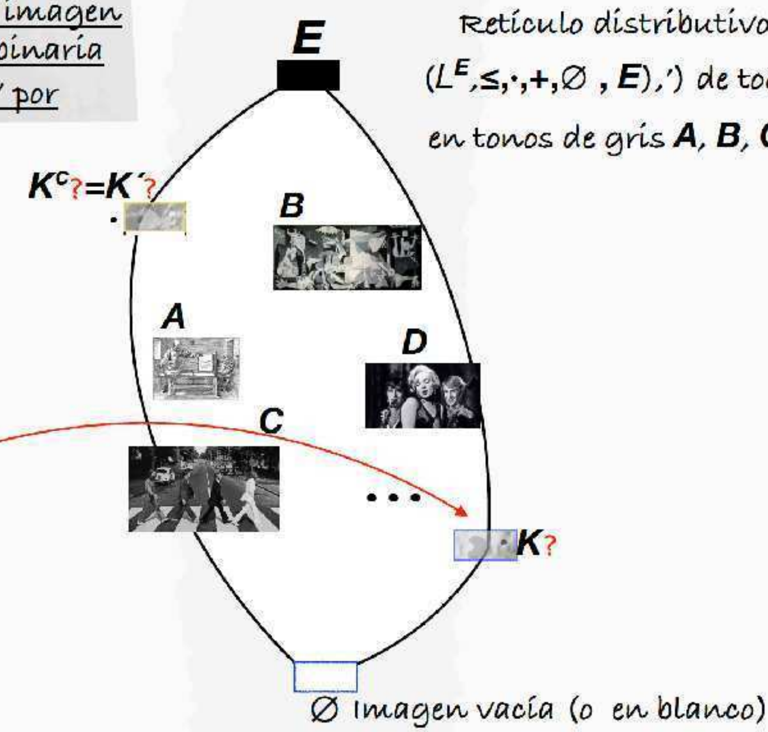


Retículo distributivo con negación $(L^{E},\le,\cdot,+,\emptyset\ ,\boldsymbol{E}),')$ de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...

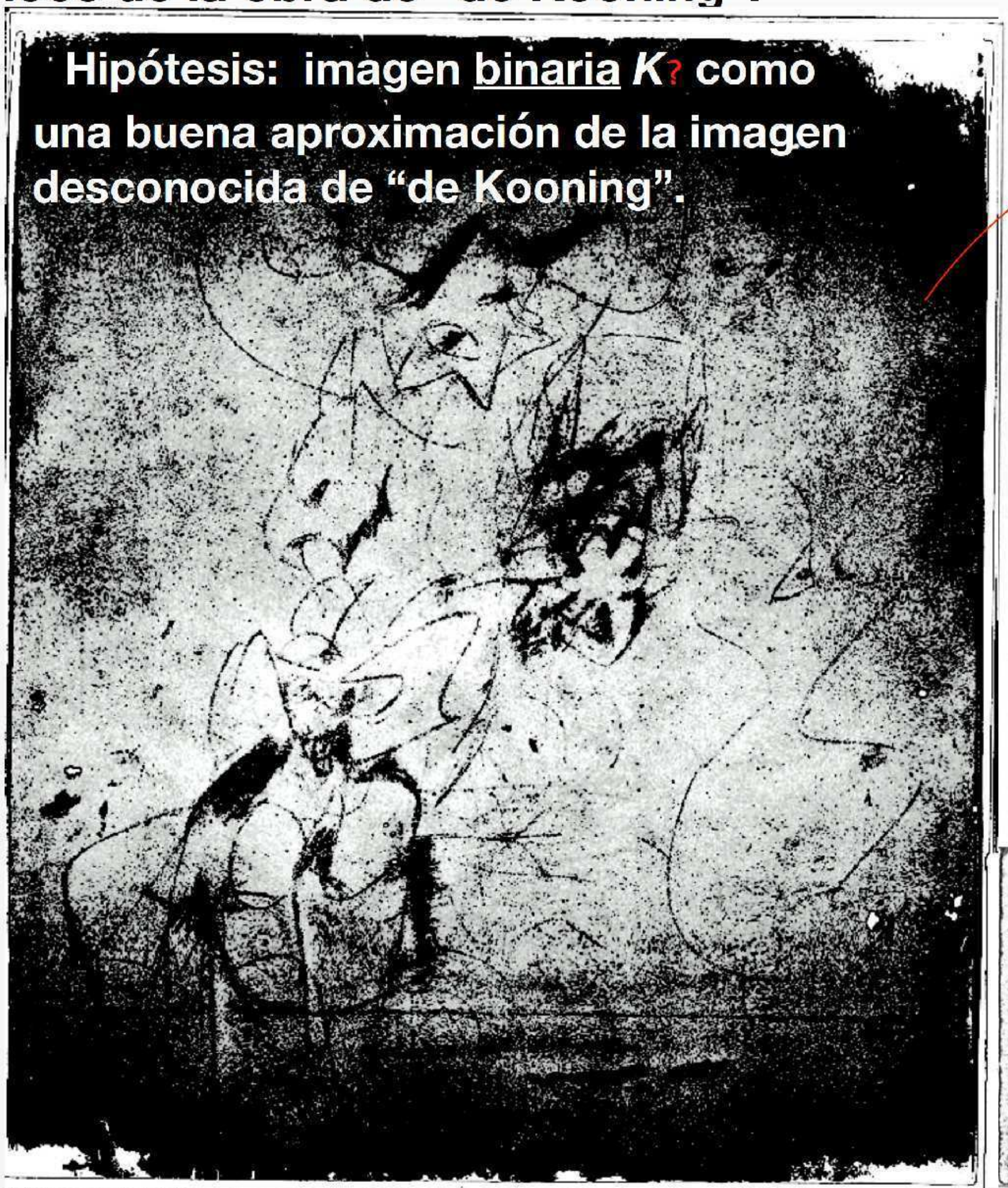
$\emptyset$ Imagen vacía (o en blanco)

Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** $\in$**P**(**E**)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , **E**),′) de todas las imágenes en tonos de gris ***A***, ***B***, ***C***, ***D***,...

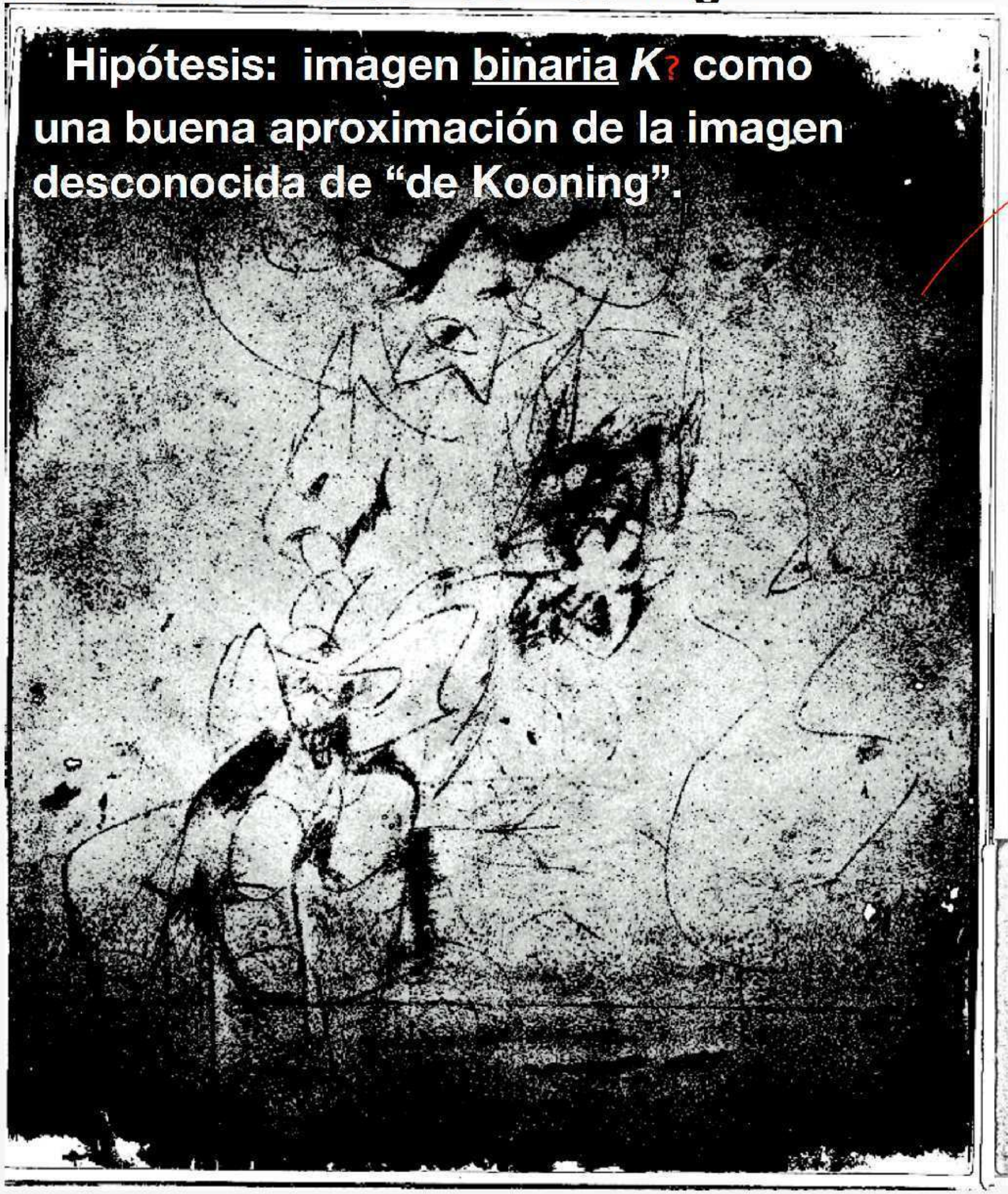


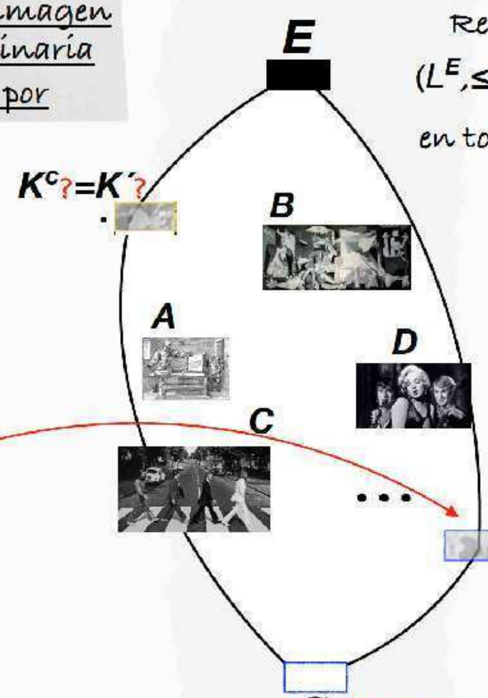
La única información que se conoce de la obra de "de Kooning":



Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K?$ $\in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

La única información que se conoce de la obra de "de Kooning":





Retículo distributivo con negación $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos **K?** que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

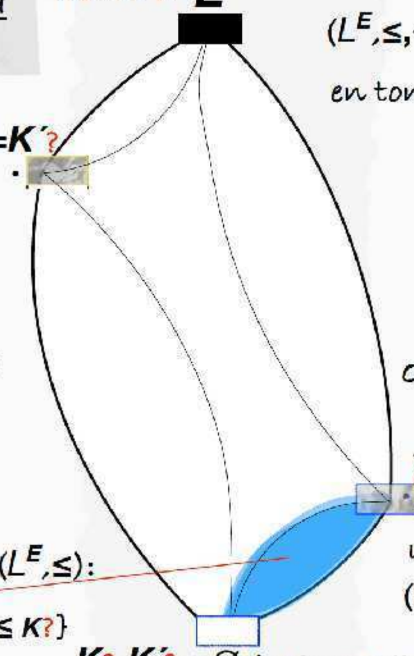
∅ Imagen vacía (o en blanco)

Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

$K? + K'? = E$

Retículo distributivo con negación $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,…

$K^c? = K'?$



$$\left.\begin{array}{l}(M \cdot N)(x) = \min(M(x), N(x)) \\ (M+N)(x) = \max(M(x), N(x))\end{array}\right\} \forall x \in E$$

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria $K?$ es una buena aproximación de ella. (Es decir, $K?$ es un nítido).

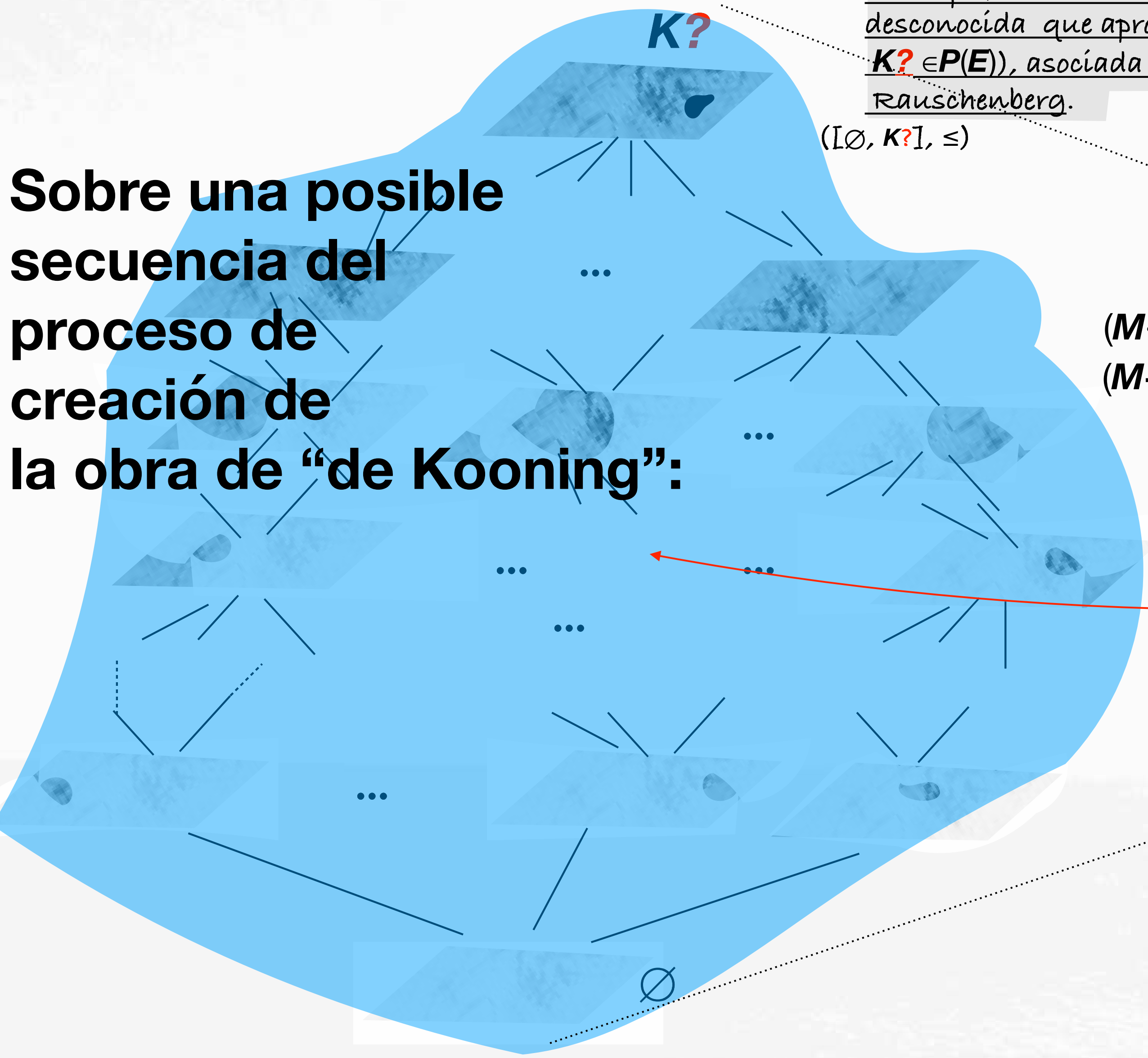
$K?$

Ideal principal $[\varnothing, K?]$ de $(L^E, \leq)$:

$[\varnothing, K?] = \{M \in L^E / \varnothing \leq M \leq K?\}$

$K? \cdot K'? = \varnothing$ Imagen vacía (o en blanco)

Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de “de Kooning”:



Una aproximación de la obra de “de Kooning” (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** $\in$ **P**(**E**)), asociada a la imagen de su “borrado” por Rauschenberg.

([∅, **K?**], ≤)

(**M·N**)(x) = min(**M**(x),**N**(x))
(**M+N**)(x) = max(**M**(x),**N**(x)) ∀x∈**E**

Ideal principal [∅, **K?**] de (L^E,≤):

[∅, **K?**] = {**M**∈L^E/ ∅ ≤ **M** ≤ **K?**}

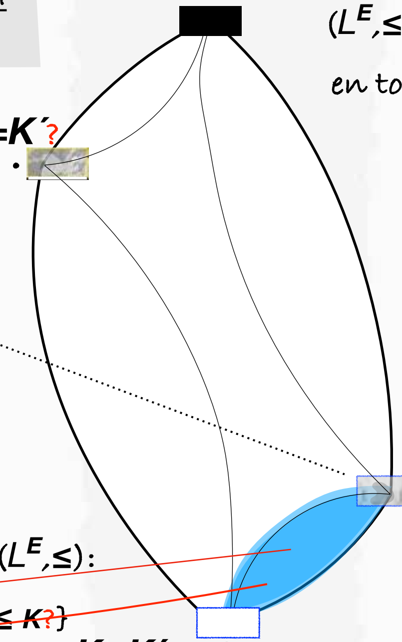
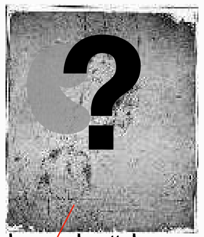
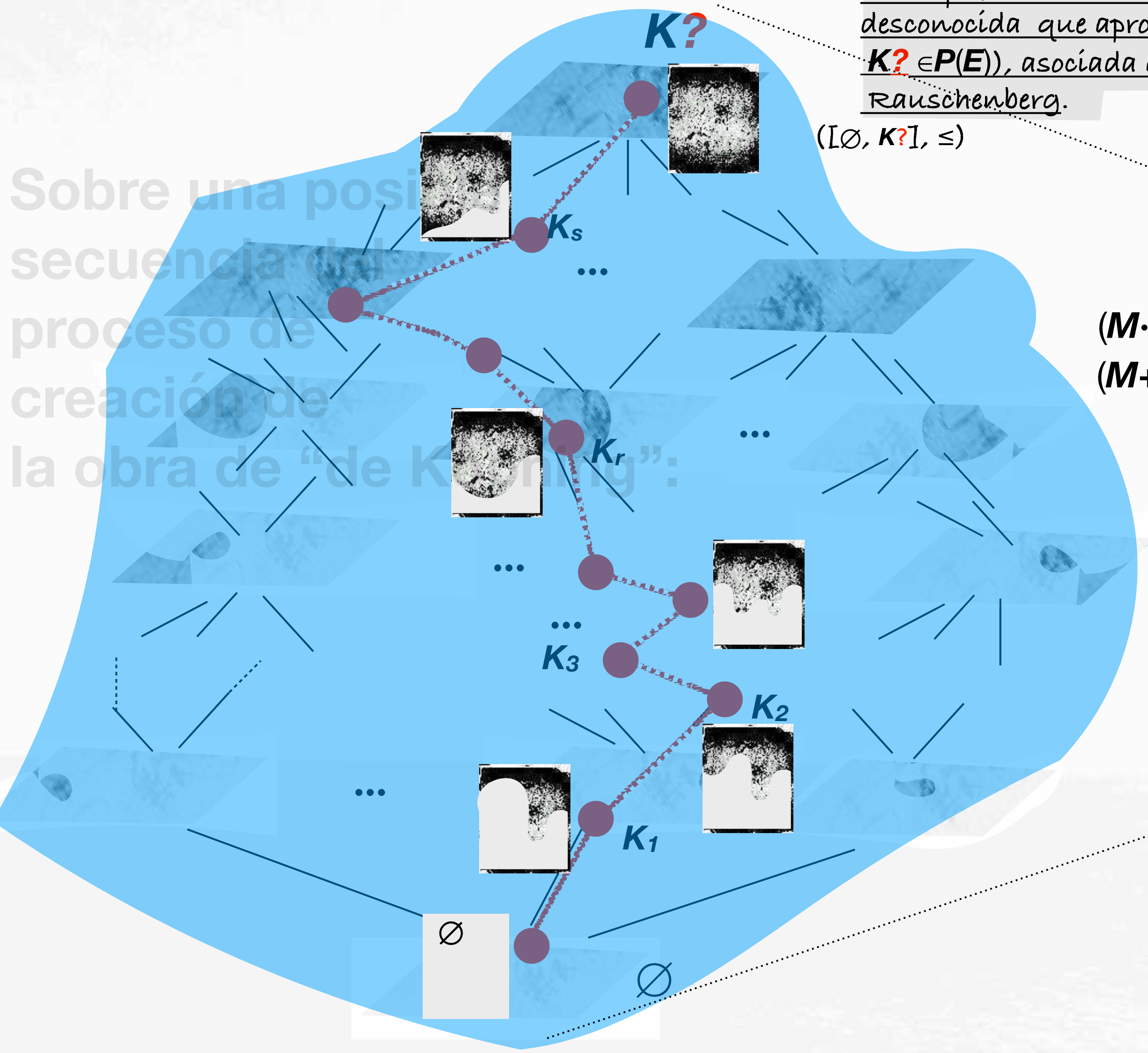


Imagen vacía (o en blanco)

Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , **E**),´) de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...



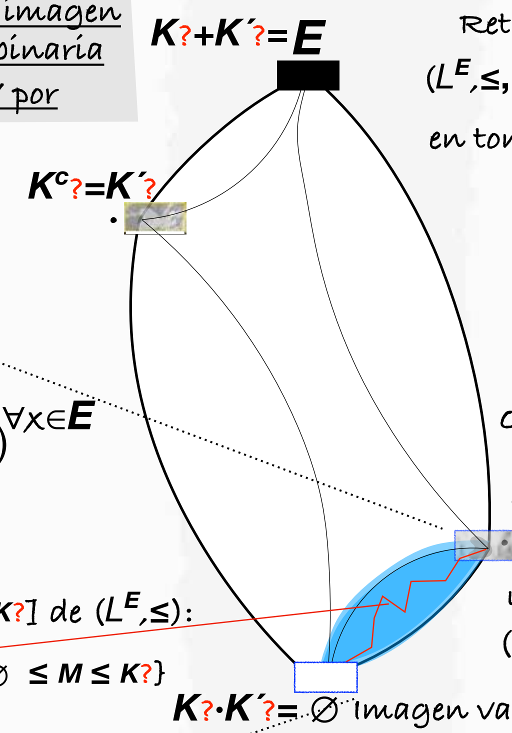
Obra de “de Kooning” (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

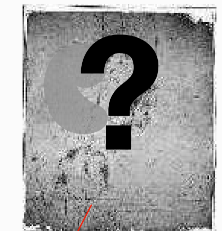


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

$([\varnothing, K?], \le)$

Retículo distributivo con negación $(L^E,\le,\cdot,+,\varnothing, E),')$ de todas las imágenes en tonos de gris $A, B, C, D,\ldots$





Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria $K?$ es una buena aproximación de ella. (Es decir, $K?$ es un nítido).

$$(M\cdot N)(x)=\min(M(x),N(x))$$
$$(M+N)(x)=\max(M(x),N(x))\quad \forall x\in E$$

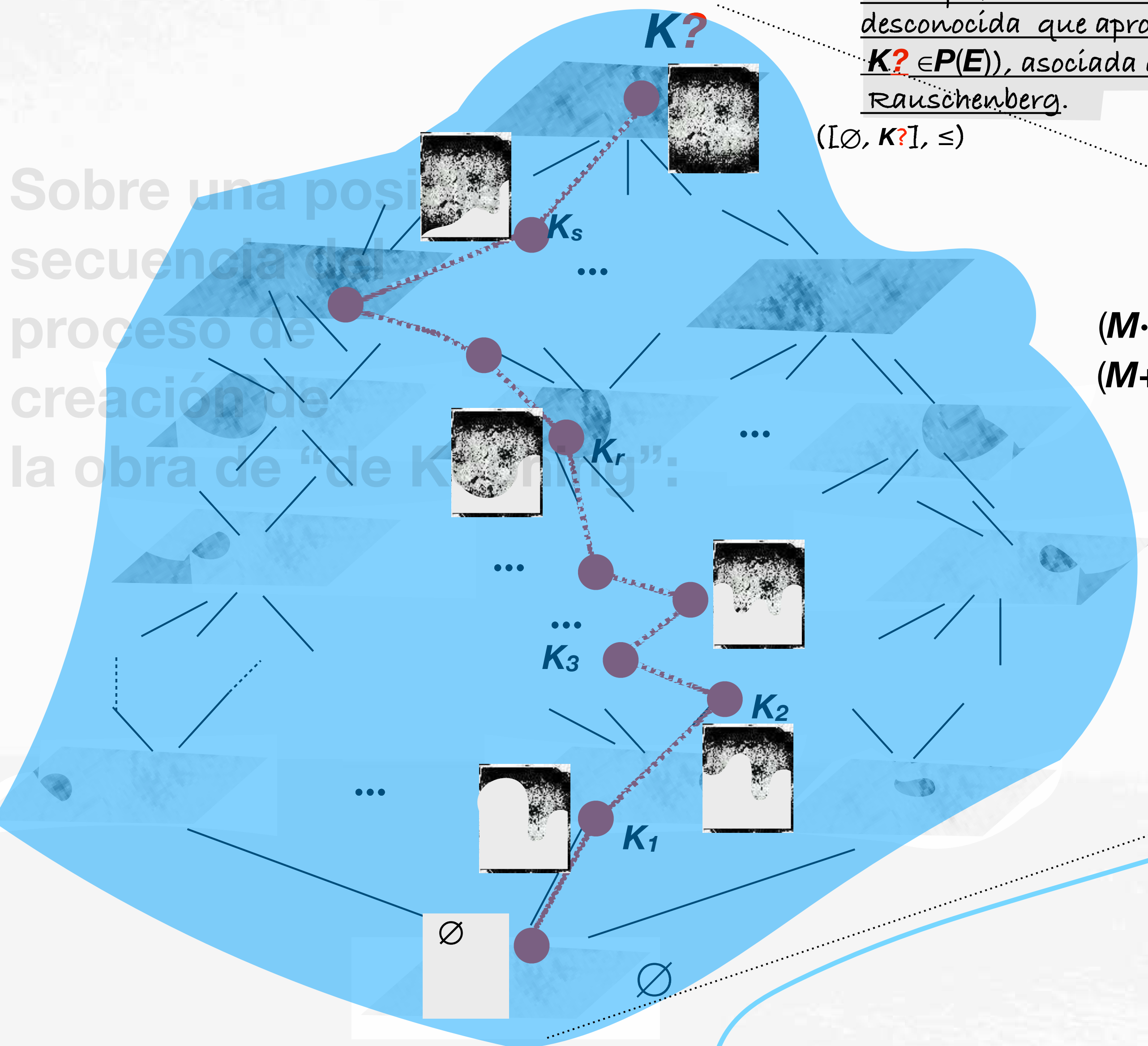
Ideal principal $[\varnothing, K?]$ de $(L^E,\le)$:

$[\varnothing, K?]=\{M\in L^E / \varnothing \le M \le K?\}$

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":

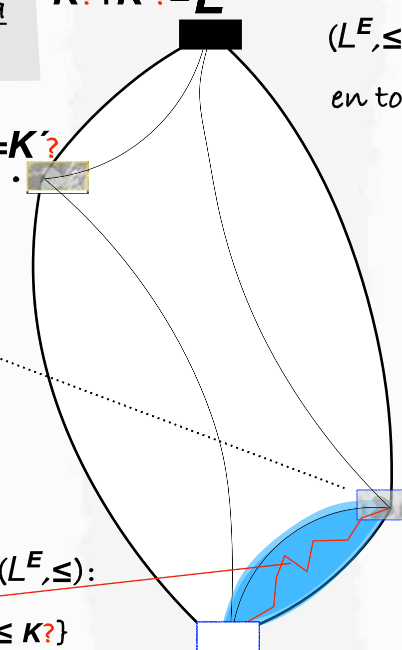
$\varnothing < K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_r < \ldots < K_s \ldots < K?$

($<$ es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

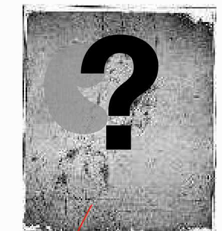


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

$([\varnothing, K?], \leq)$



Retículo distributivo con negación $(L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing , E),')$ de todas las imágenes en tonos de gris ***A***, ***B***, ***C***, ***D***,...



$$(M\cdot N)(x)=\min(M(x),N(x))$$
$$(M+N)(x)=\max(M(x),N(x)) \quad \forall x\in E$$

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria ***K?*** es una buena aproximación de ella. (Es decir, ***K?*** es un nítido).

Ideal principal $[\varnothing, K?]$ de $(L^E,\leq)$:

$[\varnothing, K?]=\{M\in L^E / \varnothing \leq M \leq K?\}$

$K?\cdot K´?= \varnothing$ Imagen vacía (o en blanco)

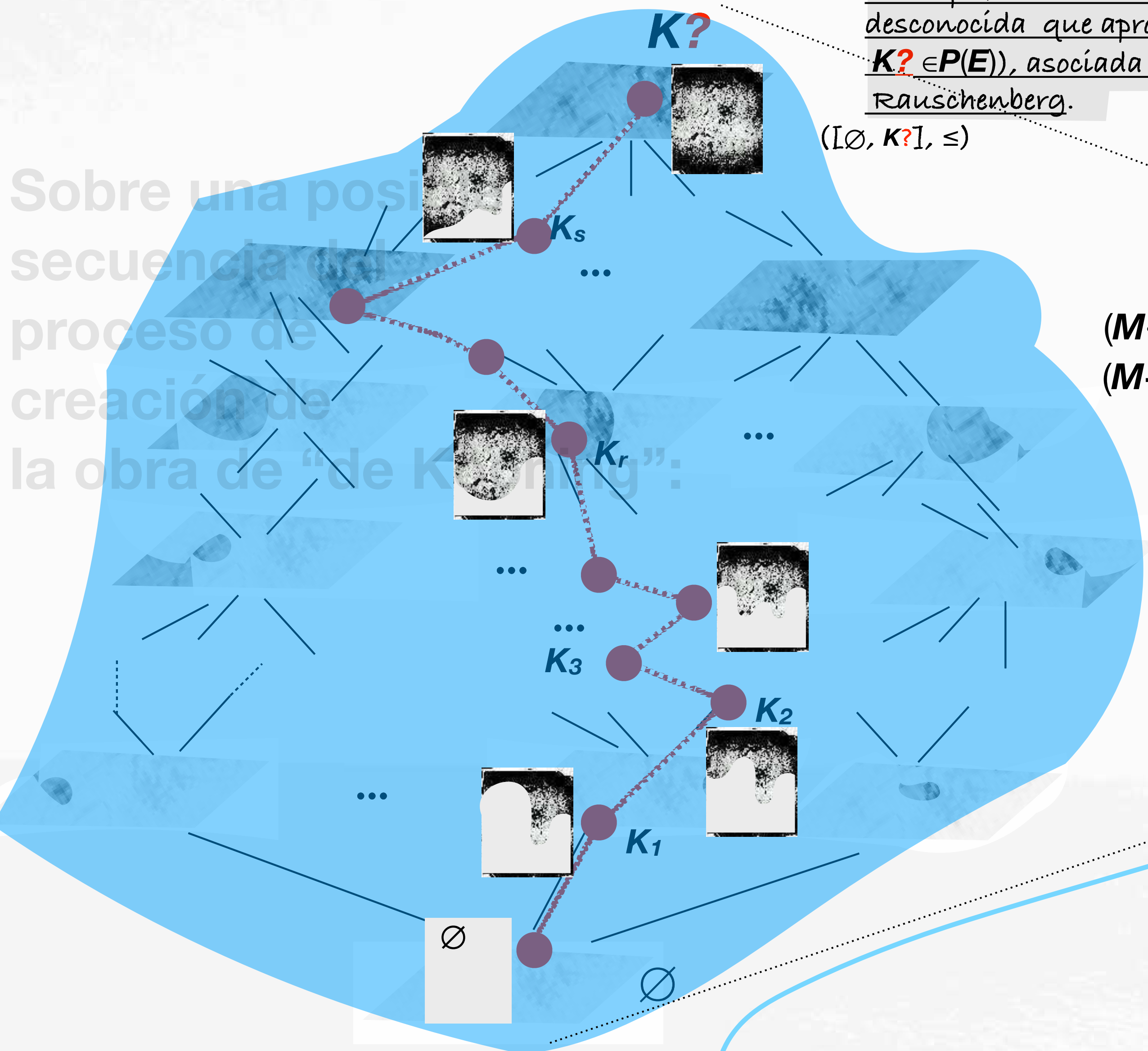
Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":

$\varnothing < K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_r < \ldots < K_s \ldots < K?$

(< es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Ahora:

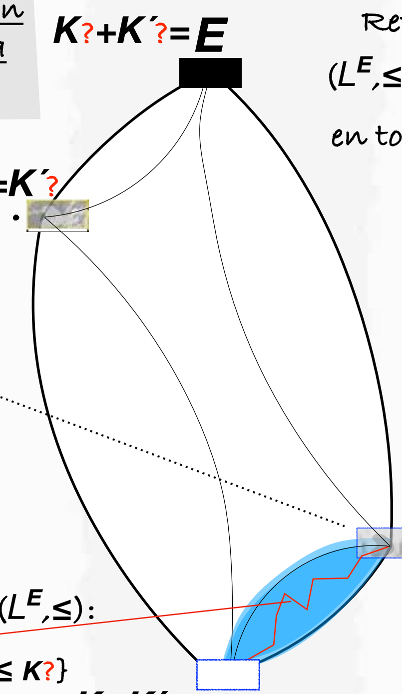
Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):



Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

$([\emptyset, K?], \leq)$

Retículo distributivo con negación $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E),')$ de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...



$$(M \cdot N)(x) = \min(M(x), N(x))$$
$$(M+N)(x) = \max(M(x), N(x)) \quad \forall x \in E$$

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria $K?$ es una buena aproximación de ella. (Es decir, $K?$ es un nítido).

Ideal principal $[\emptyset, K?]$ de $(L^E, \leq)$:

$[\emptyset, K?] = \{M \in L^E / \emptyset \leq M \leq K?\}$

$K? \cdot K'? = \emptyset$ Imagen vacía (o en blanco)

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":

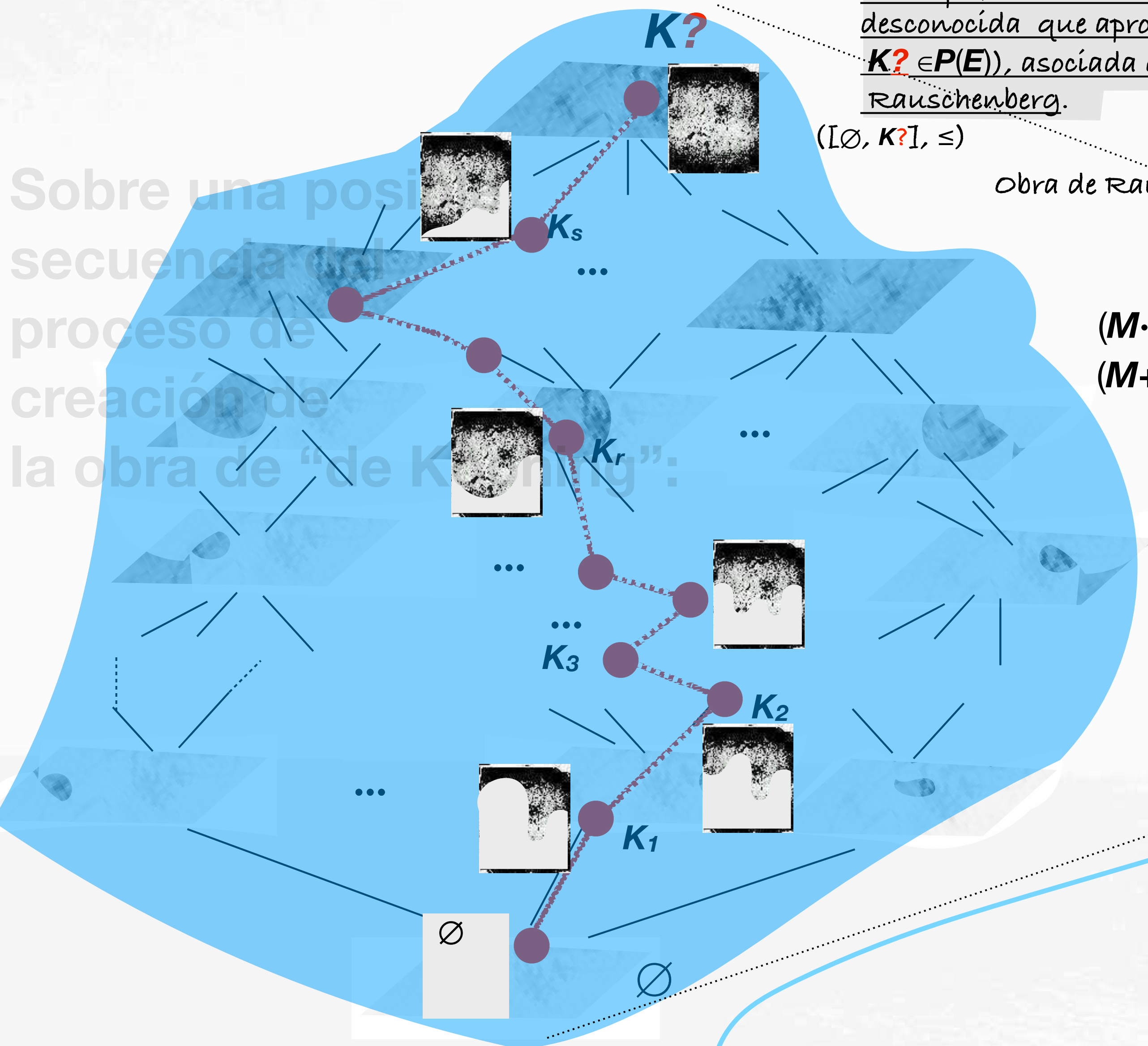
$\emptyset < K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_r < \ldots < K_s \ldots < K?$

($<$ es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Ahora:

Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):

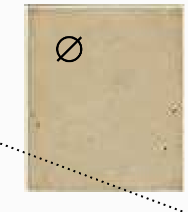
Punto de partida



Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** $\in$ **P(E)**), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

$([\varnothing, K?], \leq)$

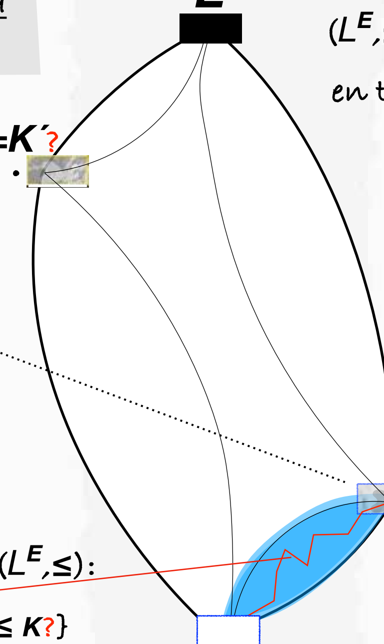
Obra de Rauschenberg≡ ∅.



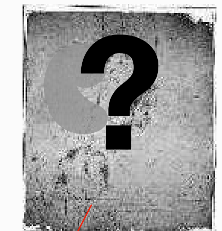
$(M \cdot N)(x) = \min(M(x), N(x))$
$(M + N)(x) = \max(M(x), N(x))$ $\forall x \in E$

$K? + K'? = E$

$K^c? = K'?$



Retículo distributivo con negación $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...



Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

Ideal principal [∅, **K?**] de $(L^E, \leq)$:

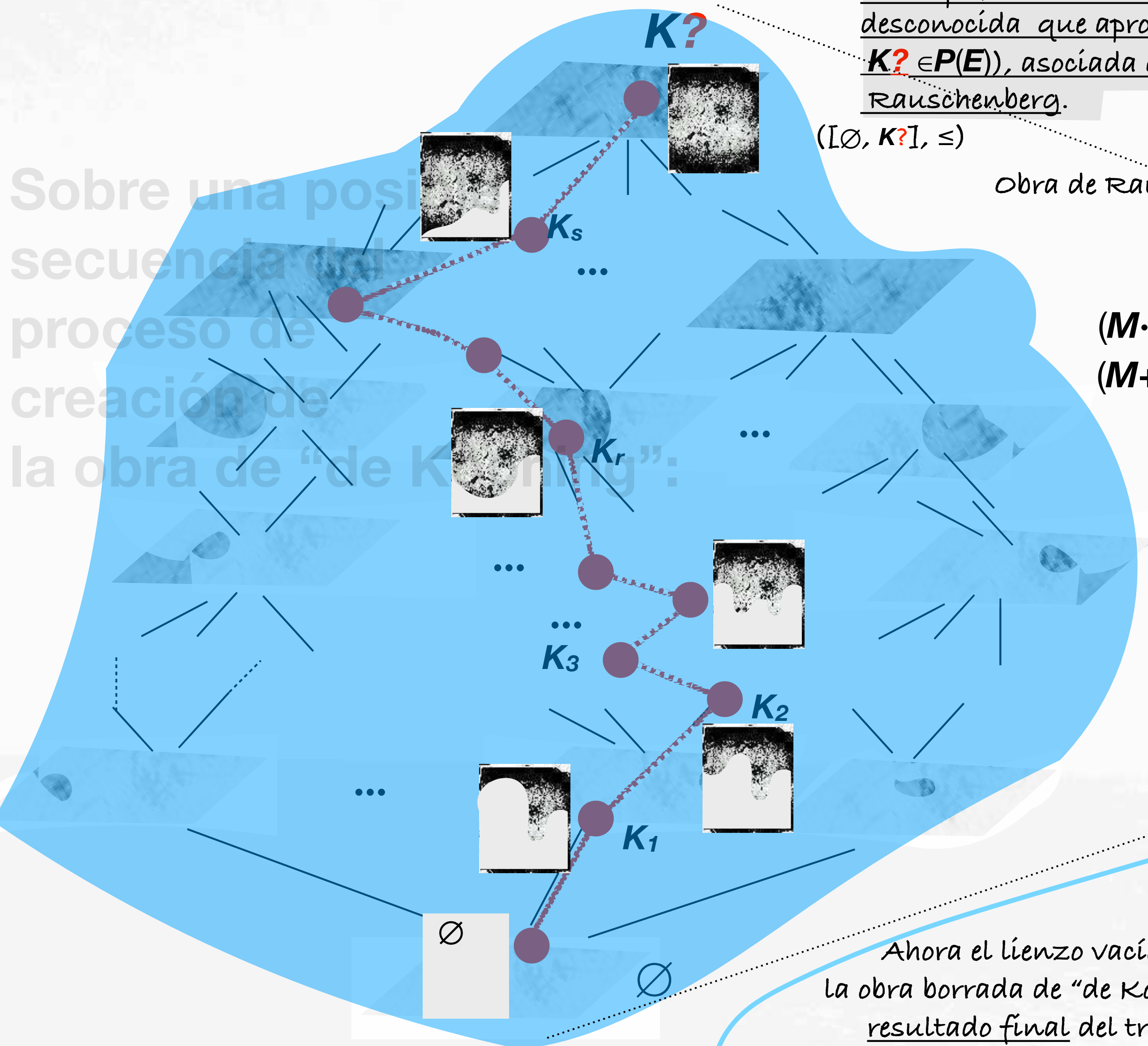
$[\varnothing, K?] = \{M \in L^E / \varnothing \leq M \leq K?\}$

$K? \cdot K'? = \varnothing$ Imagen vacía (o en blanco)

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":
$\varnothing < K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_r < \ldots < K_s \ldots < K?$
(< es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):

Punto de partida



Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** ∈**P**(**E**)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

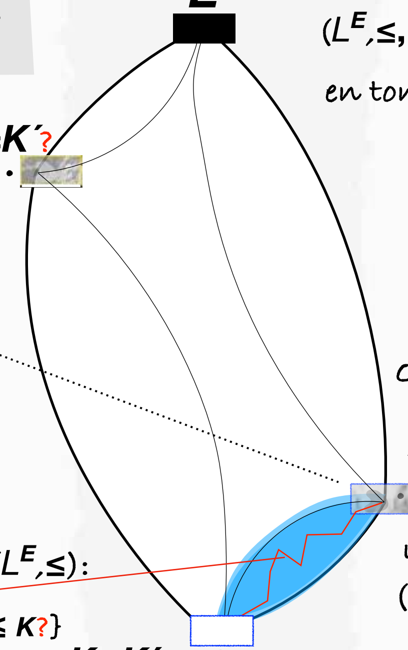
([∅, **K?**], ≤)

Obra de Rauschenberg≡ ∅.

$$(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N})(x)=min(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x))$$
$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})(x)=max(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x)) \quad \forall x\in \boldsymbol{E}$$

K?+K´?=E

K^c?=K´?



K?

Ideal principal [∅, **K?**] de (L^E,≤):

[∅, **K?**]={**M**∈L^E/ ∅ ≤ **M** ≤ **K?**}

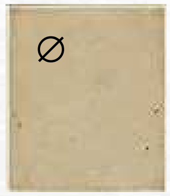
K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)

Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , **E**),´) de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...

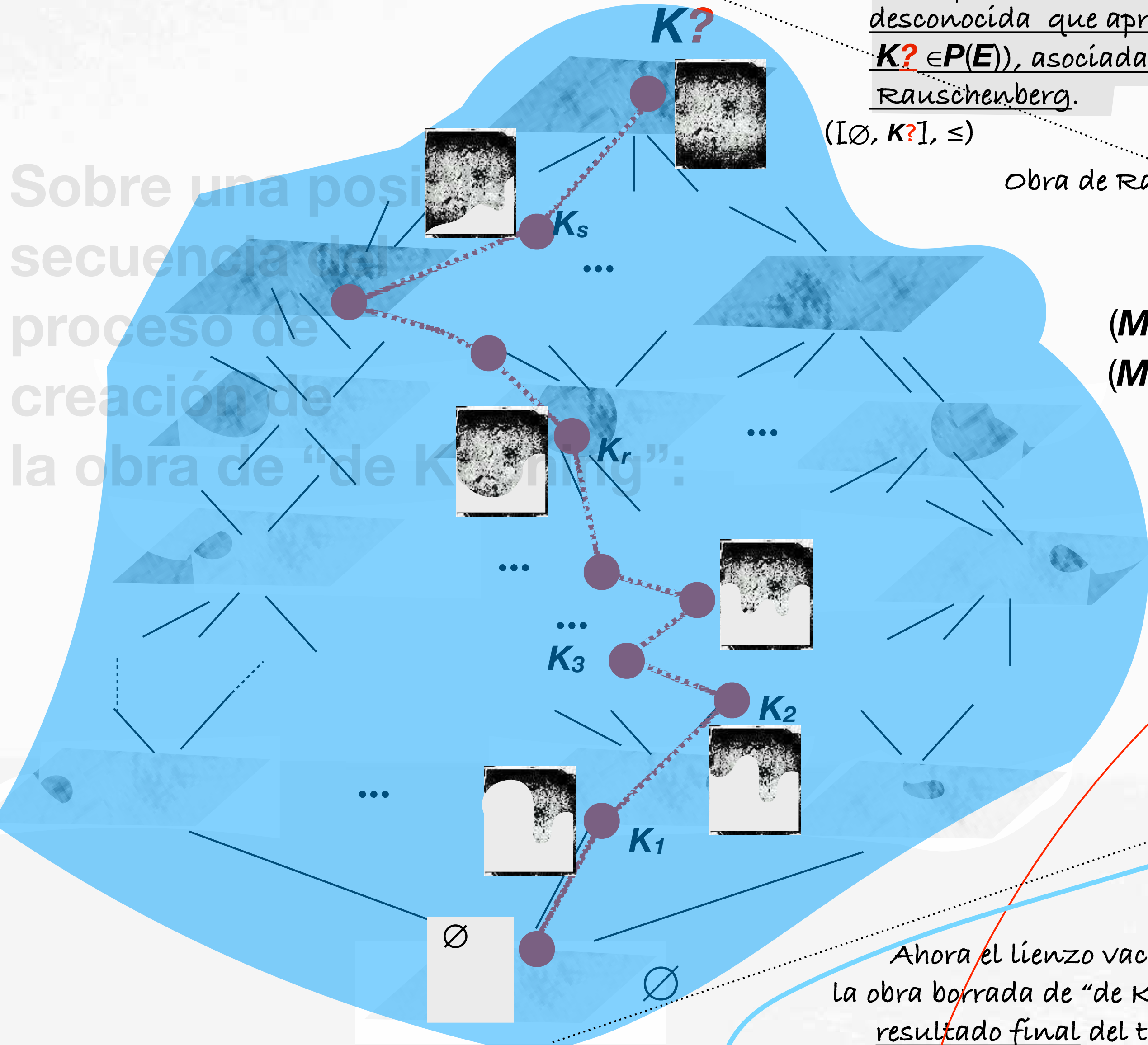
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":
∅< K_1 < K_2 < K_3 <...< K_r <...< K_s...< **K?**
(< es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Ahora el lienzo vacío es:
la obra borrada de "de Kooning",
resultado final del trabajo
realizado por Rauschenberg.



Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):

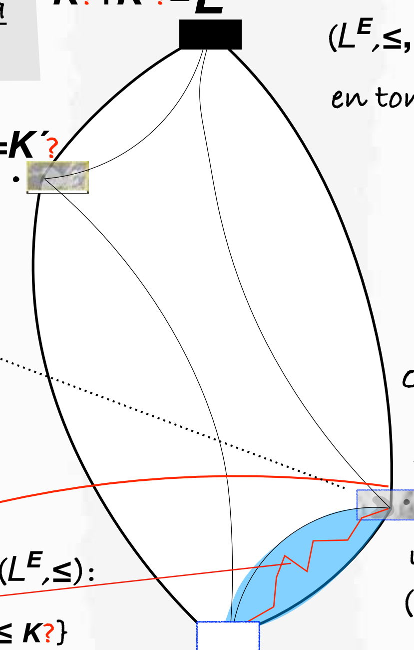


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** ∈**P**(**E**)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

([∅, **K?**], ≤)

Obra de Rauschenberg≡ ∅.

$$(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N})(x)=\min(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x))$$
$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})(x)=\max(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x)) \quad \forall x\in \boldsymbol{E}$$



Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , **E**),´) de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

Ideal principal [∅, **K?**] de (L^E,≤):

[∅, **K?**]={$M \in L^E$/ ∅ ≤ M ≤ **K?**}

K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)

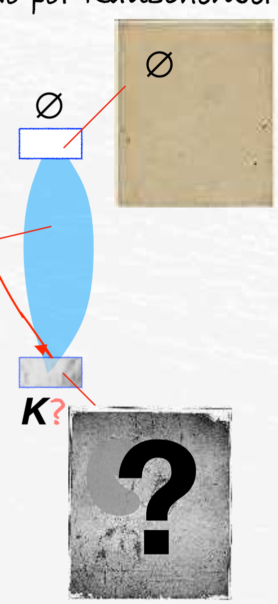
Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":

∅< K_1 < K_2 < K_3 <...< K_r <...< K_s...< **K?**

(< es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

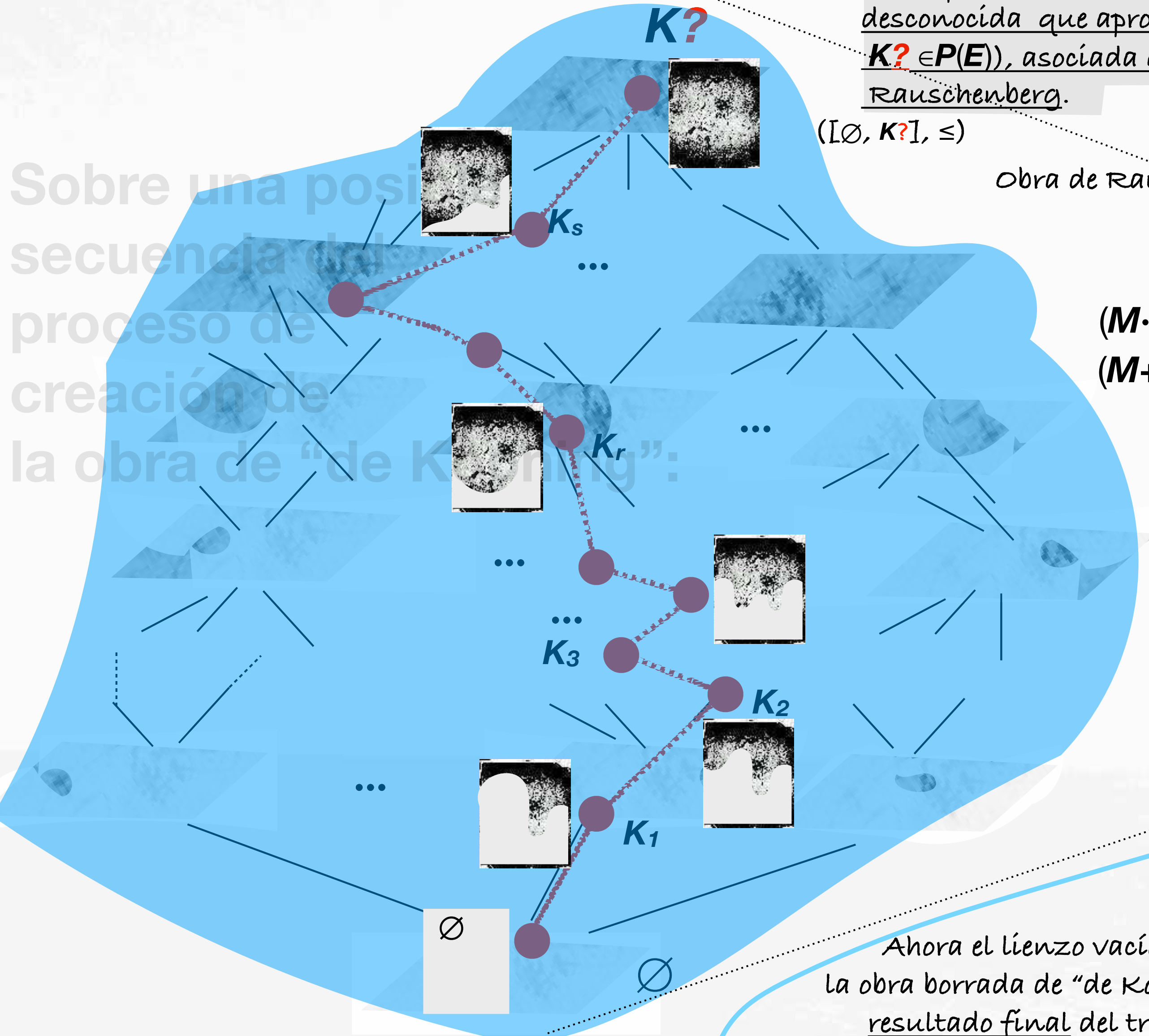
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.



Retículo ([**K?**, ∅]$_⊑$,⊑)

con [**K?** , ∅]$_⊑$ =[∅, **K?**] y (M ⊑ N)⇔(M ≥ N)

(⊑ es dual de la restricción de ≤ en [∅, **K?**]).

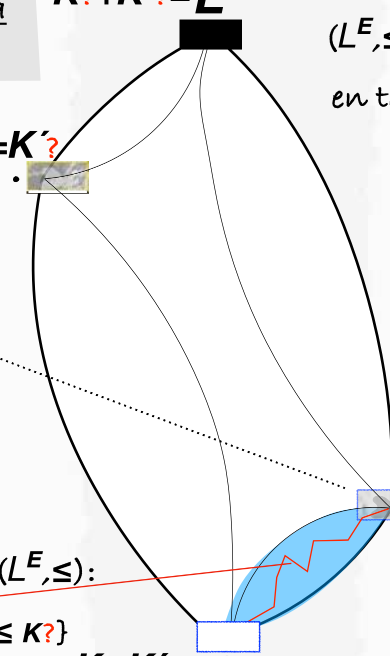


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria **K?** ∈**P**(**E**)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

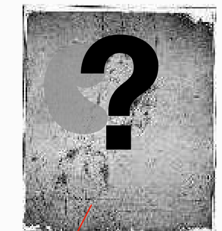
([∅, **K?**], ≤)

Obra de Rauschenberg≡ ∅.

$(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N})(x)=\min(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x))$
$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})(x)=\max(\boldsymbol{M}(x),\boldsymbol{N}(x))$ $\forall x \in \boldsymbol{E}$



Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , **E**),´) de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...



Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria **K?** es una buena aproximación de ella. (Es decir, **K?** es un nítido).

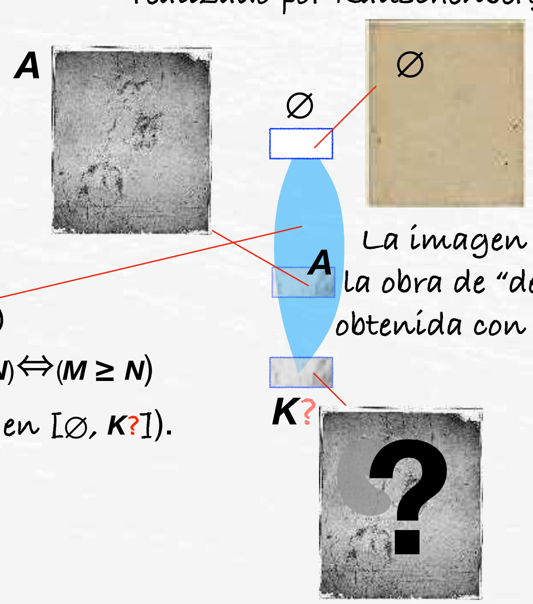
Ideal principal [∅, **K?**] de (L^E,≤):

[∅, **K?**]={**M**∈L^E/ ∅ ≤ **M** ≤ **K?**}

K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":
∅< K_1 < K_2 < K_3 <...< K_r <...< K_s...< **K?**
(< es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.



La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.

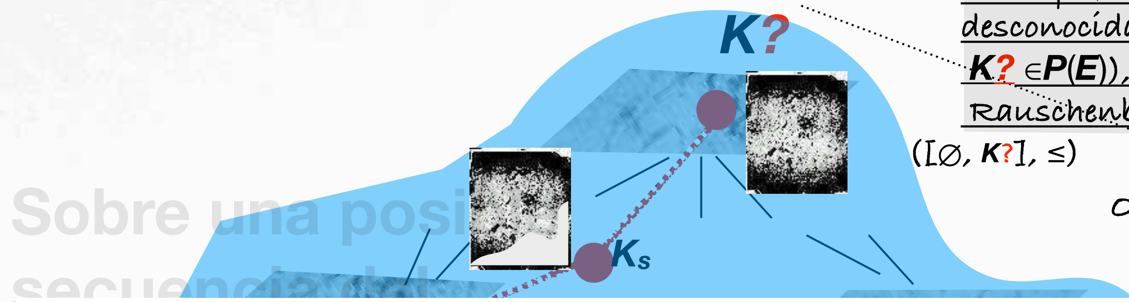
A∈ L^E es una aproximación (conocida) de la imagen **K?**:

Retículo ([**K?**, ∅]$_⊑$,⊑)

con [**K?** , ∅]$_⊑$ =[∅, **K?**] y (**M** ⊑ **N**)⇔(**M** ≥ **N**)

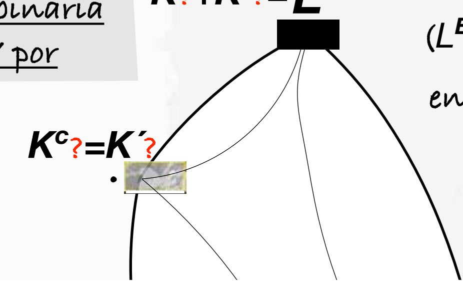
(⊑ es dual de la restricción de ≤ en [∅, **K?**]).

Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la de "de Kooning"):

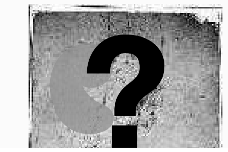


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.

Obra de Rauschenberg $\equiv \varnothing$.



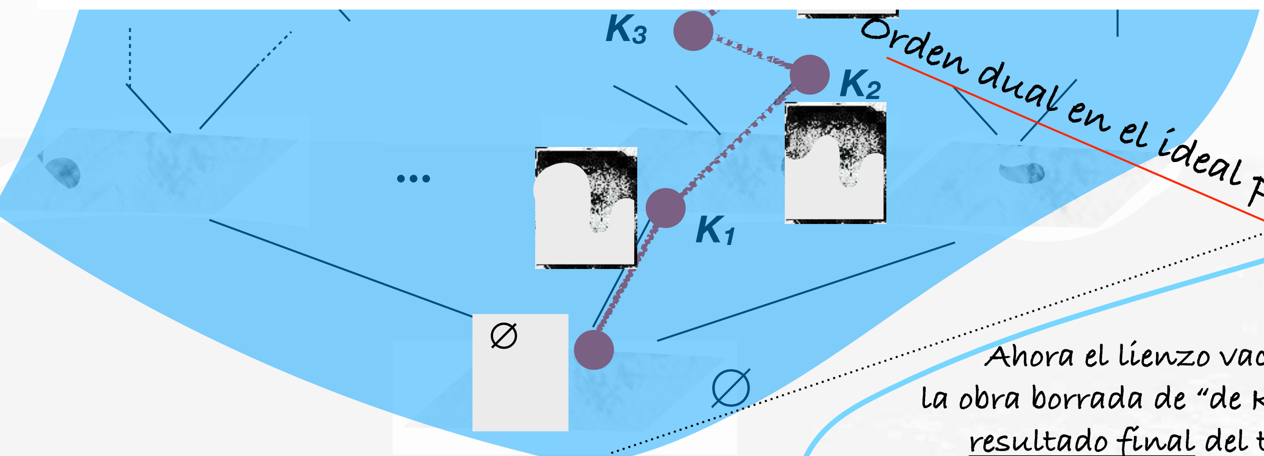
Retículo distributivo con negación ($L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), '$) de todas las imágenes en tonos de gris **A**, **B**, **C**, **D**,...



$$K? \sqsubset R_1 \sqsubset A \sqsubset R_2 \sqsubset R_3 \sqsubset \ldots \sqsubset R_p \sqsubset \ldots \sqsubset R_q \sqsubset \ldots \sqsubset \varnothing$$

(La relación $\sqsubset$ es la "nueva inclusión estricta" asociada al orden $\sqsubseteq$ y que interpretamos aquí como un generador de "contenidos propios del vacío": $K, R_1, \ldots, R_q, \ldots$)

(En el vacío, la "nueva inclusión $\sqsubset$" es dual de la usual: $(R_i \sqsubset R_k \sqsubset \varnothing) \Leftrightarrow (\varnothing < R_k < R_i)$)

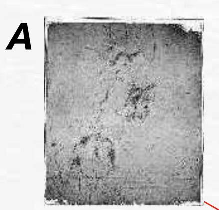


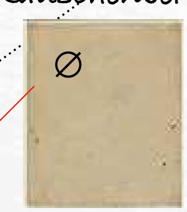
Orden dual en el ideal principal $[\varnothing, K?]$

Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de creación de la obra de "de Kooning":
$\varnothing < K_1 < K_2 < K_3 < \ldots < K_r < \ldots < K_s \ldots < K?$
($<$ es aquí la inclusión estricta usual de imágenes con tonos de gris)

Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.

A





La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.

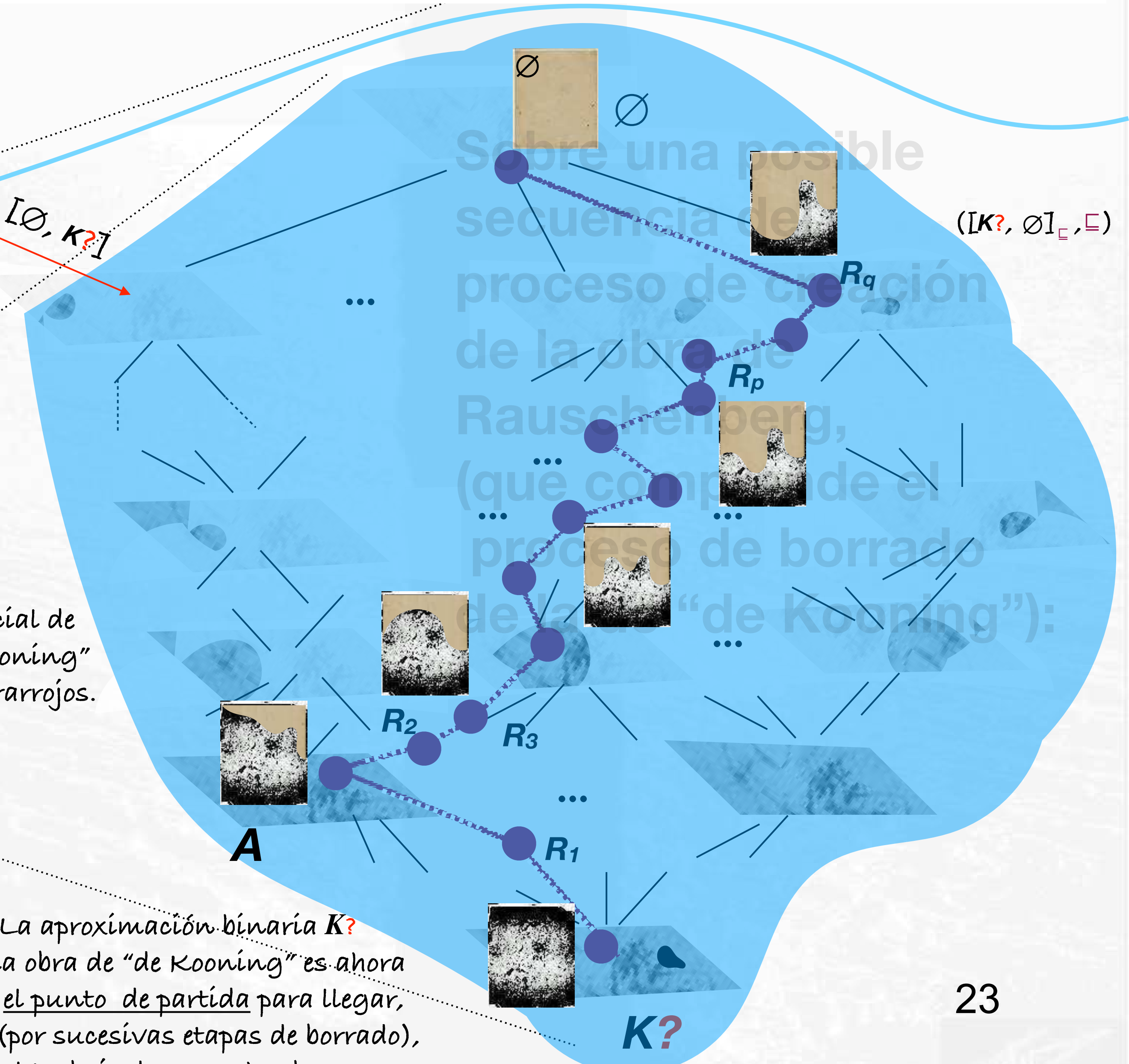
$A \in L^E$ es una aproximación (conocida) de la imagen $K?$:

Retículo $([K?, \varnothing]_{\sqsubseteq}, \sqsubseteq)$

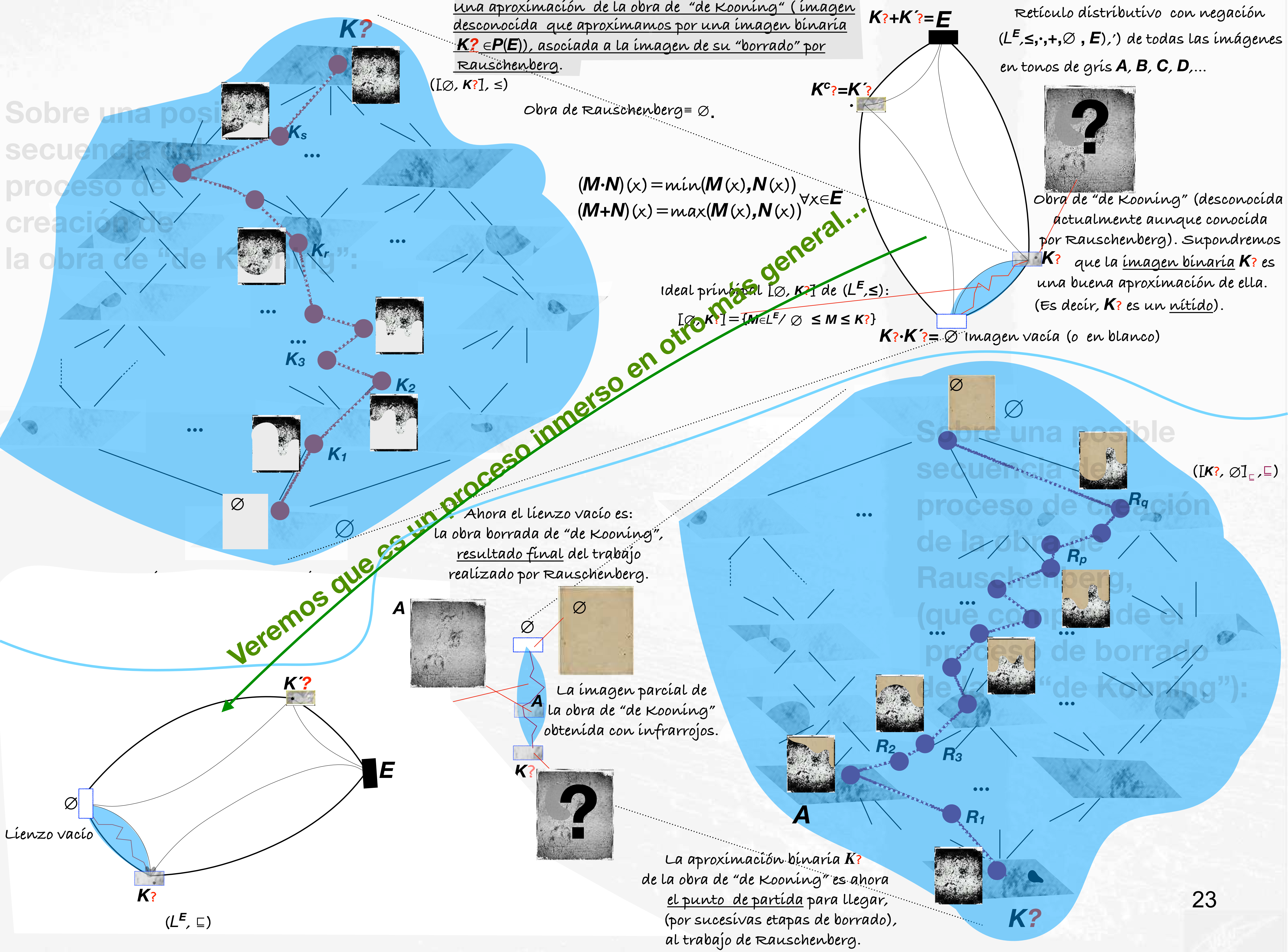
con $[K?, \varnothing]_{\sqsubseteq} = [\varnothing, K?]$ y $(M \sqsubseteq N) \Leftrightarrow (M \geq N)$

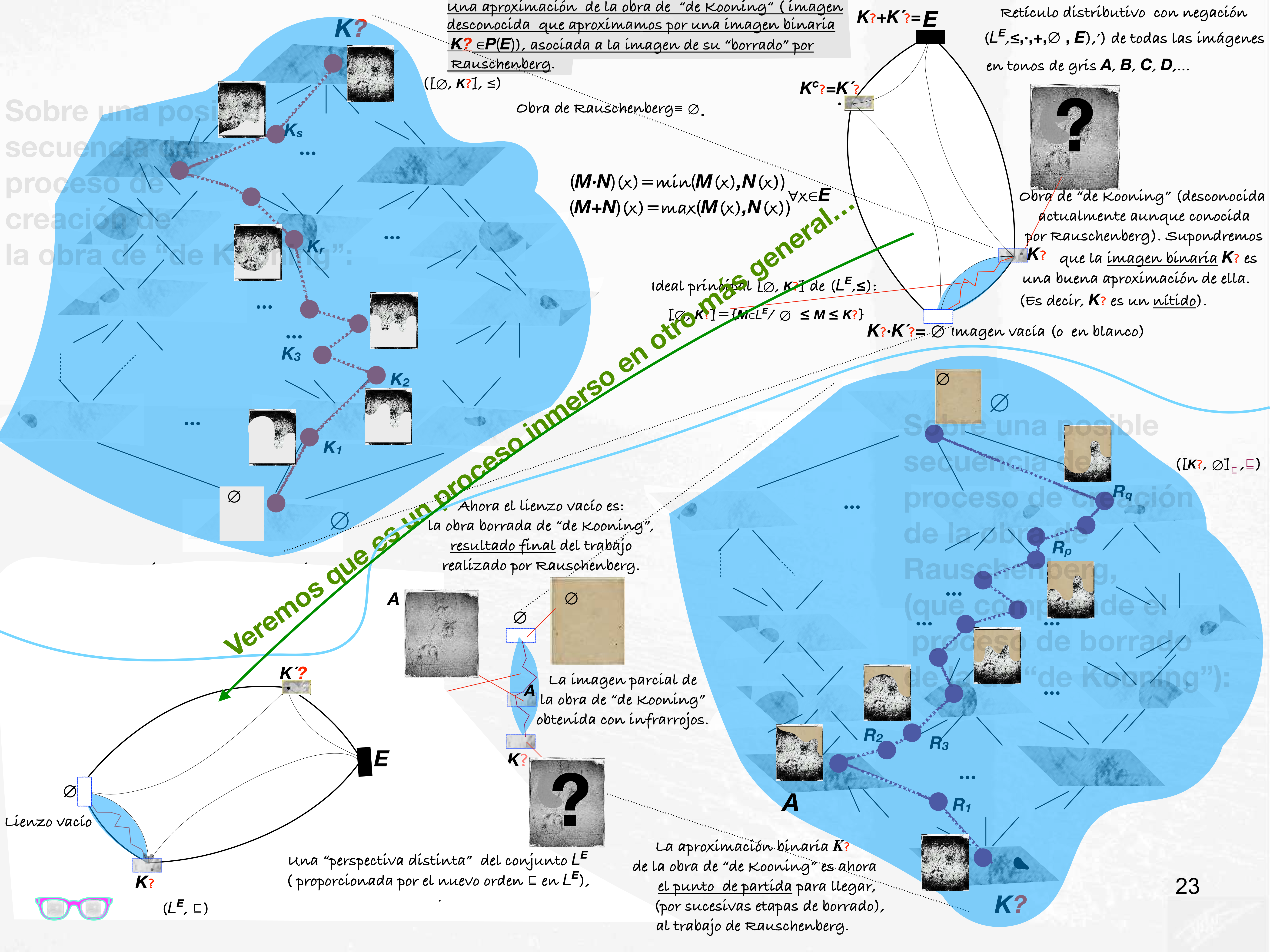
($\sqsubseteq$ es dual de la restricción de $\leq$ en $[\varnothing, K?]$).

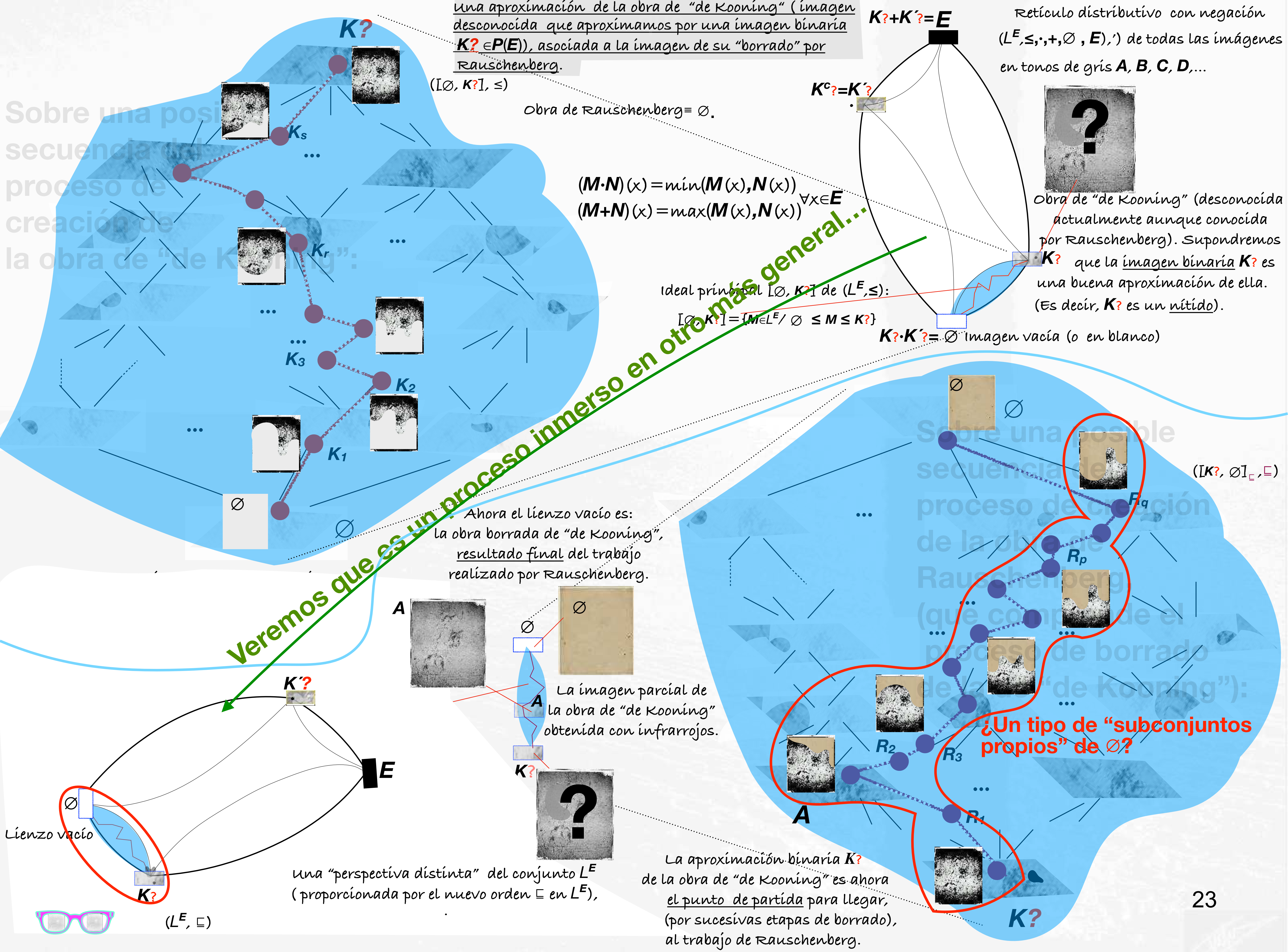
Una posible secuencia de etapas que constituyen el proceso de "creación" de la obra de Rauschenberg (y que comprende el proceso de "borrado" de la obra de "de Kooning"):

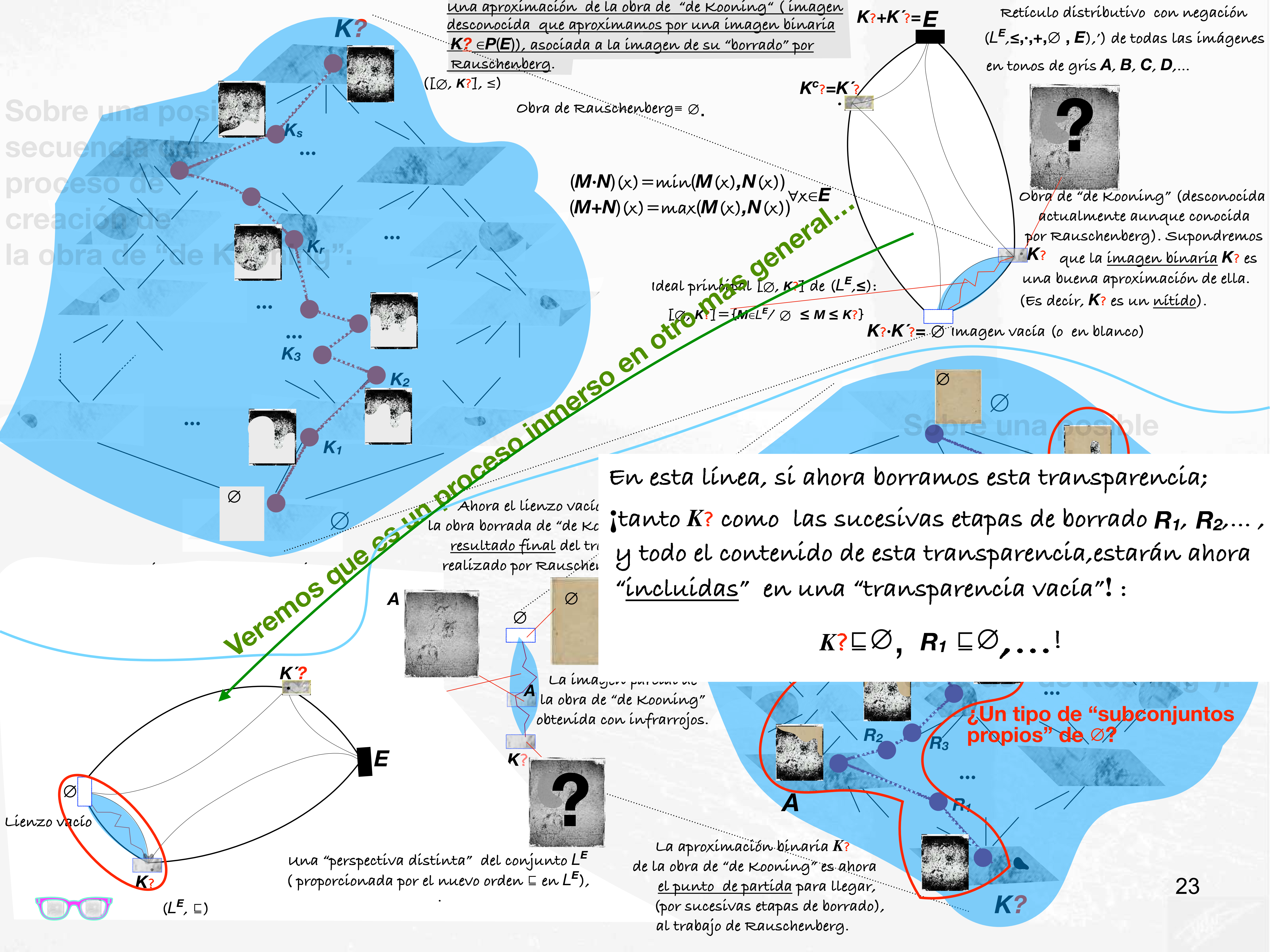


La aproximación binaria $K?$ de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.
K?
([∅, K?], ≤)
Obra de Rauschenberg≡ ∅.
Sobre una posi
secuencia del
proceso de
creación de
la obra de "de K…ning":
K_s
K_r
K_3
K_2
K_1
…
∅
K?+K´?=E
$K^c?$=K´?
Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , E),´) de todas las imágenes en tonos de gris A, B, C, D,…
$(M\cdot N)(x)=\min(M(x),N(x))$
$(M+N)(x)=\max(M(x),N(x))$ $\forall x\in E$
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria K? es una buena aproximación de ella. (Es decir, K? es un nítido).
K?
Ideal principal [∅, K?] de (L^E,≤):
[∅, K?]={M∈L^E/ ∅ ≤ M ≤ K?}
K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)
Veremos que es un proceso inmerso en otro más general…
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.
Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la "de Kooning"):
([K?, ∅]⊑,⊑)
∅
R_q
R_p
R_3
R_2
R_1
A
K?
A
∅
A
K?
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.
La aproximación binaria K? de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.
K´?
E
∅
Lienzo vacío
K?
(L^E, ⊑)

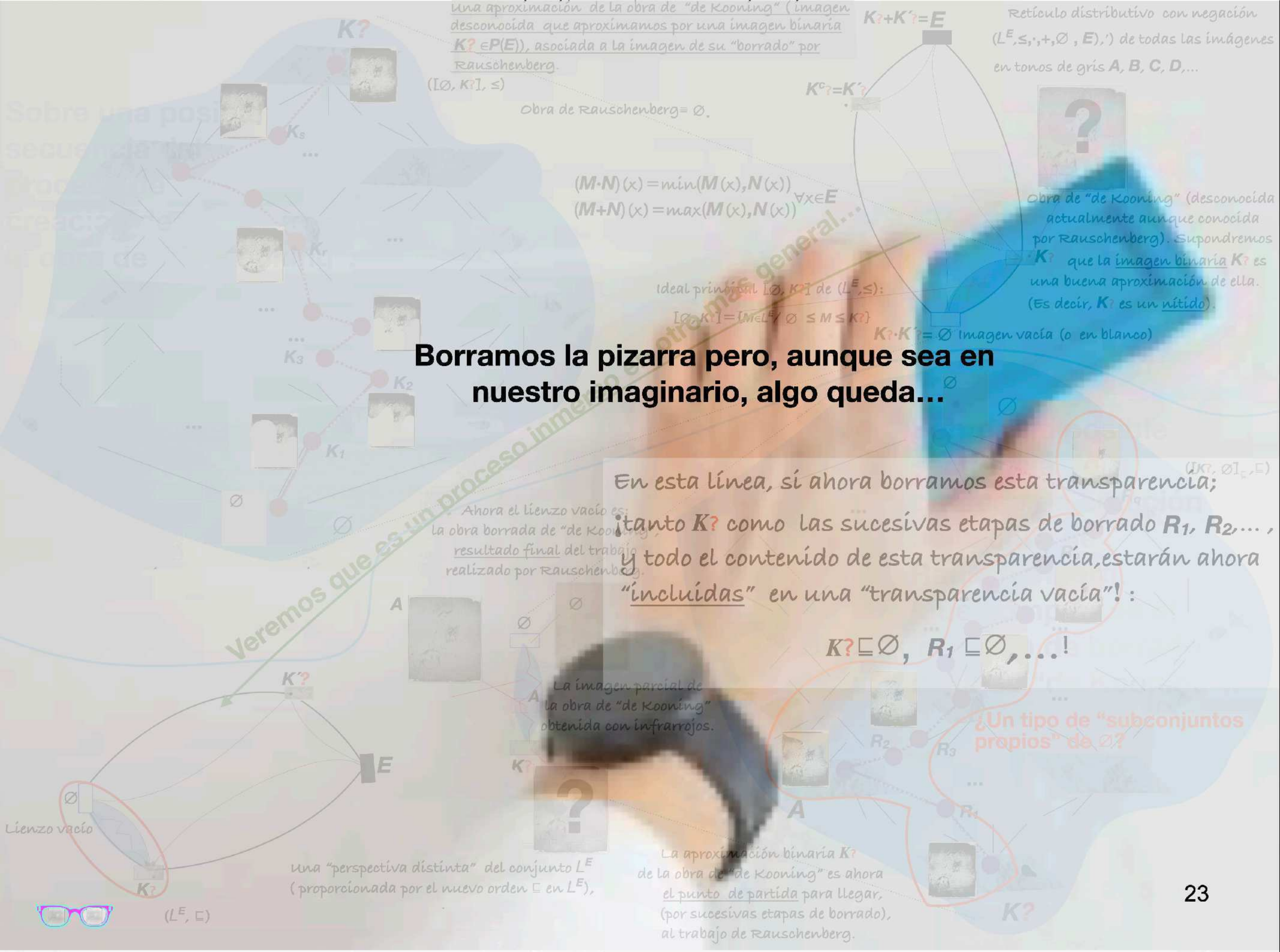

Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria K? ∈P(E)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.
K?
([∅, K?], ≤)
Obra de Rauschenberg= ∅.
Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de "de Kooning":
K_s
K_r
K_3
K_2
K_1
∅
$(M{\cdot}N)(x)=\min(M(x),N(x))$
$(M{+}N)(x)=\max(M(x),N(x))$ ∀x∈E
K?+K´?=E
K^c?=K´?
Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , E),´) de todas las imágenes en tonos de gris A, B, C, D,...
?
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria K? es una buena aproximación de ella. (Es decir, K? es un nítido).
K?
Ideal principal [∅, K?] de (L^E,≤):
[∅, K?]={M∈L^E/ ∅ ≤ M ≤ K?}
K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)
Veremos que es un proceso inmerso en otro más general...
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.
A
∅
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.
K?
?
Sobre una posible secuencia del proceso de creación de la obra de Rauschenberg, (que comprende el proceso de borrado de la "de Kooning"):
([K?, ∅]$_⊑$,⊑)
R_q
R_p
R_3
R_2
R_1
A
K?
K´?
E
∅
Lienzo vacío
K?
(L^E, ⊑)
Una "perspectiva distinta" del conjunto L^E (proporcionada por el nuevo orden ⊑ en L^E),
La aproximación binaria K? de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.
23


Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.
$([\emptyset, K?], \leq)$
Obra de Rauschenberg≡ ∅.
$K?+K'?=E$
Retículo distributivo con negación $(L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset, E),')$ de todas las imágenes en tonos de gris A, B, C, D,...
$K^c?=K'?$
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria K? es una buena aproximación de ella. (Es decir, K? es un nítido).
$(M\cdot N)(x)=\min(M(x),N(x))$
$(M+N)(x)=\max(M(x),N(x))\ \forall x\in E$
Ideal principal $[\emptyset, K?]$ de $(L^E,\leq)$:
$[\emptyset, K?]=\{M\in L^E / \emptyset \leq M \leq K?\}$
$K?\cdot K'?=\emptyset$ Imagen vacía (o en blanco)
Veremos que es un proceso inmerso en otro más general...
K?
K_s
K_r
K_3
K_2
K_1
∅
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.
A
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.
K´?
E
Lienzo vacío
K?
$(L^E, \sqsubseteq)$
Una "perspectiva distinta" del conjunto L^E (proporcionada por el nuevo orden $\sqsubseteq$ en L^E),
La aproximación binaria K? de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.
$([K?, \emptyset]_{\sqsubseteq}, \sqsubseteq)$
R_q
R_p
R_2
R_3
R_1
¿Un tipo de "subconjuntos propios" de ∅?



En esta línea, si ahora borramos esta transparencia; ¡tanto $K?$ como las sucesivas etapas de borrado $R_1, R_2, \ldots$, y todo el contenido de esta transparencia, estarán ahora "incluidas" en una "transparencia vacía"! :

$$K? \sqsubseteq \emptyset,\ R_1 \sqsubseteq \emptyset, \ldots !$$

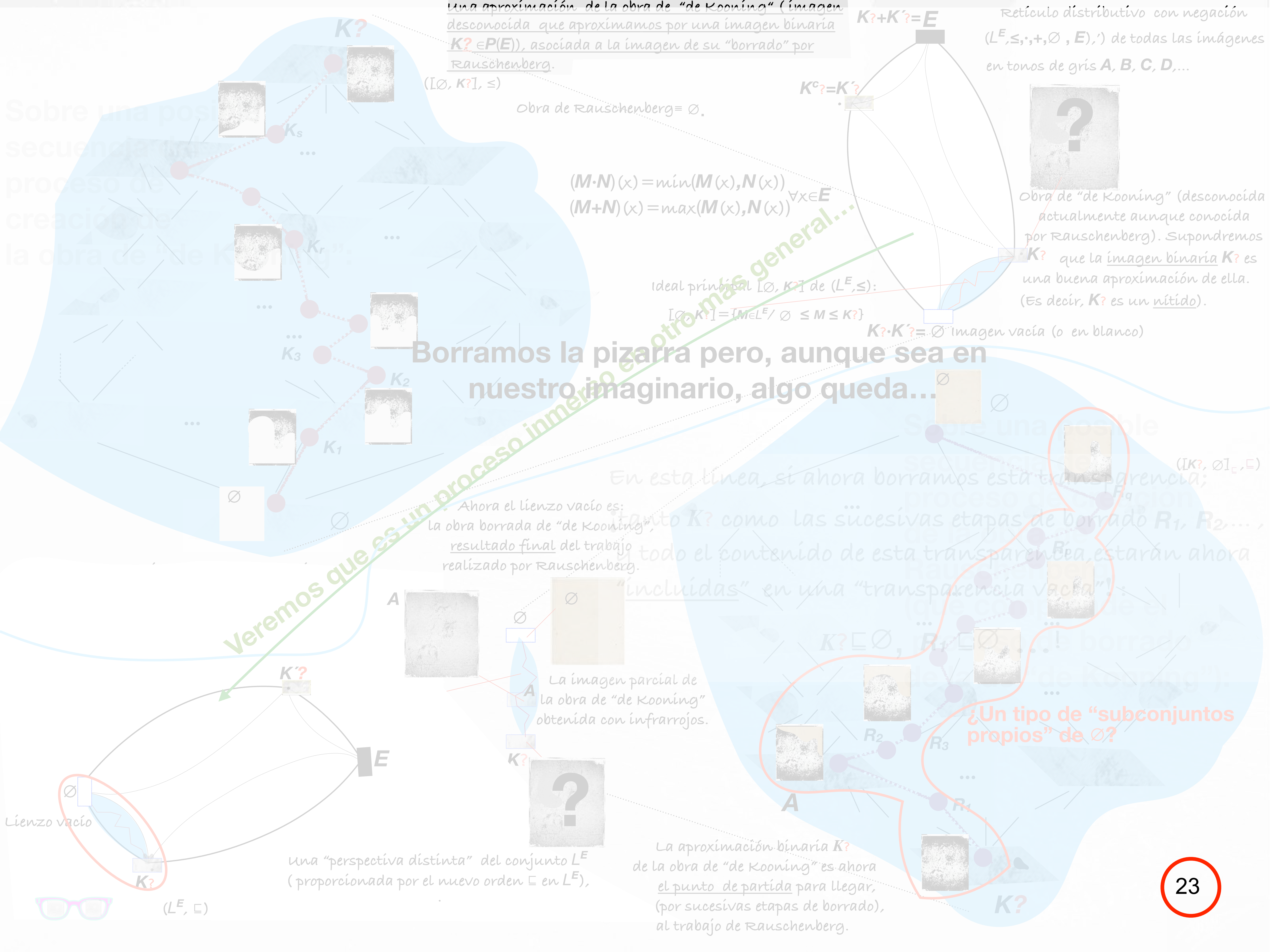


Borramos la pizarra pero, aunque sea en nuestro imaginario, algo queda…

En esta línea, si ahora borramos esta transparencia;
¡tanto $K?$ como las sucesivas etapas de borrado R_1, R_2,… ,
y todo el contenido de esta transparencia, estarán ahora "incluidas" en una "transparencia vacía"! :

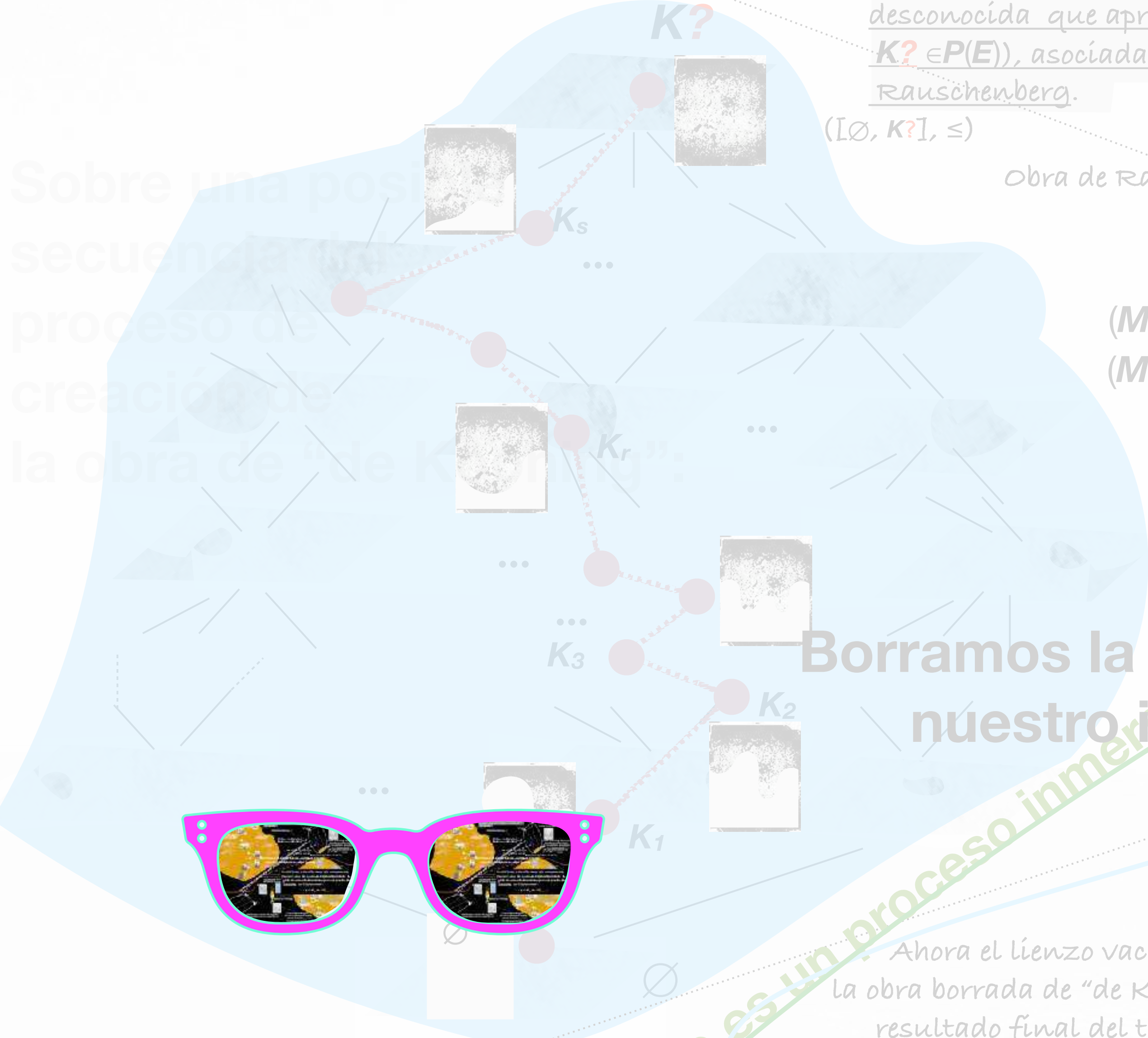
$$K? \sqsubseteq \varnothing,\ R_1 \sqsubseteq \varnothing, \ldots !$$

Borramos la pizarra pero, aunque sea en nuestro imaginario, algo queda…



Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria K? ∈P(E)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.
K?
([∅, K?], ≤)
Obra de Rauschenberg= ∅.
Ks
Kr
K3
K2
K1
K?+K´?=E
Kc?=K´?
Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , E),´) de todas las imágenes en tonos de gris A, B, C, D,...
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria K? es una buena aproximación de ella. (Es decir, K? es un nítido).
$(M·N)(x)=min(M(x),N(x))$
$(M+N)(x)=max(M(x),N(x))$ ∀x∈E
Ideal principal [∅, K?] de (L^E,≤):
[∅, K?]={M∈L^E/ ∅ ≤ M ≤ K?}
K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)
Borramos la pizarra pero, aunque sea en nuestro imaginario, algo queda...
Veremos que es un proceso inmerso en otro más general...
En esta línea, si ahora borramos esta transparencia, ¡tanto K? como las sucesivas etapas de borrado R1, R2,... y todo el contenido de esta transparencia, estarán ahora "incluidas" en una "transparencia vacía"!
K?⊑∅, R1⊑∅, ...!
([K?, ∅]⊑,⊑)
Rq
R´q
R2
R3
R1
A
K?
¿Un tipo de "subconjuntos propios" de ∅?
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.
A
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.
K´?
E
Lienzo vacío
K?
(L^E, ⊑)
Una "perspectiva distinta" del conjunto L^E (proporcionada por el nuevo orden ⊑ en L^E),
La aproximación binaria K? de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.
23

Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria $K? \in P(E)$), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.



$([\emptyset, K?], \leq)$

Obra de Rauschenberg $\equiv \emptyset$.

Retículo distributivo con negación $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de todas las imágenes en tonos de gris $A, B, C, D, \ldots$

$$(M \cdot N)(x) = min(M(x), N(x))$$
$$(M + N)(x) = max(M(x), N(x)) \quad \forall x \in E$$

Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria $K?$ es una buena aproximación de ella. (Es decir, $K?$ es un nítido).

Ideal principal $[\emptyset, K?]$ de $(L^E, \leq)$:

$[\emptyset, K?] = \{M \in L^E / \emptyset \leq M \leq K?\}$

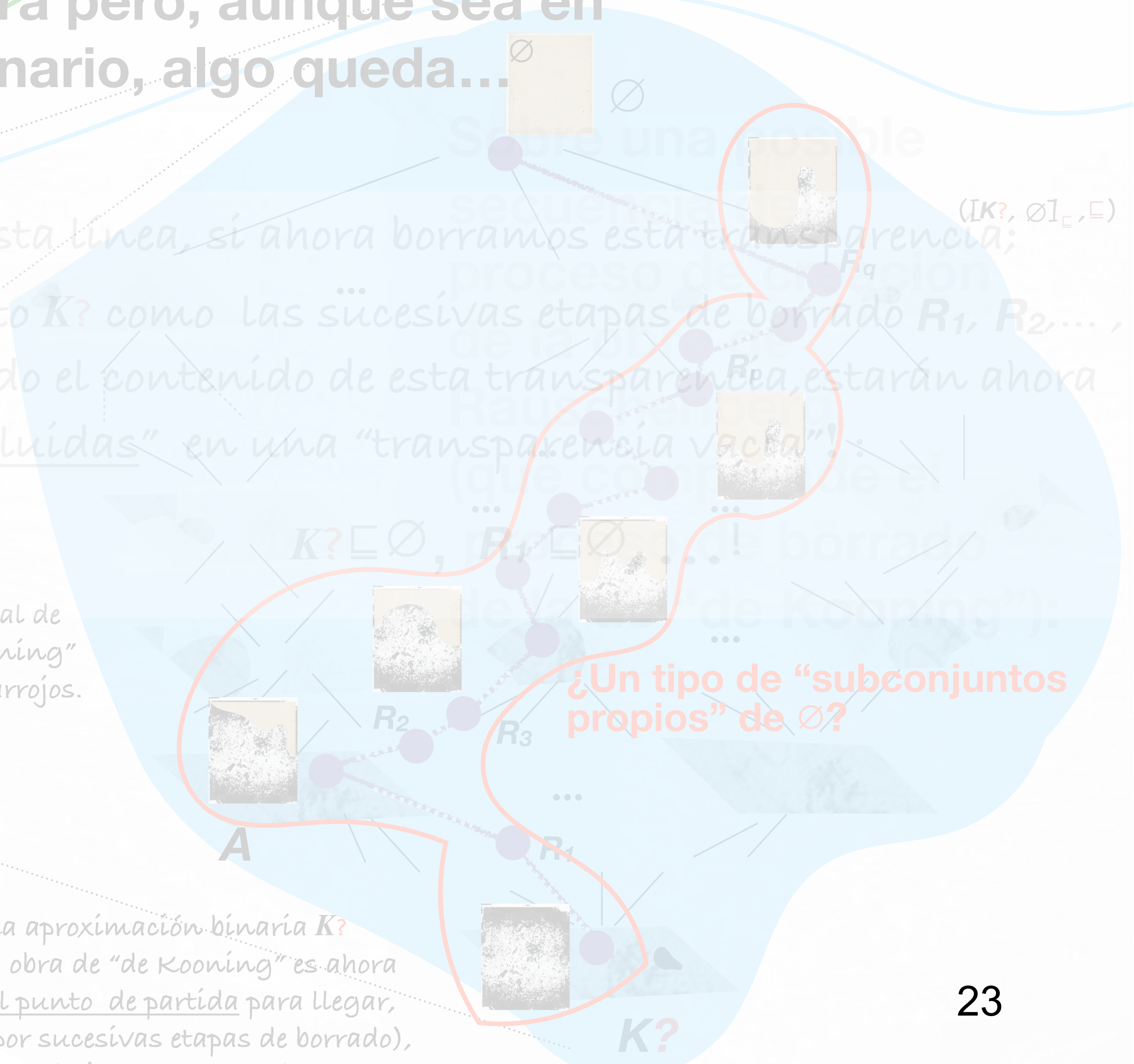
$K? \cdot K'? = \emptyset$ Imagen vacía (o en blanco)

Borramos la pizarra pero, aunque sea en nuestro imaginario, algo queda…

Veremos que es un proceso inmerso en otro más general…

En esta línea, si ahora borramos esta transparencia; ¡tanto $K?$ como las sucesivas etapas de borrado $R_1, R_2, \ldots$ y todo el contenido de esta transparencia estarán ahora "incluidas" en una "transparencia vacía"!:

$K? \sqsubseteq \emptyset, \; R_1 \sqsubseteq \emptyset, \ldots$



¿Un tipo de "subconjuntos propios" de ∅?

Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.

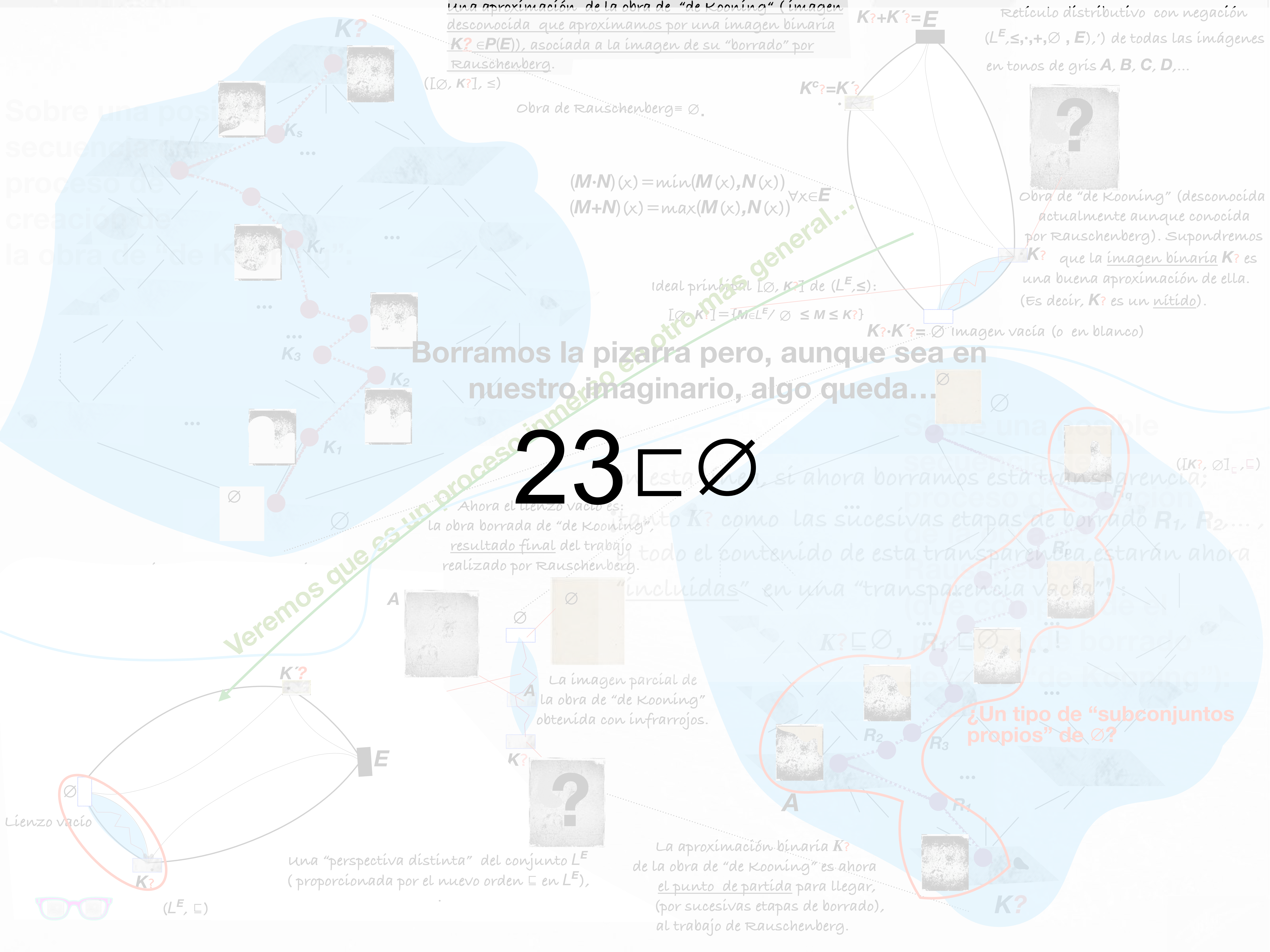
A

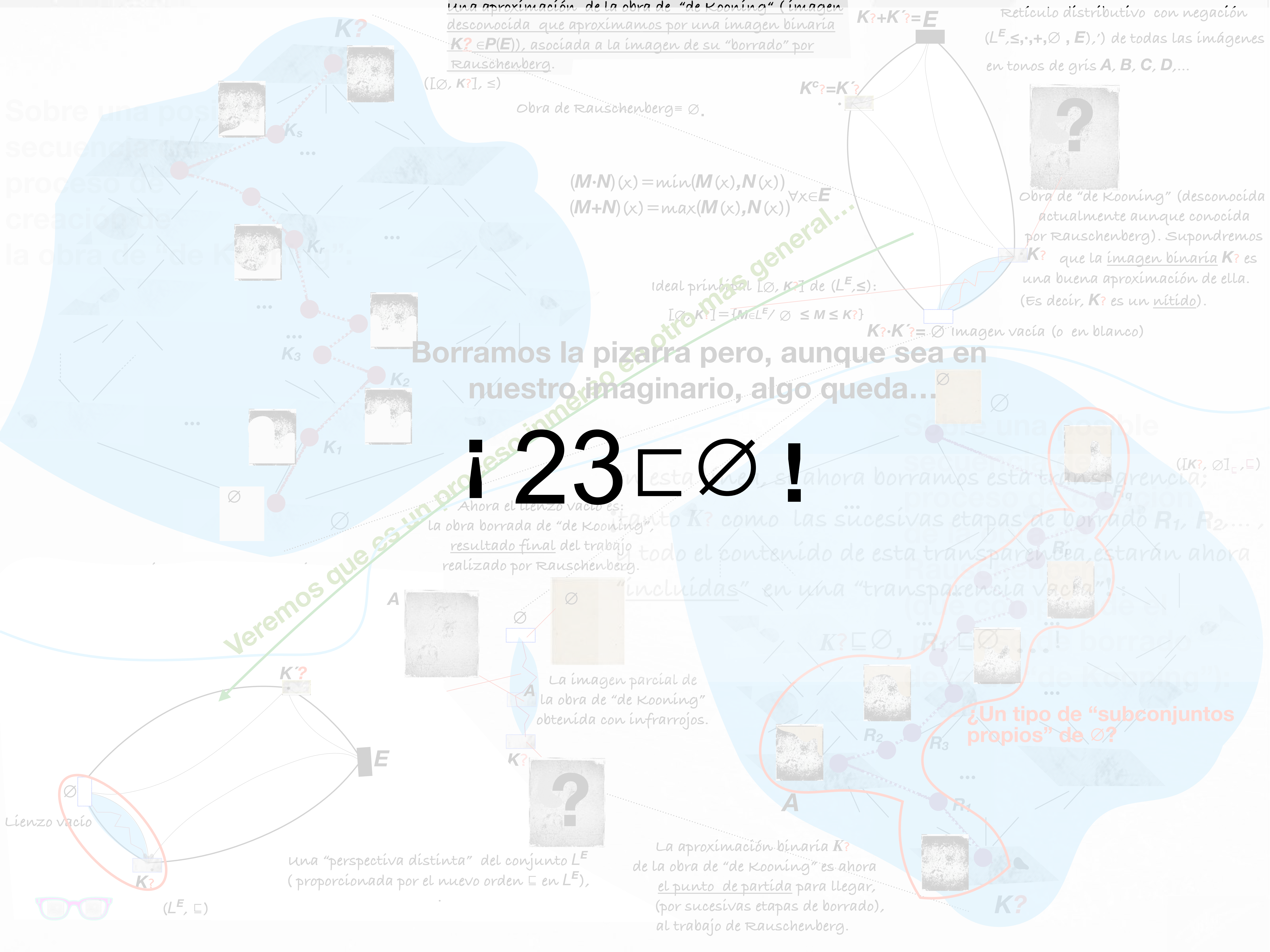
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.

Una "perspectiva distinta" del conjunto L^E (proporcionada por el nuevo orden $\sqsubseteq$ en L^E),

La aproximación binaria $K?$ de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.

23 $\sqsubseteq \emptyset$





Una aproximación de la obra de "de Kooning" (imagen desconocida que aproximamos por una imagen binaria K? ∈P(E)), asociada a la imagen de su "borrado" por Rauschenberg.
K?+K´?=E
Retículo distributivo con negación (L^E,≤,·,+,∅ , E),´) de todas las imágenes en tonos de gris A, B, C, D,...
([∅, K?], ≤)
Obra de Rauschenberg≡ ∅.
K^c?=K´?
(M·N)(x)=min(M(x),N(x))
(M+N)(x)=max(M(x),N(x)) ∀x∈E
Obra de "de Kooning" (desconocida actualmente aunque conocida por Rauschenberg). Supondremos que la imagen binaria K? es una buena aproximación de ella. (Es decir, K? es un nítido).
Ideal principal [∅, K?] de (L^E,≤):
[∅, K?]={M∈L^E/ ∅ ≤ M ≤ K?}
K?·K´?= ∅ Imagen vacía (o en blanco)
Borramos la pizarra pero, aunque sea en nuestro imaginario, algo queda…
¡23⊏∅!
Veremos que es un proceso inmerso en otro más general…
Ahora el lienzo vacío es: la obra borrada de "de Kooning", resultado final del trabajo realizado por Rauschenberg.
La imagen parcial de la obra de "de Kooning" obtenida con infrarrojos.
¿Un tipo de "subconjuntos propios" de ∅?
([K?, ∅]⊏ ,⊑)
Lienzo vacío
(L^E, ⊑)
Una "perspectiva distinta" del conjunto L^E (proporcionada por el nuevo orden ⊑ en L^E),
La aproximación binaria K? de la obra de "de Kooning" es ahora el punto de partida para llegar, (por sucesivas etapas de borrado), al trabajo de Rauschenberg.

CONTENIDO

CONTENIDO (¡No vacío!)

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "<u>contenido</u>" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "<u>Orden de Actividad</u> $\sqsubseteq^{W}$" , que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^{W} g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "<u>$A \sqsubset^{W} \emptyset$</u>" representará: "<u>el subconjunto A es</u> w-<u>parte propia del vacío</u>". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "<u>Diferencia Simétrica</u> $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^{W}$, justificará la re-interpretación del predicado <u>$(x \in A) \& (A \sqsubset^{W} \emptyset)$</u> como una "w-<u>pertenencia</u> al vacío": <u>$x \in^{W} \emptyset$</u>.

CONTENIDO

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.

CONTENIDO

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^w \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^w \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^w \varnothing$.
2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^w B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^w$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^w B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^w A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^w B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^w$, $\sqcup^w$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.
3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

CONTENIDO

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^{w}$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^{w} g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^{w} \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^{w}$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^{w} \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^{w} \varnothing$.
2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^{w}$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^{w} B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^{w}$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^{w} B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^{w} A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^{w} B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^{w}$, $\sqcup^{w}$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \to F$.
3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^{w}$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, … y otros ejemplos de Matemática Discreta.
4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,…), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas,(isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,…).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre" .
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^{w}$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

CONTENIDO

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.
2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \to F$.
3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.
4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.
5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

CONTENIDO

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

Con el propósito de que ésta sea una presentación autosuficiente, incluimos un apartado inicial: "0. Preliminares", (Transparencias 27-68), que contiene, por una parte, conceptos conocidos y por otra, algunos nuevos necesarios para la teoría que introduciremos aquí:

0.1. Resultados que atañen tanto a una generalización del concepto de "Diferencia Simétrica" en retículos distributivos con negaciones como al tipo de esos retículos que resultan idóneos para dicha generalización. Esa generalización jugará un papel básico en la definición de "w-inclusión". (Transparencias 27-45).

0.2. Algunos resultados sobre subconjuntos borrosos. (Transparencias 46-67).

0.3. Una introducción a la Morfología Matemática. (Transparencia 68).

Con el propósito de que ésta sea una presentación autosuficiente, incluimos un apartado inicial: "0. Preliminares", (Transparencias 27-68), que contiene, por una parte, conceptos conocidos y por otra, algunos nuevos necesarios para la teoría que introduciremos aquí:

0.1. Resultados que atañen tanto a una generalización del concepto de "Diferencia Simétrica" en retículos distributivos con negaciones como al tipo de esos retículos que resultan idóneos para dicha generalización. Esa generalización jugará un papel básico en la definición de "w-inclusión". (Transparencias 27-45).

0.2. Algunos resultados sobre subconjuntos borrosos. (Transparencias 46-67).

0.3. Una introducción a la Morfología Matemática. (Transparencia 68).

Nota. Se puede prescindir de esos preliminares y comenzar la presentación a partir de la transparencia 69, en la que se trata el concepto de "orden de actividad". Este concepto, (que aparece en la literatura especializada sobre el tratamiento de imágenes digitalizadas mediante la teoría "Morfología Matemática"), se utilizará aquí por primera vez en un contexto distinto: el de encontrar "modelos alternativos al usual para la inclusión", tanto de subconjuntos ordinarios como de subconjuntos borrosos.

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^w$" , que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^w g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^w \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^w$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^w \emptyset)$ como una "w-pertenencia" al vacío": $x \in^w \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^w$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^w B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^w$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su " w-intersección" asociada: "$A \sqcap^w B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^w A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^w B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^w$, $\sqcup^w$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^w$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos.... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :

Nota. Se puede prescindir de esos preliminares y comenzar la presentación a partir de la transparencia 69, en la que se trata el concepto de "orden de actividad". Este concepto, (que aparece en la literatura especializada sobre el tratamiento de imágenes digitalizadas mediante la teoría "Morfología Matemática"), se utilizará aquí por primera vez en un contexto distinto: el de encontrar "modelos alternativos al usual para la inclusión", tanto de subconjuntos ordinarios como de subconjuntos borrosos.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^w$ y los operadores $\sqcap^w$, $\sqcap^w$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de [illegible]

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" [illegible]

Nota. Se puede prescindir de esos preliminares y comenzar la presentación a partir de la transparencia 69, en la que se trata el concepto de "orden de actividad". Este concepto, (que aparece en la literatura especializada sobre el tratamiento de imágenes digitalizadas mediante la teoría "Morfología Matemática"), se utilizará aquí por primera vez en un contexto distinto: el de encontrar "modelos alternativos al usual para la inclusión", tanto de subconjuntos ordinarios como de subconjuntos borrosos.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos relevantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, … y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,…), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,…).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

Nota1. En este trabajo aparece como elemento distinguido la extensión del operador diferencia simétrica "Δ" de la Teoría de Conjuntos, a otros en la teoría de Retículos Distributivos y acotados $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$. Esa extensión se fundamenta en negaciones $':L\rightarrow L$.

En estos preliminares analizamos los retículos y las negaciones idóneas para que las extensiones conserven propiedades del operador "Δ".

0. Preliminares. (Sobre negaciones fuertes en retículos distributivos acotados)

Retículos distributivos y acotados con una negación $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$

Conjunto ordenado $(L,\leq)$ con elementos mínimo 0 y máximo 1 y las operaciones:
ínfimo: $x\cdot y=\max\{z\in L \,/\, (z\leq x)\,\&\,(z\leq y)\}$, supremo: $x+y=\min\{u\in L \,/\, (x\leq u)\,\&\,(y\leq u)\}$ $\forall (x,y)\in L^2$
que son distributivas: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $\forall (x,y,z)\in L^3$ (Basta exigir una de las dos condiciones de distributividad)

Grätzer, E. Lattice Theory: Foundation
Springer Basel AG 2011

Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

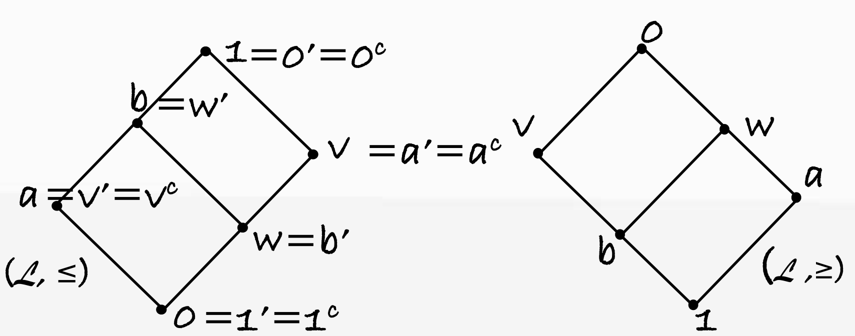
Retículos distributivos y acotados con una negación $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$

Conjunto ordenado $(L,\leq)$ con elementos mínimo 0 y máximo 1 y las operaciones:
ínfimo: $x\cdot y=\max\{z\in L\,/\,(z\leq x)\,\&\,(z\leq y)\}$, supremo: $x+y=\min\{u\in L\,/\,(x\leq u)\,\&\,(y\leq u)\}\ \forall(x,y)\in L^2$
que son distributivas: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)\ \forall(x,y,z)\in L^3$

Negación fuerte $':L\to L$ tal que: es involución: $(A''=A\ \forall A\in L)$ y antítona: $((A\leq B)\Rightarrow(A'\geq B'))$.

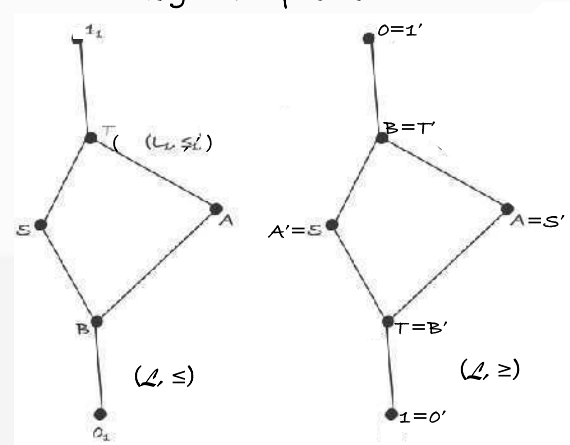
Una negación supone un antisomorfismo en $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ (Cierta "simetría" entre $(L,\leq)$ y $(L,\geq)$):

Negación fuerte ':L→L



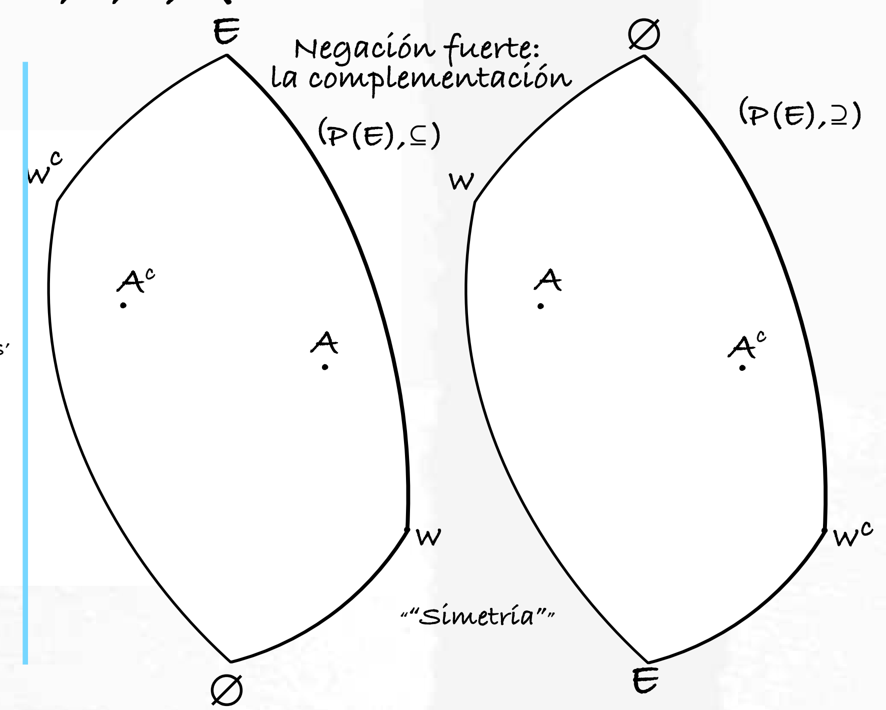
"Simetría"

Negación fuerte ':L→L



""Simetría""

Negación fuerte:
la complementación



""Simetría""

Grätzer, E. Lattice Theory: Foundation
Springer Basel AG 2011

Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de
Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

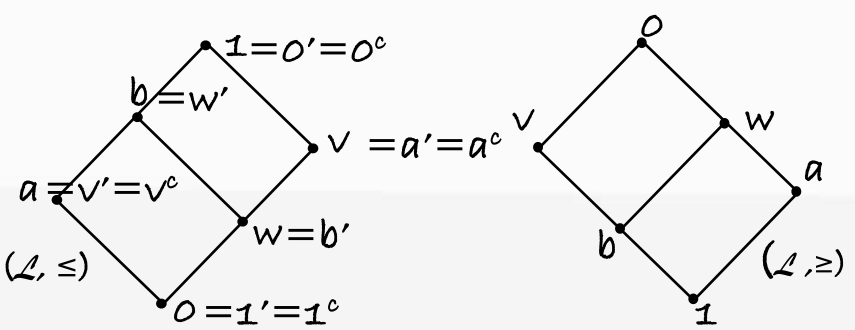
Retículos distributivos y acotados con una negación $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$

Conjunto ordenado $(L,\le)$ con elementos mínimo 0 y máximo 1 y las operaciones:
ínfimo: $x\cdot y=\max\{z\in L\,/\,(z\le x)\,\&\,(z\le y)\}$, supremo: $x+y=\min\{u\in L\,/\,(x\le u)\,\&\,(y\le u)\}\ \forall(x,y)\in L^2$
que son distributivas: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z,\ x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)\ \forall(x,y,z)\in L^3$

Negación fuerte $':L\to L$ tal que: es involución: $(A''=A\ \forall A\in L)$ y antítona: $((A\le B)\Rightarrow(A'\ge B'))$.

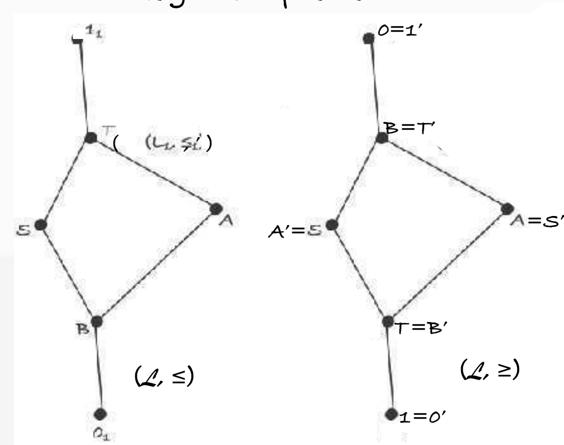
Una negación supone un antisomorfismo en $(L,\le,\cdot,+,0,1)$ (Cierta "simetría" entre $(L,\le)$ y $(L,\ge)$):

Negación fuerte $':L\to L$

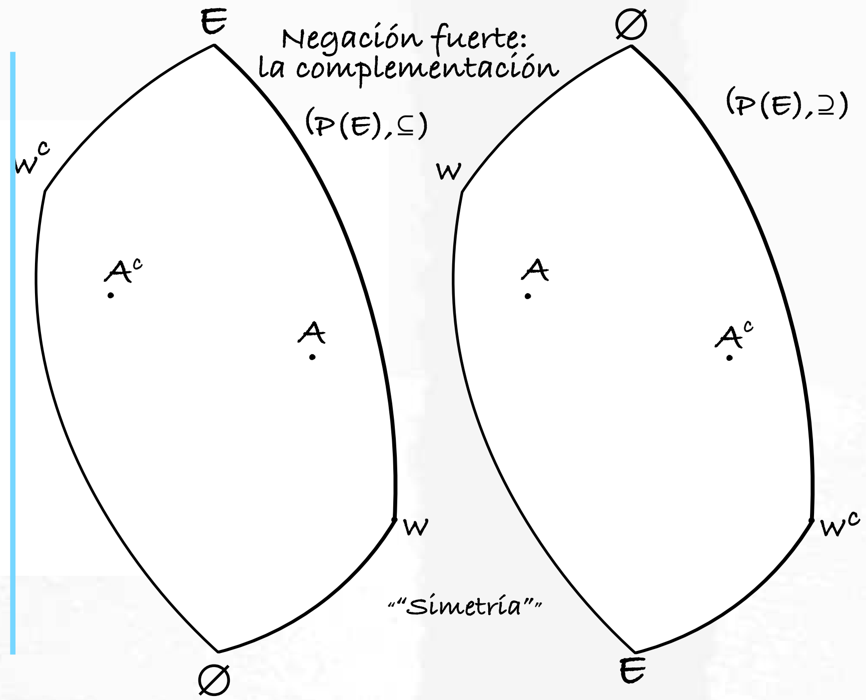


"Simetría"

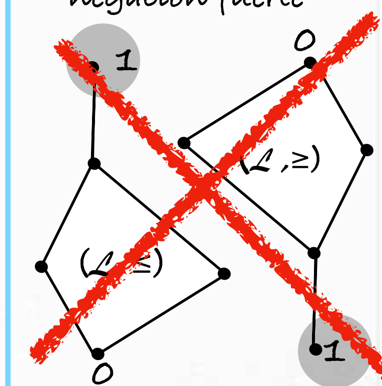
Negación fuerte $':L\to L$



""Simetría""



""Simetría""



"No simetría"

Grätzer, E. Lattice Theory: Foundation
Springer Basel AG 2011

Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de
Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

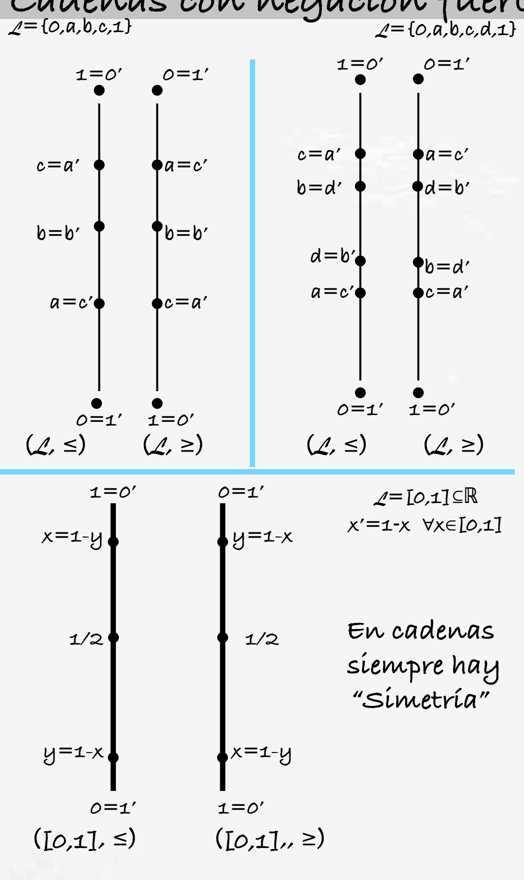
Retículos distributivos y acotados con una negación $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$

Conjunto ordenado $(L,\leq)$ con elementos mínimo 0 y máximo 1 y las operaciones:
ínfimo: $x\cdot y=\max\{z\in L/(z\leq x)\&(z\leq y)\}$, supremo: $x+y=\min\{u\in L/(x\leq u)\&(y\leq u)\}$ $\forall(x,y)\in L^2$
que son distributivas: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $\forall(x,y,z)\in L^3$

Negación fuerte $':L\to L$ tal que: es involución: $(A''=A\ \forall A\in L)$ y antítona: $((A\leq B)\Rightarrow(A'\geq B'))$.

Una negación supone un antisomorfismo en $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ (cierta "simetría" entre $(L,\leq)$ y $(L,\geq)$):

Cadenas con negación fuerte. (Siempre con simetría).



Proposición. Si $(L,\leq)$ es una cadena acotada con una negación fuerte, entonces:

Los subconjuntos de L: $\mathcal{I}_{(')}(L)=\{x\cdot x'/x\in L\}$ y $S_{(')}(L)=\{y+y'/y\in L\}$ son tales que

(i) $\mathcal{I}_{(')}(L)=\{t\in L/t\leq t'\}$ y $S_{(')}(L)=\{z\in L/z\geq z'\}$.

(ii) $L=\mathcal{I}_{(')}(L)\cup S_{(')}(L)$, $\mathcal{I}_{(')}(L)\cap S_{(')}(L)=\{u\in L/u=u'\}$

(iii) Se verifica la desigualdad $(x\cdot x')\leq(y+y')$ $\forall(x,y)\in L^2$

Demostración (i) Si $a\in\mathcal{I}_{(')}(L)$ entonces $\exists x\in L$: $a=x\cdot x'$, luego $a=x\cdot x'\leq x+x'=(x\cdot x')'=a'$. Si $x\leq x'$ entonces $x=x\cdot x'$.

Si $b\in S_{(')}(L)$ entonces $\exists y\in L$: $b=y\cdot y'$, luego $b=y+y'\geq y\cdot y'=(y+y')'=b'$. Si $y\leq y'$ entonces $y=y+y'$.

(ii) Sea $a\in L$. Por se cadena, se verifica $a\leq a'$ o $a\geq a'$. En el primer caso $a\in\mathcal{I}_{(')}(L)$ y en el segundo $a\in S_{(')}(L)$.

Si $x\in\mathcal{I}_{(')}(L)\cap S_{(')}(L)$ entonces $x'\leq x\leq x'$, luego $x=x'$.

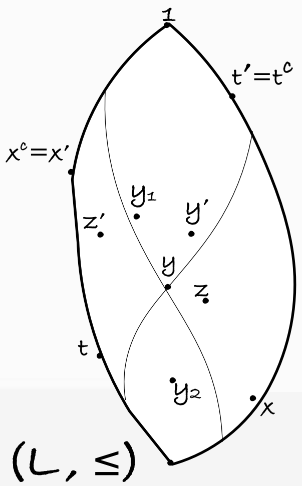
(iii) Si $(x,y)\in L$, entonces $x\leq y$ o $x\geq y$. En el primer caso, $x\cdot x'\leq x\leq y\leq y+y'$. En el segundo $x\cdot x'\leq x'\leq y'\leq y+y'$.∎

Grätzer, E. Lattice Theory: Foundation
Springer Basel AG 2011

Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de
Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

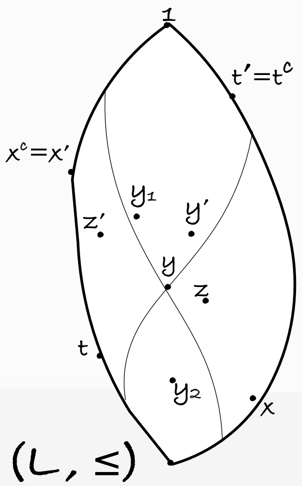
Negaciones fuertes $' : L \longrightarrow L$ en retículos distributivos acotados $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.



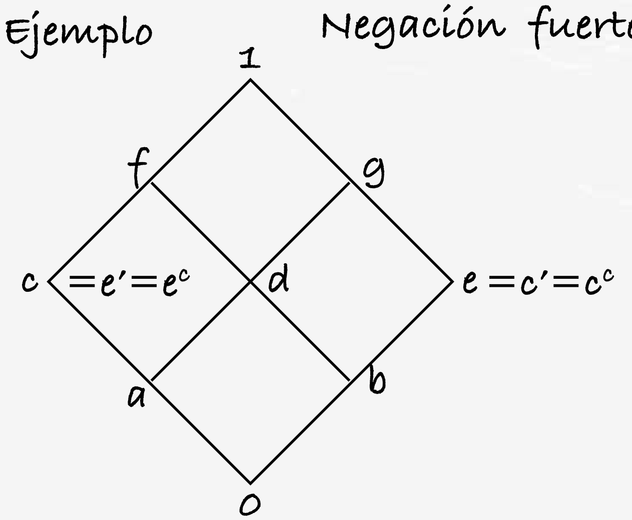
Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#)



$(L, \leq)$

(#) Ejemplo

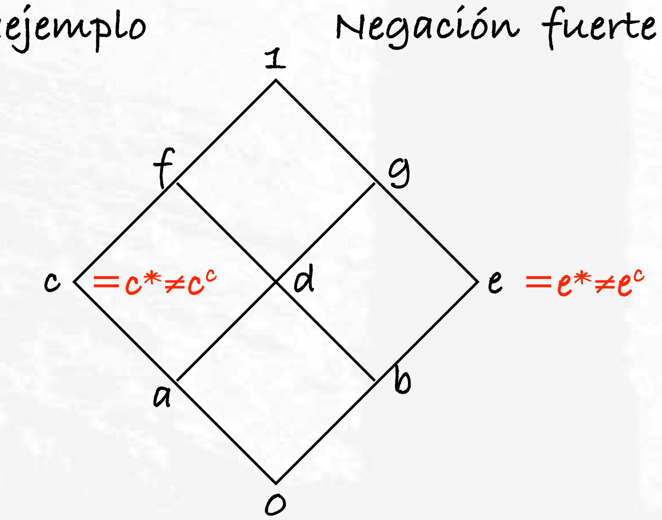


$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

Negación fuerte ':

x	x'
0	1
a	g
b	f
c	e
d	d
e	c
f	b
g	a
1	0

(#) Contraejemplo



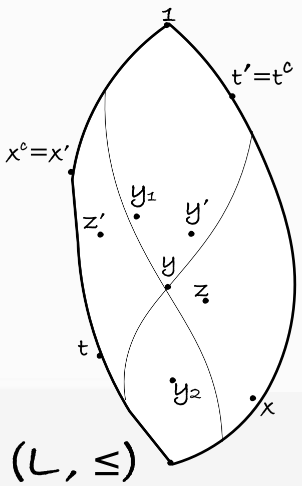
$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), *)$

Negación fuerte *:

x	x*
0	1
a	f
b	g
c	c
d	d
e	e
f	a
g	b
1	0

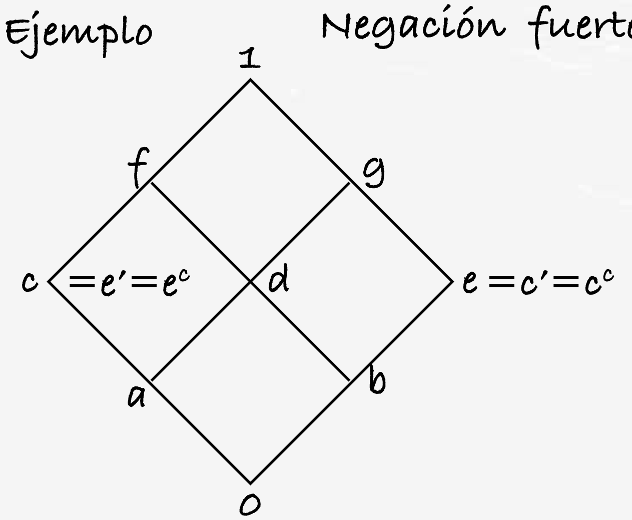
Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#)



$(L, \leq)$

(#) Ejemplo

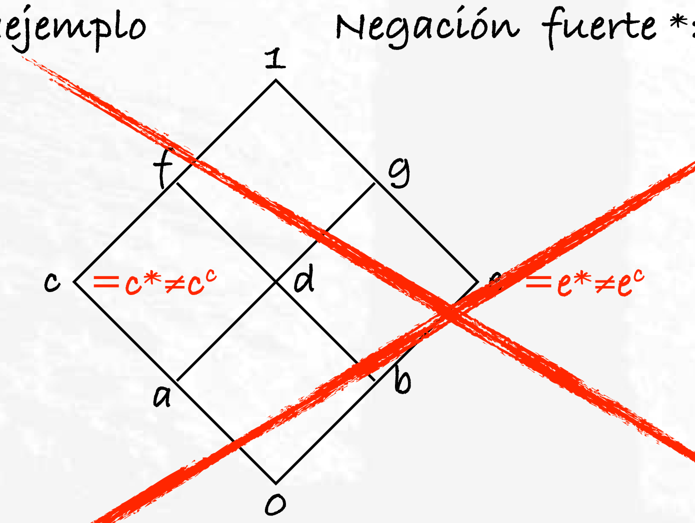


$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

Negación fuerte ′:

x	x′
0	1
a	g
b	f
c	e
d	d
e	c
f	b
g	a
1	0

(#) Contraejemplo



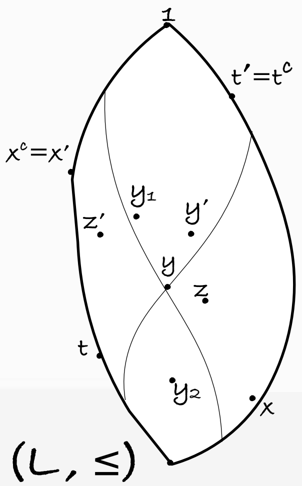
$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), *)$

Negación fuerte *:

x	x*
0	1
a	f
b	g
c	c
d	d
e	e
f	a
g	b
1	0

Trillas, E. Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos. Stochastica III-1, 47-69 (1979)

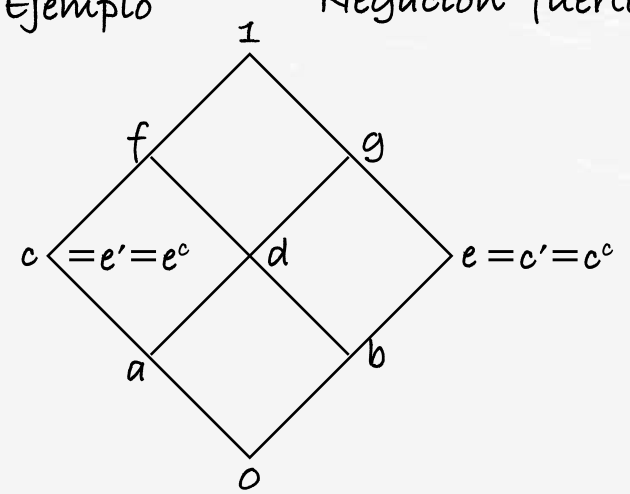
$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$. (#) El subconjunto



$(L, \leq)$

$N(L) = \{w \in L \,/\, w' = w^c\}$ es un sub-retículo del anterior y $((N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es la sub-álgebra de los elementos nítidos.

(#) Ejemplo

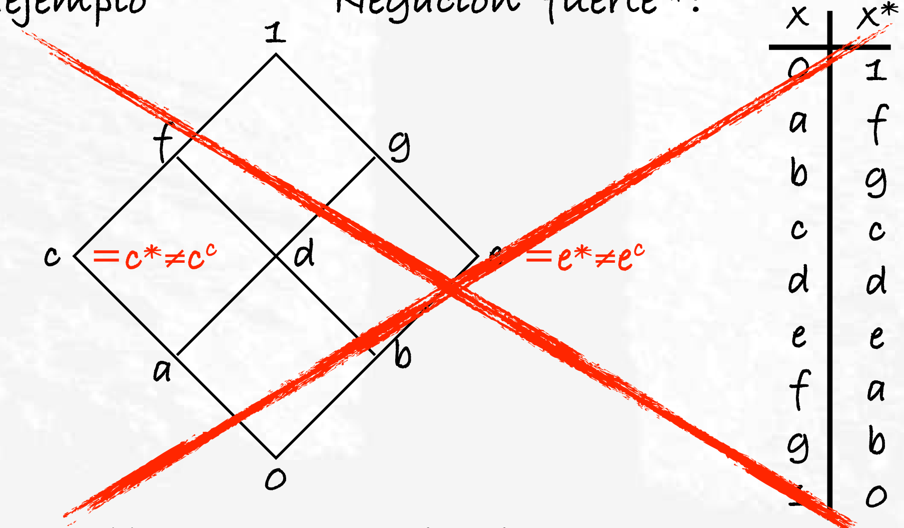


$((L, \leq, ., +, 0, 1), ')$

Negación fuerte ':

x	x'
0	1
a	g
b	f
c	e
d	d
e	c
f	b
g	a
1	0

(#) Contraejemplo

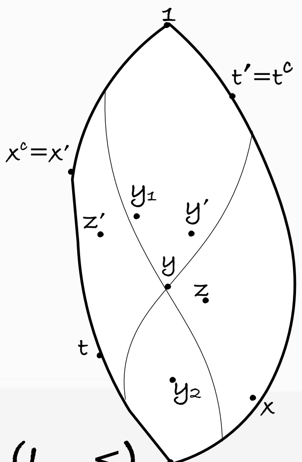


$((L, \leq, ., +, 0, 1), *)$

Negación fuerte *:

x	x^*
0	1
a	f
b	g
c	c
d	d
e	e
f	a
g	b
1	0

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#) El subconjunto $N(L) = \{w \in L \,/\, w' = w^c\}$ es un sub-retículo del anterior y $((N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es la sub-álgebra de los elementos nítidos.

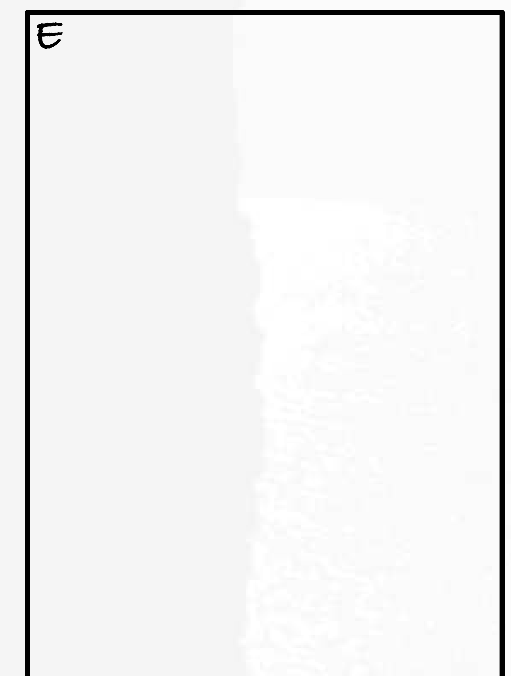


$(L, \leq)$

$((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$. Álgebra de los subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots : E \to L$ de un referencial E, donde la inclusión $A \leq B$ y las leyes intersección $A \cdot B$, unión $A+B$ y negación A' son:

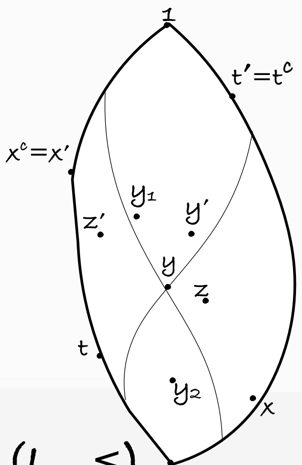
$(A \leq B) \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$,

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$, $A'(x) = [A(x)]'$ $\forall x \in E$.



Referencial

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \rightarrow L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#) El subconjunto



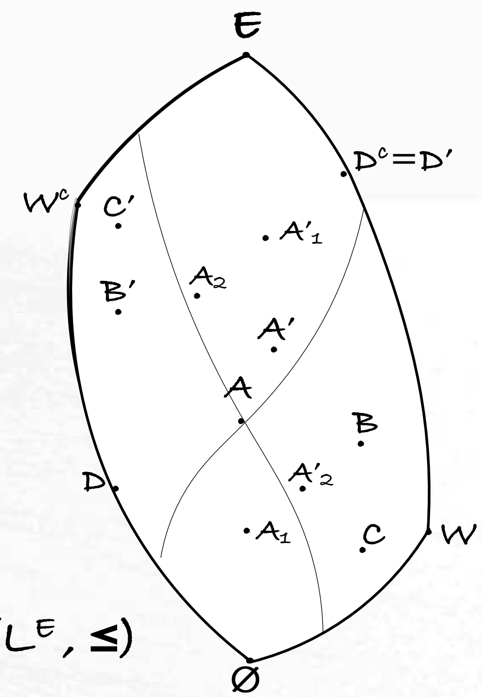
$(L, \leq)$

$N(L) = \{w \in L \,/\, w' = w^c\}$ es un sub-retículo del anterior y $((N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es la sub-álgebra de los elementos nítidos.

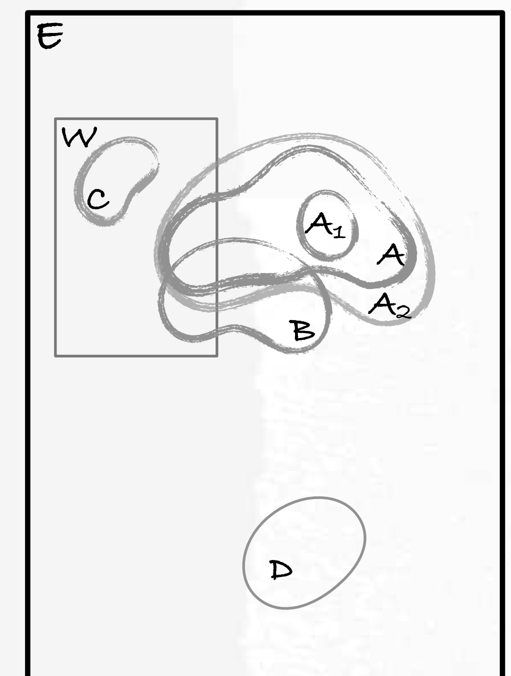
$((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$. Álgebra de los subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots : E \rightarrow L$ de un referencial E, donde la inclusión $A \leq B$ y las leyes intersección $A \cdot B$, unión $A + B$ y negación A' son:

$(A \leq B) \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$,

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$, $A'(x) = [A(x)]'$ $\forall x \in E$.

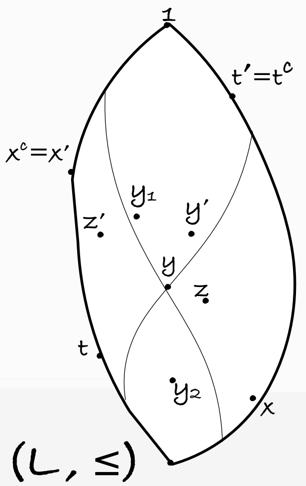


$(L^E, \leq)$



Referencial

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#) El subconjunto



$N(L) = \{w \in L \,/\, w' = w^c\}$ es un sub-retículo del anterior y $((N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es la sub-álgebra de los elementos nítidos.

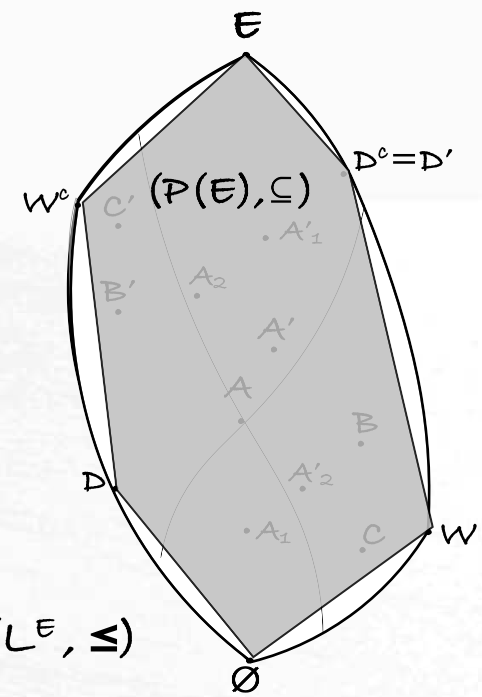
$((L^E, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1}), ')$. Álgebra de los subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots : E \to L$ de un referencial E, donde la inclusión $A \leq B$ y las leyes intersección $A \cdot B$, unión $A + B$ y negación A' son:

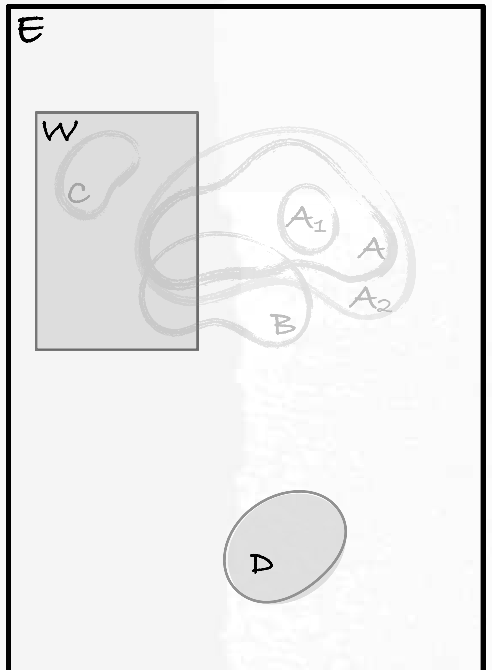
$(A \leq B) \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$,

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$, $A'(x) = [A(x)]'$ $\forall x \in E$.

$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$. El Álgebra de Boole de los subconjuntos ordinarios $D, W, \ldots$ de E con la complementación, se identifica con el sistema algebraico de subconjuntos nítidos.

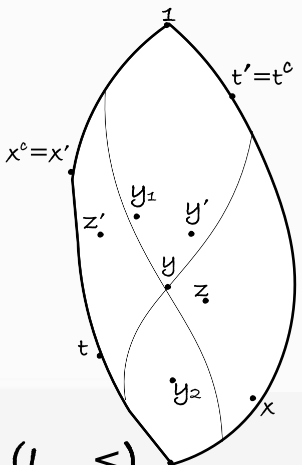
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ $(\mathcal{P}(E) \equiv N(E), \mathbf{0} \equiv \varnothing, \mathbf{1} \equiv E)$.





Referencial

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ Sistema algebraico determinado po un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte $' : L \to L$ tal que, si $w \in L$ tiene complemento w^c, entonces $w^c = w'$.(#) El subconjunto $N(L) = \{w \in L \,/\, w' = w^c\}$ es un sub-retículo del anterior y $((N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es la sub-álgebra de los elementos nítidos.

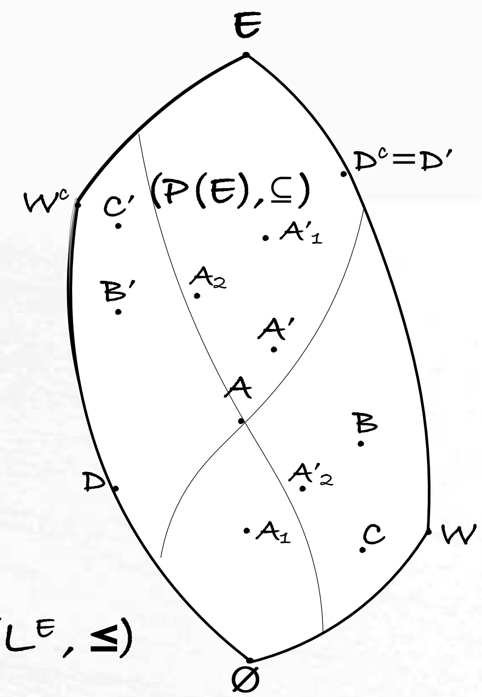


$(L, \leq)$

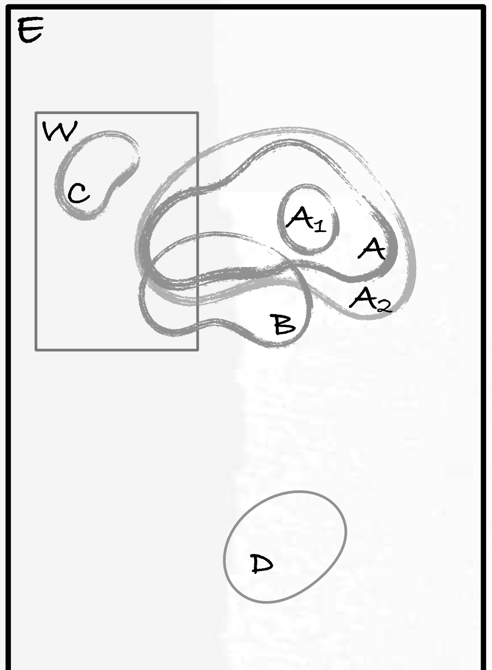
$((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$. Álgebra de los subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots : E \to L$ de un referencial E, donde la inclusión $A \leq B$ y las leyes intersección $A \cdot B$, unión $A+B$ y negación A' son:

$(A \leq B) \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$,

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$, $A'(x) = [A(x)]'$ $\forall x \in E$.



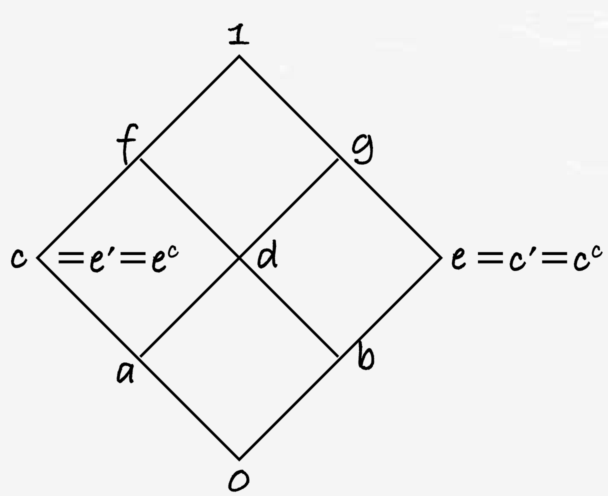
$(L^E, \leq)$



Referencial

Caso más favorable:
Retículos distributivos con negaciones fuertes tales que
$(x \text{ con complemento } x^c) \Rightarrow (x' = x^c)$

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ $(P(E) \equiv N(E)$, $\mathbf{0} \equiv \emptyset$, $\mathbf{1} \equiv E)$.



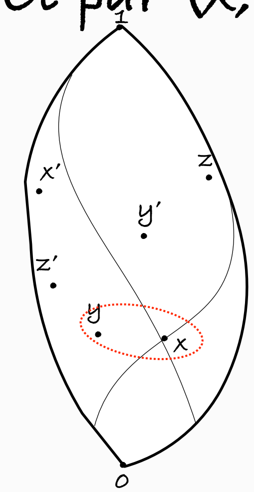
$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

x	x'
0	1
a	g
b	f
c	e
d	d
e	c
f	b
g	a
1	0

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L X L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.

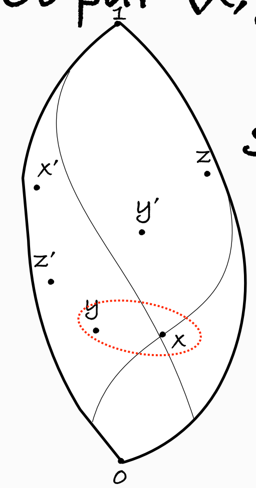


$(L, \leq)$

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

<u>Definición</u>.

El par $(x,y) \in L X L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



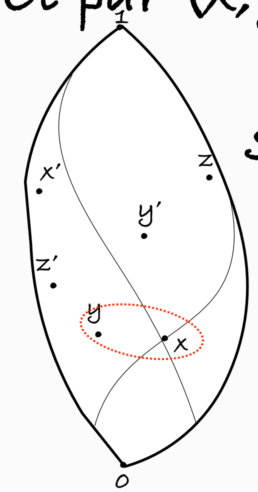
$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

<u>Definición</u>.

El par $(x,y) \in L X L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

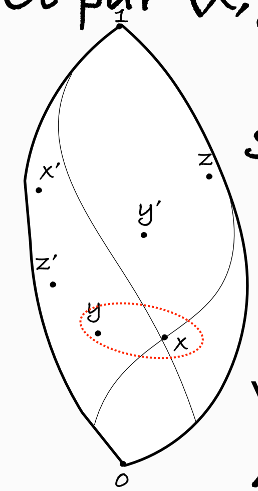
Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

((x,x) es " (')-disjunto") $\Leftrightarrow$ $(x \leq x')$.

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

<u>Definición</u>.

El par $(x,y) \in L X L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

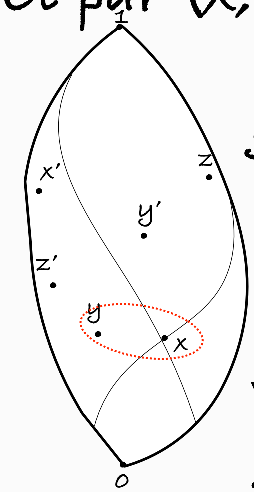
$((x,x)$ es " (')-disjunto"$) \Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x \cdot x', x \cdot x') \in L X L$ es un par "(')-disjunto": $x \cdot x' \leq x + x' = (x \cdot x')'$.

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L \times L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

$((x,x)$ es "(')-disjunto"$) \Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x \cdot x', x \cdot x') \in L \times L$ es un par "(')-disjunto": $x \cdot x' \leq x + x' = (x \cdot x')'$.

Proposición. $(x \cdot x' \not\leq y + y') \Rightarrow (x \parallel y) \,\&\, (\{x,y\} \cap N(L) = \varnothing)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x \cdot x' \leq y \cdot x' \leq y \leq (y + y'))$,

$(y \leq x) \Rightarrow (y \cdot y' \leq (x + x')) \Rightarrow (x \cdot x' \leq (y + y'))$.

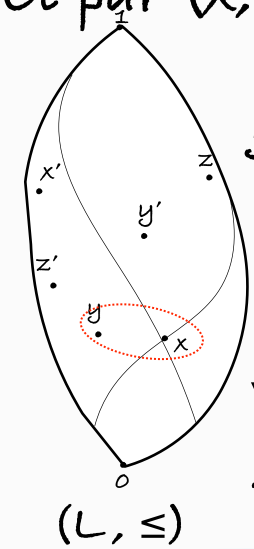
$(x' = x^c) \Rightarrow (x \cdot x' = x \cdot x^c = 0 \leq (y + y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x \cdot x' \leq 1 = (y + y^c) = (y + y'))$. ∎

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y)\in L\times L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

((x,x) es "(')-disjunto") $\Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x\in L$: $(x\cdot x', x\cdot x')\in L\times L$ es un par "(')-disjunto": $x\cdot x' \leq x+x' = (x\cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte ' en C y $\forall (x,y)\in C\times C$, el par $(x\cdot x', y\cdot y')\in C\times C$ es (')-disjunto: $x\cdot x' \leq y+y'$ $\forall (x,y)\in C\times C$.∎

Proposición. $(x\cdot x' \not\leq y+y') \Rightarrow (x \parallel y) \,\&\, (\{x,y\}\cap N(L)=\varnothing)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x\cdot x' \leq y\cdot x' \leq y \leq (y+y'))$,

$(y \leq x) \Rightarrow (y\cdot y' \leq (x+x')) \Rightarrow (x\cdot x' \leq (y+y'))$.

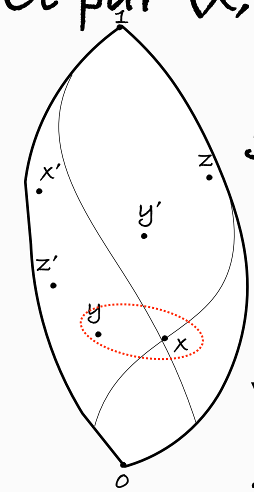
$(x'=x^c) \Rightarrow (x\cdot x' = x\cdot x^c = 0 \leq (y+y'))$

$(y'=y^c) \Rightarrow (x\cdot x' \leq 1 = (y+y^c) = (y+y'))$.∎

En $((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$:

<u>Definición</u>.

El par $(x,y)\in L\times L$ es "(′)-disjunto" si $x \le y'$.



$(L, \le)$

Si (x,y) es un par "(′)-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

((x,x) es "(′)-disjunto") $\Leftrightarrow (x \le x')$.

$\forall x\in L$: $(x\cdot x', x\cdot x')\in L\times L$ es un par "(′)-disjunto": $x\cdot x' \le x+x' = (x\cdot x')'$.

<u>Corolario</u>. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall (x,y)\in C\times C$, el par $(x\cdot x', y\cdot y')\in C\times C$ es (′)-disjunto: (#) $x\cdot x' \le y+y' \quad \forall (x,y)\in C\times C$.∎

<u>Proposición</u>. $(x\cdot x' \not\le y+y') \Rightarrow (x \mid\mid y) \,\&\, (\{x,y\}\cap N(L)=\emptyset)$

<u>Demostración.</u> $(x \le y) \Rightarrow (x\cdot x' \le y\cdot x' \le y \le (y+y'))$,

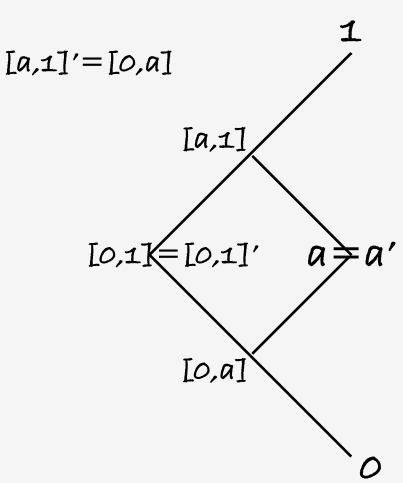
$(y \le x) \Rightarrow (y\cdot y' \le (x+x')) \Rightarrow (x\cdot x' \le (y+y'))$.

$(x'=x^c) \Rightarrow (x\cdot x' = x\cdot x^c = 0 \le (y+y'))$

$(y'=y^c) \Rightarrow (x\cdot x' \le 1 = (y+y^c) = (y+y'))$.∎

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3=\{0,a,1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

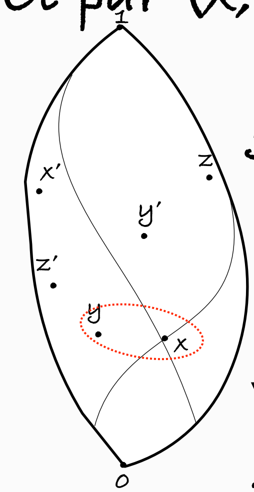


$[0,1]\cdot[0,1]' \not\le a+a'$

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L \times L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

((x,x) es "(')-disjunto") $\Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x \cdot x', x \cdot x') \in L \times L$ es un par "(')-disjunto": $x \cdot x' \leq x + x' = (x \cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall (x,y) \in C \times C$, el par $(x \cdot x', y \cdot y') \in C \times C$ es (')-disjunto: (#) $x \cdot x' \leq y + y'$ $\forall (x,y) \in C \times C$.∎

Álgebras $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x \in E}$ de retículos distributivos con negaciones fuertes y su producto

$((\mathsf{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con $\mathsf{X}_{x \in E} L_x = \{\delta : E \to \bigcup_{x \in E} L_x / \delta(x) \in L_x\}$,

orden $\delta \leq \mu \Leftrightarrow \delta(x) \leq_x \mu(x)$, $(\delta \cdot \mu)(x) = \delta(x) \cdot_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

$(\delta + \mu)(x) = \delta(x) +_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

y negación $\delta'(x) = (\delta(x))'^x$ $\forall x \in E$.

Proposición. $(x \cdot x' \not\leq y + y') \Rightarrow (x \parallel y) \,\&\, (\{x,y\} \cap N(L) = \emptyset)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x \cdot x' \leq y \cdot x' \leq y \leq (y + y'))$,

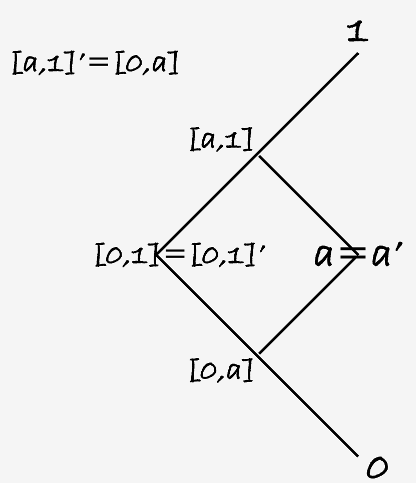
$(y \leq x) \Rightarrow (y \cdot y' \leq (x + x')) \Rightarrow (x \cdot x' \leq (y + y'))$.

$(x' = x^c) \Rightarrow (x \cdot x' = x \cdot x^c = 0 \leq (y + y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x \cdot x' \leq 1 = (y + y^c) = (y + y'))$.∎

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3 = \{0, a, 1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

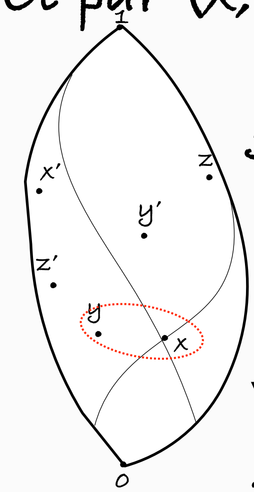


$[0,1] \cdot [0,1]' \not\leq a + a'$

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y)\in L\text{X}L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

$((x,x)$ es "(')-disjunto"$) \Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x\in L$: $(x\cdot x', x\cdot x')\in L\text{X}L$ es un par "(')-disjunto": $x\cdot x' \leq x+x' = (x\cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall(x,y)\in C\text{X}C$, el par $(x\cdot x', y\cdot y')\in C\text{X}C$ es (')-disjunto: (#) $x\cdot x' \leq y+y' \;\; \forall(x,y)\in C\text{X}C$.∎

Álgebras $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x\in E}$ de retículos distributivos con negaciones fuertes y su producto

$((\underset{x\in E}{\text{X}} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con $\underset{x\in E}{\text{X}} L_x = \{\delta : E \to \bigcup_{x\in E} L_x / \delta(x)\in L_x\}$,

orden $\delta \leq \mu \Leftrightarrow \delta(x) \leq_x \mu(x)$, $(\delta\cdot\mu)(x) = \delta(x)\cdot_x \mu(x) \;\forall x\in E$,

$(\delta+\mu)(x) = \delta(x) +_x \mu(x) \;\forall x\in E$,

y negación $\delta'(x) = (\delta(x))'^x \;\forall x\in E$.

Proposición. $(x\cdot x' \nleq y+y') \Rightarrow (x \,||\, y) \,\&\, (\{x,y\}\cap N(L) = \emptyset)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x\cdot x' \leq y\cdot x' \leq y \leq (y+y'))$,

$(y \leq x) \Rightarrow (y\cdot y' \leq (x+x')) \Rightarrow (x\cdot x' \leq (y+y'))$.

$(x' = x^c) \Rightarrow (x\cdot x' = x\cdot x^c = 0 \leq (y+y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x\cdot x' \leq 1 = (y+y^c) = (y+y'))$.∎

Proposición. Si $\forall x\in E$ se verifica

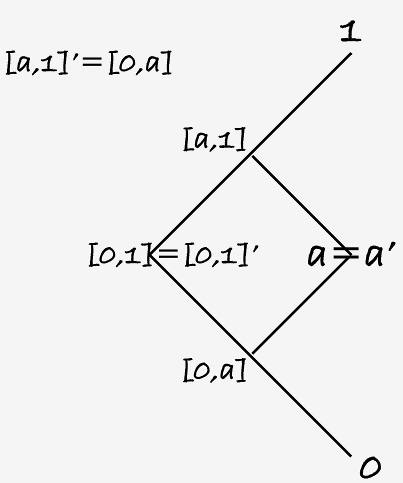
$(z \cdot_x z') \leq_x (y +_x y') \;\forall(y,z)\in L_x\text{X}L_x$, entonces también se verifica

$$\delta\cdot\delta' \leq \mu+\mu' \quad \forall(\delta,\mu)\in \underset{x\in E}{\text{X}} L_x \text{X} \underset{x\in E}{\text{X}} L_x$$

Dem $(\delta\cdot\delta')(x) = (\delta(x)\cdot_x \delta(x)'^x) \leq_x (\mu(x) +_x \mu(x)'^x) = (\mu+\mu')(x)$.∎

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3 = \{0,a,1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

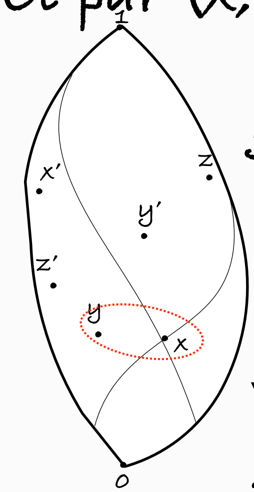


$[0,1]\cdot[0,1]' \nleq a+a'$

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L\times L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



$(L, \leq)$

Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

$((x,x)$ es " (')-disjunto"$) \Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x\cdot x', x\cdot x') \in L\times L$ es un par "(')-disjunto": $x\cdot x' \leq x + x' = (x\cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall (x,y) \in C\times C$, el par $(x\cdot x', y\cdot y') \in C\times C$ es (')-disjunto: (#) $x\cdot x' \leq y + y'$ $\forall (x,y) \in C\times C$.∎

Álgebras $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x\in E}$ de retículos distributivos con negaciones fuertes y su producto $((\mathop{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con $\mathop{X}_{x\in E} L_x = \{\delta : E \to \bigcup_{x\in E} L_x / \delta(x) \in L_x\}$, orden $\delta \leq \mu \Leftrightarrow \delta(x) \leq_x \mu(x)$, $(\delta \cdot \mu)(x) = \delta(x) \cdot_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

$(\delta + \mu)(x) = \delta(x) +_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

y negación $\delta'(x) = (\delta(x))'^x$ $\forall x \in E$.

Proposición. $(x\cdot x' \nleq y + y') \Rightarrow (x \parallel y) \,\&\, (\{x,y\} \cap N(L) = \emptyset)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x\cdot x' \leq y\cdot x' \leq y \leq (y+y'))$,

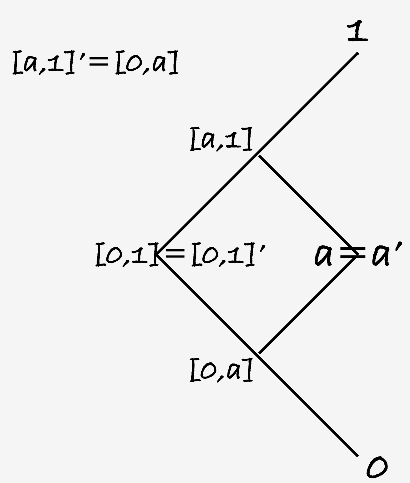
$(y \leq x) \Rightarrow (y\cdot y' \leq (x+x')) \Rightarrow (x\cdot x' \leq (y+y'))$.

$(x' = x^c) \Rightarrow (x\cdot x' = x\cdot x^c = 0 \leq (y+y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x\cdot x' \leq 1 = (y+y^c) = (y+y'))$.∎

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3 = \{0,a,1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$



$[0,1]\cdot[0,1]' \nleq a + a'$

Proposición. Si $\forall x \in E$ se verifica $(z \cdot_x z') \leq_x (y +_x y')$ $\forall (y,z) \in L_x \times L_x$, entonces también se verifica

(1) $\delta\cdot\delta' \leq \mu + \mu'$ $\quad \forall (\delta,\mu) \in \mathop{X}_{x\in E} L_x \times \mathop{X}_{x\in E} L_x$

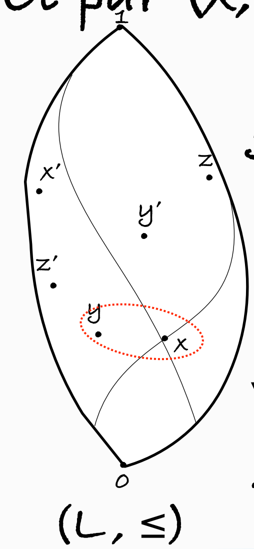
Dem $(\delta\cdot\delta')(x) = (\delta(x) \cdot_x \delta(x)'^x) \leq_x (\mu(x) +_x \mu(x)'^x) = (\mu + \mu')(x)$.∎

Corolario. En todo retículo producto de cadenas con negación $((\mathop{X}_{x\in E} C_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y en el retículo con negación $((C^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ de subconjuntos C-borrosos de E valorados en la cadena C, se verifica (1).∎

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L \times L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

((x,x) es "(')-disjunto") $\Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x \cdot x', x \cdot x') \in L \times L$ es un par "(')-disjunto": $x \cdot x' \leq x + x' = (x \cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall (x,y) \in C \times C$, el par $(x \cdot x', y \cdot y') \in C \times C$ es (')-disjunto: (#) $x \cdot x' \leq y + y' \quad \forall (x,y) \in C \times C$. ∎

Álgebras $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x \in E}$ de retículos distributivos con negaciones fuertes y su producto $((\mathop{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con $\mathop{X}_{x\in E} L_x = \{\delta : E \to \bigcup_{x \in E} L_x / \delta(x) \in L_x\}$, orden $\delta \leq \mu \Leftrightarrow \delta(x) \leq_x \mu(x)$, $(\delta \cdot \mu)(x) = \delta(x) \cdot_x \mu(x) \ \forall x \in E$,

$(\delta + \mu)(x) = \delta(x) +_x \mu(x) \ \forall x \in E$,

y negación $\delta'(x) = (\delta(x))'^x \ \forall x \in E$.

Proposición. $(x \cdot x' \not\leq y + y') \Rightarrow (x \parallel y) \& (\{x,y\} \cap N(L) = \emptyset)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x \cdot x' \leq y \cdot x' \leq y \leq (y + y'))$,

$(y \leq x) \Rightarrow (y \cdot y' \leq (x + x')) \Rightarrow (x \cdot x' \leq (y + y'))$.

$(x' = x^c) \Rightarrow (x \cdot x' = x \cdot x^c = 0 \leq (y + y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x \cdot x' \leq 1 = (y + y^c) = (y + y'))$. ∎

Proposición. Si $\forall x \in E$ se verifica

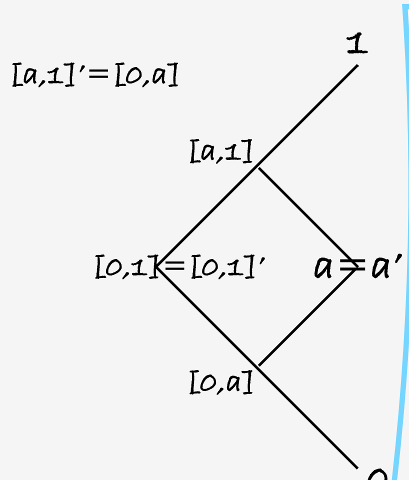
$(z \cdot_x z') \leq_x (y +_x y') \ \forall (y,z) \in L_x \times L_x$, entonces también se verifica

(1) $\delta \cdot \delta' \leq \mu + \mu' \quad \forall (\delta, \mu) \in \mathop{X}_{x\in E} L_x \times \mathop{X}_{x\in E} L_x$

Dem $(\delta \cdot \delta')(x) = (\delta(x) \cdot_x \delta(x)'^x) \leq_x (\mu(x) +_x \mu(x)'^x) = (\mu + \mu')(x)$. ∎

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3 = \{0,a,1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$



$[0,1] \cdot [0,1]' \not\leq a + a'$

Proposición. Si en un retículo $(L, \leq, ')$ con negación, el par (x,y) verifica: $x \cdot x' \leq y + y'$, entonces también verifica $x \cdot x' \leq x \cdot y + x' \cdot y'$, $x \cdot x' \leq x \cdot y' + x' \cdot y$

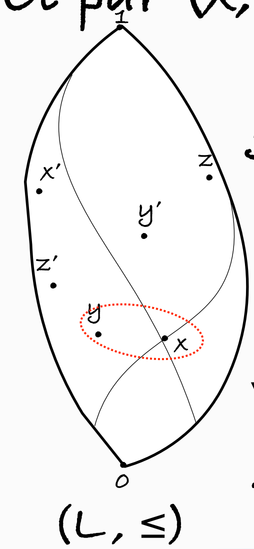
Dem $x \cdot x' \leq x \cdot x' \cdot y + x \cdot x' \cdot y' \leq x \cdot y + x' \cdot y'$. ∎

Corolario. En todo retículo producto de cadenas con negación $((\mathop{X}_{x\in E} C_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y en el retículo con negación $((C^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ de subconjuntos C-borrosos de E valorados en la cadena C, se verifica (1). ∎

En $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$:

Definición.

El par $(x,y) \in L X L$ es "(')-disjunto" si $x \leq y'$.



Si (x,y) es un par "(')-disjunto", entonces (y,x) también lo es.

$((x,x)$ es "(')-disjunto"$) \Leftrightarrow (x \leq x')$.

$\forall x \in L$: $(x \cdot x', x \cdot x') \in L X L$ es un par "(')-disjunto": $x \cdot x' \leq x + x' = (x \cdot x')'$.

Corolario. Como consecuencia:

Si L es una cadena C, entonces para toda negación fuerte $'$ en C y $\forall (x,y) \in C X C$, el par $(x \cdot x', y \cdot y') \in C X C$ es (')-disjunto: (#) $x \cdot x' \leq y + y'$ $\forall (x,y) \in C X C$.■

Álgebras $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x \in E}$ de retículos distributivos con negaciones fuertes y su producto $((\underset{x\in E}{X} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con $\underset{x\in E}{X} L_x = \{\delta : E \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x / \delta(x) \in L_x\}$, orden $\delta \leq \mu \Leftrightarrow \delta(x) \leq_x \mu(x)$, $(\delta \cdot \mu)(x) = \delta(x) \cdot_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

$(\delta + \mu)(x) = \delta(x) +_x \mu(x)$ $\forall x \in E$,

y negación $\delta'(x) = (\delta(x))'^x$ $\forall x \in E$.

Proposición. $(x \cdot x' \not\leq y + y') \Rightarrow (x \parallel y) \& (\{x,y\} \cap N(L) = \emptyset)$

Demostración. $(x \leq y) \Rightarrow (x \cdot x' \leq y \cdot x' \leq y \leq (y + y'))$,

$(y \leq x) \Rightarrow (y \cdot y' \leq (x + x')) \Rightarrow (x \cdot x' \leq (y + y'))$.

$(x' = x^c) \Rightarrow (x \cdot x' = x \cdot x^c = 0 \leq (y + y'))$

$(y' = y^c) \Rightarrow (x \cdot x' \leq 1 = (y + y^c) = (y + y'))$.■

Proposición. Si $\forall x \in E$ se verifica

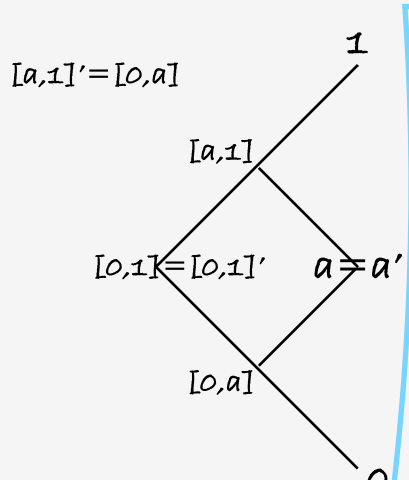
$(z \cdot_x z') \leq_x (y +_x y')$ $\forall (y,z) \in L_x X L_x$, entonces también se verifica

(1) $\delta \cdot \delta' \leq \mu + \mu'$ $\quad \forall (\delta, \mu) \in \underset{x\in E}{X} L_x X \underset{x\in E}{X} L_x$

Dem $(\delta \cdot \delta')(x) = (\delta(x) \cdot_x \delta(x)'^x) \leq_x (\mu(x) +_x \mu(x)'^x) = (\mu + \mu')(x)$.■

(#) Contra-ejemplo (L no es cadena):

Retículo de intervalos de $C_3 = \{0, a, 1\}$: $((\mathcal{I}(C_3), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$



$[0,1] \cdot [0,1]' \not\leq a + a'$

Proposición. Si en un retículo $(L, \leq, ')$ con negación, el par (x,y) verifica: $x \cdot x' \leq y + y'$, entonces también verifica $x \cdot x' \leq x \cdot y + x' \cdot y'$, $x \cdot x' \leq x \cdot y' + x' \cdot y$

Dem $x \cdot x' \leq x \cdot x' \cdot y + x \cdot x' \cdot y' \leq x \cdot y + x' \cdot y'$.■

Corolario. En todo retículo producto de cadenas con negación $((\underset{x\in E}{X} C_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y en el retículo con negación $(C^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ de subconjuntos C-borrosos de E valorados en la cadena C, se verifica (1).■

Corolario. En L^E, si $W \in 2^E$ es nítido tal que $W' = W^c$ o si L es una cadena C y W es cualquiera: $\forall A \in L^E$ se verifica $\boxed{A \cdot A' + W \cdot W' + A \cdot W + A' \cdot W' = A \cdot W + A' \cdot W'}$.■

Un análisis de las situaciones en las que se verifica la desigualdad: $[(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma')] \leq (\beta + \beta')$

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.

Sea $\acute{}: L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha$. $\forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

Proposición. Se verifica:

$$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')].$$

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.

Sea $\acute{}: L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha$. $\forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$. (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha \cdot \alpha')]$).

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta)\&(\beta \nleq \alpha)$.

Sea $\,'\!:L\to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha''=\alpha$. $\forall\alpha\in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta)\Rightarrow(\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')]\Rightarrow[(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$. (Es decir, $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')]\Rightarrow[(\beta+\beta')\nleq(\alpha\cdot\alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha\nleq\beta)\Leftrightarrow[(\alpha||\beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+\beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta>\alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \ngtr (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta)\in L\times L$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')]\Rightarrow[(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$.∎

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta)\&(\beta \nleq \alpha)$.
Sea $'{:}L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha''=\alpha.\ \forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$. (Es decir, $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\beta+\beta') \nleq (\alpha\cdot\alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha||\beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+\beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \ngtr (\beta+\beta')\ \forall(\alpha, \beta) \in L \times L$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L,\leq)$ es una cadena y $'{:}L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')\quad \forall(\alpha, \beta) \in L \times L$.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta)\&(\beta \not\leq \alpha)$.

Sea $':L\to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha''=\alpha.\ \forall\alpha\in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta)\Rightarrow(\beta' \leq \alpha'))$.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+ \beta')]\Rightarrow[(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+ \beta')]$. (Es decir, $[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+ \beta')]\Rightarrow[(\beta+ \beta')\not\leq(\alpha\cdot\alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha\not\leq \beta)\Leftrightarrow[(\alpha||\beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+ \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta>\alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \not> (\beta+ \beta')$ $\forall(\alpha, \beta)\in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+ \beta')]\Rightarrow[(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+ \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L,\leq)$ es una cadena y $':L\to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta)\in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in L X L X L$).

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.

Sea $':L \to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha'))$.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$. (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha \cdot \alpha')]$).

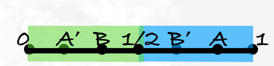
<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \ngtr (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $':L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$

$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:

$X \cdot X' \leq Y + Y'$

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.

Sea $\,' : L \to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha'))$.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha') || (\beta + \beta')].$$ (Es decir, $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha\cdot\alpha')]$).

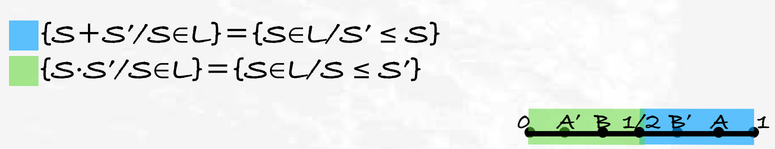
<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \ngtr (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $\,' : L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha\cdot\alpha') + (\gamma\cdot\gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

<u>Proposición</u>.[(*)] Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $\,' : \mathop{X}_{x\in E} L_x \to \mathop{X}_{x\in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x\in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A\cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x\in E} L_x) X (\mathop{X}_{x\in E} L_x).$$



Cadena L

$\forall (X\cdot Y) \in L$:
$X\cdot X' \leq Y + Y'$

(*) Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta)\&(\beta \not\leq \alpha)$.
Sea $' : L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha''=\alpha$. $\forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')].$$ (Es decir, $[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\beta+\beta') \not\leq (\alpha\cdot\alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \not\leq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha||\beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

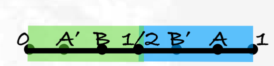
Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+\beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \not> (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L,\leq)$ es una cadena y $' : L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in L X L X L$).

<u>Proposición</u>.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\underset{x\in E}{X} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \underset{x\in E}{X} L_x \to \underset{x\in E}{X} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \underset{x\in E}{X} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

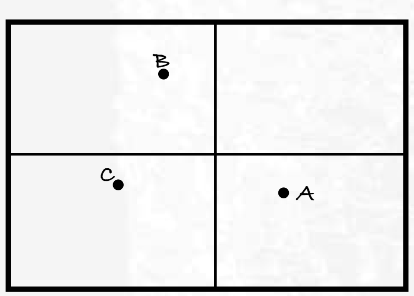
$$A\cdot A' \leq B+B' \quad \forall(A, B) \in (\underset{x\in E}{X} L_x) X (\underset{x\in E}{X} L_x).$$

$\{S+S'/S\in L\}=\{S\in L/S' \leq S\}$
$\{S\cdot S'/S\in L\}=\{S\in L/S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall(X\cdot Y) \in L$:
$X\cdot X' \leq Y+Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

(*)Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.
Sea $':L \to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha'))$.

Proposición. Se verifica:

$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$. (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha \cdot \alpha')]$).

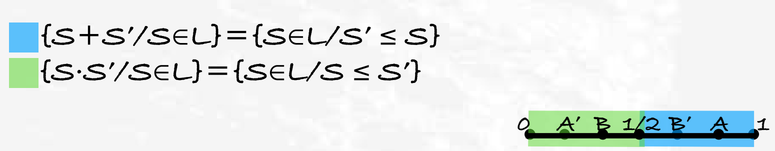
Demostración. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \ngtr (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

Corolario. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $':L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

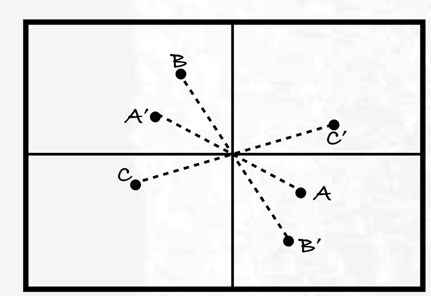
Proposición.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x \in E} L_x \to \mathop{X}_{x \in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x \in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x \in E} L_x) X (\mathop{X}_{x \in E} L_x).$$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

(*)Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.
Sea $':L \to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha'))$.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')].$$ (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha \cdot \alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

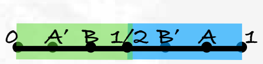
Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \ngtr (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in LXL$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $':L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in LXL$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in LXLXL$).

<u>Proposición</u>.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\underset{x \in E}{X} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \underset{x \in E}{X} L_x \to \underset{x \in E}{X} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \underset{x \in E}{X} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

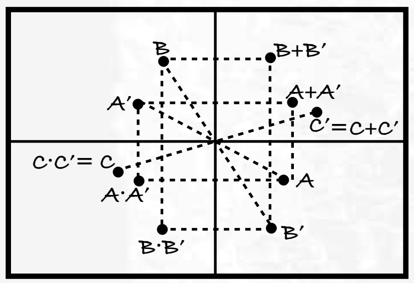
$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\underset{x \in E}{X} L_x) X (\underset{x \in E}{X} L_x).$$

$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$
$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

(*)Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta)\&(\beta \not\leq \alpha)$.

Sea $':L \to L$ una aplicación involutiva: $(\alpha''=\alpha.\ \forall \alpha \in L)$ y antítona: $((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha'))$.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')].\ (\text{Es decir, } [(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\beta+\beta') \not\leq (\alpha\cdot\alpha')]).$$

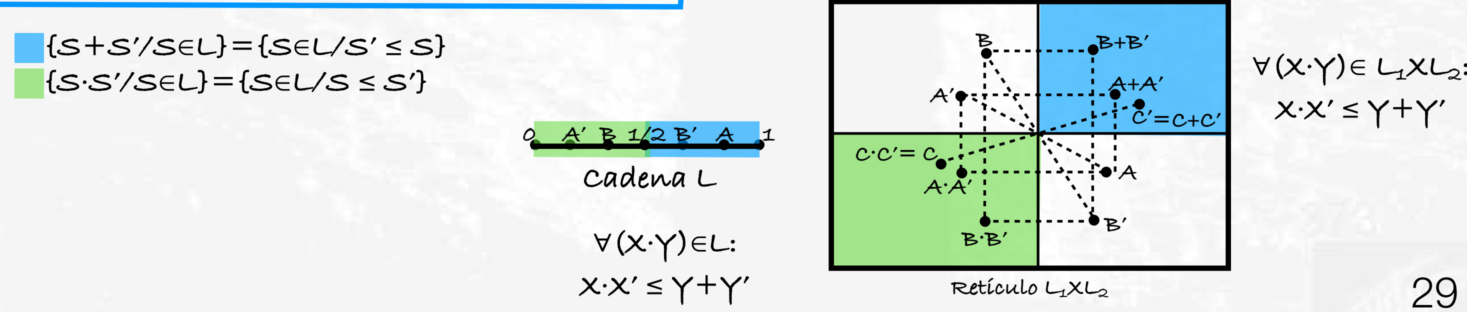
<u>Demostración</u>. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \not\leq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha||\beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+\beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \ngtr (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta) \in LXL$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \not\leq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')||(\beta+\beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $':L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta) \in LXL$. (Y consecuentemente: $(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in LXLXL$).

<u>Proposición</u>.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x\in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x\in E} L_x \to \mathop{X}_{x\in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x\in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A\cdot A' \leq B+B' \quad \forall(A, B) \in (\mathop{X}_{x\in E} L_x) X (\mathop{X}_{x\in E} L_x).$$



(*)Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha||\beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta)\&(\beta \nleq \alpha)$.

Sea $\,' : L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha''=\alpha.\ \forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

Proposición. Se verifica:

$$[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')\,||\,(\beta+\beta')].\ (\text{Es decir, } [(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\beta+\beta') \nleq (\alpha\cdot\alpha')]).$$

Demostración. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha||\beta) \text{ ó } (\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha\cdot\alpha') > (\beta+\beta')$. Entonces $(\alpha > \beta)\&(\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta)\&(\beta>\alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha\cdot\alpha') \ngtr (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta)\in LXL$ y en consecuencia, que $[(\alpha\cdot\alpha') \nleq (\beta+\beta')] \Rightarrow [(\alpha\cdot\alpha')\,||\,(\beta+\beta')]$.∎

Corolario. Si $(L,\leq)$ es una cadena y $' : L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha, \beta)\in LXL$. (Y consecuentemente: $(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in LXLXL$).

Proposición.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)),'^x)_{x\in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathsf{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +)),')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathsf{X}_{x\in E} L_x \to \mathsf{X}_{x\in E} L_x$ tal que $A'(x)=[A(x)]'^x$ $\forall A\in \mathsf{X}_{x\in E} L_x$, $\forall x\in E$; se verifica:

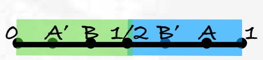
$$A\cdot A' \leq B+B' \quad \forall(A, B)\in(\mathsf{X}_{x\in E} L_x)X(\mathsf{X}_{x\in E} L_x).$$

En particular, si $((L,\leq, \cdot, +,0,1),')$ es una cadena acotada con una negación fuerte y E es un referencial, en la clase $((L^E, \leq, \cdot,+, \varnothing, E)),')$ de los subconjuntos L-borrosos de E se verifica:

$$A\cdot A' \leq B+B' \quad \forall(A, B)\in(L^E)X(L^E).$$

$\{S+S'/S\in L\}=\{S\in L/S' \leq S\}$

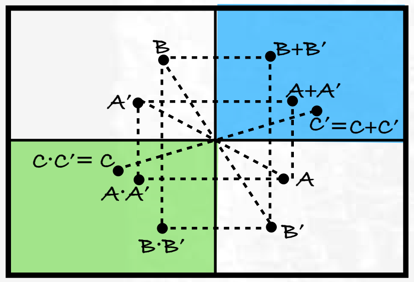
$\{S\cdot S'/S\in L\}=\{S\in L/S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall(X\cdot Y)\in L$:

$X\cdot X' \leq Y+Y'$



Retículo L_1XL_2

$\forall(X\cdot Y)\in L_1XL_2$:

$X\cdot X' \leq Y+Y'$

(*) Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta) \& (\beta \not\leq \alpha)$.
Sea $\,' : L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')].$$ (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \not\leq (\alpha \cdot \alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \not\leq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \not> (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L \mathrm{X} L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $\,' : L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L \mathrm{X} L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L \mathrm{X} L \mathrm{X} L$).

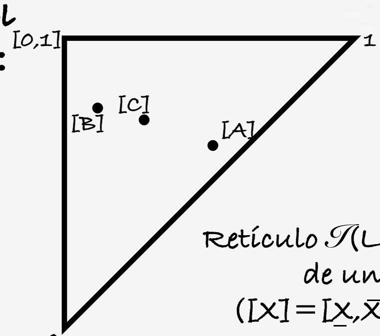
<u>Proposición</u>.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathrm{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathrm{X}_{x \in E} L_x \to \mathrm{X}_{x \in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathrm{X}_{x \in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathrm{X}_{x \in E} L_x) \mathrm{X} (\mathrm{X}_{x \in E} L_x).$$

En particular, si $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es una cadena acotada con una negación fuerte y E es un referencial, en la clase $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)), ')$ de los subconjuntos L-borrosos de E se verifica:

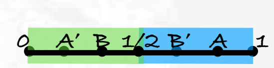
$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (L^E) \mathrm{X} (L^E).$$

<u>Contra-ejemplo</u>.
Si L no es cadena ni producto de cadenas:



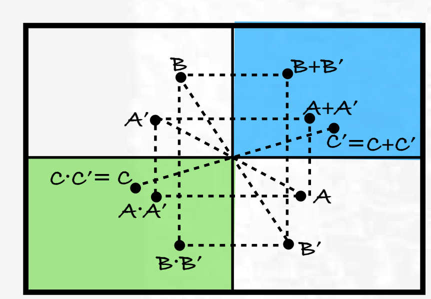
Retículo $\mathscr{I}(L)$ de intervalos $[X]$ de una cadena L $([X] = [\underline{X}, \overline{X}] = \{Y / \underline{X} \leq Y \leq \overline{X}\})$, $[X]' = [\overline{X}', \underline{X}']$

$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$
$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 \mathrm{X} L_2$

$\forall (X \cdot Y) \in L_1 \mathrm{X} L_2$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$

(*) Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \nleq \beta) \& (\beta \nleq \alpha)$.

Sea $': L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha.\ \forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$. (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \nleq (\alpha \cdot \alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\nleq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \nleq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \ngtr (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \nleq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $': L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

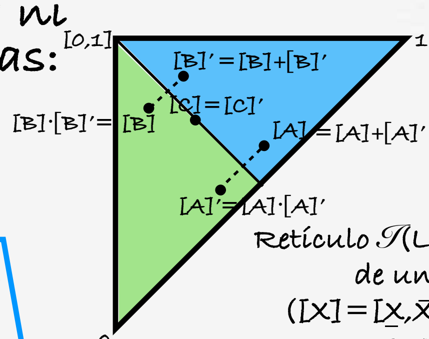
<u>Proposición</u>.(*) Si $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x \in E} L_x \to \mathop{X}_{x \in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x \in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x \in E} L_x) X (\mathop{X}_{x \in E} L_x).$$

En particular, si $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es una cadena acotada con una negación fuerte y E es un referencial, en la clase $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)), ')$ de los subconjuntos L-borrosos de E se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (L^E) X (L^E).$$

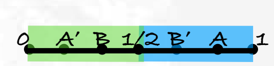
<u>Contra-ejemplo</u>.
Si L no es cadena ni producto de cadenas:



Retículo $\mathscr{I}(L)$ de intervalos $[X]$ de una cadena L $([X] = [\underline{X}, \overline{X}] = \{Y / \underline{X} \leq Y \leq \overline{X}\})$, $[X]' = [\overline{X}', \underline{X}']$

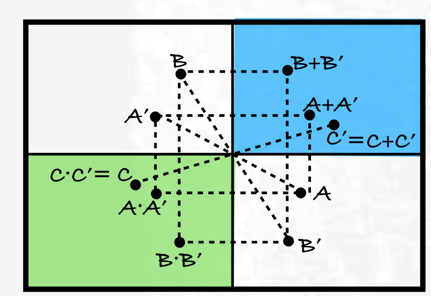
$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$

$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

$\forall (X \cdot Y) \in L_1 X L_2$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$

(*) Véase transparencia siguiente.

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta) \& (\beta \not\leq \alpha)$.

Sea $' : L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha$. $\forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')].$$ (Es decir, $[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \not\leq (\alpha \cdot \alpha')]$).

<u>Demostración</u>. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \not\leq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \not> (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

<u>Corolario</u>. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $' : L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

<u>Proposición</u>.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x \in E} L_x \to \mathop{X}_{x \in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x \in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x \in E} L_x) X (\mathop{X}_{x \in E} L_x).$$

En particular, Si $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es una cadena acotada con una negación fuerte y E es un referencial, en la clase $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)), ')$ de los subconjuntos L-borrosos de E se verifica:

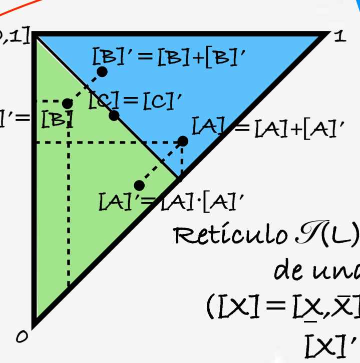
$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (L^E) X (L^E).$$

<u>Contra-ejemplo</u>.
Si L no es cadena ni producto de cadenas:

$[B] \cdot [B]' \not\leq [A] + [A]'$

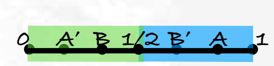
$[A] + [A]' \not\leq [B] \cdot [B]'$

(*) Véase transparencia siguiente.



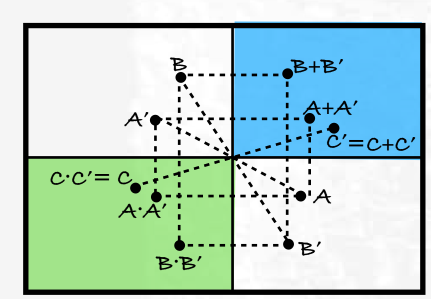
Retículo $\mathscr{I}(L)$ de intervalos $[X]$ de una cadena L ($[X] = [\underline{X}, \overline{X}] = \{Y / \underline{X} \leq Y \leq \overline{X}\}$), $[X]' = [\overline{X}', \underline{X}']$

$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$
$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

$\forall (X \cdot Y) \in L_1 X L_2$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$

Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo. La expresión $\alpha || \beta$ representa el enunciado $(\alpha \not\leq \beta) \& (\beta \not\leq \alpha)$.

Sea $':L \to L$ una aplicación involutiva: ($\alpha'' = \alpha$. $\forall \alpha \in L$) y antítona: ($(\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\beta' \leq \alpha')$).

Proposición. Se verifica:

$$[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]. \text{ (Es decir, } [(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\beta + \beta') \not\leq (\alpha \cdot \alpha')]).$$

Demostración. La negación $\not\leq$ de la relación $\leq$ en L es tal que $(\alpha \not\leq \beta) \Leftrightarrow [(\alpha || \beta)$ ó $(\alpha > \beta)]$.

Supongamos que $(\alpha \cdot \alpha') > (\beta + \beta')$. Entonces $(\alpha > \beta) \& (\alpha' > \beta')$ y en consecuencia obtenemos $(\alpha > \beta) \& (\beta > \alpha)$ que es un absurdo que prueba que $(\alpha \cdot \alpha') \not> (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$ y en consecuencia, que $[(\alpha \cdot \alpha') \not\leq (\beta + \beta')] \Rightarrow [(\alpha \cdot \alpha') || (\beta + \beta')]$.∎

Corolario. Si $(L, \leq)$ es una cadena y $':L \to L$ una aplicación involutiva y antítona, entonces $(\alpha \cdot \alpha') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta) \in L X L$. (Y consecuentemente: $(\alpha \cdot \alpha') + (\gamma \cdot \gamma') \leq (\beta + \beta')$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in L X L X L$).

Proposición.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x \in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x \in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x \in E} L_x \to \mathop{X}_{x \in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x$ $\forall A \in \mathop{X}_{x \in E} L_x$, $\forall x \in E$; se verifica:

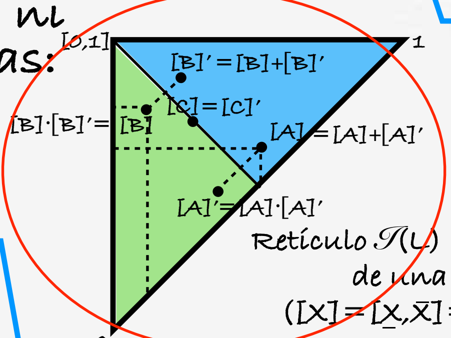
$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x \in E} L_x) X (\mathop{X}_{x \in E} L_x).$$

Contra-ejemplo.
Si L no es cadena ni producto de cadenas:

$[B] \cdot [B]' \not\leq [A] + [A]'$

$[A] + [A]' \not\leq [B] \cdot [B]'$

(*) Véase transparencia siguiente.

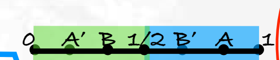


Retículo $\mathscr{I}(L)$ de intervalos $[X]$ de una cadena L ($[X] = [\underline{X}, \overline{X}] = \{Y / \underline{X} \leq Y \leq \overline{X}\}$), $[X]' = [\overline{X}', \underline{X}']$

$\{S + S' / S \in L\} = \{S \in L / S' \leq S\}$

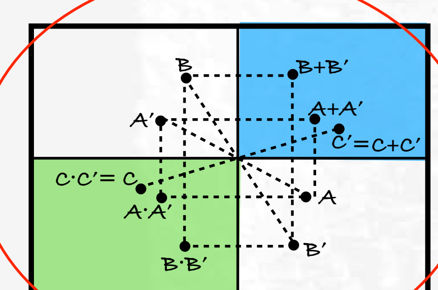
$\{S \cdot S' / S \in L\} = \{S \in L / S \leq S'\}$

Nota. Estos resultados prueban que, si el interés se centra en la desigualdad $A \cdot A' \leq B + B'$, los *subconjuntos borrosos de Zadeh* la cumplen y sin embargo, los *intervalo-valorados* no lo hacen.



Cadena L

$\forall (X \cdot Y) \in L$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$



Retículo $L_1 X L_2$

$\forall (X \cdot Y) \in L_1 X L_2$:
$X \cdot X' \leq Y + Y'$

__Proposición__.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x\in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\mathop{X}_{x\in E} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \mathop{X}_{x\in E} L_x \rightarrow \mathop{X}_{x\in E} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x \ \ \forall A \in \mathop{X}_{x\in E} L_x, \ \forall x \in E$; se verifica:

$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\mathop{X}_{x\in E} L_x) X (\mathop{X}_{x\in E} L_x).$$

__Proposición__.(*) Si $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x\in E}$ es una familia de cadenas, cada una con una aplicación $'^x$ involutiva y antítona, entonces en el álgebra $((\underset{x\in E}{X} L_x, \leq, \cdot, +)), ')$ determinada por el retículo producto y la aplicación $' : \underset{x\in E}{X} L_x \to \underset{x\in E}{X} L_x$ tal que $A'(x) = [A(x)]'^x \ \forall A \in \underset{x\in E}{X} L_x, \forall x \in E$; se verifica:

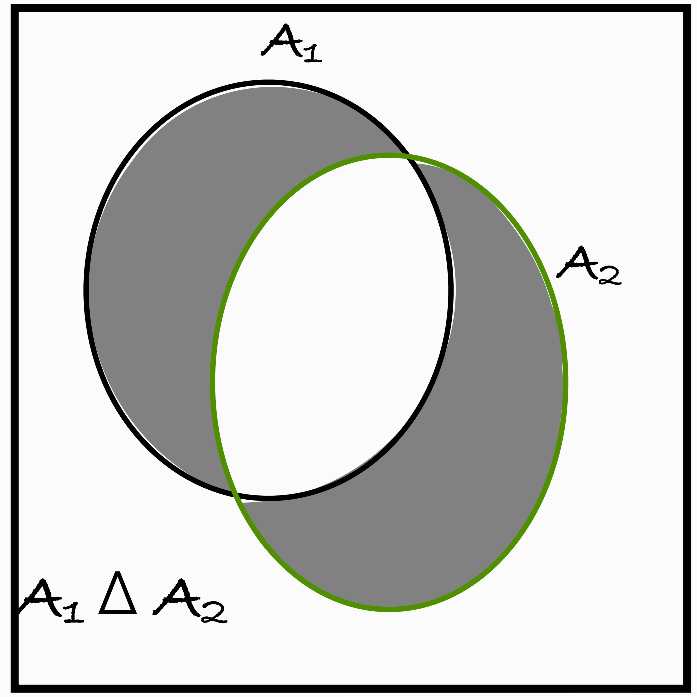
$$A \cdot A' \leq B + B' \quad \forall (A, B) \in (\underset{x\in E}{X} L_x) X (\underset{x\in E}{X} L_x).$$

__Demostración__. El retículo producto de la familia $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x)), '^x)_{x\in E}$ está formado por el conjunto $\underset{x\in E}{X} L_x = \{ A: E \to \underset{x\in E}{\cup} L_x \ / \ A(x) \in L_x \ \forall x \in E\}$ con el orden $(A \leq B) \Leftrightarrow [(A(x) \leq_x B(x) \ \forall x \in E]$ y las leyes $(A \cdot B)(x) = (A(x) \cdot_x B(x))$, $(A + B)(x) = (A(x) +_x B(x))$, $A'(x) = [A(x)]'^x \ \forall x \in E$.
Por tanto, para todo $x \in E$ y para todo par $(A,B) \in (\underset{x\in E}{X} L_x) X (\underset{x\in E}{X} L_x)$:
$(A \cdot A')(x) = (A(x) \cdot_x [A(x)]'^x) \leq_x (B(x) +_x [B(x)]'^x)$, es decir, $A \cdot A' \leq B + B'$.

En particular, si $(L, \leq, \cdot, +)), ')$ es una cadena con una negación fuerte y si $L_x = L$ para todo $x \in E$ entonces $\underset{x\in E}{X} L_x = L^E$, luego para todo par $(A,B) \in L^E X L^E$: $A \cdot A' \leq B + B'$.∎

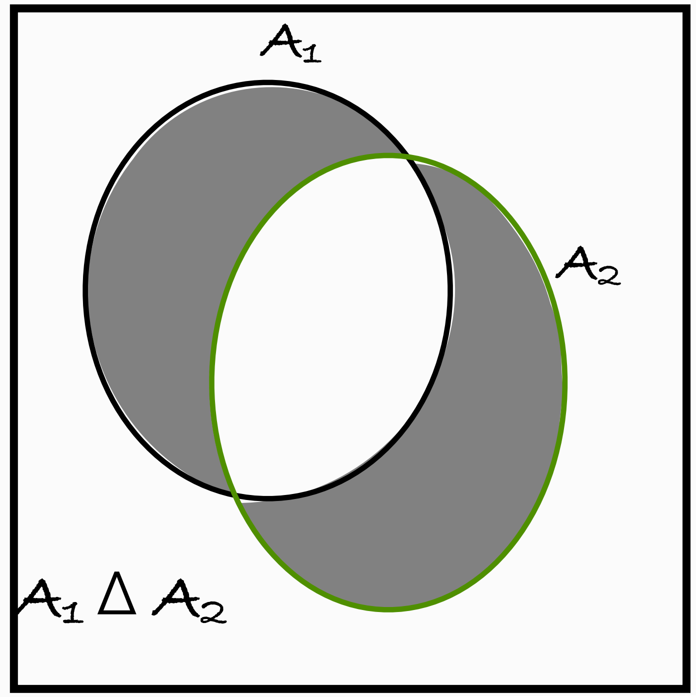
0. Preliminares. (Sobre extensiones de la operación "Diferencia Simétrica")

Diferencia Simétrica $\Delta: P(E) X P(E) \rightarrow P(E)$
entre subconjuntos de un referencial E



$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2)$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cap A_2)^c$$

M.I. Voitsekhovskii. «Symmetric difference of sets
Encyclopaedia of mathematics

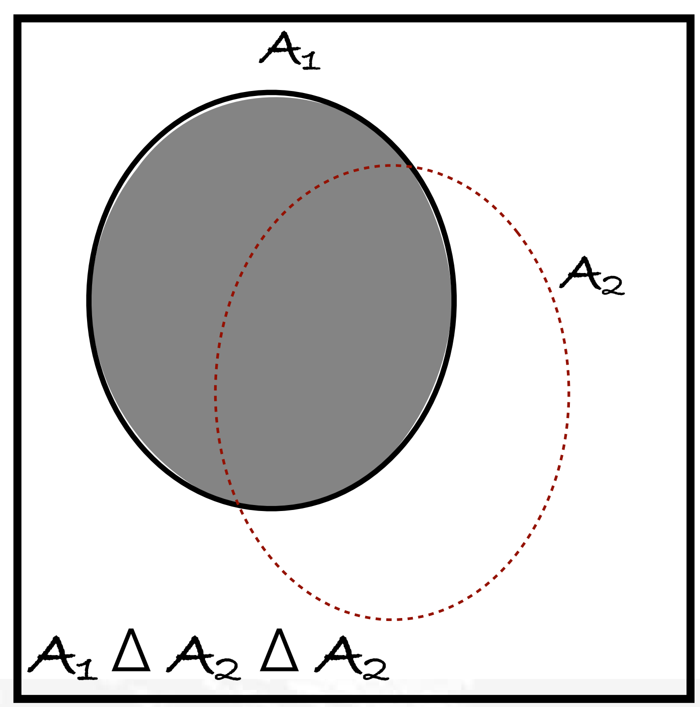


$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2)$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cap A_2)^c$$

Puesto que
$A \Delta A = \varnothing$ y $A \Delta \varnothing = A \ \forall A \in P(E)$,
se verifica el siguiente resultado que interesa en el contexto de lo que expondremos aquí:

$$A_1 \Delta A_2 \Delta A_2 = A_1$$

$$\forall (A_1, A_2) \in P(E) X P(E)$$



M.I. Voitsekhovskii. «Symmetric difference of sets
Encyclopaedia of mathematics

Definiciones de operadores tipo Diferencia Simétrica $\Delta_{(')}$:$L X L \rightarrow L$ asociados a negaciones $'$:$L \rightarrow L$ en retículos distributivos acotados $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$;

Definiciones de operadores tipo Diferencia Simétrica $\Delta_{(')}$:LXL→L asociados a negaciones ':L→L en retículos distributivos acotados $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$;

Relevancia de las expresiones:

$$\alpha\cdot\alpha' \leq \beta + \beta' \ , \ \alpha\cdot\alpha' \nleq \beta + \beta'$$

en lo que concierne a una generalización $\Delta_{(')}$ del operador diferencia simétrica.

<u>Definición</u>. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha \,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Definición. La operación diferencia simétrica AΔB de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Nota. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

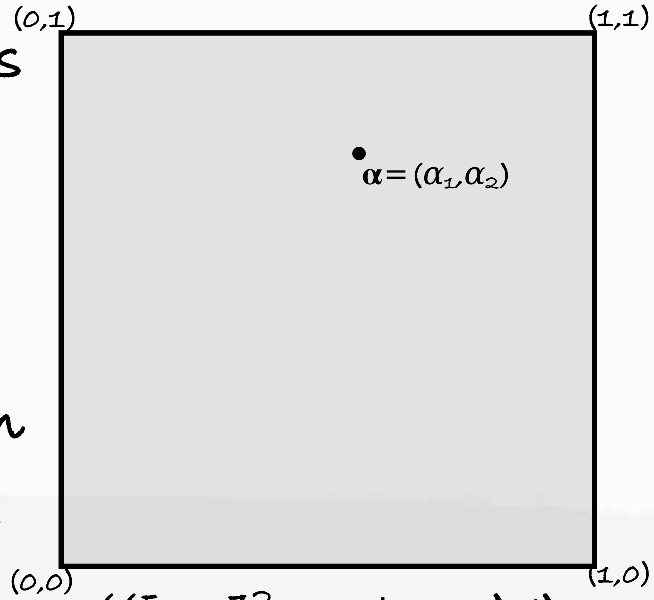
Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2)$

Nota. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta 0=1\Delta 1=0$, $0\Delta 1=1\Delta 0=1$

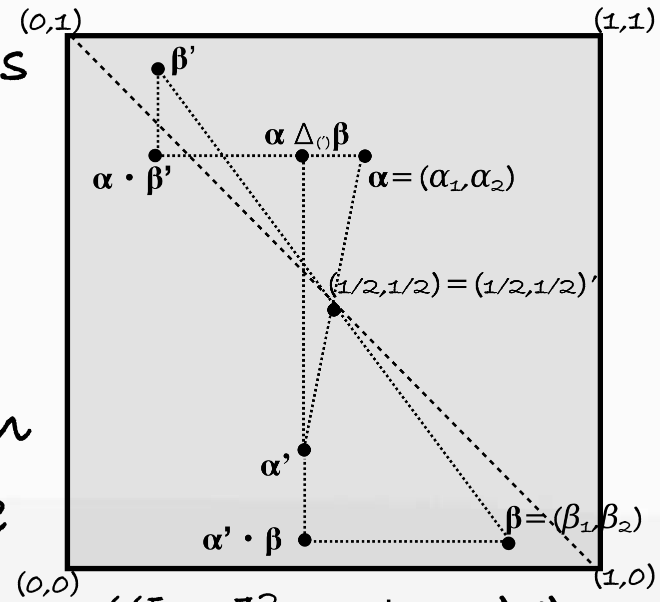
Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \;\; \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

Nota. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

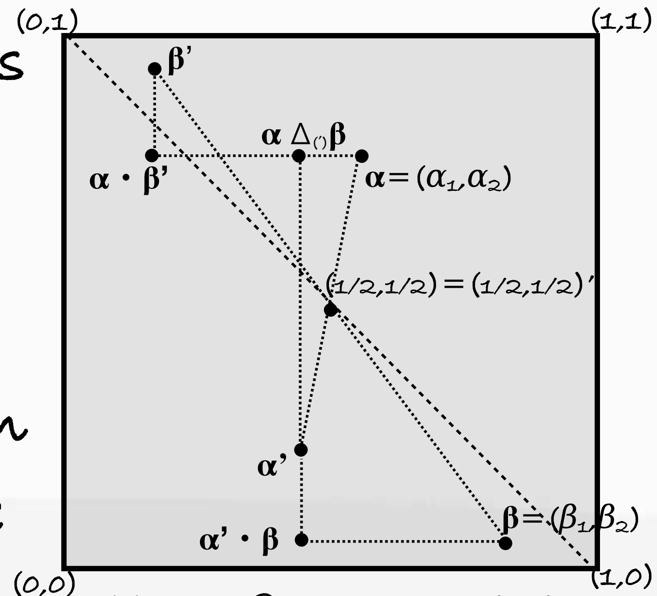
Definición. La operación diferencia simétrica A∆B de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,…, en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,…, obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \;\; \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.

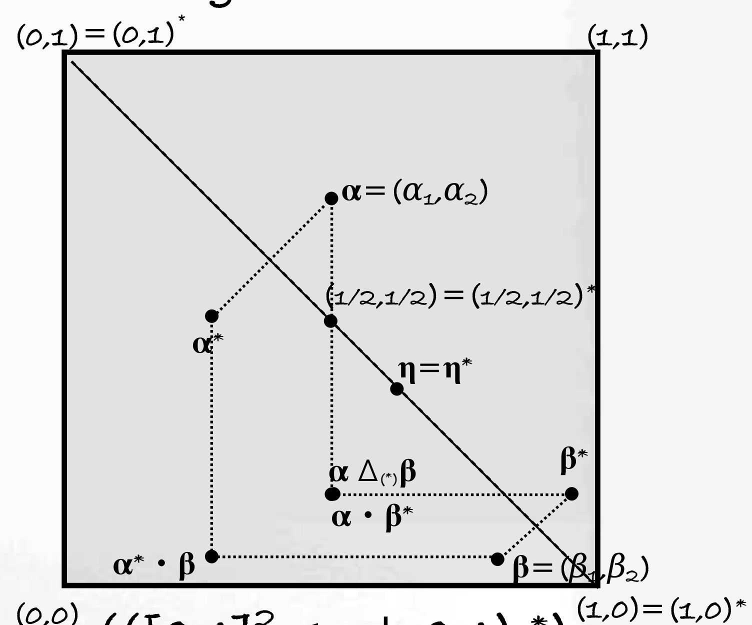


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

Una negación alternativa.



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

Nota. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador ∆ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

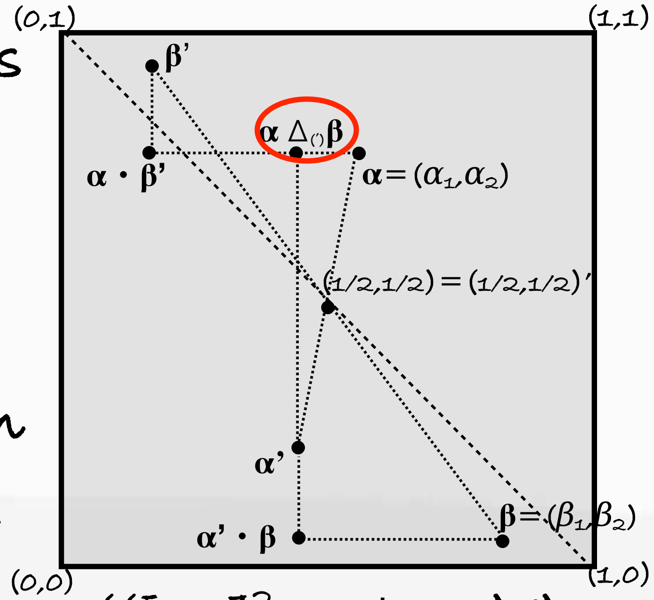
Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes ', *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.

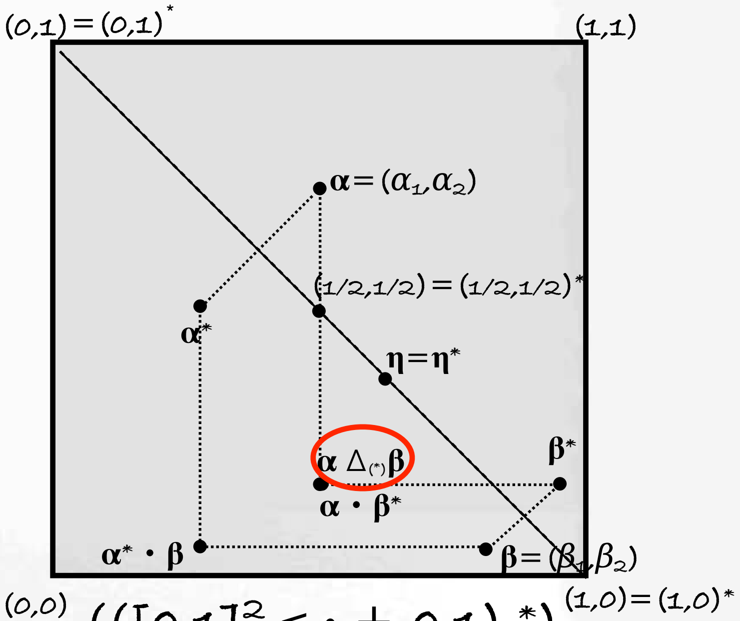


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'= (\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)'=(0,1)=(1,0)^c$

Una negación alternativa.



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*= (\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^*=(1,0)\neq(0,1)$

<u>Nota</u>. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

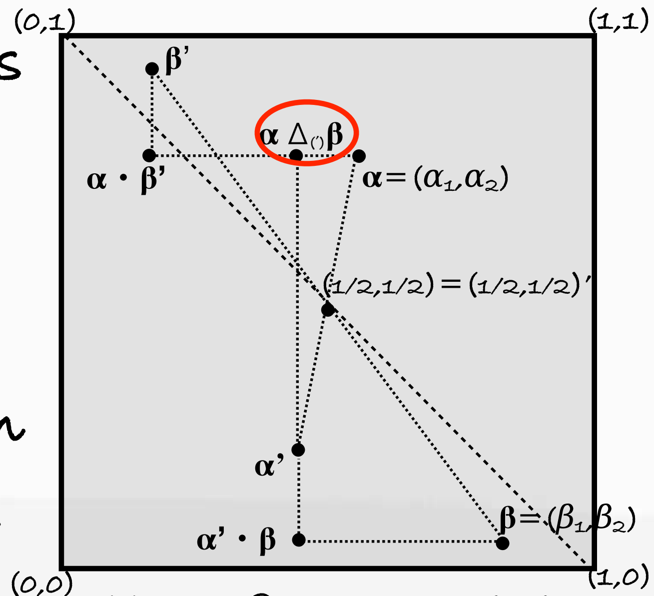
Depende de la negación (')

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Es la *usual* aquí!

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,…, en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,…, obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \;\; \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.

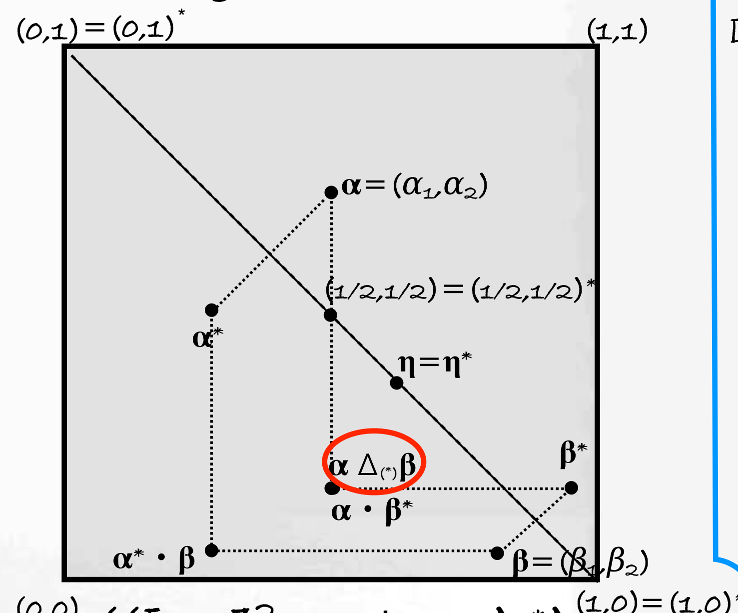


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'=(\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)'=(0,1)=(1,0)^c$

Una negación alternativa.

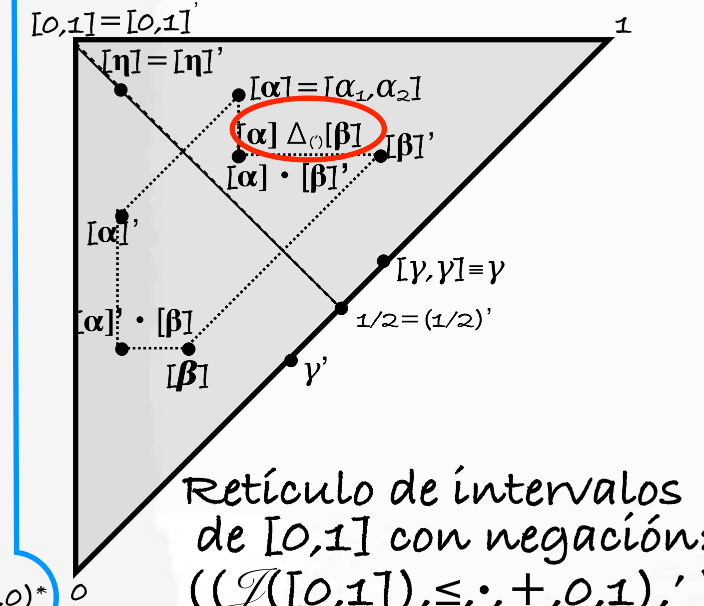


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*=(\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^*=(1,0)\neq(0,1)$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



Retículo de intervalos de [0,1] con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]'=[\alpha_2',\alpha_1']=[1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

Nota. Si L=2={0,1}, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

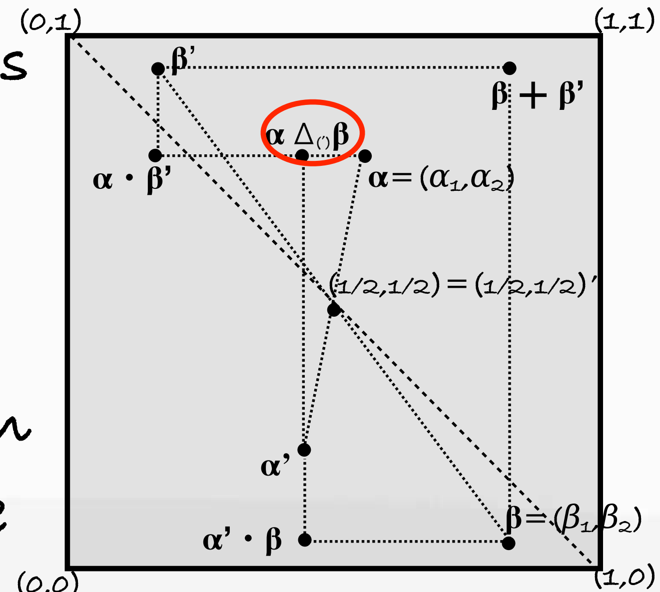
Depende de la negación (')

$$\alpha\, \Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Es la *usual* aquí!

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



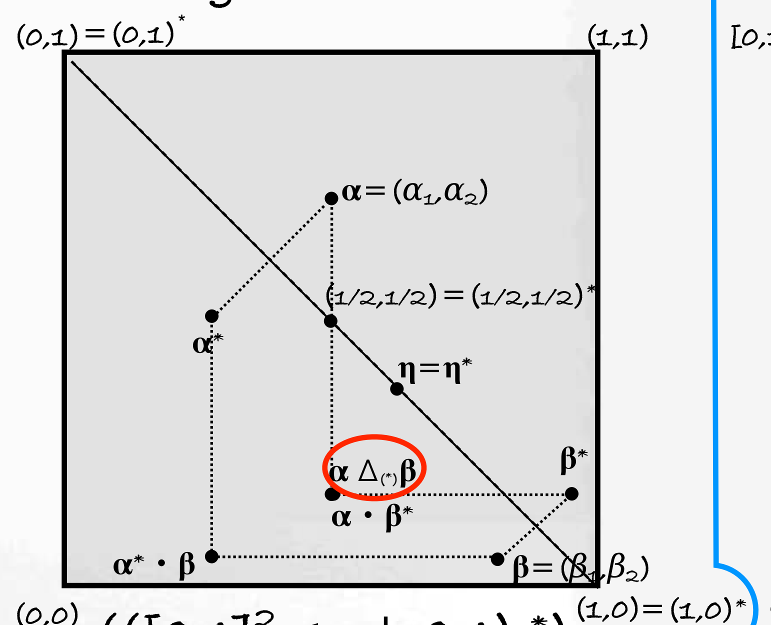
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



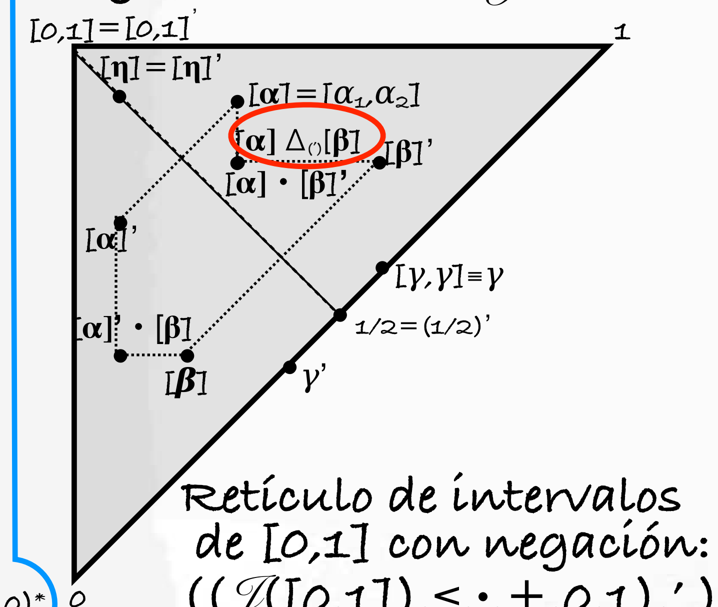
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha\cdot\alpha^* \not\leq \beta+\beta^*} = \beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]' = [\alpha_2',\alpha_1'] = [1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \leq [\beta]+[\beta]'} = [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \not\leq \gamma+\gamma'} = \gamma$

Nota. Si $L=2=\{0,1\}$, para la única negación posible, el operador Δ es el conectivo lógico "ó exclusivo": $0\Delta0=1\Delta1=0$, $0\Delta1=1\Delta0=1$

Definición. La operación diferencia simétrica A∆B de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

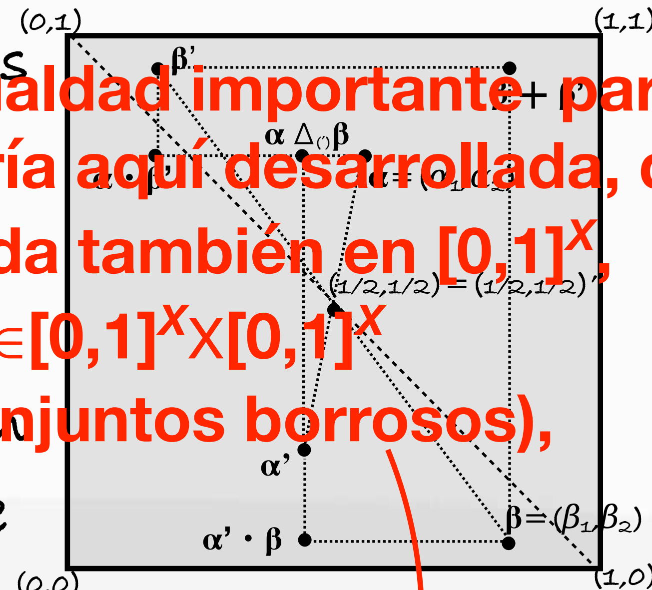
Depende de la negación (')

$$\alpha \,\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Es la *usual* aquí!

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}, \Delta_{(*)},\ldots$, en retículos distributivos con negaciones fuertes $', {}^*,\ldots$, obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \;\; \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

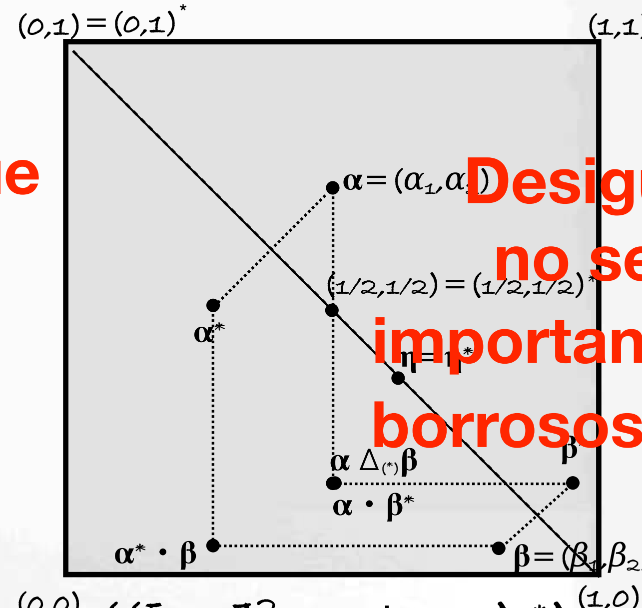
$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'}$

Desigualdad importante para la teoría aquí desarrollada, que es válida también en $[0,1]^X$, $\forall(\alpha,\beta)\in[0,1]^X\times[0,1]^X$ (subconjuntos borrosos),

Una negación alternativa.



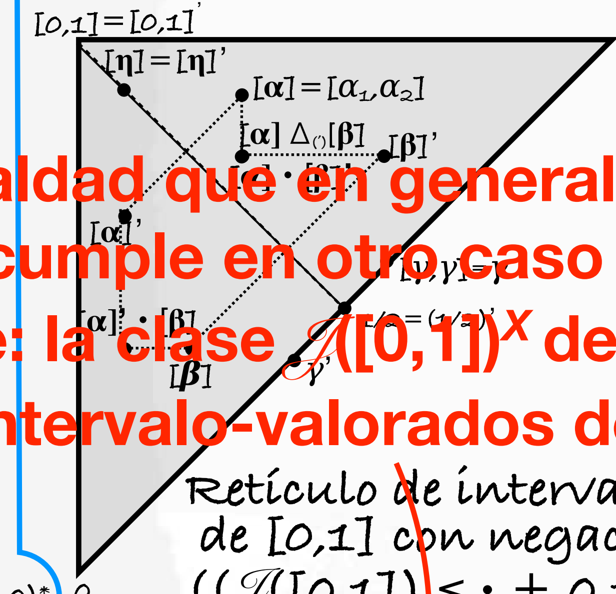
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha\cdot\alpha^* \nleq \beta+\beta^*} = \beta^*$

Negación usual en $\mathscr{J}([0,1])$.



Retículo de intervalos de [0,1] con negación: $((\mathscr{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]' = [\alpha_2',\alpha_1'] = [1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \leq [\beta]+[\beta]'} = [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \nleq \gamma+\gamma'} = \gamma$

Desigualdad que en general no se cumple en otro caso importante: la clase $\mathscr{J}([0,1])^X$ de los borrosos intervalo-valorados de *X*.

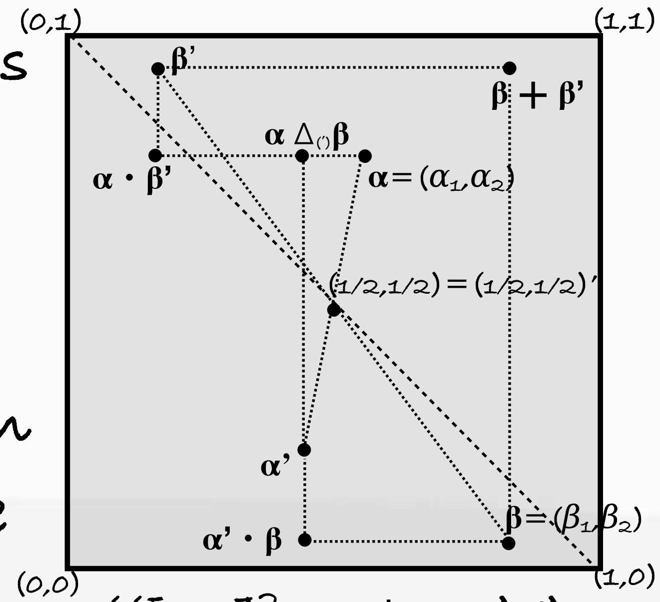
Nota. Si L=2={0,1}, para la única negación posible, el operador ∆ es el conectivo lógico "ó exclusivo": 0∆0=1∆1=0, 0∆1=1∆0=1

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha\ \Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



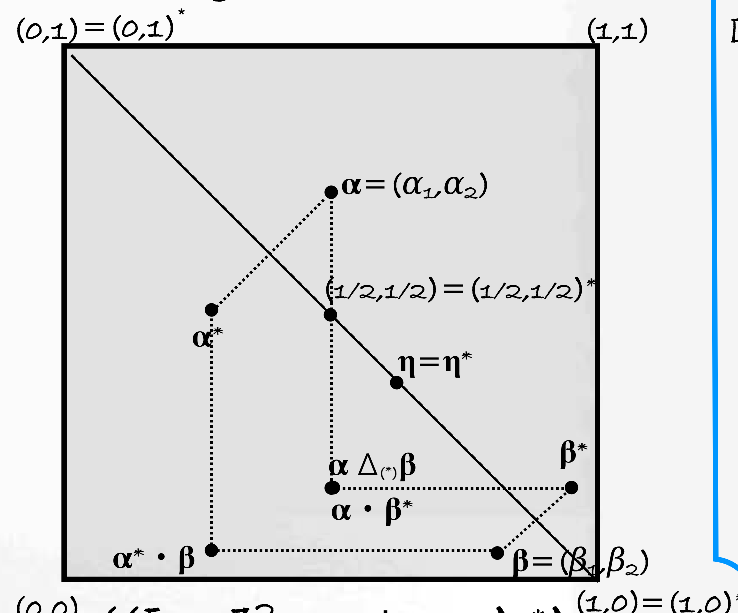
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



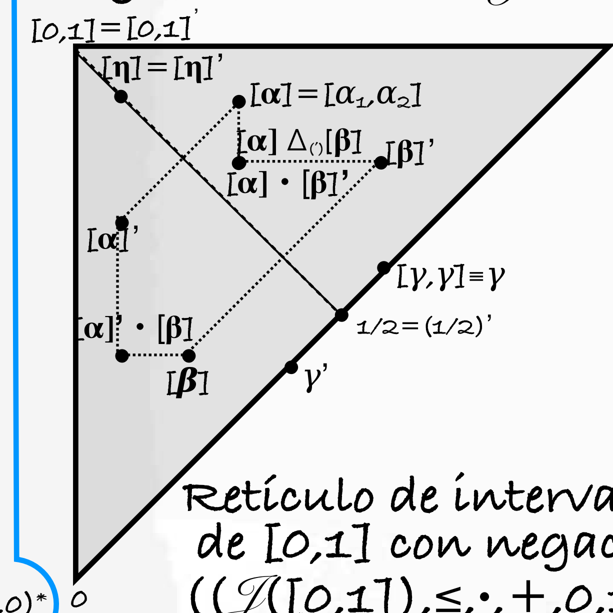
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha\cdot\alpha^* \not\leq \beta+\beta^*} \neq \beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



Retículo de intervalos de [0,1] con negación:
$((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]' = [\alpha_2',\alpha_1'] = [1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \leq [\beta]+[\beta]'} \neq [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \not\leq \gamma+\gamma'} \neq \gamma$

Propiedades: (*)

Conmutativa $\alpha\ \Delta_{(')}\beta = \beta\ \Delta_{(')}\alpha$

Elemento neutro: $\alpha\ \Delta_{(')}0 = \alpha$

$\alpha\ \Delta_{(')}1 = \alpha'$

$\alpha\ \Delta_{(')}\alpha = \alpha'\ \Delta_{(')}\alpha' = \alpha\cdot\alpha'$, $\quad \alpha\ \Delta_{(')}\alpha' = \alpha+\alpha'$

Si L es distributivo, entonces:

$(\alpha\ \Delta_{(')}\beta)' = (\alpha'\ \Delta_{(')}\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta')$

$(\alpha\ \Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\alpha')\cdot(\beta+\beta')$

$(\alpha\ \Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\beta)\cdot(\alpha'+\beta') = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)'$

Si $\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'$ entonces $(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta') \leq (\alpha\ \Delta_{(')}\beta)$

Sea L distributivo. (*)

Si $[(\alpha\cdot\alpha') + (\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')$, entonces

$(\alpha\ \Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma = \alpha\ \Delta_{(')}(\beta\ \Delta_{(')}\gamma)$ (Asociatividad).

$(\forall(\alpha,\beta)\in L^2)\,\&\,(\forall w\in L : w'=w^c)$ se verifica:

$$(\alpha\ \Delta_{(')}\beta) \leq [(\alpha\ \Delta_{(')}w) + (w\ \Delta_{(')}\beta)].$$

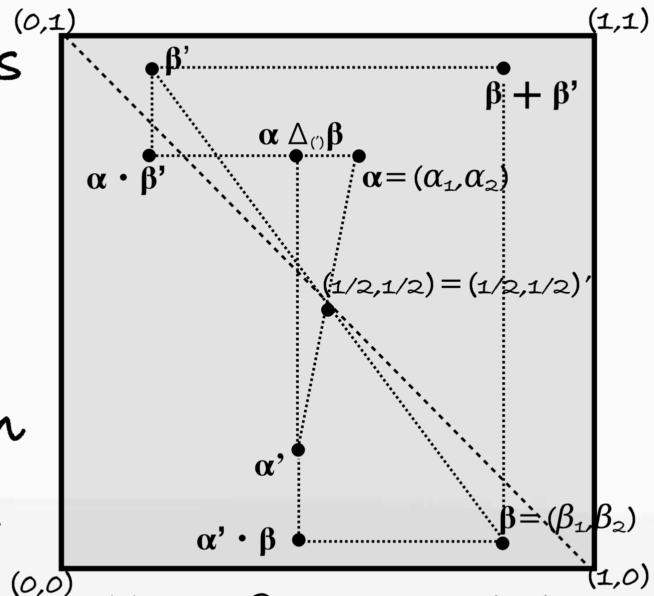
(*) Véase demostraciones en transparencias posteriores.

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha\ \Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



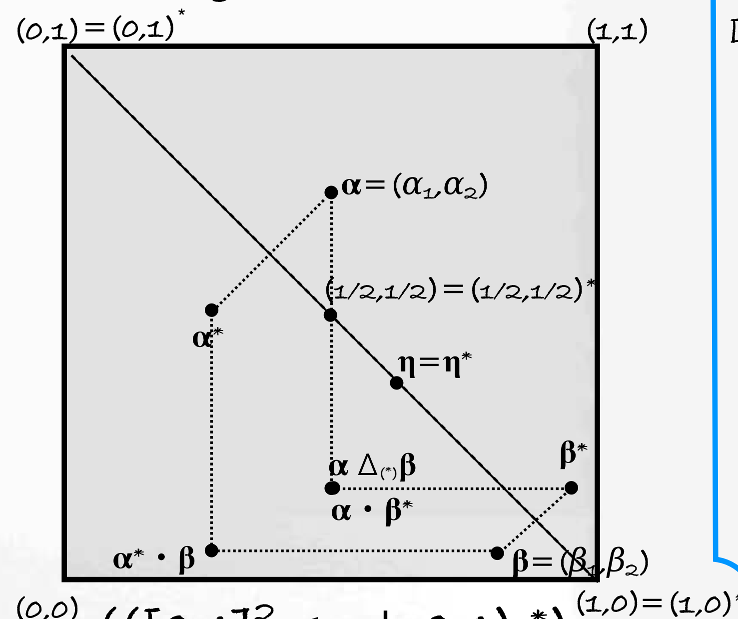
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



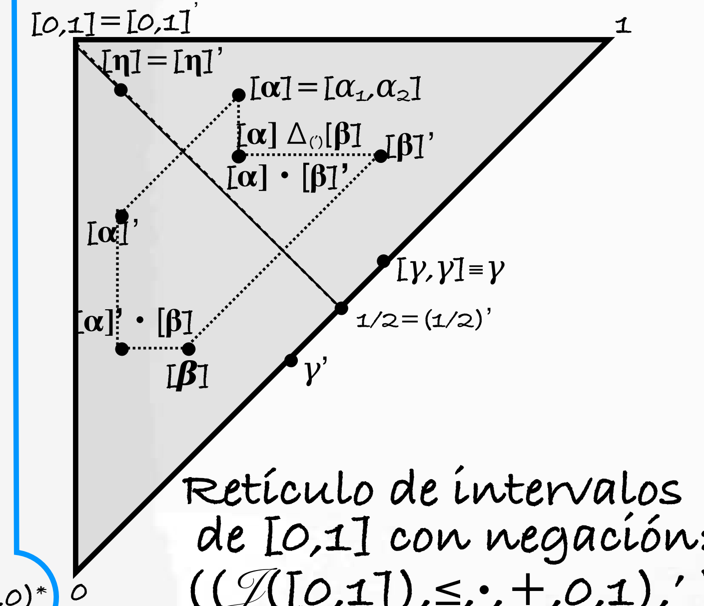
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha\cdot\alpha^* \not\leq \beta+\beta^*} \neq \beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



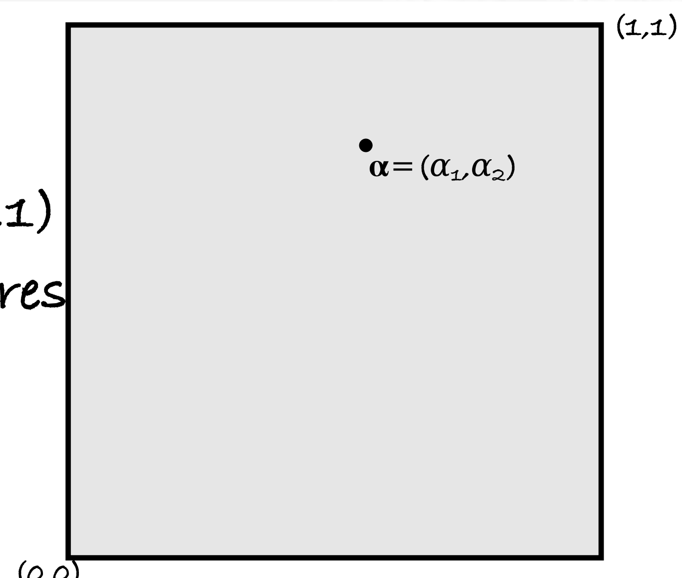
Retículo de intervalos de [0,1] con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]' = [\alpha_2',\alpha_1'] = [1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \leq [\beta]+[\beta]'} \neq [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \not\leq \gamma+\gamma'} \neq \gamma$

Nota. (0,1) y [0,1] son tales que $(0,1)^c=(1,0)$, $(0,1)'=(1,0)$, $(0,1)^*=(0,1)$ y $[0,1]'=[0,1]$. Los valores correspondientes de $\alpha\ \Delta_{(')}(0,1)$, de $\alpha\ \Delta_{(*)}(0,1)$ y de $[\alpha]\ \Delta_{(')}[0,1]$ son:



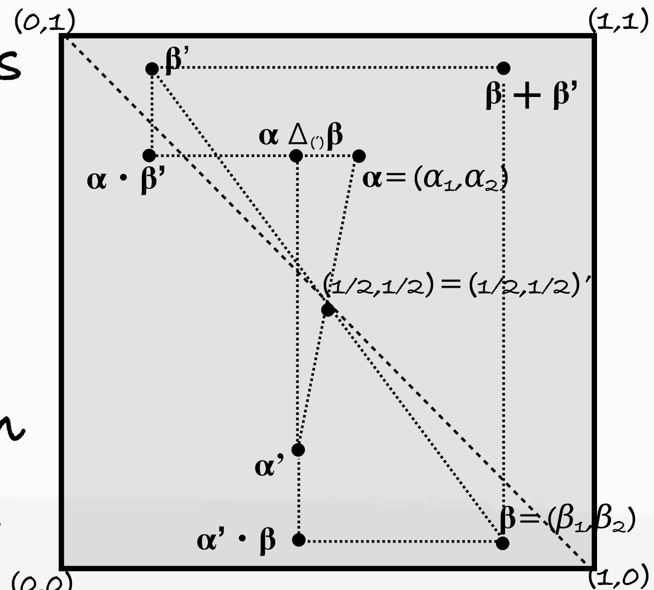
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

Definición. La operación diferencia simétrica $A \Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha \, \Delta_{(')} \beta = \alpha \cdot \beta' + \alpha' \cdot \beta \quad \forall (\alpha, \beta) \in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$, ..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *, ..., obtenidas a partir de la aplicación $' : [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que $\alpha' = 1 - \alpha \;\; \forall \alpha \in [0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



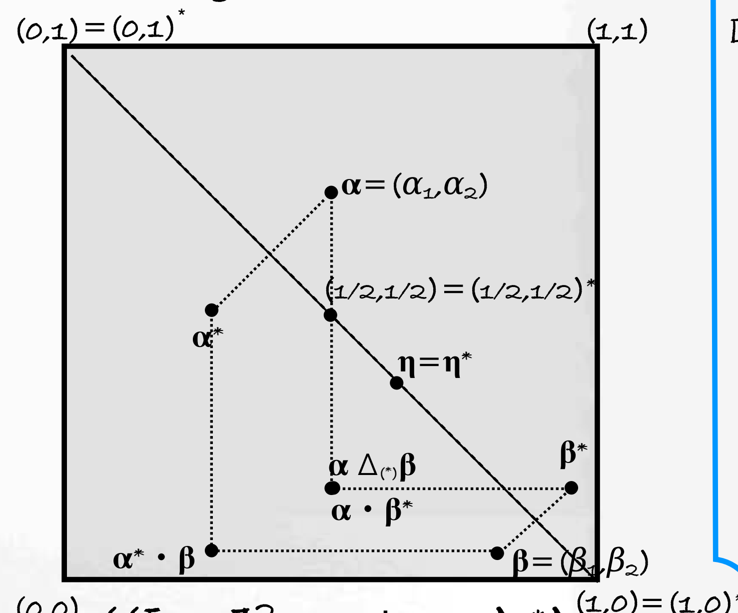
$(([0,1]^2, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$(\alpha_1, \alpha_2)' = (\alpha_1', \alpha_2') = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha \cdot \alpha' \leq \beta + \beta'}$

Una negación alternativa.



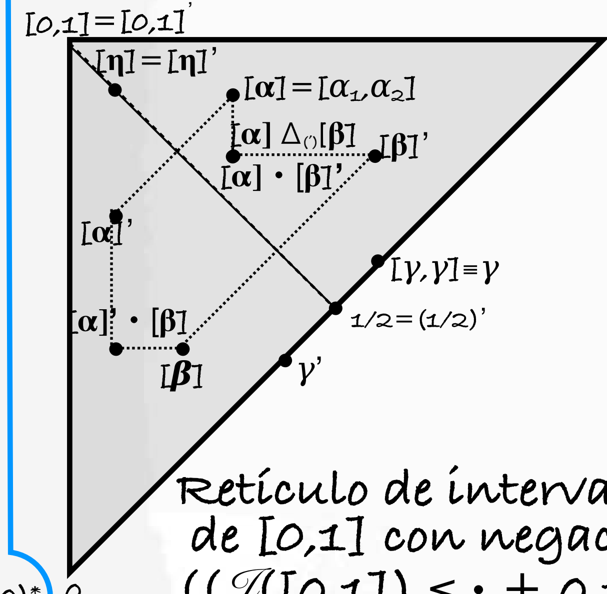
$(([0,1]^2, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^*)$

$(\alpha_1, \alpha_2)^* = (\alpha_2', \alpha_1') = (1-\alpha_2, 1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha \cdot \alpha^* \not\leq \beta + \beta^*} \neq \beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



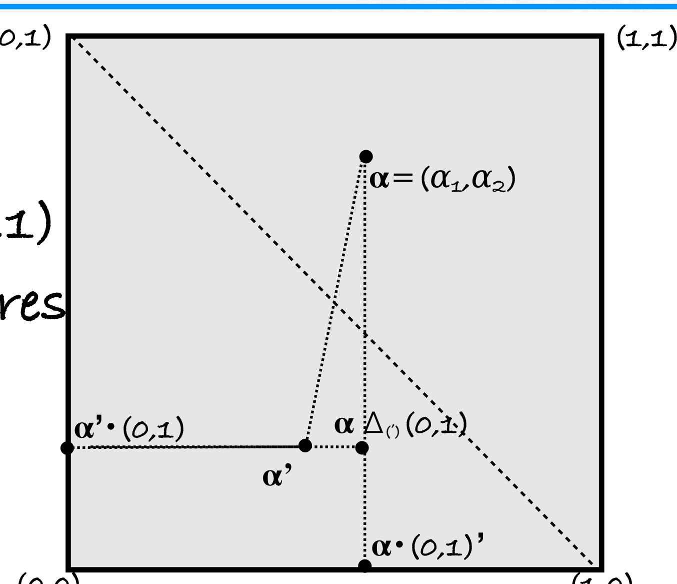
Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$[\alpha_1, \alpha_2]' = [\alpha_2', \alpha_1'] = [1-\alpha_2, 1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha] \cdot [\alpha]' \leq [\beta] + [\beta]'} \neq [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha] \cdot [\alpha]' \not\leq \gamma + \gamma'} \neq \gamma$

Nota. $(0,1)$ y $[0,1]$ son tales que $(0,1)^c = (1,0)$, $(0,1)' = (1,0)$, $(0,1)^* = (0,1)$ y $[0,1]' = [0,1]$. Los valores correspondientes de $\alpha \, \Delta_{(')} (0,1)$, de $\alpha \, \Delta_{(*)} (0,1)$ y de $[\alpha] \, \Delta_{(')} [0,1]$ son:



$(([0,1]^2, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$(\alpha_1, \alpha_2)' = (\alpha_1', \alpha_2') = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2)$

$(0,1)' = (1,0)$

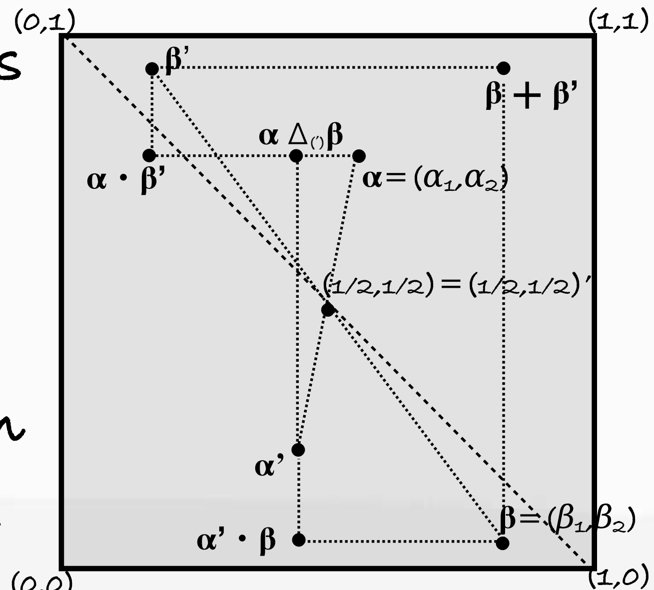
$\alpha' = \alpha \cdot \alpha' \leq (0,1) + (0,1)' = (0,1) + (1,0) = (1,1)$

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha\ \Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



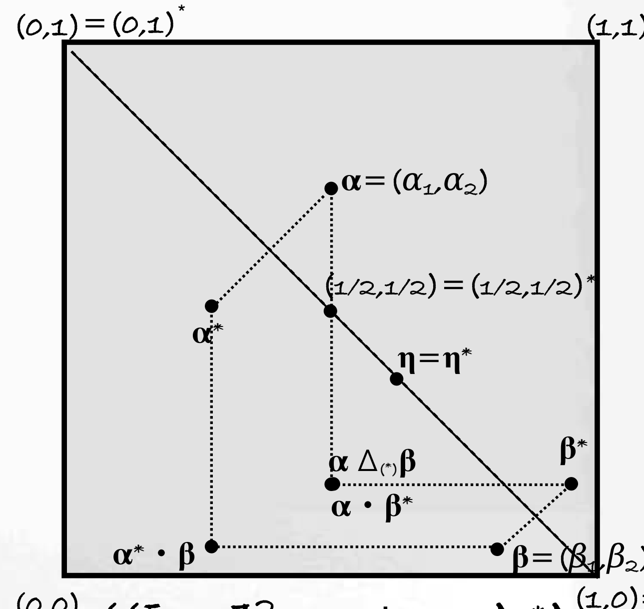
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2)$

$(1,0)' = (0,1) = (1,0)^c$

$\alpha' = \boxed{\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



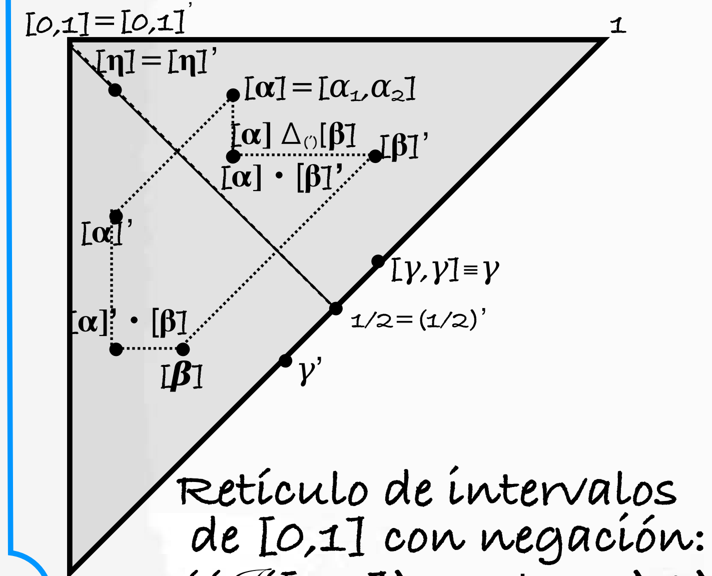
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2, 1-\alpha_1)$

$(1,0)^* = (1,0) \neq (0,1)$

$\alpha^* = \boxed{\alpha\cdot\alpha^* \not\leq \beta+\beta^*} = \beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



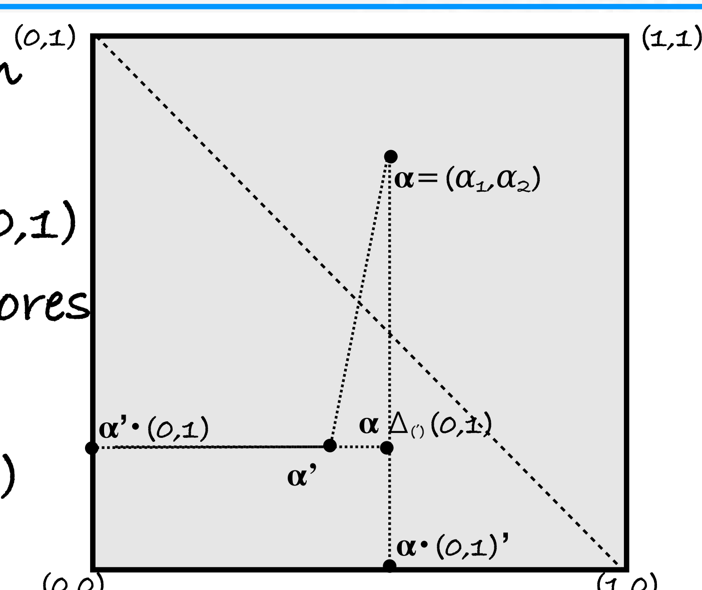
Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]' = [\alpha_2',\alpha_1'] = [1-\alpha_2, 1-\alpha_1]$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \leq [\beta]+[\beta]'} = [\beta]'$

$[\alpha]' = \boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]' \not\leq \gamma+\gamma'} = \gamma$

Nota. $(0,1)$ y $[0,1]$ son tales que $(0,1)^c=(1,0)$, $(0,1)'=(1,0)$, $(0,1)^*=(0,1)$ y $[0,1]'=[0,1]$. Los valores correspondientes de $\alpha\ \Delta_{(')}(0,1)$, de $\alpha\ \Delta_{(*)}(0,1)$ y de $[\alpha]\ \Delta_{(')}[0,1]$ son:

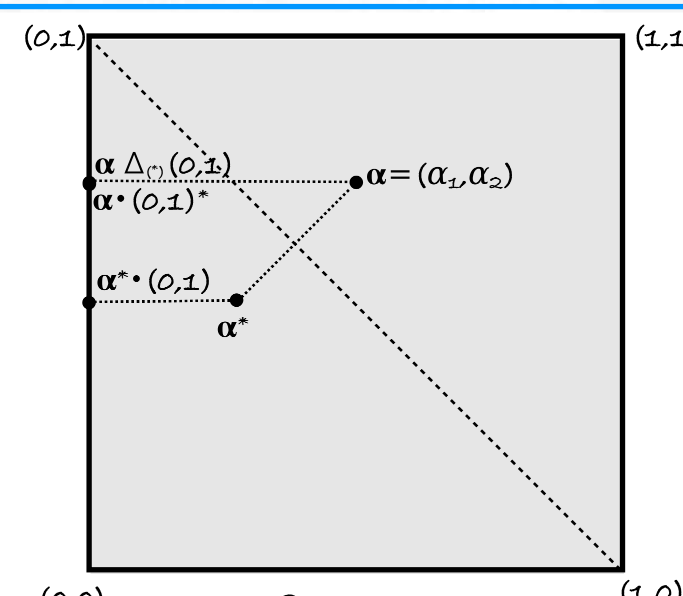


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)' = (\alpha_1',\alpha_2') = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2)$

$(0,1)' = (1,0)$

$\alpha' = \alpha\cdot\alpha' \leq (0,1)+(0,1)' = (0,1)+(1,0) = (1,1)$



$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^* = (\alpha_2',\alpha_1') = (1-\alpha_2, 1-\alpha_1)$

$(0,1)^* = (0,1)$

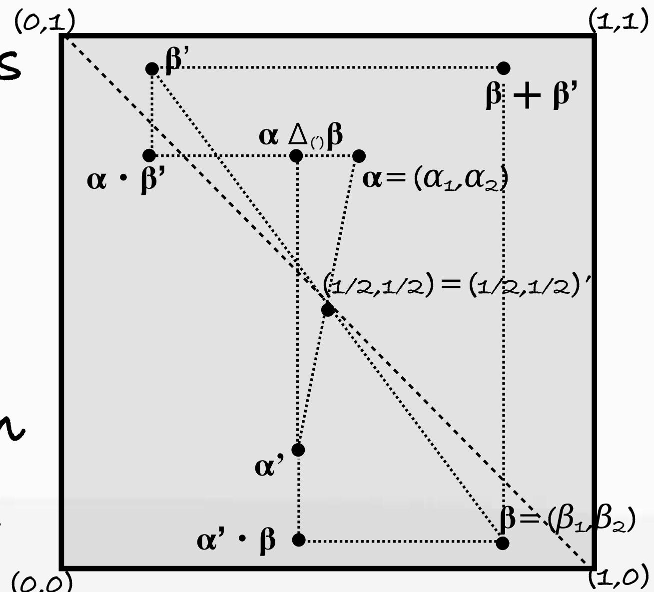
$\alpha^* = \alpha\cdot\alpha^* \not\leq (0,1)+(0,1)^* = (0,1)+(0,1) = (0,1)$

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta\quad\forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha\ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



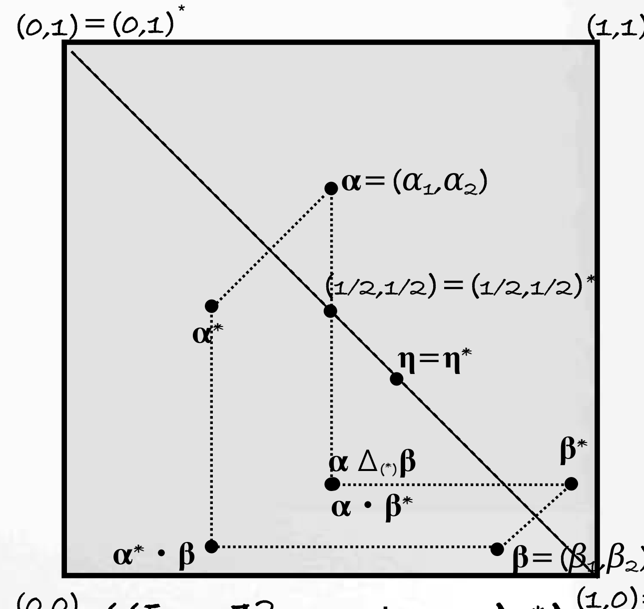
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'=(\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)'=(0,1)=(1,0)^c$

$\alpha'=\boxed{\alpha\cdot\alpha'\leq\beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



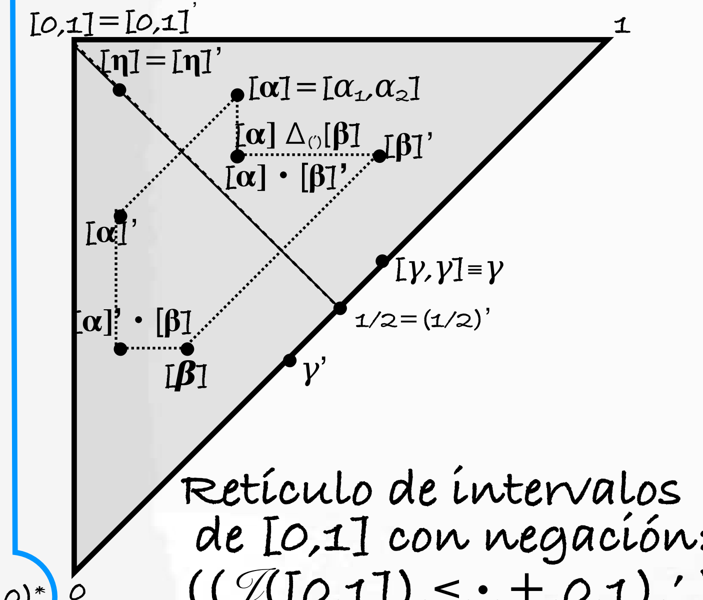
$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*=(\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^*=(1,0)\neq(0,1)$

$\alpha^*=\boxed{\alpha\cdot\alpha^*\nleq\beta+\beta^*}\neq\beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



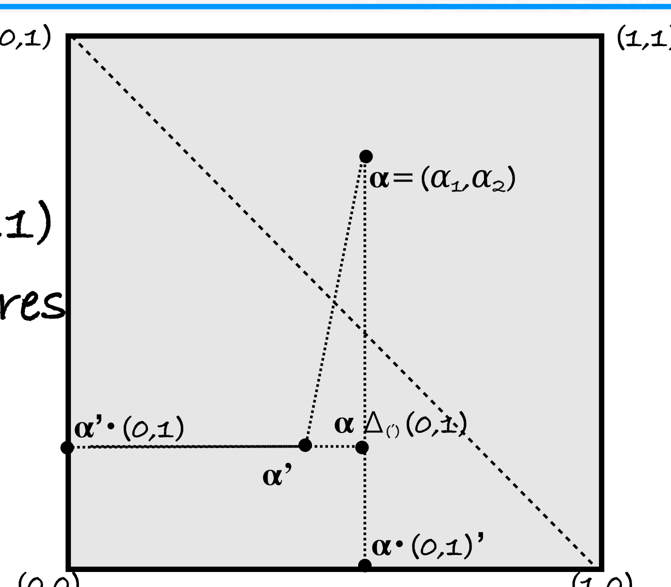
Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]'=[\alpha_2',\alpha_1']=[1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]'=\boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]'\leq[\beta]+[\beta]'}\neq[\beta]'$

$[\alpha]'=\boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]'\nleq\gamma+\gamma'}\neq\gamma$

Nota. $(0,1)$ y $[0,1]$ son tales que $(0,1)^c=(1,0)$, $(0,1)'=(1,0)$, $(0,1)^*=(0,1)$ y $[0,1]'=[0,1]$. Los valores correspondientes de $\alpha\,\Delta_{(')}(0,1)$, de $\alpha\,\Delta_{(*)}(0,1)$ y de $[\alpha]\,\Delta_{(')}[0,1]$ son:

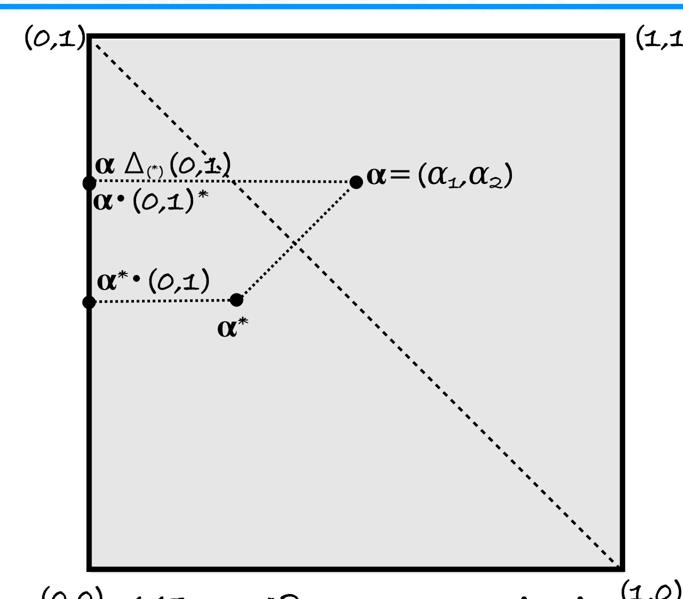


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'=(\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(0,1)'=(1,0)$

$\alpha'=\alpha\cdot\alpha'\leq(0,1)+(0,1)'=(0,1)+(1,0)=(1,1)$

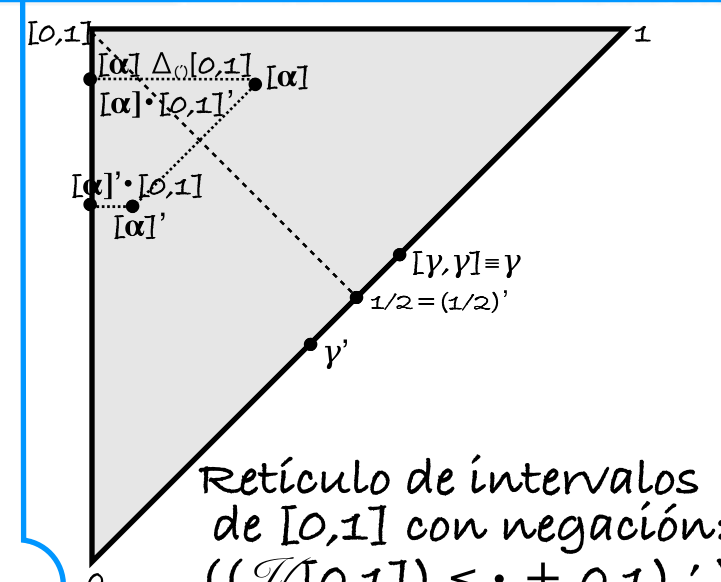


$(([0,1]^2,\leq,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*=(\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(0,1)^*=(0,1)$

$\alpha^*=\alpha\cdot\alpha^*\nleq(0,1)+(0,1)^*=(0,1)+(0,1)=(0,1)$



Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]'=[\alpha_2',\alpha_1']=[1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[0,1]'=[0,1]$

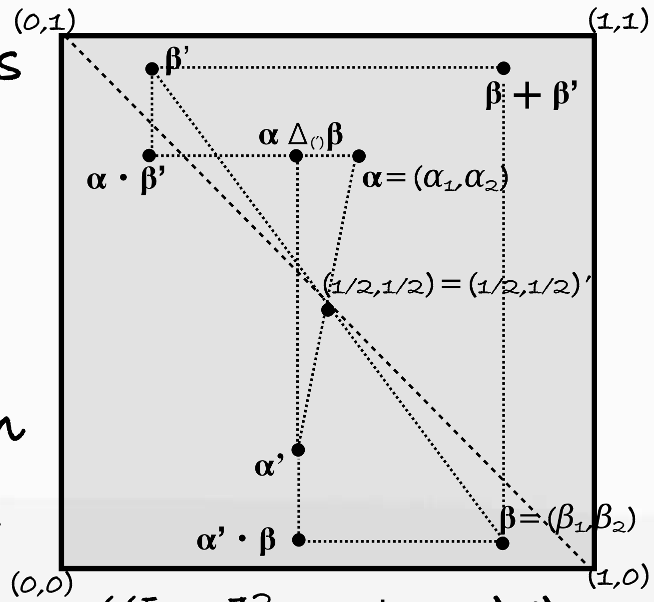
$[\alpha]'=[\alpha]\cdot[\alpha]'\nleq[0,1]+[0,1]'=[0,1]+[0,1]=[0,1]$

Definición. La operación diferencia simétrica $A\Delta B$ de subconjuntos A, B de un referencial E puede extenderse a elementos de un retículo $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$ con una negación fuerte como sigue:

$$\alpha\,\Delta_{(')}\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$$

Ejemplos. Operadores $\Delta_{(')}$, $\Delta_{(*)}$,..., en retículos distributivos con negaciones fuertes $'$, *,..., obtenidas a partir de la aplicación $':[0,1]\to[0,1]$ tal que $\alpha'=1-\alpha \ \ \forall\alpha\in[0,1]$:

Negación usual en $[0,1]^2$.



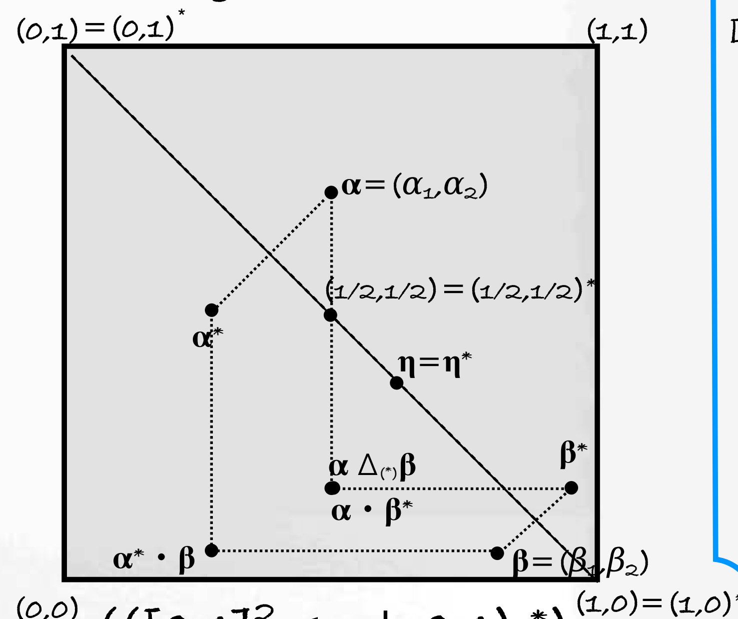
$(([0,1]^2,\le,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'=(\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(1,0)'=(0,1)=(1,0)^c$

$\alpha'=\boxed{\alpha\cdot\alpha'\le\beta+\beta'}$

Una negación alternativa.



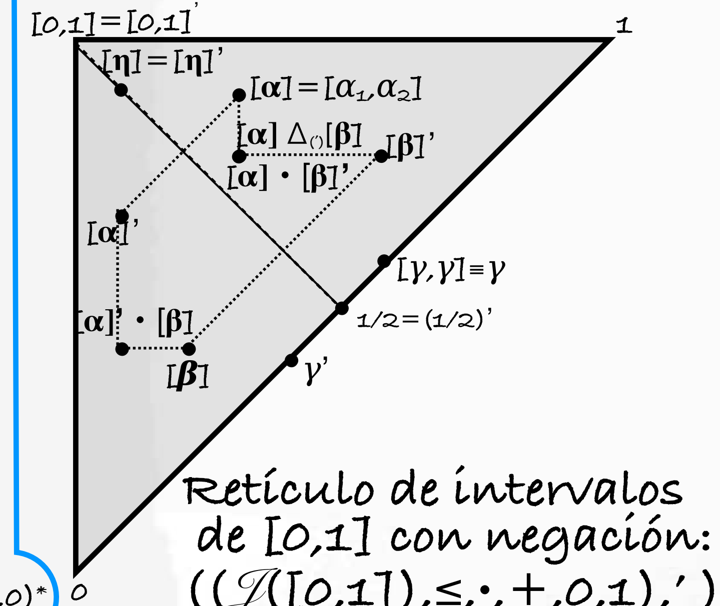
$(([0,1]^2,\le,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*=(\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(1,0)^*=(1,0)\ne(0,1)$

$\alpha^*=\boxed{\alpha\cdot\alpha^*\not\le\beta+\beta^*}\beta^*$

Negación usual en $\mathcal{J}([0,1])$.



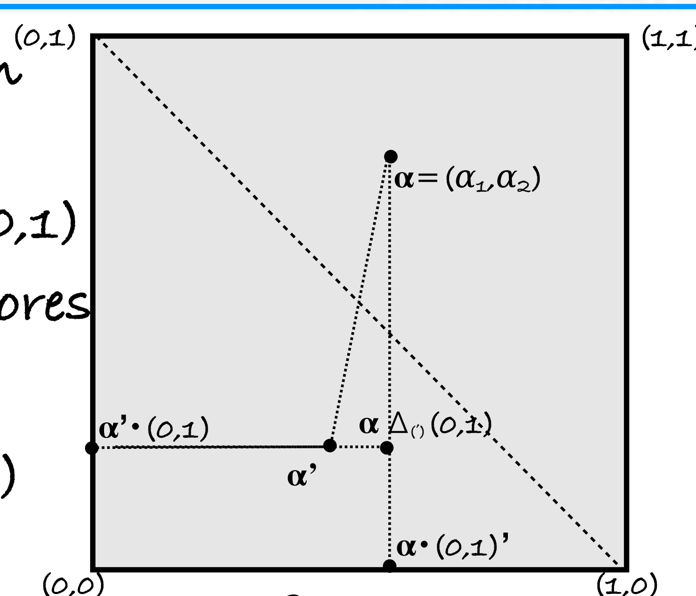
Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\le,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]'=[\alpha_2',\alpha_1']=[1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[\alpha]'=\boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]'\le[\beta]+[\beta]'}[\beta]'$

$[\alpha]'=\boxed{[\alpha]\cdot[\alpha]'\not\le\gamma+\gamma'}\gamma$

Nota. $(0,1)$ y $[0,1]$ son tales que $(0,1)^c=(1,0)$, $(0,1)'=(1,0)$, $(0,1)^*=(0,1)$ y $[0,1]'=[0,1]$. Los valores correspondientes de $\alpha\,\Delta_{(')}(0,1)$, de $\alpha\,\Delta_{(*)}(0,1)$ y de $[\alpha]\,\Delta_{(')}[0,1]$ son:

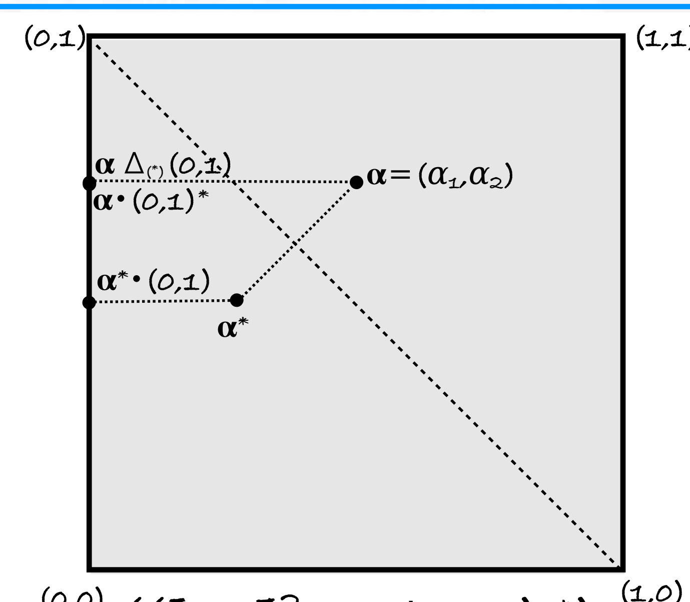


$(([0,1]^2,\le,\cdot,+,0,1),')$

$(\alpha_1,\alpha_2)'=(\alpha_1',\alpha_2')=(1-\alpha_1,1-\alpha_2)$

$(0,1)'=(1,0)$

$\alpha'=\alpha\cdot\alpha'\le(0,1)+(0,1)'=(0,1)+(1,0)=(1,1)$

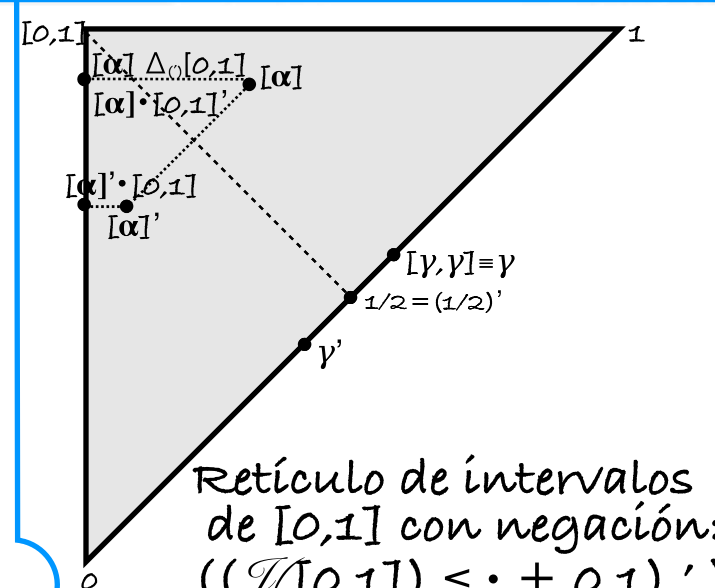


$(([0,1]^2,\le,\cdot,+,0,1),^*)$

$(\alpha_1,\alpha_2)^*=(\alpha_2',\alpha_1')=(1-\alpha_2,1-\alpha_1)$

$(0,1)^*=(0,1)$

$\alpha^*=\alpha\cdot\alpha^*\not\le(0,1)+(0,1)^*=(0,1)+(0,1)=(0,1)$



Retículo de intervalos de $[0,1]$ con negación: $((\mathcal{J}([0,1]),\le,\cdot,+,0,1),')$

$[\alpha_1,\alpha_2]'=[\alpha_2',\alpha_1']=[1-\alpha_2,1-\alpha_1]$

$[0,1]'=[0,1]$

$[\alpha]'=[\alpha]\cdot[\alpha]'\not\le[0,1]+[0,1]'=[0,1]+[0,1]=[0,1]$

Justificación de que, para la terna (α,β,γ), la asociatividad del operador diferencia simétrica:

$$(\alpha \,\Delta_{(\prime)} \beta)\,\Delta_{(\prime)}\,\gamma = \alpha \,\Delta_{(\prime)} (\beta \,\Delta_{(\prime)}\, \gamma)$$

está asegurada mediante la siguiente condición:

$$[(\alpha\cdot\alpha') + (\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')\ .$$

Proposición. Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo con una negación fuerte. Se verifica:

(i) Conmutatividad: $\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \beta\,\Delta_{(')}\alpha \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(ii) Elemento neutro: $\alpha\,\Delta_{(')}0 = \alpha \quad \forall\alpha\in L$,

(iii) $\alpha\,\Delta_{(')}1 = \alpha' \quad \forall\alpha\in L$

(iv) $\alpha\,\Delta_{(')}\alpha = \alpha'\,\Delta_{(')}\alpha' = \alpha\cdot\alpha'$, $\quad \alpha\,\Delta_{(')}\alpha' = \alpha + \alpha' \quad \forall\alpha\in L$

Si L es distributivo, entonces:

(v) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta)' = (\alpha'\,\Delta_{(')}\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta') \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(vi) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\alpha')\cdot(\beta+\beta') \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(vii) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\beta)\cdot(\alpha'+\beta') = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)' \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(viii) Si $\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'$ entonces $(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta') \leq (\alpha\,\Delta_{(')}\beta)$

(ix) Si $[(\alpha\cdot\alpha') + (\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')$, entonces $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma = \alpha\,\Delta_{(')}(\beta\,\Delta_{(')}\gamma)$ (Asociatividad).

(x) Sea $w\in L$ tal que $w'=w^c$. Se verifica: $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq [(\alpha\,\Delta_{(')}w) + (w\,\Delta_{(')}\beta)] \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

<u>Proposición</u>. Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo con una negación fuerte. Se verifica:

(i) Conmutatividad: $\alpha\,\Delta_{(')}\beta = \beta\,\Delta_{(')}\alpha \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(ii) Elemento neutro: $\alpha\,\Delta_{(')}0 = \alpha \quad \forall\alpha\in L$,

(iii) $\alpha\,\Delta_{(')}1 = \alpha' \quad \forall\alpha\in L$

(iv) $\alpha\,\Delta_{(')}\alpha = \alpha'\,\Delta_{(')}\alpha' = \alpha\cdot\alpha', \quad \alpha\,\Delta_{(')}\alpha' = \alpha+\alpha' \quad \forall\alpha\in L$

Si L es distributivo, entonces:

(v) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta)' = (\alpha'\,\Delta_{(')}\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta') \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(vi) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\alpha')\cdot(\beta+\beta') \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(vii) $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq (\alpha+\beta)\cdot(\alpha'+\beta') = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)' \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

(viii) Si $\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'$ entonces $(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta') \leq (\alpha\,\Delta_{(')}\beta)$

(ix) Si $[(\alpha\cdot\alpha') + (\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')$, entonces $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma = \alpha\,\Delta_{(')}(\beta\,\Delta_{(')}\gamma)$ (Asociatividad).

(x) Sea $w\in L$ tal que $w'=w^c$. Se verifica: $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta) \leq [(\alpha\,\Delta_{(')}w) + (w\,\Delta_{(')}\beta)] \quad \forall(\alpha,\beta)\in L^2$

<u>Demostración</u>. (i) Evidente de la definición: $\alpha\Delta_{(')}\beta = \alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta$ y de la conmutabilidad de $\cdot,+$

(ii) $\alpha\Delta_{(')}0 = \alpha\cdot 1 + \alpha'\cdot 0 = \alpha$. (iii) $\alpha\Delta_{(')}1 = \alpha\cdot 0 + \alpha'\cdot 1 = \alpha'$.

(iv) $\alpha\Delta_{(')}\alpha = \alpha\cdot\alpha' + \alpha'\cdot\alpha = \alpha'\Delta_{(')}\alpha' = \alpha\cdot\alpha'$; $\quad \alpha\Delta_{(')}\alpha' = \alpha\cdot\alpha + \alpha'\cdot\alpha' = \alpha + \alpha'$

(v) Sea L distributivo. $(\alpha\,\Delta_{(')}\beta)' = (\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta)' = (\alpha'+\beta)\cdot(\alpha+\beta') = (\alpha'\cdot\beta' + \alpha\cdot\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta') = (\alpha'\,\Delta_{(')}\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta')$.

(vi) Si L es distributivo, $(\alpha+\alpha')\cdot(\beta+\beta') = (\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta) + (\alpha\cdot\beta + \alpha'\cdot\beta') \geq (\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta)$.

(vii) Si L es distributivo, $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha'+\beta') = (\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta) + (\alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta') \geq (\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta)$

(viii) Si $\alpha\cdot\alpha' \leq \beta+\beta'$ entonces $\beta\cdot\beta' = (\beta+\beta')' \leq (\alpha\cdot\alpha')' = \alpha+\alpha'$. Y si L es distributivo entonces $[(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta')]\cdot(\alpha\Delta_{(')}\beta) = [(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta')]\cdot(\alpha\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta) = \alpha\cdot\alpha'\cdot\beta' + \alpha\cdot\alpha'\cdot\beta + \alpha\cdot\beta\cdot\beta' + \alpha'\cdot\beta\cdot\beta' = \alpha\cdot\alpha'\cdot(\beta'+\beta) + \beta\cdot\beta'\cdot(\alpha+\alpha') = \alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta'$, que prueba la desigualdad $(\alpha\cdot\alpha') + (\beta\cdot\beta') \leq (\alpha\,\Delta_{(')}\beta)$.

(continúa)

Demostración (continuación)

(ix) Sea L distributivo y sea $(\alpha,\beta,\gamma)\in L^3$ cuyos elementos verifican $[(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')$, o la desigualdad equivalente $\beta\cdot\beta' \leq (\alpha+\alpha')\cdot(\gamma+\gamma')$. Luego $\beta\cdot\beta' \leq (\alpha+\alpha')$, $\alpha\cdot\alpha' \leq (\beta+\beta')$, $\beta\cdot\beta' \leq (\gamma+\gamma')$ y $\gamma\cdot\gamma' \leq (\beta+\beta')$. En consecuencia, $\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha'\cdot\beta\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta\cdot\beta'=\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'+\alpha)=\beta\cdot\beta'$, es decir $\beta\cdot\beta' \leq(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$. También: $\alpha\cdot\alpha'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta=\alpha\cdot\alpha'\cdot(\beta'+\beta)=\alpha\cdot\alpha'$ prueba que $\alpha\cdot\alpha'\leq(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$.

De forma análoga $\beta\cdot\beta'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\beta\cdot\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'\cdot\gamma=\beta\cdot\beta'\cdot(\gamma'+\gamma)=\beta\cdot\beta'$, que muestra que $\beta\cdot\beta'\leq(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$. Finalmente, $\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta'+\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta=\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'+\beta)=\gamma\cdot\gamma'$, es decir $\gamma\cdot\gamma'\leq(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$.

Entonces: $(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)'\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha'+\beta)\cdot(\alpha+\beta')\cdot\gamma=$ $(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha\cdot\alpha'+\beta\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=$

$\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Y por otra parte, $\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)'=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot(\beta'+\gamma)\cdot(\beta+\gamma')=$ $\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\gamma\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'+\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=$

$\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$, expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego

$[(L \text{ distributivo})\,\&\,((\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma'))\leq(\beta+\beta'))] \Rightarrow [(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)]$.

(x) Sea L distributivo y w tal que $w'=w^c$. Probemos que $\forall(\alpha,\beta)\in L^2$: $(\alpha\Delta_{(')}\beta) \leq [(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)]$.

$\alpha\Delta_{(')}\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot(w+w^c)=\alpha\cdot\beta'\cdot w^c+\alpha'\cdot\beta\cdot w+\alpha\cdot\beta'\cdot w+\alpha'\cdot\beta\cdot w^c\leq$

$\alpha\cdot w^c+\alpha'\cdot w+\beta'\cdot w+\beta\cdot w^c=(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)$. ∎

Demostración (continuación)

(ix) Sea L distributivo y sea $(\alpha,\beta,\gamma)\in L^3$ cuyos elementos verifican $[(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma')] \le (\beta+\beta')$, o la desigualdad equivalente $\beta\cdot\beta' \le (\alpha+\alpha')\cdot(\gamma+\gamma')$. Luego $\beta\cdot\beta' \le (\alpha+\alpha')$, $\alpha\cdot\alpha' \le (\beta+\beta')$, $\beta\cdot\beta' \le (\gamma+\gamma')$ y $\gamma\cdot\gamma' \le (\beta+\beta')$. En consecuencia, $\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha'\cdot\beta\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta\cdot\beta'=$ $\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'+\alpha)=\beta\cdot\beta'$, es decir $\beta\cdot\beta'\le(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$. También: $\alpha\cdot\alpha'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta=$ $\alpha\cdot\alpha'\cdot(\beta'+\beta)=\alpha\cdot\alpha'$ prueba que $\alpha\cdot\alpha'\le(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$.

De forma análoga $\beta\cdot\beta'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\beta\cdot\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'\cdot\gamma=\beta\cdot\beta'\cdot(\gamma'+\gamma)=\beta\cdot\beta'$, que muestra que $\beta\cdot\beta'\le(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$. Finalmente, $\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta'+\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta=\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'+\beta)=\gamma\cdot\gamma'$, es decir $\gamma\cdot\gamma'\le(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$.

Entonces: $(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)'\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha'+\beta)\cdot(\alpha+\beta')\cdot\gamma=$ $(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha\cdot\alpha'+\beta\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=$ $\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Y por otra parte, $\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)'=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot(\beta'+\gamma)\cdot(\beta+\gamma')=$ $\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\gamma\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'+\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=$ $\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$, expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego $[(L \text{ distributivo})\,\&\,((\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma'))\le(\beta+\beta'))] \Rightarrow [(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)]$.

(x) Sea L distributivo y w tal que $w'=w^c$. Probemos que $\forall(\alpha,\beta)\in L^2$: $(\alpha\Delta_{(')}\beta)\le[(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)]$.

$\alpha\Delta_{(')}\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot(w+w^c)=\alpha\cdot\beta'\cdot w^c+\alpha'\cdot\beta\cdot w+\alpha\cdot\beta'\cdot w+\alpha'\cdot\beta\cdot w^c\le$

$\alpha\cdot w^c+\alpha'\cdot w+\beta'\cdot w+\beta\cdot w^c=(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)$.∎

Corolario. Si L es distributivo acotado y s y w son tales que $s'=s^c$ y $w'=w^c$ entonces

$$(\alpha\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w=\alpha\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w)\quad\forall\alpha\in L.$$

Demostración. $[(\alpha\cdot\alpha')+(w\cdot w')]=[(\alpha\cdot\alpha')+(w\cdot w^c)]=[(\alpha\cdot\alpha')+0]=\alpha\cdot\alpha'\le 1=s+s^c=s+s'$.∎

Demostración (continuación)

(ix) Sea L distributivo y sea $(\alpha,\beta,\gamma)\in L^3$ cuyos elementos verifican $[(\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma')] \leq (\beta+\beta')$, o la desigualdad equivalente $\beta\cdot\beta' \leq (\alpha+\alpha')\cdot(\gamma+\gamma')$. Luego $\beta\cdot\beta' \leq (\alpha+\alpha')$, $\alpha\cdot\alpha' \leq (\beta+\beta')$, $\beta\cdot\beta' \leq (\gamma+\gamma')$ y $\gamma\cdot\gamma' \leq (\beta+\beta')$. En consecuencia, $\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha'\cdot\beta\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta\cdot\beta'=\beta\cdot\beta'\cdot(\alpha'+\alpha)=\beta\cdot\beta'$, es decir $\beta\cdot\beta' \leq(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$. También: $\alpha\cdot\alpha'\cdot(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\alpha'\cdot\beta=\alpha\cdot\alpha'\cdot(\beta'+\beta)=\alpha\cdot\alpha'$ prueba que $\alpha\cdot\alpha'\leq(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)$.

De forma análoga $\beta\cdot\beta'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\beta\cdot\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'\cdot\gamma=\beta\cdot\beta'\cdot(\gamma'+\gamma)=\beta\cdot\beta'$, que muestra que $\beta\cdot\beta'\leq(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$. Finalmente, $\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta'+\gamma\cdot\gamma'\cdot\beta=\gamma\cdot\gamma'\cdot(\beta'+\beta)=\gamma\cdot\gamma'$, es decir $\gamma\cdot\gamma'\leq(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)$.

Entonces: $(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)'\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot\gamma'+(\alpha'+\beta)\cdot(\alpha+\beta')\cdot\gamma=$ $(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha\cdot\alpha'+\beta\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma')+(\alpha'\cdot\beta'+\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=$

$\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Y por otra parte, $\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)'=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot(\beta'+\gamma)\cdot(\beta+\gamma')=$ $\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\gamma\cdot\gamma'+\beta\cdot\beta'+\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=\alpha'\cdot(\beta\cdot\gamma'+\beta'\cdot\gamma)+\alpha\cdot(\beta'\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma)=$

$\alpha'\cdot\beta\cdot\gamma'+\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta'\cdot\gamma'+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$, expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego $[(L \text{ distributivo})\,\&\,((\alpha\cdot\alpha')+(\gamma\cdot\gamma'))\leq(\beta+\beta'))] \Rightarrow [(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma)]$.

(x) Sea L distributivo y w tal que $w'=w^c$. Probemos que $\forall(\alpha,\beta)\in L^2$: $(\alpha\Delta_{(')}\beta) \leq [(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)]$.

$\alpha\Delta_{(')}\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta'+\alpha'\cdot\beta)\cdot(w+w^c)=\alpha\cdot\beta'\cdot w^c+\alpha'\cdot\beta\cdot w+\alpha\cdot\beta'\cdot w+\alpha'\cdot\beta\cdot w^c \leq$
$\alpha\cdot w^c+\alpha'\cdot w+\beta'\cdot w+\beta\cdot w^c=(\alpha\Delta_{(')}w)+(w\Delta_{(')}\beta)$. ∎

Corolario. Si L es distributivo acotado y s y w son tales que $s'=s^c$ y $w'=w^c$ entonces

$$(\alpha\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w=\alpha\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w) \quad \forall\alpha\in L.$$

Demostración. $[(\alpha\cdot\alpha')+(w\cdot w')]=[(\alpha\cdot\alpha')+(w\cdot w^c)]=[(\alpha\cdot\alpha')+0]=\alpha\cdot\alpha' \leq 1= s+s^c = s+s'$. ∎

Corolario. Si L es una cadena acotada con una negación fuerte, entonces $\Delta_{(')}$ es asociativa en L:

$$(\alpha\Delta_{(')}\beta)\Delta_{(')}\gamma=\alpha\Delta_{(')}(\beta\Delta_{(')}\gamma) \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in L^3.$$

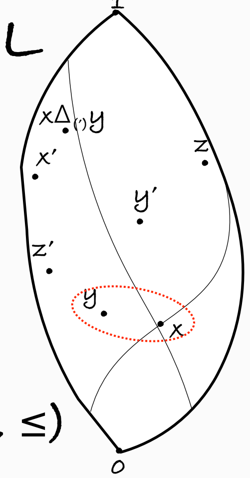
Demostración. En una cadena L con negación fuerte, se verifica: $(\alpha\cdot\alpha') \leq (\beta+\beta')$ $\forall(\alpha,\beta)\in L^2$ ∎

Aplicación asociada: $\varphi_w : L \longrightarrow L$ tal que

$\varphi_w(x) = x \Delta_{(\prime)} w \quad \forall x \in L$

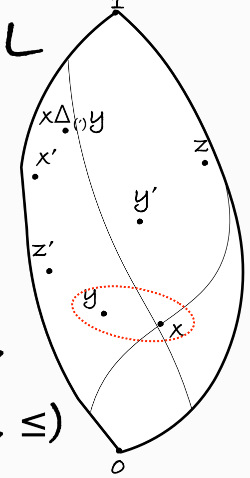
Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}: L \times L \to L$

en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x \Delta_{(')} y = x \cdot y' + x' \cdot y$



$(L, \leq)$

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}$: $L\times L \to L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



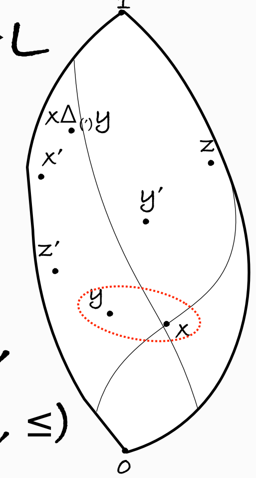
(L, ≤)

<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.

Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,

Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$. ∎

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}: L\times L \rightarrow L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



$(L, \leq)$

<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1 = x'$, $x\Delta_{(')}y' = x'\Delta_{(')}y = x\cdot y + x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x = x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x' = x + x'$

$(x\Delta_{(')}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$

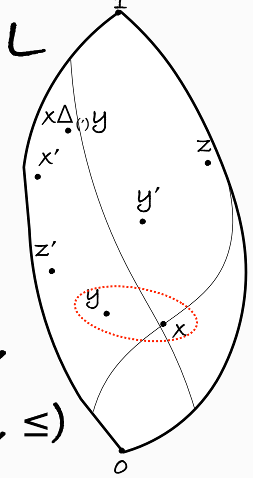
$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y + y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y =$
$x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y) = (w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(')}(w^c + y)$.∎

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(\prime)}: L\times L \to L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(\prime)}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



$(L, \leq)$

<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.

Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(\prime)}y = y\Delta_{(\prime)}x$,

Elemento neutro: $x\Delta_{(\prime)}0 = x$. ∎

Más propiedades: $x\Delta_{(\prime)}1 = x'$, $x\Delta_{(\prime)}y' = x'\Delta_{(\prime)}y = x\cdot y + x'\cdot y'$

$x\Delta_{(\prime)}x = x'\Delta_{(\prime)}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(\prime)}x' = x + x'$

$(x\Delta_{(\prime)}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(\prime)}y')$

$(x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}z = x\cdot(y\Delta_{(\prime)}z') + x'\cdot(y\Delta_{(\prime)}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(\prime)}(y\Delta_{(\prime)}z) = x\cdot(y\Delta_{(\prime)}z') + x'\cdot(y\Delta_{(\prime)}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$

$(x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

$((x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y = x\Delta_{(\prime)}y + y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y = (x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y =$
$x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

Si w es complementado:

$w\cdot(x\Delta_{(\prime)}y) = (w\cdot x)\Delta_{(\prime)}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(\prime)}(w^c + y)$. ∎

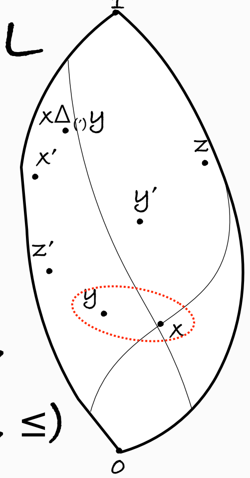
<u>Corolario</u>. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall (x,y,z) \in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(\prime)}y) = (x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(\prime)}y)' = (x\Delta_{(\prime)}y') = (x'\Delta_{(\prime)}y)$

$(x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}z = x\Delta_{(\prime)}(y\Delta_{(\prime)}z) = (x\Delta_{(\prime)}z)\Delta_{(\prime)}y$

$((x\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y)\Delta_{(\prime)}y = x\Delta_{(\prime)}y$

Operador "diferencia simétrica" $\Delta_{(')}: L\times L \to L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



$(L, \leq)$

Proposición. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1 = x'$, $x\Delta_{(')}y' = x'\Delta_{(')}y = x\cdot y + x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x = x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x' = x + x'$

$(x\Delta_{(')}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y + y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y =$
$x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y) = (w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(')}(w^c + y)$.∎

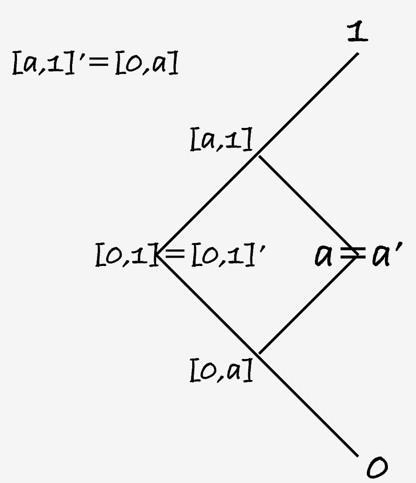
Corolario. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall (x,y,z) \in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(')}y) = (x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)' = (x\Delta_{(')}y') = (x'\Delta_{(')}y)$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = (x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#)

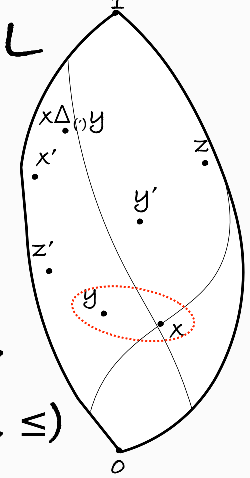
$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y$

(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de $\{0,a,1\}$:



$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a) = [a,1]\Delta_{(')}[0,a] = [0,a] + [a,1] = [a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a = ([0,a] + [0,1])\Delta_{(')}a = [0,1]\Delta_{(')}a = [0,a]$

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}: L\times L \to L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



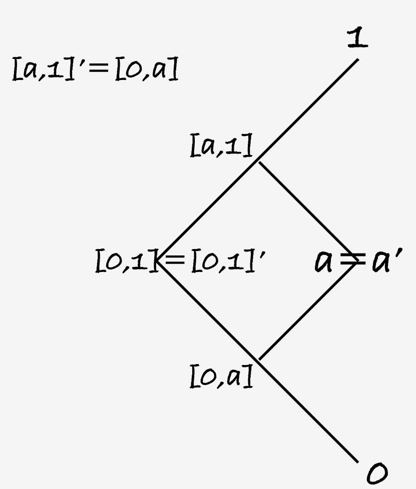
$(L, \leq)$

<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1 = x'$, $x\Delta_{(')}y' = x'\Delta_{(')}y = x\cdot y + x'\cdot y'$
$x\Delta_{(')}x = x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x' = x + x'$
$(x\Delta_{(')}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(')}y')$
$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$
$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$
$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$
$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y + y\cdot y'$
$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y =$
$x\cdot(y + y') + y\cdot y'$
Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y) = (w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(')}(w^c + y)$.∎

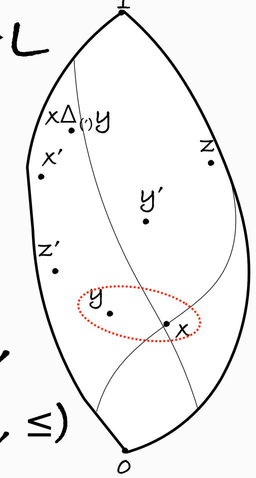
<u>Corolario</u>. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall(x,y,z)\in C\times C\times C$:
$(x\Delta_{(')}y) = (x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)' = (x\Delta_{(')}y') = (x'\Delta_{(')}y)$
$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = (x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#) (válido en producto de cadenas)
$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y$

(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de $\{0,a,1\}$:



$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a) = [a,1]\Delta_{(')}[0,a] = [0,a] + [a,1] = [a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a = ([0,a] + [0,1])\Delta_{(')}a = [0,1]\Delta_{(')}a = [0,a]$

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}: L\times L \to L$ en $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$, Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1 = x'$, $x\Delta_{(')}y' = x'\Delta_{(')}y = x\cdot y + x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x = x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x' = x + x'$

$(x\Delta_{(')}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = x\cdot(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y + y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y =$ $x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y) = (w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(')}(w^c + y)$.∎

<u>Corolario</u>. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall (x,y,z)\in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(')}y) = (x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)' = (x\Delta_{(')}y') = (x'\Delta_{(')}y)$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = (x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#) (válido en producto de cadenas)

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y$

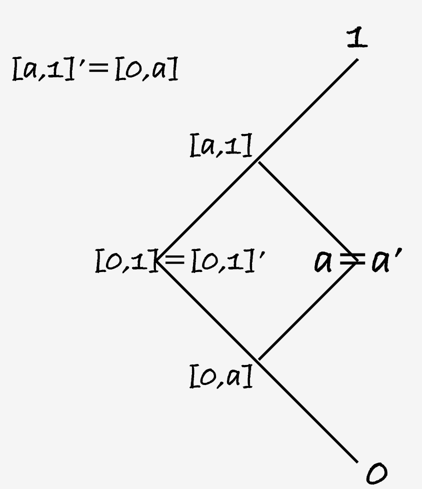
<u>Corolario</u>. Si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c = w'$ y $s^c = s'$ entonces $\forall x\in L$:

$$(x\Delta_{(')}w) = (x+w)\cdot(x\cdot w)'$$

$w\Delta_{(')}w = 0$, $w\Delta_{(')}w^c = 1$, $(x\Delta_{(')}w)' = (x\Delta_{(')}w^c) = (x'\Delta_{(')}w)$

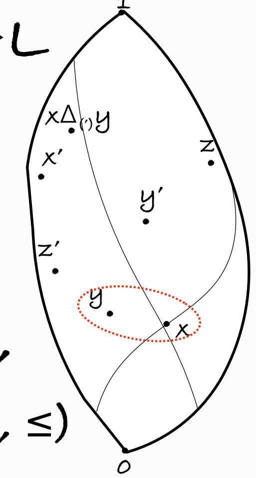
$(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w = x$, $(x\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w = (x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}s = x\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w)$.∎

(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de $\{0,a,1\}$:



$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a) = [a,1]\Delta_{(')}[0,a] = [0,a] + [a,1] = [a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a = ([0,a] + [0,1])\Delta_{(')}a = [0,1]\Delta_{(')}a = [0,a]$

Operador "diferencia simétrica" $\Delta_{(')}: L\times L \to L$ en $((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$: $x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y$



Proposición. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1 = x'$, $x\Delta_{(')}y' = x'\Delta_{(')}y = x\cdot y + x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x = x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x' = x + x'$

$(x\Delta_{(')}y)' = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y') = x\cdot x' + y\cdot y' + (x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (x\cdot x' + y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = x(y\Delta_{(')}z') + x'\cdot(y\Delta_{(')}z) + (y\cdot y' + z\cdot z')\cdot x$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y + y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\cdot(y + y') + y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y) = (w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y) = (w^c + x)\Delta_{(')}(w^c + y)$.∎

Corolario. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall (x,y,z)\in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(')}y) = (x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)' = (x\Delta_{(')}y') = (x'\Delta_{(')}y)$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z = x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z) = (x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#) (válido en producto de cadenas)

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y = x\Delta_{(')}y$

Corolario. Si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c = w'$ y $s^c = s'$ entonces $\forall x\in L$:

$$(x\Delta_{(')}w) = (x+w)\cdot(x\cdot w)'$$

$w\Delta_{(')}w = 0$, $w\Delta_{(')}w^c = 1$, $(x\Delta_{(')}w)' = (x\Delta_{(')}w^c) = (x'\Delta_{(')}w)$

$(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w = x$, $(x\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w = (x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}s = x\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w)$.∎

Para cada $y\in L$ sea la aplicación $\varphi_y : L\to L$ tal que

$$\varphi_y(x) = x\Delta_{(')}y = x\cdot y' + x'\cdot y \quad \forall x\in L.$$

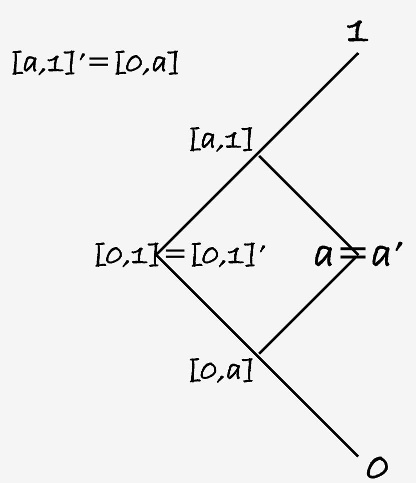
Según los resultados anteriores, se obtiene:

Proposición.

$\varphi_0 = i$ (identidad en L), $(\varphi_1 = ')$ (negación en L),

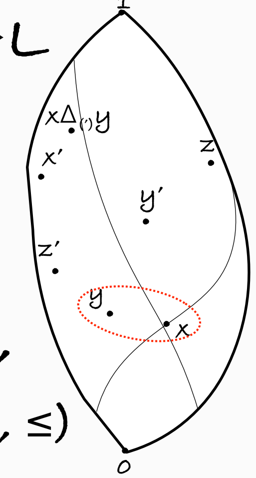
$\varphi_{x'} = (\varphi_x \circ ') = \varphi_x \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_x = (' \circ \varphi_x)$, $\varphi_x{}^4 = \varphi_x{}^2$

(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de {0,a,1}:



$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a) = [a,1]\Delta_{(')}[0,a] = [0,a] + [a,1] = [a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a = ([0,a] + [0,1])\Delta_{(')}a = [0,1]\Delta_{(')}a = [0,a]$

Operador "<u>diferencia simétrica</u>" $\Delta_{(')}: L\times L\to L$ en $((L,\leq,\cdot,+,0,1),\,')$: $x\Delta_{(')}y=x\cdot y'+x'\cdot y$



$(L,\leq)$

<u>Proposición</u>. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1=x'$, $x\Delta_{(')}y'=x'\Delta_{(')}y=x\cdot y+x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x=x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x'=x+x'$

$(x\Delta_{(')}y)'=(x\cdot x'+y\cdot y'+x\cdot y+x'\cdot y')=x\cdot x'+y\cdot y'+(x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z=x(y\Delta_{(')}z')+x'\cdot(y\Delta_{(')}z)+(x\cdot x'+y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z)=x(y\Delta_{(')}z')+x'\cdot(y\Delta_{(')}z)+(y\cdot y'+z\cdot z')\cdot x$

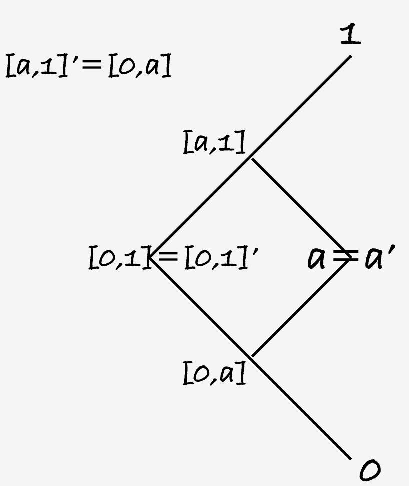
$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\cdot(y+y')+y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\Delta_{(')}y+y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y= (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=$
$x\cdot(y+y')+y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y)=(w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y)=(w^c+x)\Delta_{(')}(w^c+y)$.∎

(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de $\{0,a,1\}$:



$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a)=[a,1]\Delta_{(')}[0,a]=[0,a]+[a,1]=[a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a=([0,a]+[0,1])\Delta_{(')}a=[0,1]\Delta_{(')}a=[0,a]$

<u>Corolario</u>. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall(x,y,z)\in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(')}y)=(x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)'=(x\Delta_{(')}y')=(x'\Delta_{(')}y)$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z=x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z)=(x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#) (válido en producto de cadenas)

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\Delta_{(')}y$

<u>Corolario</u>. Si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c=w'$ y $s^c=s'$ entonces $\forall x\in L$:

$$(x\Delta_{(')}w)=(x+w)\cdot(x\cdot w)'$$

$w\Delta_{(')}w=0$, $w\Delta_{(')}w^c=1$, $(x\Delta_{(')}w)'=(x\Delta_{(')}w^c)=(x'\Delta_{(')}w)$

$(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x$, $(x\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w=(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}s=$
$x\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w)$.∎

Para cada $y\in L$ sea la aplicación $\varphi_y: L\to L$ tal que

$$\varphi_y(x)= x\Delta_{(')}y = x\cdot y'+x'\cdot y \quad \forall x\in L.$$

Según los resultados anteriores, se obtiene:

<u>Proposición</u>.

$\varphi_0=i$ (identidad en L), $(\varphi_1=\,')$ (negación en L),

$\varphi_{x'}=(\varphi_x\circ\,')=\varphi_x\circ\varphi_1=\varphi_1\circ\varphi_x=(\,'\circ\varphi_x)$, $\varphi_x^4=\varphi_x^2$

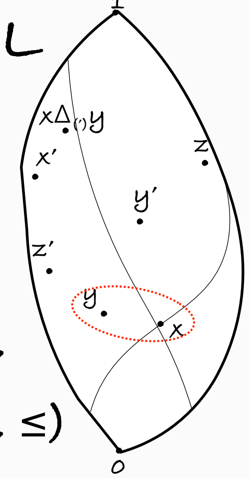
Además, si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c=w'$ y $s^c=s'$ entonces $\forall x\in L$:

$\varphi_w(w)=0$, $\varphi_w(w^c)=1$,
$\varphi_x^2=i$, $\varphi_{s\Delta w}=\varphi_s\circ\varphi_w=\varphi_w\circ\varphi_s$, $(\varphi_w)'=\varphi_{w^c}$

Si L es una cadena C, entonces $\forall(x,y)\in C\times C$:

$(\varphi_x)'=\varphi_{x'}$, $\varphi_{x\Delta_{(')}y}=\varphi_x\circ\varphi_y=\varphi_y\circ\varphi_x$, $\varphi_x^3=\varphi_x$.∎

Operador "diferencia simétrica" $\Delta_{(')}: L\times L\to L$ en $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$: $x\Delta_{(')}y=x\cdot y'+x'\cdot y$



Proposición. Sea L un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte.
Se verifica: Conmutativa $x\Delta_{(')}y = y\Delta_{(')}x$,
Elemento neutro: $x\Delta_{(')}0 = x$.∎

Más propiedades: $x\Delta_{(')}1=x'$, $x\Delta_{(')}y'=x'\Delta_{(')}y=x\cdot y+x'\cdot y'$

$x\Delta_{(')}x=x'\Delta_{(')}x' = x\cdot x'$, $x\Delta_{(')}x'=x+x'$

$(x\Delta_{(')}y)'=(x\cdot x'+y\cdot y'+x\cdot y+x'\cdot y')=x\cdot x'+y\cdot y'+(x\Delta_{(')}y')$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z=x\cdot(y\Delta_{(')}z')+x'\cdot(y\Delta_{(')}z)+(x\cdot x'+y\cdot y')\cdot z$

$x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z)=x\cdot(y\Delta_{(')}z')+x'\cdot(y\Delta_{(')}z)+(y\cdot y'+z\cdot z')\cdot x$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\cdot(y+y')+y\cdot y'$

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\Delta_{(')}y+y\cdot y'$

$(((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y= (x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y= x\cdot(y+y')+y\cdot y'$

Si w es complementado:
$w\cdot(x\Delta_{(')}y)=(w\cdot x)\Delta_{(')}(w\cdot y)=(w^c+x)\Delta_{(')}(w^c+y)$.∎

Corolario. Como consecuencia, si L es una cadena C, entonces $\forall(x,y,z)\in C\times C\times C$:

$(x\Delta_{(')}y)=(x+y)\cdot(x\cdot y)'$, $(x\Delta_{(')}y)'=(x\Delta_{(')}y')=(x'\Delta_{(')}y)$

$(x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}z=x\Delta_{(')}(y\Delta_{(')}z)=(x\Delta_{(')}z)\Delta_{(')}y$ (#) (válido en producto de cadenas)

$((x\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y)\Delta_{(')}y=x\Delta_{(')}y$

Corolario. Si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c=w'$ y $s^c=s'$ entonces $\forall x\in L$:

$$(x\Delta_{(')}w)=(x+w)\cdot(x\cdot w)'$$

$w\Delta_{(')}w= 0$, $w\Delta_{(')}w^c=1$, $(x\Delta_{(')}w)'=(x\Delta_{(')}w^c)=(x'\Delta_{(')}w)$

$(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x$, $(x\Delta_{(')}s)\Delta_{(')}w=(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}s=x\Delta_{(')}(s\Delta_{(')}w)$.∎

Para cada $y\in L$ sea la aplicación $\varphi_y:L\to L$ tal que
$$\varphi_y(x)= x\Delta_{(')}y =x\cdot y'+x'\cdot y \quad \forall x\in L.$$
Según los resultados anteriores, se obtiene:

Proposición.

$\varphi_0=i$ (identidad en L), $(\varphi_1=')$ (negación en L),

$\varphi_{x'}=(\varphi_x\circ ')=\varphi_x\circ\varphi_1=\varphi_1\circ\varphi_x=('\circ\varphi_x)$, $\varphi_x^{4}=\varphi_x^{2}$

Además, si $w\in L$ y $s\in L$ son complementados tales que $w^c=w'$ y $s^c=s'$ entonces $\forall x\in L$:

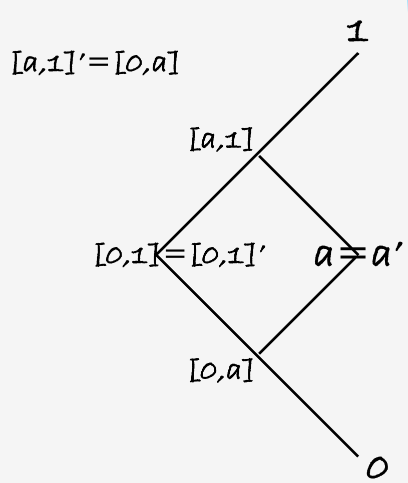
$\varphi_w(w)=0$, $\varphi_w(w^c)=1$,

$\varphi_x^2=i$, $\varphi_{s\Delta w}=\varphi_s\circ\varphi_w=\varphi_w\circ\varphi_s$, $(\varphi_w)'=\varphi_{w^c}$

Si L es una cadena C, entonces $\forall(x,y)\in C\times C$:

$(\varphi_x)'=\varphi_{x'}$, $\varphi_{x\Delta_{(')}y}=\varphi_x\circ\varphi_y=\varphi_y\circ\varphi_x$, $\varphi_x^3=\varphi_x$.∎

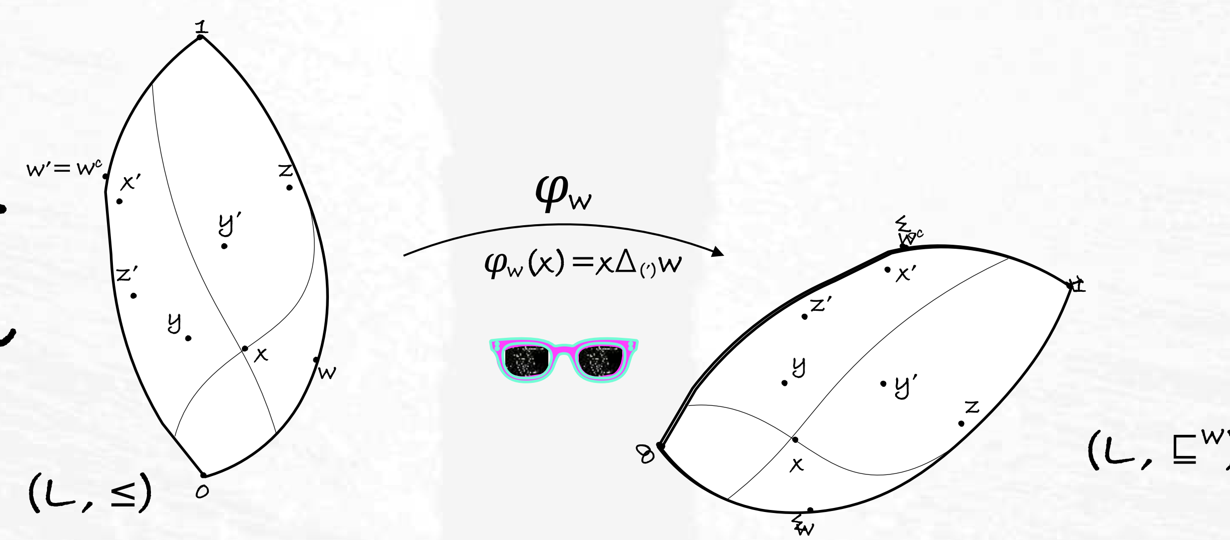
(#) Contra-ejemplo: Retículo de intervalos $\mathcal{I}(C_3)$ de {0,a,1}:



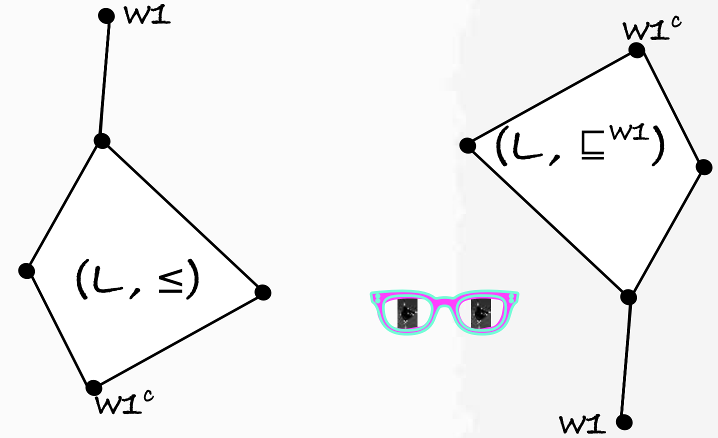
Teorema. Si w es complementado entonces $(L,\sqsubseteq^w)$ es retículo.
Si además $w'=w^c$, la aplicación φ_w es un isomorfismo $(L,\le)\to(L,\sqsubseteq^w)$ que verifica
$\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$ y $(\varphi_w(x))'=\varphi_w(x')$ $\forall x\in L$.∎

$[a,1]\Delta_{(')}[0,1]\Delta_{(')}a)=[a,1]\Delta_{(')}[0,a]=[0,a]+[a,1]=[a,1] \neq ([a,1]\Delta_{(')}[0,1])\Delta_{(')}a=([0,a]+[0,1])\Delta_{(')}a=[0,1]\Delta_{(')}a=[0,a]$

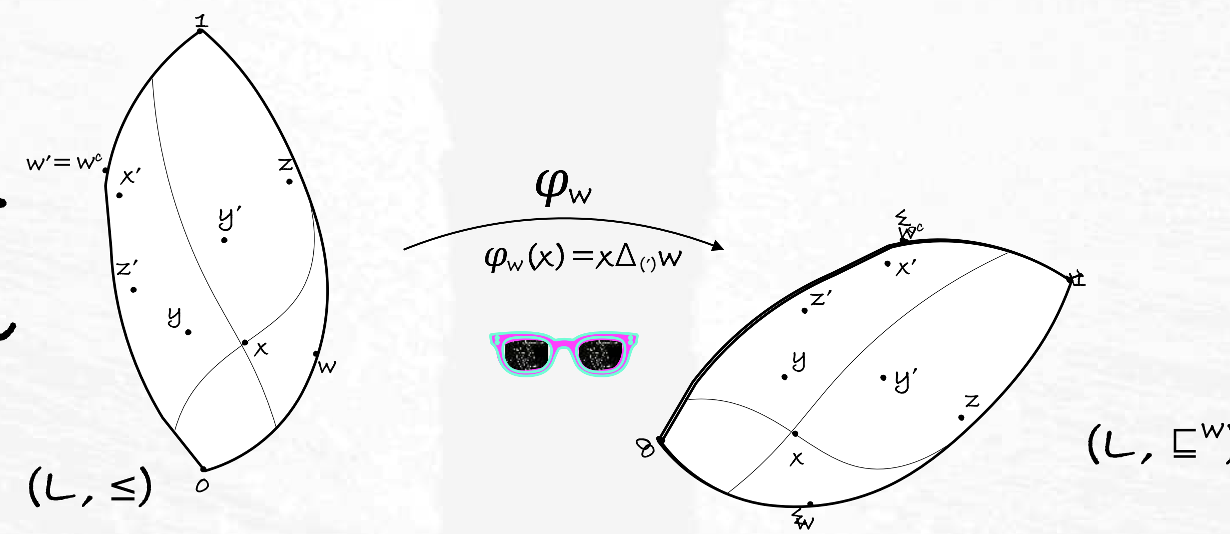
Teorema. Si w es complementado entonces $(L,\sqsubseteq^{w})$ es retículo. Si además $w'=w^c$, la aplicación φ_w es un isomorfismo $(L,\leq)\to(L,\sqsubseteq^{w})$ que verifica $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$ y $(\varphi_w(x))'=\varphi_w(x')$ $\forall x\in L$. ∎



Nota 1. Si w es complementado pero no existe una negación fuerte $':L\longrightarrow L$ tal que $w'=w^c$, entonces $(L, \sqsubseteq^w)$ es retículo, pero no necesariamente isomorfo a $(L,\leq)$:

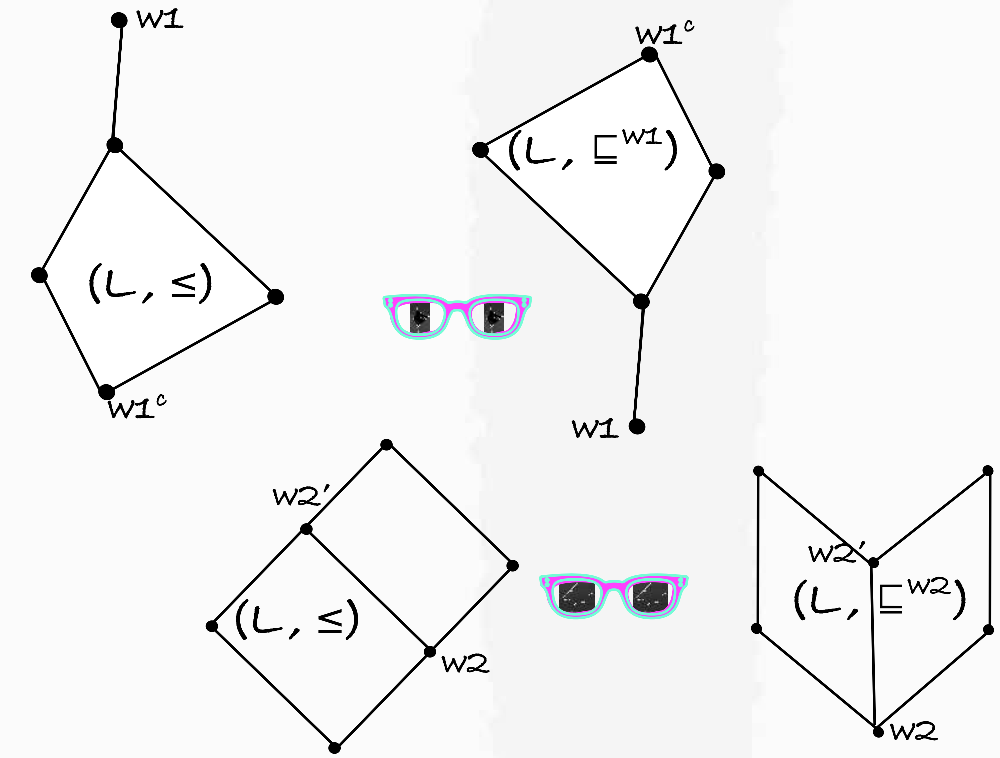


Teorema. Si w es complementado entonces $(L,\sqsubseteq^w)$ es retículo. Si además $w'=w^c$, la aplicación φ_w es un isomorfismo $(L,\leq)\rightarrow(L,\sqsubseteq^w)$ que verifica $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$ y $(\varphi_w(x))'=\varphi_w(x')$ $\forall x\in L$.∎

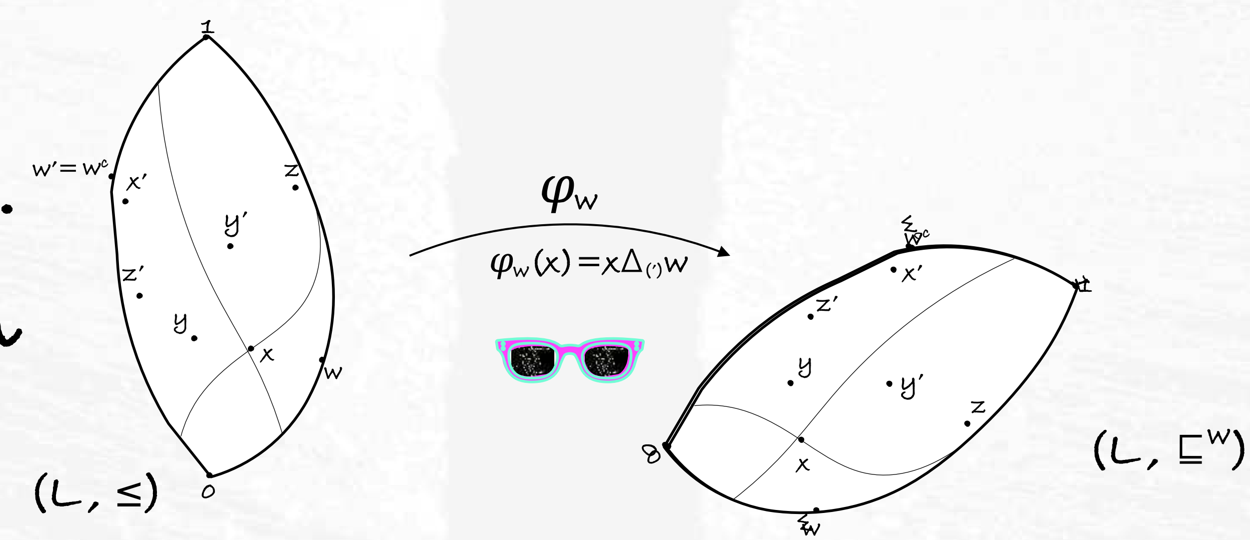


Nota 1. Si w es complementado pero no existe una negación fuerte $':L\longrightarrow L$ tal que $w'=w^c$, entonces $(L, \sqsubseteq^w)$ es retículo, pero no necesariamente isomorfo a $(L,\leq)$:

Nota 2. Si w no es complementado, entonces sólo se puede asegurar que $(L, \sqsubseteq^w)$ es un inf-semiretículo:



Teorema. Si w es complementado entonces $(L,\sqsubseteq^w)$ es retículo. Si además $w'=w^c$, la aplicación φ_w es un isomorfismo $(L,\leq)\rightarrow(L,\sqsubseteq^w)$ que verifica $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$ y $(\varphi_w(x))'=\varphi_w(x')$ $\forall x\in L$. ∎



Un caso particular interesante. La consideración de las "Diferencias Simétricas" en estructuras $((L,\leq),')$ como operadores sobre pares cuya segunda componente es un nítido: $\Delta_{(')}:L\times N(L)\rightarrow L$.

Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte,

y sea $N(L)=\{w\in L \,/\, w^c \text{ existe}, w^c=w'\}$.

Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte,

y sea $N(L)=\{w\in L\ /\ w^c$ existe, $w^c=w'\}$.

Consideremos el operador $\Delta_{(')}: L \times N(L) \rightarrow L$, que depende de la negación ' en L, tal que:

$$x\,\Delta_{(')}w=(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)=(x-w)+(x'\cdot w) \qquad \forall x\in L\ \forall w\in N(L)$$

Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte,

y sea $N(L)=\{w\in L \,/\, w^c$ existe, $w^c=w'\}$.

Consideremos el operador $\Delta_{(')}: L\mathrm{X}N(L)\rightarrow L$, que depende de la negación ' en L, tal que:

$$x\,\Delta_{(')}w=(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)=(x-w)+(x'\cdot w) \quad \forall x\in L\ \forall w\in N(L)$$

y que verifica (*)

$(x\,\Delta_{(')}w_1)\,\Delta_{(')}w_2=x\,\Delta_{(')}(w_1\Delta_{(')}w_2) \quad \forall x\in L\ \forall(w_1,w_2)\in N(L)\mathrm{X}N(L)$.

$(x\,\Delta_{(')}w)\,\Delta_{(')}w=x \quad \forall x\in L\ \forall w\in N(L)$.

(*) véase transparencia siguiente

Sea $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte,

y sea $N(L)=\{w\in L \,/\, w^c \text{ existe, } w^c=w'\}$.

Consideremos el operador $\Delta_{(')}: L \times N(L) \rightarrow L$, que depende de la negación ' en L, tal que:

$$x\,\Delta_{(')}w=(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)=(x-w)+(x'\cdot w) \quad \forall x\in L\ \forall w\in N(L)$$

y que verifica (*)

$$(x\,\Delta_{(')}w_1)\,\Delta_{(')}w_2=x\,\Delta_{(')}(w_1\Delta_{(')}w_2) \quad \forall x\in L\ \forall(w_1,w_2)\in N(L)\times N(L).$$

$$(x\,\Delta_{(')}w)\,\Delta_{(')}w=x \quad \forall x\in L\ \forall w\in N(L).$$

Si $w\in N(L)$, la aplicación $\varphi_w: L\rightarrow L$ tal que $\varphi_w(x)=x\,\Delta_{(')}w\ \forall x\in L$, es involutiva y, en consecuencia, biyectiva.

En este trabajo, interpretaremos la aplicación φ_w como

"una perspectiva en L proporcionada por w".

(*) Véase transparencia siguiente

<u>Proposición</u>. Si $x \in L$ y si $w \in N(L)$, entonces:

(1) $(x \Delta_{(')} w = x - w) \Leftrightarrow (w \leq x)$

(2) $(x \Delta_{(')} w = x + w) \Leftrightarrow (x \cdot w = 0)$.

Proposición. Si $x \in L$ y si $w \in N(L)$, entonces:

(1) $(x\Delta_{(')}w = x - w) \Leftrightarrow (w \leq x)$

(2) $(x\Delta_{(')}w = x + w) \Leftrightarrow (x \cdot w = 0)$.

Demostración.

(1) Supongamos que $(x\Delta_{(')}w = x - w)$, es decir $(x \cdot w^c) + (x' \cdot w) = (x \cdot w^c)$ y en consecuencia $(x \cdot w^c) \cdot w + (x' \cdot w) \cdot w = (x \cdot w^c) \cdot w = 0$, que prueba que $x' \cdot w = 0$.

De esta última igualdad deducimos que $x + w^c = 1$ y $w \cdot (x + w^c) = w$, luego $w \cdot x = w$, que prueba la desigualdad $w \leq x$.

Recíprocamente, si $w \leq x$ entonces $x' \leq w^c$ y por lo tanto $(x' + w^c) = w^c$, por lo que $(x' + w^c) \cdot w = 0$, es decir $x' \cdot w = 0$ y finalmente $x\Delta_{(')}w = (x - w) + 0 = x - w$.

(2) Supongamos que $(x\Delta_{(')}w = x + w)$, es decir $(x \cdot w^c) + (x' \cdot w) = (x + w)$ y en $(x \cdot w^c) \cdot w + (x' \cdot w) \cdot w = (x + w) \cdot w = w$, que prueba que $x' \cdot w = w$ y en consecuencia $x + w^c = w^c$. Finalmente, $(x + w^c) \cdot w = 0$, es decir $x \cdot w = 0$.

Recíprocamente, si $x \cdot w = 0$ entonces $x' + w^c = 1$ y $(x' + w^c) \cdot w = w$, luego $x' \cdot w = w$ que prueba que $w \leq x'$ y en consecuencia $x \leq w^c$. Por lo tanto:

$(x + w) = (x + w) \cdot 1 = (x + w) \cdot (w^c + w) = x \cdot w^c + x \cdot w + 0 + w = (x \cdot w^c) + w = x + w$. ∎

<u>Proposición</u>. $\forall x \in L$ $\forall (w, w_1, w_2) \in N(L) \times N(L) \times N(L)$ se verifica:

(1) $x\Delta_{(')}0=x$, $x\Delta_{(')}1=x'$, $w\Delta_{(')}w=0$, $w\Delta_{(')}w^c=1$, $w_1\Delta_{(')}w_2=w_1\Delta w_2$.

(2) $(x\,\Delta_{(')}w)'=(x'\Delta_{(')}w)$, en particular: $(w_1\Delta_{(')}w_2^c)=(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2)$.

(3) $(x\,\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=x\,\Delta_{(')}(w_1\Delta\, w_2)$.

(4) $(x\,\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x$ $\forall x \in L$ $\forall w \in N(L)$.

<u>Proposición</u>. $\forall x \in L\ \forall (w,w_1,w_2) \in N(L) X N(L) X N(L)$ se verifica:

(1) $x\Delta_{(')}0=x,\ x\Delta_{(')}1=x',\ w\Delta_{(')}w=0,\ w\Delta_{(')}w^c=1,\ w_1\Delta_{(')}w_2=w_1\Delta w_2.$

(2) $(x\,\Delta_{(')}w)'=(x'\Delta_{(')}w)$, en particular: $(w_1\Delta_{(')}w_2^c)=(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2).$

(3) $(x\,\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=x\,\Delta_{(')}(w_1\Delta\, w_2)$.

(4) $(x\,\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x\ \ \forall x \in L\ \forall w \in N(L).$

<u>Demostración</u>.

(1) $x\Delta_{(')}0=(x\cdot 0^c)+(x'\cdot 0)=x\cdot 1+0=x,\ x\Delta_{(')}1=(x\cdot 1^c)+(x'\cdot 1)=x\cdot 0+x'\cdot 1=x'$,
$w\Delta_{(')}w=(w\cdot w^c)+(w^c\cdot w)=0,\ w\Delta_{(')}w^c=(w\cdot w)+(w^c\cdot w^c)=1.$
$w_1\Delta_{(')}w_2=(w_1\cdot w_2'+w_1'\cdot w_2)=(w_1\cdot w_2{}^c+w_1{}^c\cdot w_2)=w_1\Delta w_2$.

Proposición. $\forall x \in L\ \forall (w,w_1,w_2) \in N(L) X N(L) X N(L)$ se verifica:

(1) $x\Delta_{(')}0=x,\ x\Delta_{(')}1=x',\ w\Delta_{(')}w=0,\ w\Delta_{(')}w^c=1,\ w_1\Delta_{(')}w_2=w_1\Delta w_2.$

(2) $(x\,\Delta_{(')}w)'=(x'\Delta_{(')}w)$, en particular: $(w_1\Delta_{(')}w_2^c)=(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2).$

(3) $(x\,\Delta_{(')}w_1)\,\Delta_{(')}w_2=x\,\Delta_{(')}(w_1\Delta\, w_2)$.

(4) $(x\,\Delta_{(')}w)\,\Delta_{(')}w=x\quad \forall x \in L\ \forall w \in N(L).$

Demostración.

(1) $x\Delta_{(')}0=(x\cdot 0^c)+(x'\cdot 0)=x\cdot 1+0=x,\ x\Delta_{(')}1=(x\cdot 1^c)+(x'\cdot 1)=x\cdot 0+x'\cdot 1=x'$,

$w\Delta_{(')}w=(w\cdot w^c)+(w^c\cdot w)=0,\ w\Delta_{(')}w^c=(w\cdot w)+(w^c\cdot w^c)=1.$

$w_1\Delta_{(')}w_2=(w_1\cdot w_2'+w_1'\cdot w_2)=(w_1\cdot w_2{}^c+w_1{}^c\cdot w_2)=w_1\Delta w_2$.

(2) $(x\,\Delta_{(')}w)'=[(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)]'=(x'+w)\cdot(x+w^c)=$

$(x'\cdot x)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)+w\cdot w^c=(x'\cdot x)\cdot(w+w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=$

$(x'\cdot x\cdot w)+(x'\cdot x\cdot w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=(x'\cdot w^c)+((x')'\cdot w)=(x'\Delta_{(')}w).$

__Proposición__. $\forall x \in L\ \forall (w,w_1,w_2)\in N(L)\times N(L)\times N(L)$ se verifica:

(1) $x\Delta_{(')}0=x,\ x\Delta_{(')}1=x',\ w\Delta_{(')}w=0,\ w\Delta_{(')}w^c=1,\ w_1\Delta_{(')}w_2=w_1\Delta w_2.$

(2) $(x\Delta_{(')}w)'=(x'\Delta_{(')}w)$, en particular: $(w_1\Delta_{(')}w_2^c)=(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2)$.

(3) $(x\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=x\Delta_{(')}(w_1\Delta w_2)$.

(4) $(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x\ \ \forall x\in L\ \forall w\in N(L)$.

__Demostración__.

(1) $x\Delta_{(')}0=(x\cdot 0^c)+(x'\cdot 0)=x\cdot 1+0=x,\ x\Delta_{(')}1=(x\cdot 1^c)+(x'\cdot 1)=x\cdot 0+x'\cdot 1=x'$,

$w\Delta_{(')}w=(w\cdot w^c)+(w^c\cdot w)=0,\ w\Delta_{(')}w^c=(w\cdot w)+(w^c\cdot w^c)=1.$

$w_1\Delta_{(')}w_2=(w_1\cdot w_2'+w_1'\cdot w_2)=(w_1\cdot w_2{}^c+w_1{}^c\cdot w_2)=w_1\Delta w_2$.

(2) $(x\Delta_{(')}w)'=[(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)]'=(x'+w)\cdot(x+w^c)=$

$(x'\cdot x)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)+w\cdot w^c=(x'\cdot x)\cdot(w+w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=$

$(x'\cdot x\cdot w)+(x'\cdot x\cdot w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=\ (x'\cdot w^c)+((x')'\cdot w)=(x'\Delta_{(')}w).$

(3) $(x\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=[(x^c w_1)+(x'\cdot w_1)]\Delta_{(')}w_2=[(x^c w_1)+(x'\cdot w_1)]\cdot w_2+(x'+w_1)\cdot(x+w_1^c)\cdot w_2=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)+w_1\cdot w_1^c\cdot w_2=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2)\cdot(w_1+w_1^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2\cdot w_1)+(x'\cdot x\cdot w_2\cdot w_1^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$x\cdot(w_1^c\cdot w_2^c+w_1\cdot w_2)+x'\cdot(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2)=x\cdot(w_1\Delta w_2)^c+x'\cdot(w_1\Delta w_2)=x\Delta_{(')}(w_1\Delta w_2).$

<u>Proposición</u>. $\forall x\in L\ \forall(w,w_1,w_2)\in N(L)\times N(L)\times N(L)$ se verifica:

(1) $x\Delta_{(')}0=x,\ x\Delta_{(')}1=x',\ w\Delta_{(')}w=0,\ w\Delta_{(')}w^c=1,\ w_1\Delta_{(')}w_2=w_1\Delta w_2.$

(2) $(x\Delta_{(')}w)'=(x'\Delta_{(')}w)$, en particular: $(w_1\Delta_{(')}w_2^c)=(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2).$

(3) $(x\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=x\Delta_{(')}(w_1\Delta w_2)$.

(4) $(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x\ \ \forall x\in L\ \forall w\in N(L).$

<u>Demostración</u>.

(1) $x\Delta_{(')}0=(x\cdot 0^c)+(x'\cdot 0)=x\cdot 1+0=x,\ x\Delta_{(')}1=(x\cdot 1^c)+(x'\cdot 1)=x\cdot 0+x'\cdot 1=x'$,

$w\Delta_{(')}w=(w\cdot w^c)+(w^c\cdot w)=0,\ w\Delta_{(')}w^c=(w\cdot w)+(w^c\cdot w^c)=1.$

$w_1\Delta_{(')}w_2=(w_1\cdot w_2'+w_1'\cdot w_2)=(w_1\cdot w_2{}^c+w_1{}^c\cdot w_2)=w_1\Delta w_2$.

(2) $(x\Delta_{(')}w)'=[(x\cdot w^c)+(x'\cdot w)]'=(x'+w)\cdot(x+w^c)=$

$(x'\cdot x)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)+w\cdot w^c=(x'\cdot x)\cdot(w+w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=$

$(x'\cdot x\cdot w)+(x'\cdot x\cdot w^c)+(x'\cdot w^c)+(x\cdot w)=\ (x'\cdot w^c)+((x')'\cdot w)=(x'\Delta_{(')}w).$

(3) $(x\Delta_{(')}w_1)\Delta_{(')}w_2=[(x^c w_1)+(x'\cdot w_1)]\Delta_{(')}w_2=[(x^c w_1)+(x'\cdot w_1)]'\cdot w_2+(x'+w_1)\cdot(x+w_1^c)\cdot w_2=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)+w_1\cdot w_1^c\cdot w_2=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2)\cdot(w_1+w_1^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot x\cdot w_2\cdot w_1)+(x'\cdot x\cdot w_2\cdot w_1^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$(x\cdot w_1^c\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1\cdot w_2^c)+(x'\cdot w_1^c\cdot w_2)+(x\cdot w_1\cdot w_2)=$

$x\cdot(w_1^c\cdot w_2^c+w_1\cdot w_2)+x'\cdot(w_1\cdot w_2^c+w_1^c\cdot w_2)=x\cdot(w_1\Delta w_2)^c+x'\cdot(w_1\Delta w_2)=x\Delta_{(')}(w_1\Delta w_2).$ 39

(4) $(x\Delta_{(')}w)\Delta_{(')}w=x\Delta_{(')}(w\Delta w)=x\Delta_{(')}0=x.$ ∎

Operadores y relaciones asociados a la diferencia simétrica

Álgebra $((\{0, 1, \ldots, 255\}^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ de imágenes con tonos de gris $A, B, \ldots$ del referencial X, (R^n o Z^n), con la negación $A'(s) = 255 - A(s)$ para $s \in X$.

Sub-álgebra $((\{0, 255\}^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ de la anterior determinada por las imágenes binarias $W, S, \ldots$ de X, que es isomorfa al Álgebra de Boole de los subconjuntos $W, S, \ldots$ de X. Están caracterizados por $W^c = W'$, $S^c = S'$, …

Los operadores $\Delta_{(')}$, $\square_{(')}$ son herramientas que transforman imágenes A del referencial X mediante la imagen W tal que $W^c = W'$:

$$A \longrightarrow A\, \Delta_{(')} W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W),$$
$$A \longrightarrow A\, \square_{(')} W = (A \cdot W) + (A' \cdot W^c).$$

Álgebra $((\{0,1,\ldots,255\}^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ de imágenes con tonos de gris $A, B, \ldots$ del referencial X, (R^n o Z^n), con la negación $A'(s) = 255 - A(s)$ para $s \in X$.

Sub-álgebra $((\{0, 255\}^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ de la anterior determinada por las imágenes binarias $W, S, \ldots$ de X, que es isomorfa al Álgebra de Boole de los subconjuntos $W, S, \ldots$ de X. Están caracterizados por $W^c = W'$, $S^c = S'$, …

Los operadores $\Delta_{(')}$, $\Box_{(')}$ son herramientas que transforman imágenes A del referencial X mediante la imagen W tal que $W^c = W'$:

$$A \longrightarrow A \, \Delta_{(')} W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W),$$

$$A \longrightarrow A \, \Box_{(')} W = (A \cdot W) + (A' \cdot W^c).$$

Esos operadores $\Delta_{(')}$ (tipo "diferencia simétrica") y $\Box_{(')}$ verifican: (*)

$$(A \, \Box_{(')} W)' = (A \Delta_{(')} W), \; (A \Delta_{(')} W)' = A' \Delta_{(')} W = A \Delta_{(')} W^c$$

Álgebra $((\{0,1,\ldots,255\}^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ de imágenes con tonos de gris $A, B, \ldots$ del referencial X, (R^n o Z^n), con la negación $A'(s) = 255 - A(s)$ para $s \in X$.

Sub-álgebra $((\{0,255\}^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ de la anterior determinada por las imágenes binarias $W, S, \ldots$ de X, que es isomorfa al Álgebra de Boole de los subconjuntos $W, S, \ldots$ de X. Están caracterizados por $W^c = W'$, $S^c = S'$, ...

Los operadores $\Delta_{(')}$, $\square_{(')}$ son herramientas que transforman imágenes A del referencial X mediante la imagen W tal que $W^c = W'$:

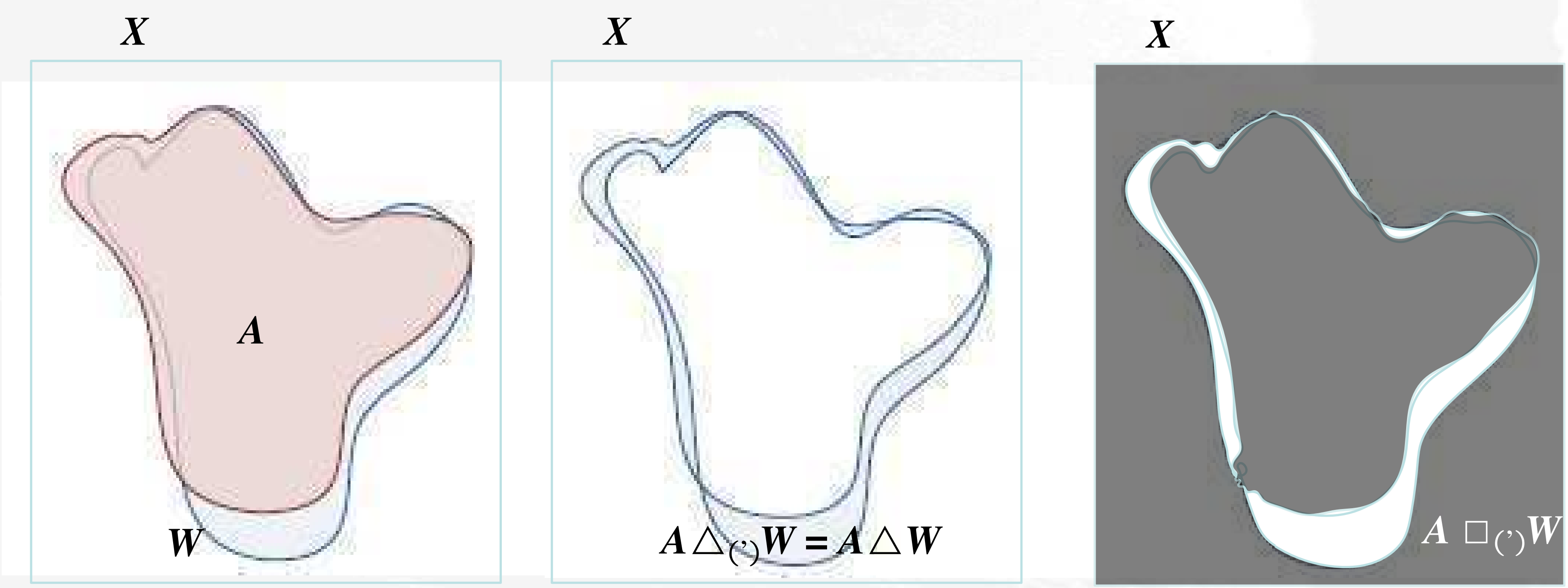
$$A \longrightarrow A \,\Delta_{(')} W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W),$$

$$A \longrightarrow A \,\square_{(')} W = (A \cdot W) + (A' \cdot W^c).$$

Esos operadores $\Delta_{(')}$ (tipo "diferencia simétrica") y $\square_{(')}$ verifican: (*)

$$(A \,\square_{(')} W)' = (A \Delta_{(')} W), \quad (A \Delta_{(')} W)' = A' \Delta_{(')} W = A \Delta_{(')} W^c$$

Si A también es binaria tal que $A' = A^c$, entonces $A \Delta_{(')} W = A \triangle W$ (Diferencia simétrica usual de conjuntos)



Álgebra $((\{0,1,\ldots,255\}^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ de imágenes con tonos de gris $A, B, \ldots$ del referencial X, (R^n o Z^n), con la negación $A'(s) = 255 - A(s)$ para $s \in X$.

Sub-álgebra $((\{0,255\}^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ de la anterior determinada por las imágenes binarias $W, S, \ldots$ de X, que es isomorfa al Álgebra de Boole de los subconjuntos $W, S, \ldots$ de X. Están caracterizados por $W^c=W'$, $S^c=S'$, …

Los operadores $\Delta_{(,)}$, $\square_{(,)}$ son herramientas que transforman imágenes A del referencial X mediante la imagen W tal que $W^c=W'$:

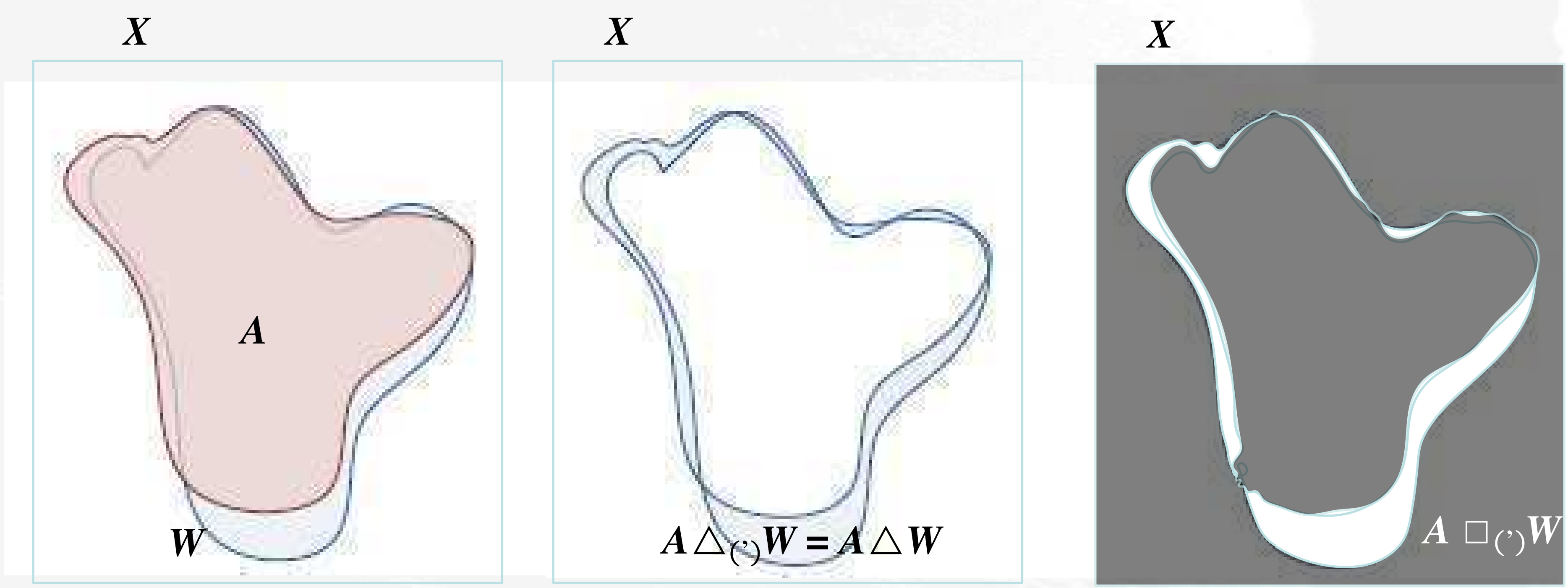
$$A \longrightarrow A\,\Delta_{(')}W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W),$$

$$A \longrightarrow A\,\square_{(')}W = (A \cdot W) + (A' \cdot W^c).$$

Esos operadores $\Delta_{(,)}$ (tipo "<u>diferencia simétrica</u>") y $\square_{(,)}$ verifican: (*)

$$(A\,\square_{(,)}W)' = (A\Delta_{(,)}W),\ (A\Delta_{(,)}W)' = A'\Delta_{(,)}W = A\Delta_{(,)}W^c$$

Si A también es binaria tal que $A'=A^c$, entonces $A\Delta_{(,)}W = A \triangle W$ (Diferencia simétrica usual de conjuntos)



$(A\Delta_{(,)}W)\Delta_{(,)}W = A$, $(A\,\square_{(,)}W)\square_{(,)}W = A$ $\forall A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ y $\forall W$ tal que $W'=W^c$. (**)

En consecuencia, las aplicaciones φ_W, $\delta_W : \{0, 1, \ldots, 255\}^X \rightarrow \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ tales que $\varphi_W(A) = A \triangle_{(,)} W$ y $\delta_W(A) = A\,\square_{(,)}W$, son involutivas y por tanto biyectivas para $\forall W$ tal que $W'=W^c$.

(*), (**) Véase transparencia siguiente

Proposición. $\forall A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ y $\forall W$ tal que $W' = W^c$, los operadores $\Delta_{(,)}$ y $\square_{(,)}$ verifican:

$$\text{(i)} \; (A \,\square_{(,)} W)' = (A \Delta_{(,)} W), \quad \text{(ii)} \; (A \Delta_{(,)} W)' = A' \Delta_{(,)} W = A \Delta_{(,)} W^c$$

$$\text{(iii)} \; (A \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W = A, \quad \text{(iv)} \; (A \,\square_{(,)} W) \,\square_{(,)} W = A$$

<u>Proposición</u>. $\forall A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ y $\forall W$ tal que $W'=W^c$, los operadores $\Delta_{(,)}$ y $\square_{(,)}$ verifican:

$$(i)\ (A \square_{(,)} W)' = (A \Delta_{(,)} W),\quad (ii)\ (A \Delta_{(,)} W)' = A' \Delta_{(,)} W = A \Delta_{(,)} W^c$$

$$(iii)\ (A \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W = A,\quad (iv)\ (A \square_{(,)} W) \square_{(,)} W = A$$

<u>Demostración</u>. (i) $(A \square_{(,)} W)' = ((A \cdot W) + (A' \cdot W^c))' = (A' + W^c) \cdot (A + W) = A \cdot A' + A' \cdot W + A \cdot W^c + W \cdot W^c =$
$A \cdot A' \cdot (W + W^c) + A' \cdot W + A \cdot W^c + 0 = A \cdot A' \cdot W + A \cdot A' \cdot W^c + A' \cdot W + A \cdot W^c = A' \cdot W + A \cdot W^c = A \Delta_{(,)} W.$

(ii) $(A \Delta_{(,)} W)' = (A' \cdot W + A \cdot W^c)' = (A + W^c) \cdot (A' + W) = A \cdot A' + A \cdot W + A' \cdot W^c + W \cdot W^c =$
$A \cdot A' \cdot (W + W^c) + A \cdot W + A' \cdot W^c + 0 = A \cdot A' \cdot W + A \cdot A' \cdot W^c + A \cdot W + A' \cdot W^c = A \cdot W + A' \cdot W^c = A' \Delta_{(,)} W = A \Delta_{(,)} W^c.$

(iii) $(A \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W = (A \Delta_{(,)} W)' \cdot W + (A \Delta_{(,)} W) \cdot W^c = (A' \Delta_{(,)} W) \cdot W + (A \Delta_{(,)} W) \cdot W^c =$
$(A \cdot W + A' \cdot W^c) \cdot W + (A' \cdot W + A \cdot W^c) \cdot W^c = A \cdot W + A \cdot W^c = A \cdot (W + W^c) = A.$

(iv) $(A \square_{(,)} W) \square_{(,)} W = (A \Delta_{(,)} W)' \square_{(,)} W = ((A \Delta_{(,)} W)' \Delta_{(,)} W)' = ((A' \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W)' = (A')' = A.$ ∎

Proposición. $\forall A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ y $\forall W$ tal que $W' = W^c$, los operadores $\Delta_{(\cdot,\cdot)}$ y $\square_{(\cdot,\cdot)}$ verifican:

$$\text{(i)}\ (A\,\square_{(\cdot,\cdot)}W)' = (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W), \quad \text{(ii)}\ (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)' = A'\Delta_{(\cdot,\cdot)}W = A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W^c$$

$$\text{(iii)}\ (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\Delta_{(\cdot,\cdot)}W = A, \quad \text{(iv)}\ (A\,\square_{(\cdot,\cdot)}W)\square_{(\cdot,\cdot)}W = A$$

Demostración. (i) $(A\,\square_{(\cdot,\cdot)}W)' = ((A \cdot W) + (A' \cdot W^c))' = (A' + W^c)\cdot(A + W) = A\cdot A' + A'\cdot W + A\cdot W^c + W\cdot W^c =$

$A\cdot A'\cdot(W+W^c) + A'\cdot W + A\cdot W^c + 0 = A\cdot A'\cdot W + A\cdot A'\cdot W^c + A'\cdot W + A\cdot W^c = A'\cdot W + A\cdot W^c = A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W.$

(ii) $(A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)' = (A'\cdot W + A\cdot W^c)' = (A + W^c)\cdot(A' + W) = A\cdot A' + A\cdot W + A'\cdot W^c + W\cdot W^c =$

$A\cdot A'\cdot(W+W^c) + A\cdot W + A'\cdot W^c + 0 = A\cdot A'\cdot W + A\cdot A'\cdot W^c + A\cdot W + A'\cdot W^c = A\cdot W + A'\cdot W^c = A'\Delta_{(\cdot,\cdot)}W = A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W^c.$

(iii) $(A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\Delta_{(\cdot,\cdot)}W = (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)'\cdot W + (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\cdot W^c = (A'\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\cdot W + (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\cdot W^c =$

$(A\cdot W + A'\cdot W^c)\cdot W + (A'\cdot W + A\cdot W^c)\cdot W^c = A\cdot W + A\cdot W^c = A\cdot(W+W^c) = A.$

(iv) $(A\,\square_{(\cdot,\cdot)}W)\square_{(\cdot,\cdot)}W = (A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)'\square_{(\cdot,\cdot)}W = ((A\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)'\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)' = ((A'\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)\Delta_{(\cdot,\cdot)}W)' = (A')' = A.$ ∎

.

Corolario. En consecuencia, las aplicaciones $\varphi_W, \delta_W : \{0, 1, \ldots, 255\}^X \to \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ tales que $\varphi_W(A) = A\triangle_{(\cdot,\cdot)}W$ y $\delta_W(A) = A\,\square_{(\cdot,\cdot)}W$, son involutivas, (y por tanto biyectivas), para $\forall W$ tal que $W' = W^c$. ∎

<u>Proposición</u>. $\forall A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ y $\forall W$ tal que $W'=W^c$, los operadores $\Delta_{(,)}$ y $\Box_{(,)}$ verifican:

$$\text{(i)}\ (A \Box_{(,)} W)' = (A \Delta_{(,)} W), \quad \text{(ii)}\ (A \Delta_{(,)} W)' = A' \Delta_{(,)} W = A \Delta_{(,)} W^c$$

$$\text{(iii)}\ (A \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W = A, \quad \text{(iv)}\ (A \Box_{(,)} W) \Box_{(,)} W = A$$

<u>Demostración</u>. (i) $(A \Box_{(,)} W)' = ((A \cdot W) + (A' \cdot W^c))' = (A' + W^c) \cdot (A + W) = A \cdot A' + A' \cdot W + A \cdot W^c + W \cdot W^c =$

$A \cdot A' \cdot (W + W^c) + A' \cdot W + A \cdot W^c + 0 = A \cdot A' \cdot W + A \cdot A' \cdot W^c + A' \cdot W + A \cdot W^c = A' \cdot W + A \cdot W^c = A \Delta_{(,)} W.$

(ii) $(A \Delta_{(,)} W)' = (A' \cdot W + A \cdot W^c)' = (A + W^c) \cdot (A' + W) = A \cdot A' + A \cdot W + A' \cdot W^c + W \cdot W^c =$

$A \cdot A' \cdot (W + W^c) + A \cdot W + A' \cdot W^c + 0 = A \cdot A' \cdot W + A \cdot A' \cdot W^c + A \cdot W + A' \cdot W^c = A \cdot W + A' \cdot W^c = A' \Delta_{(,)} W = A \Delta_{(,)} W^c.$

(iii) $(A \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W = (A \Delta_{(,)} W)' \cdot W + (A \Delta_{(,)} W) \cdot W^c = (A' \Delta_{(,)} W) \cdot W + (A \Delta_{(,)} W) \cdot W^c =$

$(A \cdot W + A' \cdot W^c) \cdot W + (A' \cdot W + A \cdot W^c) \cdot W^c = A \cdot W + A \cdot W^c = A \cdot (W + W^c) = A.$

(iv) $(A \Box_{(,)} W) \Box_{(,)} W = (A \Delta_{(,)} W)' \Box_{(,)} W = ((A \Delta_{(,)} W)' \Delta_{(,)} W)' = ((A' \Delta_{(,)} W) \Delta_{(,)} W)' = (A')' = A.$ ∎

.

<u>Corolario</u>. En consecuencia, las aplicaciones $\varphi_W, \delta_W : \{0, 1, \ldots, 255\}^X \rightarrow \{0, 1, \ldots, 255\}^X$ tales que $\varphi_W(A) = A \triangle_{(,)} W$ y $\delta_W(A) = A \Box_{(,)} W$, son <u>involutivas</u>, (y por tanto <u>biyectivas</u>), para $\forall W$ tal que $W'=W^c$. ∎

<u>Nota</u>. En lo que sigue, sólo utilizaremos los operadores tipo diferencia simétrica: $\triangle_{(,)}$.

Filtros de imágenes digitalizadas asociados a la Diferencia Simétrica y su interpretación en este trabajo(*)

(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

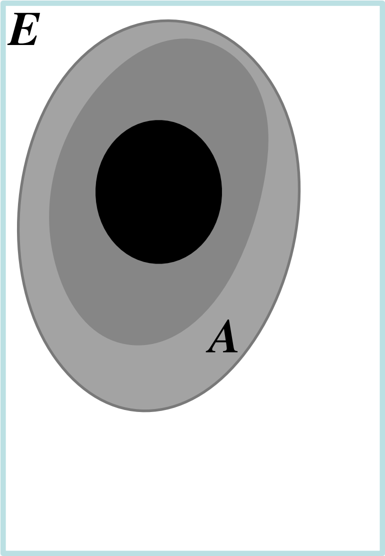
$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots: E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \rightarrow L$

$A \leq B \Leftrightarrow$

$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$

$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$

$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

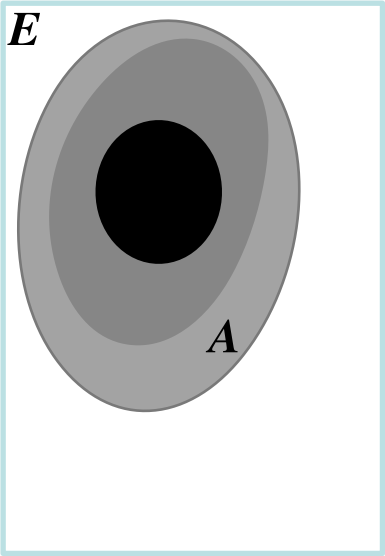
$(A + B)((z_1, z_2)) =$

$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$

$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$

$\forall (z_1, z_2) \in E.$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

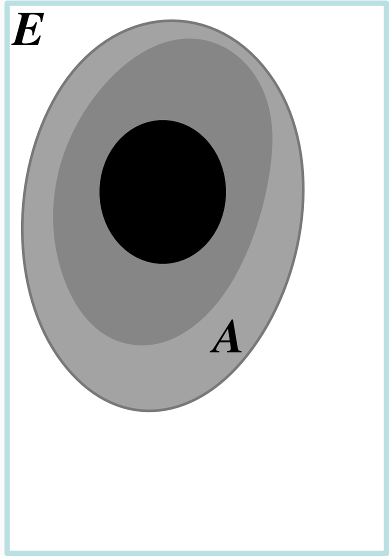
$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado con una negación fuerte.



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

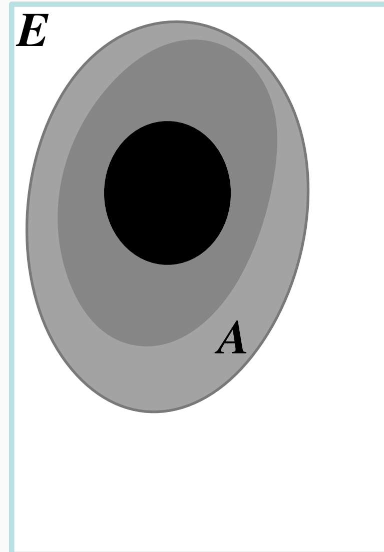
$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1) ,')$
retículo distributivo acotado
con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$
sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su
soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$



W (crisp set)

(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

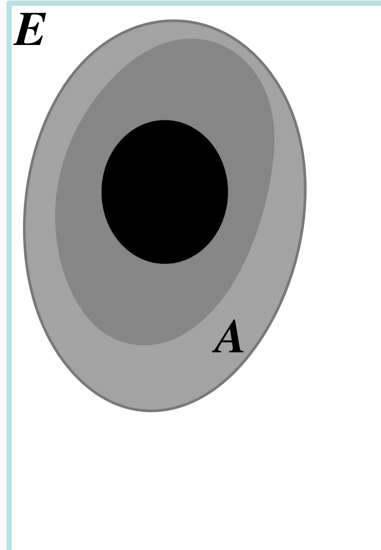
$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

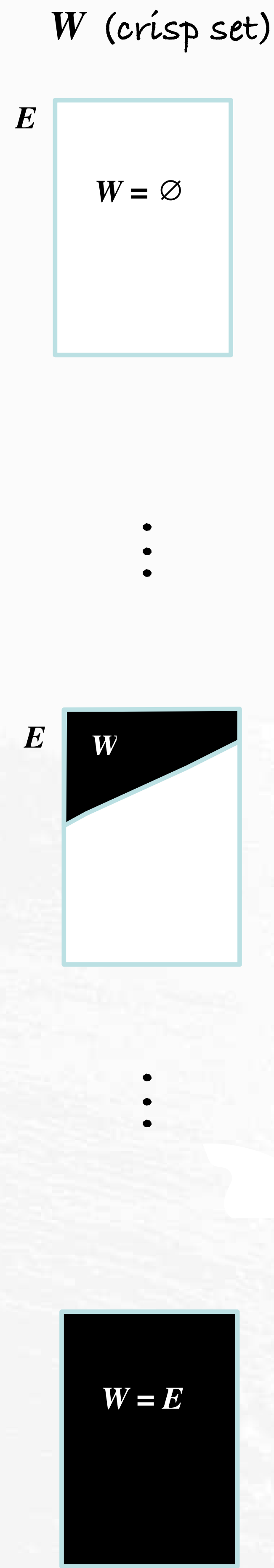
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1) , ')$
retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$ sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$





(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

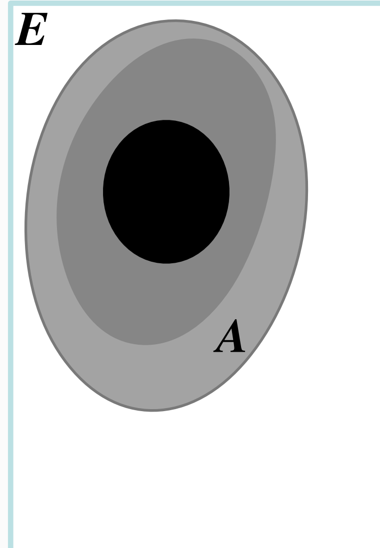
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$ sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

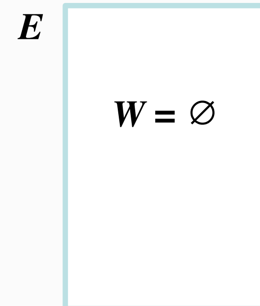
e identificando W con su soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

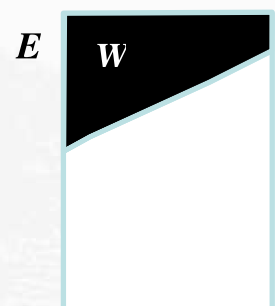
$$\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi_w(A) = A \triangle W} \mathcal{L}$$



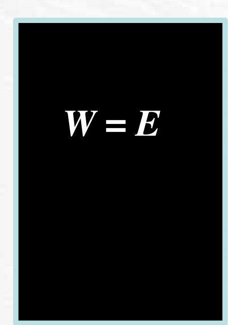
W (crisp set)



⋮



⋮



(*) <u>Nota</u>. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

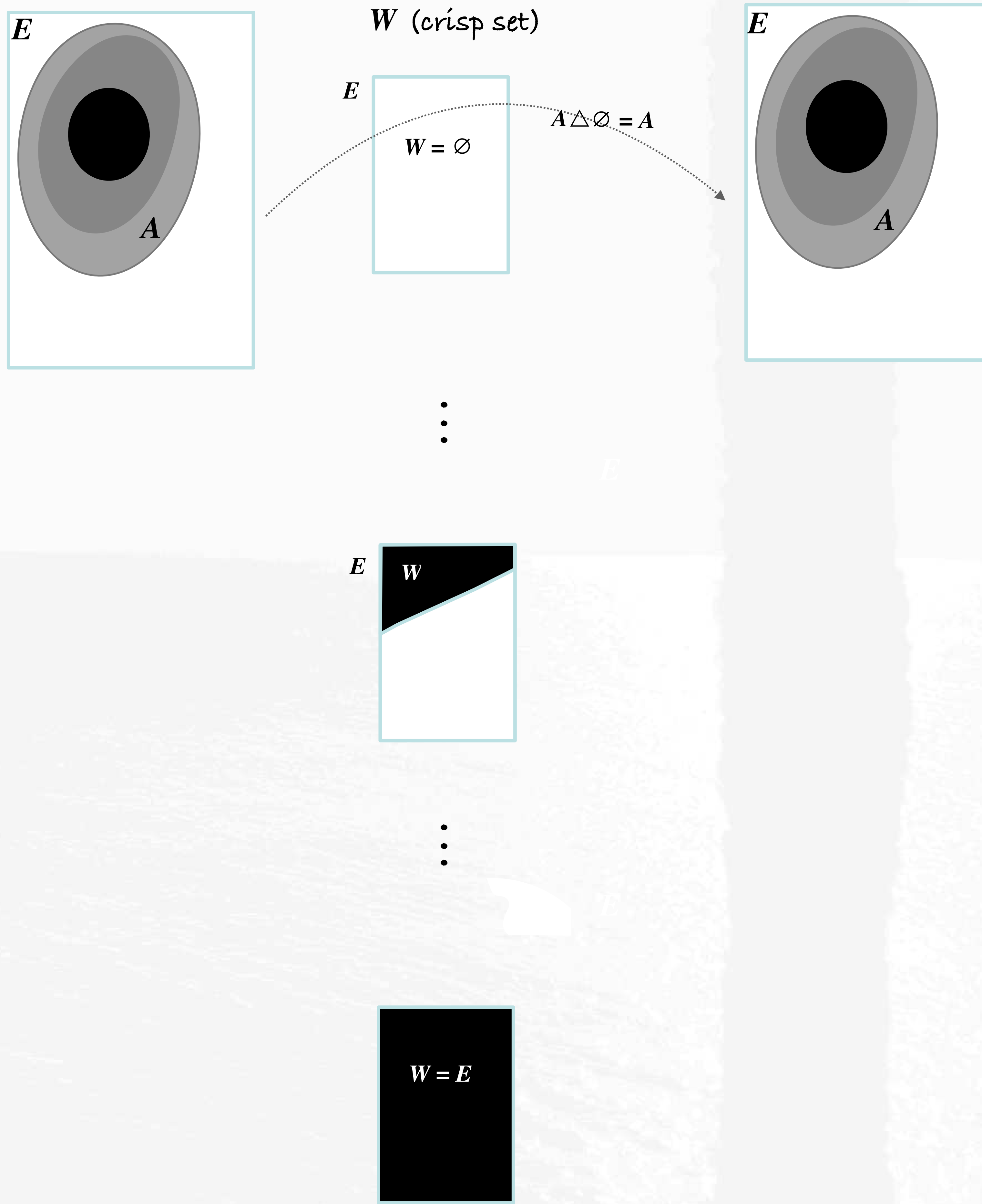
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1) ,')$
retículo distributivo acotado
con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$
sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow$ $W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su
soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\quad \varphi_W(A) = A \triangle W \quad} \mathcal{L}$$



$\varphi_{\varnothing}(A)$
identidad
(positivo de A)

(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

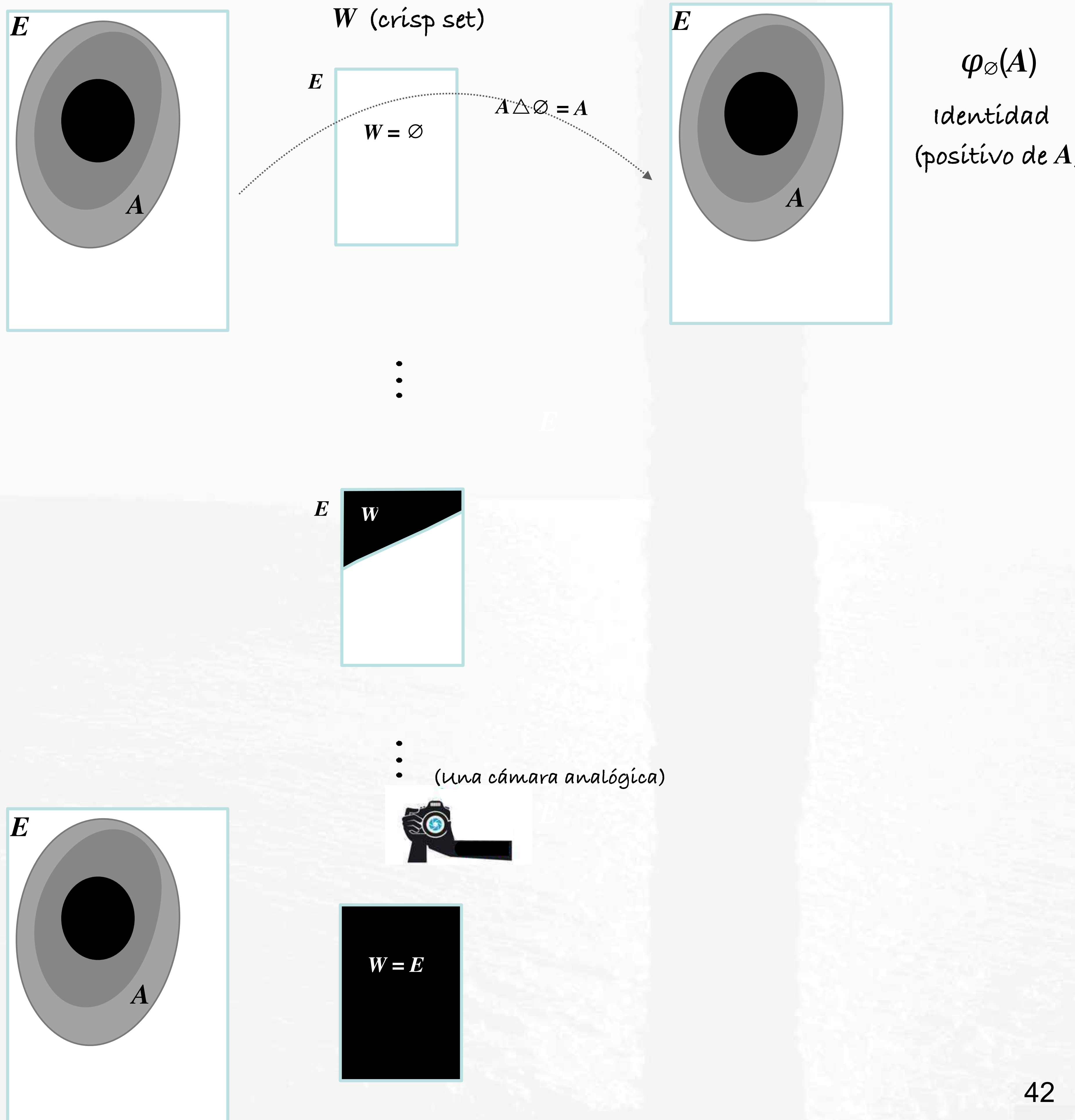
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado
con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$
sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su
soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B$,
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\quad \varphi_W(A) = A \triangle W \quad} \mathcal{L}$$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$

$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$ $\quad \forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$

$min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$

$max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$

$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$ $\quad \forall (z_1, z_2) \in E.$

$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$ sumergida en $\mathcal{L}$:

W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

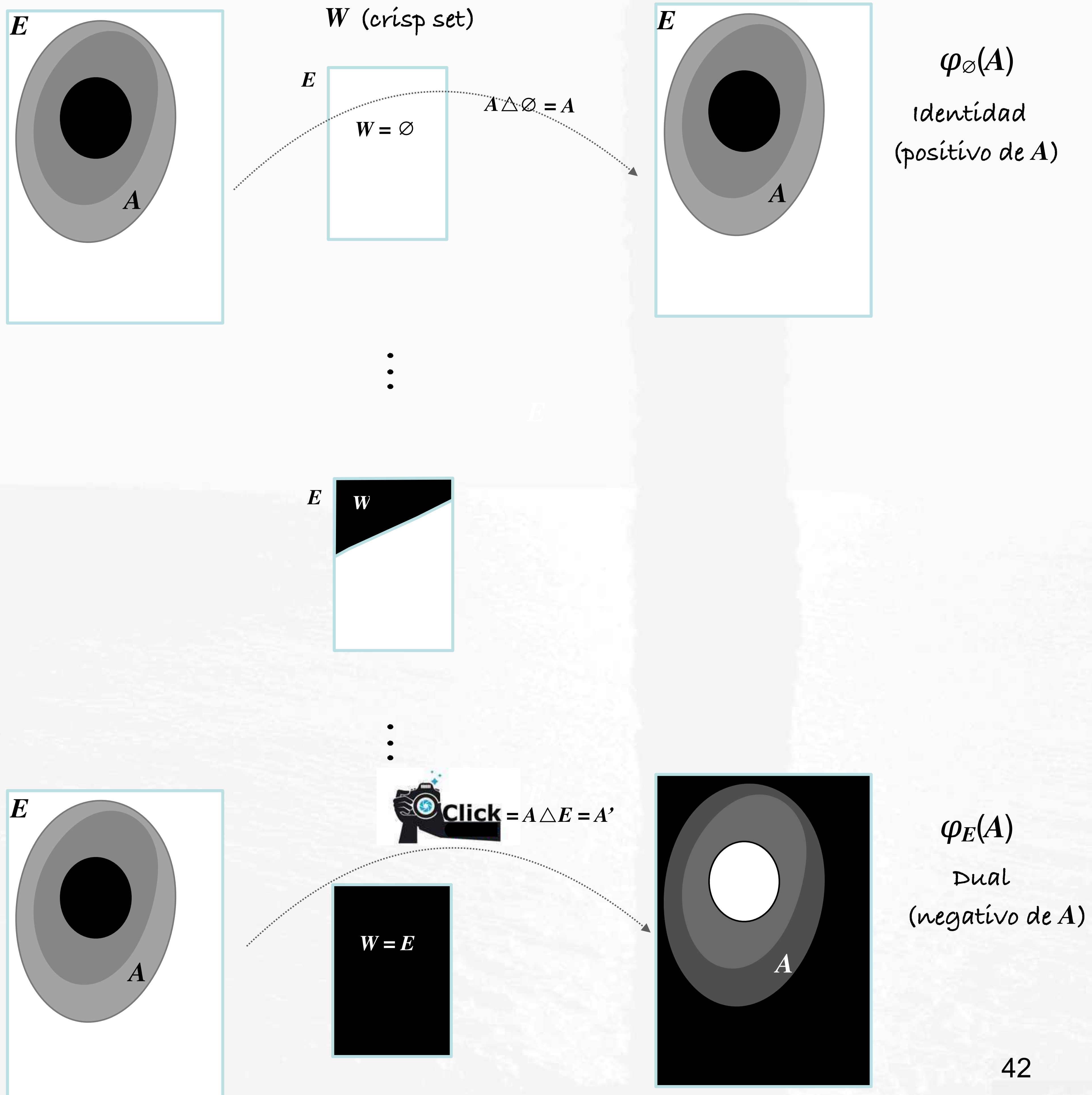
Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:

$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$

y si $W' = W^c$:

$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi_W(A) = A \triangle W} \mathcal{L}$$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo $\triangle$ en lugar de $\triangle_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2)))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

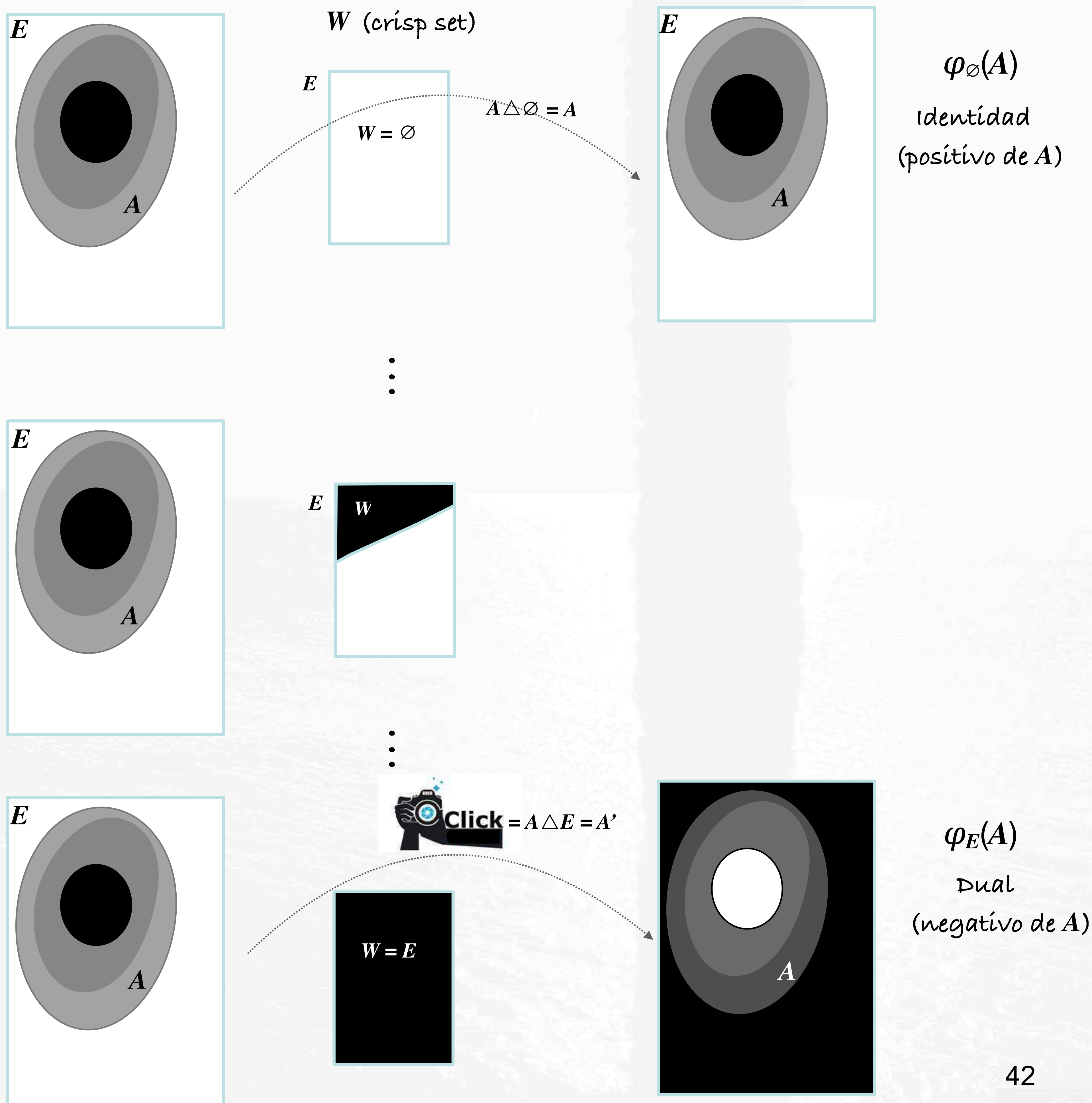
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado
con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$
sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su
soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

$\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi_W(A) = A \triangle W} \mathcal{L}$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo $\triangle$ en lugar de $\triangle_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \leq B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \leq B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$min(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$max(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2)))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

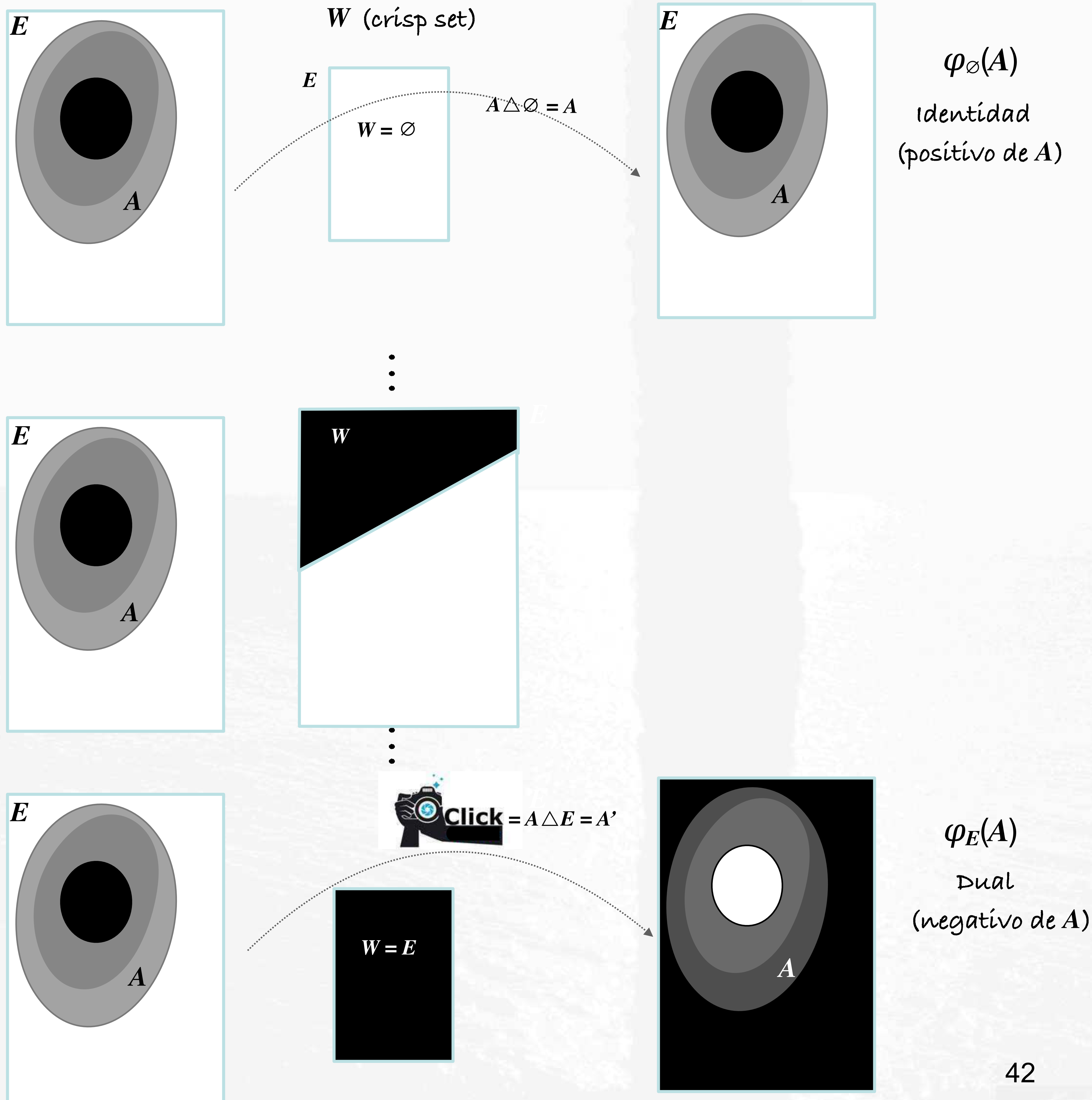
$\mathcal{L} := ((L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
retículo distributivo acotado
con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$
sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su
soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B$,
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi_W(A) = A \triangle W} \mathcal{L}$$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

$L = \{0, 1, \ldots, 255\}$ $\quad E \subseteq \mathbb{Z}^2$

$A, B, \ldots : E \to L$

$A \le B \Leftrightarrow$
$A((z_1, z_2)) \le B((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$(A \cdot B)((z_1, z_2)) =$
$\min\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big),$

$(A + B)((z_1, z_2)) =$
$\max\big(A((z_1, z_2)), B((z_1, z_2))\big)$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

$A'((z_1, z_2)) = 255 - A((z_1, z_2))$
$\forall (z_1, z_2) \in E.$

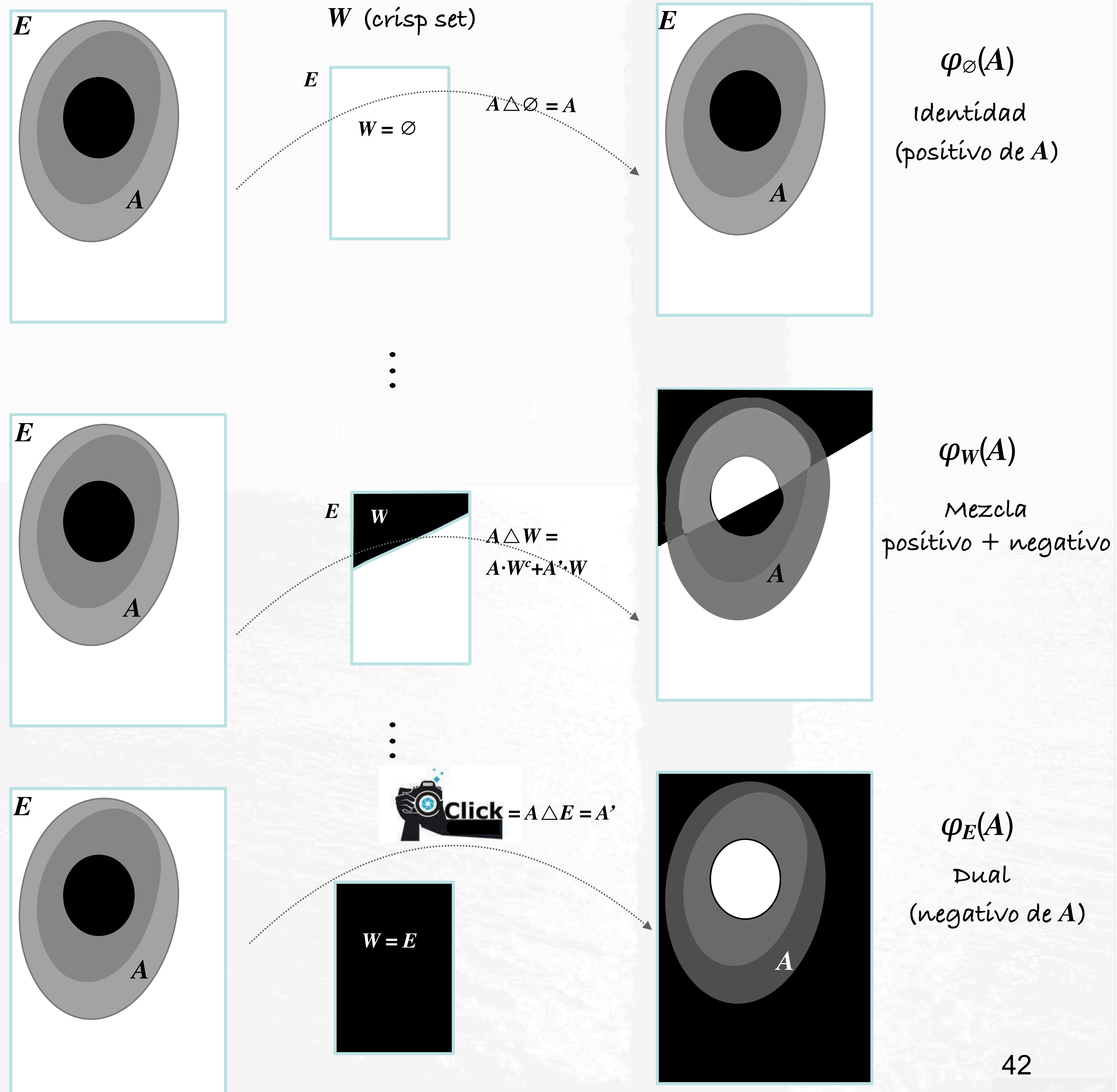
$\mathcal{L} := (\,(L^E, \le, \cdot, +, 0, 1\,)\,,')$
retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

El álgebra de las partes $P(E)$ sumergida en $\mathcal{L}$:
W "crisp set" $\Leftrightarrow W(E) \subseteq \{0, 255\}$,

e identificando W con su soporte $supp(W) \in P(E)$. $(W' = W^c)$

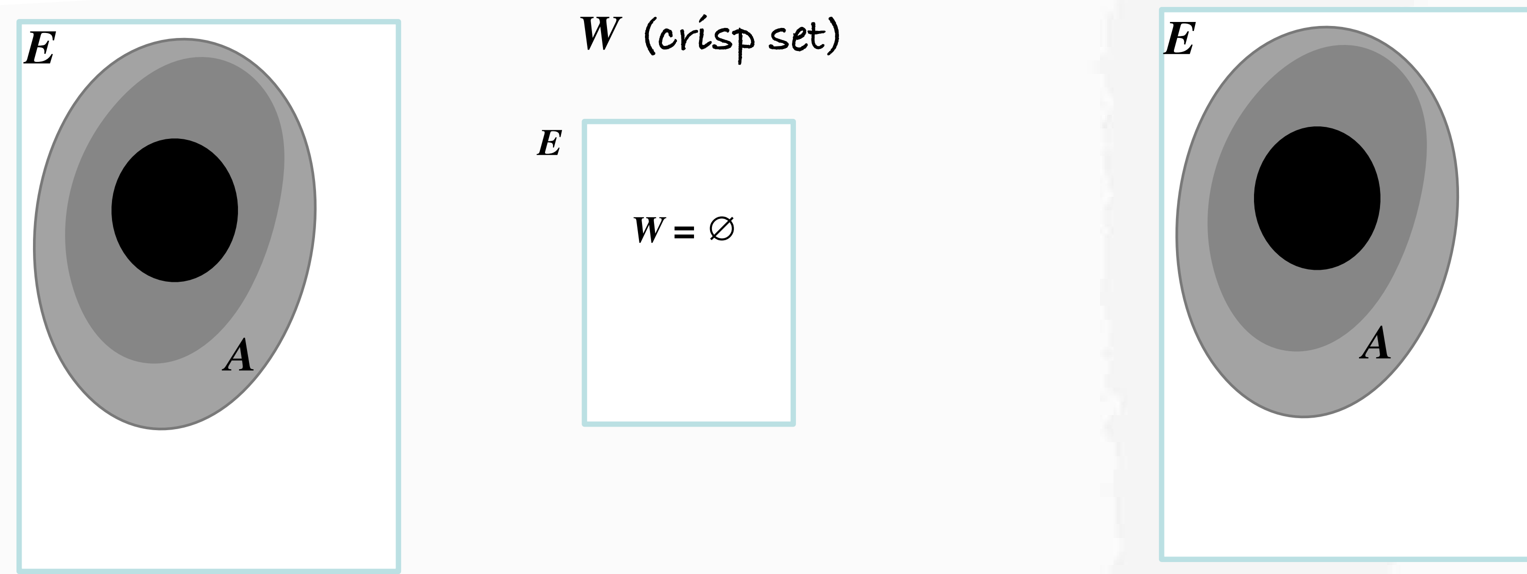
Diferencia simétrica en $\mathcal{L}$:
$A \triangle B = A \cdot B' + A' \cdot B,$
y si $W' = W^c$:
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

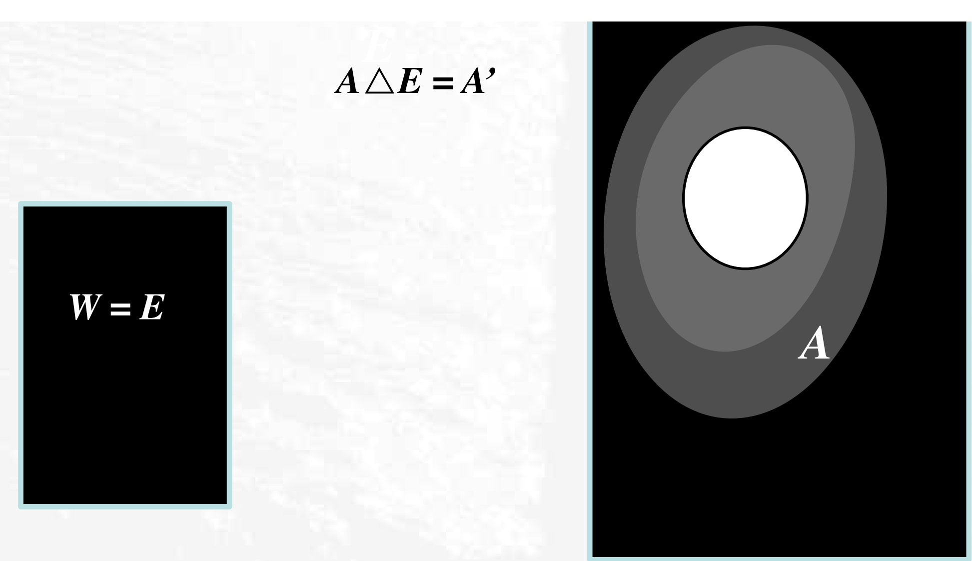
$\mathcal{L} \xrightarrow{\qquad} \mathcal{L} \qquad \varphi_W(A) = A \triangle W$



(*) Nota. En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo Δ en lugar de $\Delta_{(')}$ para cualquier diferencia simétrica.

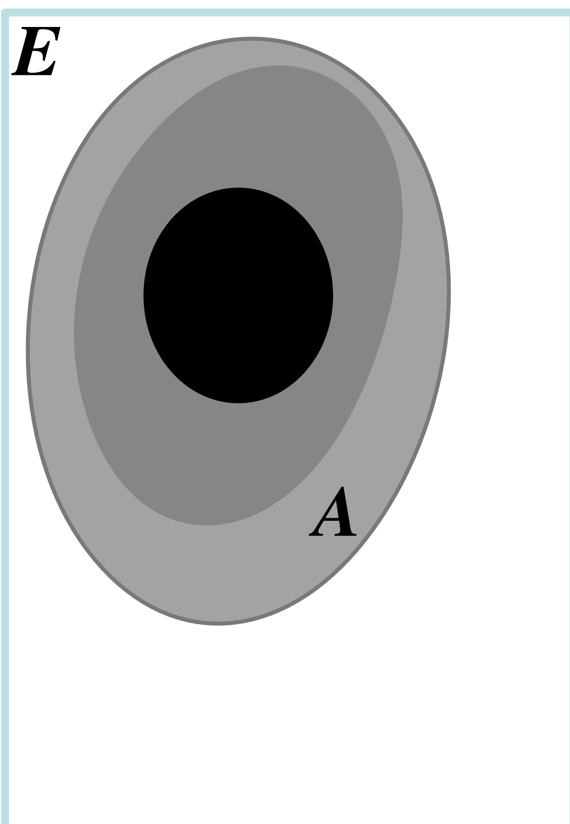
¿Qué se propone en este trabajo?



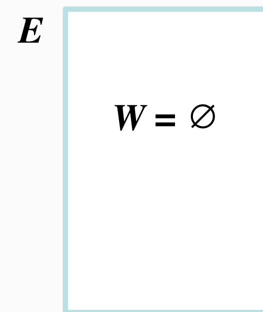


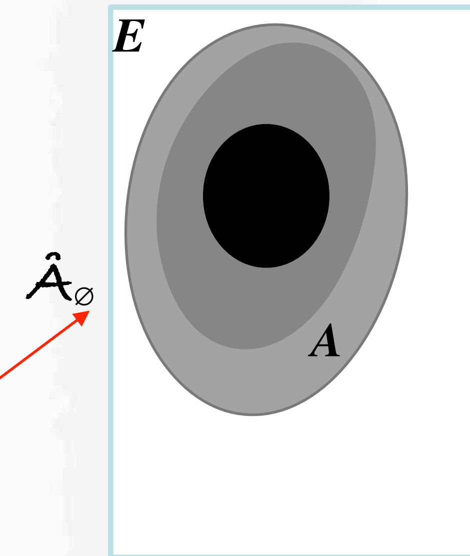
¿Qué se propone en este trabajo?

Unir, a las dos representaciones usuales de una imagen de referenciales $E, F, \ldots$,



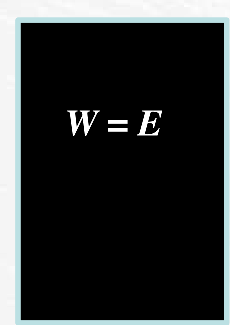
W (crisp set)

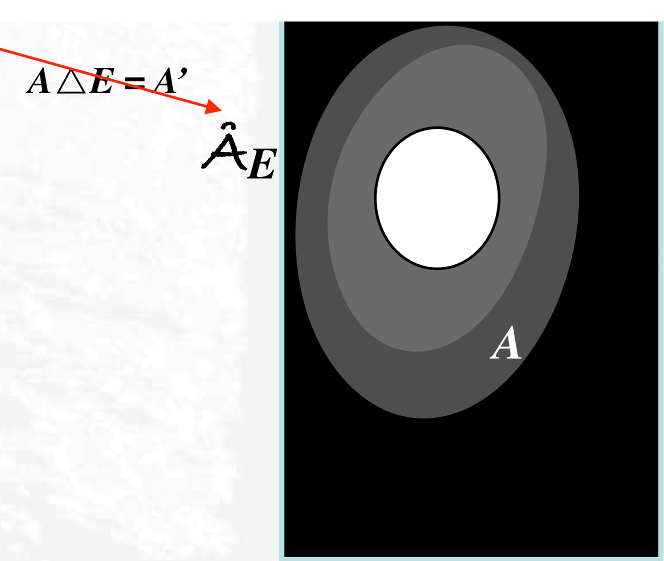




La imagen A contemplada con un filtro "neutro": $A \equiv \hat{A}_{\varnothing}$

(Por ejemplo, La representación de la imagen como un subconjunto borroso del plano)



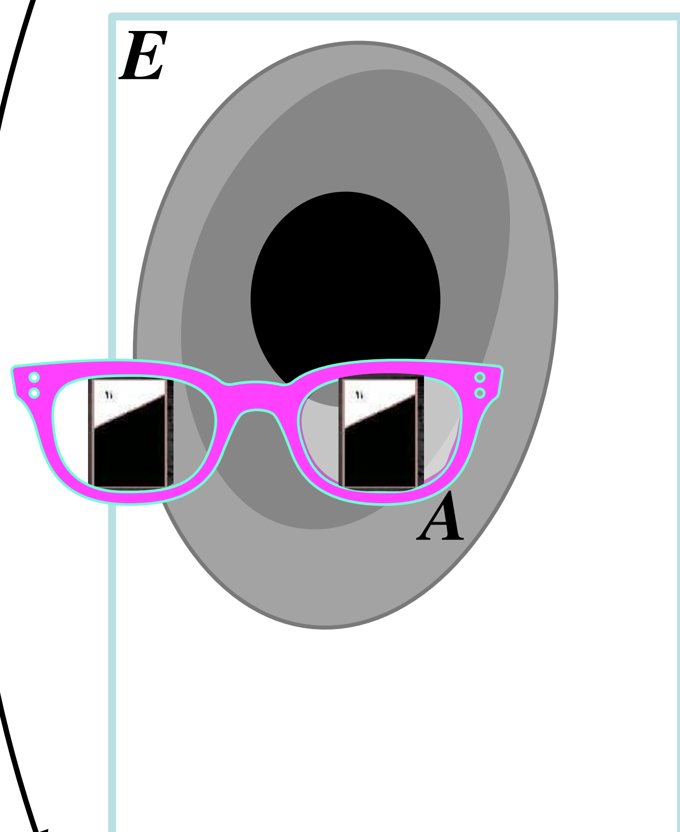


La imagen A contemplada con un filtro que proporciona su "negativo": $A \equiv \hat{A}_E$

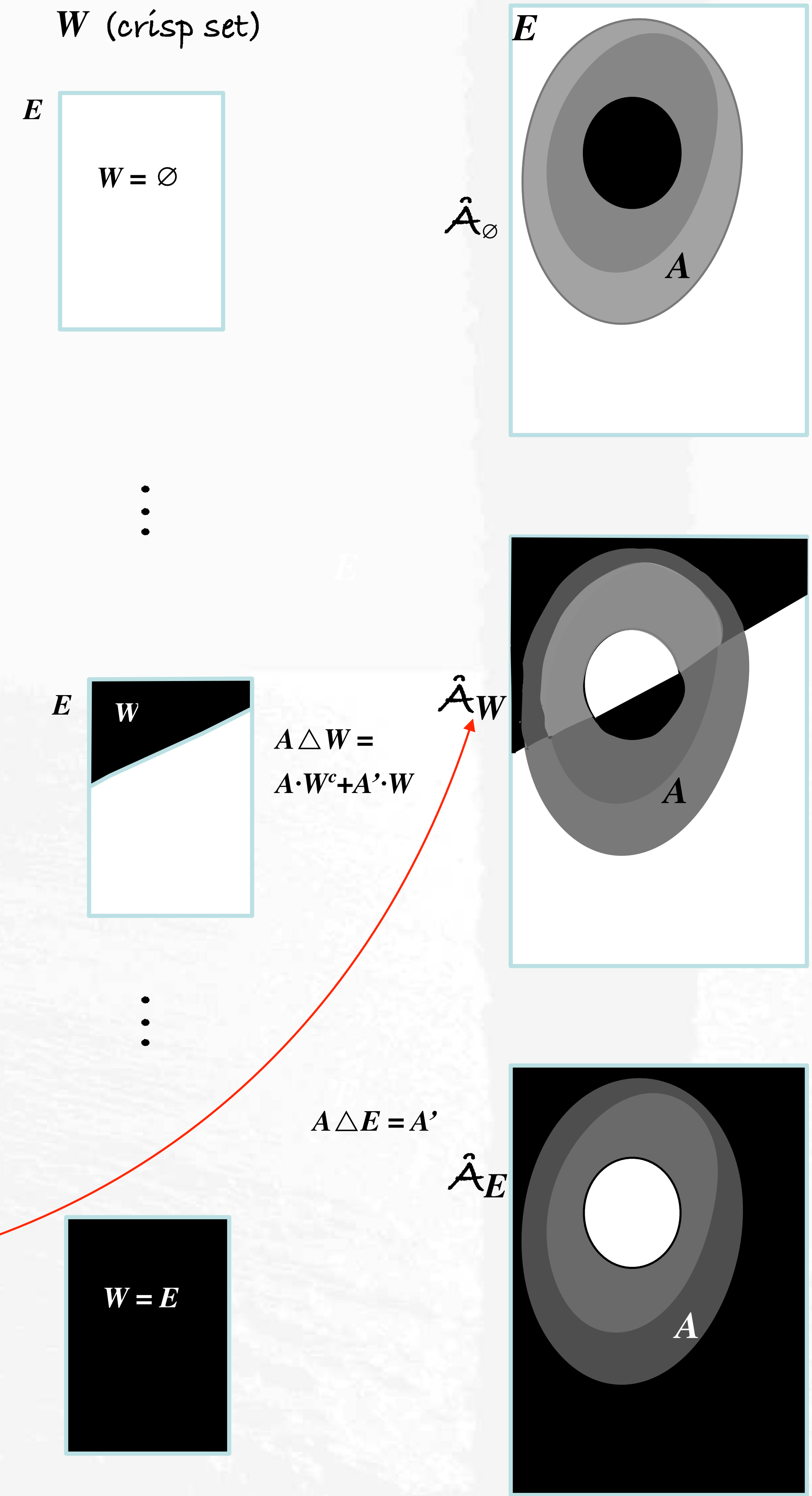
(Por ejemplo, La imagen como elemento que hay que manipular con técnicas de la Morfología Matemática)

¿Qué se propone en este trabajo?

Unir, a las dos representaciones usuales de una imagen de referenciales $E, F, \ldots$,



<u>Otras representaciones asociadas a subconjuntos W de $E, F, \ldots$,</u>



La imagen A contemplada con un filtro "neutro": $A \equiv \hat{A}_{\varnothing}$

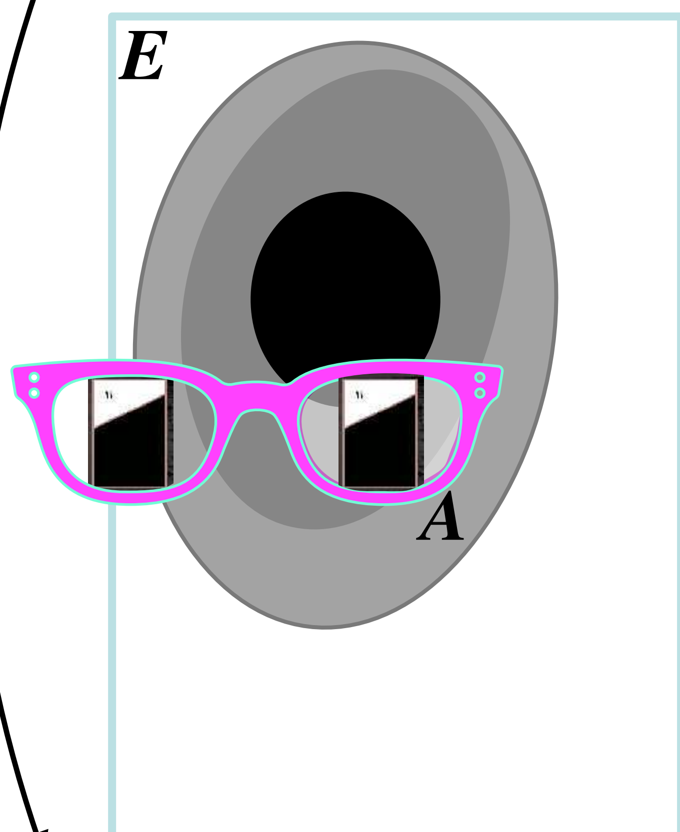
(Por ejemplo, La representación de la imagen como un subconjunto borroso del plano)

La imagen A contemplada con un filtro que proporciona su "negativo": $A \equiv \hat{A}_E$

(Por ejemplo, La imagen como elemento que hay que manipular con técnicas de la Morfología Matemática)

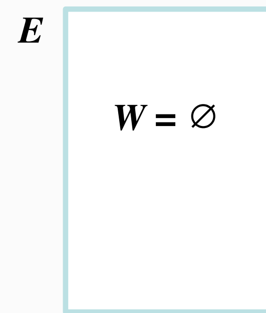
¿Qué se propone en este trabajo?

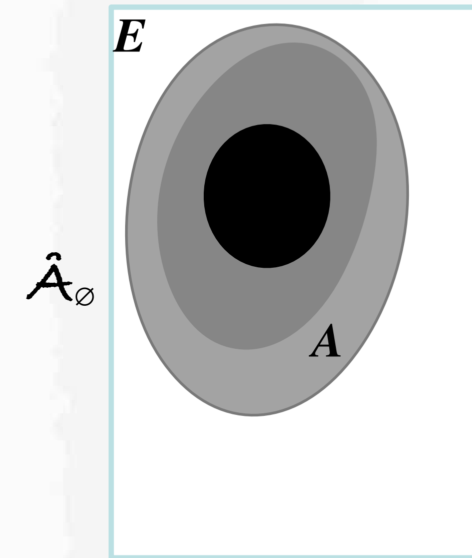
Unir, a las dos representaciones usuales de una imagen de referenciales $E, F, \ldots$,



<u>Otras representaciones asociadas a subconjuntos W de $E, F, \ldots$,</u>

W (crisp set)

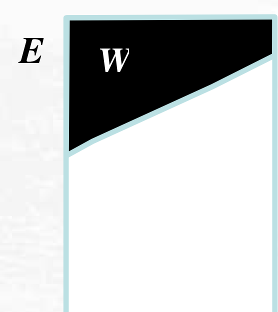




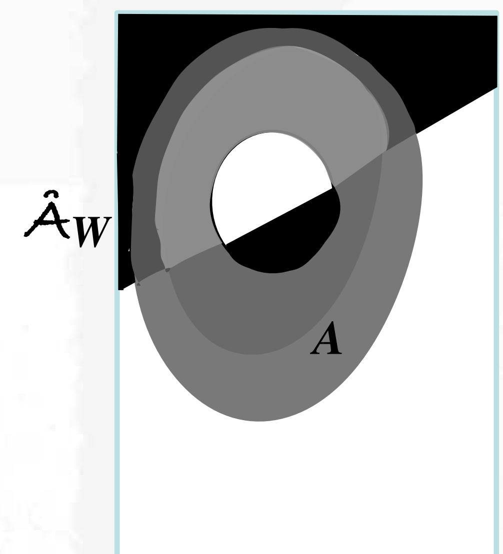
La imagen A contemplada con un filtro "neutro": $A \equiv \hat{A}_{\varnothing}$

(Por ejemplo, La representación de la imagen como un subconjunto borroso del plano)

⋮



$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

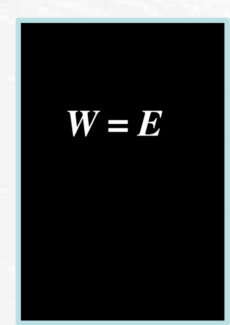


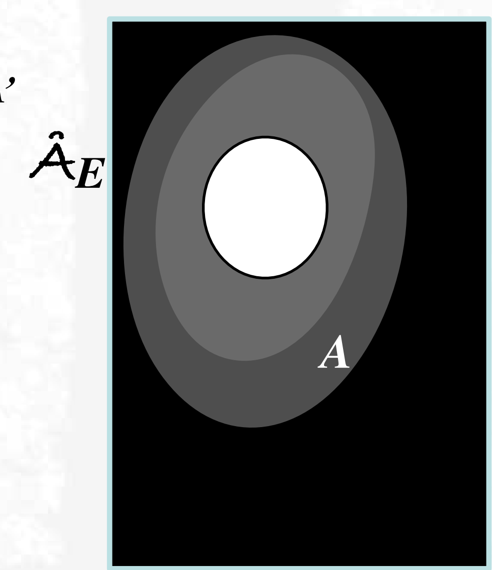
La imagen A contemplada con un filtro que proporciona el subconjunto W: $A \equiv \hat{A}_W$

(Veremos aplicaciones: definición de contenido del ∅, análisis de mapas de riesgo, Morfología Matemática, etc,...)

⋮

$A \triangle E = A'$



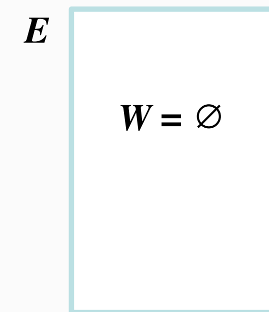


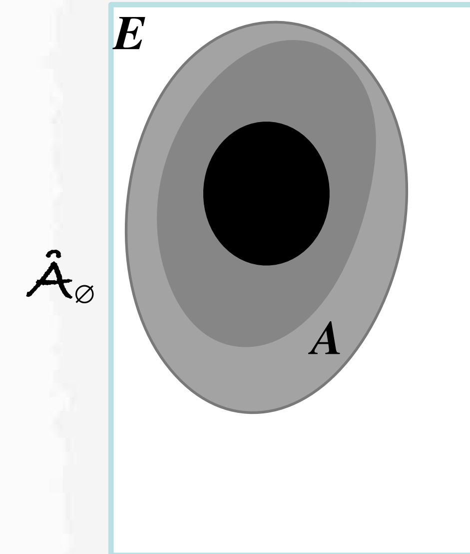
La imagen A contemplada con un filtro que proporciona su "negativo": $A \equiv \hat{A}_E$

(Por ejemplo, La imagen como elemento que hay que manipular con técnicas de la Morfología Matemática)

¿Qué se propone en este trabajo?

W (crisp set)



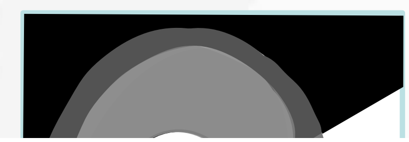


La imagen A contemplada con un filtro "neutro": $A \equiv \hat{A}_{\varnothing}$

(Por ejemplo, La representación de la imagen como un subconjunto borroso del plano)

Unir, a las dos representaciones usuales de una imagen de referenciales $E, F, \ldots$,

⋮

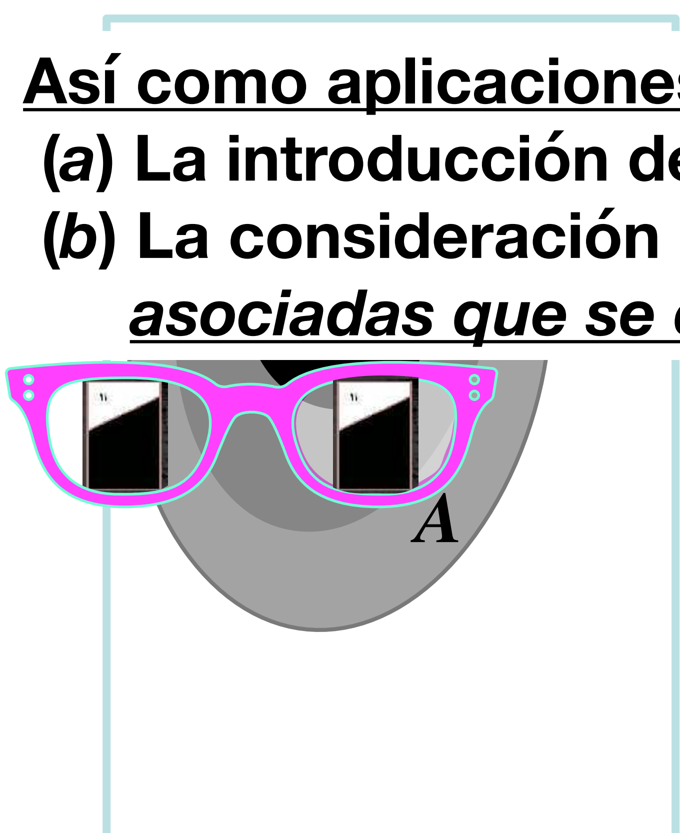


La imagen A contemplada con un filtro ...porciona ...junto W: ...$\equiv \hat{A}_W$, ...plicaciones: ...ción de ...do del ∅, análisis de mapas de riesgo, Morfología Matemática, etc,...)

<u>Así como aplicaciones de estas nuevas representaciones:</u>

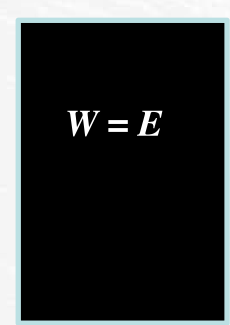
(*a*) La introducción del concepto de "*<u>contenidos del conjunto vacío</u>*".

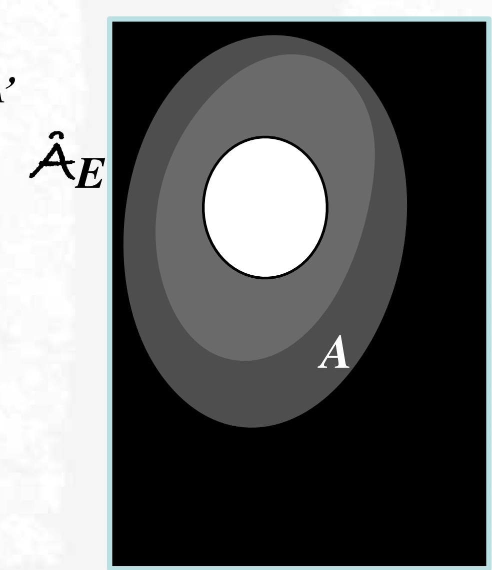
(*b*) La consideración de "*<u>nuevas relaciones de inclusión junto a operaciones asociadas que se contemplan como intersecciones y uniones alternativas</u>*".



⋮

$A \triangle E = A'$



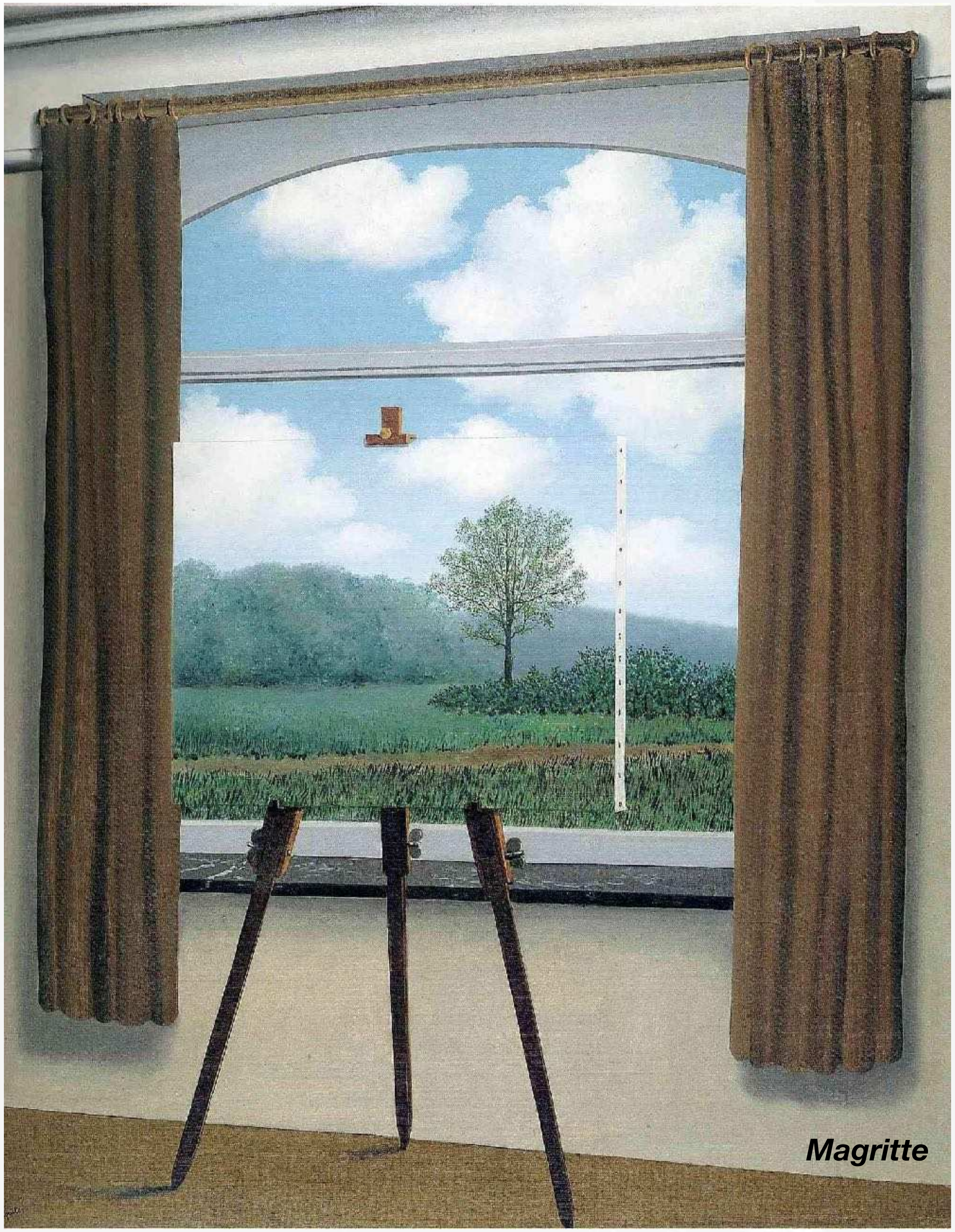


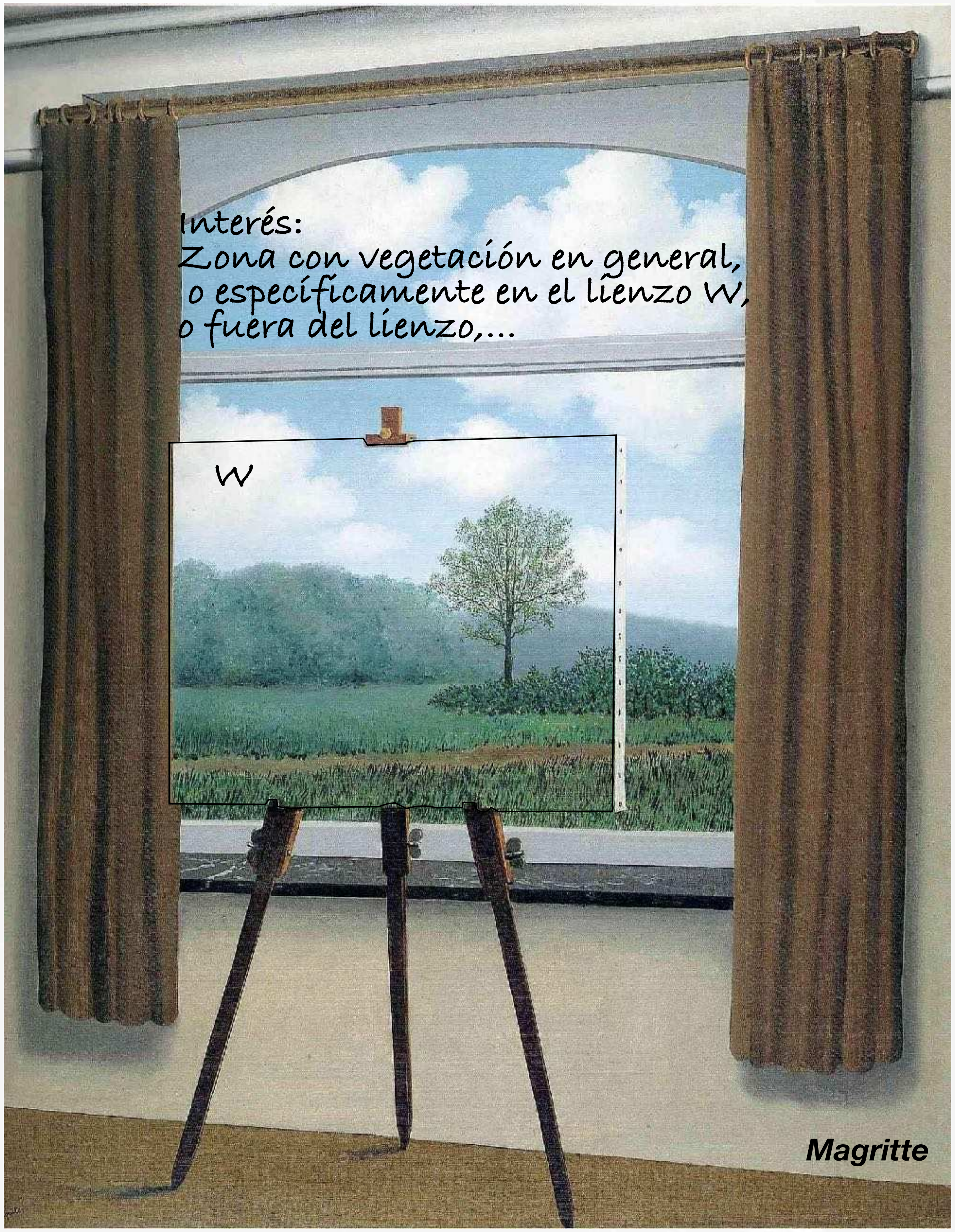
La imagen A contemplada con un filtro que proporciona su "negativo": $A \equiv \hat{A}_E$

(Por ejemplo, La imagen como elemento que hay que manipular con técnicas de la Morfología Matemática)

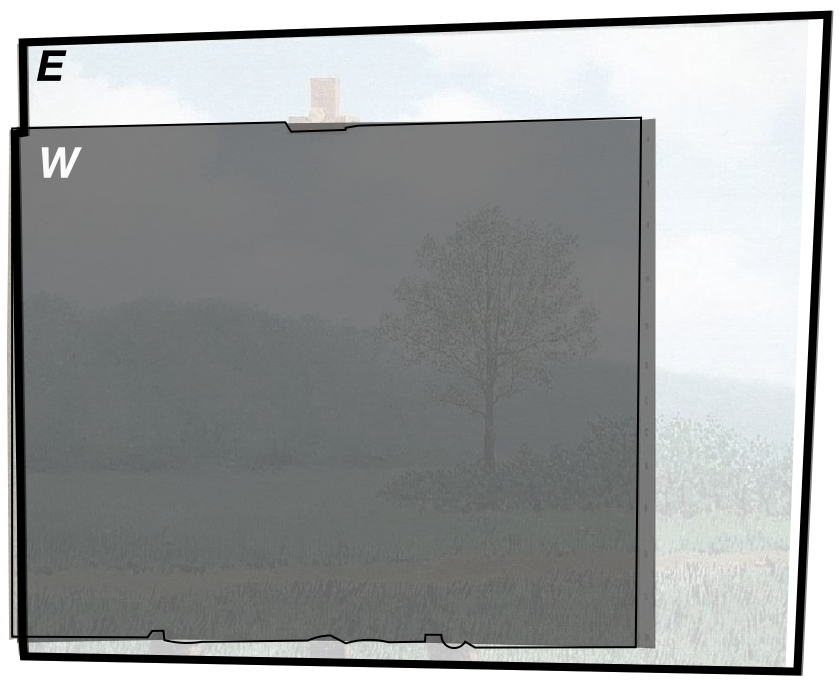
<u>Otras representaciones asociadas a subconjuntos W de $E, F, \ldots$,</u>

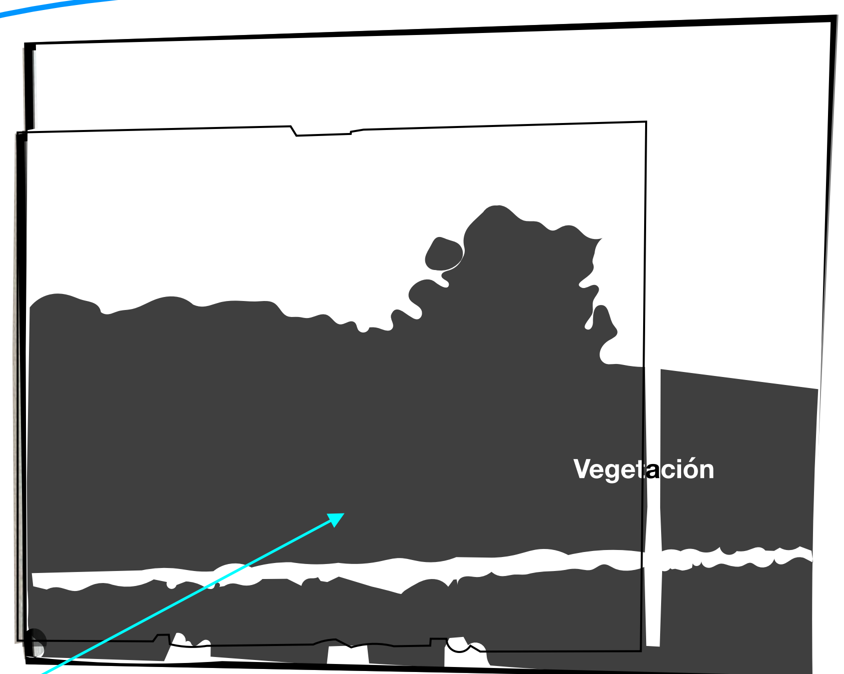
Ilustración de la aplicación de filtros basados en la Diferencia Simétrica sobre imágenes binarias


Magritte


Interés:
Zona con vegetación en general,
o específicamente en el lienzo W,
o fuera del lienzo,...
W
Magritte


Interés:
Zona con vegetación en general,
o específicamente en el lienzo W,
o fuera del lienzo,...
E
W
Magritte


E
W



(Vegetación) = Imagen binaria
correspondiente a zona que
contiene algún tipo de vegetación

Imagen binaria correspondiente a la zona con vegetación en la imagen E: (Vegetación)$\Delta\varnothing$=(Vegetación).

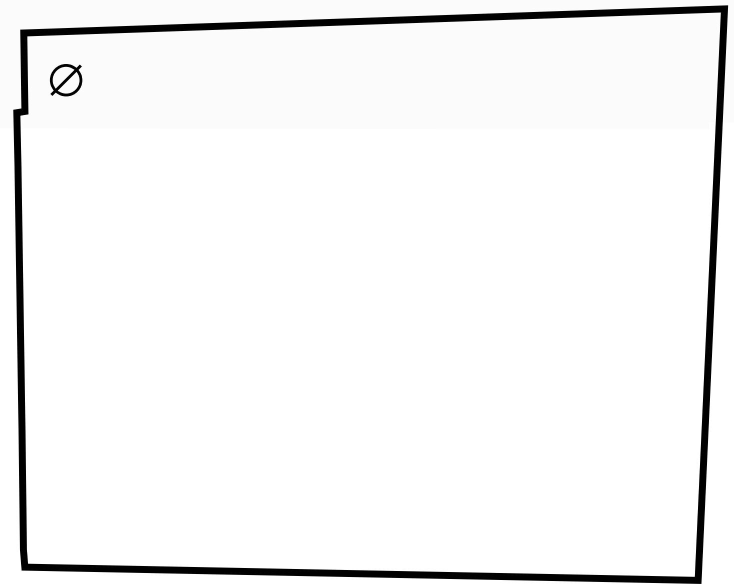
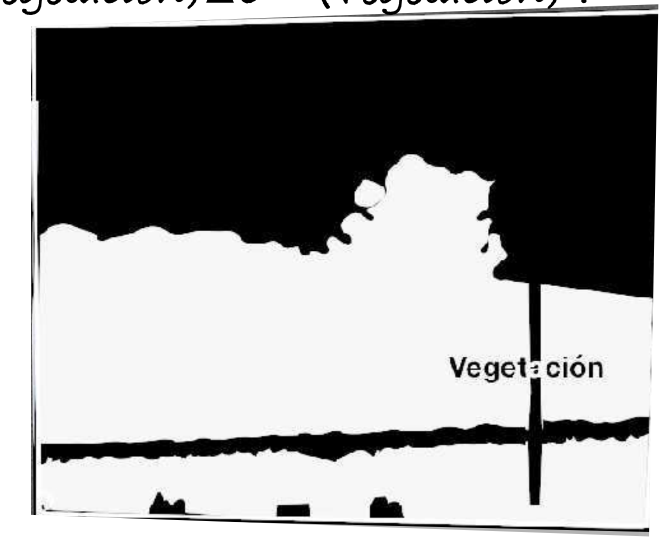


Imagen binaria correspondiente a la zona con vegetación en la imagen E: (vegetación) $\Delta\emptyset =$ (vegetación).

Imagen binaria correspondiente a la zona sin vegetación en la imagen E: (vegetación) $\Delta E =$ (vegetación)^c.



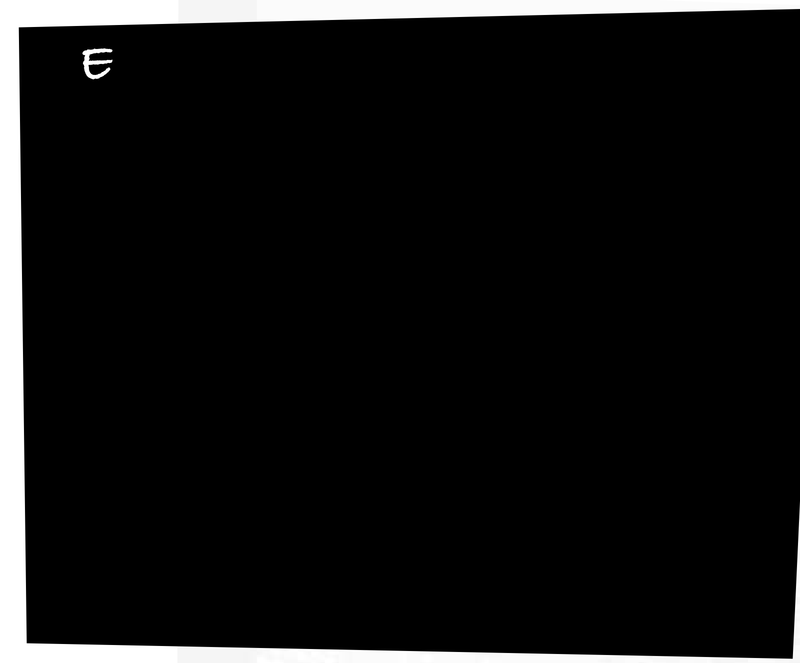


Imagen binaria correspondiente a la zona con vegetación en la imagen E: (vegetación)$\Delta\varnothing$= (vegetación).

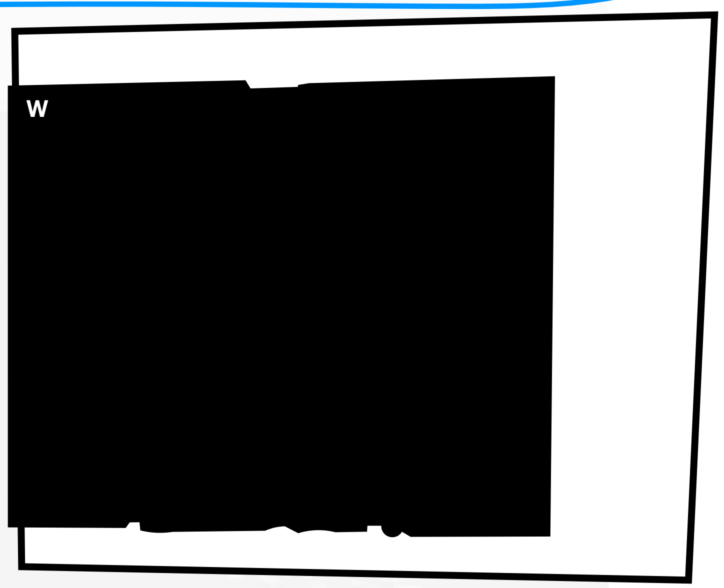


Imagen correspondiente a la zona con vegetación fuera del lienzo W y sin vegetación en el lienzo W: (vegetación)ΔW.

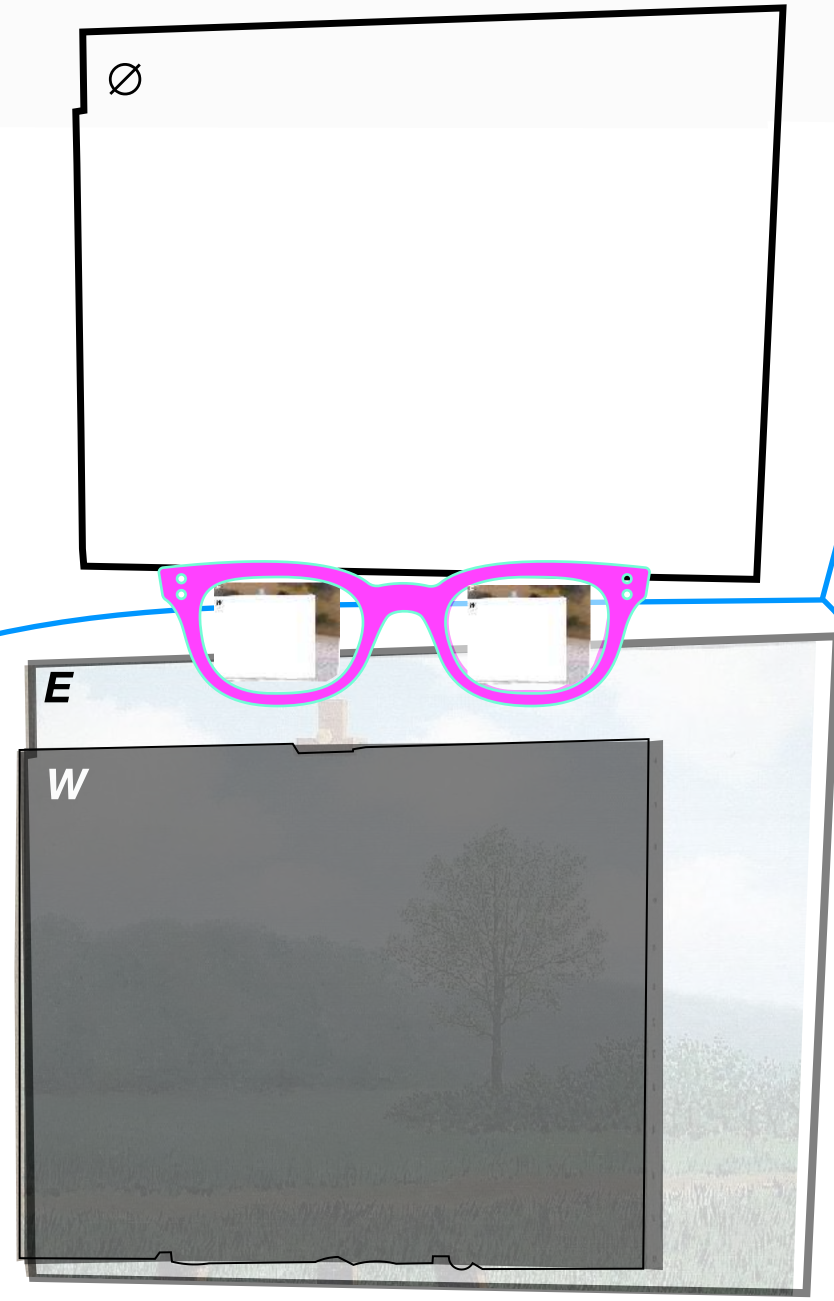
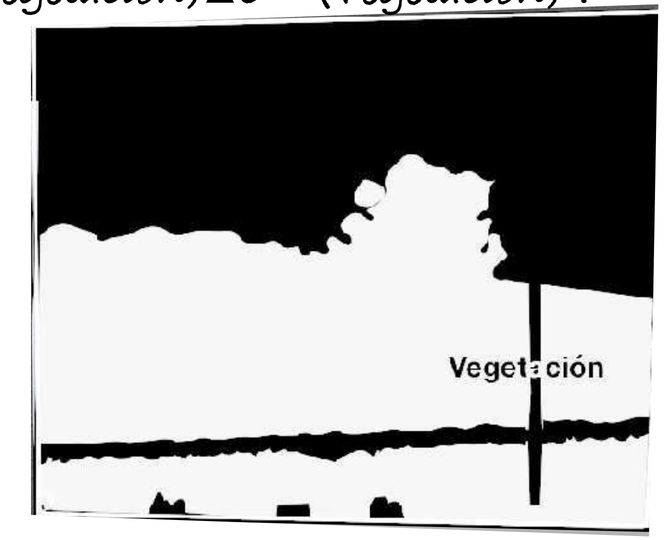


Imagen binaria correspondiente a la zona sin vegetación en la imagen E: (vegetación)ΔE = (vegetación)^c.



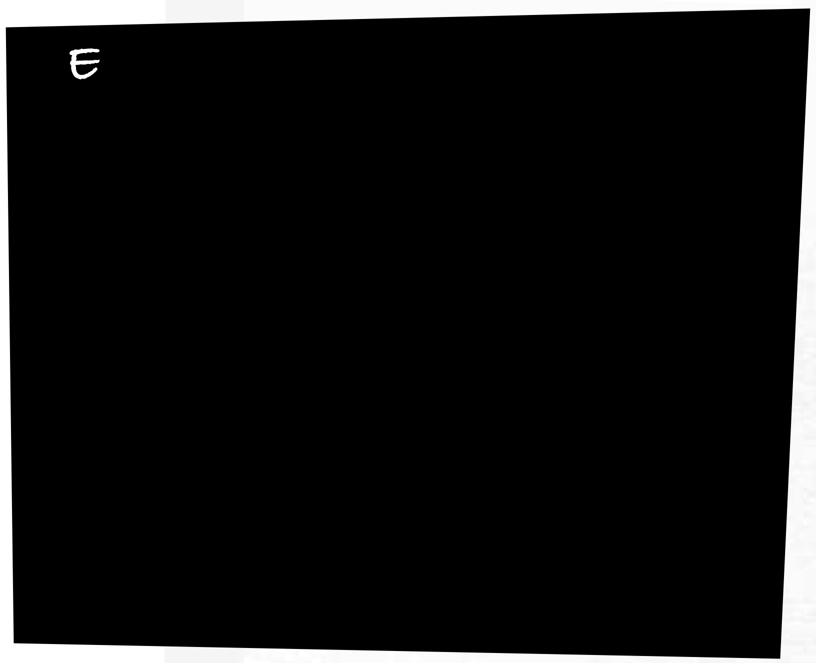
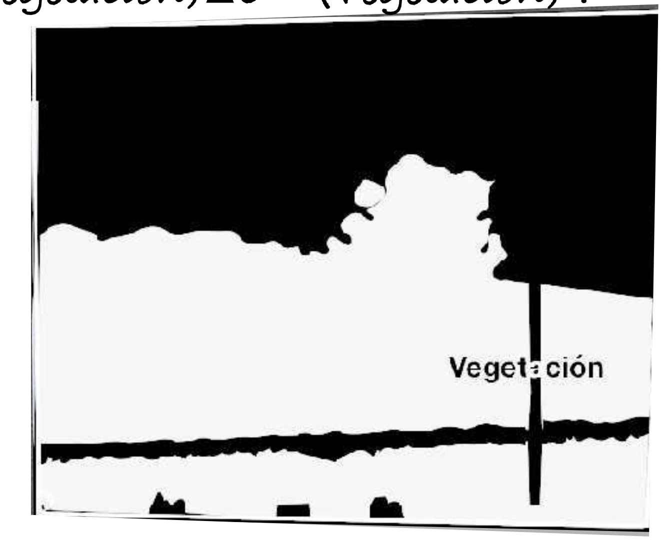
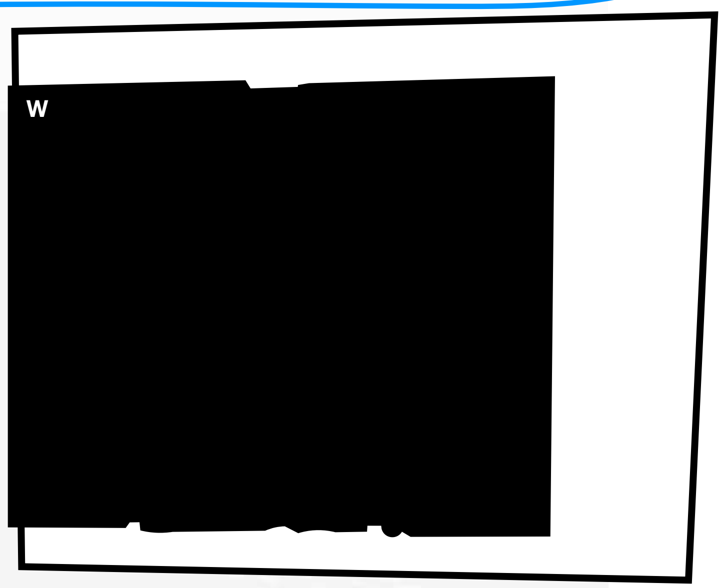
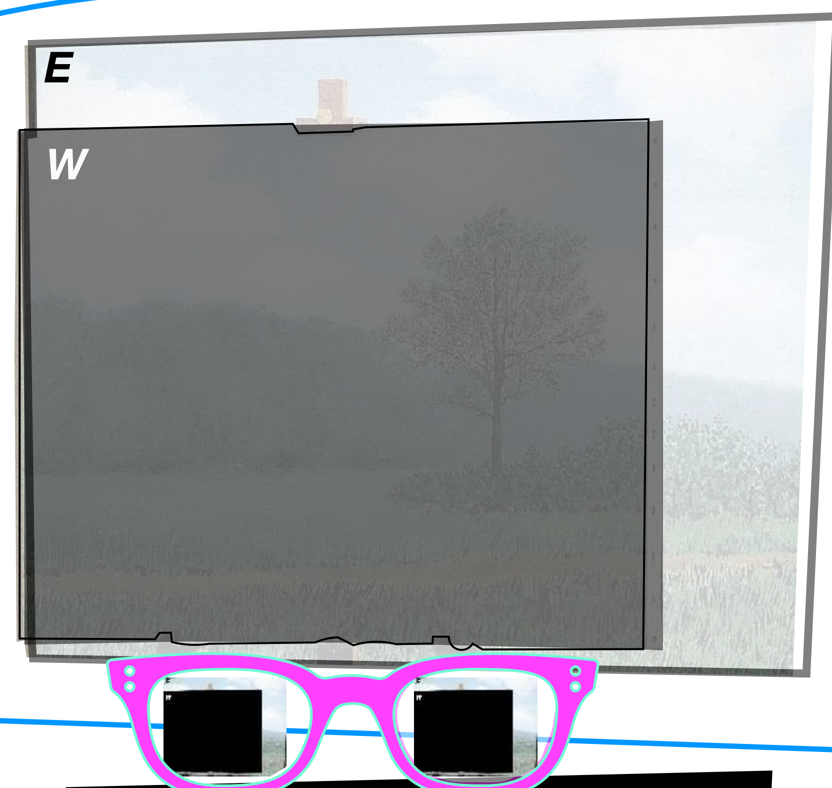


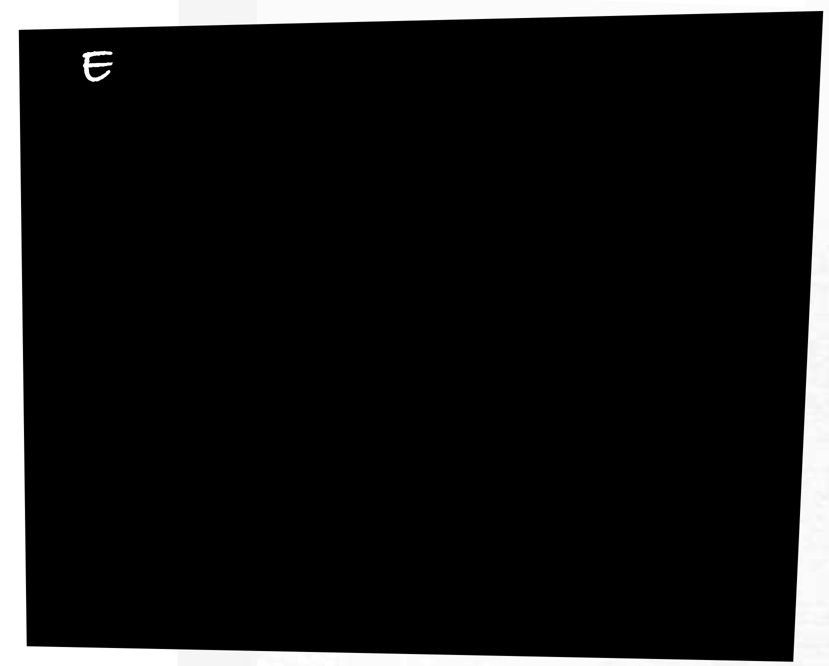
Imagen binaria correspondiente a la zona con vegetación en la imagen E: $(\text{Vegetación})\Delta\emptyset=(\text{Vegetación})$.

Imagen binaria correspondiente a la zona sin vegetación en la imagen E: $(\text{Vegetación})\Delta E=(\text{Vegetación})^c$.









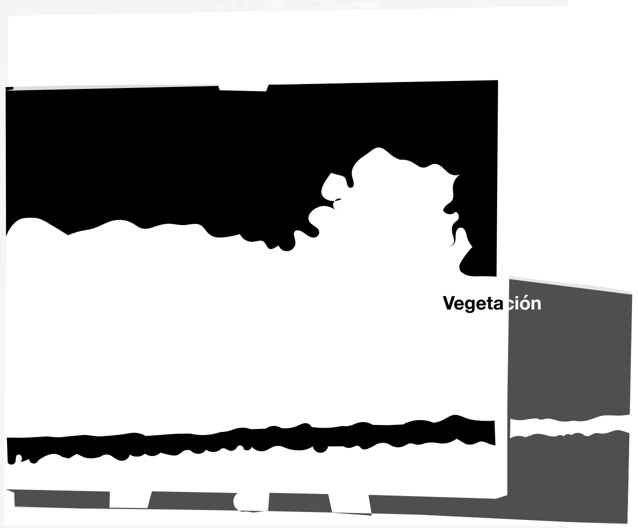


Imagen correspondiente a la zona con vegetación fuera del lienzo W y sin vegetación en el lienzo W: $(\text{Vegetación})\Delta W$.

Imagen de la zona con vegetación en el lienzo W y sin vegetación fuera del lienzo W: $(\text{Vegetación})\Delta W^c$.

Imagen binaria correspondiente a la zona con vegetación en la imagen E: (Vegetación)$\Delta\varnothing$ = (Vegetación).

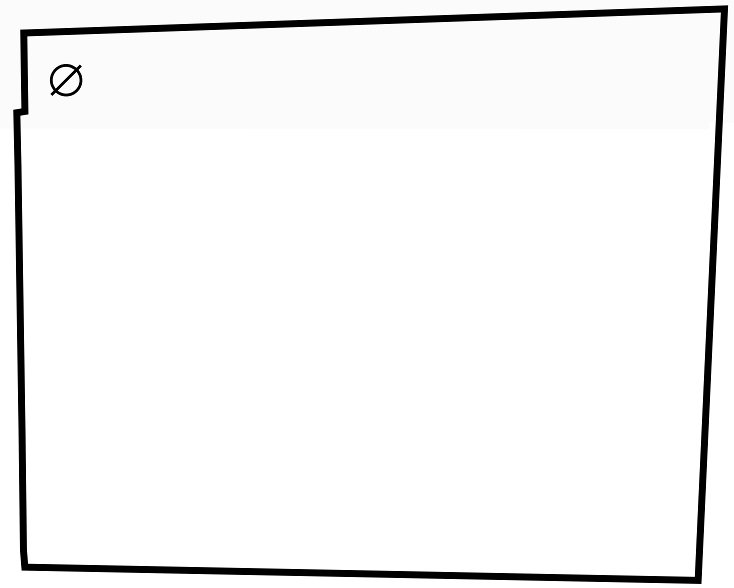
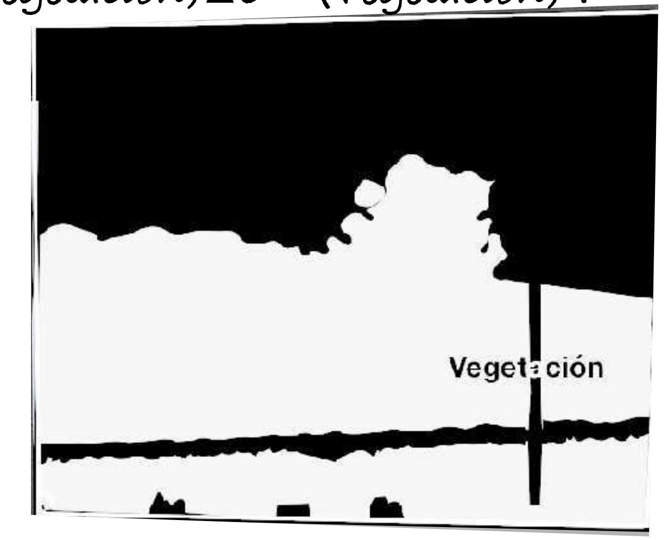
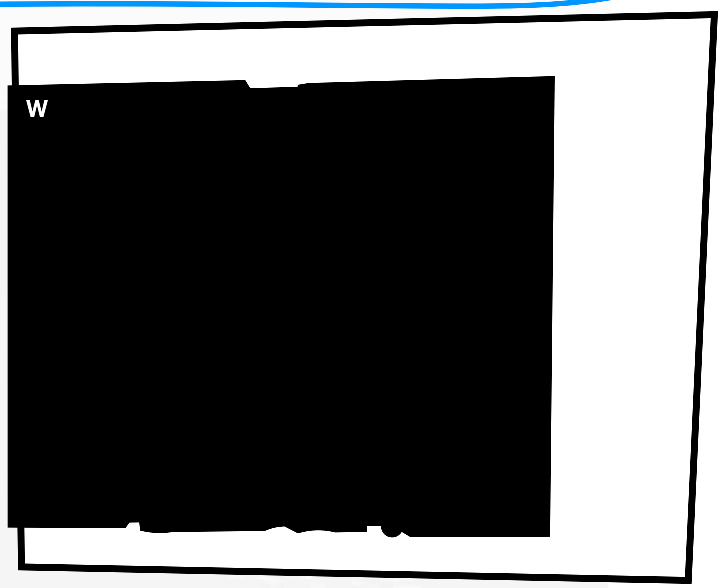
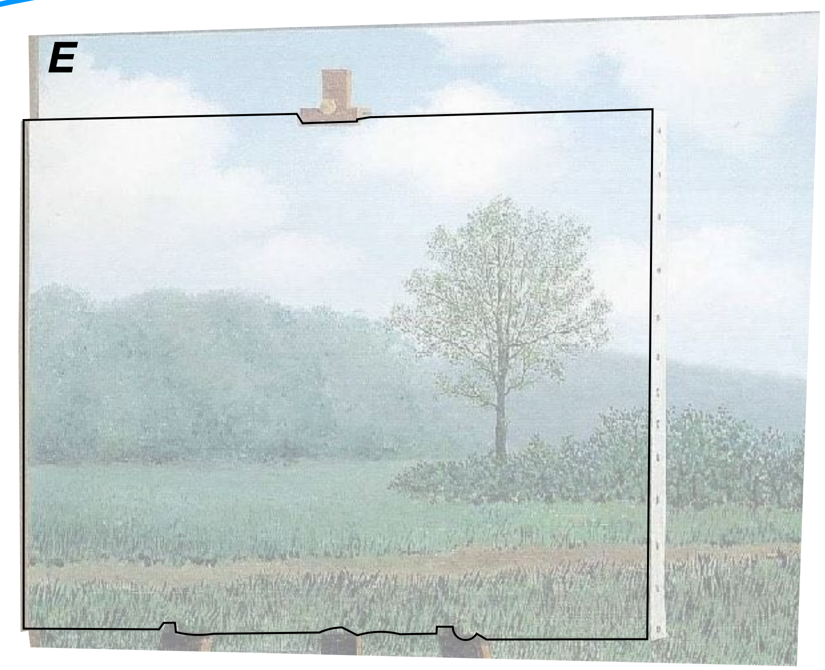


Imagen binaria correspondiente a la zona sin vegetación en la imagen E: (Vegetación)ΔE = (Vegetación)^c.







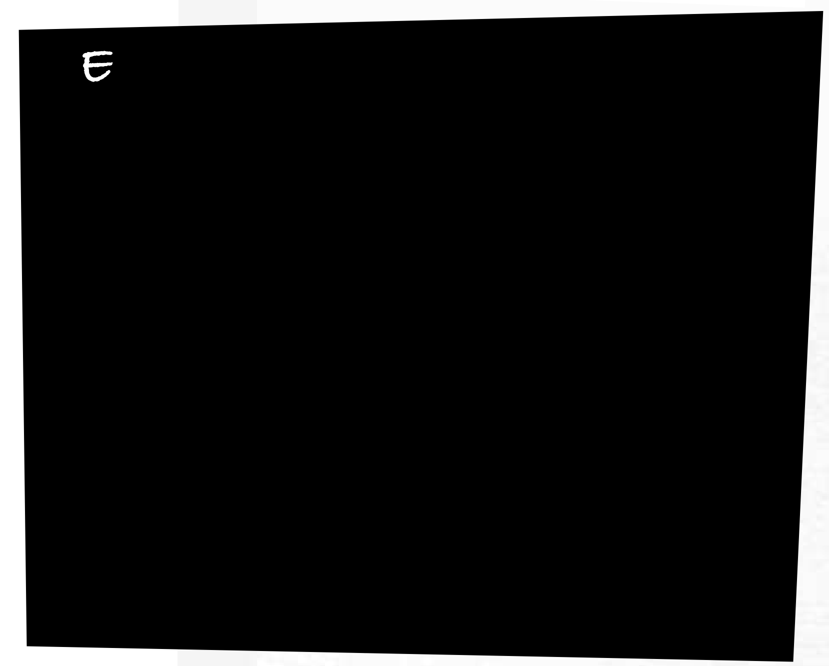


Imagen correspondiente a la zona con vegetación fuera del lienzo W y sin vegetación en el lienzo W: (Vegetación)ΔW.

Imagen de la zona con vegetación en el lienzo W y sin vegetación fuera del lienzo W: (Vegetación)ΔW^c.

0. Preliminares

Álgebras de Subconjuntos L-Borrosos.

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

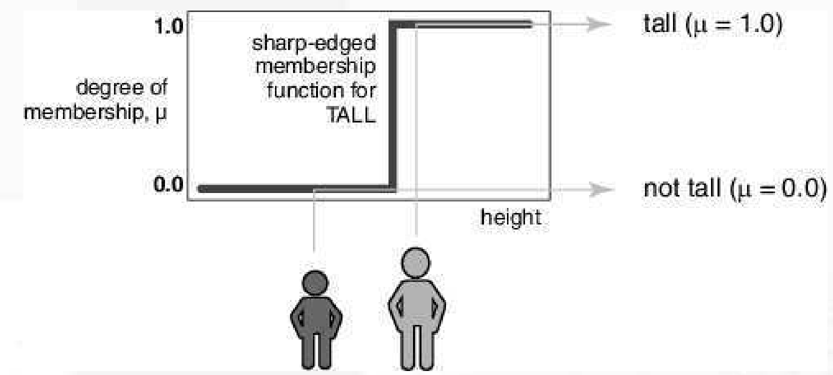
Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1). ')$ [1] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $': L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

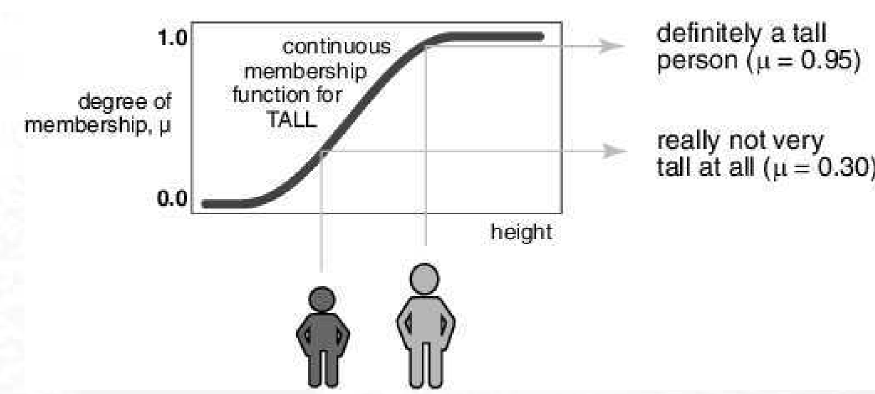
(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de *L*, supondremos que*L* es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

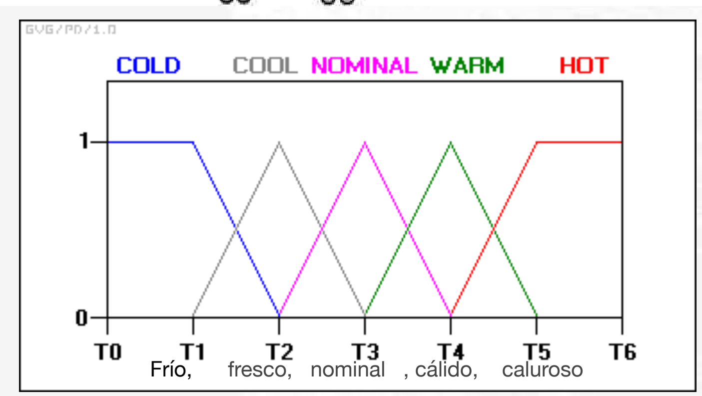
Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\, ')$[1] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).







(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de *L*, supondremos que *L* es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

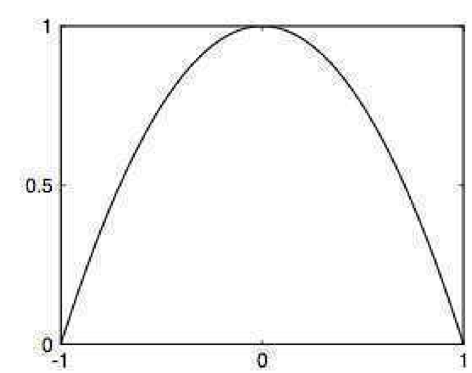
Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

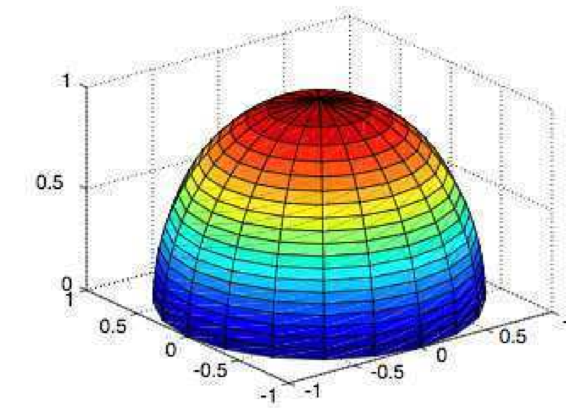
Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1). \,')$ (1) un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

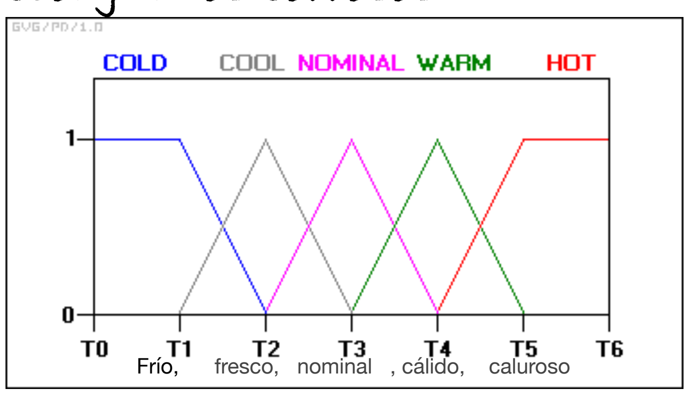
Los retículos L más utilizados en la literatura sobre conjuntos L-borrosos:

Cadena $L=[0.1]=\{x/\ 0 \leq x \leq 1\}$





Subconjuntos borrosos



Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

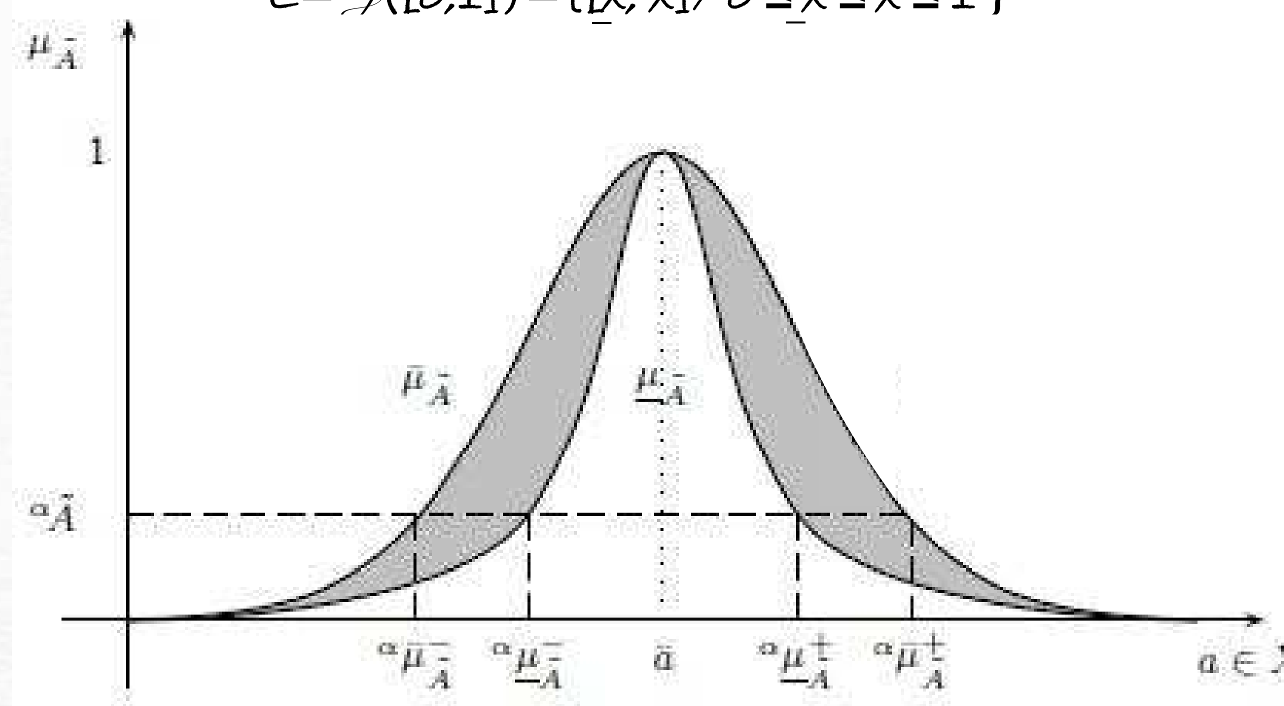
Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\,')$[1] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A : E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

Los retículos L más utilizados en la literatura sobre conjuntos L-borrosos:

Retículo de intervalos de [0,1]:

$L = \mathcal{J}([0,1]) = \{[\underline{x}, \overline{x}] / 0 \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq 1\}$



Subconjuntos borrosos intervalo-valorados

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de *L*, supondremos que *L* es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

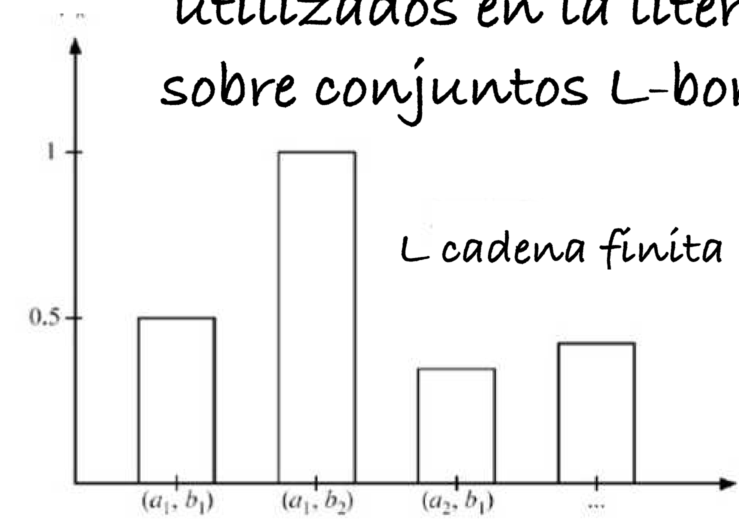
Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

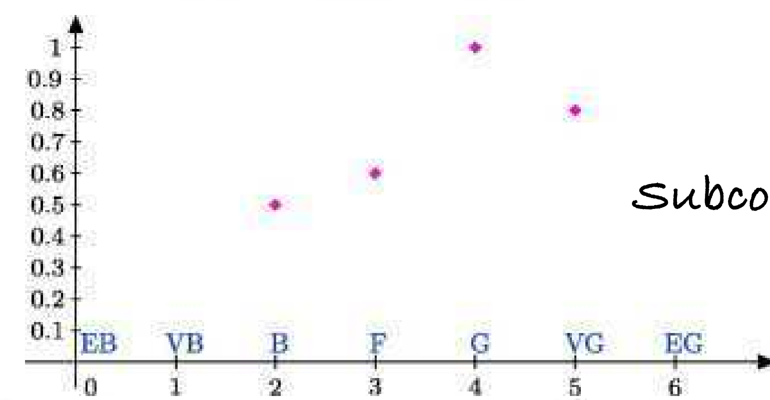
Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\,')$ (1) un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

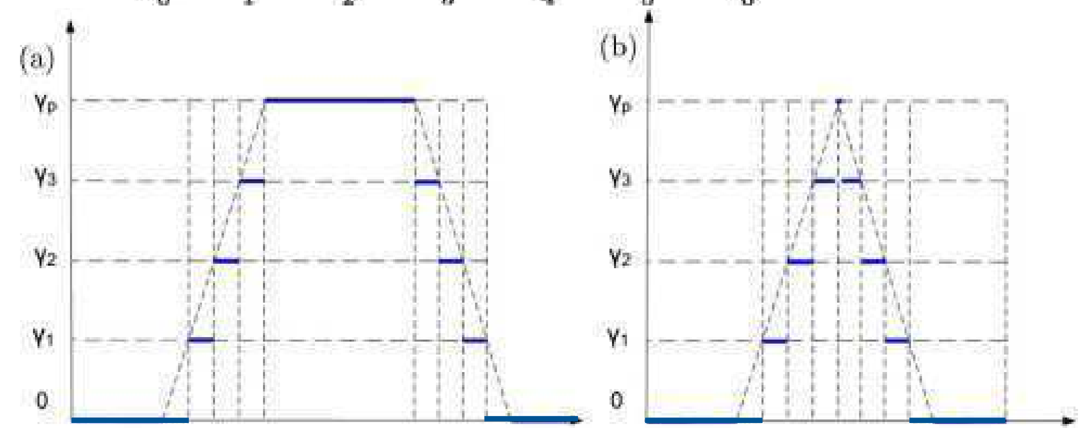
Los retículos L más utilizados en la literatura sobre conjuntos L-borrosos:



L cadena finita



Subconjuntos L-borrosos



Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

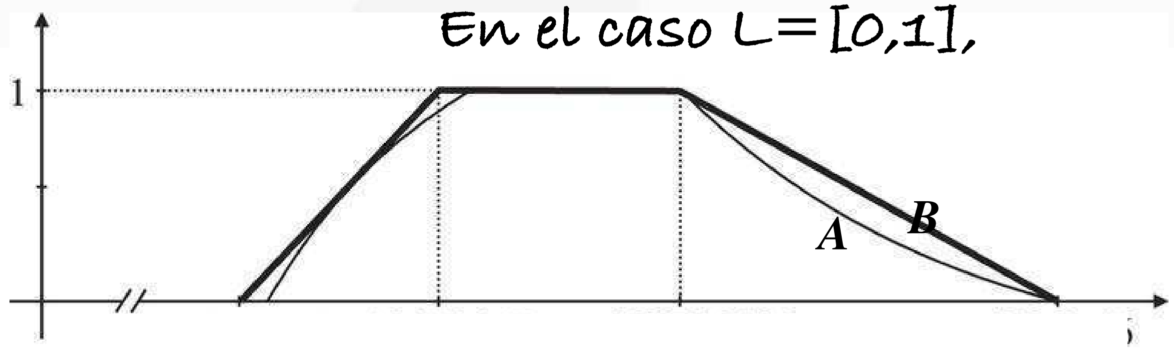
Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\, ')$ [(1)] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $': L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

Con el orden $\leq$ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$ como inclusión borrosa.

En el caso L=[0,1],



(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

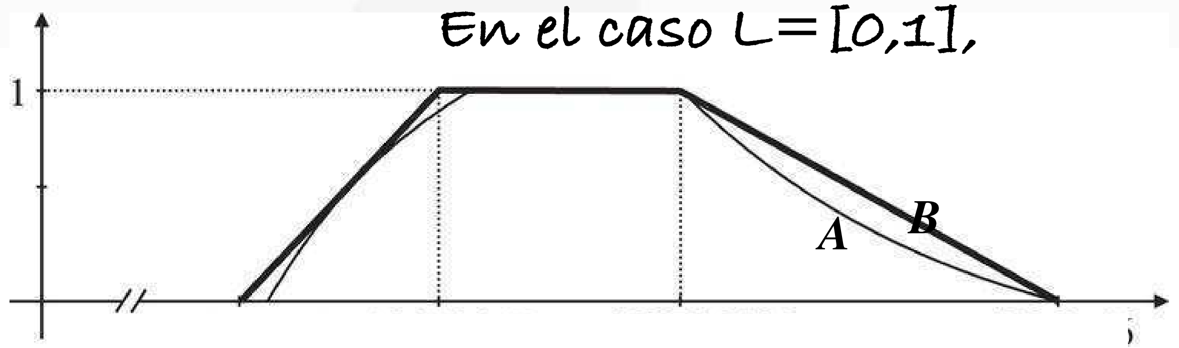
Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\,')$ [1] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L\rightarrow L$ tal que si $a\in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c=a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \rightarrow L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

Con el orden $\leq$ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x\in E$ como inclusión borrosa.

En el caso L=[0,1],

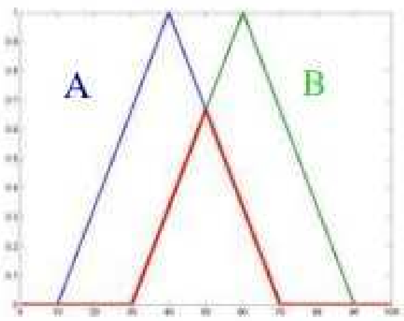


A≤B

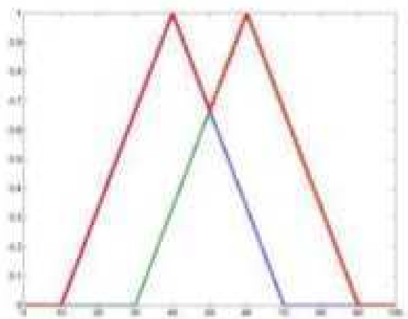
Las leyes "intersección" y "unión" borrosas vienen dadas respectivamente por:

$$(A \bullet B)(x) = A(x) \cdot B(x)\ ,$$

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \forall x\in E,\ \forall (A, B)\in L^E x L^E .$$



$A \bullet B$


$A + B$

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de *L*, supondremos que *L* es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

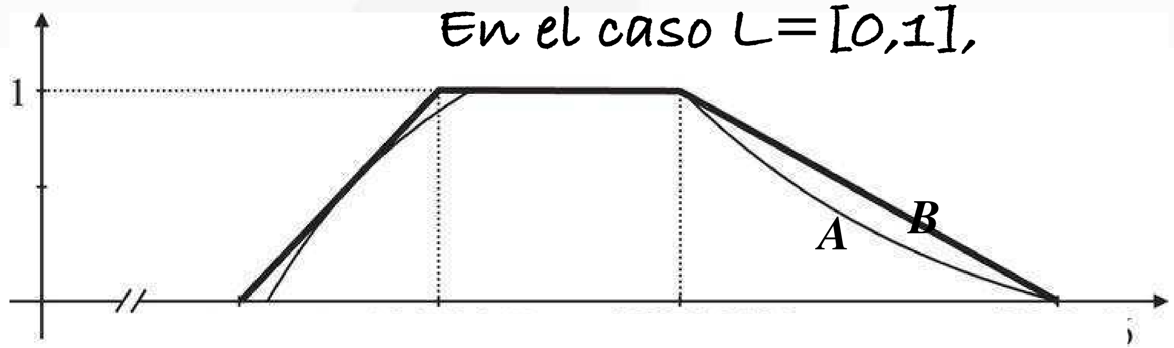
Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\, ')$[1] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $': L \rightarrow L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \rightarrow L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

En el caso L=[0,1],



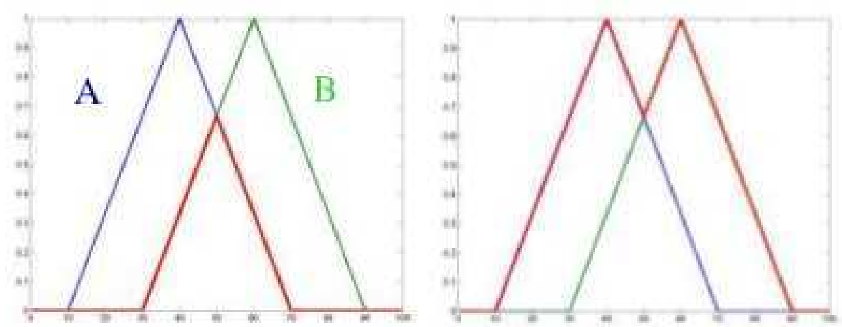
A≤B

Con el orden $\leq$ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$ como inclusión borrosa.

Las leyes "intersección" y "unión" borrosas vienen dadas respectivamente por:

$$(A \bullet B)(x) = A(x) \cdot B(x)\ ,$$

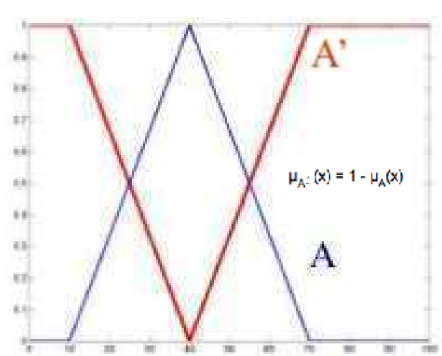
$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \forall x \in E,\ \forall (A, B) \in L^E x L^E .$$



$A \bullet B$ $\qquad$ $A + B$

Es un retículo acotado (distributivo ya que L lo es), que también tiene una negación fuerte $': L^E \rightarrow L^E$ tal que A', (el complemento borroso de A), viene dado por:

$$A'(x) = (A(x))' \quad \forall x \in E.$$



Negación de Zadeh $x' = 1 - x$

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

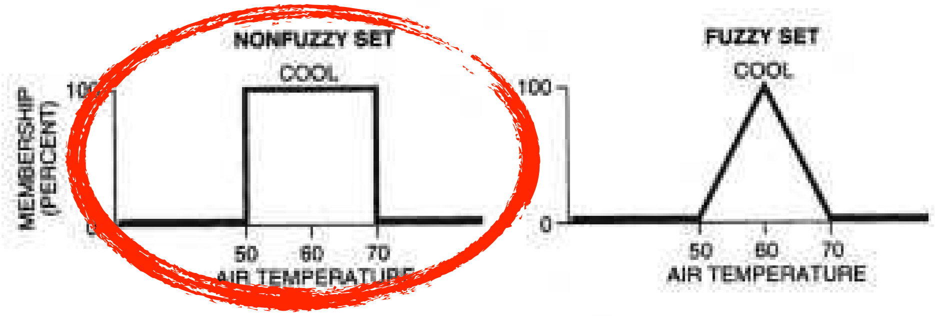
Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

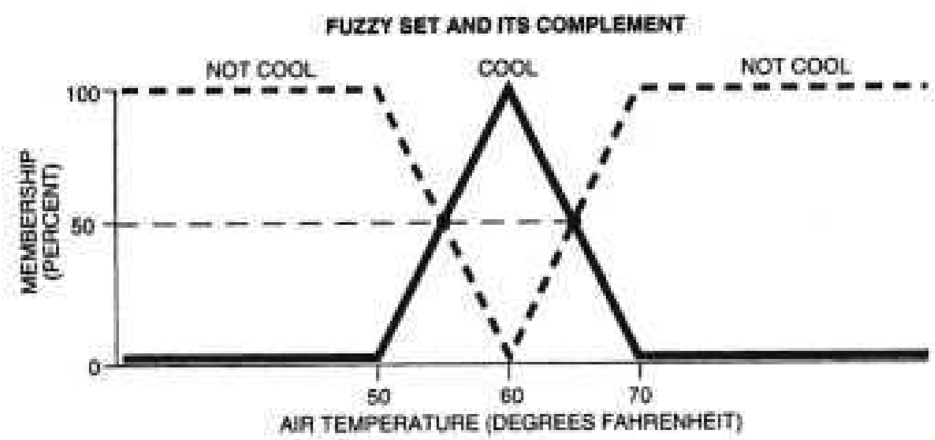
Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1).\,\acute{}\,)$(1) un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $\acute{}: L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

En el caso L=[0,1],





Con el orden $\leq$ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$ como inclusión borrosa.

Las leyes "intersección" y "unión" borrosas vienen dadas respectivamente por:

$$(A \bullet B)(x) = A(x) \cdot B(x)\,,$$

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \forall x \in E,\ \forall (A, B) \in L^E x L^E.$$

Es un retículo acotado (distributivo ya que L lo es), que también tiene una negación fuerte $': L^E \to L^E$ tal que A', (el complemento borroso de A), viene dado por:

$$A'(x) = (A(x))\acute{}\quad \forall x \in E.$$

Se sumerge $P(E)$ en L^E considerando una clase de subconjuntos L-borrosos de E: los subconjuntos nítidos ("crisp sets") A, tales que verifican: $A(E) \subseteq \{0, 1\}$. Si A es uno de ellos, también lo es A', que es el complemento A^c de A.

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0,1). ')$ [(1)] un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte ´:L→ L tal que si a∈L es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c=a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

Con el orden ≤ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$ como inclusión borrosa.

Las leyes "intersección" y "unión" borrosas vienen dadas respectivamente por:

$$(A \bullet B)(x) = A(x) \cdot B(x) \ ,$$

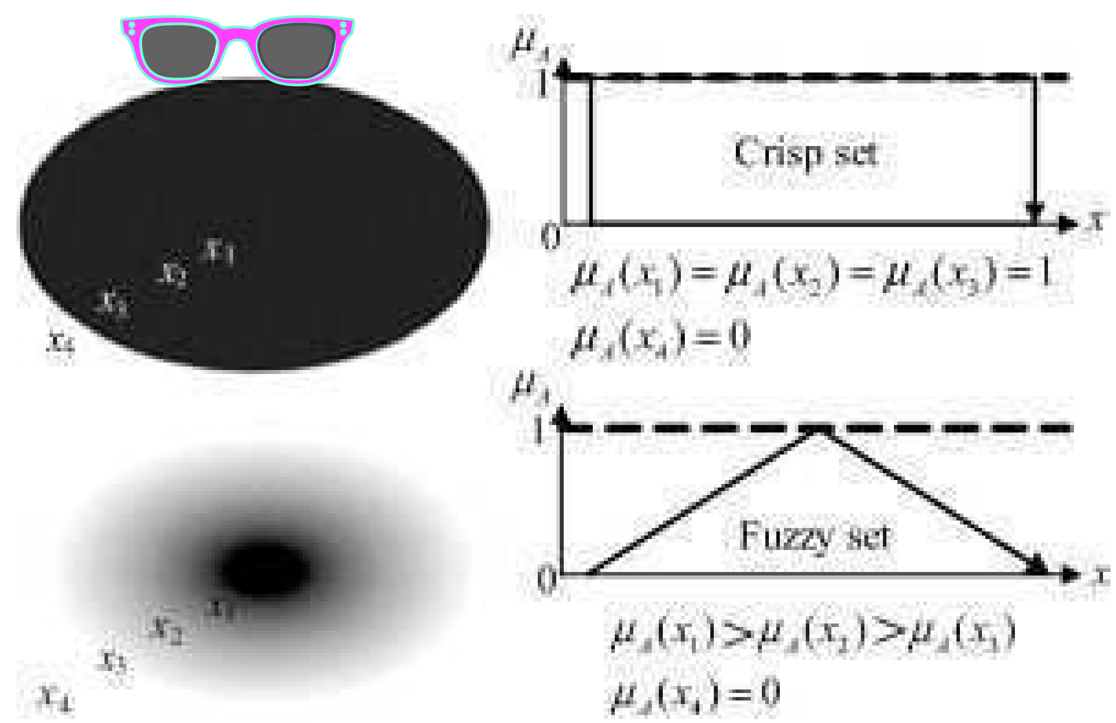
$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \forall x \in E,\ \forall (A, B) \in L^E x L^E .$$

Es un retículo acotado (distributivo ya que L lo es), que también tiene una negación fuerte $': L^E \to L^E$ tal que A', (el complemento borroso de A), viene dado por:

$$A'(x) = (A(x))' \quad \forall x \in E.$$

Se sumerge $P(E)$ en L^E considerando una clase de subconjuntos L-borrosos de E: los subconjuntos nítidos ("crisp sets") A, tales que verifican: $A(E) \subseteq \{0, 1\}$. Si A es uno de ellos, también lo es A', que es el complemento A^c de A.

En el caso L=[0,1],



Fuzzy Sets del plano R^2

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Álgebra $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de E:

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1). \,')$ (1) un retículo acotado, distributivo y con una negación fuerte $':L \to L$ tal que si $a \in L$ es complementado en L con complemento a^c, se verifica $a^c = a'$.

Interpretación de las aplicaciones $A: E \to L$ como funciones características generalizadas: Subconjuntos L-Borrosos de E (L-Fuzzy Sets).

Con el orden $\leq$ tal que $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$ como inclusión borrosa.

Las leyes "intersección" y "unión" borrosas vienen dadas respectivamente por:

$$(A \bullet B)(x) = A(x) \cdot B(x)\ ,$$

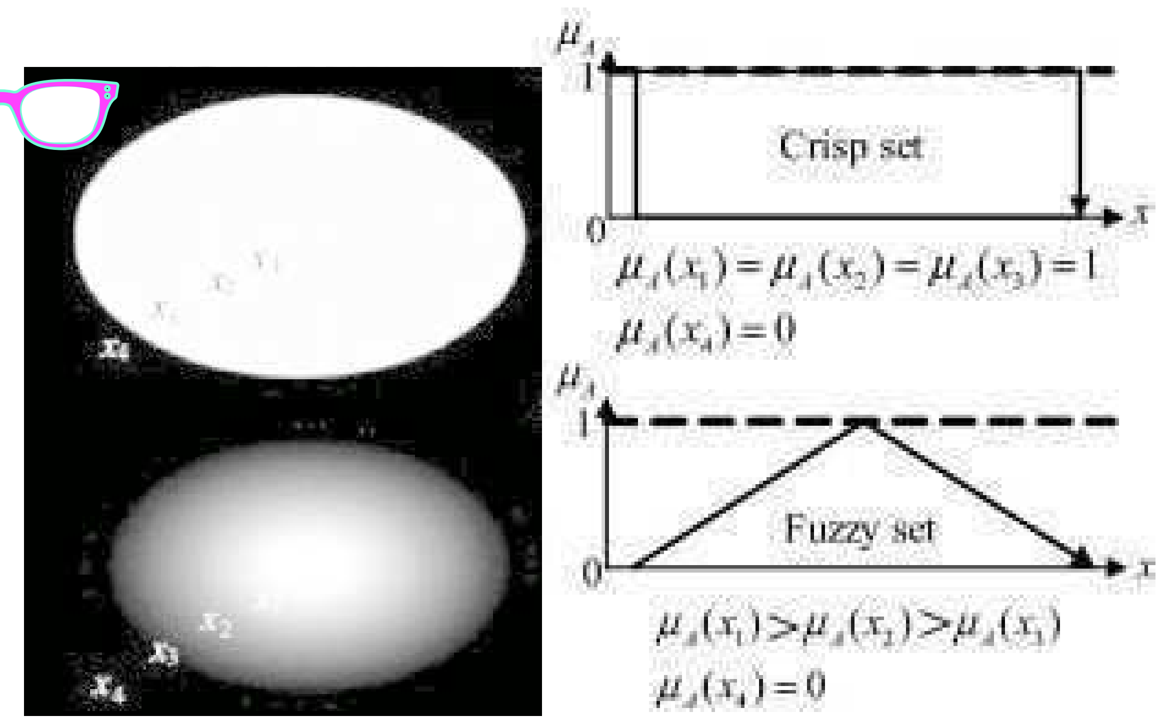
$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \forall x \in E,\ \forall (A, B) \in L^E x L^E .$$

Es un retículo acotado (distributivo ya que L lo es), que también tiene una negación fuerte $': L^E \to L^E$ tal que A', (el complemento borroso de A), viene dado por:

$$A'(x) = (A(x))' \quad \forall x \in E.$$

Se sumerge $P(E)$ en L^E considerando una clase de subconjuntos L-borrosos de E: los subconjuntos nítidos ("crisp sets") A, tales que verifican: $A(E) \subseteq \{0, 1\}$. Si A es uno de ellos, también lo es A', que es el complemento A^c de A.

En el caso L=[0,1],



Fuzzy Sets del plano R^2:
Una interpretación asociada a Imágenes binarias (crisp sets) o a imágenes con tonos de gris.

(1) **Si se considera supremos e ínfimos de familias cualesquiera de elementos de L, supondremos que L es completo, Broweriano y dual-Broweriano.**

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control (8): 338-353
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.
JA Goguen. L-fuzzy sets.Journal of mathematical analysis and applications, 1967

Cardinal de un subconjunto borroso

Sea $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ la recta real positiva. Con el orden usual $\leq$ y sus operadores asociados "min" y "max": el álgebra $((\mathbb{R}^+, \leq, \min, \max, 0), +, \sum)$ es un retículo, (concretamente una cadena), con elemento mínimo 0 y con la operación usual "suma" de números representada por $+$ o por $\sum$.

Sea $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ la recta real positiva. Con el orden usual $\leq$ y sus operadores asociados "min" y "max": el álgebra $((\mathbb{R}^+, \leq, \min, \max, 0), +, \sum)$ es un retículo, (concretamente una cadena), con elemento mínimo 0 y con la operación usual "suma" de números representada por + o por $\sum$.

Sea E un referencial. Para todo $M \in P(E)$, $|M| \in \mathbb{N}^+$ representa su cardinal.

Sea $(([0,1]^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el retículo de los <u>subconjuntos borrosos</u> de E con la <u>negación de Zadeh</u>: $A'(x)=1-A(x)\quad \forall x \in E, \forall A \in [0,1]^E$. (Ahora, los símbolos $+, \sum$ representan al operador "sup" asociado al orden $\leq$ en $[0,1]^E$: $(A+B)(x)=\max(A(x), B(x))$, $(\sum_{i \in \mathbf{n}} A_i)(x)=\max(A_0(x), A_1(x),..,A_{n-1}(x)))$.

Si $N \in [0,1]^E$ es nítido, lo identificamos con su soporte: $N \equiv SUPP(N)$ (*) .

(*) $SUPP(A)=\{x \in E \,/\, A(x)>0\}$

Sea $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ la recta real positiva. Con el orden usual $\leq$ y sus operadores asociados "min" y "max": el álgebra $((\mathbb{R}^+, \leq, \min, \max, 0), +, \sum)$ es un retículo, (concretamente una cadena), con elemento mínimo 0 y con la operación usual "suma" de números representada por $+$ o por $\sum$.

Sea E un referencial. Para todo $M \in P(E)$, $|M| \in \mathbb{N}^+$ representa su cardinal.

Sea $(([0,1]^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el retículo de los <u>subconjuntos borrosos</u> de E con la <u>negación de Zadeh</u>: $A'(x) = 1 - A(x)\quad \forall x \in E, \forall A \in [0,1]^E$. (Ahora, los símbolos $+, \sum$ representan al operador "sup" asociado al orden $\leq$ en $[0,1]^E$: $(A+B)(x) = \max(A(x), B(x))$, $(\sum_{i \in \mathbf{n}} A_i)(x) = \max(A_0(x), A_1(x), .., A_{n-1}(x))$).

Si $N \in [0,1]^E$ es nítido, lo identificamos con su soporte: $N \equiv SUPP(N)$ (*) .

<u>Definición</u>. Se extiende el concepto de cardinal a subconjuntos borrosos A de E tales que $|SUPP(A)| < +\infty$ mediante la suma en $\mathbb{R}^+$ de los valores pertenecientes a $A(SUPP(A)) \subseteq [0,1]$:

$$\|A\| = \sum_{x \in SUPP(A)} A(x) \quad \forall A \in [0,1]^E: SUPP(A) \text{ es finito.}$$

En particular, si E es finito, $(|E| < +\infty)$, entonces: $\|A\| = \sum_{x \in E} A(x) = \sum_{x \in SUPP(A)} A(x) \quad \forall A \in [0,1]^E$.

(*) $SUPP(A) = \{x \in E \,/\, A(x) > 0\}$

Mamoni Dhar. Cardinality of Fuzzy Sets: An Overview International Journal of Energy, Information and Communications Vol. 4, Issue 1, February, 2013

Sea $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ la recta real positiva. Con el orden usual $\leq$ y sus operadores asociados "min" y "max": el álgebra $((\mathbb{R}^+, \leq, \min, \max, 0),+,\sum)$ es un retículo, (concretamente una cadena), con elemento mínimo 0 y con la operación usual "suma" de números representada por $+$ o por $\sum$.

Sea E un referencial. Para todo $M\in P(E)$, $|M|\in\mathbb{N}^+$ representa su cardinal.

Sea $(([0,1]^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el retículo de los <u>subconjuntos borrosos</u> de E con la <u>negación de Zadeh</u>: $A'(x)=1-A(x)\ \ \forall x\in E, \forall A\in[0,1]^E$. (Ahora, los símbolos $+, \sum$ representan al operador "sup" asociado al orden $\leq$ en $[0,1]^E$: $(A+B)(x)=\max(A(x), B(x)), (\sum_{i\in n} A_i)(x)=\max(A_0(x),A_1(x),..,A_{n-1}(x)))$.

Si $N\in[0,1]^E$ es nítido, lo identificamos con su soporte: $N\equiv SUPP(N)$ (*) .

<u>Definición</u>. Se extiende el concepto de cardinal a subconjuntos borrosos A de E tales que $|SUPP(A)|< +\infty$ mediante la suma en $\mathbb{R}^+$ de los valores pertenecientes a $A(SUPP(A))\subseteq[0,1]$:

$$\|A\|=\sum_{x\in SUPP(A)} A(x)\ \ \forall A\in[0,1]^E\text{: } SUPP(A) \text{ es finito.}$$

En particular, si E es finito, $(|E|< +\infty)$, entonces: $\|A\|=\sum_{x\in E} A(x)=\sum_{x\in SUPP(A)} A(x)\ \ \forall A\in[0,1]^E$.

<u>Proposición</u>. (**) Siempre que existan, se verifica:

(1) $(A \leq B)\Rightarrow(\|A\| \leq \|B\|)$.

(2) $\|A\| \leq |SUPP(A)|$. En particular, si N es nítido entonces $\|N\| = |SUPP(N)| = |N|$.

Supremo e ínfimo en $[0,1]^E$.

(3) $\|A+B\|+\|A\cdot B\| = \|A\|+\|B\|\ \ \forall(A,B)\in[0,1]^E X[0,1]^E$ y en consecuencia:

Operación suma usual en $\mathbb{R}^+$.

$\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|\ \forall(A,B)\in[0,1]^E X[0,1]^E$; $\ \ (A\cdot B=\varnothing)\Rightarrow(\|A+B\|= \|A\|+\|B\|)$,

$\|\sum_{i\in n} A_i\| \leq\sum_{i\in n}\|A_i\|\ \ \ \forall(A_i)_{i\in n}$,(familia de $[0,1]^E$), y $\forall n\in\mathbb{N}$.

(4) Si E es finito, entonces $\|A+A'\|+\|A\cdot A'\|=\|A\|+\|A'\|=|E|$, $\ \ \|A'\|=|E|-\|A\|$.

(*) $SUPP(A)=\{x\in E\ /\ A(x)>0\}$

(**) Véase transparencia siguiente.

Mamoni Dhar. Cardinality of Fuzzy Sets: An Overview
International Journal of Energy, Information and Communications Vol. 4, Issue 1, February, 2013

Demostración.

(1) supongamos $A \leq B$ y SUPP(B) finito. Entonces $A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$, luego $\sum_{x \in SUPP(A)} A(x) \leq \sum_{x \in SUPP(B)} B(x)$, es decir, ($\|A\| \leq \|B\|$).

(2) De la desigualdad $A \leq SUPP(A)$ se deduce: $\|A\| \leq \|SUPP(A)\| = |SUPP(A)|$. Además, si N es nítido, es evidente que $\|N\| = |SUPP(N)| = |N|$.

(3) $\|A+B\| + \|A \cdot B\| = \sum_{x \in E} max(A(x),B(x)) + \sum_{x \in E} min(A(x),B(x)) =$

$\sum_{x \in E} 1/2[A(x)+B(x)+\cancel{abs(A(x)-B(x))}] + \sum_{x \in E} 1/2[A(x)+B(x)-\cancel{abs(A(x)-B(x))}] =$

$\sum_{x \in E}[A(x)+B(x)] = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E} B(x) = \|A\| + \|B\|$.

Consecuentemente, $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|\ \forall (A,B) \in [0,1]^E X [0,1]^E$ y si $A \cdot B = \emptyset$ entonces $\|A+B\| = \|A\|+\|B\|$.

(4) Sea E finito. Según el resultado anterior: $\|A+A'\| + \|A \cdot A'\| = \|A\| + \|A'\|\ \forall A \in [0,1]^E$ y

$\|A\| + \|A'\| = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E} A'(x) = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E}(1-A(x)) = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E}(1-A(x)) = |E|$. ∎

Demostración.

(1) supongamos $A \leq B$ y $SUPP(B)$ finito. Entonces $A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E$, luego $\sum_{x \in SUPP(A)} A(x) \leq \sum_{x \in SUPP(B)} B(x)$, es decir, $(\|A\| \leq \|B\|)$.

(2) De la desigualdad $A \leq SUPP(A)$ se deduce: $\|A\| \leq \|SUPP(A)\| = |SUPP(A)|$. Además, si N es nítido, es evidente que $\|N\| = |SUPP(N)| = |N|$.

(3) $\|A+B\| + \|A \bullet B\| = \sum_{x \in E} max(A(x), B(x)) + \sum_{x \in E} min(A(x), B(x)) =$
$\sum_{x \in E} 1/2[A(x) + B(x) + \cancel{abs(A(x)-B(x))}] + \sum_{x \in E} 1/2[A(x) + B(x) - \cancel{abs(A(x)-B(x))}] =$
$\sum_{x \in E}[A(x) + B(x)] = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E} B(x) = \|A\| + \|B\|$.

Consecuentemente, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\ \forall (A,B) \in [0,1]^E X [0,1]^E$ y si $A \bullet B = \emptyset$ entonces $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$.

(4) Sea E finito. Según el resultado anterior: $\|A+A'\| + \|A \bullet A'\| = \|A\| + \|A'\|\ \forall A \in [0,1]^E$ y
$\|A\| + \|A'\| = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E} A'(x) = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E}(1-A(x)) = \sum_{x \in E} A(x) + \sum_{x \in E}(1-A(x)) = |E|$.∎

Nota. Dado un referencial E finito, $(|E| < +\infty)$, la aplicación $\|.\|: [0,1]^E \to [0, +\infty[$ tiene las mismas propiedades que las medidas sobre subconjuntos ordinarios:

$\|\emptyset\| = 0$,

$(A \leq B) \Rightarrow (\|A\| \leq \|B\|)$,

$(\|A+B\| + \|A \bullet B\| = \|A\| + \|B\|)\ \forall (A,B) \in [0,1]^E X [0,1]^E$,

$(A \bullet B = \emptyset) \Rightarrow (\|A+B\| = \|A\| + \|B\|)$,

$\|A'\| = |E| - \|A\|$.

Subconjuntos de nivel (o α-cortes) de un subconjunto L-borroso

Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel (o α-cortes)(*) de un subconjunto L-borroso

(*) En las páginas 172-178 veremos una generalización de estos conceptos en el contexto de retículos distributivos.

Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

Definición. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos α-corte (o también conjunto de nivel α) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{\, x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \,\}$$

Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

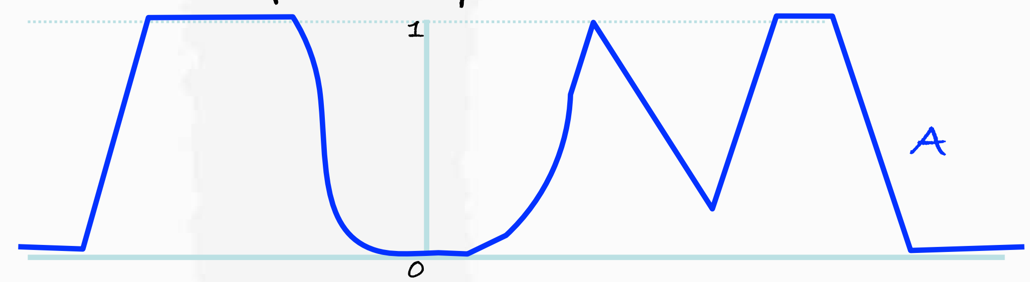
L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

<u>Definición</u>. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos <u>α-corte</u> (o también <u>conjunto de nivel α</u>) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$$

Ejemplo,

$L = [0,1]$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $A \in [0,1]^E$



Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

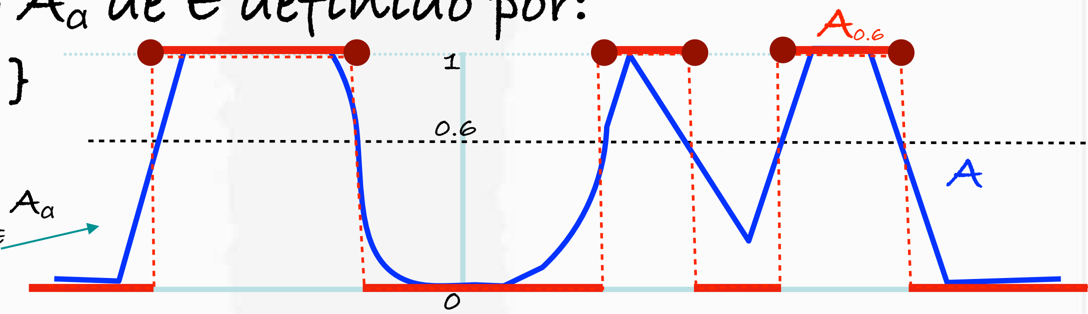
L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

<u>Definición</u>. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos <u>α-corte</u> (o también <u>conjunto de nivel α</u>) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}$$

Ejemplo,

$L = [0,1]$, $E \subseteq R$, $A \in [0,1]^E$



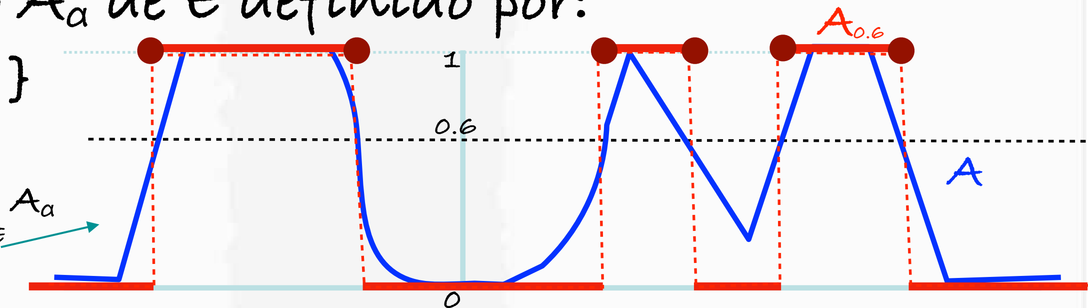
Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science.

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

L- Sea $(L, \le, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

Definición. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos α-corte (o también conjunto de nivel α) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \ge \alpha \}$$



Ejemplo,
$L = [0,1]$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $A \in [0,1]^E$

Definición (*). Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos α-corte estricto (o conjunto de nivel estricto α) asociado a A, al subconjunto ordinario A^*_α de E definido por:

$$A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \not\le \alpha \}$$

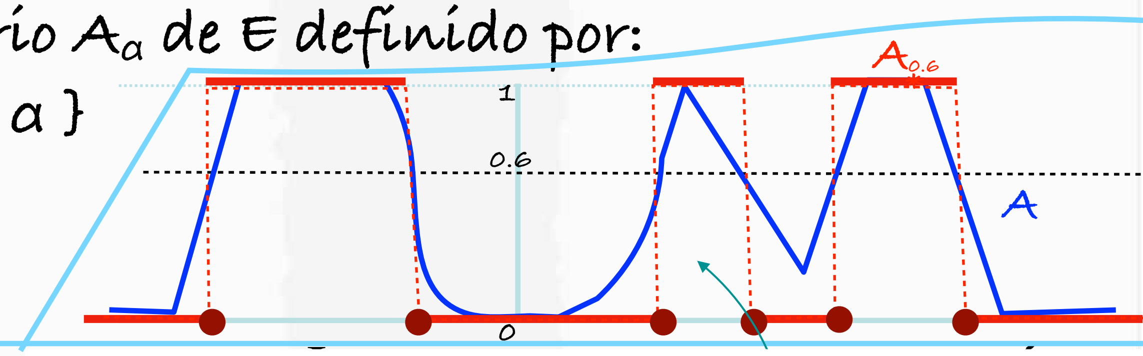
(*) Esta definición es generalización de la que existe en el caso $L = [0,1]$, el el que $A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) > \alpha \}$, por lo que hemos conservado el nombre de α-corte estricto (aunque la relación $\not\le$ no coincida necesariamente con $>$).

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

Definición. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos α-corte (o también conjunto de nivel α) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}$$



Definición (*). Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos α-corte estricto (o conjunto de nivel estricto α) asociado a A, al subconjunto ordinario A^*_α de E definido por:

$$A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \nleq \alpha \}$$

Ejemplo, A^*_α si $L = [0,1]$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $A \in [0,1]^E$

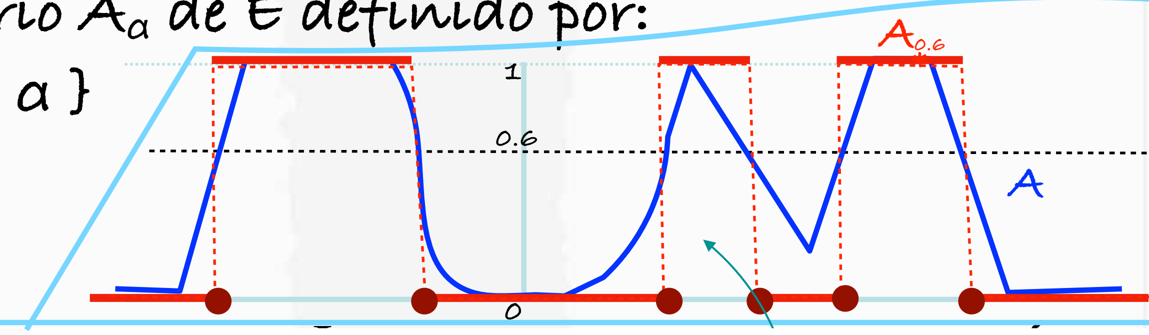
(*) Esta definición es generalización de la que existe en el caso $L = [0,1]$, el el que $A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) > \alpha \}$, por lo que hemos conservado el nombre de α-corte estricto (aunque la relación $\nleq$ no coincida necesariamente con $>$).

Subconjuntos de nivel o α-cortes de subconjuntos L-borrosos

L- Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo acotado y sea $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$ el retículo asociado de subconjuntos L-borrosos (L-fuzzy sets) de un referencial E.

__Definición__. Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos __α-corte__ (o también __conjunto de nivel α__) asociado a A, al subconjunto ordinario A_α de E definido por:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}$$



__Definición__ (*). Dado el subconjunto L-borroso $A \in L^E$ y el elemento $\alpha \in L$, llamaremos __α-corte estricto__ (o __conjunto de nivel estricto α__) asociado a A, al subconjunto ordinario A^*_α de E definido por:

$$A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \nleq \alpha \}$$

Ejemplo, A^*_α si $L = [0,1]$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $A \in [0,1]^E$

__Proposición__(**). Sea $(L, \leq, 0, 1)$ un retículo acotado, sea E un referencial, sea $(L^E, \leq)$ el retículo de los subconjuntos L-borrosos A de E y sean $(A_\alpha)_{\alpha \in L}, (A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$ las familias de sus α-cortes. Se verifica:

(1) $A_0 = E$, $A_1 = KER(A)$ (***), $A^*_0 = SUPP(A)$, $A^*_1 = \varnothing \quad \forall A \in L^E$

(2) $(\alpha \leq \beta) \Rightarrow [(A_\beta \subseteq A_\alpha) \,\&\, (A^*_\beta \subseteq A^*_\alpha)] \ \forall A \in L^E$.

(3) Se verifica las equivalencias: (A es nítido) $\Leftrightarrow [(A_\alpha = A_1 \ \forall \alpha \in L\text{-}\{0\}] \Leftrightarrow [A^*_\alpha = A^*_0 \ \forall \alpha \in L\text{-}\{1\}]$.

(4) Si $M \subseteq L$ y existe $\sup M \in L$, entonces $A_{\sup M} = \bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha \ \forall A \in L^E$. En particular, $A_{\alpha+\beta} = (A_\alpha \cap A_\beta) \ \forall (\alpha,\beta) \in L^2, \forall A \in L^E$

Si existe $\inf M$ entonces $\bigcup_{\alpha \in M} A_\alpha \subseteq A_{\inf M}$. Si L es una cadena, entonces $A_{\min(\alpha,\beta)} = (A_\alpha \cup A_\beta) \ \forall (\alpha,\beta) \in L^2, \forall A \in L^E$

(5) Si existe $\inf M \in L$, entonces $A^*_{\inf M} = \bigcup_{\alpha \in M} A^*_\alpha \ \forall A \in L^E$. En particular, $A^*_{\alpha \cdot \beta} = (A^*_\alpha \cup A^*_\beta) \ \forall (\alpha,\beta) \in L^2, \forall A \in L^E$

Si existe $\sup M$ entonces $A^*_{\sup M} \subseteq \bigcap_{\alpha \in M} A^*_\alpha$. Si L es una cadena, entonces $A^*_{\max(\alpha,\beta)} = (A^*_\alpha \cap A^*_\beta) \ \forall (\alpha,\beta) \in L^2, \forall A \in L^E$

(6) Si L es distributivo con una negación fuerte $' : L \rightarrow L$ tal que si α es complementado entonces $\alpha' = \alpha^c$ y si $' : L^E \rightarrow L^E$ representa también la extensión de la negación en L a L^E, entonces se verifica:

$$A^*_\alpha = [(A')_{\alpha'}]^c \ \forall \alpha \in L, \forall A \in L^E,$$ donde ^{c} representa la complementación en P(E).

(*) Esta definición es generalización de la que existe en el caso $L = [0,1]$, el el que $A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) > \alpha \}$, por lo que hemos conservado el nombre de α-corte estricto (aunque la relación $\nleq$ no coincida necesariamente con >).

(**) Véase demostración en la trasparencia siguiente. (***) $KER(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\}$

Proposición. Sea $(L,\leq,0,1)$ un retículo acotado, sea E un referencial, sea $(L^E,\leq)$ el retículo de los subconjuntos L-borrosos A de E y sean $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$ las familias de sus α-cortes. Se verifica:

(1) $A_0 = E$, $A_1 = KER(A)$, $A^*_0 = SUPP(A)$, $A^*_1 = \emptyset \quad \forall A\in L^E$

(2) $(\alpha \leq \beta) \Rightarrow [(A_\beta \subseteq A_\alpha) \& (A^*_\beta \subseteq A^*_\alpha)] \ \forall A\in L^E$.

(3) Se verifica las equivalencias: (A es nítido) $\Leftrightarrow [(A_\alpha = A_1 \ \forall \alpha\in L\text{-}\{0\}] \Leftrightarrow [A^*_\alpha = A^*_0 \ \forall \alpha\in L\text{-}\{1\}]$.

(4) Si $M\subseteq L$ y existe $\sup M\in L$, entonces $A_{\sup M} = \bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha \ \forall A\in L^E$. En particular, $A_{\alpha+\beta} = (A_\alpha \cap A_\beta) \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2$, $\forall A\in L^E$.

Si existe $\inf M$ entonces $\bigcup_{\alpha\in M} A_\alpha \subseteq A_{\inf M}$. Si L es una cadena, entonces $A_{\min(\alpha,\beta)} = (A_\alpha \cup A_\beta) \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2$, $\forall A\in L^E$

(5) Si existe $\inf M\in L$, entonces $A^*_{\inf M} = \bigcup_{\alpha\in M} A^*_\alpha \ \forall A\in L^E$. En particular, $A^*_{\alpha\cdot\beta} = (A^*_\alpha \cup A^*_\beta) \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2$, $\forall A\in L^E$

Si existe $\sup M$ entonces $A^*_{\sup M} \subseteq \bigcap_{\alpha\in M} A^*_\alpha$. Si L es una cadena, entonces $A^*_{\max(\alpha,\beta)} = (A^*_\alpha \cap A^*_\beta) \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2$, $\forall A\in L^E$

(6) Si L es distributivo con una negación fuerte $': L\rightarrow L$ tal que si α es complementado entonces $\alpha' = \alpha^c$ y si $': L^E\rightarrow L^E$ representa también la extensión de la negación en L a L^E, entonces se verifica:

$$A^*_\alpha = [(A')_{\alpha'}]^c \ \forall \alpha\in L, \ \forall A\in L^E, \text{ donde } {}^c \text{ representa la complementación en } P(E).$$

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq,0,1)$ un retículo acotado, sea E un referencial, sea $(L^E,\leq)$ el retículo de los subconjuntos L-borrosos A de E y sean $(A_\alpha)_{\alpha\in L}, (A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$ las familias de sus α-cortes. Se verifica:

(1) $A_0 = E,\ A_1 = KER(A),\ A^*_0 = SUPP(A),\ A^*_1 = \varnothing \quad \forall A\in L^E$

(2) $(\alpha \leq \beta) \Rightarrow [(A_\beta \subseteq A_\alpha) \& (A^*_\beta \subseteq A^*_\alpha)]\ \forall A\in L^E$.

(3) Se verifica las equivalencias: $(A \text{ es nítido}) \Leftrightarrow [(A_\alpha = A_1\ \forall\alpha\in L\text{-}\{0\}] \Leftrightarrow [A^*_\alpha = A^*_0\ \ \forall\alpha\in L\text{-}\{1\}]$.

(4) Si $M\subseteq L$ y existe $\sup M\in L$, entonces $A_{\sup M} = \bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha\ \ \forall A\in L^E$. En particular, $A_{\alpha+\beta} = (A_\alpha \cap A_\beta)\ \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2,\ \forall A\in L^E$.

Si existe $\inf M$ entonces $\bigcup_{\alpha\in M} A_\alpha \subseteq A_{\inf M}$. Si L es una cadena, entonces $A_{\min(\alpha,\beta)} = (A_\alpha \cup A_\beta)\ \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2,\ \forall A\in L^E$

(5) Si existe $\inf M\in L$, entonces $A^*_{\inf M} = \bigcup_{\alpha\in M} A^*_\alpha\ \ \forall A\in L^E$. En particular, $A^*_{\alpha\cdot\beta} = (A^*_\alpha \cup A^*_\beta)\ \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2,\ \forall A\in L^E$

Si existe $\sup M$ entonces $A^*_{\sup M} \subseteq \bigcap_{\alpha\in M} A^*_\alpha$. Si L es una cadena, entonces $A^*_{\max(\alpha,\beta)} = (A^*_\alpha \cap A^*_\beta)\ \ \forall(\alpha,\beta)\in L^2,\ \forall A\in L^E$

(6) Si L es distributivo con una negación fuerte $': L\rightarrow L$ tal que si α es complementado entonces $\alpha' = \alpha^c$ y si $':L^E\rightarrow L^E$ representa también la extensión de la negación en L a L^E, entonces se verifica:

$$A^*_\alpha = [(A')_{\alpha'}]^c\ \forall\alpha\in L,\ \forall A\in L^E, \text{ donde } {}^c \text{ representa la complementación en } P(E).$$

<u>Demostración</u>. (1) Evidente: $A_0 = \{x\in E / A(x)\geq 0\} = E,\ A_1 = \{x\in E / A(x)\geq 1\} = KER(A)$,

$A^*_0 = \{x\in E / A(x)\not\leq 0\} = \{x\in E / A(x) > 0\} = SUPP(A),\ A^*_1 = \{x\in E / A(x)\not\leq 1\} = \varnothing \quad \forall A\in L^E$.

(2) Si $\alpha\leq\beta$ entonces $[(A(x)\geq\beta)\Rightarrow(A(x)\geq\alpha)]\&[(A(x)\leq\alpha)\Rightarrow(A(x)\leq\beta)]$, o lo que es equivalente

$[(A(x)\geq\beta)\Rightarrow(A(x)\geq\alpha)]\&[(A(x)\not\leq\beta)\Rightarrow(A(x)\not\leq\alpha)]$, luego $[(x\in A_\beta)\Rightarrow(x\in A_\alpha)]\&[(x\in A^*_\beta)\Rightarrow(x\in A^*_\alpha)]\ \forall A\in L^E$,

que demuestra las inclusiones $(A_\alpha \subseteq B_\alpha)\&(A^*_\alpha\subseteq B^*_\alpha)$; $(A\leq B)\Rightarrow[(A_\alpha\subseteq B_\alpha)\&(A^*_\alpha\subseteq B^*_\alpha)]\ \forall\alpha\in L$.

(3) Si A es nítido: $A(E)\subseteq\{0,1\}$, luego $[(x\in A_\alpha)\&(\alpha>0)]\Rightarrow(A(x)\geq\alpha>0)\Rightarrow(A(x)=1)\Rightarrow(A_\alpha\subseteq A_1)\Rightarrow(A_\alpha=A_1)$.

Por otra parte, $[(x\in A^*_\alpha)\&(\alpha<1)]\Rightarrow(A(x)\not\leq\alpha<1)\Rightarrow(A(x)\not\leq 0)\Rightarrow(A(x)=1)\Rightarrow(A^*_\alpha\subseteq A^*_1)\Rightarrow(A^*_\alpha=A^*_1)$.

Supongamos que $A_\alpha = A_1\ \ \forall\alpha\in L\text{-}\{0\}$. Si $A(x)\neq 0$, entonces $x\in A_{A(x)} = A_1$, es decir $A(x)=1$, luego A es nítido.

Si $A^*_\alpha = A^*_0\ \ \forall\alpha\in L\text{-}\{1\}$, Entonces, si $A(x)\neq 1$ entonces $x\notin A^*_{A(x)} = A^*_0$, es decir $A(x)=0$, luego A es nítido(ǂ).

(ǂ) <u>Nota</u> En este caso, podemos identificar el nítido A con su soporte, el subconjunto ordinario $SUPP(A)=A^*_0$ (o su núcleo, el subconjunto ordinario $KER(A)=A_1$), es decir $A\equiv SUPP(A)=KER(A)$). (Continúa)

<u>Demostración</u>. (Continuación)

(4) Sea $M \subseteq L$. Si $M=\emptyset$ entonces $A_{\sup\emptyset}=A_0=E=\bigcap_{\alpha\in\emptyset}A_\alpha$. En otro caso, si existe $\sup M \in L$ entonces $(\alpha \le \sup M\ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A_{\sup M}\subseteq A_\alpha\ \ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A_{\sup M}\subseteq \bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha)$. Por otra parte, $(x\in\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha) \Rightarrow (A(x)\ge\alpha\ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A(x)\ge\sup M) \Rightarrow (x\in A_{\sup M})$, luego $(\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha\subseteq A_{\sup M})$. En conclusión: $A_{\sup M}=\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha$. En particular, si $M=\{\alpha,\beta\}$ entonces $\alpha+\beta$ existe y en consecuencia $A_{\alpha+\beta}=(A_\alpha \cap A_\beta)$.

Si $M=\emptyset$: $\bigcup_{\alpha\in\emptyset}A_\alpha=\emptyset\subseteq A_1=A_{\inf\emptyset}$ .En otro caso, si existe $\inf M$ entonces $(\inf M\le\alpha\ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A_\alpha\subseteq A_{\inf M}\ \ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha\subseteq A_{\inf M})$. En particular, si $M=\{\alpha,\beta\}$ entonces $(A_\alpha \cup A_\beta)\subseteq A_{\alpha\cdot\beta}$. Si L es cadena entonces $\alpha\cdot\beta=\min(\alpha,\beta)$, luego $(A_\alpha\cup A_\beta)\subseteq A_{\min(\alpha,\beta)}$. Además, en este caso: $(x\in A_{\min(\alpha,\beta)}) \Rightarrow (A(x)\ge\min(\alpha,\beta)) \Rightarrow [(A(x)\ge\alpha)$ ó $(A(x)\ge\beta)] \Rightarrow [(x\in A_\alpha)$ ó $(x\in A_\beta)] \Rightarrow (x\in A_\alpha\cup A_\beta)$, luego $A_{\min(\alpha,\beta)}\subseteq(A_\alpha\cup A_\beta)$.

(5) Sea $M\subseteq L$. Si $M=\emptyset$ entonces $A^*_{\inf\emptyset}=A^*_1=\emptyset=\bigcup_{\alpha\in\emptyset}A^*_\alpha$. En otro caso, si existe $\inf M\in L$ entonces $(\inf M\le\alpha\ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A^*_\alpha\subseteq A^*_{\inf M}\ \ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (\bigcup_{\alpha\in M}A^*_\alpha\subseteq A^*_{\inf M})$. Por otra parte, $(x\in A^*_{\inf M}) \Rightarrow (A(x)\not\le \inf M) \Rightarrow (\exists\alpha\in M\!: A(x)\not\le\alpha) \Rightarrow (\exists\alpha\in M\!: x\in A^*_\alpha) \Rightarrow (x\in\bigcup_{\alpha\in M}A^*_\alpha)$, luego $(A^*_{\inf M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}A^*_\alpha)$. En conclusión: $A^*_{\inf M}=\bigcup_{\alpha\in M}A^*_\alpha$. En particular, si $M=\{\alpha,\beta\}$ entonces $\alpha\cdot\beta$ existe y en consecuencia $A^*_{\alpha\cdot\beta}=(A^*_\alpha\cup A^*_\beta)$.

Si $M=\emptyset$: $A^*_{\sup\emptyset}=A^*_0\subseteq E=\bigcap_{\alpha\in\emptyset}A^*_\alpha$ .En otro caso, si existe $\sup M$ entonces $(\alpha\le\sup M\ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A^*_{\sup M}\subseteq A^*_\alpha\ \ \forall\alpha\in M) \Rightarrow (A^*_{\sup M}\subseteq\bigcap_{\alpha\in M}A^*_\alpha)$. En particular, si $M=\{\alpha,\beta\}$ entonces $A^*_{\alpha+\beta}\subseteq(A^*_\alpha\cap A^*_\beta)$. Si L es cadena $\alpha+\beta=\max(\alpha,\beta)$, luego $A^*_{\max(\alpha,\beta)}\subseteq(A^*_\alpha\cap A^*_\beta)$. Además, en este caso $A^*_\alpha=\{x/\ A(x)>\alpha\}$ y se verifica $(x\in A^*_\alpha\cap A^*_\beta) \Rightarrow [(x\in A^*_\alpha)$ & $(x\in A^*_\beta)] \Rightarrow [(A(x)>\alpha)$ & $(A(x)>\beta)] \Rightarrow [A(x)>\max(\alpha,\beta)] \Rightarrow (x\in A^*_{\max(\alpha,\beta)})$, luego $(A^*_\alpha\cap A^*_\beta)\subseteq A^*_{\max(\alpha,\beta)}$.

(6) $(A')_{\alpha'}=\{x/A'(x)\ge\alpha'\}=\{x/A(x)\le\alpha\}=\{x/A(x)\not\le\alpha\}^c=(A^*_{\ \alpha})^c$. ∎

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sean $\downarrow\alpha \in P(L)$ y $\uparrow\alpha \in P(L)$ respectivamente el ideal y el filtro principal asociados a α:

$$\downarrow\alpha = \{ \beta \,/\, \alpha \geq \beta \}, \quad \uparrow\alpha = \{ \beta \,/\, \alpha \leq \beta \}.$$

Evidentemente $\alpha = \sup\downarrow\alpha = \max\downarrow\alpha$, $\alpha = \inf\uparrow\alpha = \min\uparrow\alpha$ $\forall \alpha \in L$.

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha\in L$, sean $\downarrow\alpha\in P(L)$ y $\uparrow\alpha\in P(L)$ respectivamente el ideal y el filtro principal asociados a α:

$$\downarrow\alpha=\{\beta / \alpha \geq \beta\},\ \uparrow\alpha=\{\beta / \alpha \leq \beta\}.$$

Evidentemente $\alpha=\sup\downarrow\alpha=\max\downarrow\alpha$, $\alpha=\inf\uparrow\alpha=\min\uparrow\alpha$ $\forall\alpha\in L$.

<u>Nota</u>. Si $A\in L^E$ y $x\in E$ entonces las expresiones $\downarrow A(x)=\{\alpha / A(x)\geq \alpha\}$, $\uparrow A(x)=\{\alpha / A(x) \leq \alpha\}$ se pueden representar utilizando elementos de las familias de α-cortes $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$:

$$\downarrow A(x)=\{\alpha / \alpha\in A_\alpha\},\ \uparrow A(x)=\{\alpha / \alpha\in (A^*_\alpha)^c\}\ \ \forall x\in E.$$

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sean $\downarrow\alpha \in P(L)$ y $\uparrow\alpha \in P(L)$ respectivamente el ideal y el filtro principal asociados a α:

$$\downarrow\alpha = \{ \beta \,/\, \alpha \geq \beta \},\ \uparrow\alpha = \{ \beta \,/\, \alpha \leq \beta \}.$$

Evidentemente $\alpha = \sup\downarrow\alpha = \max\downarrow\alpha$, $\alpha = \inf\uparrow\alpha = \min\uparrow\alpha \quad \forall \alpha \in L$.

Nota. Si $A \in L^E$ y $x \in E$ entonces las expresiones $\downarrow A(x) = \{ \alpha \,/\, A(x) \geq \alpha \}$, $\uparrow A(x) = \{ \alpha \,/\, A(x) \leq \alpha \}$ se pueden representar utilizando elementos de las familias de α-cortes $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ y $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$:

$$\downarrow A(x) = \{ \alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \},\ \uparrow A(x) = \{ \alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \} \quad \forall x \in E.$$

Además, utilizando los nítidos A_α y A^*_α asociados a los correspondientes subconjuntos ordinarios:

$\{\alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \} = \{A_\alpha(x) \cdot \alpha \,/\, x \in E \} = \{A_\alpha(x) \cdot \tilde{\alpha}(x) \,/\, x \in E \} = \{ (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \}$, con $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \quad \forall x \in E$,

$\{\alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \} = \{A^*_\alpha(x) + \alpha \,/\, x \in E \} = \{A^*_\alpha(x) + \tilde{\alpha}(x) \,/\, x \in E \} = \{ (A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \}$, con $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \quad \forall x \in E$.

Luego de las igualdades de conjuntos $\downarrow A(x) = \{ (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \}$, $\uparrow A(x) = \{ (A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \}$ se obtienen las expresiones de $A \in L^E$ mediante α-cortes:

$$A(x) = \sup\{ \alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \} = \sup\{ (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \} = \max\{ (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \} \quad \forall x \in E,$$

$$A(x) = \inf\{ \alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \} = \inf(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \} = \min(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \} \quad \forall x \in E.$$

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sean $\downarrow\alpha \in \mathcal{P}(L)$ y $\uparrow\alpha \in \mathcal{P}(L)$ respectivamente el ideal y el filtro principal asociados a α:

$$\downarrow\alpha = \{\, \beta \,/\, \alpha \geq \beta \,\}, \quad \uparrow\alpha = \{\, \beta \,/\, \alpha \leq \beta \,\}.$$

Evidentemente $\alpha = \sup\downarrow\alpha = \max\downarrow\alpha$, $\alpha = \inf\uparrow\alpha = \min\uparrow\alpha \quad \forall \alpha \in L$.

<u>Nota</u>. Si $A \in L^E$ y $x \in E$ entonces las expresiones $\downarrow A(x) = \{\, \alpha \,/\, A(x) \geq \alpha \,\}$, $\uparrow A(x) = \{\, \alpha \,/\, A(x) \leq \alpha \,\}$ se pueden representar utilizando elementos de las familias de α-cortes $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ y $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$:

$$\downarrow A(x) = \{\, \alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \,\}, \quad \uparrow A(x) = \{\, \alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \,\} \quad \forall x \in E.$$

Además, utilizando los nítidos A_α y A^*_α asociados a los correspondientes subconjuntos ordinarios:

$\{\alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \,\} = \{A_\alpha(x) \cdot \alpha \,/\, x \in E \,\} = \{A_\alpha(x) \cdot \tilde{\alpha}(x) \,/\, x \in E \,\} = \{\, (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\}$, con $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \quad \forall x \in E$,

$\{\alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \,\} = \{A^*_\alpha(x) + \alpha \,/\, x \in E \,\} = \{A^*_\alpha(x) + \tilde{\alpha}(x) \,/\, x \in E \,\} = \{\, (A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\}$, con $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \quad \forall x \in E$.

Luego de las igualdades de conjuntos $\downarrow A(x) = \{\, (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\}$, $\uparrow A(x) = \{\, (A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\}$ se obtienen las expresiones de $A \in L^E$ mediante α-cortes:

$$A(x) = \sup\{\, \alpha \,/\, \alpha \in A_\alpha \,\} = \sup\{\, (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\} = \max\{\, (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\} \quad \forall x \in E,$$

$$A(x) = \inf\{\, \alpha \,/\, \alpha \in (A^*_\alpha)^c \,\} = \inf(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\} = \min(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) \,/\, x \in E \,\} \quad \forall x \in E.$$

Y como veremos a continuación en las transparencias siguientes , asociadas a estas implicaciones aparecen teoremas de representación de subconjuntos L-borrosos en función de α-cortes:

$$A = \sum_{\alpha \in L - \{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \quad A = \prod_{\alpha \in L - \{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E.$$ ("$\sum$" representa el supremo y "$\prod$" el ínfimo en L^E).

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Si $\mathcal{M}$ es una familia o un subconjunto ordinario de L^E, $\sum \mathcal{M} \in L^E$ y $\prod \mathcal{M} \in L^E$ representarán respectivamente, (si existen), su unión L-borrosa (supremo en L^E) y su intersección L-borrosa (ínfimo en L^E).

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Si $\mathcal{M}$ es una familia o un subconjunto ordinario de L^E, $\sum \mathcal{M} \in L^E$ y $\prod \mathcal{M} \in L^E$ representarán respectivamente, (si existen), su unión L-borrosa (supremo en L^E) y su intersección L-borrosa (ínfimo en L^E).

Es conocido el siguiente:

Teorema. (De representación)

Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \geq \alpha,\ \alpha\ ; \\ \text{en otro caso}, 0],$$

entonces se verifica:

$$A = \sum_{\alpha \in L - \{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

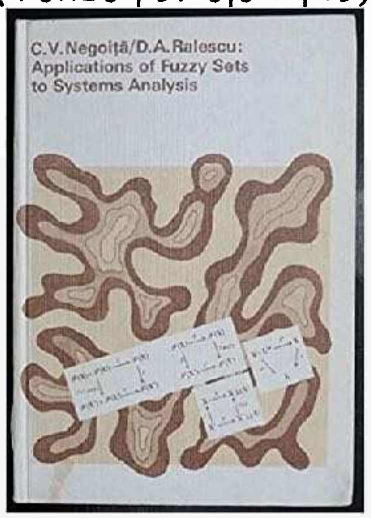
Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Si $\mathcal{M}$ es una familia o un subconjunto ordinario de L^E, $\sum \mathcal{M} \in L^E$ y $\prod \mathcal{M} \in L^E$ representarán respectivamente, (si existen), su unión L-borrosa (supremo en L^E) y su intersección L-borrosa (ínfimo en L^E).

Es conocido el siguiente:

(véase por ejemplo)



Teorema. (De representación)

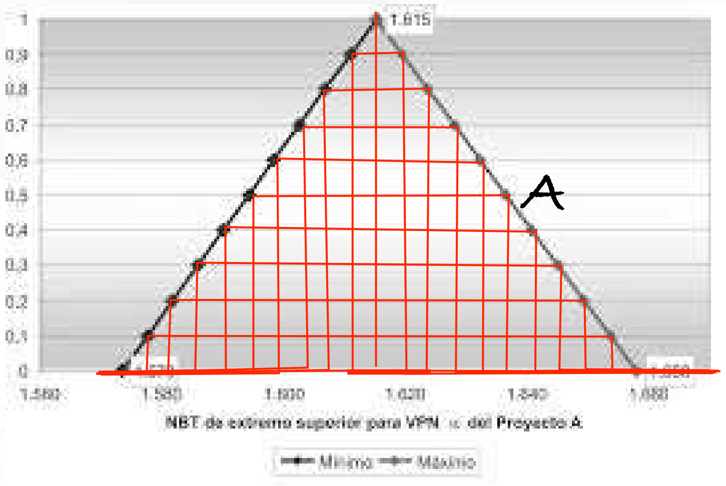
Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \geq \alpha,\ \alpha\ ; \ \text{en otro caso}, 0],$$

entonces se verifica:

$$A = \sum_{\alpha \in L-\{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

$L = [0,1]$, $E \subseteq \mathrm{R}$



Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

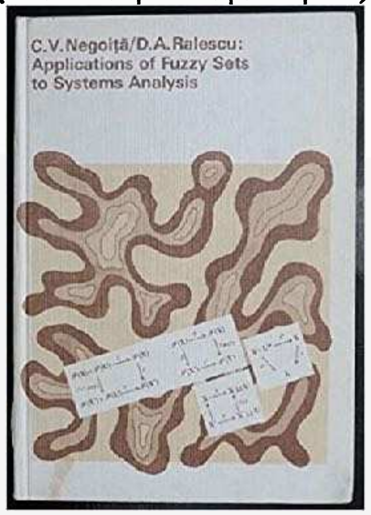
Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Si $\mathcal{M}$ es una familia o un subconjunto ordinario de L^E, $\sum \mathcal{M} \in L^E$ y $\prod \mathcal{M} \in L^E$ representarán respectivamente, (si existen), su unión L-borrosa (supremo en L^E) y su intersección L-borrosa (ínfimo en L^E).

Es conocido el siguiente:

(véase por ejemplo)



Teorema. (De representación)

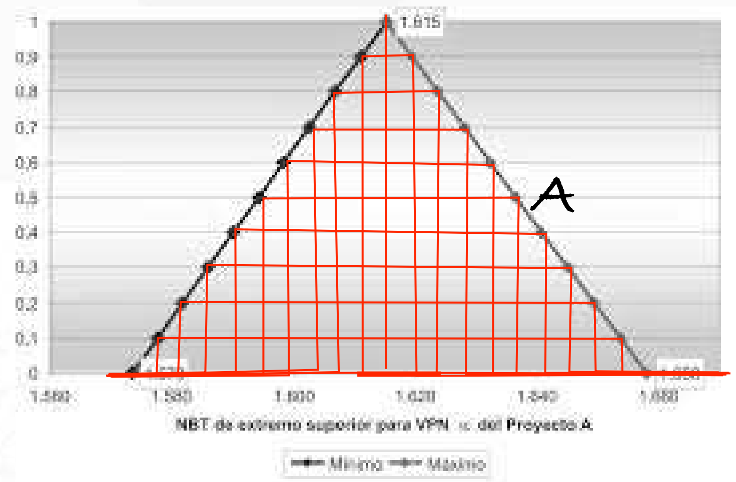
Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \geq \alpha,\ \alpha\ ;\ \text{en otro caso},\ 0],$$

entonces se verifica:

$$A = \sum_{\alpha \in L-\{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

$L = [0,1],\ E \subseteq \mathbb{R}$



Existe una versión "dual" del teorema anterior:

Teorema de representación II

Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A^*_\alpha + \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \leq \alpha,\ \alpha\ ;\ \text{en otro caso},\ 1],$$

entonces se verifica:

$$A = \prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

Representación de subconjuntos L-borrosos mediante α-cortes

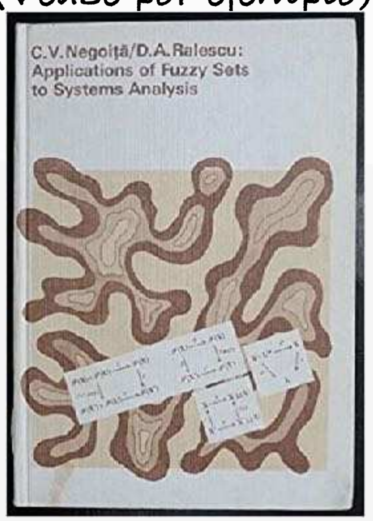
Para $\alpha \in L$, sea $\tilde{\alpha} \in L^E$ el subconjunto L-borroso constante de E tal que:

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha \qquad \forall x \in E$$

Si $\mathcal{M}$ es una familia o un subconjunto ordinario de L^E, $\sum \mathcal{M} \in L^E$ y $\prod \mathcal{M} \in L^E$ representarán respectivamente, (si existen), su unión L-borrosa (supremo en L^E) y su intersección L-borrosa (ínfimo en L^E).

Es conocido el siguiente:

(véase por ejemplo)



Teorema. (De representación)

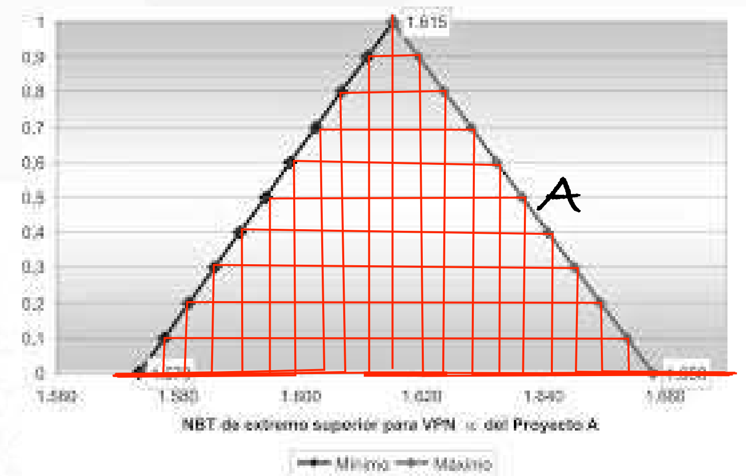
Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \geq \alpha,\ \alpha\ ; \ \text{en otro caso}, 0],$$

entonces se verifica:

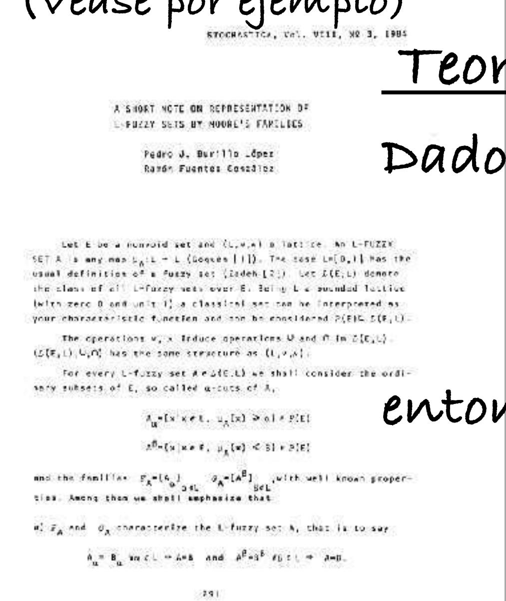
$$A = \sum_{\alpha \in L-\{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

$L = [0,1], E \subseteq \mathrm{R}$



Existe una versión "dual" del teorema anterior:

(véase por ejemplo)



Teorema de representación II

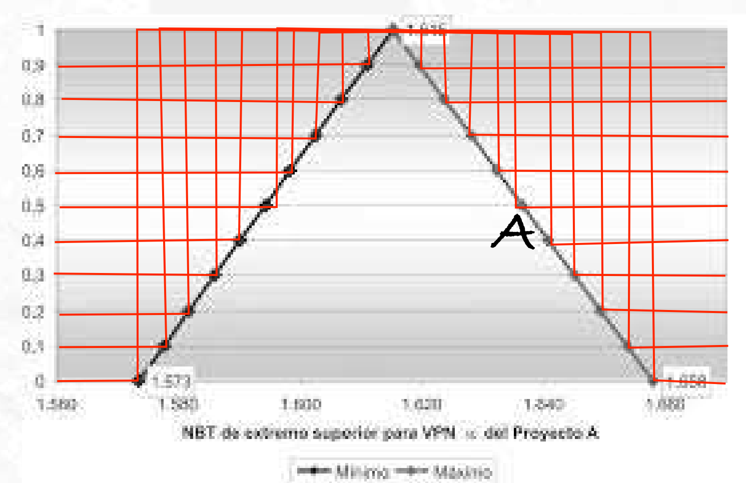
Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A^*_\alpha + \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que

$$(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \leq \alpha,\ \alpha\ ; \ \text{en otro caso}, 1],$$

entonces se verifica:

$$A = \prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

$L = [0,1], E \subseteq \mathrm{R}$



Nota1. Para cada $a \in L$, $\tilde{a} \in L^E$ representa el L-borroso constante tal que $\tilde{a}(x) = a \ \forall x \in E$. Si N es un nítido, $(N(E) \subseteq \{0,1\})$, $(N \cdot \tilde{a}) \in L^E$ y $(N + \tilde{a}) \in L^E$ son los L-borrosos tales que

$$(N \cdot \tilde{a})(x) = [\text{si } x \in N,\ a\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]\ \forall x \in E.$$

$$(N + \tilde{a})(x) = [\text{si } x \notin N,\ a\ ;\ \text{en otro caso},\ 1]\ \forall x \in E.$$

Nota2. Si $(A_k)_{k \in K}$ representa una familia de l-borrosos $A_k \in L^E$, entonces $\sum_{k \in K} A_k \in L^E$ y $\prod_{k \in K} A_k \in L^E$ representan respectivamente la unión (supremo) y la intersección (ínfimo) de esa familia en el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +)$.

Nota1. Para cada $\alpha \in L$, $\tilde{\alpha} \in L^E$ representa el L-borroso constante tal que $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \ \forall x \in E$.

Si N es un nítido, $(N(E) \subseteq \{0,1\})$, $(N \cdot \tilde{\alpha}) \in L^E$ y $(N + \tilde{\alpha}) \in L^E$ son los L-borrosos tales que

$$(N \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } x \in N,\ \alpha\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]\ \forall x \in E.$$

$$(N + \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } x \notin N,\ \alpha\ ;\ \text{en otro caso},\ 1]\ \forall x \in E.$$

Nota2. Si $(A_k)_{k \in K}$ representa una familia de l-borrosos $A_k \in L^E$, entonces $\sum\limits_{k \in K} A_k \in L^E$ y $\prod\limits_{k \in K} A_k \in L^E$ representan respectivamente la unión (supremo) y la intersección (ínfimo) de esa familia en el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +)$.

Teorema. (De representación)

Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que $(A_\alpha \cdot \tilde{\alpha})(x) = [\text{si } A(x) \geq \alpha,\ \alpha\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]$, entonces se verifica:

$$A = \sum_{\alpha \in L - \{0\}} (A_\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

Nota1. Para cada $a \in L$, $\tilde{a} \in L^E$ representa el L-borroso constante tal que $\tilde{a}(x) = a \ \forall x \in E$. Si N es un nítido, $(N(E) \subseteq \{0,1\})$, $(N \cdot \tilde{a}) \in L^E$ y $(N + \tilde{a}) \in L^E$ son los L-borrosos tales que

$$(N \cdot \tilde{a})(x) = [\text{si } x \in N,\ a\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]\ \forall x \in E.$$

$$(N + \tilde{a})(x) = [\text{si } x \notin N,\ a\ ;\ \text{en otro caso},\ 1]\ \forall x \in E.$$

Nota2. Si $(A_k)_{k \in K}$ representa una familia de l-borrosos $A_k \in L^E$, entonces $\sum_{k \in K} A_k \in L^E$ y $\prod_{k \in K} A_k \in L^E$ representan respectivamente la unión (supremo) y la intersección (ínfimo) de esa familia en el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +)$.

Teorema. (De representación)

Dados $A \in L^E$ y $a \in L$, si $A_a \cdot \tilde{a}$ es el L-borroso tal que $(A_a \cdot \tilde{a})(x) = [\text{si } A(x) \geq a,\ a\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]$, entonces se verifica:

$$A = \sum_{a \in L-\{0\}} (A_a \cdot \tilde{a}) \qquad \forall A \in L^E$$

Demostración. Sea $x \in E$ y $a > 0$. Si $A(x) \geq a$ entonces $(A_a \cdot \tilde{a})(x) = a \leq A(x)$ y si $A(z) \ngeq a$ entonces $(A_a \cdot \tilde{a})(z) = 0 \leq A(z)$, luego $A_a \cdot \tilde{a} \leq A \ \ \forall a \in L-\{0\}$ y $\sum_{a \in L-\{0\}} (A_a \cdot \tilde{a}) \leq A$.

Por otra parte, sea $x \in E$. Si $A(x) = 0$ evidentemente $A(x) \leq (\sum_{a \in L-\{0\}} (A_a \cdot \tilde{a}))(x)$; y si $A(x) > 0$ entonces $A(x) \in L-\{0\}$ y $(A_{A(x)} \cdot \widetilde{A(x)})(y) = [\text{si } A(y) \geq A(x),\ A(x)\ ;\ \text{en otro caso},\ 0]$, luego $(A_{A(x)} \cdot \widetilde{A(x)})(x) = A(x)$. En consecuencia, $A(x) \leq (\sum_{a \in L-\{0\}} (A_a \cdot \tilde{a}))(x) \ \ \forall x \in E$, es decir $A \leq \sum_{a \in L-\{0\}} (A_a \cdot \tilde{a})$. ∎

(Continúa)

(Continuación)

Teorema. (De representación II)

Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A^*_\alpha + \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que $(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) = $ [si $A(x) \leq \alpha$, α ; **en otro caso**, 1], entonces se verifica:

$$A = \prod_{\alpha \in L - \{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

(Continuación)

Teorema. (De representación II)

Dados $A \in L^E$ y $\alpha \in L$, si $A^*_\alpha + \tilde{\alpha}$ es el L-borroso tal que $(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) = $[si $A(x) \leq \alpha$, α ; **en otro caso,** 1], entonces se verifica:

$$A = \prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \qquad \forall A \in L^E$$

Demostración. Sea $x \in E$ y $\alpha > 0$. Si $A(x) \leq \alpha$ entonces $(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(x) = \alpha \geq A(x)$ y si $A(z) \not\leq \alpha$ entonces $(A^*_\alpha + \tilde{\alpha})(z) = 1 \geq A(z)$, luego $A \leq A^*_\alpha + \tilde{\alpha}$ $\forall \alpha \in L-\{1\}$ y $A \leq \prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha})$.

Por otra parte, sea $x \in E$. Si $A(x) = 1$ evidentemente $(\prod_{\alpha \in L-\{0\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}))(x) \leq A(x)$; y si $A(x) < 1$ entonces $A(x) \in L-\{1\}$ y $(A^*_{A(x)} + \widetilde{A(x)})(y) = $[si $A(y) \leq A(x)$, $A(x)$; **en otro caso,** 1], luego $A(x) = (A^*_{A(x)} + \widetilde{A(x)})(x)$. En consecuencia, $(\prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}))(x) \leq A(x)\ \forall x \in E$, es decir $\prod_{\alpha \in L-\{1\}} (A^*_\alpha + \tilde{\alpha}) \leq A$.∎

<u>Proposición</u>. Se verifica:

(1) $(A \leq B) \Leftrightarrow [(A_\alpha \subseteq B_\alpha)\ \forall \alpha \in L] \Leftrightarrow [(A^*_\alpha \subseteq B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L]$.

(2) $[\forall (A,B) \in (L^E)^2]$ & $(\forall \alpha \in L)$ se verifica: $(A \cdot B)_\alpha = (A_\alpha \cap B_\alpha)$, $(A+B)^*_\alpha = (A^*_\alpha \cup B^*_\alpha)$,

(3) $(A_\alpha \cup B_\alpha) \subseteq (A+B)_\alpha$, $(A \cdot B)^*_\alpha \subseteq (A^*_\alpha \cap B^*_\alpha)$ (estas dos últimas también igualdades: $(A_\alpha \cup B_\alpha) = (A+B)_\alpha$, $(A^*_\alpha \cap B^*_\alpha) = (A \cdot B)^*_\alpha$ si uno de los elementos A ó B es nítido o si el retículo L es una cadena).

Proposición. Se verifica:

(1) $(A \leq B) \Leftrightarrow [(A_\alpha \subseteq B_\alpha)\ \forall \alpha \in L] \Leftrightarrow [(A^*_\alpha \subseteq B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L]$.

(2) $[\forall (A,B) \in (L^E)^2]$ & $(\forall \alpha \in L)$ se verifica: $(A \cdot B)_\alpha = (A_\alpha \cap B_\alpha)$, $(A+B)^*_\alpha = (A^*_\alpha \cup B^*_\alpha)$,

(3) $(A_\alpha \cup B_\alpha) \subseteq (A+B)_\alpha$, $(A \cdot B)^*_\alpha \subseteq (A^*_\alpha \cap B^*_\alpha)$ (estas dos últimas también igualdades: $(A_\alpha \cup B_\alpha) = (A+B)_\alpha$, $(A^*_\alpha \cap B^*_\alpha) = (A \cdot B)^*_\alpha$ si uno de los elementos A ó B es nítido o si el retículo L es una cadena).

Demostración. (1) Si $(A \leq B)$ entonces, $\forall \alpha \in L$: $[(A(x) \geq \alpha) \Rightarrow B(x) \geq \alpha)]$&$[(B(x) \leq \alpha) \Rightarrow (A(x) \leq \alpha)]$, o lo que es equivalente $[(A(x) \geq \alpha) \Rightarrow B(x) \geq \alpha]$&$[(A(x) \not\leq \alpha \Rightarrow (B(x) \not\leq \alpha]$, es decir: $(x \in A_\alpha \Rightarrow x \in B_\alpha)$&$(x \in A^*_\alpha \Rightarrow x \in B^*_\alpha)$, que prueba que $(A \leq B) \Rightarrow [(A_\alpha \subseteq B_\alpha)$&$(A^*_\alpha \subseteq B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L]$.

Por otra parte, $[(A_\alpha \subseteq B_\alpha)\ \forall \alpha \in L] \Rightarrow [(E = A_{A(x)} \subseteq B_{A(x)})\ \forall x \in E]$, luego $[(E = B_{A(x)}\ \forall x \in E) \Rightarrow$ $\Rightarrow (B(x) \geq A(x)\ \forall x \in E) \Rightarrow (A \leq B)$.

Análogamente, $[(A^*_\alpha \subseteq B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L] \Rightarrow [(A^*_{B(x)} \subseteq B^*_{B(x)} = \emptyset)\ \forall x \in E] \Rightarrow [(A^*_{B(x)} = \emptyset)\ \forall x \in E] \Rightarrow$ $(x \notin A^*_{B(x)}\ \forall x \in E) \Rightarrow (A(x) \leq B(x)\ \forall x \in E) \Rightarrow (A \leq B)$.

(2) $(A \cdot B \leq A)$&$(A \cdot B \leq B) \Rightarrow (A \cdot B)_\alpha \subseteq (A_\alpha \cap B_\alpha)\ \forall \alpha \in L$. Si $x \in A_\alpha \cap B_\alpha$ entonces $(A(x) \geq \alpha)$&$(B(x) \geq \alpha)$, luego $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x) \geq \alpha$, es decir $x \in (A \cdot B)_\alpha$ que prueba que $(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq (A \cdot B)_\alpha$.

$(A \leq A+B)$&$(B \leq A+B) \Rightarrow (A^*_\alpha \cup B^*_\alpha) \subseteq (A+B)^*_\alpha\ \forall \alpha \in L$. Sea ahora $x \in (A+B)^*_\alpha$. Entonces $(A+B)(x) \not\leq \alpha$, luego $(A(x) \not\leq \alpha)$ ó $(B(x) \not\leq \alpha)$, es decir $x \in (A^*_\alpha \cup B^*_\alpha)$, que prueba la inclusión $(A+B)^*_\alpha \subseteq (A^*_\alpha \cup B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L$.

(3) $(A \leq A+B)$&$(B \leq A+B) \Rightarrow (A_\alpha \cup B_\alpha) \subseteq (A+B)_\alpha\ \forall \alpha \in L$. $(A \cdot B \leq A)$&$(A \cdot B \leq B) \Rightarrow (A \cdot B)^*_\alpha \subseteq (A^*_\alpha \cap B^*_\alpha)\ \forall \alpha \in L$.

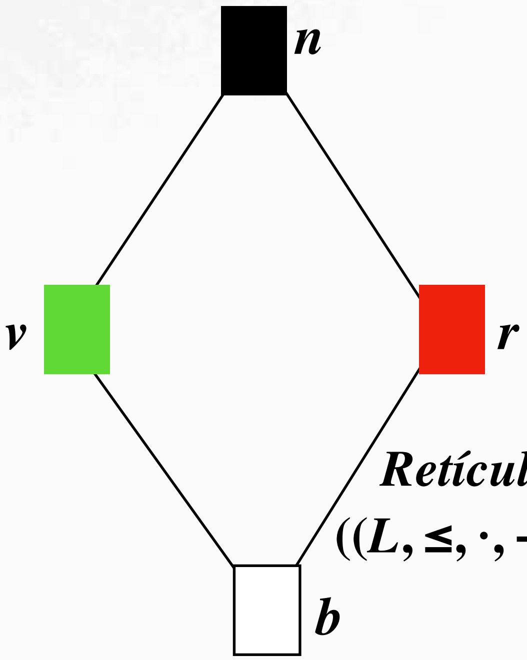
Supongamos que A es nítido. Si $\alpha = 0$: $E = (A+B)_0 = E \cup E = (A_0 \cup B_0)$. Si $\alpha > 0$ y si $x \in (A+B)_\alpha$ entonces $A(x) = 1$ ó $B(x) \geq \alpha$, es decir $x \in A_\alpha = A$ ó $x \in B_\alpha$, que prueba que $(A+B)_\alpha \subseteq (A_\alpha \cup B_\alpha)$.

También, si A es nítido, para $\alpha = 1$: $(A^*_1 \cap B^*_1) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset = (A \cdot B)^*_1$. Si $\alpha < 1$ y si $x \in (A^*_\alpha \cap B^*_\alpha)$ entonces $A(x) = A^*_\alpha(x) = 1$ y $B(x) \not\leq \alpha$, luego $(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x) = 1 \cdot B(x) = B(x) \not\leq \alpha$, que prueba que $x \in (A \cdot B)^*_\alpha$.

Sea L una cadena. Si $x \in (A+B)_\alpha$ entonces $\max(A(x), B(x)) \geq \alpha$, que implica $A(x) \geq \alpha$ ó $B(x) \geq \alpha$ y por tanto $x \in (A_\alpha \cup B_\alpha)$.

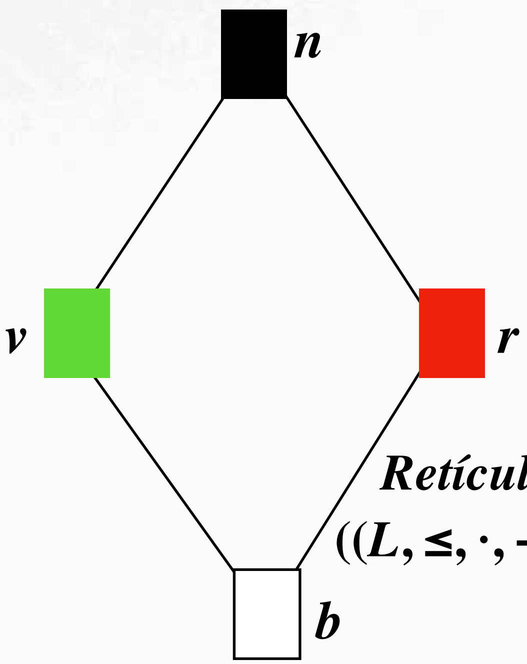
Si $x \in (A^*_\alpha \cap B^*_\alpha)$ entonces $(A(x) > \alpha)$&$(B(x) > \alpha)$, luego $\min(A(x), B(x)) > \alpha$, es decir $x \in (A \cdot B)^*_\alpha$. ∎

Ejemplo de familias de α-cortes y teoremas de representación para subconjuntos L-borrosos valorados en conjuntos L parcialmente ordenados



***Retículo con negación fuerte*:**

$((L, \leq, \cdot, +, b, n), {}'),\ \ \alpha' = \alpha^c\ \ \forall \alpha \in L$

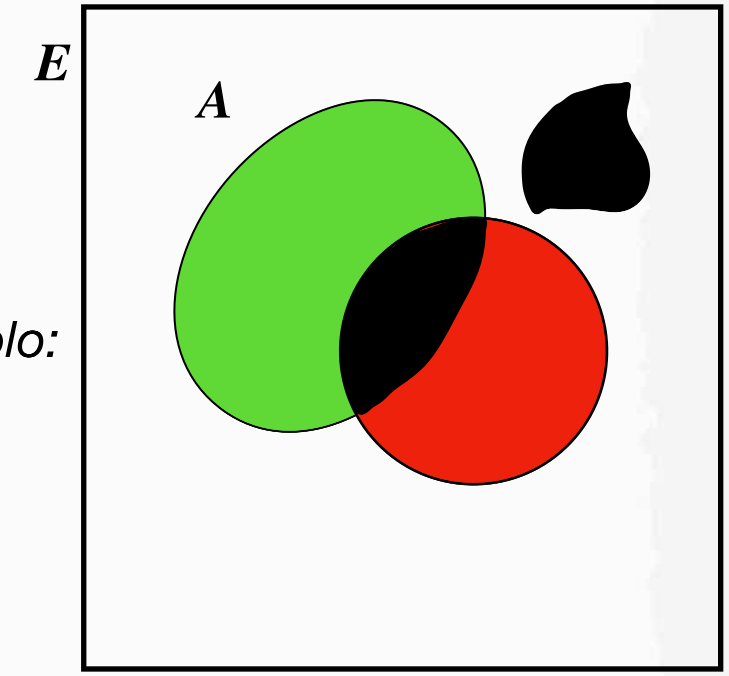


$E \subseteq R^2$

Subconjunto ***L****-borroso* ***A*** *de* ***E***

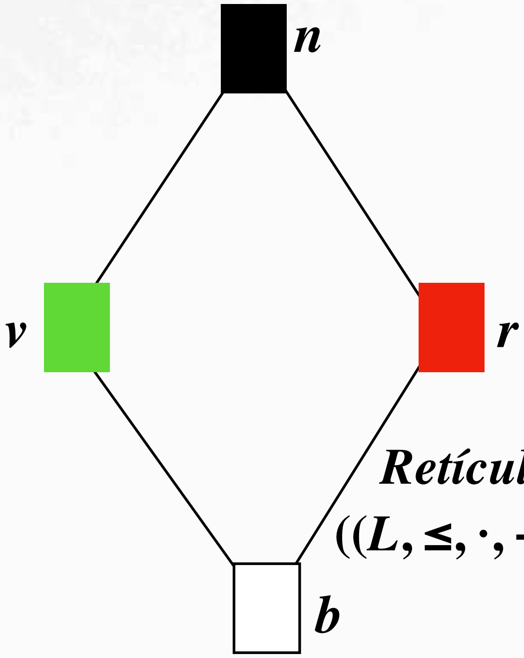
$\mathbf{A}: E \rightarrow L$

Ejemplo:



***Retículo con negación fuerte*:**

$((L, \leq, \cdot, +, b, n), ')$, $\alpha' = \alpha^c \ \forall \alpha \in L$

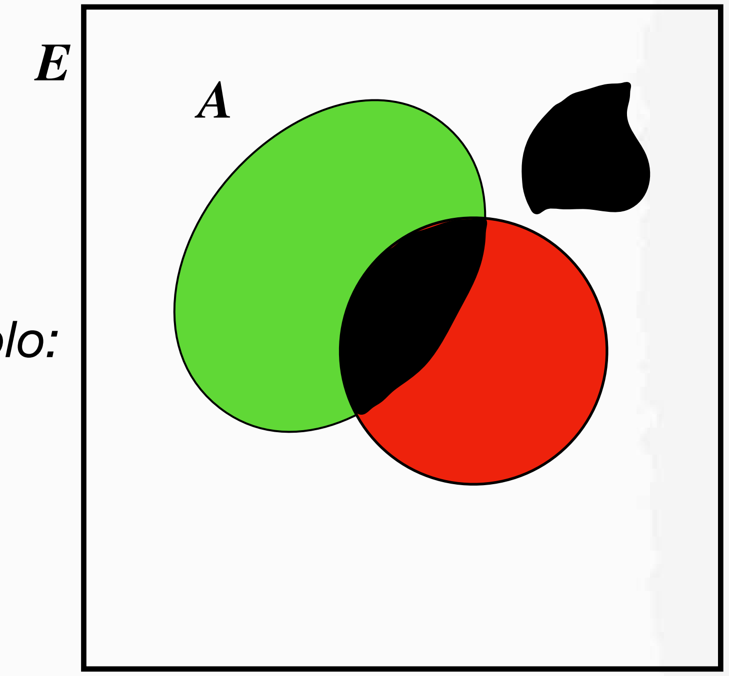


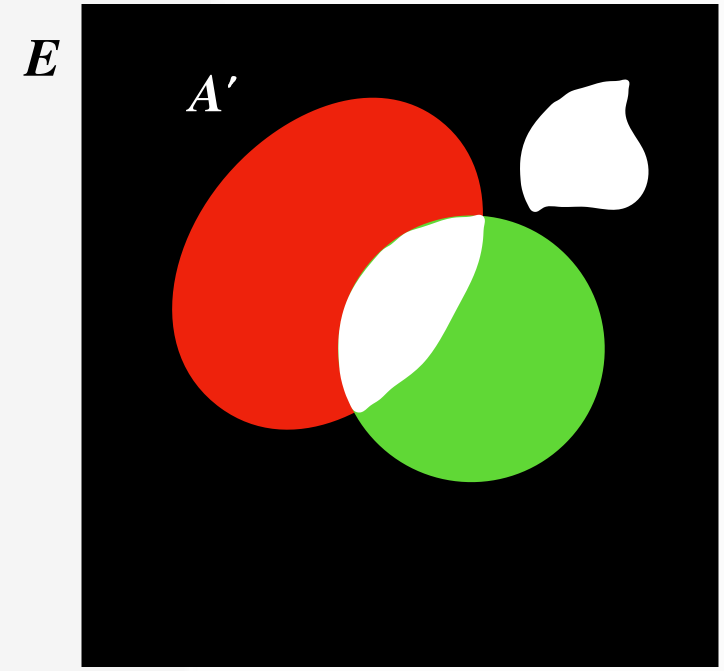
$E \subseteq R^2$

Subconjunto ***L****-borroso* ***A*** *de* ***E***

$\boldsymbol{A: E \rightarrow L}$

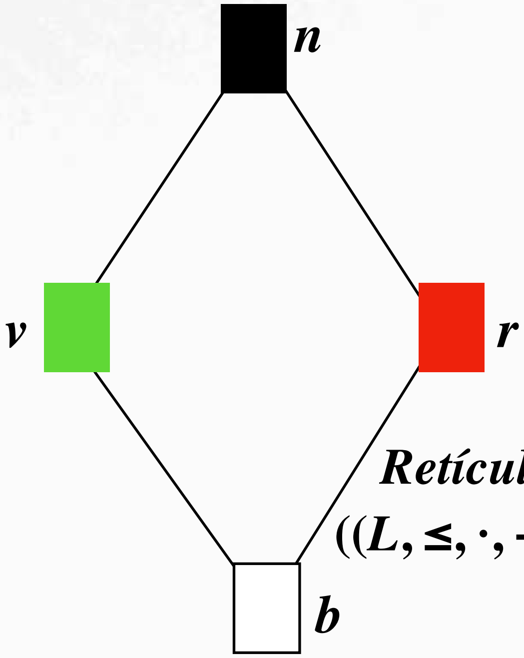
Ejemplo:





***Retículo con negación fuerte*:**

$((L, \leq, \cdot, +, b, n), ')$, $\alpha' = \alpha^c \;\forall \alpha \in L$



$E \subseteq R^2$

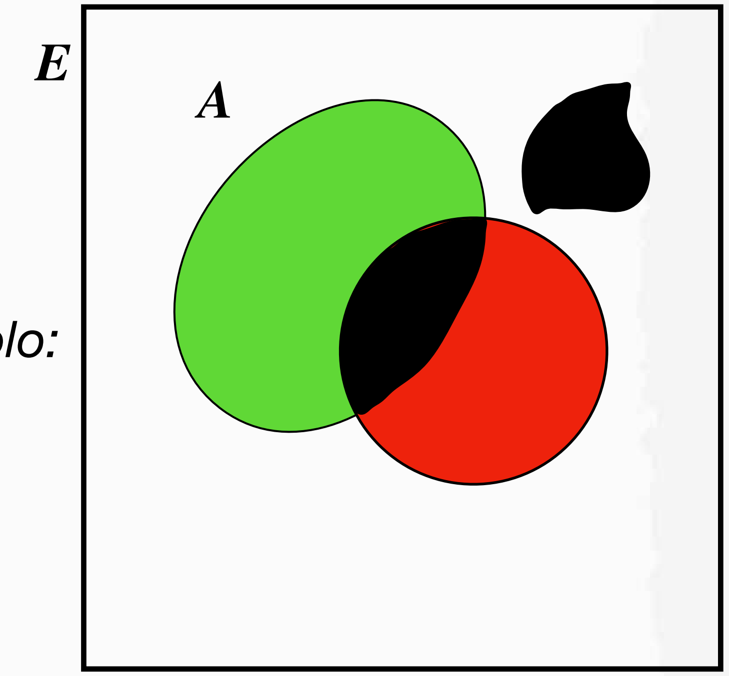
Subconjunto **L**-*borroso* **A** *de* **E**

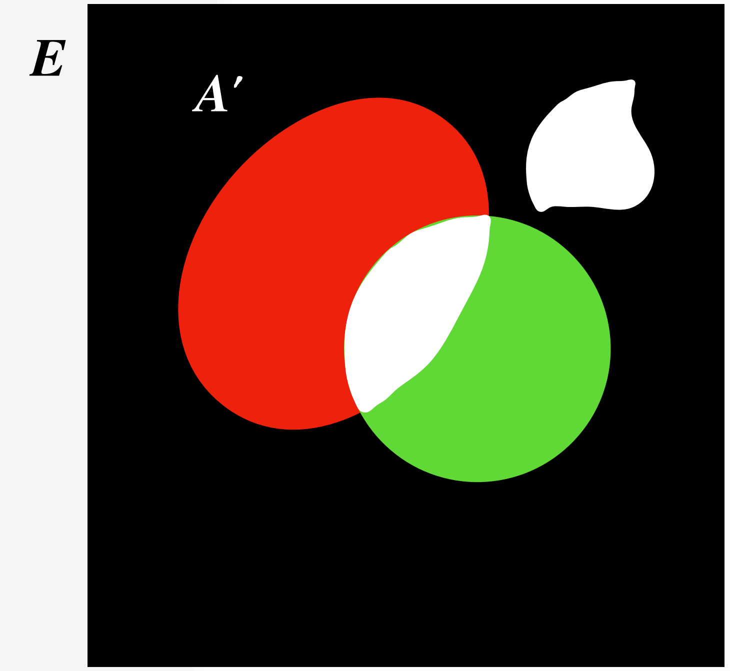
$$A: E \to L$$

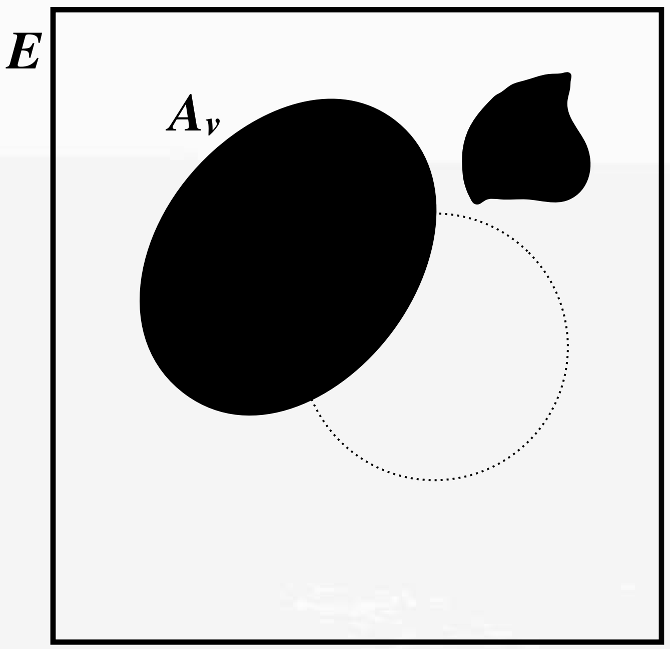
***Retículo con negación fuerte*:**

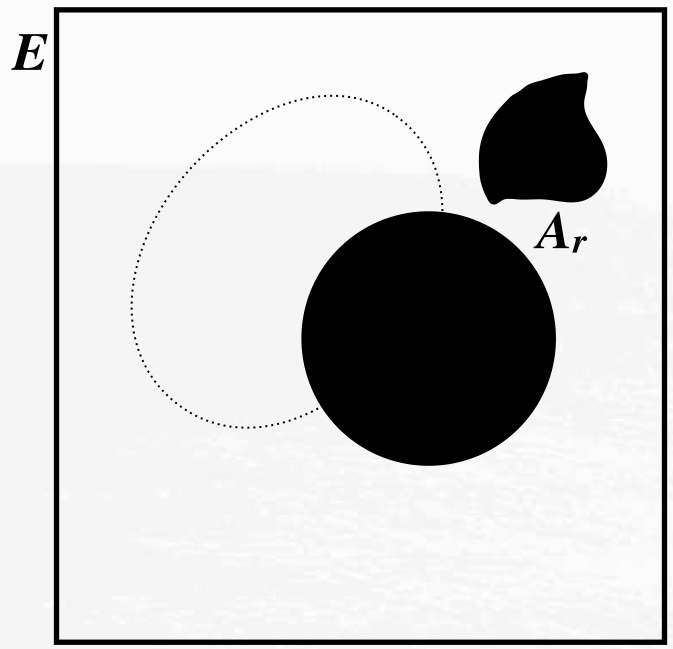
$((L, \leq, \cdot, +, b, n), ')$, $\alpha' = \alpha^c \ \forall \alpha \in L$

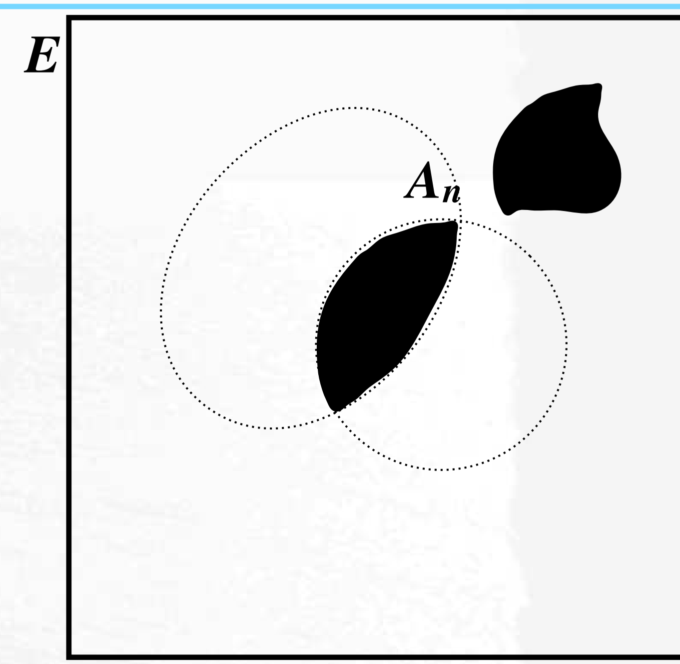
Ejemplo:









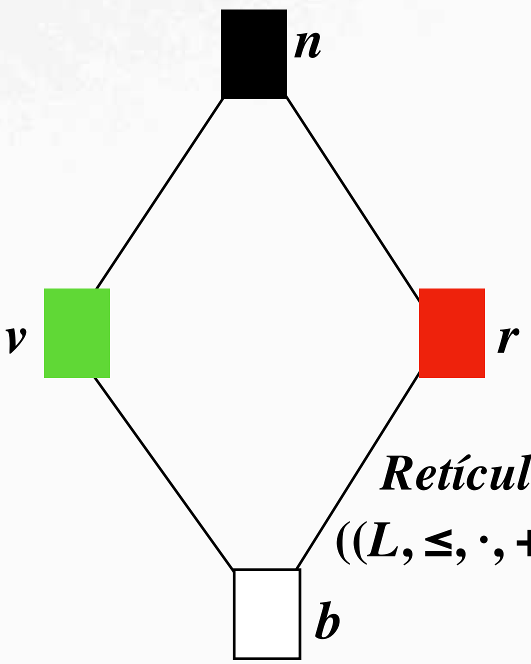


Familia de α-cortes

$(A_\alpha)_{\alpha \in L-\{b\}}$

$A_\alpha = \{\, x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \,\}$

$(\forall A: \ A_b = E)$



$E \subseteq R^2$

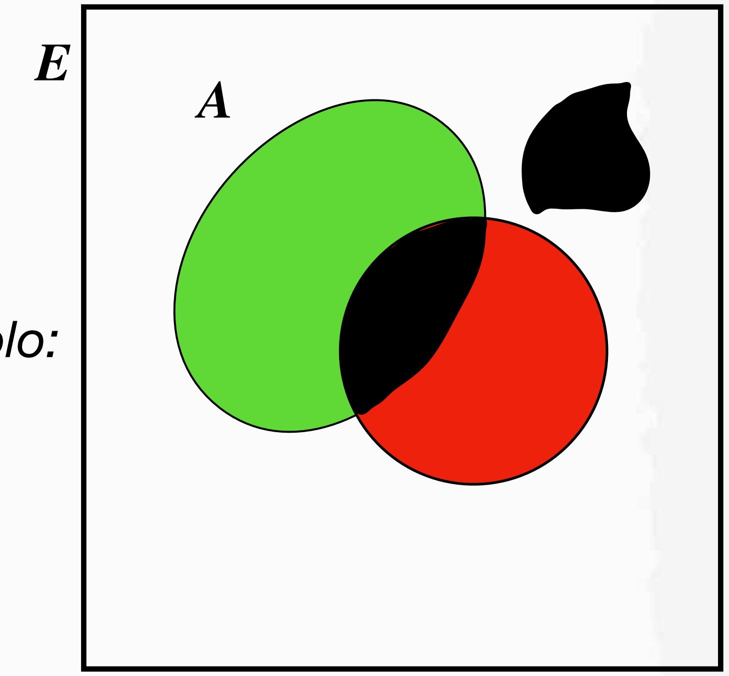
*Subconjunto **L**-borroso **A** de **E***

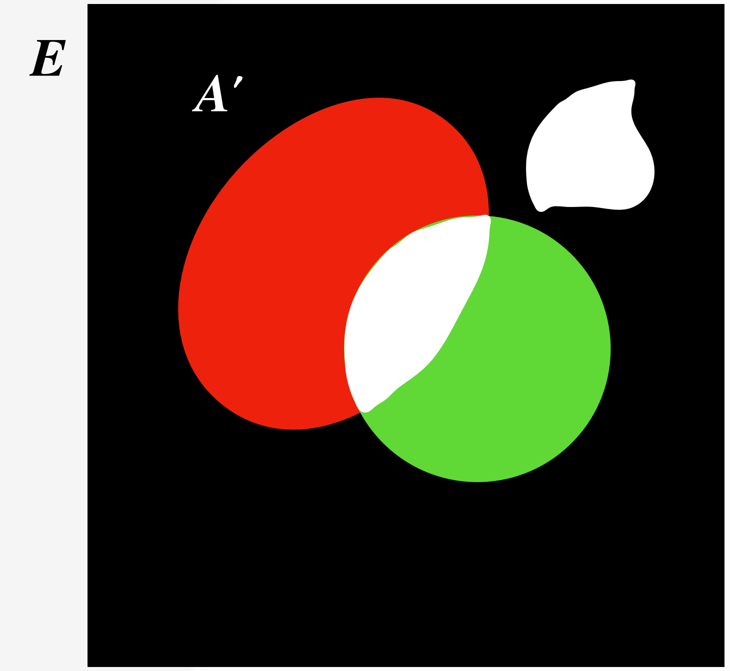
$A: E \rightarrow L$

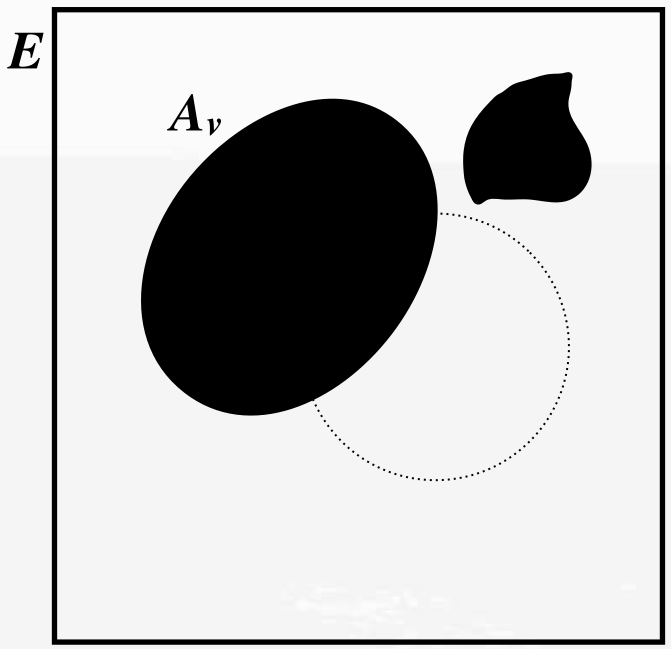
Retículo con negación fuerte:

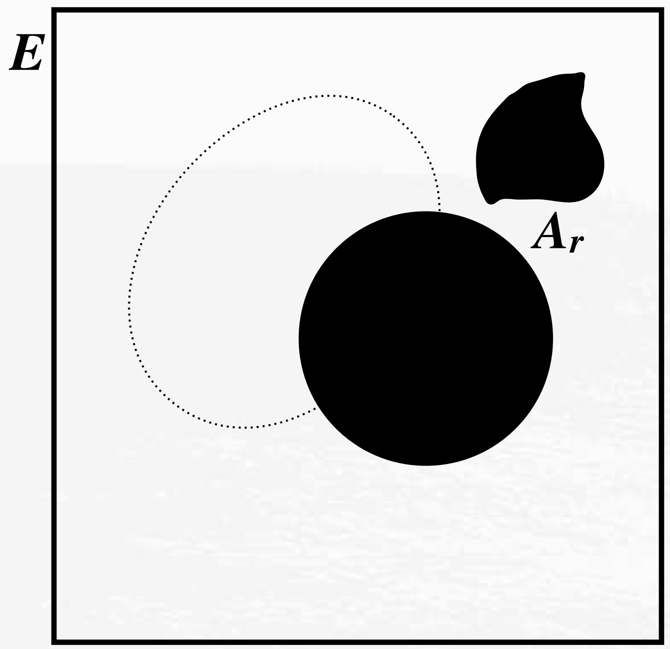
$((L, \leq, \cdot, +, b, n), ')$, $\alpha' = \alpha^c \ \forall \alpha \in L$

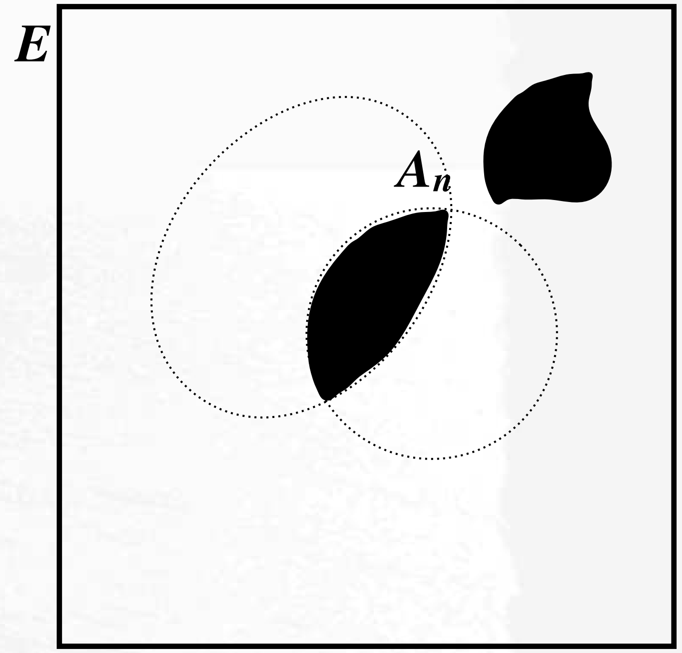
Ejemplo:











Familia de α-cortes

$(A_\alpha)_{\alpha \in L\text{-}\{b\}}$

$A_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$

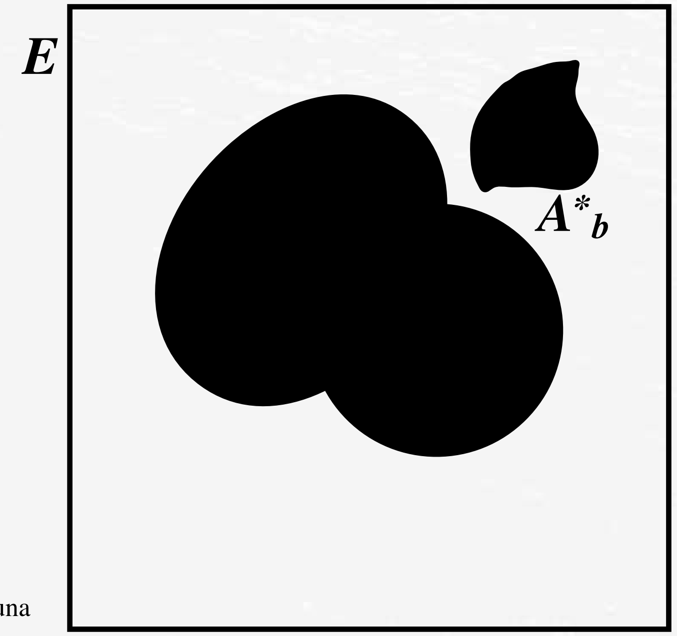
$(\forall A: \ A_b = E)$

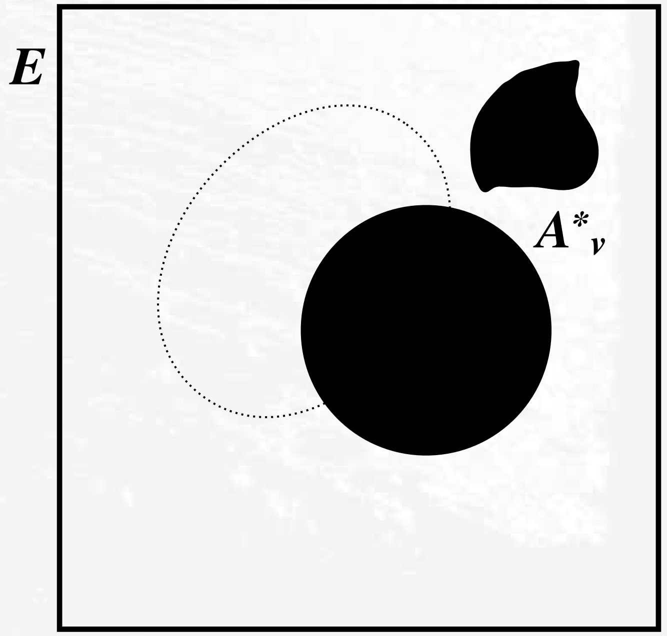
Familia de α-cortes "estrictos" (*)

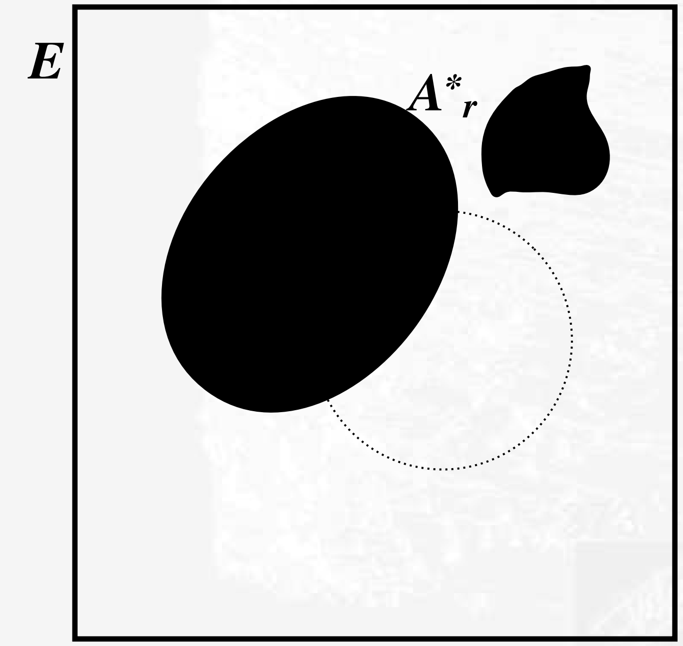
$(A^*{}_\alpha)_{\alpha \in L\text{-}\{n\}}$

$A^*{}_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \not\leq \alpha \}$

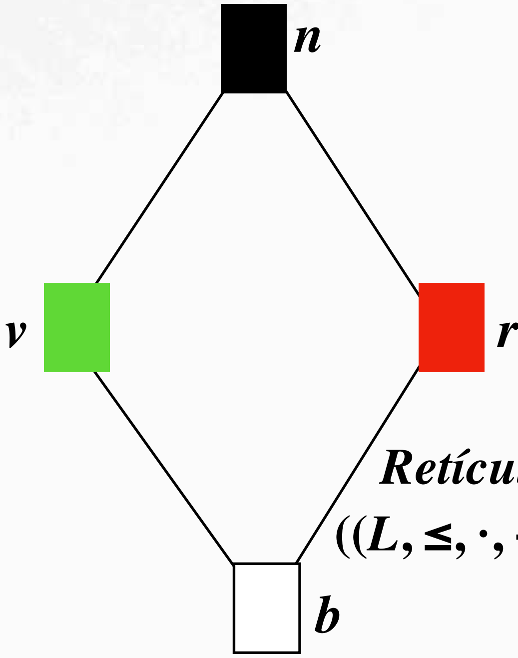
$(\forall A: \ A^*{}_n = \varnothing)$







(*) Véase la observación hecha en la Definición2 de una trasparencia anterior.



$E \subseteq R^2$

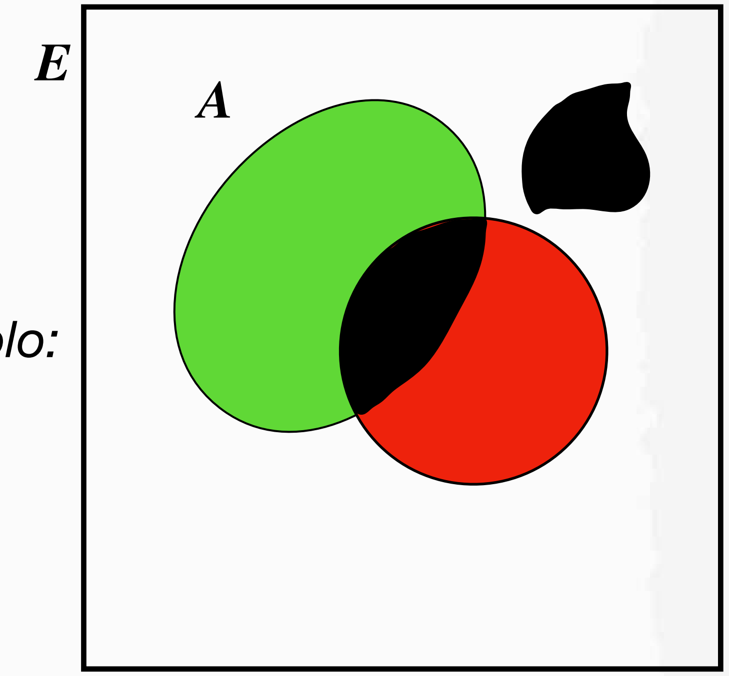
Subconjunto L-borroso A de E

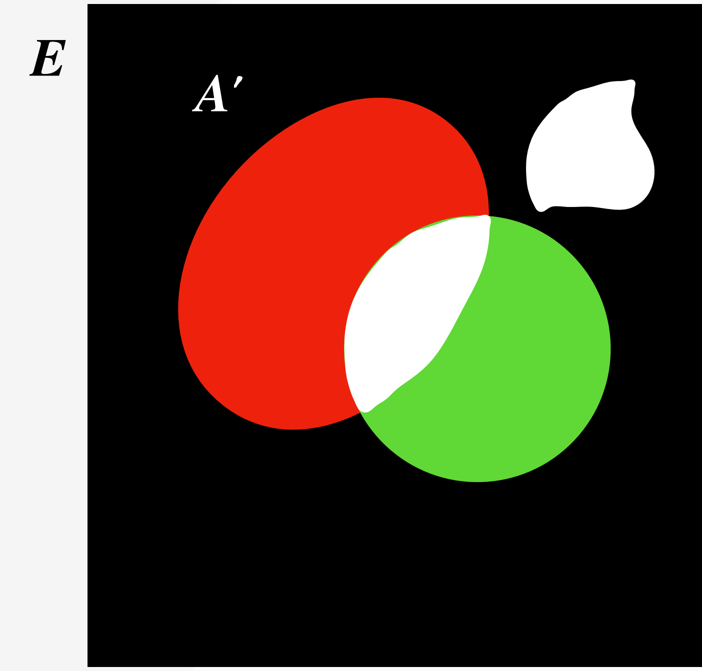
$A: E \rightarrow L$

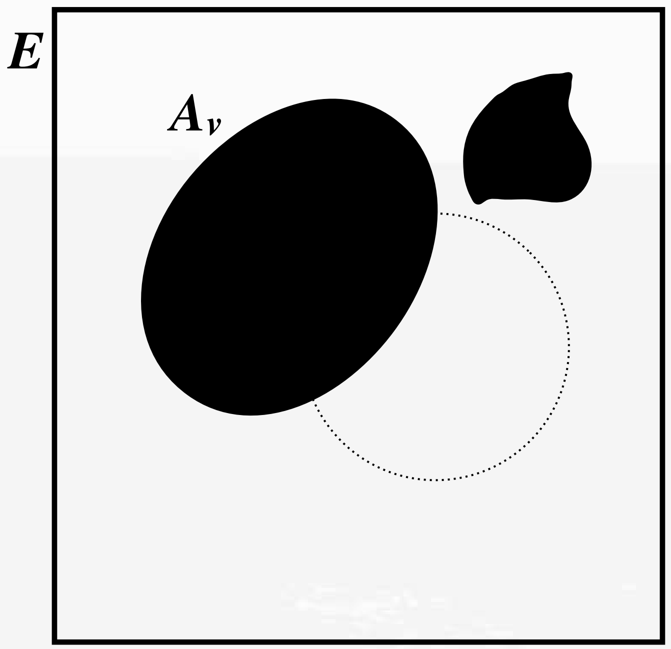
Retículo con negación fuerte:

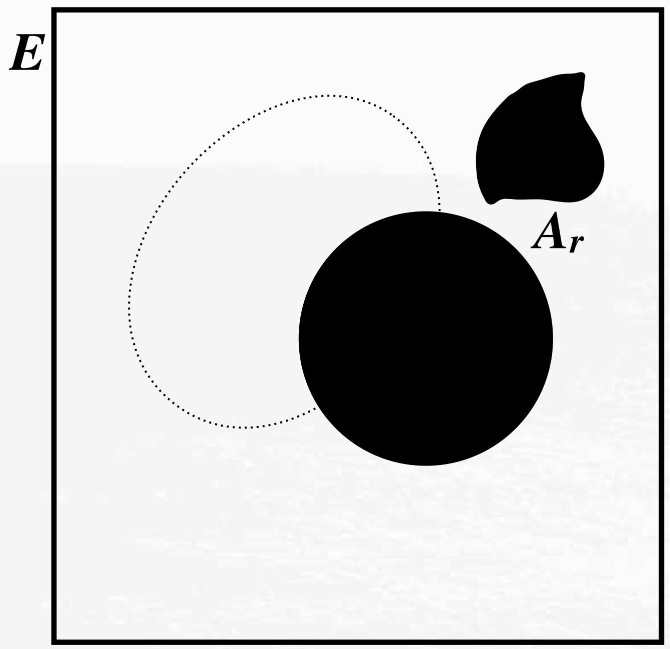
$((L, \leq, \cdot, +, b, n), {}')$, $\alpha' = \alpha^c \ \forall \alpha \in L$

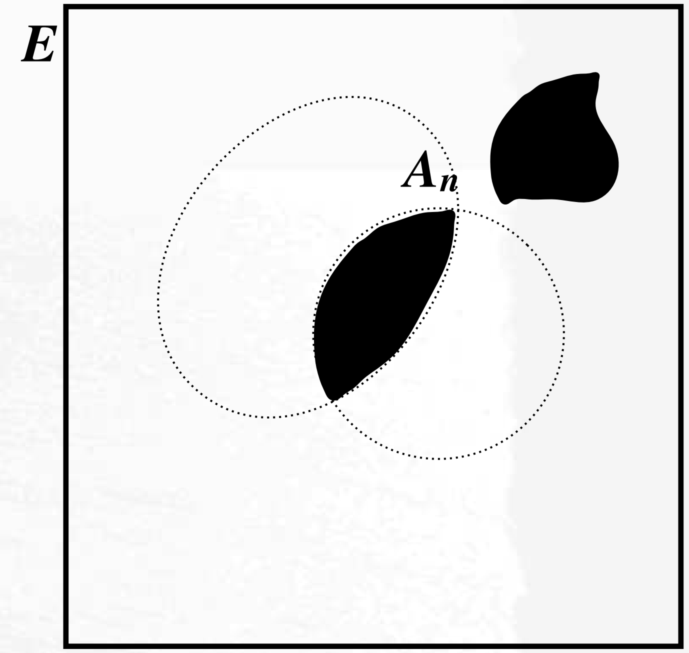
Ejemplo:









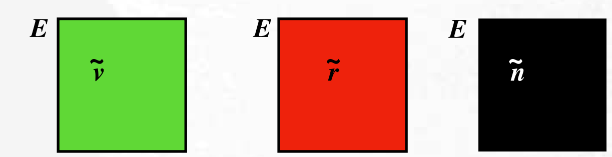


Familia de α-cortes

$(A_\alpha)_{\alpha \in L-\{b\}}$

$A_\alpha = \{\, x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \,\}$

$A = A_v \cdot \tilde{v} + A_r \cdot \tilde{r} + A_n \cdot \tilde{n}$

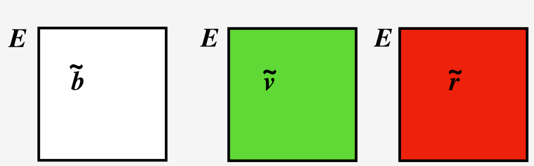


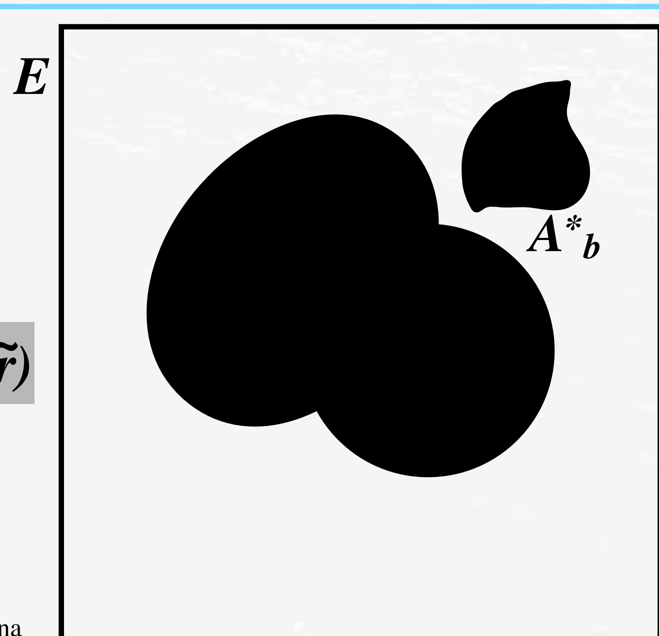
Familia de α-cortes "estrictos" (*)

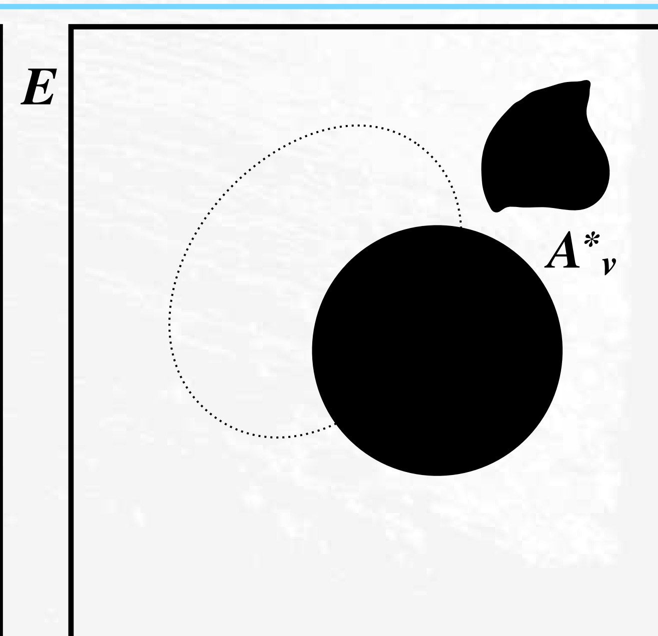
$(A^*_\alpha)_{\alpha \in L-\{n\}}$

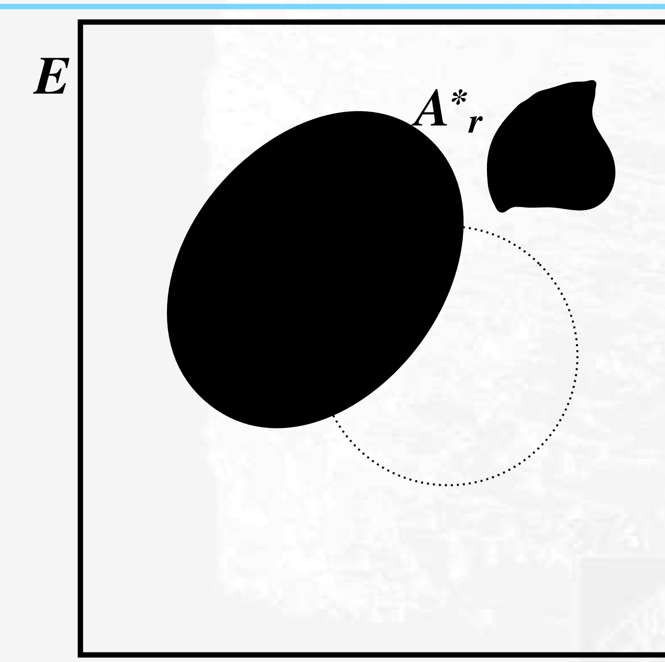
$A^*_\alpha = \{\, x \in E \ / \ A(x) \not\leq \alpha \,\}$

$A = (A^*_b + \tilde{b}) \cdot (A^*_v + \tilde{v}) \cdot (A^*_r + \tilde{r})$









(*) Véase la observación hecha en la Definición2 de una trasparencia anterior.

0. Preliminares

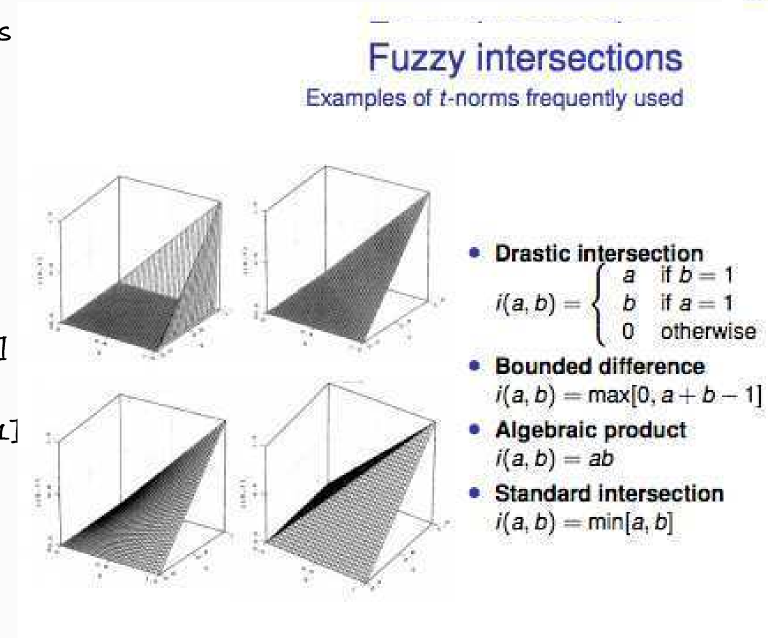
Uninormas y nulnormas en retículos. Su interpretación como intersecciones y uniones entre subconjuntos borrosos

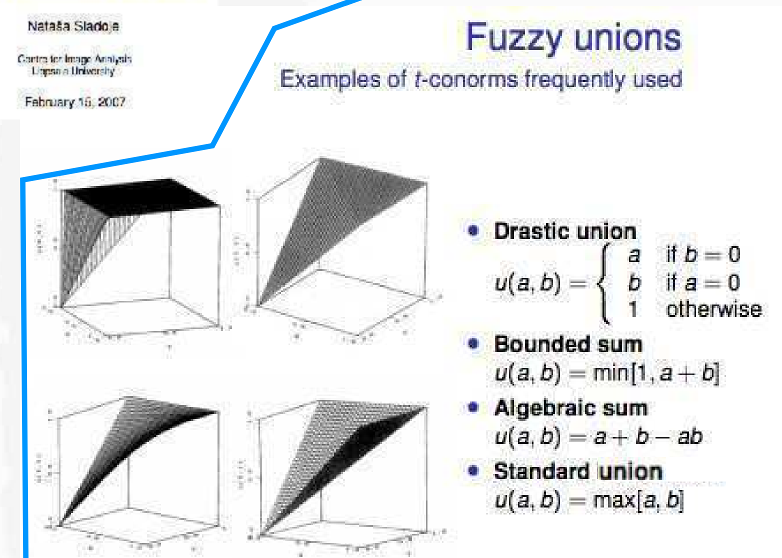
Las t-NORMAS en $([0,1],\leq)$ como generadores de intersección entre borrosos

Funciones T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- El elemento máximo 1 como elemento neutro: $T(x,1) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $T(x,z) \leq T(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$

(Las t-CONORMAS como “operadores duales”: son t-normas para el orden dual $\leq^d \equiv \geq$ en $[0,1]$, dónde aparecerá “0” como elemento neutro).





Sus “duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Nataša Sladoje

Centre for Image Analysis
Uppsala University

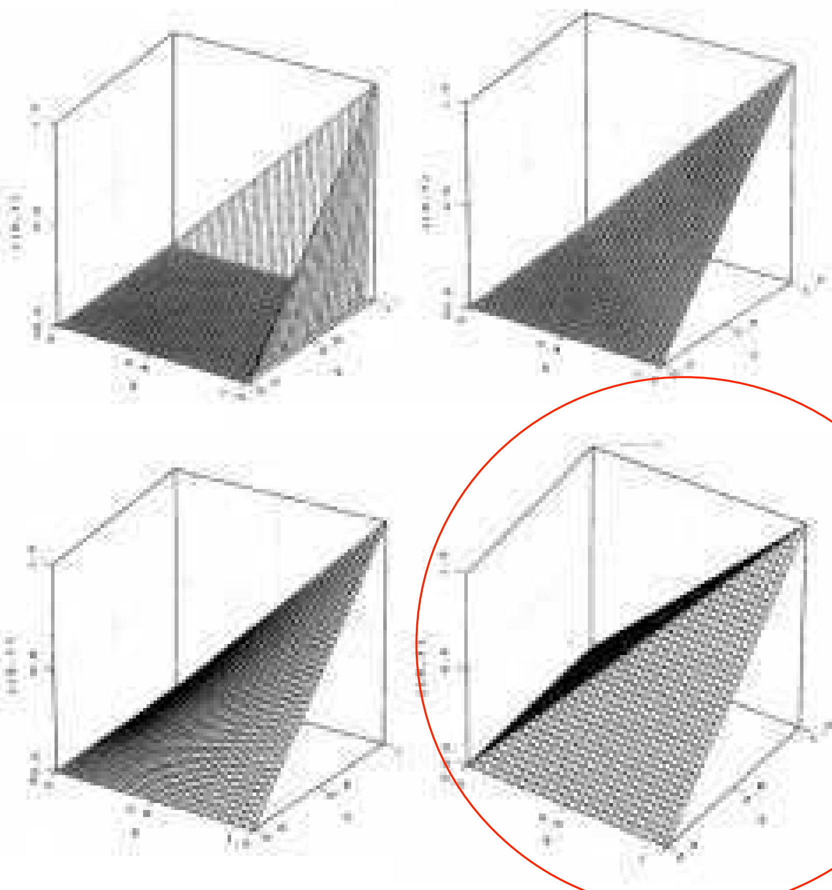
February 16, 2007

Fuzzy intersections

Examples of *t*-norms frequently used

i-Intersección borrosa:
$(A \cdot B)(x) = i(A(x), B(x)) \ \forall x \in E$

dual $\leq^d = \geq$

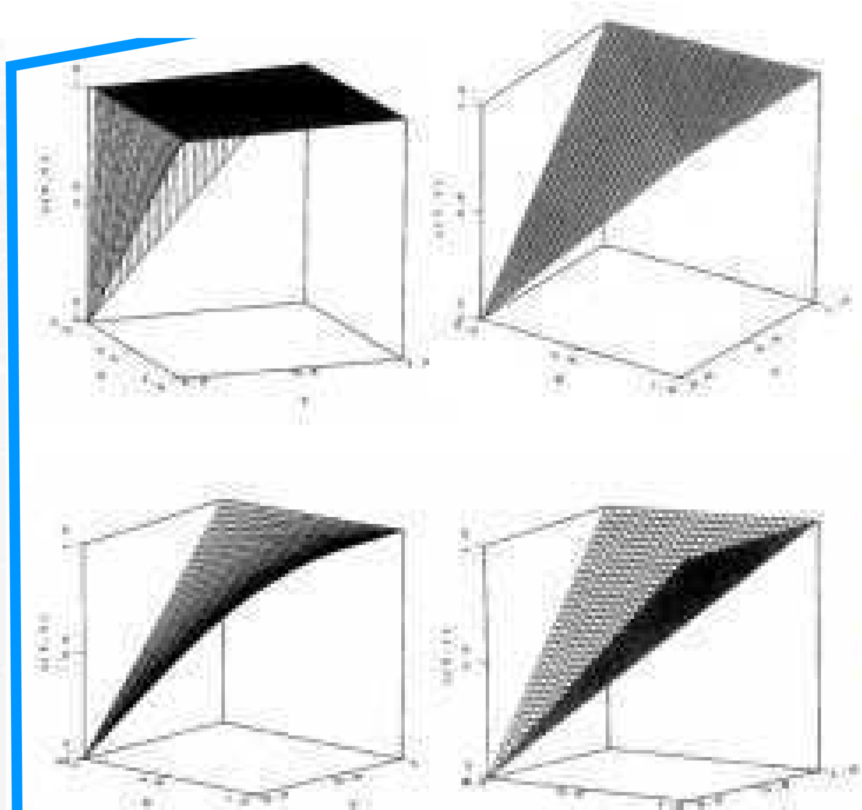


- **Drastic intersection**
$$i(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 1 \\ b & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
- **Bounded difference**
$i(a,b) = \max[0, a+b-1]$
- **Algebraic product**
$i(a,b) = ab$
- **Standard intersection**
$i(a,b) = \min[a,b]$

u-unión borrosa:
$(A+B)(x) = u(A(x), B(x)) \ \forall x \in E$

Fuzzy unions

Examples of *t*-conorms frequently used



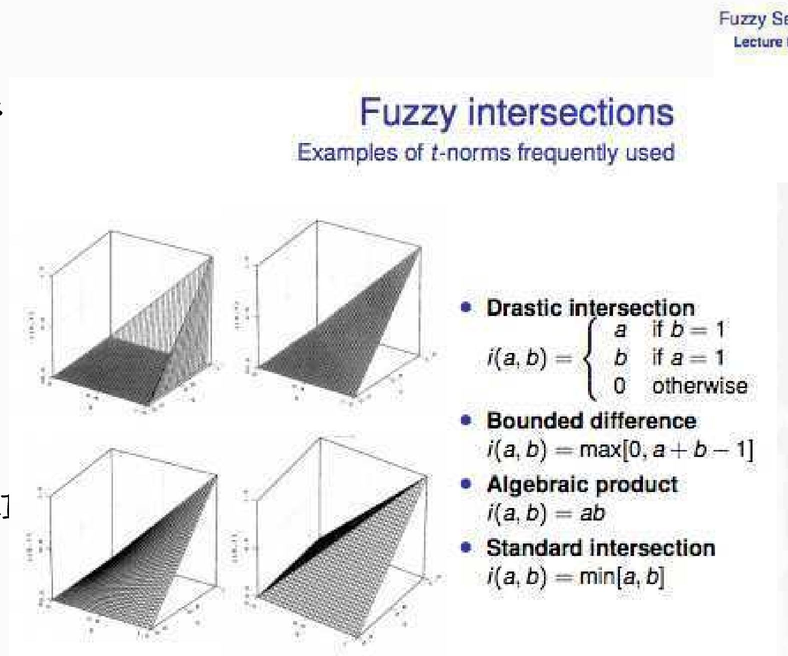
- **Drastic union**
$$u(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 0 \\ b & \text{if } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$
- **Bounded sum**
$u(a,b) = \min[1, a+b]$
- **Algebraic sum**
$u(a,b) = a+b-ab$
- **Standard union**
$u(a,b) = \max[a,b]$

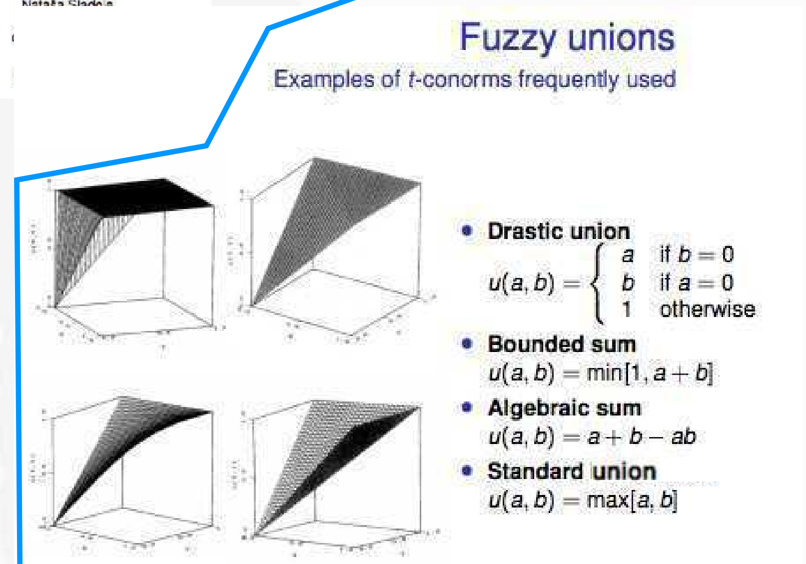
Las t-NORMAS en ([0,1],≤) como generadores de intersección entre borrosos

Funciones T: [0,1] x [0,1] → [0,1] que cumplen:

- Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- El elemento máximo 1 como elemento neutro: $T(x,1) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \le y$ entonces $T(x,z) \le T(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$

(Las t-CONORMAS como "operadores duales": son t-normas para el orden dual $\le^d \equiv \ge$ en [0,1], dónde aparecerá "0" como elemento neutro).



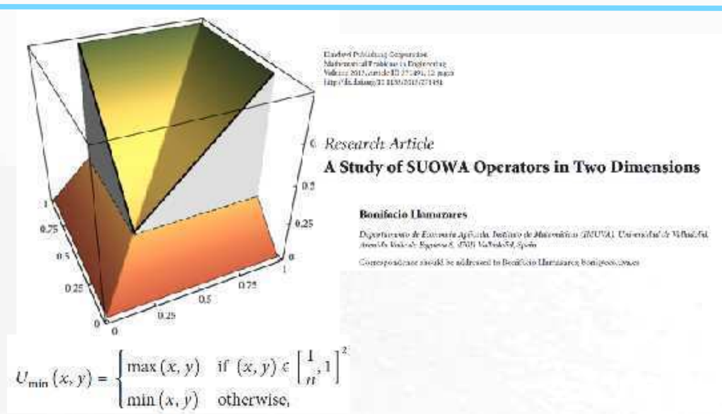


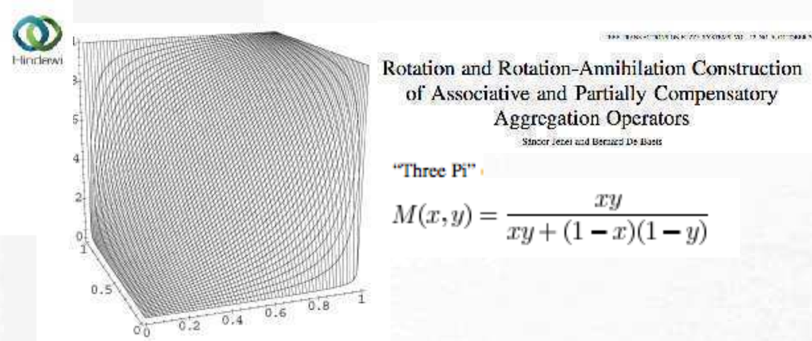
Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Generalizaciones:

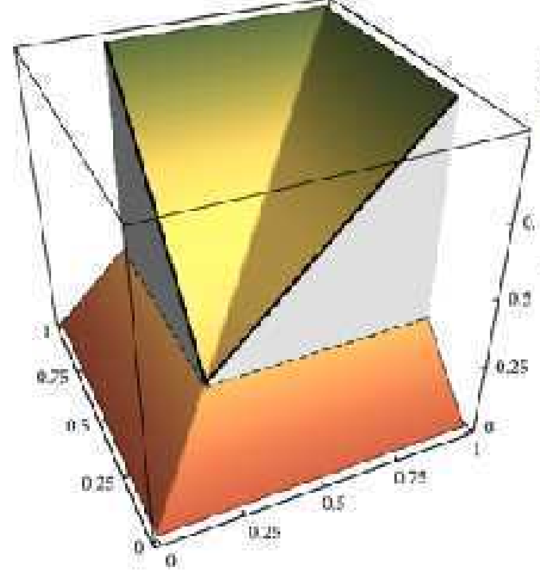
Las <u>UNINORMAS</u>: Funciones U: [0,1] x [0,1] → [0,1] que cumplen:

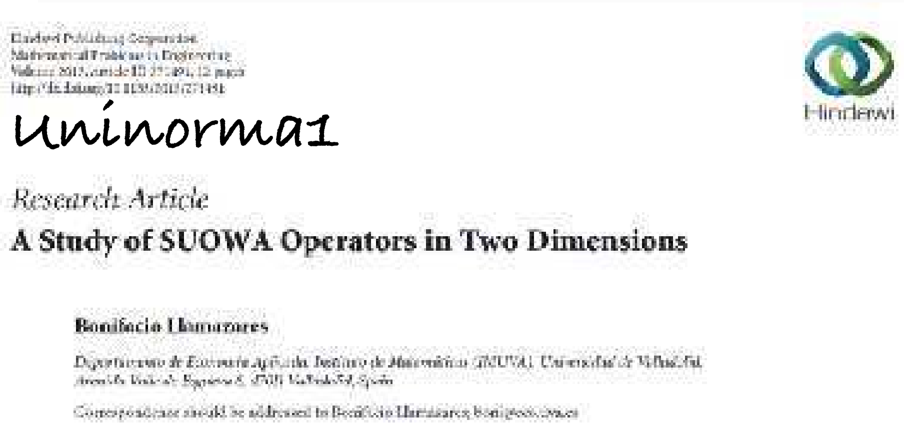
- Conmutatividad: $U(x,y) = U(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- Existencia de elemento neutro $e \in [0,1]$: $U(x,e) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \le y$ entonces $U(x,z) \le U(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$





YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.



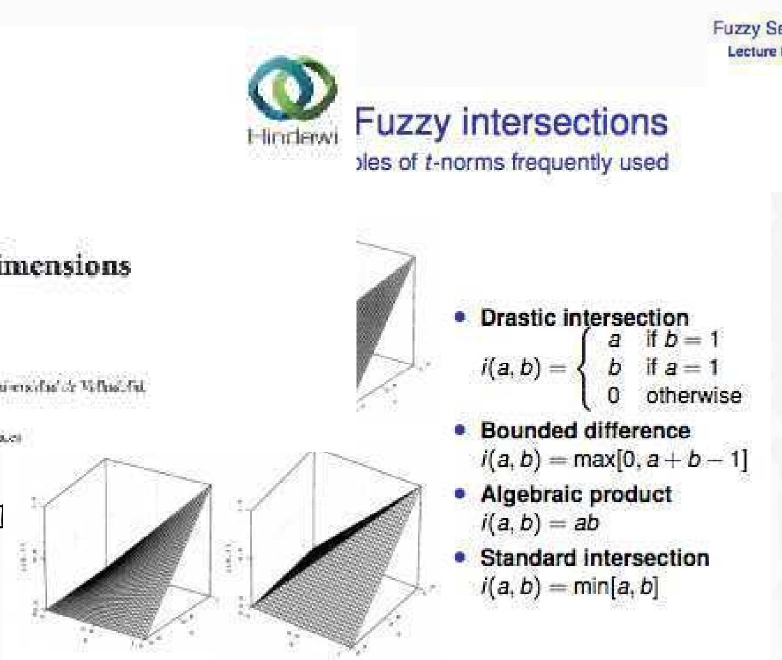


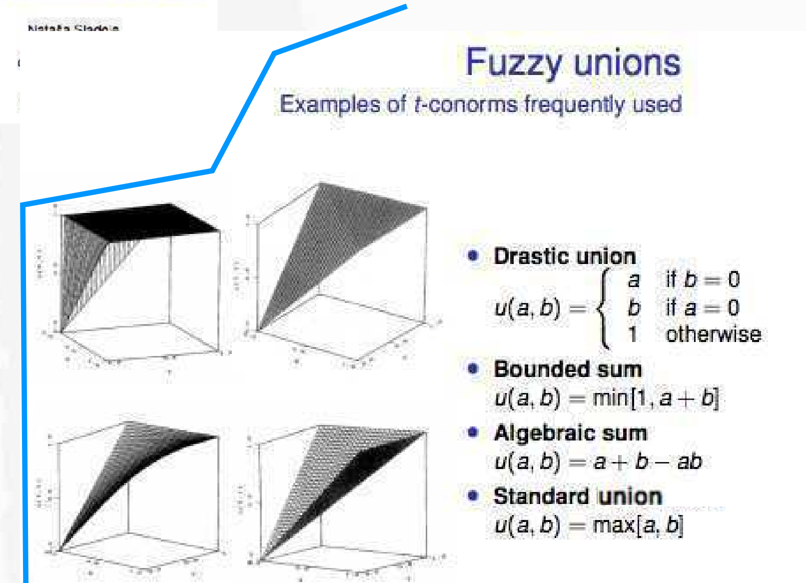
Uninorma1

…nces T(x,z) ≤ T(y,z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]

…uales": son t-normas para el orden … como elemento neutro).

$$U_{\min}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in\left[\frac{1}{n},1\right]^2\\ \min(x,y) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

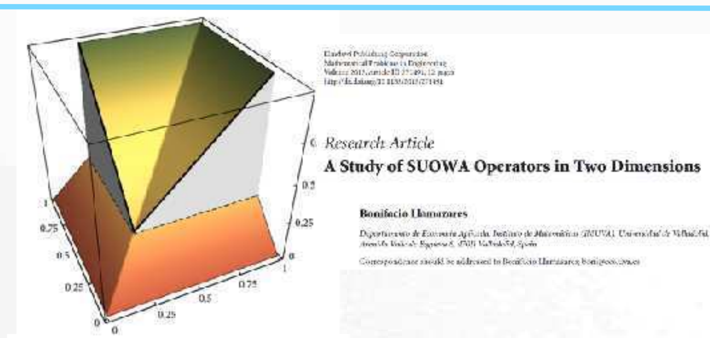




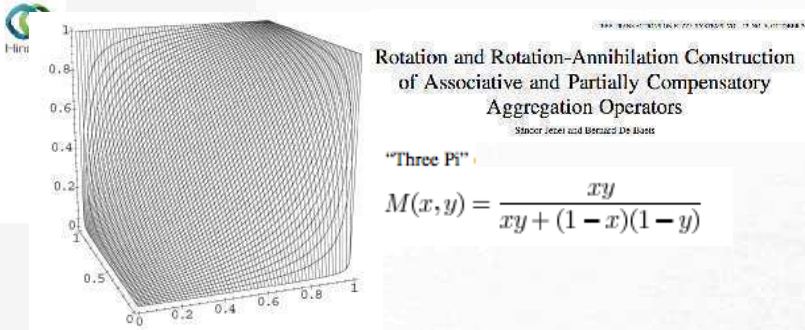
Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Las UNINORMAS: Funciones U: [0,1] x [0,1] → [0,1] que cumplen:

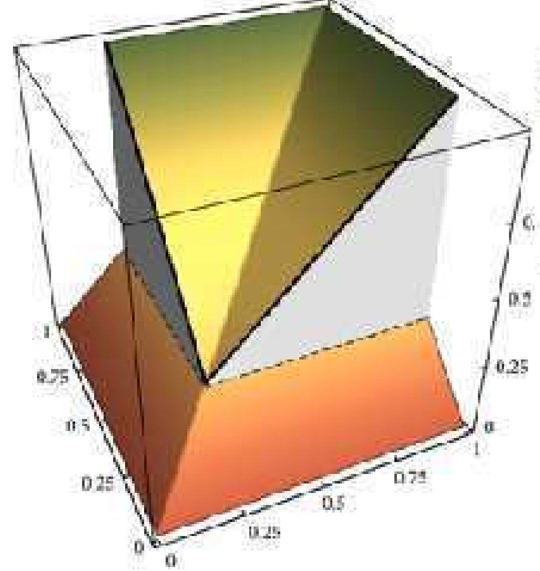
- Conmutatividad: U(x,y) = U(y,x) ∀ x, y ∈ [0,1]
- Asociatividad :U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]
- Existencia de elemento neutro e ∈ [0,1]: U(x,e) = x ∀ x ∈ [0,1]
- Monotonía creciente: si x ≤ y entonces U(x,z) ≤ U(y,z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]



$$U_{\min}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in\left[\frac{1}{n},1\right]^2\\ \min(x,y) & \text{otherwise,}\end{cases}$$



YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.



Hindawi Publishing Corporation
Mathematical Problems in Engineering
Volume 2015, Article ID 271491, 12 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2015/271491

Hindawi

Uninorma1

Research Article

A Study of SUOWA Operators in Two Dimensions

Bonifacio Llamazares

Departamento de Economía Aplicada, Instituto de Matemáticas (IMUVA), Universidad de Valladolid, Avenida Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid, Spain

Correspondence should be addressed to Bonifacio Llamazares; boni@eco.uva.es

...nces $T(x,z) \le T(y,z)$ $\forall$ x, y, z $\in [0,1]$

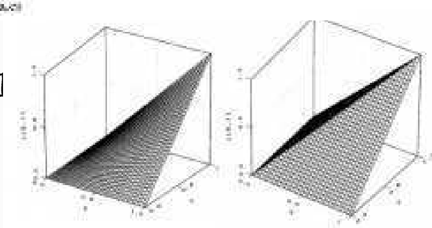
...uales": son t-normas para el orden
... como elemento neutro).

$$U_{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{if } (x,y) \in \left[\frac{1}{n},1\right]^2 \\ \min(x,y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques
Lecture 8 – Operations on Fuzzy Sets

Fuzzy intersections

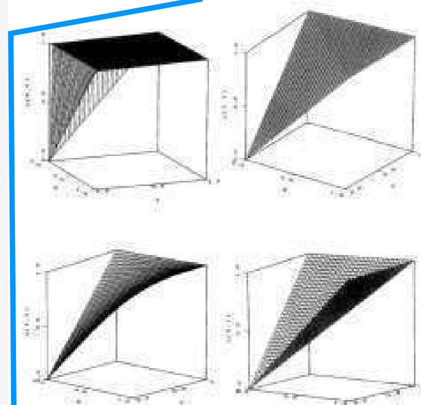
...les of *t*-norms frequently used



- **Drastic intersection**
  $i(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 1 \\ b & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- **Bounded difference**
  $i(a,b) = \max[0, a+b-1]$
- **Algebraic product**
  $i(a,b) = ab$
- **Standard intersection**
  $i(a,b) = \min[a,b]$

Fuzzy unions

Examples of *t*-conorms frequently used

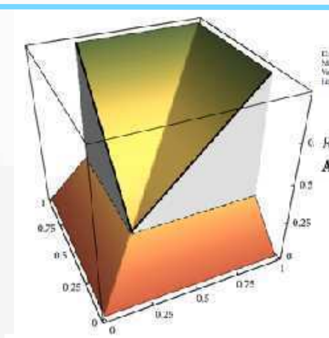


- **Drastic union**
  $u(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 0 \\ b & \text{if } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$
- **Bounded sum**
  $u(a,b) = \min[1, a+b]$
- **Algebraic sum**
  $u(a,b) = a+b-ab$
- **Standard union**
  $u(a,b) = \max[a,b]$

Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Las UNINORMAS: Funciones U: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $U(x,y) = U(y,x)$ $\forall$ x, y $\in [0,1]$
- Asociatividad: $U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z)$ $\forall$ x, y, z $\in [0,1]$
- Existencia de elemento neutro e $\in [0,1]$: $U(x,e) = x$ $\forall$ x $\in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \le y$ entonces $U(x,z) \le U(y,z)$ $\forall$ x, y, z $\in [0,1]$



Hindawi Publishing Corporation
Mathematical Problems in Engineering
Volume 2015, Article ID 271491, 12 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2015/271491

Hindawi

Research Article

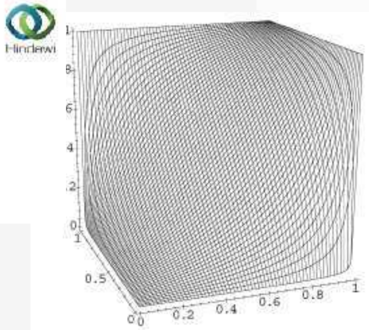
A Study of SUOWA Operators in Two Dimensions

Bonifacio Llamazares

Departamento de Economía Aplicada, Instituto de Matemáticas (IMUVA), Universidad de Valladolid, Avenida Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid, Spain

Correspondence should be addressed to Bonifacio Llamazares; boni@eco.uva.es

$$U_{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{if } (x,y) \in \left[\frac{1}{n},1\right]^2 \\ \min(x,y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$



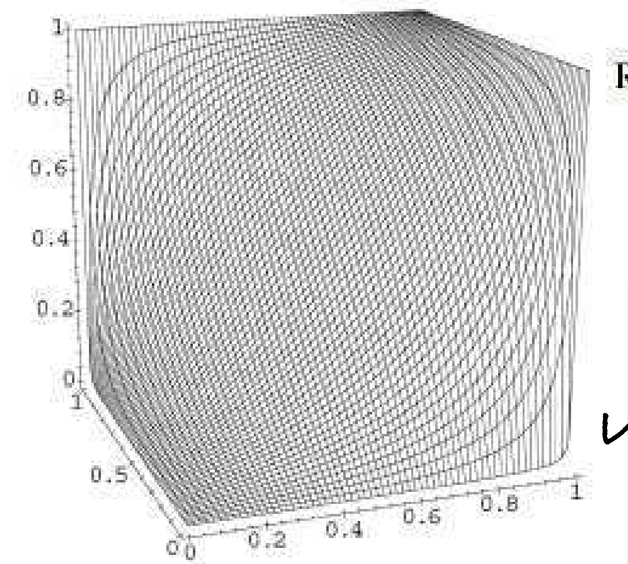
Rotation and Rotation-Annihilation Construction of Associative and Partially Compensatory Aggregation Operators

Sándor Jenei and Bernard De Baets

"Three Pi"

$$M(x,y) = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.



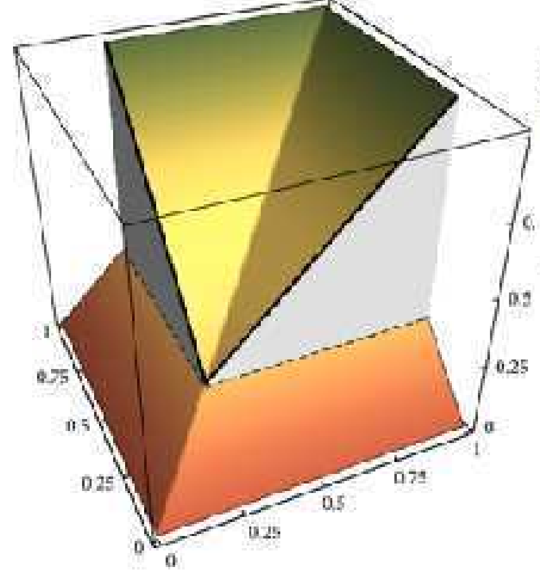
Rotation and Rotation-Annihilation Construction of Associative and Partially Compensatory Aggregation Operators

Sándor Jenei and Bernard De Baets

"Three Pi"

$$M(x,y) = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

Uninorma2



Hindawi Publishing Corporation
Mathematical Problems in Engineering
Volume 2013, Article ID 271491, 12 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2013/271491

Uninorma1

Research Article

A Study of SUOWA Operators in Two Dimensions

Bonifacio Llamazares

Departamento de Economía Aplicada, Instituto de Matemáticas (IMUVA), Universidad de Valladolid, Avenida Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid, Spain

Correspondence should be addressed to Bonifacio Llamazares; boni@eco.uva.es

...nces T(x,z) ≤ T(y,z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]

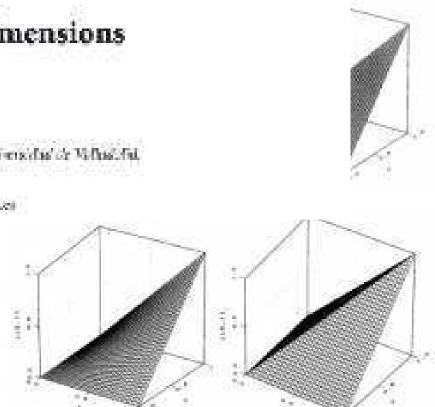
...uales": son t-normas para el orden
... como elemento neutro).

$$U_{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{if } (x,y) \in \left[\frac{1}{n},1\right]^2 \\ \min(x,y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques
Lecture 8 – Operations on Fuzzy Sets

Fuzzy intersections

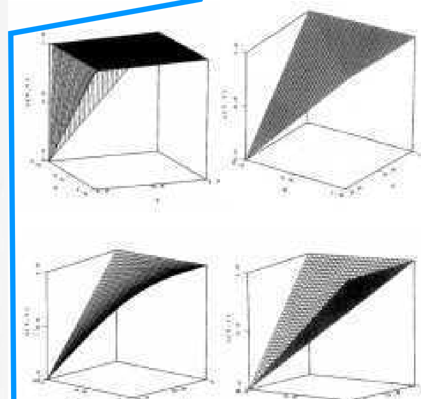
...ples of *t*-norms frequently used



- **Drastic intersection**
  $i(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 1 \\ b & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- **Bounded difference**
  $i(a,b) = \max[0, a+b-1]$
- **Algebraic product**
  $i(a,b) = ab$
- **Standard intersection**
  $i(a,b) = \min[a,b]$

Fuzzy unions

Examples of *t*-conorms frequently used

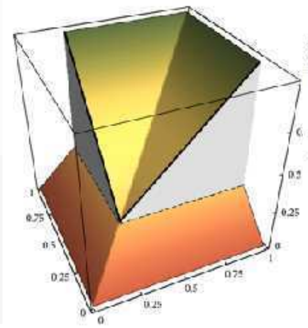


- **Drastic union**
  $u(a,b) = \begin{cases} a & \text{if } b = 0 \\ b & \text{if } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$
- **Bounded sum**
  $u(a,b) = \min[1, a+b]$
- **Algebraic sum**
  $u(a,b) = a + b - ab$
- **Standard union**
  $u(a,b) = \max[a,b]$

Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Las <u>UNINORMAS</u>: Funciones U: [0,1] x [0,1] → [0,1] que cumplen:

- Conmutatividad: U(x,y) = U(y,x) ∀ x, y ∈ [0,1]
- Asociatividad :U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]
- Existencia de elemento neutro e ∈ [0,1]: U(x,e) = x ∀ x ∈ [0,1]
- Monotonía creciente: si x ≤ y entonces U(x,z) ≤ U(y,z) ∀ x, y, z ∈ [0,1]



Hindawi Publishing Corporation
Mathematical Problems in Engineering
Volume 2013, Article ID 271491, 12 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2013/271491

Research Article

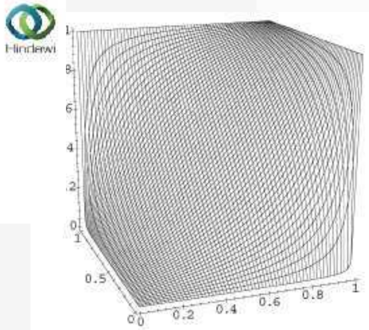
A Study of SUOWA Operators in Two Dimensions

Bonifacio Llamazares

Departamento de Economía Aplicada, Instituto de Matemáticas (IMUVA), Universidad de Valladolid, Avenida Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid, Spain

Correspondence should be addressed to Bonifacio Llamazares; boni@eco.uva.es

$$U_{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{if } (x,y) \in \left[\frac{1}{n},1\right]^2 \\ \min(x,y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$



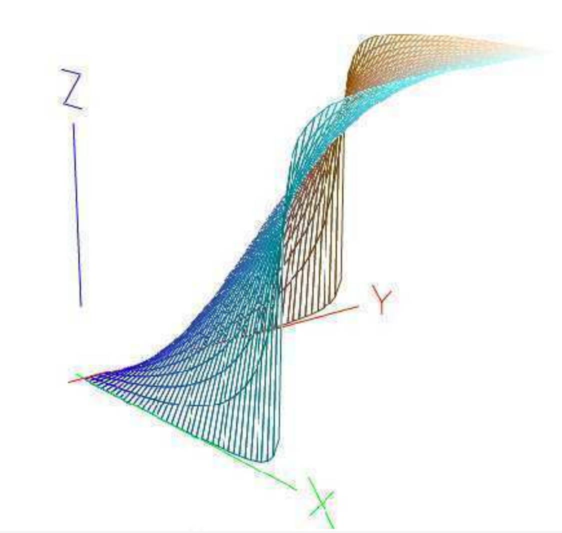
Rotation and Rotation-Annihilation Construction of Associative and Partially Compensatory Aggregation Operators

Sándor Jenei and Bernard De Baets

"Three Pi"

$$M(x,y) = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.



IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS

Rotation and Rotation-Annihilation Construction of Associative and Partially Compensatory Aggregation Operators

Sándor Jenei and Bernard De Baets

"Three Pi"

$$M(x,y) = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

Uninorma2

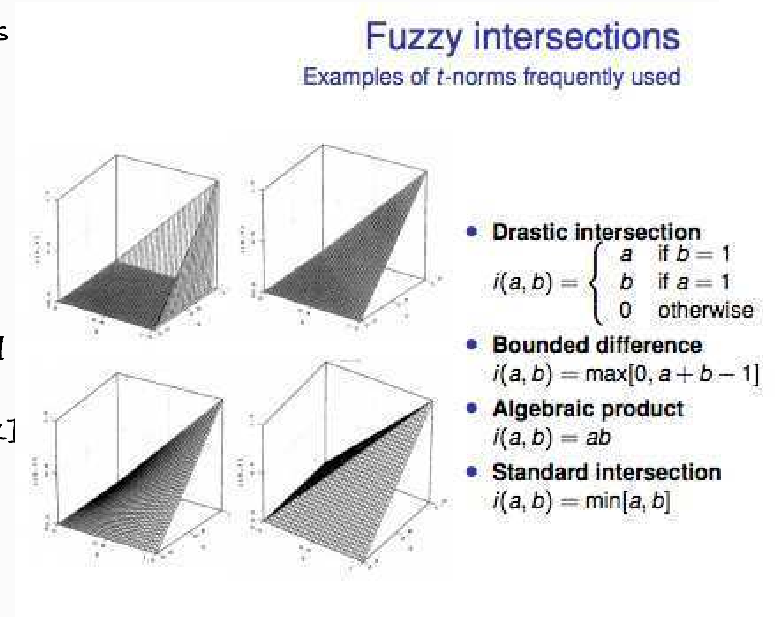
Las t-NORMAS en $([0,1],\leq)$ como generadores de intersección entre borrosos

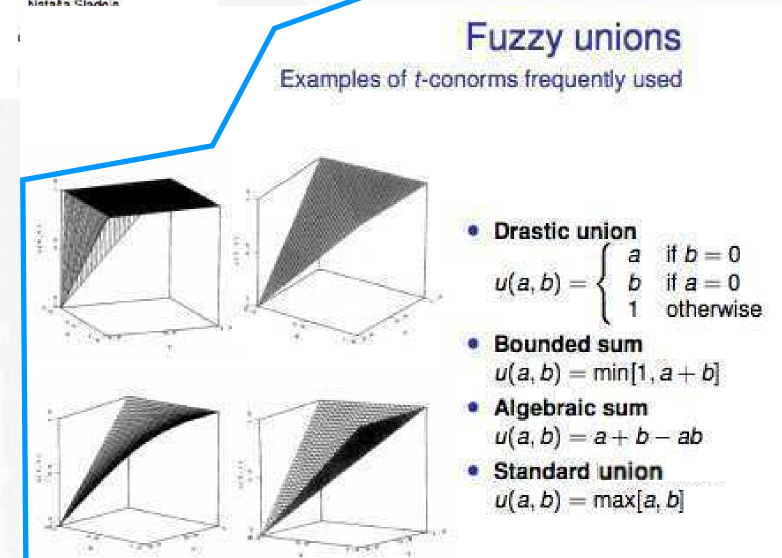
Funciones $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- El elemento máximo 1 como elemento neutro: $T(x,1) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $T(x,z) \leq T(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$

(Las t-CONORMAS como "operadores duales": son t-normas para el orden dual $\leq^d \equiv \geq$ en $[0,1]$, dónde aparecerá "0" como elemento neutro).

Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques
Lecture 8 – Operations on Fuzzy Sets



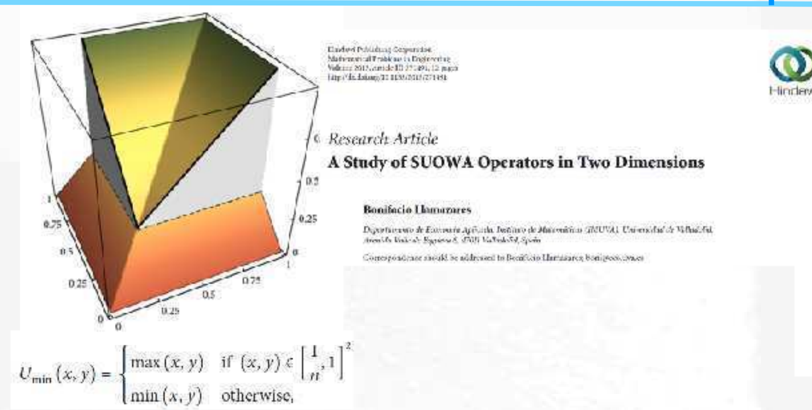


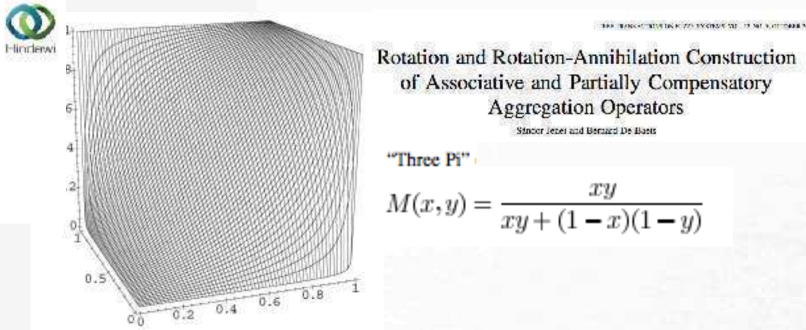
Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Generalizaciones:

Las UNINORMAS: Funciones $U: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $U(x,y) = U(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- Existencia de elemento neutro $e \in [0,1]$: $U(x,e) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $U(x,z) \leq U(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$

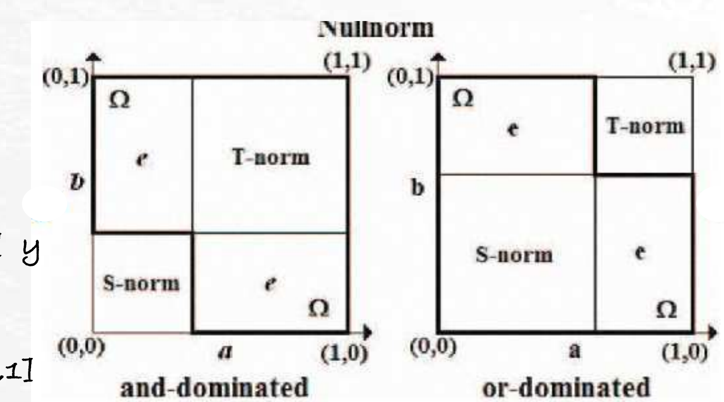




YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.

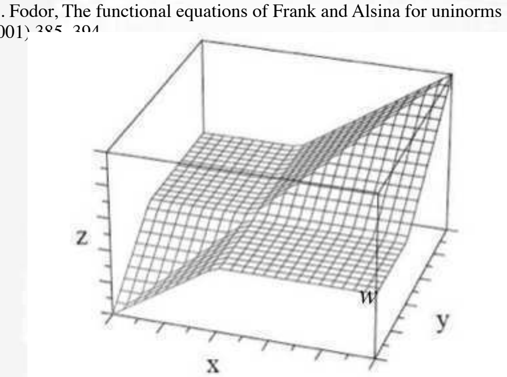
Las NULNORMAS: Funciones $N: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $N(x,y) = N(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $N(x,N(y,z)) = N(N(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- Existencia de elemento absorbente $k \in [0,1]$: $N(x,k) = k \quad \forall\, x \in [0,1]$ y $(N(0,x) = x$ si $x \leq k)$ & $(N(1,x) = x$ si $x \geq k)$.
- Monótona creciente: si $x \leq y$ entonces $N(x,z) \leq N(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$



Alternative realizations of nullnorms

T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 385–394



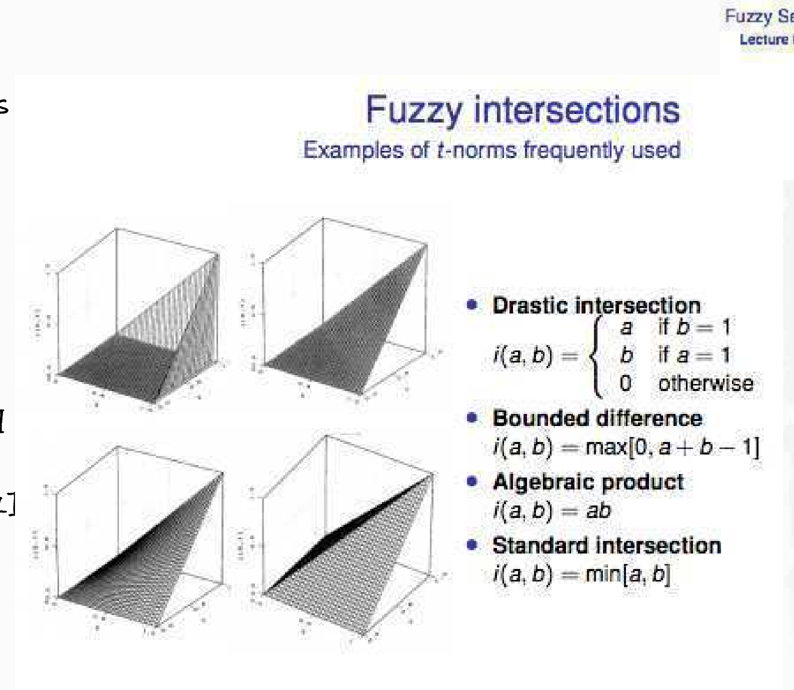
Operador $z = x \sqcap^w y = (x \cdot y) + [w \cdot (x+y)]$ en $[0,1]$

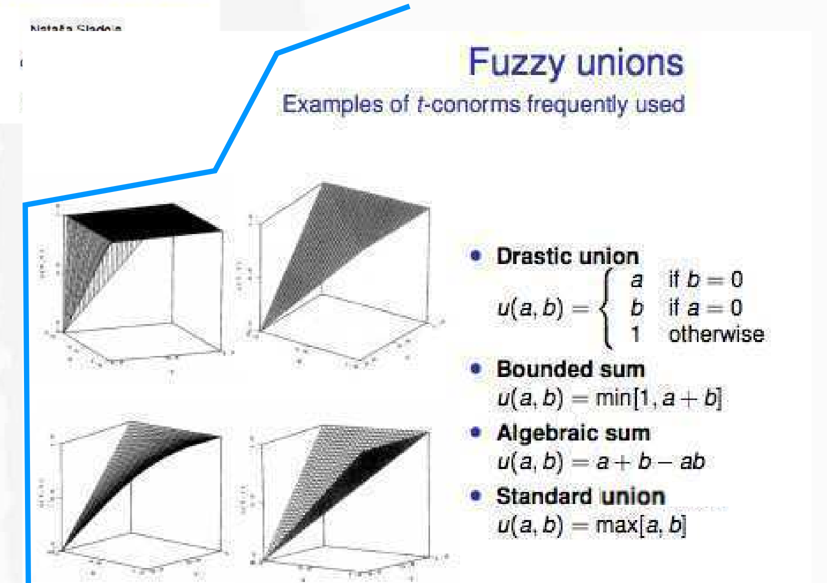
Las t-NORMAS en $([0,1],\leq)$ como generadores de intersección entre borrosos

Funciones T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- El elemento máximo 1 como elemento neutro: $T(x,1) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $T(x,z) \leq T(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$

(Las t-CONORMAS como "operadores duales": son t-normas para el orden dual $\leq^d \equiv \geq$ en $[0,1]$, dónde aparecerá "0" como elemento neutro).



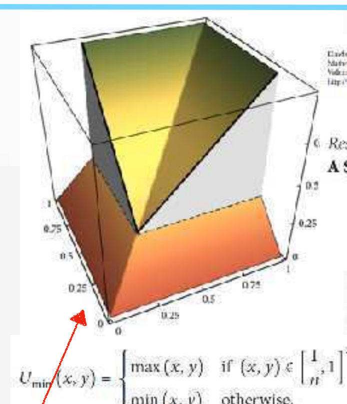


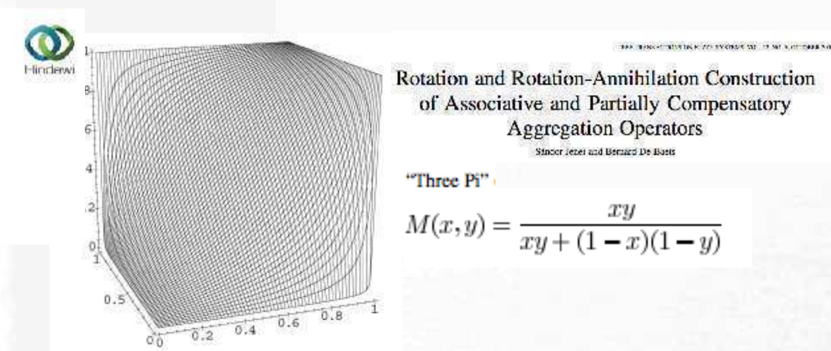
Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Generalizaciones:

Las UNINORMAS: Funciones U: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

- Conmutatividad: $U(x,y) = U(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- Existencia de elemento neutro $e \in [0,1]$: $U(x,e) = x \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $U(x,z) \leq U(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$



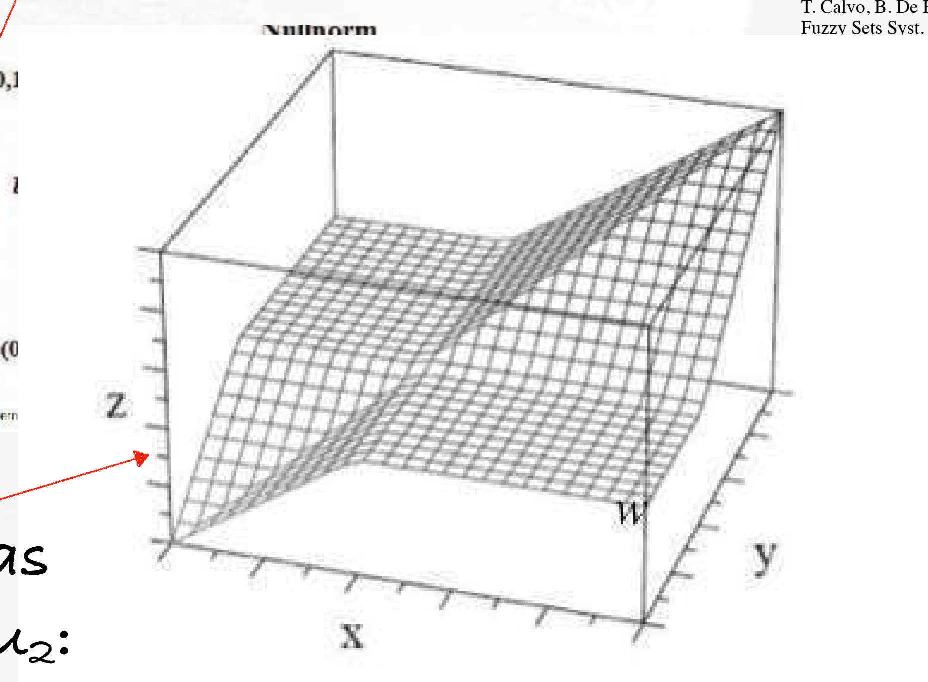


YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.

Las NULNORMAS: Funciones N: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que cumplen:

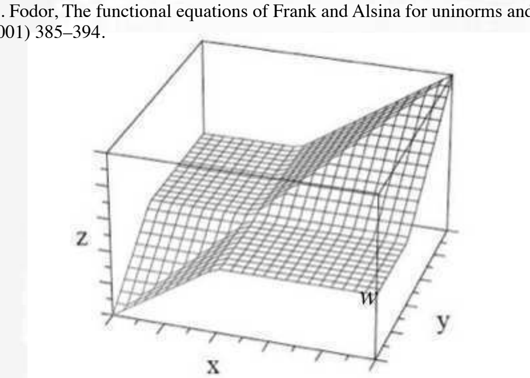
T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 385–394.

- Conmutatividad: $N(x,y) = N(y,x) \quad \forall\, x, y \in [0,1]$
- Asociatividad : $N(x,N(y,z)) = N(N(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$
- Existencia de elemento absorbente $k \in [0,1]$: $N(x,k) = k \quad \forall\, x \in [0,1]$ y $(N(0,x) = x$ si $x \leq k)$ & $(N(1,x) = x$ si $x \geq k)$.
- Monótona creciente: si $x \leq y$ entonces $N(x,z) \leq N(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in [0,1]$



Operador $z = x \sqcap^w y = (x \cdot y) + [w \cdot (x+y)]$ en $[0,1]$

Nulnorma



Operador $z = x \sqcap^w y = (x \cdot y) + [w \cdot (x+y)]$ en $[0,1]$

u_1-uniones y u_2-intersecciones borrosas mediante uninormas o nulnormas u_1, u_2:

$$(A+B)(x) = u_1(A(x),B(x)) \ \forall x \in E$$

$$(A \cdot B)(x) = u_2(A(x),B(x)) \ \forall x \in E$$

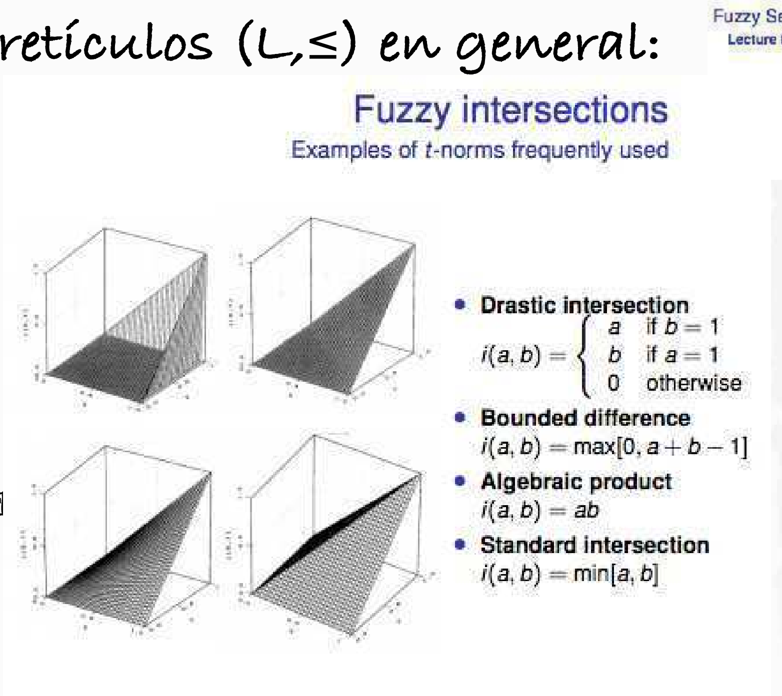
Se extiende fácilmente estas operaciones a retículos $(L,\leq)$ en general:

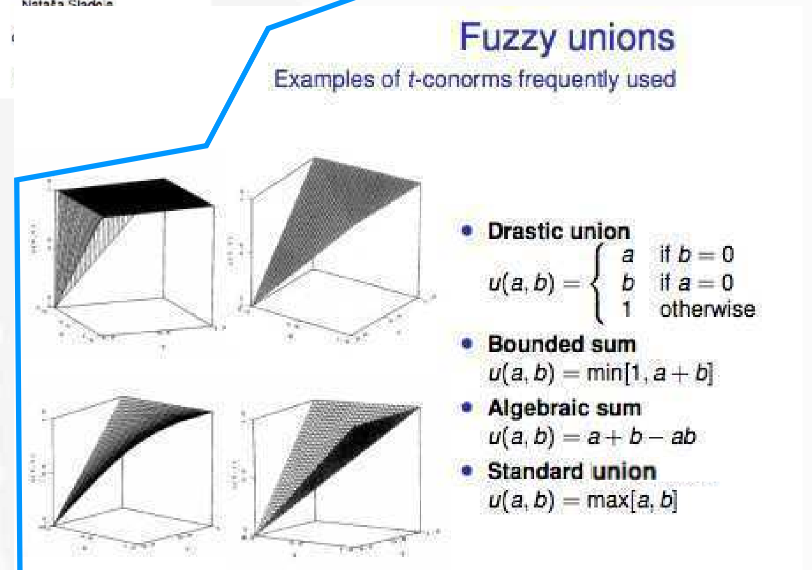
Las t-NORMAS en $(\cancel{[0,1],\leq})$ $(L,\leq)$ como generadores de intersección entre borrosos

Funciones T: $\cancel{[0,1] \times [0,1] \to [0,1]}$ $L\times L \to L$ que cumplen:

- Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall\, x, y \in \cancel{[0,1]}\ L$
- Asociatividad : $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \in \cancel{[0,1]}\ L$
- El elemento máximo 1 como elemento neutro: $T(x,1) = x \quad \forall\, x \in \cancel{[0,1]}\ L$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $T(x,z) \leq T(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \cancel{[0,1]}\ L$

(Las t-CONORMAS como "operadores duales": son t-normas para el orden dual $\leq^d \equiv \geq$ en [0,1], dónde aparecerá "0" como elemento neutro).





Sus "duales las t-conormas como generadores de unión entre borrosos

Generalizaciones:

Las UNINORMAS: Funciones U: $\cancel{[0,1] \times [0,1] \to [0,1]}$ $L\times L \to L$ que cumplen:

- Conmutatividad: $U(x,y) = U(y,x) \quad \forall\, x, \cancel{y \in [0,1]}\ L$
- Asociatividad : $U(x,U(y,z)) = U(U(x,y),z) \quad \forall\, x, y, z \cancel{\in [0,1]}\ L$
- Existencia de elemento neutro $e \in [0,1]$: $U(x,e) \cancel{= x}\ L \quad \forall\, x \in [0,1]$
- Monotonía creciente: si $x \leq y$ entonces $U(x,z) \leq U(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \cancel{[0,1]}\ L$

Las NULNORMAS: Funciones N: $\cancel{[0,1] \times [0,1] \to [0,1]}$ $L\times L \to L$ que cumplen:

- Conmutatividad: $N(x,y) = N(y,x) \quad \forall\, x, \cancel{y \in}\ L\ [0,1]$
- Asociatividad : $N(x,N(y,z)) = N(N(x,y),z) \quad \forall\, x, y, \cancel{z \in}\ L\ [0,1]$
- Existencia de elemento absorbente $k \in [0,1]$: $N(x,k) \cancel{= k}\ L \quad \forall\, x \in [0,1]$ y ($N(0,x) = x$ si $x \leq k$) & ($N(1,x) = x$ si $x \geq k$).
- Monótona creciente: si $x \leq y$ entonces $N(x,z) \leq N(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \cancel{[0,1]}\ L$

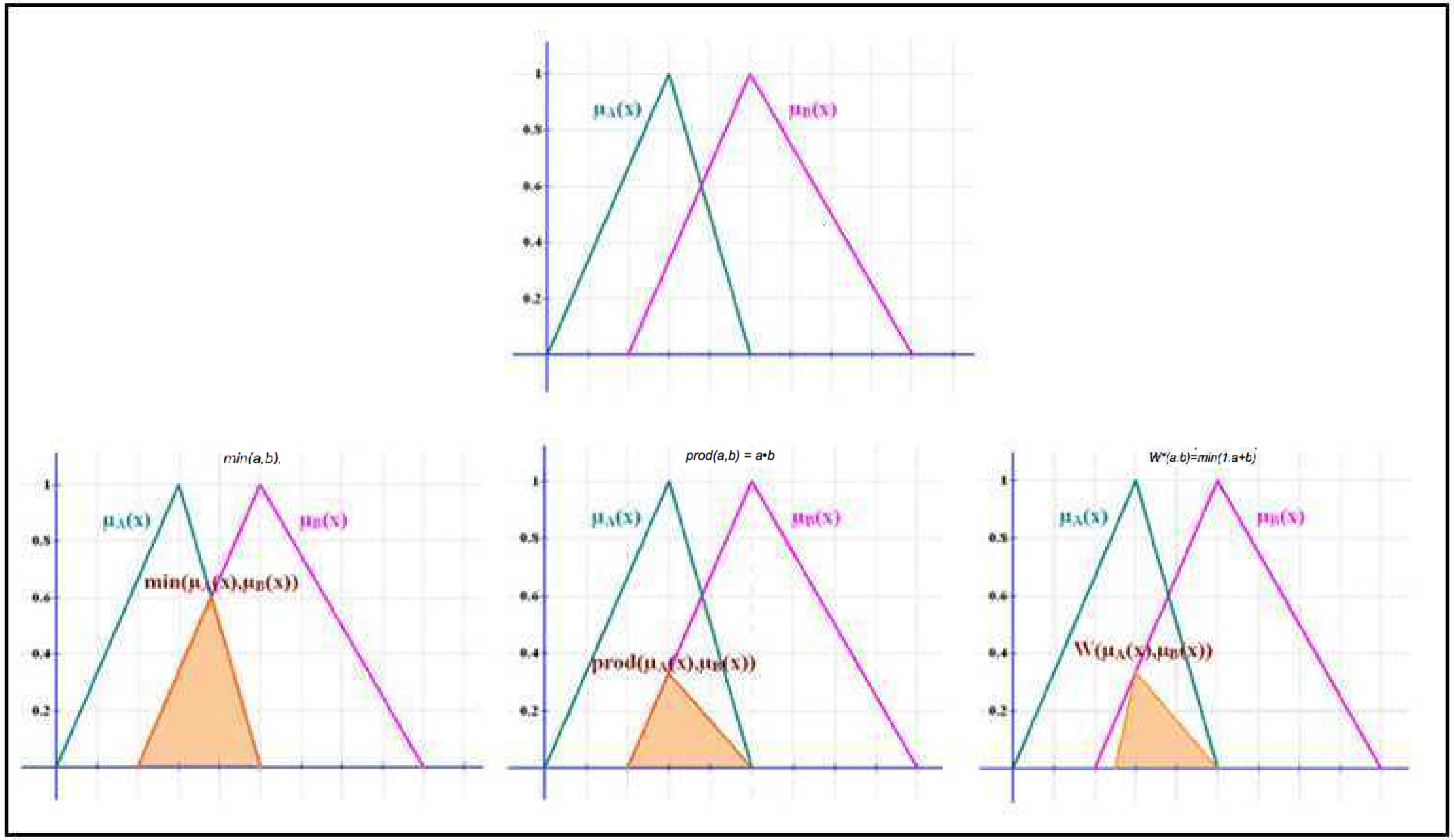
En Lógica Borrosa, las <u>uninormas</u> y las <u>nulnormas</u> son operadores de agregación situados entre la unión y la intersección y son en algunas ocasiones alternativas a éstas. Si además son operadores idempotentes, generan relaciones de orden que a su vez pueden considerarse alternativas a la inclusión.

Algunas uninormas y sus operadores residuo como alternativa a las definiciones de uniones e intersecciones entre subconjuntos borrosos

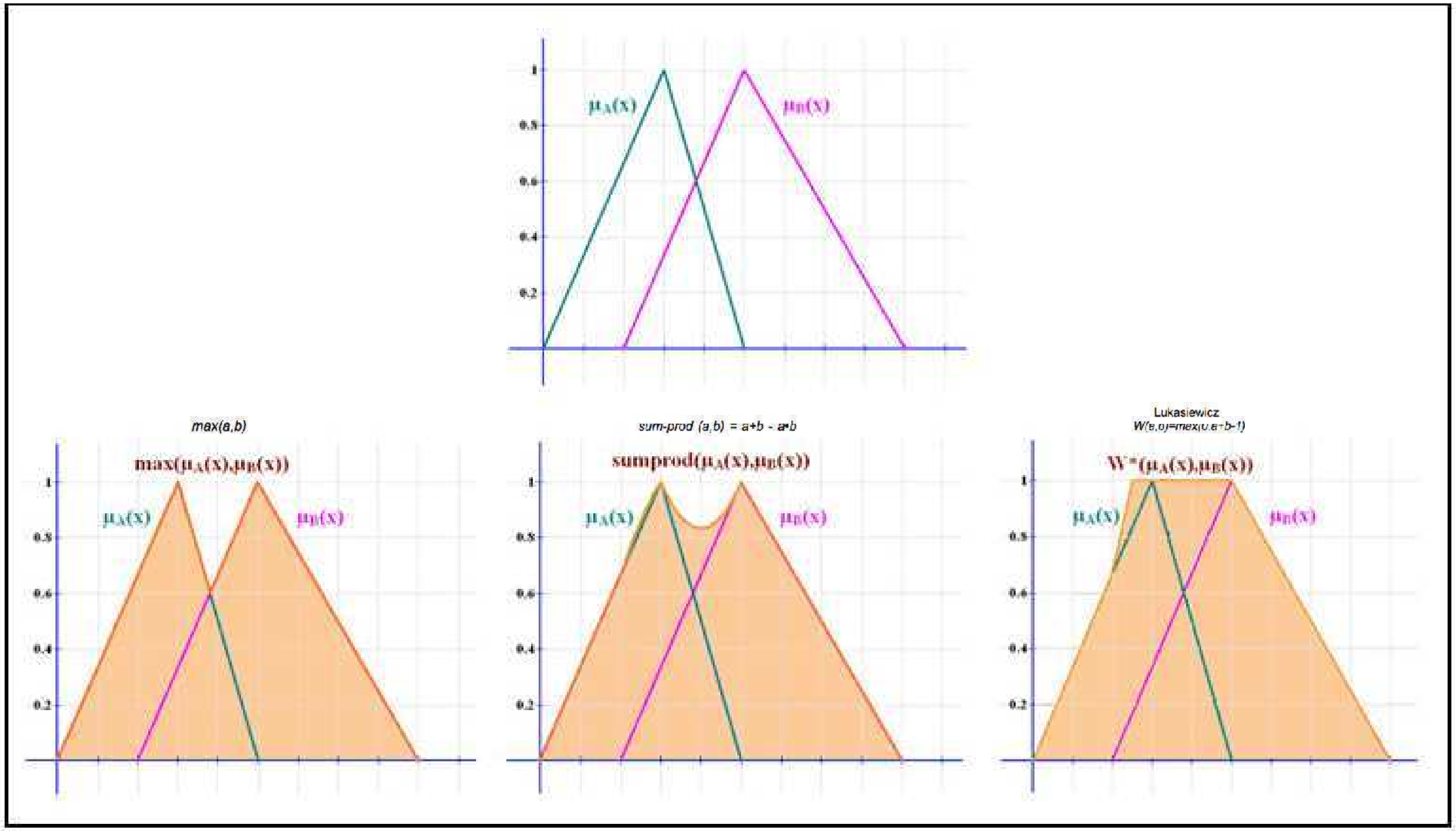
Hay alternativas para las definiciones de las leyes "intersección" y "unión" borrosas, utilizando normas T, conormas C, uninormas,...:

$$(A \bullet_T B)(x) = T(A(x), B(x))$$

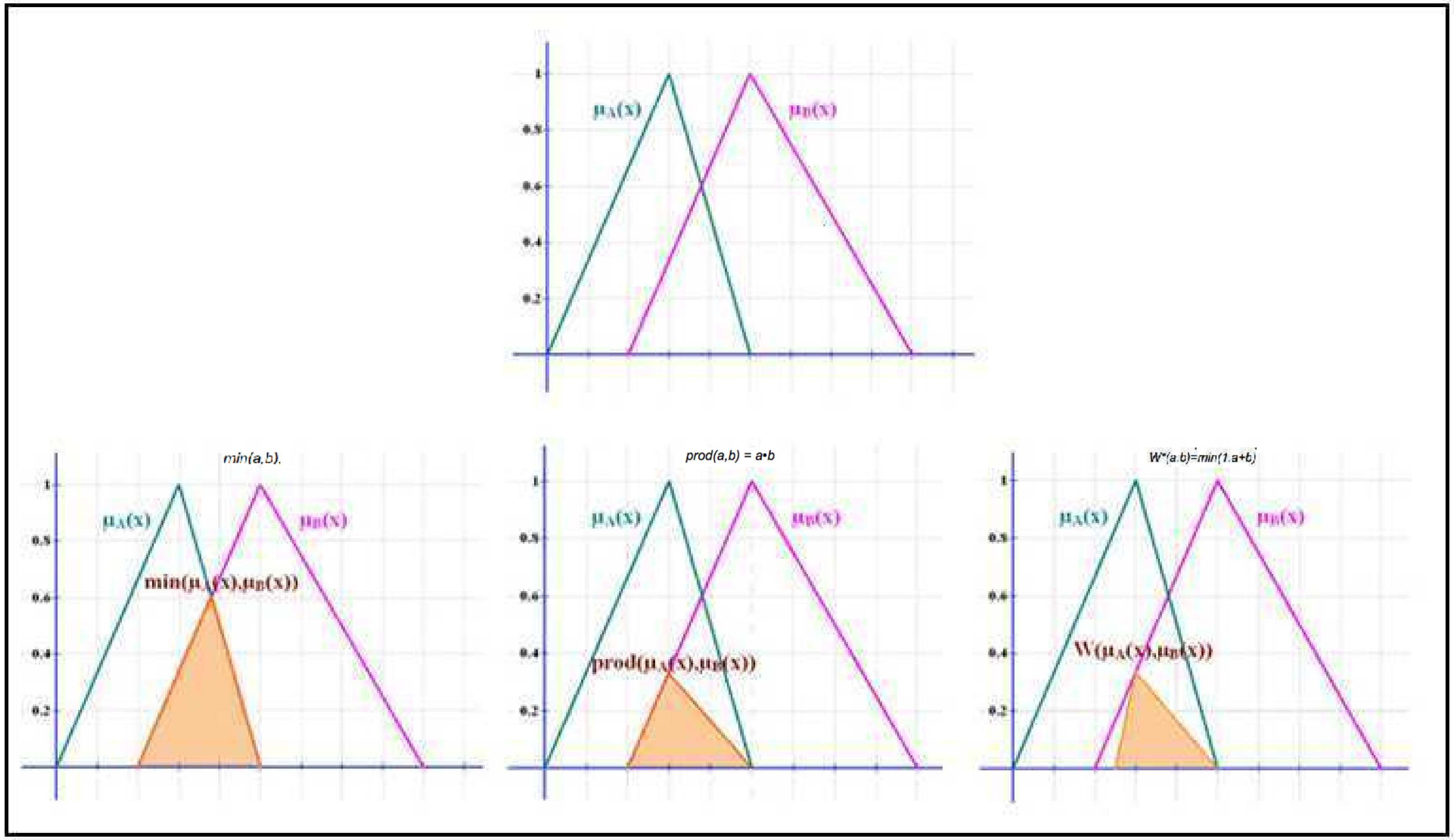
$$(A +_C B)(x) = C(A(x), B(x)) \quad \forall x \in E, \ \forall (A,B) \in L^E \times L^E .$$

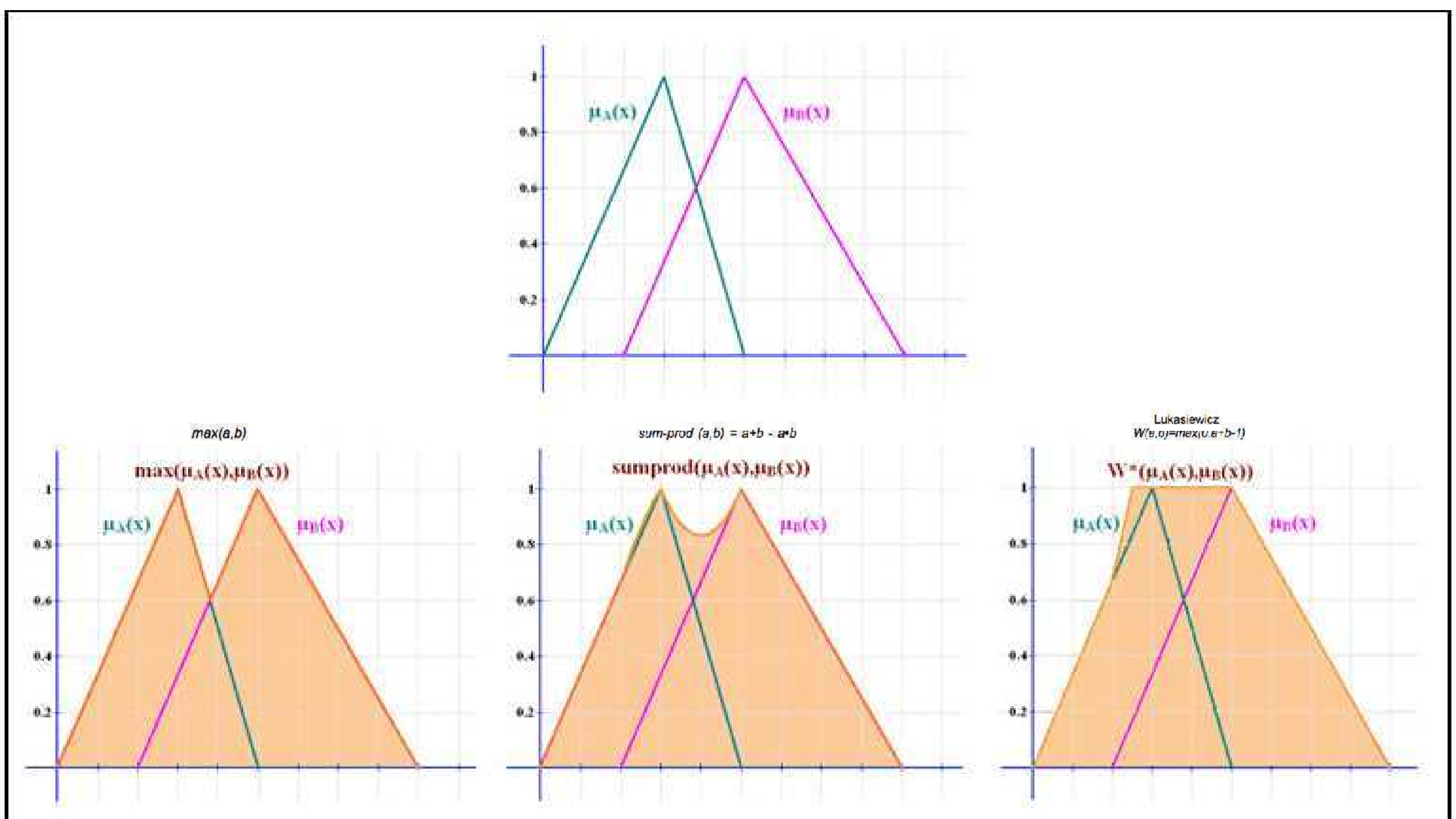


$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$
min(a,b).
$\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$
prod(a,b) = a•b
$\text{prod}(\mu_A(x),\mu_B(x))$
W*(a,b)=min(1,a+b)
$W(\mu_A(x),\mu_B(x))$



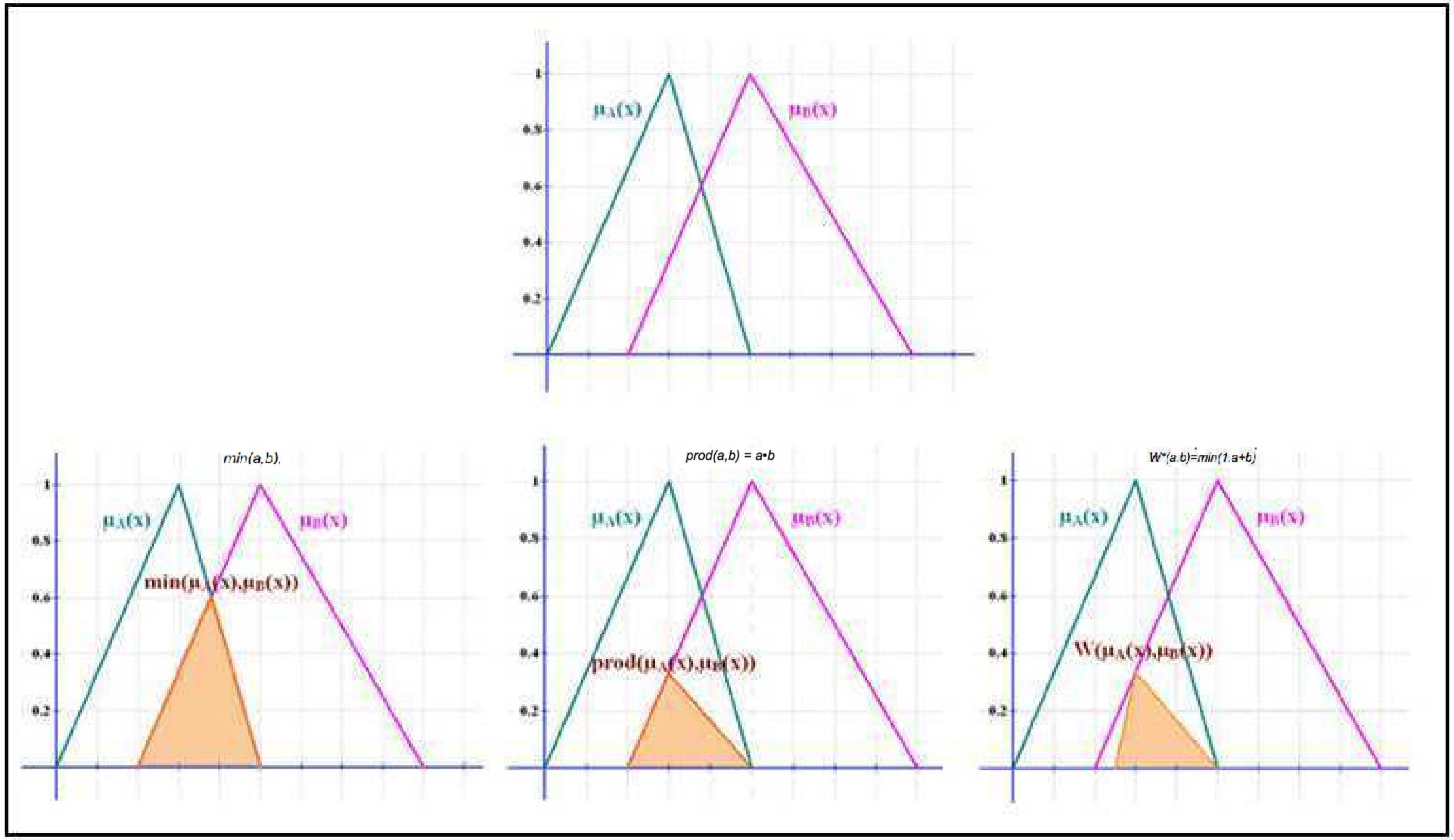
$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$
max(a,b)
$\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$
sum-prod (a,b) = a+b - a•b
$\text{sumprod}(\mu_A(x),\mu_B(x))$
Lukasiewicz
W(a,b)=max(0,a+b-1)
$W^*(\mu_A(x),\mu_B(x))$

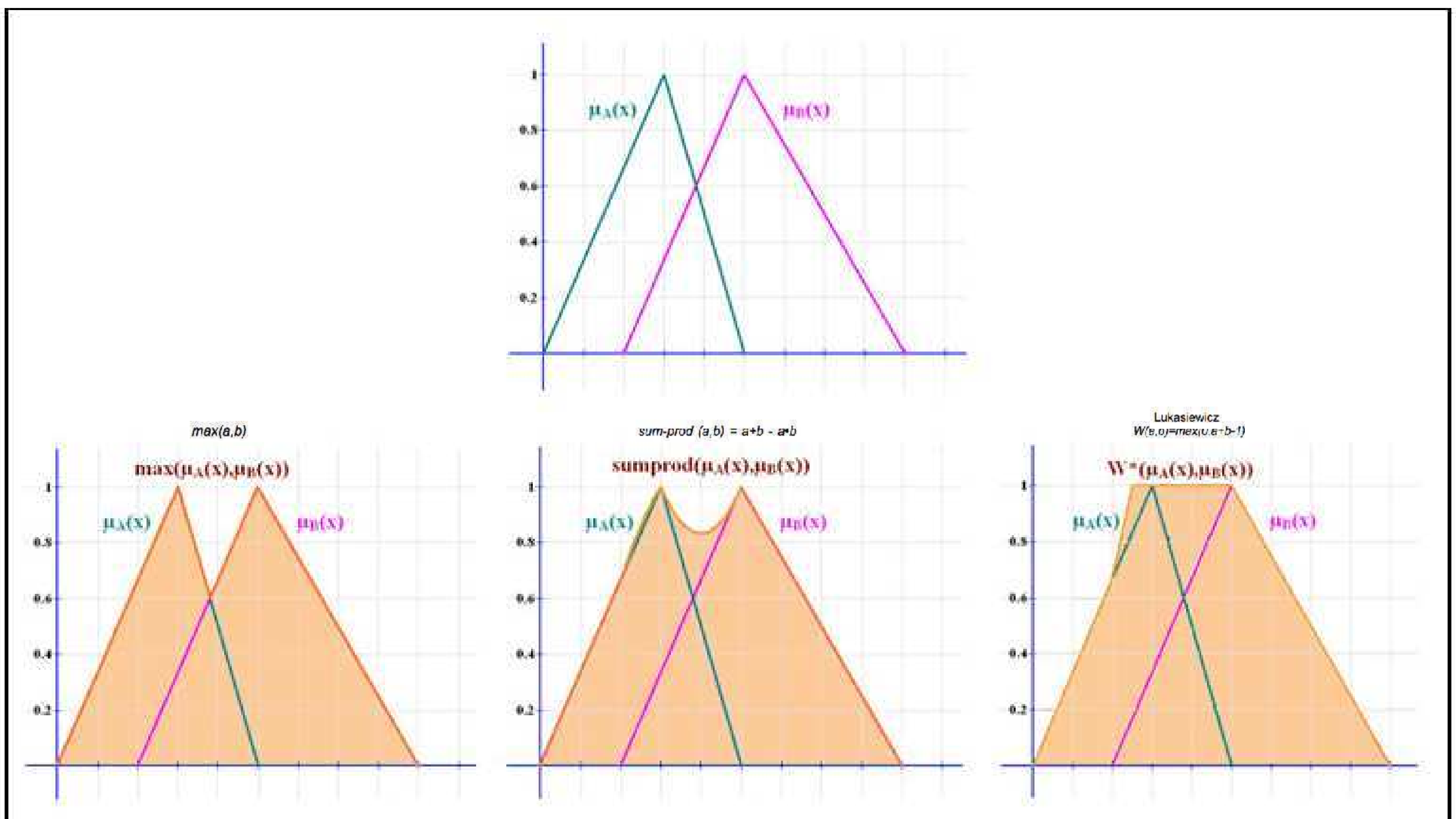


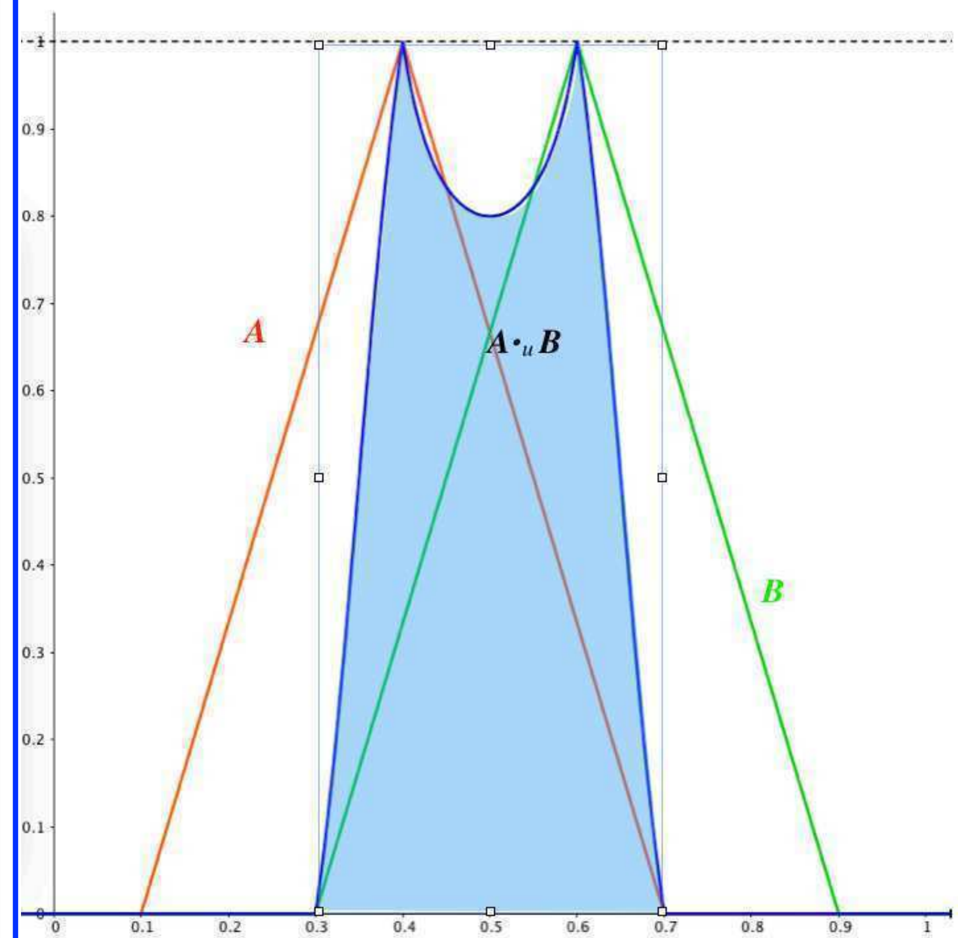


La aplicación $\bullet_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ con u=1/2, es uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro 1-u=1/2.

$$a \bullet_u b = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } (a,b) \in \{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{0})\} \\ \dfrac{a \cdot b}{a \cdot b + (1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$







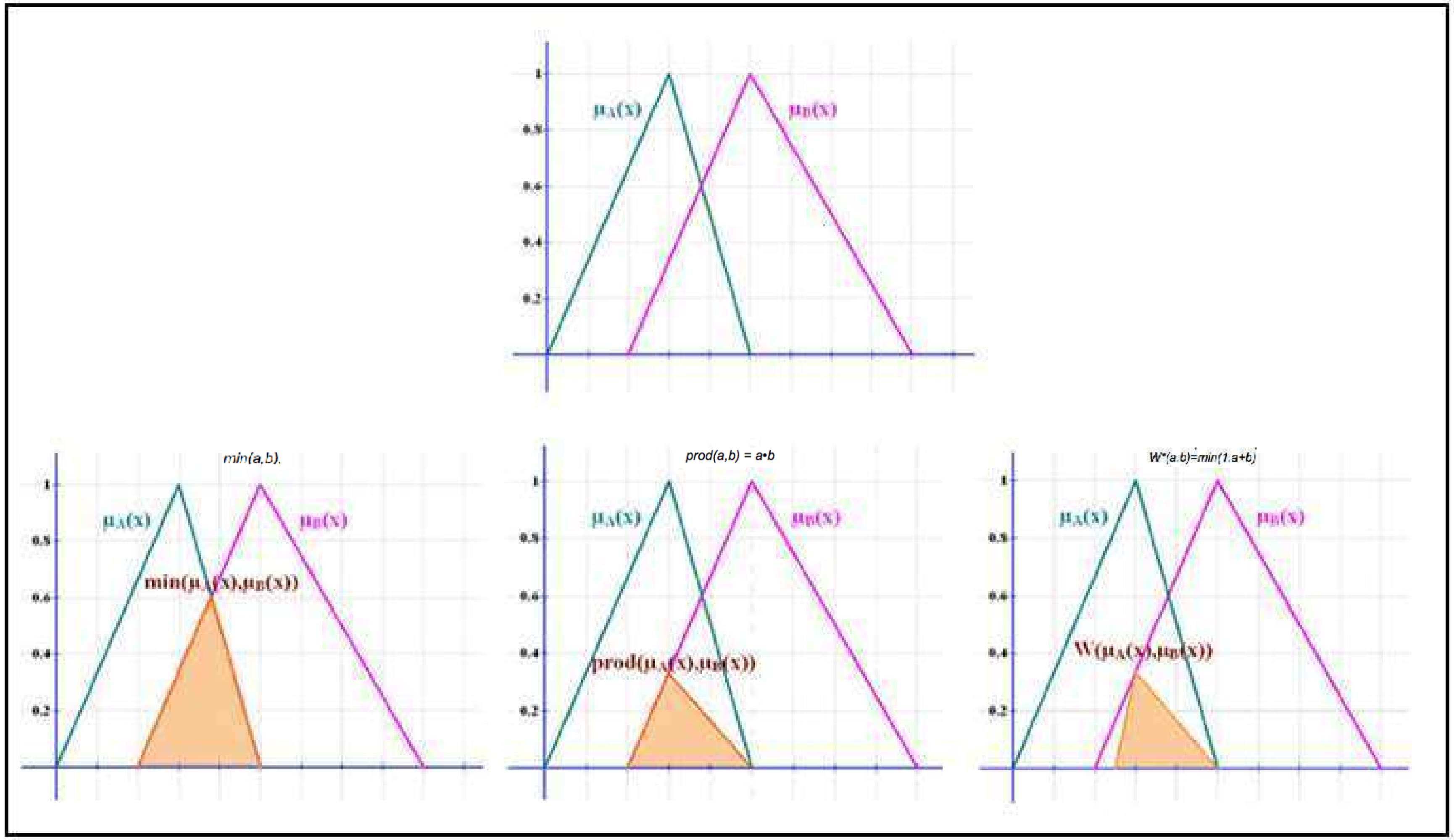
La aplicación $\bullet_u : [0,1]^2 \to [0,1]$ con $u=1/2$, es uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro $1-u=1/2$.

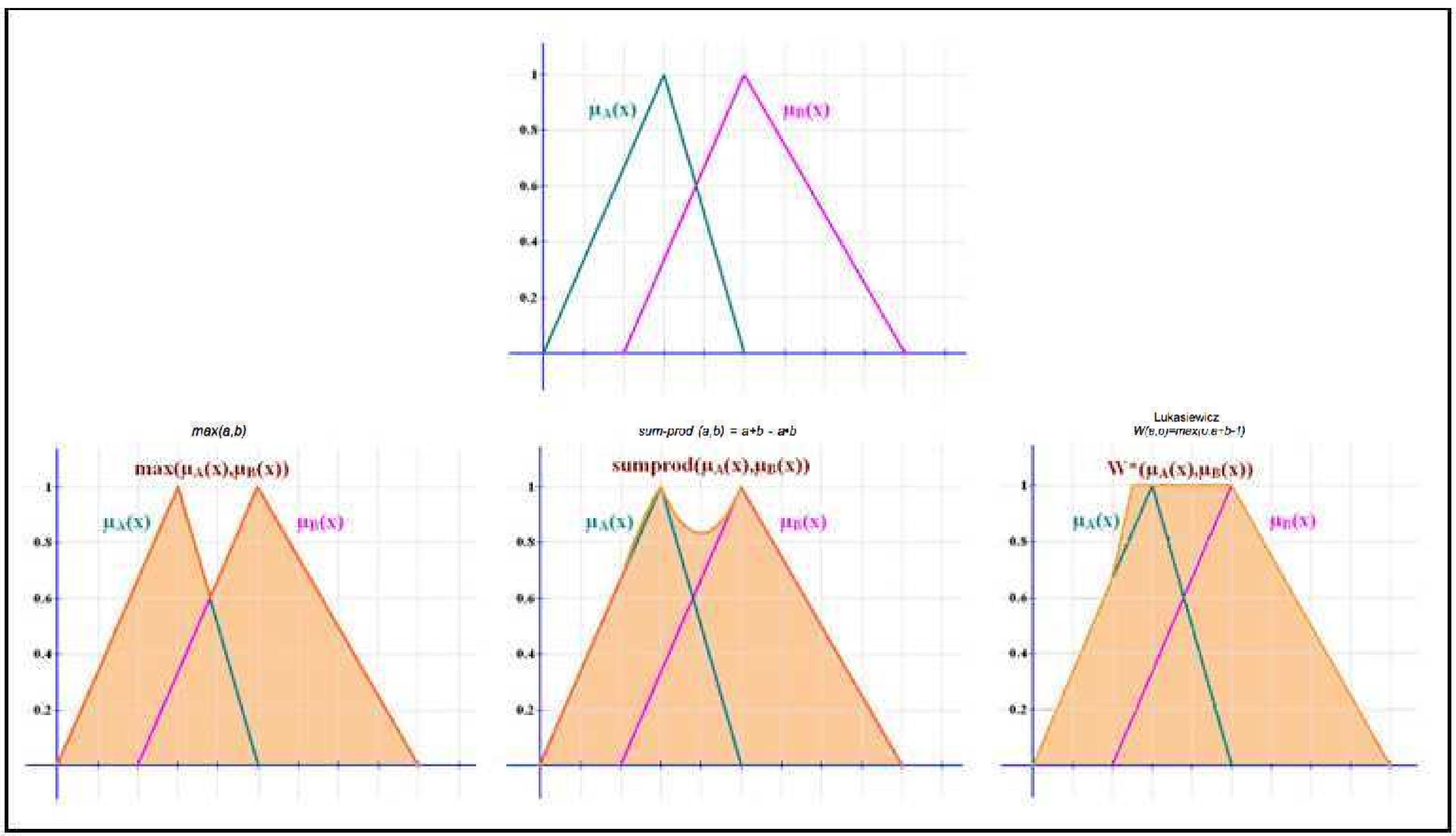
$$a \bullet_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{a \cdot b}{a \cdot b + (1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

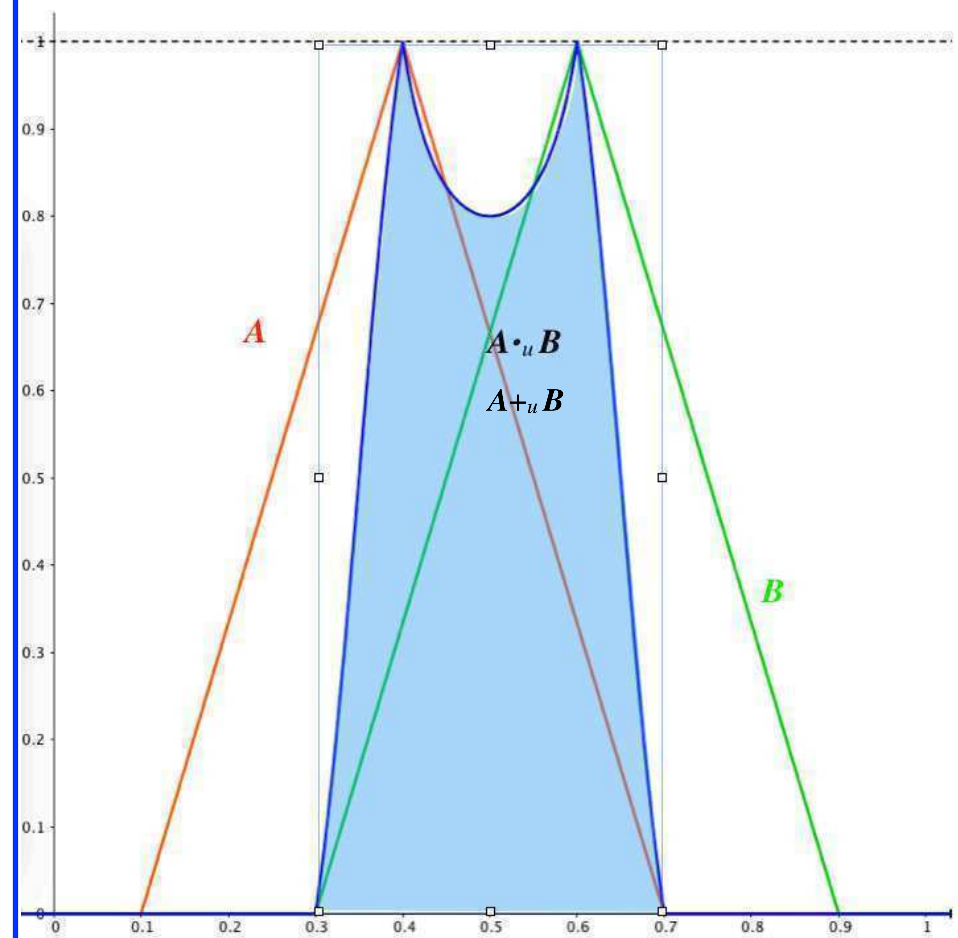
$A \bullet_u B$

$$(A \bullet_u B)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{A(x)\cdot B(x)}{A(x)\cdot B(x) + (1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Nota. Aquí, ·, + y - representan las operaciones usuales producto, suma y diferencia en [0,1]).







La aplicación $\bullet_u : [0,1]^2 \to [0,1]$ con u=1/2, es uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro 1-u=1/2.

$$a \bullet_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{a \cdot b}{a \cdot b + (1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$A \bullet_u B$

$$(A \bullet_u B)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x), B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{A(x)\cdot B(x)}{A(x)\cdot B(x) + (1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Nota. Aquí, ·, + y - representan las operaciones usuales producto, suma y diferencia en [0,1]).

Utilizando la negación de Zadeh:

$$A +_u B = 1-[(1-A) \bullet_u (1-B)]$$

$(A +_u B)(x) = 1$ si $(A(x), B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\}$

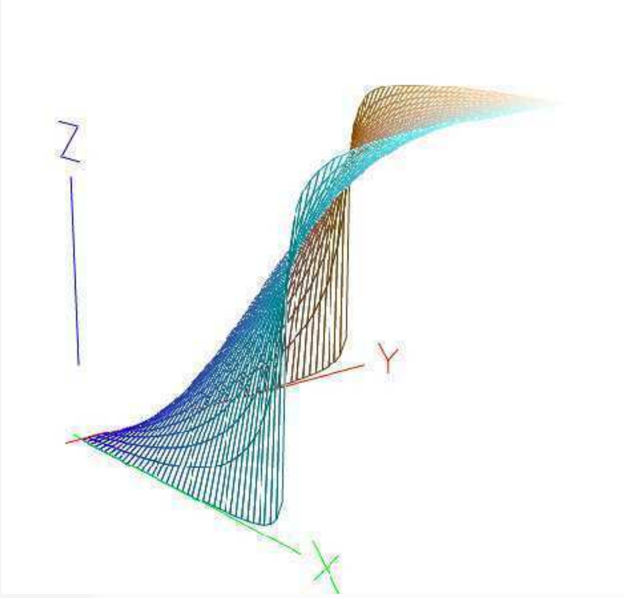
$(A +_u B)(x) = (A \bullet_u B)(x)$ en otro caso

(Uninorma disyuntiva)

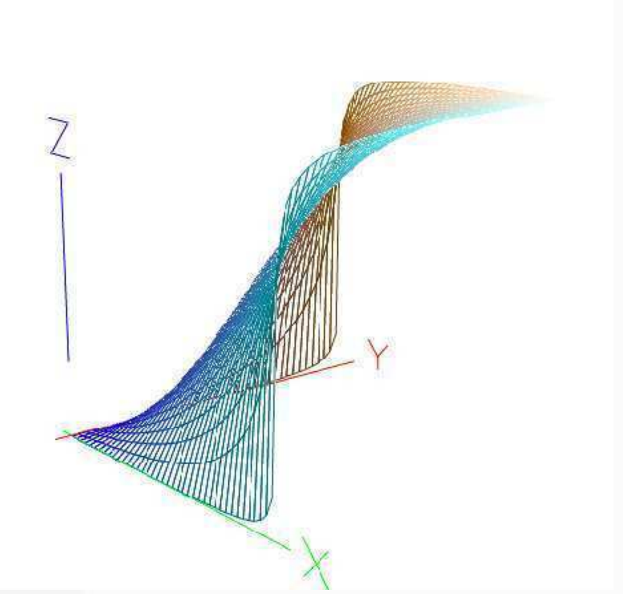
Si $u \in]0,1[$, sea $*_u$ la aplicación $*_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que:

$$a *_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot a\cdot b}{(1-u)\cdot a\cdot b + u\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro u.



Si $u \in]0,1[$, sea $*_u$ la aplicación $*_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que:



$$a *_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot a\cdot b}{(1-u)\cdot a\cdot b + u\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

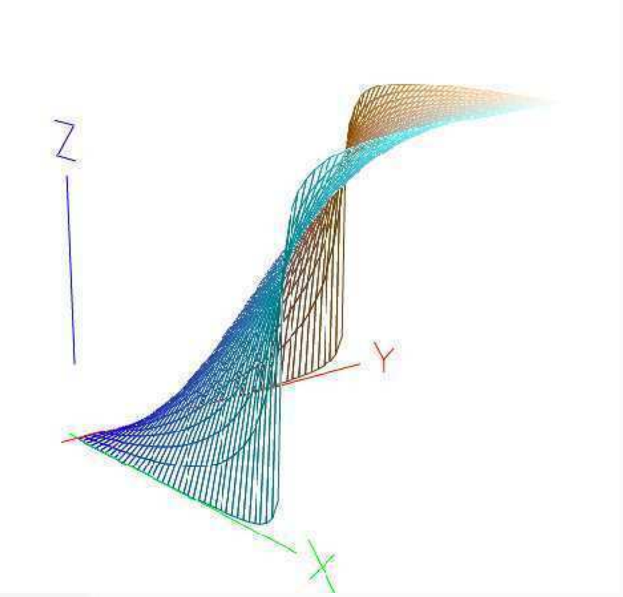
es una uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro u.

Y la ley asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma tal que $a +_u b = 1-[(1-a) *_u (1-b)]$ viene dada por:

$$a +_u b = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot a\cdot b}{u\cdot a\cdot b + (1-u)\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que también es una uninorma en $[0,1]$, (ahora disyuntiva), con elemento neutro $1-u$.

Si $u \in]0,1[$, sea $*_u$ la aplicación $*_u:[0,1]^2 \to [0,1]$ tal que:



$$a *_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot a\cdot b}{(1-u)\cdot a\cdot b + u\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una uninorma conjuntiva en [0,1] con elemento neutro u.

Y la ley asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma tal que $a +_u b = 1-[(1-a) *_u (1-b)]$ viene dada por:

$$a +_u b = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot a\cdot b}{u\cdot a\cdot b + (1-u)\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que también es una uninorma en [0,1], (ahora disyuntiva), con elemento neutro 1-u.

El residuo $\to_u$ de una ley $*_u$, (es este caso uninorma), viene dado por:

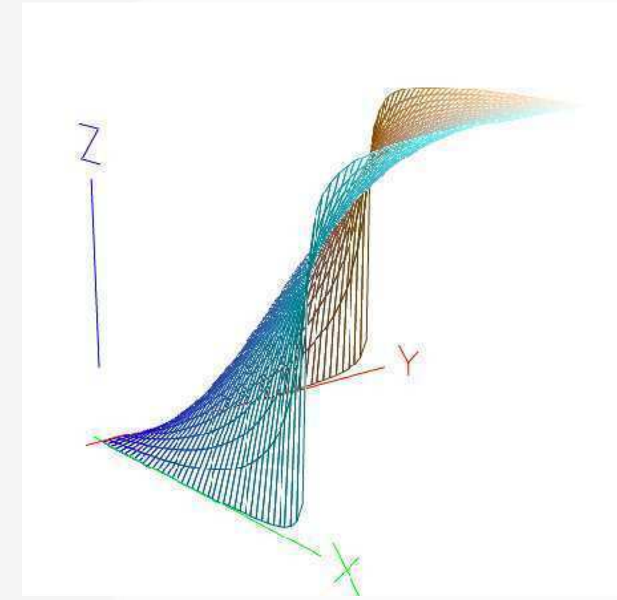
$$a \to_u b = \sup\{x \,/\, a *_u x \le b\},$$

En este caso, el residuo $\to_u$ está relacionado con la negación y con la ley $+_u$ mediante la expresión:

$$a \to_u b = [(1-a) +_u b], \text{ es decir:}$$

$$a \to_u b = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b) \in \{(0,0), (1,1)\} \\ \dfrac{u\cdot(1-a)\cdot b}{u\cdot(1-a)\cdot b + (1-u)\cdot a\cdot(1-b)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $u \in]0,1[$, sea $*_u$ la aplicación $*_u:[0,1]^2 \to [0,1]$ tal que:



$$a *_u b = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot a\cdot b}{(1-u)\cdot a\cdot b + u\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una uninorma conjuntiva en $[0,1]$ con elemento neutro u.

Y la ley asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma tal que $a +_u b = 1-[(1-a) *_u (1-b)]$ viene dada por:

$$a +_u b = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot a\cdot b}{u\cdot a\cdot b + (1-u)\cdot(1-a)\cdot(1-b)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que también es una uninorma en $[0,1]$, (ahora disyuntiva), con elemento neutro $1-u$.

El residuo $\to_u$ de una ley $*_u$, (es este caso uninorma), viene dado por:

$$a \to_u b = \sup\{x \,/\, a *_u x \le b\},$$

En este caso, el residuo $\to_u$ está relacionado con la negación y con la ley $+_u$ mediante la expresión:

$$a \to_u b = [(1-a) +_u b], \text{ es decir:}$$

$$a \to_u b = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b) \in \{(0,0),\ (1,1)\} \\ \dfrac{u\cdot(1-a)\cdot b}{u\cdot(1-a)\cdot b + (1-u)\cdot a\cdot(1-b)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nota:

El elemento neutro u tal que $u *_u b = b \quad \forall b$, también verifica: $u \to_u b = b \ \ \forall b$.

Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos A,B,... de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \ \ \forall x \in X$.

Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X x [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos A,B,... de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \ \ \forall x \in X$.

La ley $+_u$ asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma es tal que $(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1- B(x))]$ y viene dada por:

$$(A +_u B)(x) = A(x) +_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot A(x)\cdot B(x)}{u\cdot A(x)\cdot B(x) + (1-u)\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que también es una uninorma en [0,1], (ahora disyuntiva, tipo unión), con elemento neutro 1-u.

Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos $A, B, \ldots$ de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

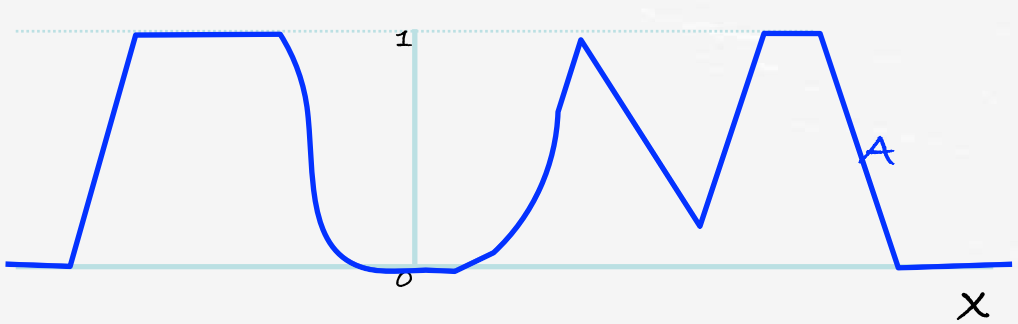
$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \ \ \forall x \in X$.

La ley $+_u$ asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma es tal que $(A +_u B)(x) = 1 - [(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$ y viene dada por:

$$(A +_u B)(x) = A(x) +_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot A(x)\cdot B(x)}{u\cdot A(x)\cdot B(x) + (1-u)\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que también es una uninorma en $[0,1]$, (ahora disyuntiva, tipo unión), con elemento neutro $1-u$.



Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos A,B,... de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

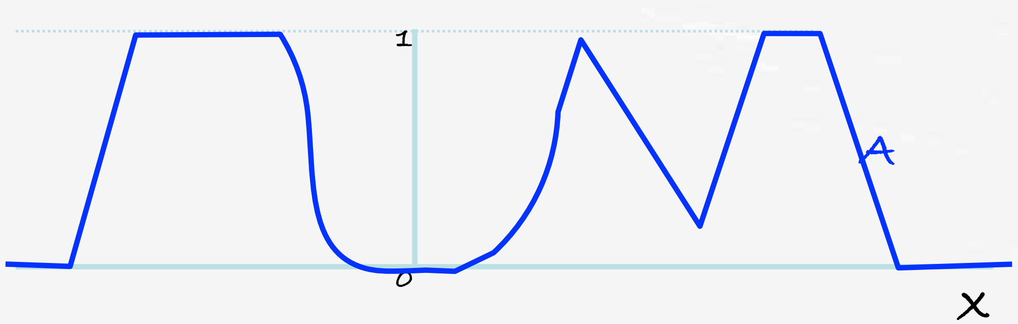
Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \ \ \forall x \in X$.

La ley $+_u$ asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma es tal que $(A +_u B)(x) = 1 - [(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$ y viene dada por:

$$(A +_u B)(x) = A(x) +_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot A(x)\cdot B(x)}{u\cdot A(x)\cdot B(x) + (1-u)\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que también es una uninorma en [0,1], (ahora disyuntiva, tipo unión), con elemento neutro 1-u.

Llamaremos a los subconjuntos borrosos $F \in [0,1]^X$ tales que $F(X) \subseteq \{0,u\}$: "$*_u$-Flat Sets" de $[0,1]^X$.



Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos $A, B, \ldots$ de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

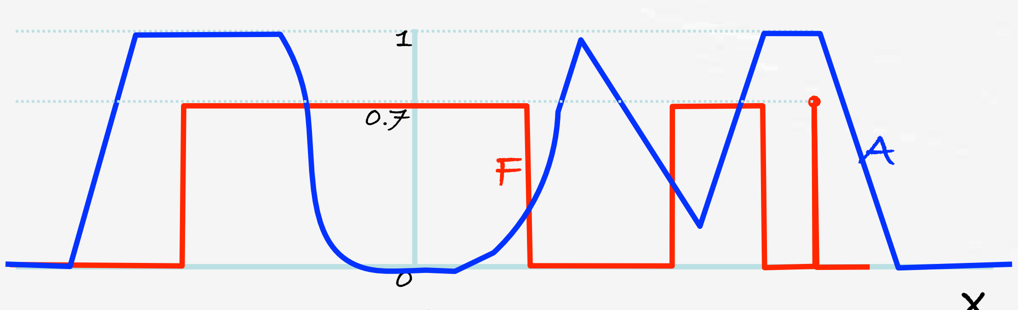
Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \ \ \forall x \in X$.

La ley $+_u$ asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma es tal que $(A +_u B)(x) = 1 - [(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$ y viene dada por:

$$(A +_u B)(x) = A(x) +_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot A(x)\cdot B(x)}{u\cdot A(x)\cdot B(x) + (1-u)\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que también es una uninorma en $[0,1]$, (ahora disyuntiva, tipo unión), con elemento neutro $1-u$.

Llamaremos a los subconjuntos borrosos $F \in [0,1]^X$ tales que $F(X) \subseteq \{0,u\}$: "$*_u$-Flat Sets" de $[0,1]^X$. (Son borrosos que, como elementos estructurantes, pueden jugar el mismo papel que los flat-sets(*) tienen en el diseño de filtros morfológicos en imágenes con tonos de gris).



$*_{0.7}$-Flat Set F

(*) (Véase transparencia 67)

Sea $u \in]0,1[$ y sea el referencial X. La extensión $*_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ de la aplicación anterior $*_u$ a subconjuntos borrosos $A, B, \ldots$ de X es tal que $(A *_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

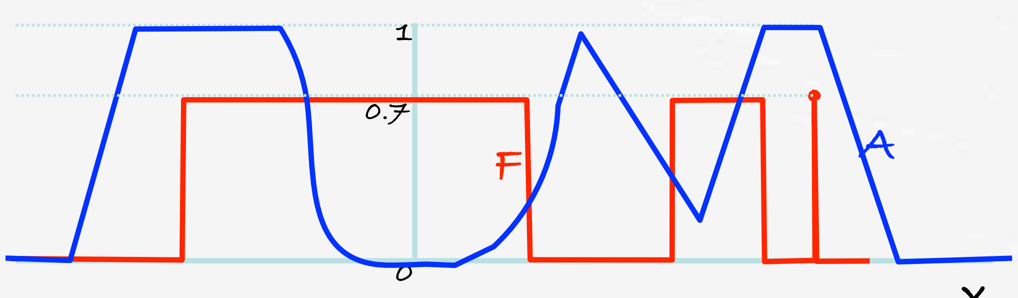
Es una uninorma conjuntiva, (tipo intersección), en $[0,1]^X$ con elemento neutro $U \in [0,1]^X$ tal que $U(x) = u \quad \forall x \in X$.

La ley $+_u$ asociada a la negación de Zadeh y a esa uninorma es tal que $(A +_u B)(x) = 1 - [(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$ y viene dada por:

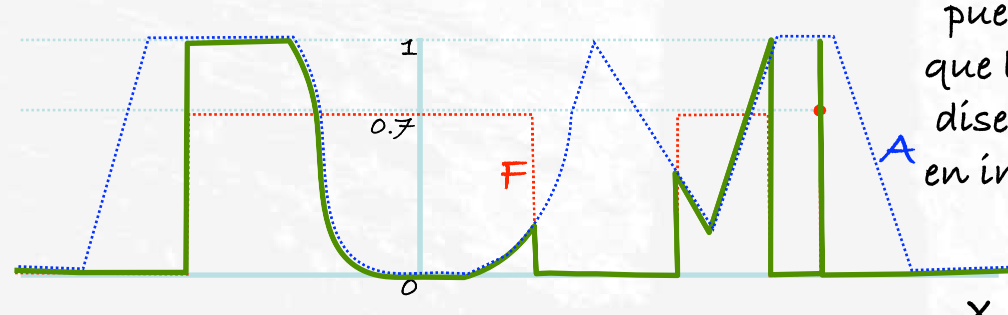
$$(A +_u B)(x) = A(x) +_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{u\cdot A(x)\cdot B(x)}{u\cdot A(x)\cdot B(x) + (1-u)\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que también es una uninorma en $[0,1]$, (ahora disyuntiva, tipo unión), con elemento neutro $1-u$.

Llamaremos a los subconjuntos borrosos $F \in [0,1]^X$ tales que $F(X) \subseteq \{0,u\}$: "$*_u$-Flat Sets" de $[0,1]^X$. (Son borrosos que, como elementos estructurantes, pueden jugar el mismo papel que los flat-sets(*) tienen en el diseño de filtros morfológicos en imágenes con tonos de gris).



$*_{0.7}$-Flat Set F



$F *_{0.7} A = A *_{0.7} F$

(*) (Véase transparencia 67)

La extensión $\rightarrow_u: [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ del residuo $\rightarrow_u: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es tal que $(A \rightarrow_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

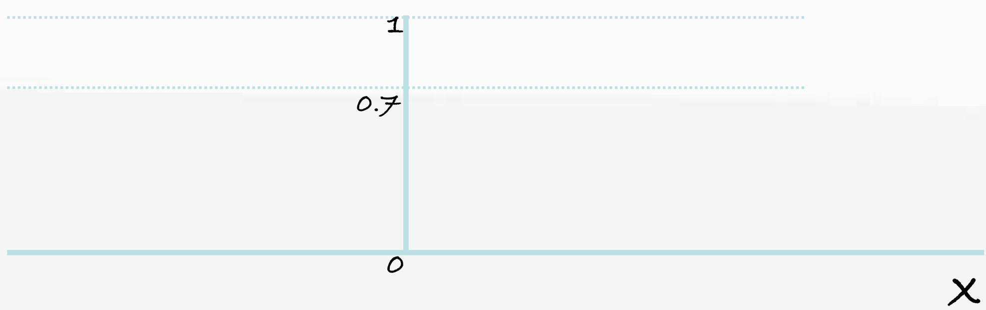
$$(A \rightarrow_u B)(x) = A(x) \rightarrow_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x), B(x)) \in \{(0,0), (1,1)\} \\ \dfrac{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)}{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)) + (1-u) \cdot A(x) \cdot (1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y es tal que $A \rightarrow_u B = [(1-A) +_u B]$.

La extensión $\to_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]^X$ del residuo $\to_u : [0,1]^2 \to [0,1]$ es tal que $(A \to_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A \to_u B)(x) = A(x) \to_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,0),\ (1,1)\} \\ \dfrac{u\cdot(1-A(x))\cdot B(x)}{u\cdot(1-A(x))\cdot B(x)) + (1-u)\cdot A(x)\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

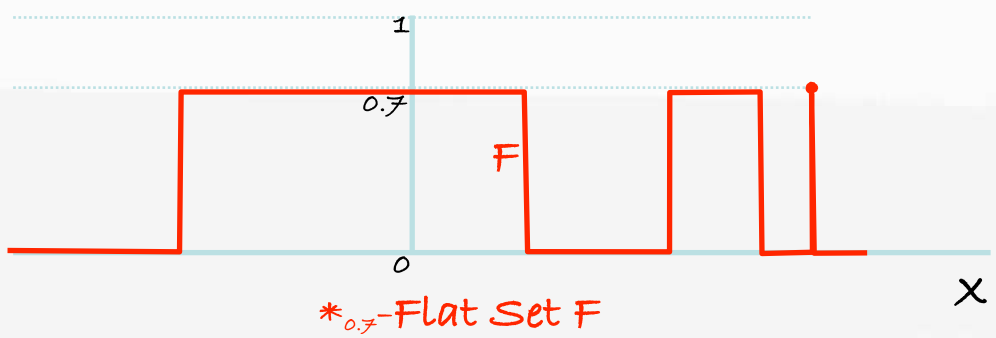
Y es tal que $A \to_u B = [(1-A) +_u B]$.



La extensión $\rightarrow_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ del residuo $\rightarrow_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es tal que $(A \rightarrow_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A \rightarrow_u B)(x) = A(x) \rightarrow_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x), B(x)) \in \{(0,0), (1,1)\} \\ \dfrac{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)}{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)) + (1-u) \cdot A(x) \cdot (1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

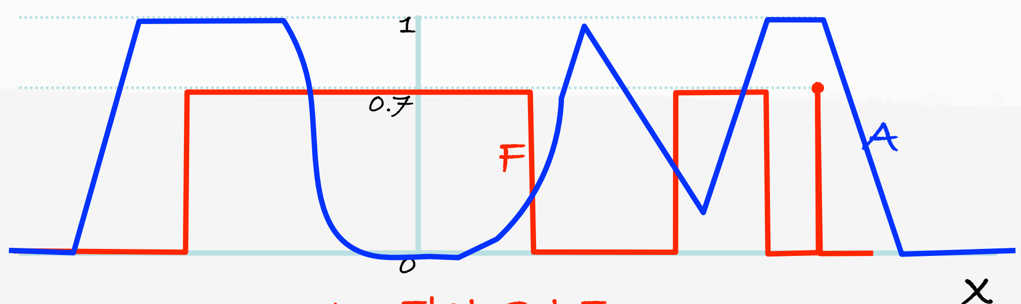
Y es tal que $A \rightarrow_u B = [(1-A) +_u B]$.



La extensión $\rightarrow_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ del residuo $\rightarrow_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es tal que $(A \rightarrow_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A \rightarrow_u B)(x) = A(x) \rightarrow_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,0),\ (1,1)\} \\ \dfrac{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)}{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)) + (1-u) \cdot A(x) \cdot (1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y es tal que $A \rightarrow_u B = [(1-A) +_u B]$.

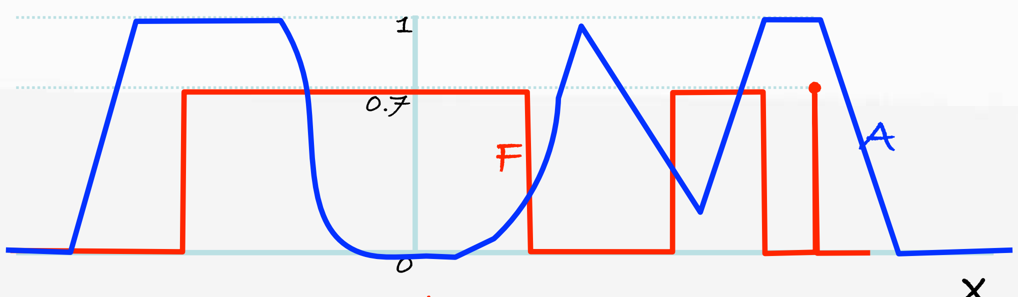


$*_{0.7}$-Flat Set F

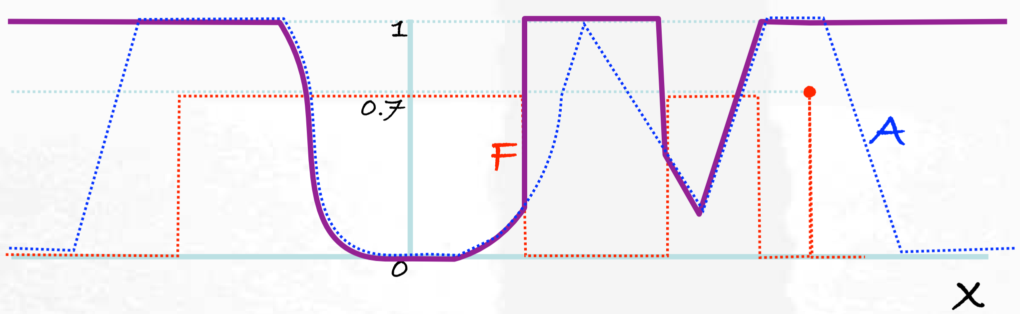
La extensión $\rightarrow_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ del residuo $\rightarrow_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es tal que $(A \rightarrow_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

$$(A \rightarrow_u B)(x) = A(x) \rightarrow_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x), B(x)) \in \{(0,0), (1,1)\} \\ \dfrac{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)}{u \cdot (1-A(x)) \cdot B(x)) + (1-u) \cdot A(x) \cdot (1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y es tal que $A \rightarrow_u B = [(1-A) +_u B]$.



$*_{0.7}$-Flat Set F

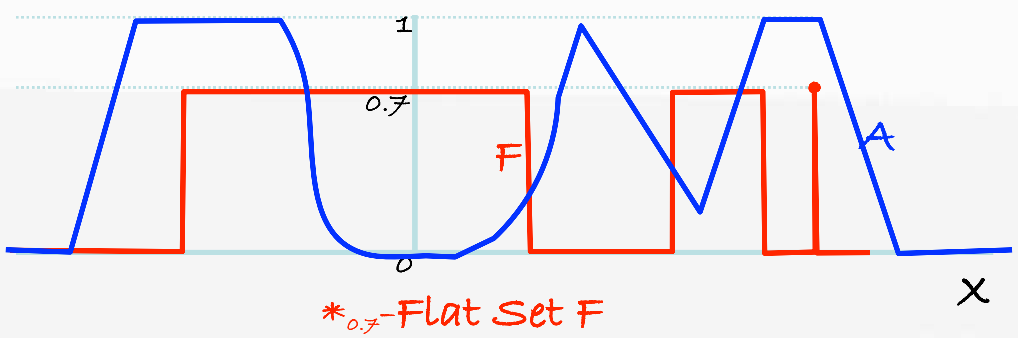


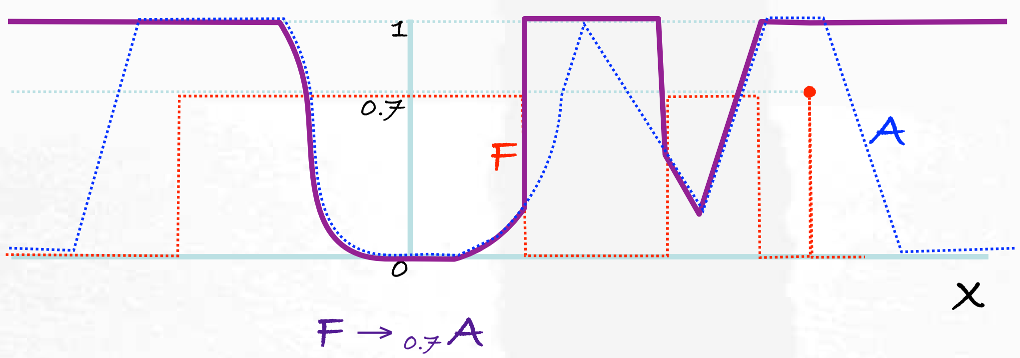
$F \rightarrow_{0.7} A$

La extensión $\rightarrow_u : [0,1]^X \times [0,1]^X \rightarrow [0,1]^X$ del residuo $\rightarrow_u : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es tal que $(A \rightarrow_u B) \in [0,1]^X$ es el subconjunto borroso definido para cada $x \in X$ por:

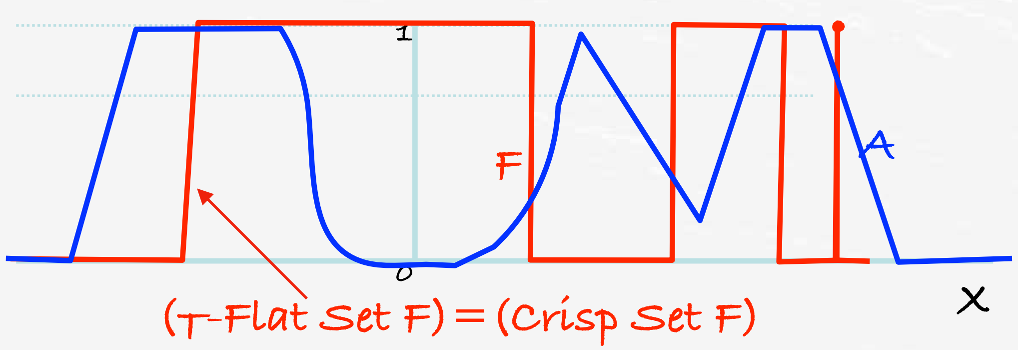
$$(A \rightarrow_u B)(x) = A(x) \rightarrow_u B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,0),\ (1,1)\} \\ \dfrac{u\cdot(1-A(x))\cdot B(x)}{u\cdot(1-A(x))\cdot B(x)) + (1-u)\cdot A(x)\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y es tal que $A \rightarrow_u B = [(1-A) +_u B]$.



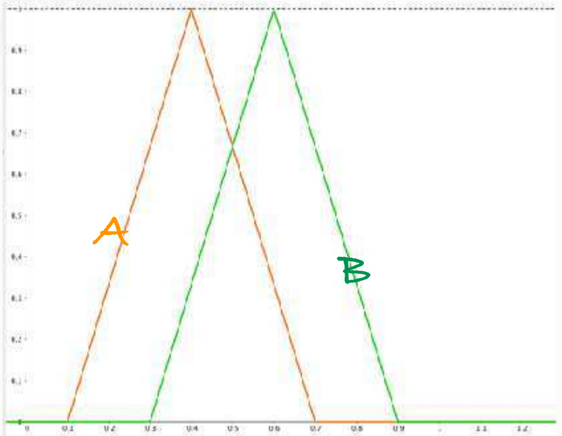


Nota. Para las "intersecciones borrosas" en X asociadas a cualquier t-norma $T:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$, se verifica: (F es "T-flat" set) $\Leftrightarrow$ (F es "crisp set"), es decir, son los $F \in [0,1]^X$ tales que $F(X) \subseteq \{0,1\}$:



Ejemplo de efectos de las operaciones de familias de uninormas $(*_u)_{u\in[0,1]}$ y $(+_u)_{u\in[0,1]}$

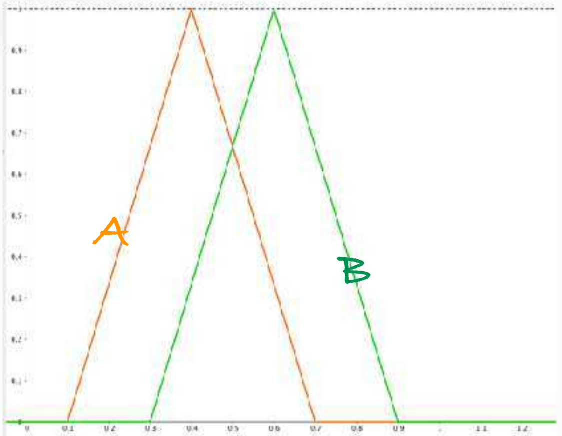
KER(A)≠∅, KER(B)≠∅



KER(A) ≤ A ≤ SUPP(A)

$KER(A) \neq \emptyset$, $KER(B) \neq \emptyset$

$KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

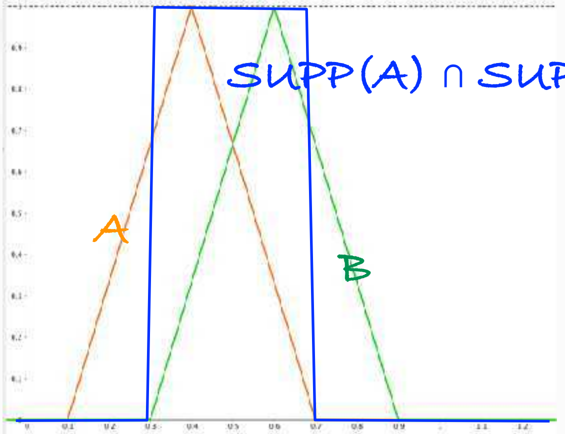


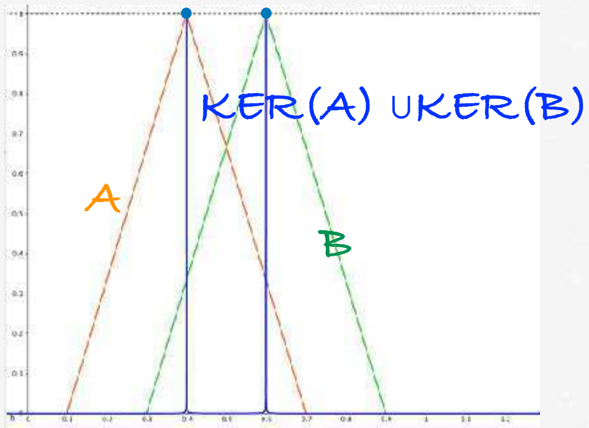
$u \in]0,1[$

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$$

$KER(A) \neq \emptyset$, $KER(B) \neq \emptyset$ $\quad KER(A) \leq A \leq SUPP(A) \quad A *_{sop} B = SUPP(A) \cap SUPP(B) \quad A *_{KER} B = KER(A) \cup KER(B)$



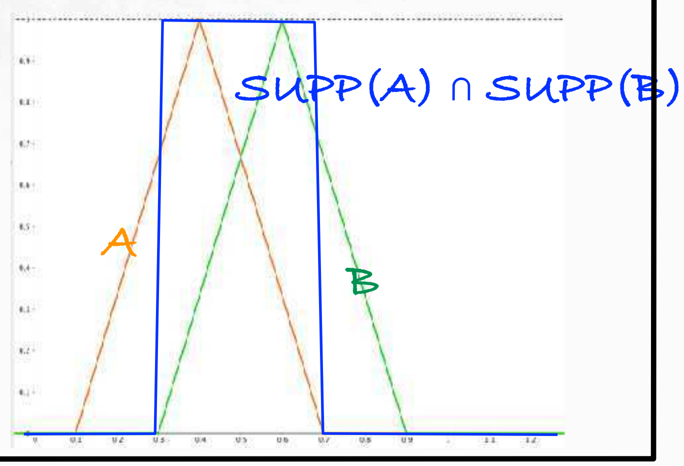


$u \in]0,1[$

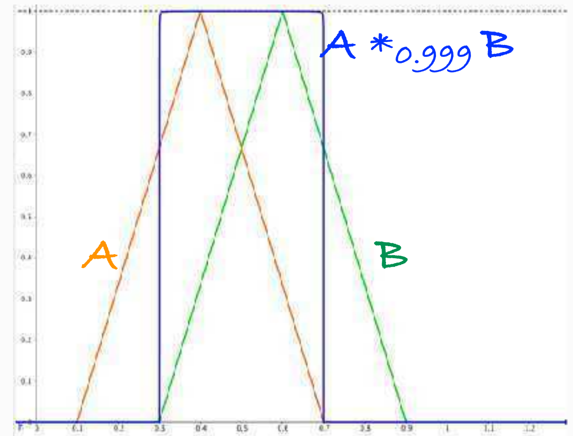
$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$$

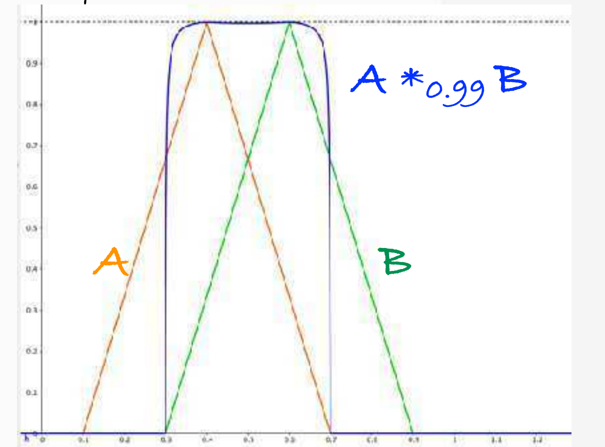
KER(A)≠∅, KER(B)≠∅



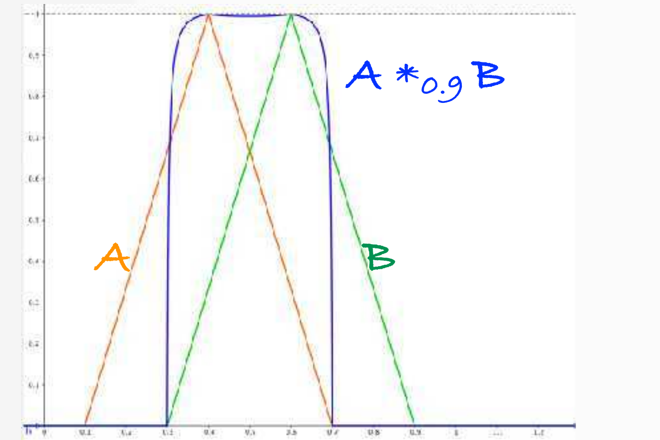
KER(A) ≤ A ≤ SUPP(A)

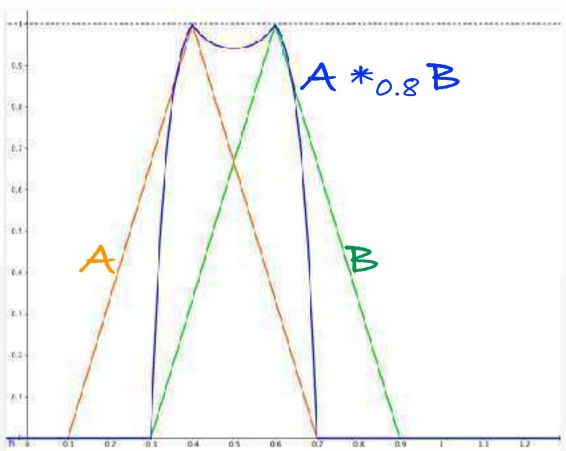


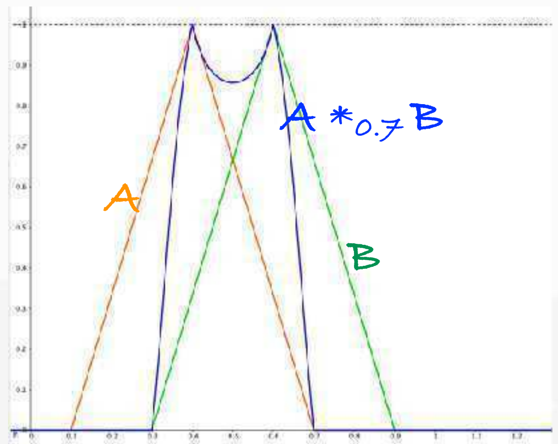
A$*_{sop}$B= SUPP(A) ∩ SUPP(B)

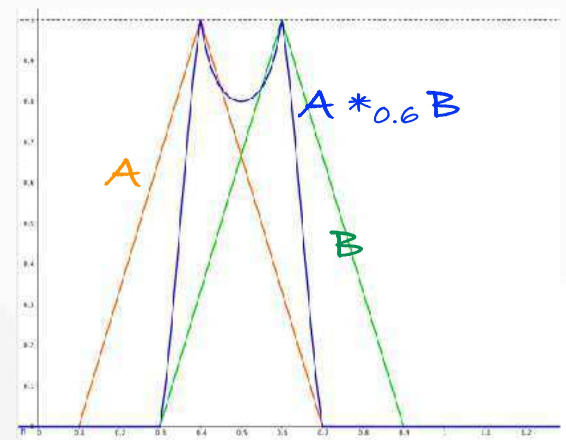


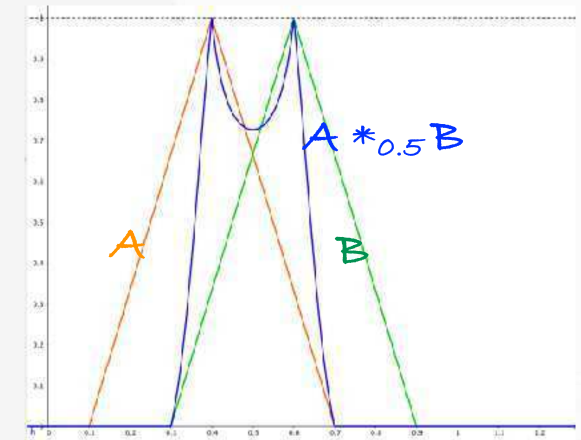
A$*_{KER}$B= KER(A) ∪ KER(B)

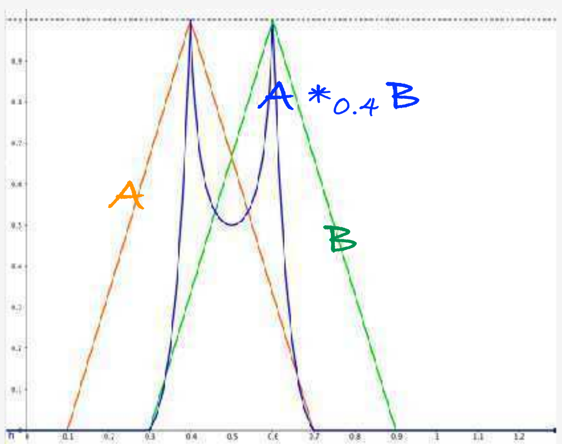


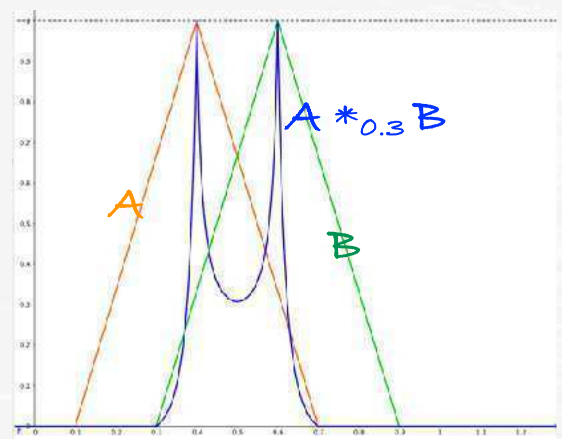


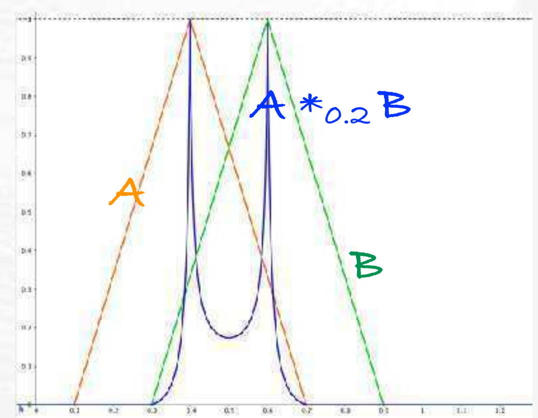


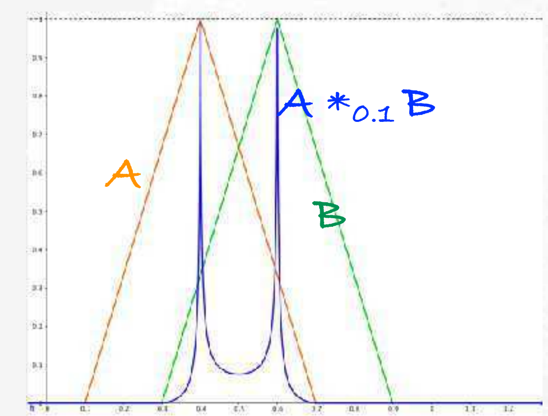


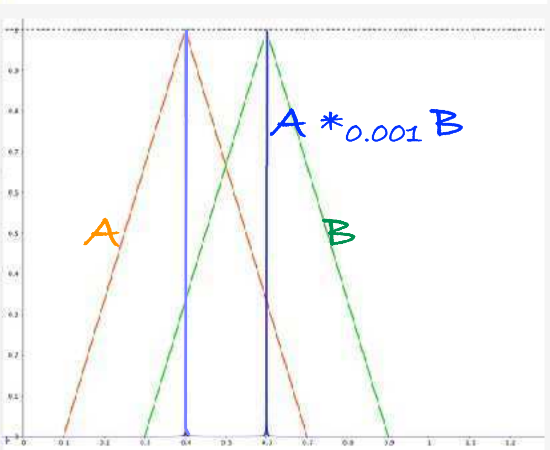


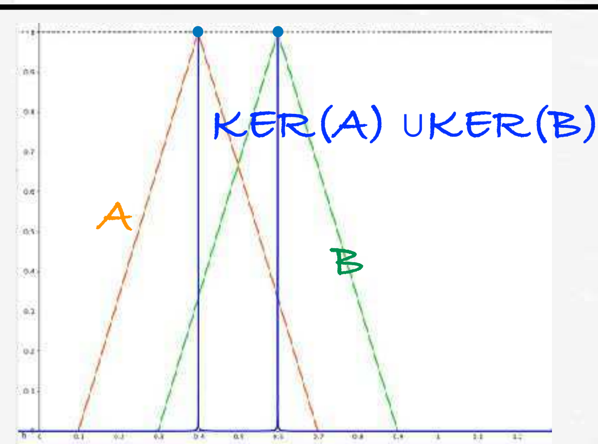










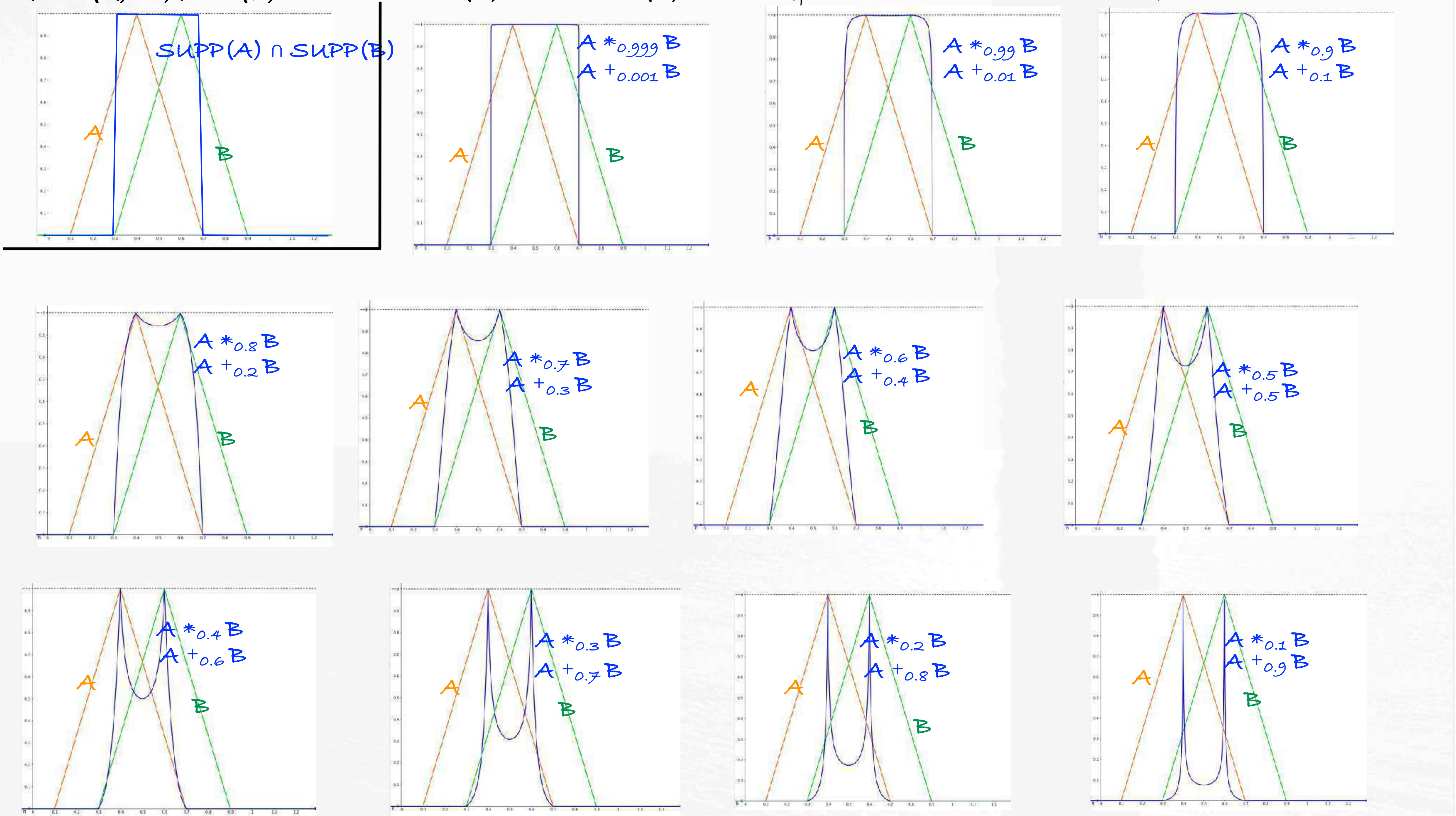


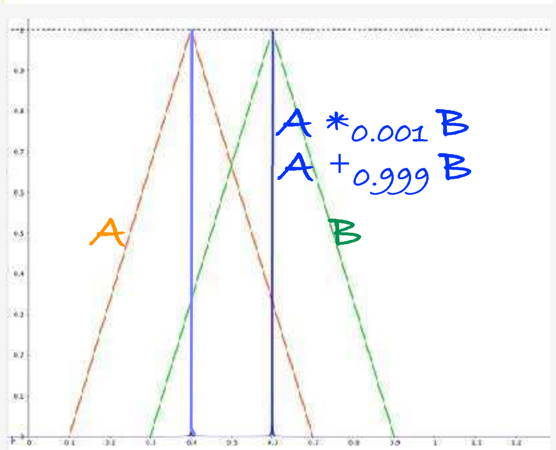
$u \in]0,1[$

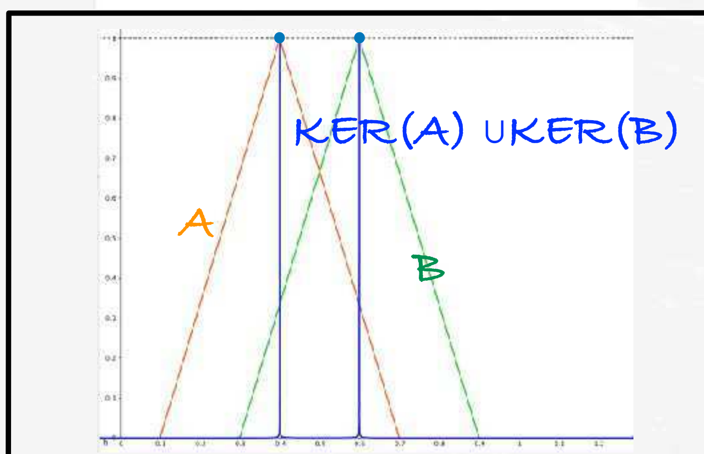
$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),\ (1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$$

KER(A)≠∅, KER(B)≠∅ | KER(A) ≤ A ≤ SUPP(A) | $A *_{sop} B =$ SUPP(A) ∩ SUPP(B) | $A *_{KER} B =$ KER(A) ∪ KER(B)





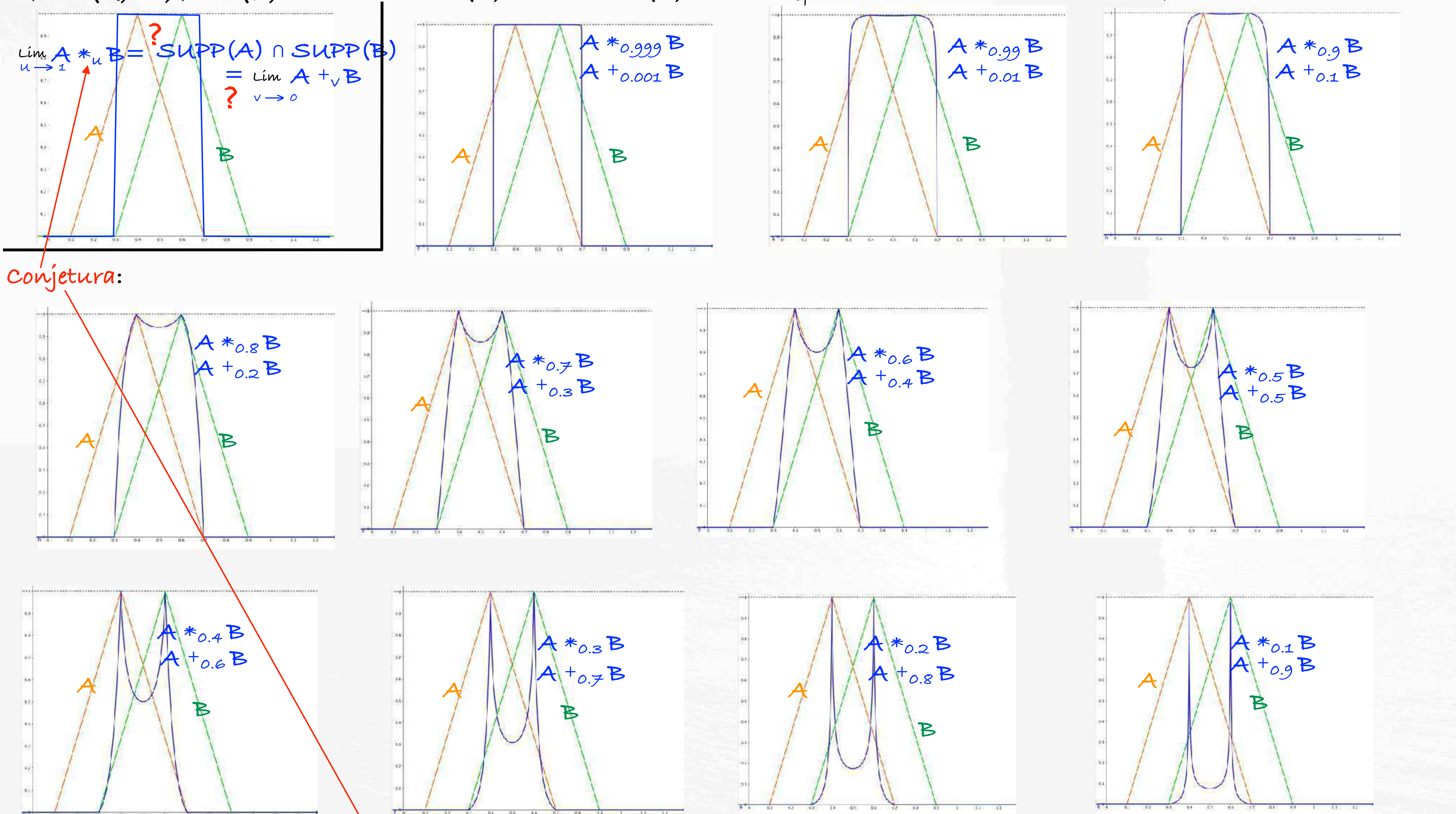


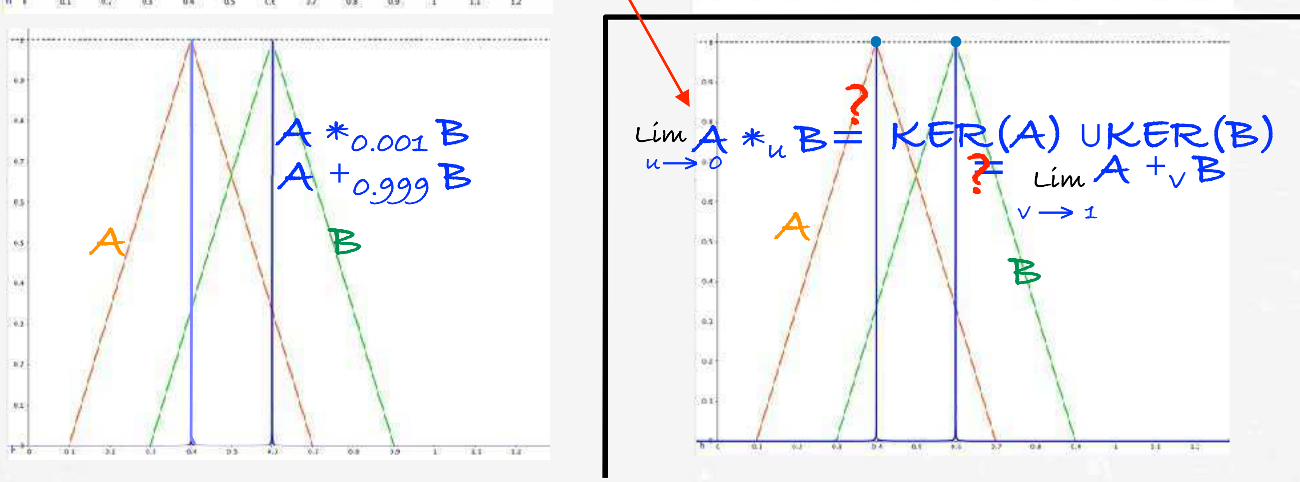
$u \in]0,1[$

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$$

KER(A)≠∅, KER(B)≠∅ KER(A) ≤ A ≤ SUPP(A) $A *_{sop} B =$ SUPP(A) ∩ SUPP(B) $A *_{KER} B =$ KER(A) ∪ KER(B)





$u \in]0,1[$

$$(A *_u B)(x) = A(x) *_u B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (A(x),B(x)) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \dfrac{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x)}{(1-u)\cdot A(x)\cdot B(x) + u\cdot(1-A(x))\cdot(1-B(x))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(A +_u B)(x) = 1-[(1-A(x)) *_u (1-B(x))]$$

$$\lim_{u\to1} A *_u B = \text{SUPP}(A) \cap \text{SUPP}(B) = \lim_{v\to0} A +_v B.\ ?$$

$$\lim_{u\to0} A *_u B = \text{KER}(A) \cup \text{KER}(B) = \lim_{v\to1} A +_v B.\ ?$$

¡Una cuestión abierta!

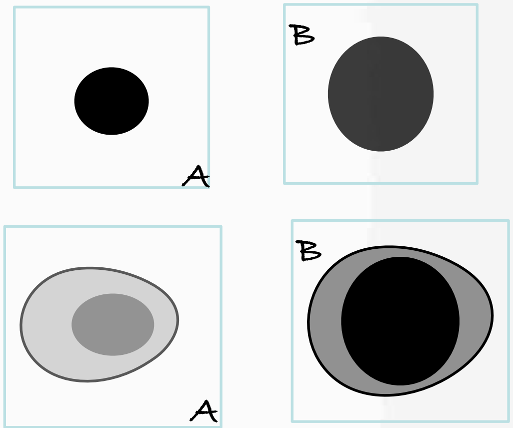
0. Preliminares

Morfología Matemática

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).



[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

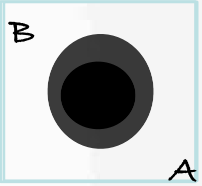
o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

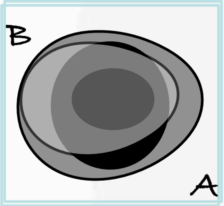
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,...,255}.

$A \subseteq B$



$A \leq B$



Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

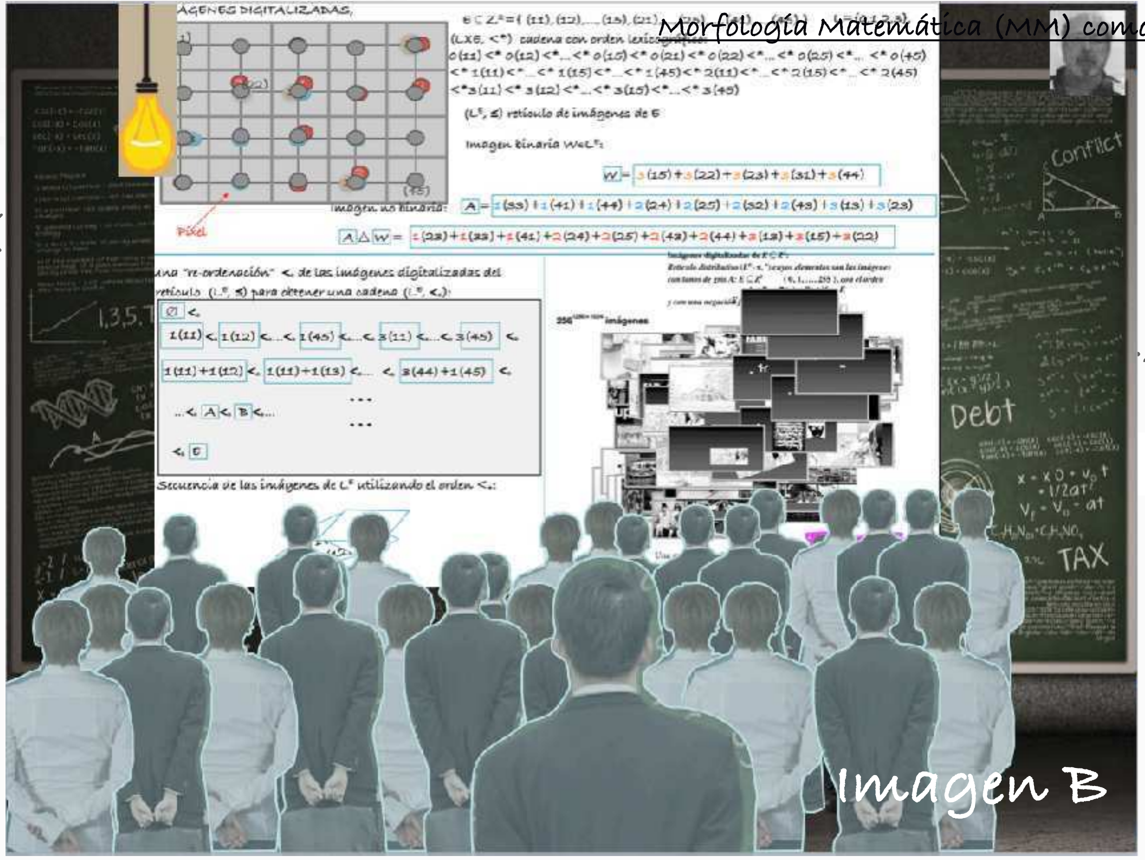


Imagen B

...,255 }.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

¿Fundamentos?

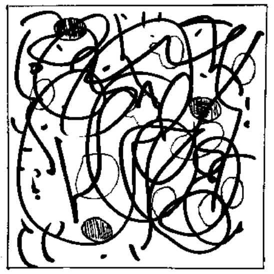


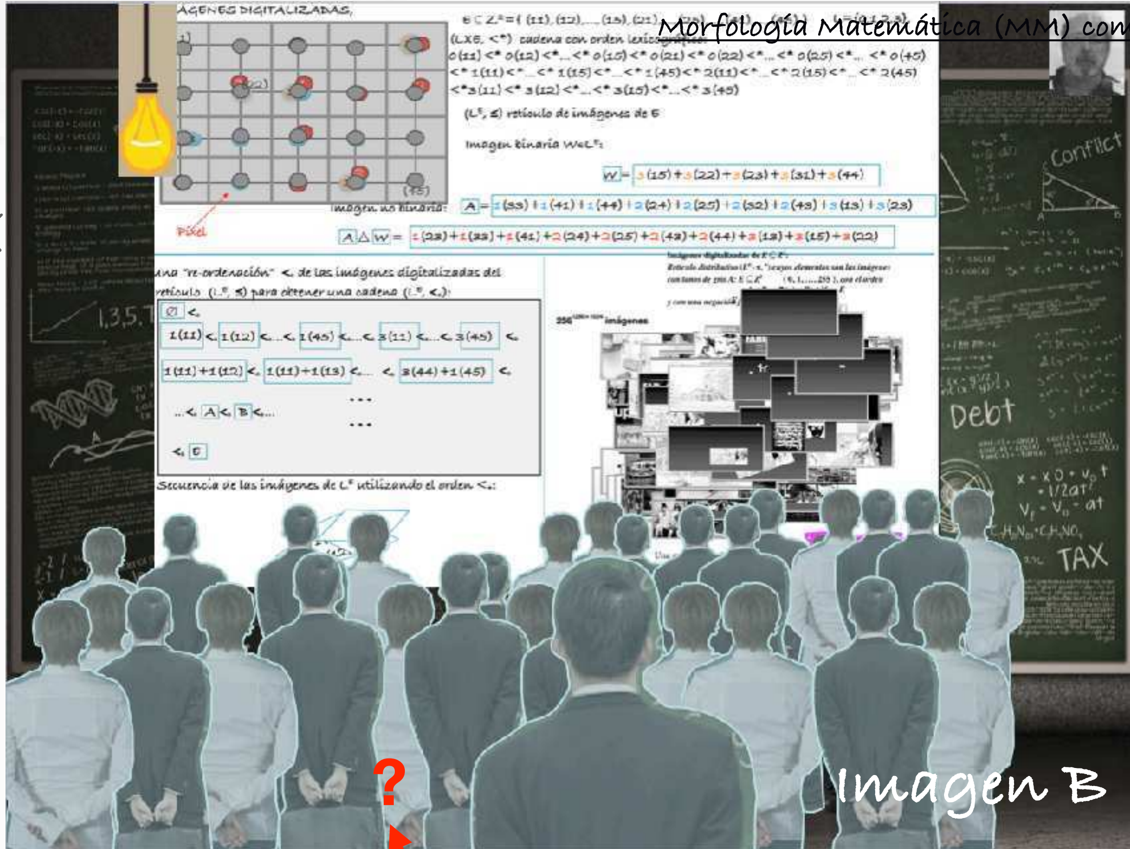
Imagen A

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemática (MM) como herramienta para el Tratamiento de Imágenes

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontaineblau).



,255 }.

¿Fundamentos?

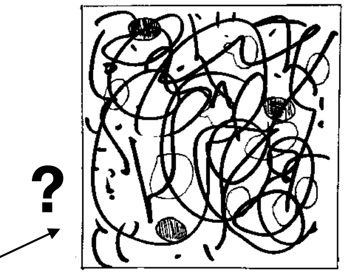
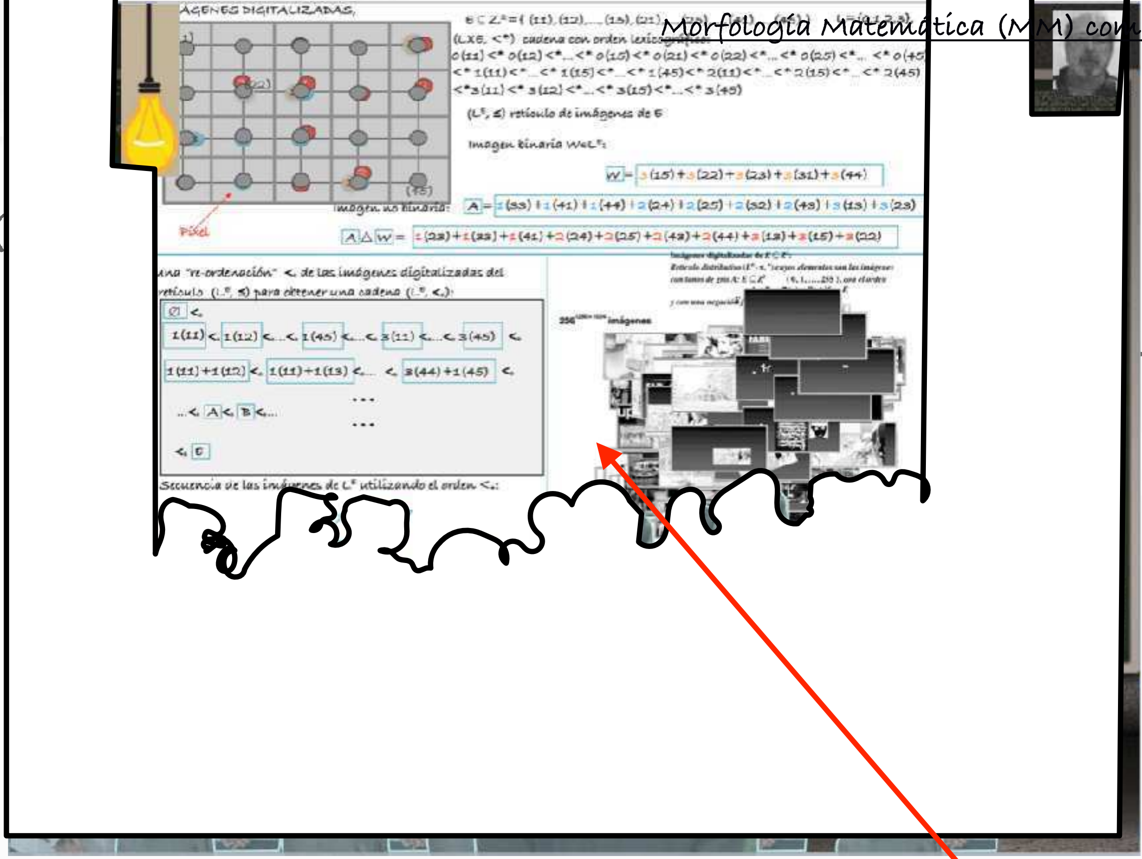


Imagen A

La percepción de una imagen
es una actividad compleja...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.



Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

¿Fundamentos?

,255 }.

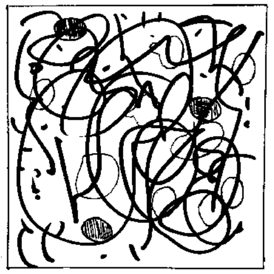


Imagen A

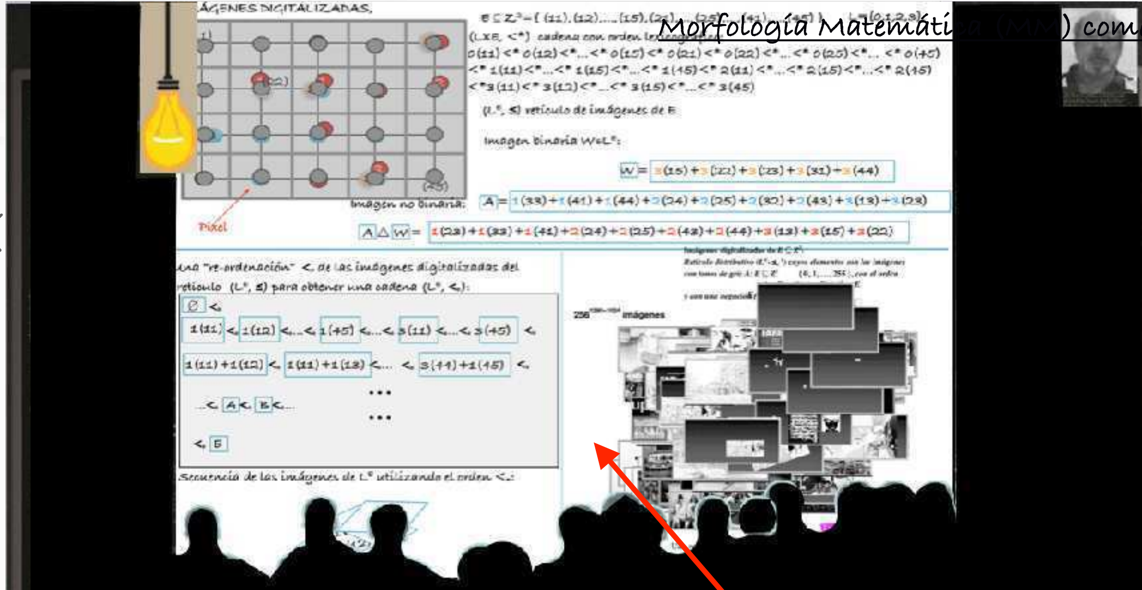
La percepción de una imagen es una actividad compleja...

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances .* Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).



¿Fundamentos?

,255 }.

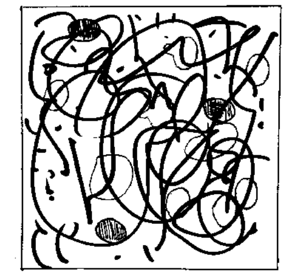


Imagen A

Filtrado: simplificación para obtener una imagen útil centrada en el punto de interés y prescindir de lo secundario...

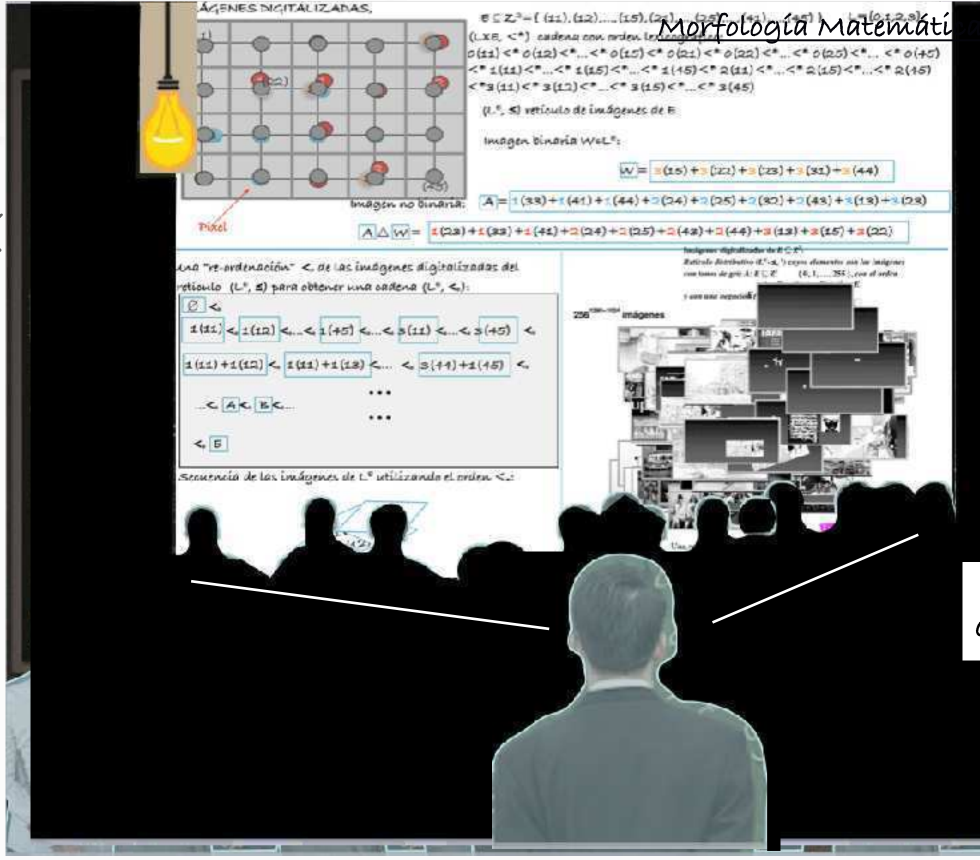
La percepción de una imagen es una actividad compleja...

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemáti[...] como herramienta para el Tratamiento de Imágenes



¿La simplificación como una "perspectiva"?

,255 }.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontaineblau).

¿Fundamentos?

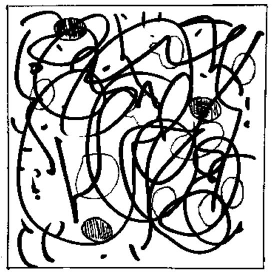


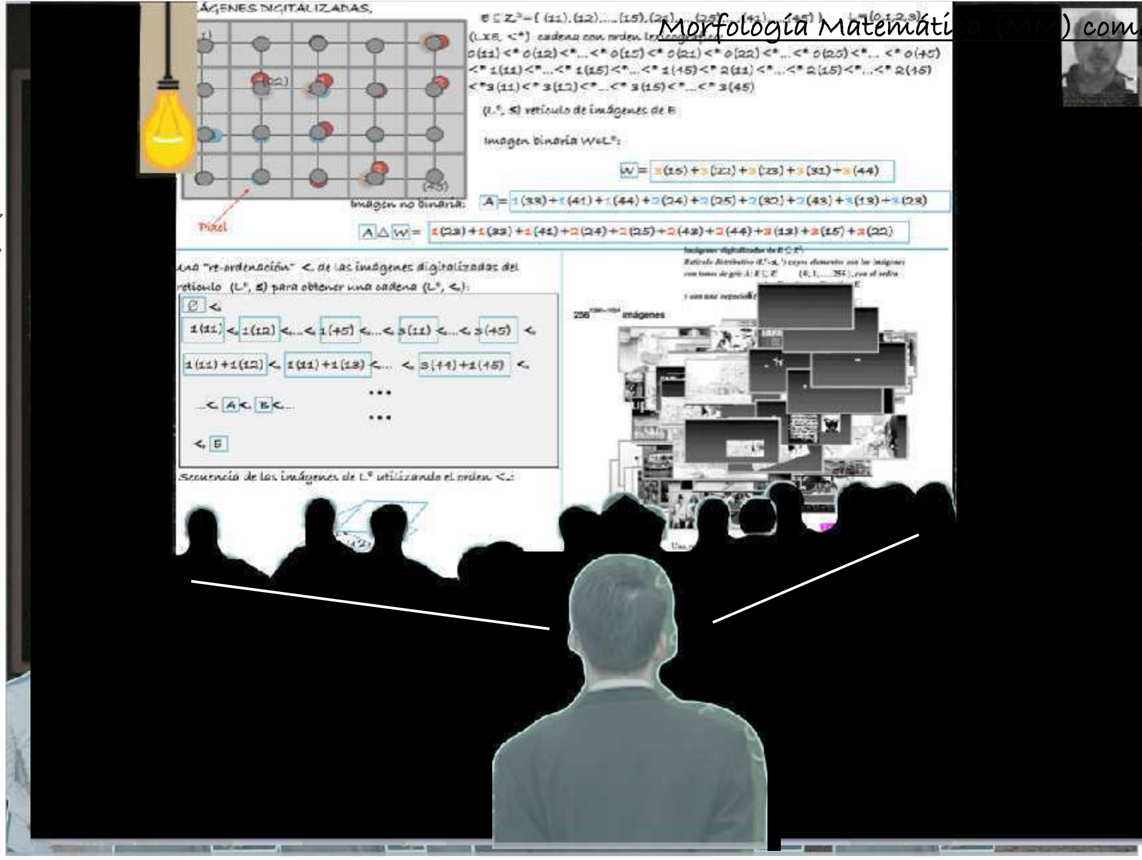
Imagen A

La percepción de una imagen es una actividad compleja...

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.



Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

¿Fundamentos?

...255 }.

Imagen estructurante R1:

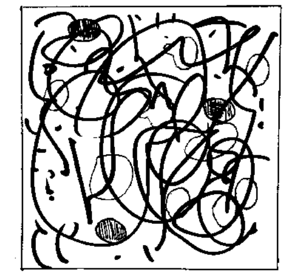
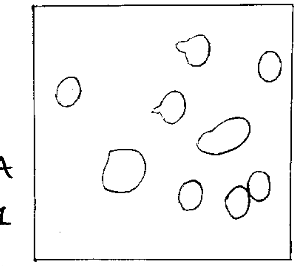


Imagen A

Filtrado de A mediante R1



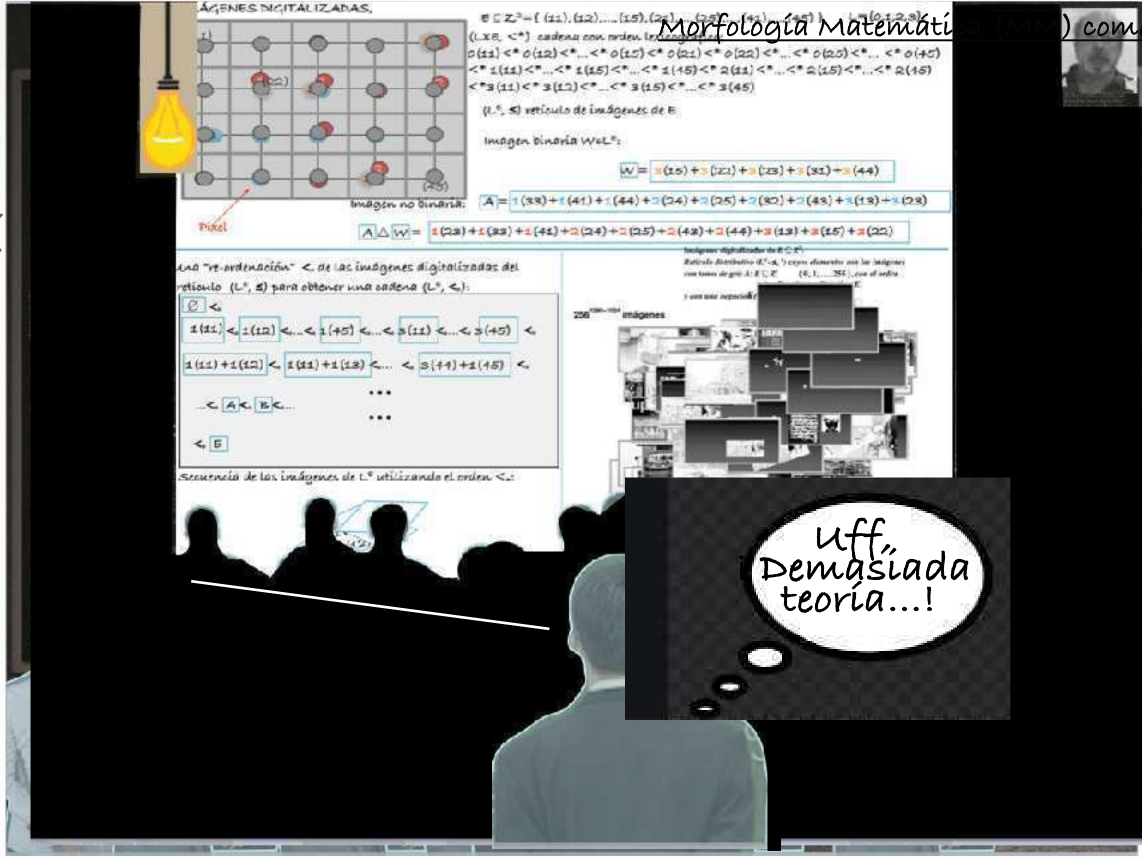
El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:

La percepción de una imagen es una actividad compleja...

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.



,255 }.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

Imagen estructurante R1:

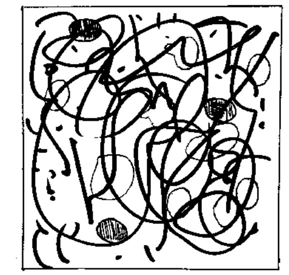
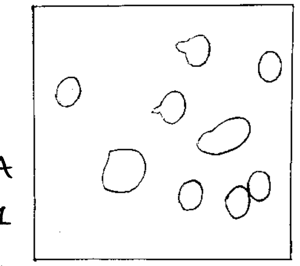


Imagen A



El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:

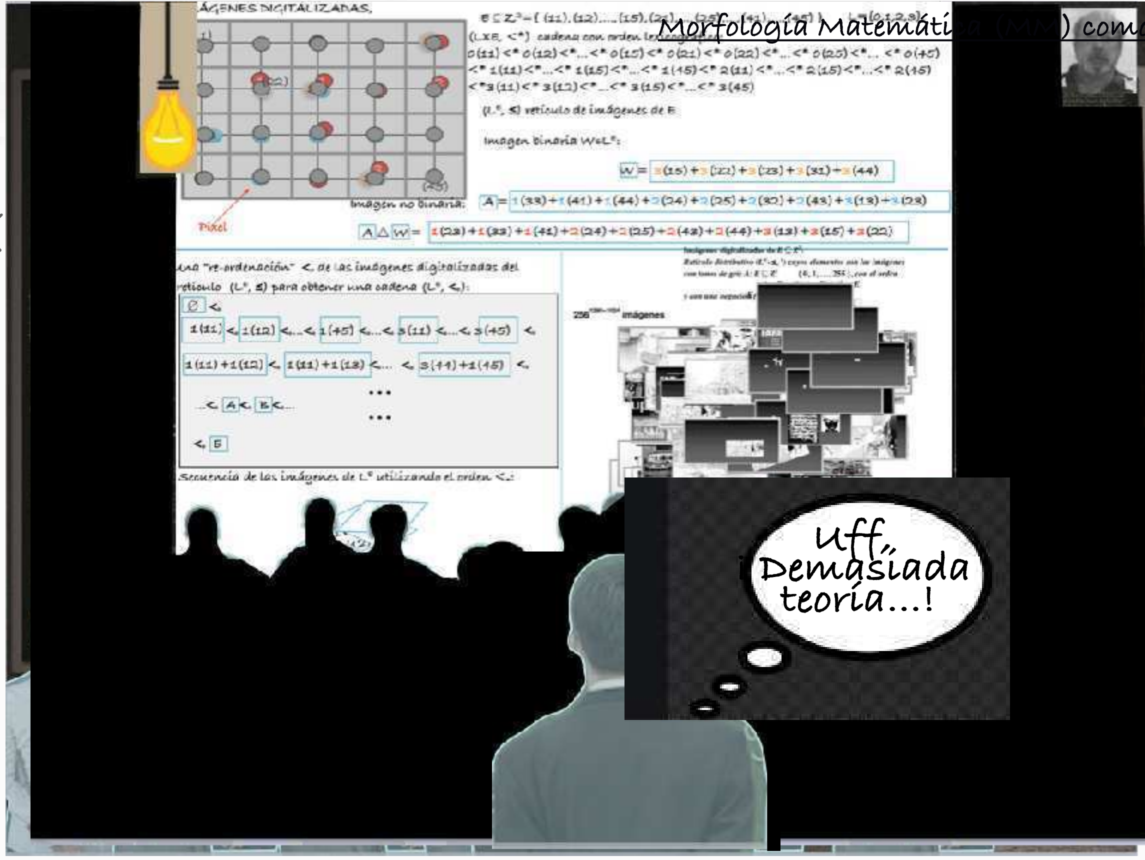
La percepción de una imagen es una actividad compleja...

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

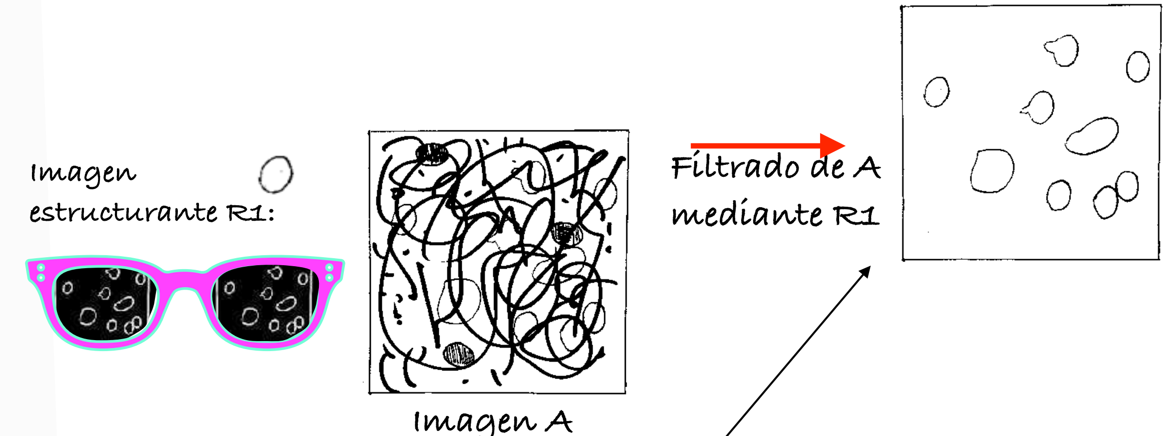
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemáti... como herramienta para el Tratamiento de Imágenes

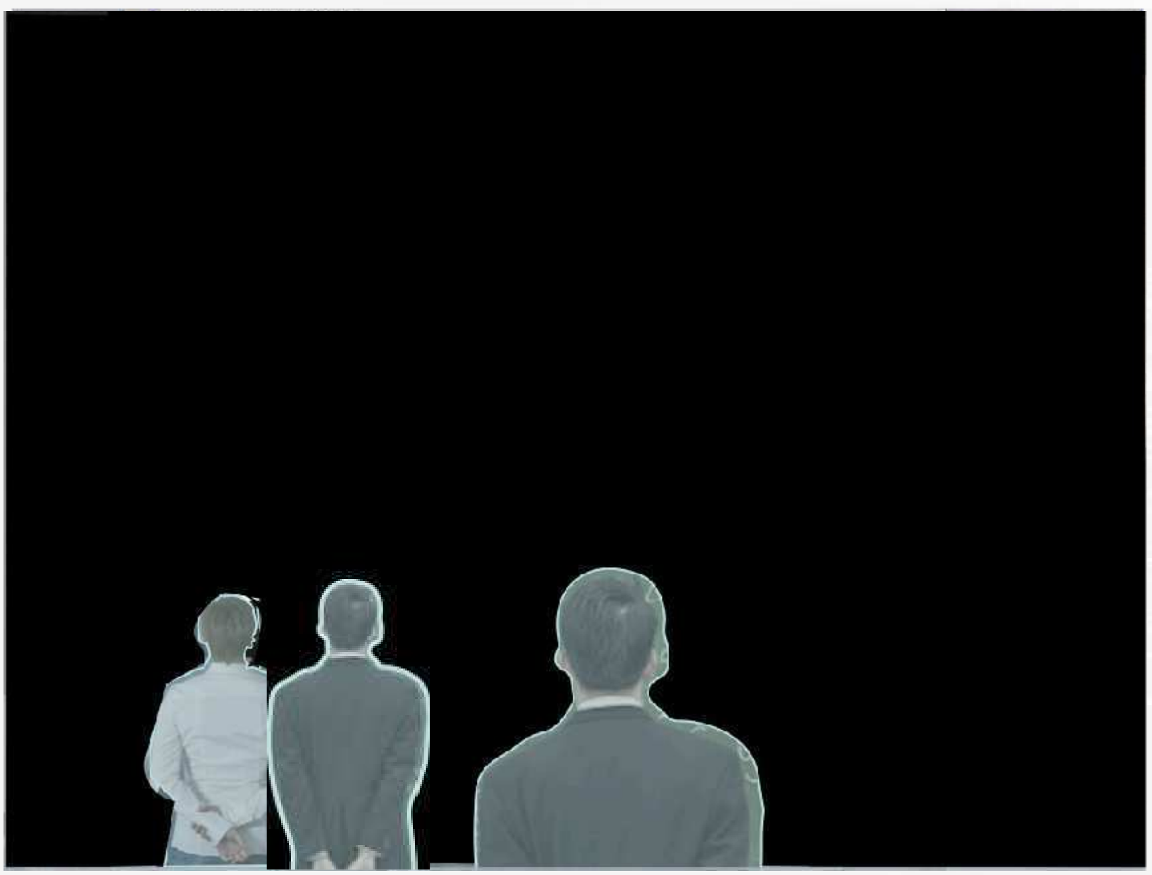


...255 }.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68). G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).



El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:

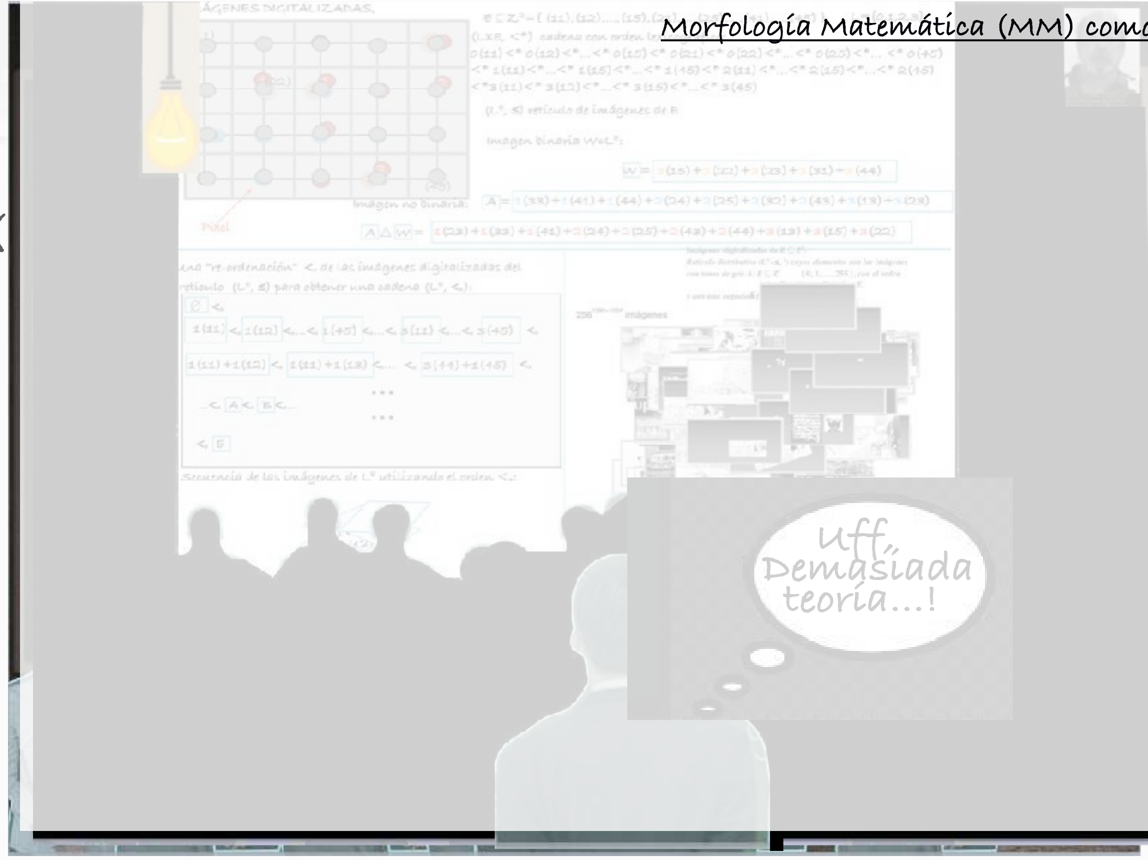


Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances .* Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).

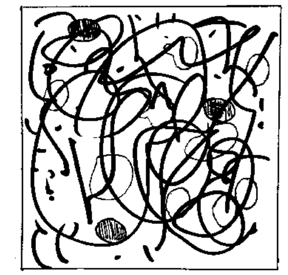


255 }.

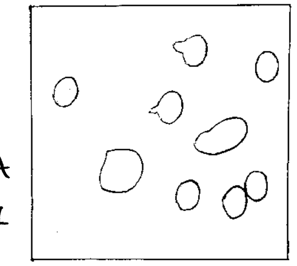
Imagen estructurante R1:

Imagen A

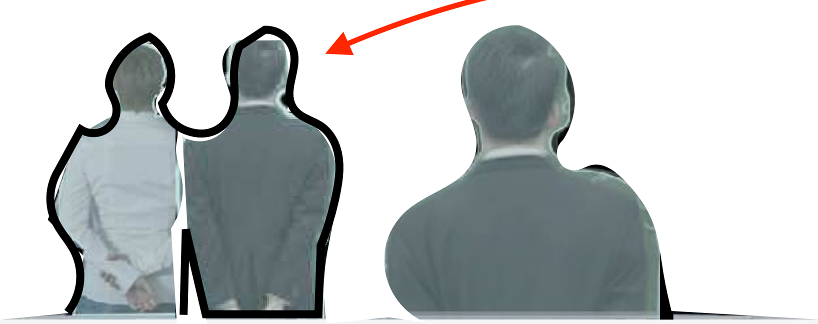
Filtrado de A mediante R1



El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:



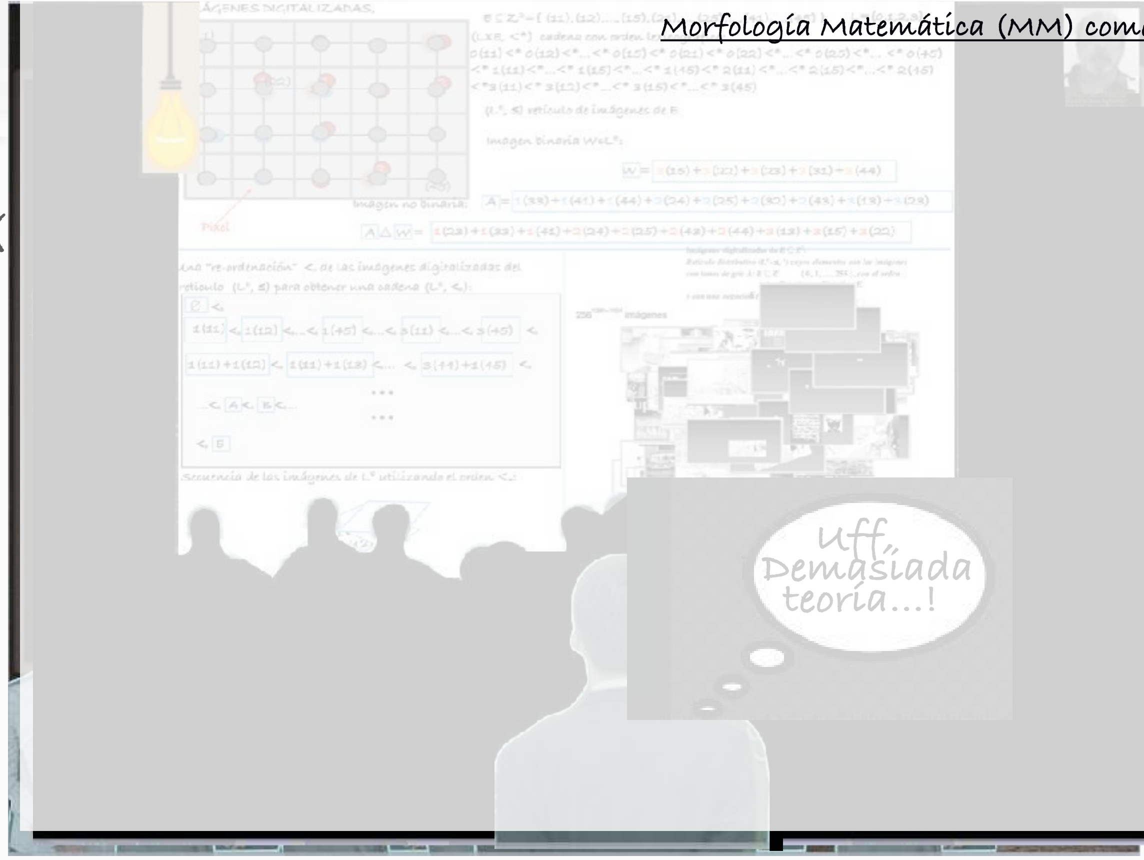
Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...



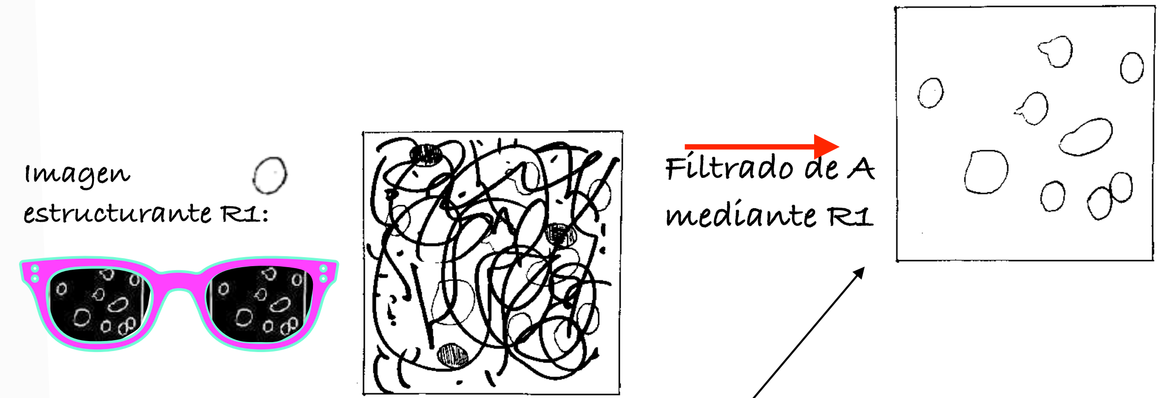
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68).
G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontainebleau).



255 }.



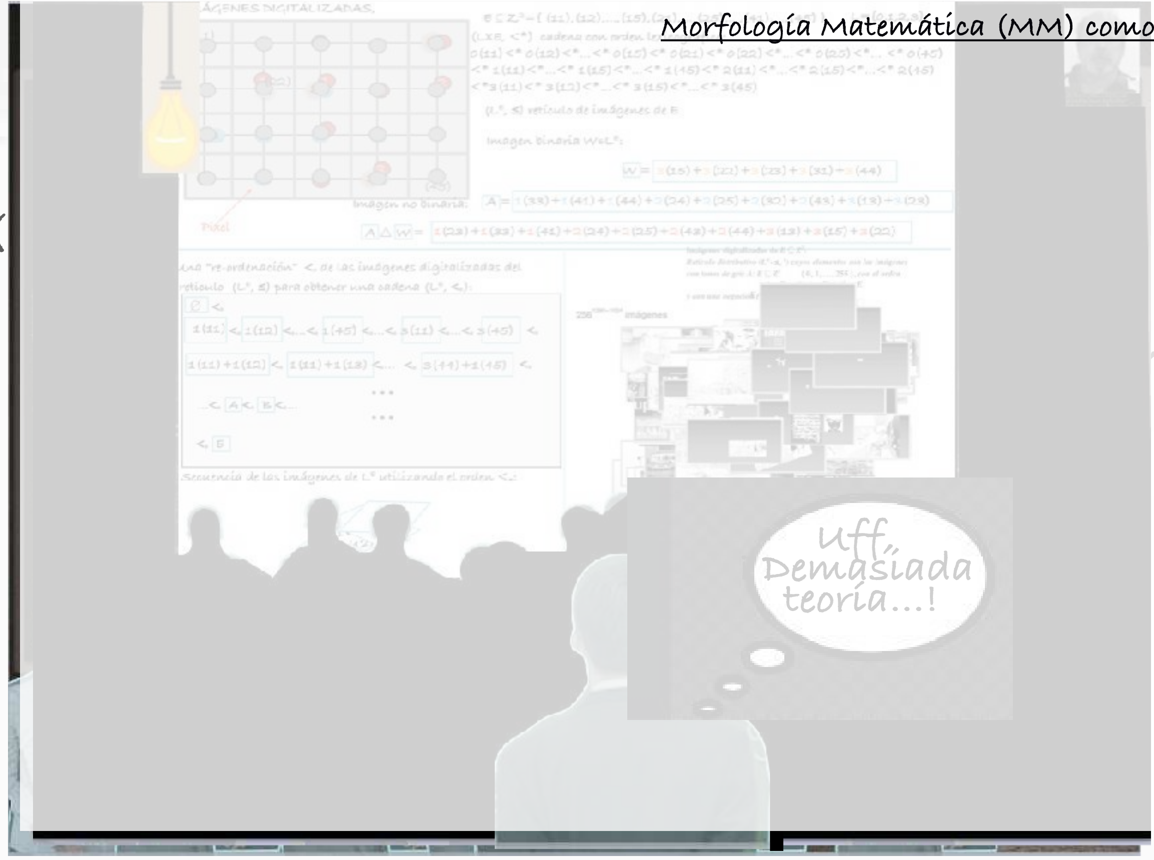
El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...

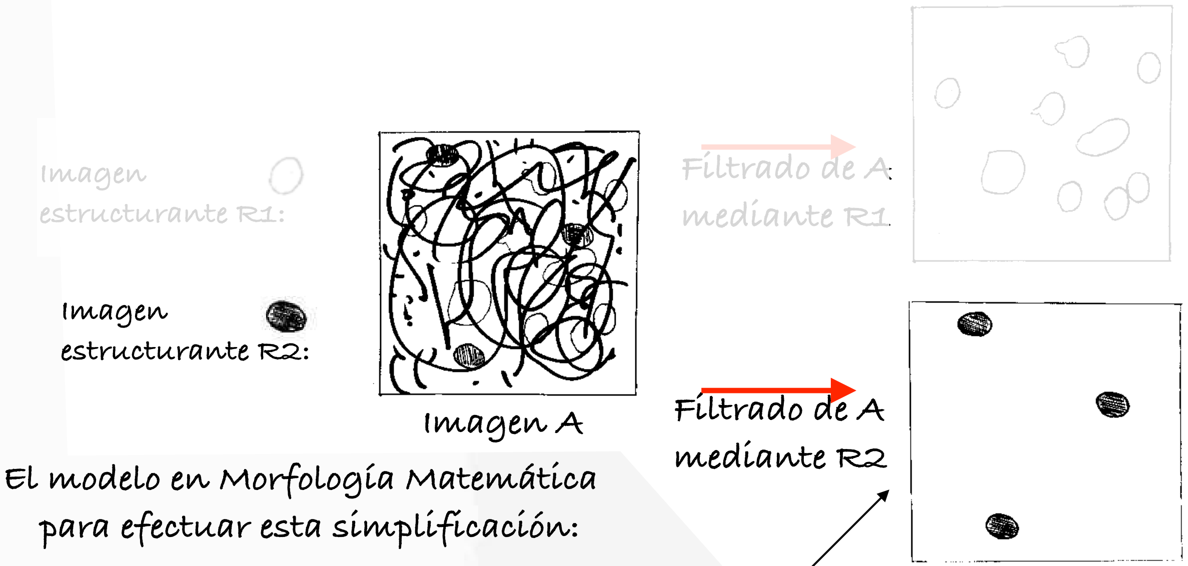
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Origen: Estudio de la estructura en imágenes obtenidas de medios porosos (1964-68). G. Matheron y J. Serra. (École National Supérieure de Mines de Paris. Fontaineblau).

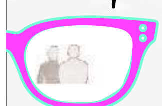


255 }.



El modelo en Morfología Matemática para efectuar esta simplificación:

Los procesos de "entender" una imagen, o conseguir que sea "útil" en un contexto determinado etc., consisten en efectuar simplificaciones de la misma...



Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 17–108.

A, B,… imágenes del plano A,B,…: $R^2 \rightarrow L$

o imágenes digitalizadas A,B,…: $Z^2 \rightarrow L$.

(L^{Z^2}, ≤) retículo distributivo de imágenes A,B,…

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,…,255}.

A

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

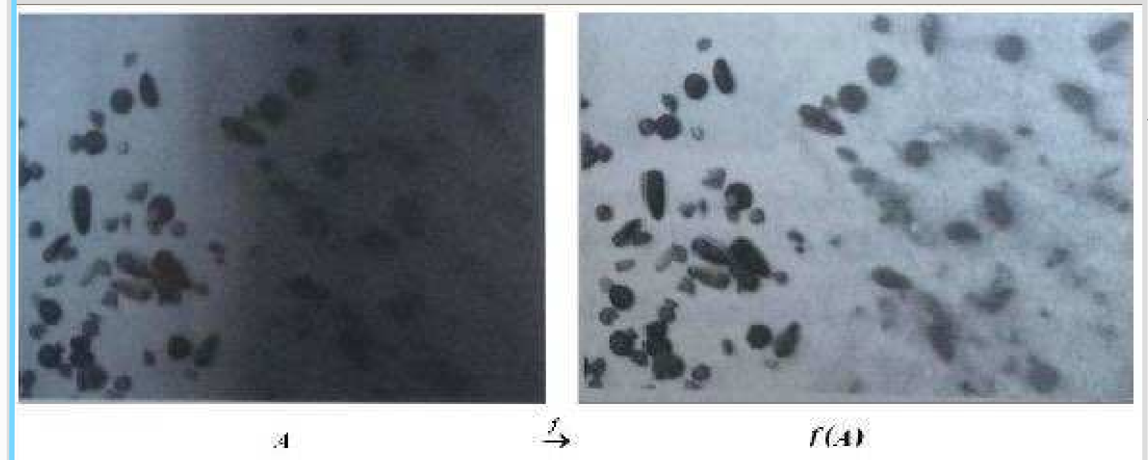
o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

(L^{Z^2}, $\leq$) retículo distributivo de imágenes A,B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,...,255\}$.

f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.



Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

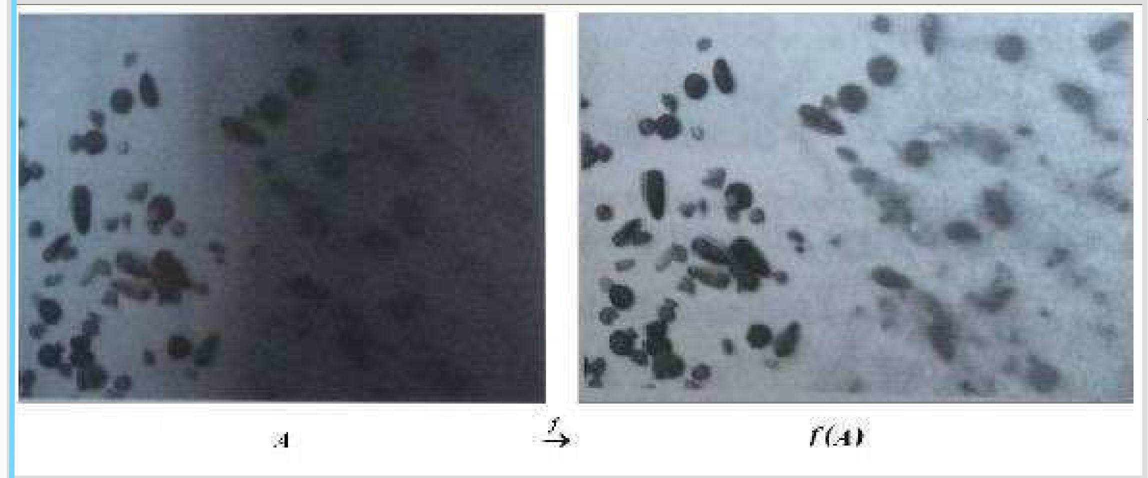
o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

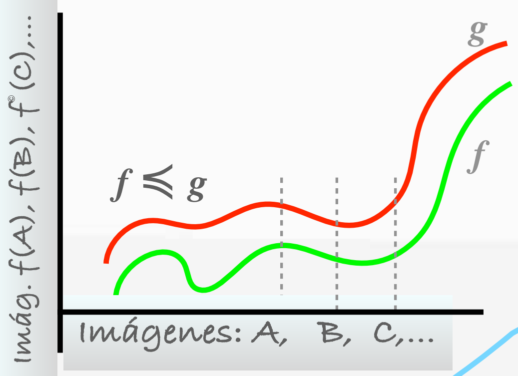
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,...,255}.

f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.



El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \dots$ imágenes del plano $A, B, \dots : \mathbb{R}^2 \to L$

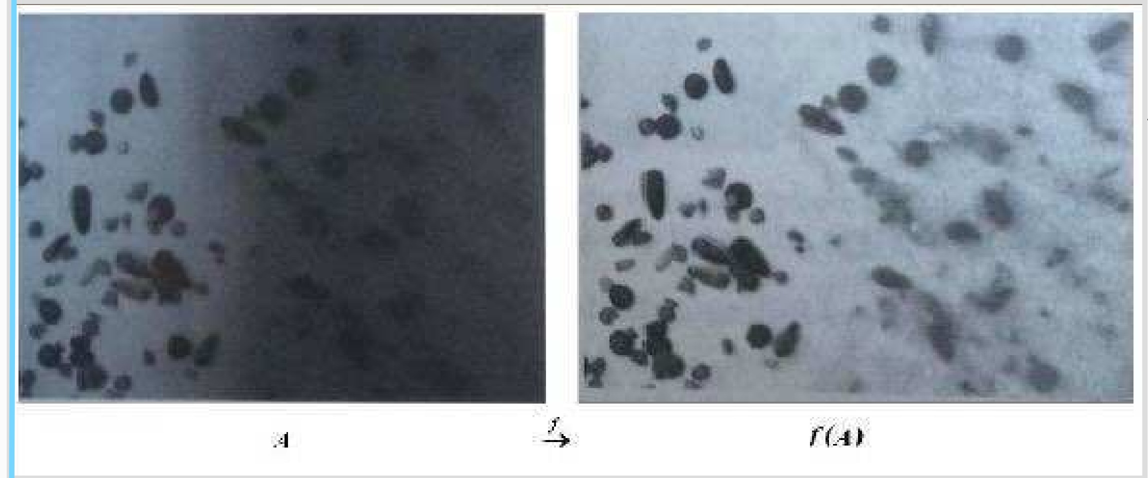
o imágenes digitalizadas $A, B, \dots : \mathbb{Z}^2 \to L$.

$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \dots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

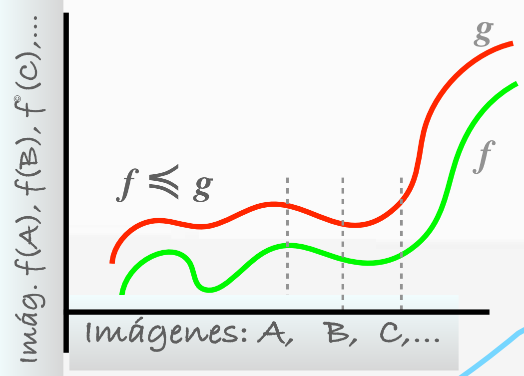
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\dots,255\}$.

$f: L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.



El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \dots$ es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$

distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,… imágenes del plano A,B,…: $\mathbb{R}^2 \to L$

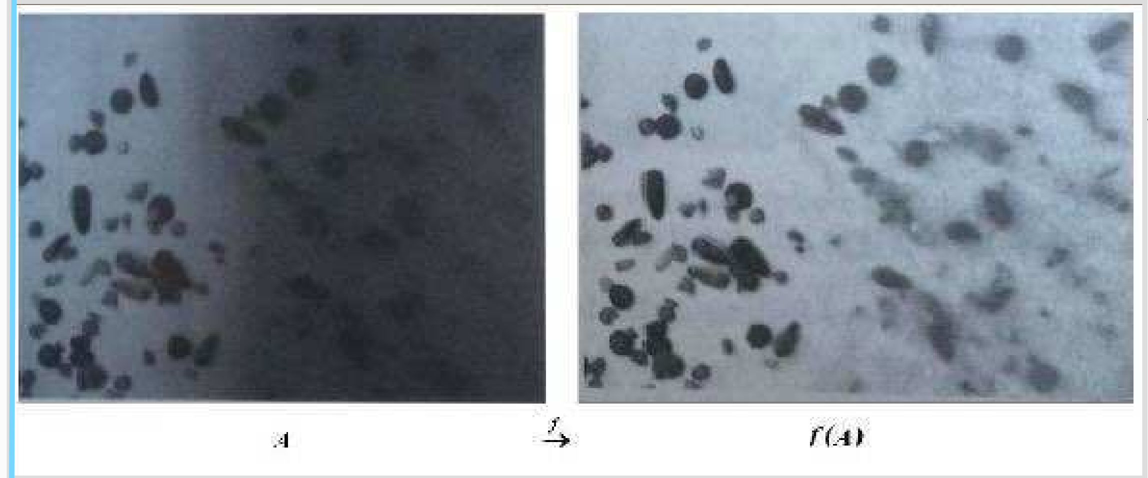
o imágenes digitalizadas A,B,…: $\mathbb{Z}^2 \to L$.

$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,…

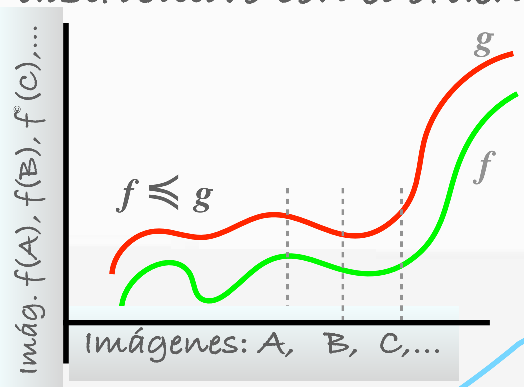
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\dots,255\}$.

f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.



El conjunto de filtros morfológicos f, g,… es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: <u>APERTURA</u> $\gamma_R=\delta_{\check{R}}\circ\varepsilon_R$ y <u>CIERRE</u> $\phi_R=\varepsilon_{\check{R}}\circ\delta_R$, con $\check{R}=\{-p/p\in R\}$.

Operador <u>EROSIÓN</u> de imágenes $A\subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R\subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A)=\{x\in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con <u>tonos de gris</u>:

$\varepsilon_R(A)(x)=\inf\{A(x+y)-B(y) / y\in Dom(B)\}$.

Operador <u>DILATACIÓN</u>

$\delta_R(A)=\{x\in \mathbb{Z}^2 / R_x\cap A \neq\emptyset\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

Y para imágenes con <u>tonos de gris</u>:

$\delta_R(A)(x)=\sup\{A(x+y)+B(y) / y\in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,… imágenes del plano A,B,…: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,…: $Z^2 \to L$.

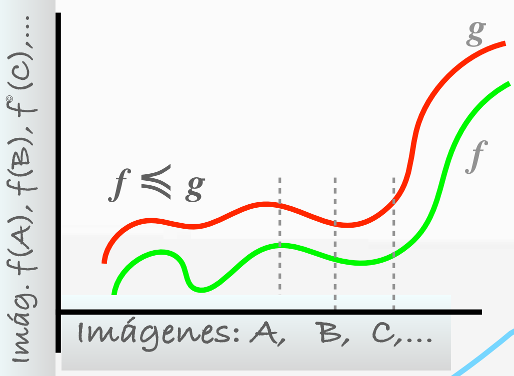
(L^{Z^2}, $\leq$) retículo distributivo de imágenes A,B,…

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,…,255}.

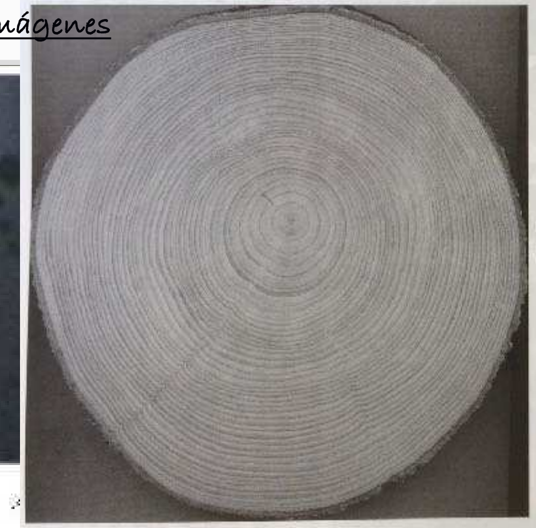
f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

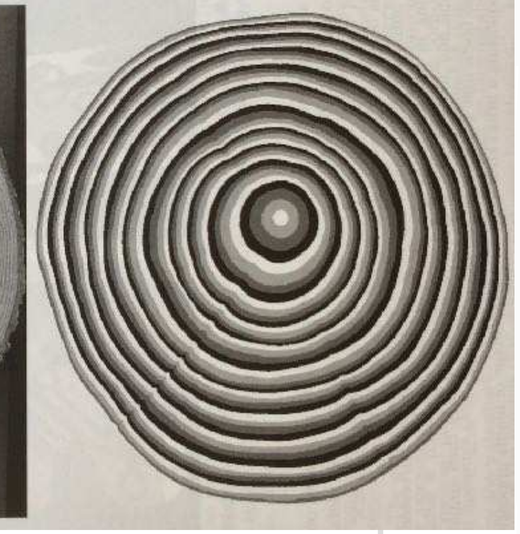
El conjunto de filtros morfológicos f, g,… es un retículo (L^{Z^2}, $\preccurlyeq$) distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)





Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

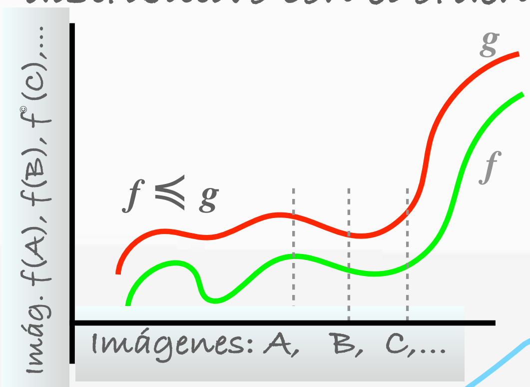
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances.* Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$
o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

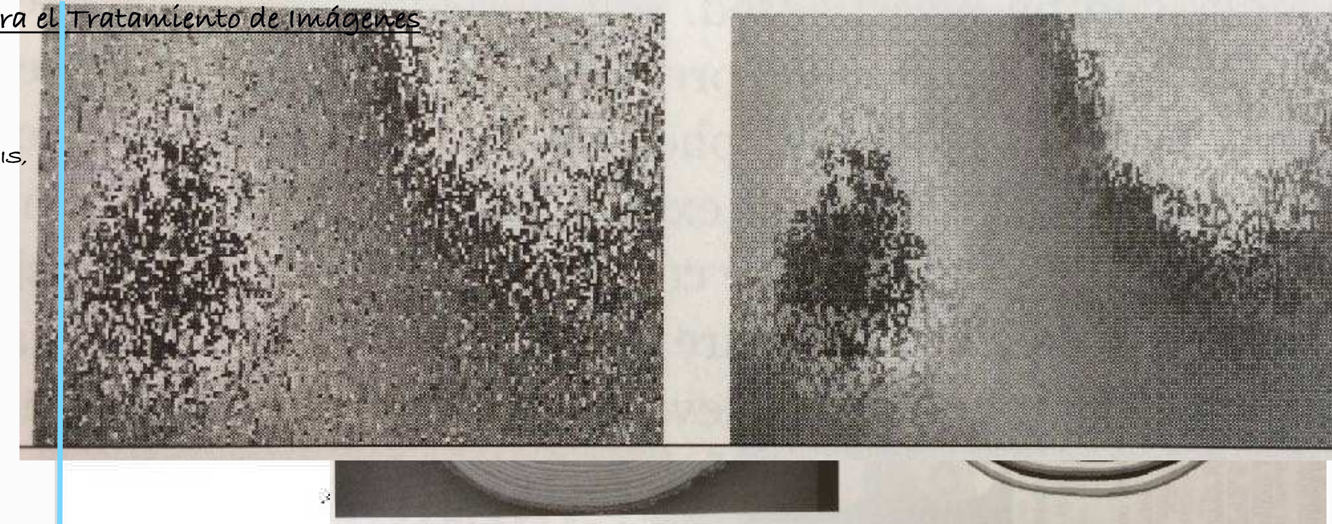
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ y DILATACIÓN $\boldsymbol{\delta}_R$

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:
$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).
(R_x es el trasladado de R por x).
Para imágenes A y B con tonos de gris:
$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN
$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).
Y para imágenes con tonos de gris:
$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

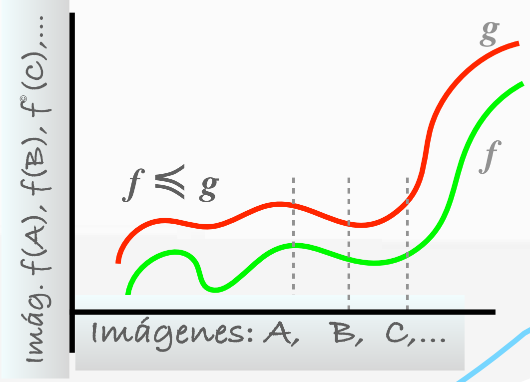
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots: R^2 \to L$
o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots: Z^2 \to L$.

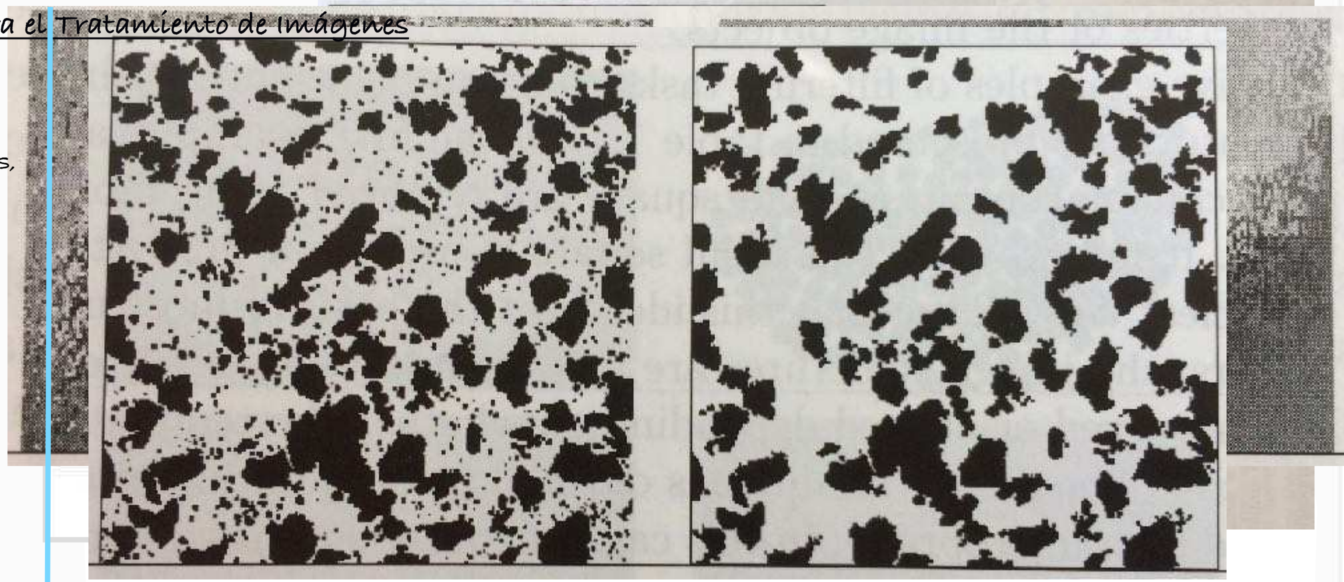
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p/p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:
$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).
(R_x es el trasladado de R por x).
Para imágenes A y B con tonos de gris:
$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN
$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).
Y para imágenes con tonos de gris:
$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

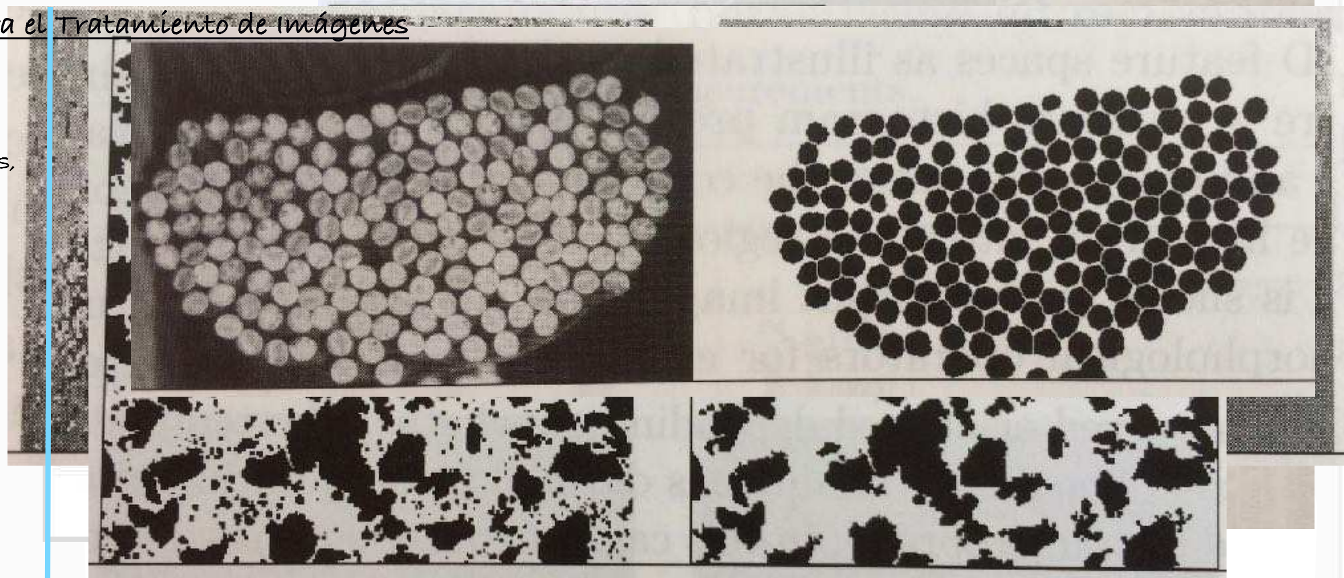
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



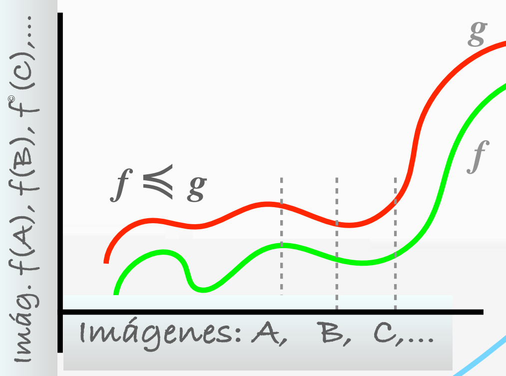
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,...,255}.

f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances.* Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

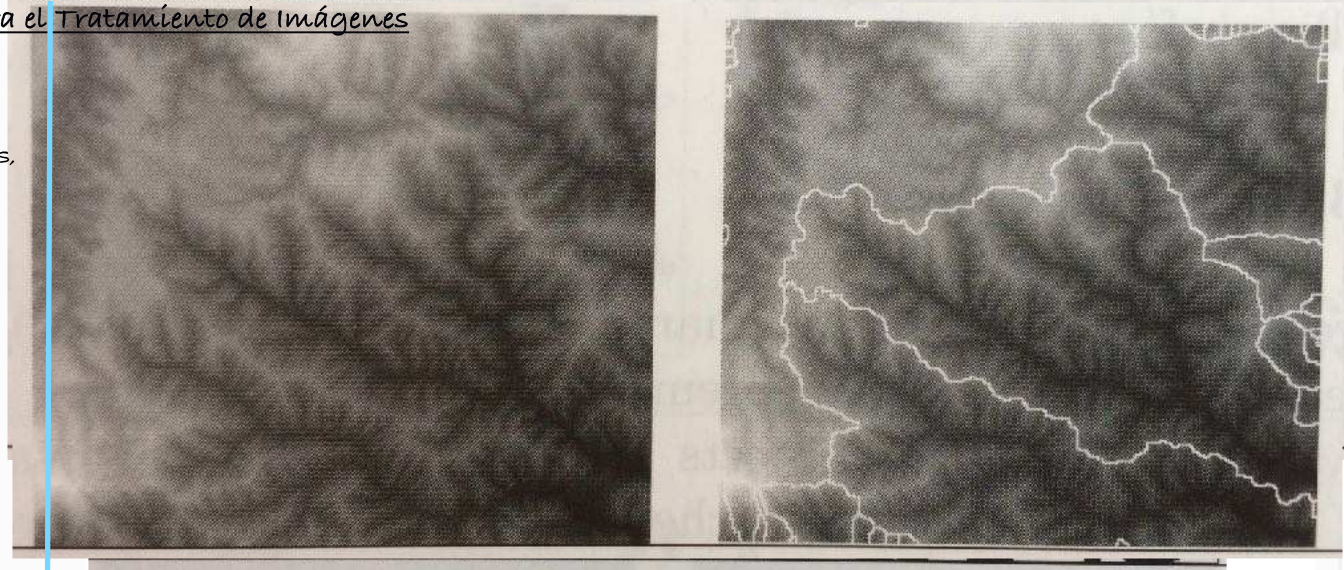
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



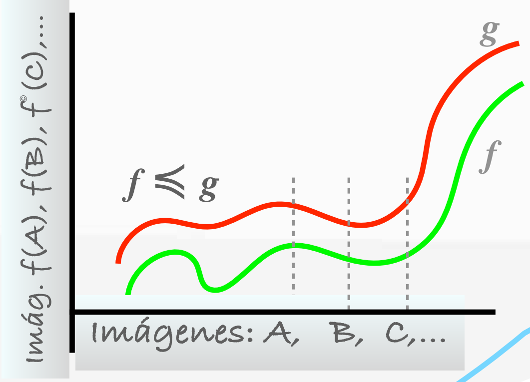
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

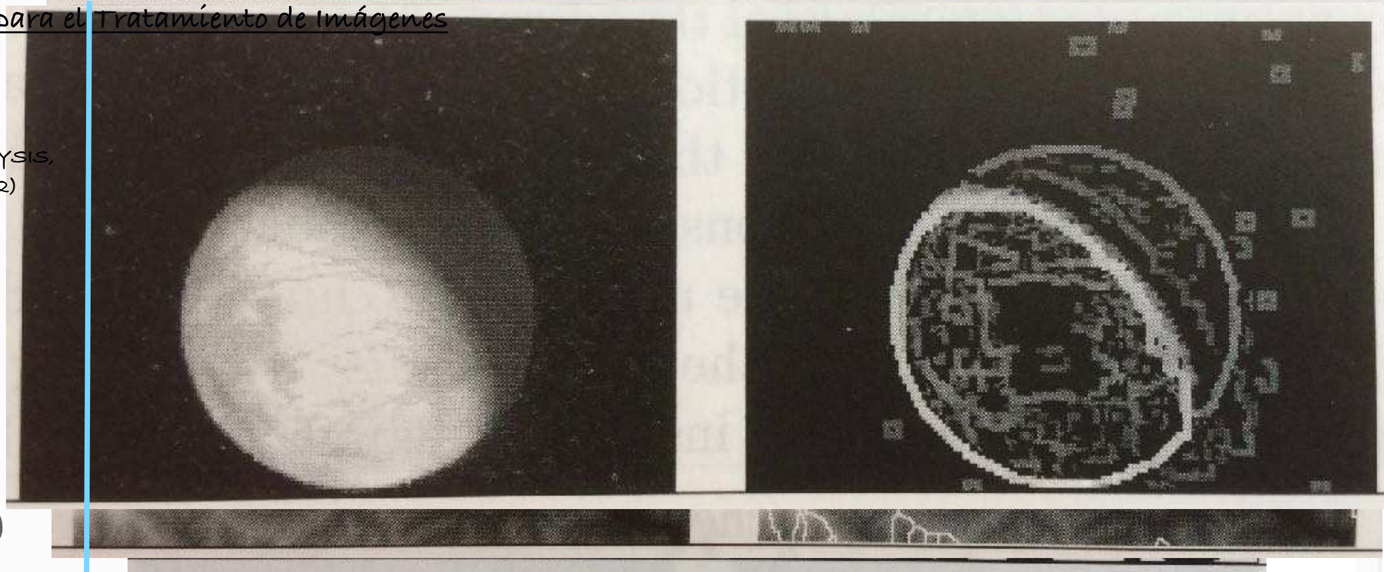
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



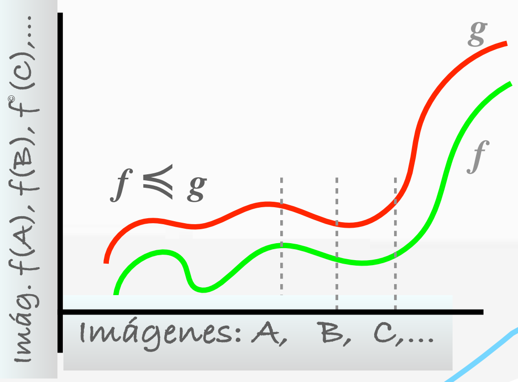
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R=\delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R=\varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R}=\{-p/p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A)=\{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x)=\inf\{A(x+y)-B(y) / y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A)=\{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x)=\sup\{\{A(x+y)+B(y) / y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

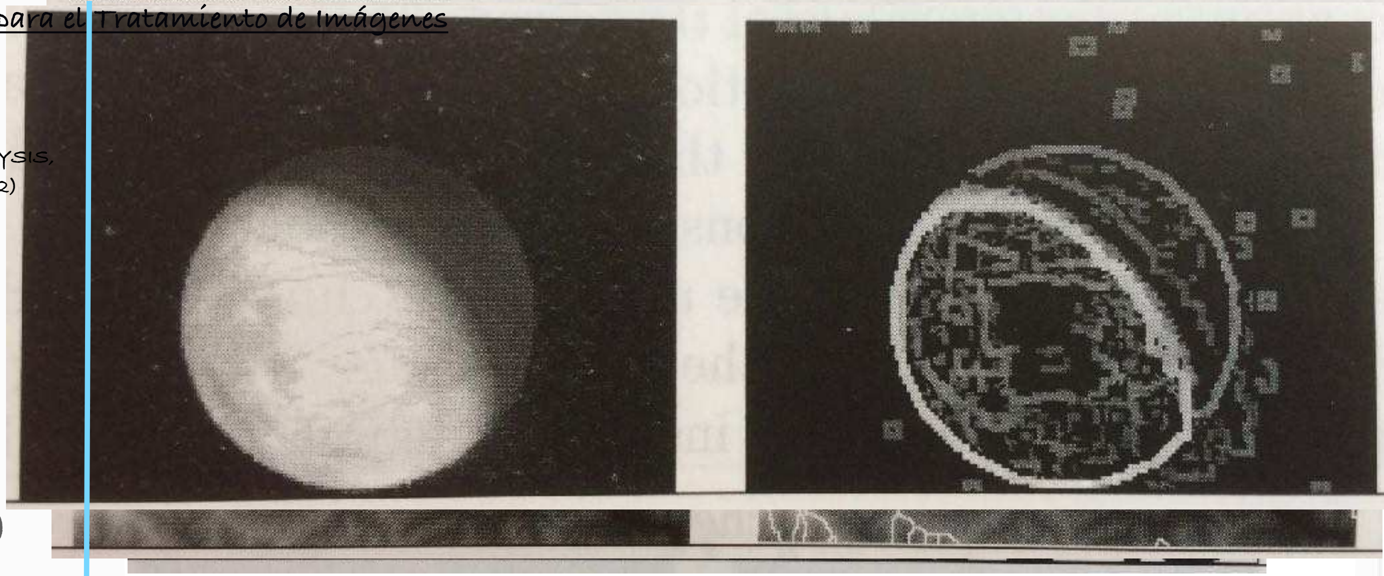
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R1} - f_{R2}$,
o en paralelo: $g_1 = f_{R1} \wedge f_{R2}$, $g_2 = f_{R1} \vee f_{R2}$,
o en serie: $h = f_{R1} \circ f_{R2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).
(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:
$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:
$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

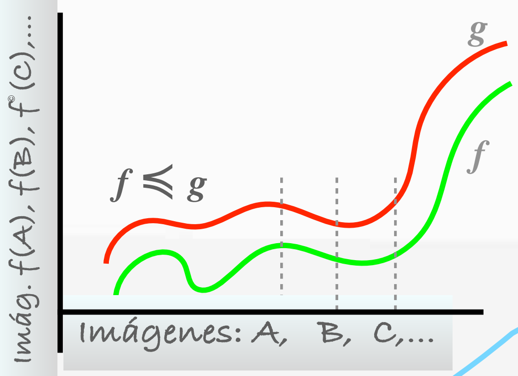
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

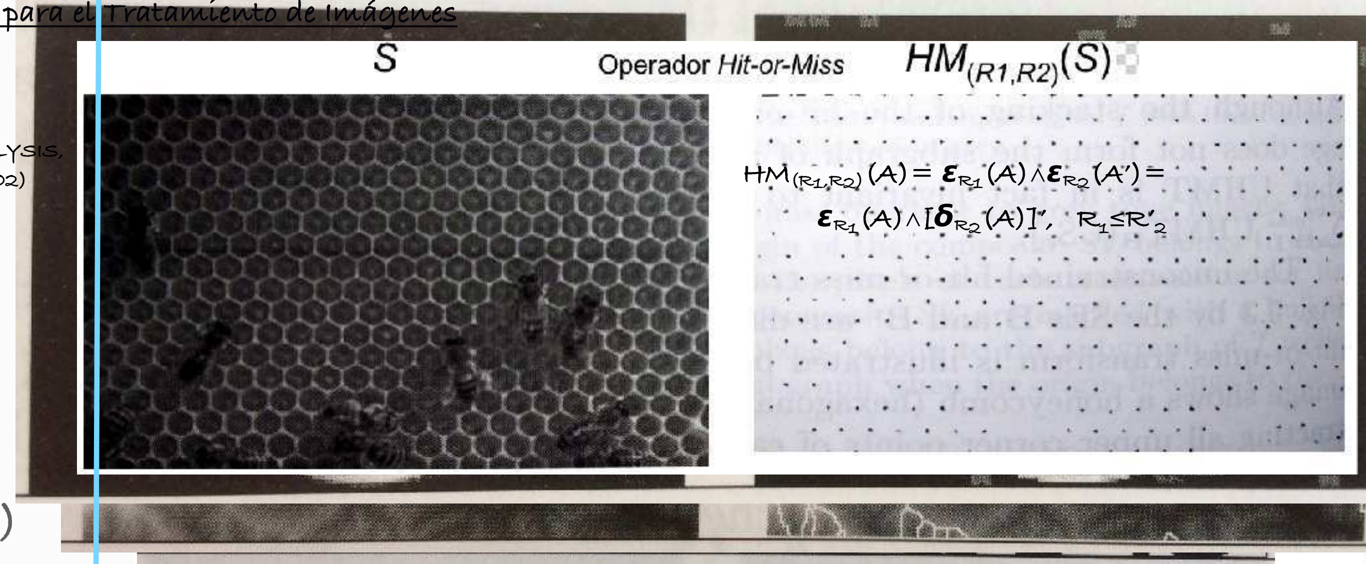
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A





$HM_{(R_1,R_2)}(A) = \varepsilon_{R_1}(A) \wedge \varepsilon_{R_2}(A') = \varepsilon_{R_1}(A) \wedge [\delta_{R_2}(A)]'$, $R_1 \leq R'_2$

Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

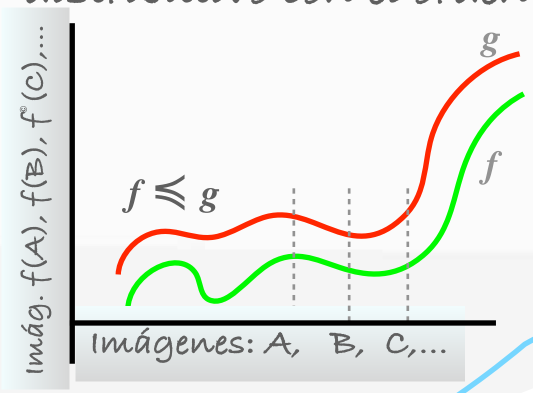
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L = 2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L = \{0, 1, \ldots, 255\}$.

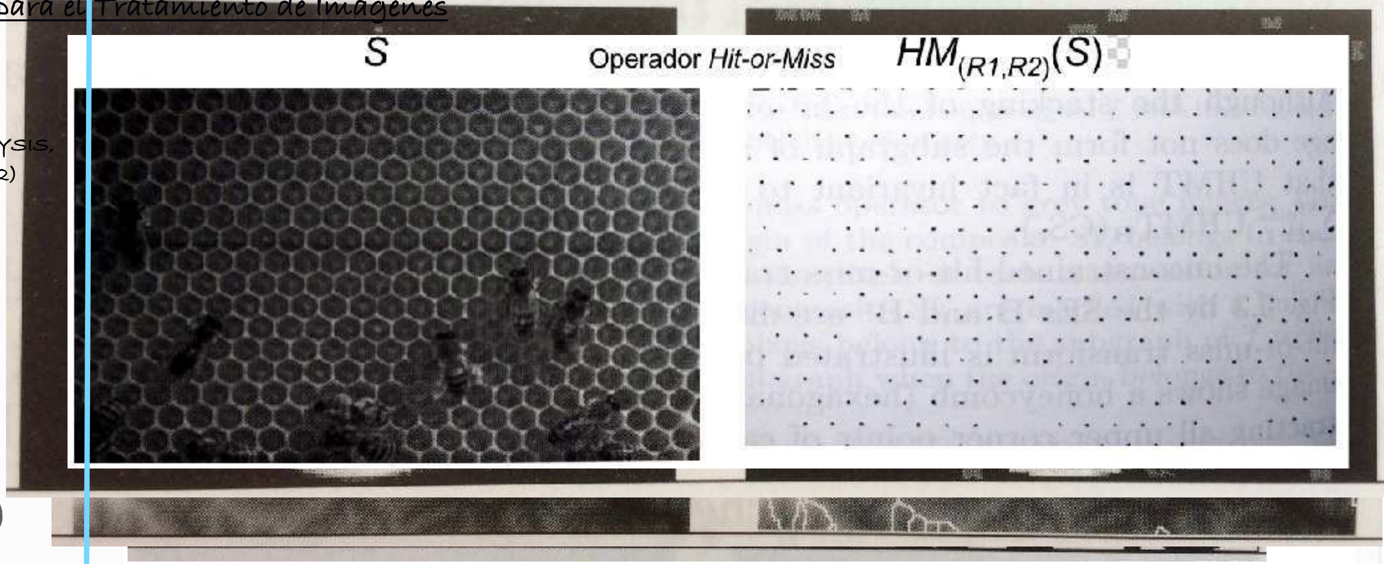
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P. Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



$$HM_{(R_1,R_2)}(A) = \varepsilon_{R_1}(A) \wedge \varepsilon_{R_2}(A') = \varepsilon_{R_1}(A) \wedge [\delta_{R_2}(A)]', \quad R_1 \leq R'_2$$

Operadores básicos para construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots: R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots: Z^2 \to L$.

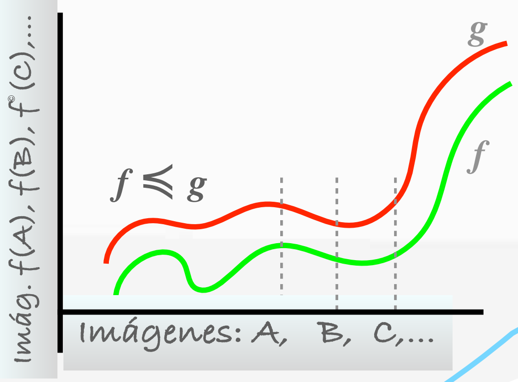
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

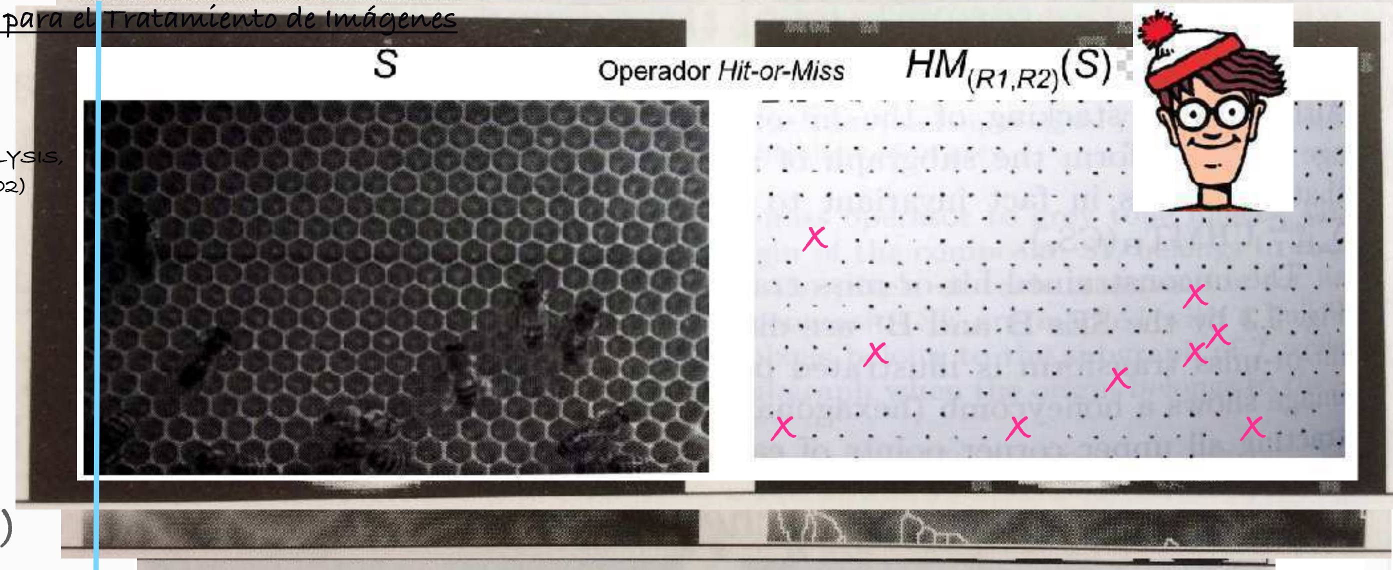
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



$$HM_{(R_1,R_2)}(A) = \boldsymbol{\varepsilon}_{R_1}(A) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{R_2}(A') =$$

¡Filtro localizador! $\boldsymbol{\varepsilon}_{R_1}(A) \wedge [\boldsymbol{\delta}_{R_2}(A)]'$, $R_1 \leq R'_2$

Operadores básicos para construir los filtros: EROSIÓN $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ y DILATACIÓN $\boldsymbol{\delta}_R$

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances.* Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)

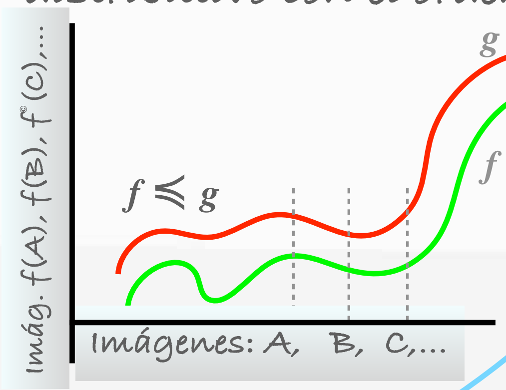
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R1} - f_{R2}$,
o en paralelo: $g_1 = f_{R1} \wedge f_{R2}$, $g_2 = f_{R1} \vee f_{R2}$,
o en serie: $h = f_{R1} \circ f_{R2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

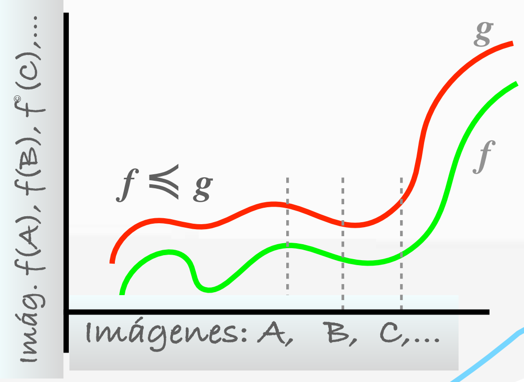
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

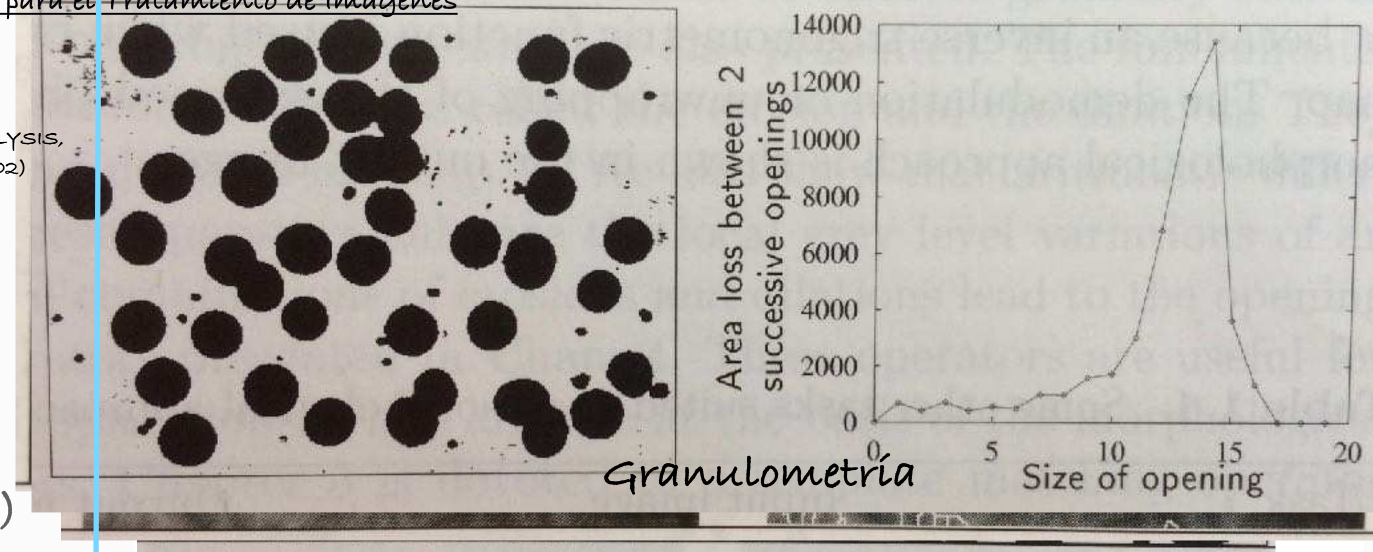
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



Granulometría

Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: <u>APERTURA</u> $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y <u>CIERRE</u> $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador <u>EROSIÓN</u> de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con <u>tonos de gris</u>:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador <u>DILATACIÓN</u>

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

Y para imágenes con <u>tonos de gris</u>:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A,B,\ldots: R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A,B,\ldots: Z^2 \to L$.

$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

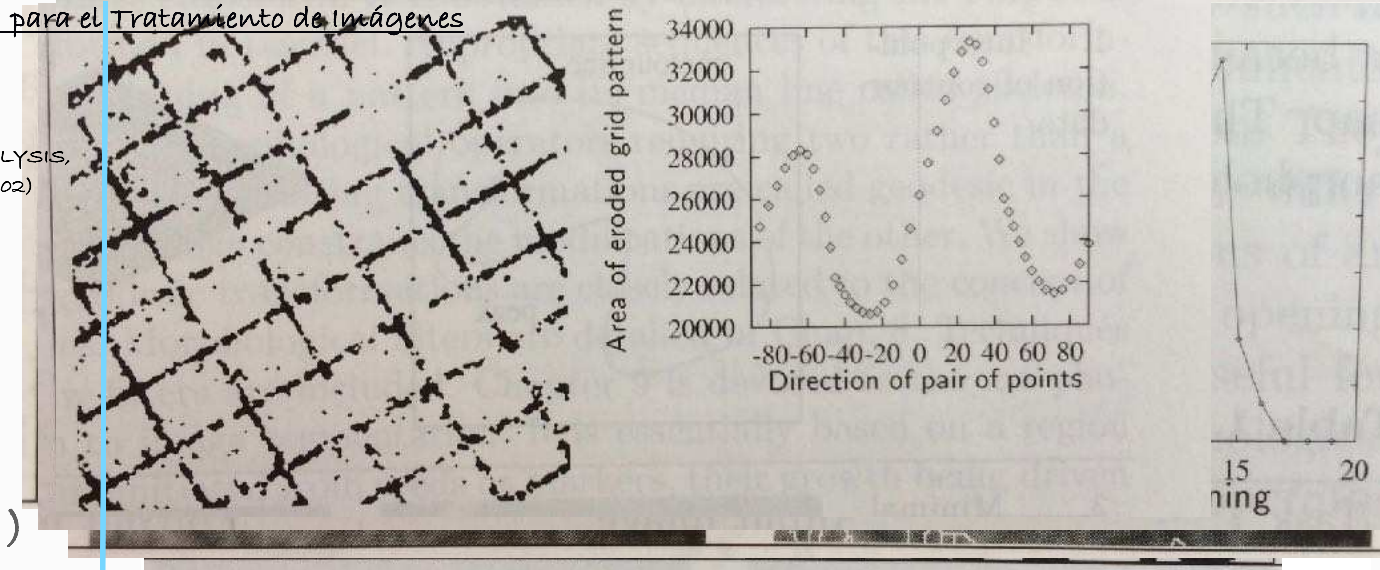
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

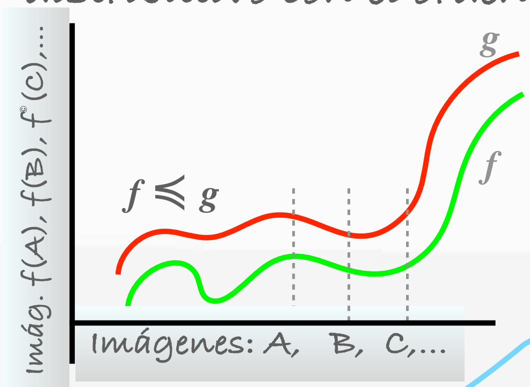
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A

Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)





Operadores básicos para Construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots: \mathbb{R}^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots: \mathbb{Z}^2 \to L$.

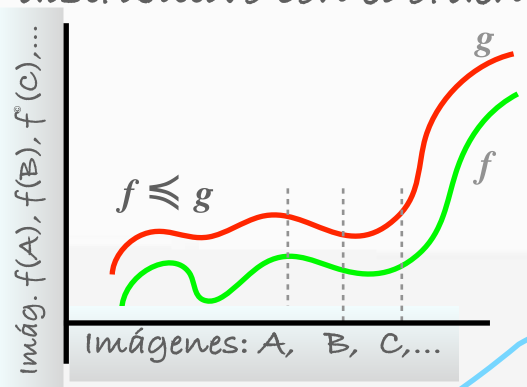
$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

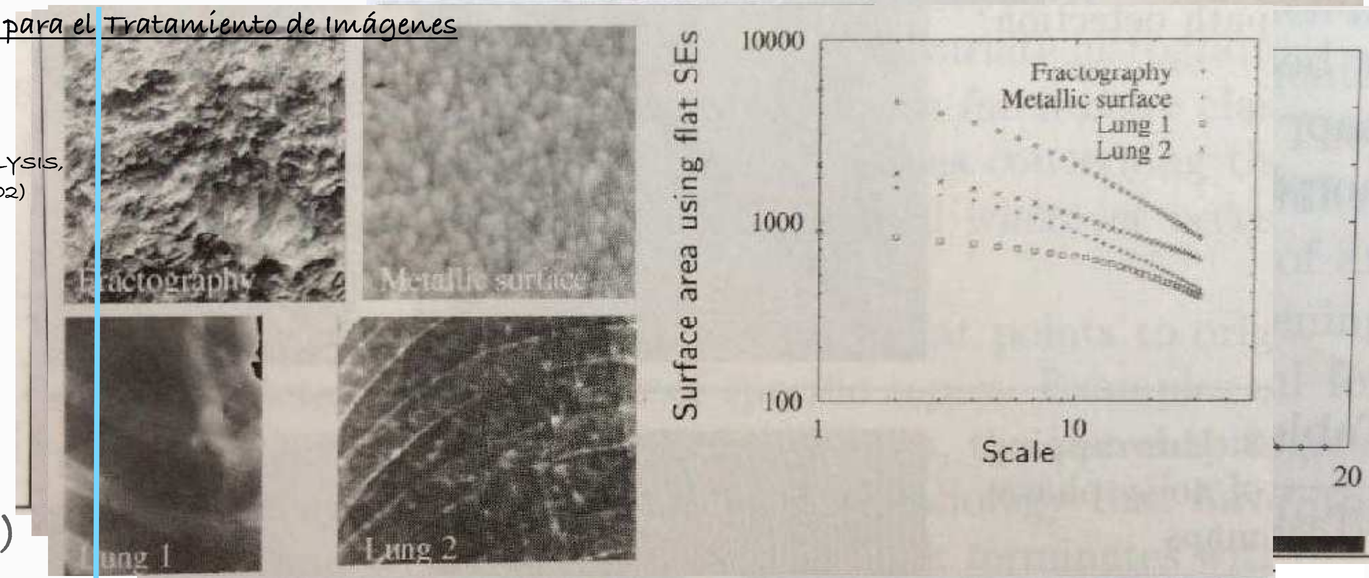
$f: L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Ejemplos:

(P.Soille, MORPHOLOGICAL IMAGE ANALYSIS, Principles and Applications. Springer 2002)



Operadores básicos para construir los filtros: EROSIÓN ε_R y DILATACIÓN δ_R

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R_1} - f_{R_2}$, o en paralelo: $g_1 = f_{R_1} \wedge f_{R_2}$, $g_2 = f_{R_1} \vee f_{R_2}$, o en serie: $h = f_{R_1} \circ f_{R_2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in \mathrm{Dom}(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

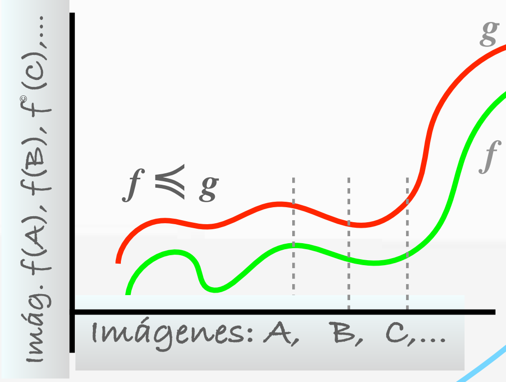
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

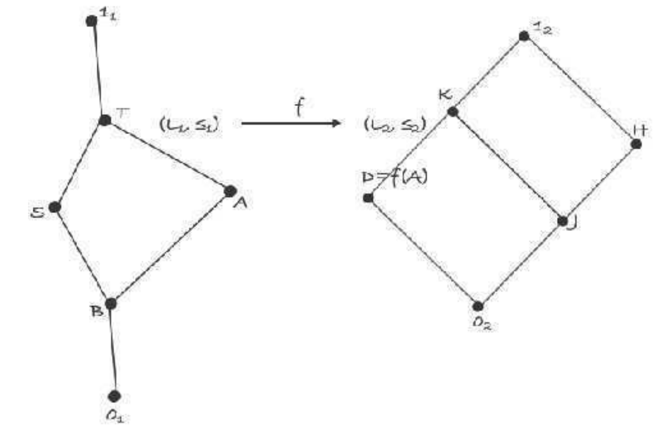
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$

Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \to Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Se obtiene otros F mediante la diferencia: $f = f_{R1} - f_{R2}$,
o en paralelo: $g_1 = f_{R1} \wedge f_{R2}$, $g_2 = f_{R1} \vee f_{R2}$,
o en serie: $h = f_{R1} \circ f_{R2}$, ...)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\varepsilon_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\varepsilon_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\delta_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\delta_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots: \mathbb{R}^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots: \mathbb{Z}^2 \to L$.

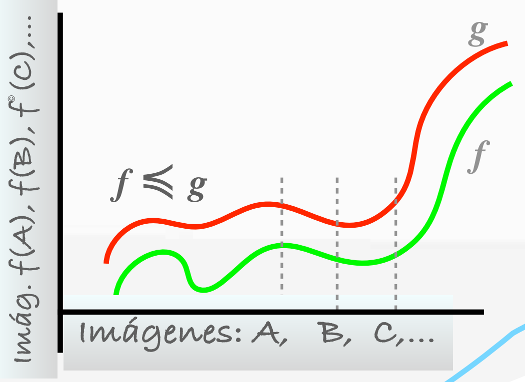
$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

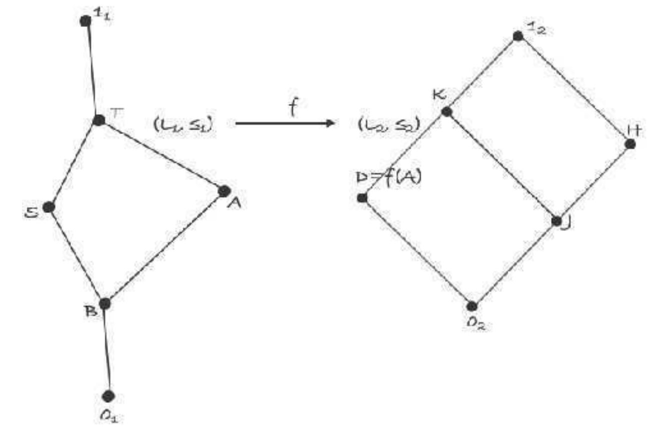
$f: L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$

Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



<u>Erosión</u> $\xi: L_1 \to L_2$:

$\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(L_1)$

<u>Dilatación</u> $\delta: L_2 \to L_1$:

$\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(L_2)$

Si $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$, <u>Filtro</u> $f: L \to L$:

$[(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))]$ & $[f^2(x) = f(x) \ \forall x \in L]$

El filtro $f: L \to L$ es una <u>apertura</u> si: $(x \leq f(x) \ \forall x \in L)$, y es un <u>cierre</u> si: $(f(x) \leq x \ \forall x \in L)$.

Filtros iniciales: <u>APERTURA</u> $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y <u>CIERRE</u> $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador <u>EROSIÓN</u> de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con <u>tonos de gris</u>:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \ / \ y \in Dom(B)\}$.

Operador <u>DILATACIÓN</u>

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes <u>binarias</u>).

Y para imágenes con <u>tonos de gris</u>:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) \ / \ y \in Dom(B)\}$.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \dots$ imágenes del plano $A, B, \dots: \mathbb{R}^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \dots: \mathbb{Z}^2 \to L$.

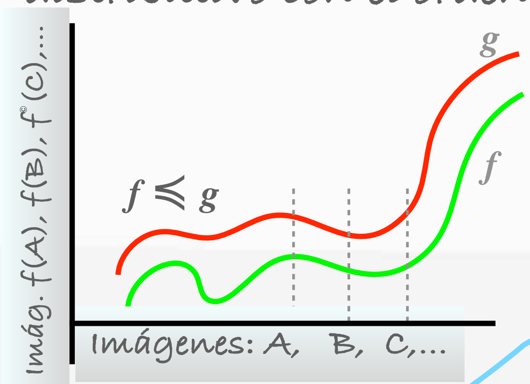
$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \dots$

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\dots,255\}$.

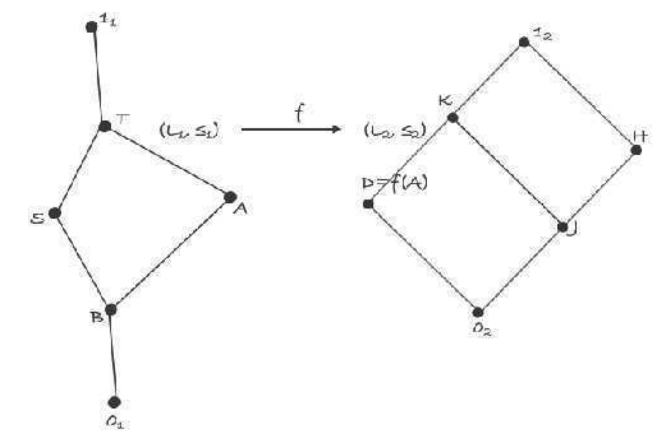
$f: L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \dots$ es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \dots$

Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Erosión $\xi: L_1 \to L_2$:

$\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(L_1)$

Dilatación $\delta: L_2 \to L_1$:

$\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(L_2)$

Si $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$, Filtro $f: L \to L$:

$[(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))]$ & $[f^2(x) = f(x) \ \forall x \in L]$

El filtro $f: L \to L$ es una apertura si: $(x \leq f(x) \ \forall x \in L)$, y es un cierre si: $(f(x) \leq x \ \forall x \in L)$.

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \ / \ y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) \ / \ y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E, (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances .* Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

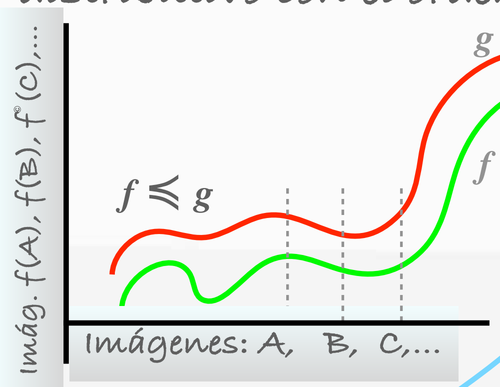
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

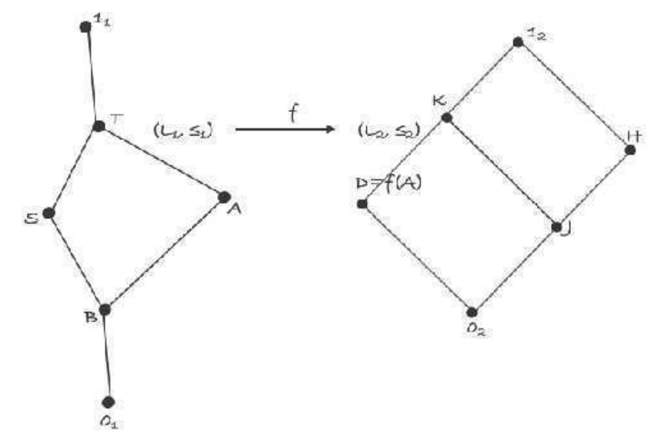
o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,...,255}.

f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1),(L_2,\leq_2)$,...
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f:L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro f(A) de $(L_j, \leq_j)$.



Erosión $\xi: L_1 \to L_2$:
$\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(L_1)$

Dilatación $\delta: L_2 \to L_1$:
$\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(L_2)$

Si $(L_1,\leq_1)=(L_2,\leq_2)=(L,\leq)$, Filtro f: $L \to L$:
$[(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))]$ & $[f^2(x) = f(x)\ \forall x \in L]$

El filtro f: $L \to L$ es una apertura si: $(x \leq f(x)\ \forall x \in L)$, y es un cierre si: $(f(x) \leq x\ \forall x \in L)$.

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...
Y $\rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

3.2 Definiciones La $*$-erosión algebraica $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-dilatación algebraica $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E\times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) \,/\, x \in E\}\ \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = \sup\{R(x,y) * B(y) \,/\, y \in F\}\ \forall x \in E.$$

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$ con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:
$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).
(R_x es el trasladado de R por x).
Para imágenes A y B con tonos de gris:
$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN
$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).
Y para imágenes con tonos de gris:
$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maitre, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I. (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1858-1867.
Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres
] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124, 73-85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997
Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.
P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).
T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.
P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.
H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.
C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

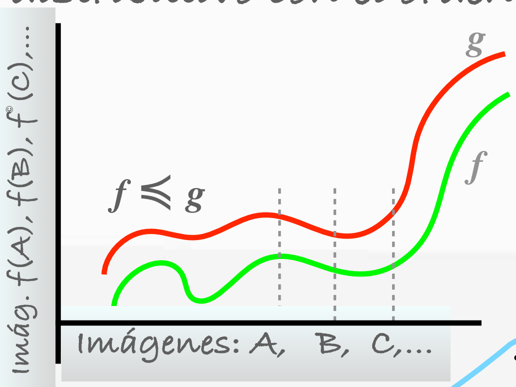
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\dots,255\}$.

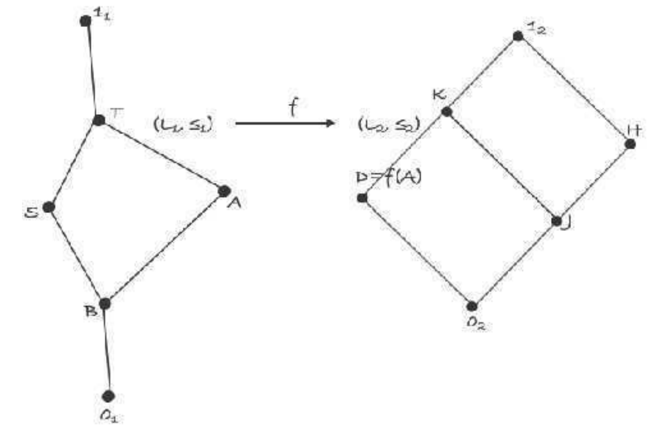
f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1),(L_2,\leq_2),\dots$

Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \to Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro f(A) de $(L_j, \leq_j)$.



Erosión ξ: $L_1 \to L_2$:

$\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(L_1)$

Dilatación δ: $L_2 \to L_1$:

$\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(L_2)$

Si $(L_1,\leq_1)=(L_2,\leq_2)=(L,\leq)$, Filtro f: $L \to L$:

$[(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))]$ & $[f^2(x)=f(x)\ \forall x \in L]$

El filtro f: $L \to L$ es una apertura si: $(x \leq f(x)\ \forall x \in L)$, y es un cierre si: $(f(x) \leq x\ \forall x \in L)$.

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R}=\{-p / p \in R\}$.

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...

Y $\rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

3.2 Definiciones La $*$-*erosión algebraica* $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-*dilatación algebraica* $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) / x \in E\} \quad \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = \sup\{R(x,y) * B(y) / y \in F\} \quad \forall x \in E.$$

Si la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ es un "flat-set", entonces el cálculo se simplifica:

$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{A(x) / x \in E, R(x,y)=e\} \quad \forall y \in F$

$\delta_R(A)(x) = \sup\{A(x) / y \in F, R(x,y)=e\} \quad \forall x \in E$

($e \in L$ es el elemento neutro de $*$)

(Véase transparencia 64)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) / y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124, 73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $Z^2 \to L$.

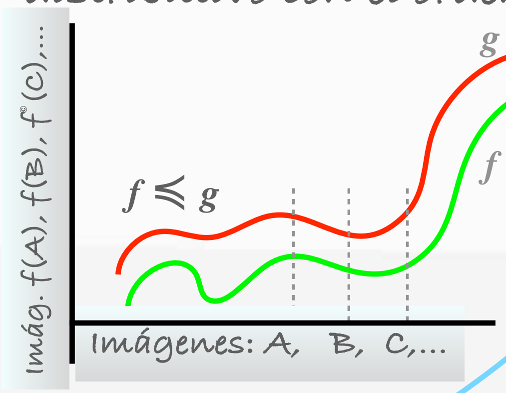
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

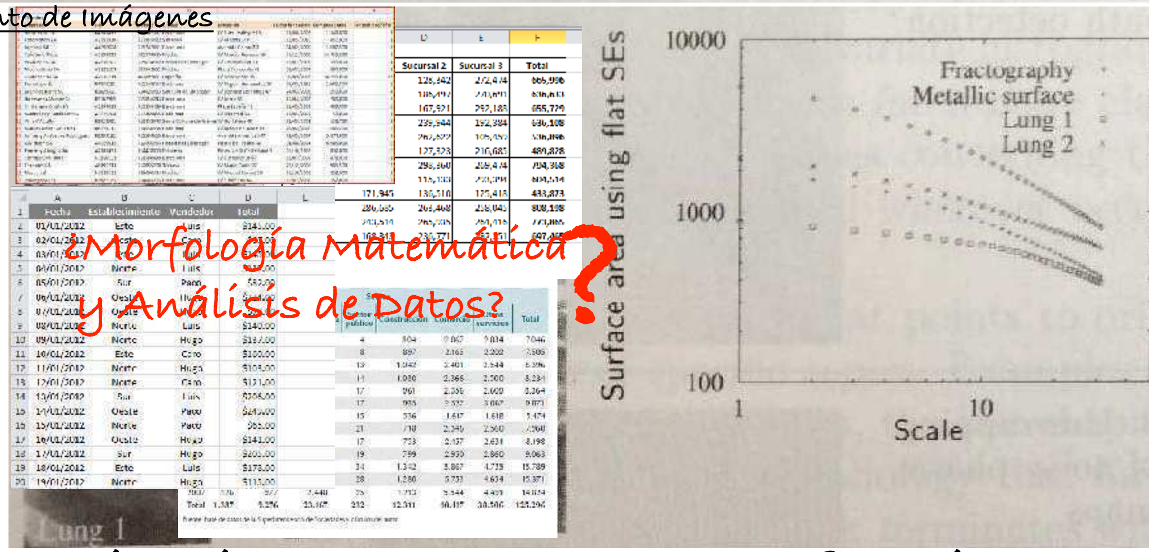
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,...,255}.

$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A





¿Aplicación de operadores morfológicos en contextos distintos al de imágenes?

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...

Y $\rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

3.2 Definiciones La $*$-*erosión algebraica* $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-*dilatación algebraica* $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) \,/\, x \in E\} \ \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = \sup\{R(x,y) * B(y) \,/\, y \in F\} \ \forall x \in E.$$

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p/p \in R\}$.

Si la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ es un "flat-set", entonces el cálculo se simplifica:

(Véase transparencia 64)

$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{A(x) \,/\, x \in E, R(x,y) = e\} \ \forall y \in F$

$\delta_R(A)(x) = \sup\{A(x) \,/\, y \in F, R(x,y) = e\} \ \forall x \in E$

($e \in L$ es el elemento neutro de $*$)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbf{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbf{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maître, M. (1995), Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6 p. 39-50

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano $A, B, \ldots : \mathbb{R}^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : \mathbb{Z}^2 \to L$.

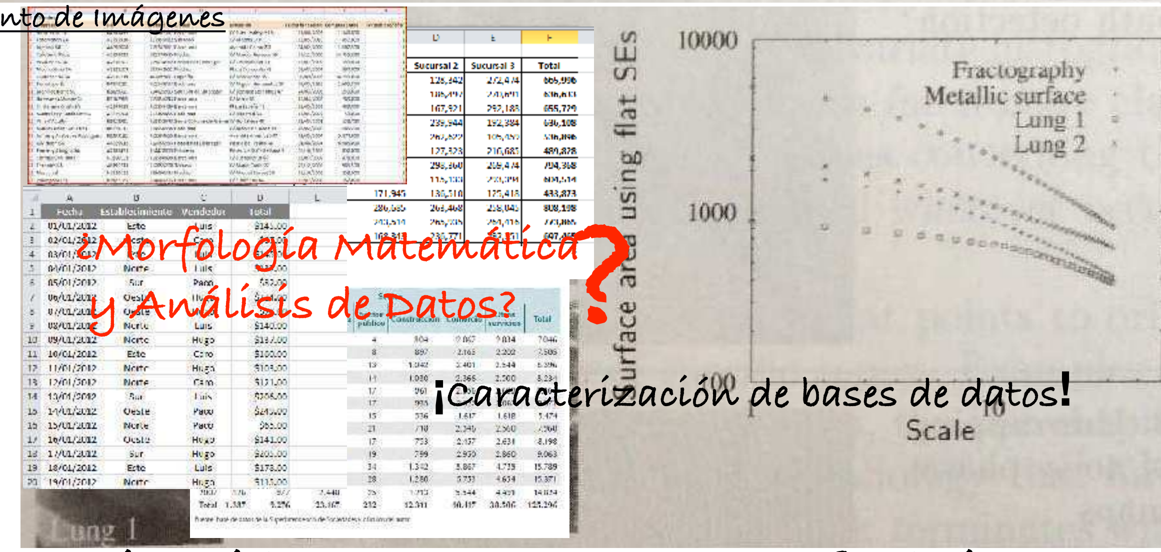
$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A, B,...

con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

$f: L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A



¿Morfología Matemática y Análisis de Datos?

¡Caracterización de bases de datos!

¿Aplicación de operadores morfológicos en contextos distintos al de imágenes?

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...

Y $\rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

3.2 Definiciones La $*$-*erosión algebraica* $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-*dilatación algebraica* $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = \inf \{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) \,/\, x \in E\} \quad \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = \sup \{R(x,y) * B(y) \,/\, y \in F\} \quad \forall x \in E.$$

Si la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ es un "flat-set", entonces el cálculo se simplifica:

(Véase transparencia 64)

$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{A(x) \,/\, x \in E,\ R(x,y) = e\} \quad \forall y \in F$

$\delta_R(A)(x) = \sup\{A(x) \,/\, y \in F,\ R(x,y) = e\} \quad \forall x \in E$

($e \in L$ es el elemento neutro de $*$)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858–1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6 p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,... imágenes del plano A,B,...: $\mathbb{R}^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,...: $\mathbb{Z}^2 \to L$.

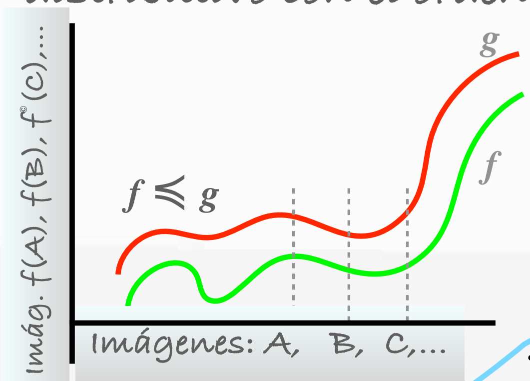
$(L^{\mathbb{Z}^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,...

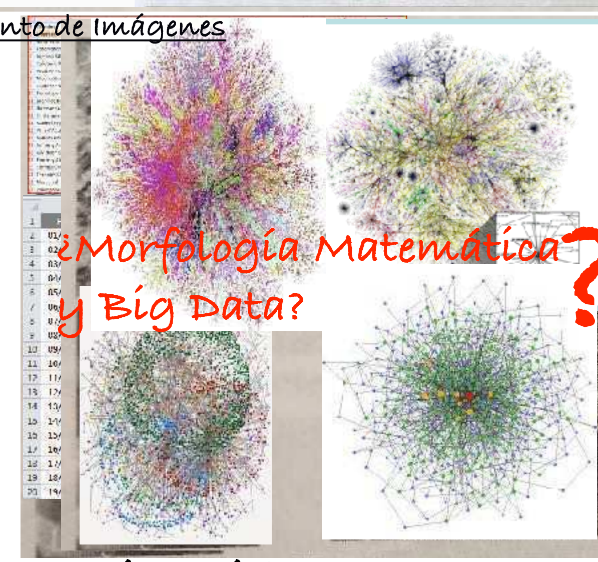
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\dots,255\}$.

f: $L^{\mathbb{Z}^2} \to L^{\mathbb{Z}^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,... es un retículo $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A





Hit-or-Miss en análisis de datos:

¿Aplicación de operadores morfológicos en contextos distintos al de imágenes?

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...

Y $\rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

3.2 **Definiciones** La $*$-*erosión algebraica* $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-*dilatación algebraica* $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = inf\,\{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) \,/\, x \in E\} \;\; \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = sup\,\{R(x,y) * B(y) \,/\, y \in F\} \; \forall x \in E.$$

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p/p \in R\}$.

Si la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ es un "flat-set", entonces el cálculo se simplifica:

(Véase transparencia 64)

$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{A(x) \,/\, x \in E, R(x,y)=e\} \;\; \forall y \in F$

$\delta_R(A)(x) = \sup\{A(x) \,/\, y \in F, R(x,y)=e\} \;\; \forall x \in E$

($e \in L$ es el elemento neutro de $*$)

Operador EROSIÓN de imágenes $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ mediante la imagen estructurante $R \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \subseteq A\}$ (imágenes binarias).

(R_x es el trasladado de R por x).

Para imágenes A y B con tonos de gris:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R(A)(x) = \inf\{A(x+y) - B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Operador DILATACIÓN

$\boldsymbol{\delta}_R(A) = \{x \in \mathbb{Z}^2 / R_x \cap A \neq \emptyset\}$ (imágenes binarias).

Y para imágenes con tonos de gris:

$\boldsymbol{\delta}_R(A)(x) = \sup\{\{A(x+y) + B(y) \,/\, y \in Dom(B)\}$.

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6 p. 39-50

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **22** (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **50** (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*. Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

$A, B, \ldots$ imágenes del plano $A, B, \ldots : R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas $A, B, \ldots : Z^2 \to L$.

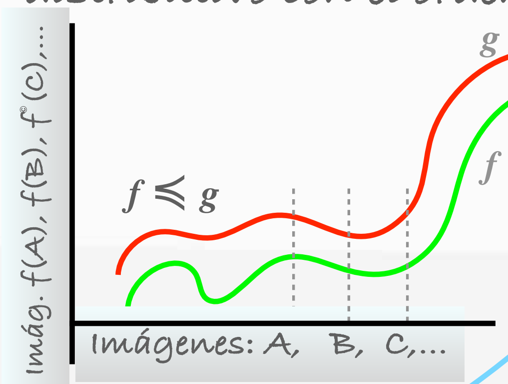
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes $A, B, \ldots$

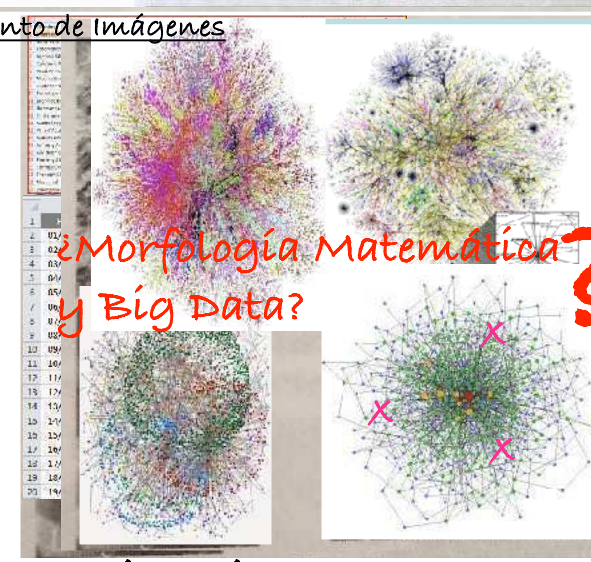
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso $L=2$,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso $L=\{0,1,\ldots,255\}$.

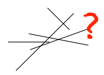
$f: L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos $f, g, \ldots$ es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A





Hit-or-Miss en análisis de datos:



¡Localización de una estructura determinada!

¿Aplicación de operadores morfológicos en contextos distintos al de imágenes?

$$HM_{(R_1,R_2)}(A) = \varepsilon_{R_1}(A) \wedge \varepsilon_{R_2}(A'),$$

$$R_1 \leq R'_2$$

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma, t-norma,...

$\curlyvee \rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \delta_{\check{R}} \circ \varepsilon_R$ y CIERRE $\phi_R = \varepsilon_{\check{R}} \circ \delta_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

3.2 Definiciones La $*$-*erosión algebraica* $\varepsilon_R(A)$ de $A \in L^E$ y la $*$-*dilatación algebraica* $\delta_R(B)$ de $B \in L^F$ mediante la relación estructurante $R \in L^{E \times F}$ vienen dadas por

$$\varepsilon_R(A) = R^{op} \lhd_* A,$$

$$\delta_R(B) = R \circledast B,$$

es decir:

$$\varepsilon_R(A)(y) = \inf\{R(x,y) \rightsquigarrow_* A(x) \,/\, x \in E\} \quad \forall y \in F,$$

$$\delta_R(B)(x) = \sup\{R(x,y) * B(y) \,/\, y \in F\} \quad \forall x \in E.$$

En estel caso, las redes son relaciones L-borrosas $Q \in L^{U \times U}$ y la erosión y dilatación mediante R vienen dadas por:

$$\varepsilon_R(Q)(x,z) = \inf\{R^{op}(x,y) \rightsquigarrow_* Q(y,z) \,/\, y \in U\} \quad \forall (x,z) \in U \times U$$

$$\delta_R(Q)(x,z) = \sup\{R(x,y) * Q(y,z) \,/\, y \in U\} \quad \forall x,z) \in U \times U$$

Morfología Matemática Borrosa

Bloch, I., Maitre, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1858-1867

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6 p. 39-50

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124, 73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process. J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances*. Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering*. Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

A, B,… imágenes del plano A,B,…: $R^2 \to L$

o imágenes digitalizadas A,B,…: $Z^2 \to L$.

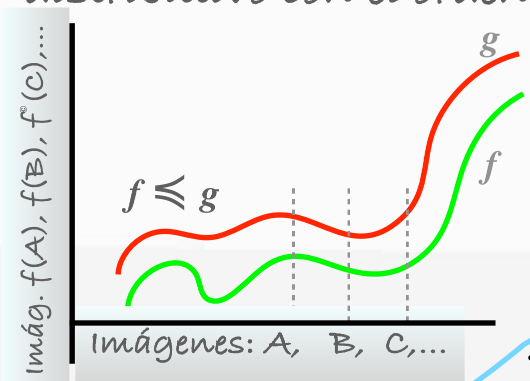
$(L^{Z^2}, \leq)$ retículo distributivo de imágenes A,B,…

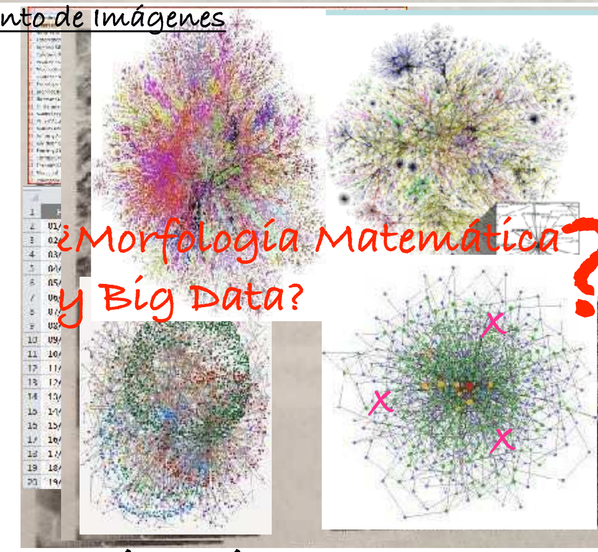
con el orden $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en el caso L=2,

o $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$ para todo x en el caso L={0,1,…,255}.

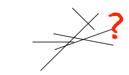
f: $L^{Z^2} \to L^{Z^2}$ operador, (filtro morfológico), que transforma imágenes: $A \to f(A)$.

El conjunto de filtros morfológicos f, g,… es un retículo $(L^{Z^2}, \preccurlyeq)$ distributivo con el orden $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(A) \leq g(A)$ para toda imagen A





Hit-or-Miss en análisis de datos:



¡Localización de una estructura determinada!

¿Aplicación de operadores morfológicos en contextos distintos al de imágenes?

$$HM_{(R_1,R_2)}(A) = \boldsymbol{\varepsilon}_{R_1}(A) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{R_2}(A'),$$

$$R_1 \leq R'_2$$

Si $*$ es un operador en un retículo (L, tipo uninorma, norma , t-norma,…

$\curlyvee \rightsquigarrow$ es un operador en L tipo implicación:

Los OPERADORES MORFOLÓGICOS sobre borrosos de E y de F asociados a una RELACIÓN ESTRUCTURANTE $R \in L^{E \times F}$:

Filtros iniciales: APERTURA $\gamma_R = \boldsymbol{\delta}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_R$ y CIERRE $\phi_R = \boldsymbol{\varepsilon}_{\check{R}} \circ \boldsymbol{\delta}_R$, con $\check{R} = \{-p / p \in R\}$.

En estel caso, las redes son relaciones L-borrosas $Q \in L^{U \times U}$ y la erosión y dilatación mediante R vienen dadas por:

$$\varepsilon_R(Q)(x,z) = \inf\{R^{op}(x,y) \rightsquigarrow_* Q(y,z) \;/\; y \in U\} \quad \forall (x,z) \in U \times U$$

$$\delta_R(Q)(x,z) = \sup\{R(x,y) * Q(y,z) \;/\; y \in U\} \quad \forall x,z) \in U \times U$$

Si la relación estructurante $R \in L^{U \times U}$ es un "flat-set", entonces el cálculo se simplifica:

$$\varepsilon_R(Q)(x,z) = \inf\{Q(y,z) / y \in U,\ R(x,y) = e\} \ \forall (x,z) \in U \times U$$

$$\delta_R(Q)(x,z) = \sup\{Q(y,z) \;/\; y \in U,\ R(x,y) = e\} \ \forall (x,z) \in U \times U$$

($e \in L$ es el elemento neutro de $*$)

Bloch, I., Maître, M. (1995), Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009), Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6 p. 39-50

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008), Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **22** (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **50** (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia" al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, … y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,…), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas,(isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,…).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre" .
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

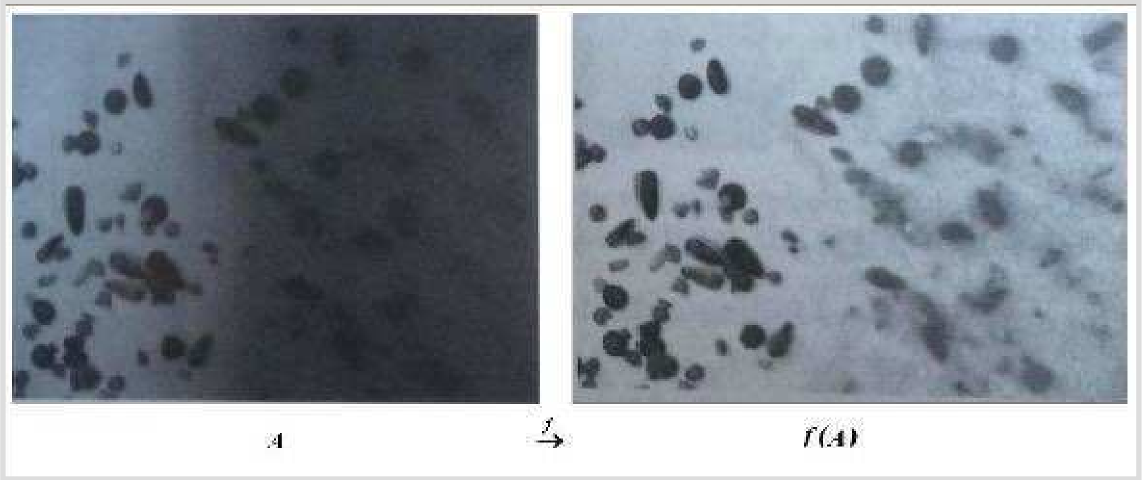
5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

Inicio del contenido original de este trabajo:

1. Los <u>Órdenes de Actividad</u> como herramientas de la Morfología Matemática.

Morfología Matemática: Herramienta para el Tratamiento de imágenes digitalizadas mediante operadores morfológicos sobre la clase de los subconjuntos A, B,... de Z^2, (las imágenes); con el orden inclusión $A \leq B$ y las operaciones de retículo $A \wedge B$, $A \vee B$ asociadas.
Los filtros que las transforman son operadores f, g,..., sobre el retículo L^{Z^2} de imágenes: $A \to f(A)$, $A \to g(A)$, etc
Orden entre filtros: $(f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (f(A) \leq g(A)\ \forall A)$, junto con las operaciones de retículo $f \wedge g$, $f \vee g$.



Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \text{X} (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \text{X} (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

Orden de actividad
(Activity Ordering)

$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \wedge w) \& (f \vee w \preccurlyeq g \vee w)$$

Bloch, I., Maitre, M. (1995), Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009), Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

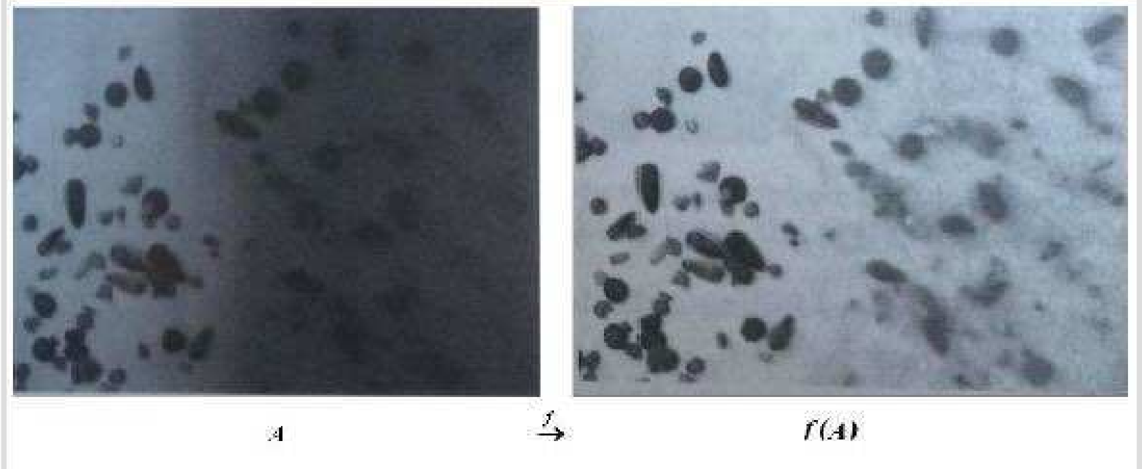
Morfología Matemática Borrosa

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemática: Herramienta para el Tratamiento de imágenes digitalizadas mediante operadores morfológicos sobre la clase de los subconjuntos A, B,... de Z^2, (las imágenes); con el orden inclusión $A \leq B$ y las operaciones de retículo $A \wedge B$, $A \vee B$ asociadas.

Los filtros que las transforman son operadores f, g,..., sobre el retículo L^{Z^2} de imágenes: $A \to f(A)$, $A \to g(A)$, etc

Orden entre filtros: $(f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (f(A) \leq g(A) \ \forall A)$, junto con las operaciones de retículo $f \wedge g$, $f \vee g$.



Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

Orden de actividad
(Activity Ordering)

$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

Simplificación:

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \wedge w) \,\&\, (f \vee w \preccurlyeq g \vee w)$$

Bloch, I., Maitre, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

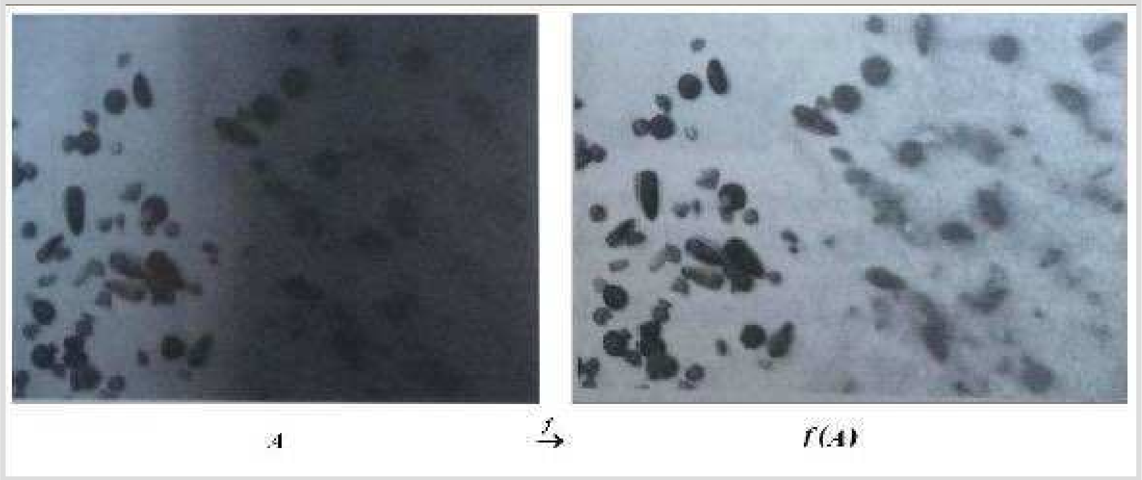
H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

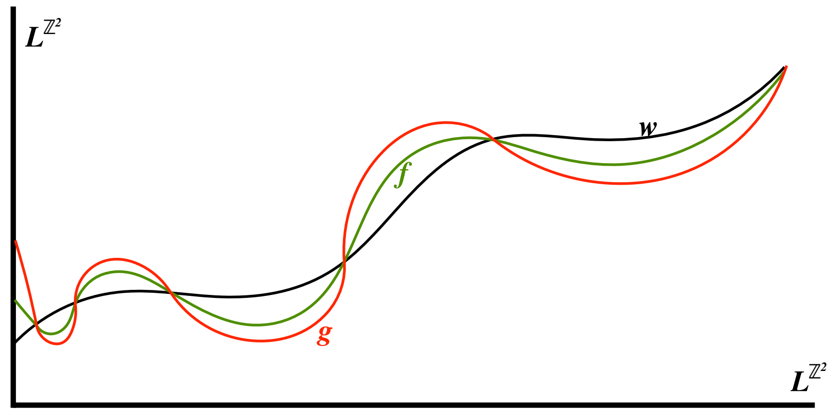
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemática: Herramienta para el Tratamiento de imágenes digitalizadas mediante operadores morfológicos sobre la clase de los subconjuntos A, B,... de Z^2, (las imágenes); con el orden inclusión $A \leq B$ y las operaciones de retículo $A \wedge B$, $A \vee B$ asociadas. Los filtros que las transforman son operadores f, g,..., sobre el retículo L^{Z^2} de imágenes: $A \to f(A)$, $A \to g(A)$, etc
Orden entre filtros: $(f \leqslant g) \Leftrightarrow (f(A) \leq g(A)\ \forall A)$, junto con las operaciones de retículo $f \wedge g$, $f \vee g$.



Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \text{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \text{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$



$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

Simplificación:

$$(g \wedge w \leqslant f \leqslant g \vee w)$$

Bloch, I., Maître, M. (1995), Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

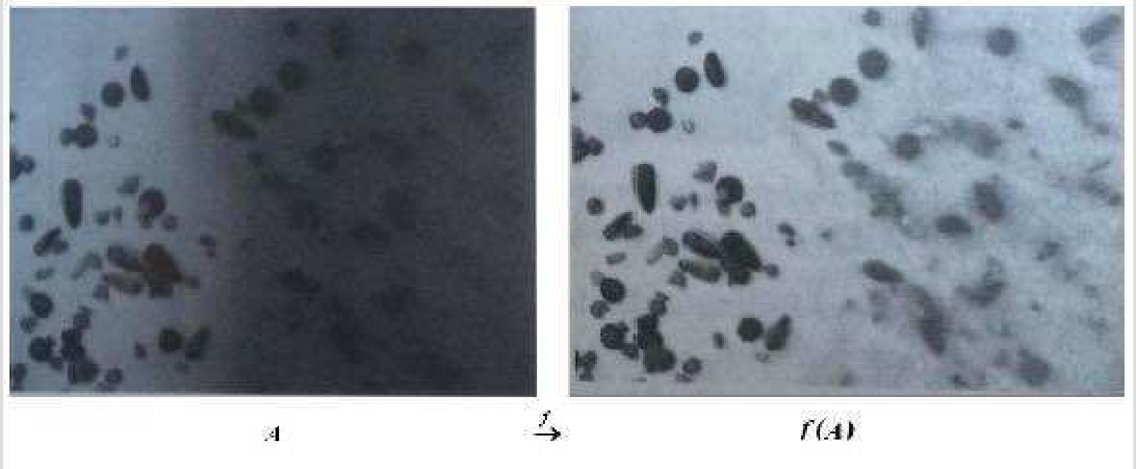
C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

Morfología Matemática: Herramienta para el Tratamiento de imágenes digitalizadas mediante operadores morfológicos sobre la clase de los subconjuntos A, B,… de Z^2, (las imágenes); con el orden inclusión $A \leq B$ y las operaciones de retículo $A \wedge B$, $A \vee B$ asociadas. Los filtros que las transforman son operadores f, g,…, sobre el retículo L^{Z^2} de imágenes: $A \to f(A)$, $A \to g(A)$, etc

Orden entre filtros: $(f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (f(A) \leq g(A)\ \forall A)$, junto con las operaciones de retículo $f \wedge g$, $f \vee g$.



Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

¿Por qué "Orden de actividad"?

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\ (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\ (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$

Bloch, I., Maitre, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

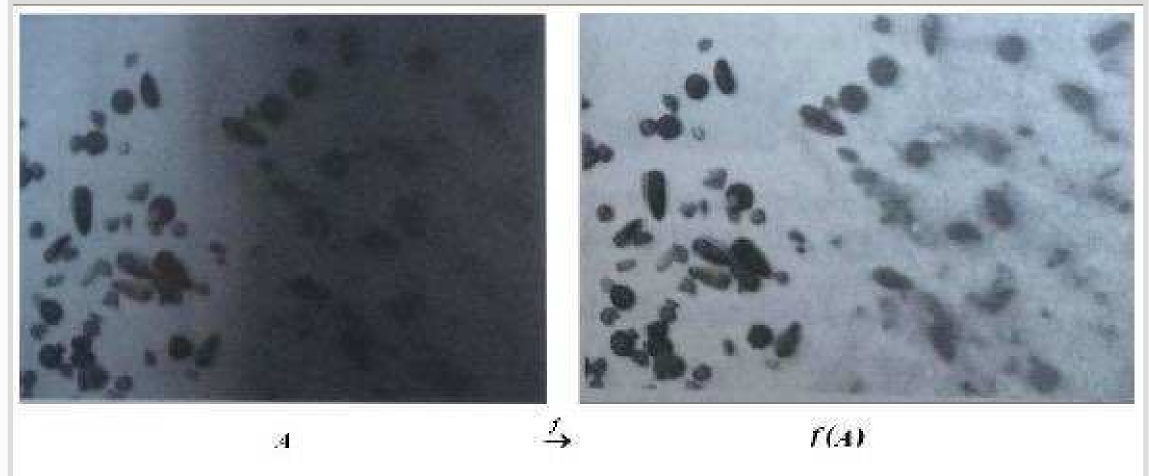
P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

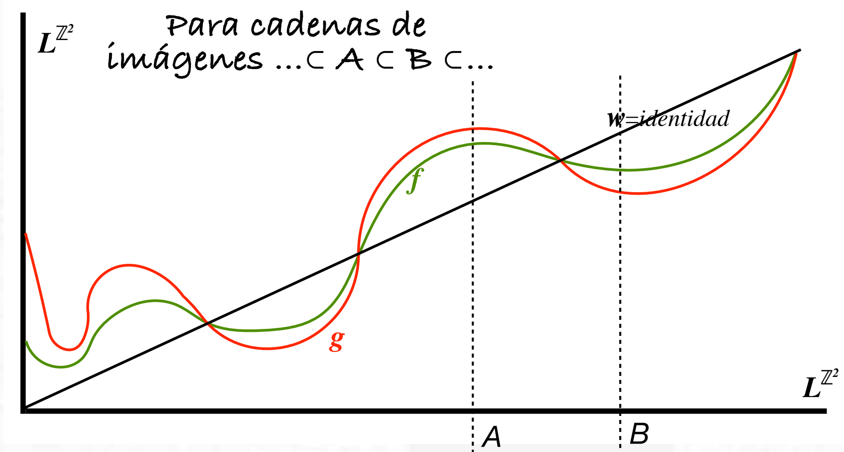


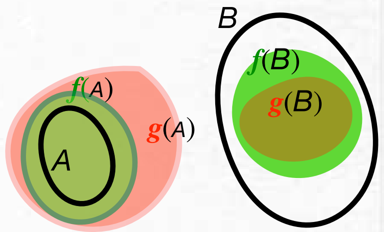
Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^{w}$ entre filtros morfológicos).

¿Por qué "Orden de actividad"?

$$(w, i, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

Si $w=i$, con $i(A) = A \quad \forall A \in L^{Z^2}$





$$f \sqsubseteq^{i} g \iff$$

$$(g \wedge i \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee i)$$

g es "más activo" que f

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.
Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres
Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

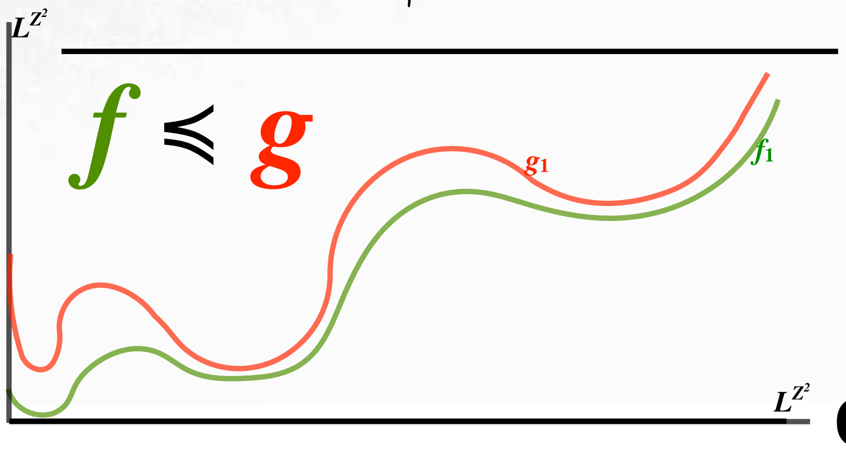
B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997
Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.
P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).
T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.
Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.
P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.
H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.
C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

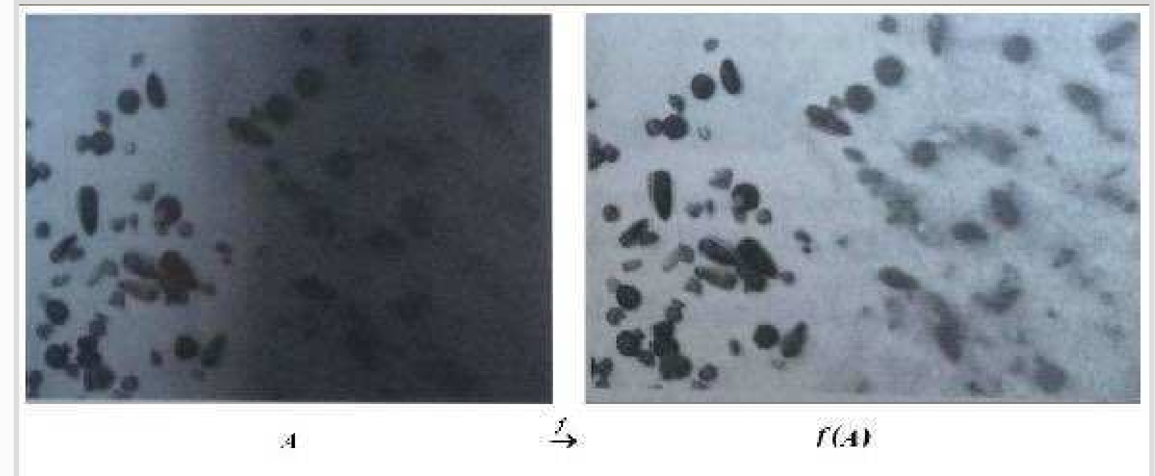
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 17–108.

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:



$$g_1 \sqsubseteq^1 f_1$$

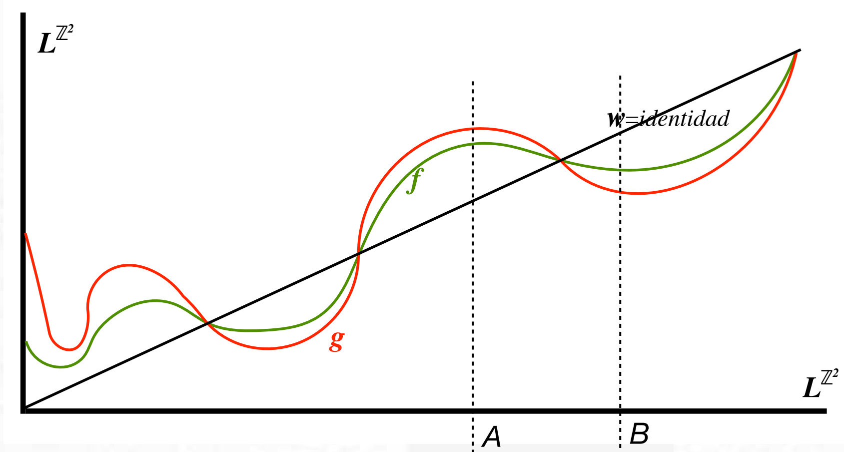
$$f_1 \sqsubseteq^0 g_1$$

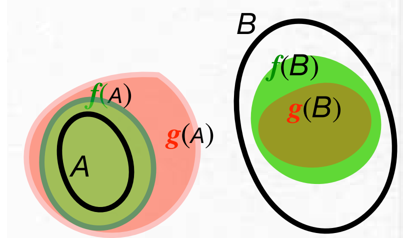


Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, i, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

Si $w=i$, con $i(A) = A \quad \forall A \in L^{Z^2}$





g es "más activo" que f

$$f \sqsubseteq^i g \iff$$

$$(g \wedge i \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee i)$$

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

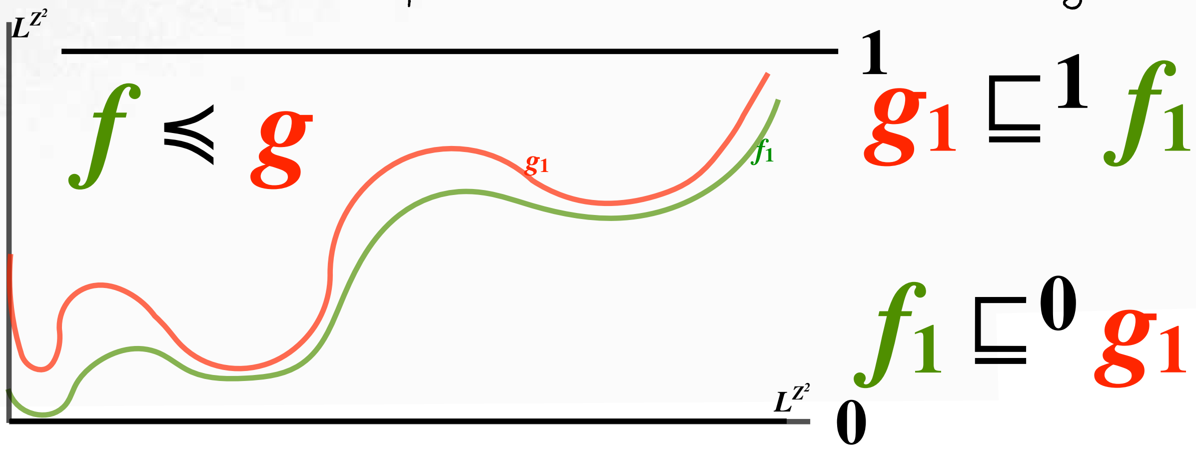
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1*. Academic Press; (1984).

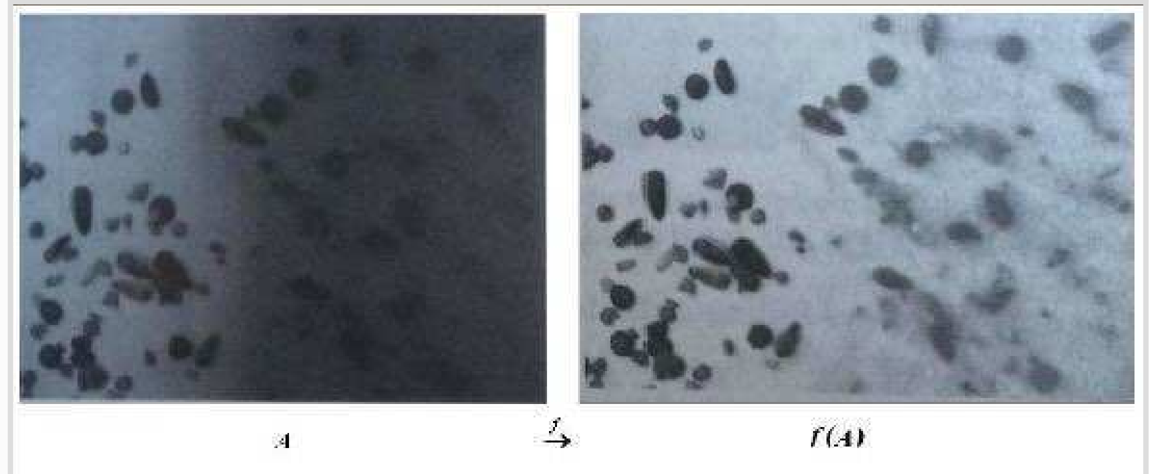
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

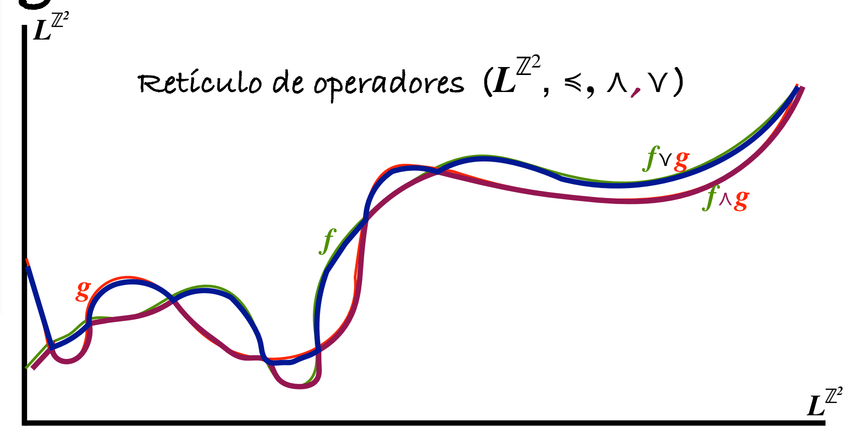
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:





Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).



$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$

$$f \sqsubseteq^w g \iff$$

$$(g \wedge w \leqslant f \leqslant g \vee w)$$

Bloch, I., Maitre, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

] Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

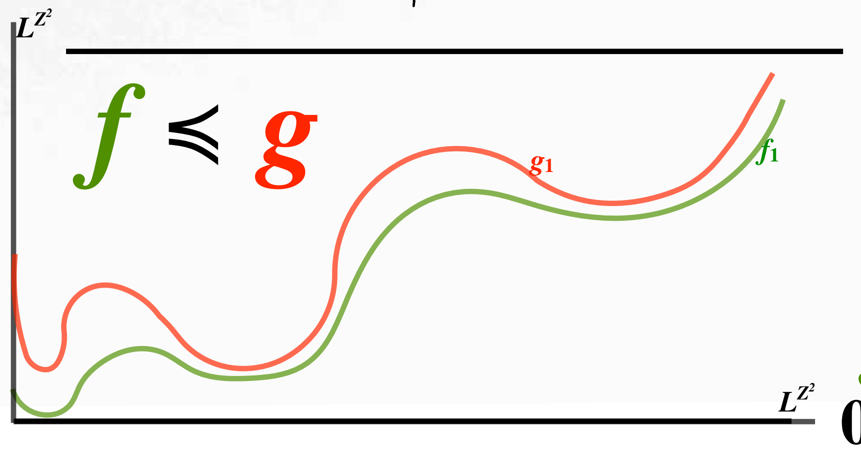
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

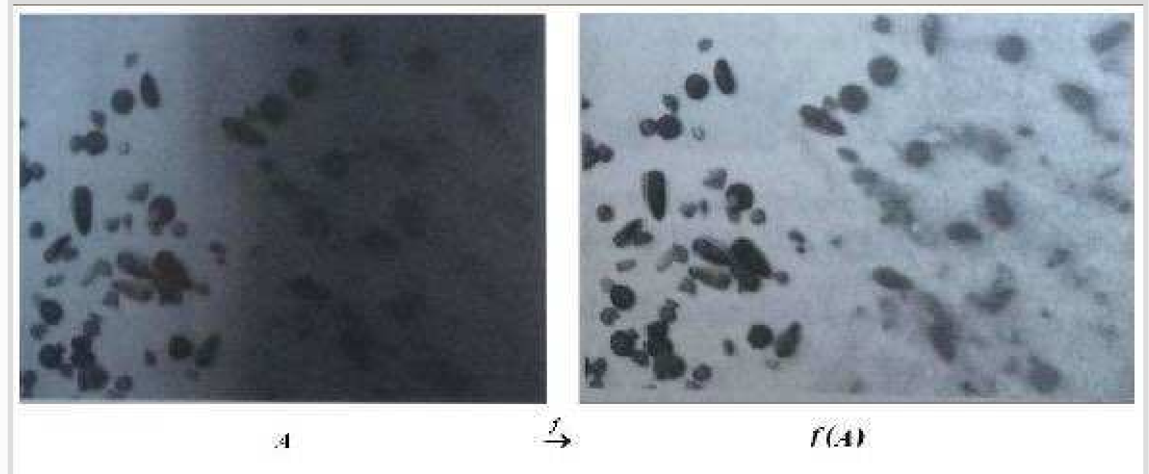
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:



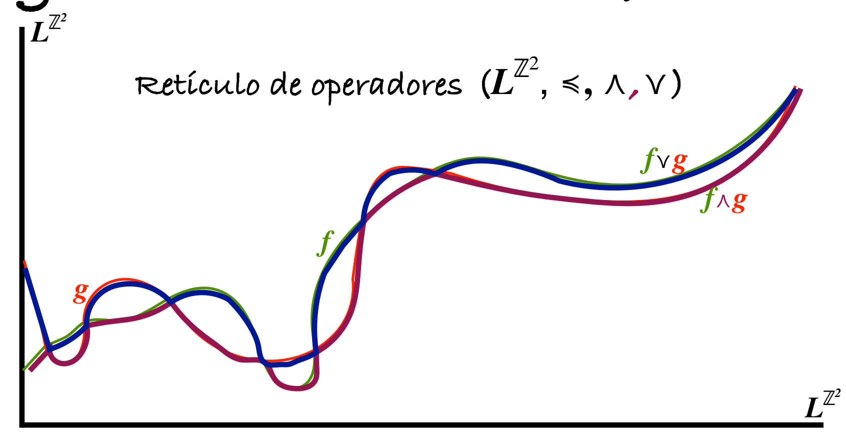
$$g_1 \sqsubseteq^1 f_1$$

$$f_1 \sqsubseteq^0 g_1$$



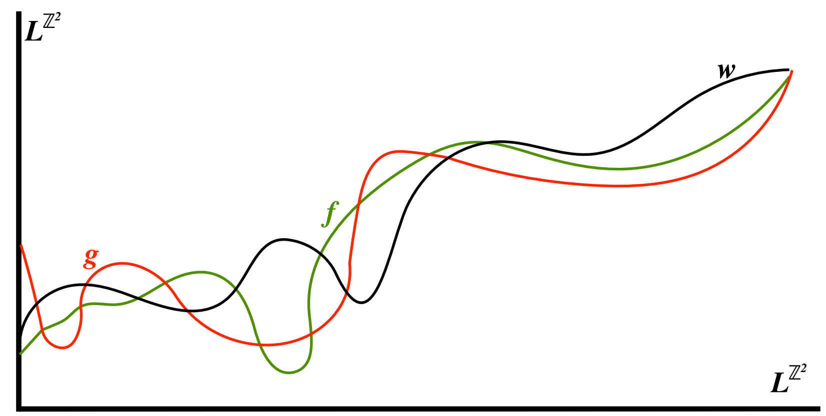
Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$



$$f \sqsubseteq^w g \iff$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$



Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.

Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160, 1858 1867.

Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.

Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres

Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124, 73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997

Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.

P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).

T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)

Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.

P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.

H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.

C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

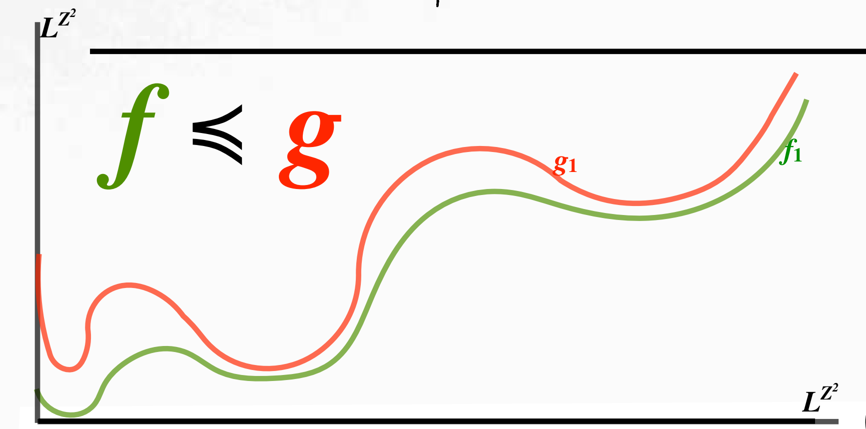
[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).

[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).

[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.

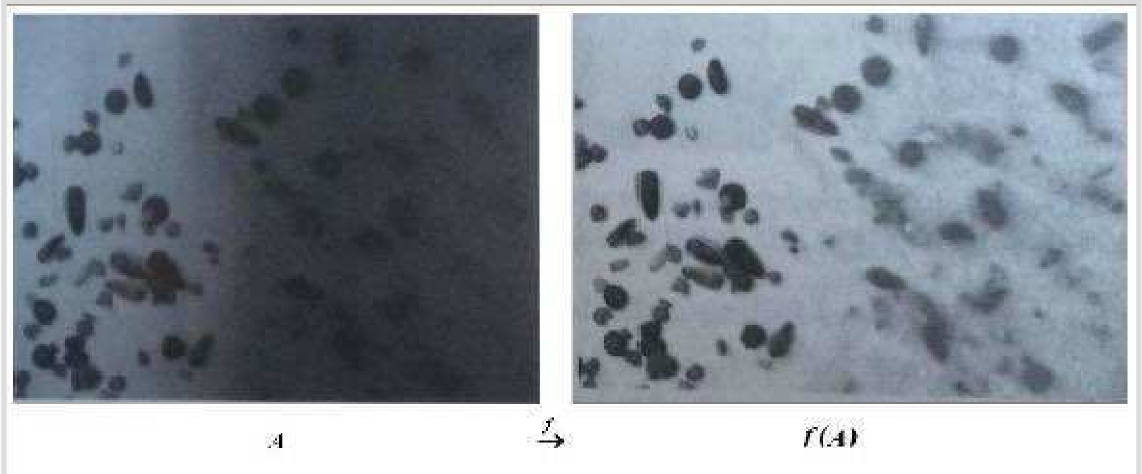
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:



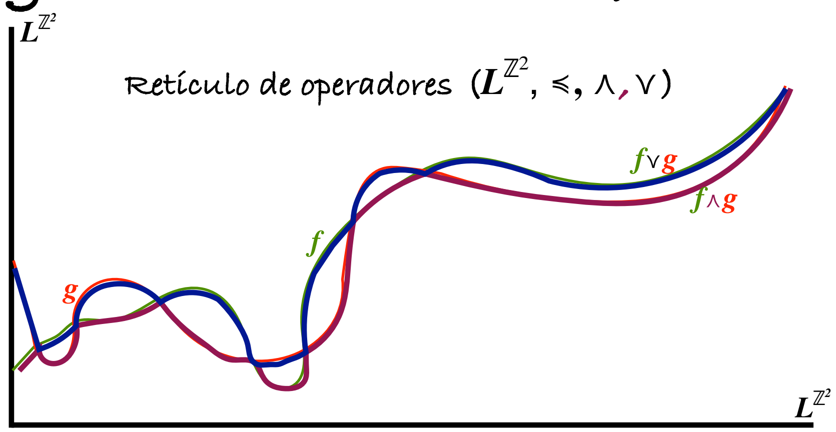
$$g_1 \sqsubseteq^1 f_1$$

$$f_1 \sqsubseteq^0 g_1$$



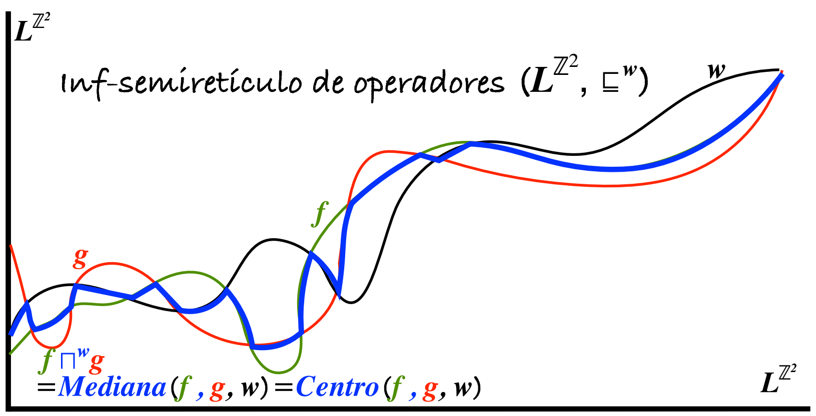
Órdenes de Actividad en el contexto de la Morfología Matemática. (Una relación adicional $\sqsubseteq^w$ entre filtros morfológicos).

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \mathrm{X}\, (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$



$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$



Existe el ínfimo $f \sqcap^w g$ en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^w)$ para todo par (f, g):

$$f \wedge g \preccurlyeq f \sqcap^w g \preccurlyeq f \vee g$$

(En lógica borrosa: $\sqcap^w$ es una agregación en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$)

Bloch, I., Maître, M. (1995). Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study. Pattern Rec., 28(9): p. 1341-1387.
Bloch, I., (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems 160 , 1858 1867.
Frago, N., Fuentes-González, R. (2007). Descubrimiento de Conocimientos en Bases de Datos utilizando técnicas de Morfología Matemática Borrosa. Inf. tecnol., vol.18, no.6: p. 39-50.
Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P. (2008). Operadores Morfológicos en sistemas relacionales L-Borrosos. Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Mieres
Nachtegael M., Kerre E. (2001) Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies Fuzzy Sets and Systems 124 ,73–85.

B. de Baets, Fuzzy morphology: A logical approach, in Uncertainty Analysis, B. Ayyub and M. Gupta (eds.), 53-67, Kluwer Academic Publishers 1997
Fuentes-González, R., The incorporation of the Mathematical Morphology, the Formal Concept Analysis and the Fuzzy Logic techniques and tools to the data cleaning, aggregating, reducing and mining stages of the Knowledge Discovery process, J.M. Troya and S. Ossowski (Eds.), 147-154. Actas V Jor. Seg. Proy. en tecnología Informática. CEDI 2005. Granada.
P. Burillo, R. Fuentes-González, N. Frago, Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing Vol VIII, n 1 31-46 (2001).
T. Q. Deng and H. Heijmans, Grey-scale morphology based on fuzzy logic, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16 (2002) 155–171.

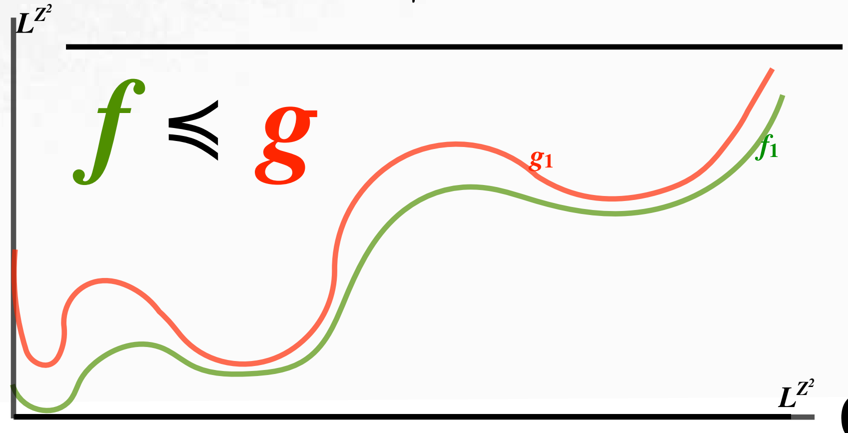
B. De Baets, Fuzzy morphology: a logical approach, in B. Ayyub and M. Gupta (Eds.), *Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach* (Kluwer Academic Publishers, 1997), pp. 53–67.
P. Maragos, Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2005) 333–353.
H. Heijmans and C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50 (1990) 245–295.
C. Ronse and H. Heijmans, The algebraic basis of mathematical morphology II. Openings and closings, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54 (1991) 74–97.

Morfología Matemática Borrosa

Matheron, G.: Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux. Masson, Paris (1967)
Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York (1975)

[1] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 1.* Academic Press; (1984).
[2] J. Serra (Editor): *Image Analysis and Mathematical Morphology Vol 2: Theoretical Advances* . Academic Press; 1st edition (1988).
[3] H.J.A.M. Heijmans, R. Keshet, *Inf-semilattice approach to self-dual morphology*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **Vol 17** (2002) 55–80.
[4] J. Serra, L. Vincent: *An overview of morphological filtering* . Circuits, Systems and Signal Processing **Vol 11 No 1** (1992) 47–108.

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:

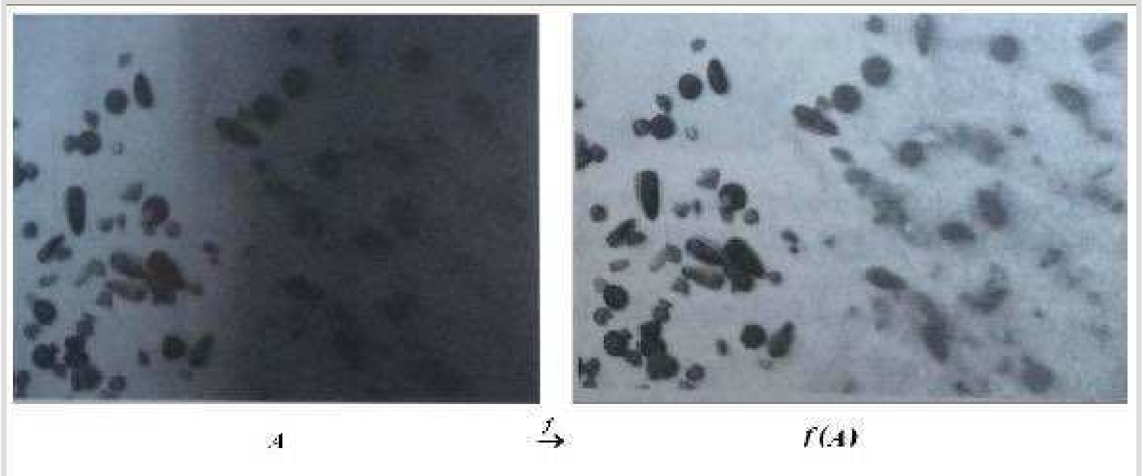


1

$$g_1 \sqsubseteq^1 f_1$$

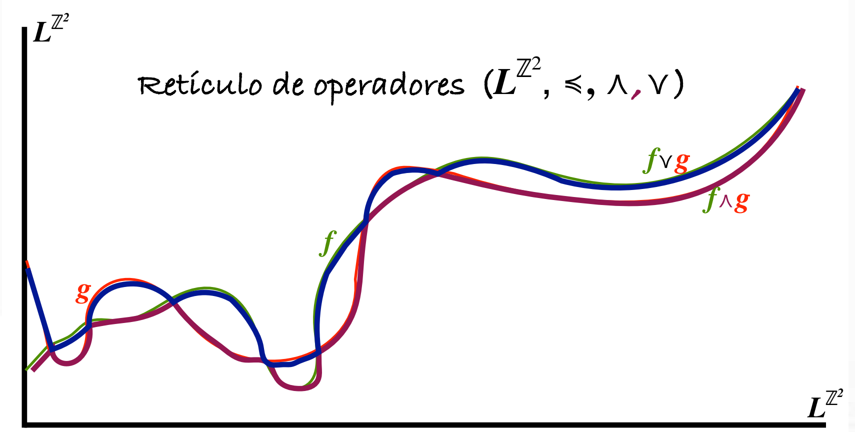
$$f_1 \sqsubseteq^0 g_1$$

0



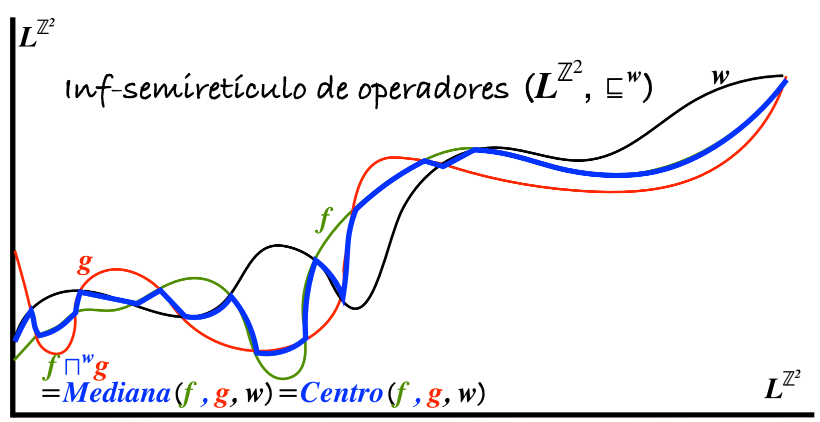
Órdenes de Actividad

$$(w, f, g) \in (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})} \times (L^{Z^2})^{(L^{Z^2})}$$



$$f \sqsubseteq^w g \iff$$

$$(g \wedge w \leqslant f \leqslant g \vee w)$$



Existe el ínfimo $f \sqcap^w g$ en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^w)$ para todo par (f, g):

$f \wedge g \leqslant f \sqcap^w g \leqslant f \vee g$

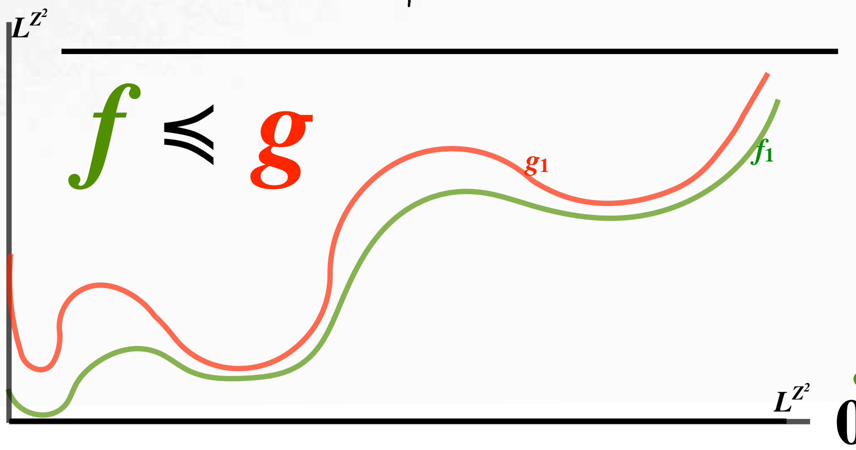
(En lógica borrosa: $\sqcap^w$ es una agregación en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \ldots))$

En general, para el orden $\sqsubseteq^w$ únicamente se asegura la existencia del ínfimo $f \sqcap^w g$, relacionado con los anteriores por:

$$f \sqcap^w g = (f \wedge g) \vee [w \wedge (f \vee g)] \qquad \text{(Inf-semiretículo } ((L^{\mathbb{Z}^2})^{(L^{\mathbb{Z}^2})}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w).$$

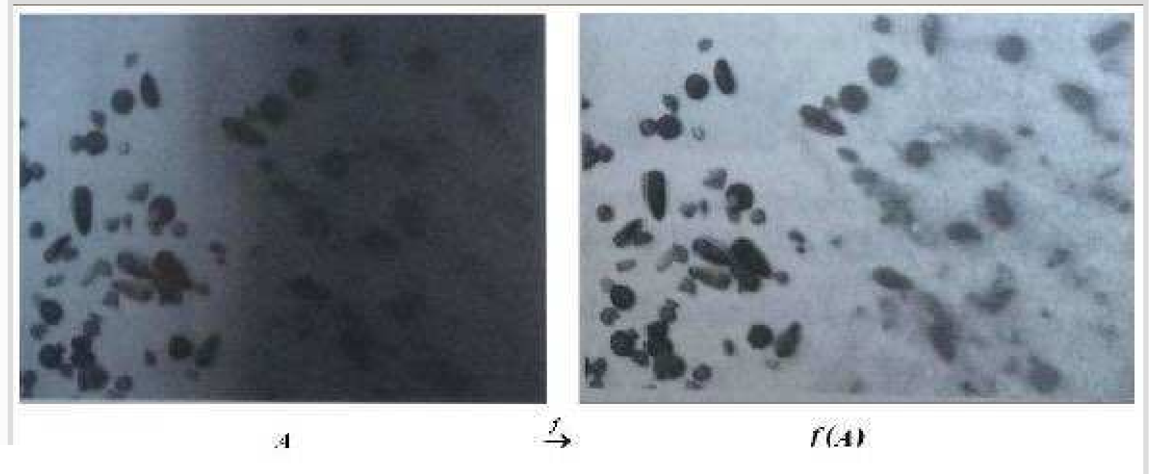
$$= (f \vee g) \wedge [w \vee (f \wedge g)] = (f \wedge g) \vee (f \wedge w) \vee (g \wedge w) = (f \vee g) \wedge (f \vee w) \wedge (g \vee w).$$

El orden usual como caso particular de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^0$ y $\sqsubseteq^1$:



$g_1 \sqsubseteq^1 f_1$

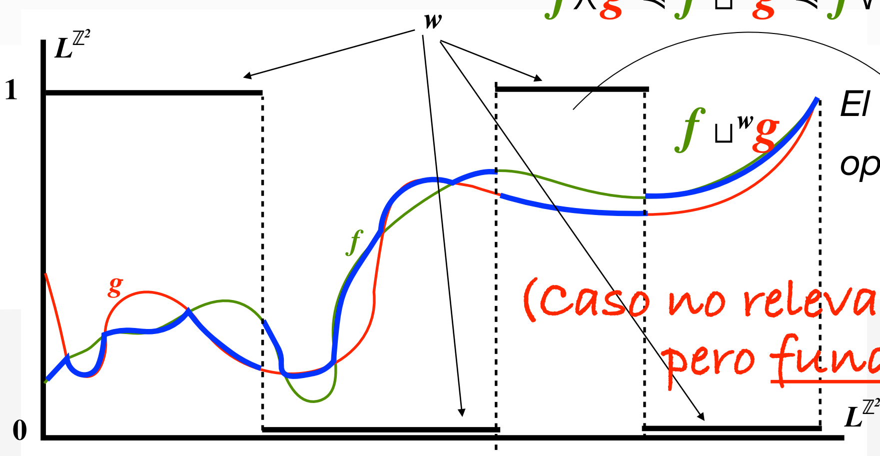
$f_1 \sqsubseteq^0 g_1$



Órdenes de Actividad

Aunque en algunos casos existe el supremo $f \sqcup^w g$:

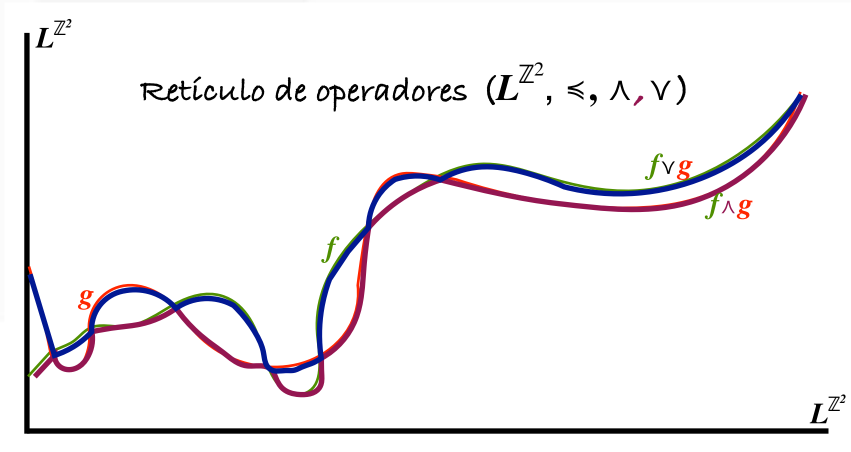
$f \wedge g \preccurlyeq f \sqcup^w g \preccurlyeq f \vee g$ ($\sqcup^w$ es agregación en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \preccurlyeq)$)



El supremo existe únicamente para operadores W tales que $W(L^{\mathbb{Z}^2}) \subseteq \{0,1\}$

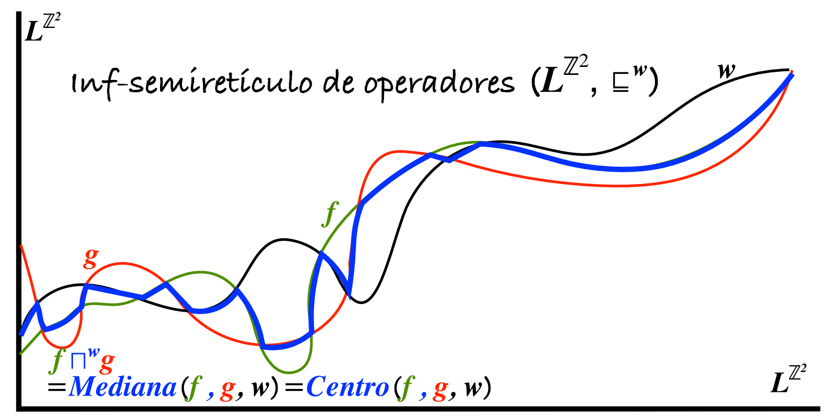
$f \sqcup^w g = f \sqcap^{w^c} g$

(Caso no relevante en Morfología Matemática, pero fundamental en este trabajo)



$$f \sqsubseteq^w g \iff$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$



Existe el ínfimo $f \sqcap^w g$ en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^w)$ para todo par (f, g):

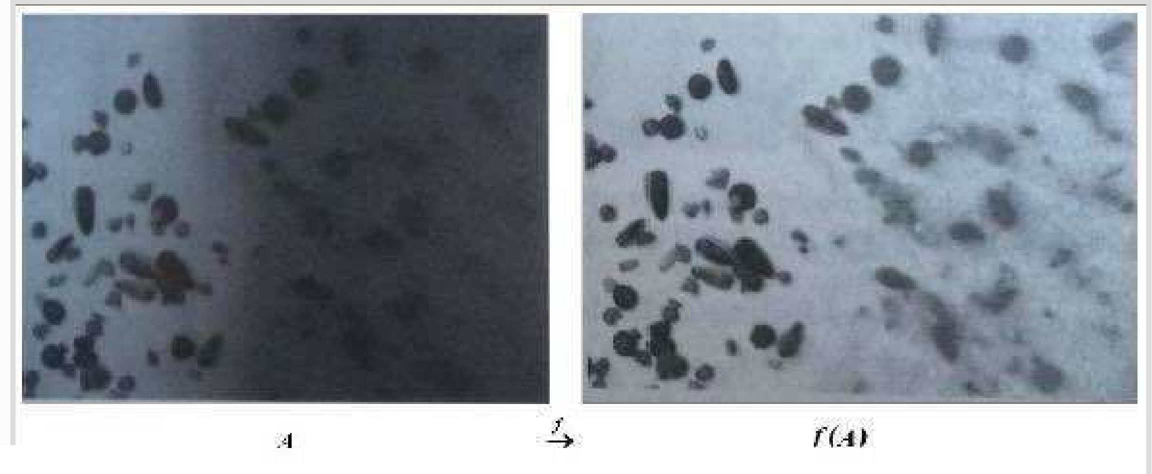
$f \wedge g \preccurlyeq f \sqcap^w g \preccurlyeq f \vee g$

(En lógica borrosa: $\sqcap^w$ es una agregación

En general, para el orden $\sqsubseteq^w$ únicamente se asegura la existencia del ínfimo $f \sqcap^w g$, relacionado con los anteriores por:

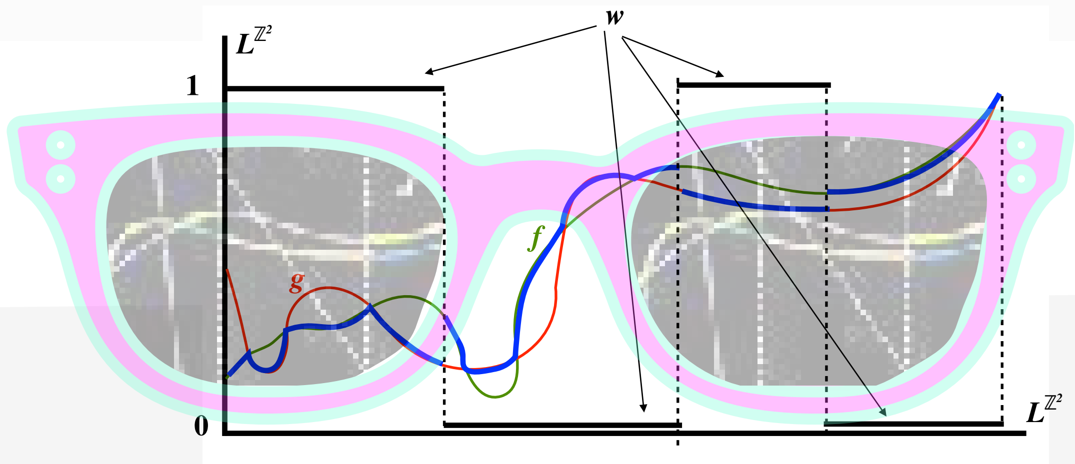
$$f \sqcap^w g = (f \wedge g) \vee [w \wedge (f \vee g)] \qquad \text{(Inf-semiretículo } ((L^{\mathbb{Z}^2})^{(L^{\mathbb{Z}^2})}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w)\text{).}$$

$$= (f \vee g) \wedge [w \vee (f \wedge g)] = (f \wedge g) \vee (f \wedge w) \vee (g \wedge w) = (f \vee g) \wedge (f \vee w) \wedge (g \vee w).$$



Órdenes de Actividad

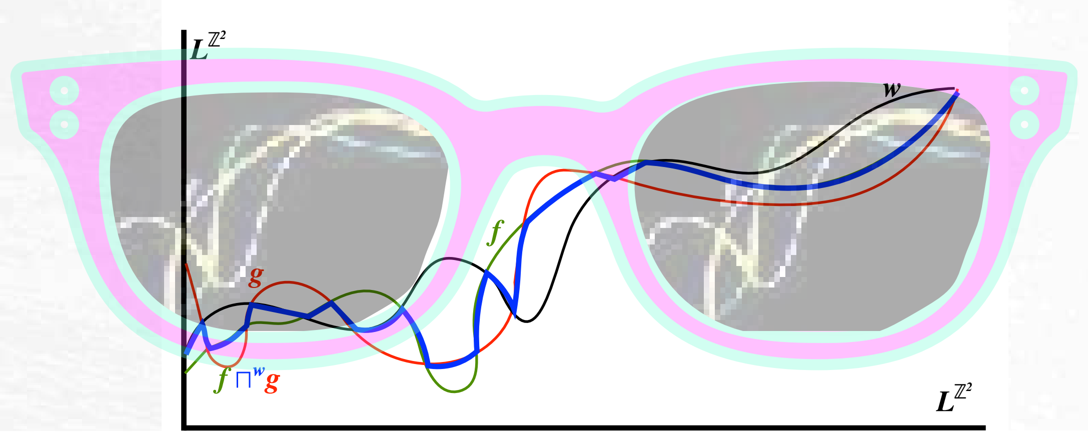
Aunque en algunos casos existe el supremo $f \sqcup^w g$:



$$f \sqsubseteq^w g \quad \Leftrightarrow$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$

Contemplaremos ahora $\sqcap^w$ y $\sqcup^w$ como intersección y unión con "perspectiva":



Aquí consideraremos los órdenes de actividad en contextos más generales, no necesariamente asociados a imágenes, interpretándolos , en primer lugar, como "inclusiones alternativas entre subconjuntos", (ordinarios o borrosos) y después, como una herramienta para proporcionar "contenido al conjunto vacío". Tal como veremos, ese contenido será un subconjunto distinguido W, (nítido o borroso), de un referencial cuyos elementos se interpretan como irrelevantes, o no deseados, perjudiciales, de medida nula,...
Y los de su complementario W^c (si existe), como valiosos, esperados, beneficiosos,...
(Aunque se puede intercambiar esas interpretaciones de los elementos de W y W^c).

$$f \sqsubseteq^{w} g \quad \Leftrightarrow$$

$$(g \wedge w \preccurlyeq f \preccurlyeq g \vee w)$$

Interpretación de algunos resultados que relacionan los conceptos:

Orden de Actividad

Uninormas y Nulnormas

Diferencia Simétrica

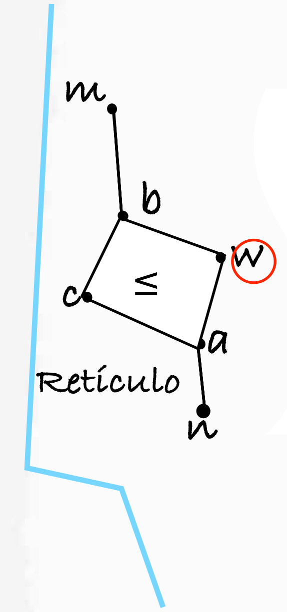
Teorema.

Teorema.

(Constituye una de las partes básicas de este trabajo).

Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:



(Constituye una de las partes básicas de este trabajo).

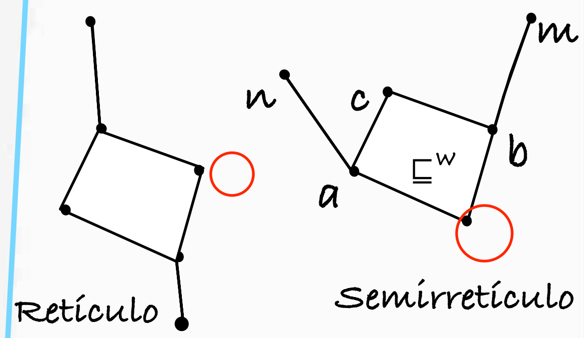
$^{(*)}$ Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)],$$

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.



(Constituye una de las partes básicas de este trabajo).

$^{(*)}$ (Transparencias siguientes)

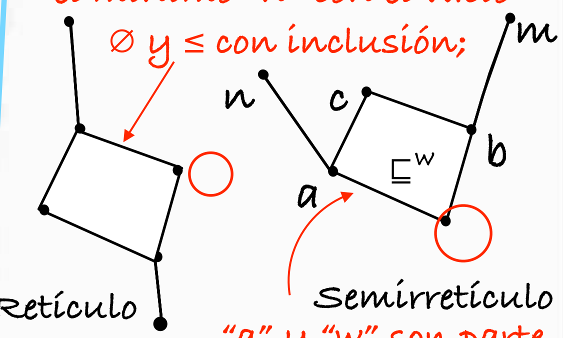
(*) Teorema.

Si $(L, \le, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\le$ con inclusión;



~~"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$~~

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \le x \le (y+w)],$$

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\le)$ tiene mínimo)

(Constituye una de las partes básicas de este trabajo).

(*) (Transparencias siguientes)

(*) <u>Teorema</u>.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :
(en el caso en el que L es distributivo)

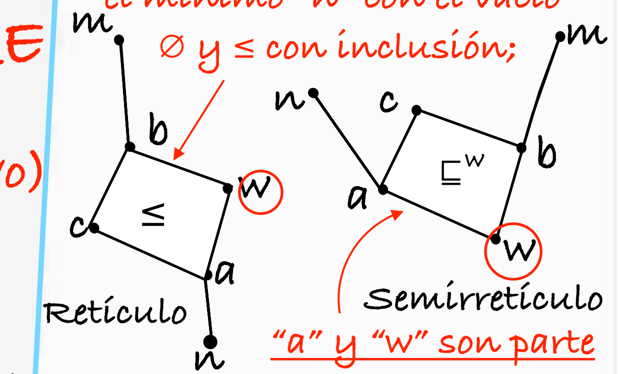
1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (<u>orden de actividad</u>) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



<u>"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión</u> $\sqsubseteq^w$

(*) (Transparencias siguientes)

(*) Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

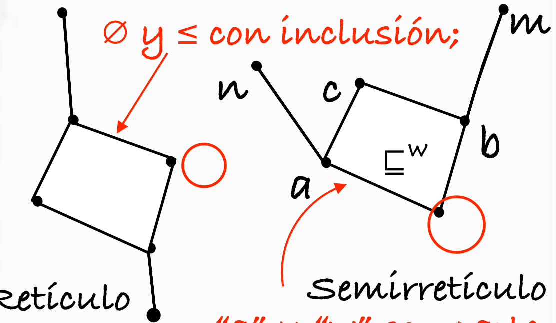
1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y + w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



~~"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$~~

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

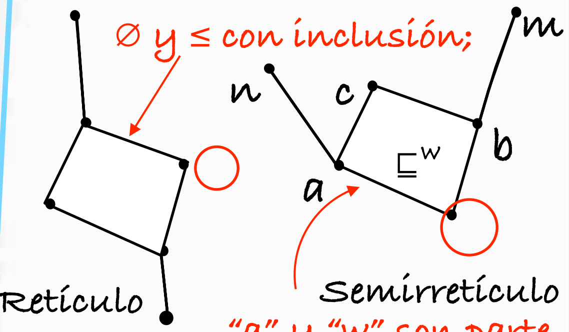
(*) (Transparencias siguientes)

(*) Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica: INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\emptyset$ y $\leq$ con inclusión;



~~"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$~~

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (<u>orden de actividad</u>) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo. **"contenido" del $\emptyset$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)**

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una <u>nulnorma</u> en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

w-intersección en *L*

(*) (Transparencias siguientes)

(*) Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica: INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

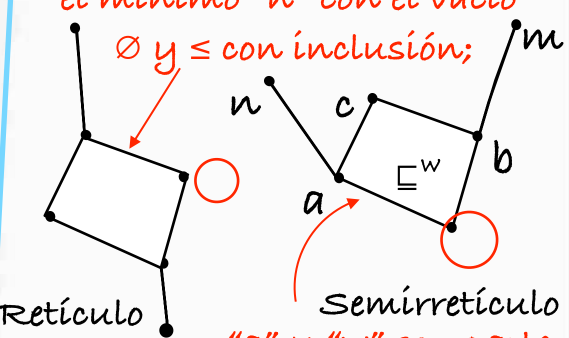
1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del ∅ (si (*L*,≤) tiene mínimo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío ∅ y ≤ con inclusión;



~~"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$~~

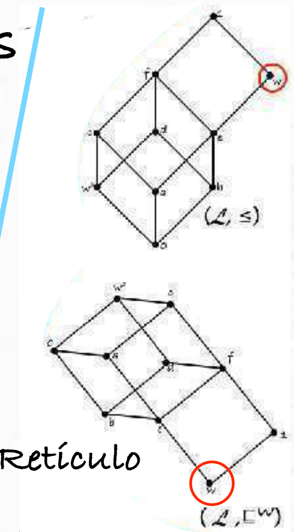
2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

w-intersección en *L*

3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una uninorma idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup $\sqcup^w$ asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$.

En consecuencia, $\sqcup^w$ es también una nulnorma y una uninorma en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.



(*) (Transparencias siguientes)

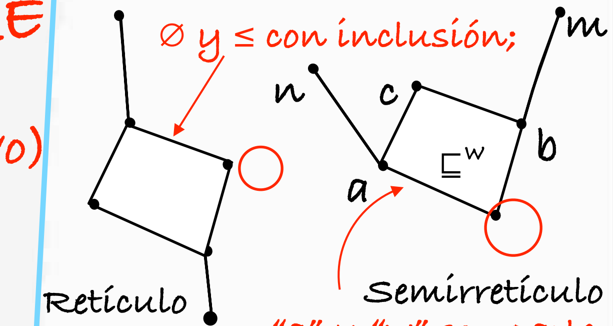
(*) Teorema.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



~~"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$~~

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

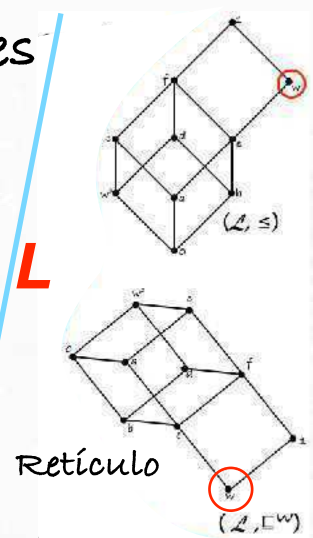
w-intersección en *L*

3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una uninorma idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup $\sqcup^w$ asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$.

w-unión en *L*

En consecuencia, $\sqcup^w$ es también una nulnorma y una uninorma en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.



(*) (Transparencias siguientes)

(*) **Teorema.**

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

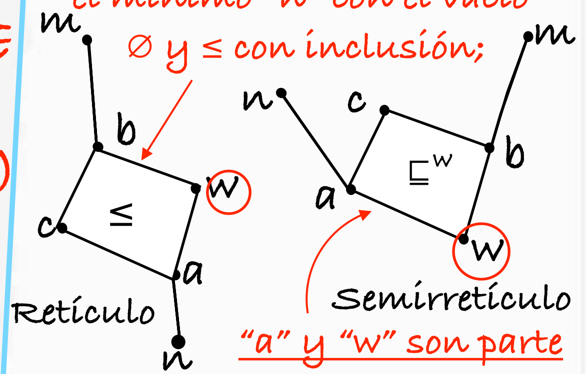
1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (<u>orden de actividad</u>) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es una <u>nulnorma</u> en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

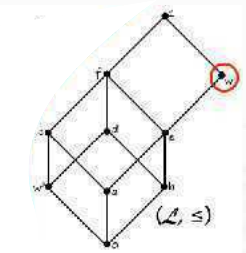
w-intersección en *L*

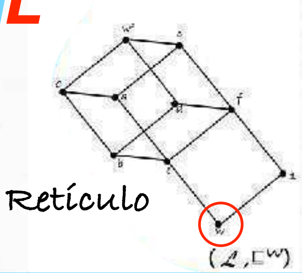
3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una <u>uninorma</u> idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup $\sqcup^w$ asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$.

w-unión en *L*

En consecuencia, $\sqcup^w$ es también una <u>nulnorma</u> y una <u>uninorma</u> en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.





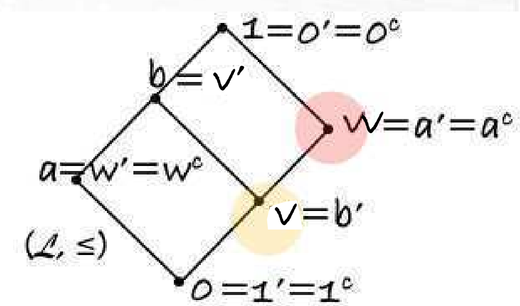
Retículo

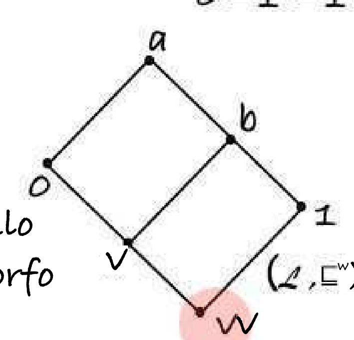
4. Si L es distributivo y acotado, si $':L \to L$ es una negación fuerte en L y si $w \in L$ es complementado tal que $w^c = w'$, entonces la relación de orden $\sqsubseteq^w$ puede expresarse mediante el operador <u>diferencia simétrica</u> Δ:

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (x \Delta w \leq y \Delta w).$$

dónde $x \Delta w = x \cdot w^c + x' \cdot w$ $\forall x \in L$.

En este caso, $':L \to L$ también es negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ y la aplicación $\varphi_w(x) = x \Delta w$ $\forall x \in L$ es un isomorfismo entre las álgebras $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$





retículo isomorfo

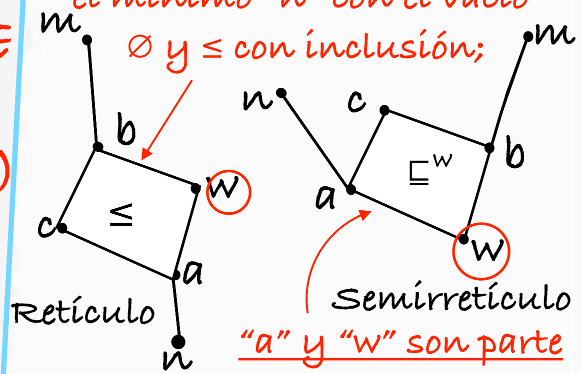
(*) (Transparencias siguientes)

(*)**Teorema**.

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica: INTERPRETACIONES QUE VEREMOS AQUÍ :

(en el caso en el que L es distributivo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo $\sqcap^w$ viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

"contenido" del $\varnothing$ (si $(L,\leq)$ tiene mínimo)

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

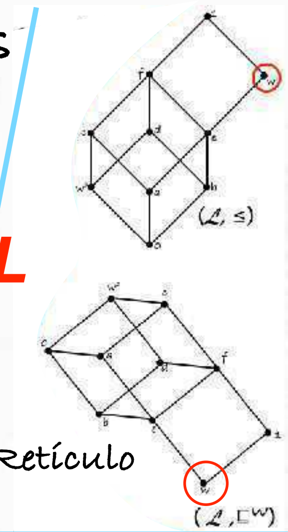
w-intersección en *L*

3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una uninorma idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup $\sqcup^w$ asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y)$ $\forall (x,y) \in L^2$.

w-unión en *L*

En consecuencia, $\sqcup^w$ es también una nulnorma y una uninorma en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.



4. Si L es distributivo y acotado, si $':L \to L$ es una negación fuerte en L y si $w \in L$ es complementado tal que $w^c = w'$, entonces la relación de orden $\sqsubseteq^w$ puede expresarse mediante el operador diferencia simétrica Δ:

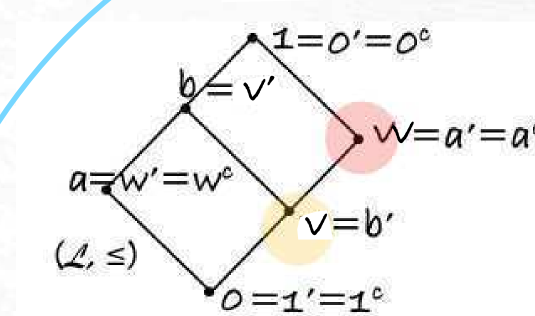
$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (x \Delta w \leq y \Delta w).$$

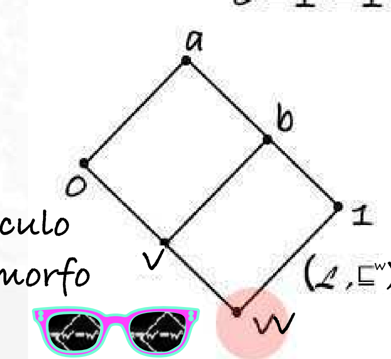
w-pertenencia de *x*

dónde $x \Delta w = x \cdot w^c + x' \cdot w$ $\forall x \in L$.

En este caso, $':L \to L$ también es negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ y la aplicación $\varphi_w(x) = x \Delta w$ $\forall x \in L$ es un isomorfismo entre las álgebras $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ y $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c),')$

w-perspectiva en *L*





retículo isomorfo

(*) (Transparencias siguientes)

<u>Demostración.</u> (Sobre el teorema básico de la transparencia anterior)

1. Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo y sean $x \in L$, $w \in L$, se verifica:
$[(x \cdot w) \leq x \leq (x+w)]$, es decir $(x \sqsubseteq^{w} x)$ que prueba que la relación $\sqsubseteq^{w}$ es reflexiva.

Demostración. (Sobre el teorema básico de la transparencia anterior)

1. Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un reticulo y sean $x \in L$, $w \in L$, se verifica:
$[(x \cdot w) \leq x \leq (x+w)]$, es decir $(x \sqsubseteq^w x)$ que prueba que la relación $\sqsubseteq^w$ es reflexiva.

Supongamos ahora que $x \sqsubseteq^w y \sqsubseteq^w z$. Es decir: $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(z \cdot w) \leq y \leq (z+w)]$, luego $[(z \cdot w) \leq (y \cdot w) \leq x] \& [x \leq (y+w) \leq (z+w)]$ y finalmente $[(z \cdot w) \leq x \leq (z+w)] \Leftrightarrow (x \sqsubseteq^w z)$, que demuestra que la relación $\sqsubseteq^w$ es transitiva. Resultado que completa la demostración de que es un preoden.

<u>Demostración.</u> (Sobre el teorema básico de la transparencia anterior)

1. Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo y sean $x \in L$, $w \in L$, se verifica: $[(x \cdot w) \leq x \leq (x+w)]$, es decir $(x \sqsubseteq^{w} x)$ que prueba que la relación $\sqsubseteq^{w}$ es reflexiva.

Supongamos ahora que $x \sqsubseteq^{w} y \sqsubseteq^{w} z$. Es decir: $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(z \cdot w) \leq y \leq (z+w)]$, luego $[(z \cdot w) \leq (y \cdot w) \leq x] \& [x \leq (y+w) \leq (z+w)]$ y finalmente $[(z \cdot w) \leq x \leq (z+w)] \Leftrightarrow (x \sqsubseteq^{w} z)$, que demuestra que la relación $\sqsubseteq^{w}$ es transitiva. Resultado que completa la demostración de que es un preoden.

Sea L es un retículo distributivo. Demostremos que la relación $\sqsubseteq^{w}$ es antisimétrica.

Supongamos que se verifica $(x \sqsubseteq^{w} y) \& (y \sqsubseteq^{w} x)$. Es equivalente a $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(x \cdot w) \leq y \leq (x+w)]$, es decir $[(y \cdot w) \leq (x \cdot w)] \& [(x \cdot w) \leq (y \cdot w)] \& [(x+w) \leq (y+w)] \& [(y+w) \leq (x+w)]$, de donde se deduce que $[(x \cdot w) = (y \cdot w)] \& [(x+w) = (y+w)]$. Luego $y = y \cdot (w+x) = y \cdot w + y \cdot x = x \cdot w + y \cdot x = x \cdot (y+w) = x \cdot (x^{*}w) = x$, que prueba que es antisimétrica y que junto con los resultados anteriores concluimos que es una relación de orden.

Demostración. (Sobre el teorema básico de la transparencia anterior)

1. Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo y sean $x \in L$, $w \in L$, se verifica: $[(x \cdot w) \leq x \leq (x+w)]$, es decir $(x \sqsubseteq^w x)$ que prueba que la relación $\sqsubseteq^w$ es reflexiva.

Supongamos ahora que $x \sqsubseteq^w y \sqsubseteq^w z$. Es decir: $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(z \cdot w) \leq y \leq (z+w)]$, luego $[(z \cdot w) \leq (y \cdot w) \leq x] \& [x \leq (y+w) \leq (z+w)]$ y finalmente $[(z \cdot w) \leq x \leq (z+w)] \Leftrightarrow (x \sqsubseteq^w z)$, que demuestra que la relación $\sqsubseteq^w$ es transitiva. Resultado que completa la demostración de que es un preoden.

Sea L es un retículo distributivo. Demostremos que la relación $\sqsubseteq^w$ es antisimétrica.

Supongamos que se verifica $(x \sqsubseteq^w y) \& (y \sqsubseteq^w x)$. Es equivalente a $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(x \cdot w) \leq y \leq (x+w)]$, es decir $[(y \cdot w) \leq (x \cdot w)] \& [(x \cdot w) \leq (y \cdot w)] \& [(x+w) \leq (y+w)] \& [(y+w) \leq (x+w)]$, de donde se deduce que $[(x \cdot w) = (y \cdot w)] \& [(x+w) = (y+w)]$. Luego $y = y \cdot (w+x) = y \cdot w + y \cdot x = x \cdot w + y \cdot x = x \cdot (y+w) = x \cdot (x*w) = x$, que prueba que es antisimétrica y que junto con los resultados anteriores concluimos que es una relación de orden.

Demostremos que si $(L, \leq)$ es distributivo, $(L, \sqsubseteq^w)$ es un inf-semiretículo. Sea $\sqcap^w$ el operador tal que $x \sqcap^w y = (x \cdot y + w \cdot (x+y))$. Es evidentemente idempotente: $x \sqcap^w x = x \ \forall x \in L$. Demostremos que $x \sqcap^w y$ es un minorante de $\{x,y\}$ en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Se verifica que $w \cdot x \leq x \cdot y + w \cdot (x+y) = x \sqcap^w y$. Por otra parte, $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \leq x+w$, es decir $w \cdot x \leq x \sqcap^w y \leq w+x$, que es equivalente a $(x \sqcap^w y) \sqsubseteq^w x$.

Por simetría, este razonamiento también demuestra que $(x \sqcap^w y) \sqsubseteq^w y$. Luego $x \sqcap^w y$ es un minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$ del conjunto $\{x,y\}$. Sea $s \in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s \sqsubseteq^w x) \& (s \sqsubseteq^w y)$. Demostremos que $s \sqsubseteq^w (x \sqcap^w y)$. Por hipótesis, $(w \cdot x \leq s \leq w+x) \& (w \cdot y \leq s \leq w+y)$, luego $(x \sqcap^w y) \cdot w = [x \cdot y + w \cdot (x+y)] \cdot w = x \cdot y \cdot w + w \cdot (x+y) = w \cdot (x+y) = w \cdot x + w \cdot y \leq s+s = s$.

Por otra parte, $(x \sqcap^w y) + w = x \cdot y + w \cdot (x+y) + w = x+w+y+w \geq s+s = s$. Concluimos pues, que $s \sqsubseteq^w (x \sqcap^w y)$ y en consecuencia que $x \sqcap^w y$ es el mayor de los minorantes de $\{x.y\}$ en $(L, \sqsubseteq^w)$ y por tanto es el ínfimo.

Demostración. (Sobre el teorema básico de la transparencia anterior)

1. Sea $(L, \leq, \cdot, +)$ un retículo y sean $x \in L$, $w \in L$, se verifica: $[(x \cdot w) \leq x \leq (x+w)]$, es decir $(x \sqsubseteq^w x)$ que prueba que la relación $\sqsubseteq^w$ es reflexiva.

Supongamos ahora que $x \sqsubseteq^w y \sqsubseteq^w z$. Es decir: $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(z \cdot w) \leq y \leq (z+w)]$, luego $[(z \cdot w) \leq (y \cdot w) \leq x] \& [x \leq (y+w) \leq (z+w)]$ y finalmente $[(z \cdot w) \leq x \leq (z+w)] \Leftrightarrow (x \sqsubseteq^w z)$, que demuestra que la relación $\sqsubseteq^w$ es transitiva. Resultado que completa la demostración de que es un preoden.

Sea L es un retículo distributivo. Demostremos que la relación $\sqsubseteq^w$ es antisimétrica.

Supongamos que se verifica $(x \sqsubseteq^w y) \& (y \sqsubseteq^w x)$. Es equivalente a $[(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)] \& [(x \cdot w) \leq y \leq (x+w)]$, es decir $[(y \cdot w) \leq (x \cdot w)] \& [(x \cdot w) \leq (y \cdot w)] \& [(x+w) \leq (y+w)] \& [(y+w) \leq (x+w)]$, de donde se deduce que $[(x \cdot w) = (y \cdot w)] \& [(x+w) = (y+w)]$. Luego $y = y \cdot (w+x) = y \cdot w + y \cdot x = x \cdot w + y \cdot x = x \cdot (y+w) = x \cdot (x*w) = x$, que prueba que es antisimétrica y que junto con los resultados anteriores concluimos que es una relación de orden.

Demostremos que si $(L, \leq)$ es distributivo, $(L, \sqsubseteq^w)$ es un inf-semiretículo. Sea $\sqcap^w$ el operador tal que $x \sqcap^w y = (x \cdot y + w \cdot (x+y))$. Es evidentemente idempotente: $x \sqcap^w x = x \ \forall x \in L$. Demostremos que $x \sqcap^w y$ es un minorante de $\{x,y\}$ en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Se verifica que $w \cdot x \leq x \cdot y + w \cdot (x+y) = x \sqcap^w y$. Por otra parte, $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \leq x + w$, es decir $w \cdot x \leq x \sqcap^w y \leq w + x$, que es equivalente a $(x \sqcap^w y) \sqsubseteq^w x$.

Por simetría, este razonamiento también demuestra que $(x \sqcap^w y) \sqsubseteq^w y$. Luego $x \sqcap^w y$ es un minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$ del conjunto $\{x,y\}$. Sea $s \in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s \sqsubseteq^w x) \& (s \sqsubseteq^w y)$. Demostremos que $s \sqsubseteq^w (x \sqcap^w y)$. Por hipótesis, $(w \cdot x \leq s \leq w+x) \& (w \cdot y \leq s \leq w+y)$, luego $(x \sqcap^w y) \cdot w = [x \cdot y + w \cdot (x+y)] \cdot w = x \cdot y \cdot w + w \cdot (x+y) = w \cdot (x+y) = w \cdot x + w \cdot y \leq s + s = s$.

Por otra parte, $(x \sqcap^w y) + w = x \cdot y + w \cdot (x+y) + w = x + w + y + w \geq s + s = s$. Concluimos pues, que $s \sqsubseteq^w (x \sqcap^w y)$ y en consecuencia que $x \sqcap^w y$ es el mayor de los minorantes de $\{x.y\}$ en $(L, \sqsubseteq^w)$ y por tanto es el ínfimo.

Por otra parte: $x \cdot w \leq w \leq x + w \ \forall x \in L$ prueba que $w \sqsubseteq^w x \ \forall x \in L$, es decir, que w es el mínimo en $(L, \sqsubseteq^w)$.

(Continúa)

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))$ $\forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x$ $\forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$:
$(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$
$x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))$ $\forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x$ $\forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$:

$(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$
$x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostremos que la operación $\sqcap^w$ es isótona. Sean x, y, z tales que $x\leq y$, y z cualquiera. Entonces $(x\sqcap^w z)=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\leq(y\cdot z+w\cdot(y+z))=(y\sqcap^w z)$.

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))$ $\forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x$ $\forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$:
$(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$
$x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostremos que la operación $\sqcap^w$ es isótona. Sean x, y, z tales que $x\leq y$, y z cualquiera. Entonces $(x\sqcap^w z)=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\leq(y\cdot z+w\cdot(y+z))=(y\sqcap^w z)$.

Por otra parte, $(x\sqcap^w w)=((x\cdot w+w\cdot(x+w))=x\cdot w+w=w$, luego w es elemento absorbente. Además, si $(L,\leq)$ es acotado y si $x\leq w$, entonces $x\sqcap^w 0=x\cdot 0+w\cdot(x+0)=w\cdot x=x$. Y si $x\geq w$: $x\sqcap^w 1=x\cdot 1+w\cdot(x+1)=x+w=x$, que concluye la demostración de que $\sqcap^w$ es una nulnorma en $(L,\leq)$ (nulnorma idempotente).

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))$ $\forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x$ $\forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$:
$(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$ $x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostremos que la operación $\sqcap^w$ es isótona. Sean x, y, z tales que $x\leq y$, y z cualquiera. Entonces $(x\sqcap^w z)=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\leq(y\cdot z+w\cdot(y+z))=(y\sqcap^w z)$.

Por otra parte, $(x\sqcap^w w)=((x\cdot w+w\cdot(x+w))=x\cdot w+w=w$, luego w es elemento absorbente. Además, si $(L,\leq)$ es acotado y si $x\leq w$, entonces $x\sqcap^w 0=x\cdot 0+w\cdot(x+0)=w\cdot x=x$. Y si $x\geq w$: $x\sqcap^w 1=x\cdot 1+w\cdot(x+1)=x+w=x$, que concluye la demostración de que $\sqcap^w$ es una nulnorma en $(L,\leq)$ (nulnorma idempotente).

3. Si $(L,\leq)$ es retículo distributivo y acotado y w es tal que tiene complemento w^c. Entonces, para todo x: $x\sqcap^w w^c=(x\cdot w^c+w\cdot(x+w^c))=(x\cdot w^c+w\cdot x)=x\cdot(w^c+w)=x$, que prueba que w^c es elemento neutro para la operación $\sqcap^w$ y en consecuencia es una uninorma en $(L,\leq)$.

Por otra parte, si $\sqcup^w$ es la operación tal que $x\sqcup^w y=x\sqcap^{w^c}y=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))$ $\forall(x,y)\in L^2$, se verifica:
$(x\sqcup^w y)\cdot w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\cdot w=x\cdot y\cdot w\leq x\cdot y$; $(x\sqcup^w y)+w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\geq(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\cdot(x+y)=$ $x\cdot y+(x+y)=(x+y)$. En consecuencia, $x\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$ e $y\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$, que prueban que $(x\sqcup^w y)$ es un mayorante en $(L,\sqsubseteq^w)$ del subconjunto $\{x,y\}$. Demostremos que es el menor de esos mayorantes. Sea z tal que $x\sqsubseteq^w z$ e $y\sqsubseteq^w z$. Entonces $z\cdot w\leq x\leq z+w$, $z\cdot w\leq y\leq z+w$, luego $z\cdot w\leq x\cdot y\leq x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=(x\sqcup^w y)$. Además $(x\sqcup^w y)=x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot(w+w^c)+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+x\cdot y\cdot w^c+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+w^c\cdot(x+y)\leq$ $(x+y)\cdot w+w^c\cdot(x+y)=x+y\leq z+w$. Concluimos que $(x\sqcup^w y)\sqsubseteq^w z$ y por tanto es el supremo en $(L,\sqsubseteq^w)$ de $\{x,y\}$.

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))\ \ \forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x\ \ \forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$:
$(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$
$x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostremos que la operación $\sqcap^w$ es isótona. Sean x, y, z tales que $x\leq y$, y z cualquiera. Entonces
$(x\sqcap^w z)=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\leq(y\cdot z+w\cdot(y+z))=(y\sqcap^w z)$.

Por otra parte, $(x\sqcap^w w)=((x\cdot w+w\cdot(x+w))=x\cdot w+w=w$, luego w es elemento absorbente. Además, si $(L,\leq)$ es acotado y si $x\leq w$, entonces $x\sqcap^w 0=x\cdot 0+w\cdot(x+0)=w\cdot x=x$. Y si $x\geq w$: $x\sqcap^w 1=x\cdot 1+w\cdot(x+1)=x+w=x$, que concluye la demostración de que $\sqcap^w$ es una nulnorma en $(L,\leq)$ (nulnorma idempotente).

3. Si $(L,\leq)$ es retículo distributivo y acotado y w es tal que tiene complemento w^c. Entonces, para todo x:
$x\sqcap^w w^c=(x\cdot w^c+w\cdot(x+w^c))=(x\cdot w^c+w\cdot x)\ =x\cdot(w^c+w)=x$, que prueba que w^c es elemento neutro para la operación $\sqcap^w$ y en consecuencia es una uninorma en $(L,\leq)$.

Por otra parte, si $\sqcup^w$ es la operación tal que $x\sqcup^w y=x\sqcap^{w^c} y=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\ \ \forall(x,y)\in L^2$, se verifica:
$(x\sqcup^w y)\cdot w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\cdot w=x\cdot y\cdot w\leq x\cdot y$; $(x\sqcup^w y)+w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\geq(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\cdot(x+y)=$
$x\cdot y+(x+y)=(x+y)$. En consecuencia, $x\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$ e $y\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$, que prueban que $(x\sqcup^w y)$ es un mayorante en $(L,\sqsubseteq^w)$ del subconjunto $\{x,y\}$. Demostremos que es el menor de esos mayorantes. Sea z tal que $x\sqsubseteq^w z$ e $y\sqsubseteq^w z$. Entonces $z\cdot w\leq x\leq z+w$, $z\cdot w\leq y\leq z+w$, luego $z\cdot w\leq x\cdot y\leq x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=(x\sqcup^w y)$. Además
$(x\sqcup^w y)=x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot(w+w^c)+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+x\cdot y\cdot w^c+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+w^c\cdot(x+y)\leq$
$(x+y)\cdot w+w^c\cdot(x+y)=x+y\leq z+w$. Concluimos que $(x\sqcup^w y)\sqsubseteq^w z$ y por tanto es el supremo en $(L,\sqsubseteq^w)$ de $\{x,y\}$.

El elemento w^c verifica $w^c\sqcup^w y=w^c\cdot y+w^c\cdot(w^c+y)=w^c$. Concluimos que $(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$ es un retículo acotado con elementos mínimo w y máximo w^c.

Demostración. (continuación)

2. El operador $\sqcap^w$ en el retículo distributivo $(L,\leq)$ es tal que $x\sqcap^w y=(x\cdot y+w\cdot(x+y))\ \ \forall(x,y)\in L^2$. Es evidentemente conmutativo: $x\sqcap^w y=y\sqcap^w x\ \ \forall(x,y)\in L^2$. También es asociativo, ya que $\forall(x,y,z)\in L^3$: $(x\sqcap^w y)\sqcap^w z=((x\cdot y+w\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot((x\cdot y+w\cdot(x+y)+z)=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+w\cdot z=$ $x\cdot y\cdot z+w\cdot(x+y+z)$.

Por otra parte, $x\sqcap^w(y\sqcap^w z)=(y\sqcap^w z)\sqcap^w x$, que a su vez, por simetría y teniendo en cuenta el resultado anterior, será igual a $y\cdot z\cdot x+w\cdot(y+z+x)$. Concluimos pues, que $\sqcap^w$ es asociativa.

Demostremos que la operación $\sqcap^w$ es isótona. Sean x, y, z tales que $x\leq y$, y z cualquiera. Entonces $(x\sqcap^w z)=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\leq(y\cdot z+w\cdot(y+z))=(y\sqcap^w z)$.

Por otra parte, $(x\sqcap^w w)=((x\cdot w+w\cdot(x+w))=x\cdot w+w=w$, luego w es elemento absorbente. Además, si $(L,\leq)$ es acotado y si $x\leq w$, entonces $x\sqcap^w 0=x\cdot 0+w\cdot(x+0)=w\cdot x=x$. Y si $x\geq w$: $x\sqcap^w 1=x\cdot 1+w\cdot(x+1)=x+w=x$, que concluye la demostración de que $\sqcap^w$ es una nulnorma en $(L,\leq)$ (nulnorma idempotente).

3. Si $(L,\leq)$ es retículo distributivo y acotado y w es tal que tiene complemento w^c. Entonces, para todo x: $x\sqcap^w w^c=(x\cdot w^c+w\cdot(x+w^c))=(x\cdot w^c+w\cdot x)=x\cdot(w^c+w)=x$, que prueba que w^c es elemento neutro para la operación $\sqcap^w$ y en consecuencia es una uninorma en $(L,\leq)$.

Por otra parte, si $\sqcup^w$ es la operación tal que $x\sqcup^w y=x\sqcap^{w^c} y=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\ \ \forall(x,y)\in L^2$, se verifica: $(x\sqcup^w y)\cdot w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\cdot w=x\cdot y\cdot w\leq x\cdot y$; $(x\sqcup^w y)+w=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\geq(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))+w\cdot(x+y)=$ $x\cdot y+(x+y)=(x+y)$. En consecuencia, $x\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$ e $y\sqsubseteq^w(x\sqcup^w y)$, que prueban que $(x\sqcup^w y)$ es un mayorante en $(L,\sqsubseteq^w)$ del subconjunto $\{x,y\}$. Demostremos que es el menor de esos mayorantes. Sea z tal que $x\sqsubseteq^w z$ e $y\sqsubseteq^w z$. Entonces $z\cdot w\leq x\leq z+w$, $z\cdot w\leq y\leq z+w$, luego $z\cdot w\leq x\cdot y\leq x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=(x\sqcup^w y)$. Además $(x\sqcup^w y)=x\cdot y+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot(w+w^c)+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+x\cdot y\cdot w^c+w^c\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot w+w^c\cdot(x+y)\leq$ $(x+y)\cdot w+w^c\cdot(x+y)=x+y\leq z+w$. Concluimos que $(x\sqcup^w y)\sqsubseteq^w z$ y por tanto es el supremo en $(L,\sqsubseteq^w)$ de $\{x,y\}$.

El elemento w^c verifica $w^c\sqcup^w y=w^c\cdot y+w^c\cdot(w^c+y)=w^c$. Concluimos que $(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$ es un retículo acotado con elementos mínimo w y máximo w^c.

Además es distributivo: $(x\sqcup^w y)\sqcap^w z=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\sqcap^w z=(x\cdot y+w^c\cdot(x+y))\cdot z+w\cdot(x\cdot y+w^c\cdot(x+y)+z)=$ $x\cdot y\cdot z+w^c\cdot(x+y)\cdot z+w\cdot(x\cdot y+z)$.

Y $(x\sqcap^w z)\sqcup^w(y\sqcap^w z)=(x\cdot z+w^c\cdot(x+z))\sqcup^w(y\cdot z+w^c\cdot(y+z))=(x\cdot z+w\cdot(x+z))\cdot(y\cdot z+w\cdot(y+z))+w^c\cdot(x\cdot z+w\cdot(x+z)$ $+y\cdot z+w\cdot(y+z))=x\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot z+w\cdot y\cdot z+w\cdot(x\cdot y+z)+w^c\cdot x\cdot z+w^c\cdot y\cdot z=x\cdot y\cdot z+x\cdot z+y\cdot z+w\cdot(x\cdot y+z)=$ $x\cdot y\cdot z+w^c\cdot(x+y)\cdot z+w\cdot(x\cdot y+z)$.

(Continúa)

Demostración. (continuación II)

4. Sea L un retículo distributivo y acotado y $':L\to L$ una negación fuerte en L. Consideremos $w\in L$ complementado tal que $w^c=w'$ y la función $\varphi_w(x)= x\Delta w=x\cdot w^c+x'\cdot w \ \ \forall x\in L$. Entonces:

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow[(y\cdot w)\leq x \leq (y+w)]\Leftrightarrow[(y'\cdot w^c)\leq x' \leq (y'+w^c)]$, luego $[(x+w)\leq (y+w)]\&[(x'+w^c) \leq (y'+w^c)]$ y $[(x+w)\cdot w^c\leq (y+w)\cdot w^c]\&[(x'+w^c)\cdot w \leq (y'+w^c)\cdot w]$, es decir $(x\cdot w^c \leq y\cdot w^c)\&(x'\cdot w \leq y'\cdot w)$ y por tanto $x\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)=y\Delta w$.

Supongamos ahora que $x\Delta w \leq y\Delta w$. Entonces, de $(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)$, se deduce:

$[(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)]\Rightarrow[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w]\&[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w^c]\Rightarrow$

$[x'\cdot w\leq y'\cdot w]\&[x\cdot w^c\leq y\cdot w^c]\Rightarrow[(y'\cdot w)'\leq(x'\cdot w)']\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow[y+w^c\leq x+w^c]\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow$

$[(y+w^c)\cdot w\leq(x+w^c)\cdot w]\&[(x+w)\cdot(w^c+w)\leq(y+w)\cdot(w^c+w)]\Rightarrow[y\cdot w\leq x\cdot w]\&[x+w\leq y+w]\Rightarrow$

$[y\cdot w \leq x\cdot w \leq x \leq x+w \leq y+w]\Rightarrow(x\sqsubseteq^w y)$, que finaliza la demostración de $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w \leq y\Delta w)$.

Demostración. (continuación II)

4. Sea L un retículo distributivo y acotado y $':L\to L$ una negación fuerte en L. Consideremos $w\in L$ complementado tal que $w^c=w'$ y la función $\varphi_w(x)= x\Delta w=x\cdot w^c+x'\cdot w \ \ \forall x\in L$. Entonces:

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow[(y\cdot w)\leq x \leq (y+w)]\Leftrightarrow[(y'\cdot w^c)\leq x' \leq (y'+w^c)]$, luego $[(x+w)\leq (y+w)]\&[(x'+w^c) \leq (y'+w^c)]$ y $[(x+w)\cdot w^c\leq (y+w)\cdot w^c]\&[(x'+w^c)\cdot w \leq (y'+w^c)\cdot w]$, es decir $(x\cdot w^c \leq y\cdot w^c)\&(x'\cdot w \leq y'\cdot w)$ y por tanto $x\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)=y\Delta w$.

Supongamos ahora que $x\Delta w \leq y\Delta w$. Entonces, de $(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)$, se deduce:

$[(x\cdot w^c+x'\cdot w) \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)]\Rightarrow[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w]\&[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c \leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w^c]\Rightarrow$

$[x'\cdot w\leq y'\cdot w]\&[x\cdot w^c\leq y\cdot w^c]\Rightarrow[(y'\cdot w)'\leq(x'\cdot w)']\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow[y+w^c\leq x+w^c]\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow$

$[(y+w^c)\cdot w\leq(x+w^c)\cdot w]\&[(x+w)\cdot(w^c+w)\leq(y+w)\cdot(w^c+w)]\Rightarrow[y\cdot w\leq x\cdot w]\&[x+w\leq y+w]\Rightarrow$

$[y\cdot w \leq x\cdot w \leq x \leq x+w \leq y+w]\Rightarrow(x\sqsubseteq^w y)$, que finaliza la demostración de $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w \leq y\Delta w)$.

La función $\varphi_w:L\to L$ tal que $\varphi_w(x)= x\Delta w \ \ \forall x\in L$ verifica $\varphi_w(0)= 0\Delta w=w$, $\varphi_w(1)= 1\Delta w=w^c$ y es involutiva: $\varphi_w(\varphi_w(x))= \varphi_w(x)\Delta w = (x\cdot w^c+x'\cdot w)\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c+(x\cdot w^c+x'\cdot w)'\cdot w=$
$x\cdot w^c+(x'+w)\cdot(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+x\cdot w=x\cdot(w^c+w)=x$.

Consecuentemente, la función entre retículos $\varphi_w:(L, \leq , \cdot, +, 0, 1)\to(L, \sqsubseteq^w ,\sqcap^w ,\sqcup^w ,W,W^c)$ también es biyectiva. Demostremos que es isomorfismo de retículos.Hemos demostrado que $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(\varphi_w(x) \leq \varphi_w(y))$, luego $(x\leq y)\Leftrightarrow[\varphi_w(\varphi_w(x))\leq\varphi_w(\varphi_w(y))]\Leftrightarrow(\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(y))$.

Al ser isomorfismo: $\varphi_w(x\cdot y)=\varphi_w(x)\sqcap^w\varphi_w(y)$, $\varphi_w(x+y)=\varphi_w(x)\sqcup^w\varphi_w(y) \ \forall (x,y)\in L^2$.

Demostración. (continuación II)

4. Sea L un retículo distributivo y acotado y $':L\rightarrow L$ una negación fuerte en L. Consideremos $w\in L$ complementado tal que $w^c=w'$ y la función $\varphi_w(x)= x\Delta w=x\cdot w^c+x'\cdot w \ \ \forall x\in L$. Entonces:

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow[(y\cdot w)\leq x \leq (y+w)]\Leftrightarrow[(y'\cdot w^c)\leq x' \leq (y'+w^c)]$, luego $[(x+w)\leq (y+w)]\&[(x'+w^c)\leq (y'+w^c)]$ y $[(x+w)\cdot w^c\leq (y+w)\cdot w^c]\&[(x'+w^c)\cdot w \leq (y'+w^c)\cdot w]$, es decir $(x\cdot w^c \leq y\cdot w^c)\&(x'\cdot w \leq y'\cdot w)$ y por tanto $x\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)=y\Delta w$.

Supongamos ahora que $x\Delta w \leq y\Delta w$. Entonces, de $(x\cdot w^c+x'\cdot w)\leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)$, se deduce:

$[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)]\Rightarrow[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w\leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w]\&[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c\leq(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w^c]\Rightarrow$

$[x'\cdot w\leq y'\cdot w]\&[x\cdot w^c\leq y\cdot w^c]\Rightarrow[(y'\cdot w)'\leq(x'\cdot w)']\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow[y+w^c\leq x+w^c]\&[x\cdot w^c+w\leq y\cdot w^c+w]\Rightarrow$

$[(y+w^c)\cdot w\leq(x+w^c)\cdot w]\&[(x+w)\cdot(w^c+w)\leq(y+w)\cdot(w^c+w)]\Rightarrow[y\cdot w\leq x\cdot w]\&[x+w\leq y+w]\Rightarrow$

$[y\cdot w \leq x\cdot w \leq x \leq x+w \leq y+w]\Rightarrow(x\sqsubseteq^w y)$, que finaliza la demostración de $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w \leq y\Delta w)$.

La función $\varphi_w:L\rightarrow L$ tal que $\varphi_w(x)= x\Delta w \ \ \forall x\in L$ verifica $\varphi_w(0)= 0\Delta w=w$, $\varphi_w(1)= 1\Delta w=w^c$ y es involutiva: $\varphi_w(\varphi_w(x))= \varphi_w(x)\Delta w = (x\cdot w^c+x'\cdot w)\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c+(x\cdot w^c+x'\cdot w)'\cdot w=$
$x\cdot w^c+(x'+w)\cdot(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+x\cdot w=x\cdot(w^c+w)=x$.

Consecuentemente, la función entre retículos $\varphi_w:(L,\leq,\cdot,+,0,1)\rightarrow(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$ también es biyectiva. Demostremos que es isomorfismo de retículos. Hemos demostrado que $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\leq\varphi_w(y))$, luego $(x\leq y)\Leftrightarrow[\varphi_w(\varphi_w(x))\leq\varphi_w(\varphi_w(y))]\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\sqsubseteq^w\varphi_w(y))$.

Al ser isomorfismo: $\varphi_w(x\cdot y)=\varphi_w(x)\sqcap^w\varphi_w(y)$, $\varphi_w(x+y)=\varphi_w(x)\sqcup^w\varphi_w(y) \ \forall(x,y)\in L^2$.

Finalmente, veamos que $':L\rightarrow L$ también es negación fuerte en $(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$. Se verifica:

$\varphi_w(x')= x'\Delta w=x'\cdot w^c+x\cdot w \ \ \forall x\in L$, y $(\varphi_w(x))'=(x\Delta w)'=(x\cdot w^c+x'\cdot w)'=(x'+w)\cdot(x+w^c)=x'\cdot x+x'\cdot w^c+x\cdot w=$

$x'\cdot x\cdot(w+w^c)+x'\cdot w^c+x\cdot w=x'\cdot x\cdot w+x'\cdot x\cdot w^c+x'\cdot w^c+x\cdot w=x'\cdot w^c+x\cdot w$, luego $\varphi_w(x')=(\varphi_w(x))' \ \ \forall x\in L$.

Como es involutiva, bastará demostrar que es antítona para $\sqsubseteq^w$. Si $x\sqsubseteq^w y$, entonces

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w\leq y\Delta w)\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\leq\varphi_w(y))\Leftrightarrow((\varphi_w(y))'\leq(\varphi_w(x))')\Leftrightarrow(\varphi_w(y'))\leq(\varphi_w(x'))\Leftrightarrow(x'\Delta w\leq y'\Delta w)$

$\Leftrightarrow(y'\sqsubseteq^w x')$. Concluimos que la aplicación $\varphi_w(x)= x\Delta w \ \forall x\in L$ es un isomorfismo entre las álgebras $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ y $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c),')$.∎

Demostración. (continuación II)

4. Sea L un retículo distributivo y acotado y $':L\to L$ una negación fuerte en L. Consideremos $w\in L$ complementado tal que $w^c=w'$ y la función $\varphi_w(x)=x\Delta w=x\cdot w^c+x'\cdot w\ \ \forall x\in L$. Entonces:

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow[(y\cdot w)\le x\le(y+w)]\Leftrightarrow[(y'\cdot w^c)\le x'\le(y'+w^c)]$, luego $[(x+w)\le(y+w)]\&[(x'+w^c)\le(y'+w^c)]$ y $[(x+w)\cdot w^c\le(y+w)\cdot w^c]\&[(x'+w^c)\cdot w\le(y'+w^c)\cdot w]$, es decir $(x\cdot w^c\le y\cdot w^c)\&(x'\cdot w\le y'\cdot w)$ y por tanto $x\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\le(y\cdot w^c+y'\cdot w)=y\Delta w$.

Supongamos ahora que $x\Delta w\le y\Delta w$. Entonces, de $(x\cdot w^c+x'\cdot w)\le(y\cdot w^c+y'\cdot w)$, se deduce:

$[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\le(y\cdot w^c+y'\cdot w)]\Rightarrow[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w\le(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w]\&[(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c\le(y\cdot w^c+y'\cdot w)\cdot w^c]\Rightarrow$

$[x'\cdot w\le y'\cdot w]\&[x\cdot w^c\le y\cdot w^c]\Rightarrow[(y'\cdot w)'\le(x'\cdot w)']\&[x\cdot w^c+w\le y\cdot w^c+w]\Rightarrow[y+w^c\le x+w^c]\&[x\cdot w^c+w\le y\cdot w^c+w]\Rightarrow$

$[(y+w^c)\cdot w\le(x+w^c)\cdot w]\&[(x+w)\cdot(w^c+w)\le(y+w)\cdot(w^c+w)]\Rightarrow[y\cdot w\le x\cdot w]\&[x+w\le y+w]\Rightarrow$

$[y\cdot w\le x\cdot w\le x\le x+w\le y+w]\Rightarrow(x\sqsubseteq^w y)$, que finaliza la demostración de $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w\le y\Delta w)$.

La función $\varphi_w:L\to L$ tal que $\varphi_w(x)=x\Delta w\ \ \forall x\in L$ verifica $\varphi_w(0)=0\Delta w=w$, $\varphi_w(1)=1\Delta w=w^c$ y es involutiva: $\varphi_w(\varphi_w(x))=\varphi_w(x)\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\Delta w=(x\cdot w^c+x'\cdot w)\cdot w^c+(x\cdot w^c+x'\cdot w)'\cdot w=$
$x\cdot w^c+(x'+w)\cdot(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+(x+w^c)\cdot w=x\cdot w^c+x\cdot w=x\cdot(w^c+w)=x$.

Consecuentemente, la función entre retículos $\varphi_w:(L,\le,\cdot,+,0,1)\to(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$ también es biyectiva. Demostremos que es isomorfismo de retículos. Hemos demostrado que $(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\le\varphi_w(y))$, luego $(x\le y)\Leftrightarrow[\varphi_w(\varphi_w(x))\le\varphi_w(\varphi_w(y))]\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\sqsubseteq^w\varphi_w(y))$.

Al ser isomorfismo: $\varphi_w(x\cdot y)=\varphi_w(x)\sqcap^w\varphi_w(y)$, $\varphi_w(x+y)=\varphi_w(x)\sqcup^w\varphi_w(y)\ \forall(x,y)\in L^2$.

Finalmente, veamos que $':L\to L$ también es negación fuerte en $(L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c)$. Se verifica:

$\varphi_w(x')=x'\Delta w=x'\cdot w^c+x\cdot w\ \ \forall x\in L$, y $(\varphi_w(x))'=(x\Delta w)'=(x\cdot w^c+x'\cdot w)'=(x'+w)\cdot(x+w^c)=x'\cdot x+x'\cdot w^c+x\cdot w=$
$x'\cdot x\cdot(w+w^c)+x'\cdot w^c+x\cdot w=x'\cdot x\cdot w+x'\cdot x\cdot w^c+x'\cdot w^c+x\cdot w=x'\cdot w^c+x\cdot w$, luego $\varphi_w(x')=(\varphi_w(x))'\ \ \forall x\in L$.

Como es involutiva, bastará demostrar que es antítona para $\sqsubseteq^w$. Si $x\sqsubseteq^w y$, entonces

$(x\sqsubseteq^w y)\Leftrightarrow(x\Delta w\le y\Delta w)\Leftrightarrow(\varphi_w(x)\le\varphi_w(y))\Leftrightarrow((\varphi_w(y))'\le(\varphi_w(x))')\Leftrightarrow(\varphi_w(y'))\le(\varphi_w(x'))\Leftrightarrow(x'\Delta w\le y'\Delta w)$

$\Leftrightarrow(y'\sqsubseteq^w x')$. Concluimos que la aplicación $\varphi_w(x)=x\Delta w\ \forall x\in L$ es un isomorfismo entre las álgebras $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$ y $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,W,W^c),')$. ∎

Nota. Si x es complementado tal que $x^c=x'$, la igualdad $\varphi_w(x')=(\varphi_w(x))'$ es equivalente a: $x^c\Delta w=(x\Delta w)^c$.

LOS OPERADORES ω-ÍNFIMO COMO NULNORMAS Y UNINORMAS EN $(L, \leq, \cdot, +, ^c, 0, 1)$

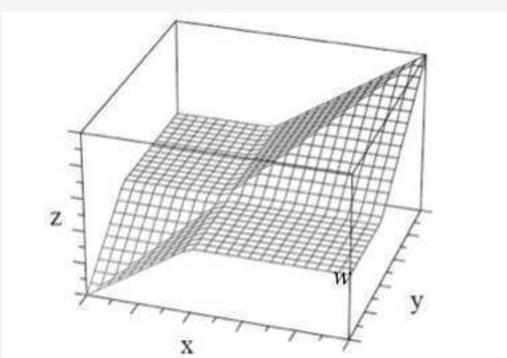
Si $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es retículo distributivo, la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega\in L}$ de operadores ínfimo de la correspondiente familia de órdenes de actividad $(\sqsubseteq^{\omega})_{\omega\in L}$ tales que $\alpha \sqcap^{\omega}\beta = \alpha\cdot\beta+\omega\cdot(\alpha+\beta)$ $\forall(\alpha,\beta,\omega)\in L^3$, son asociativos, conmutativos, idempotentes y no decrecientes para el orden $\leq$. Además, $\forall\alpha\in L$: $\alpha \sqcap^{\omega}\omega = \omega$, $\alpha\sqcap^{\omega}\alpha = \alpha$, $\alpha\sqcap^{\omega}0 =\alpha\cdot\omega$, $\alpha\sqcap^{\omega}1=\alpha+\omega$, y si existe ω^c $\alpha\sqcap^{\omega}\omega^c=\alpha$.

Luego:

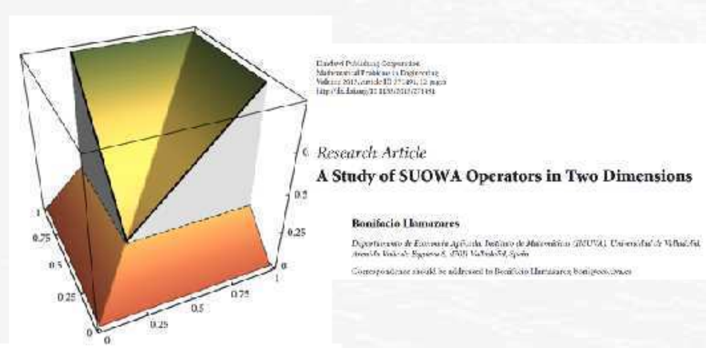
Si $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es retículo distributivo, la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega \in L}$ de operadores ínfimo de la correspondiente familia de órdenes de actividad $(\sqsubseteq^{\omega})_{\omega \in L}$ tales que $\alpha \sqcap^{\omega} \beta = \alpha \cdot \beta + \omega \cdot (\alpha + \beta)$ $\forall (\alpha, \beta, \omega) \in L^3$, son asociativos, conmutativos, idempotentes y no decrecientes para el orden $\leq$. Además, $\forall \alpha \in L$: $\alpha \sqcap^{\omega} \omega = \omega$, $\alpha \sqcap^{\omega} \alpha = \alpha$, $\alpha \sqcap^{\omega} 0 = \alpha \cdot \omega$, $\alpha \sqcap^{\omega} 1 = \alpha + \omega$, y si existe ω^c $\alpha \sqcap^{\omega} \omega^c = \alpha$.

Luego:

<u>Proposición</u>.(*) Cada elemento $\sqcap^{\omega}$ de la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega \in L}$ es una <u>nulnorma idempotente</u> en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ con elemento absorbente ω. Si además, éste es complementado con complemento ω^c, entonces también es una <u>uninorma idempotente</u> en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, cuyo elemento neutro es ω^c.



Operador $z = x \sqcap^w y = (x \cdot y) + [w \cdot (x + y)]$ en $[0, 1]$



$$U_{\min}(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{if } (x, y) \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]^2 \\ \min(x, y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 385–394.

Mehmet Akif˙Ince Funda Karaçal, Radko Mesiar. Medians and nullnorms on bounded lattices Fuzzy Sets and Systems 289 (2016) 74–81

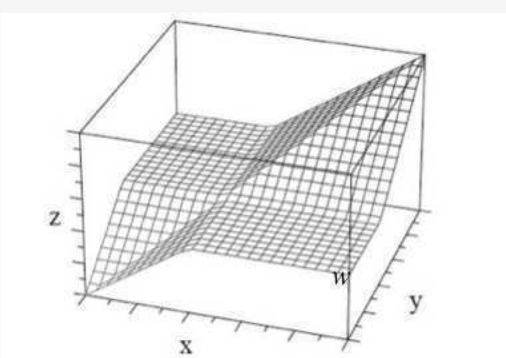
M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, t-Operators, Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. 7 (1999) 31–50.
[16]M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets Syst. 128

YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.

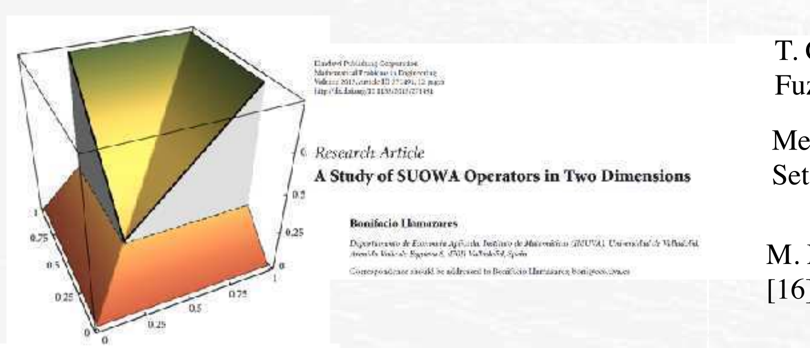
Si $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es retículo distributivo, la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega\in L}$ de operadores ínfimo de la correspondiente familia de órdenes de actividad $(\sqsubseteq^{\omega})_{\omega\in L}$ tales que $\alpha \sqcap^{\omega}\beta = \alpha\cdot\beta+\omega\cdot(\alpha+\beta)$ $\forall(\alpha,\beta,\omega)\in L^3$, son asociativos, conmutativos, idempotentes y no decrecientes para el orden $\leq$. Además, $\forall\alpha\in L$: $\alpha \sqcap^{\omega}\omega = \omega$, $\alpha\sqcap^{\omega}\alpha = \alpha$, $\alpha\sqcap^{\omega}0 =\alpha\cdot\omega$, $\alpha\sqcap^{\omega}1=\alpha+\omega$, y si existe ω^c $\alpha\sqcap^{\omega}\omega^c=\alpha$.

Luego:

Proposición.(*) Cada elemento $\sqcap^{\omega}$ de la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega\in L}$ es una nulnorma idempotente en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ con elemento absorbente ω. Si además, éste es complementado con complemento ω^c, entonces también es una uninorma idempotente en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, cuyo elemento neutro es ω^c.



Operador $z = x \sqcap^w y = (x\cdot y) + [w\cdot(x+y)]$ en $[0,1]$



$$U_{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{if } (x,y) \in \left[\frac{1}{n},1\right]^2 \\ \min(x,y) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 385–394.

Mehmet Akif˙Ince Funda Karaçal, Radko Mesiar. Medians and nullnorms on bounded lattices Fuzzy Sets and Systems 289 (2016) 74–81

M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, t-Operators, Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. 7 (1999) 31–50.
[16]M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets Syst. 128

YAGER, R. R. & RYBALOV, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80:111- 120.

En consecuencia,

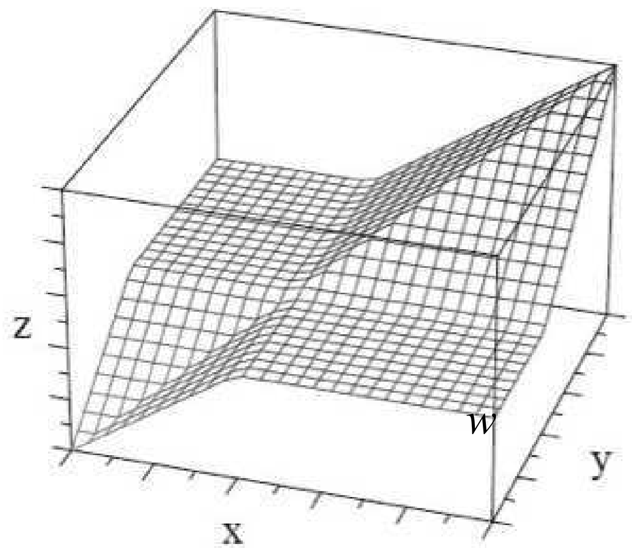
Proposición (**) En un álgebra de Boole $(L, \leq, \cdot, +, {}^c, 0, 1)$, todo operador de la familia $(\sqcap^{\omega})_{\omega\in L}$ es a la vez nulnorma y uninorma idempotente.

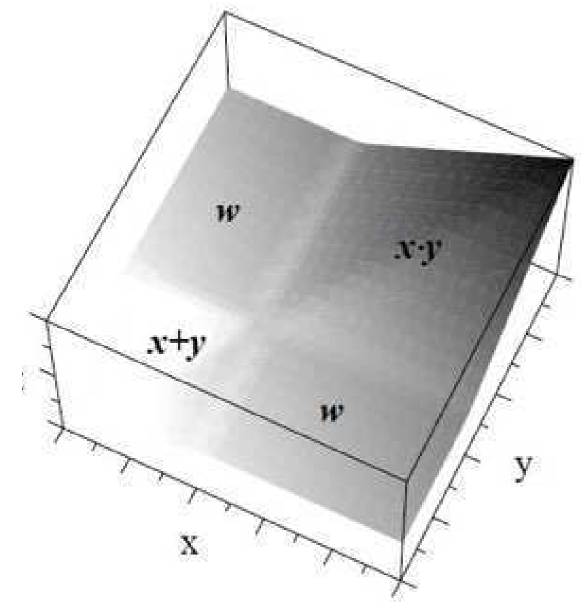
(*), (**) Demostrado en transparencias anteriores.

Familia de nulnormas $(\sqcap^{\omega})_{\omega\in[0,1]}$

OPERADOR *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$ EN *L* = [0,1]

En la cadena ([0,1], ≤, min, max, 0, 1)

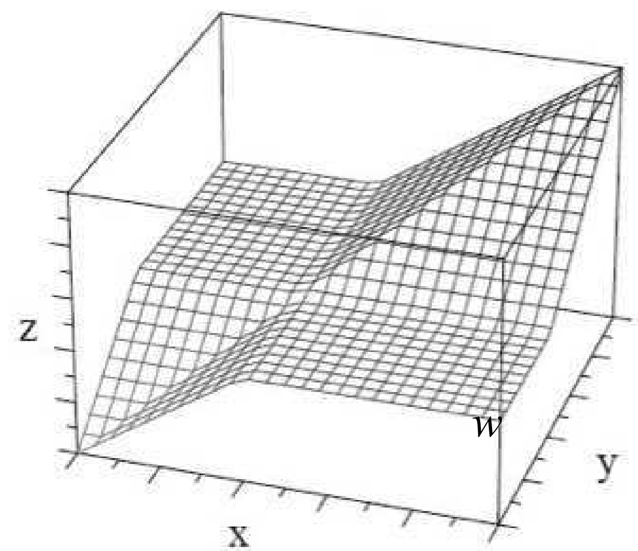


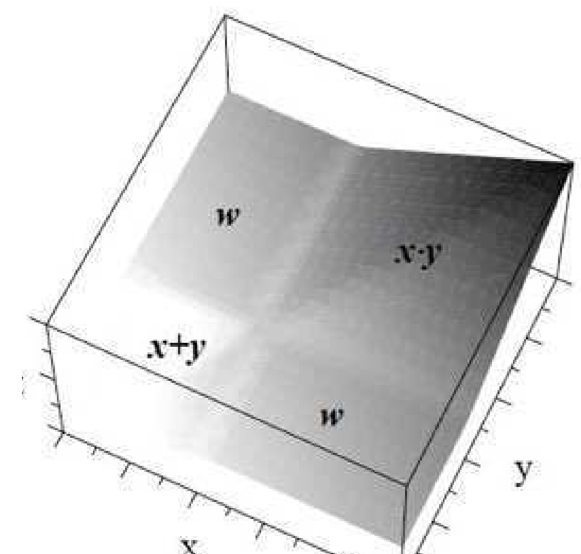


Operador $z = x \sqcap^{w} y = (x \cdot y) + [w \cdot (x + y)]$ en $[0, 1]$

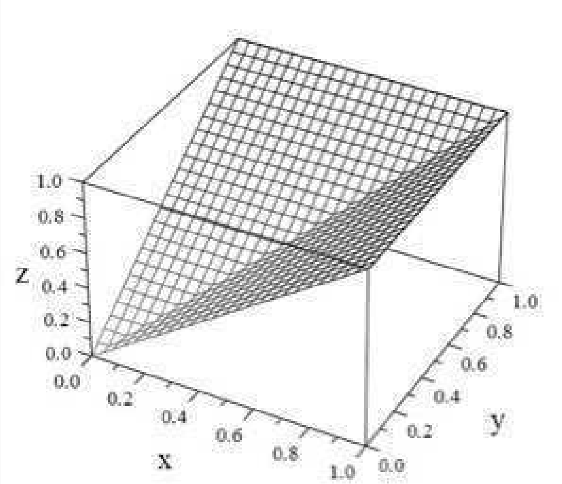
OPERADOR *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$ EN *L* = [0,1]

En la cadena ([0,1], ≤, min, max, 0, 1)

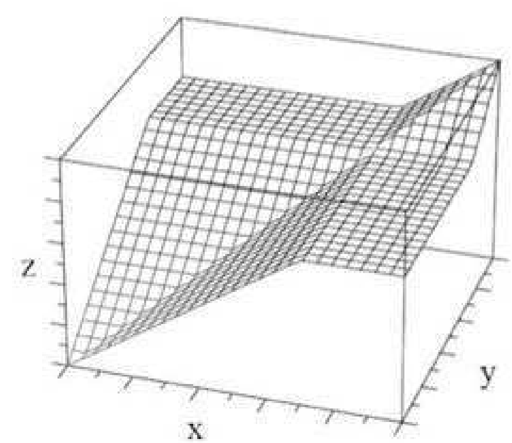




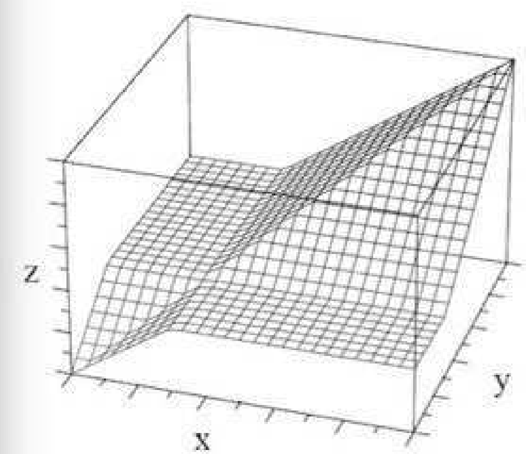
Operador $z = x \sqcap^{w} y = (x \cdot y) + [w \cdot (x + y)]$ en $[0, 1]$



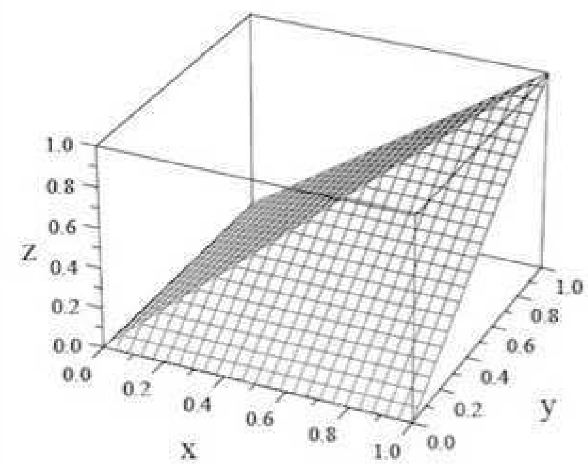
$\sqcap^{1} = max$ ...



$\sqcap^{0.7}$ ...



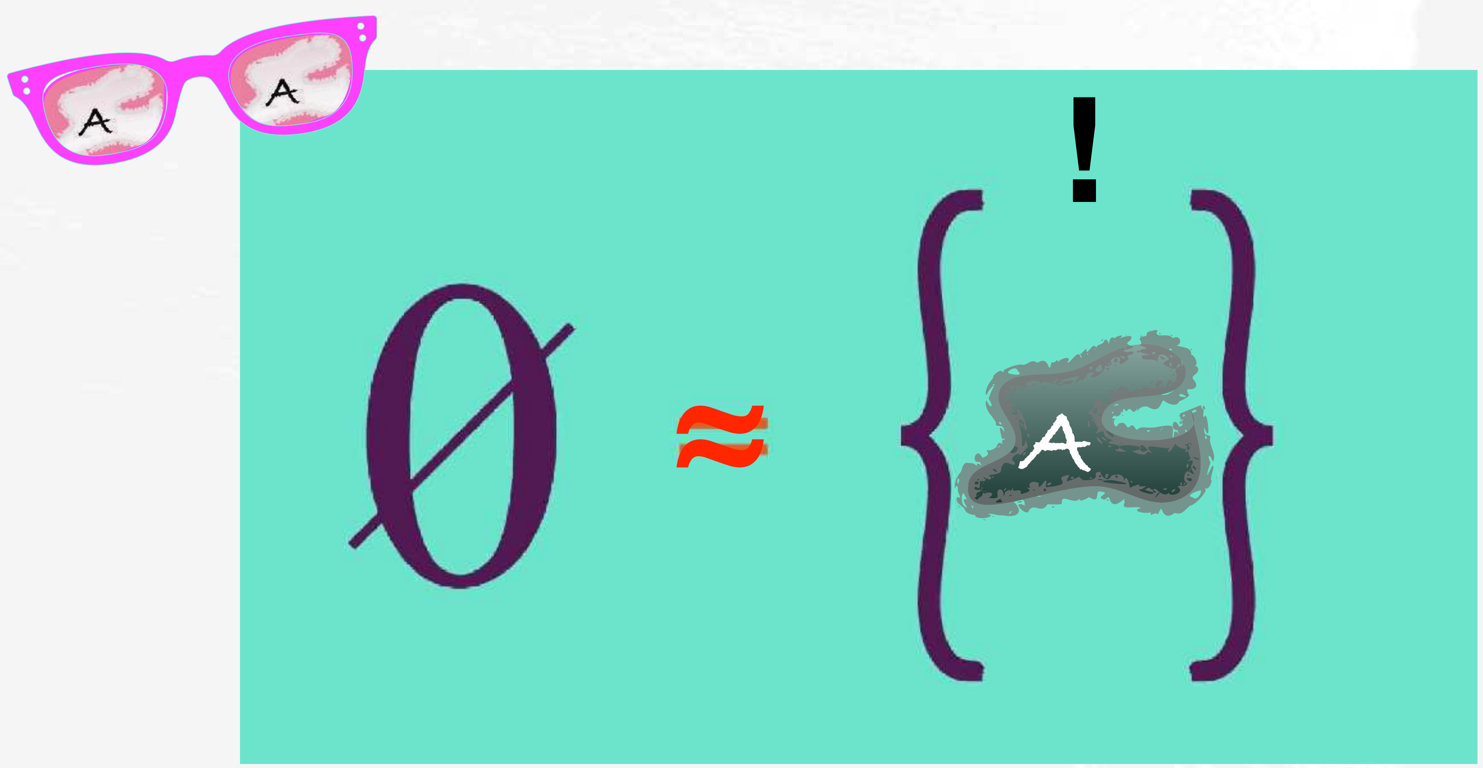
$\sqcap^{0.3}$ ...



$\sqcap^{0} = min$

$$\emptyset = \{ \ \}$$

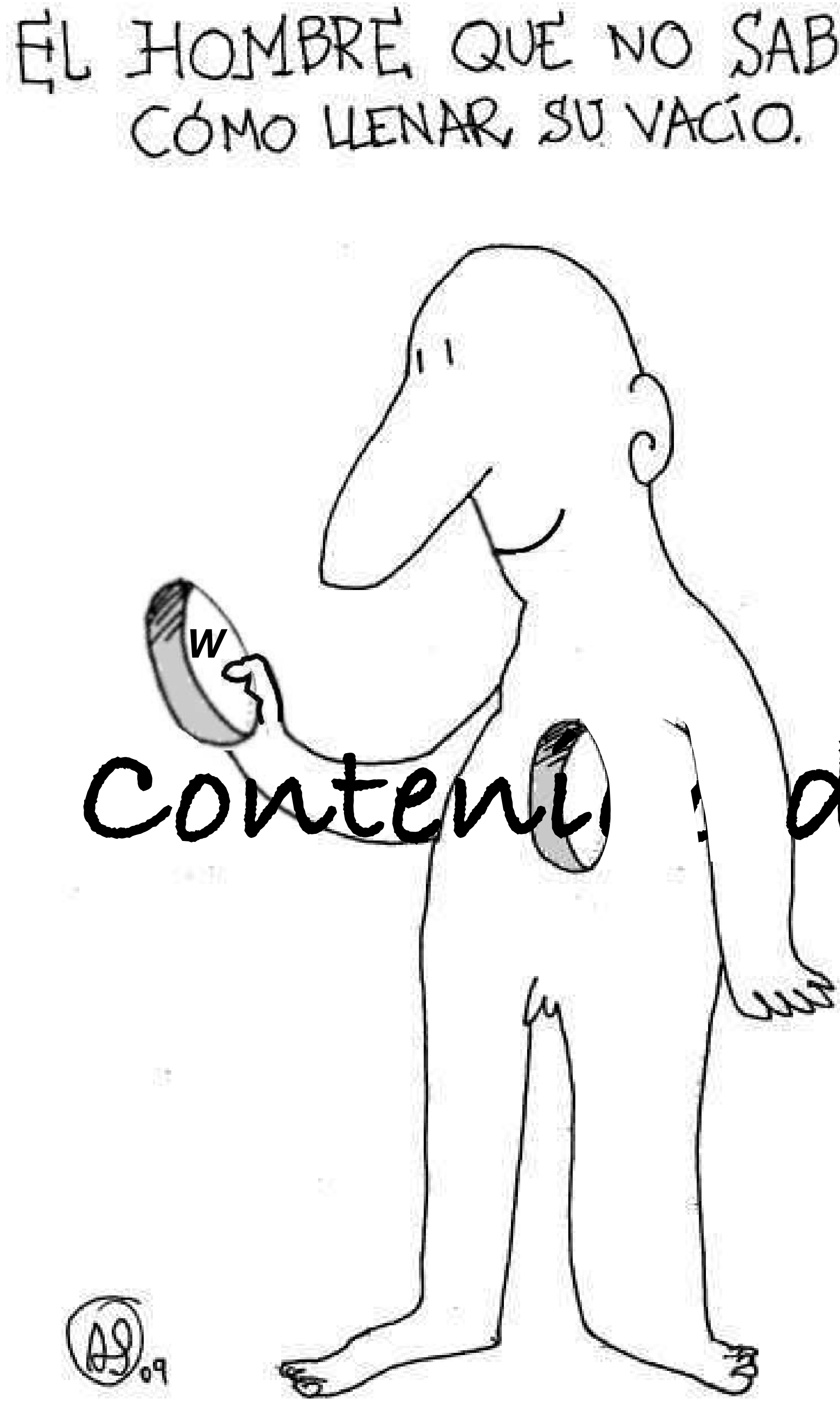
El "orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$" como herramienta para representar "contenido propio" en el conjunto vacío: $(A \neq \varnothing) \& (A \sqsubseteq^{\omega} \varnothing)$.




EL HOMBRE QUE NO SABÍA
CÓMO LLENAR SU VACÍO.

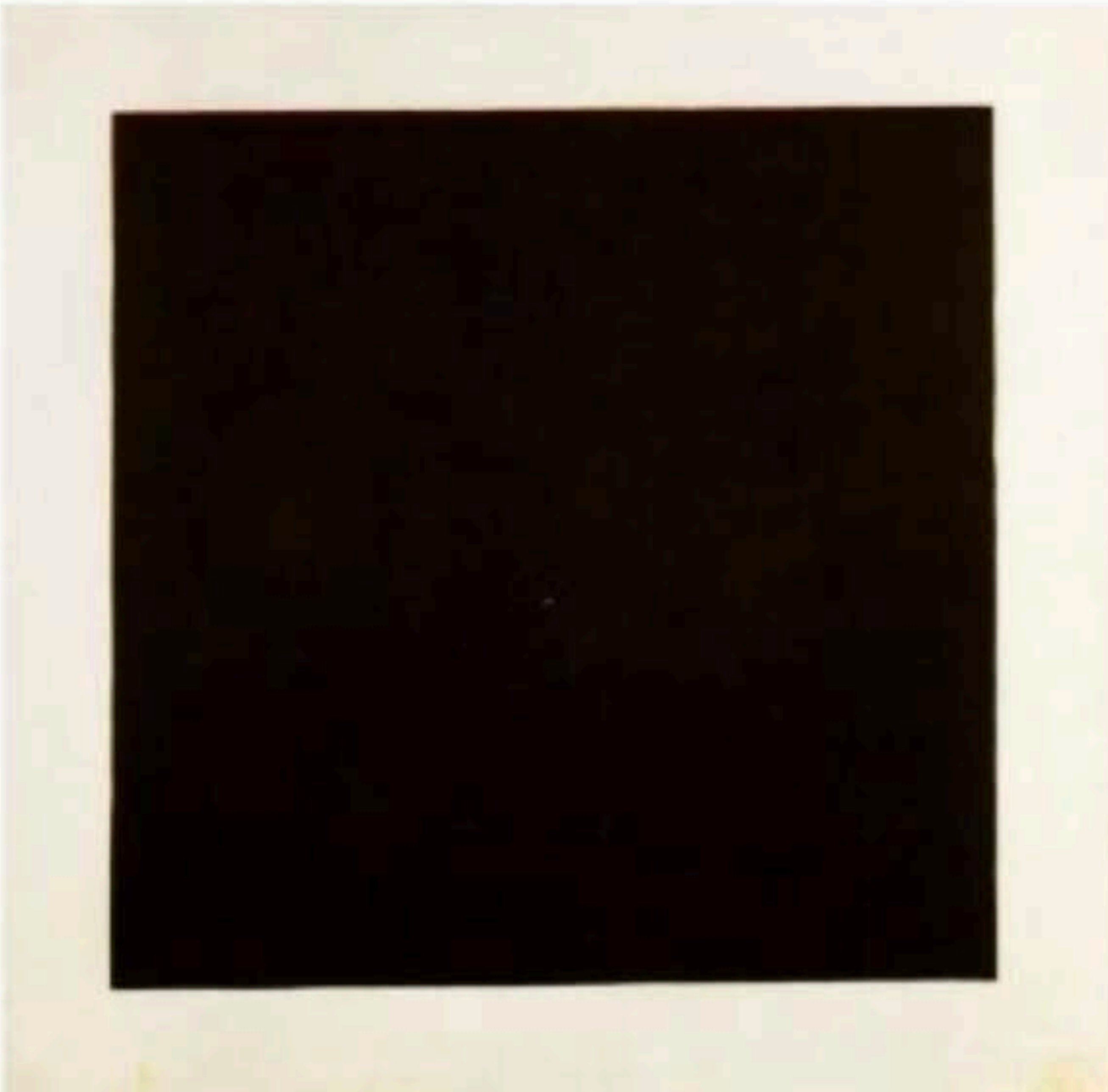

EL HOMBRE QUE NO SABÍA
CÓMO LLENAR SU VACÍO.
?
∅

Le haremos una propuesta…



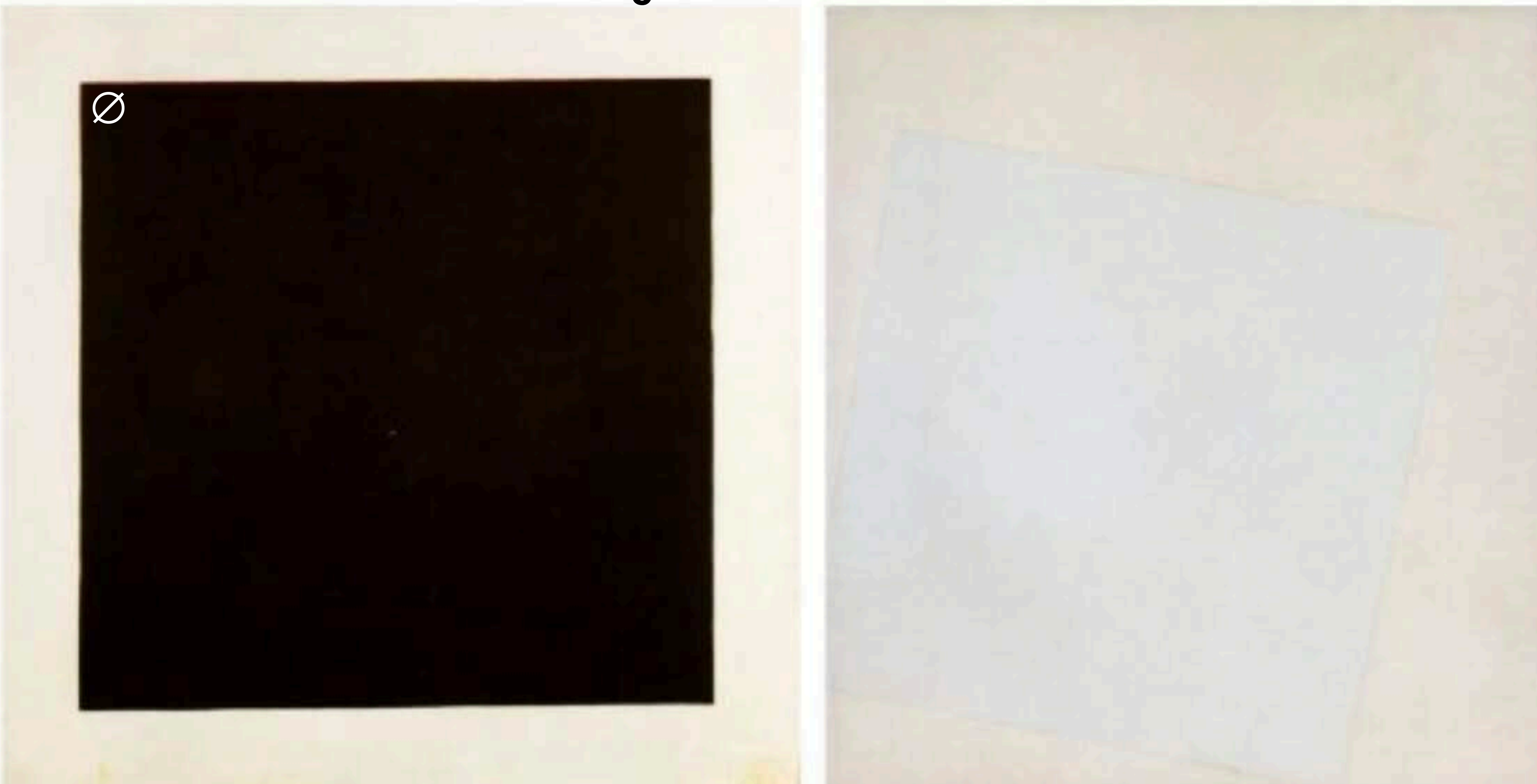
Conteni del vacío

Contenido del vacio



El arte de Kazimir Malevich. A la izquierda: Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco (1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

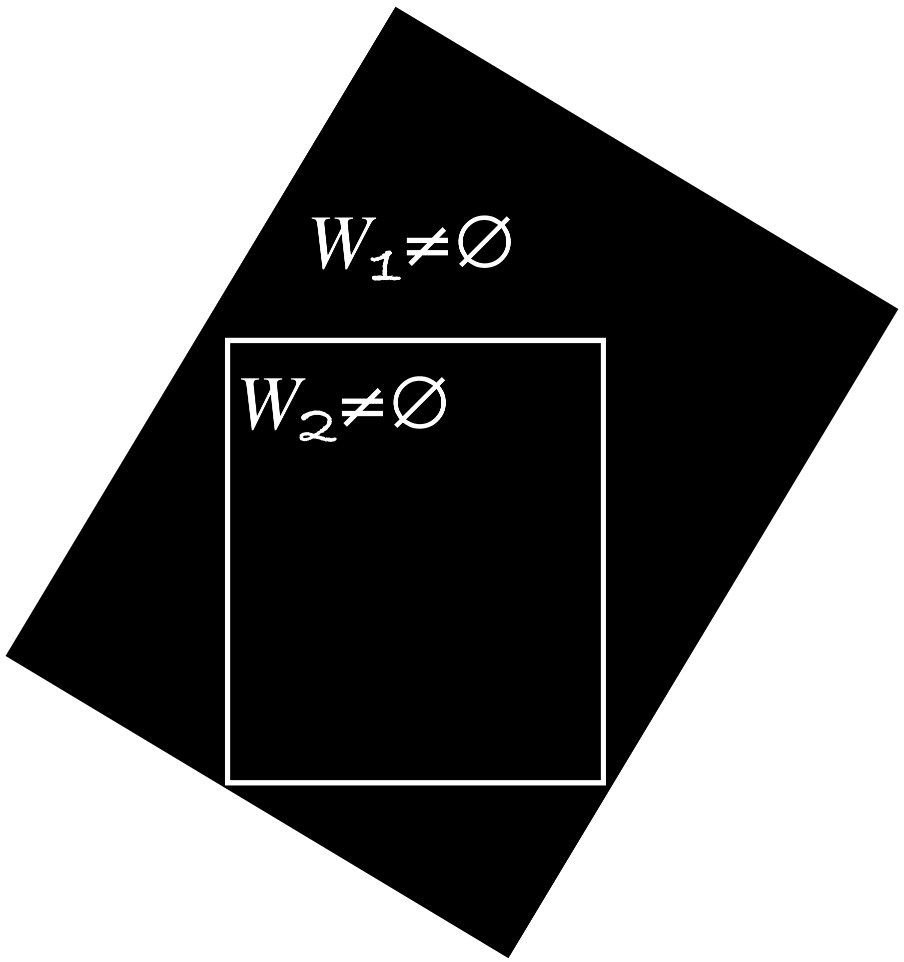
¿∅?



El arte de Kazimir Malevich. A la izquierda: Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco (1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

Propuesta:

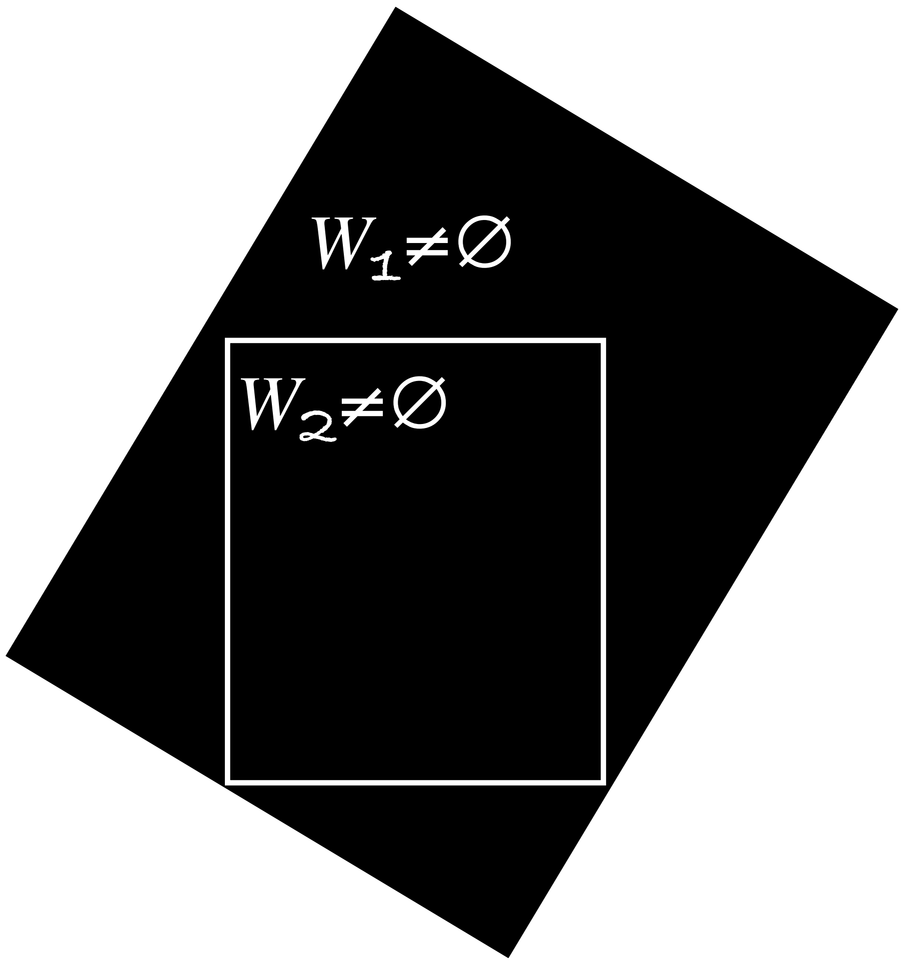
¿∅?

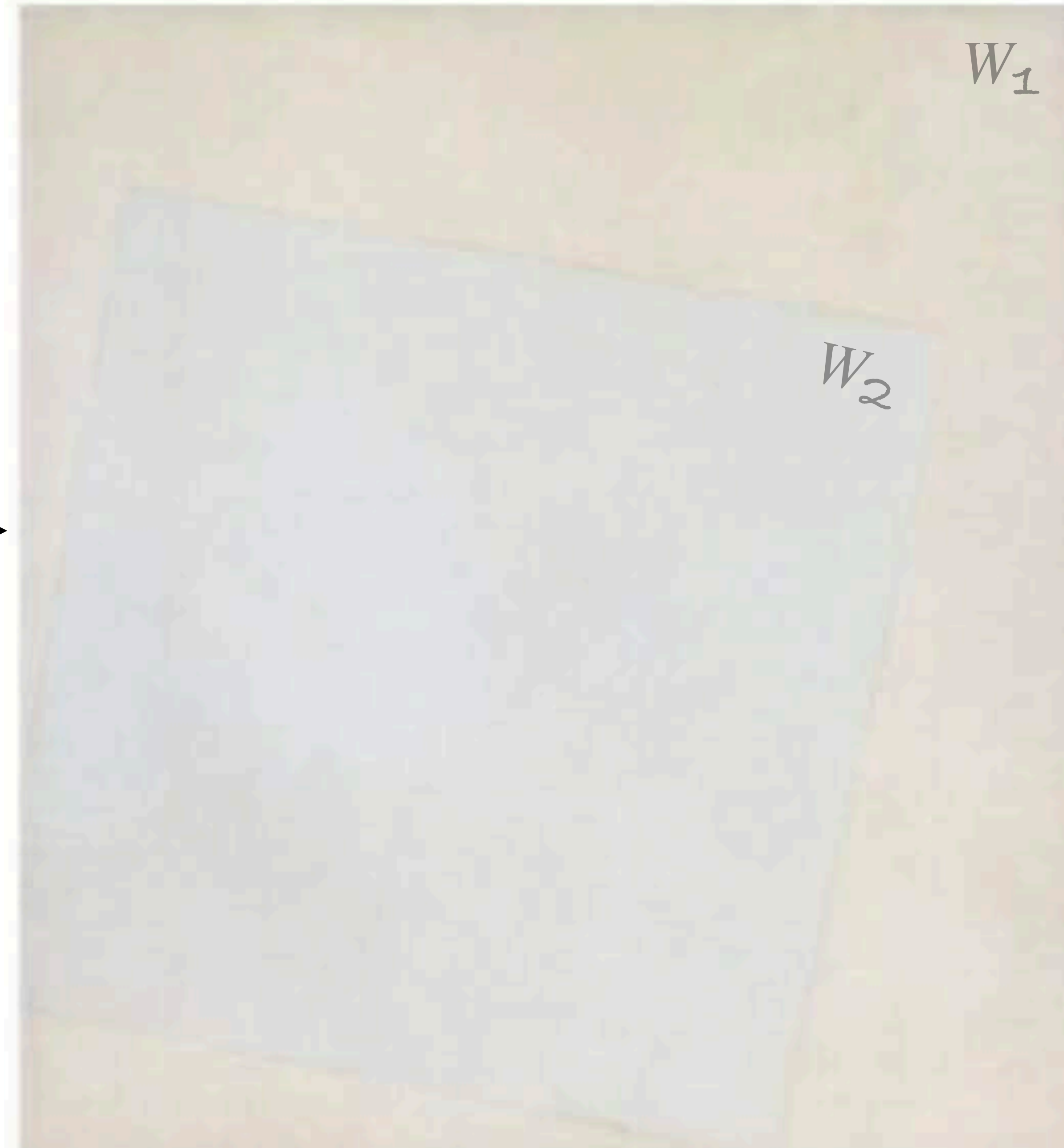


El arte de Kazimir Malevich.
a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

Propuesta:

¿$\emptyset$? $W_1 \overset{¿?}{\sqsubset} \emptyset, W_2 \overset{¿?}{\sqsubset} \emptyset$





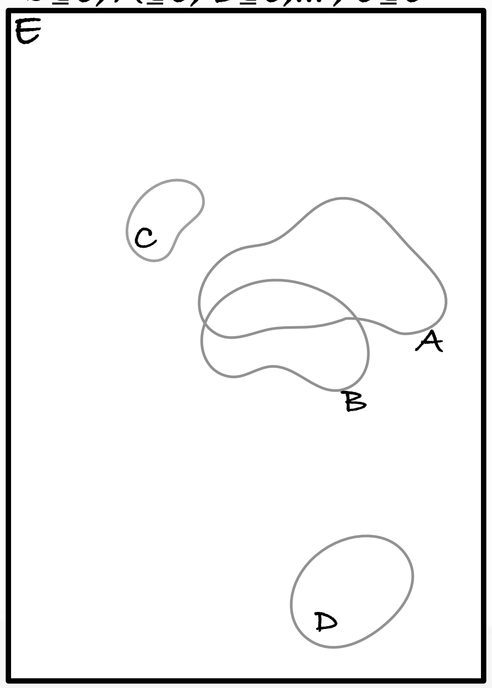
El arte de Kazimir Malevich.
a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

Propuesta:

$$W_1 \overset{¿?}{\square} \varnothing , W_2 \overset{¿?}{\square} \varnothing$$

Referencial E y subconjuntos

$\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ... , $E \subseteq E$

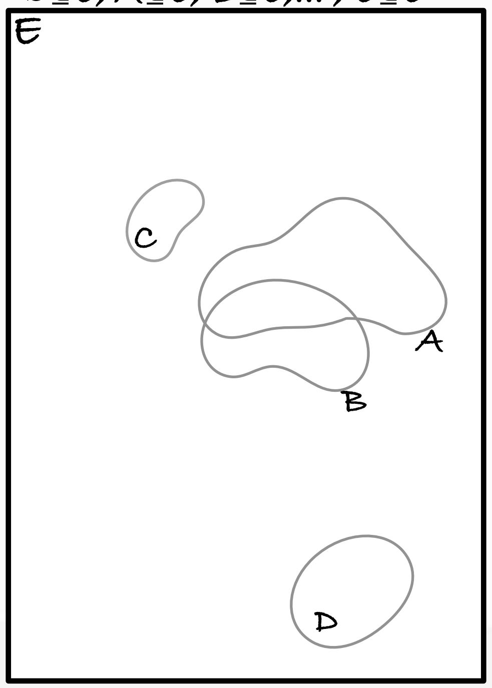


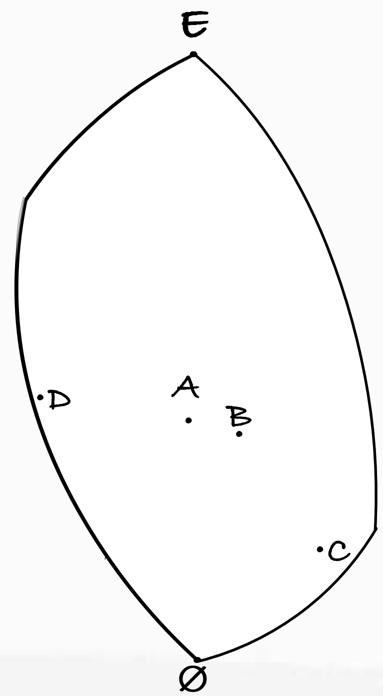
Propuesta:

$$W_1 \overset{¿?}{\sqsubset} \varnothing , W_2 \overset{¿?}{\sqsubset} \varnothing$$

Referencial E y subconjuntos

$\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$,... , $E \subseteq E$





Sistema algebraico:

Álgebra de Boole

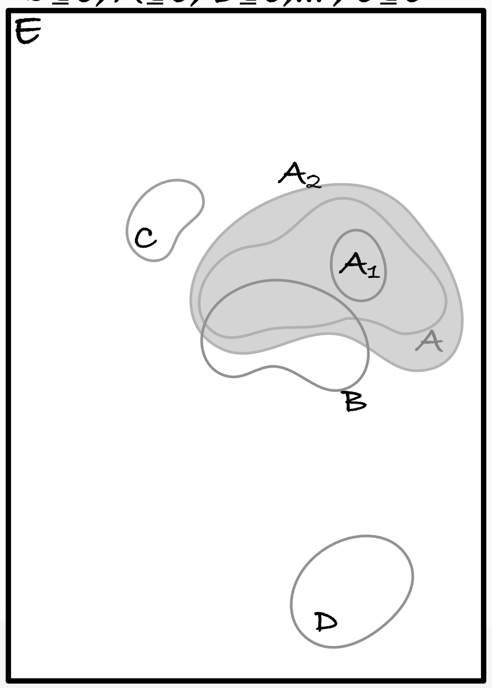
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$

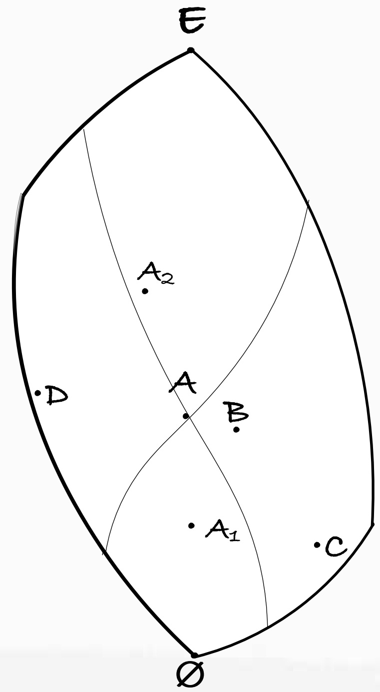
Propuesta:

$$W_1 \overset{¿?}{\sqsubset} \emptyset , W_2 \overset{¿?}{\sqsubset} \emptyset$$

Referencial E y subconjuntos

$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ... , $E \subseteq E$





Sistema algebraico:

Álgebra de Boole

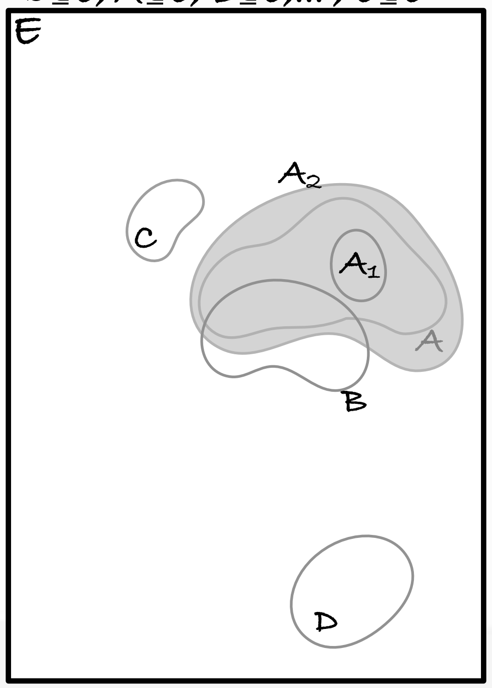
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

Propuesta:

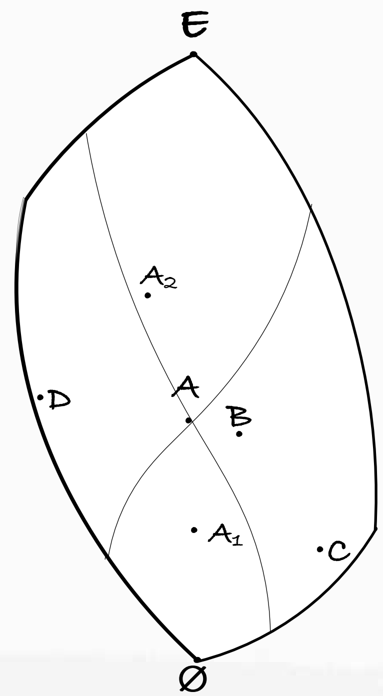
$$W_1 \overset{¿?}{\sqsubseteq} \emptyset, W_2 \overset{¿?}{\sqsubseteq} \emptyset$$

Referencial E y subconjuntos

$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ... , $E \subseteq E$



Según el contexto...



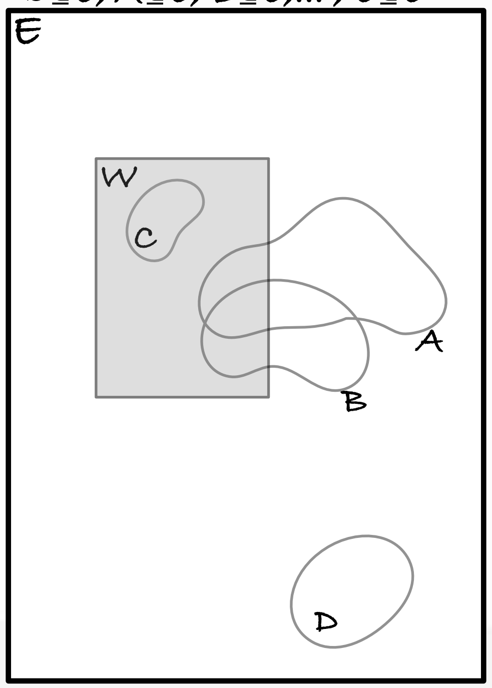
Sistema algebraico:

Álgebra de Boole

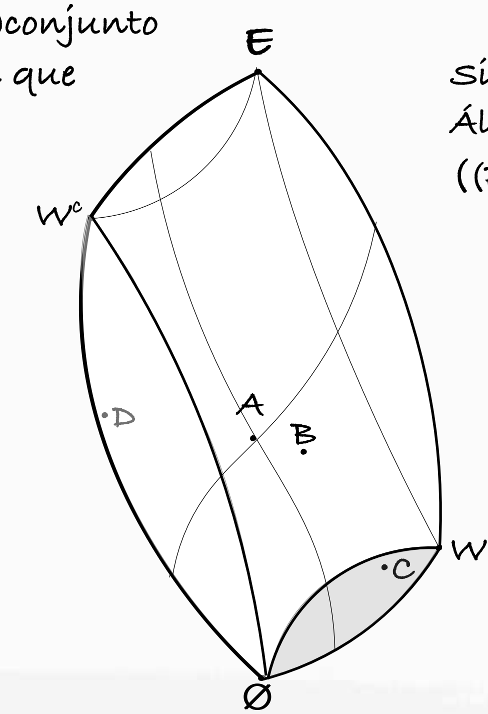
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

Propuesta:

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ... , $E \subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W \neq \emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

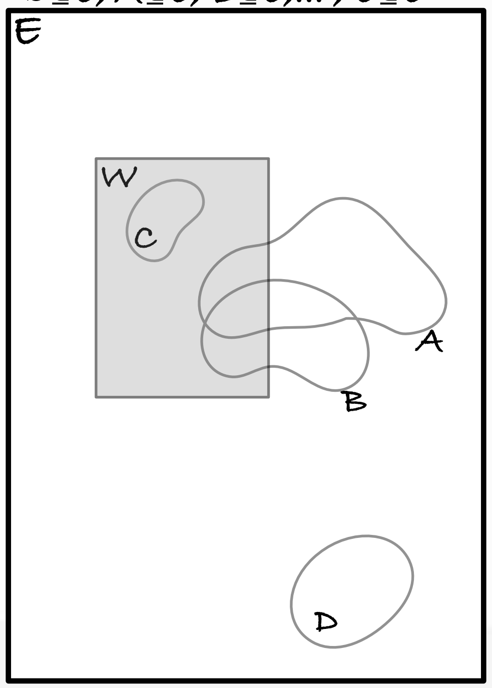
Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{P}(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

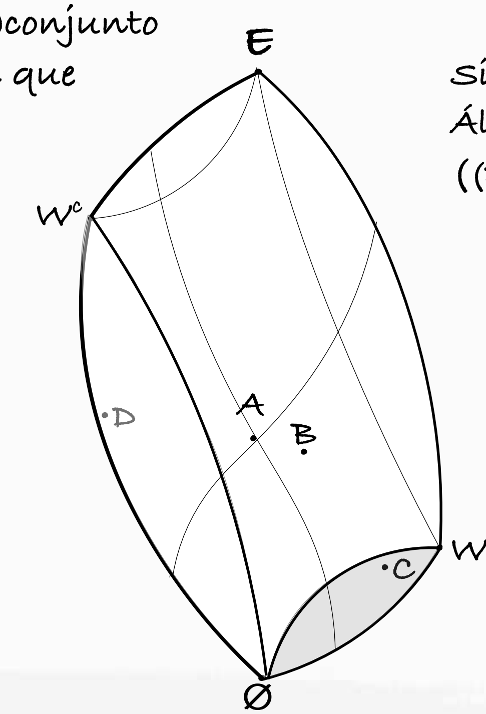
Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^{W} B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos $\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



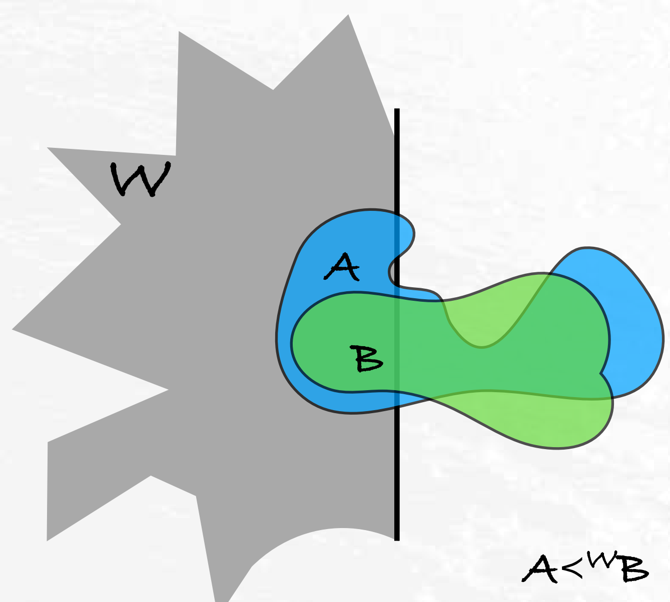
Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \varnothing$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^{c})$

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^{W}$ en $\mathcal{P}(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W \sqsubseteq^{W} \varnothing) \& (W \neq \varnothing))$.



B tiene "menos parte vacía" que A

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$$A <^{W} B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$$

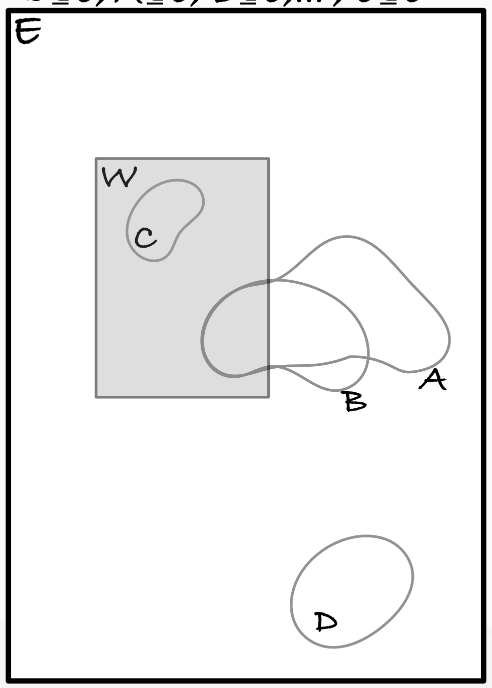
$<^{W}$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

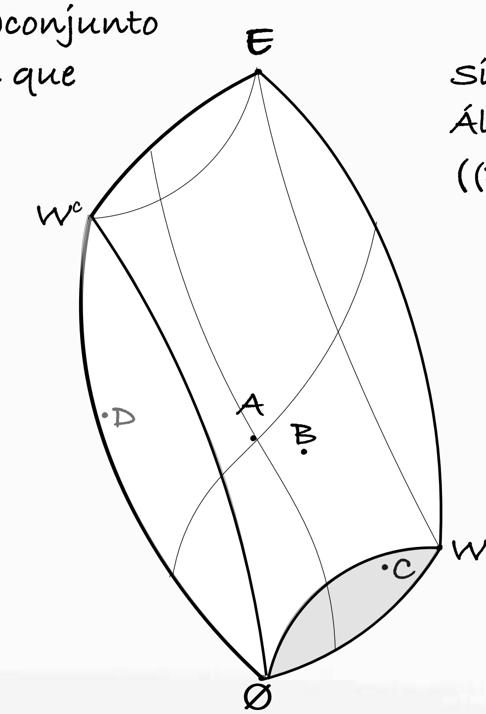
$$A \equiv^{W} B \Leftrightarrow (A <^{W} B) \,\&\, (B <^{W} A)$$

$$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W).$$

Referencial E y subconjuntos $\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$,... , $E \subseteq E$



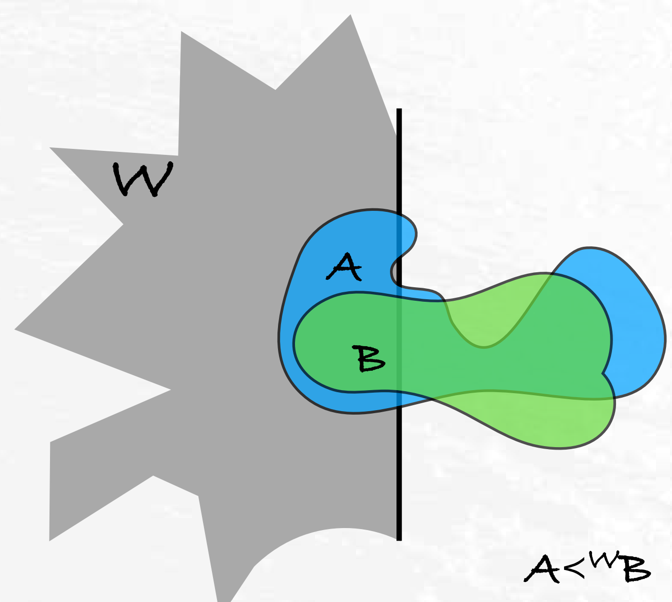
Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^{c})$

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^{W}$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

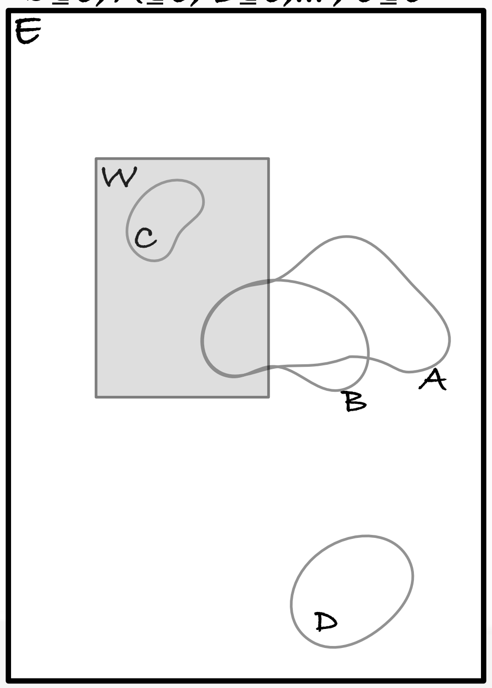
$((W \sqsubseteq^{W} \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.



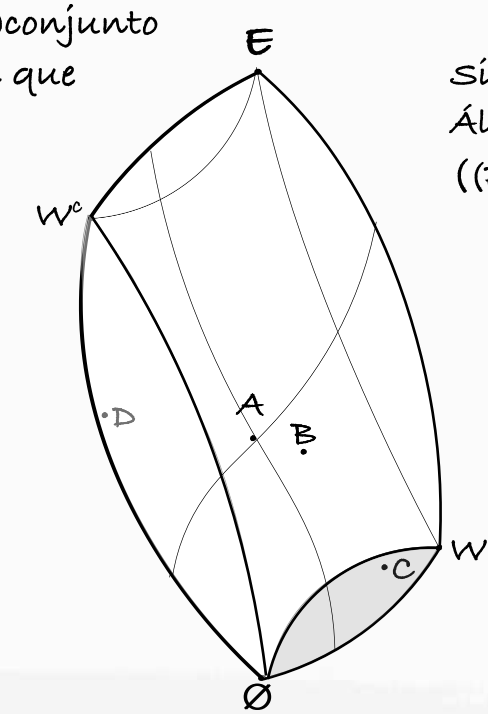
$A <^{W} B$

B tiene "menos parte vacía" que A

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$,... , $E\subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq (A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

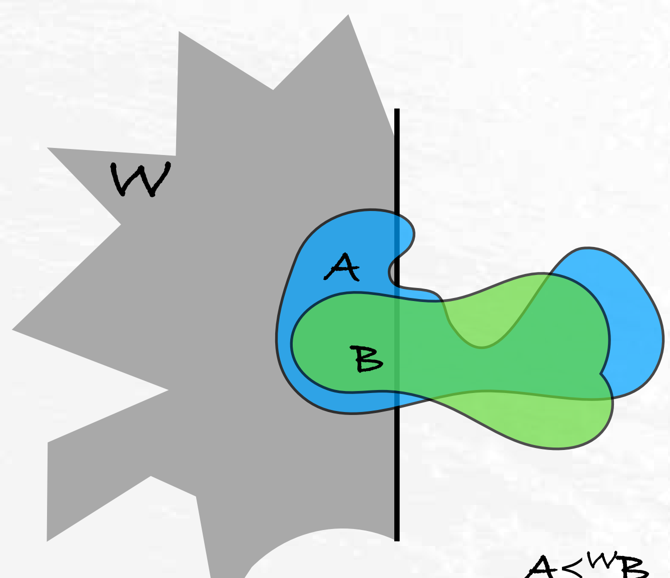
$\Leftrightarrow (A\cap W = B \cap W)$.

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w \preccurlyeq^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

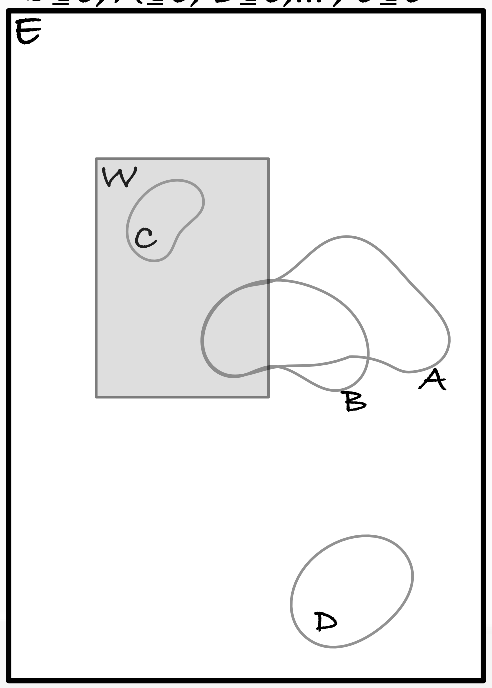
Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

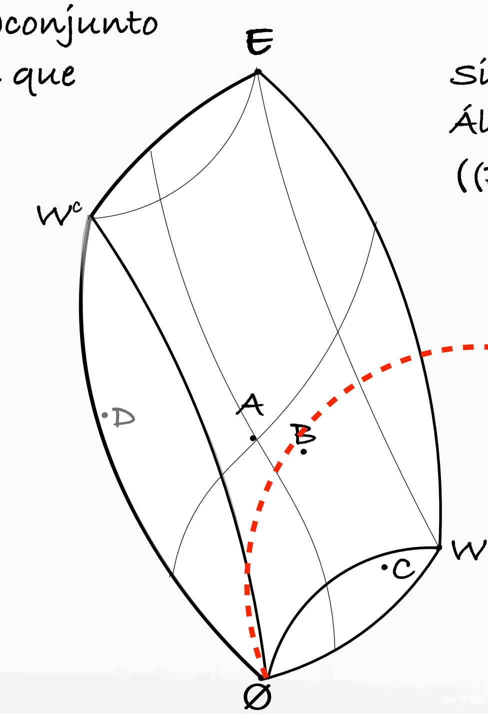


B tiene "menos parte vacía" que A

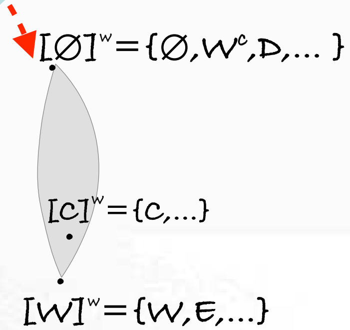
Referencial E y subconjuntos
$\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, ..., $E\subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^{c})$



Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq (A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $\mathcal{P}(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

$\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.

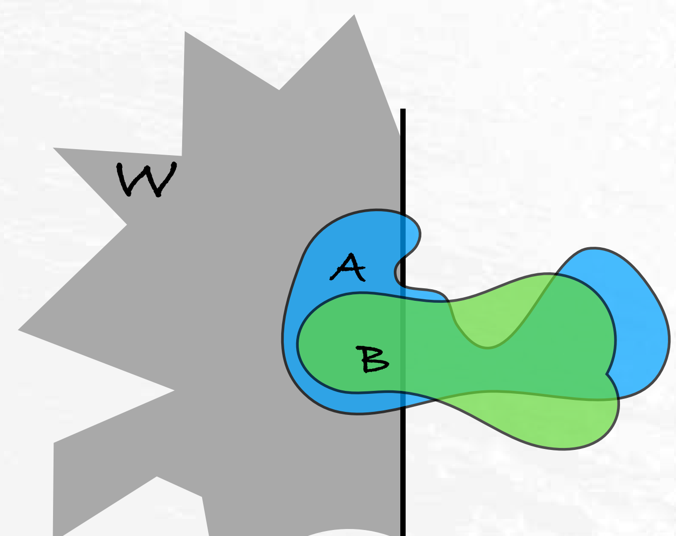
Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w \preccurlyeq^W [B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

$([\mathcal{P}(E)]^w, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{P}(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

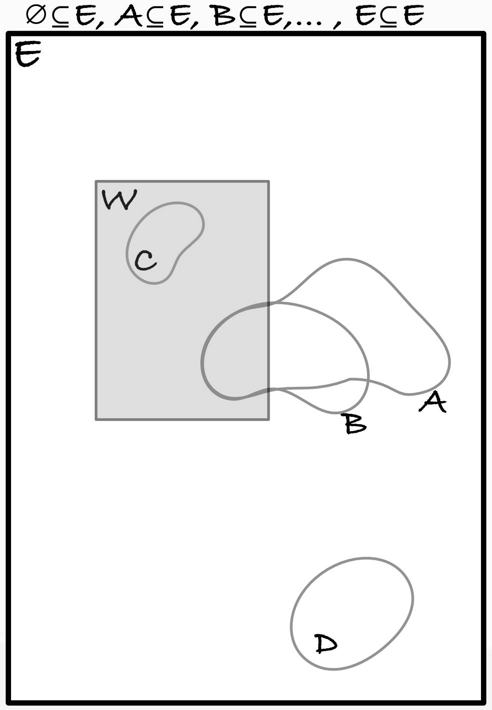
$((W \sqsubseteq^W \emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.



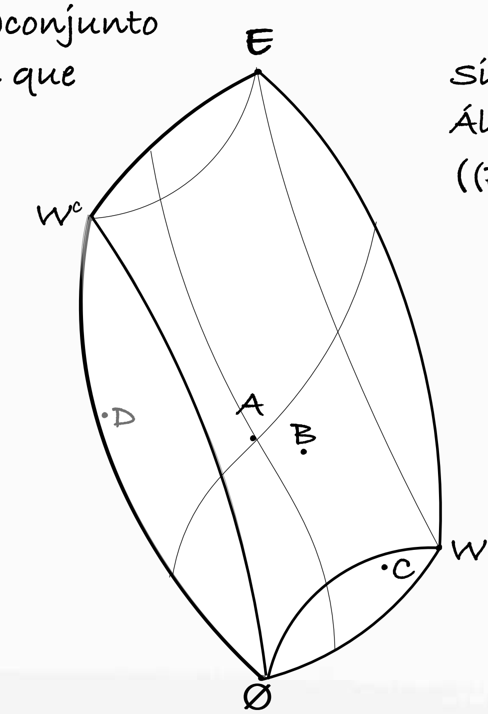
$A<^W B$

B tiene "menos parte vacía" que A

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset\subseteq E,\ A\subseteq E,\ B\subseteq E, \dots,\ E\subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^{c})$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$$

$<^W$ es un preorden en $\mathcal{P}(E)$.

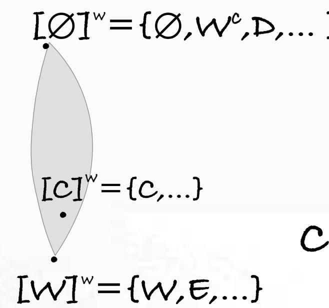
Equivalencia:

$$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$$

$$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W).$$

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

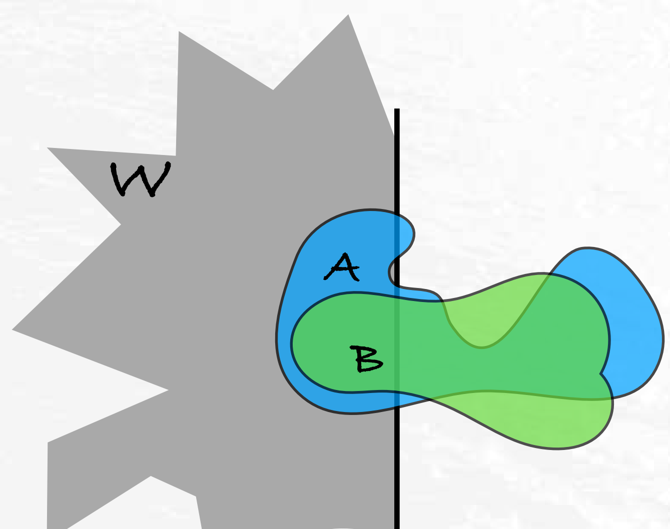
$$[A]^W \preccurlyeq^W [B]^W \Leftrightarrow A <^W B$$



$([\mathcal{P}(E)]^W, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^W \preccurlyeq^W [\emptyset]^W$!

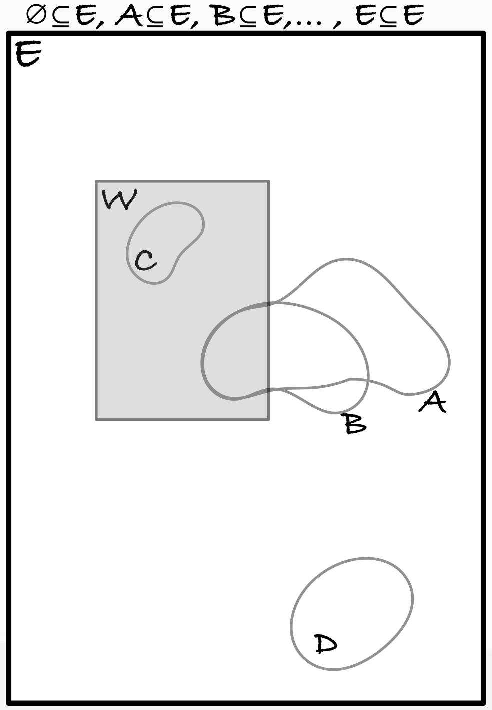
Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{P}(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.
$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.



$A <^W B$

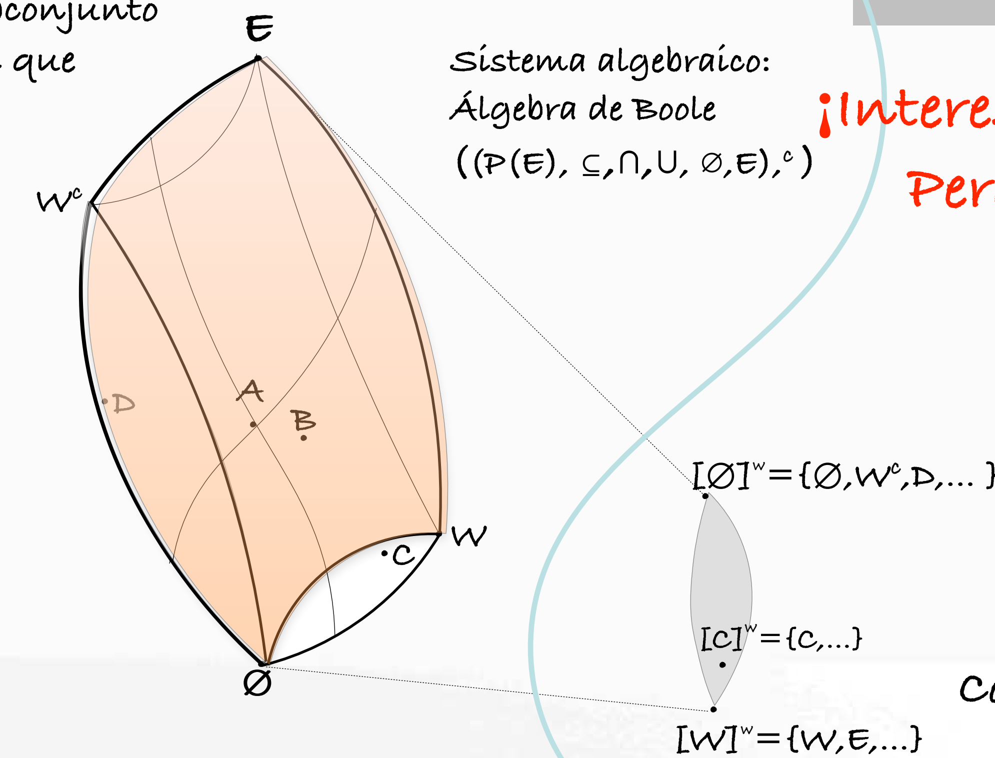
B tiene "menos parte vacía" que A

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W \neq \emptyset$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$



Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en $\mathcal{P}(E)$.

Pero...

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

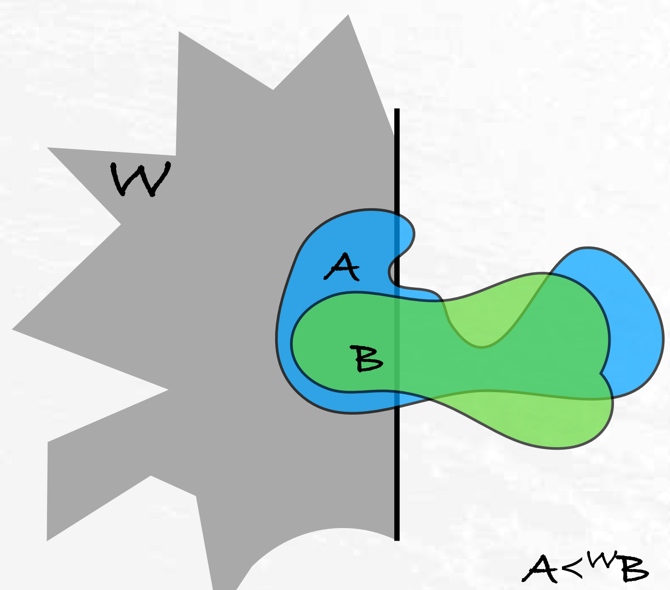
$[A]^w \preccurlyeq^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

$([\mathcal{P}(E)]^w, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío ∅, i este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \preccurlyeq^W [\emptyset]^w$!

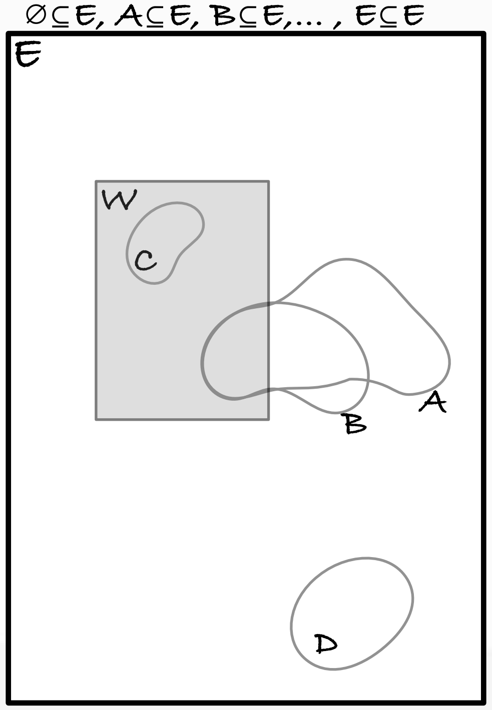
Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{P}(E)$ tal que W sea "parte propia" de ∅.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

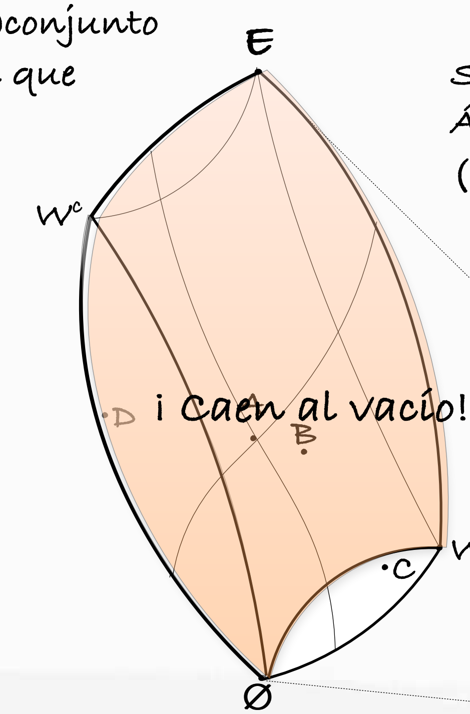


B tiene "menos parte vacía" que A

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$,… , $E\subseteq E$



Según el contexto…
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,… atendiendo a su interacción con W:

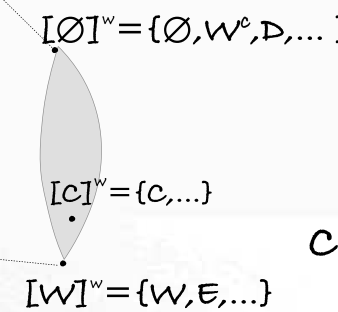
$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

¡Interesante! $<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

Pero… Excepto en el caso $W=E$, ¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A\cap W=B\cap W)$.
"fuera" del ideal principal $(W]$!



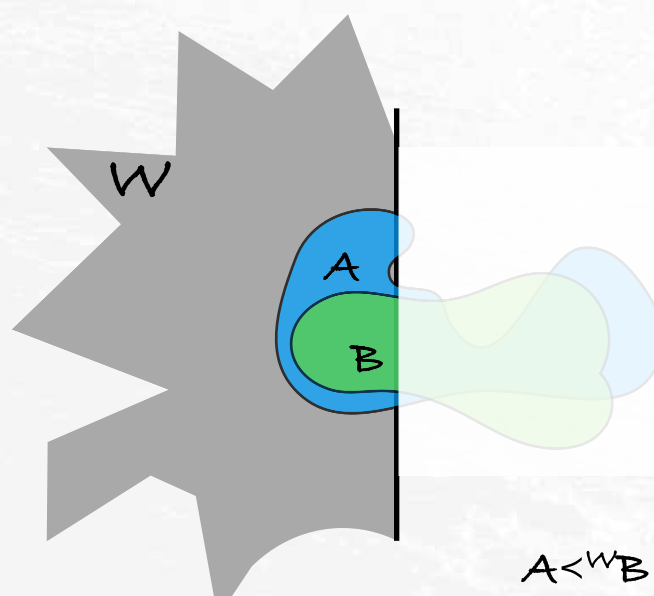
Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w\preccurlyeq^W[B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

$([P(E)]^w,\preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío ∅, ¡ este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^w\preccurlyeq^W[\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de ∅.
$((W\sqsubseteq^W\emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.



$A<^W B$

B tiene "menos parte vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

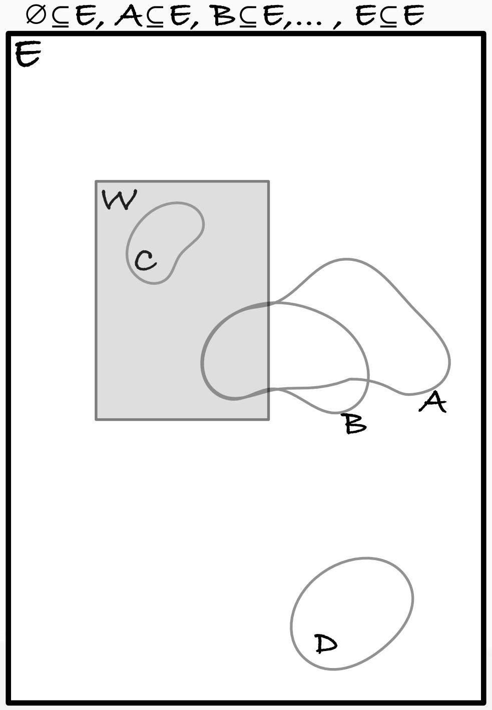
(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,… atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

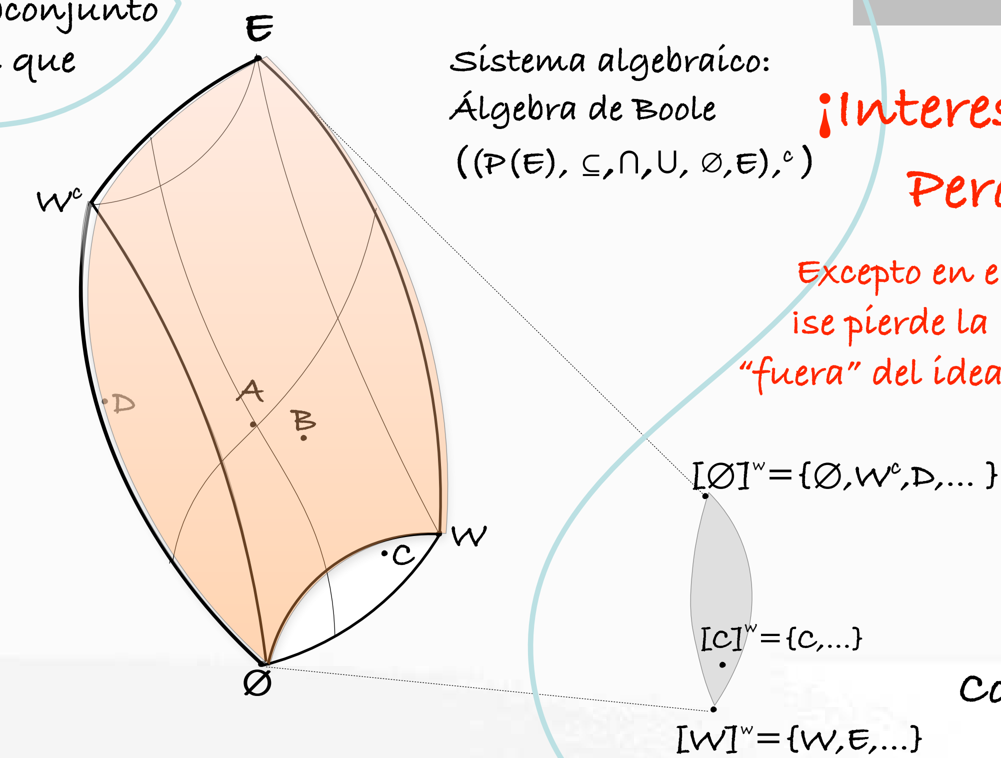
Referencial E y subconjuntos

$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, … , $E \subseteq E$



Según el contexto…
Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$



$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

¡Interesante!

Equivalencia:

Pero…

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Excepto en el caso $W=E$,
¡se pierde la información "fuera" del ideal principal (W]!

$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

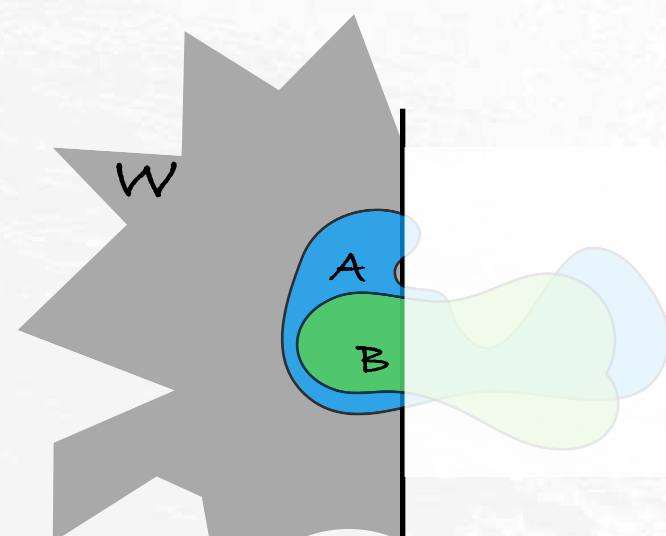
$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\emptyset$, ¡i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\emptyset]^w$!

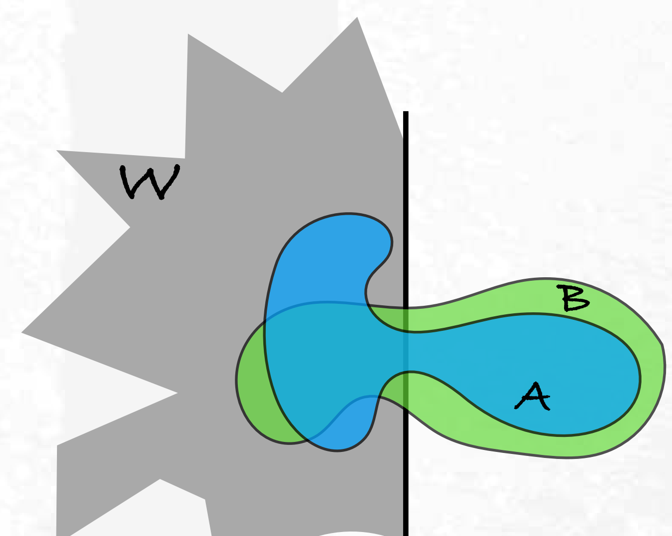
Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.



$A <^W B$

B tiene "menos parte vacía" que A



$A <_W B$

B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

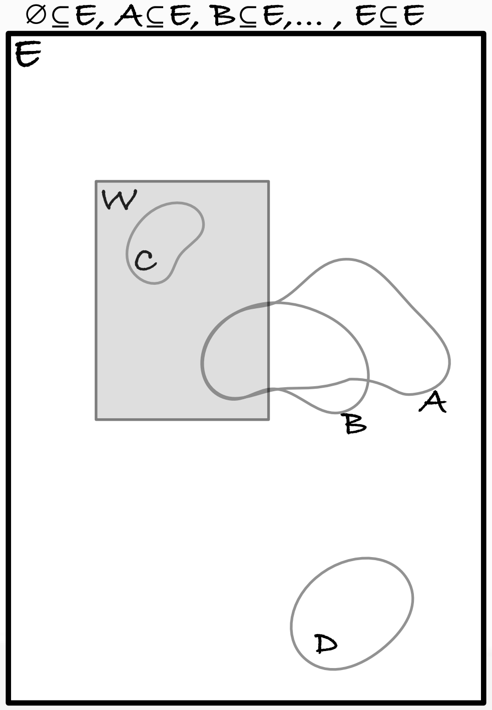
(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,… atendiendo a su interacción con W:

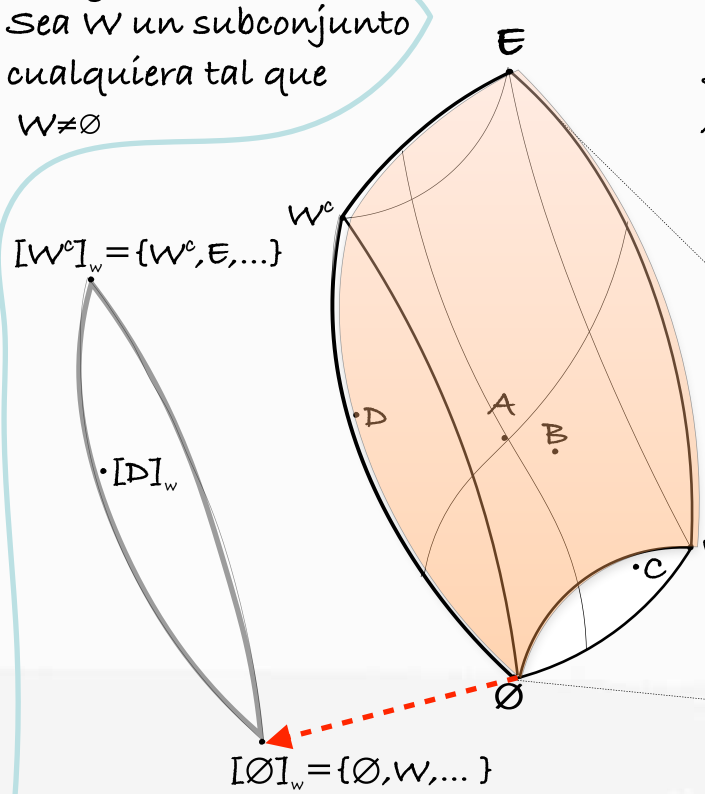
$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

$\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$,… , $E\subseteq E$



Según el contexto…
Sea W un subconjunto cualquiera tal que
$W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

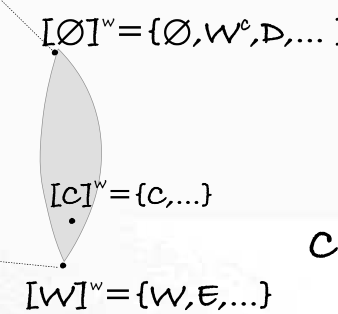
$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

Pero…

Excepto en el caso W=E,
¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.
"fuera" del ideal principal (W]!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w\leqslant^W[B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

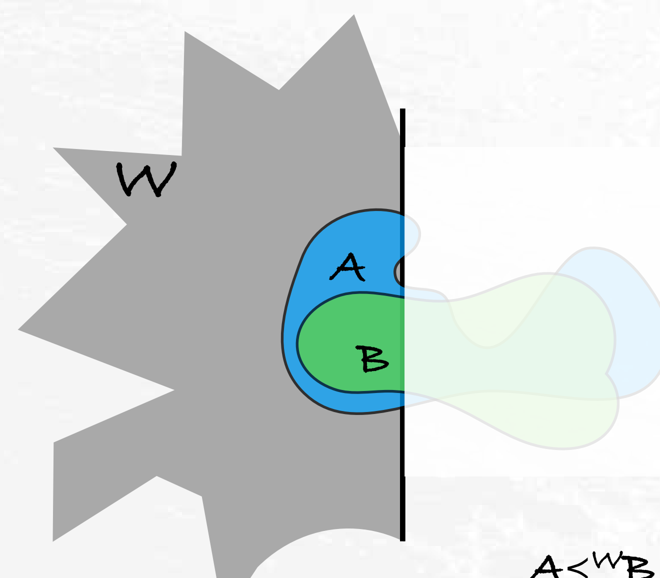


$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

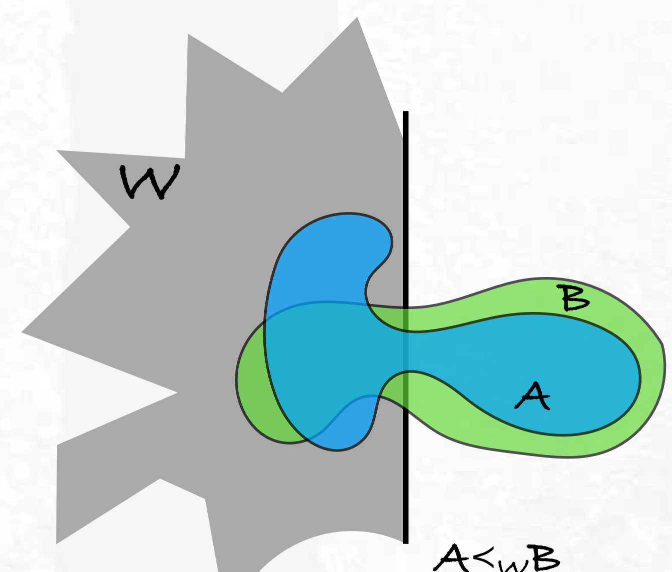
Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w\leqslant^W[\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en P(E) tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W\sqsubseteq^W\emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.



B tiene "menos parte vacía" que A



B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

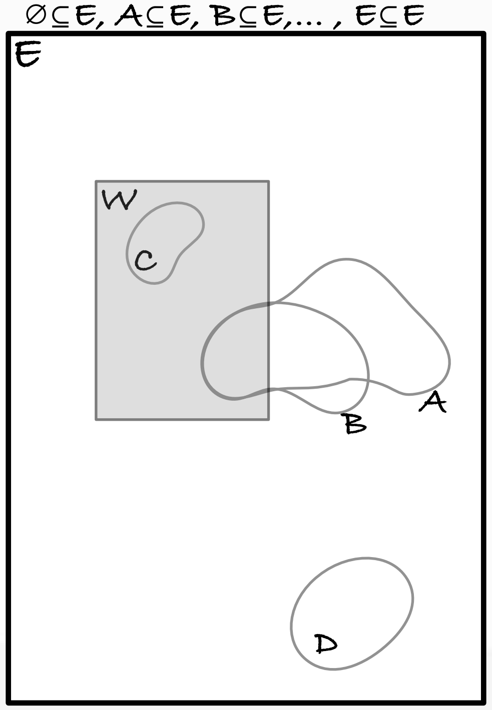
Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

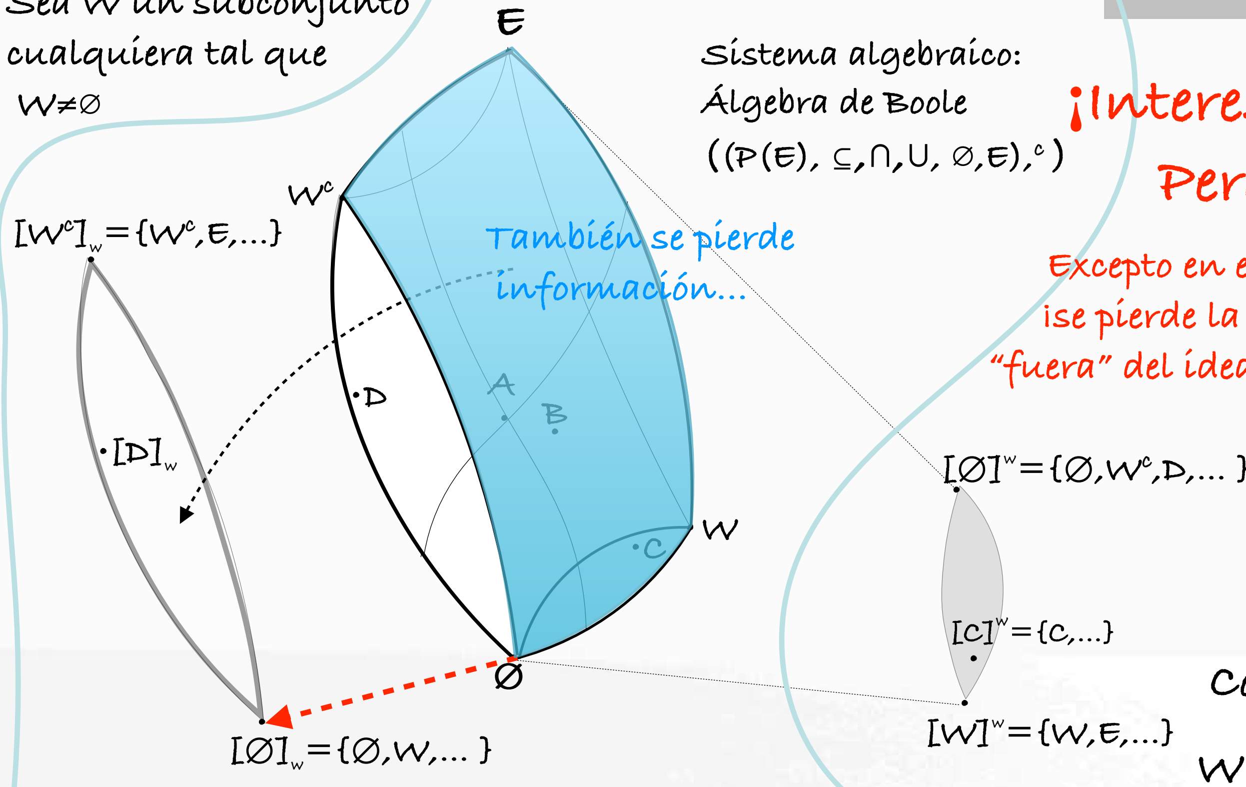
Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos $\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

¡Interesante!

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Pero...

Excepto en el caso $W = E$,

ise pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

"fuera" del ideal principal (W]!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

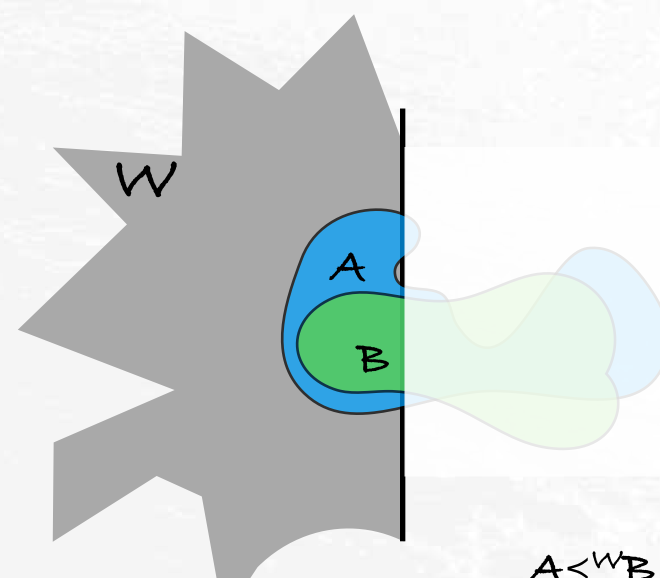
$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

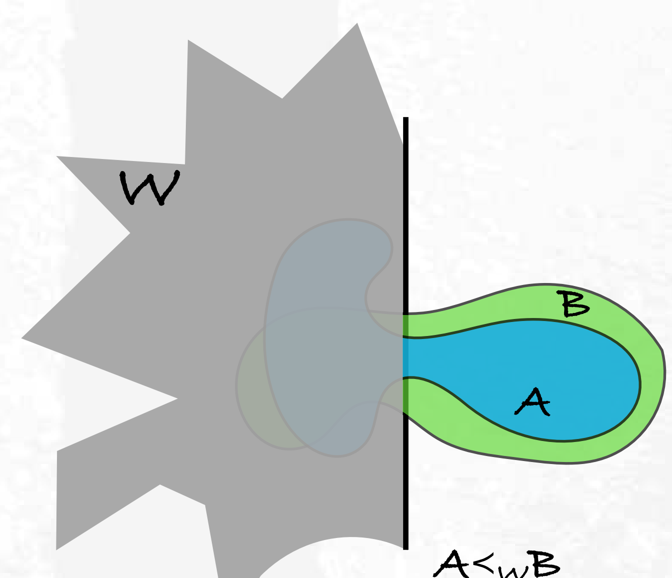
Como W no es el vacío ∅, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de ∅.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.



B tiene "menos parte vacía" que A



B tiene "más parte no vacía" que A

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,… atendiendo a su interacción con W:

$A <^{W} B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

$<^{W}$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^{W} B \Leftrightarrow (A <^{W} B) \,\&\, (B <^{W} A)$

¡Interesante!

Pero…

Excepto en el caso $W = E$, ¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$. "fuera" del ideal principal $(W]$!

Relación de orden $\preccurlyeq^{W}$ entre clases:

$[A]^{w} \preccurlyeq^{W} [B]^{w} \Leftrightarrow A <^{W} B$

$([P(E)]^{w}, \preccurlyeq^{W})$ conjunto ordenado.

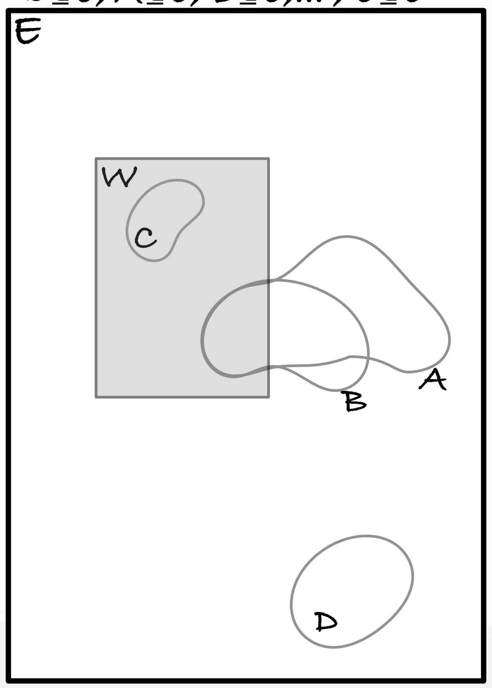
Como W no es el vacío ∅, ¡este último tiene a W como "$\preccurlyeq^{W}$-subconjunto" propio: $[W]^{w} \preccurlyeq^{W} [\varnothing]^{w}$!

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_{W} B \Leftrightarrow [(A \cap W^{c}) \subseteq (B \cap W^{c})] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

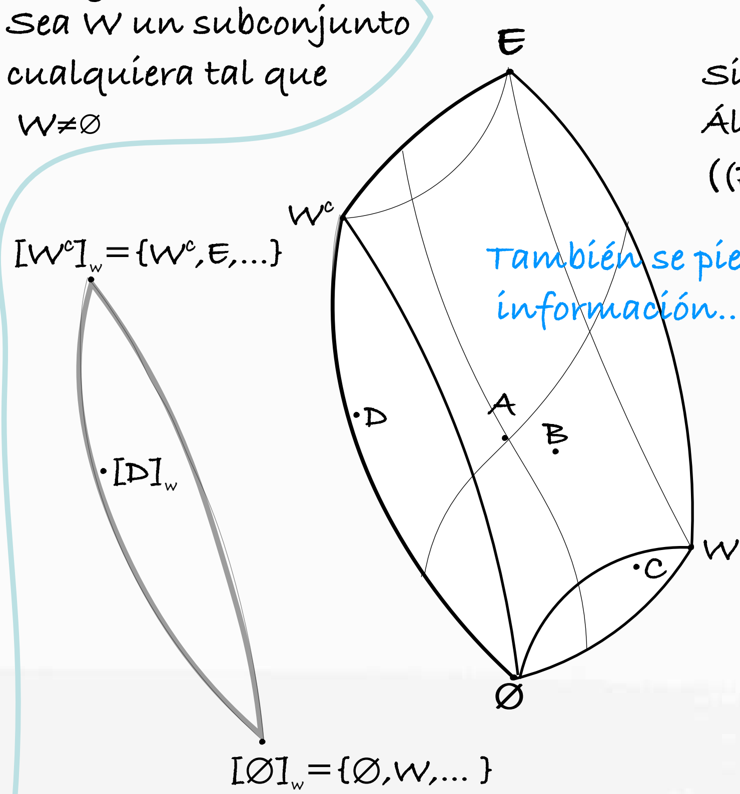
(y orden asociado $\preccurlyeq_{W}$, tal que $([P(E)]_{w}, \preccurlyeq_{W})$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos $\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, … , $E \subseteq E$

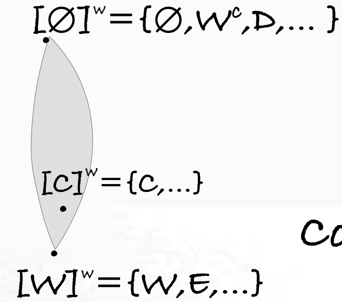


Según el contexto… Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \varnothing$

Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^{c})$



También se pierde información…

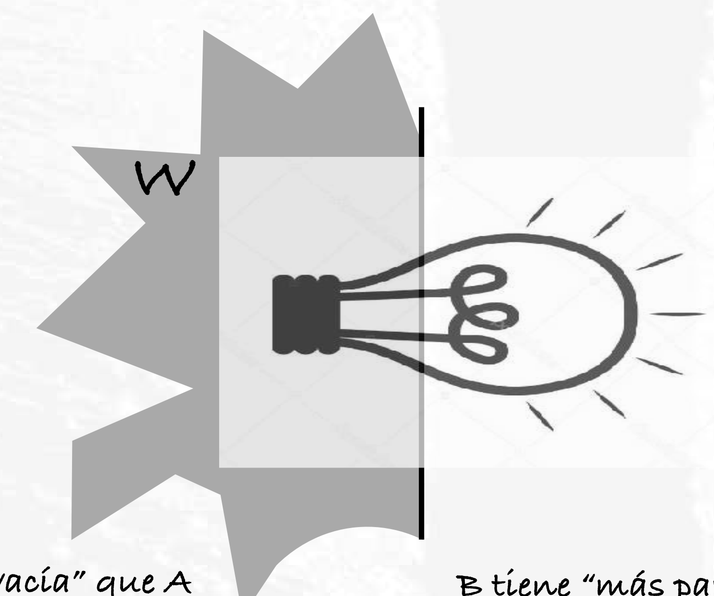


Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^{W}$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de ∅.

$((W \sqsubseteq^{W} \varnothing) \,\&\, (W \neq \varnothing))$.

Intersección de las anteriores:

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (A <^{W} B) \,\&\, (A <_{W} B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$



B tiene "menos parte vacía" que A

B tiene "más parte no vacía" que A

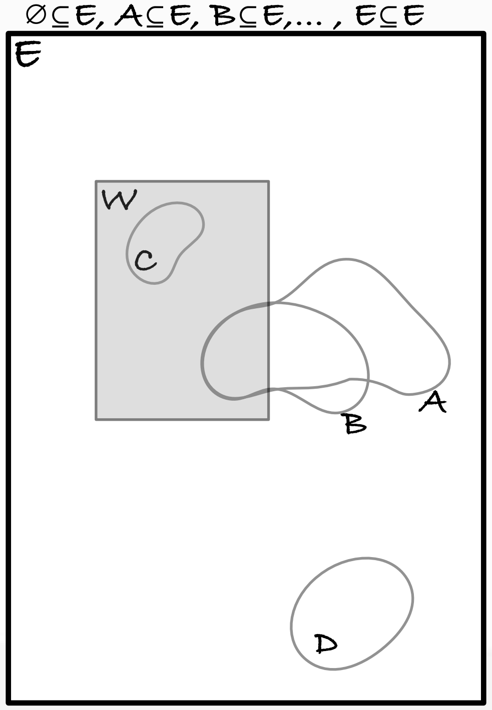
2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\preccurlyeq_W$, tal que $([P(E)]_w, \preccurlyeq_W)$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos

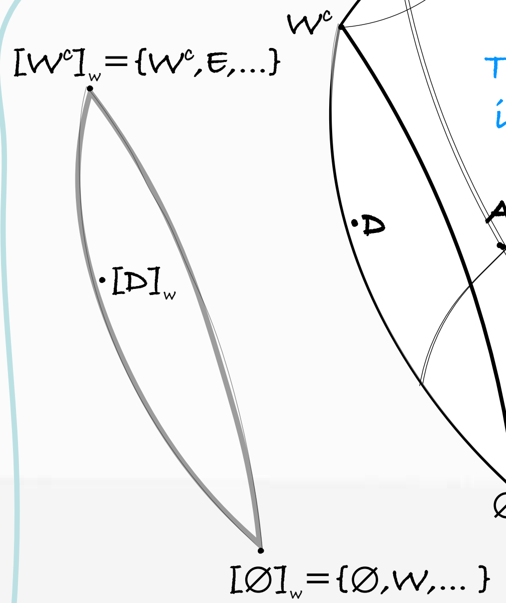
$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$

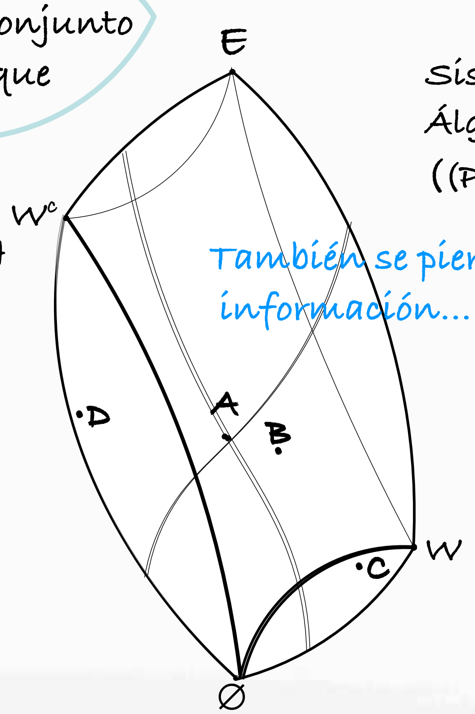


Según el contexto...

Sea W un subconjunto cualquiera tal que

$W \neq \emptyset$





También se pierde información...

Sistema algebraico:

Álgebra de Boole

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

¡Interesante!

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Pero...

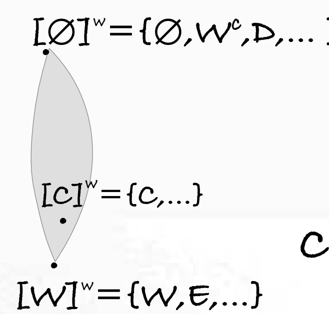
Excepto en el caso $W = E$,

¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

"fuera" del ideal principal $(W]$!

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w \preccurlyeq^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$



$([P(E)]^w, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

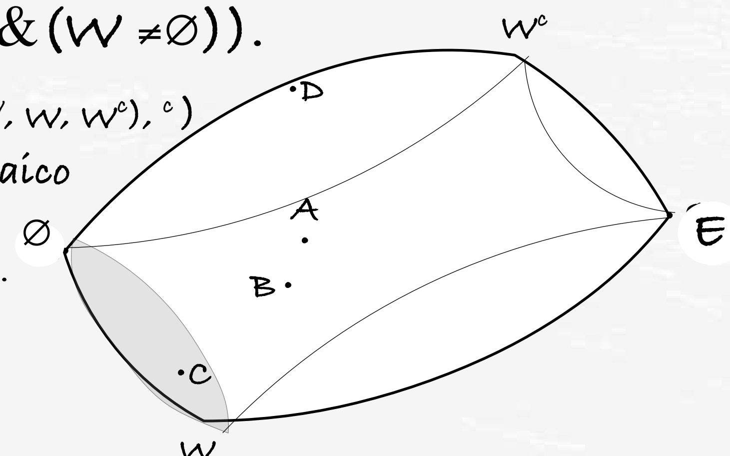
Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \preccurlyeq^W [\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.

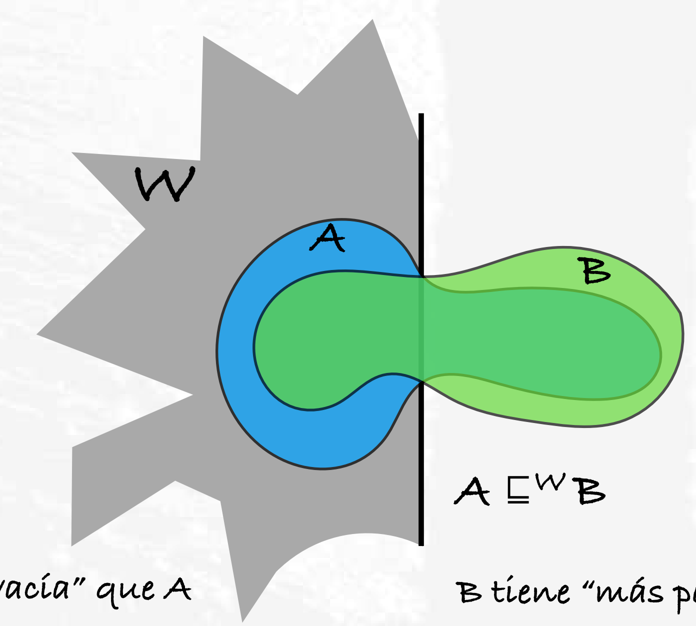


Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

Intersección de las anteriores:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$



B tiene "menos parte vacía" que A

B tiene "más parte no vacía" que A

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos $A, B, \ldots$ atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

¡Interesante! $<^W$ es un preorden en $P(E)$.

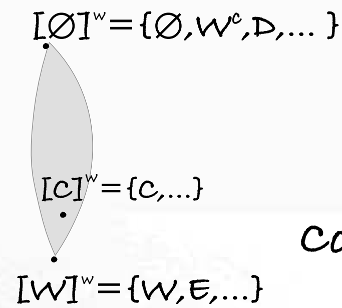
Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Pero... Excepto en el caso $W = E$, ¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$. "fuera" del ideal principal $(W]$!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^W \leqslant^W [B]^W \Leftrightarrow A <^W B$



$([P(E)]^W, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

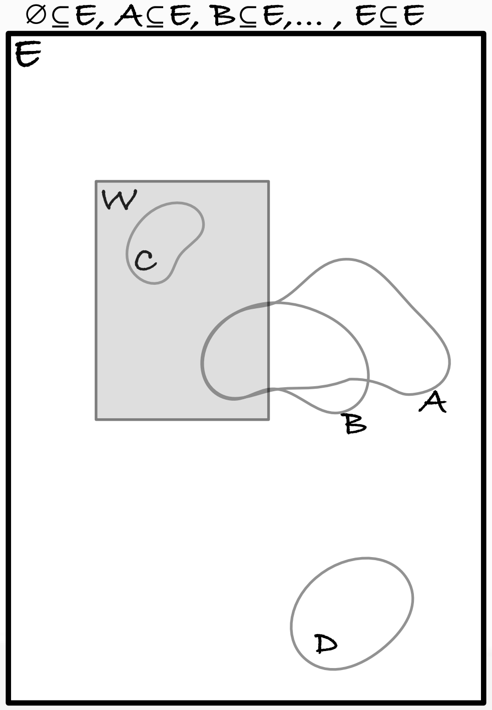
Como W no es el vacío $\varnothing$, ¡ este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^W \leqslant^W [\varnothing]^W$!

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

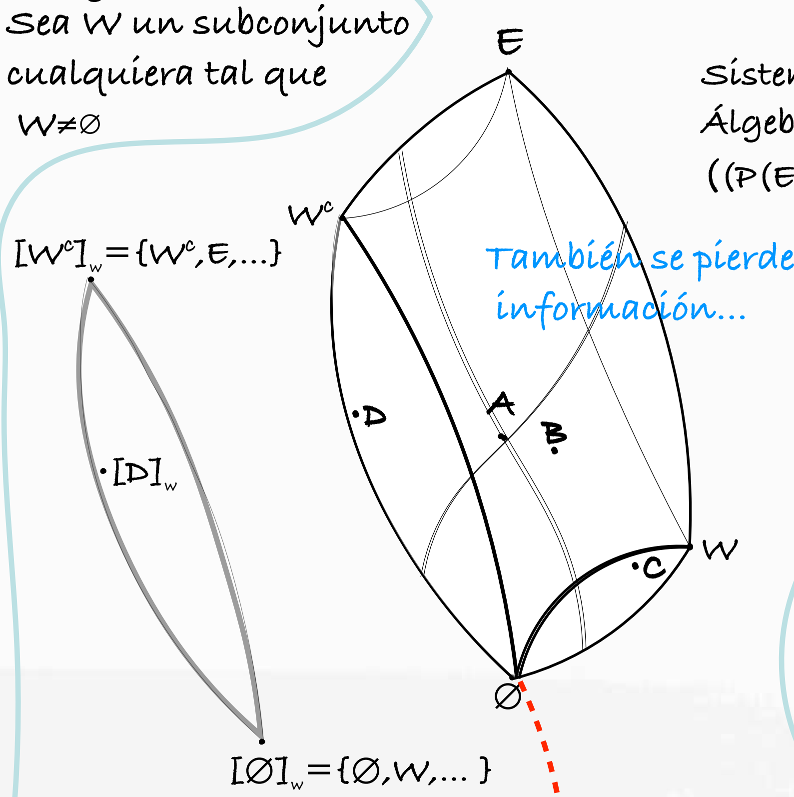
(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_W, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos $\varnothing \subseteq E, A \subseteq E, B \subseteq E, \ldots, E \subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \varnothing$

Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

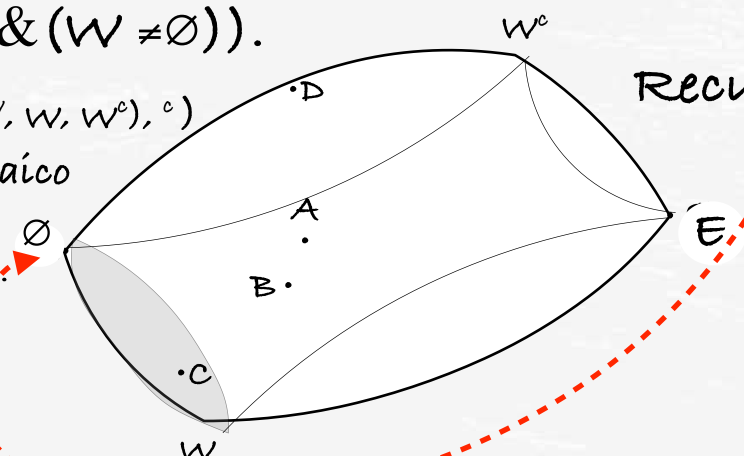


Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W \sqsubseteq^W \varnothing) \,\&\, (W \neq \varnothing))$.

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

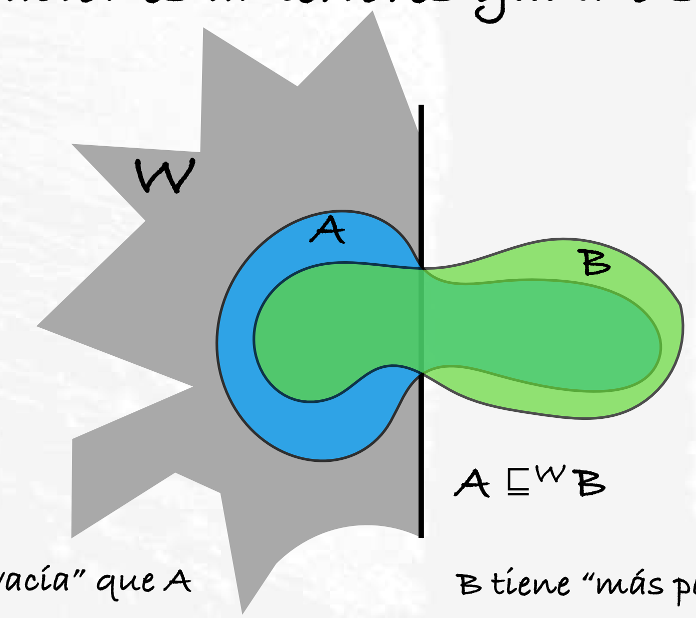
isomorfismo $A \longrightarrow A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

Intersección de las anteriores:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

Propuesta definitiva

Recupera las dos situaciones anteriores y... ¡no se pierde información!.



B tiene "menos parte vacía" que A

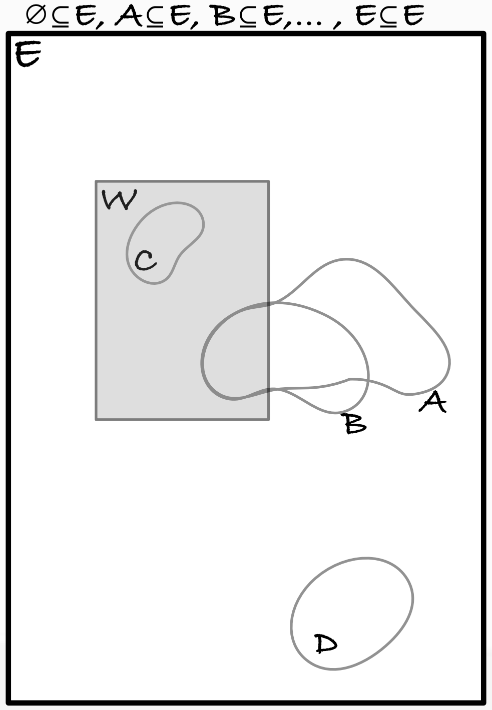
B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

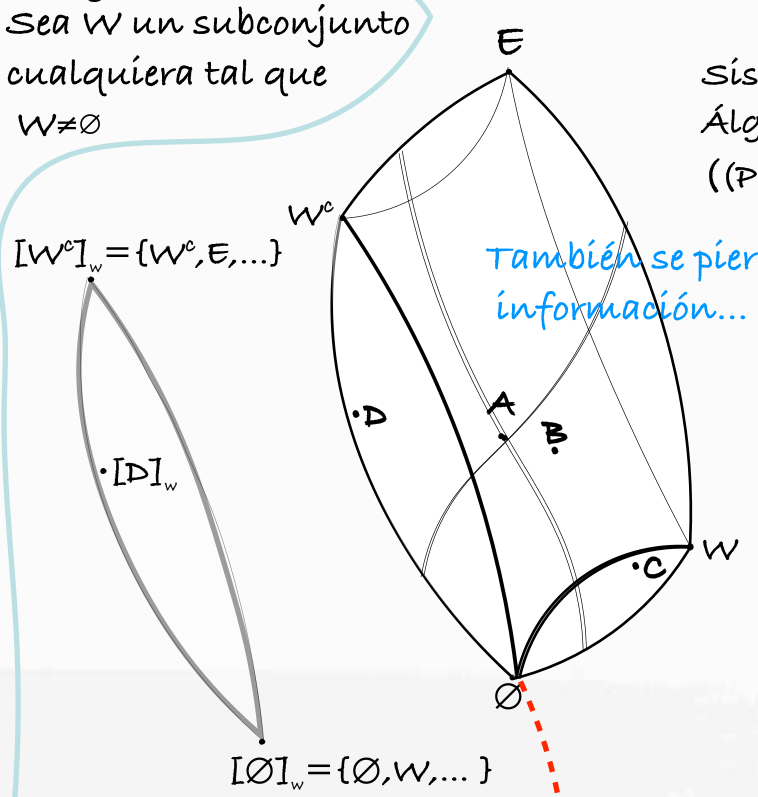
Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos $\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$,..., $E\subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W\neq\emptyset$



También se pierde información...

Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

¡Interesante! $<^W$ es un preorden en P(E).

Equivalencia:

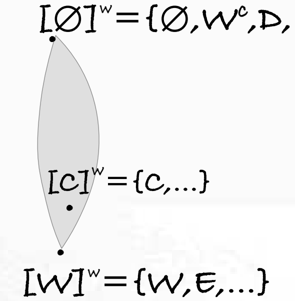
Pero... $A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

Excepto en el caso W=E, ¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A\cap W=B\cap W)$.

"fuera" del ideal principal (W]!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w\leqslant^W[B]^w \Leftrightarrow A<^W B$



$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\emptyset$, ¡ este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w\leqslant^W[\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en P(E) tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W\sqsubseteq^W\emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.

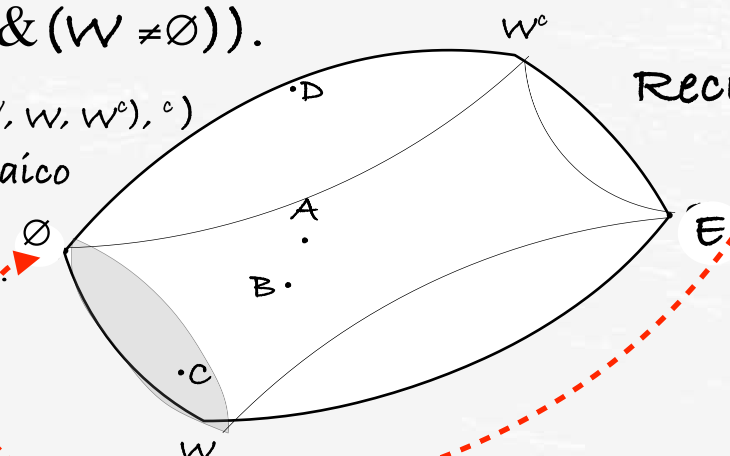
Intersección de las anteriores: "Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E),\subseteq)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(A<_W B) \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)]$

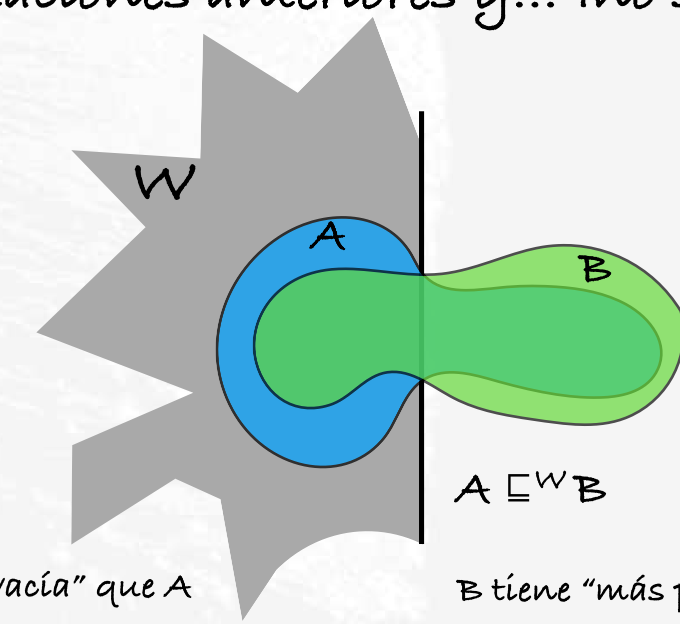
Propuesta definitiva

$((P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



Recupera las dos situaciones anteriores y... ¡no se pierde información!.



B tiene "menos parte vacía" que A

B tiene "más parte no vacía" que A

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A\longrightarrow A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

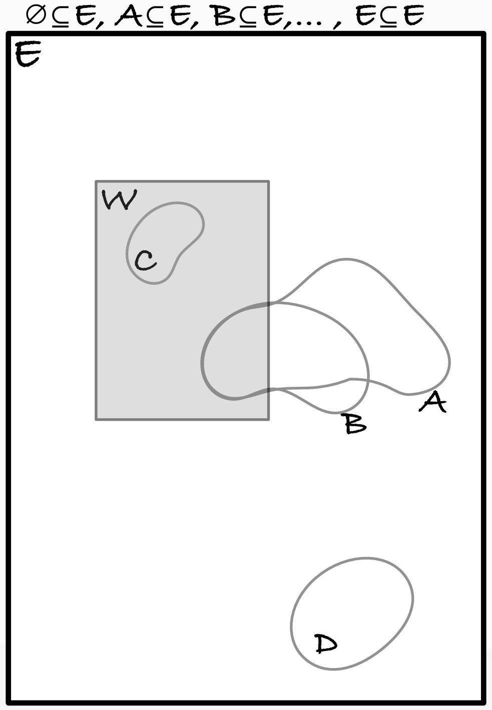
Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

(y orden asociado $\preccurlyeq_W$, tal que $([P(E)]_w, \preccurlyeq_W)$ es conjunto ordenado)

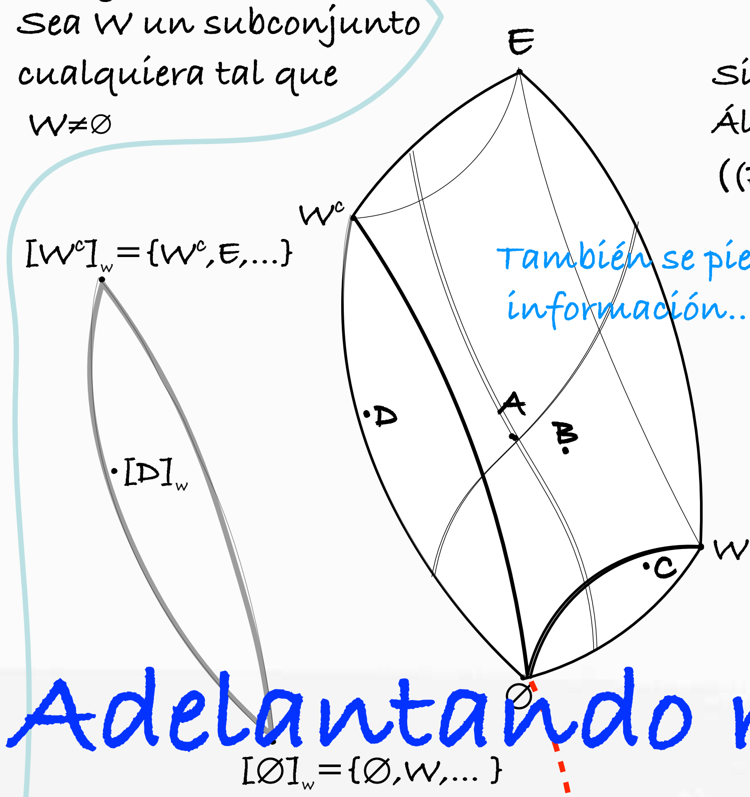
Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos $\emptyset\subseteq E, A\subseteq E, B\subseteq E, \dots, E\subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W\neq\emptyset$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$

También se pierde información...

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

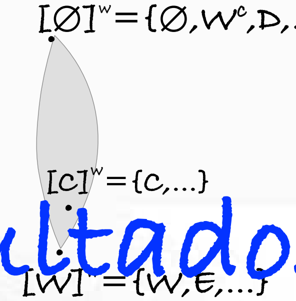
Pero...

Excepto en el caso W=E, ¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.

"fuera" del ideal principal (W]!

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w\preccurlyeq^W[B]^w \Leftrightarrow A<^W B$



$([P(E)]^w, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

Como W no es el vacío Ø, ¡ este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^w\preccurlyeq^W[\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de Ø.

$((W\sqsubseteq^W\emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.

Intersección de las anteriores: "Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E),\subseteq)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(A<_W B) \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)]$

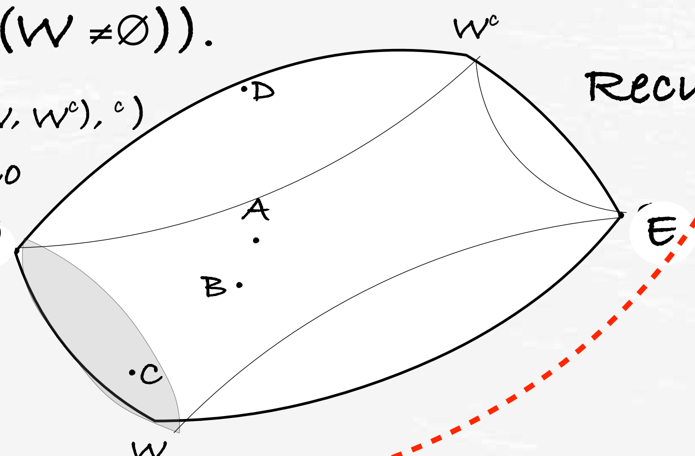
Propuesta definitiva

W-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de W"

Recupera las dos situaciones anteriores y... ¡no se pierde información!.

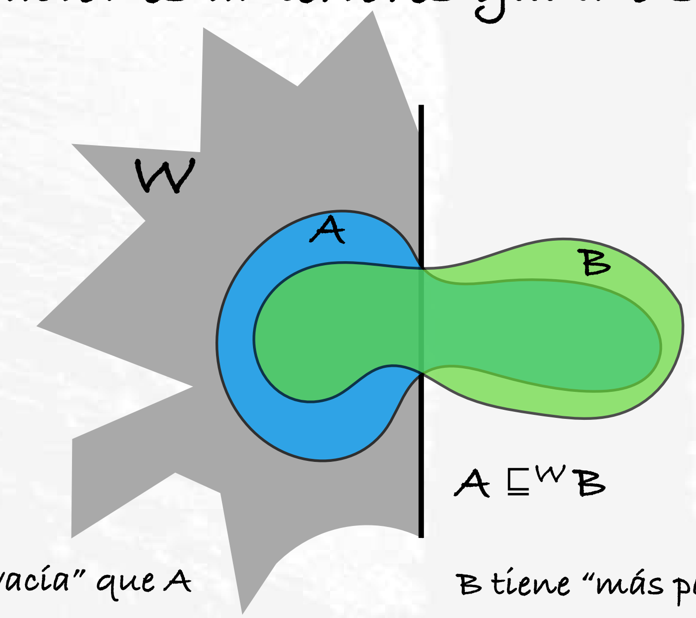
$((P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A\longrightarrow A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$



B tiene "menos parte vacía" que A

B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

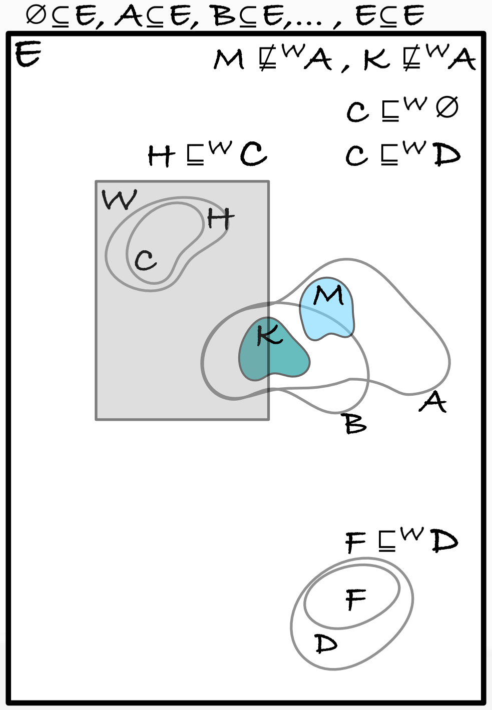
Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_W, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos $\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \varnothing$

También se pierde información...

Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \& (B <^W A)$

Pero...

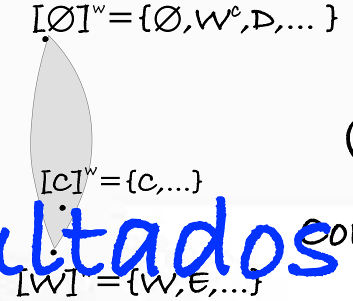
Excepto en el caso $W = E$,

¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

"fuera" del ideal principal $(W]$!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^W \leqslant^W [B]^W \Leftrightarrow A <^W B$



$([P(E)]^W, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

Como W no es el vacío $\varnothing$, ¡ este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^W \leqslant^W [\varnothing]^W$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W \sqsubseteq^W \varnothing) \& (W \neq \varnothing))$.

Intersección de las anteriores: "Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E), \subseteq)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \& (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

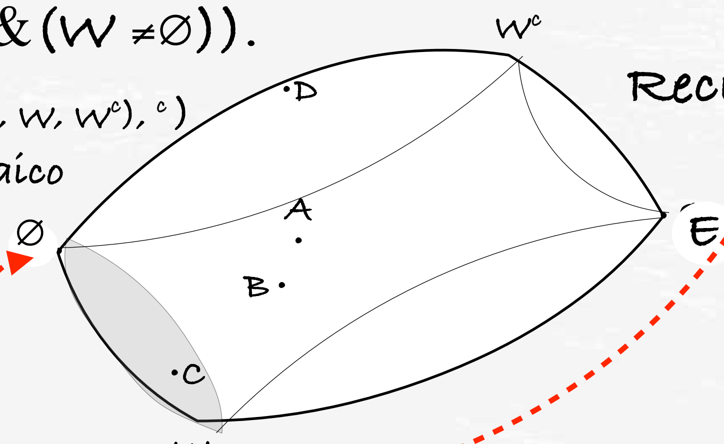
Propuesta definitiva

W-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de W"

Recupera las dos situaciones anteriores y... ¡no se pierde información!.

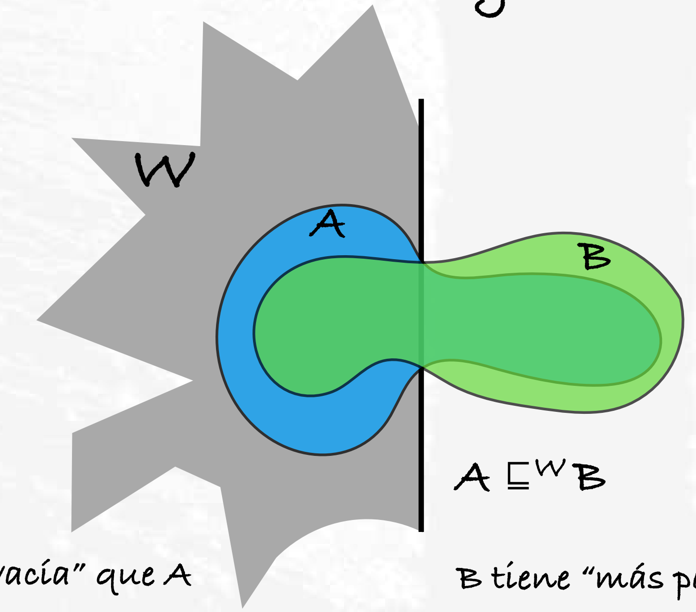
$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



$A \sqsubseteq^W B$

B tiene "menos parte vacía" que A

B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

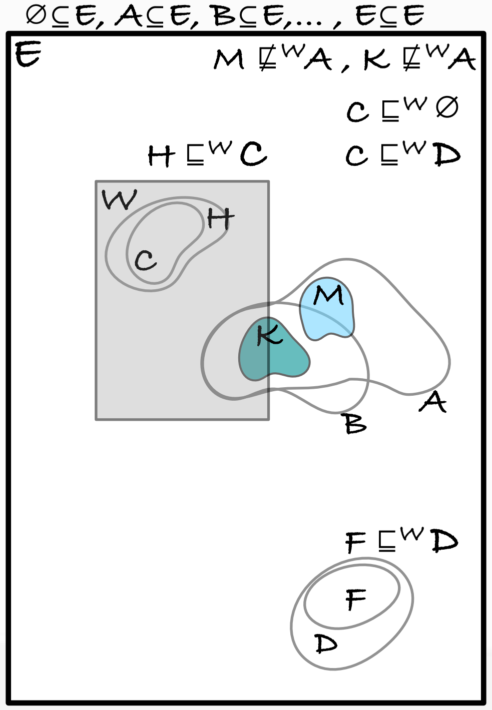
(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

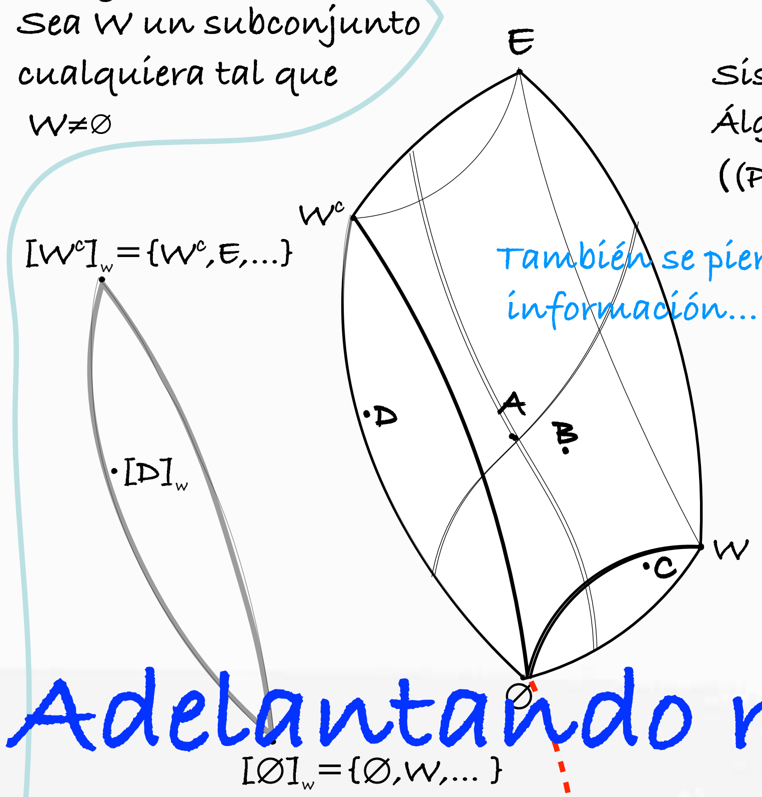
$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$



También se pierde información...

Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en P(E).

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Pero...

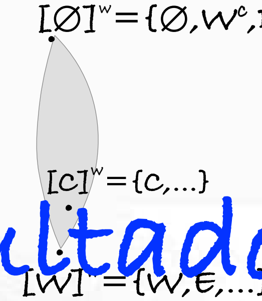
Excepto en el caso W=E,

¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

"fuera" del ideal principal (W]!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$



$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en P(E) tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

Intersección de las anteriores: "Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E), \subseteq)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

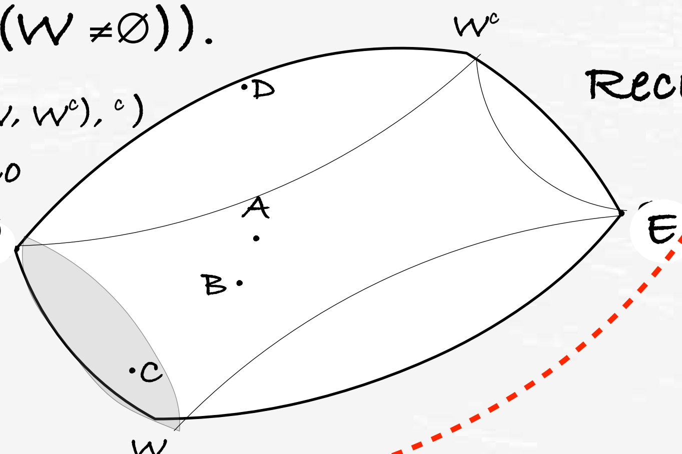
Propuesta definitiva

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

Recupera las dos situaciones anteriores y... ¡no se pierde información!.

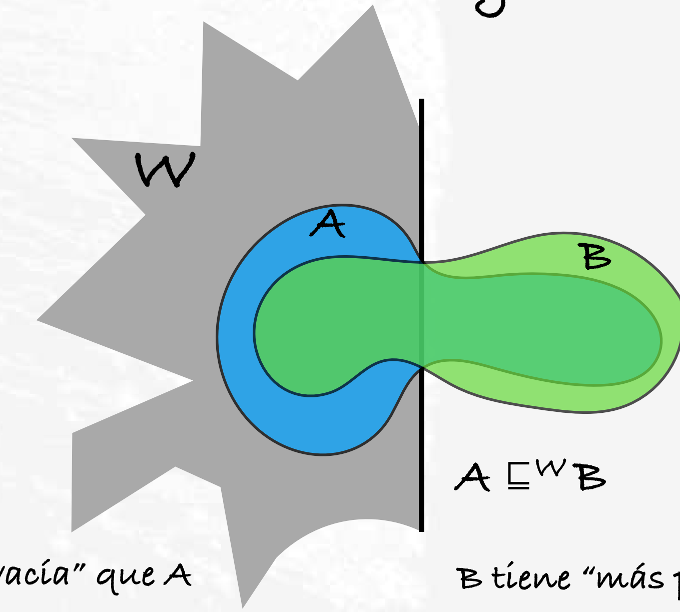
$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

$A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

B tiene "menos parte vacía" que A

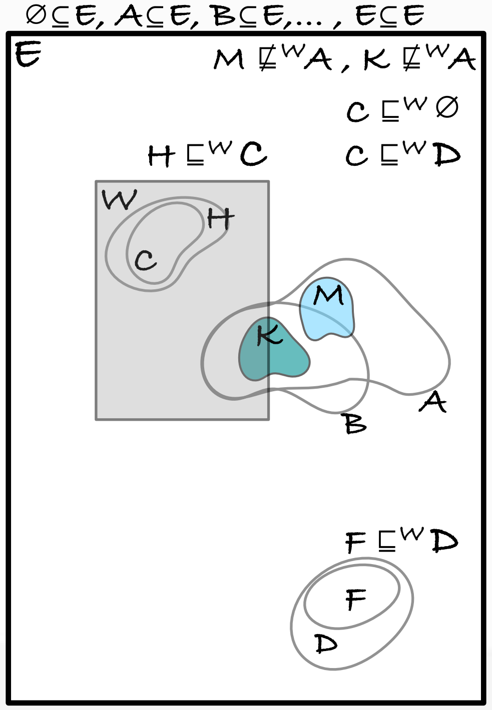
B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

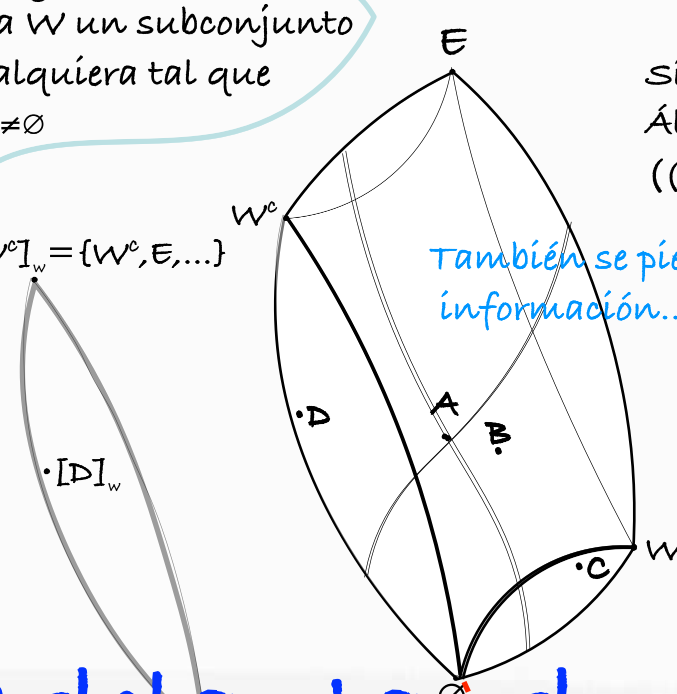
Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos
$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

También se pierde información...

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

¡Interesante!

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

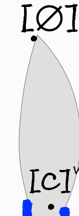
Pero... $A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

Excepto en el caso $W = E$,
¡se pierde la información $\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.
"fuera" del ideal principal $(W]$!

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

$[\emptyset]^w = \{\emptyset, W^c, D, \ldots\}$



$[C]^w = \{C, \ldots\}$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

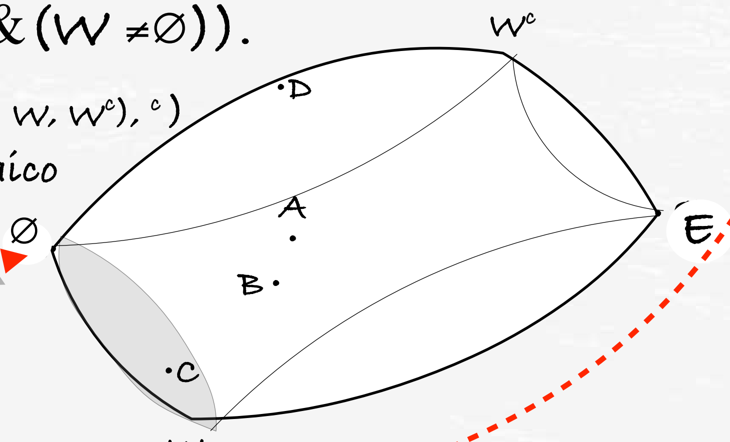
$[\emptyset]_w = \{\emptyset, W, \ldots\}$

$[W]^w = \{W, E, \ldots\}$

Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.
$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$
Sistema algebraico con la misma complementación.



"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E), \subseteq)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

W-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de W"

En el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, $(C \subseteq W)$, es una "W-parte" de $\emptyset$, (es decir, $W \sqsubseteq^W C \sqsubseteq^W \emptyset$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

$A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

B tiene "más parte no vacía" que A

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

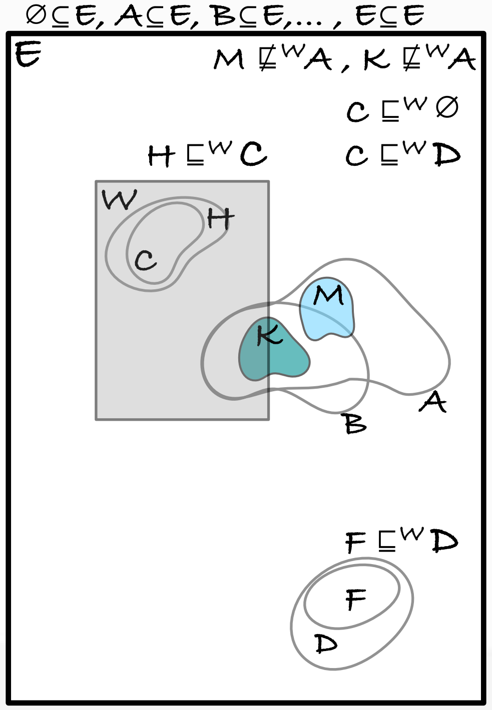
(y orden asociado $\preccurlyeq_W$, tal que $([P(E)]_w, \preccurlyeq_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

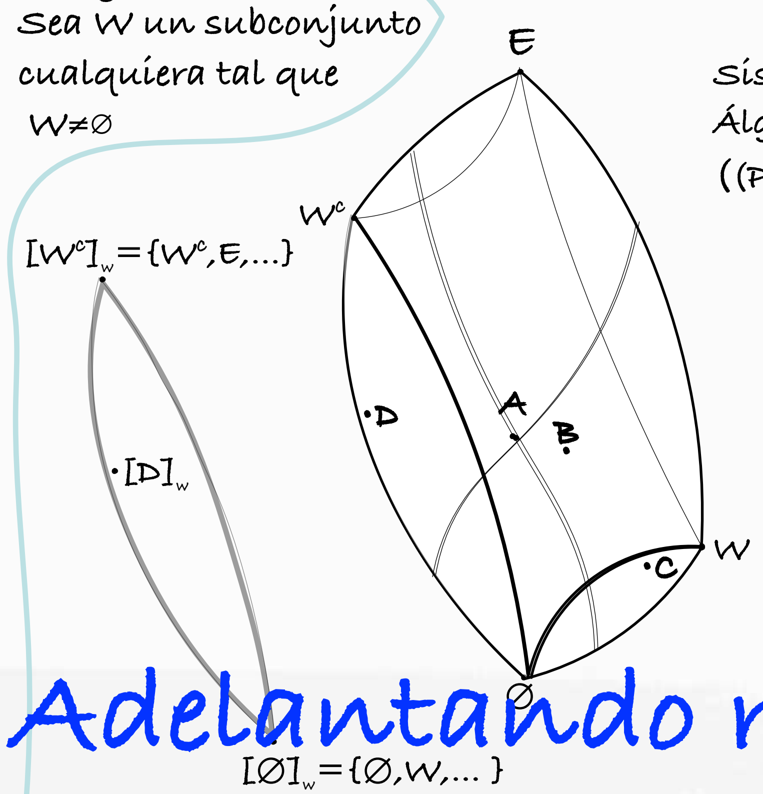
$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

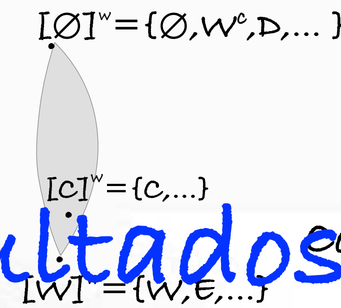
$\emptyset\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, ..., $E\subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W\neq\emptyset$



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole
$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$



$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

$\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.

Relación de orden $\preccurlyeq^W$ entre clases:

$[A]^w \preccurlyeq^W [B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

$([P(E)]^w, \preccurlyeq^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

Como W no es el vacío ∅, i este último tiene a W como "$\preccurlyeq^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \preccurlyeq^W [\emptyset]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de ∅.

$((W\sqsubseteq^W\emptyset)\,\&\,(W\neq\emptyset))$.

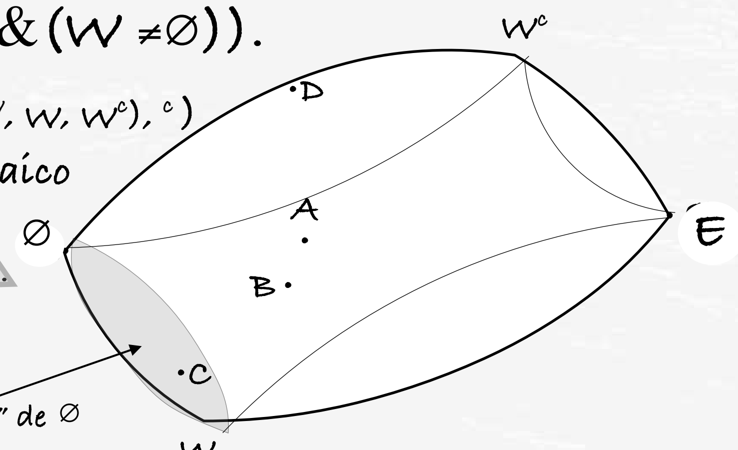
"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E),\subseteq)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(A<_W B) \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)]$

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

$((P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



En el álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, ($C\subseteq W$), es una "w-parte" de ∅, (es decir, $W\sqsubseteq^W C\sqsubseteq^W\emptyset$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A\longrightarrow A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$A\sqcap^W B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]$

$A\sqcup^W B=(A\cap B)\cup[W^c\cap(A\cup B)]$

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

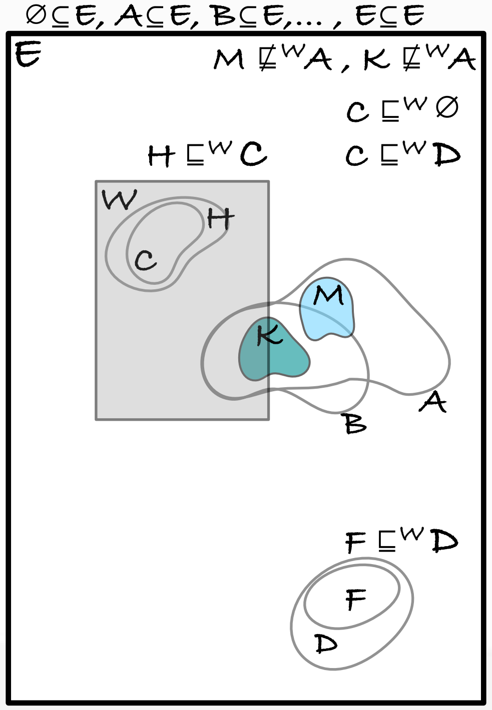
(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

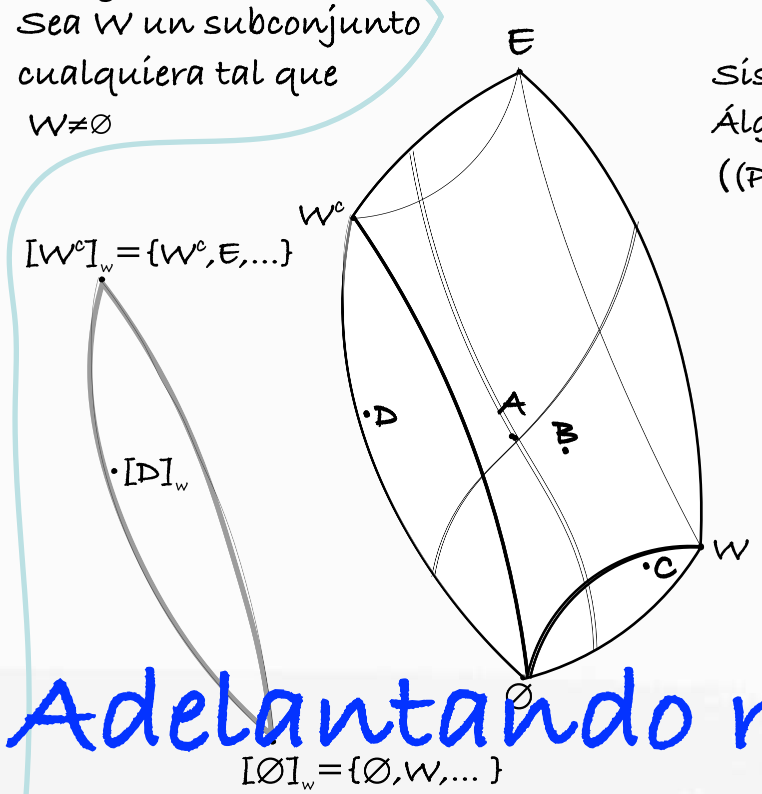
$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

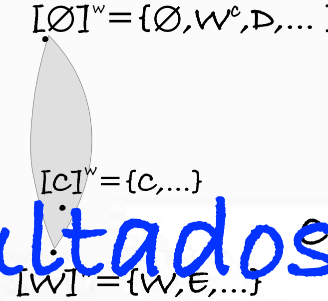
$\varnothing\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, ..., $E\subseteq E$



Según el contexto...
Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W\neq\varnothing$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole
$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E),^c)$



$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

$\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Adelantando resultados ...

Como W no es el vacío $\varnothing$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\varnothing]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W \sqsubseteq^W \varnothing)\,\&\,(W\neq\varnothing))$.

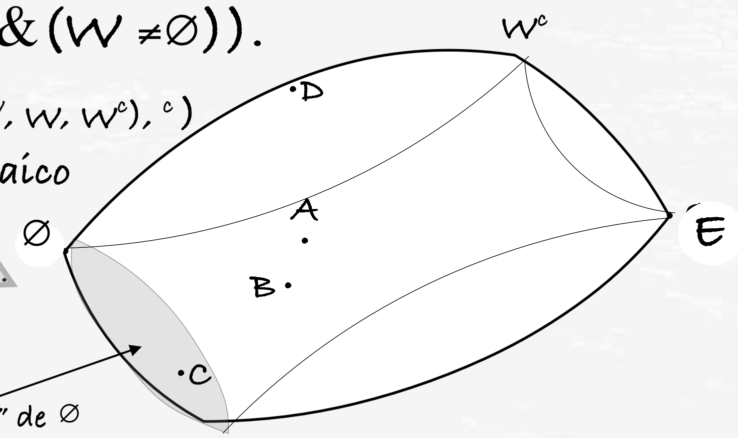
"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E),\subseteq)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(A<_W B) \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)]$

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

$((P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de $\varnothing$

En el álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, ($C\subseteq W$), es una "w-parte" de $\varnothing$, (es decir, $W\sqsubseteq^W C\sqsubseteq^W\varnothing$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A\longrightarrow A\triangle W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$ | w-intersección y w-unión

Son nulnormas y uninormas en el retículo $(P(E),\subseteq)$.

$A\sqcap^W B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]$

$A\sqcup^W B=(A\cap B)\cup[W^c\cap(A\cup B)]$

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A<_W B \Leftrightarrow [(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)] \Leftrightarrow [A\subseteq(B\cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Referencial E y subconjuntos

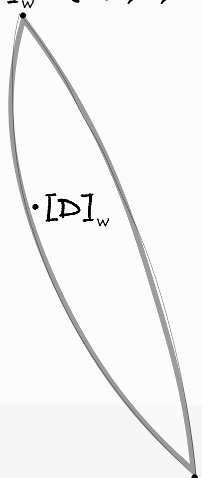
$\varnothing\subseteq E$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, ..., $E\subseteq E$

René Magritte

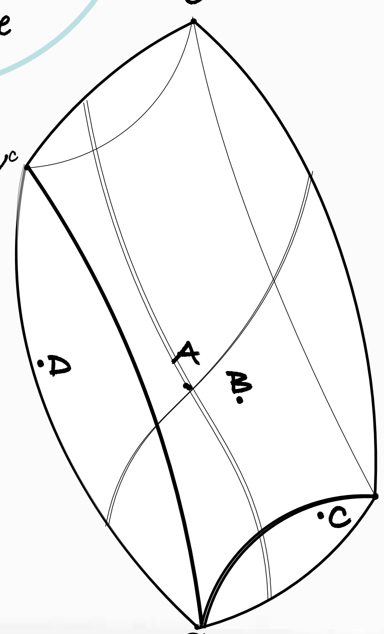
Según el contexto...

Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W\neq\varnothing$

$[W^c]_w=\{W^c, E, ...\}$

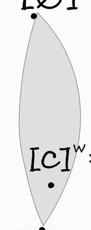


$[\varnothing]_w=\{\varnothing, W, ...\}$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$

$[\varnothing]^w=\{\varnothing, W^c, D, ...\}$



$[C]^w=\{C, ...\}$

$[W]^w=\{W, E, ...\}$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$

$\Leftrightarrow (A\cap W=B\cap W)$.

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w\leqslant^W[B]^w \Leftrightarrow A<^W B$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\varnothing$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w\leqslant^W[\varnothing]^w$!

Objetivo: Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W\sqsubseteq^W\varnothing)\,\&\,(W\neq\varnothing))$.

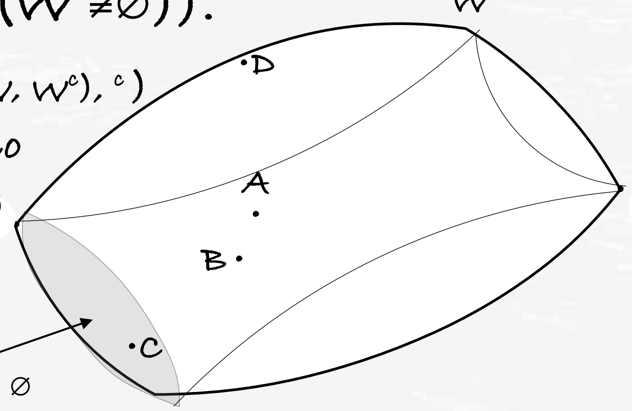
"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E),\subseteq)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(A<_W B) \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)]$

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de $\varnothing$

En el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, $(C\subseteq W)$, es una "w-parte" de $\varnothing$, (es decir, $W\sqsubseteq^W C\sqsubseteq^W\varnothing$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A\longrightarrow A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

w-intersección y w-unión

Son nulnormas y uninormas en el retículo $(P(E),\subseteq)$.

$A\sqcap^W B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]$

$A\sqcup^W B=(A\cap B)\cup[W^c\cap(A\cup B)]$

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

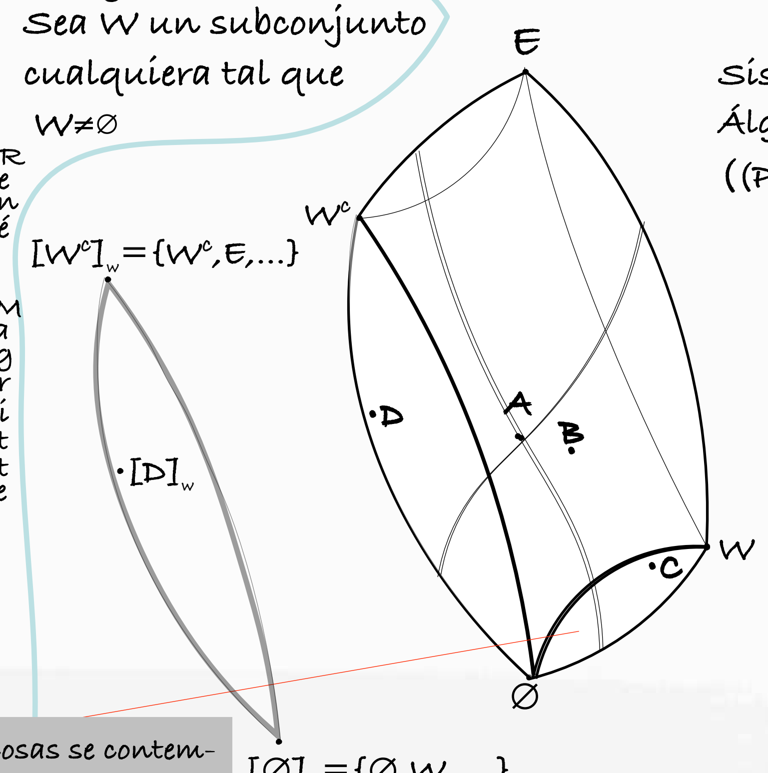
$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

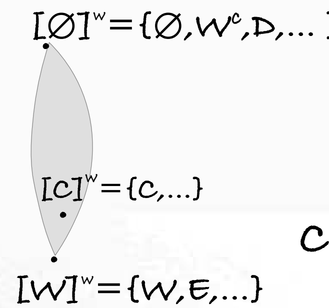
$\varnothing \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$

René Magritte

Según el contexto... Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \varnothing$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$



$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\varnothing$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\varnothing]^w$!

En W las cosas se contemplan de manera distinta...

Objetivo. Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\varnothing$.

$((W \sqsubseteq^W \varnothing) \,\&\, (W \neq \varnothing))$.

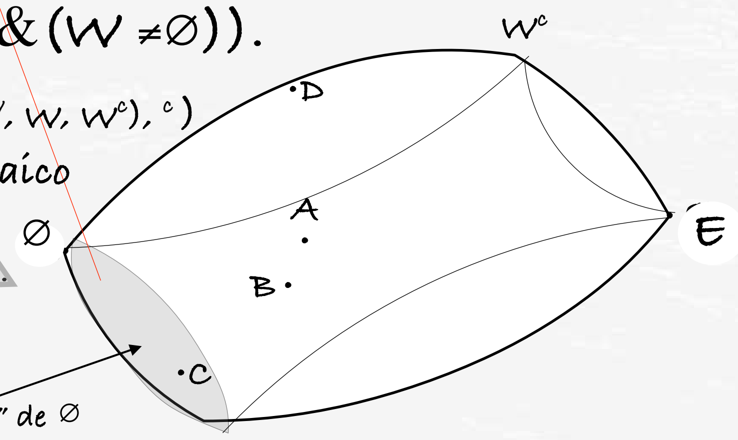
"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E), \subseteq)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



En el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, $(C \subseteq W)$, es una "w-parte" de $\varnothing$, (es decir, $W \sqsubseteq^W C \sqsubseteq^W \varnothing$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

w-intersección y w-unión

Son nulnormas y uninormas en el retículo $(P(E), \subseteq)$.

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

$A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

2ª aproximación. Relación deducida de la anterior (opuesta de $<^{W^c}$):

Preorden $A <_W B \Leftrightarrow [(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cup W)]$,

(y orden asociado $\leqslant_W$, tal que $([P(E)]_w, \leqslant_W)$ es conjunto ordenado)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B,... atendiendo a su interacción con W:

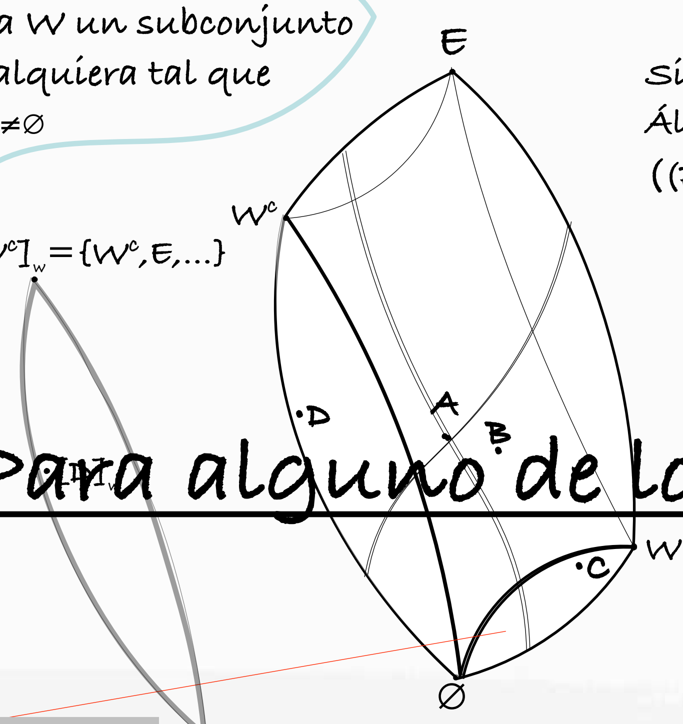
$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

Referencial E y subconjuntos

$\emptyset \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, ..., $E \subseteq E$

René Magritte

Sea W un subconjunto cualquiera tal que $W \neq \emptyset$



Sistema algebraico: Álgebra de Boole $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

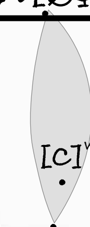
$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

Relación de orden $\leqslant^W$ entre clases:

Para alguno de los ejemplos expuestos:

$[\emptyset]^w = \{\emptyset, W, D, ...\}$

$[A]^w \leqslant^W [B]^w \Leftrightarrow A <^W B$



$[C]^w = \{C, ...\}$

$[W]^w = \{W, E, ...\}$

$([P(E)]^w, \leqslant^W)$ conjunto ordenado.

Como W no es el vacío $\emptyset$, i este último tiene a W como "$\leqslant^W$-subconjunto" propio: $[W]^w \leqslant^W [\emptyset]^w$!

En W las cosas se contemplan de manera distinta...

Objetivo. Definir una nueva "inclusión" $\sqsubseteq^W$ en $P(E)$ tal que W sea "parte propia" de $\emptyset$.

$((W \sqsubseteq^W \emptyset) \,\&\, (W \neq \emptyset))$.

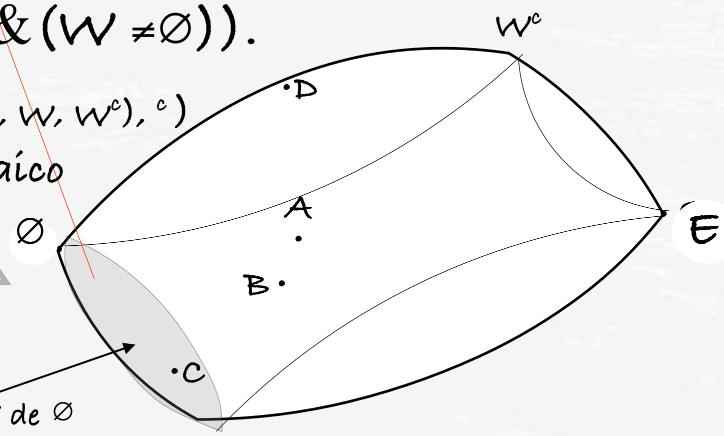
"Orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ en $(P(E), \subseteq)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (A <_W B) \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)]$

w-inclusión o inclusión desde la "perspectiva de w"

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$

Sistema algebraico con la misma complementación.



"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de $\emptyset$

En el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, si consideramos $\sqsubseteq^W$ como una inclusión, todo subconjunto usual C de W, $(C \subseteq W)$, es una "w-parte" de $\emptyset$, (es decir, $W \sqsubseteq^W C \sqsubseteq^W \emptyset$).

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomorfa a la inicial:

isomorfismo $A \longrightarrow A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

w-intersección y w-unión

Son nulnormas y uninormas en el retículo $(P(E), \subseteq)$.

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

$A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A<^{W}B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq (A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$

$<^{W}$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A\equiv^{W}B \Leftrightarrow (A<^{W}B)\ \&\ (B<^{W}A)$

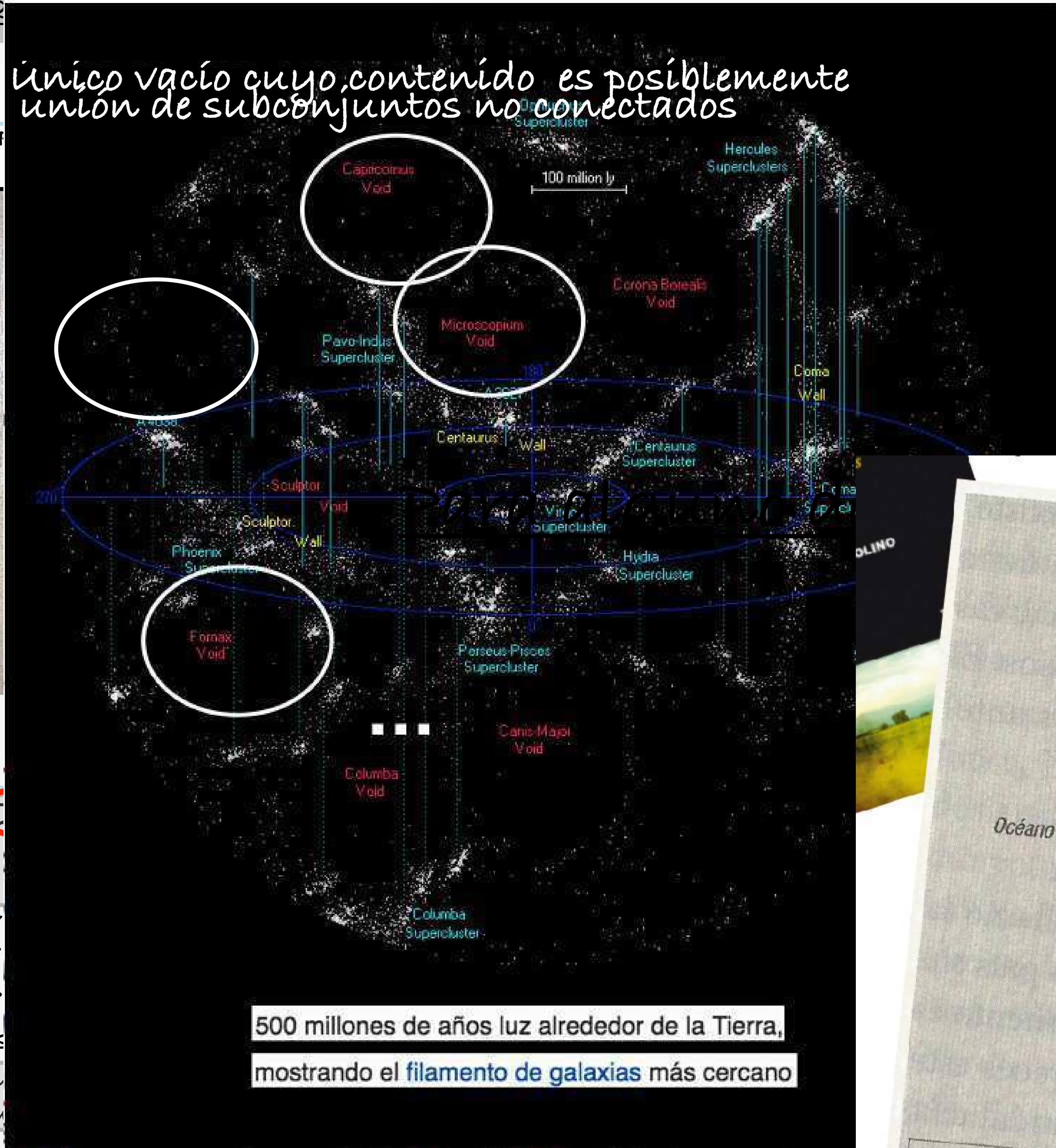
$\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W)$.

nado)

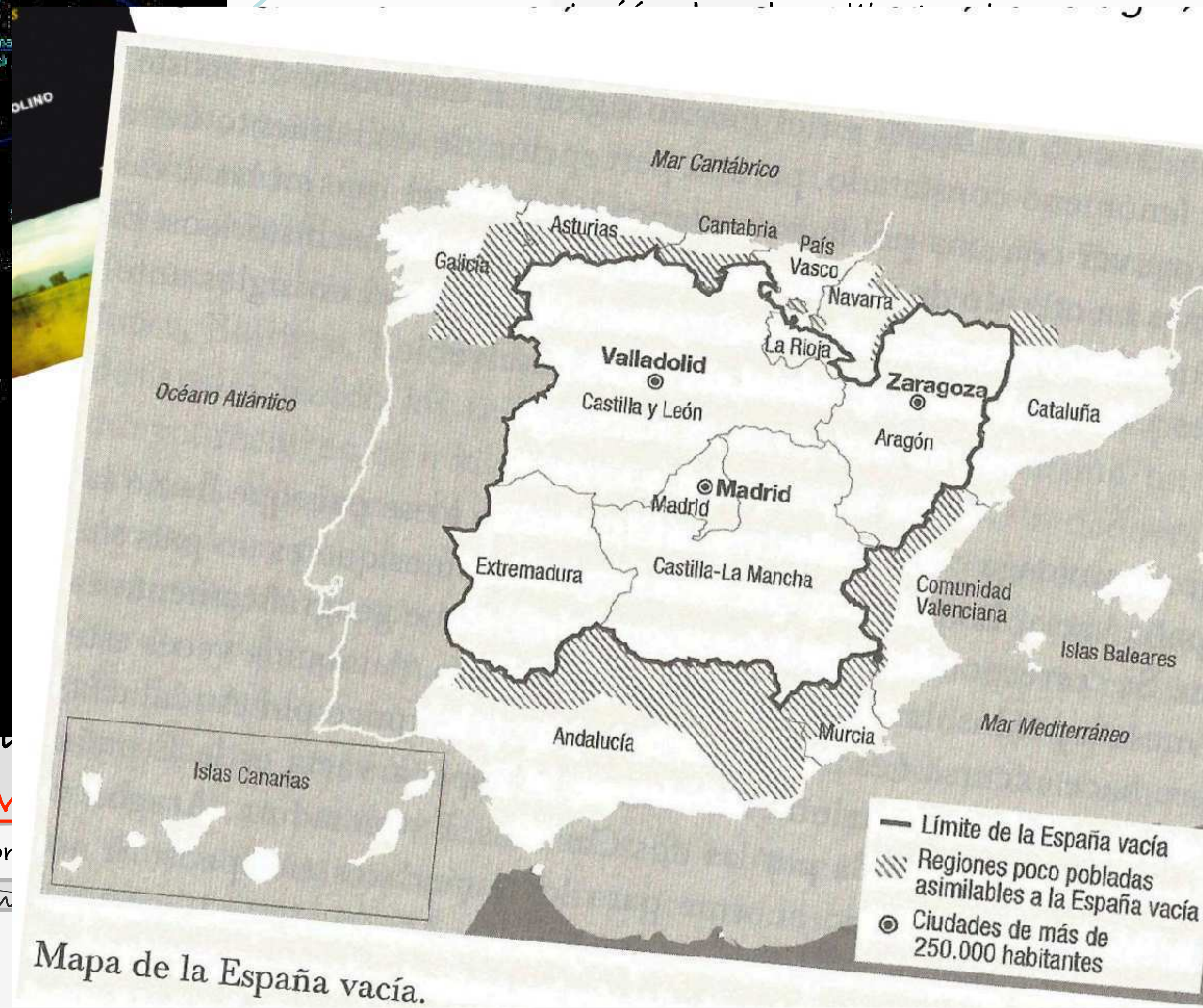
ebraico:

oole

$\cup, \emptyset, E), ^{c})$



500 millones de años luz alrededor de la Tierra, mostrando el filamento de galaxias más cercano



Mapa de la España vacía.

“$\sqsubseteq^{W}$-subconjuntos” de $\emptyset$

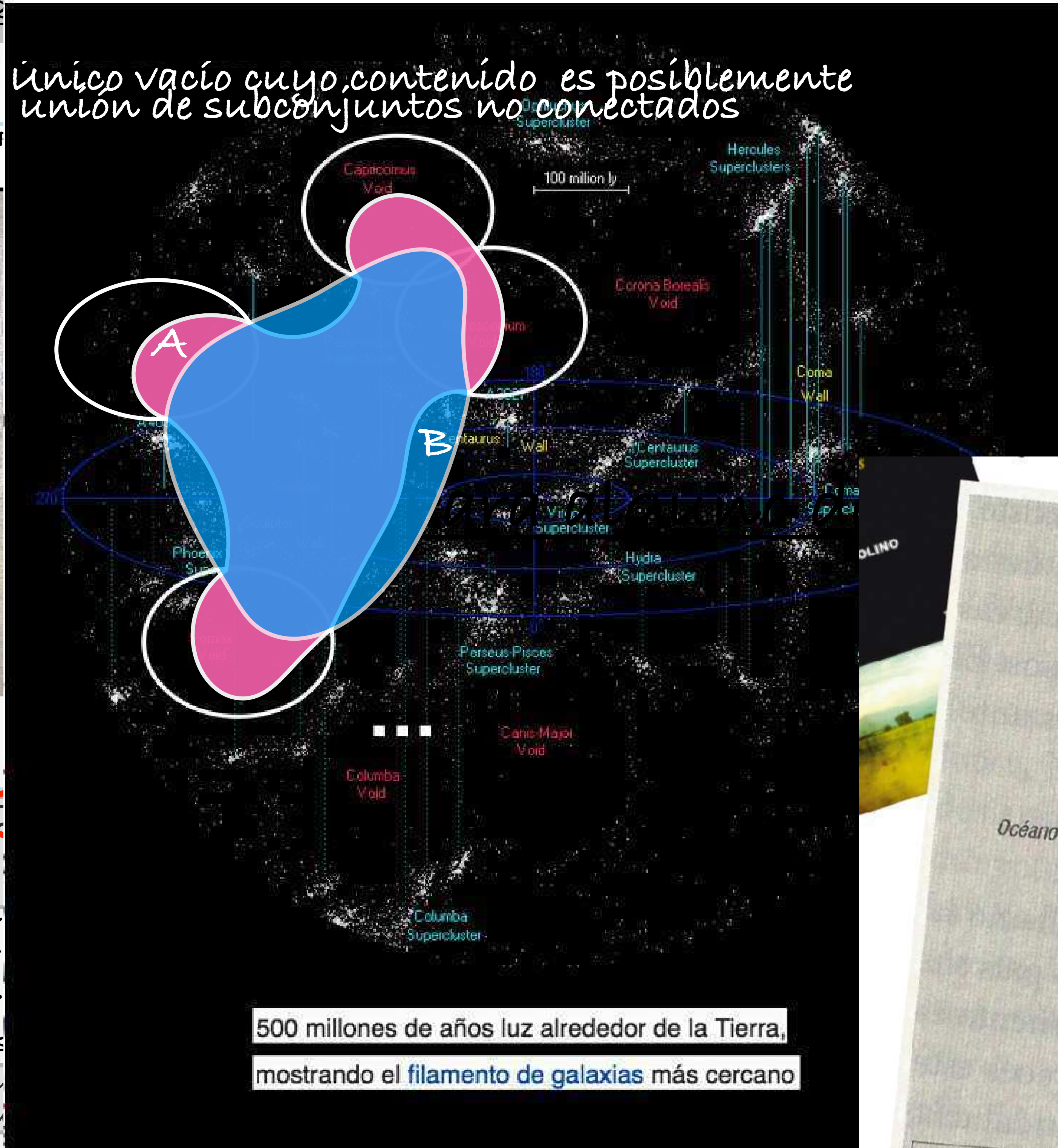
$\cdot C$

W

de W

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W}, W, W^{c})$ isomor

isomorfismo $A \longrightarrow A\triangle W = (A^{c}\cap W)\cup(A\cap W^{c})$ w-intersección



500 millones de años luz alrededor de la Tierra,
mostrando el filamento de galaxias más cercano

nado)

ebraico:
oole
U, ∅, E), c)

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A, B, ... atendiendo a su interacción con W:

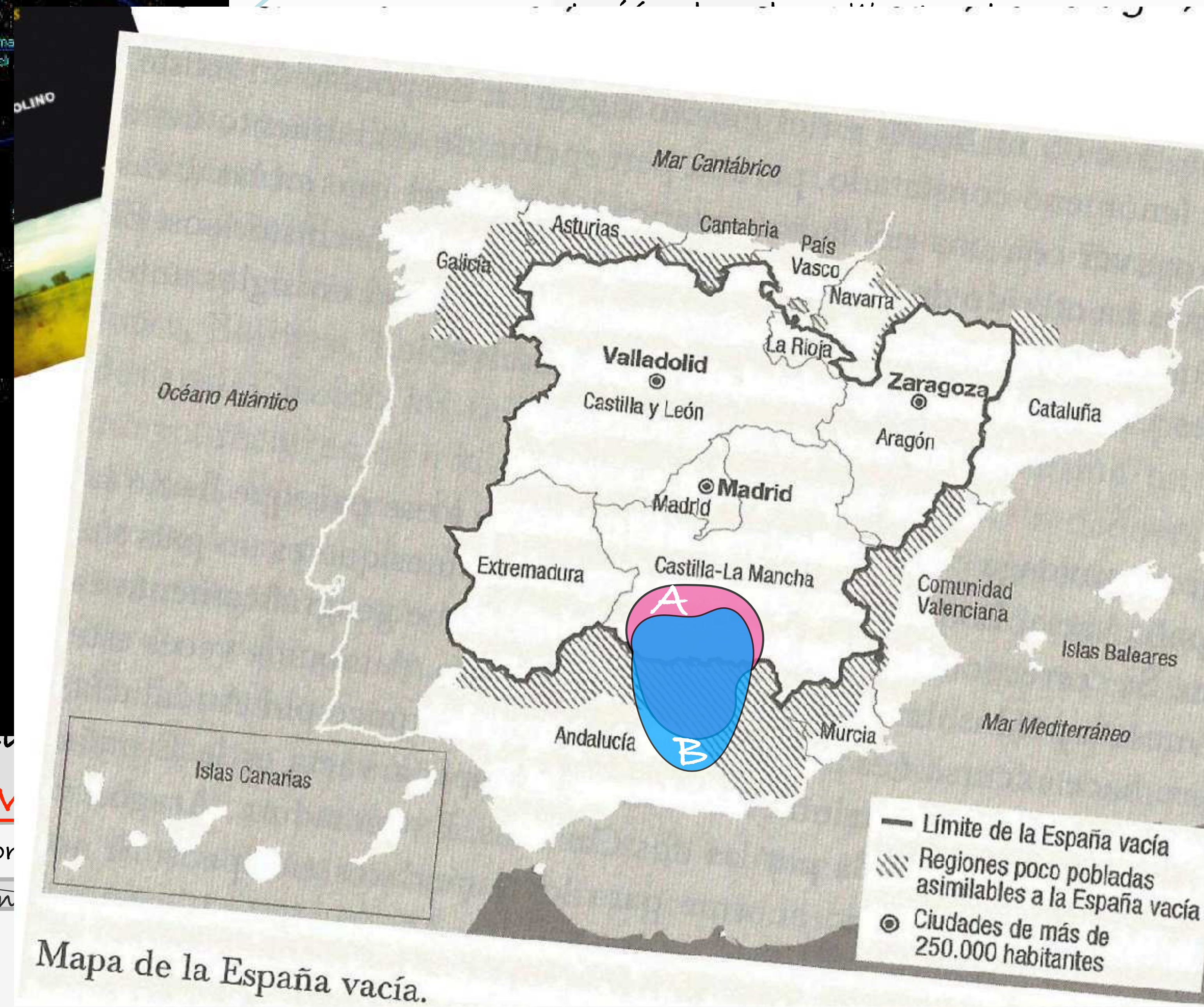
$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \& (B <^W A)$

$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.



Mapa de la España vacía.

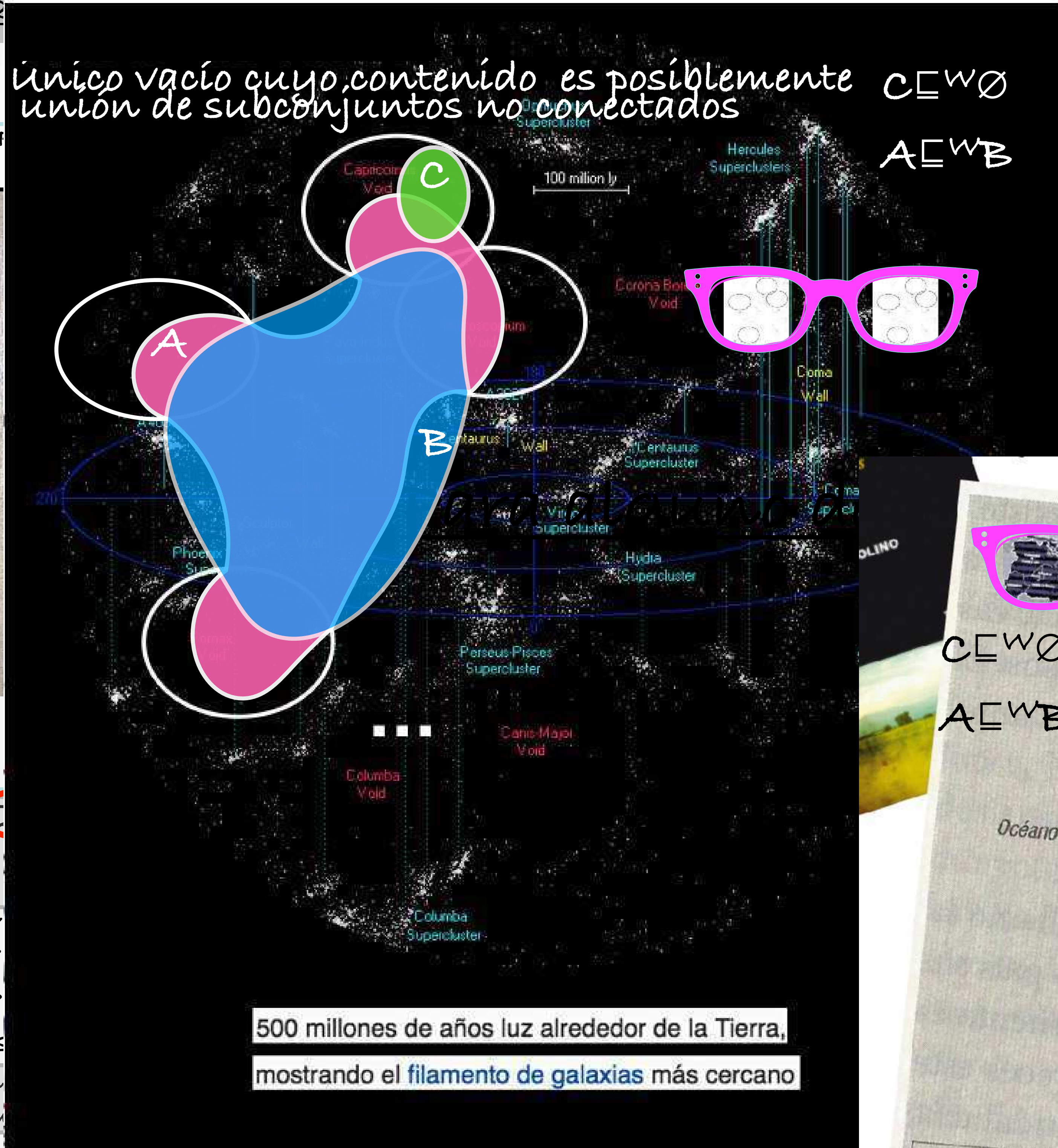
"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de $\emptyset$ ·c

W

de W

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ isomor

isomorfismo $A \longrightarrow A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$ w-intersección



nado)

ebraico:
oole
U, ∅,E),^{c})

<u>Primera aproximación</u>. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

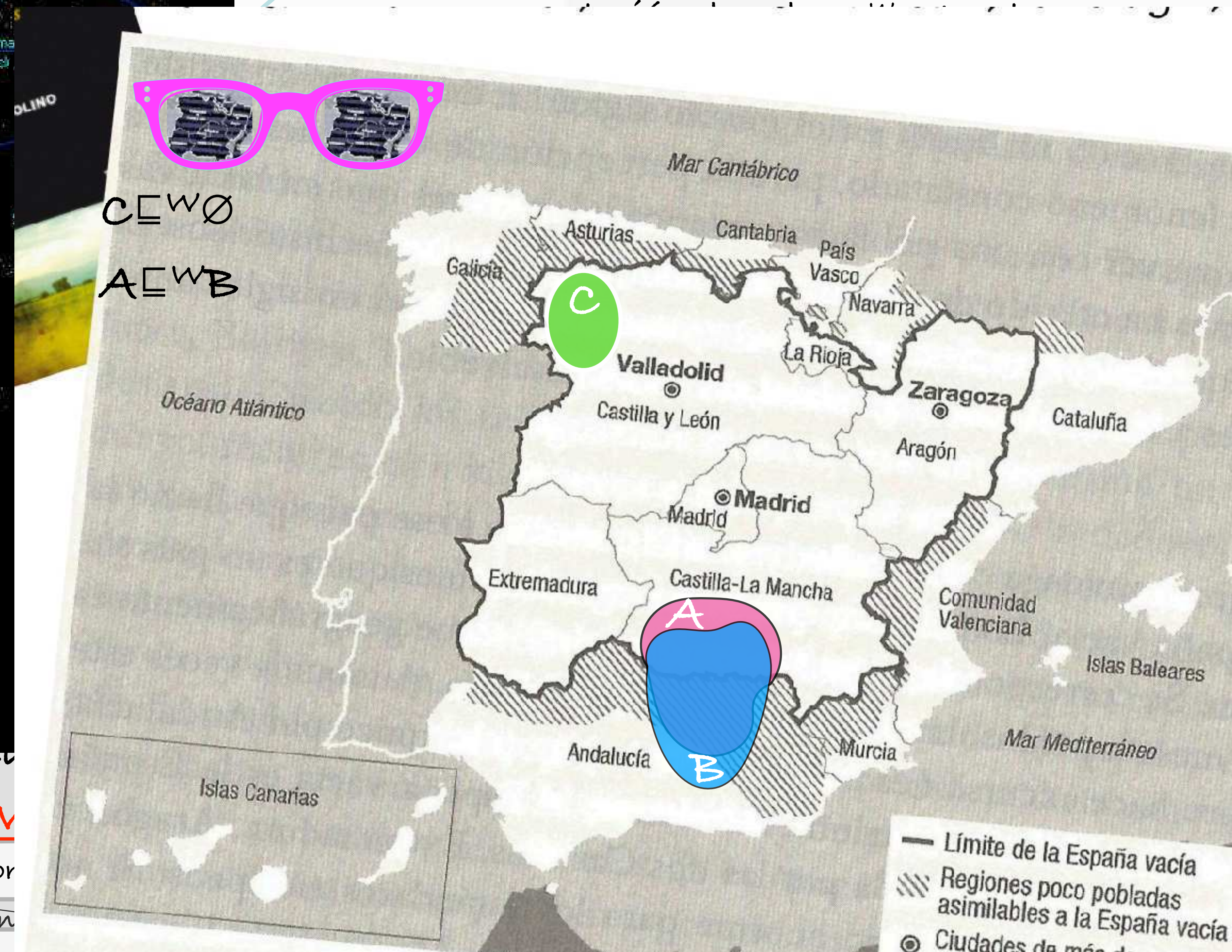
$$A<^W B \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq(A\cap W)] \Leftrightarrow [(B\cap W)\subseteq A]$$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$$A\equiv^W B \Leftrightarrow (A<^W B)\,\&\,(B<^W A)$$

$$\Leftrightarrow (A\cap W = B\cap W).$$



Mapa de la España vacía.

"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de $\emptyset$

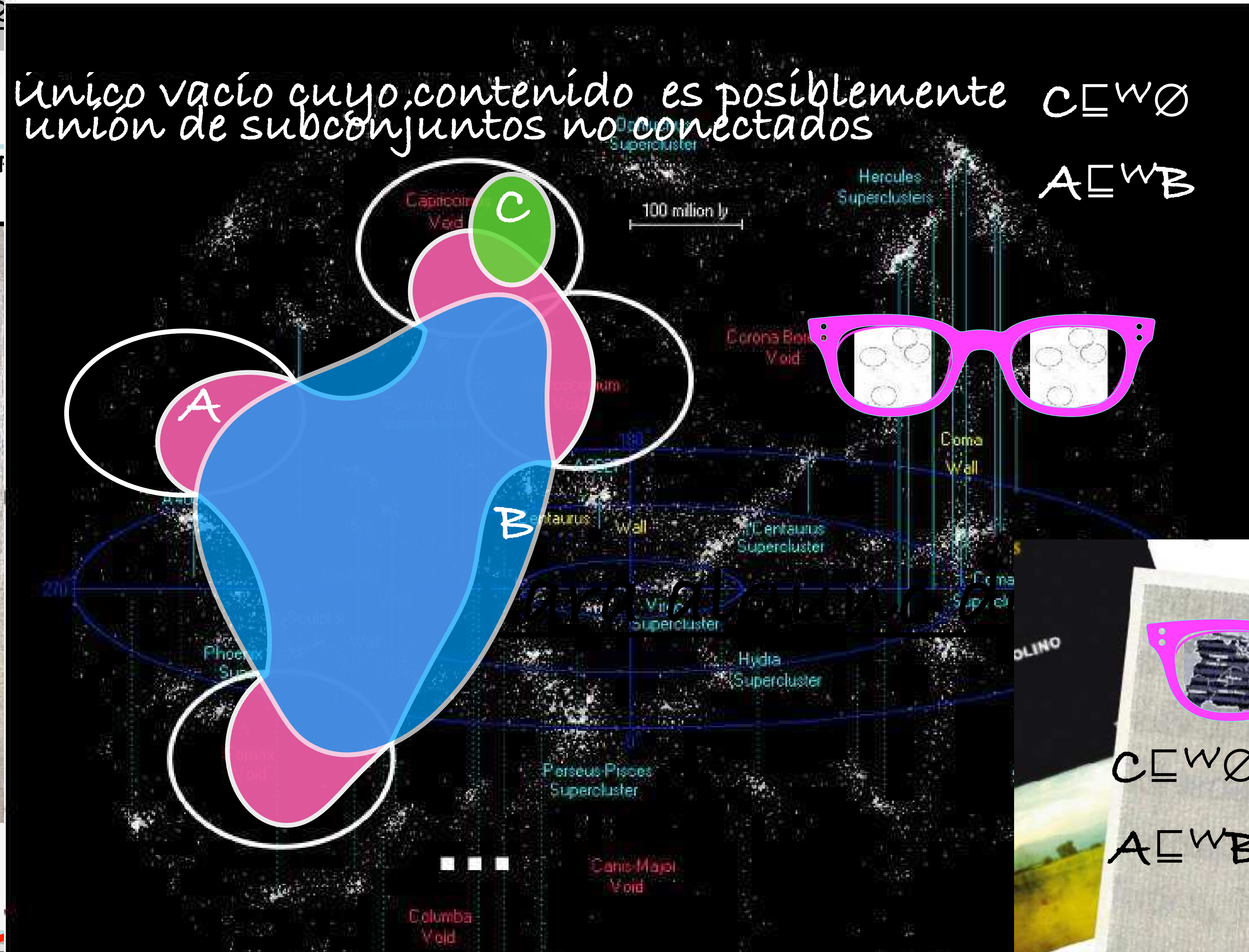
·C

W

de W

Se obtiene una nueva Álgebra de Boole $(P(E),\ \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W,\ W,\ W^c)$ isomor

isomorfismo $A\longrightarrow A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$ w-intersección



Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$

$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W)$.

nado)

ebraico:

oole

U, ∅,E),ᶜ)

Mapa de la España vacía.

$(\nexists x: x \in \varnothing)$?

vacío, vacía

adjetivo

?

1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada
   "tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos e... sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
   "el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías er..."

El paro nacional en fotos: calles vacías en Buenos Aires

El término "vacío" en el lenguaje usual

500

mo

"$\sqsubseteq^W$-subconjuntos" de ∅

Se obtiene una nueva Álg

isomorfismo

nado)

ebraico:
oole
U, ∅,E),^{c})

Primera aproximación. Relacionar los subconjuntos A,B,... atendiendo a su interacción con W:

$$A <^W B \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq (A \cap W)] \Leftrightarrow [(B \cap W) \subseteq A]$$

$<^W$ es un preorden en $P(E)$.

Equivalencia:

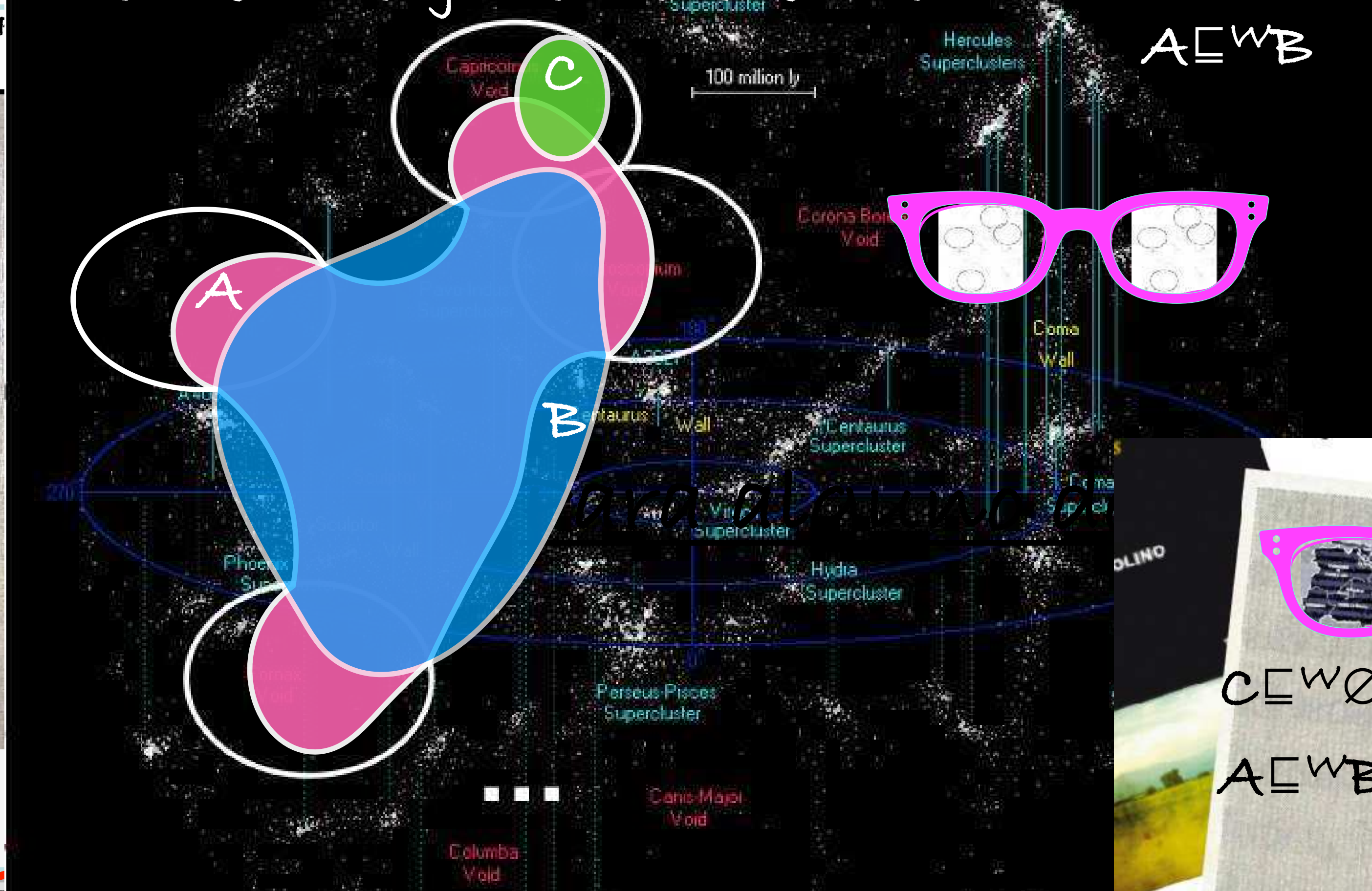
$$A \equiv^W B \Leftrightarrow (A <^W B) \,\&\, (B <^W A)$$

$$\Leftrightarrow (A \cap W = B \cap W).$$

único vacío cuyo contenido es posiblemente unión de subconjuntos no conectados

$C \sqsubseteq^W \emptyset$

$A \sqsubseteq^W B$



$C \sqsubseteq^W \emptyset$

$A \sqsubseteq^W B$

Mapa de la España vacía.

“$\sqsubseteq^W$-subconjuntos” de $\emptyset$

Se obtiene una nueva Álg

isomorfismo

Más adelante(*), ilustraremos con un ejemplo la incorporación y utilidad de “contenidos del vacío” en gestión de datos ...

adjetivo

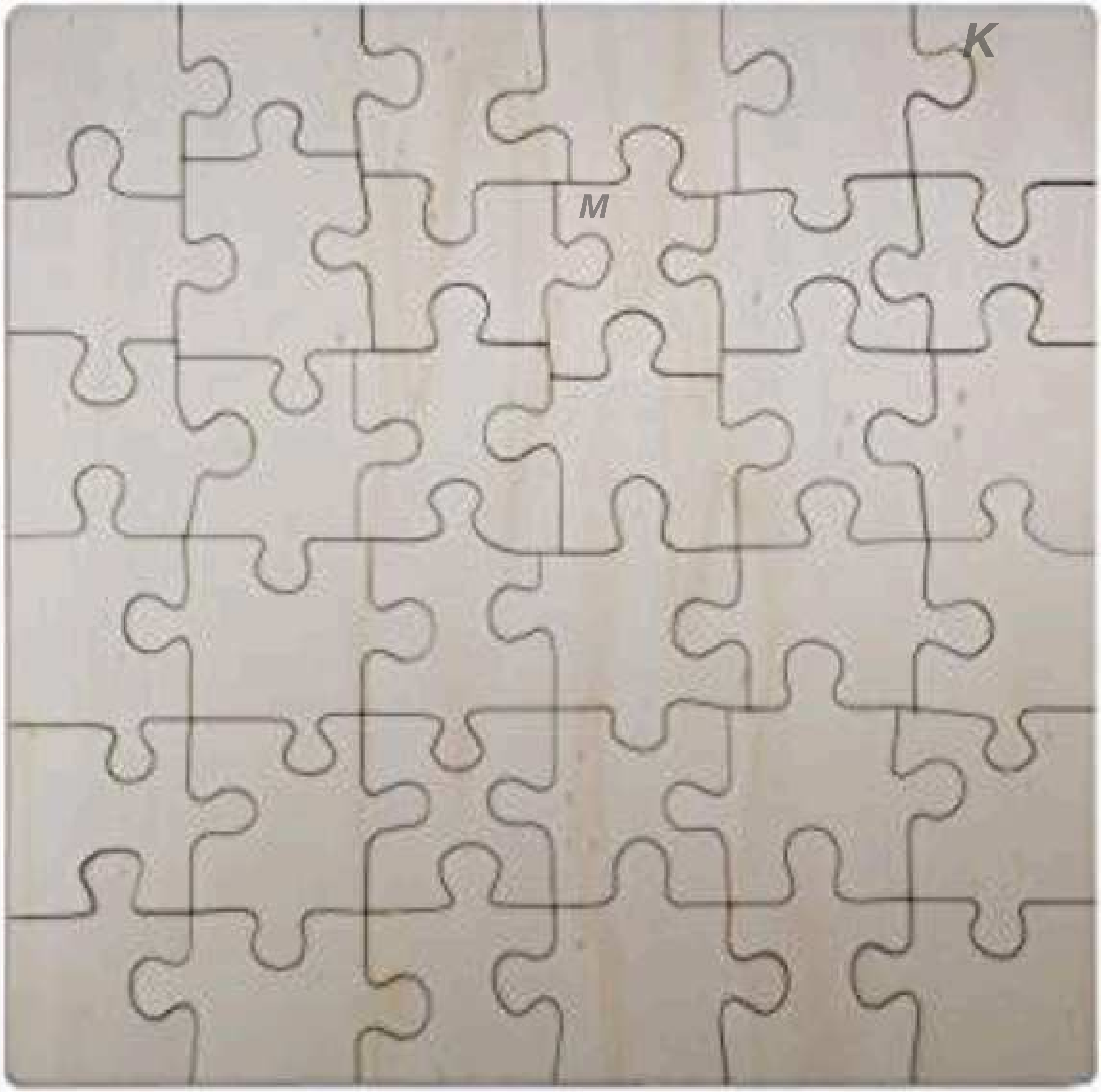
1. [recipiente, espacio] Que no contiene nada
"tengo el estómago vacío; mi vaso está vacío; los pantanos e
sequía"
2. [lugar público] Que no tiene gente o tiene muy poca.
"el teatro estaba vacío; las calles de la ciudad están vacías er

El término “vacío” en el lenguaje usual

(*) (Véase transparencia 138)

La estructura de la w-inclusión "dentro" del conjunto vacío


K


K
M

$\subset$

$K \sqsubset^{W} \varnothing$ (es decir, $K \subseteq W$)

$\sqsubset^{W}$

M

W (contenido del vacío)

$K \sqsubset^{W} \varnothing$ (es decir, $K \subseteq W$)

$\sqsubset^{W}$

Algo de vacío...

W (contenido del vacío)

Más vacío...

(Pues se verifica $(M \cap W) = M \subset K \subseteq W = (M \cup W)$ y $(M \neq K)$, es decir: $(K \sqsubset^{W} M)$).

$K \sqsubset^W \varnothing$ (es decir, $K \subseteq W$)

$\sqsubset^W$

Algo de vacío...

W (contenido del vacío)

casi...

¡ el vacío absoluto !

Más vacío...

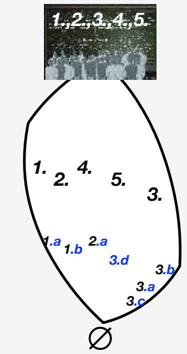
(Pues se verifica $(M \cap W) = M \subset K \subseteq W = (M \cup W)$ y $(M \neq K)$, es decir: $(K \sqsubset^W M)$).

Un ejemplo, (ni esperado ni deseado),
de “contenido del vacío”
en el lenguaje usual

esta charla
interpretada como
un Álgebra de Boole...

Álgebra de Boole
(P(CONTENIDO),⊆)

CONTENIDO={1.a,1.b, 2.a,...,5.a,...,5.g}



1.a⊆1, 1.b⊆1,...
2.a⊆2,... ,
5.a ⊆5...,5.g ⊆5
etc.

CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:

1.a **1.b**

- Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^w$", que aparece en los retículos distributivos (L,≤) como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^w g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^w \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
- El otro consiste en una versión en retículos distributivos (L,≤) del operador "Diferencia Simétrica △", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia △ y el orden de actividad $\sqsubseteq^w$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^w \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^w \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^w$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^w B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^w$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial (L,≤)), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^w B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^w A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^w B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^w$, $\sqcup^w$ con las imágenes directa g(A) e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \to F$.

2.a

3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:

3.a **3.b** **3.c** **3.d**

- El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el en mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
- El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
- El de Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^w$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos (L,≤). En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^w$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4.a **4.b**

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^w$ y los operadores $\sqcap^w$, $\sqcap^w$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

5.a **5.g**

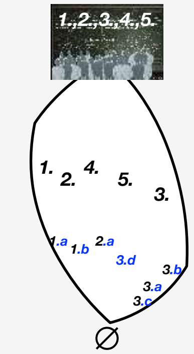
5

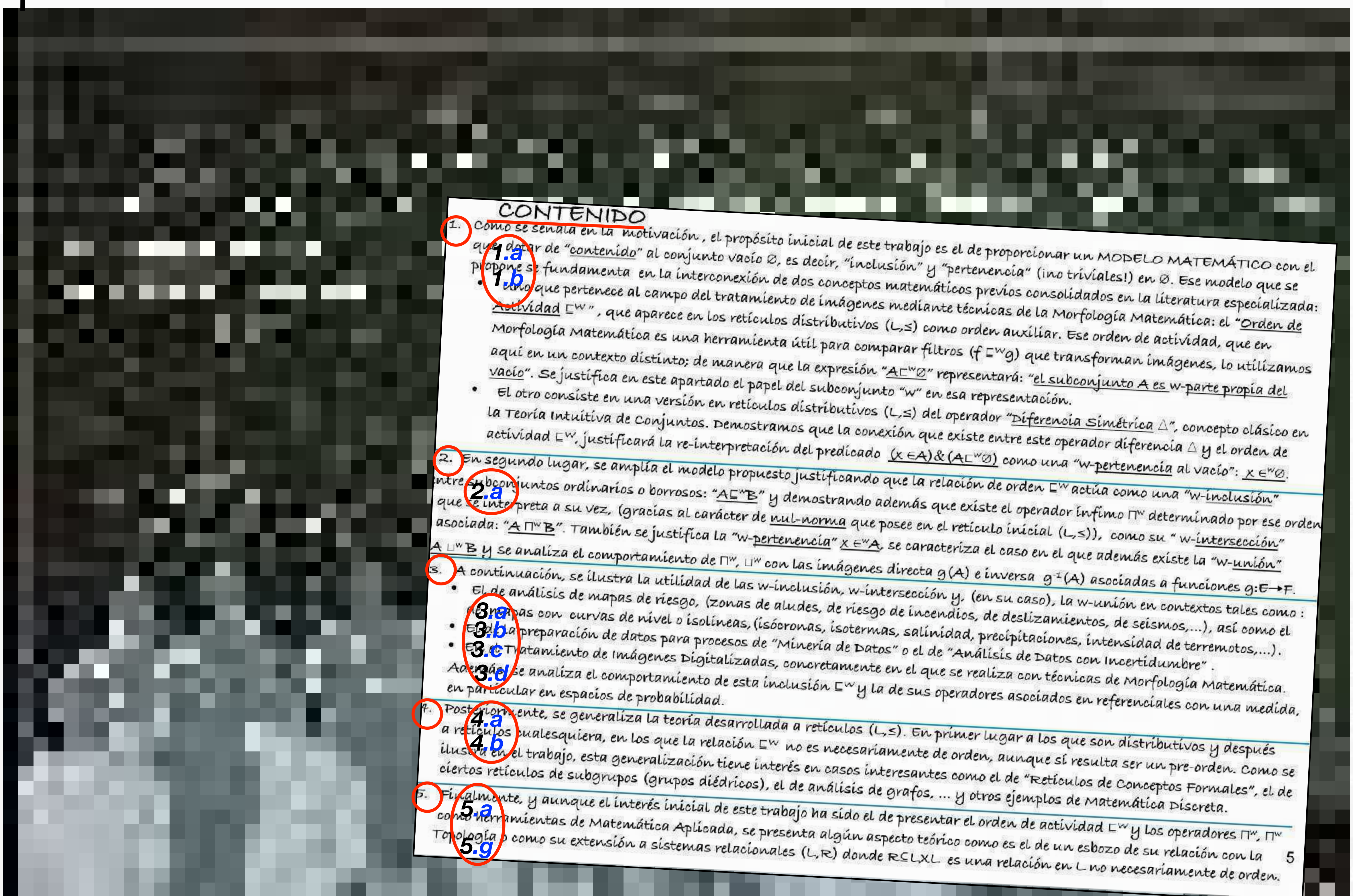
En lo que respecta a esta charla, cuando acabe dentro de aproximadamente una hora puede ocurrir...

Álgebra de Boole
($\mathcal{P}$(CONTENIDO),$\subseteq$)

CONTENIDO={1.a,1.b, 2.a,...,5.a,...,5.g}

1.a$\subseteq$1, 1.b$\subseteq$1,...
2.a$\subseteq$2,... ,
5.a $\subseteq$5...,5.g $\subseteq$5
etc.





CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^w$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^w g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^w \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^w$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^w \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^w \varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^w$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^w B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^w$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^w B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^w A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^w B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^w$, $\sqcup^w$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \to F$.

3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - El de Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^w$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^w$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^w$ y los operadores $\sqcap^w$, $\sqcap^w$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

5

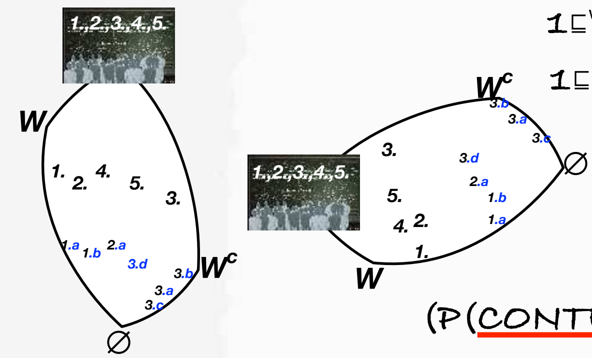
Opinión1:

esta charla

Álgebra de Boole
$(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}), \subseteq)$

$\text{CONTENIDO} = \{1.a, 1.b, 2.a, \ldots, 5.a, \ldots, 5.g\}$

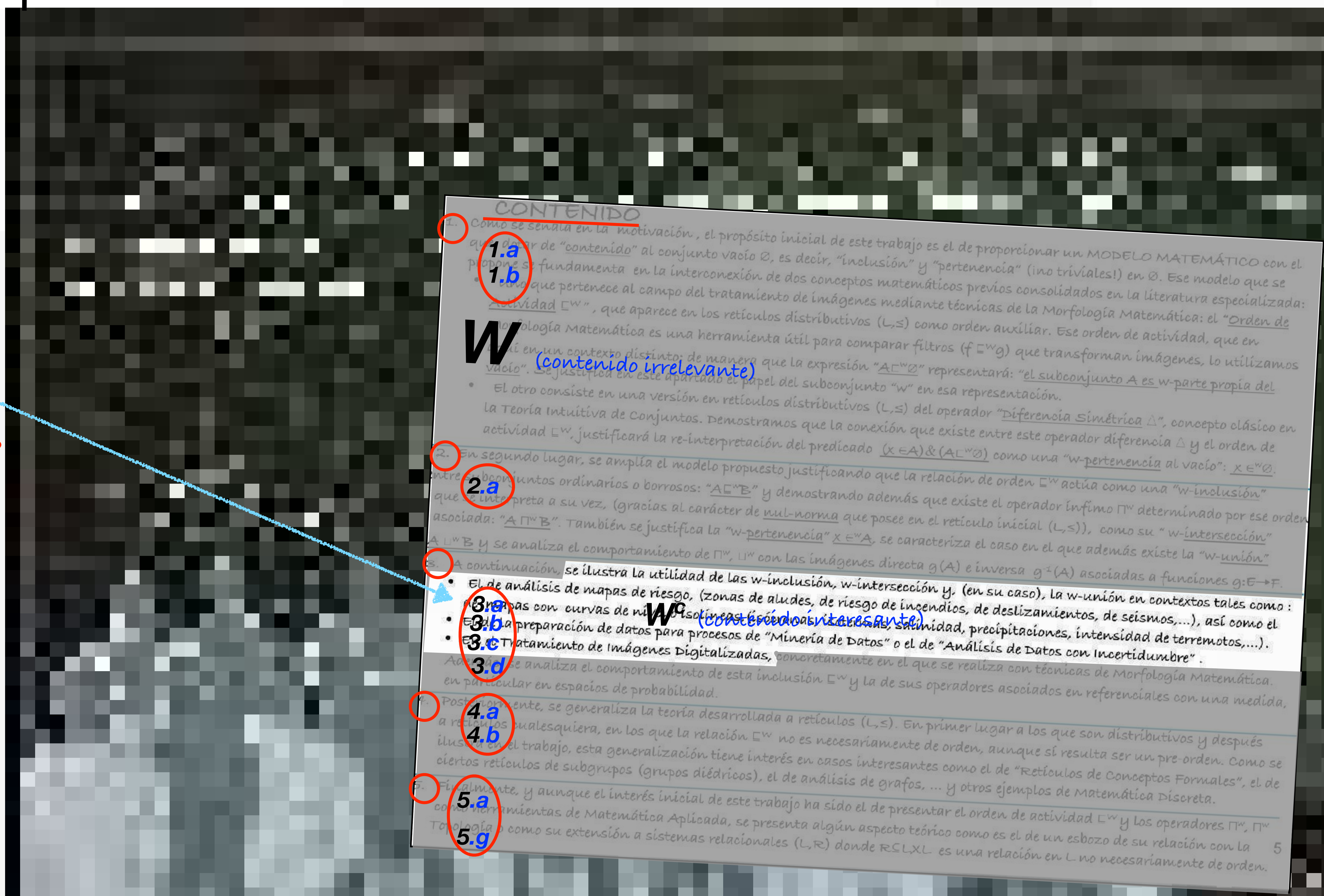
$1.a \subseteq 1,\ 1.b \subseteq 1, \ldots$
$2.a \subseteq 2, \ldots,$
$5.a \subseteq 5 \ldots, 5.g \subseteq 5$
etc.



$1 \sqsubseteq^w 1.a,\ 1 \sqsubseteq^w 1.b, \ldots$
$2 \sqsubseteq^w 2.a, \ldots,$
$1 \sqsubseteq^w 5.a, \ldots, 5 \sqsubseteq^w 5.g$

$(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}), \sqsubseteq^w)$

Opinión1.
el único
contenido
interesante:
en el apartado
3, las partes
3.a, 3.b y 3.c
El resto (W),
es irrelevante.



CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
- Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad ⊏ʷ", que aparece en los retículos distributivos (L,≤) como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros (f ⊏ʷg) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto: de manera que la expresión "A⊏ʷ∅" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
- El otro consiste en una versión en retículos distributivos (L,≤) del operador "Diferencia Simétrica △", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia △ y el orden de actividad ⊏ʷ, justificará la re-interpretación del predicado (x ∈A)&(A⊏ʷ∅) como una "w-pertenencia al vacío": x ∈ʷ∅.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden ⊏ʷ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "A⊏ʷB" y demostrando además que existe el operador ínfimo ⊓ʷ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial (L,≤)), como su "w-intersección" asociada: "A ⊓ʷB". También se justifica la "w-pertenencia" x ∈ʷA, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" A ⊔ʷB y se analiza el comportamiento de ⊓ʷ, ⊔ʷ con las imágenes directa g(A) e inversa g⁻¹(A) asociadas a funciones g:E→F.

3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
- El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas (isóbaras, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
- El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
- El del Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

Además se analiza el comportamiento de esta inclusión ⊏ʷ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos (L,≤). En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación ⊏ʷ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad ⊏ʷ y los operadores ⊓ʷ, ⊓ʷ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde R⊆L×L es una relación en L no necesariamente de orden. 5

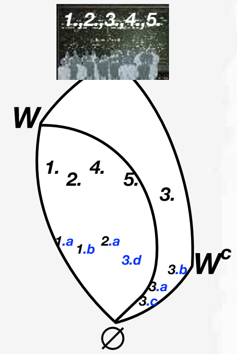
esta charla

opinión1:

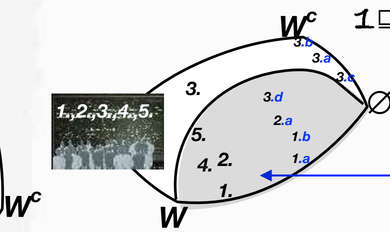
Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}),\subseteq)$

$\text{CONTENIDO}=\{1.a, 1.b, 2.a, \ldots, 5.a, \ldots, 5.g\}$

$1.a \subseteq 1$, $1.b \subseteq 1, \ldots$
$2.a \subseteq 2, \ldots$,
$5.a \subseteq 5 \ldots, 5.g \subseteq 5$
etc.

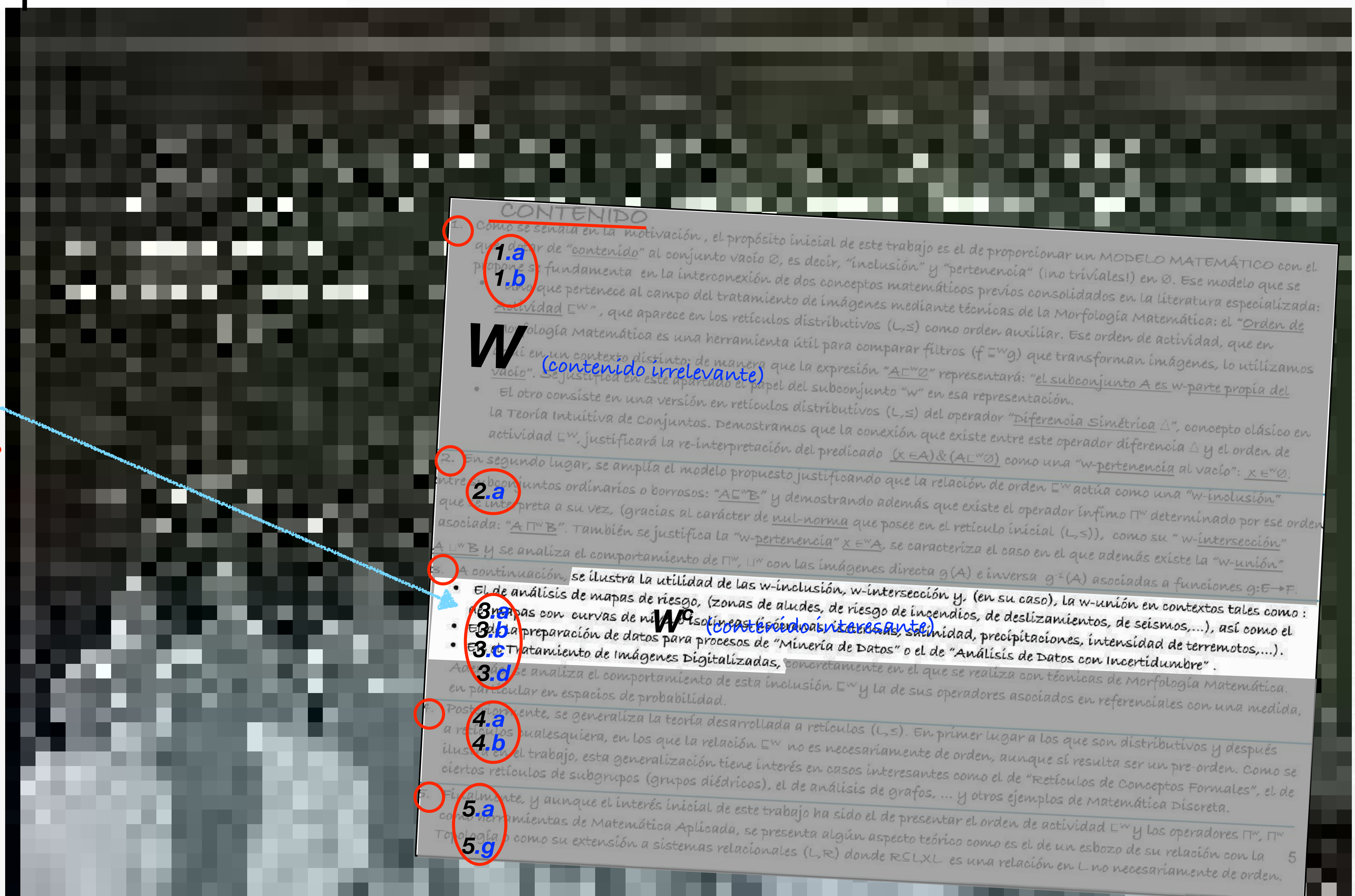


$1 \sqsubset^W 1.a$, $1 \sqsubset^W 1.b, \ldots$
$2 \sqsubset^W 2.a, \ldots$,
$1 \sqsubset^W 5.a, \ldots, 5 \sqsubset^W 5.g$



$(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}),\sqsubseteq^W)$

Opinión1.
el único
contenido
interesante:
en el apartado
3, las partes
3.a, 3.b y 3.c
El resto (W),
es irrelevante.



CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
- Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto: de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
- El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \to F$.

3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
- El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel isolíneas (isócronas, isoyetas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
- El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
- El del Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

Además se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

5

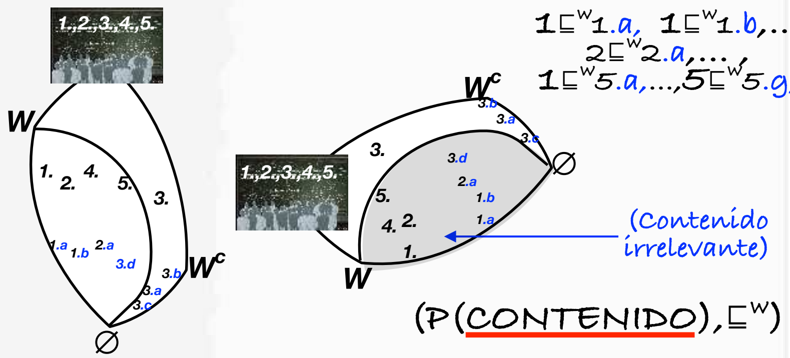
arla

Álgebra de Boole
$(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}),\subseteq)$

$\text{CONTENIDO}=\{1.a, 1.b, 2.a, \ldots, 5.a, \ldots, 5.g\}$

$1.a\subseteq 1$, $1.b\subseteq 1, \ldots$
$2.a\subseteq 2, \ldots$,
$5.a \subseteq 5 \ldots, 5.g \subseteq 5$
etc.

$1\sqsubset^W 1.a$, $1\sqsubset^W 1.b, \ldots$
$2\sqsubset^W 2.a, \ldots$,
$1\sqsubset^W 5.a, \ldots, 5\sqsubset^W 5.g$



$(\mathcal{P}(\text{CONTENIDO}),\sqsubset^W)$

Opinión1.
el único
contenido
interesante:
en el apartado
3, las partes
3.a, 3.b y 3.c
El resto (W),
es irrelevante.

CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
- Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubset^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f\sqsubset^W g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto: de manera que la expresión "$A\sqsubset^W\varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
- El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubset^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x\in A)\&(A\sqsubset^W\varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x\in^W\varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubset^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A\sqsubset^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A\sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x\in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A\sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E\to F$.

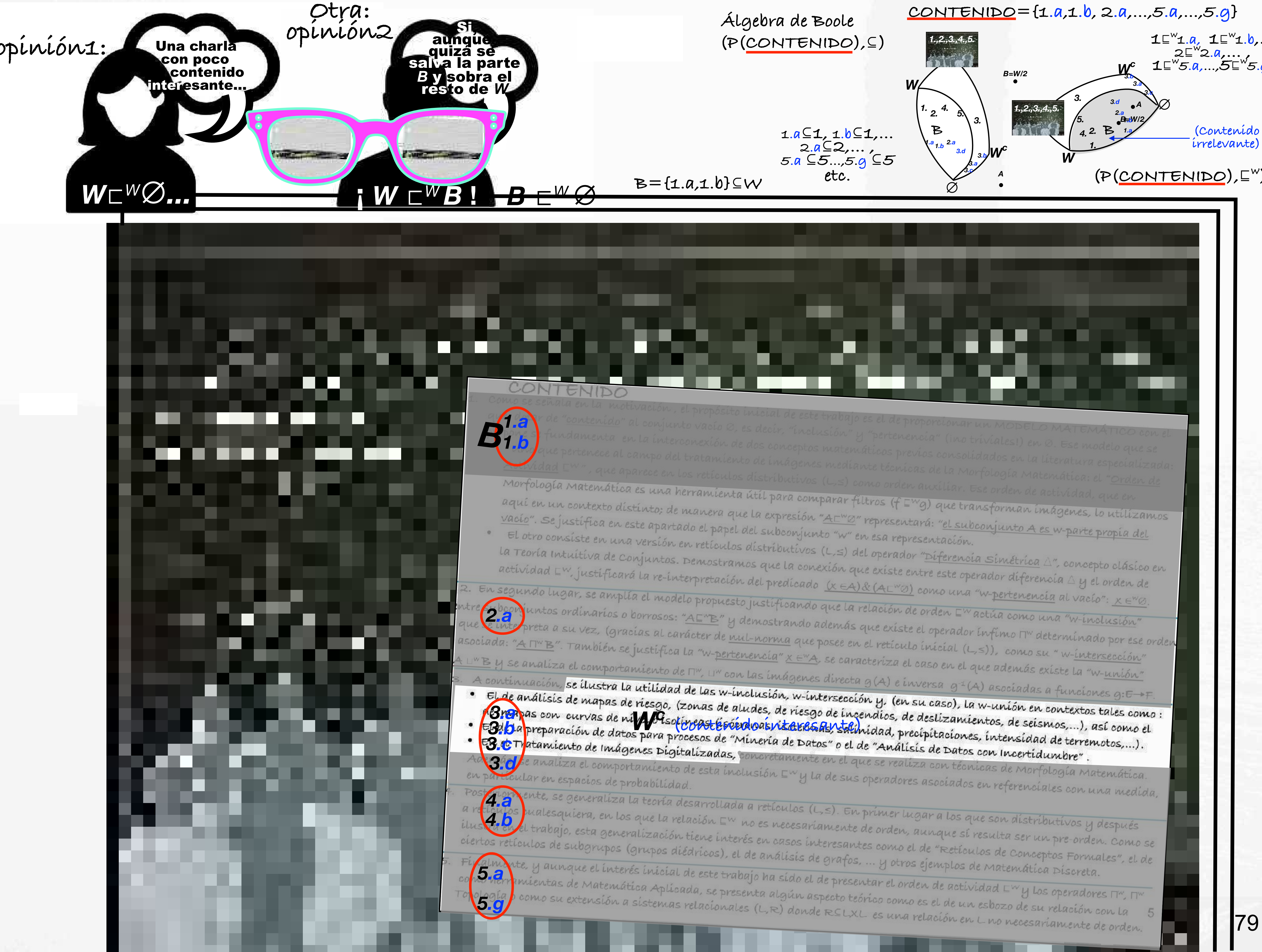
3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
- El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas ... salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
- El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
- El del Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

Además se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubset^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubset^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubset^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R\subseteq L\times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

5



CONTENIDO

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubset^W$", que aparece en los retículos distributivos (L,≤) como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubset^W g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos (L,≤) del operador "Diferencia Simétrica △", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia △ y el orden de actividad $\sqsubset^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia" al vacío": $x \in^W \emptyset$.
2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubset^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubset^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial (L,≤)), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa g(A) e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones g:E→F.
3. A continuación, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas (isóbaras, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - El de Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubset^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.
4. Posteriormente, se generaliza la teoría desarrollada a retículos (L,≤). En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubset^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.
5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubset^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde R⊆LxL es una relación en L no necesariamente de orden. 5

Otros ejemplos (¿más interesantes?) que muestran la utilidad de las "inclusiones" $\sqsubseteq^{w}$

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

Imagen digitalizada de una fina lámina de mineral

<u>Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,...(Mena y ganga).</u>

Imagen digitalizada de una fina lámina de mineral

Cuarzo (W)

Rubelita o turmalina roja (W^c)

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,… (Mena y ganga).

Imagen digitalizada de una fina lámina de mineral

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

Análisis de imágenes para control de calidad:

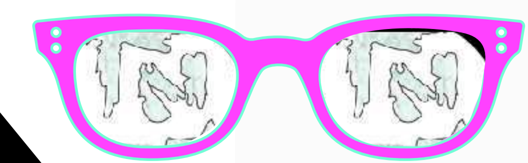
Mena de rubelita (W^c) sobre ganga (W) de cuarzo

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

Análisis de imágenes para control de calidad:

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

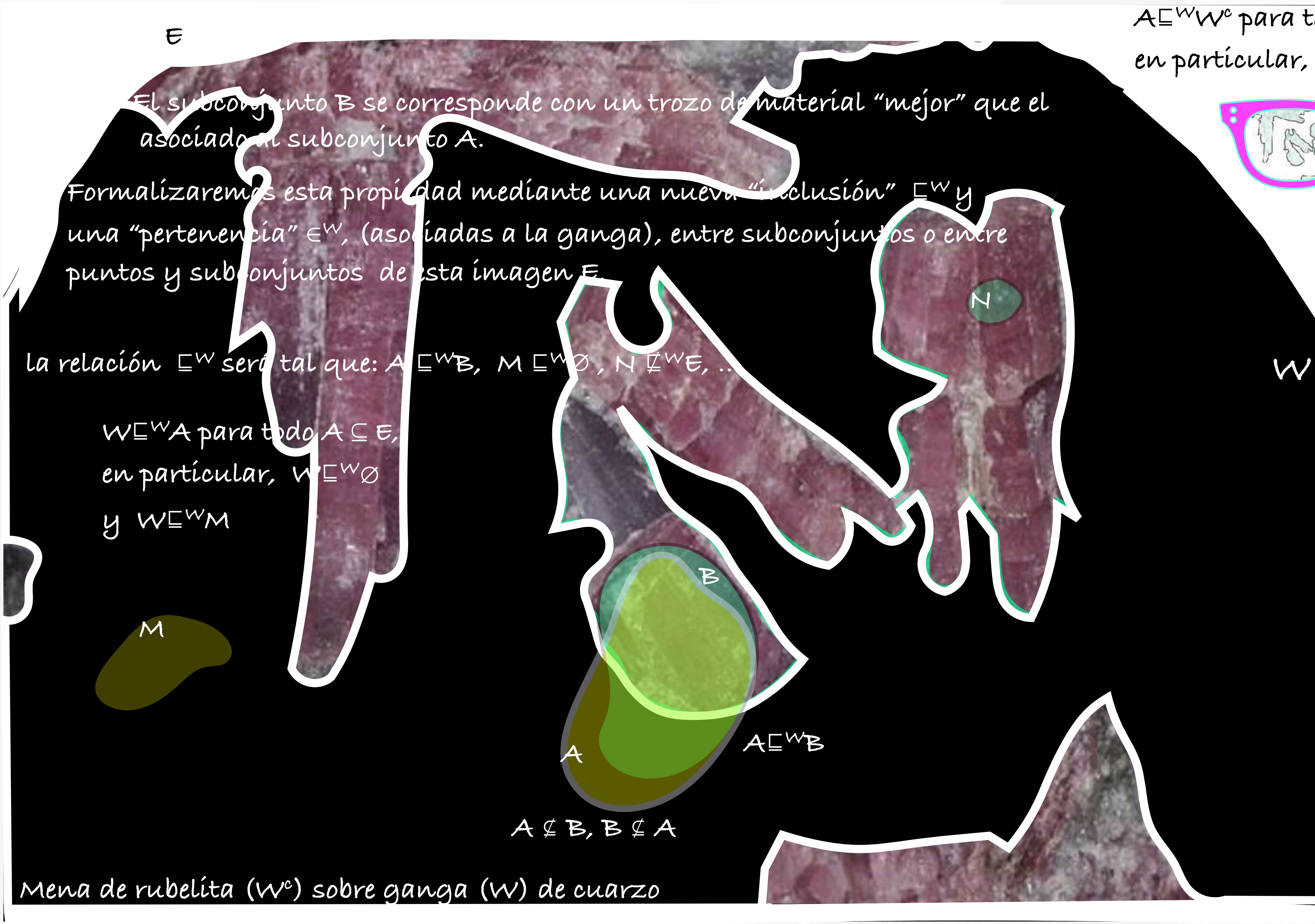
Análisis de imágenes para control de calidad:



Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

Análisis de imágenes para control de calidad:

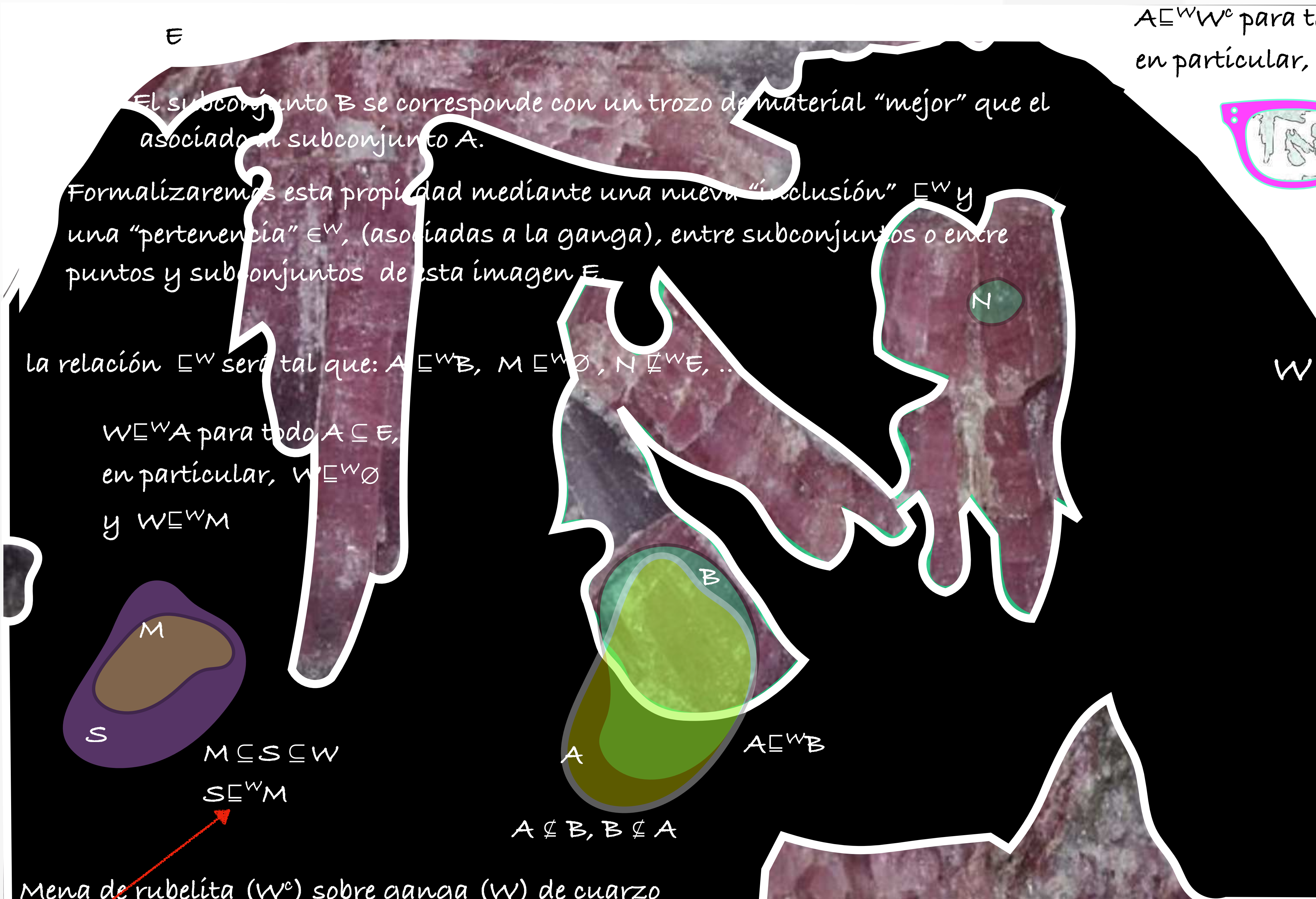
$A \sqsubseteq^W W^c$ para todo $A \subseteq E$,
en particular, $E \sqsubseteq^W W^c$

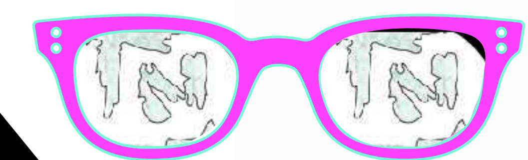


Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,... (Mena y ganga).

Análisis de imágenes para control de calidad:

$A \sqsubseteq^W W^c$ para todo $A \subseteq E$,
en particular, $E \sqsubseteq^W W^c$



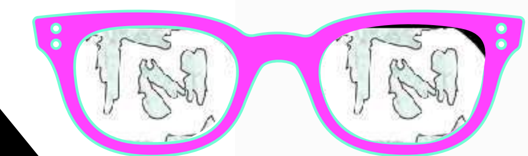


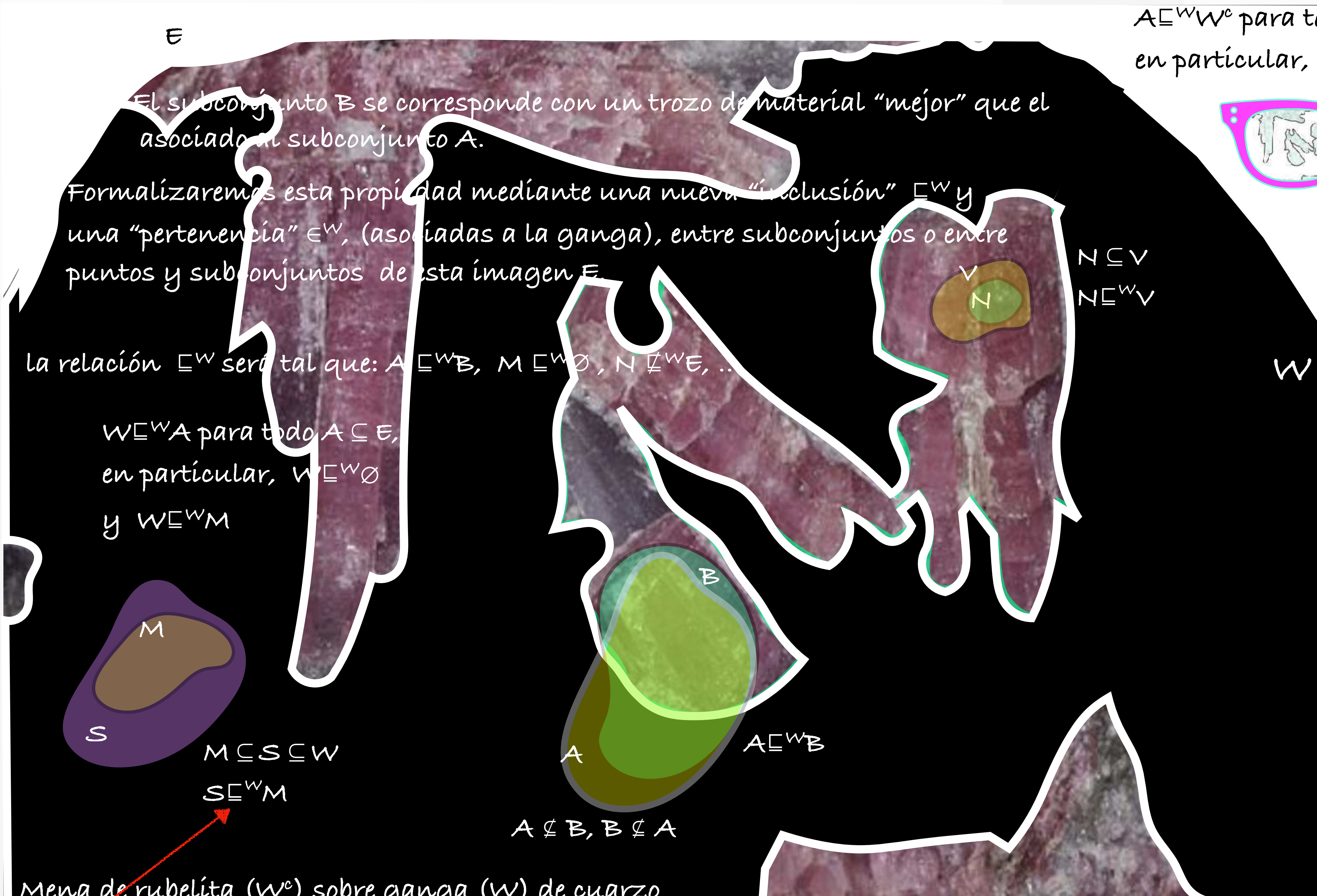
Interesa la mena y hay que desprenderse de la ganga. Este último proceso tiene un coste proporcional a su tamaño.

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en imágenes relacionadas con mineralogía, gemología, minería,… (Mena y ganga).

Análisis de imágenes para control de calidad:

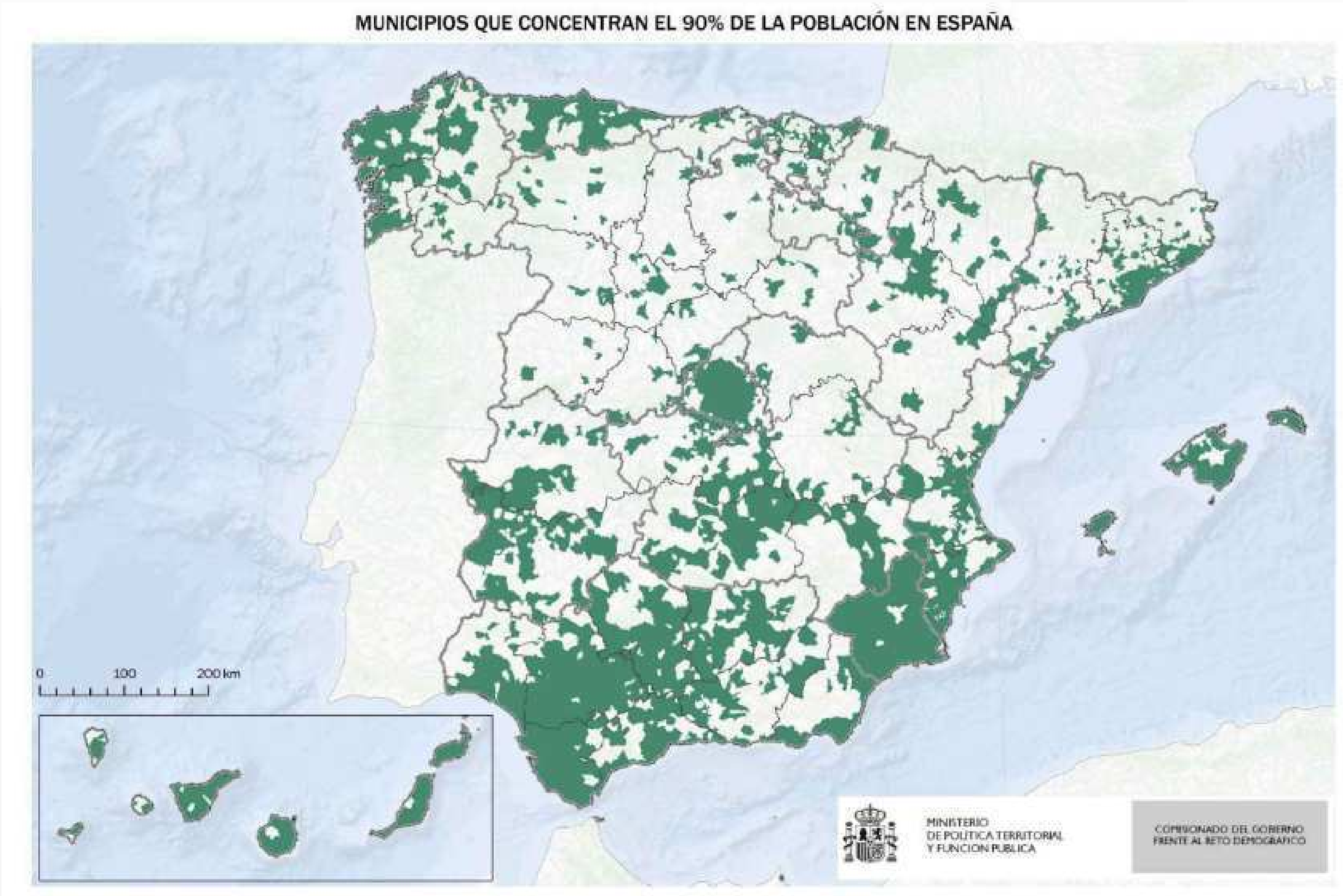
$A \sqsubseteq^W W^c$ para todo $A \subseteq E$,
en particular, $E \sqsubseteq^W W^c$





Interesa la mena y hay que desprenderse de la ganga. Este último proceso tiene un coste proporcional a su tamaño.

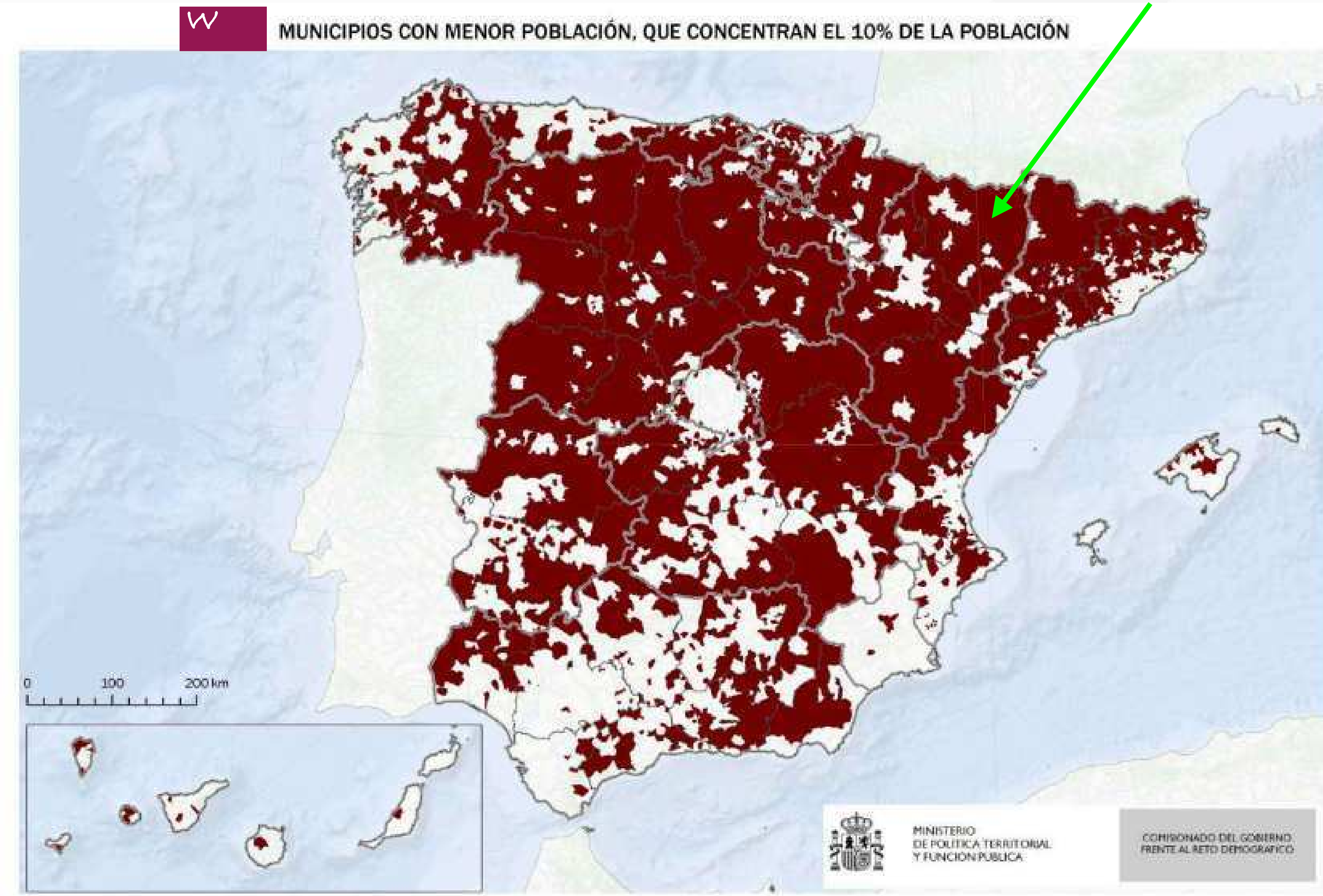
Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en el conjunto W de municipios "vacíos"



Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^{W}$ en el conjunto W de municipios "vacíos"

Su complementario:

España vacía
$EV = W \sqsubseteq^{W} \emptyset$



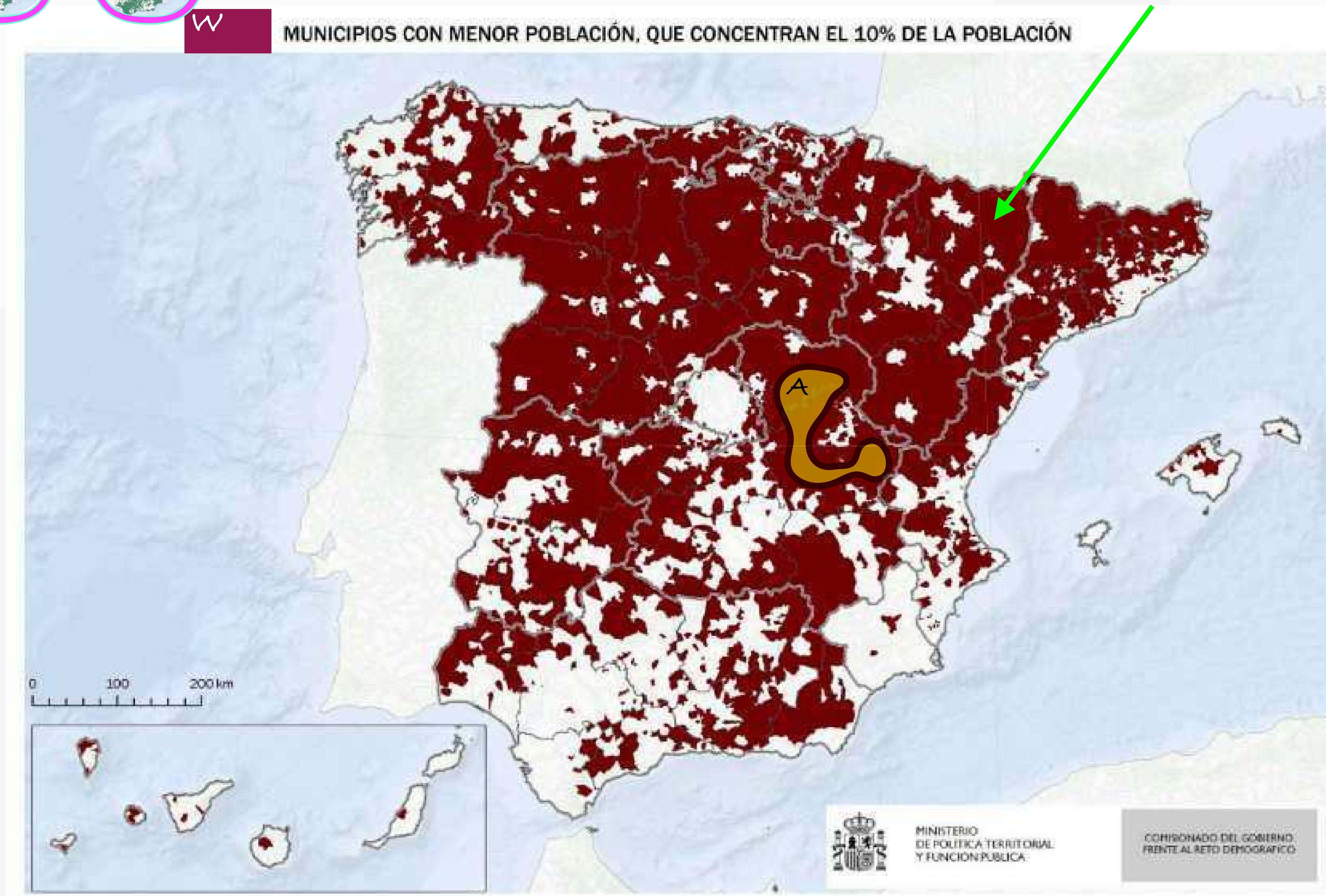
Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en el conjunto W de municipios "vacíos"

Su complementario:

$W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \varnothing$

España vacía

$EV = W \sqsubseteq^W \varnothing$



Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en el conjunto W de municipios "vacíos"

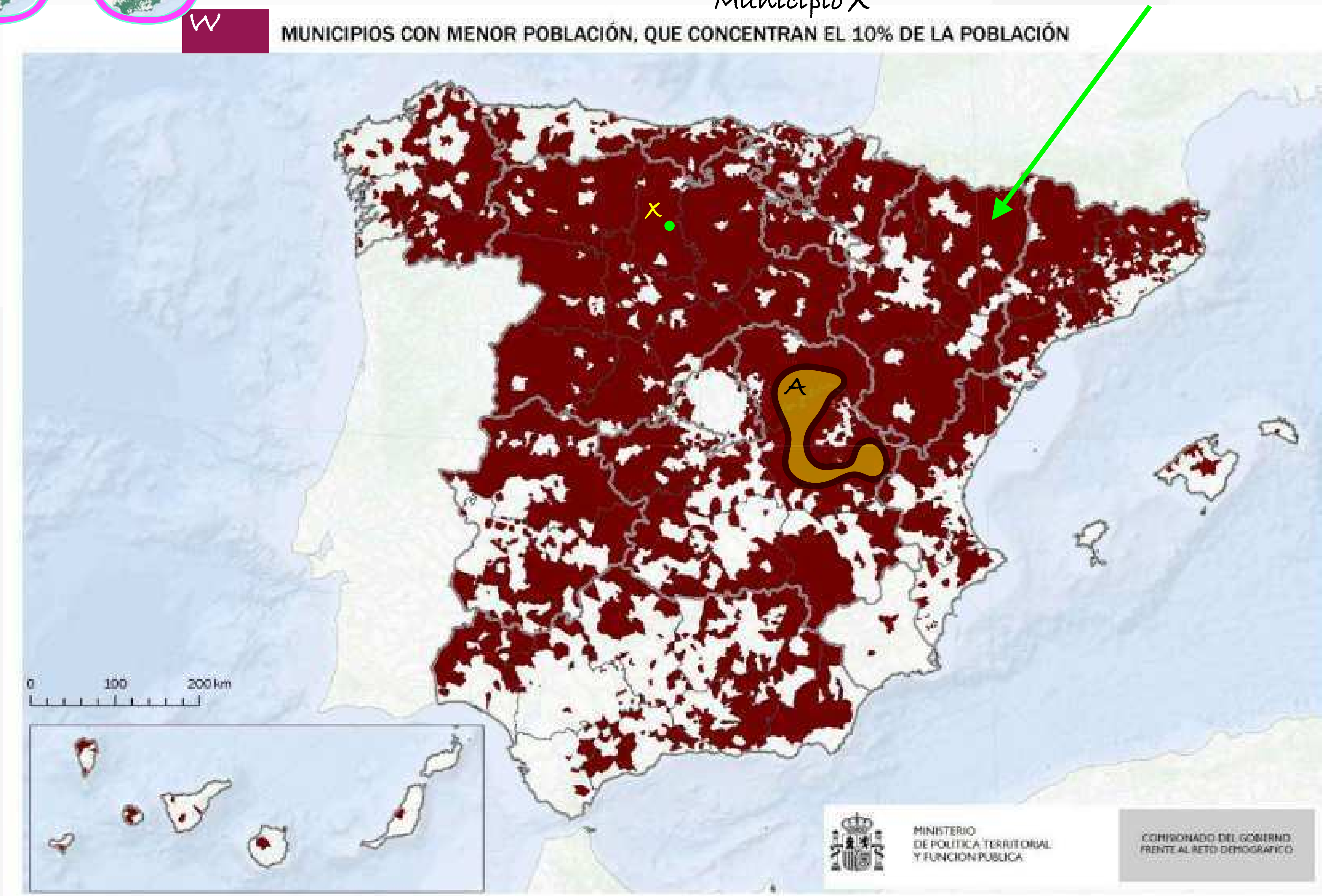
Su complementario:

$W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \emptyset$ $\quad x \in^W \emptyset$

España vacía

$EV = W \sqsubseteq^W \emptyset$

Municipio x



Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en el conjunto W de municipios "vacíos"

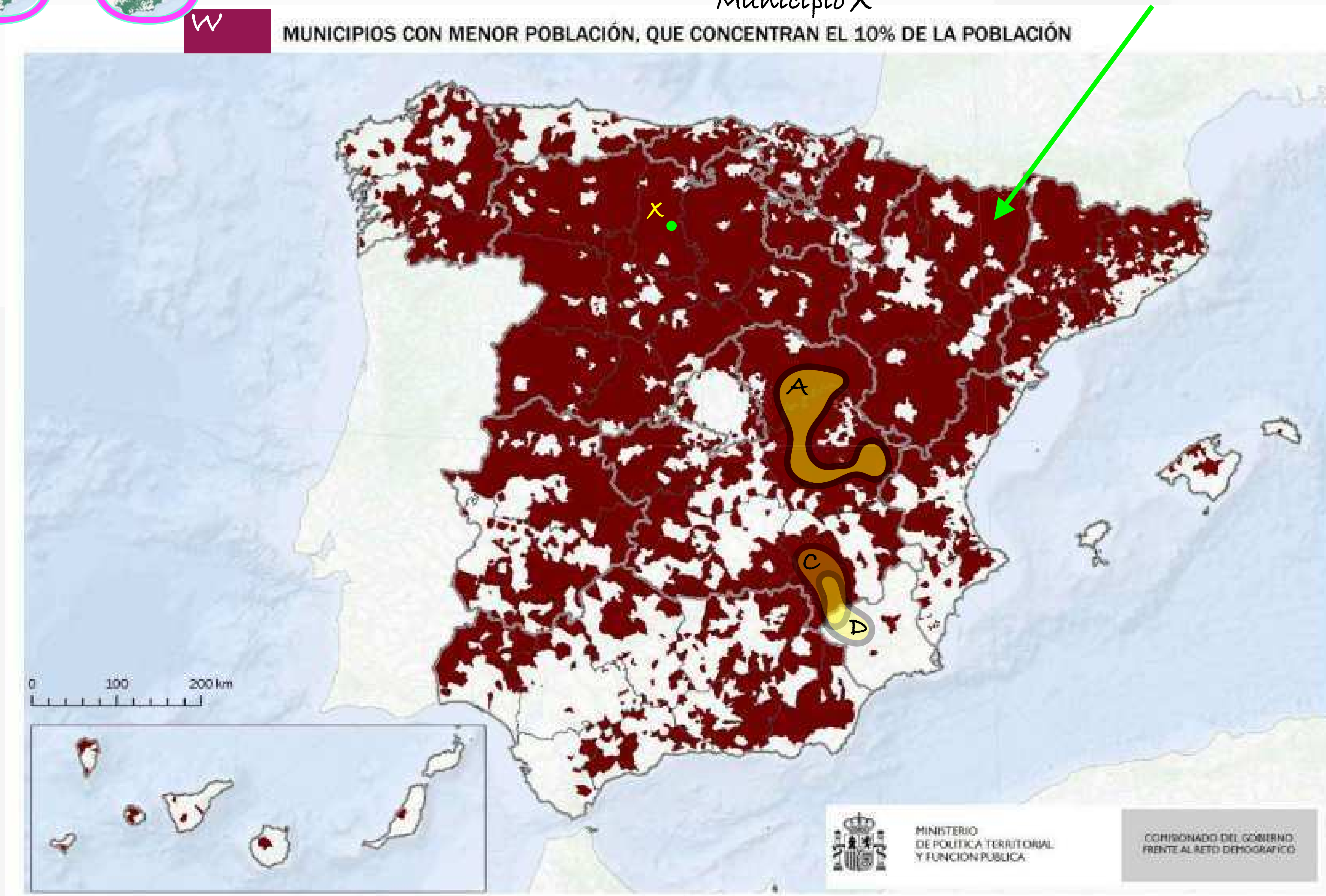
Su complementario:

$W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \emptyset$ $\quad x \in^W \emptyset$ $\quad W \sqsubseteq^W C \sqsubseteq^W D$

España vacía

$EV = W \sqsubseteq^W \emptyset$

Municipio x

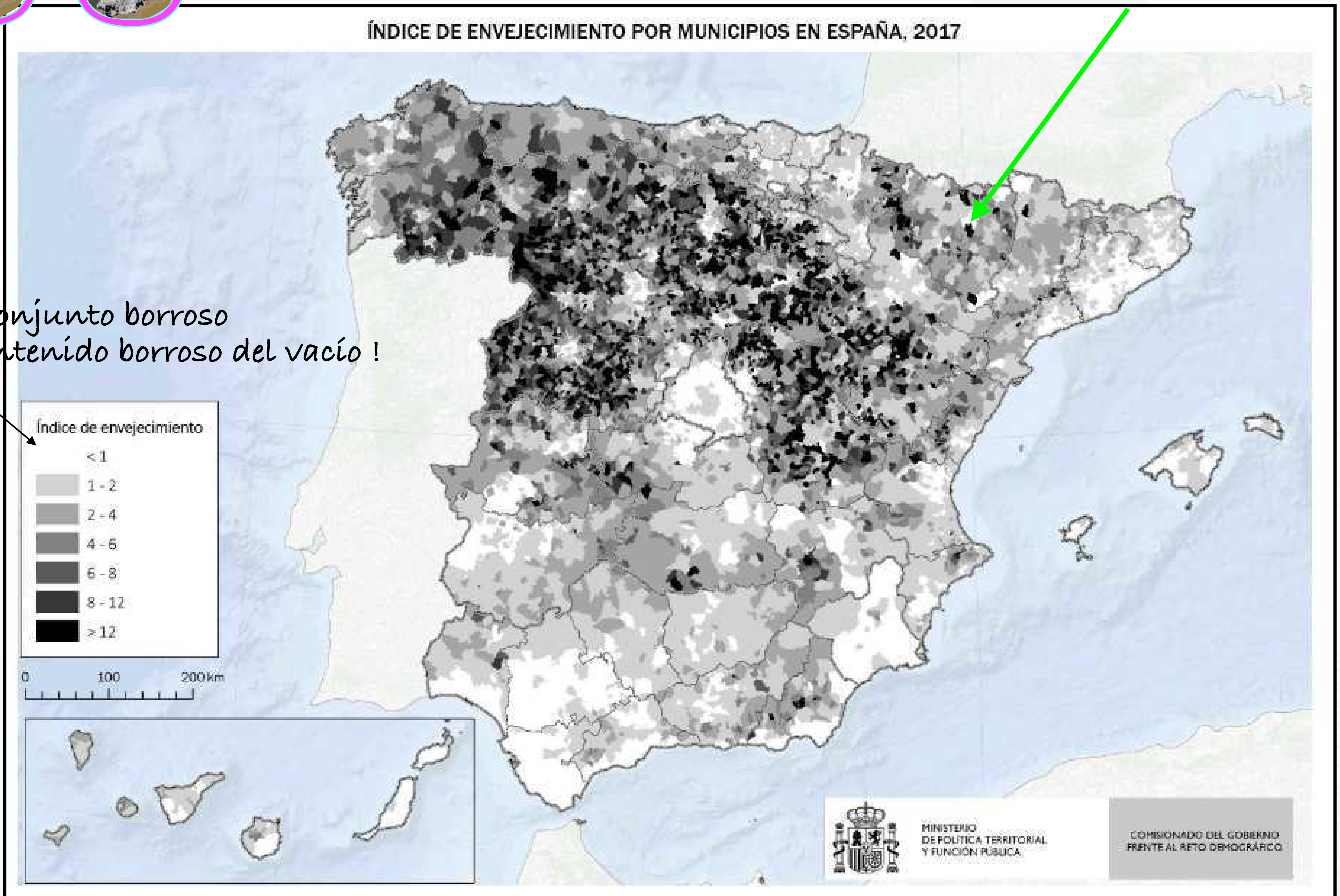


Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en el conjunto W de municipios "vacíos"

Su complementario:

¿Futura España vacía?

$FEV = W \sqsubseteq^W \emptyset$



W subconjunto borroso

¡ Contenido borroso del vacío !

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en la gestión de tablas de datos con valores ausentes.

DATOS DE CLIENTES

	Nombre completo	Correo electrónico	Teléfono móvil	Fecha de nacimiento	Edad	Sexo	Deportes practicados	Frecuencia de COMPRA	Nivel de práctica	Batidos preferidos
8	Adriana Martínez	adrianamartínez@gmail.com	34-60466652		37	F	Maratón	Diaria	Amateur	Varios
9	Aitor Vázquez				49	M	Fútbol	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
10	Aleix Sáez	aleixsáez@gmail.com	34-60467028	07/02/1996	22	M	Fútbol	Cada 2 días	Ocasional	Varios
11	Alejandra González	alejandragonzález@gmail.com		18/12/1993		M		Cada 4 días	Amateur	Varios
12	Alex Suarez	alexsuarez@gmail.com	34-60466844	21/01/1985	33	M	Pesas	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
13	Álvaro López	álvarolópez@gmail.com	34-60466644	18/12/2000	17	M	Tenis	Semanal	Ocasional	Varios
14	Ana Peña	anapeña@gmail.com	34-60466604	16/12/1986	31	F	Fútbol	Diaria	Amateur	Varios
15	Ángela Molina		34-60466852	21/01/1988		F	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
16	Antonia Torres	antoniatorres@gmail.com			54	F	Fútbol		Ocasional	Varios
17	Biel Lorenzo	biellorenzo@gmail.com			34	M	Tenis	Semanal	Amateur	Isotónico
18	Carlos Álvarez	carlosálvarez@gmail.com	34-60466732	01/01/1996		M	Fútbol			De proteínas pre-ejercicio
19	Cesar Velasco		34-60467036		29	M	Maratón	Cada 2 días		
20	Christian Pastor	christianpastor@gmail.com	34-60467004	04/02/1978	40	M	Fútbol	Cada 2 días	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
21	Daniela García	danielagarcía@gmail.com	34-60466612	17/12/1966	51	F		Diaria	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
22	David Sánchez	davidsánchez@gmail.com	34-60466660	02/02/1970	48	M	Golf	Semanal	Ocasional	Varios
23	Diego Martin	diegomartin@gmail.com	34-60466684	26/12/1980	37	M	Fútbol	Diaria	Amateur	Energético
24	Enriqueta Santana	enriquetasantana@gmail.com	34-60466956	29/01/1989	29		Fútbol	Diaria	Profesional	Energético
25	Felipe Pirela	felipepirela@gmail.com	34-60466596	15/12/1982		M	Fútbol	Semanal	Ocasional	Varios
26			34-60466924	25/01/1996	22		Fútbol	Diaria	Amateur	
27	Gabriel Rubio	gabrielrubio@gmail.com	34-60466900	22/01/1978	40	M	Pesas	Diaria	Profesional	Isotónico
28	Gonzalo Ortega	gonzaloortega@gmail.com	34-60466868		37	M	Tenis	Semanal		Varios
29	Guillem Carmona		34-60466988		48	M	Golf	Diaria		Varios
30	Guillermo Castro	guillermocastro@gmail.com	34-60466884	20/01/1977	41	M	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
31	Héctor Blanco	héctorblanco@gmail.com	34-60466836	14/01/1997		M	Tenis	Cada 4 días	Ocasional	Varios
32	Hugo Fernández	hugofernández@gmail.com	34-60466636	18/12/1993	24	M	Fútbol	Diaria	Amateur	
33	Iker Díaz	ikerdíaz@gmail.com	34-60466716	30/12/1999	18	M	Maratón	Diaria	Profesional	Energético

Con más de dos campos sin datos: "registros prácticamente inútiles" y seguramente productores de "ruido"
(Los identificamos con "contenido" de $\emptyset$)

Referencial de registros $E=\{8, 9, 10, \ldots, 32, 33\}$.

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en la gestión de tablas de datos con valores ausentes.

DATOS DE CLIENTES

	Nombre completo	Correo electrónico	Teléfono móvil	Fecha de nacimiento	Edad	Sexo	Deportes practicados	Frecuencia de COMPRA	Nivel de práctica	Batidos preferidos
8	Adriana Martínez	adrianamartínez@gmail.com	34-60466652		37	F	Maratón	Diaria	Amateur	Varios
9	Aitor Vázquez				49	M	Fútbol	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
10	Aleix Sáez	aleixsáez@gmail.com	34-60467028	07/02/1996	22	M	Fútbol	Cada 2 días	Ocasional	Varios
11	Alejandra González	alejandragonzález@gmail.com		18/12/1993		M		Cada 4 días	Amateur	Varios
12	Alex Suarez	alexsuarez@gmail.com	34-60466844	21/01/1985	33	M	Pesas	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
13	Álvaro López	álvarolópez@gmail.com	34-60466644	18/12/2000	17	M	Tenis	Semanal	Ocasional	Varios
14	Ana Peña	anapeña@gmail.com	34-60466604	16/12/1986	31	F	Fútbol	Diaria	Amateur	Varios
15	Ángela Molina		34-60466852	21/01/1988		F	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
16	Antonia Torres	antoniatorres@gmail.com			54	F	Fútbol		Ocasional	Varios
17	Biel Lorenzo	biellorenzo@gmail.com			34	M	Tenis	Semanal	Amateur	Isotónico
18	Carlos Álvarez	carlosálvarez@gmail.com	34-60466732	01/01/1996		M	Fútbol			De proteínas pre-ejercicio
19	Cesar Velasco		34-60467036		29	M	Maratón	Cada 2 días		
20	Christian Pastor	christianpastor@gmail.com	34-60467004	04/02/1978	40	M	Fútbol	Cada 2 días	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
21	Daniela García	danielagarcía@gmail.com	34-60466612	17/12/1966	51	F		Diaria	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
22	David Sánchez	davidsánchez@gmail.com	34-60466660	02/02/1970	48	M	Golf	Semanal	Ocasional	Varios
23	Diego Martin	diegomartin@gmail.com	34-60466684	26/12/1980	37	M	Fútbol	Diaria	Amateur	Energético
24	Enriqueta Santana	enriquetasantana@gmail.com	34-60466956	29/01/1989	29		Fútbol	Diaria	Profesional	Energético
25	Felipe Pirela	felipepirela@gmail.com	34-60466596	15/12/1982		M	Fútbol	Semanal	Ocasional	Varios
26			34-60466924	25/01/1996	22		Fútbol	Diaria	Amateur	
27	Gabriel Rubio	gabrielrubio@gmail.com	34-60466900	22/01/1978	40	M	Pesas	Diaria	Profesional	Isotónico
28	Gonzalo Ortega	gonzaloortega@gmail.com	34-60466868		37	M	Tenis	Semanal		Varios
29	Guillem Carmona		34-60466988		48	M	Golf	Diaria		Varios
30	Guillermo Castro	guillermocastro@gmail.com	34-60466884	20/01/1977	41	M	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
31	Héctor Blanco	héctorblanco@gmail.com	34-60466836	14/01/1997		M	Tenis	Cada 4 días	Ocasional	Varios
32	Hugo Fernández	hugofernández@gmail.com	34-60466636	18/12/1993	24	M	Fútbol	Diaria	Amateur	
33	Iker Díaz	ikerdíaz@gmail.com	34-60466716	30/12/1999	18	M	Maratón	Diaria	Profesional	Energético

Con más de dos campos sin datos: "registros prácticamente inútiles" y seguramente productores de "ruido"
(Los identificamos con "contenido" de $\emptyset$)

Referencial de registros $E=\{8, 9, 10, \ldots, 32, 33\}$.

$W=\{9, 11, 16, 19, 26, 29\}$ Subconjunto (nítido) de registros con tres o más ítems ausentes. (De "peor calidad").

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en la gestión de tablas de datos con valores ausentes.

DATOS DE CLIENTES

	Nombre completo	Correo electrónico	Teléfono móvil	Fecha de nacimiento	Edad	Sexo	Deportes practicados	Frecuencia de COMPRA	Nivel de práctica	Batidos preferidos
8	Adriana Martínez	adrianamartínez@gmail.com	34-60466652		37	F	Maratón	Diaria	Amateur	Varios
9	Aitor Vázquez				49	M	Fútbol	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
10	Aleix Sáez	aleixsáez@gmail.com	34-60467028	07/02/1996	22	M	Fútbol	Cada 2 días	Ocasional	Varios
11	Alejandra González	alejandragonzález@gmail.com		18/12/1993		M		Cada 4 días	Amateur	Varios
12	Alex Suarez	alexsuarez@gmail.com	34-60466844	21/01/1985	33	M	Pesas	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
13	Álvaro López	álvarolópez@gmail.com	34-60466644	18/12/2000	17	M	Tenis	Semanal	Ocasional	Varios
14	Ana Peña	anapeña@gmail.com	34-60466604	16/12/1986	31	F	Fútbol	Diaria	Amateur	Varios
15	Ángela Molina		34-60466852	21/01/1988		F	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
16	Antonia Torres	antoniatorres@gmail.com			54	F	Fútbol		Ocasional	Varios
17	Biel Lorenzo	biellorenzo@gmail.com			34	M	Tenis	Semanal	Amateur	Isotónico
18	Carlos Álvarez	carlosálvarez@gmail.com	34-60466732	01/01/1996		M	Fútbol			De proteínas pre-ejercicio
19	Cesar Velasco		34-60467036		29	M	Maratón	Cada 2 días		
20	Christian Pastor	christianpastor@gmail.com	34-60467004	04/02/1978	40	M	Fútbol	Cada 2 días	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
21	Daniela García	danielagarcía@gmail.com	34-60466612	17/12/1966	51	F		Diaria	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
22	David Sánchez	davidsánchez@gmail.com	34-60466660	02/02/1970	48	M	Golf	Semanal	Ocasional	Varios
23	Diego Martin	diegomartin@gmail.com	34-60466684	26/12/1980	37	M	Fútbol	Diaria	Amateur	Energético
24	Enriqueta Santana	enriquetasantana@gmail.com	34-60466956	29/01/1989	29		Fútbol	Diaria	Profesional	Energético
25	Felipe Pirela	felipepirela@gmail.com	34-60466596	15/12/1982		M	Fútbol	Semanal	Ocasional	Varios
26			34-60466924	25/01/1996	22		Fútbol	Diaria	Amateur	
27	Gabriel Rubio	gabrielrubio@gmail.com	34-60466900	22/01/1978	40	M	Pesas	Diaria	Profesional	Isotónico
28	Gonzalo Ortega	gonzaloortega@gmail.com	34-60466868		37	M	Tenis	Semanal		Varios
29	Guillem Carmona		34-60466988		48	M	Golf	Diaria		Varios
30	Guillermo Castro	guillermocastro@gmail.com	34-60466884	20/01/1977	41	M	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
31	Héctor Blanco	héctorblanco@gmail.com	34-60466836	14/01/1997		M	Tenis	Cada 4 días	Ocasional	Varios
32	Hugo Fernández	hugofernández@gmail.com	34-60466636	18/12/1993	24	M	Fútbol	Diaria	Amateur	
33	Iker Díaz	ikerdíaz@gmail.com	34-60466716	30/12/1999	18	M	Maratón	Diaria	Profesional	Energético

Con más de dos campos sin datos: "registros prácticamente inútiles" y seguramente productores de "ruido" (Los identificamos con "contenido" de $\varnothing$)

Referencial de registros $E=\{8, 9, 10, \ldots, 32, 33\}$.

$W=\{9, 11, 16, 19, 26, 29\}$ Subconjunto (nítido) de registros con tres o más ítems ausentes. (De "peor calidad").

Actividad: Análisis de datos utilizando subconjuntos, (nítidos o borrosos), A, B,… etc de E.

La expresión $A \sqsubseteq^W B$, representará que B es un ejemplo de "mejor calidad" que A. (De mayor fiabilidad).

Por ejemplo: $\{9,10,11,16, 14\} \sqsubseteq^W \{10,11,14,33\}$, $\{26,29\} \sqsubseteq^W \varnothing$.

Ejemplo. Una interpretación de $\sqsubseteq^W$ en la gestión de tablas de datos con valores ausentes.

DATOS DE CLIENTES

	Nombre completo	Correo electrónico	Teléfono móvil	Fecha de nacimiento	Edad	Sexo	Deportes practicados	Frecuencia de COMPRA	Nivel de práctica	Batidos preferidos
8	Adriana Martínez	adrianamartínez@gmail.com	34-60466652		37	F	Maratón	Diaria	Amateur	Varios
9	Aitor Vázquez				49	M	Fútbol	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
10	Aleix Sáez	aleixsáez@gmail.com	34-60467028	07/02/1996	22	M	Fútbol	Cada 2 días	Ocasional	Varios
11	Alejandra González	alejandragonzález@gmail.com		18/12/1993		M		Cada 4 días	Amateur	Varios
12	Alex Suarez	alexsuarez@gmail.com	34-60466844	21/01/1985	33	M	Pesas	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
13	Álvaro López	álvarolópez@gmail.com	34-60466644	18/12/2000	17	M	Tenis	Semanal	Ocasional	Varios
14	Ana Peña	anapeña@gmail.com	34-60466604	16/12/1986	31	F	Fútbol	Diaria	Amateur	Varios
15	Ángela Molina		34-60466852	21/01/1988		F	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
16	Antonia Torres	antoniatorres@gmail.com			54	F	Fútbol		Ocasional	Varios
17	Biel Lorenzo	biellorenzo@gmail.com			34	M	Tenis	Semanal	Amateur	Isotónico
18	Carlos Álvarez	carlosálvarez@gmail.com	34-60466732	01/01/1996		M	Fútbol			De proteínas pre-ejercicio
19	Cesar Velasco		34-60467036		29	M	Maratón	Cada 2 días		
20	Christian Pastor	christianpastor@gmail.com	34-60467004	04/02/1978	40	M	Fútbol	Cada 2 días	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
21	Daniela García	danielagarcía@gmail.com	34-60466612	17/12/1966	51	F		Diaria	Amateur	De proteínas pre-ejercicio
22	David Sánchez	davidsánchez@gmail.com	34-60466660	02/02/1970	48	M	Golf	Semanal	Ocasional	Varios
23	Diego Martin	diegomartin@gmail.com	34-60466684	26/12/1980	37	M	Fútbol	Diaria	Amateur	Energético
24	Enriqueta Santana	enriquetasantana@gmail.com	34-60466956	29/01/1989	29		Fútbol	Diaria	Profesional	Energético
25	Felipe Pirela	felipepirela@gmail.com	34-60466596	15/12/1982		M	Fútbol	Semanal	Ocasional	Varios
26			34-60466924	25/01/1996	22		Fútbol	Diaria	Amateur	
27	Gabriel Rubio	gabrielrubio@gmail.com	34-60466900	22/01/1978	40	M	Pesas	Diaria	Profesional	Isotónico
28	Gonzalo Ortega	gonzaloortega@gmail.com	34-60466868		37	M	Tenis	Semanal		Varios
29	Guillem Carmona		34-60466988		48	M	Golf	Diaria		Varios
30	Guillermo Castro	guillermocastro@gmail.com	34-60466884	20/01/1977	41	M	Golf	Diaria	Profesional	De proteínas pre-ejercicio
31	Héctor Blanco	héctorblanco@gmail.com	34-60466836	14/01/1997		M	Tenis	Cada 4 días	Ocasional	Varios
32	Hugo Fernández	hugofernández@gmail.com	34-60466636	18/12/1993	24	M	Fútbol	Diaria	Amateur	
33	Iker Díaz	ikerdíaz@gmail.com	34-60466716	30/12/1999	18	M	Maratón	Diaria	Profesional	Energético

Con más de dos campos sin datos: "registros prácticamente inútiles" y seguramente productores de "ruido" (Los identificamos con "contenido" de $\varnothing$)

Referencial de registros $E=\{8, 9, 10, \ldots, 32, 33\}$.

$W=\{9, 11, 16, 19, 26, 29\}$ Subconjunto (nítido) de registros con tres o más ítems ausentes. (De "peor calidad").

Actividad: Análisis de datos utilizando subconjuntos, (nítidos o borrosos), A, B,… etc de E.

La expresión $A \sqsubseteq^W B$, representará que B es un ejemplo de "mejor calidad" que A. (De mayor fiabilidad).

Por ejemplo: $\{9,10,11,16,14\} \sqsubseteq^W \{10,11,14,33\}$, $\{26,29\} \sqsubseteq^W \varnothing$.

El contenido W del vacío $\varnothing$ también podría ser un subconjunto borroso de registros, como

$W = 0.1/8+0.8/9+0.8/11+0.2/15+0.8/16+0.2/17+1/19+0.1/21+0.1/24+0.1/25+1/26+0.2/28+0.8/29+0.1/31+0.1/32$.

Ejemplo. La relación $\sqsubseteq^{W}$ como "inclusión" en contextos con incertidumbre"

E un conjunto de empresas que cotizan en bolsa.

W es un subconjunto de E formado por empresas que, según el informe de un experto, pueden oscilar a la baja en un plazo medio.

Aitor Atezqui / www.invertia.com

Miércoles, 14 de Octubre de 2015 - 8:54 h.

Un tercio del Ibex cotiza cerca o por debajo de su valor contable

El Ibex 35 ha echado esta semana por tierra su reciente racha alcista, volviendo a registrar pérdidas en el año superiores al 2% y regresando a unos niveles que, según los expertos, reflejan una fuerte sobreventa. La ratio precio/valor contable (PVC) es el mejor reflejo de este castigo injustificado: uno de cada tres valores del índice cotizan cerca o por debajo del valor teórico de sus activos. Los expertos creen que algunas de estas empresas, como Repsol, Red Eléctrica o Iberdrola, son atractivas de cara al medio y largo plazo.
Los mercados afrontan una recta final de año cargada de volatilidad, ante la debilidad de las economías emergentes, la política monetaria de la Fed y las incertidumbres políticas en España. Sin embargo, la mayoría de los expertos considera que un gran número de cotizadas españolas se encuentran en niveles de sobreventa y ofrecen atractivo para tomar posiciones de cara al medio y largo plazo. El castigo bursátil ha llegado a tal extremo que uno de cada tres valores del Ibex ya cotiza cerca o por debajo de su valor contable (ver tabla).

El PVC mide cuántas veces está reflejado el valor teórico de los activos de una empresa en el precio de sus acciones. Es decir, una compañía que cotizara al valor de sus libros tendría una PVC de 1. Tradicionalmente, las empresas suelen cotizar por encima de estos niveles, ya que sus títulos también recogen perspectivas de crecimiento. Al igual que cualquier otra ratio financiera, el PVC no siempre es un indicador fiable a la hora de invertir, ya que las empresas no siempre son sinceras sobre sus balances y este baremo no refleja ni problemas de liquidez, ni el efecto dilutivo de las ampliaciones de capital.

A modo de ejemplo, Abengoa es teóricamente la compañía más barata del Ibex, con un PVC de apenas 0,37 veces, tras sufrir un descalabro bursátil superior al 50% en 2015. Pero las casas de análisis mantienen al valor en cuarentena, tanto por las dudas sobre su situación financiera como por el previsible efecto dilutivo por su ampliación de capital de 650 millones, equivalente al 80% de su capitalización bursátil. OHL es un valor que también despierta recelos entre algunas casas de análisis a la espera de que se resuelva el frente legal que la empresa tiene en México por un presunto caso de corrupción.

Sin embargo, también existen otros valores como Repsol, Iberdrola, ArcelorMittal o Red Eléctrica, que sí despiertan el interés de algunos analistas, pues consideran que sus balances son sólidos y se están viendo castigados por factores coyunturales que se disiparán a medio y largo plazo. Los expertos advierten de que estas empresas afrontan incertidumbres a corto plazo, pero reconocen que la cotización actual no refleja ni la solidez de su negocio, ni sus perspectivas de crecimiento.

La siderúrgica cuenta con el respaldo de firmas como Renta 4, que sobrepondera al valor y le conceden un potencial alcista superior al 40% respecto a los precios actuales. Los expertos creen que el castigo bursátil es difícil de justificar para una empresa sin problemas de liquidez, ni riesgo de quiebra cuyos resultados podrían registrar una recuperación modesta durante 2016 y 2017. A corto plazo, es difícil esperar que la cotización del grupo levante cabeza, ante la caída de los precios de los metales, la previsible fortaleza del dólar cuando la Fed inicie sus subidas de tipos y la debilidad mostrada por la economía china. Sin embargo, desde Renta 4 creen que los niveles actuales representan una oportunidad para tomar posiciones a medio plazo.

Repsol es otra compañía cuya valoración resulta difícil de justificar y apenas representa la mitad de su valor contable. El consenso de analistas emite una recomendación media de compra, especialmente tras el fuerte castigo acumulado por la acción en el año y tras las últimas desinversiones, por un importe superior a los 2.000 millones, que disipan el temor a un recorte de dividendos.

Las eléctricas también cuentan con el respaldo de las casas de análisis ya que, pese a que la caída de los precios de la energía ha pasado factura a estos valores, ofrecen un perfil defensivo, gracias al carácter regulado de su negocio, su elevado dividendo y las barreras de entrada del sector.

Las entidades financieras también figuran entre las empresas con la ratio PVC más baja, aunque en este caso los analistas discrepan sobre el atractivo del sector. Aunque algunos expertos creen que valores como Santander ofrecen atractivo para tomar posiciones, otras firmas mantienen a estos valores en cuarentena, ante las elevadas incertidumbres que aún existen a corto plazo.

W

Empresa	PER	PVC
Arcelor	14,78	0,3
Abengoa	4,82	0,37
OHL	8,37	0,44
Repsol	14,2	0,56
Sacyr	9,64	0,57
Popular	15,41	0,63
Santander	10,09	0,76
Mapfre	9,42	0,81
Sabadell	12,06	0,84
Caixabank	13,33	0,86
BBVA	11,17	0,99
Bankia	12,5	1,06
Iberdrola	16,84	1,06
Acciona	20,08	1,17
Gas Natural	12,92	1,17
Acerinox	18,43	1,35
Bankinter	14,24	1,59
Telefónica	16,48	2,19
Gamesa	17,94	2,26
Gamesa	17,94	2,26
Endesa	17,13	2,28
ACS	11,79	2,47
Enagás	14,75	2,59
IAG	8,52	2,59
FCC	18,2	2,66
Indra	27,45	2,66
Mediaset	17,95	2,83
Ferrovial	32,55	2,87
Abertis	17,65	3,09
Aena	18,85	3,35
Red Eléctrica	16,22	3,53
Técnicas	13,47	3,71
Grifols	25,74	4,24
Amadeus	20,81	7,55
Inditex	29,94	7,72
DIA	13,84	7,88

E un conjunto de empresas que cotizan en bolsa.

W es un subconjunto de E formado por empresas que, según el informe de un experto, pueden oscilar a la baja en un plazo medio.

La inclusión asociada $\sqsubseteq^W$ se puede interpretar como una ordenación de los distintos paquetes de acciones que pueden ofertarse a inversores, teniendo en cuenta el riesgo que representa la adquisición de acciones incluidas en el subconjunto W.

Aitor Atezqui / www.invertia.com

Miércoles, 14 de Octubre de 2015 - 8:54 h.

Un tercio del Ibex cotiza cerca o por debajo de su valor contable

El Ibex 35 ha echado esta semana por tierra su reciente racha alcista, volviendo a registrar pérdidas en el año superiores al 2% y regresando a unos niveles que, según los expertos, reflejan una fuerte sobreventa. La ratio precio/valor contable (PVC) es el mejor reflejo de este castigo injustificado: uno de cada tres valores del índice cotizan cerca o por debajo del valor teórico de sus activos. Los expertos creen que algunas de estas empresas, como Repsol, Red Eléctrica o Iberdrola, son atractivas de cara al medio y largo plazo.
Los mercados afrontan una recta final de año cargada de volatilidad, ante la debilidad de las economías emergentes, la política monetaria de la Fed y las incertidumbres políticas en España. Sin embargo, la mayoría de los expertos considera que un gran número de cotizadas españolas se encuentran en niveles de sobreventa y ofrecen atractivo para tomar posiciones de cara al medio y largo plazo. El castigo bursátil ha llegado a tal extremo que uno de cada tres valores del Ibex ya cotiza cerca o por debajo de su valor contable (ver tabla).

El PVC mide cuántas veces está reflejado el valor teórico de los activos de una empresa en el precio de sus acciones. Es decir, una compañía que cotizara al valor de sus libros tendría una PVC de 1. Tradicionalmente, las empresas suelen cotizar por encima de estos niveles, ya que sus títulos también recogen perspectivas de crecimiento. Al igual que cualquier otra ratio financiera, el PVC no siempre es un indicador fiable a la hora de invertir, ya que las empresas no siempre son sinceras sobre sus balances y este baremo no refleja ni problemas de liquidez, ni el efecto dilutivo de las ampliaciones de capital.

A modo de ejemplo, Abengoa es teóricamente la compañía más barata del Ibex, con un PVC de apenas 0,37 veces, tras sufrir un descalabro bursátil superior al 50% en 2015. Pero las casas de análisis mantienen al valor en cuarentena, tanto por las dudas sobre su situación financiera como por el previsible efecto dilutivo por su ampliación de capital de 650 millones, equivalente al 80% de su capitalización bursátil. OHL es un valor que también despierta recelos entre algunas casas de análisis a la espera de que se resuelva el frente legal que la empresa tiene en México por un presunto caso de corrupción.

Sin embargo, también existen otros valores como Repsol, Iberdrola, ArcelorMittal o Red Eléctrica, que sí despiertan el interés de algunos analistas, pues consideran que sus balances son sólidos y se están viendo castigados por factores coyunturales que se disiparán a medio y largo plazo. Los expertos advierten de que estas empresas afrontan incertidumbres a corto plazo, pero reconocen que la cotización actual no refleja ni la solidez de su negocio, ni sus perspectivas de crecimiento.

La siderúrgica cuenta con el respaldo de firmas como Renta 4, que sobreponderan al valor y le conceden un potencial alcista superior al 40% respecto a los precios actuales. Los expertos creen que el castigo bursátil es difícil de justificar para una empresa sin problemas de liquidez, ni riesgo de quiebra cuyos resultados podrían registrar una recuperación modesta durante 2016 y 2017. A corto plazo, es difícil esperar que la cotización del grupo levante cabeza, ante la caída de los precios de los metales, la previsible fortaleza del dólar cuando la Fed inicie sus subidas de tipos y la debilidad mostrada por la economía china. Sin embargo, desde Renta 4 creen que los niveles actuales representan una oportunidad para tomar posiciones a medio plazo.

Repsol es otra compañía cuya valoración resulta difícil de justificar y apenas representa la mitad de su valor contable. El consenso de analistas emite una recomendación media de compra, especialmente tras el fuerte castigo acumulado por la acción en el año y tras las últimas desinversiones, por un importe superior a los 2.000 millones, que disipan el temor a un recorte de dividendos.

Las eléctricas también cuentan con el respaldo de las casas de análisis ya que, pese a que la caída de los precios de la energía ha pasado factura a estos valores, ofrecen un perfil defensivo, gracias al carácter regulado de su negocio, su elevado dividendo y las barreras de entrada del sector.

Las entidades financieras también figuran entre las empresas con la ratio PVC más baja, aunque en este caso los analistas discrepan sobre el atractivo del sector. Aunque algunos expertos creen que valores como Santander ofrecen atractivo para tomar posiciones, otras firmas mantienen a estos valores en cuarentena, ante las elevadas incertidumbres que aún existen a corto plazo.

$W \sqsubseteq^W \emptyset$

W

E

Empresa	PER	PVC
Arcelor	14,78	0,3
Abengoa	4,82	0,37
OHL	8,37	0,44
Repsol	14,2	0,56
Sacyr	8,64	0,57
Popular	15,41	0,63
Santander	10,09	0,76
Mapfre	9,42	0,81
Sabadell	12,06	0,84
Caixabank	13,33	0,88
BBVA	11,17	0,99
Bankia	12,5	1,08
Iberdrola	16,84	1,06
Acciona	20,08	1,17
Gas Natural	12,92	1,17
Acerinox	18,43	1,35
Bankinter	14,24	1,59
Telefónica	16,48	2,19
Gamesa	17,94	2,26
Gamesa	17,94	2,26
Endesa	17,13	2,28
ACS	11,79	2,47
Enagás	14,75	2,59
IAG	8,52	2,59
FCC	18,2	2,66
Indra	27,45	2,66
Mediaset	17,95	2,83
Ferrovial	32,56	2,87
Abertis	17,65	3,09
Aena	18,85	3,35
Red Eléctrica	16,22	3,53
Técnicas	13,47	3,71
Grifols	25,74	4,24
Amadeus	20,81	7,55
Inditex	29,94	7,72
DIA	13,84	7,89

A

B

W

$A \sqsubseteq^W B$

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \,\&\, (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$; se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g\colon E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en la motivación, el propósito inicial de este trabajo es el de proporcionar un MODELO MATEMÁTICO con el que dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes, lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "W" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$; se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, … y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,…), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas,(isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,…).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L\times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

2. Interpretación de los órdenes de actividad como "inclusiones con perspectiva" entre subconjuntos ordinarios o entre subconjuntos borrosos de un referencial.

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow$$

$$(B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

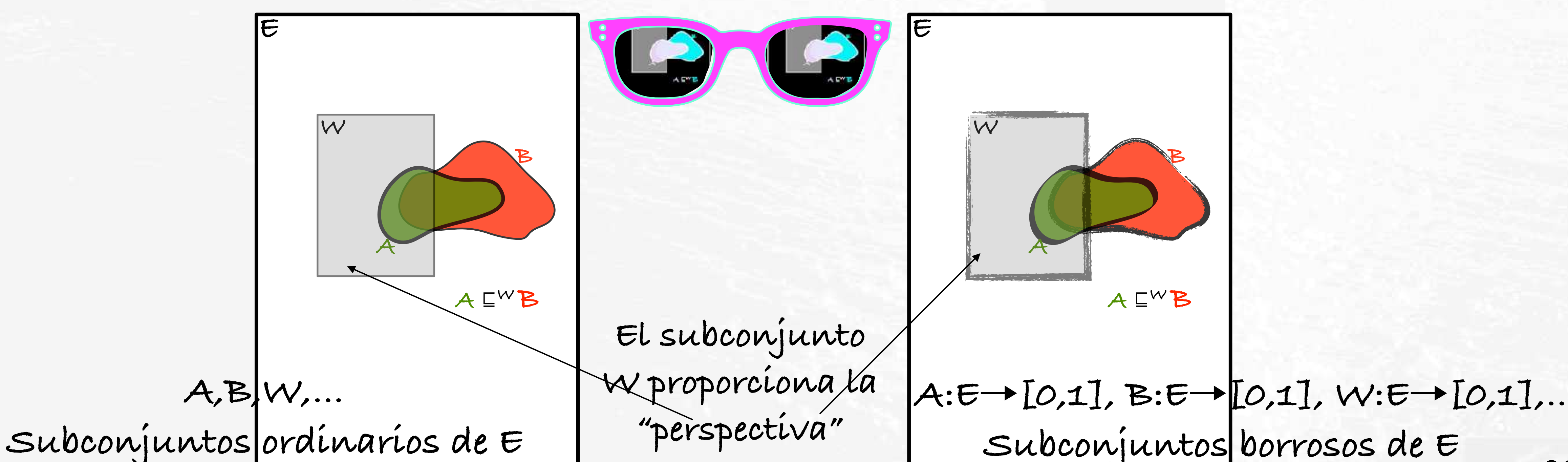
$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow$$

$$(B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

2. Interpretación de los órdenes de actividad como "<u>inclusiones con perspectiva</u>" entre subconjuntos ordinarios o entre subconjuntos borrosos de un referencial.

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$



Distintas expresiones del orden de actividad

Orden de actividad $\sqsubseteq^W$ asociado a una imagen W y definido entre imágenes binarias o con tonos de gris A, B, ...

En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W))$.

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cdot W) \leq A \leq (B + W))$.

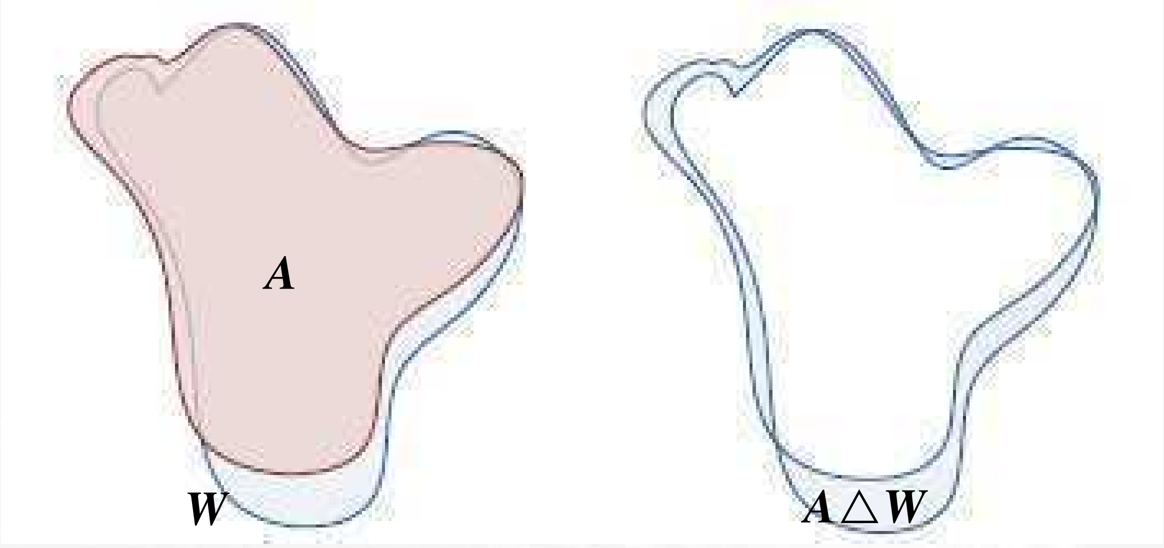
<u>Orden de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ asociado a una imagen W y definido entre imágenes binarias o con tonos de gris A, B, ...

En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W))$.

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cdot W) \leq A \leq (B + W))$.

Si W es binaria tal que $W^c = W'$, el orden $\sqsubseteq^W$ estará relacionado con el operador $\triangle$ tipo "<u>diferencia simétrica</u>" considerado como una herramienta que transforma imágenes A de un referencial X mediante la imagen binaria W:

$A \longrightarrow A \triangle W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$ para imágenes binarias $A \in 2^X$, $A \longrightarrow A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ para imágenes con tonos de gris $A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$



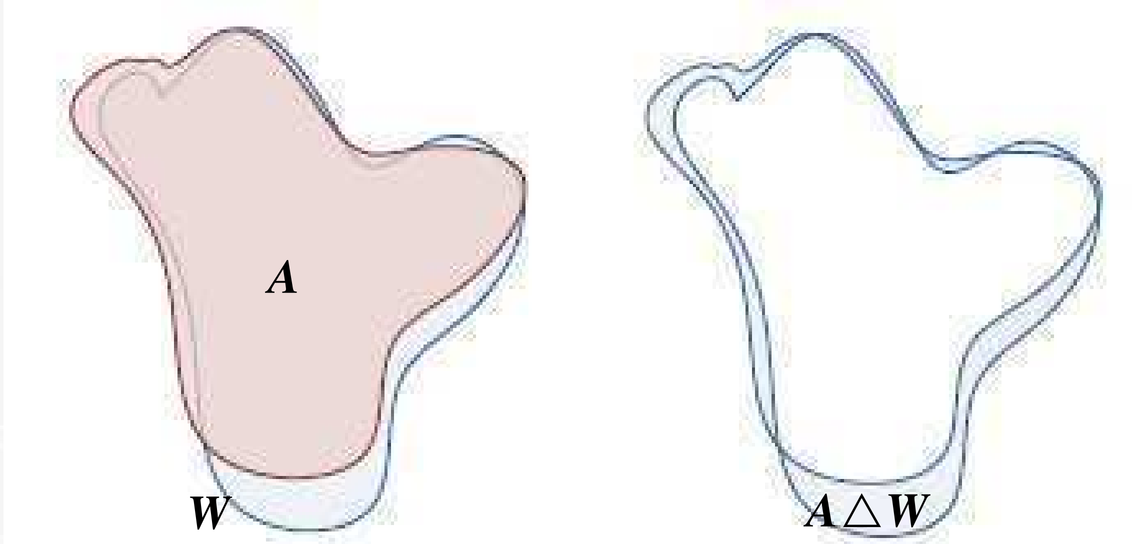
<u>Orden de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ asociado a una imagen W y definido entre imágenes binarias o con tonos de gris A, B, ...

En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W))$.

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cdot W) \leq A \leq (B + W))$.

Si W es binaria tal que W^c=W', el orden $\sqsubseteq^W$ estará relacionado con el operador $\triangle$ tipo "<u>diferencia simétrica</u>" considerado como una herramienta que transforma imágenes A de un referencial X mediante la imagen binaria W:

$A \longrightarrow A \triangle W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$ para imágenes binarias $A \in 2^X$, $A \longrightarrow A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ para imágenes con tonos de gris $A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$



En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((A \triangle W) \subseteq (B \triangle W))$

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$

<u>Sólo</u> en el caso W imagen binaria, (W^c existe y W^c=W'):

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((A \triangle W) \leq (B \triangle W))$

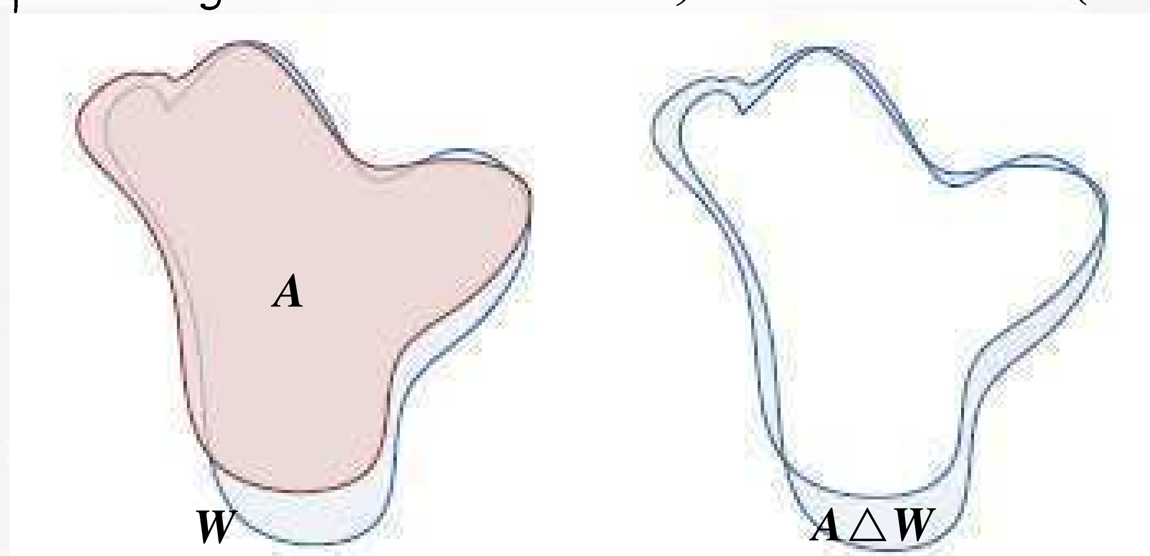
<u>Orden de actividad</u> $\sqsubseteq^W$ asociado a una imagen W y definido entre imágenes binarias o con tonos de gris $A, B, \ldots$

En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W))$.

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$: $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((B \cdot W) \leq A \leq (B + W))$.

Si W es binaria tal que $W^c = W'$, el orden $\sqsubseteq^W$ estará relacionado con el operador $\triangle$ tipo "<u>diferencia simétrica</u>" considerado como una herramienta que transforma imágenes A de un referencial X mediante la imagen binaria W:

$A \longrightarrow A \triangle W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$ para imágenes binarias $A \in 2^X$, $A \longrightarrow A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ para imágenes con tonos de gris $A \in \{0, 1, \ldots, 255\}^X$



En $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((A \triangle W) \subseteq (B \triangle W))$

En $((L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), {}')$

<u>Sólo</u> en el caso W imagen binaria, (W^c existe y $W^c = W'$):

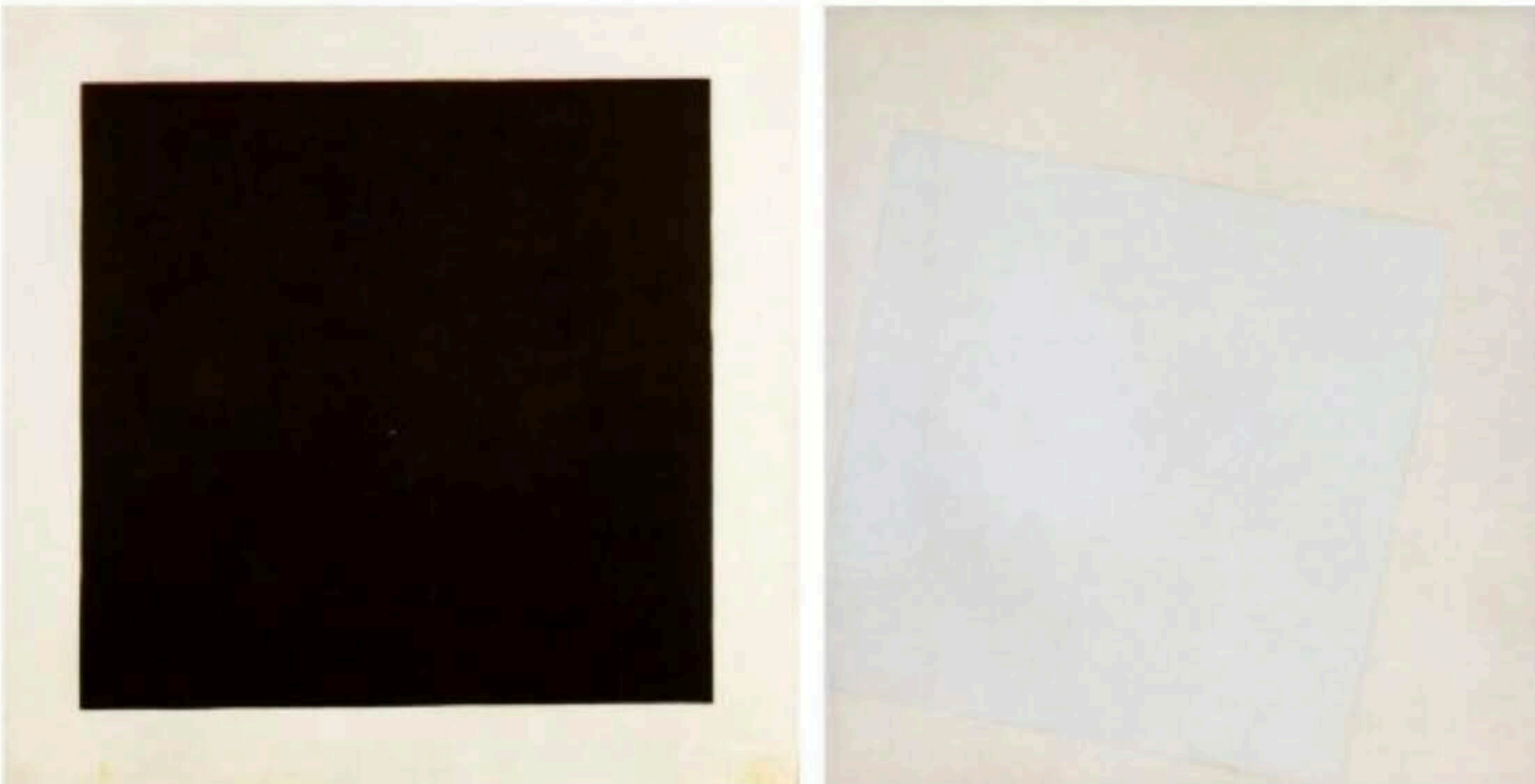
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow ((A \triangle W) \leq (B \triangle W))$

También, en el caso W imagen binaria, se caracteriza la relación de actividad por:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [((A \cap W) \supseteq (B \cap W)) \,\&\, ((A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c))]$, $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [((A \cdot W) \geq (B \cdot W)) \,\&\, ((A \cdot W^c) \leq (B \cdot W^c))]$

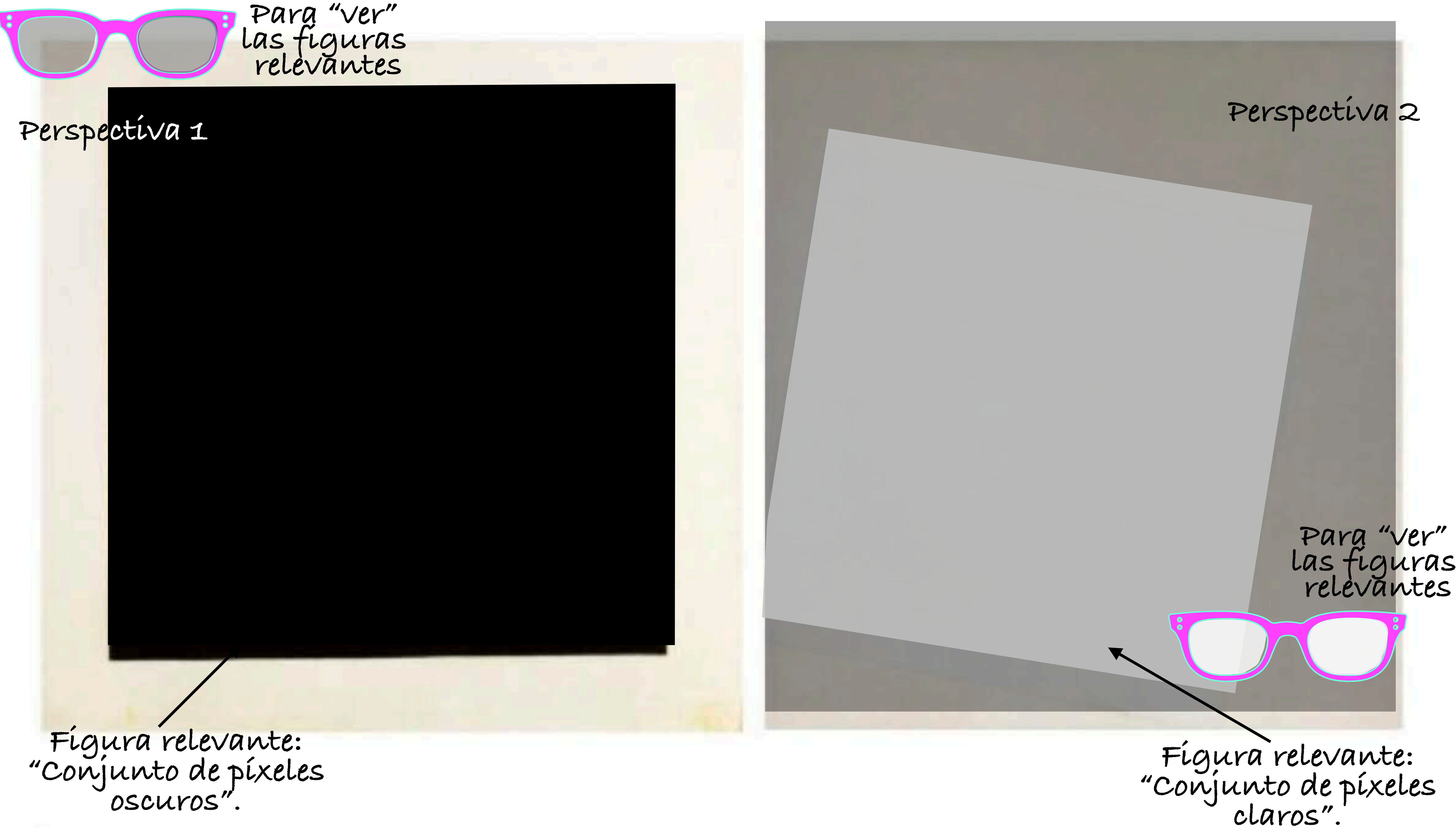
2. Los órdenes de actividad como "perspectivas" en Álgebras de Boole:

$\sqsubseteq^{w}$-inclusión, $\sqsubseteq^{w}$-intersección y $\sqsubseteq^{w}$-unión entre subconjuntos ordinarios A,B,... de un referencial E. Definición de "w-pertenencia" como una relación $\in^{w} \subseteq EXP(E)$.



El arte de Kazimir Malevich. A la izquierda: Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco (1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

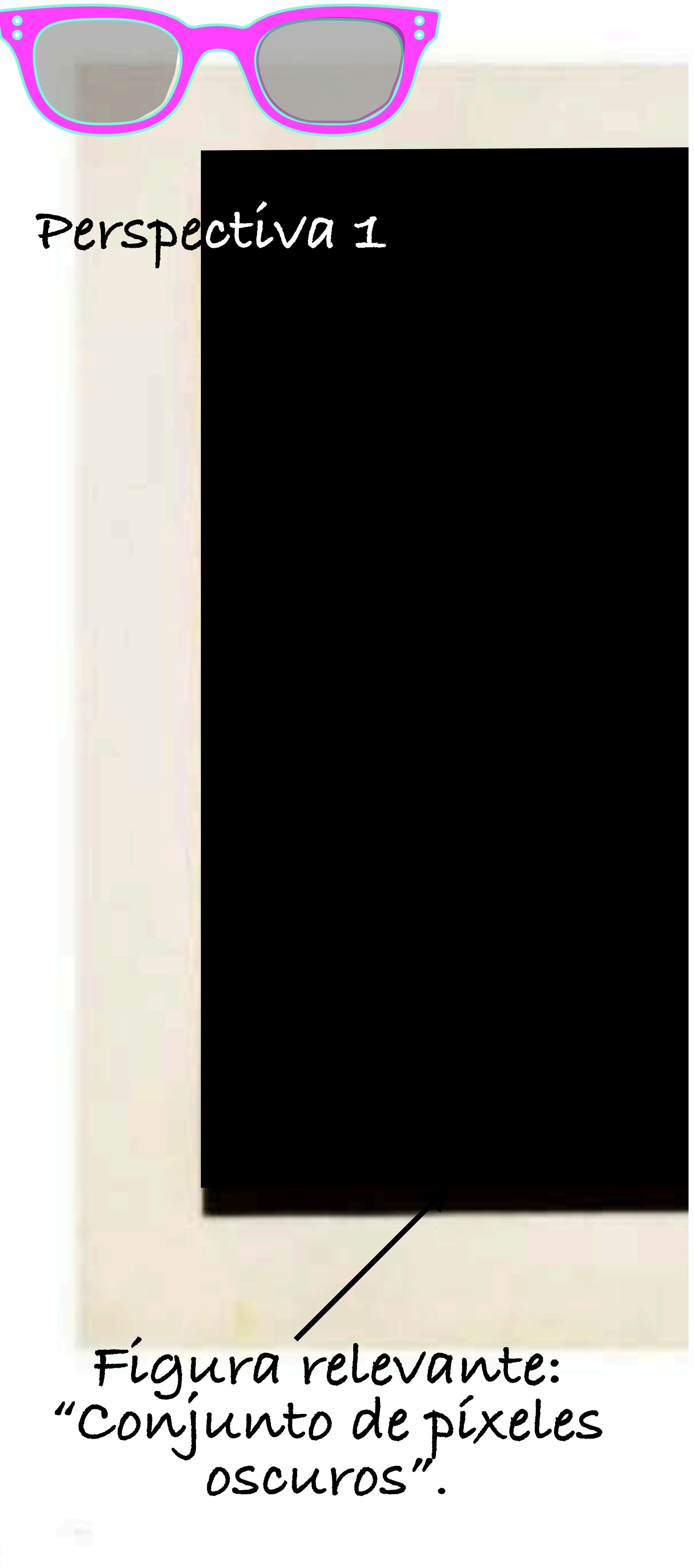
Dos perspectivas desde las que se puede contemplar el álgebra de imágenes digitalizadas...



El arte de Kazimir Malevich. A la izquierda: Cuadrado Negro sobre Fondo Blanco (1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

¿Una tercera perspectiva?

Dos perspectivas desc… …genes digitalizadas…



Perspectiva 1

Figura relevante: "Conjunto de píxeles oscuros".

Fernando Daza

Negro y blanco.

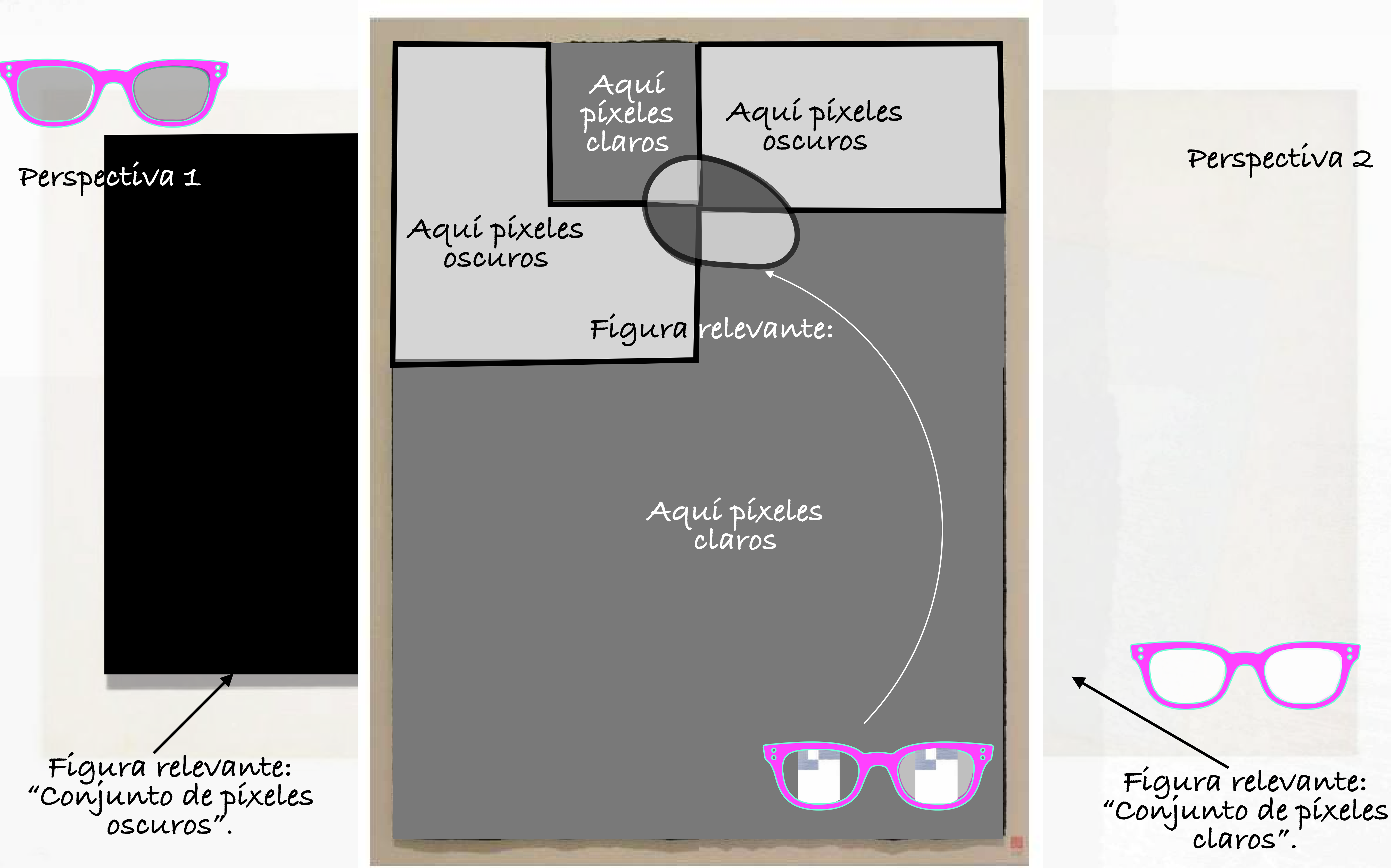
2015

Perspectiva 2

Figura relevante: "Conjunto de píxeles claros".

El arte de Kazimi… …o sobre Fondo Blanco (1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

¿Una tercera perspectiva?



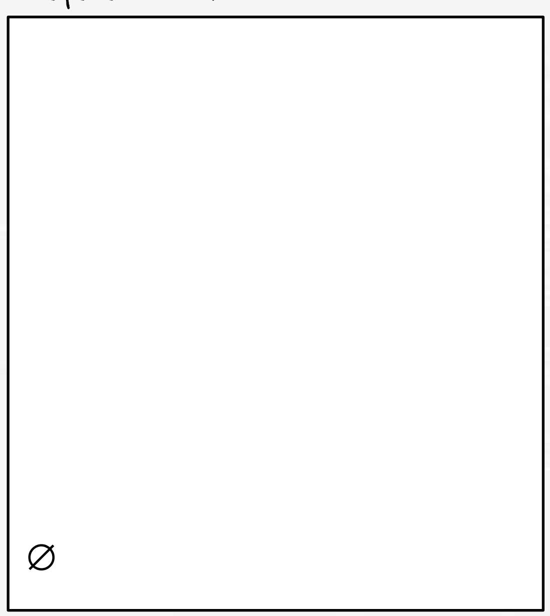
Fernando Daza
Negro y blanco.
2015

El arte de Kazim … o sobre Fondo Blanco
(1915); a la derecha: Blanco sobre Blanco (1918)

¿Una tercera perspectiva?

$(P(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

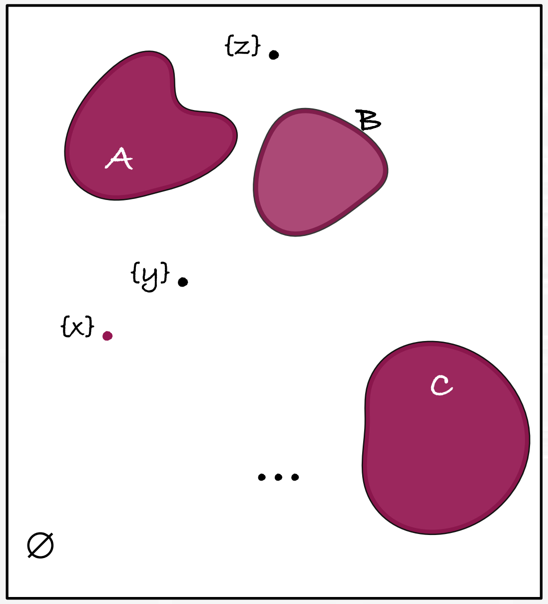
Referencial X



∅: pizarra blanca

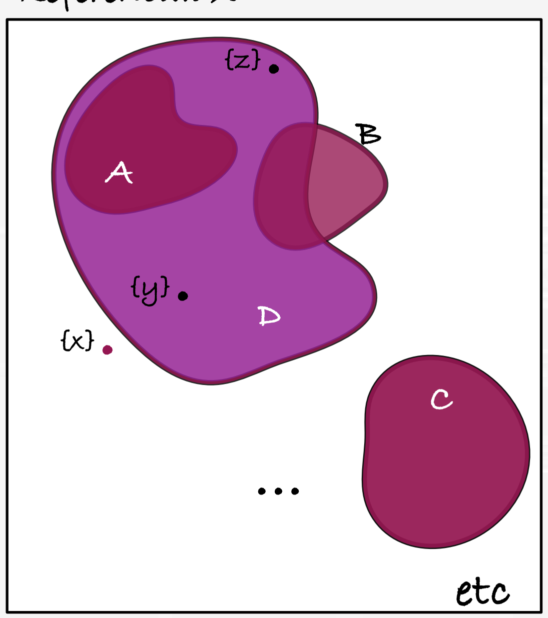
$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Referencial X



∅: pizarra blanca

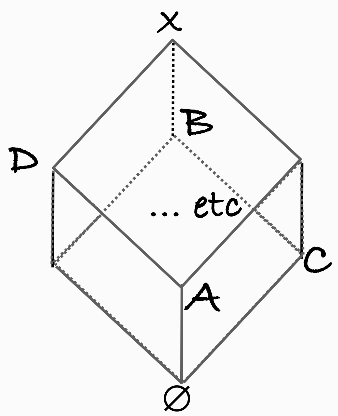
(P(X),⊆), álgebra de subconjuntos ordinarios de X:



∅: pizarra blanca

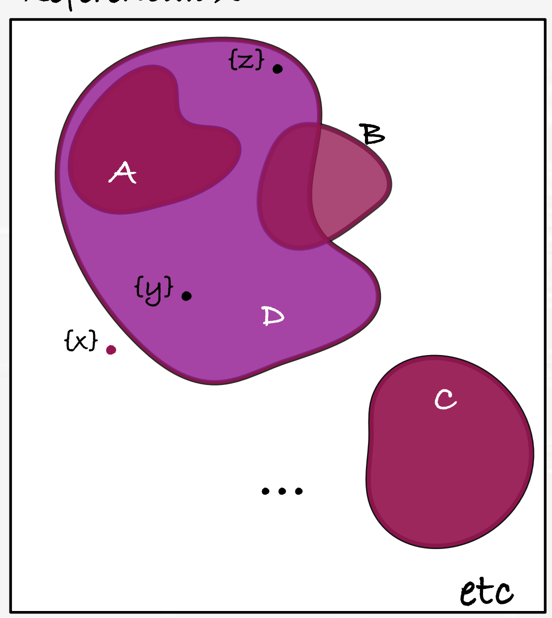
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$

Si $|X|=n$, el álgebra es un hipercubo de dimensión n con el orden $\subseteq$:



$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Referencial X

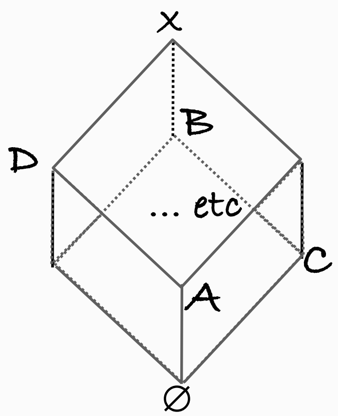


$(\mathcal{P}(X),\subseteq,\cap,\cup)$
$(A\subseteq D, D\not\subseteq B, B\not\subseteq D, B\cap D, B\cup D, \ldots)$

$\varnothing$: pizarra blanca

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^{c})$



$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

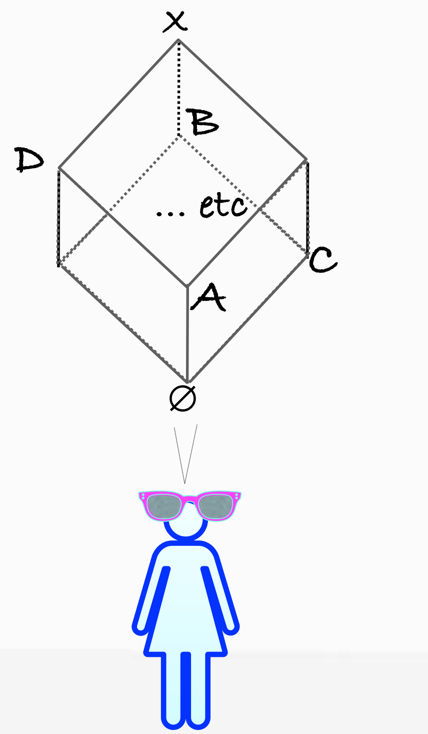
Referencial X

Interpretación del orden $\subseteq$
como una "perspectiva" del
conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada
por el subconjunto $\varnothing$:

$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

$\varnothing$: pizarra blanca

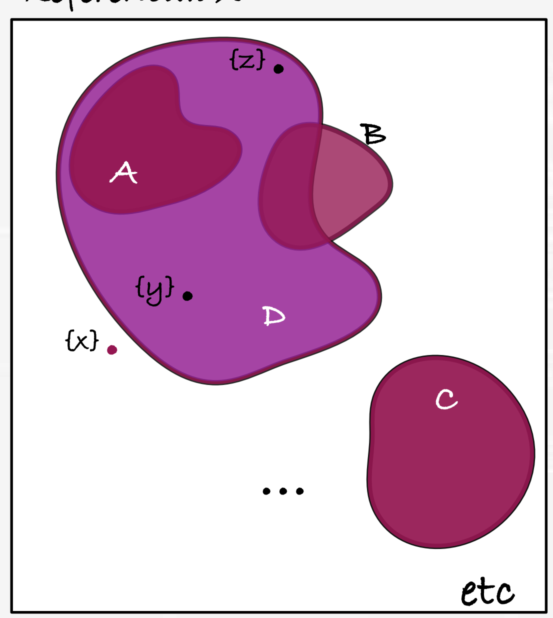
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



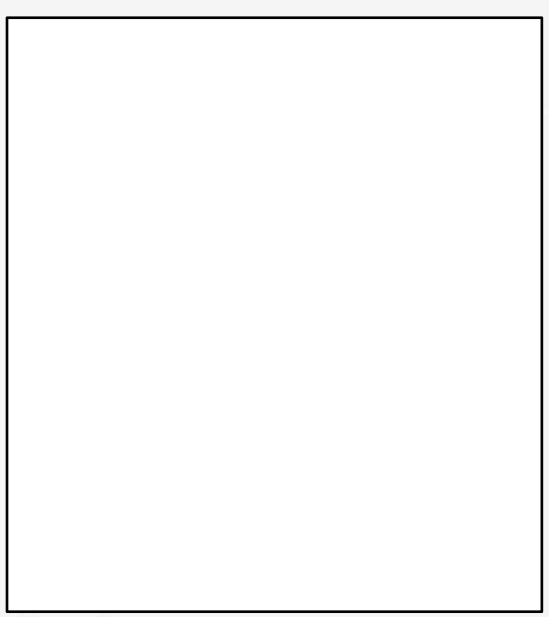
$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden ⊆
como una "perspectiva" del
conjunto P(X) proporcionada
por el subconjunto ∅:

Referencial X

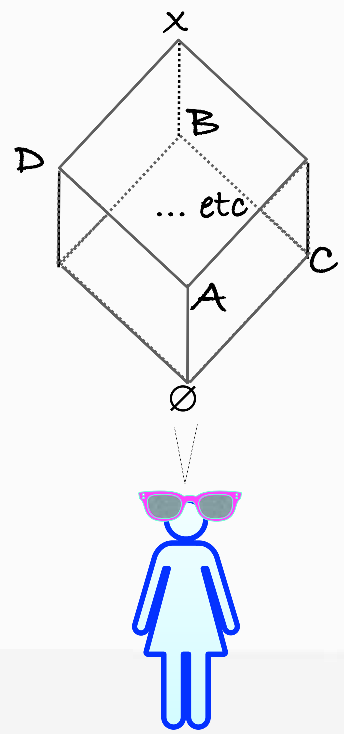


$(\mathcal{P}(X),\subseteq,\cap,\cup)$
$(A\subseteq D, D\not\subseteq B, B\not\subseteq D, B\cap D, B\cup D, \ldots)$



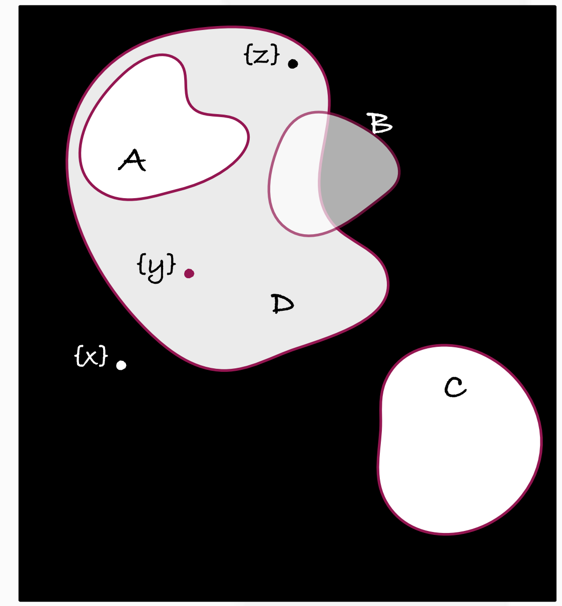
∅: pizarra blanca

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^{c})$



X: pizarra oscura

X



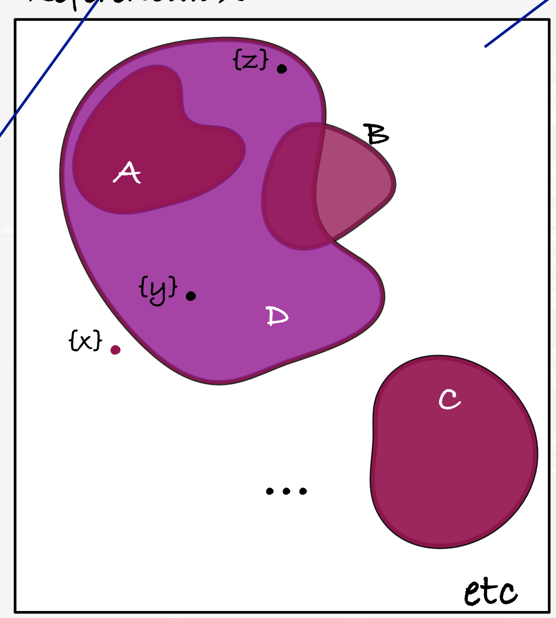
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

"Negativo"

"Negativos"

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

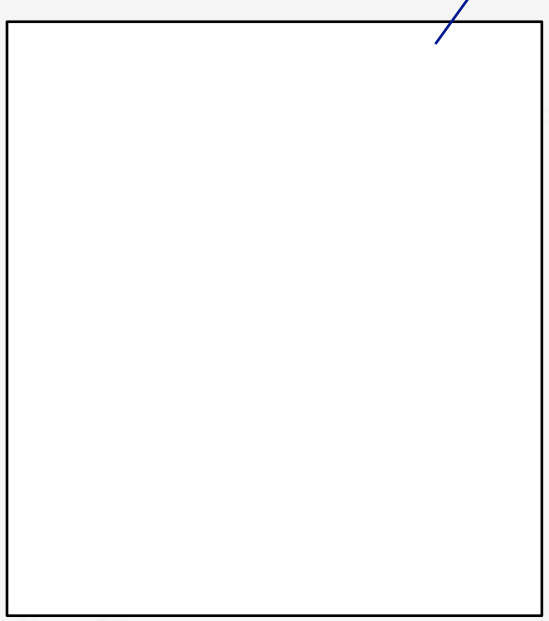
Referencial X



$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

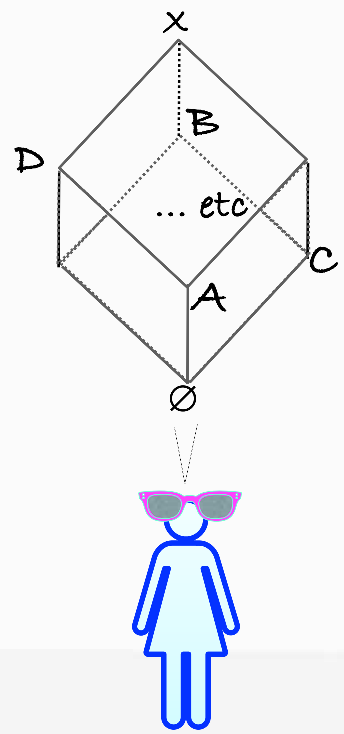
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



X: pizarra oscura

Interpretación de $\supseteq$: una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el referencial X.

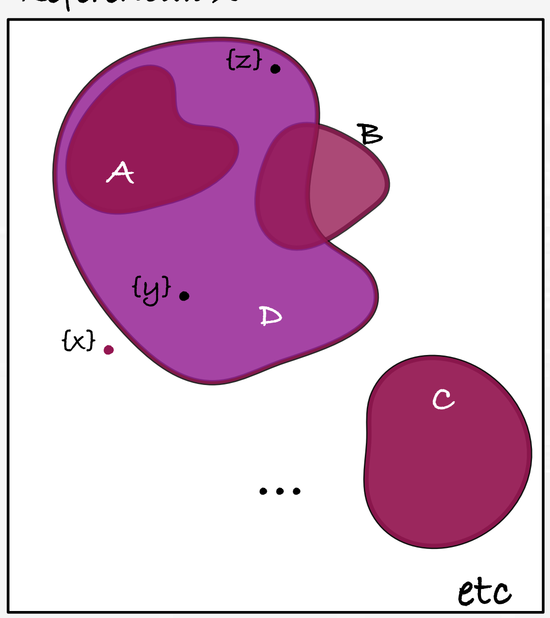
X $(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

$(D \supseteq A, D \not\supseteq B,$ ... $D, B\cup$ ... $B \cap D, \ldots)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\emptyset$:

Referencial X

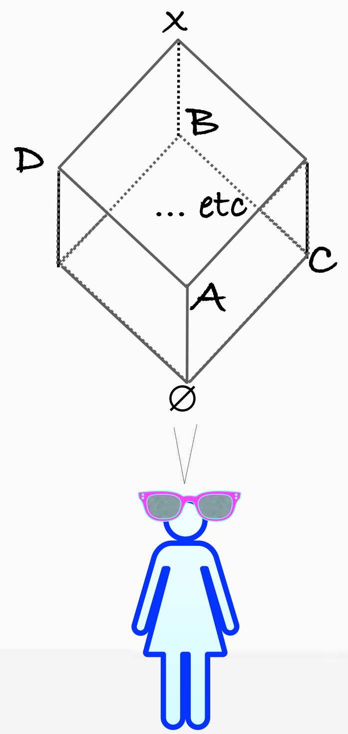


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

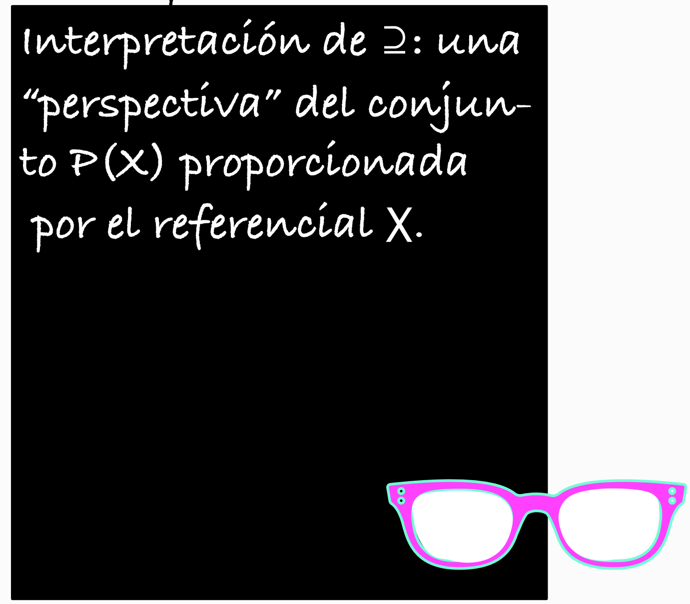
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

$\emptyset$: pizarra blanca

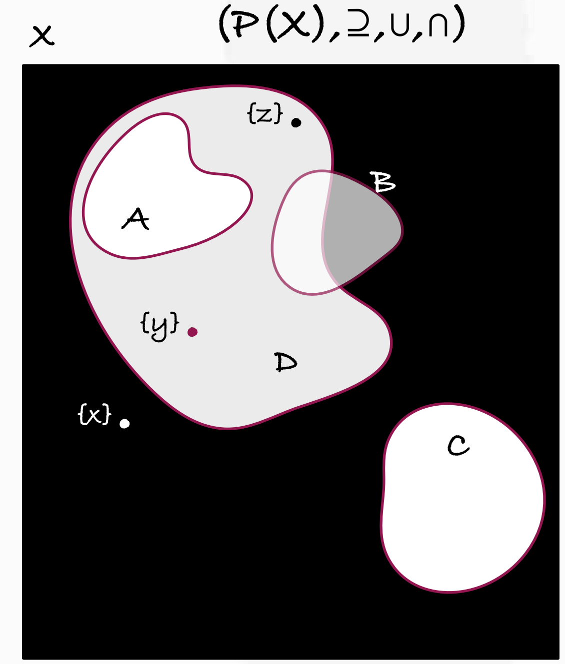
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$



X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

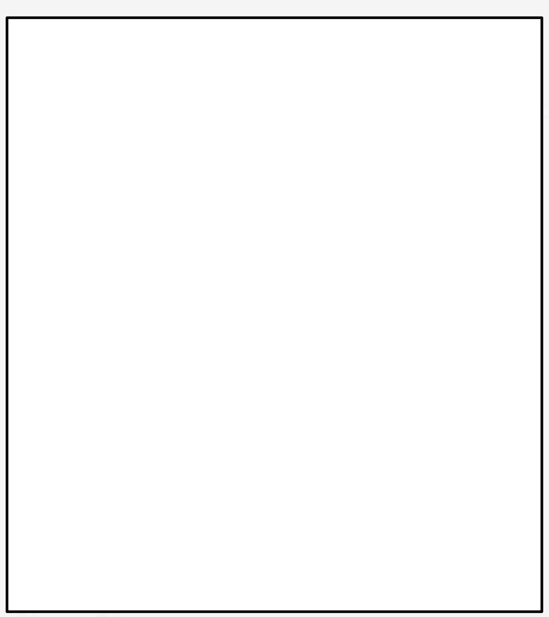


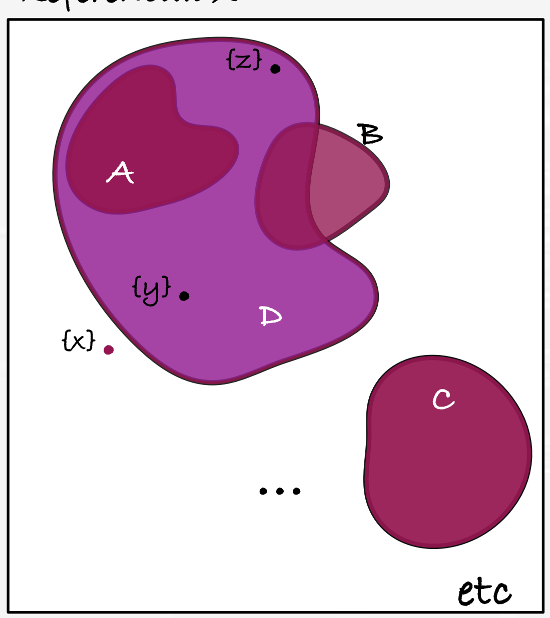
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Referencial X

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:





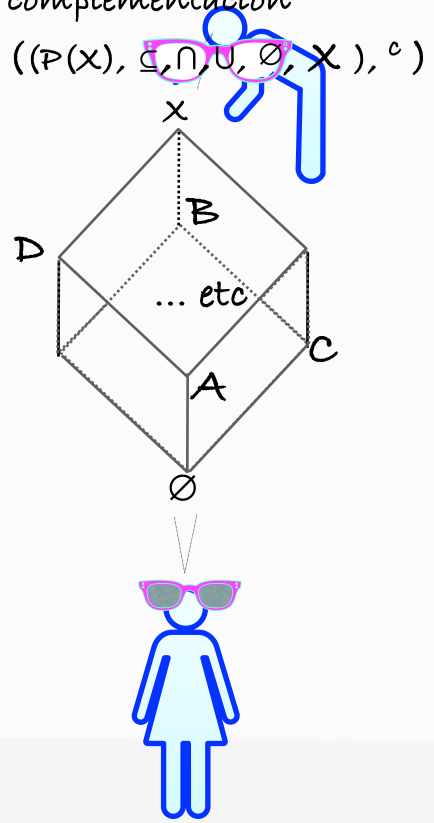
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

∅: pizarra blanca

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

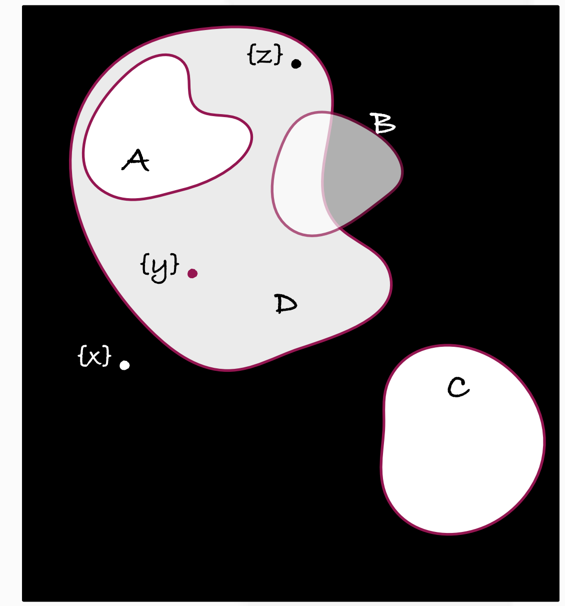
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



X: pizarra oscura

Interpretación de $\supseteq$: una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el referencial X.

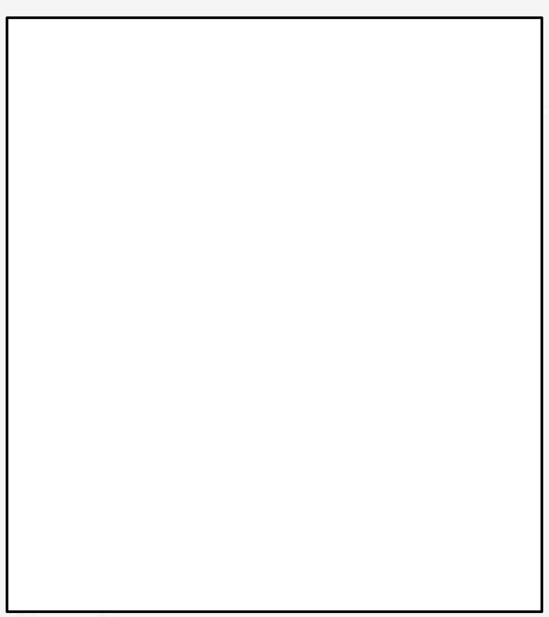
X $(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

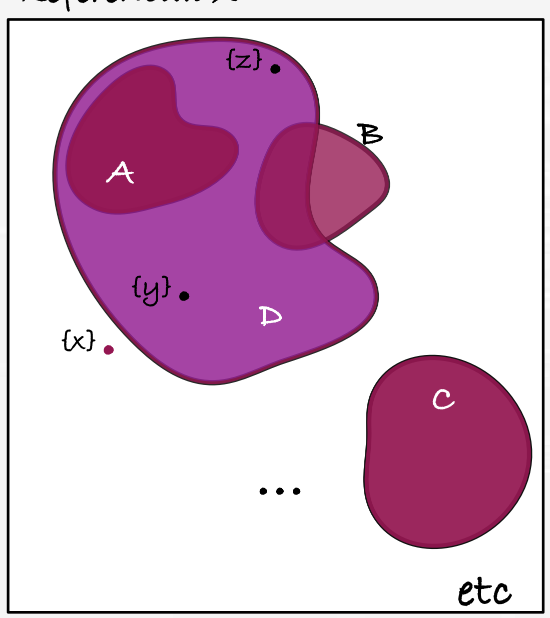
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:



$\varnothing$: pizarra blanca

Referencial X

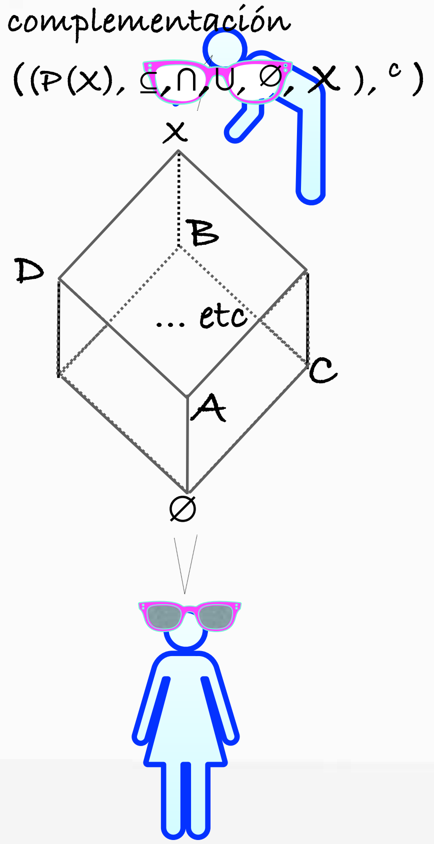


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

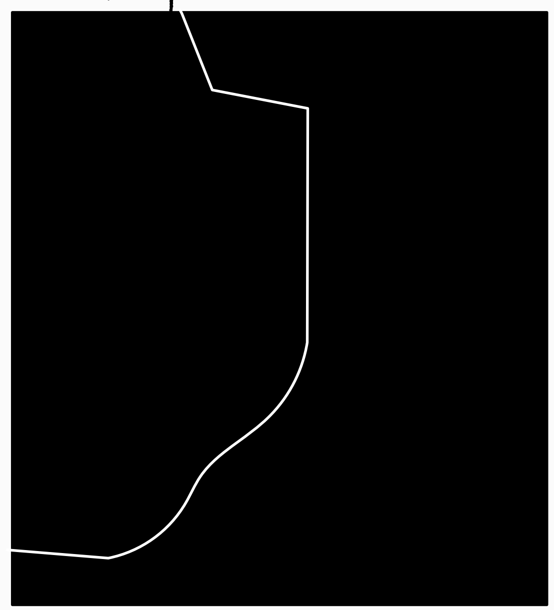
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



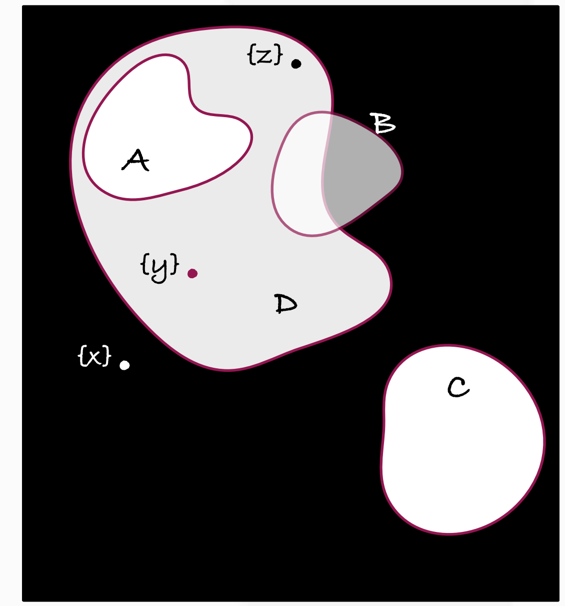
X: pizarra oscura



Utilizando un subconjunto cualquiera W y su complementario, construimos una nueva (y extraña) pizarra...

X

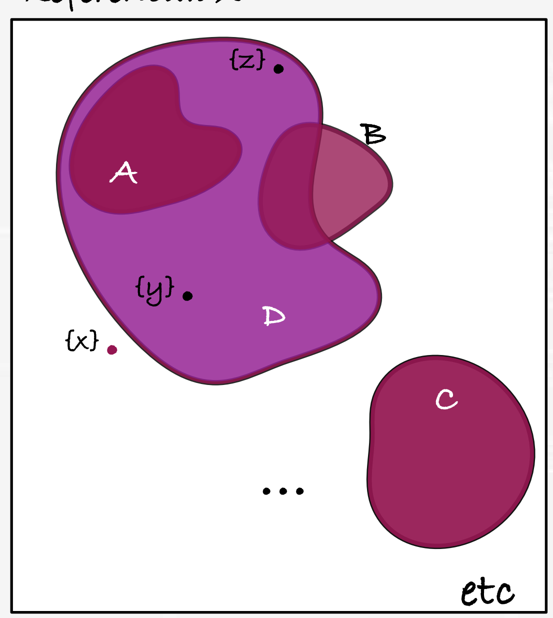
$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

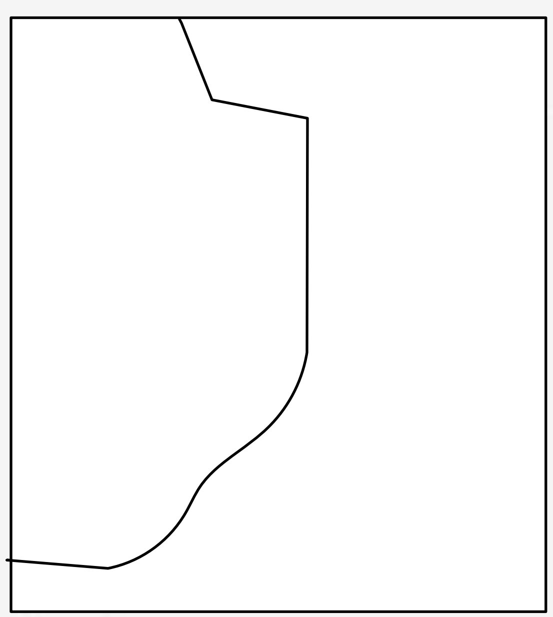
Referencial X



$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

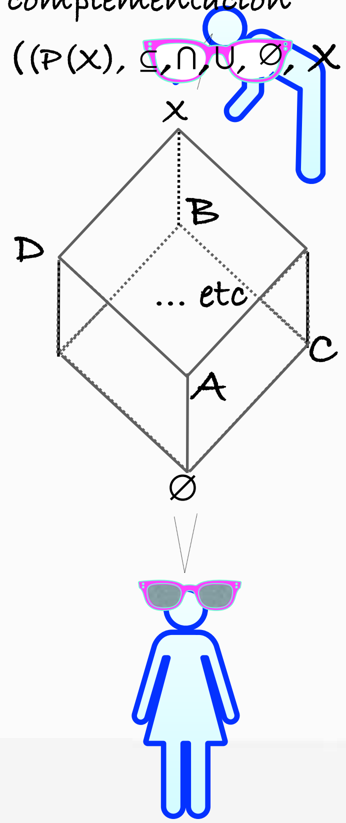
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto P(X) proporcionada por el subconjunto ∅:

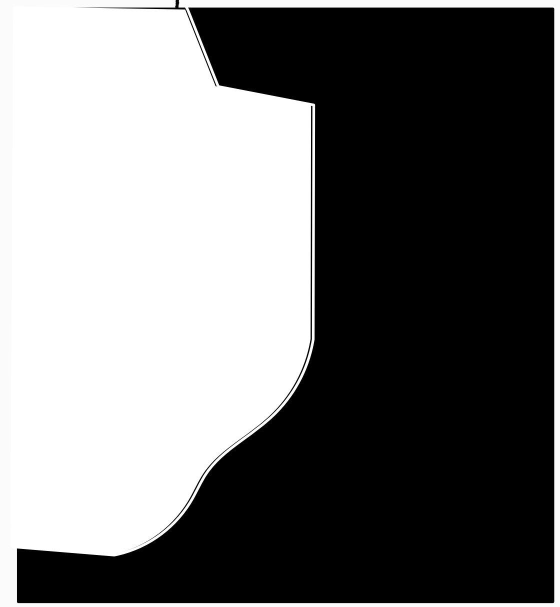


∅: pizarra blanca

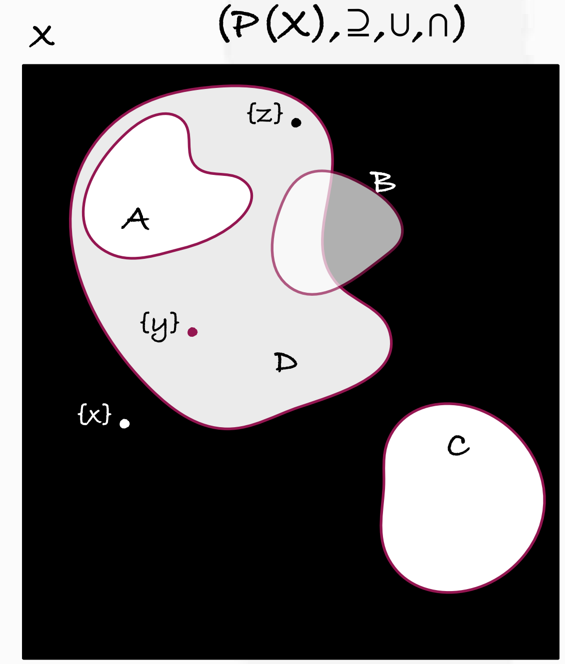
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

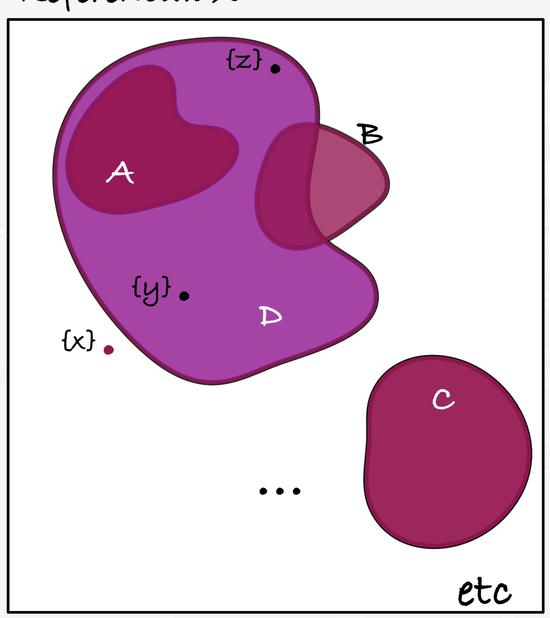


$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

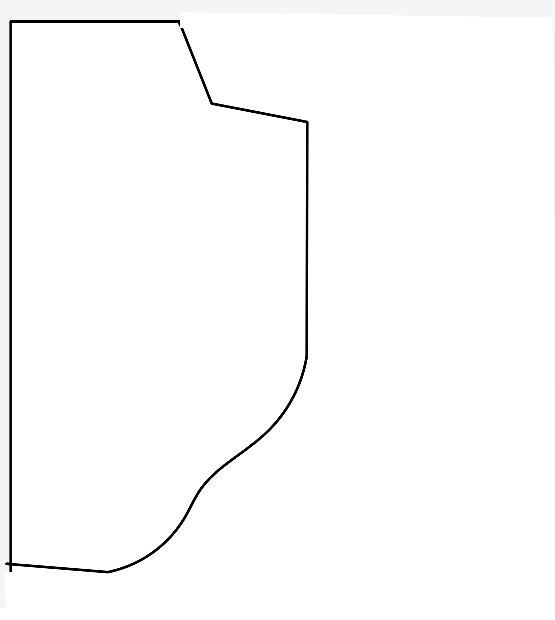
Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\emptyset$:

Referencial X

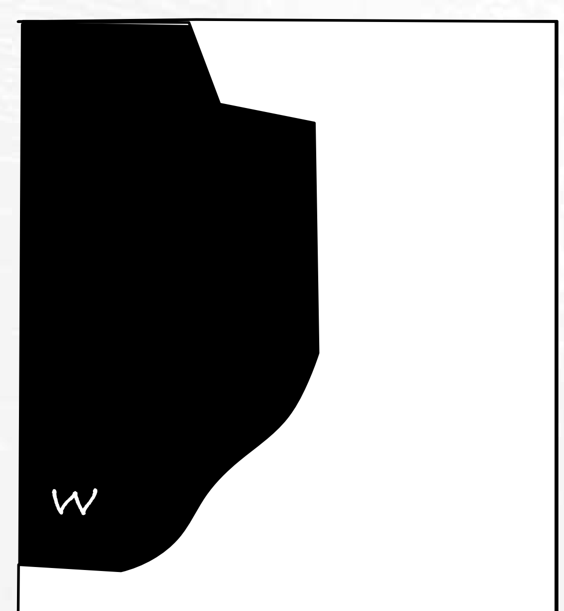


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

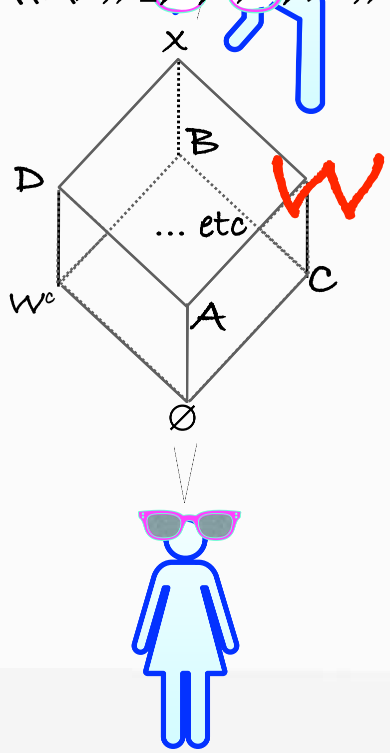
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$



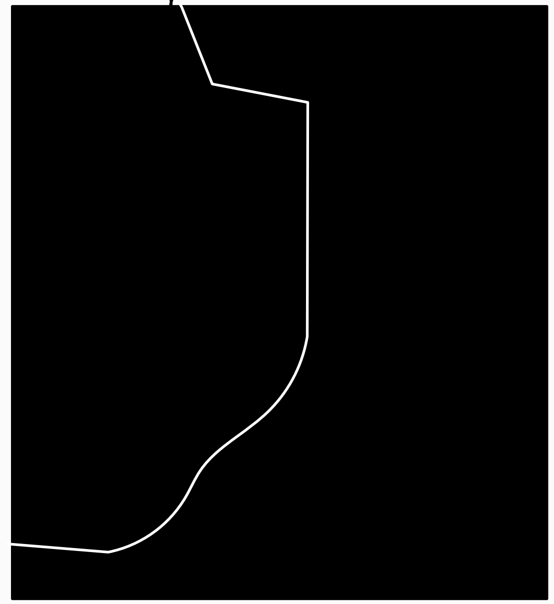
∅: pizarra blanca

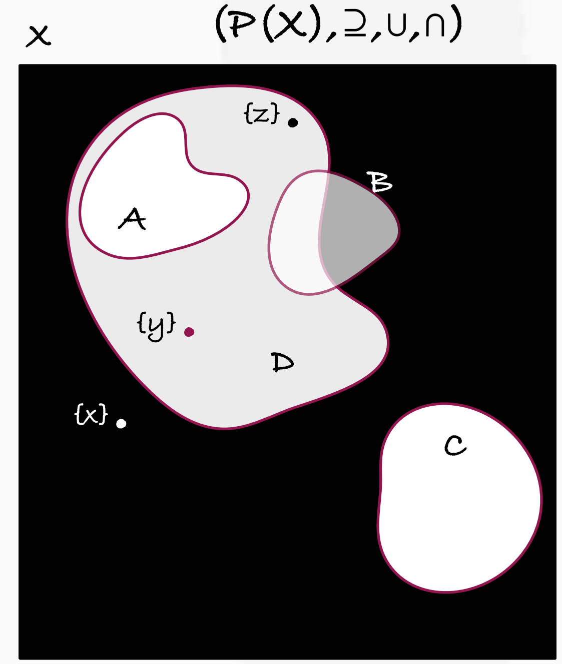


Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



X: pizarra oscura





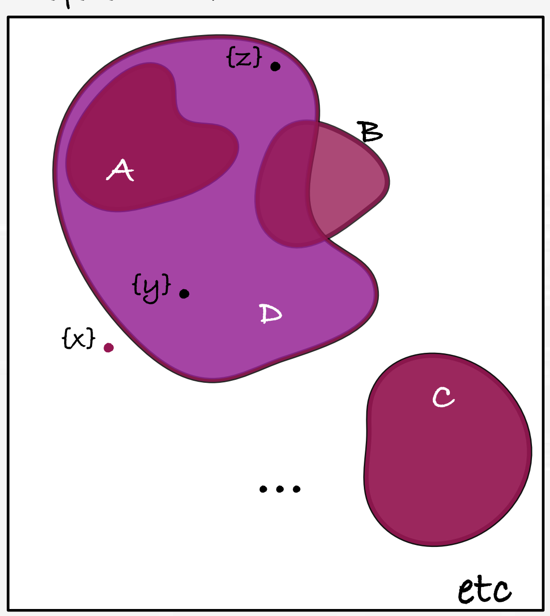
$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

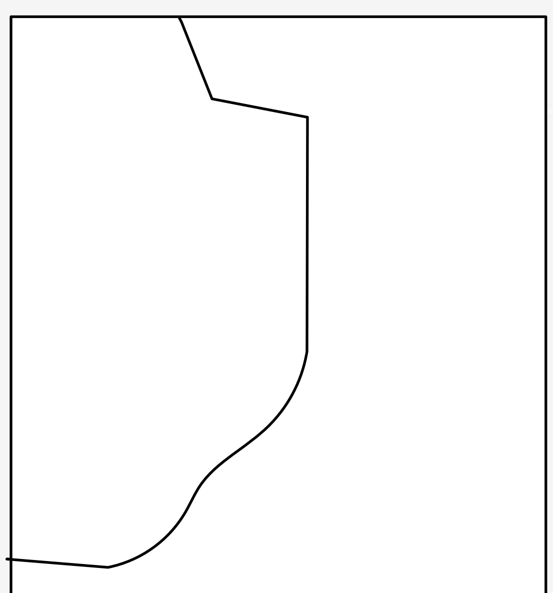
Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:

Referencial X



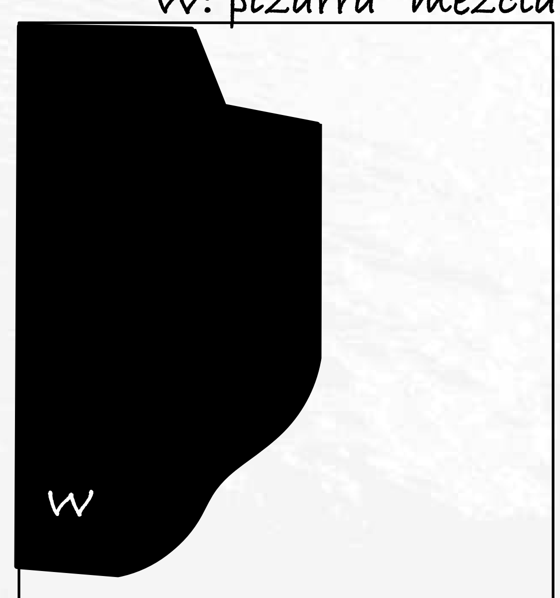
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

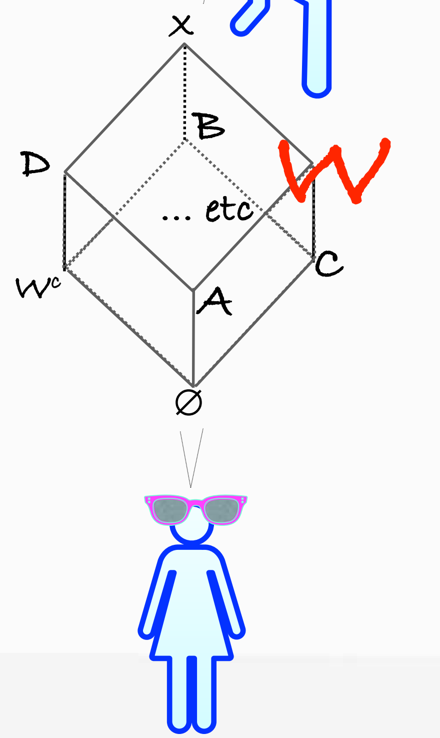


∅: pizarra blanca

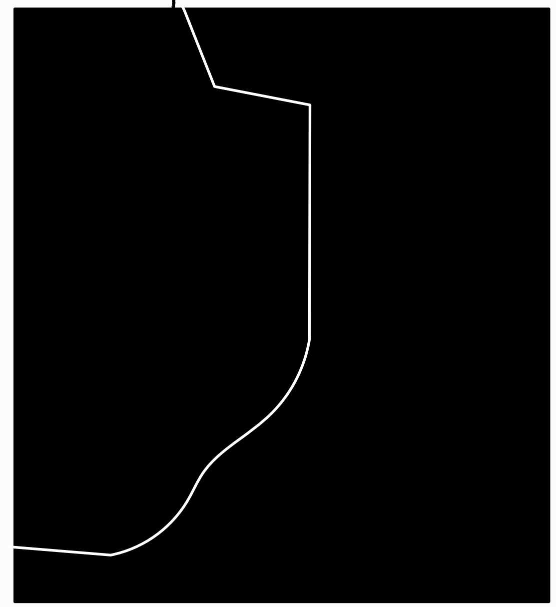
W: pizarra "mezcla"

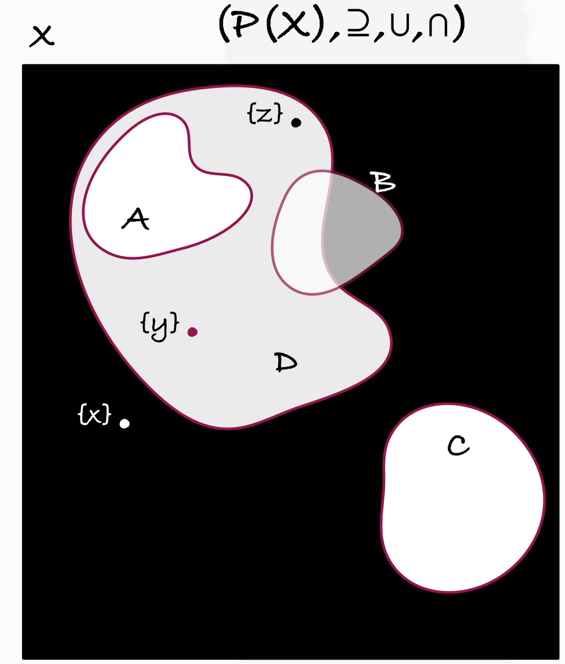


Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



X: pizarra oscura



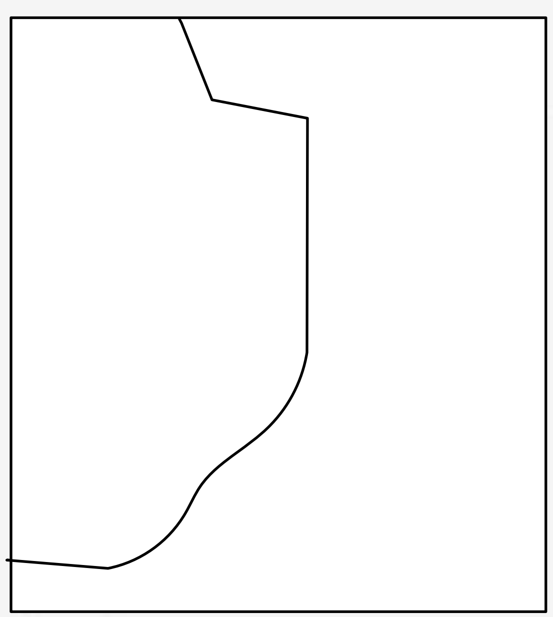


$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

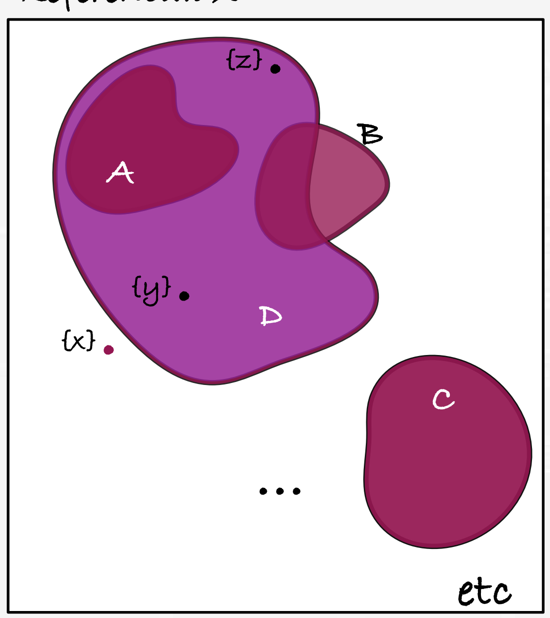
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

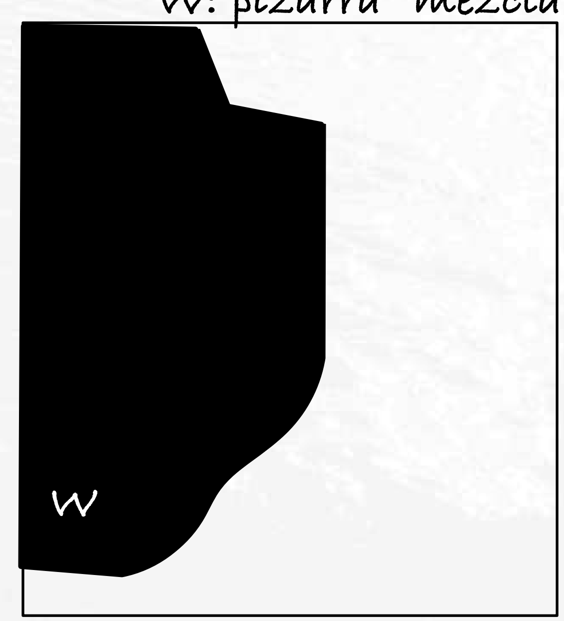
Referencial X

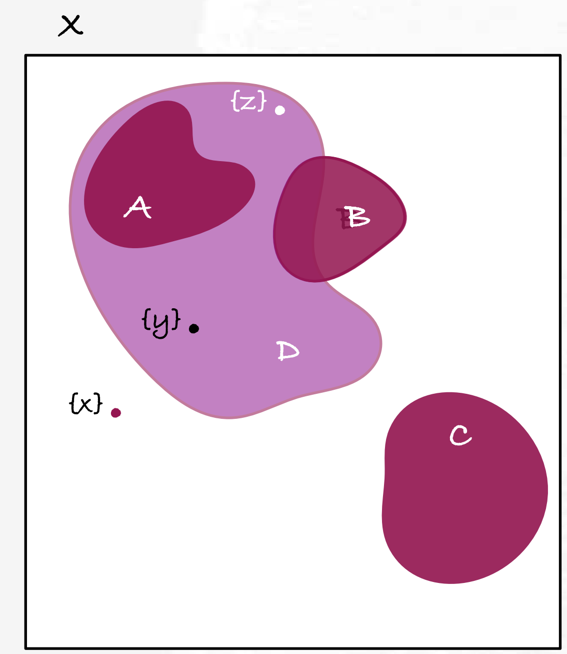


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

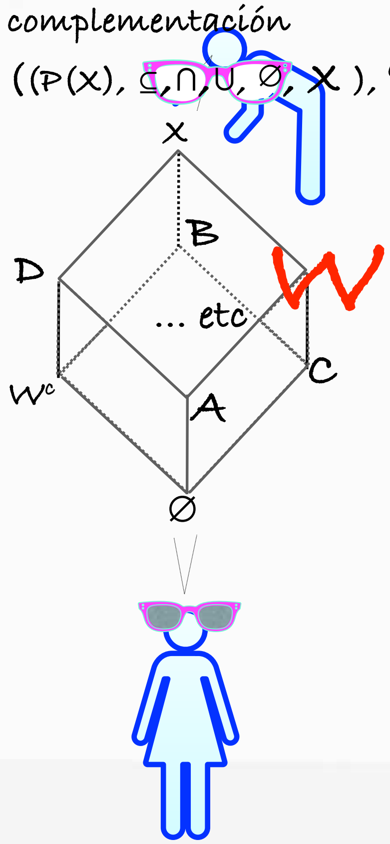
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

W: pizarra "mezcla"

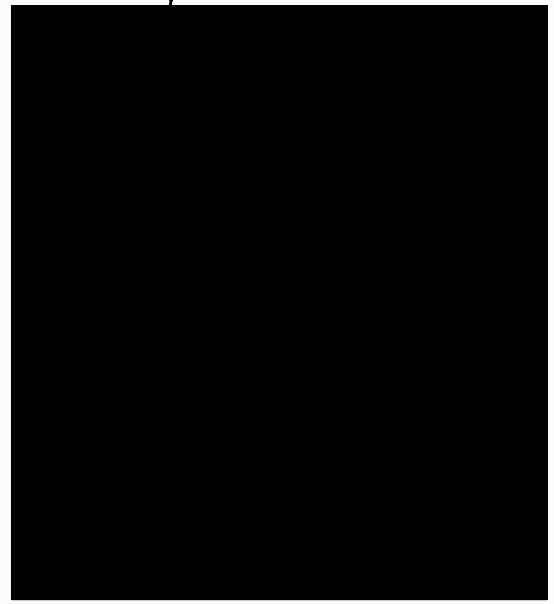




Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$

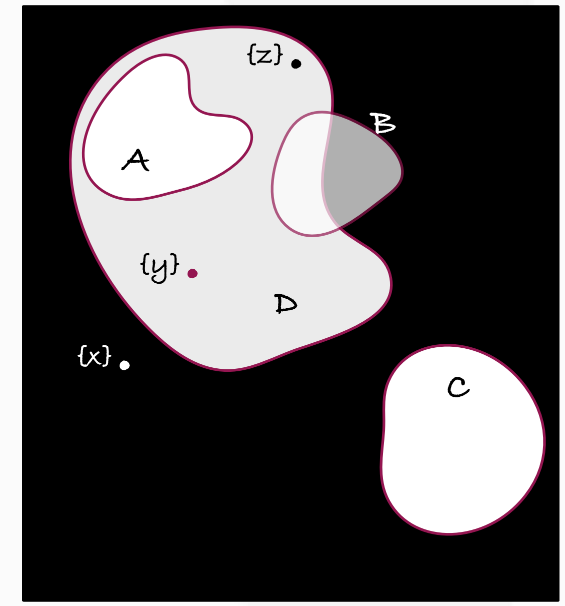


X: pizarra oscura



$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

X $(P(X), \supseteq, \cup, \cap)$



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

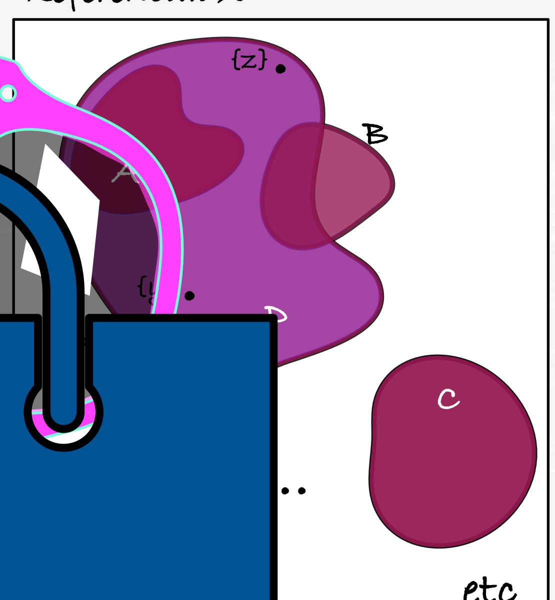
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$

$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$(P(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Referencial X



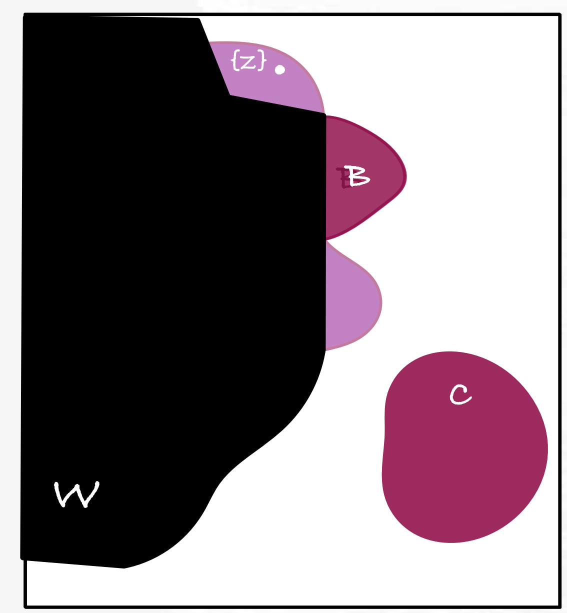
Interpretación del orden ⊆
como una "perspectiva" de
conjunto P(X) propor a
por el subconjunto

$,\subseteq,\cap,\cup)$
$D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$
a

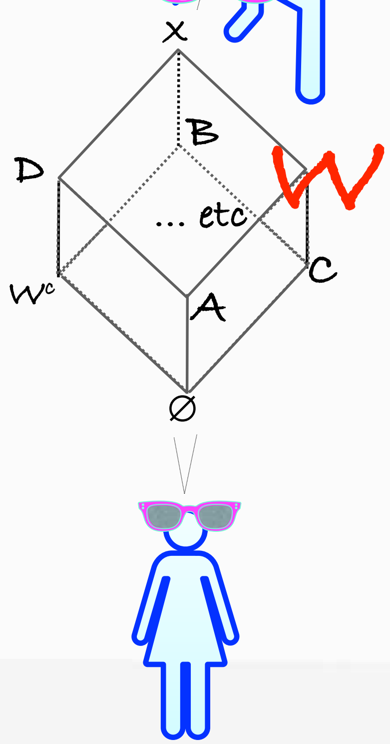
Una nueva interpretación
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que
representa, en el conjunto P(X),
la "perspectiva" desde ese
subconjunto W: el orden de
"W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

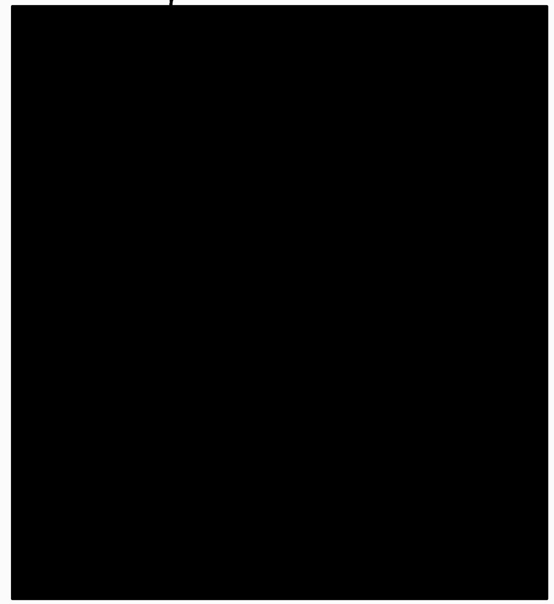
X



Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$

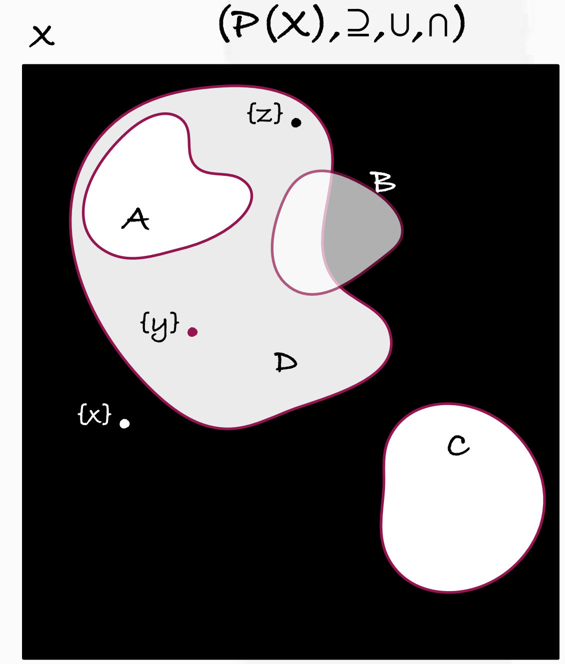


X: pizarra oscura



$A\triangle B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



$(D\supseteq A,\ D\not\supseteq B,\ B\not\supseteq D, B\cup D, B\cap D, \ldots)$

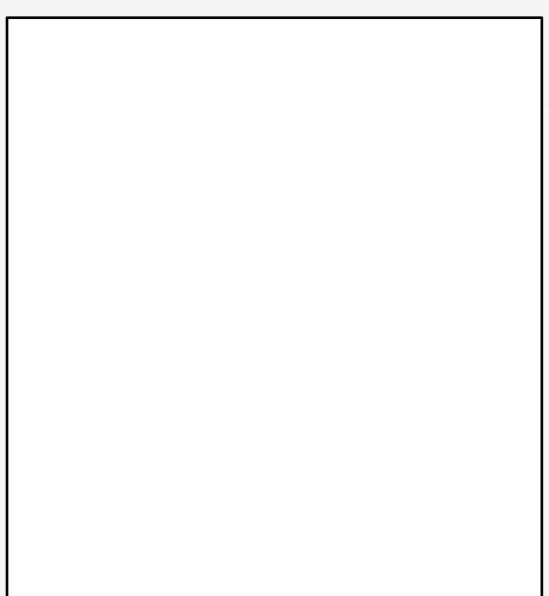
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W \subseteq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cap W \subseteq A \subseteq B\cup W$

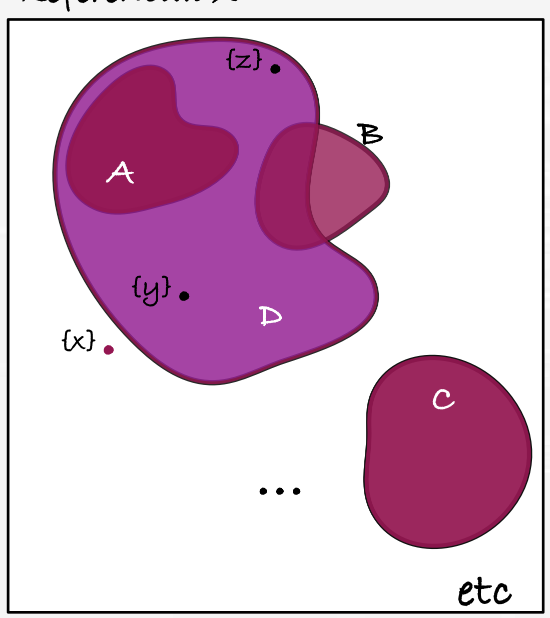
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

Referencial X



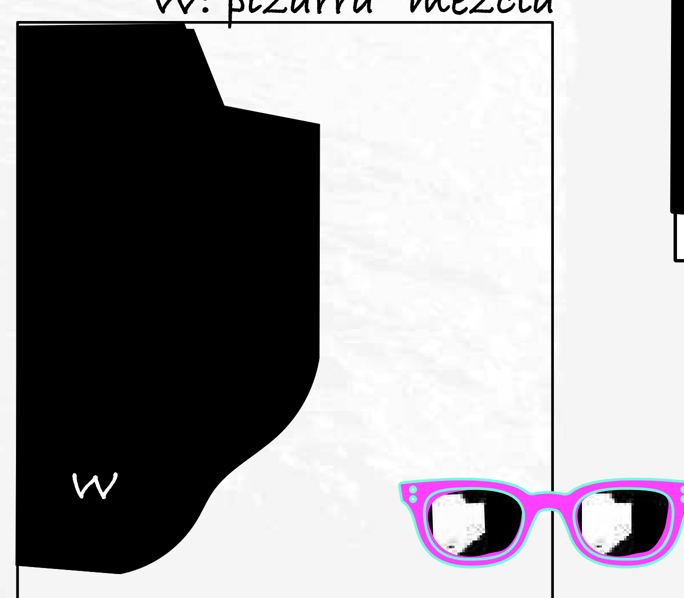
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

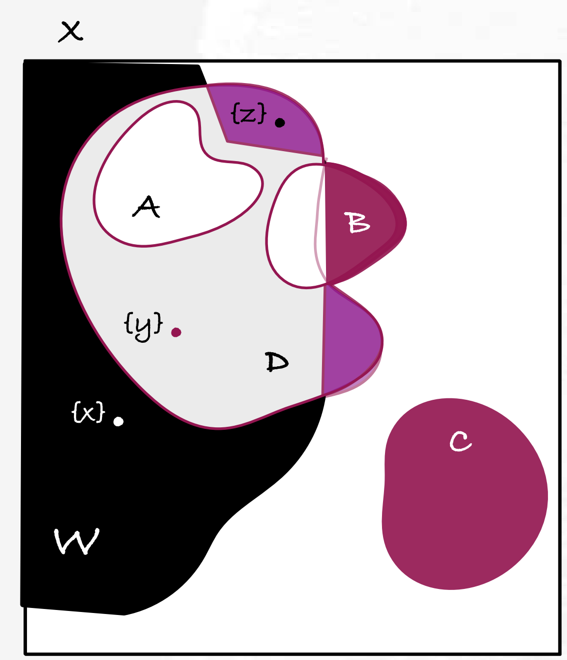
$(A\subseteq D, D\not\subseteq B, B\not\subseteq D, B\cap D, B\cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación

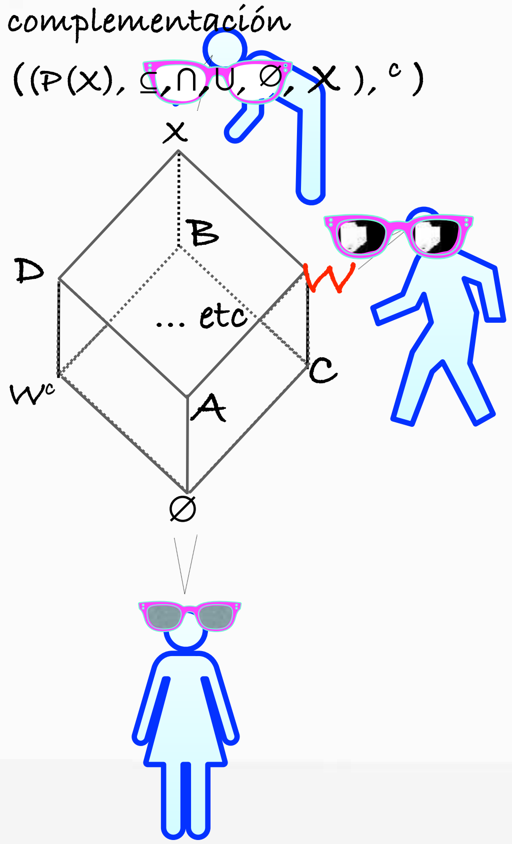
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

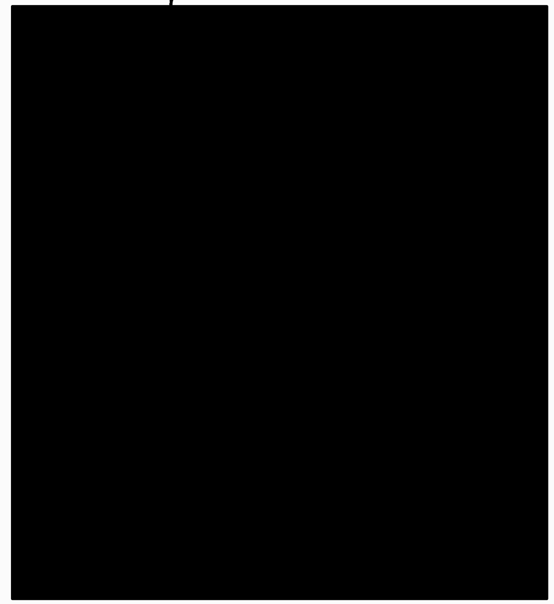




Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$

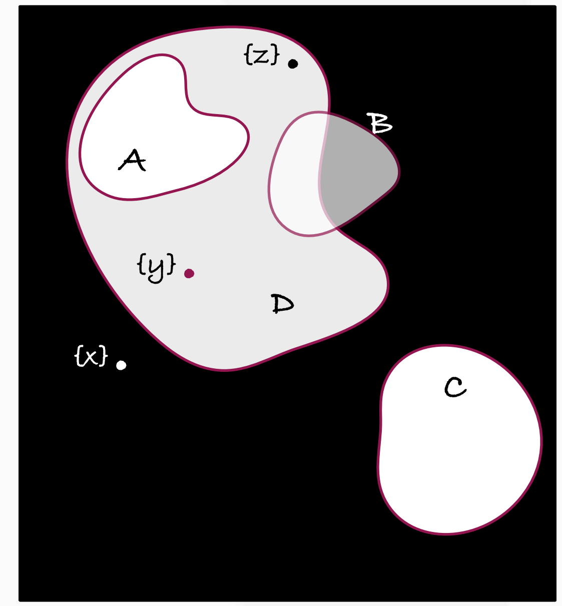


X: pizarra oscura



$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

X $(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

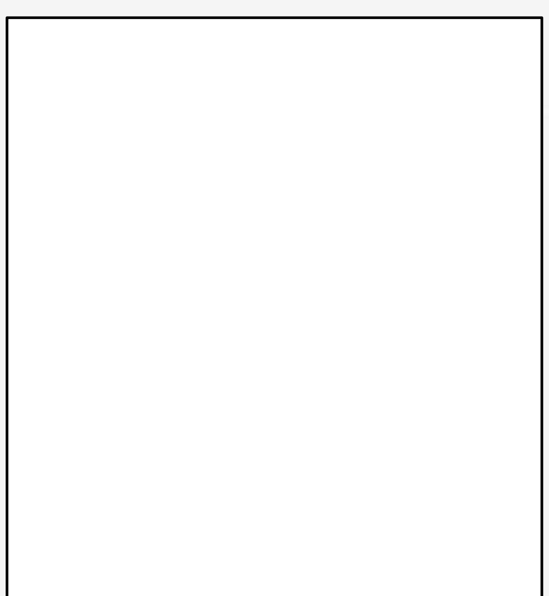


$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$
Orden de actividad
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$

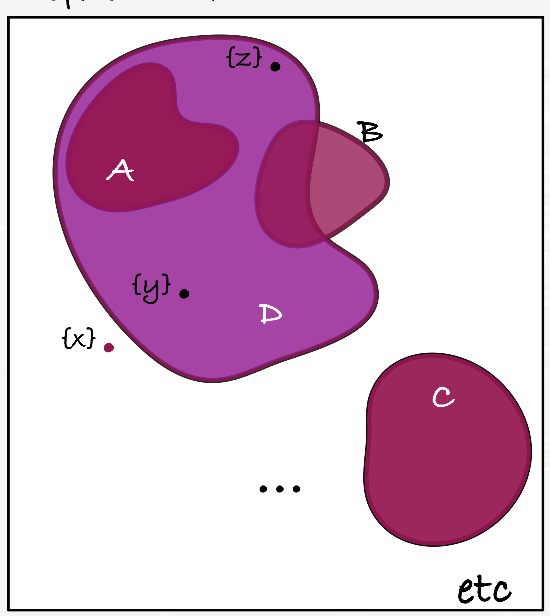
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

Referencial X

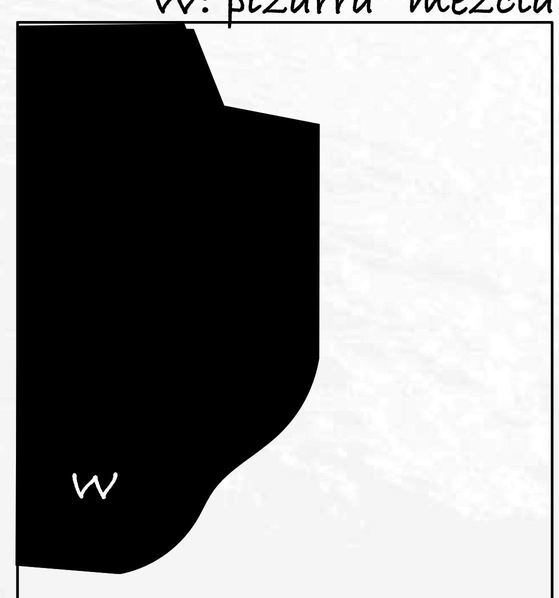


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

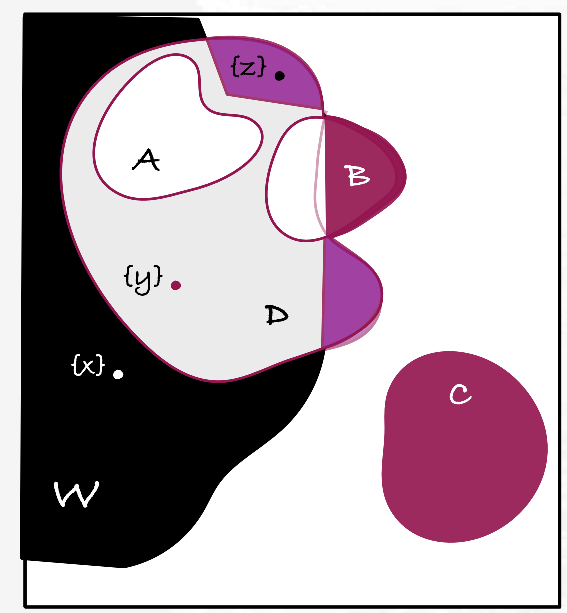
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

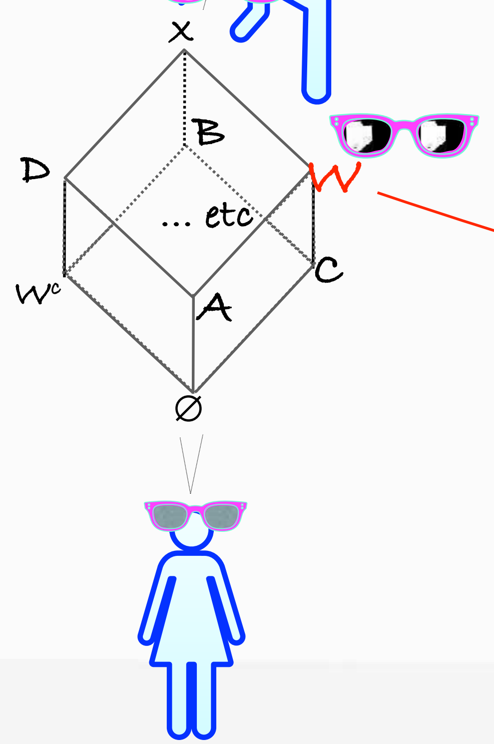
W: pizarra "mezcla"



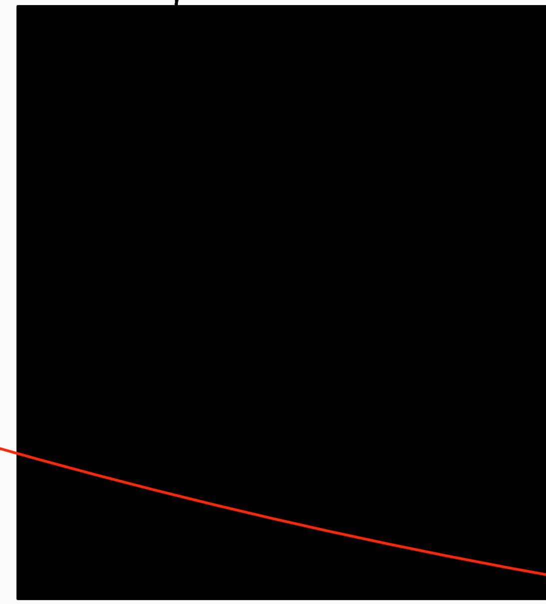
X



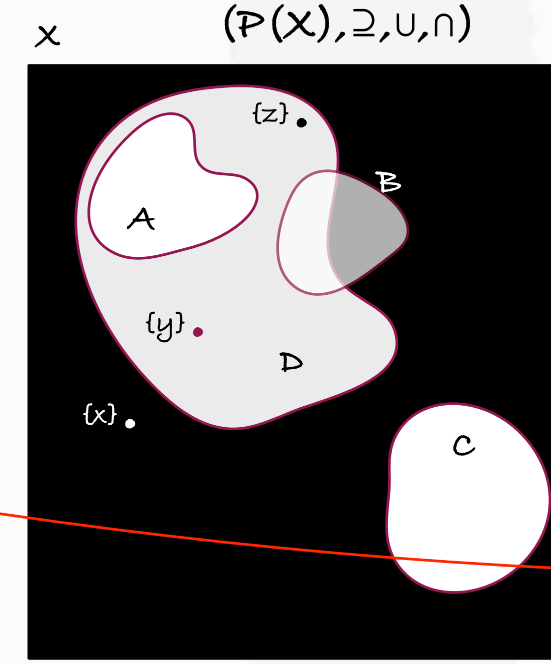
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



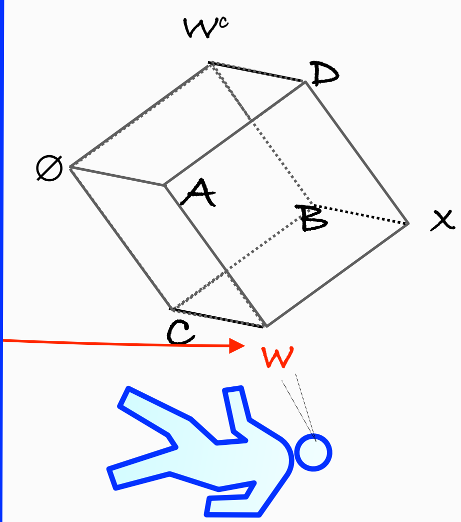
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

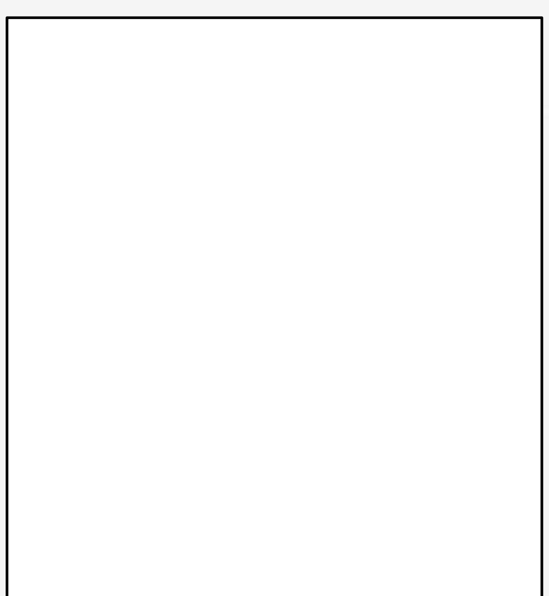
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



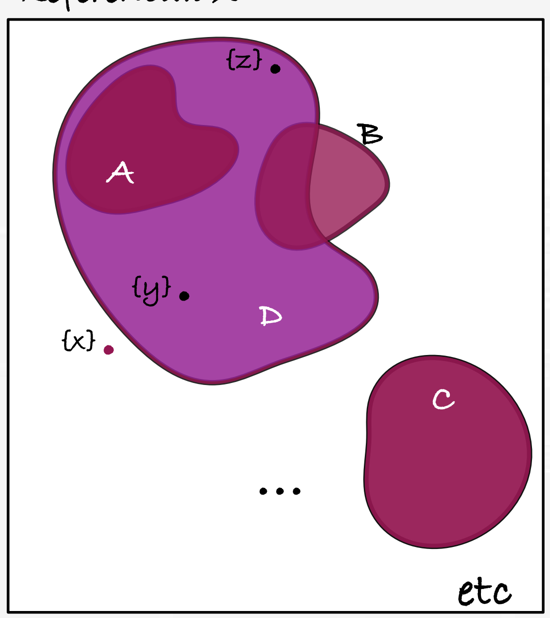
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

Referencial X



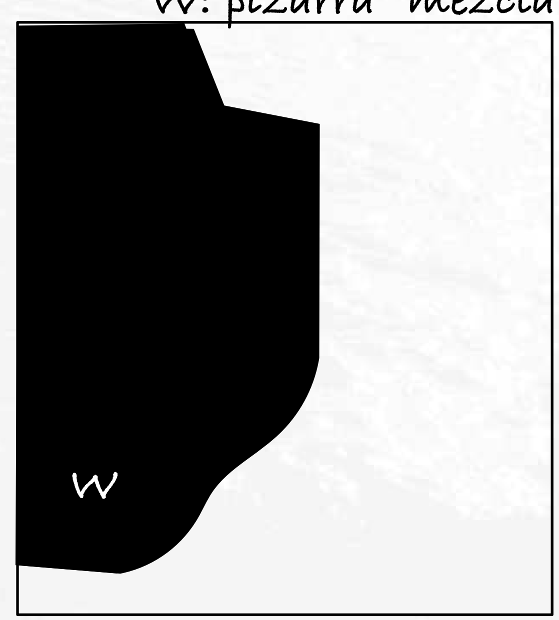
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

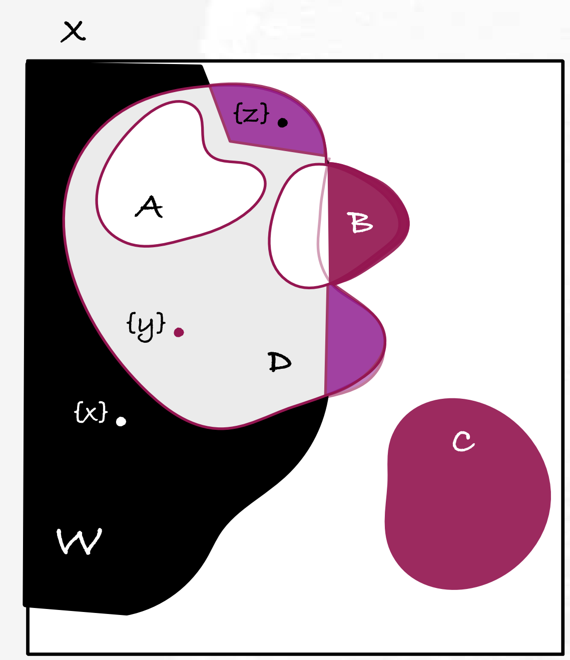
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

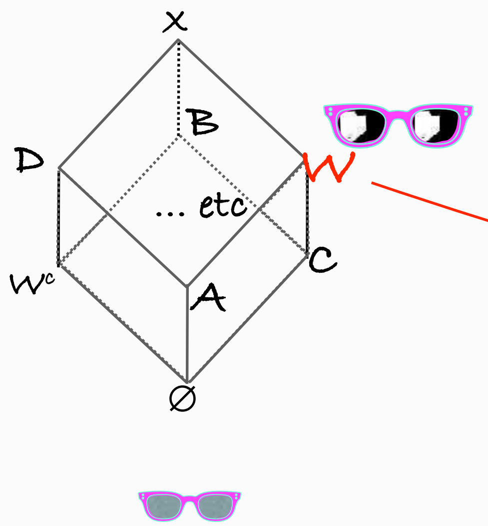




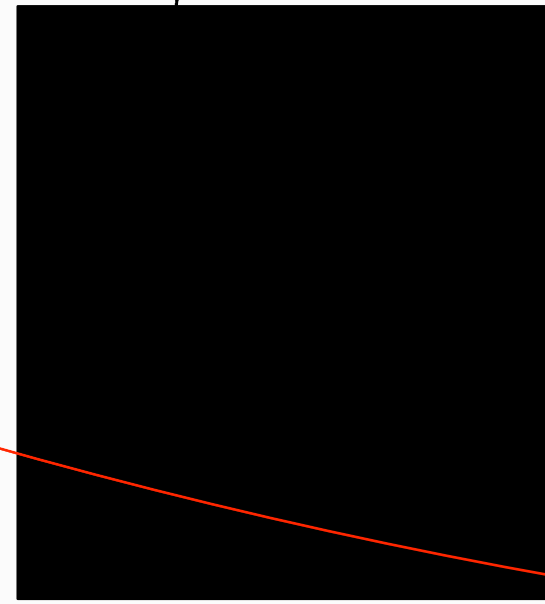
$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

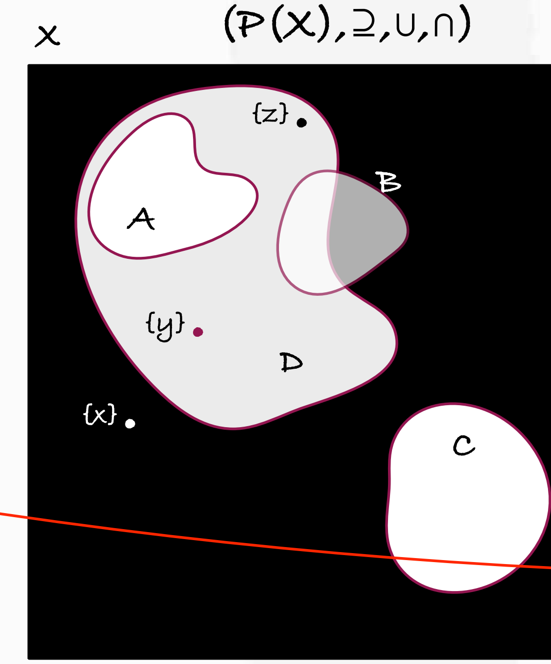
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



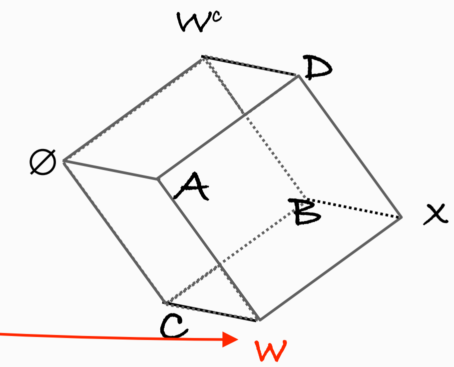
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

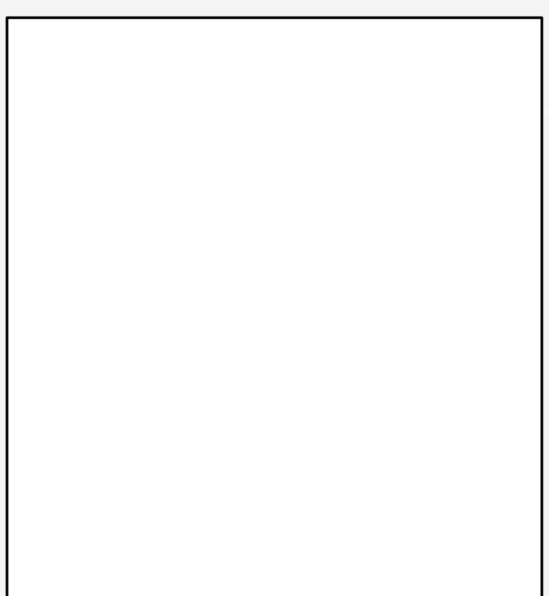
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



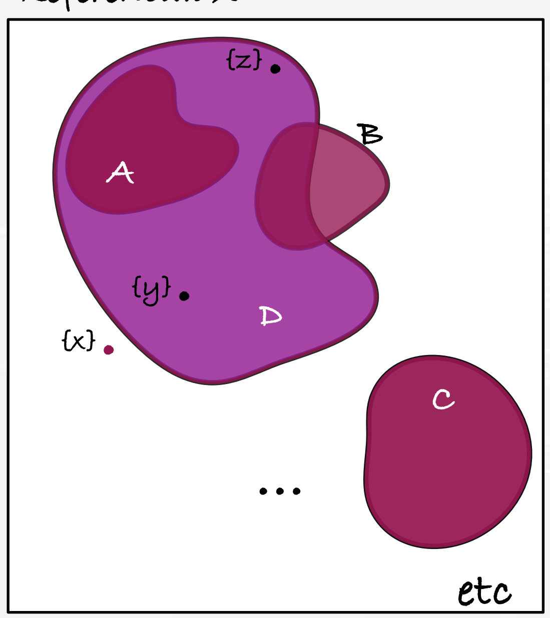
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\emptyset$:



∅: pizarra blanca

Referencial X

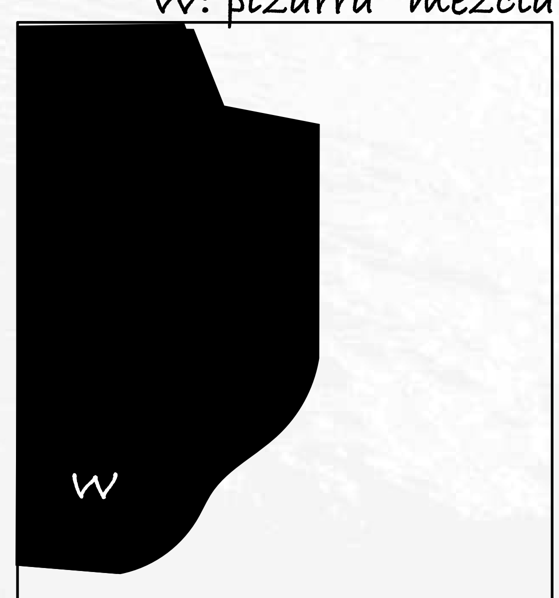


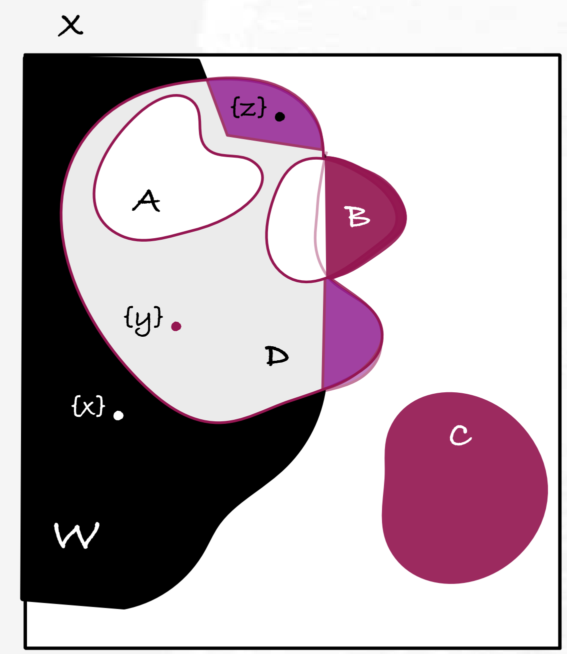
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

<u>Una nueva interpretación</u> asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

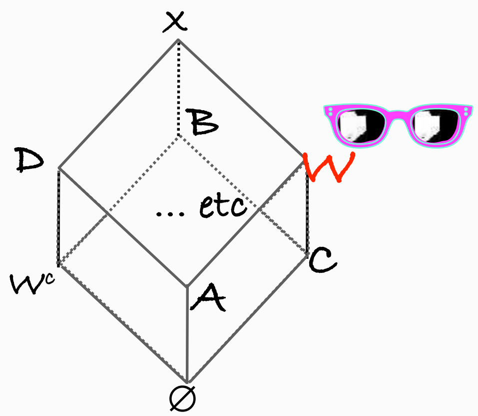
W: pizarra "mezcla"



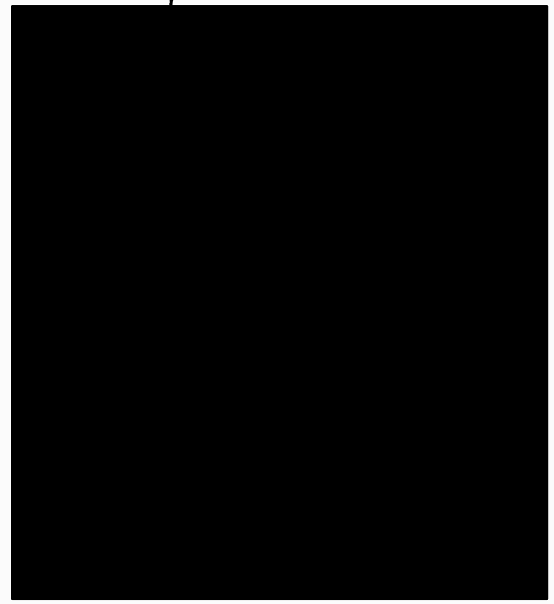


$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

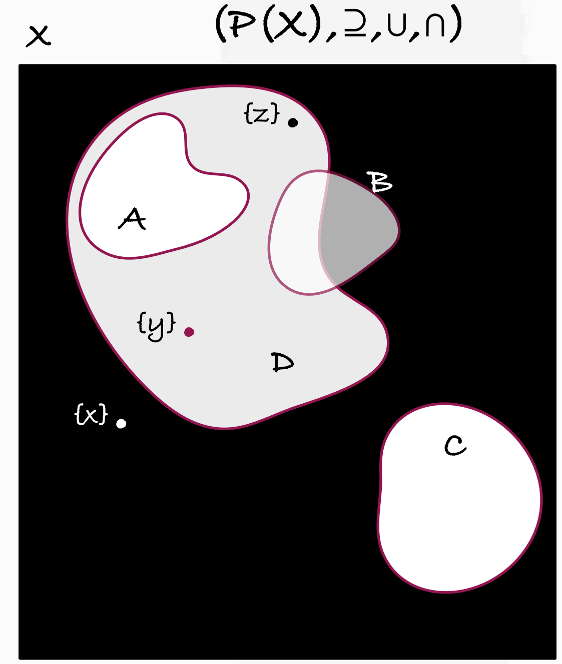
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



X: pizarra oscura



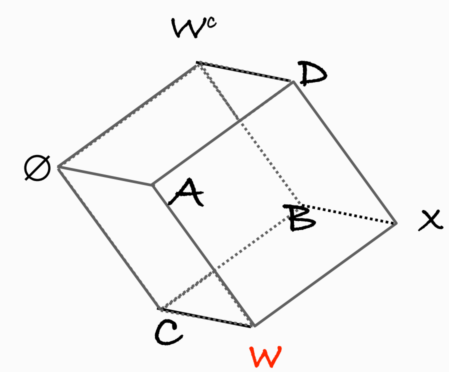
$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$



$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

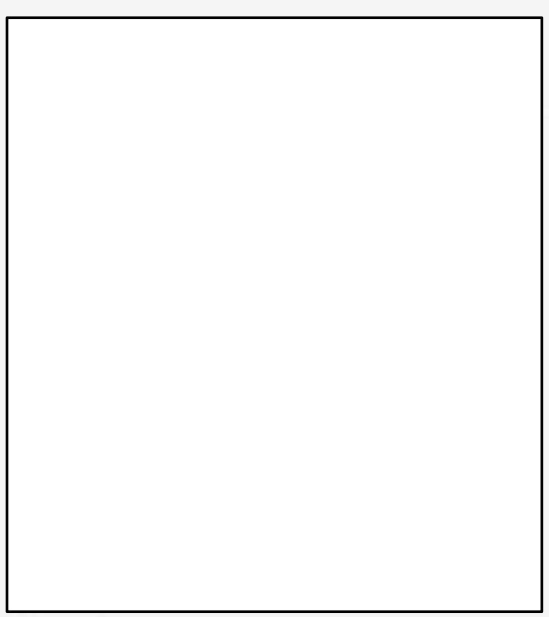
Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$
Orden de actividad
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



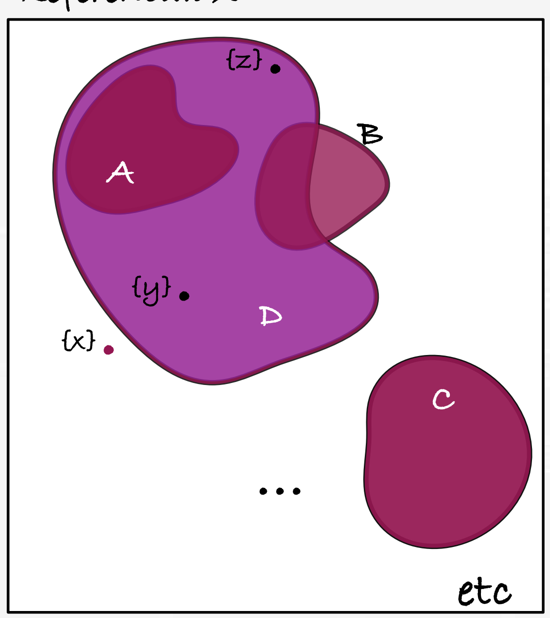
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

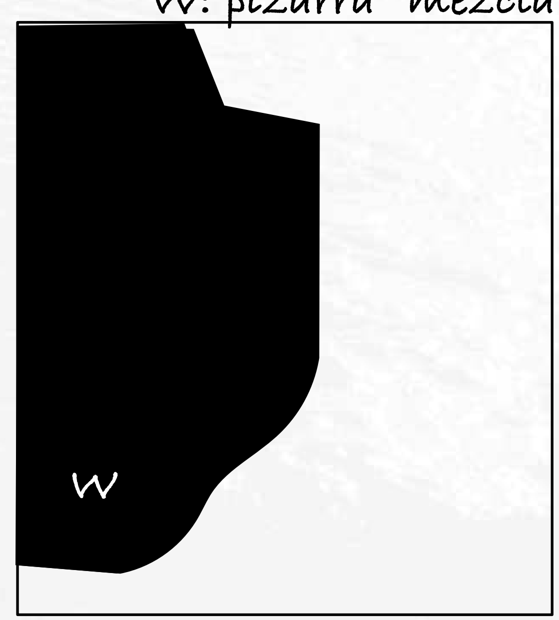
Referencial X

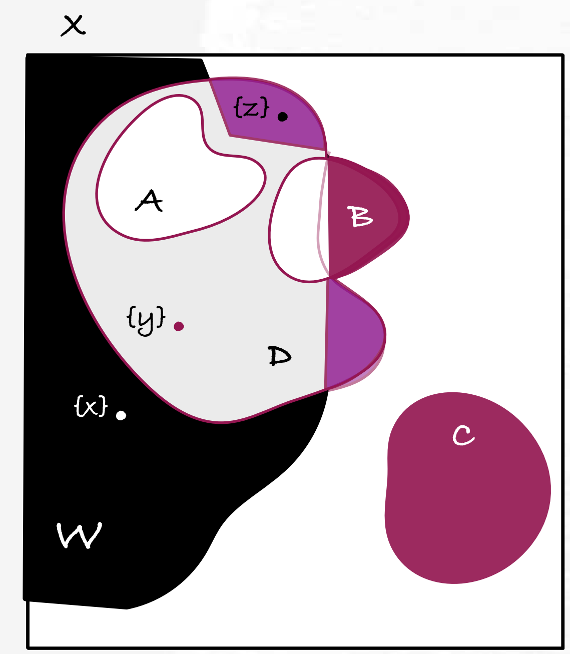


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

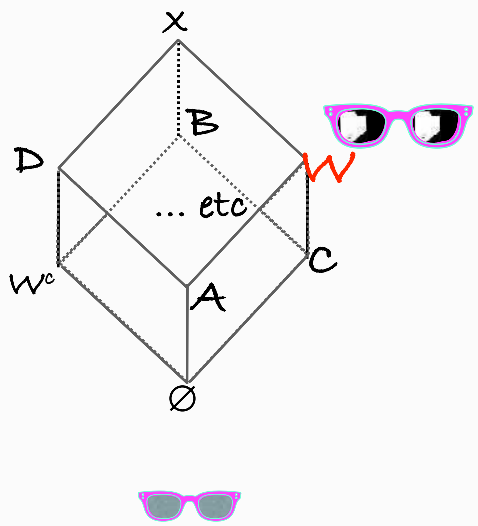
W: pizarra "mezcla"



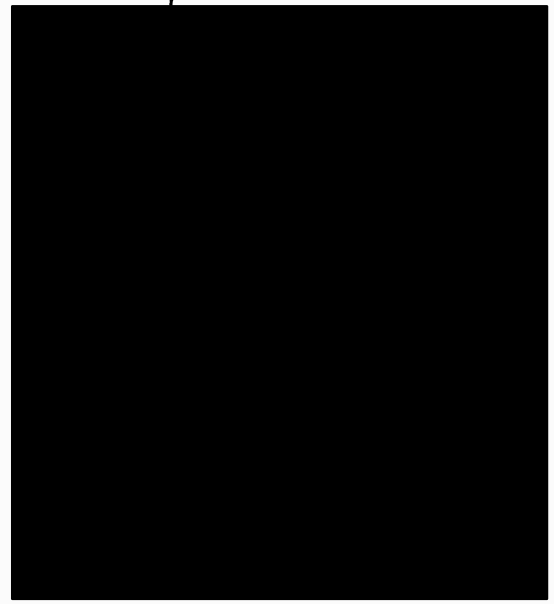


$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$

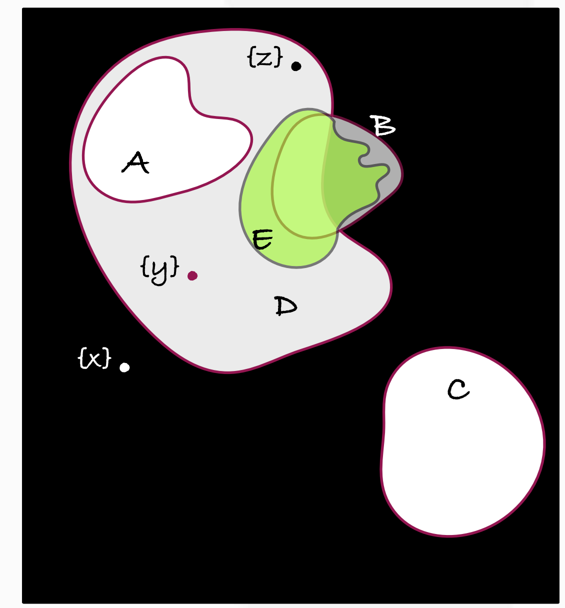


X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

X



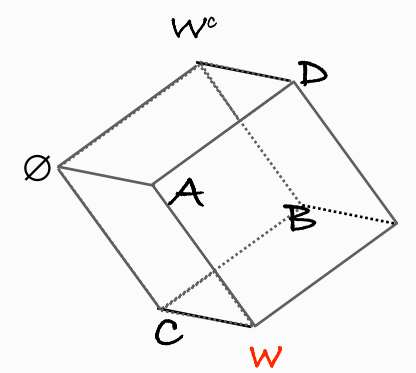
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \dots)$

Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

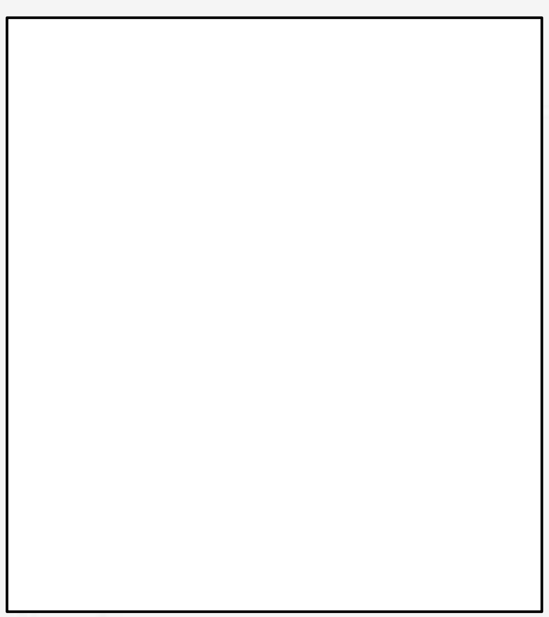
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



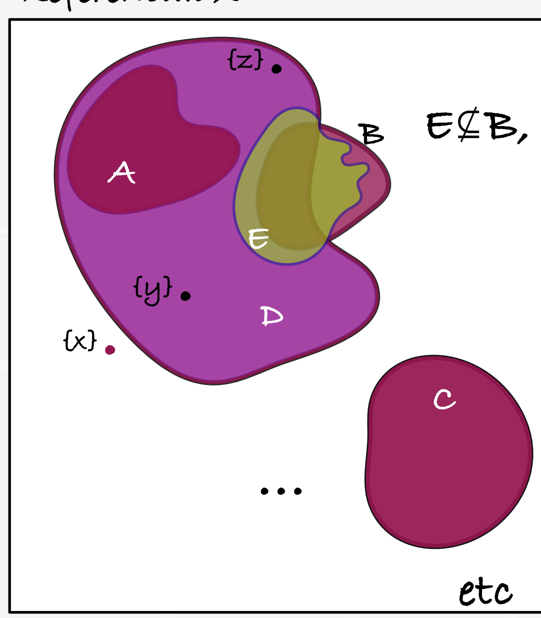
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$
como una "perspectiva" del
conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada
por el subconjunto $\emptyset$:



$\emptyset$: pizarra blanca

Referencial X

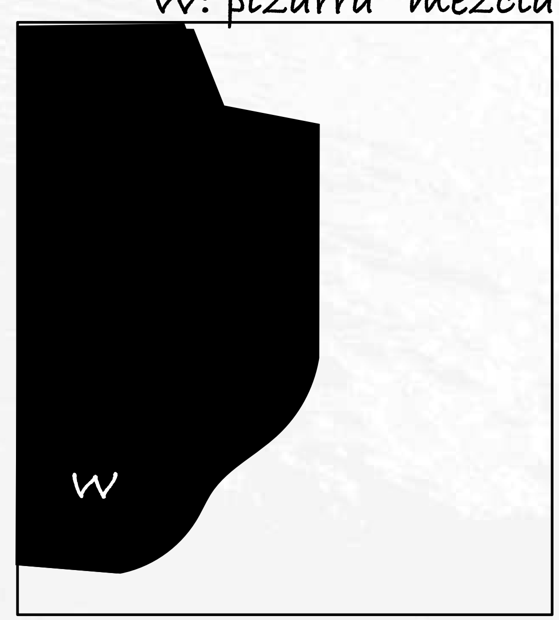


$E \not\subseteq B,\ B \not\subseteq E$

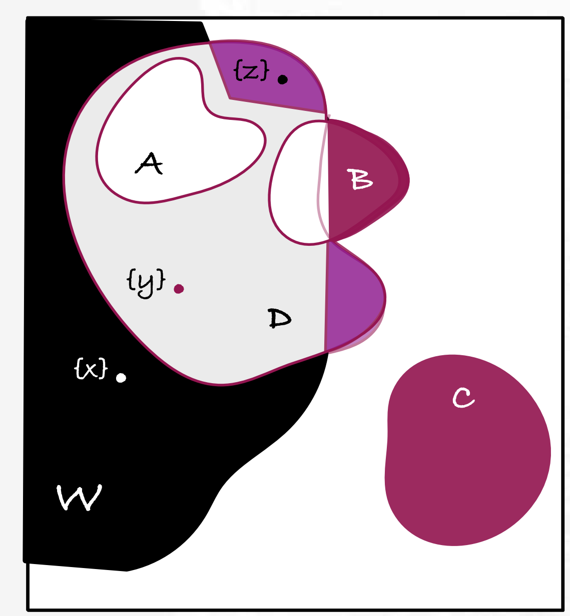
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \dots)$

Una nueva interpretación
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que
representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$,
la "perspectiva" desde ese
subconjunto W: el orden de
"W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"



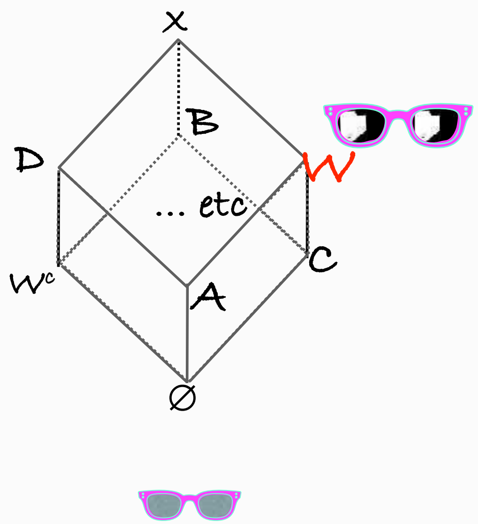
X



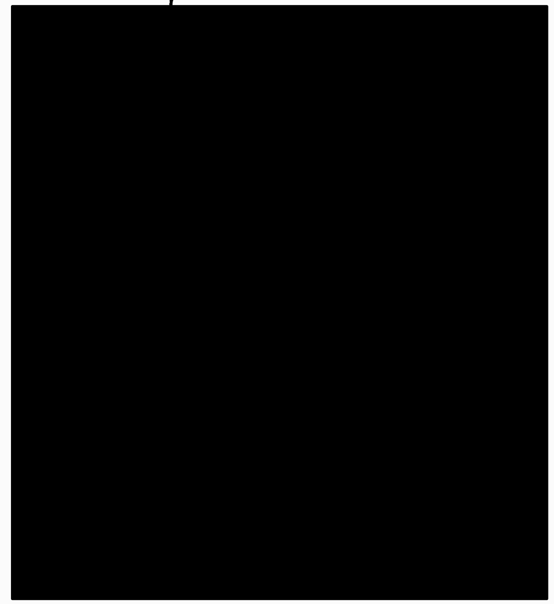
$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$

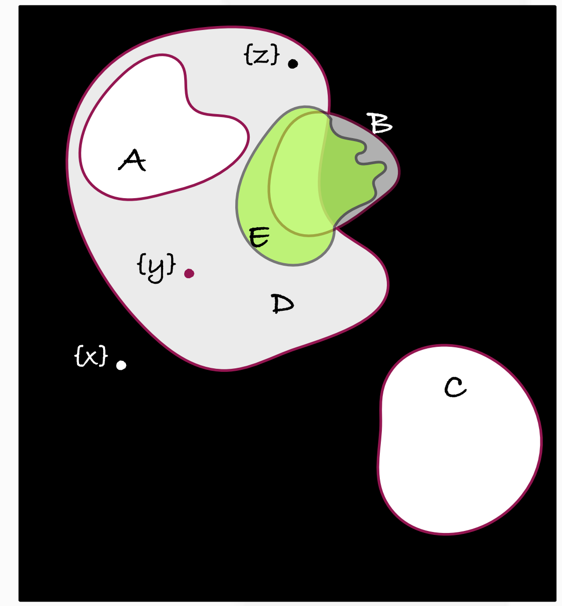


X: pizarra oscura



$(\mathcal{P}(X), \supseteq, \cup, \cap)$

X



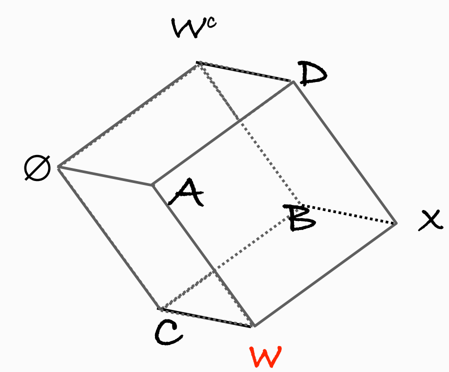
$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

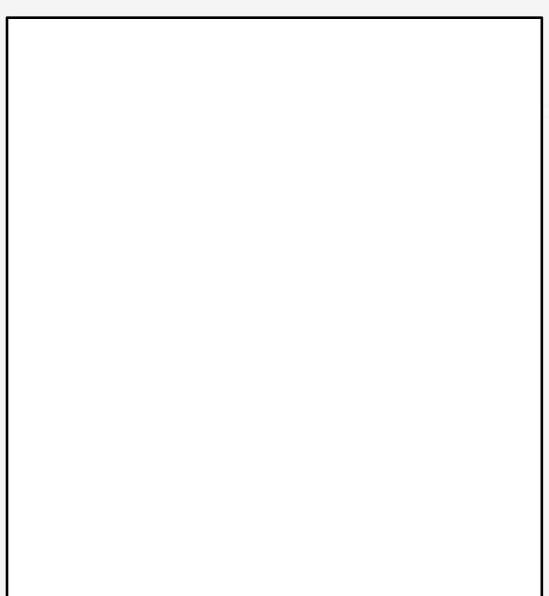
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



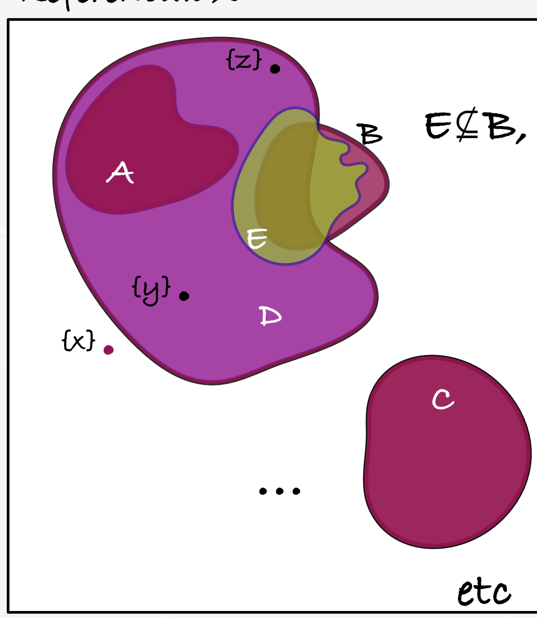
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\emptyset$:



$\emptyset$: pizarra blanca

Referencial X



$E \not\subseteq B,\ B \not\subseteq E$

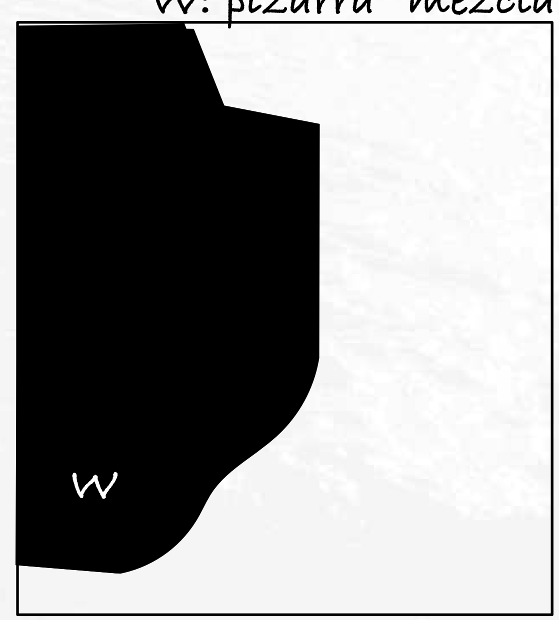
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

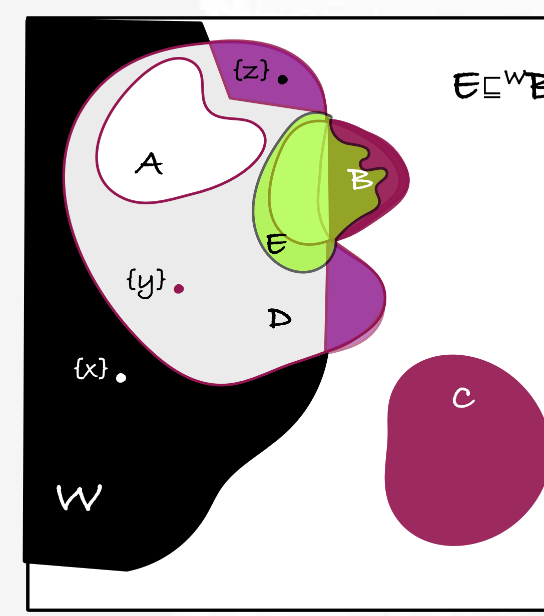
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"



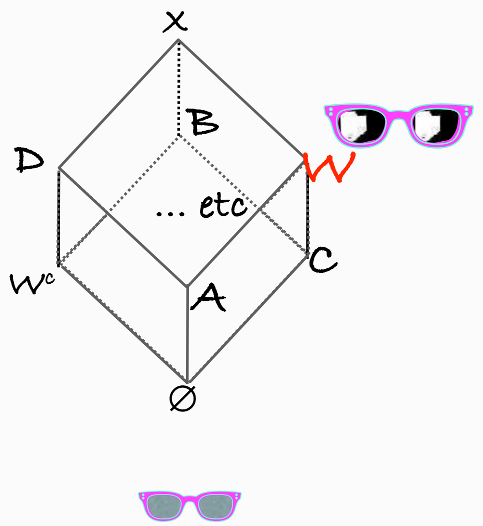
X



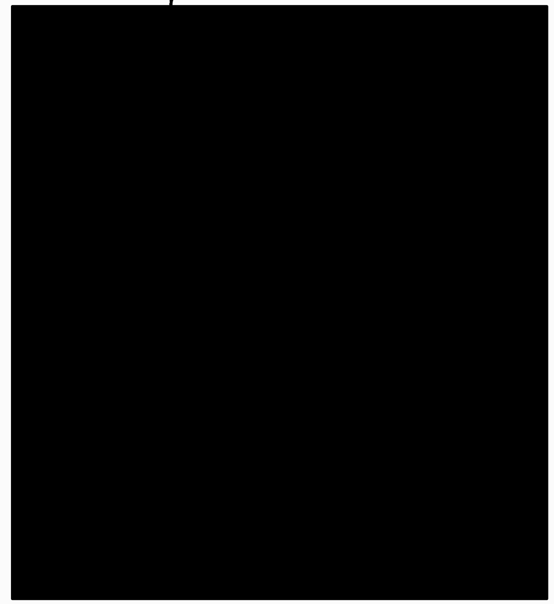
$E \sqsubseteq^W B,\ B \not\sqsubseteq^W E$

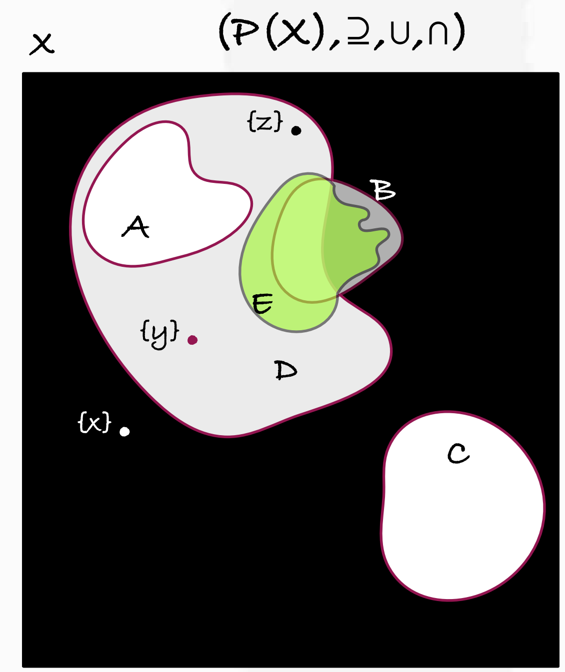
$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



X: pizarra oscura

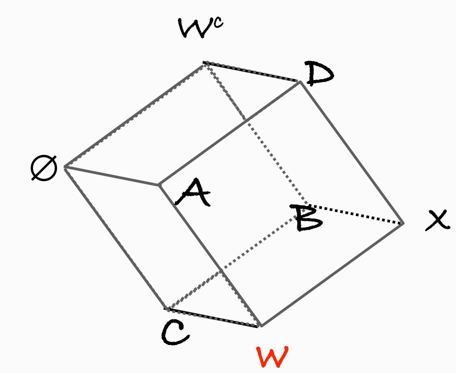




$(D \supseteq A,\ D \not\supseteq B,\ B \not\supseteq D, B \cup D, B \cap D, \ldots)$

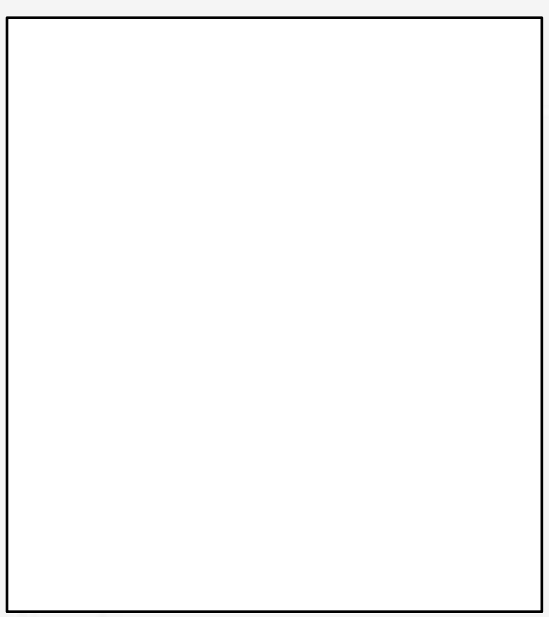
Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$
Orden de actividad
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$

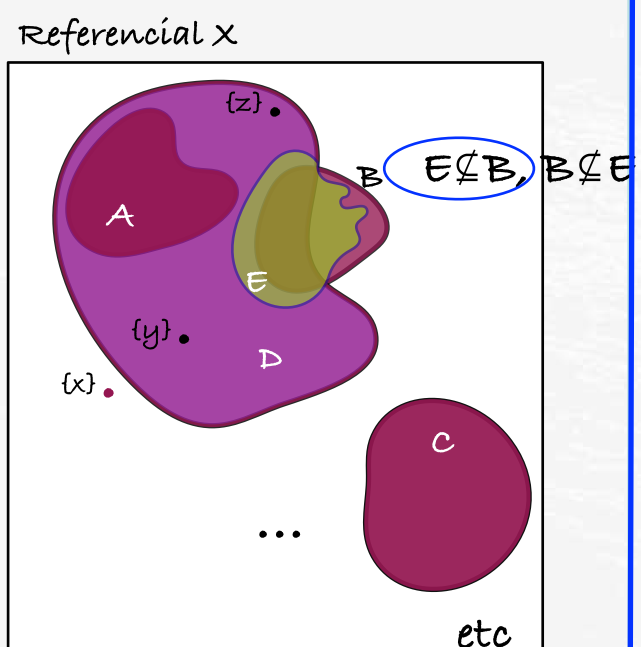


$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\emptyset$:



$\emptyset$: pizarra blanca

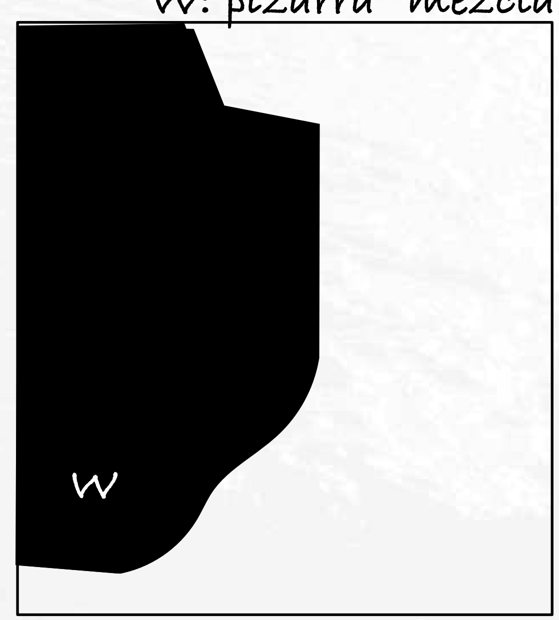


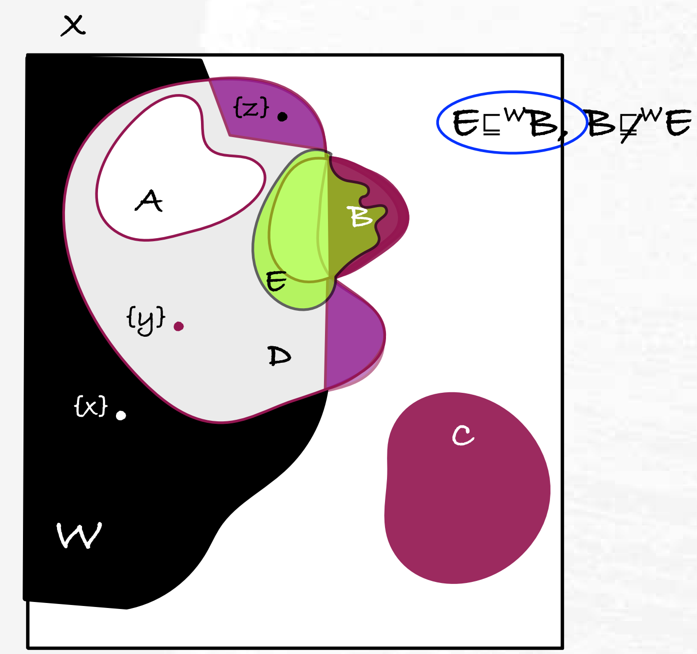
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

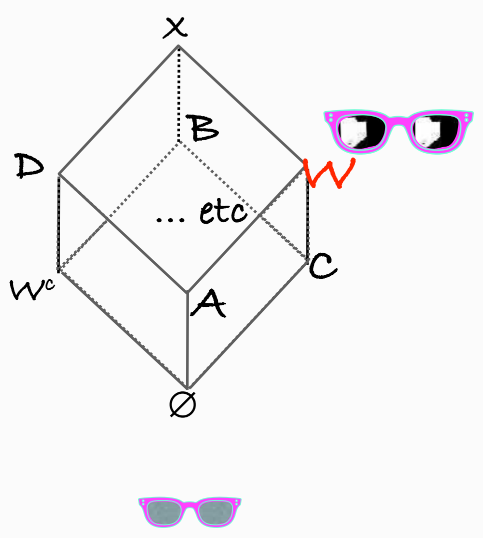
W: pizarra "mezcla"

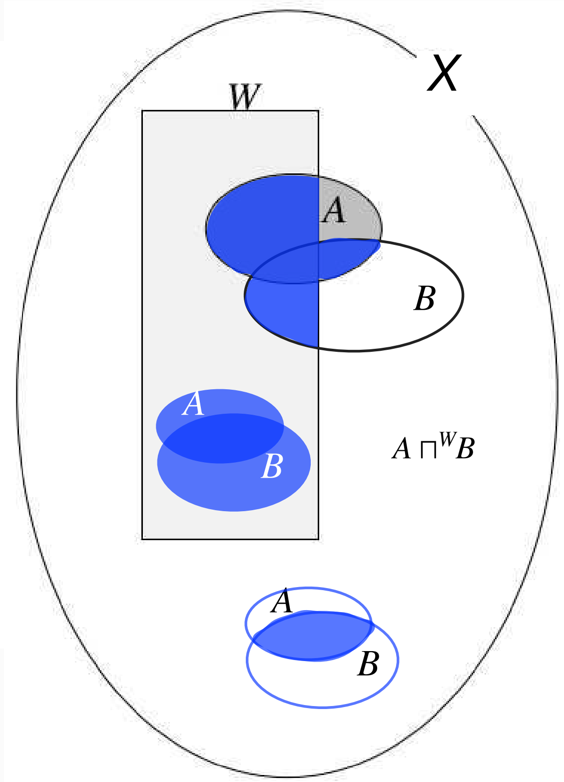




$D \not\sqsubseteq^W A,\ A \not\sqsubseteq^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



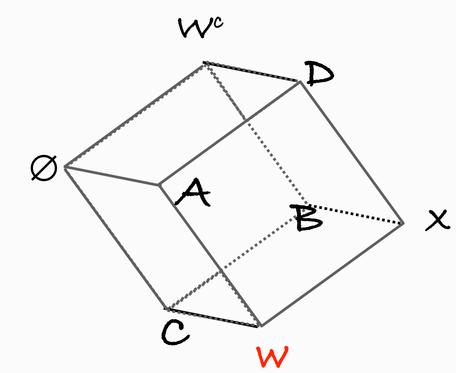


El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf :

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

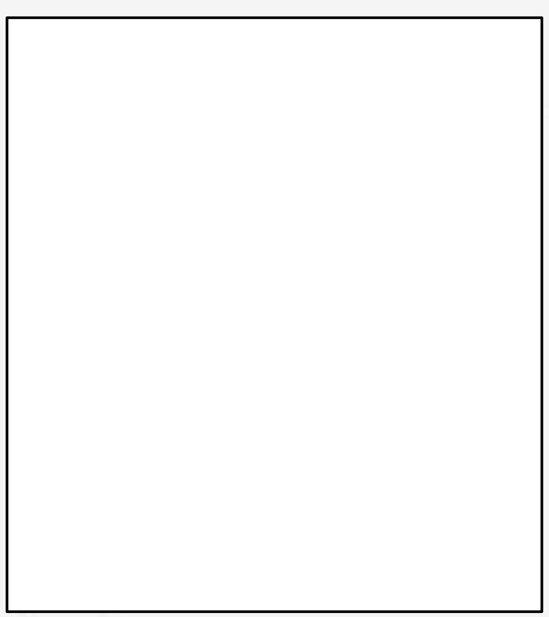
Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$
Orden de actividad
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



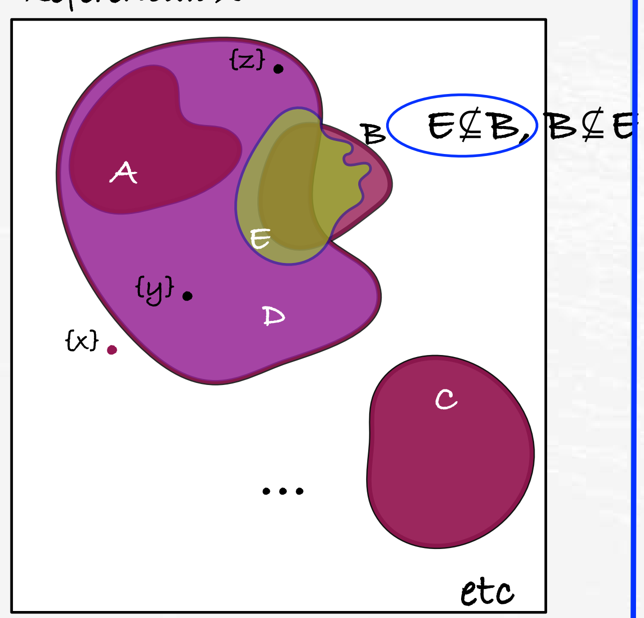
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden ⊆
como una "perspectiva" del
conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada
por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

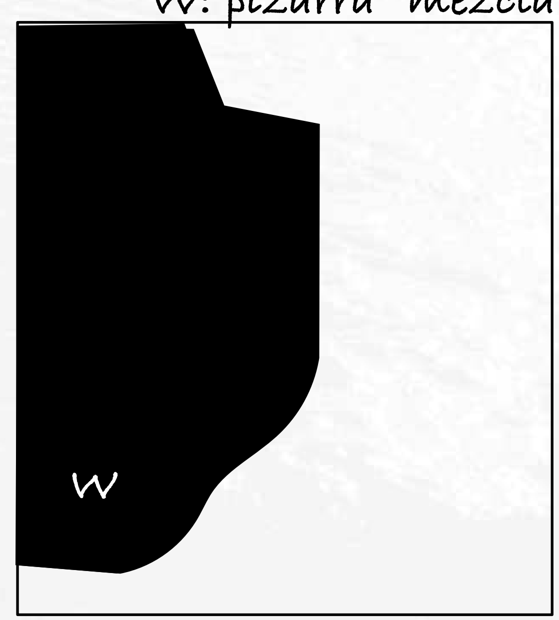
Referencial X

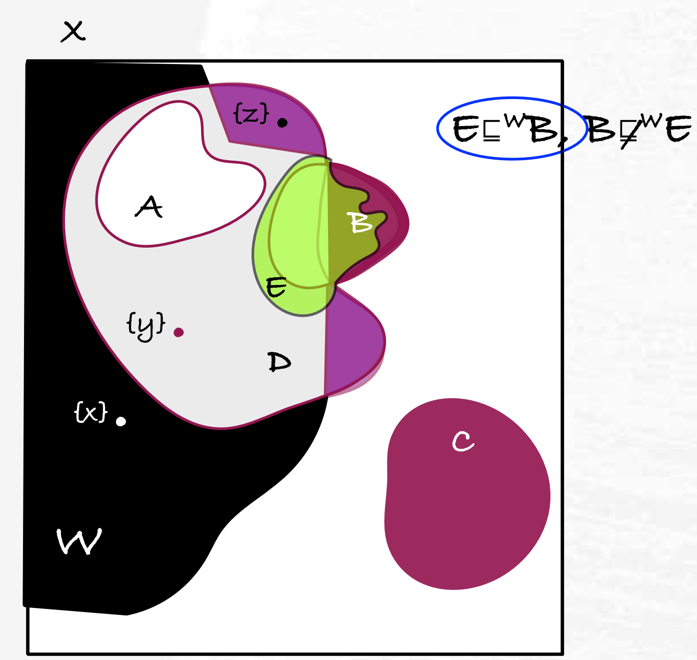


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que
representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$,
la "perspectiva" desde ese
subconjunto W: el orden de
"W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

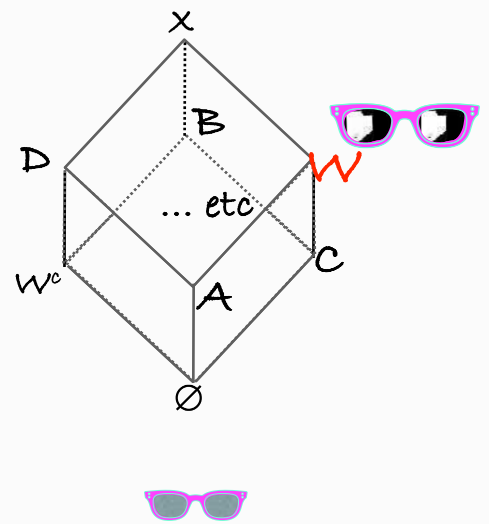


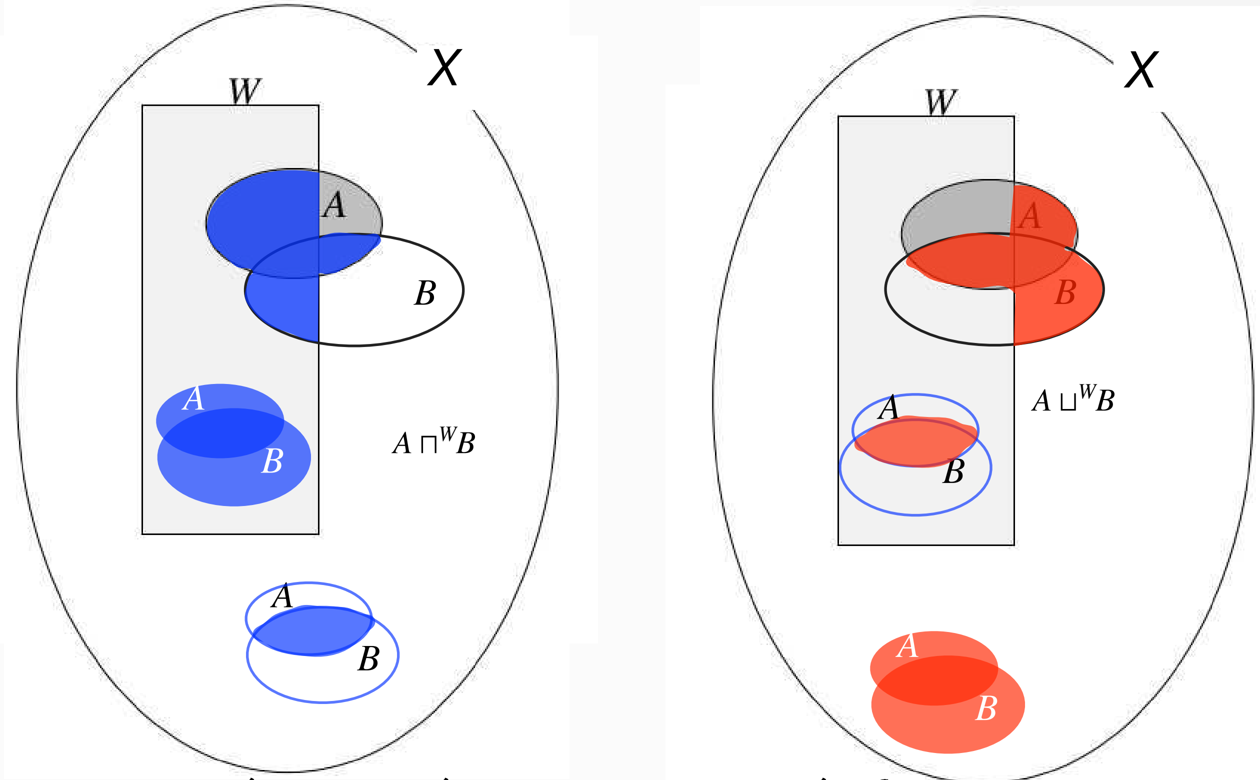


$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$





El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf :

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup :

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

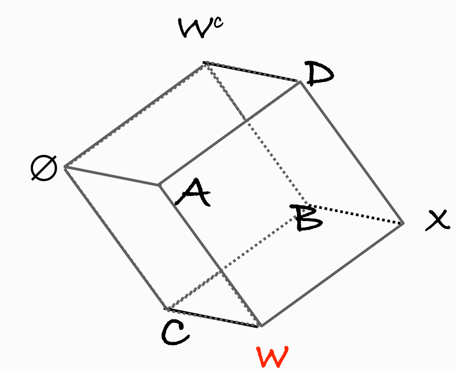
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

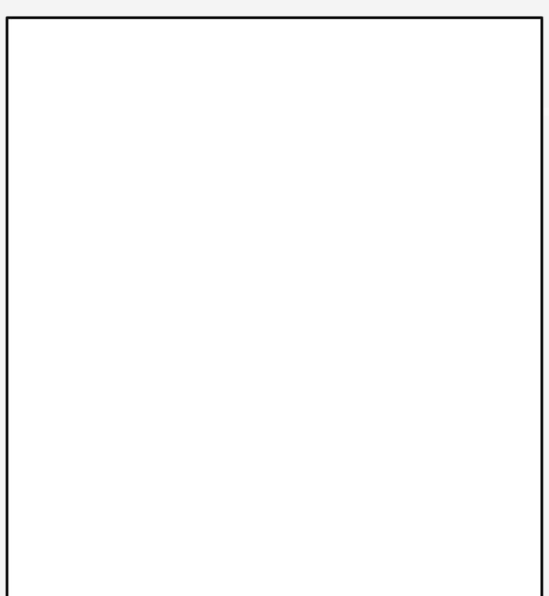
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



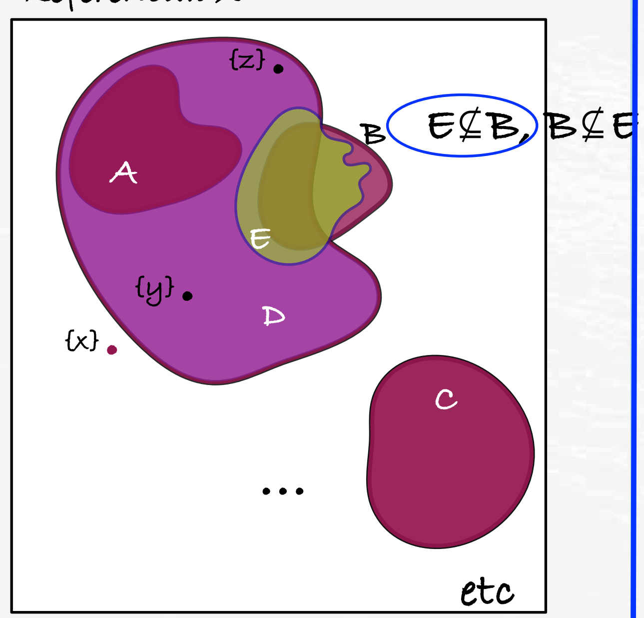
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



∅: pizarra blanca

Referencial X



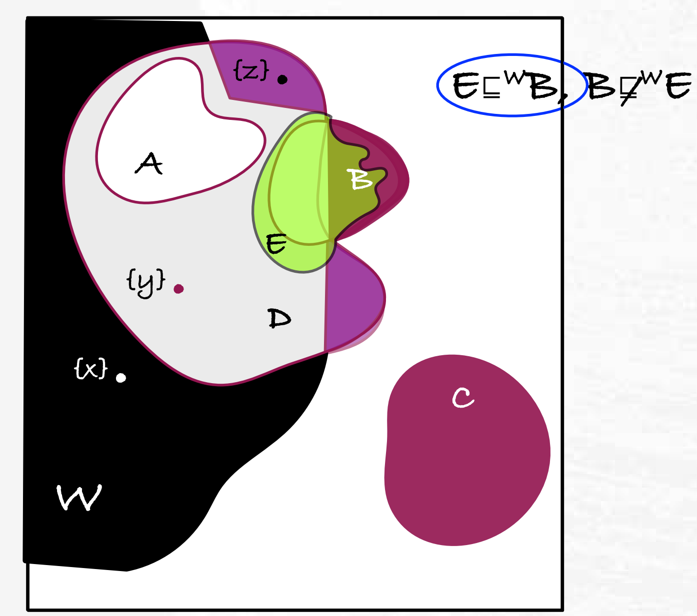
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

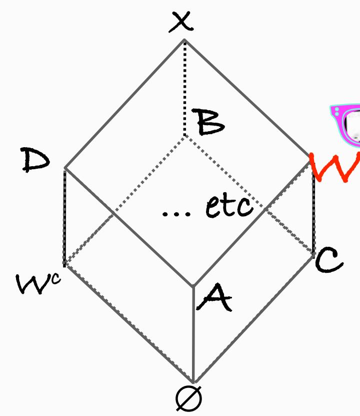
W: pizarra "mezcla"



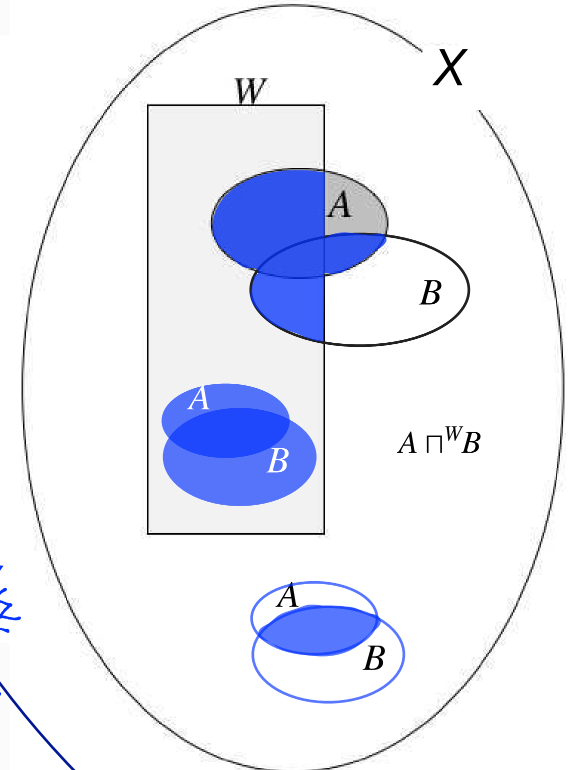
$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$, $B \sqcup^W D$,...

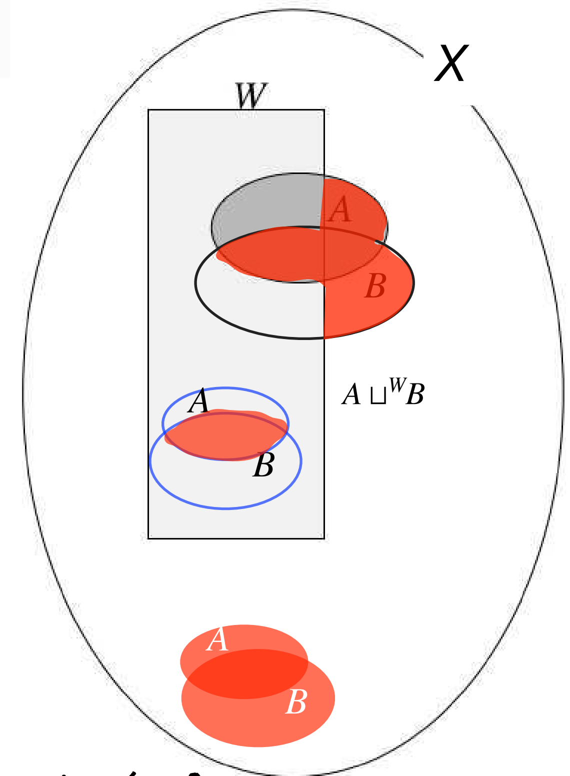
Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



isomorfismo $M \to M \triangle W$,
con $A \triangle W = (A \cap W^c) \cup (W \cap A^c)$





El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf:

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup:

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

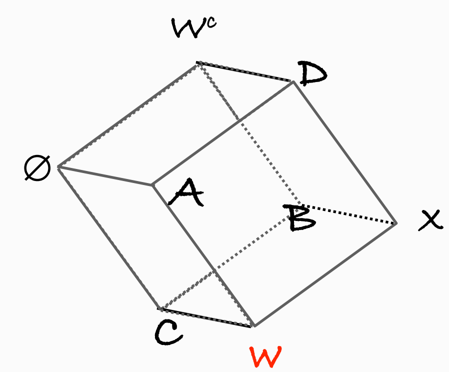
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



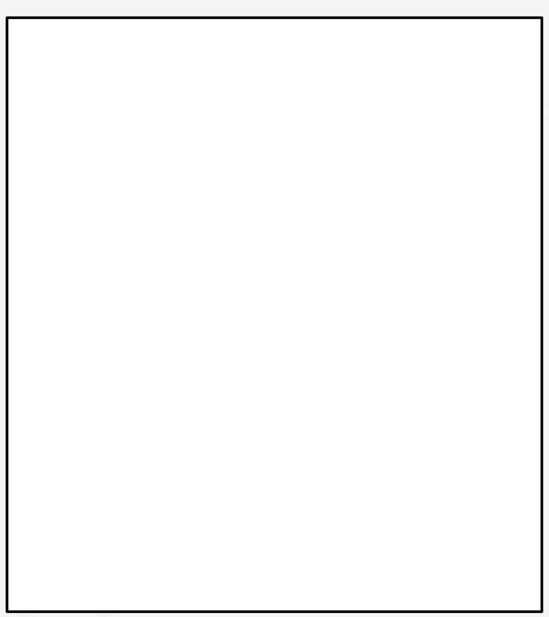
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^\varnothing, \sqcap^\varnothing, \sqcup^\varnothing, \varnothing, X), {}^c)$

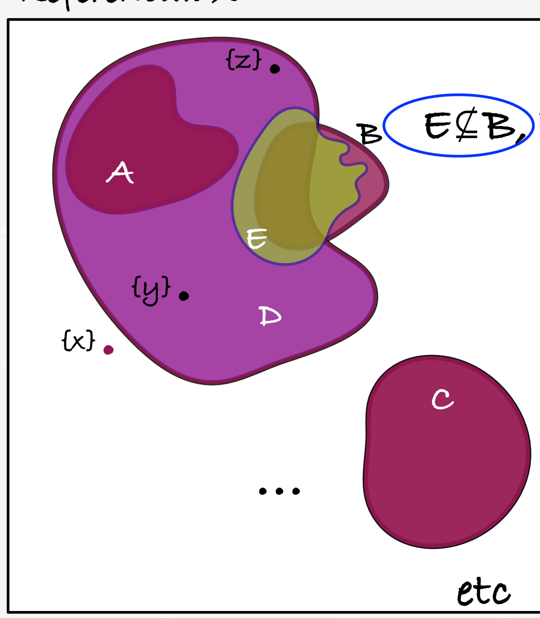
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^X, \sqcap^X, \sqcup^X, X, \varnothing), {}^c)$

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:



$\varnothing$: pizarra blanca

Referencial X



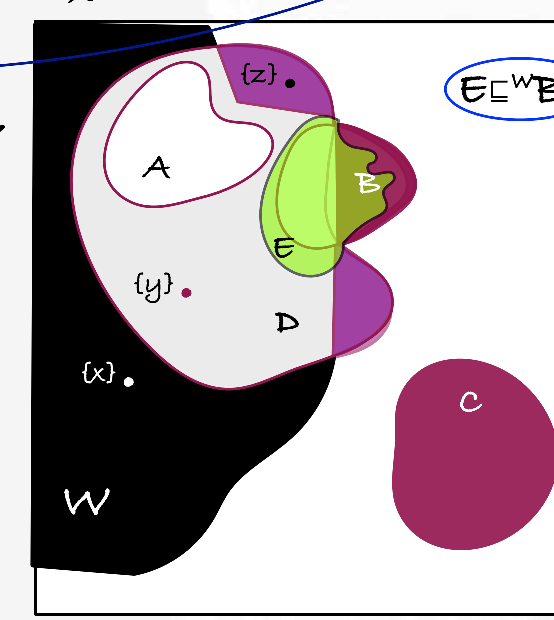
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \nsubseteq B, B \nsubseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

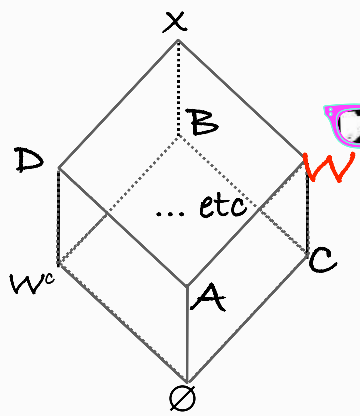
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$



$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$, $B \sqcup^W D$,...

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^{c})$

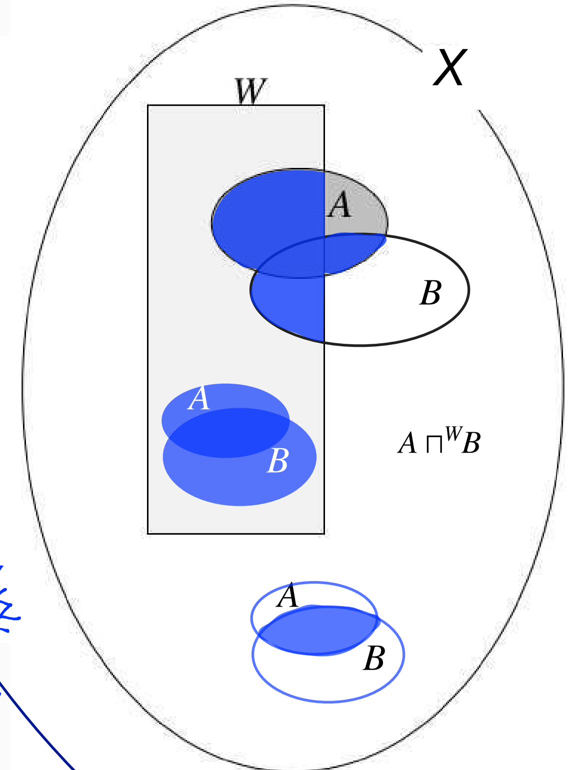


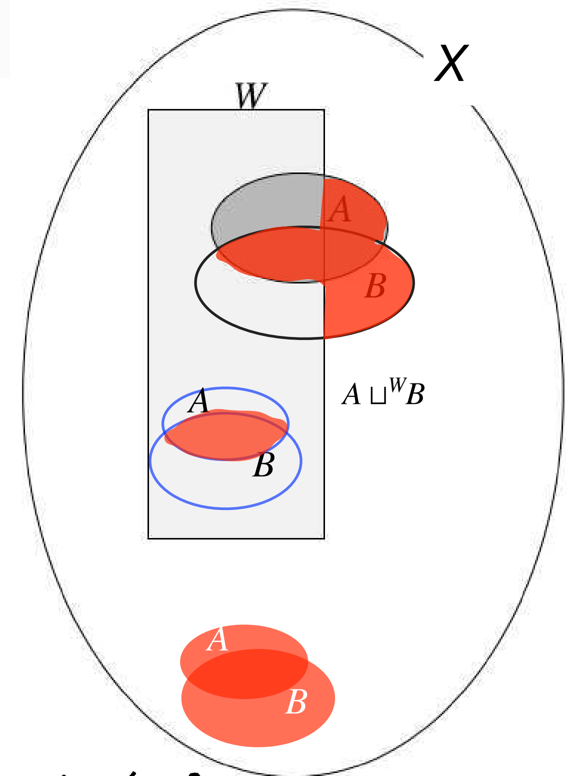
$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = X$

isomorfismo $M \to M \triangle W$,

con $M \triangle W = (M \cap W^c) \cup (M^c \cap W)$





El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf :

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup :

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

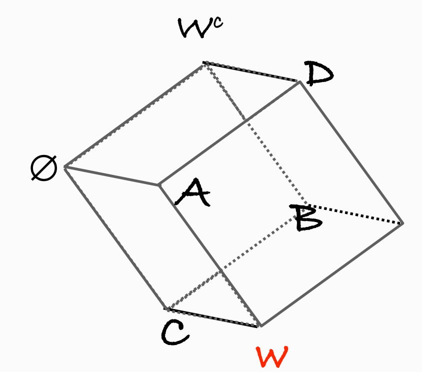
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



la misma complementación:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^{c})$

$A \sqcap^W B = W$

$A \sqcup^W B = W^c$

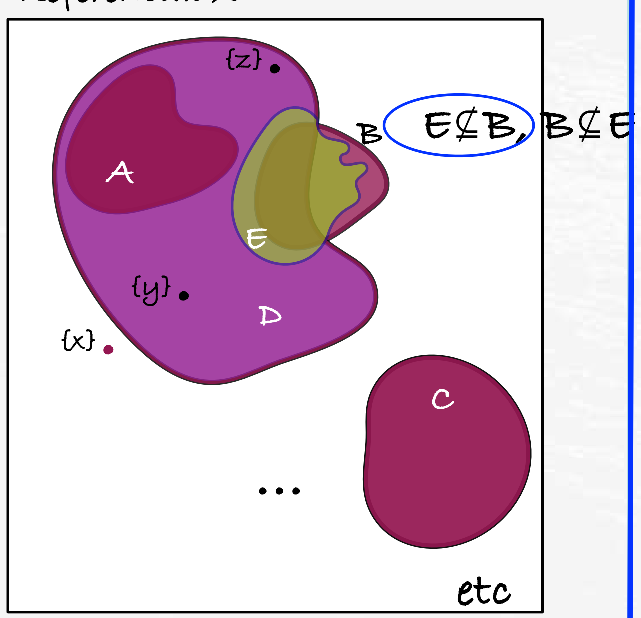
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{\varnothing}, \sqcap^{\varnothing}, \sqcup^{\varnothing}, \varnothing, X), {}^{c})$

$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{X}, \sqcap^{X}, \sqcup^{X}, X, \varnothing), {}^{c})$

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:

Referencial X



$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

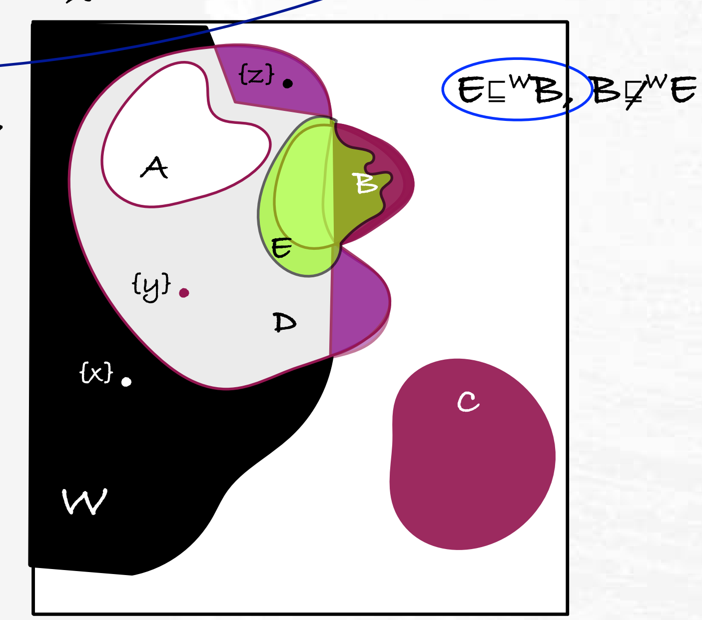
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

∅: pizarra blanca

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

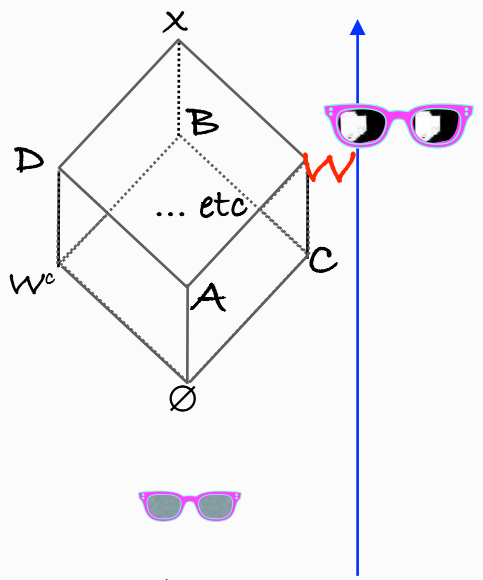
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$



$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$, $B \sqcup^W D$, ...

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y complementación

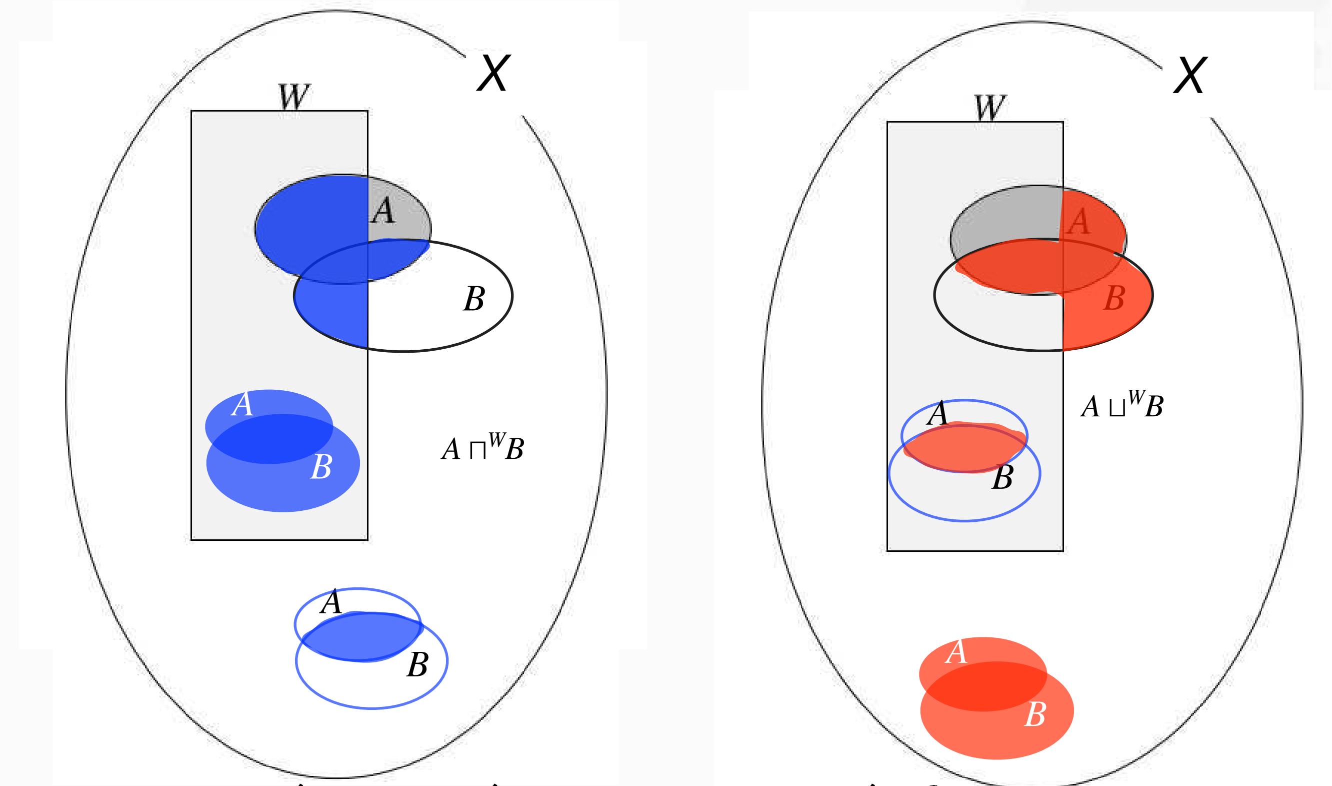
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^{c})$



$A\cap B=\varnothing$

$A\cup B=X$

$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$



El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf:

$A\sqcap^W B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]$ y un operador sup:

$A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cap B)\cup[W^c\cap(A\cup B)]$

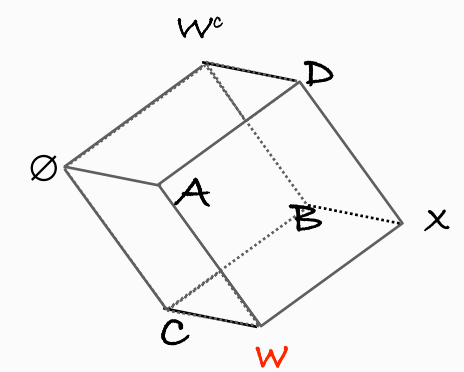
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^W))_{W\in\mathcal{P}(X)}$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\subseteq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cap W\subseteq A\subseteq B\cup W$



la misma complementación:

$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),{}^{c})$

$A\sqcap^W B=W$

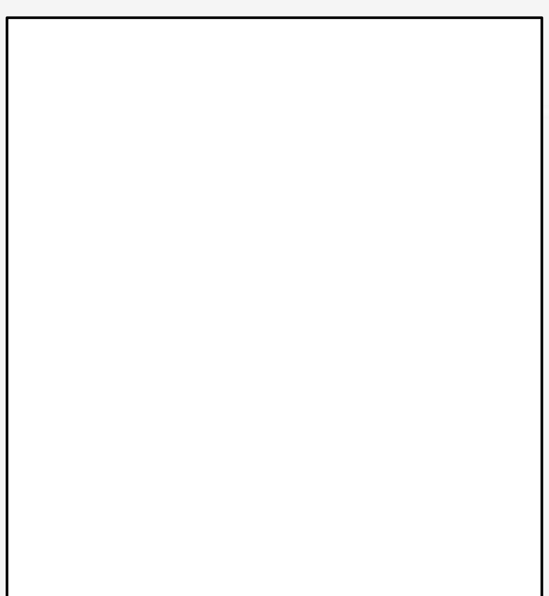
$A\sqcup^W B=W^c$

$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

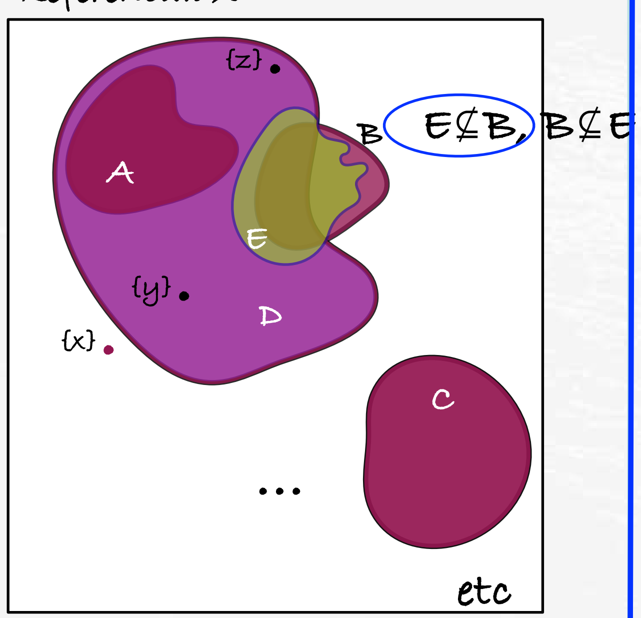
$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{\varnothing},\sqcap^{\varnothing},\sqcup^{\varnothing},\varnothing,X),{}^{c})$

$(\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{X},\sqcap^{X},\sqcup^{X},X,\varnothing),{}^{c})$

Interpretación del orden ⊆ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:



Referencial X



$(\mathcal{P}(X),\subseteq,\cap,\cup)$

$(A\subseteq D, D\not\subseteq B, B\not\subseteq D, B\cap D, B\cup D,\ldots)$

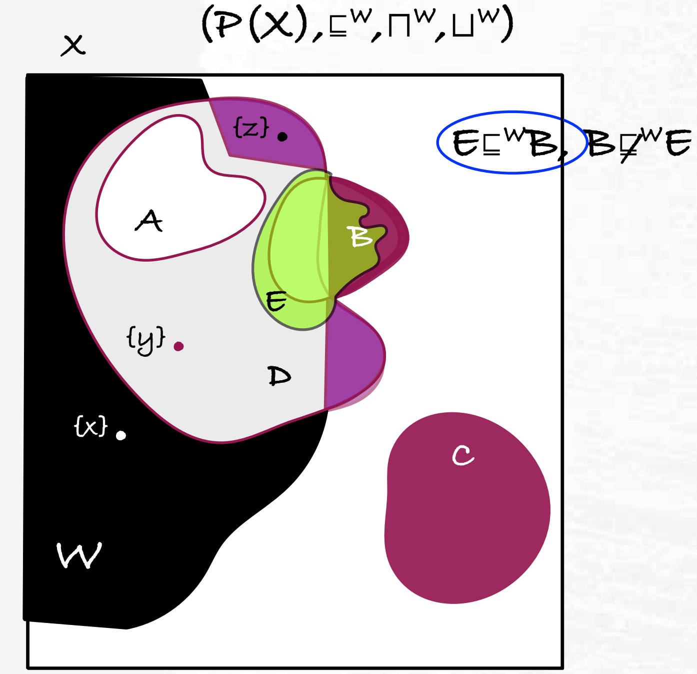
∅: pizarra blanca

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"

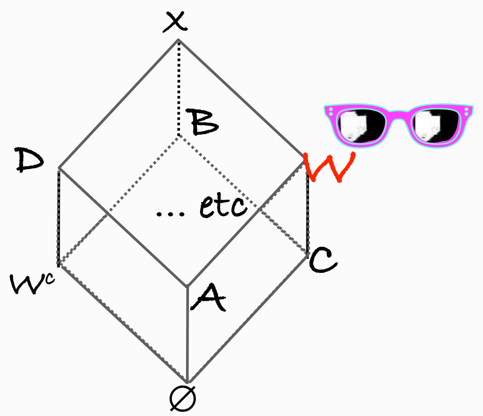
$(\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$D\not\sqsubseteq^W A$, $A\not\sqsubseteq^W D$, $B\sqcap^W D$, $B\sqcup^W D$,...

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

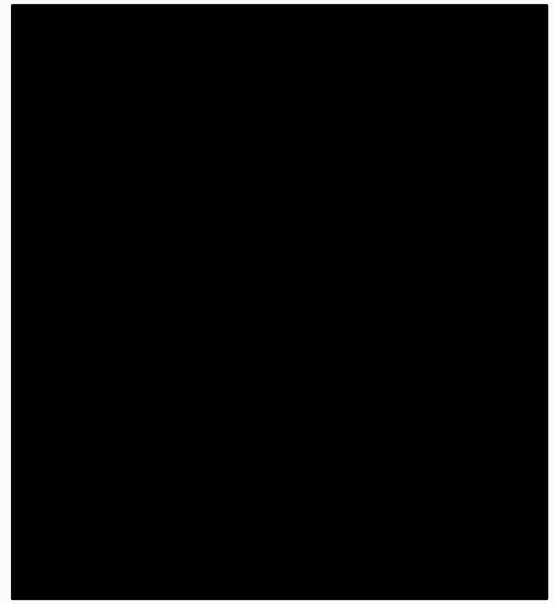
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^{c})$



$A\cap B=\varnothing$

$A\cup B=X$

$\sqcap^{W}$ es una uninorma y una nulnorma en $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$



"w-pertenencia": $x\in^{W}A \Leftrightarrow x\in A\triangle W$

El orden $\sqsubseteq^{W}$ tiene asociado un operador inf :

$A\sqcap^{W}B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]$ y un operador sup :

$A\sqcup^{W}B=A\sqcap^{W^c}B=(A\cap B)\cup[W^c\cap(A\cup B)]$ $x\notin D,\ y\in D,\ z\in D$

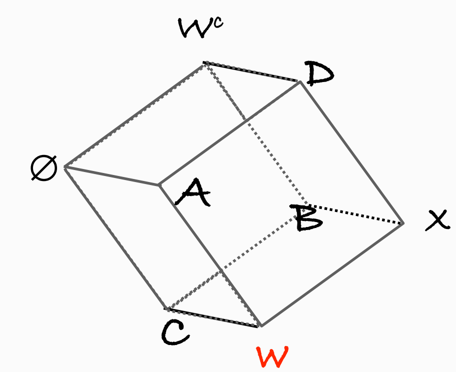
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{W}))_{W\in\mathcal{P}(X)}$

$A\sqsubseteq^{W}B \Leftrightarrow A\triangle W\subseteq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cap W\subseteq A\subseteq B\cup W$



la misma complementación:

$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W},W,W^c),{}^{c})$

$A\sqcap^{W}B=W$

$A\sqcup^{W}B=W^c$

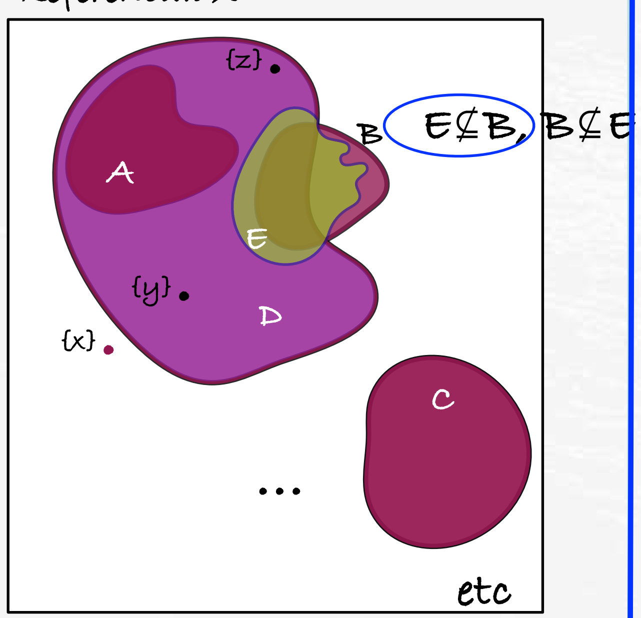
$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

$((\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{\varnothing},\sqcap^{\varnothing},\sqcup^{\varnothing},\varnothing,X),{}^{c})$

$(\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{X},\sqcap^{X},\sqcup^{X},X,\varnothing),{}^{c})$

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:

Referencial X



$(\mathcal{P}(X),\subseteq,\cap,\cup)$

$(A\subseteq D, D\nsubseteq B, B\nsubseteq D, B\cap D, B\cup D,\ldots)$

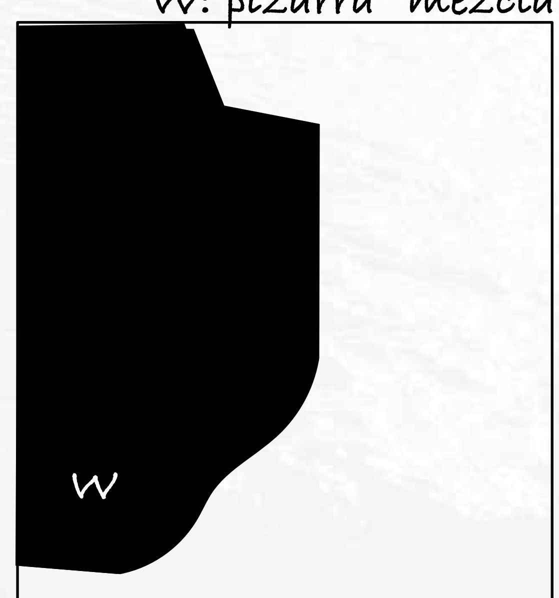
$x\notin D,\ y\in D,\ z\in D$

$\varnothing$: pizarra blanca

Una nueva interpretación

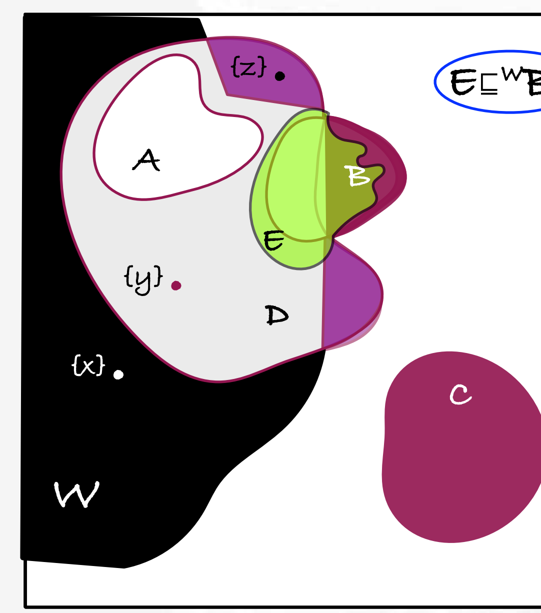
asociada a un orden $\sqsubseteq^{W}$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"



$(\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W})$

X

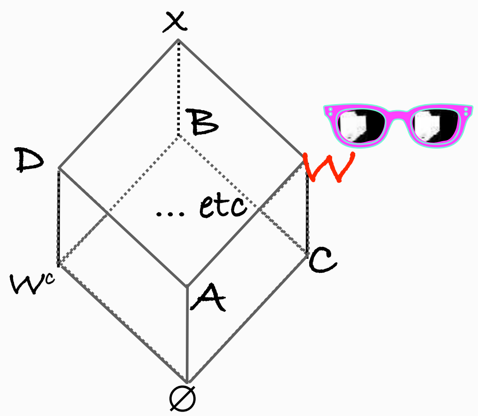


$D\not\sqsubseteq^{W}A,\ A\not\sqsubseteq^{W}D,\ B\sqcap^{W}D,\ B\sqcup^{W}D,\ldots$

$x\in^{W}D,\ y\notin^{W}D,\ z\in^{W}D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación

$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^c)$



$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = X$

$\sqcap^W$ es una uninorma y
una nulnorma en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

"w-pertenencia": $x \in^W A \Leftrightarrow x \in A \triangle W$

El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf :

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup :

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$ $x \notin D,\ y \in D,\ z \in D$

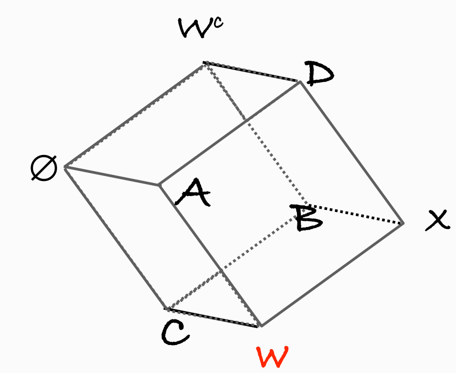
Familia de álgebras:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



la misma complementación:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

$A \sqcap^W B = W$

$A \sqcup^W B = W^c$

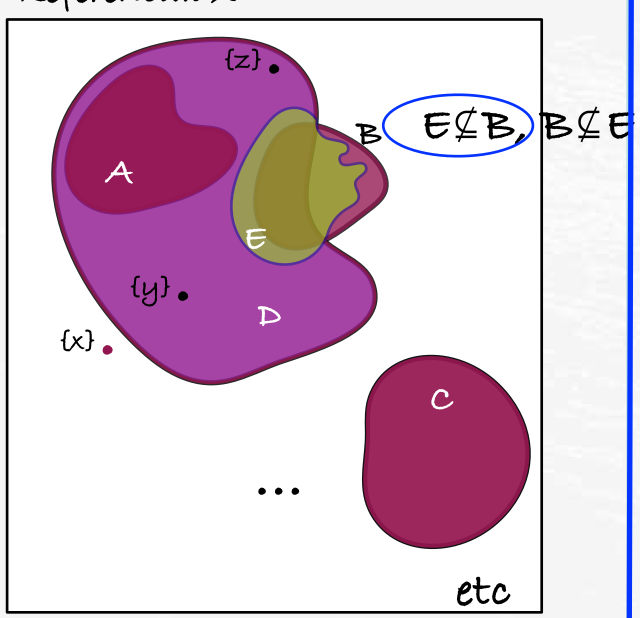
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:

$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{\emptyset}, \sqcap^{\emptyset}, \sqcup^{\emptyset}, \emptyset, X), {}^c)$

$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^X, \sqcap^X, \sqcup^X, X, \emptyset), {}^c)$

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada por el subconjunto ∅:

Referencial X



$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$

$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

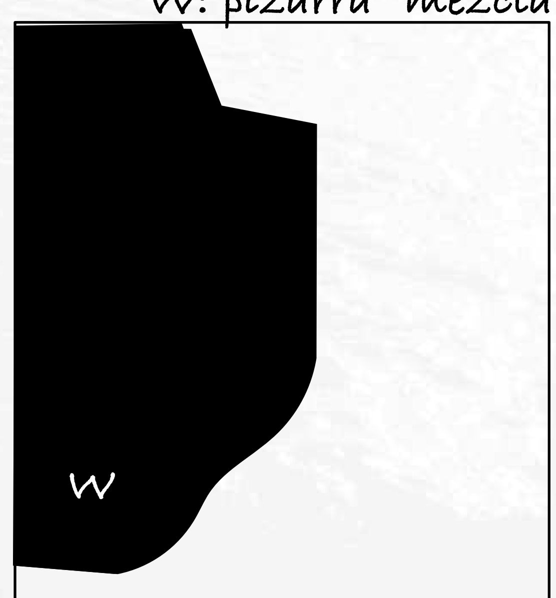
$x \notin D,\ y \in D,\ z \in D$

∅: pizarra blanca

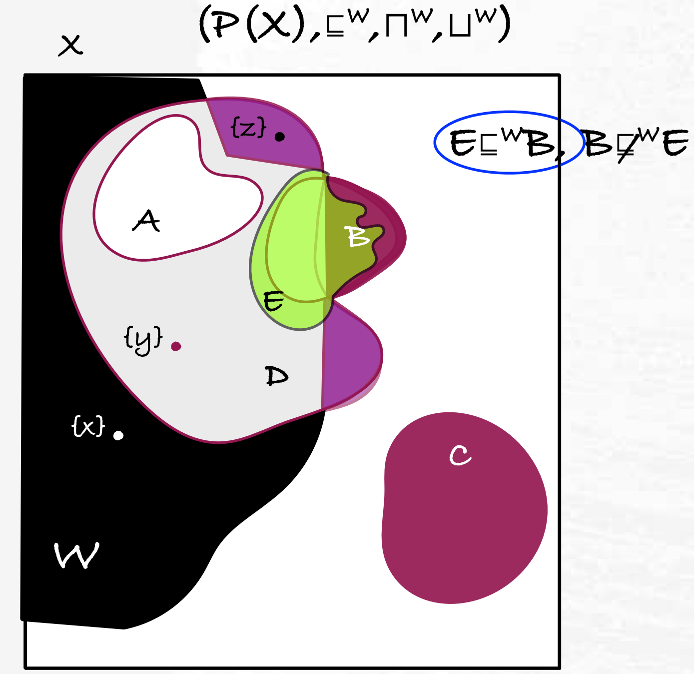
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "mezcla"



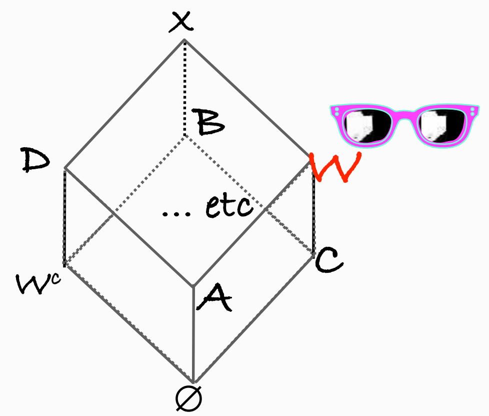
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$



$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$, $B \sqcup^W D$,...

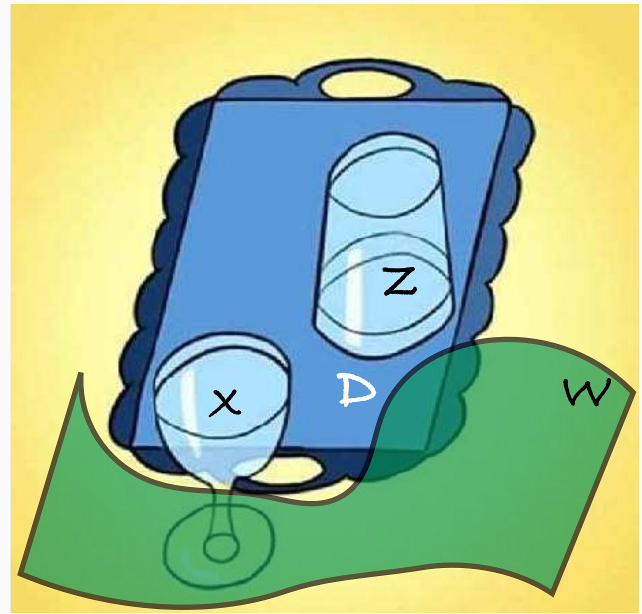
$x \in^W D,\ y \notin^W D,\ z \in^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^{c})$



$A \cap B = \varnothing$
$A \cup B = X$

$\sqcap^W$ es una uninorma y
una nulnorma en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

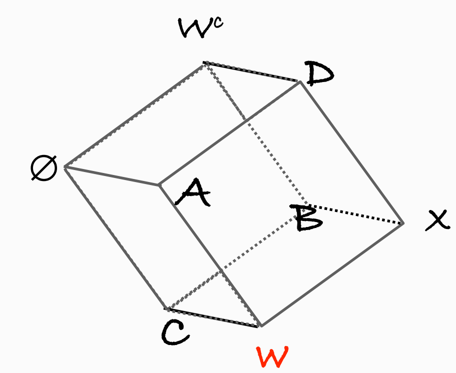


"w-pertenencia": $x \in^W A \Leftrightarrow x \in A \triangle W$

El orden $\sqsubseteq^W$ tiene asociado un operador inf :
$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup :
$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$ $x \notin D$, $y \in D$, $z \in D$

Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$
Orden de actividad
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$

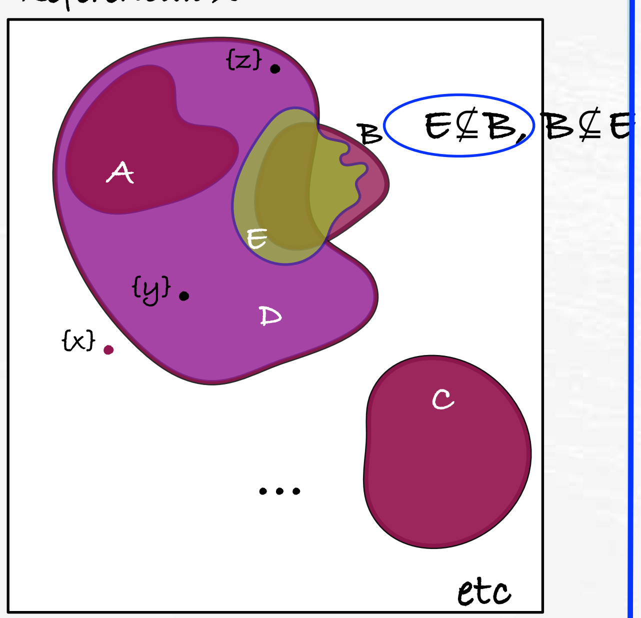


la misma complementación:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^{c})$
$A \sqcap^W B = W$
$A \sqcup^W B = W^c$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{\varnothing}, \sqcap^{\varnothing}, \sqcup^{\varnothing}, \varnothing, X), {}^{c})$
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{X}, \sqcap^{X}, \sqcup^{X}, X, \varnothing), {}^{c})$

Interpretación del orden $\subseteq$
como una "perspectiva" del
conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada
por el subconjunto ∅:

Referencial X

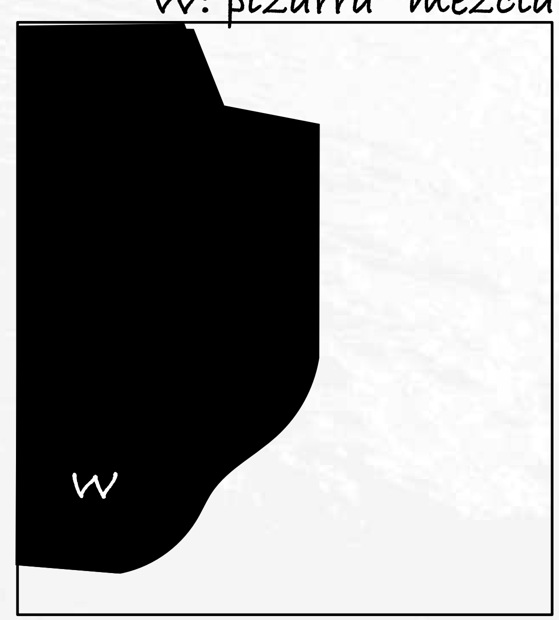


$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

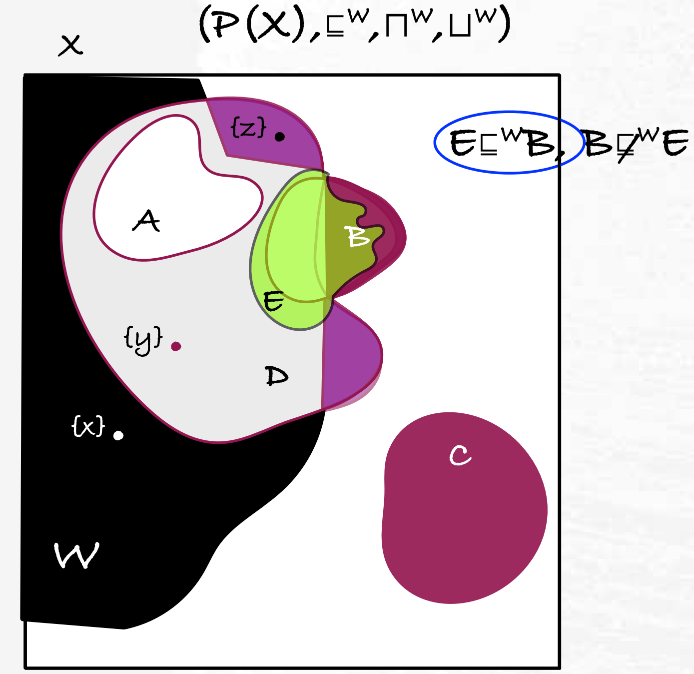
$x \notin D$, $y \in D$, $z \in D$

∅: pizarra blanca

Una nueva interpretación
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que
representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$,
la "perspectiva" desde ese
subconjunto W: el orden de
"W-inclusión".
W: pizarra "mezcla"



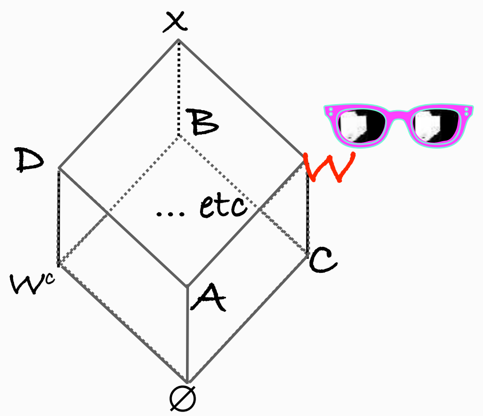
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$



$D \not\sqsubseteq^W A$, $A \not\sqsubseteq^W D$, $B \sqcap^W D$, $B \sqcup^W D$, ...

$x \in^W D$, $y \notin^W D$, $z \in^W D$

Sistema algebraico:
Álgebra de Boole y
complementación
$((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), {}^{c})$



$A \cap B = \emptyset$
$A \cup B = X$

$\sqcap^{W}$ es una uninorma y
una nulnorma en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$x \notin D$, $x \in^{W} D$,
$z \in D$, $z \in^{W} D$.

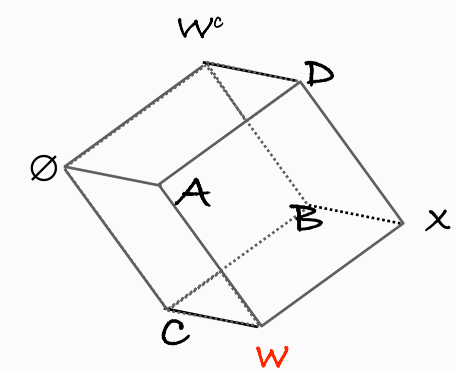
“W_PERSPECTIVA” “w-pertenencia”: $x \in^{W} A \Leftrightarrow x \in A \triangle W$

El orden $\sqsubseteq^{W}$ tiene asociado un operador inf :
$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y un operador sup :
$A \sqcup^{W} B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$ $x \notin D$, $y \in D$, $z \in D$

Familia de álgebras:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{W}))_{W \in \mathcal{P}(X)}$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

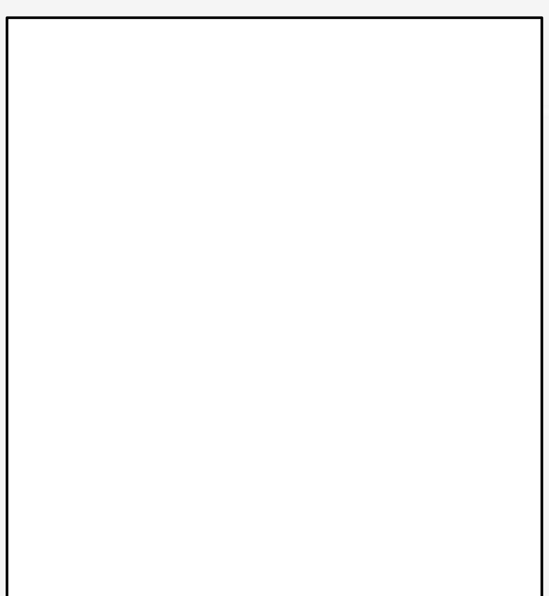
$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$



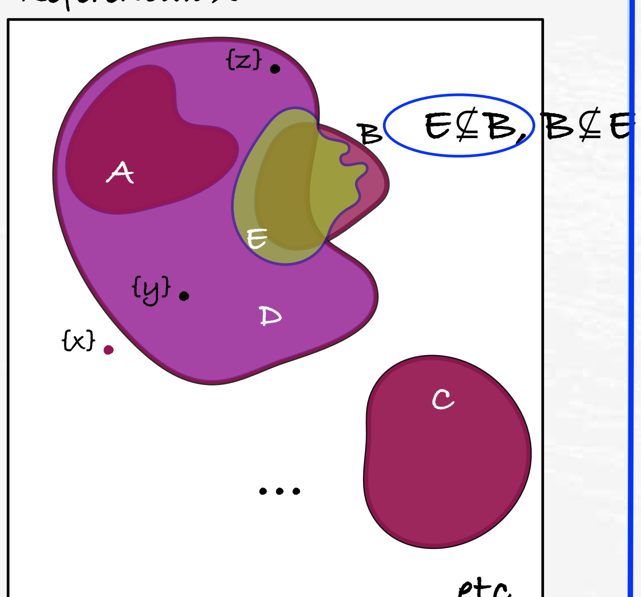
la misma complementación:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W}, W, W^c), {}^{c})$
$A \sqcap^{W} B = W$
$A \sqcup^{W} B = W^c$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, álgebra de subconjuntos ordinarios de X:
$((\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{\emptyset}, \sqcap^{\emptyset}, \sqcup^{\emptyset}, \emptyset, X), {}^{c})$
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{X}, \sqcap^{X}, \sqcup^{X}, X, \emptyset), {}^{c})$

Interpretación del orden $\subseteq$
como una “perspectiva” del
conjunto $\mathcal{P}(X)$ proporcionada
por el subconjunto ∅:



Referencial X



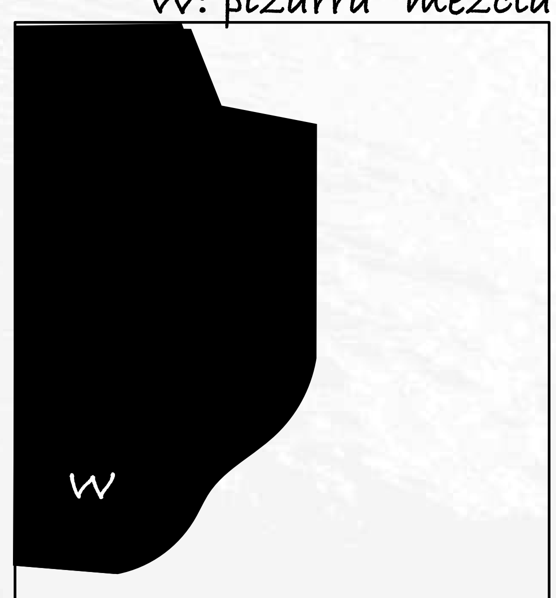
$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$
$(A \subseteq D, D \not\subseteq B, B \not\subseteq D, B \cap D, B \cup D, \ldots)$

$x \notin D$, $y \in D$, $z \in D$

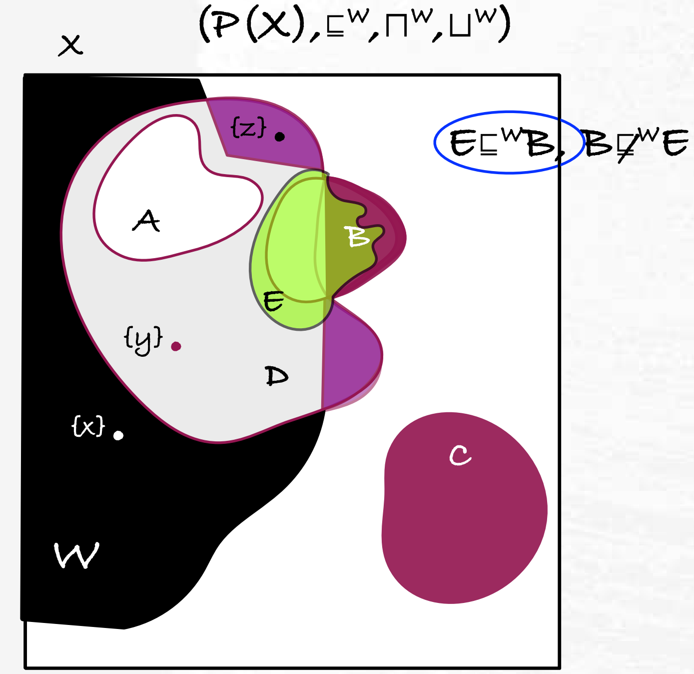
∅: pizarra blanca

Una nueva interpretación
asociada a un orden $\sqsubseteq^{W}$ que
representa, en el conjunto $\mathcal{P}(X)$,
la “perspectiva” desde ese
subconjunto W: el orden de
“W-inclusión”.

W: pizarra “mezcla”



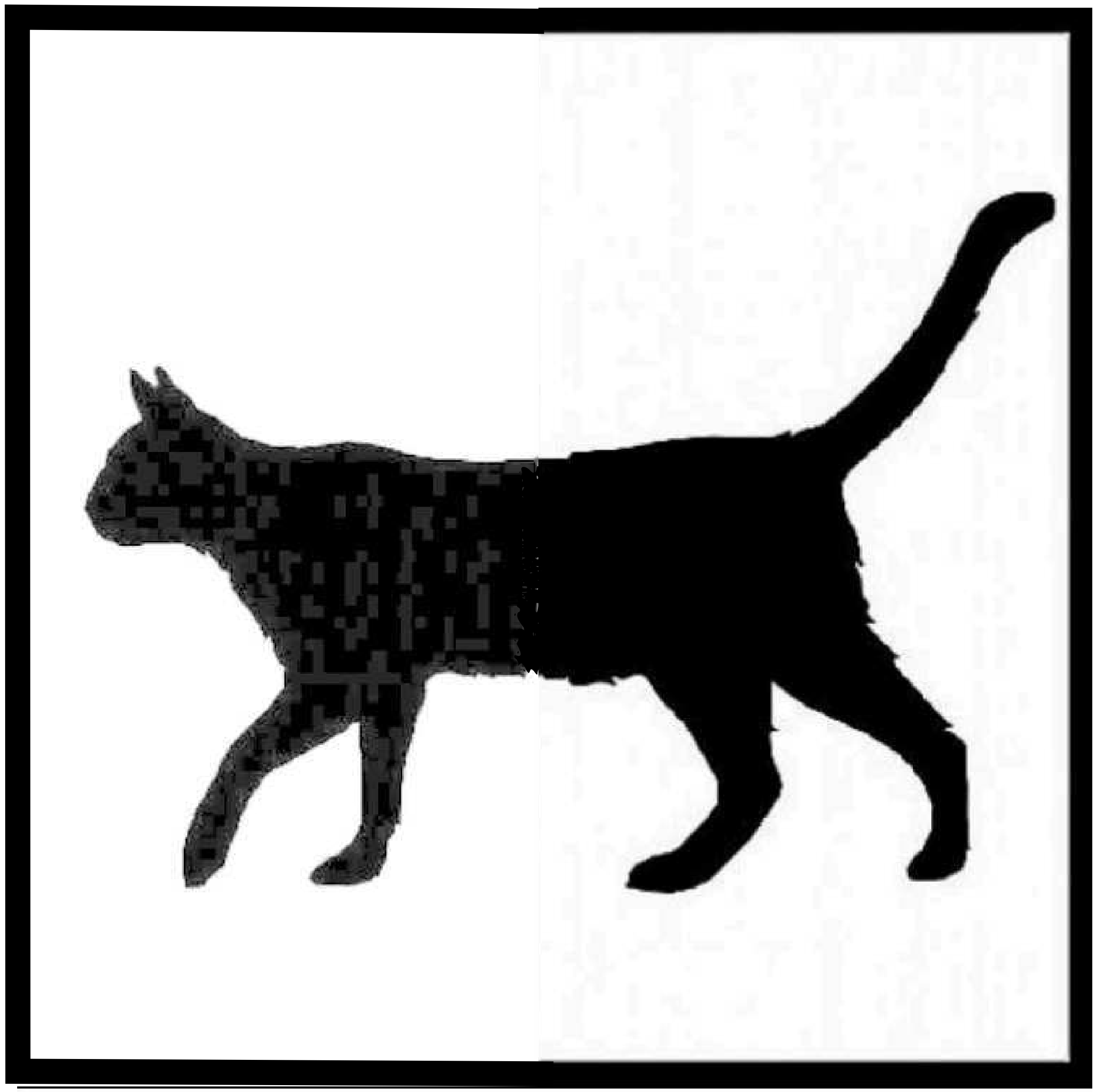
$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W})$

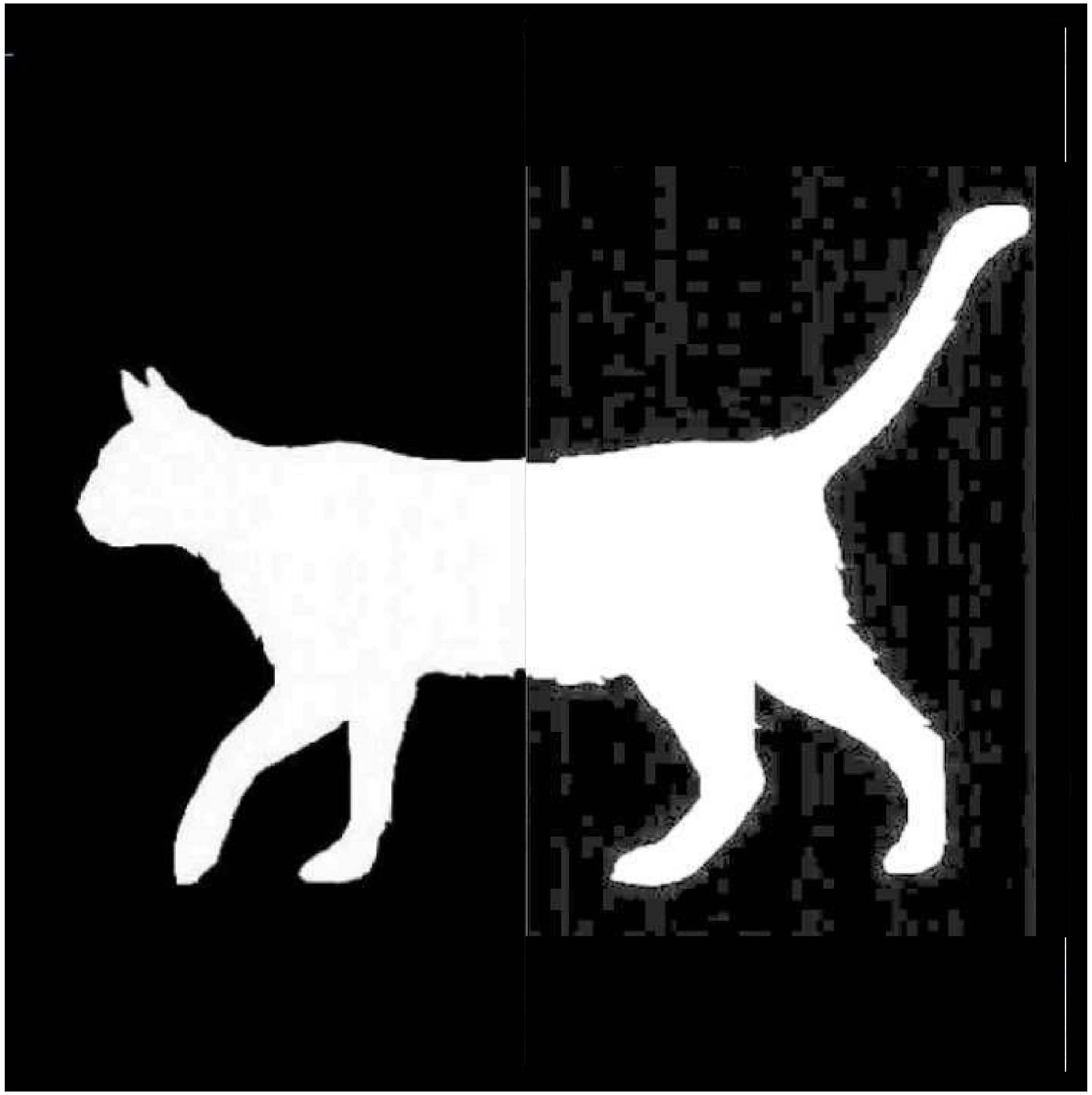


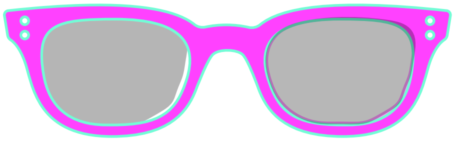
$D \not\sqsubseteq^{W} A$, $A \not\sqsubseteq^{W} D$, $B \sqcap^{W} D$, $B \sqcup^{W} D$, ...

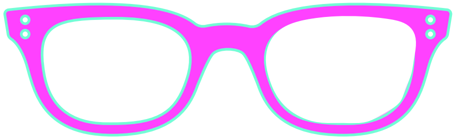
$x \in^{W} D$, $y \notin^{W} D$, $z \in^{W} D$

En definitiva:
Además de las perspectivas duales ...

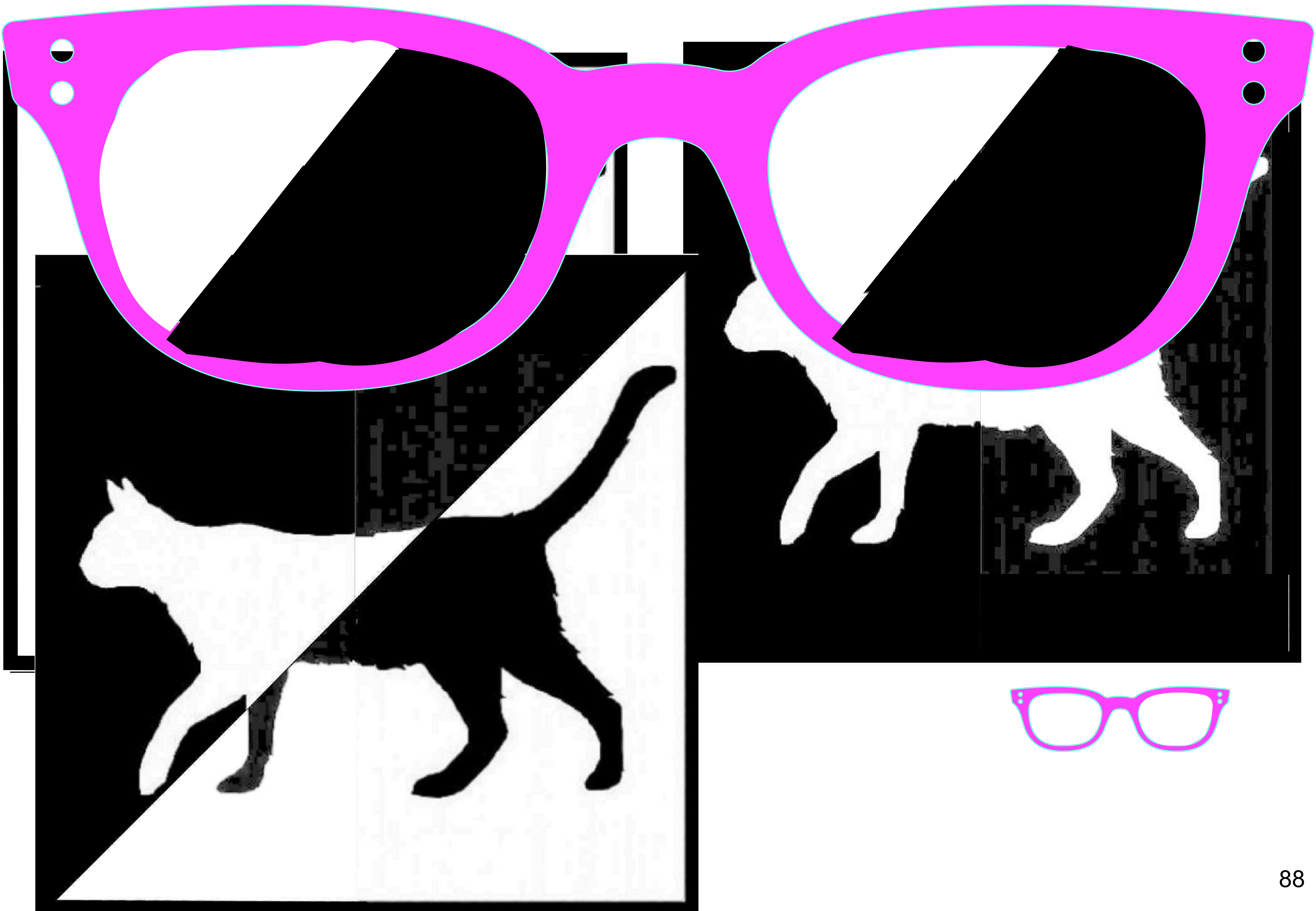




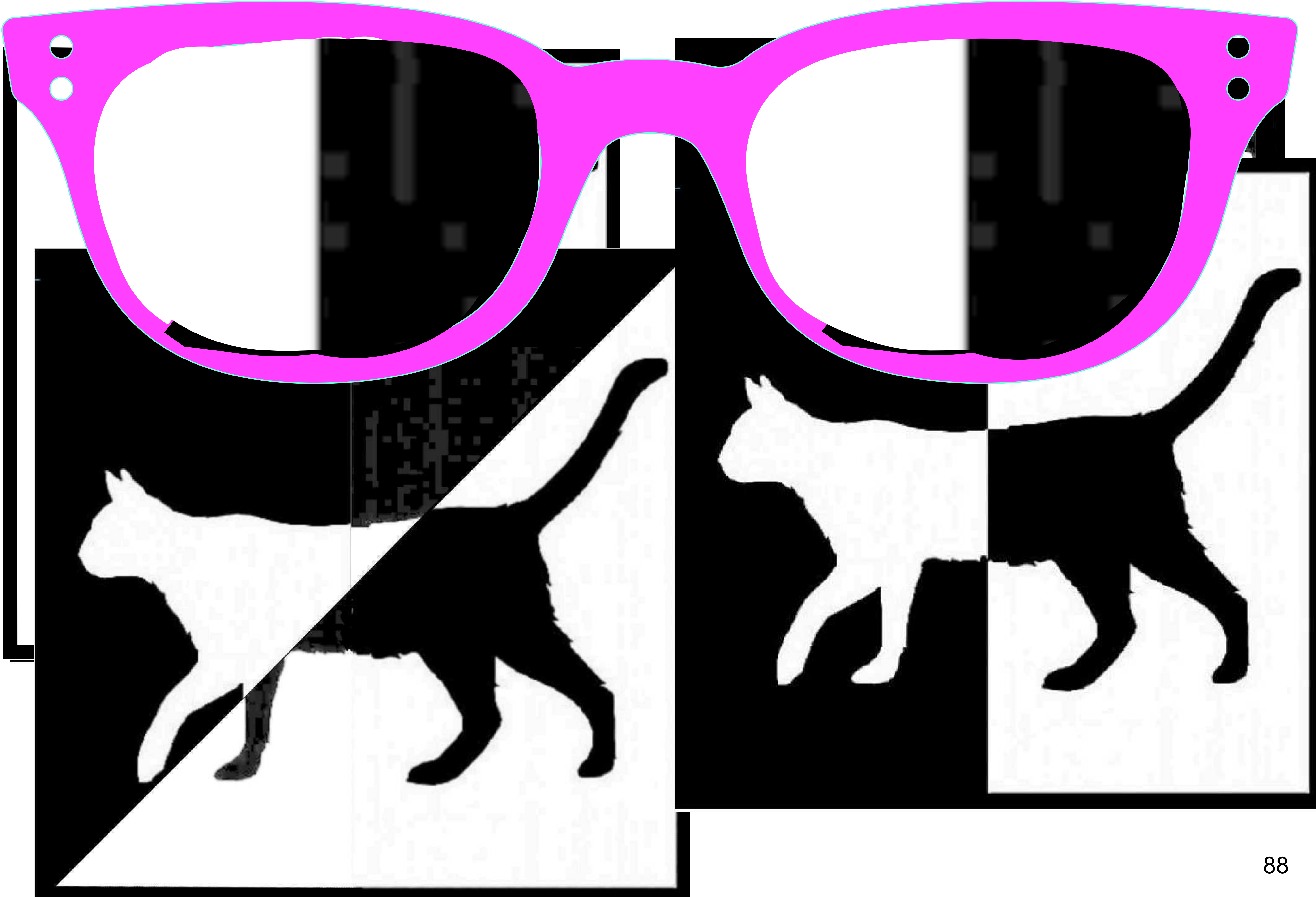




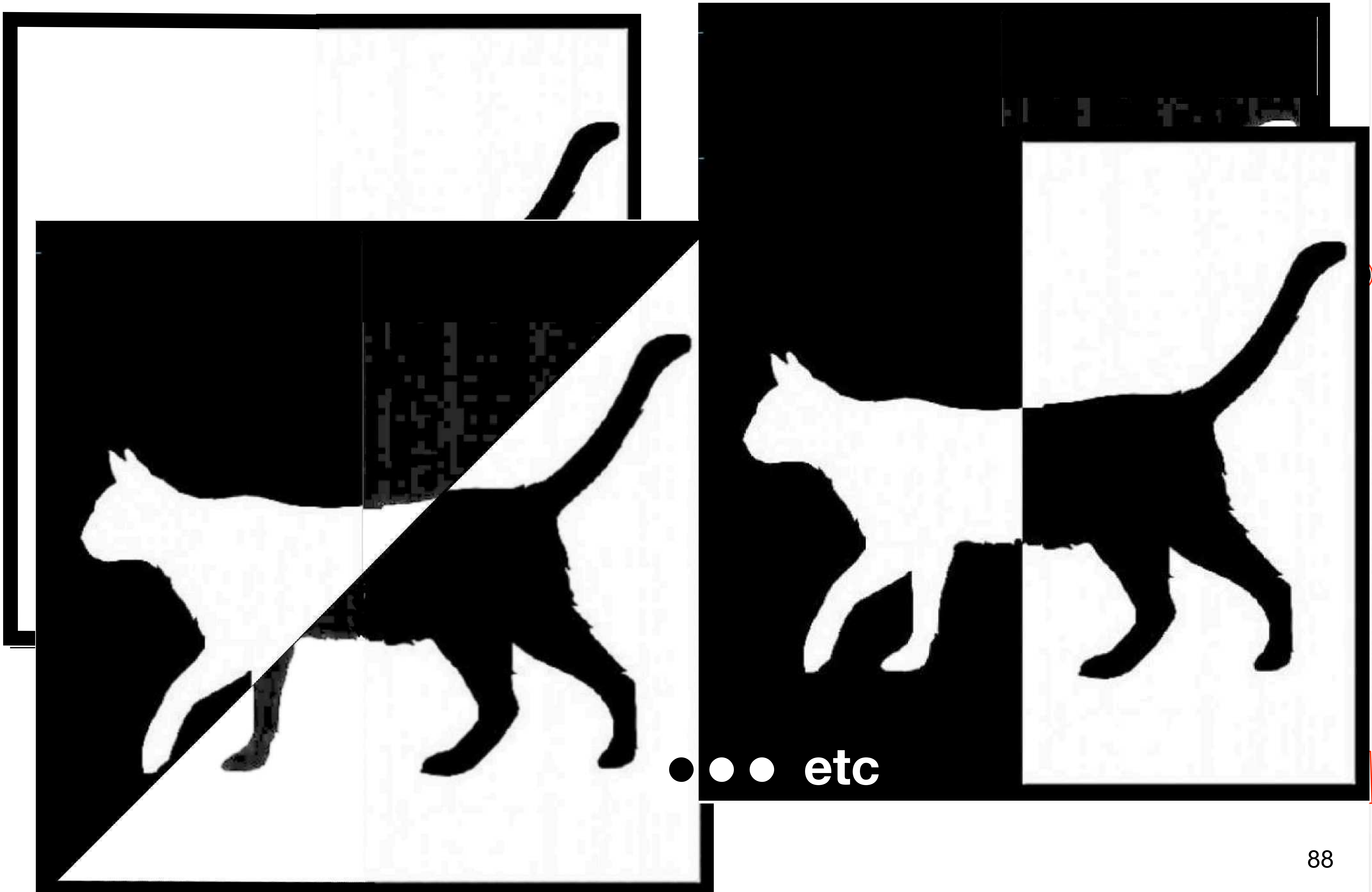
Existen otras:



Existen otras:

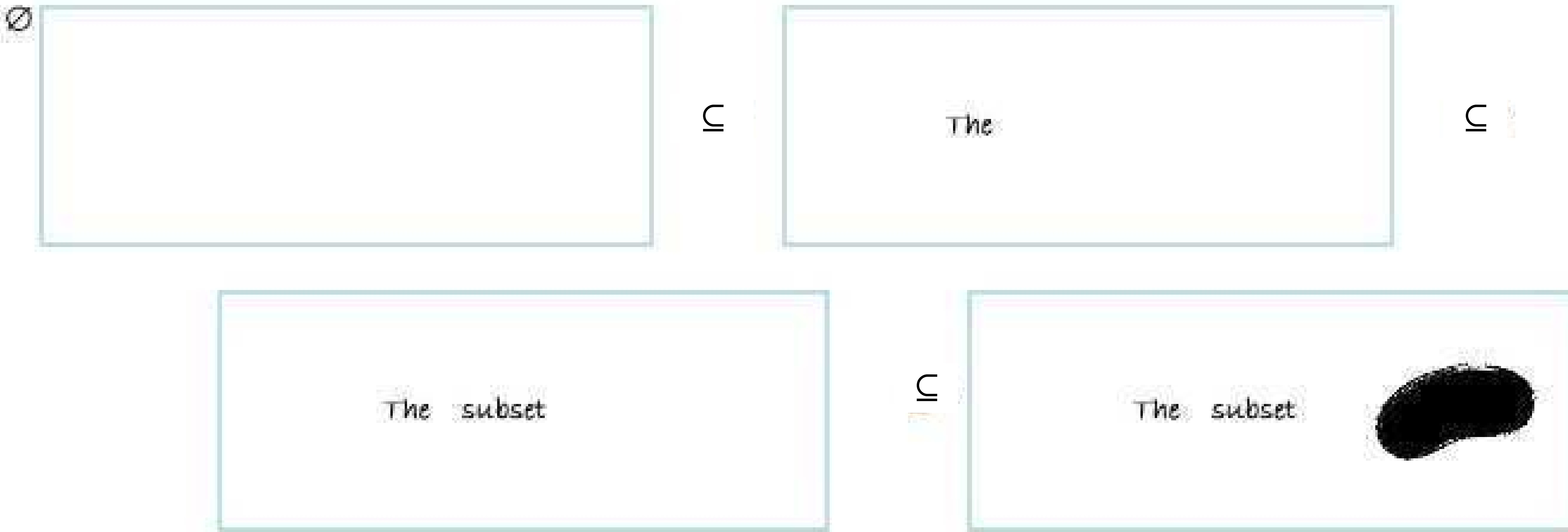


Existen otras:

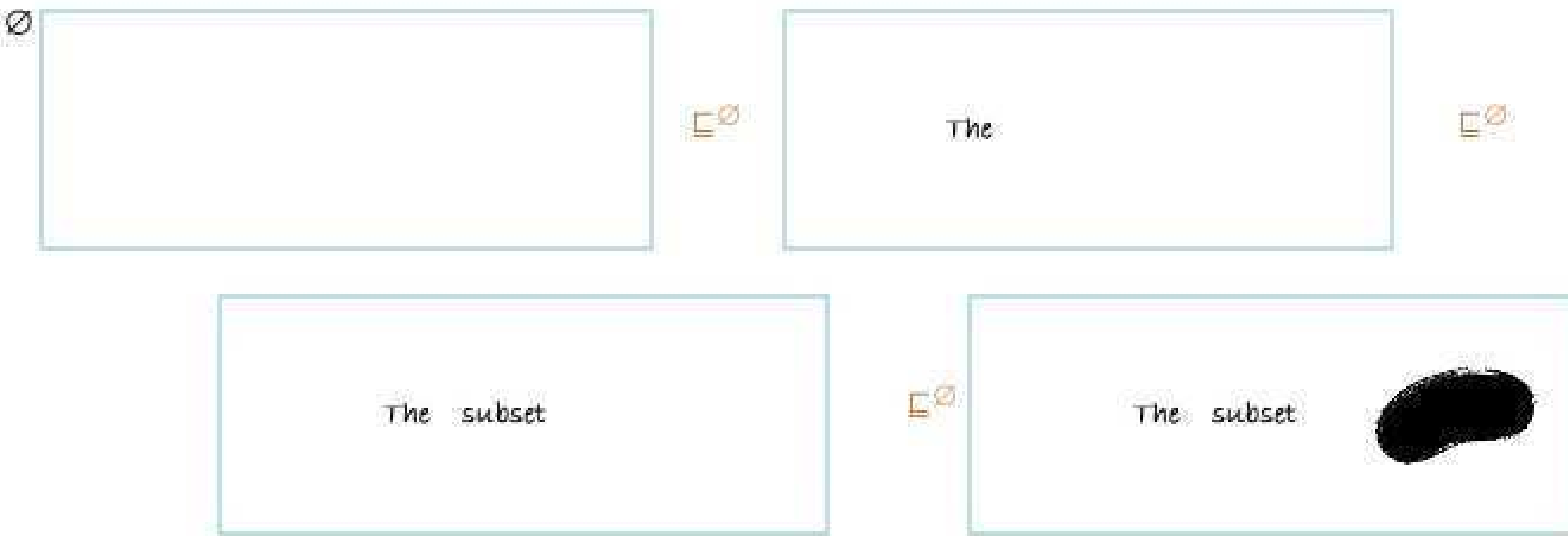


Alguna de las características de la relación $\sqsubseteq^{w}$

Cadena de subconjuntos de un referencial E



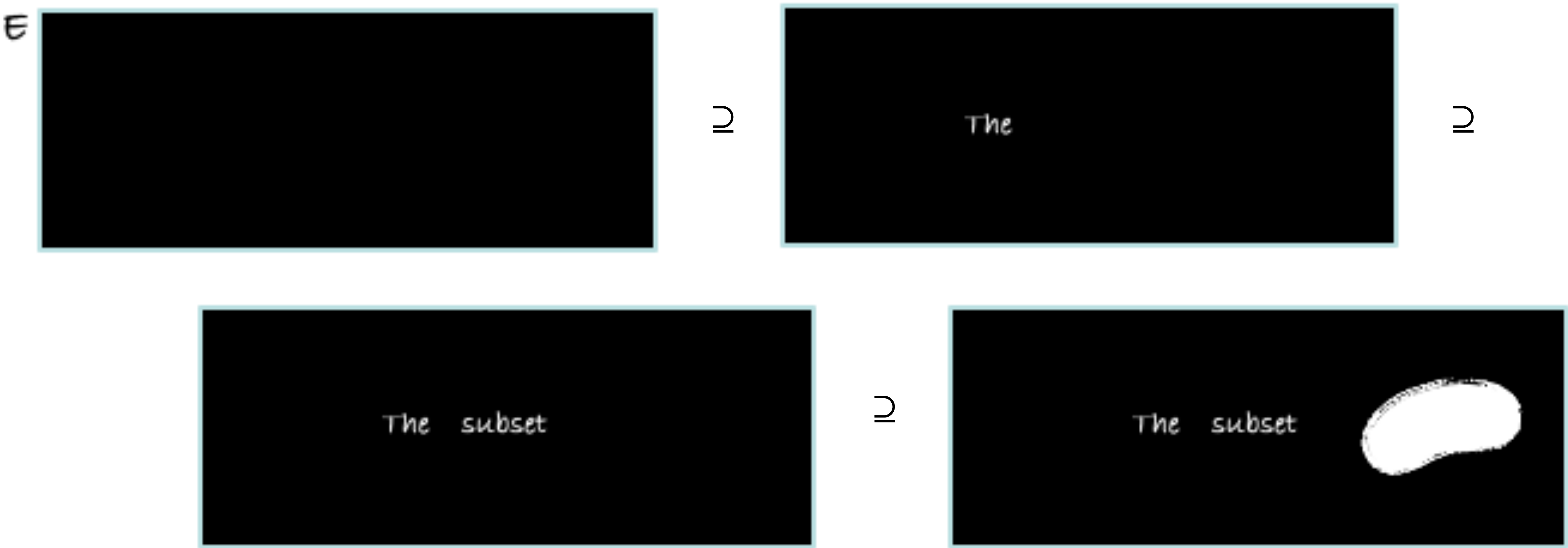
Cadena de subconjuntos de un referencial E



$$\subseteq \; = \; \sqsubseteq^{\varnothing}$$

$\sqsubseteq^{\varnothing}$-cadena de subconjuntos de E

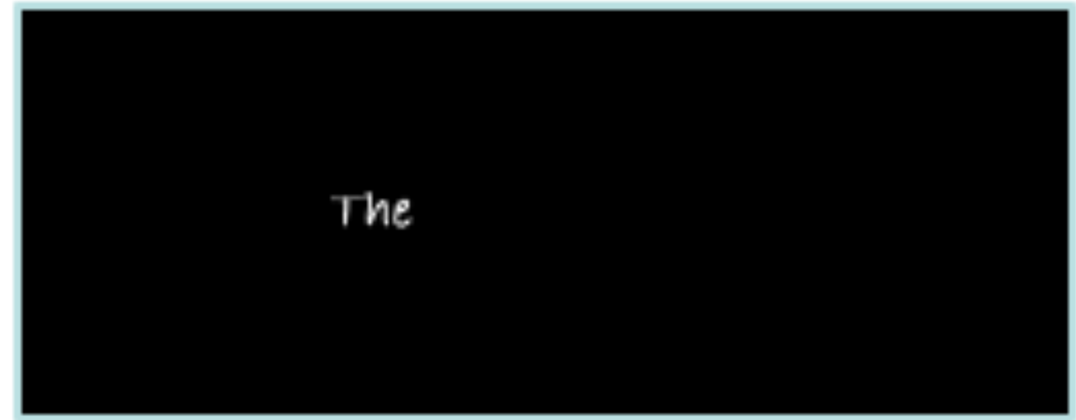
Cadena de subconjuntos de un referencial E



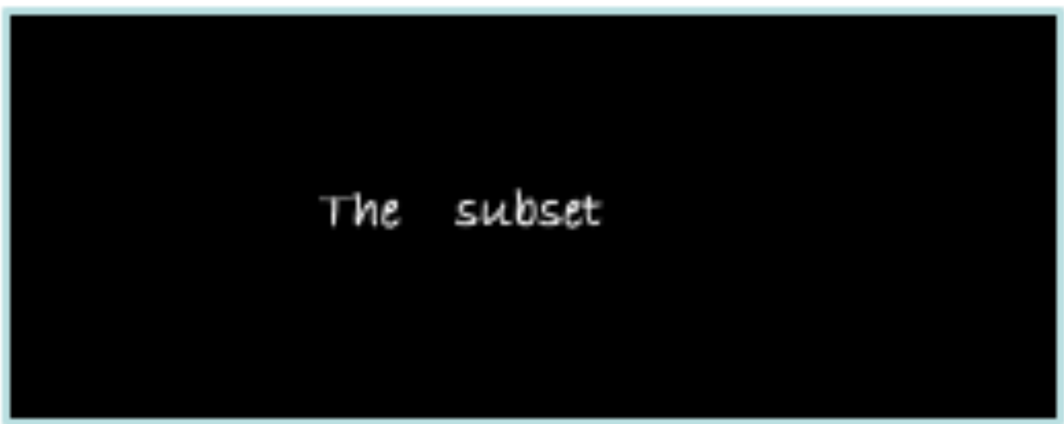
Cadena de subconjuntos de un referencial E

E 

$\sqsubseteq^E$



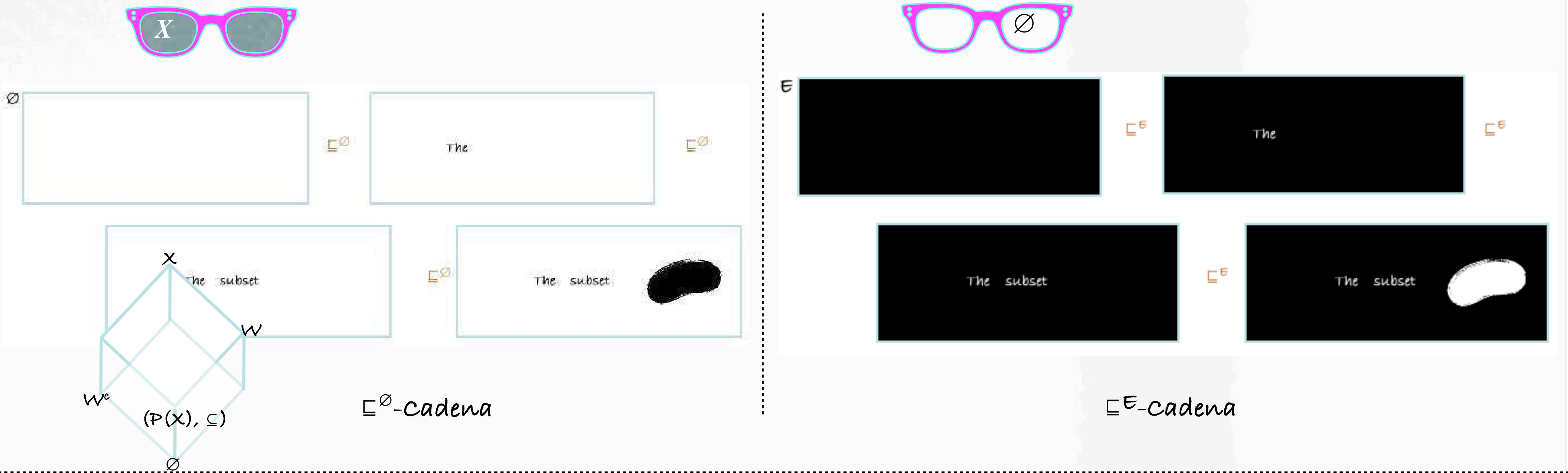
$\sqsubseteq^E$



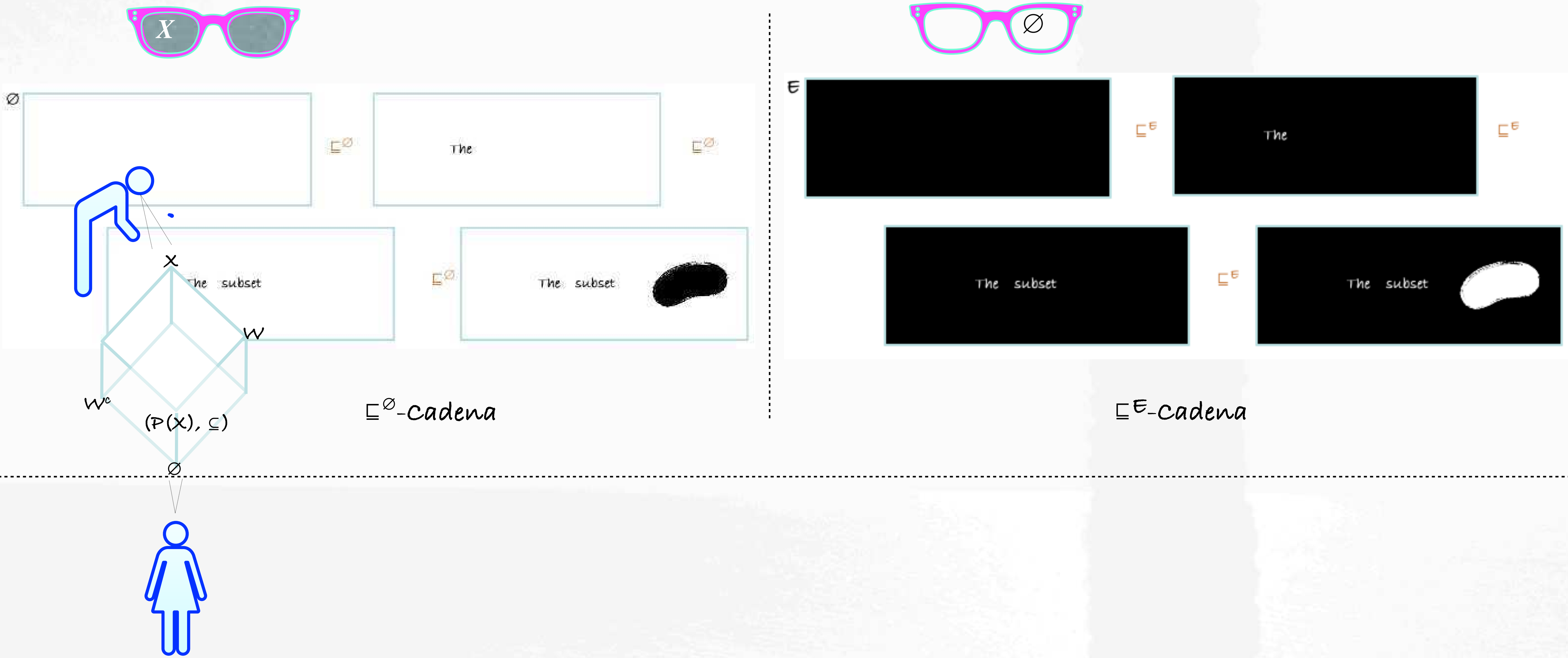
$\sqsubseteq^E$

$$\supseteq \; = \; \sqsubseteq^E$$

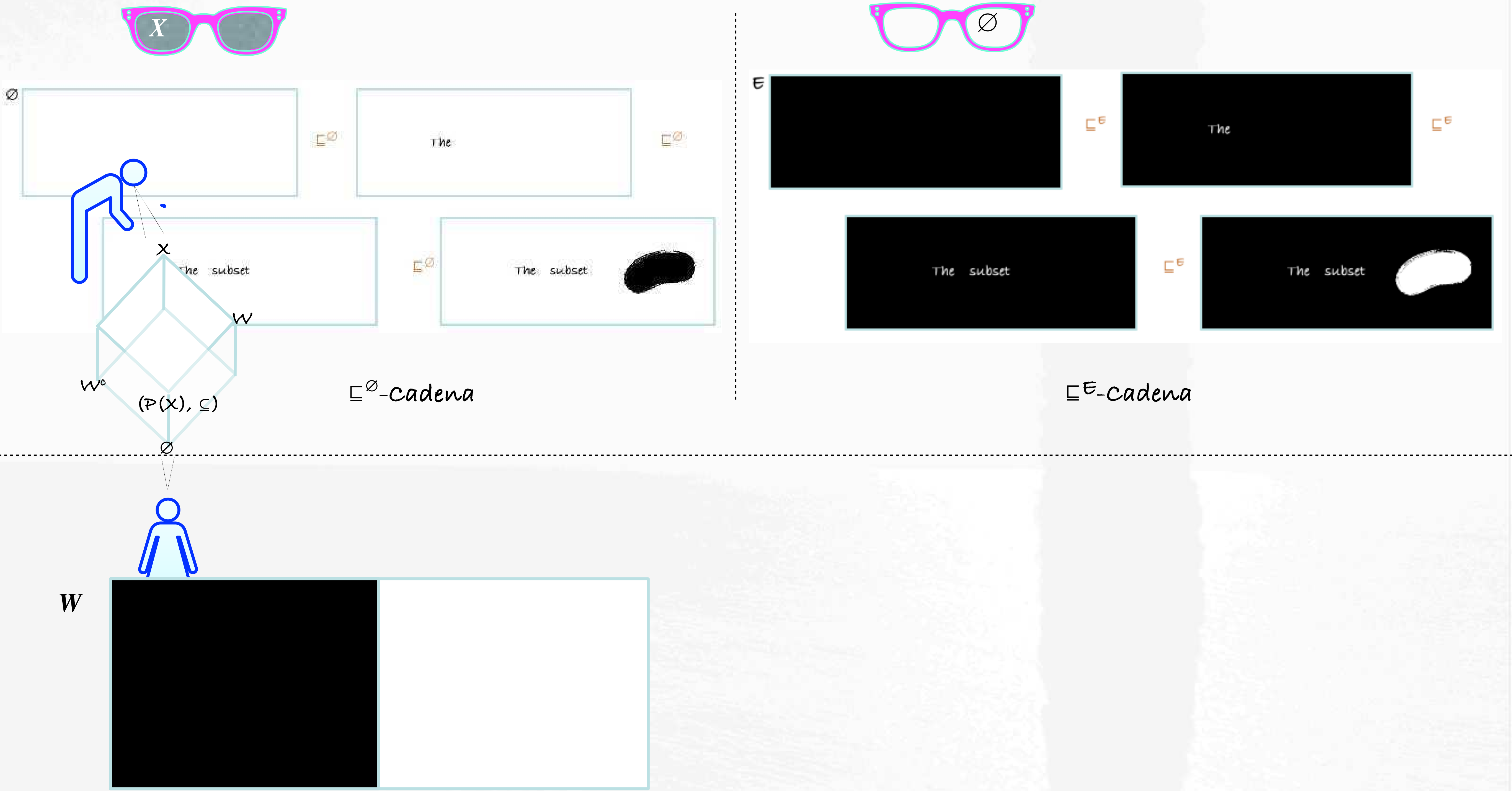
$\sqsubseteq^E$-cadena de subconjuntos de E



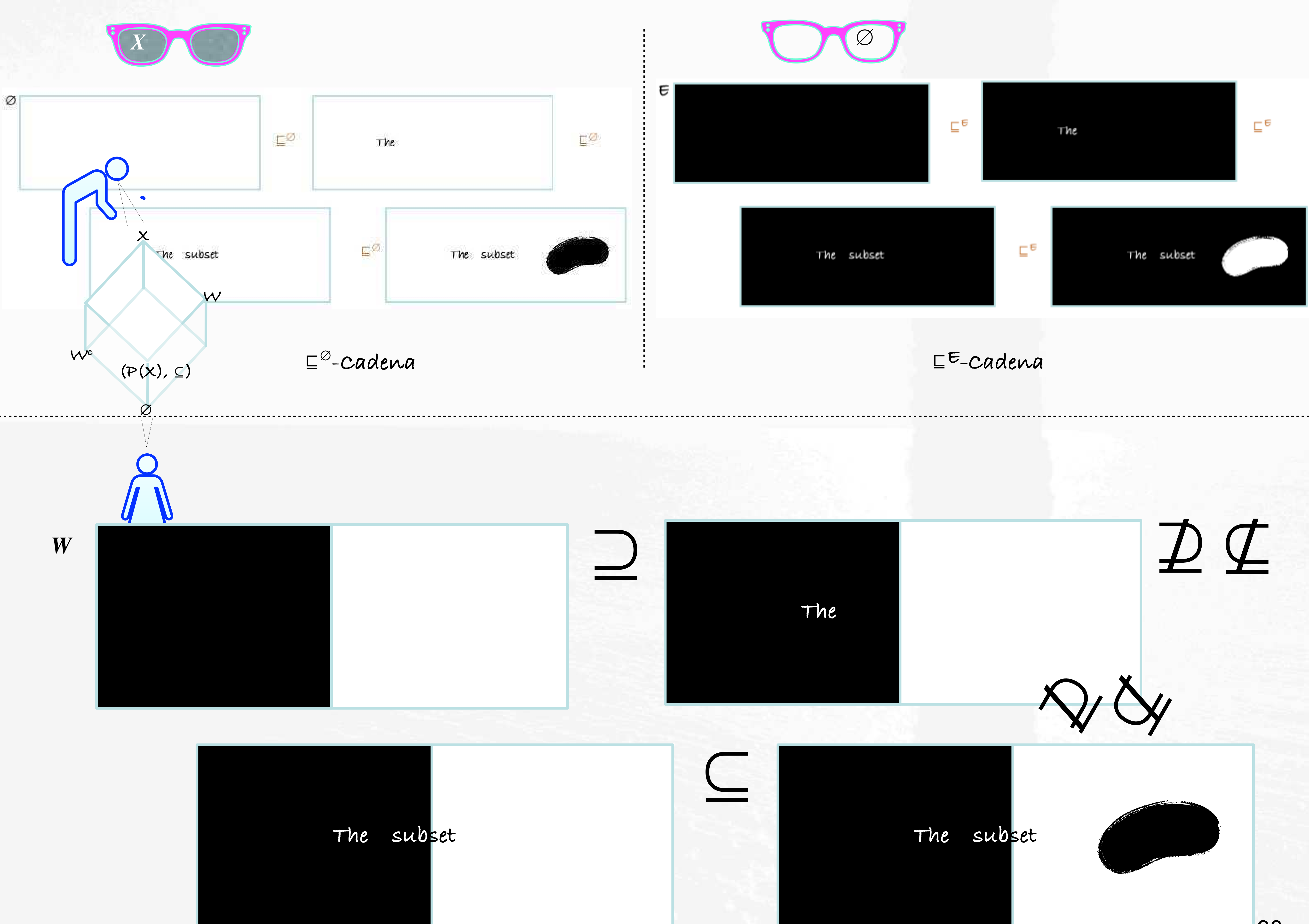
X
∅
The
The subset
X
W
W^c
$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$
∅
$\sqsubseteq^{\varnothing}$-cadena
E
The
The subset
$\sqsubseteq^{E}$-cadena



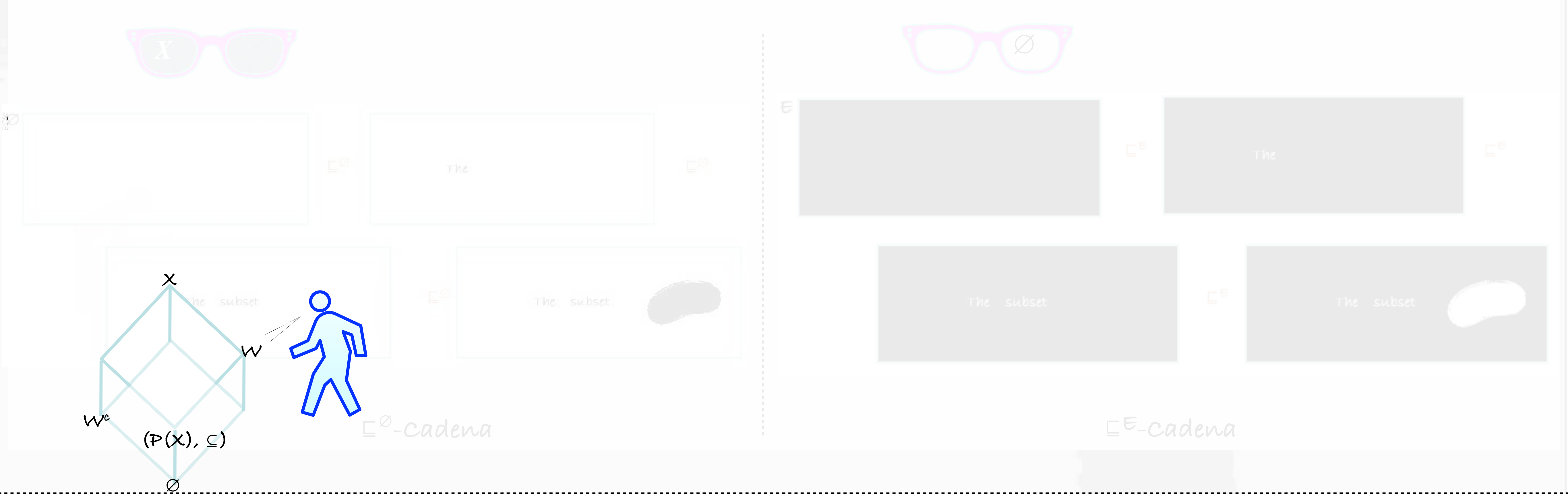
X
∅
∈
The
The subset
W
W^c
(P(X), ⊆)
$⊑^∅$
$⊑^∈$
$⊑^∅$-Cadena
$⊑^∈$-Cadena

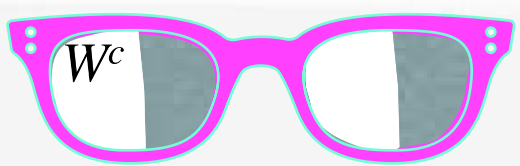


X
∅
∅
⊑∅
The
⊑∅
x
The subset
⊑∅
The subset
w
w^c
(P(X), ⊆)
⊑∅-Cadena
∅
E
⊑E
The
⊑E
The subset
⊑E
The subset
⊑E-Cadena
W

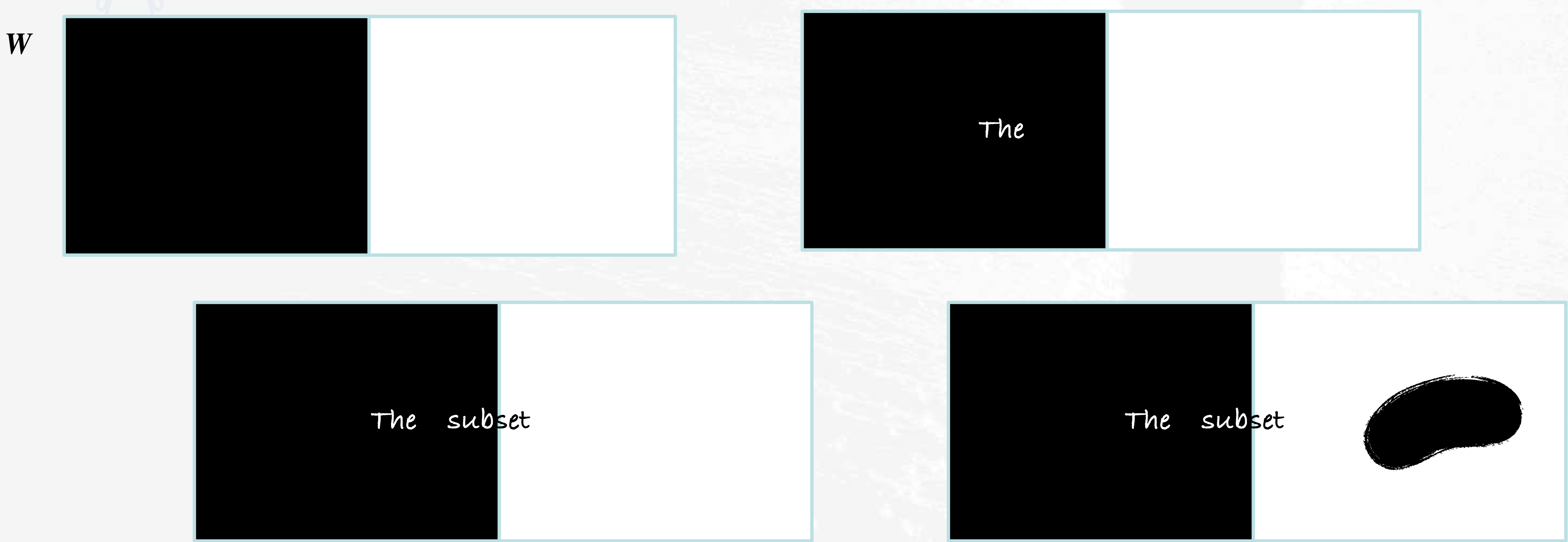


No es $\sqsubseteq^{\varnothing}$-cadena ni $\sqsubseteq^{E}$-cadena,

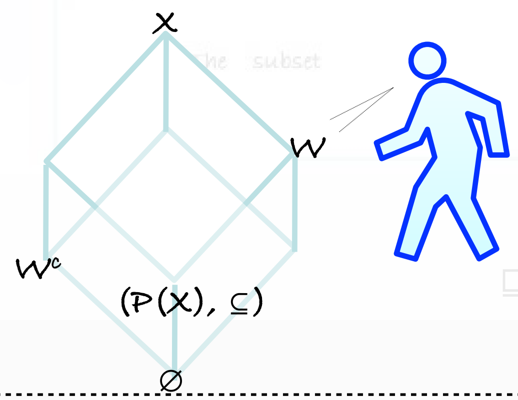




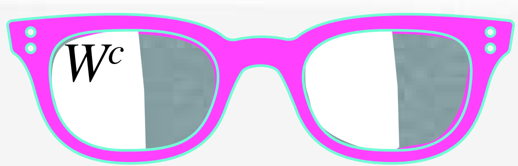
Pero, según el cristal con el que se mire...



No es $\sqsubseteq^{\emptyset}$-cadena ni $\sqsubseteq^{E}$-cadena,

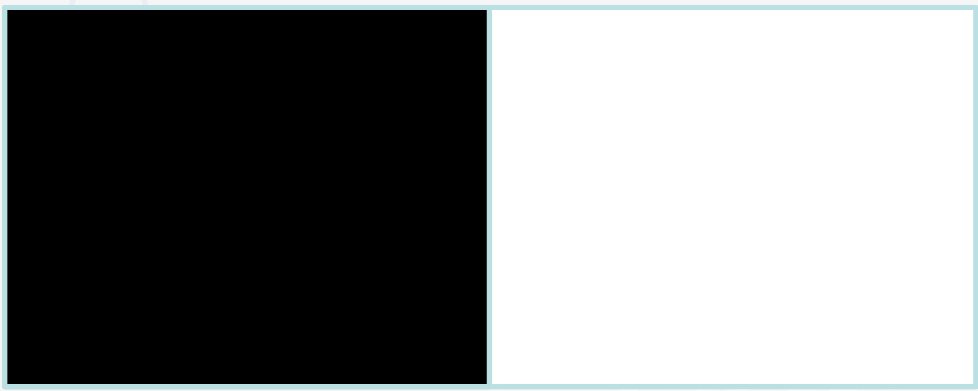


¡¡¡Sí es $\sqsubseteq^W$-cadena !!!!



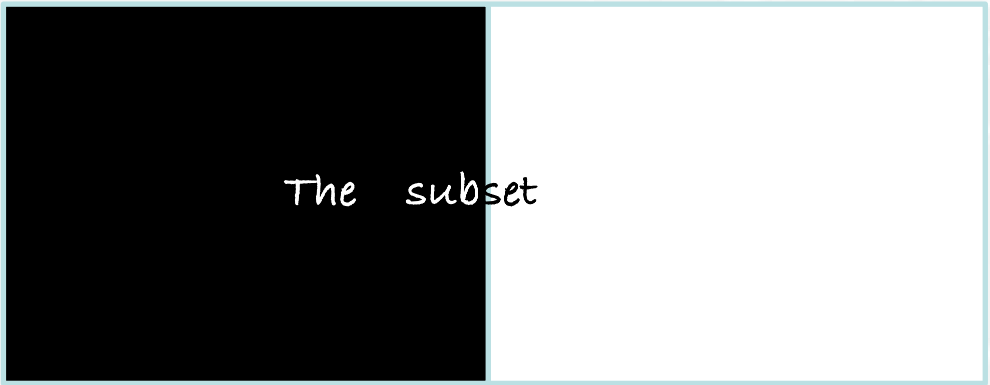
Pero, según el cristal con el que se mire...

W

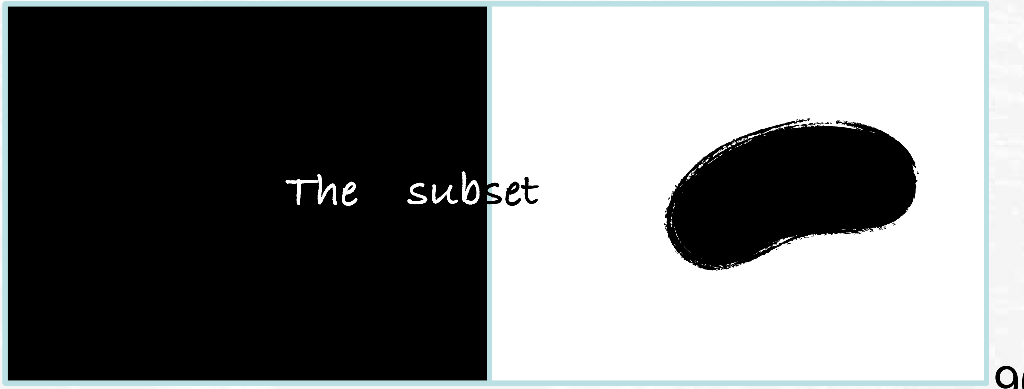


$\sqsubseteq W$

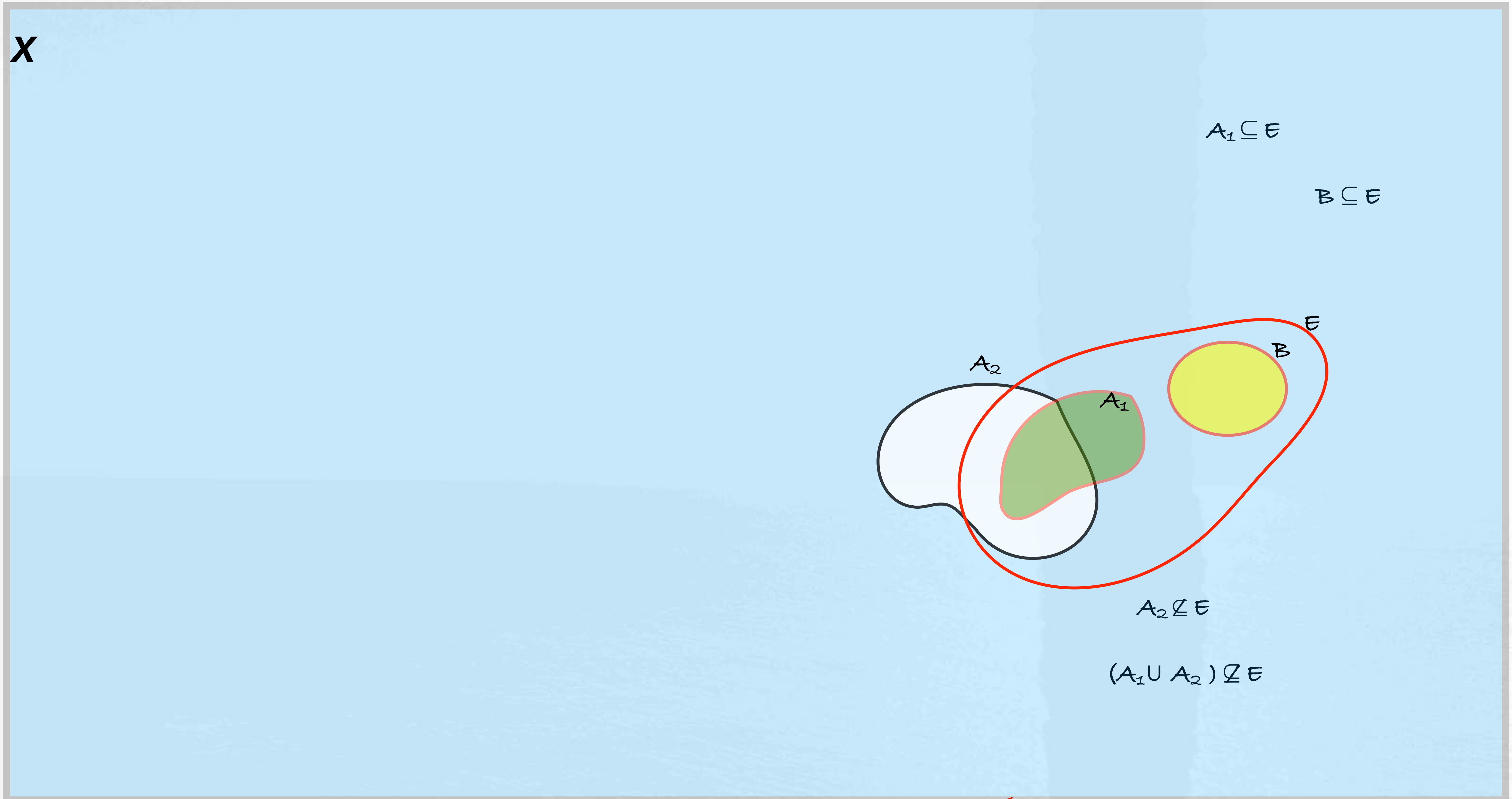
$\sqsubseteq W$



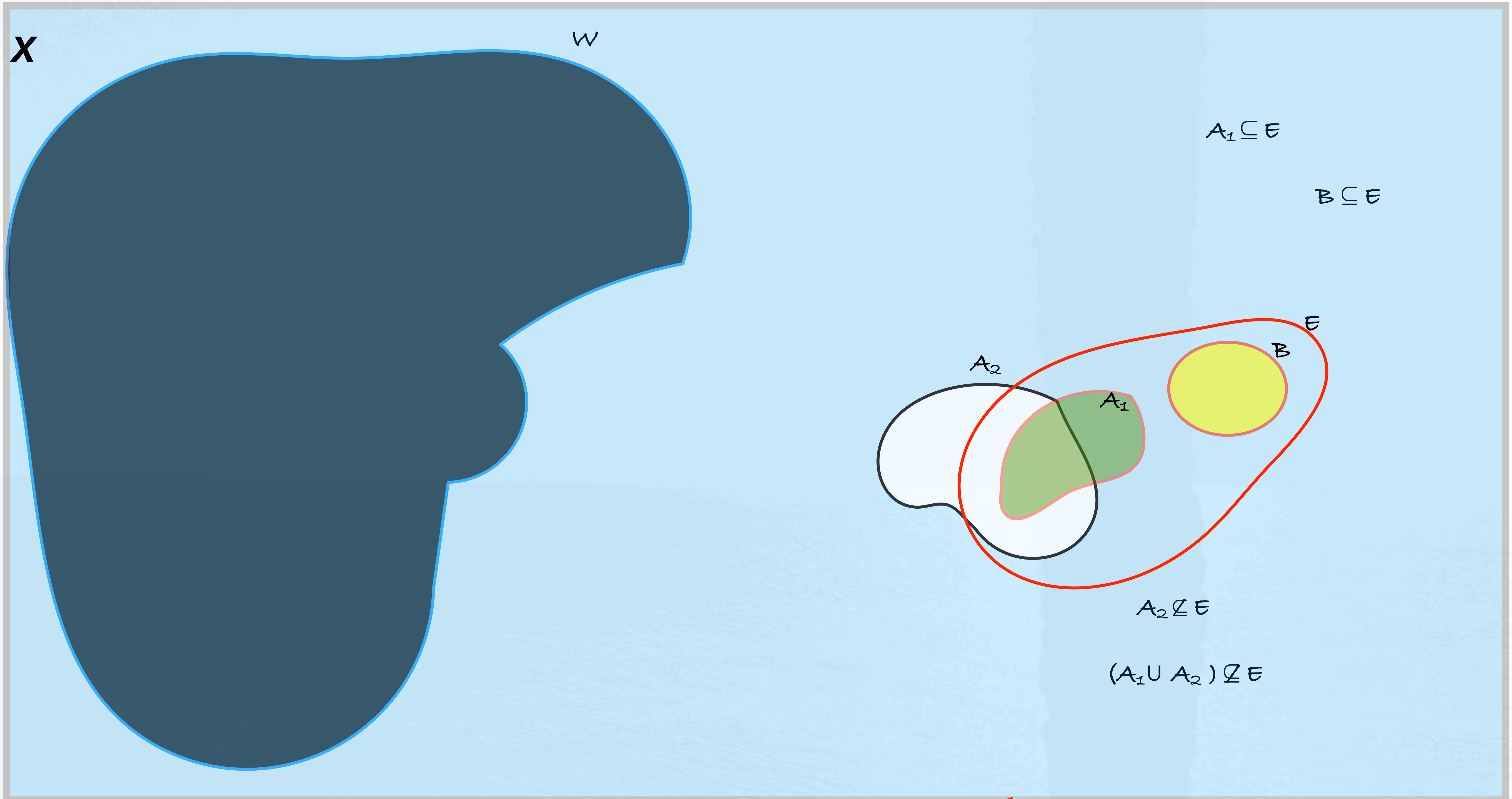
$\sqsubseteq W$



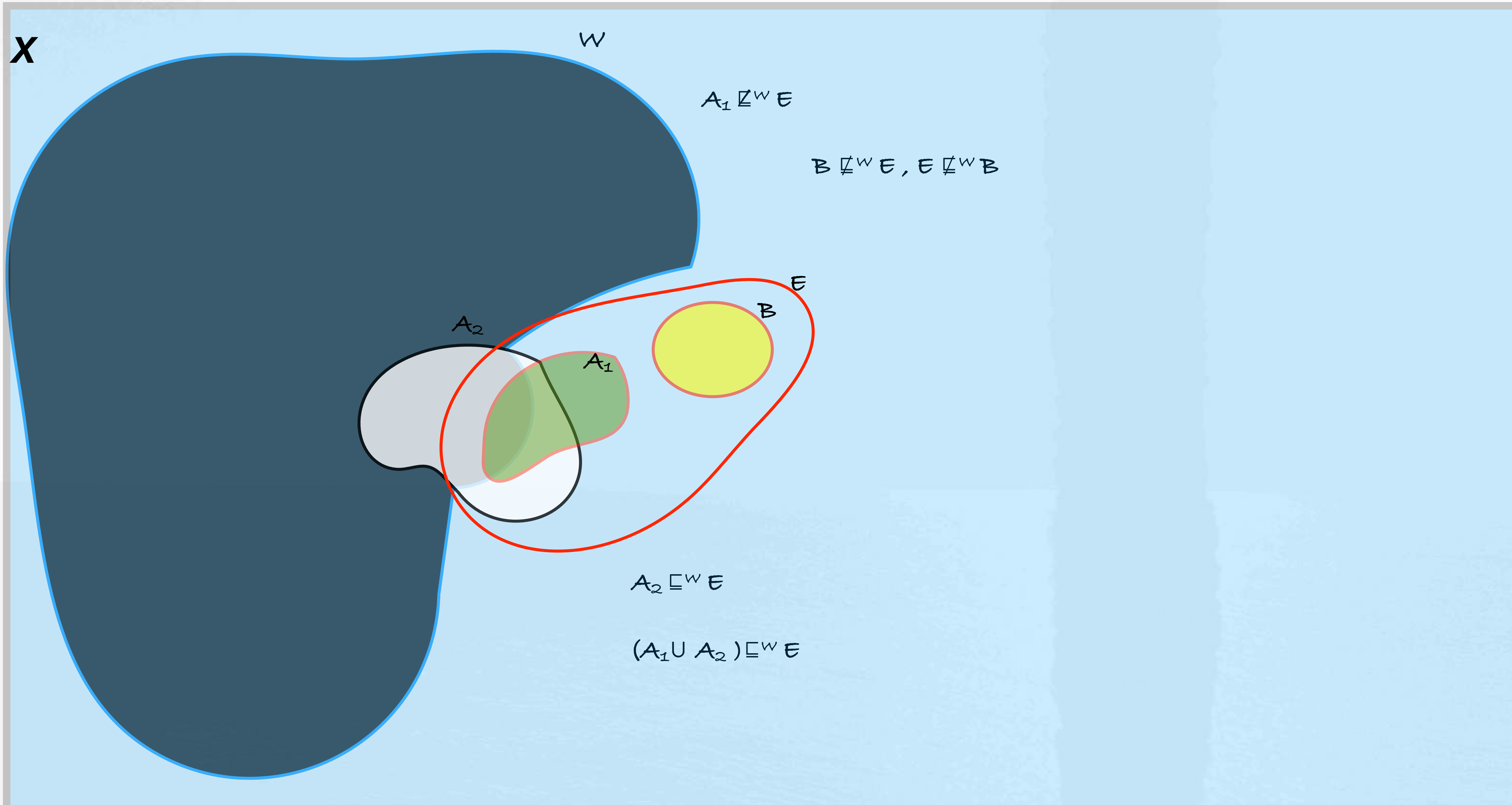
No es $\sqsubseteq^\emptyset$-cadena ni $\sqsubseteq^E$-cadena,



Referencial

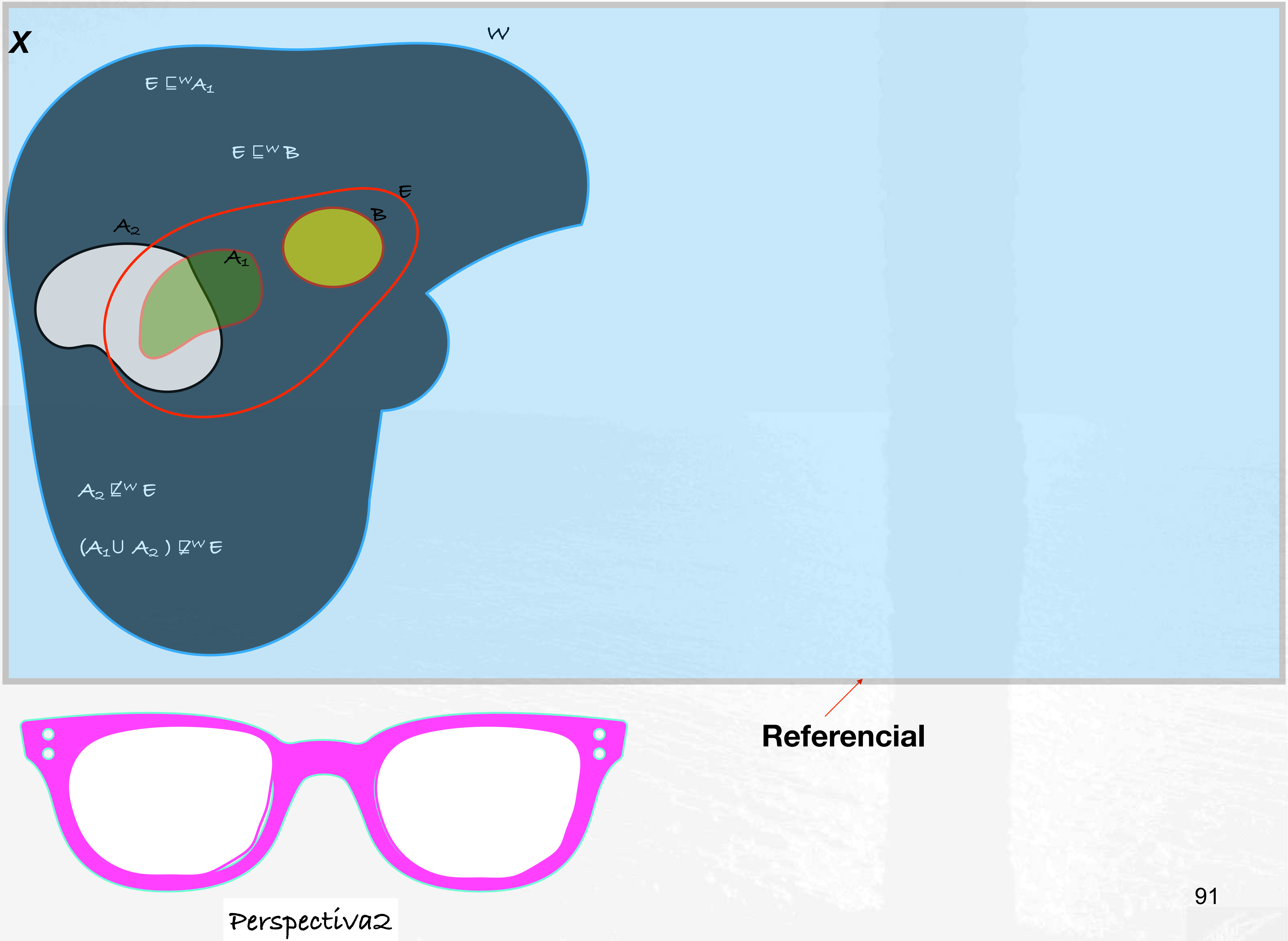


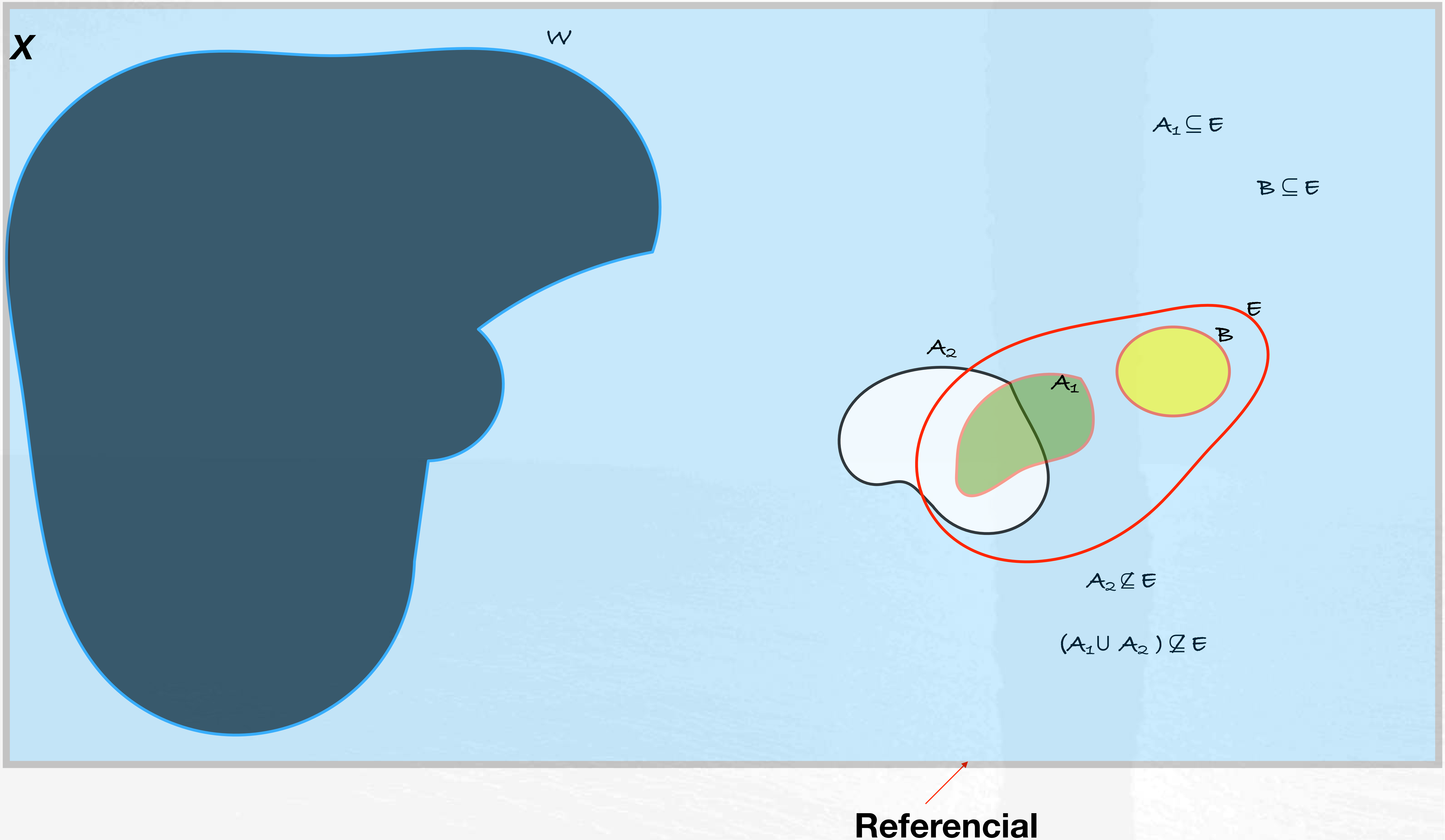
Referencial

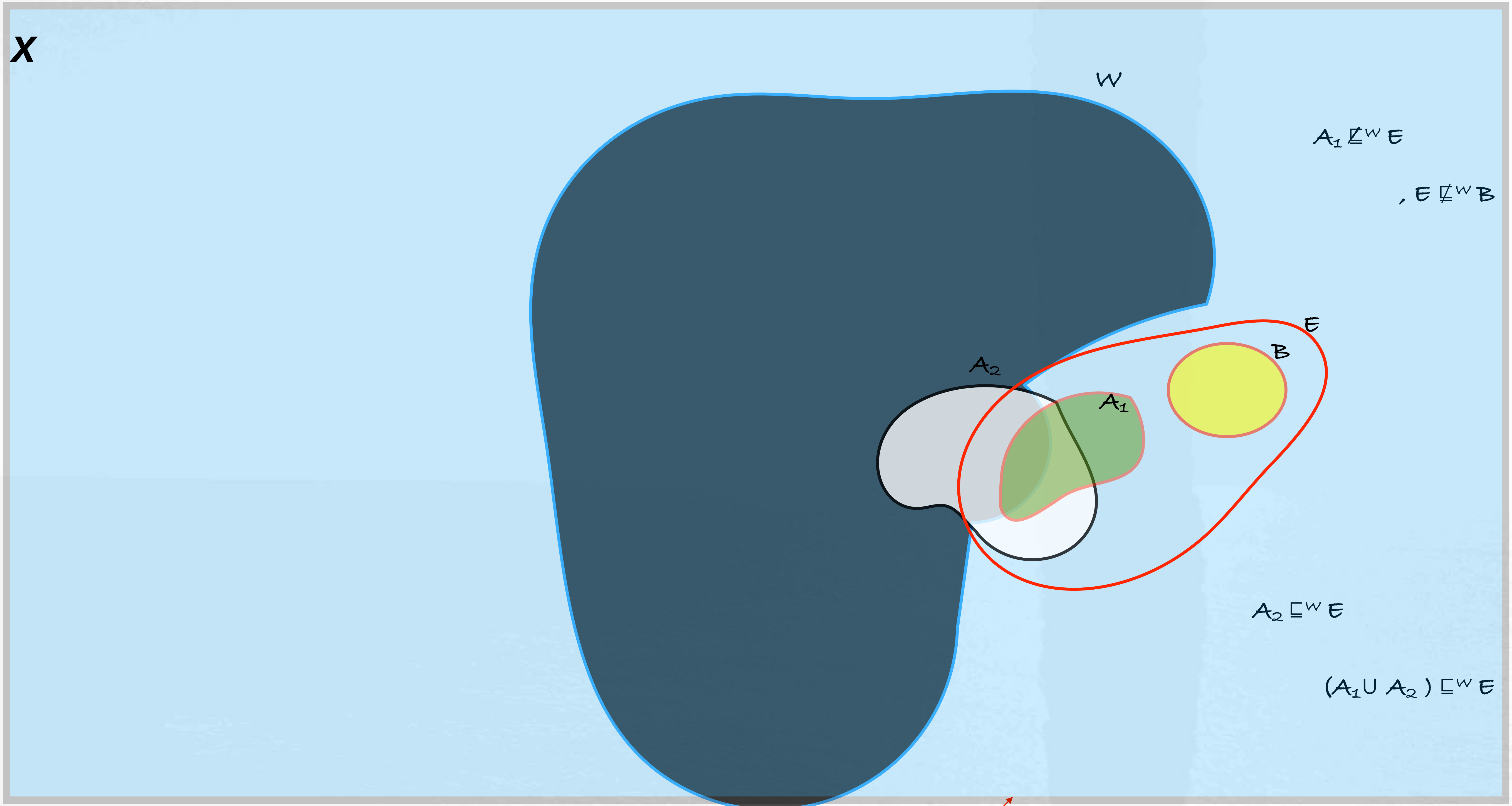


Referencial

Perspectiva1


X
W
$E \sqsubseteq^W A_1$
$E \sqsubseteq^W B$
E
B
A_2
A_1
$A_2 \not\sqsubseteq^W E$
$(A_1 \cup A_2) \not\sqsubseteq^W E$
Referencial
Perspectiva2


X
W
$A_1 \subseteq E$
$B \subseteq E$
E
B
A_2
A_1
$A_2 \not\subseteq E$
$(A_1 \cup A_2) \not\subseteq E$
Referencial



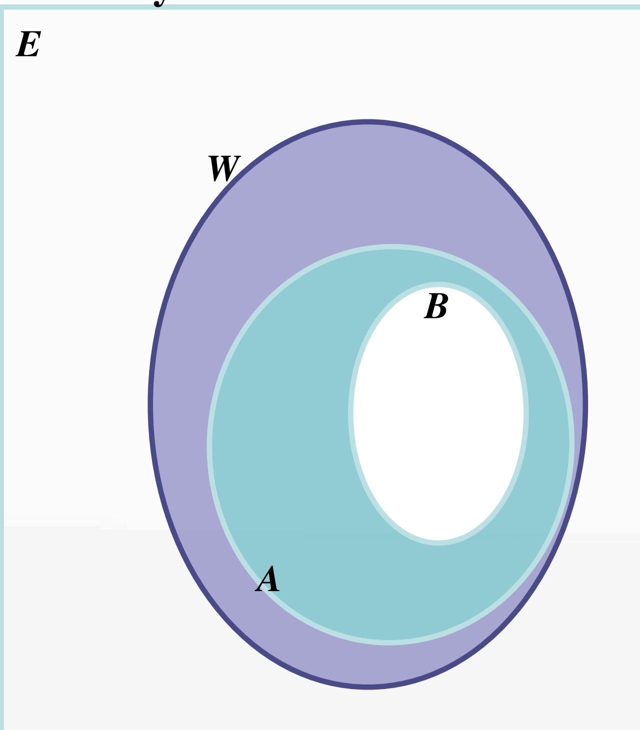
Referencial

Pac-Man!!

De nuevo: Perspectiva1

Comparación de las relaciones $\subseteq$ y $\sqsubseteq^W$ en algunos casos.

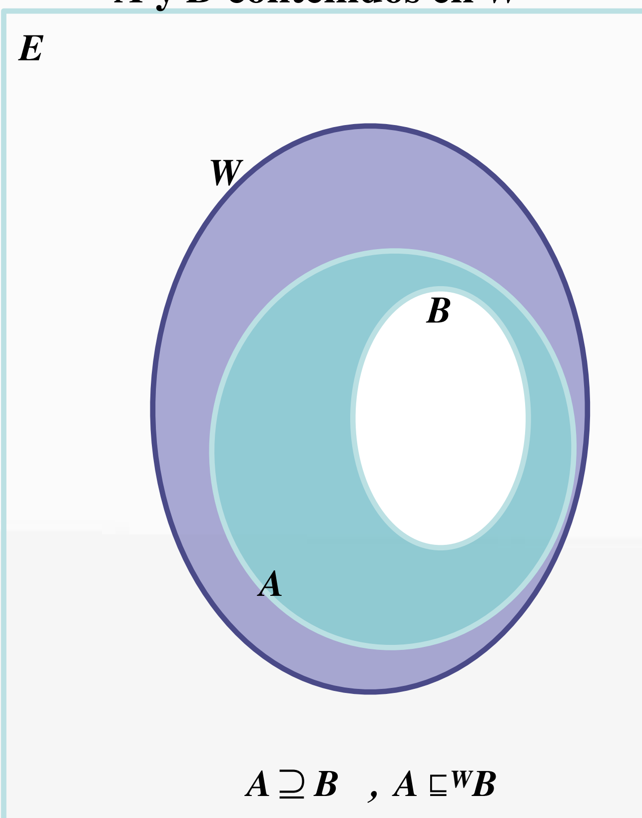
A y B contenidos en W



$A \supseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

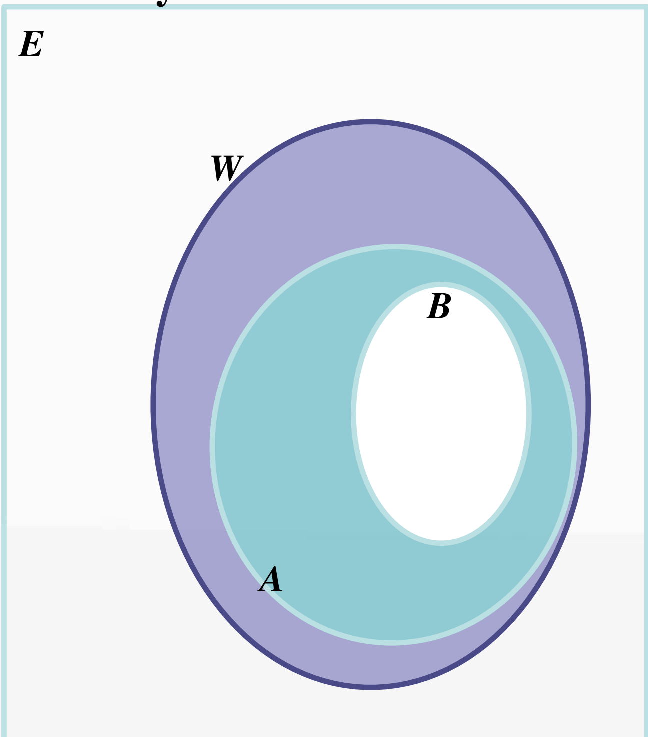
Comparación de las relaciones $\subseteq$ y $\sqsubseteq^W$ en algunos casos.

A y B contenidos en W



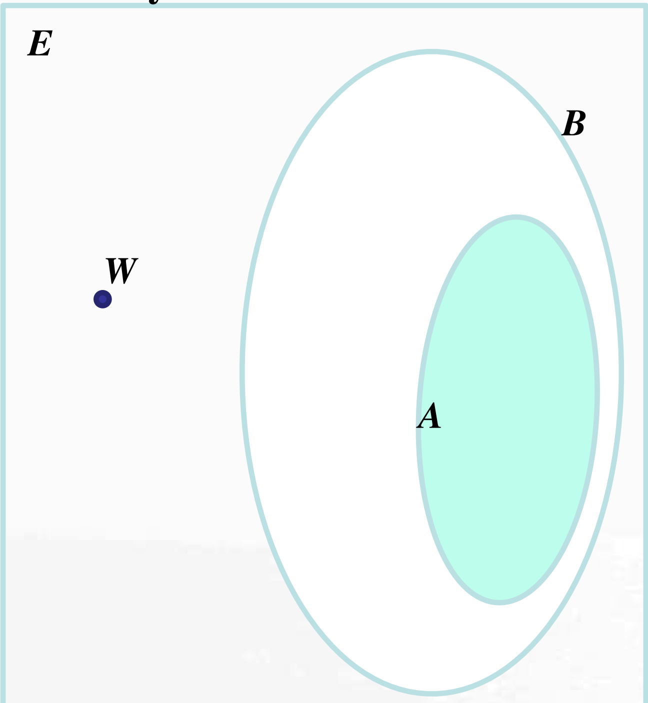
Comparación de las relaciones $\subseteq$ y $\sqsubseteq^W$ en algunos casos.

A y B contenidos en W



$A \supseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

A y B contenidos en W^c

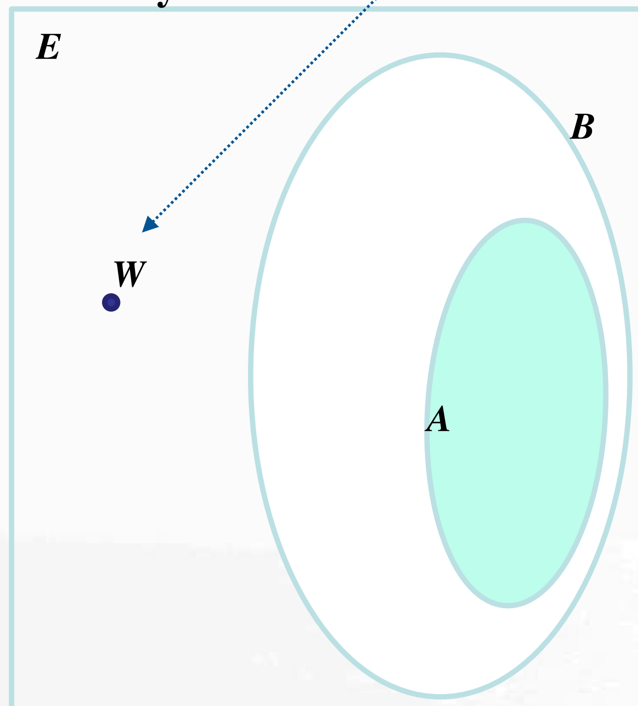


$A \subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

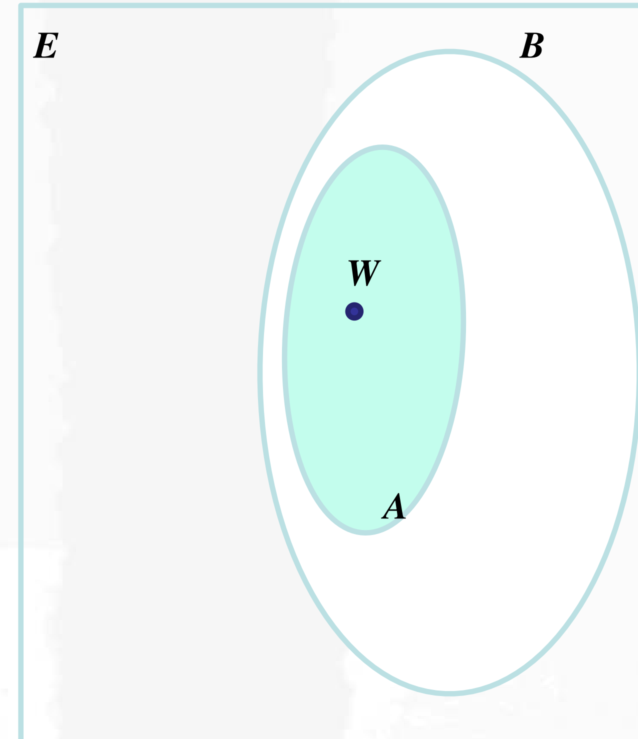
INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

Comparación de las relaciones $\subseteq$ y $\sqsubseteq^W$ en algunos casos. La medida de W es <u>insignificante</u> comparada con la de A o con la de B.

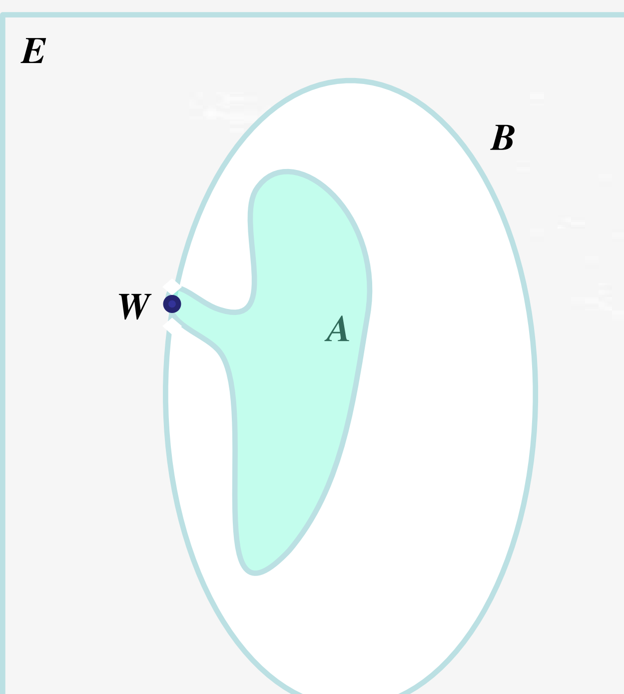
A y B contenidos en W^c



$A \subseteq B \quad , A \sqsubseteq^W B$

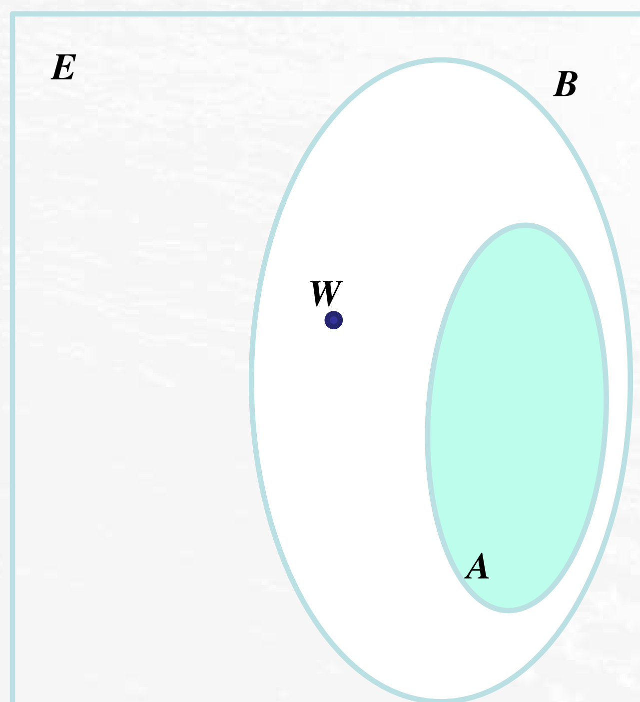


$A \subseteq B \quad , A \sqsubseteq^W B$

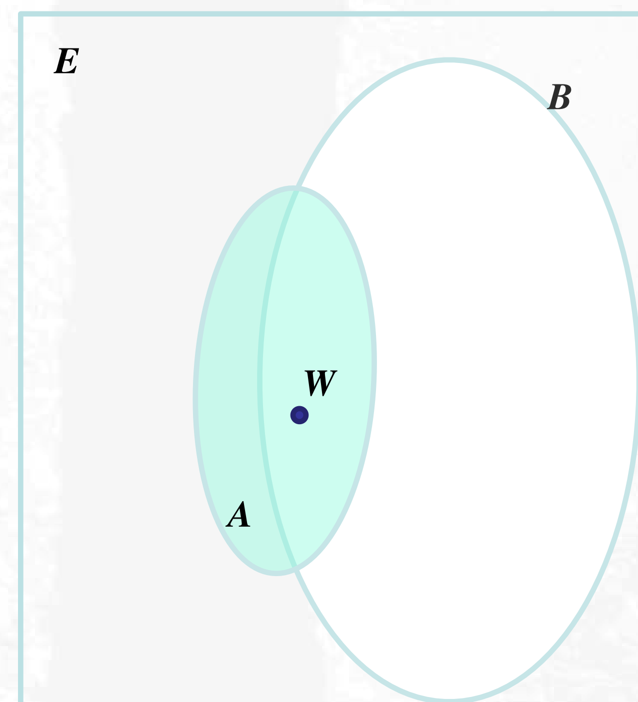


$W \cap B = \varnothing, W \subseteq A, (A - W) \subseteq B$

$A \not\subseteq B \quad , A \sqsubseteq^W B$



$A \subseteq B \quad , A \not\sqsubseteq^W B$



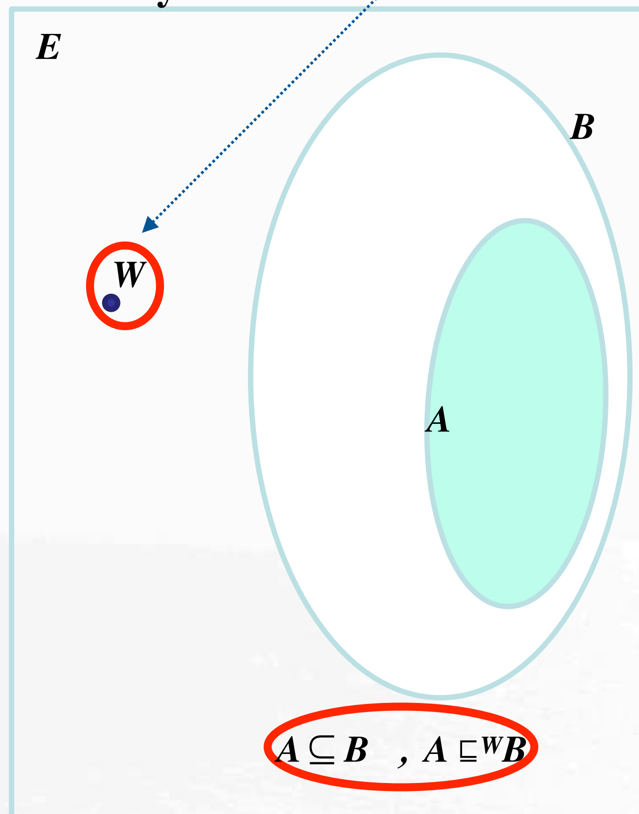
$A \not\subseteq B \quad , A \not\sqsubseteq^W B$

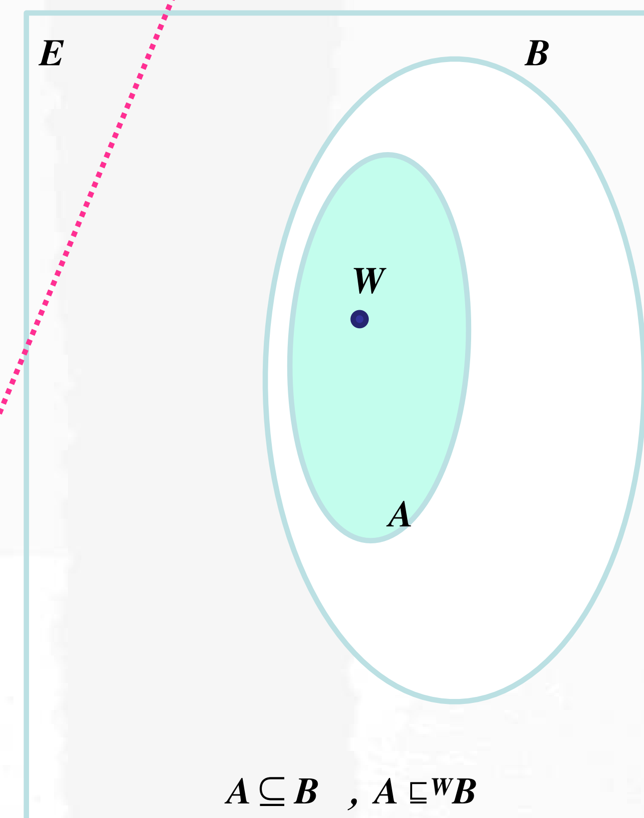
INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

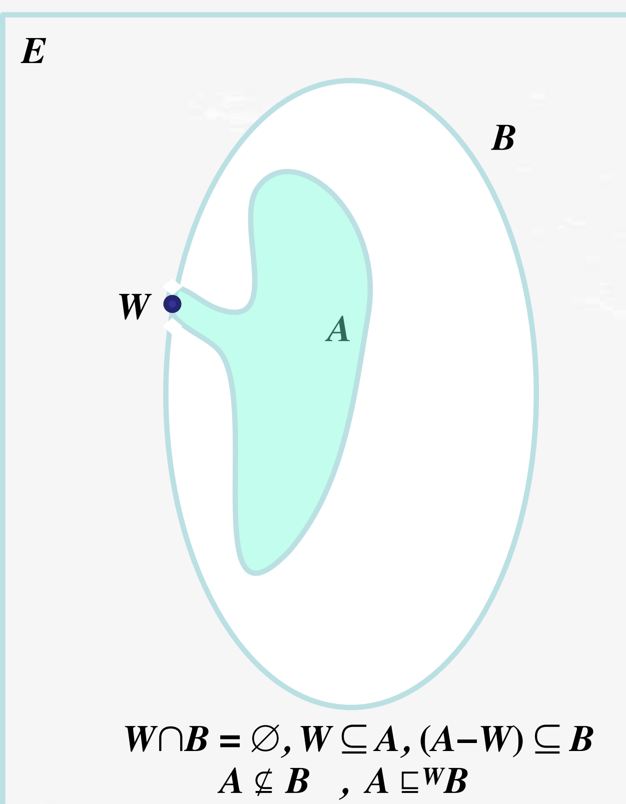
Comparación de las relaciones $\subseteq$ y $\sqsubseteq^W$ en algunos casos. La medida de W es <u>insignificante</u> comparada con la de A o con la de B.

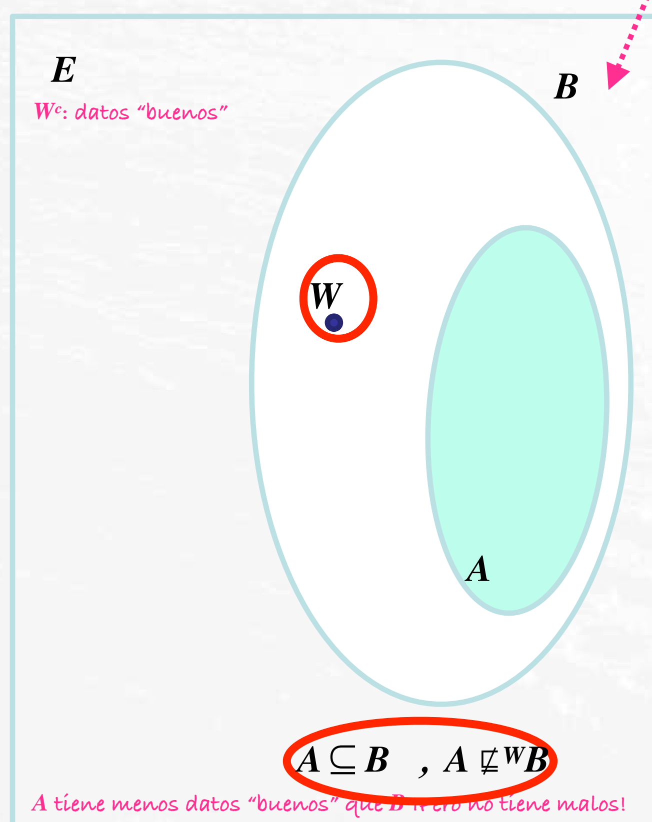
¿Pero y si W representa datos críticos <u>no deseados</u> por ejemplo en un proceso de diagnóstico (industrial, médico,...)?

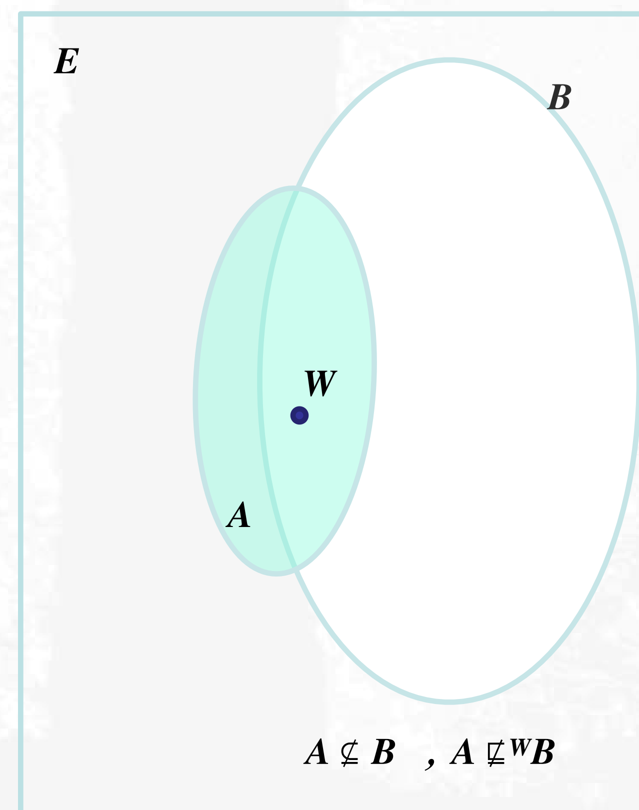
A y B contenidos en W^c







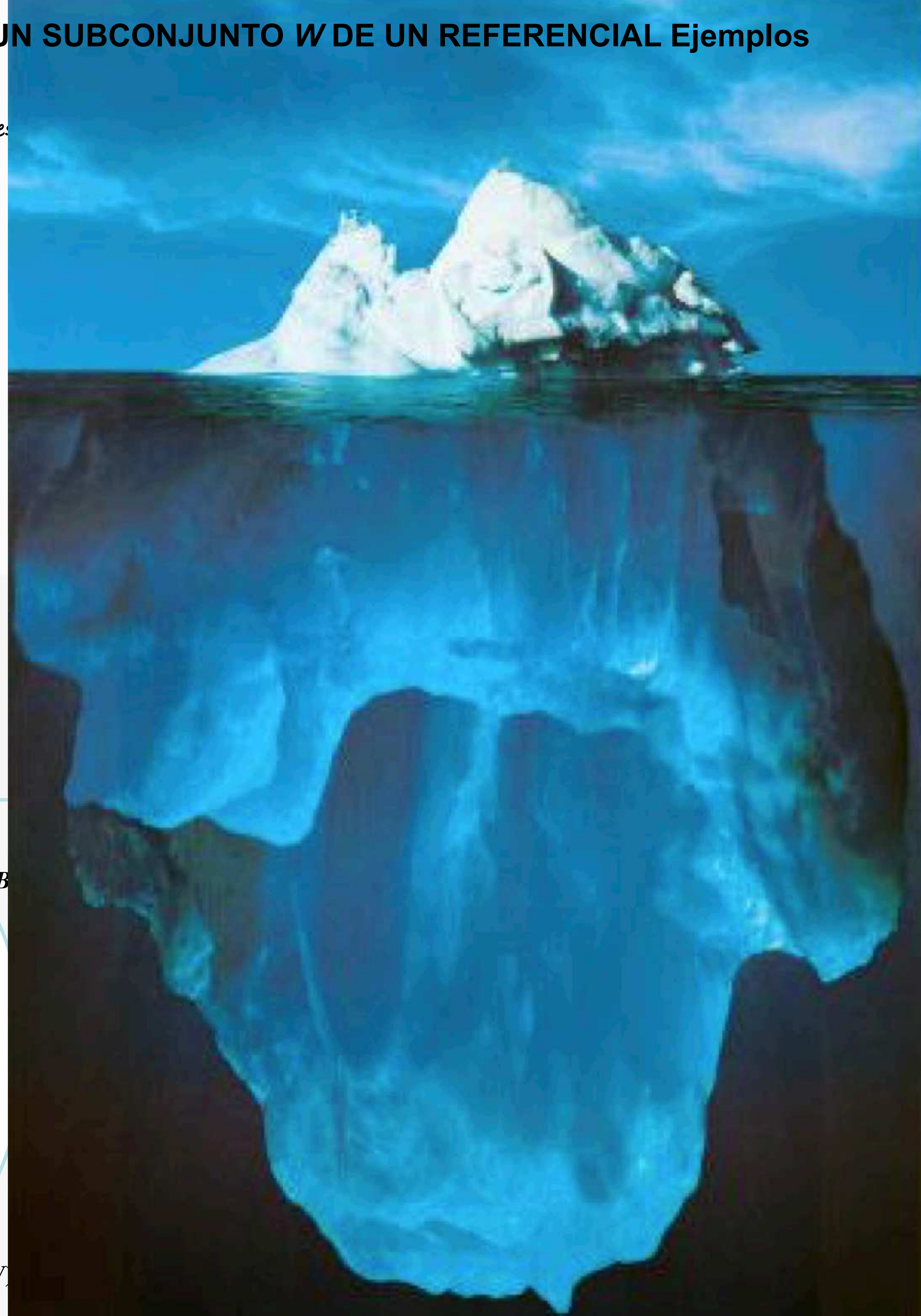




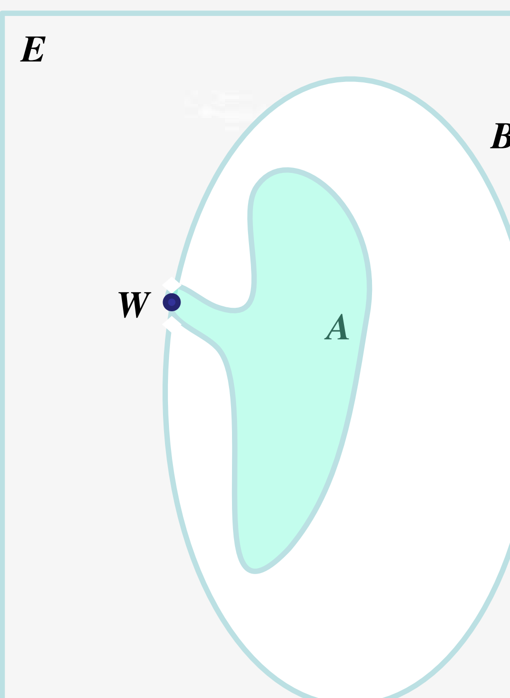
INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

Comparación de las relaciones … con la de B.

… de diagnóstico (industrial, médico,...)?

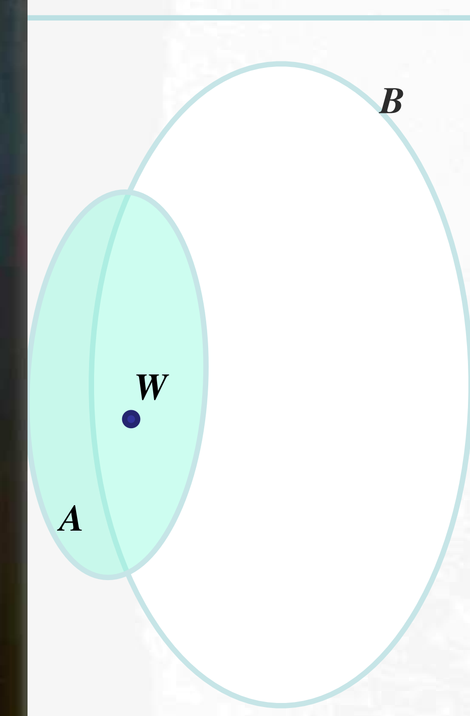


$A \subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$



$W \cap B = \varnothing, W \subseteq A, (A-W)$…

$A \not\subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

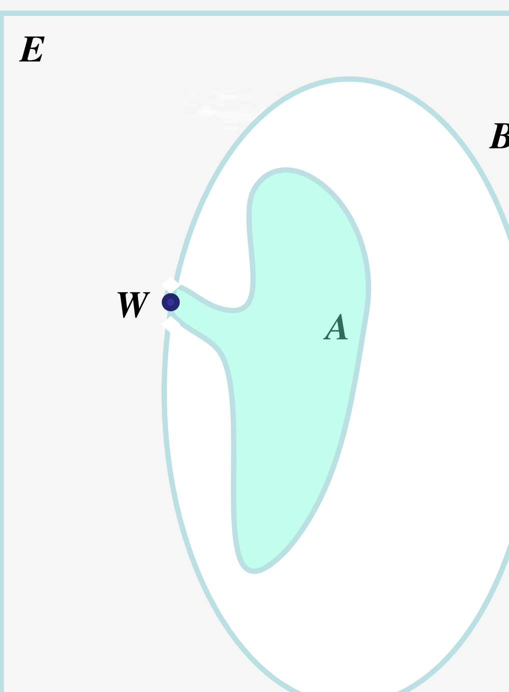


$A \not\subseteq B$, $A \not\sqsubseteq^W B$

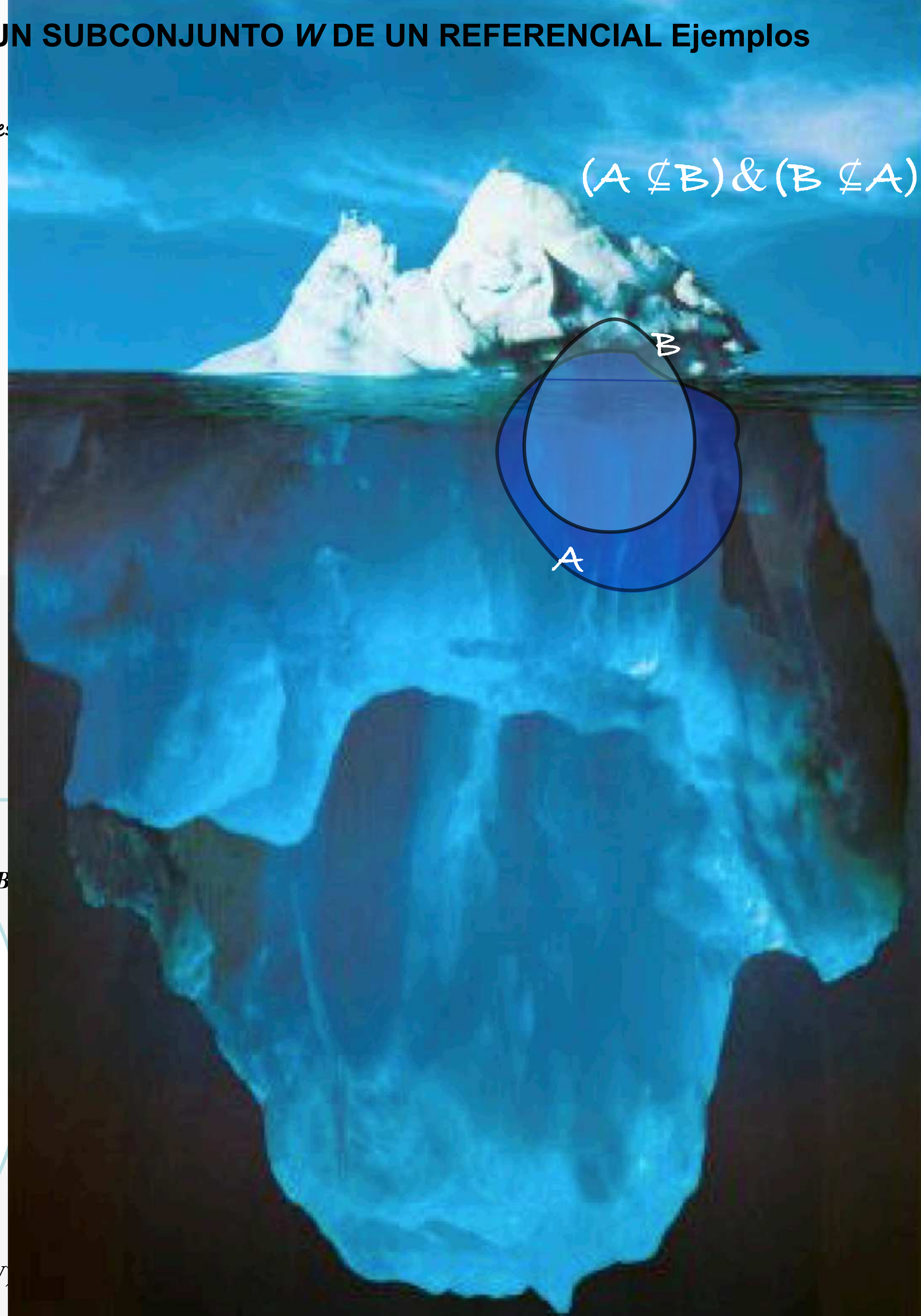
INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

Comparación de las relaciones … con la de ***B***.

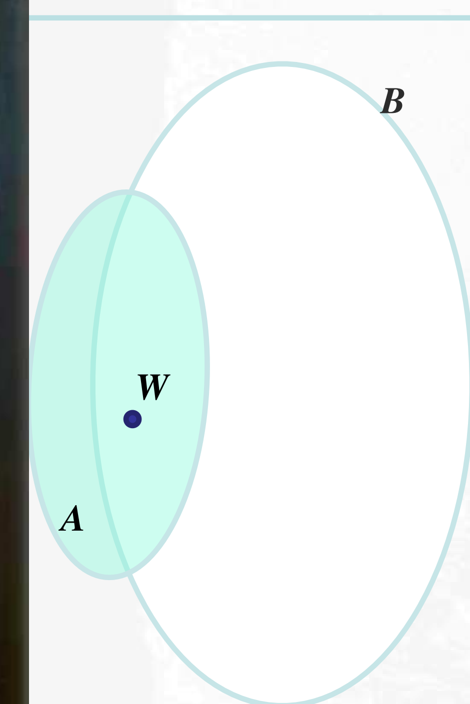
… de diagnóstico (industrial, médico,...)?



$W \cap B = \varnothing, W \subseteq A, (A-W)$…
$A \not\subseteq B \quad , A \sqsubseteq^{W} B$



$A \subseteq B \quad , A \sqsubseteq^{W} B$

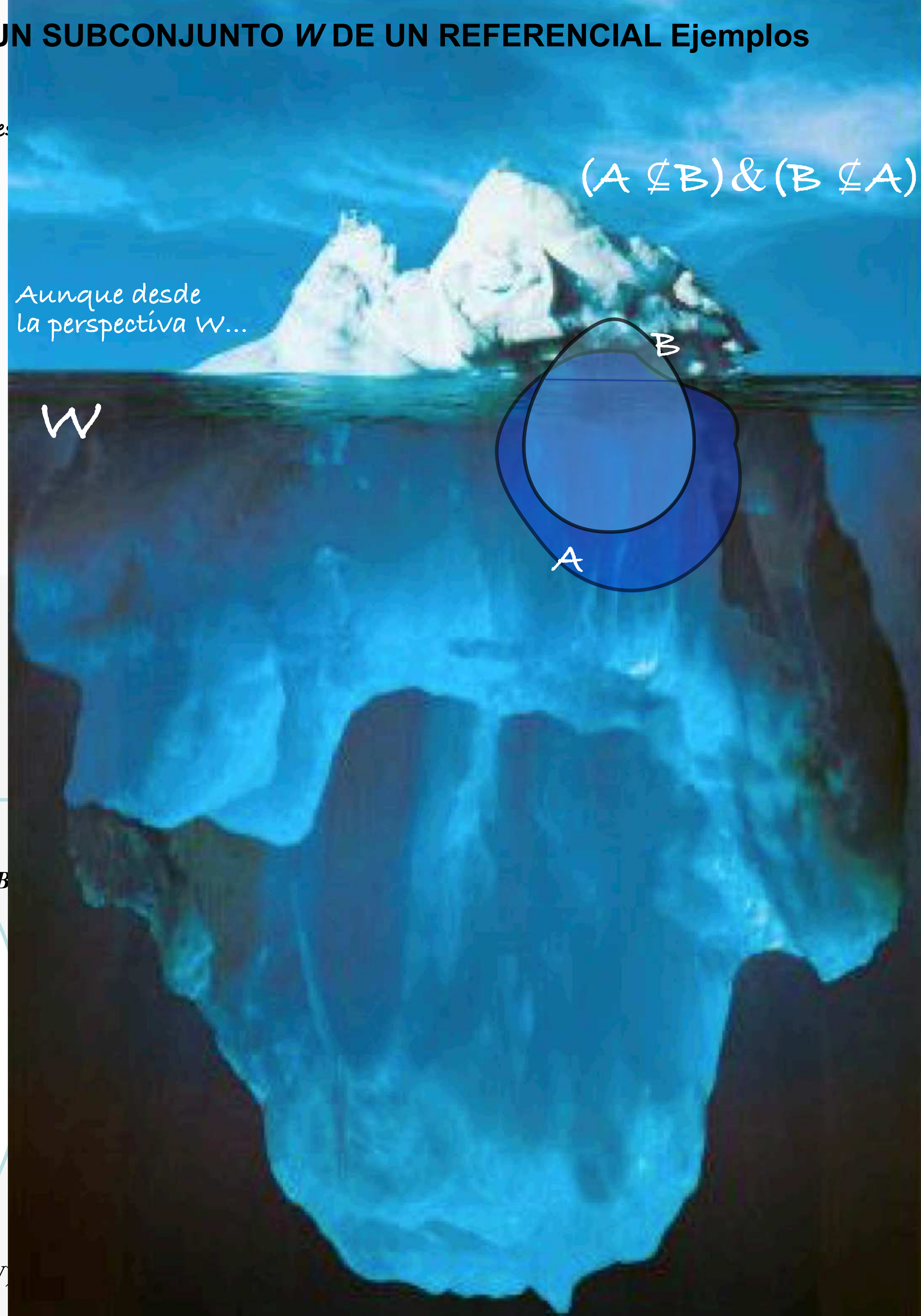


$A \not\subseteq B \quad , A \not\sqsubseteq^{W} B$

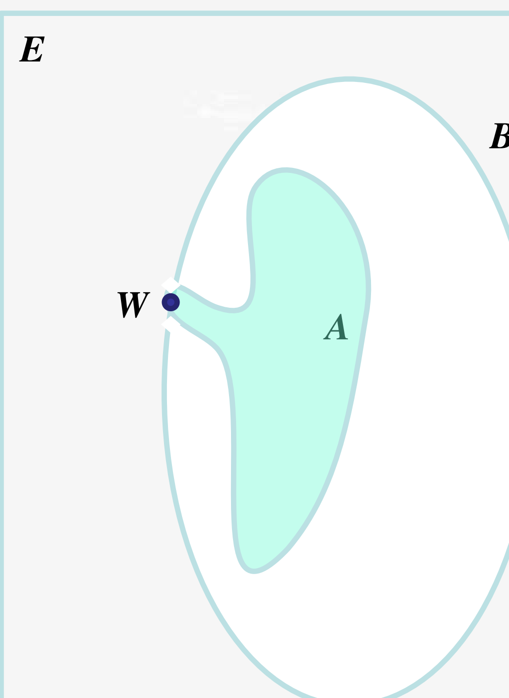
INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

Comparación de las relaciones ... con la de ***B***.

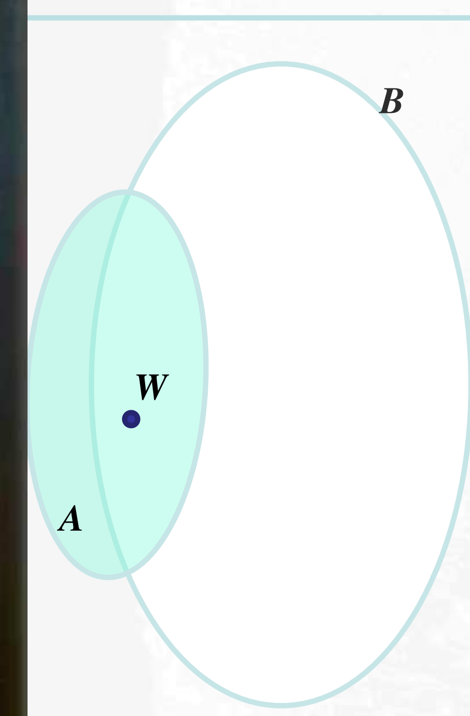
...de diagnóstico (industrial, médico,...)?



$A \subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$



$W \cap B = \varnothing, W \subseteq A, (A-W)$...
$A \not\subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

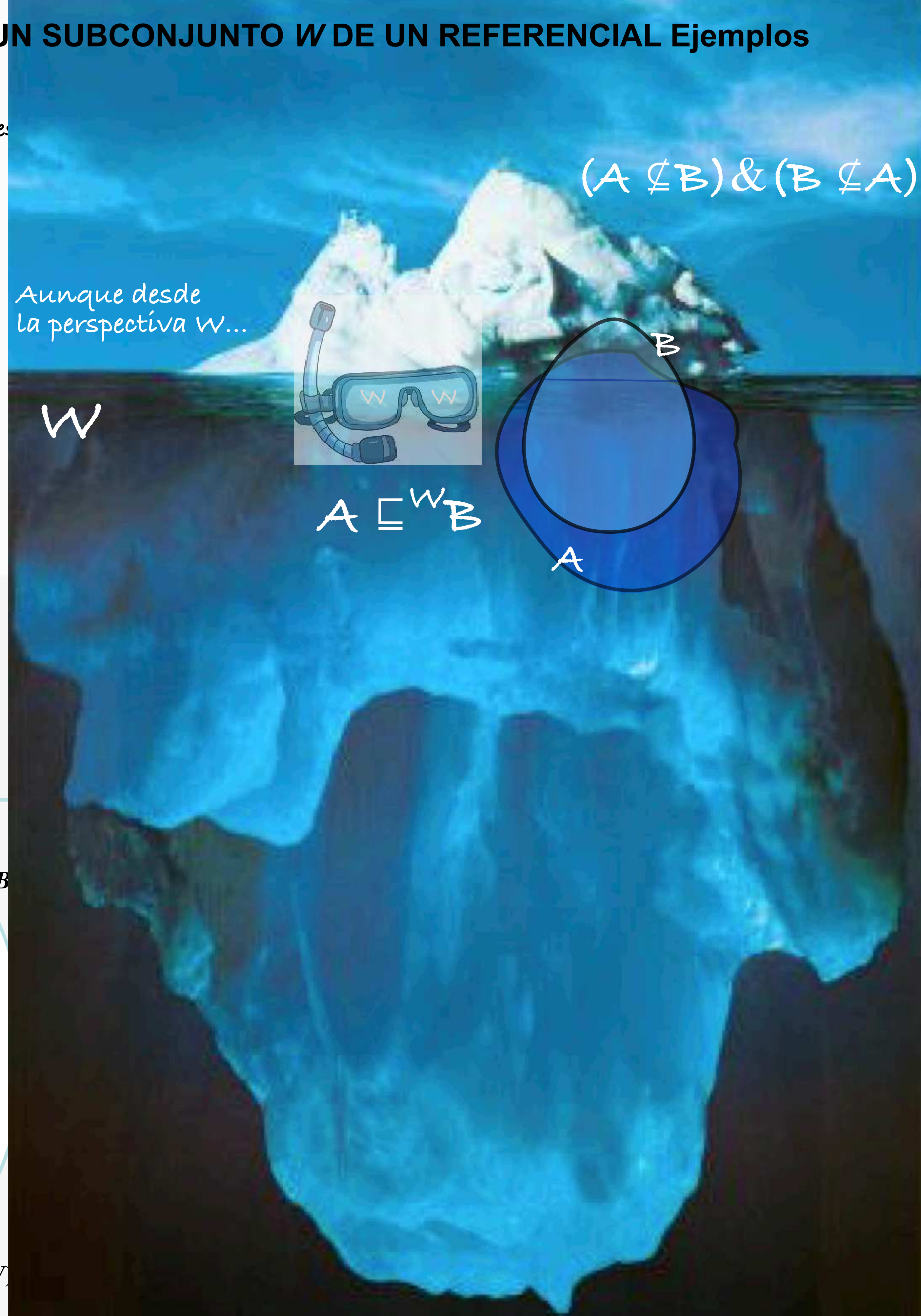


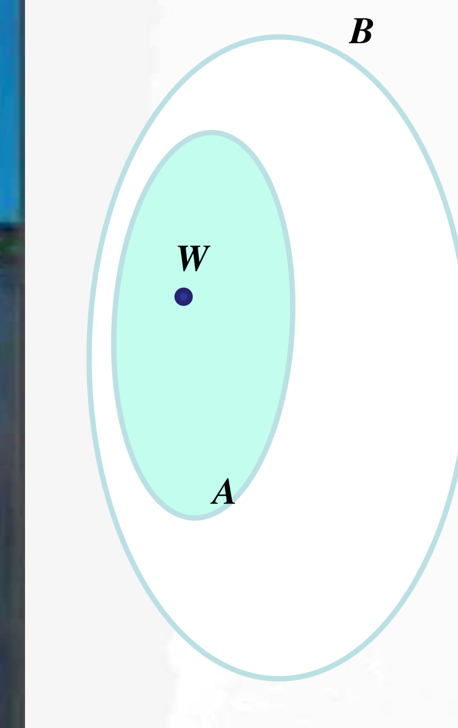
$A \not\subseteq B$, $A \not\sqsubseteq^W B$

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL Ejemplos

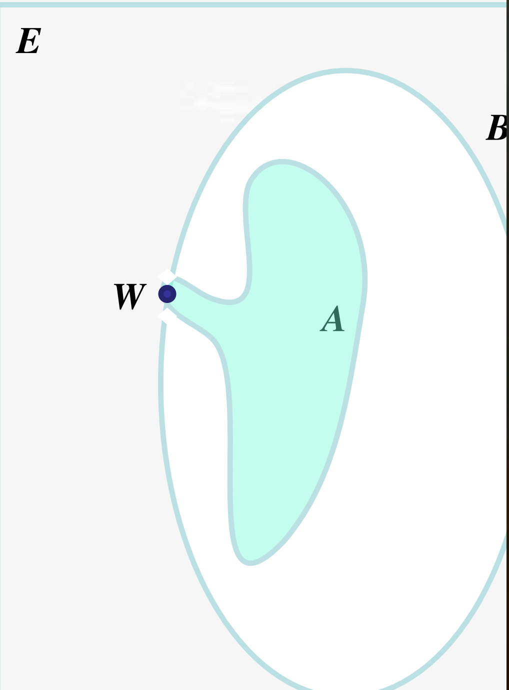
Comparación de las relaciones … con la de B.

… de diagnóstico (industrial, médico,...)?



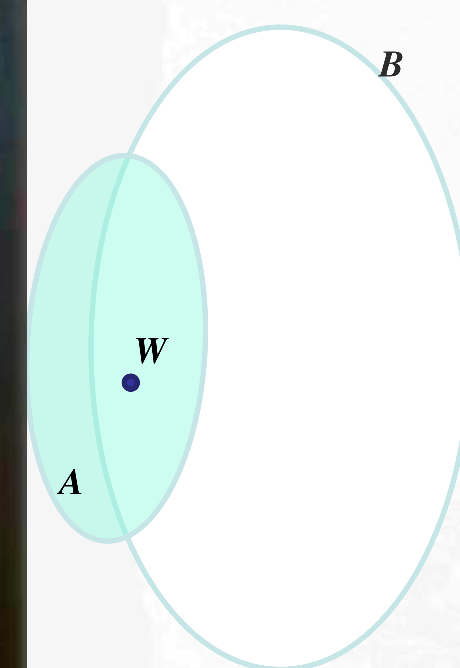


$A \subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$



$W \cap B = \varnothing, W \subseteq A, (A-W)$…

$A \not\subseteq B$, $A \sqsubseteq^W B$

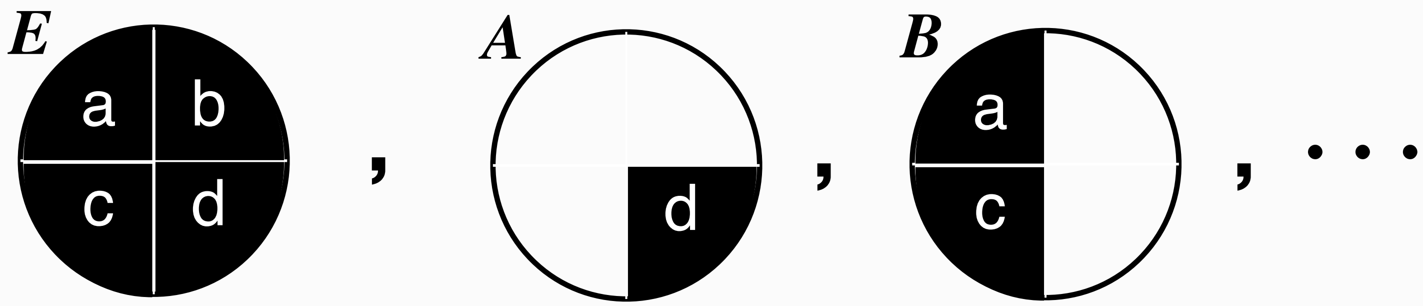


$A \not\subseteq B$, $A \not\sqsubseteq^W B$

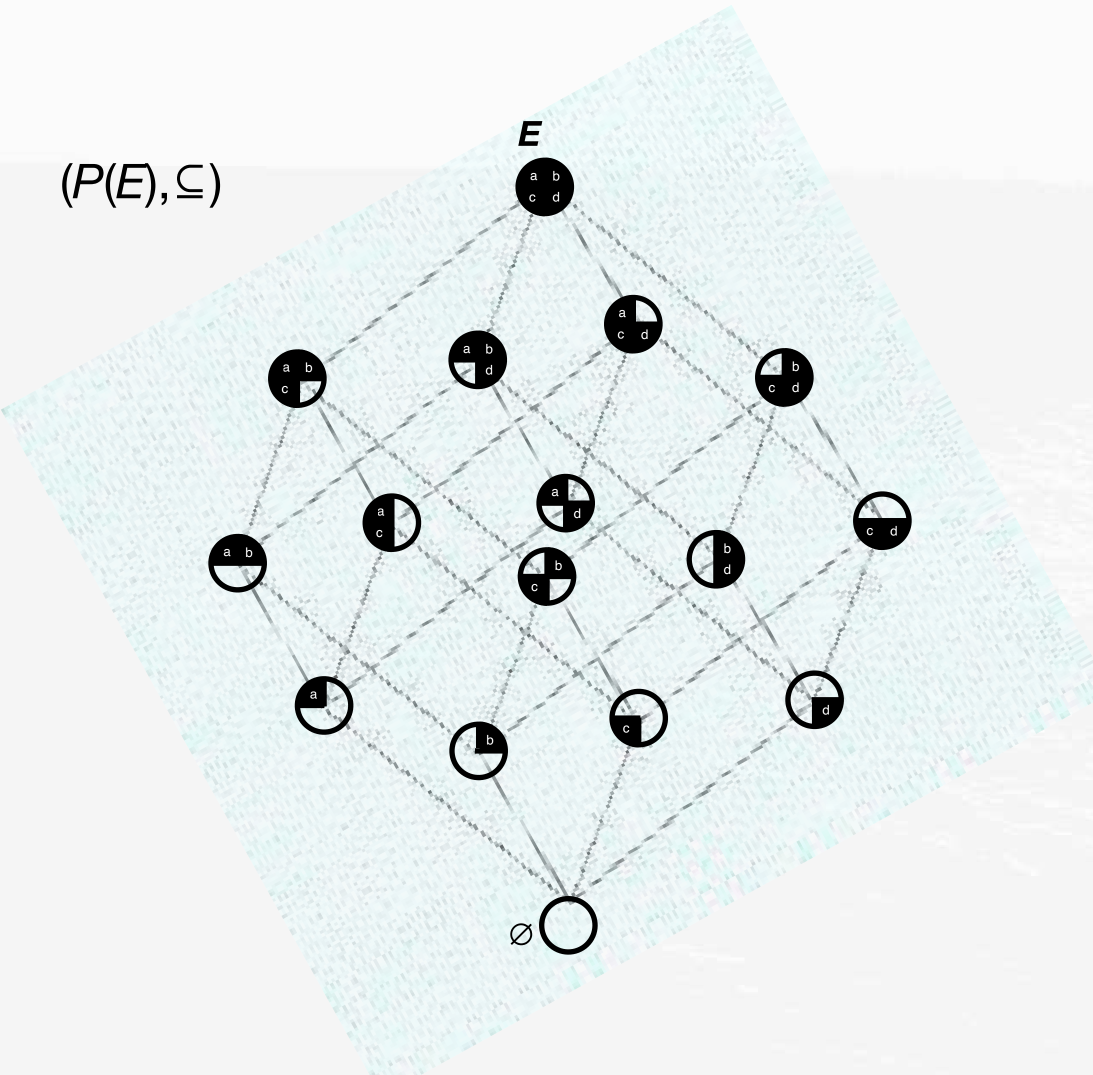
“Perspectivas” en $P(E)$: Ejemplos ilustrativos del isomorfismo $\varphi_W(X) = X \Delta W$ en $P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \rightarrow P(E)$.

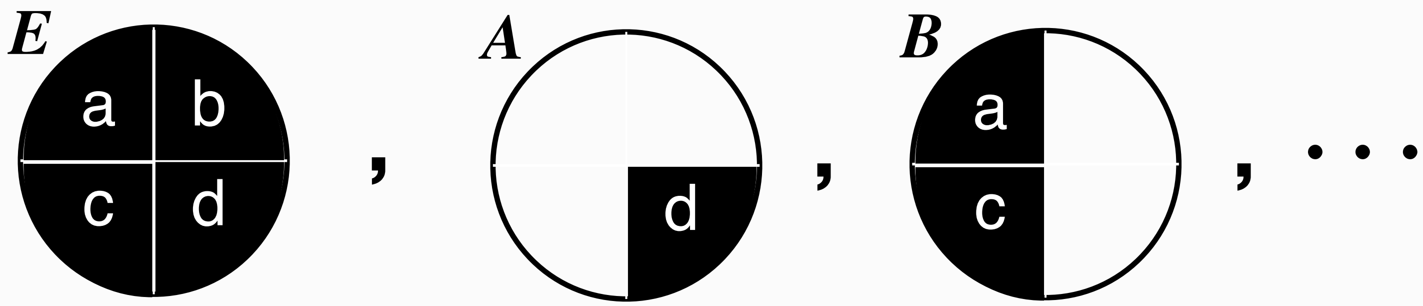


$(P(E), \subseteq)$



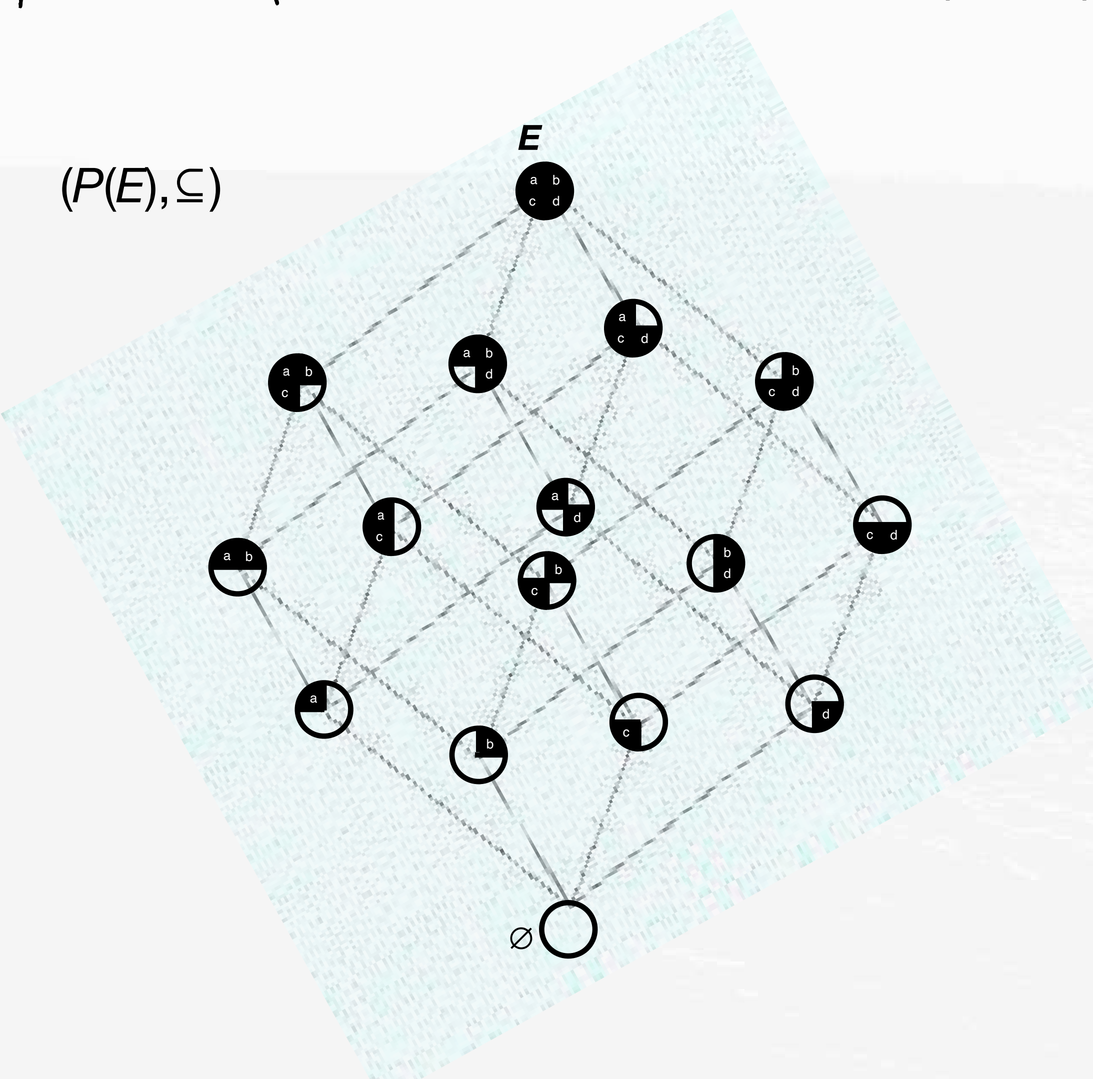
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



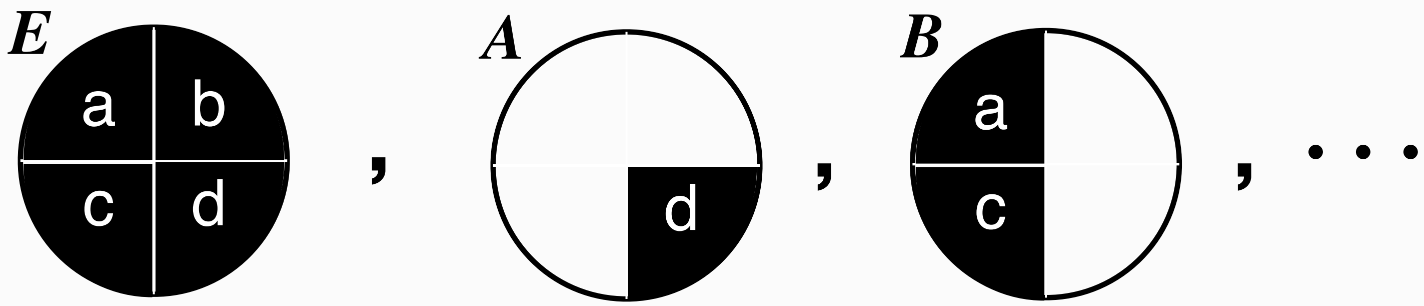
Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$ $\forall (X,Y) \in P(E)^2$

$(P(E), \subseteq)$



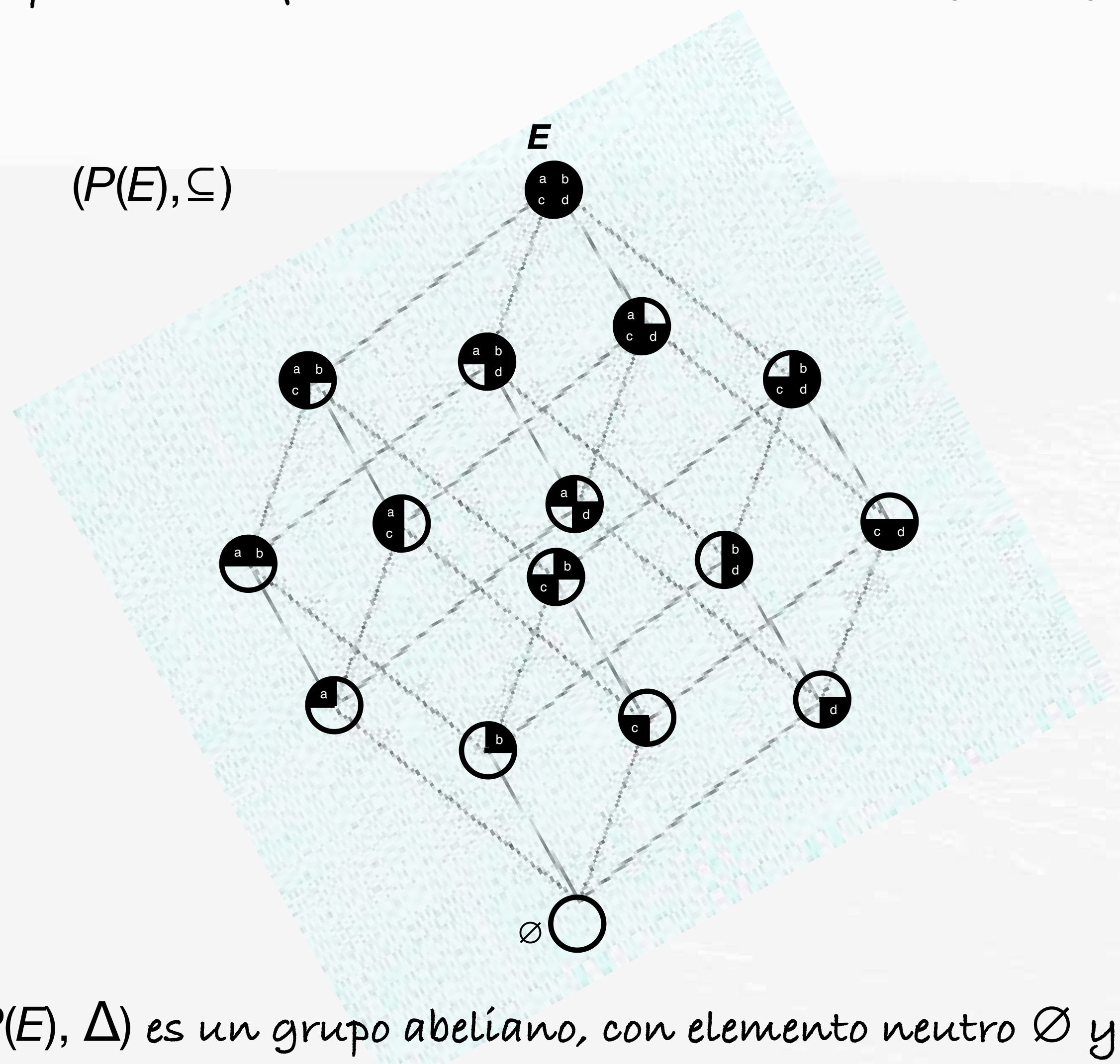
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$(P(E), \subseteq)$

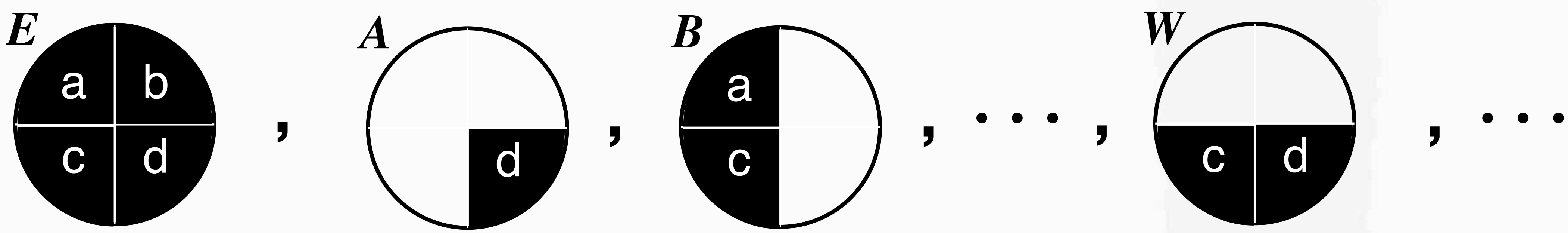


$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

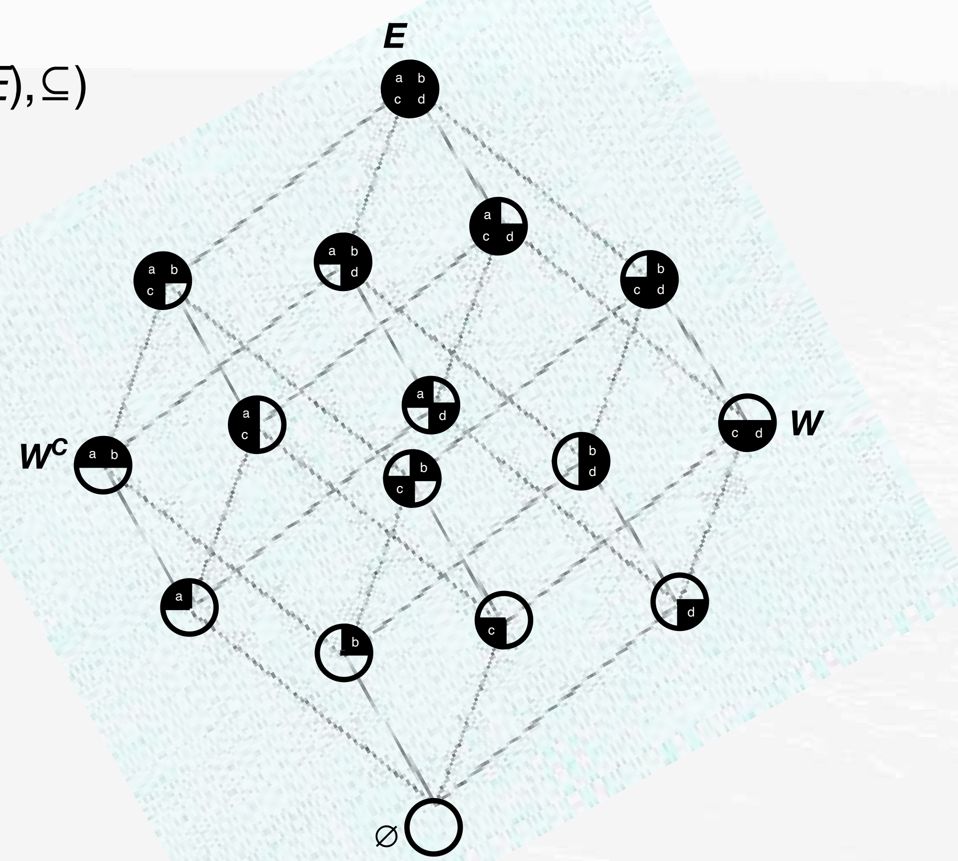
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$(P(E), \subseteq)$

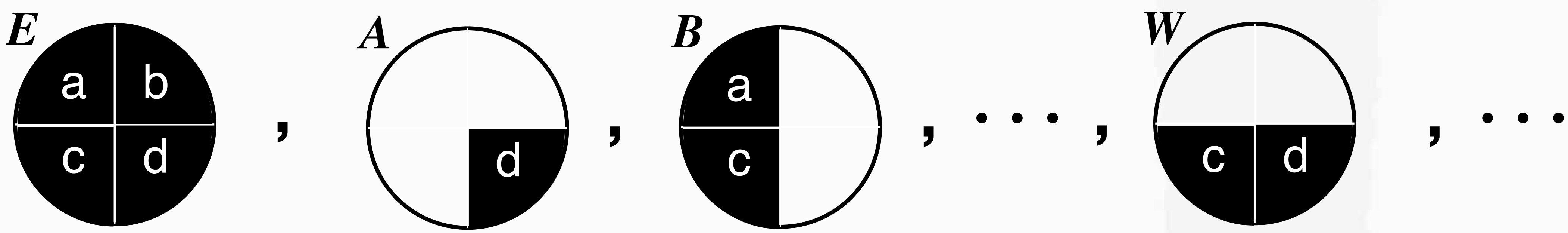


$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \rightarrow P(E)$.

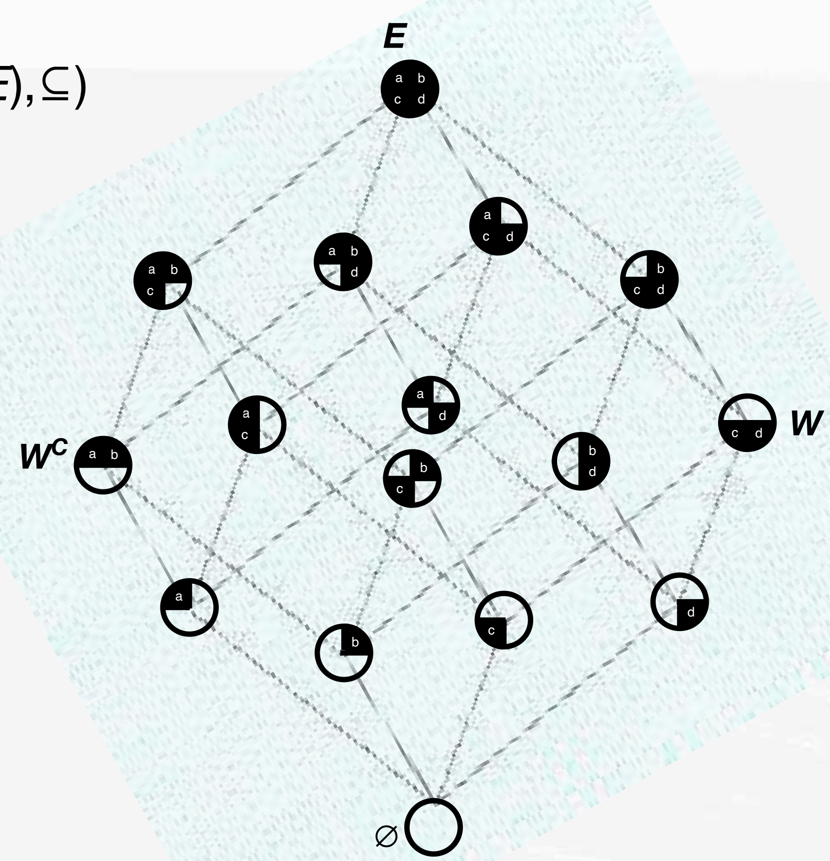


(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X \Delta W) \subseteq (Y \Delta W)] \Leftrightarrow (Y \cap W \subseteq Y \subseteq B \cup W)$$

$(P(E), \subseteq)$

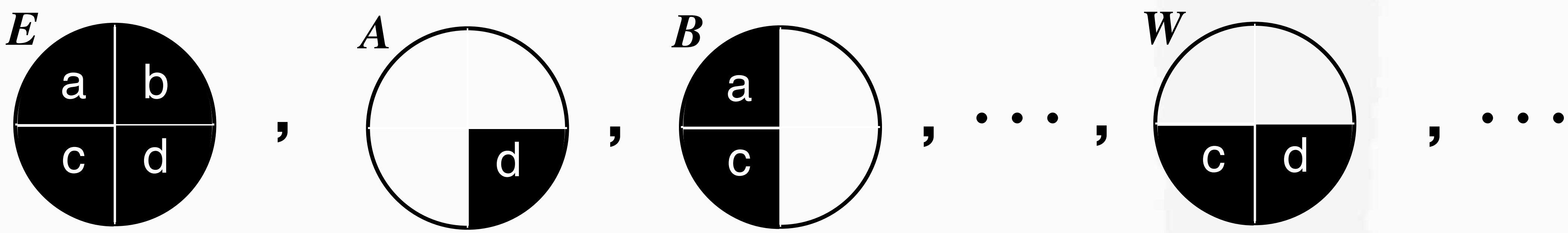


$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.

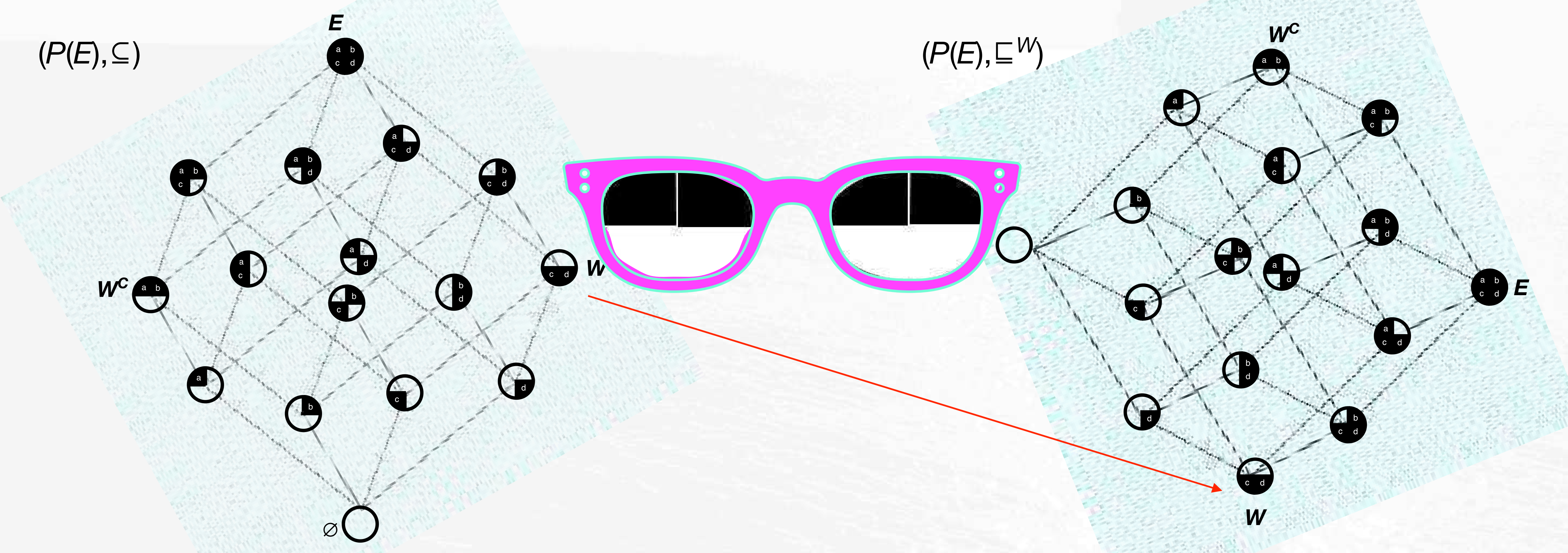


Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X \Delta W) \subseteq (Y \Delta W)] \Leftrightarrow (Y \cap W \subseteq Y \subseteq B \cup W)$$

$(P(E), \subseteq)$ $(P(E), \sqsubseteq^W)$



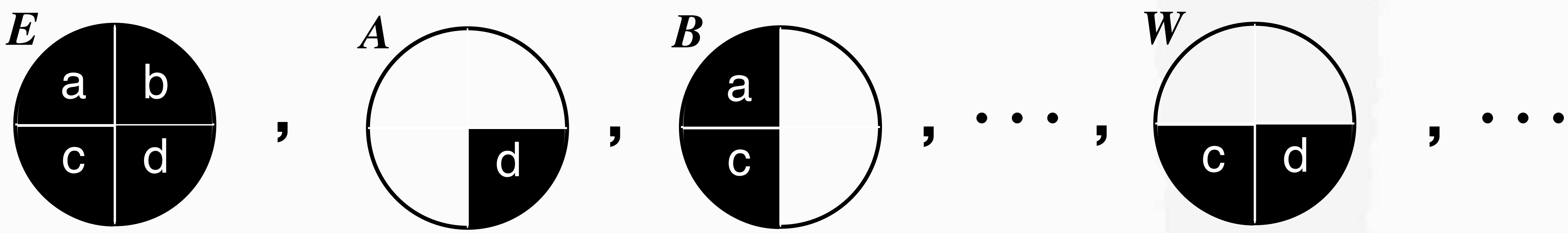
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

Para $W \in P(E)$, la aplicación $\varphi_W: P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X \Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E), \subseteq)$ y $(P(E), \sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

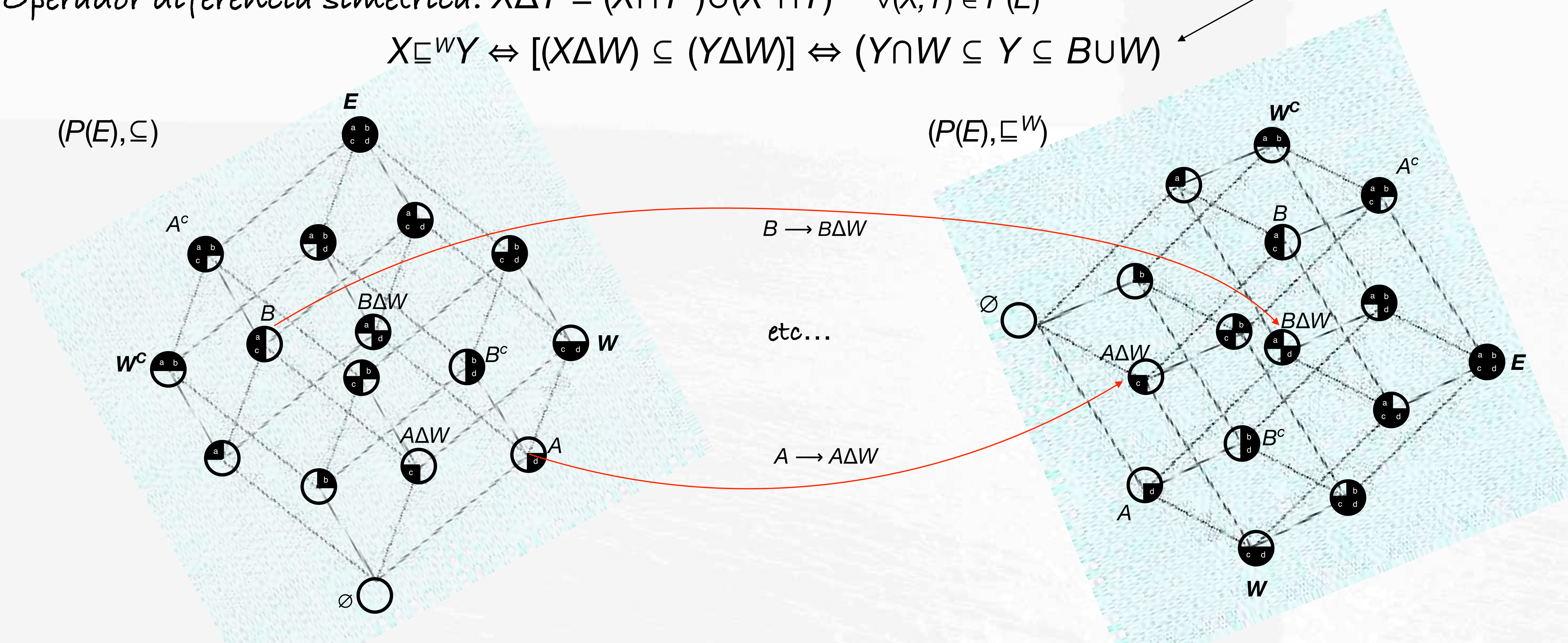
con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X \Delta W) \subseteq (Y \Delta W)] \Leftrightarrow (Y \cap W \subseteq Y \subseteq B \cup W)$$



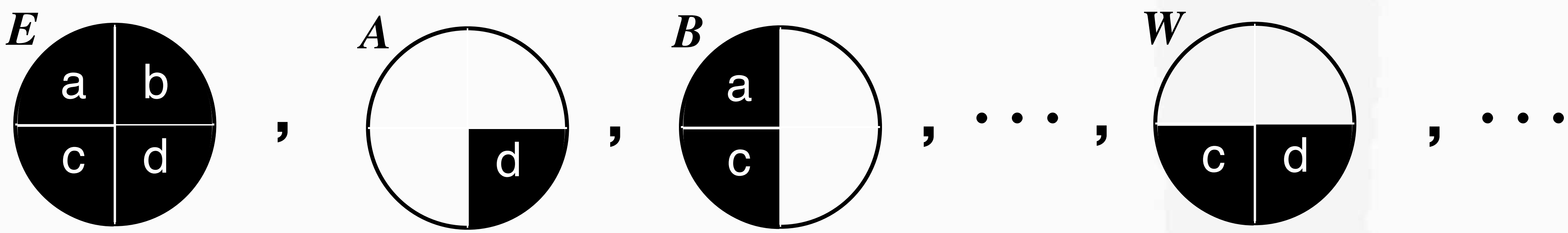
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

Para $W \in P(E)$, la aplicación φ_W: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X \Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E), \subseteq)$ y $(P(E), \sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

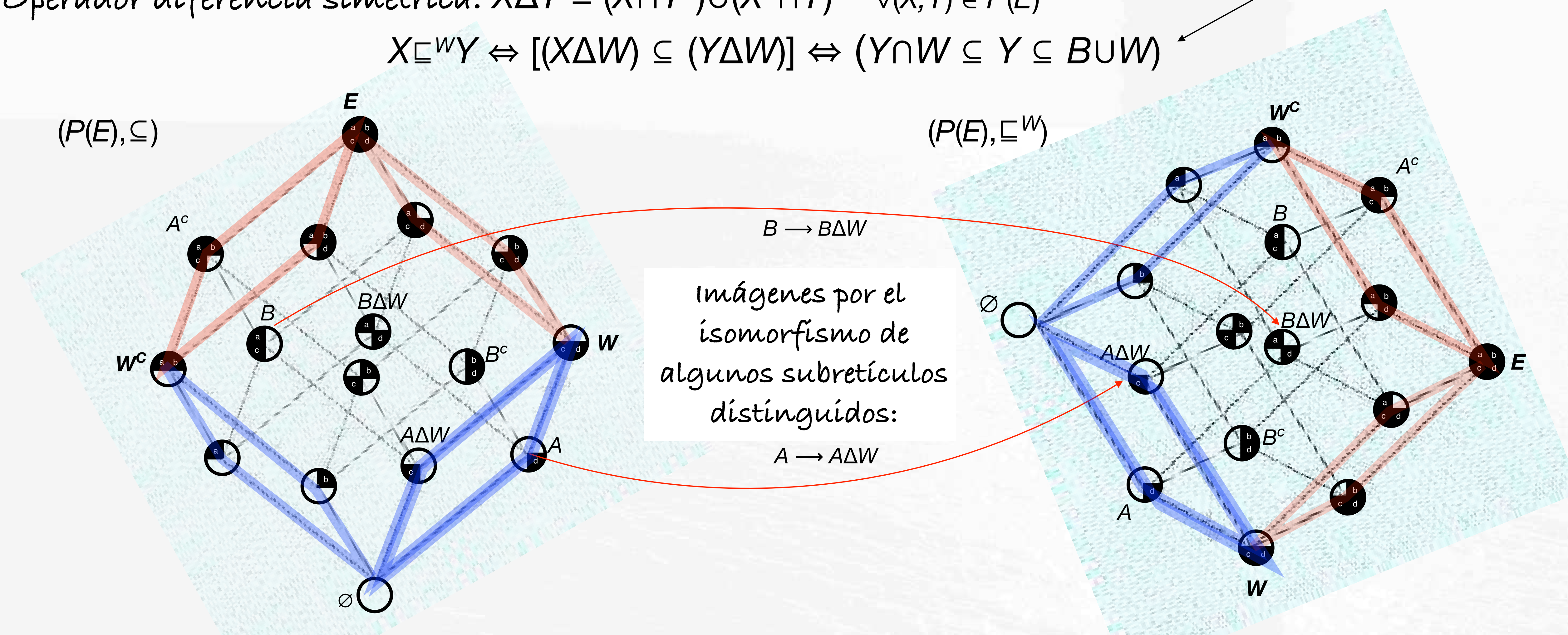
con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y) \quad \forall(X,Y) \in P(E)^2$

(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$



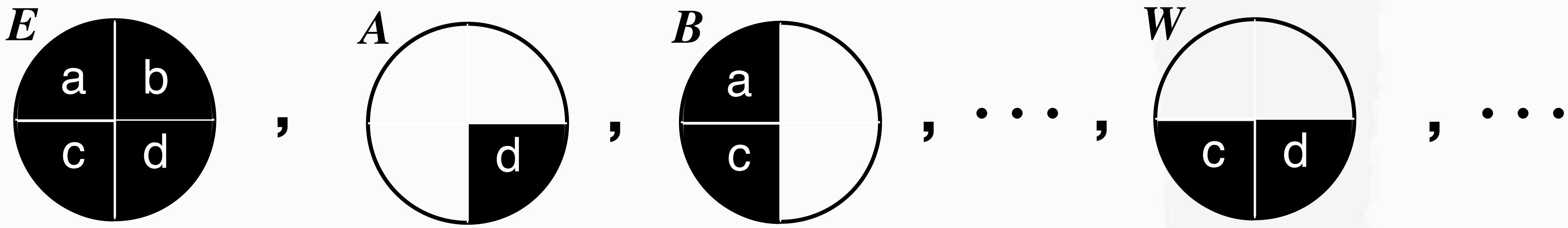
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X\in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $\quad X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z) \quad \forall(X,Y,Z) \in P(E)^3$

Para $W\in P(E)$, la aplicación $\varphi_W: P(E)\to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

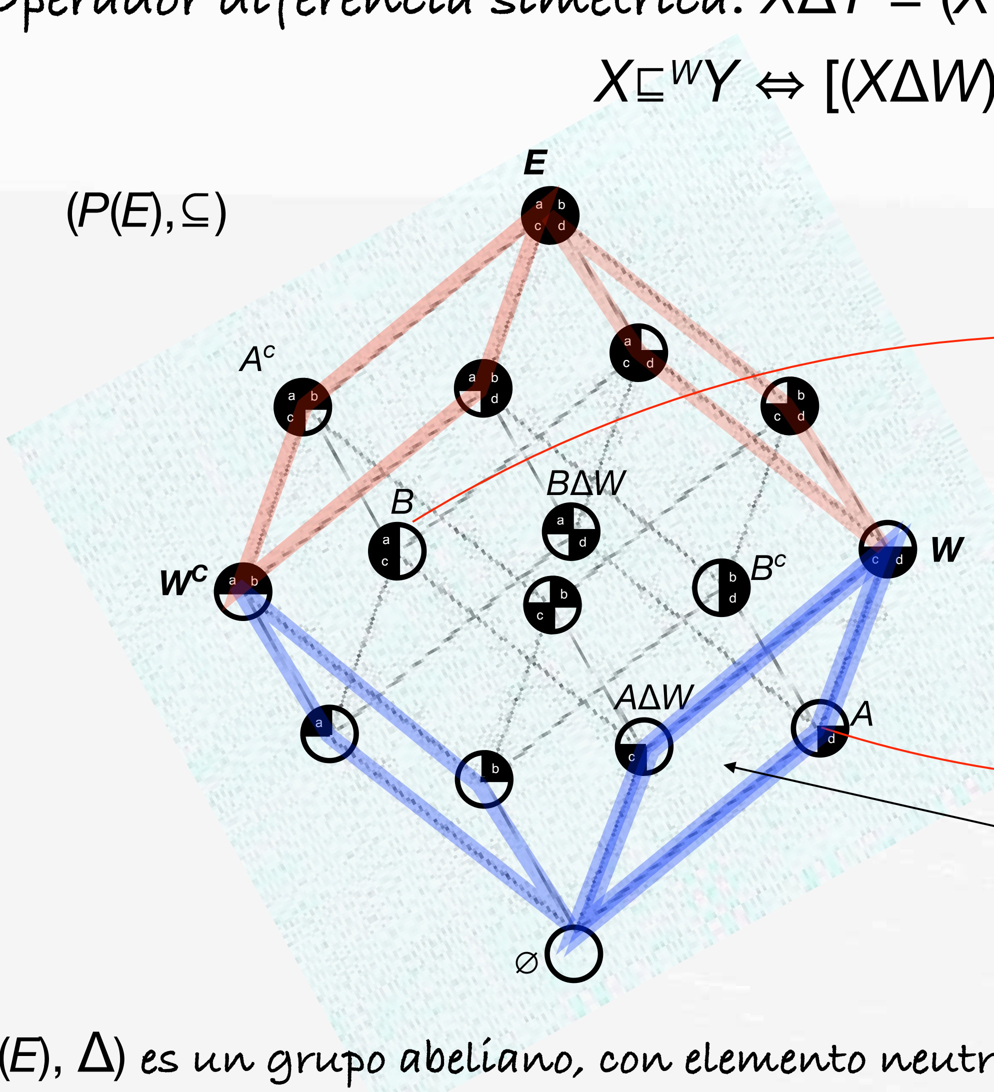
con la complementación ${}^c : P(E) \to P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y)$ $\forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$



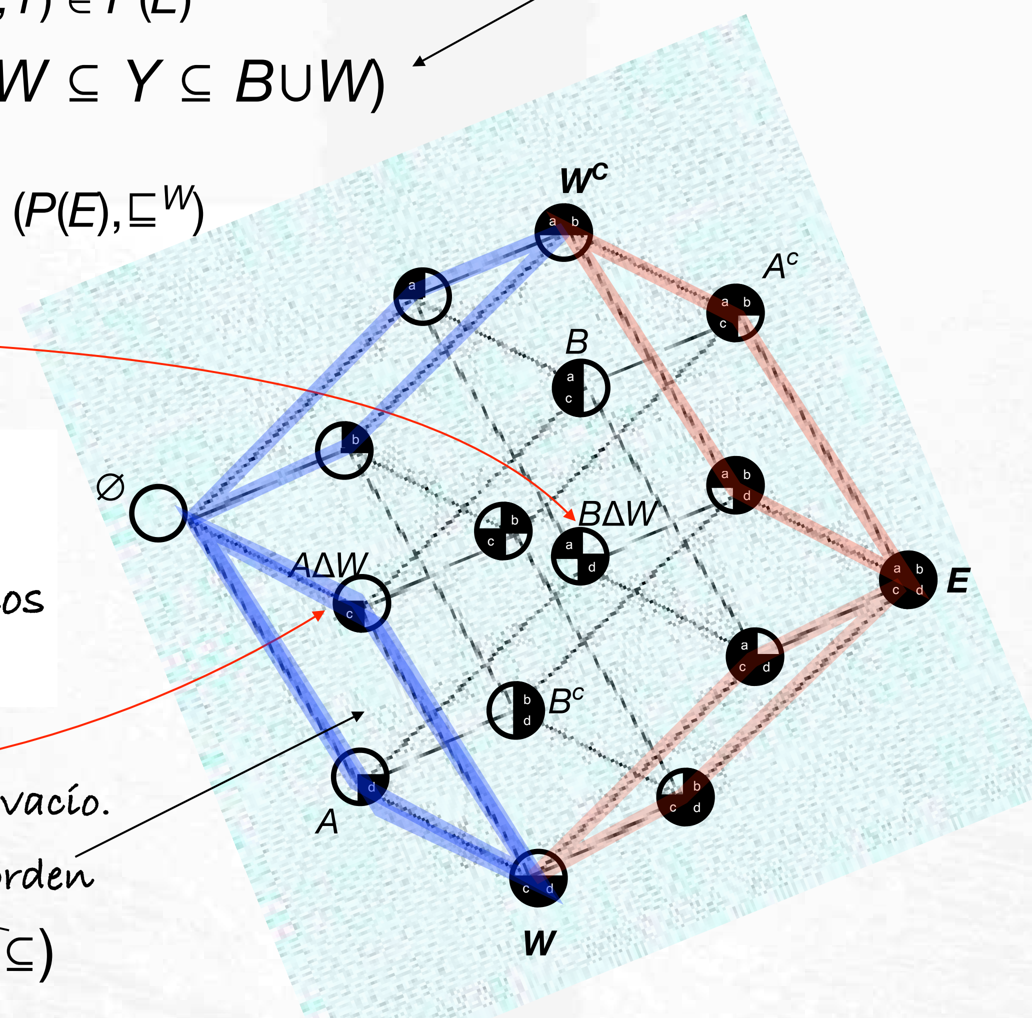
$B \longrightarrow B\Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:

$A \longrightarrow A\Delta W$

"W-contenido" del vacío.

(Aquí, $\sqsubseteq^W$ es el orden dual del orden $\subseteq$)



$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X\in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X = \varnothing$

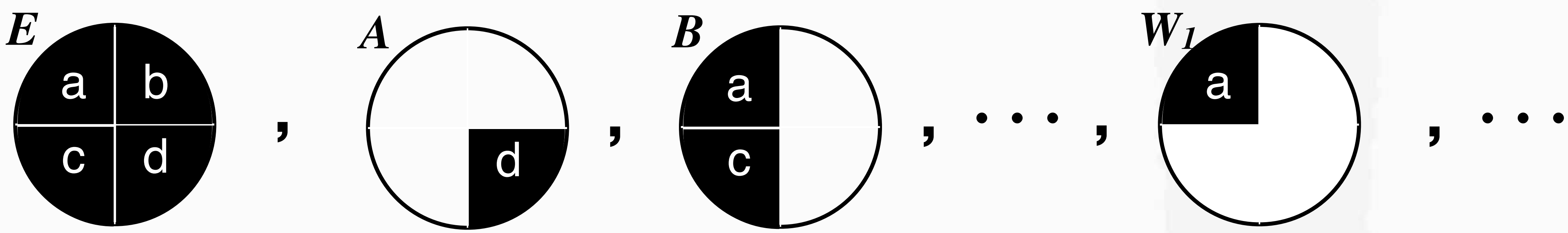
Distributividad de la intersección: $X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$ $\forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$

Para $W\in P(E)$, la aplicación $\varphi_W: P(E)\to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c)$ $\forall X \in P(E)$

Otra “perspectiva” en $P(E)$:

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

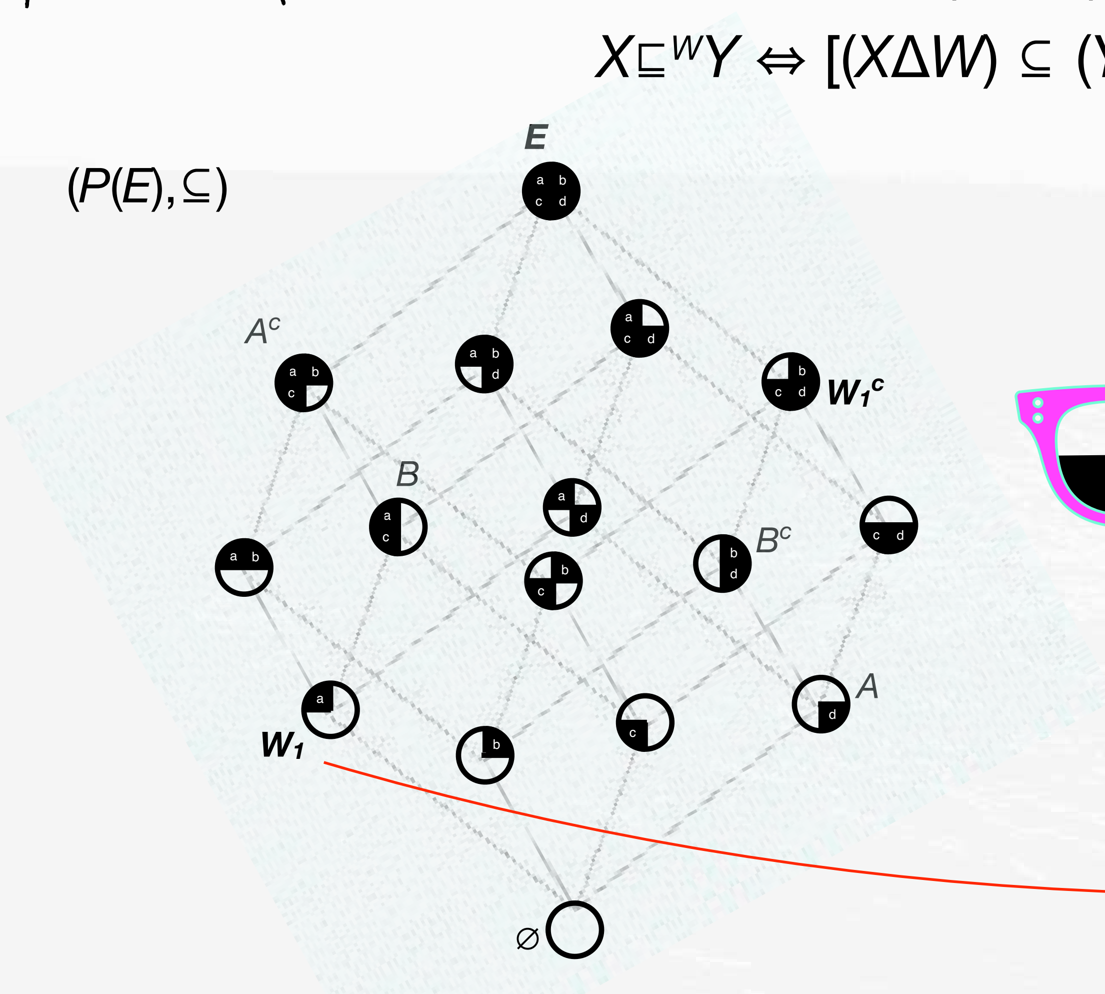
con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.

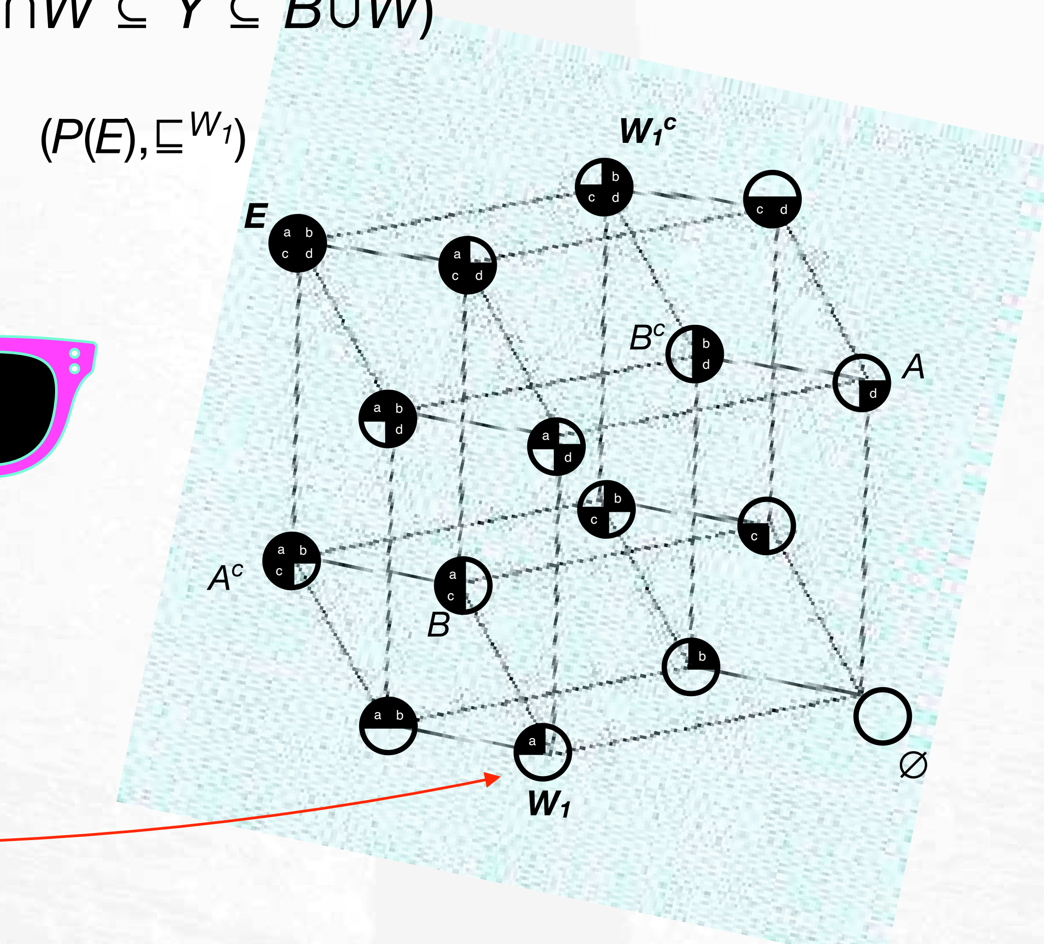


(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$





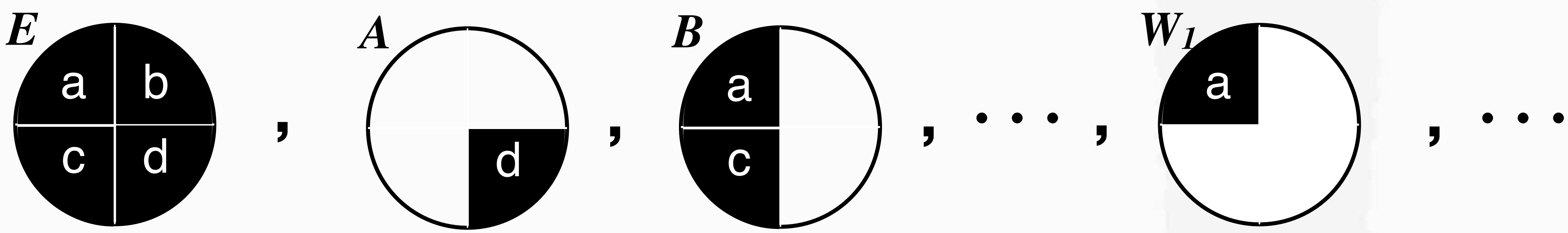
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$. $\forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$. $(P(E),\Delta,\cap)$ es un anillo.

Para $W \in P(E)$, la aplicación φ_W: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

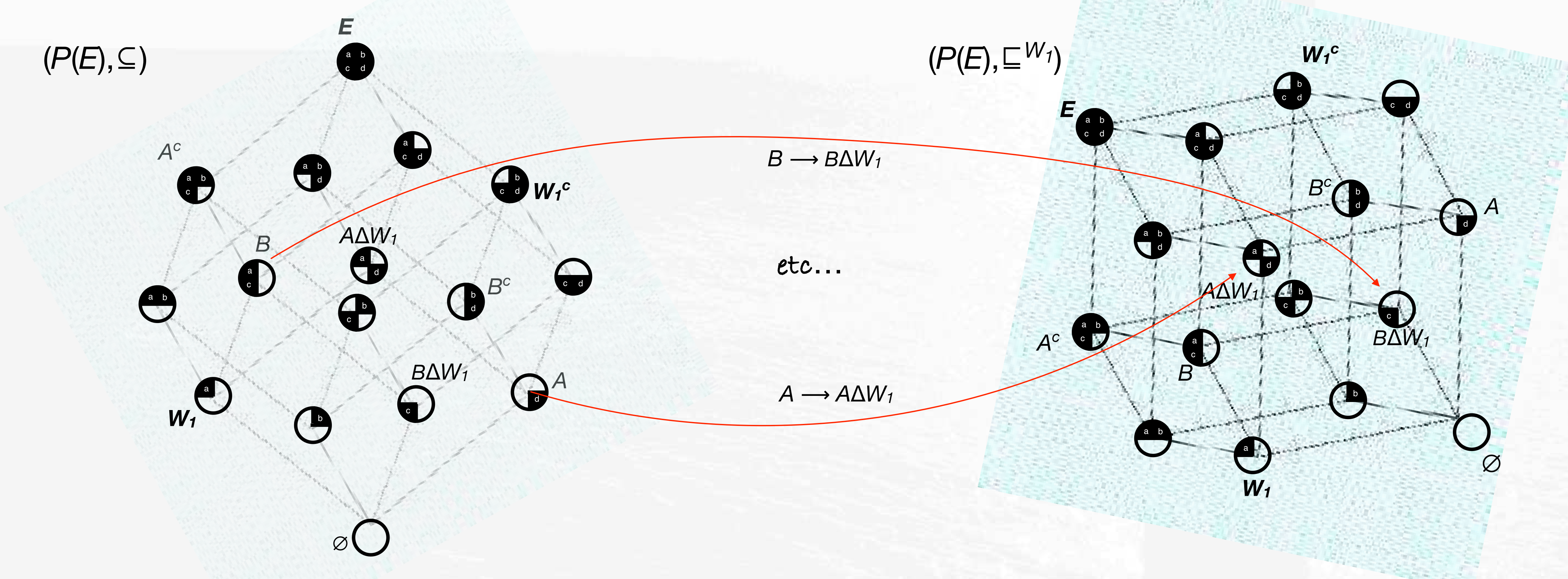
con la complementación $^c : P(E)\to P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y)$ $\quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X\sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$



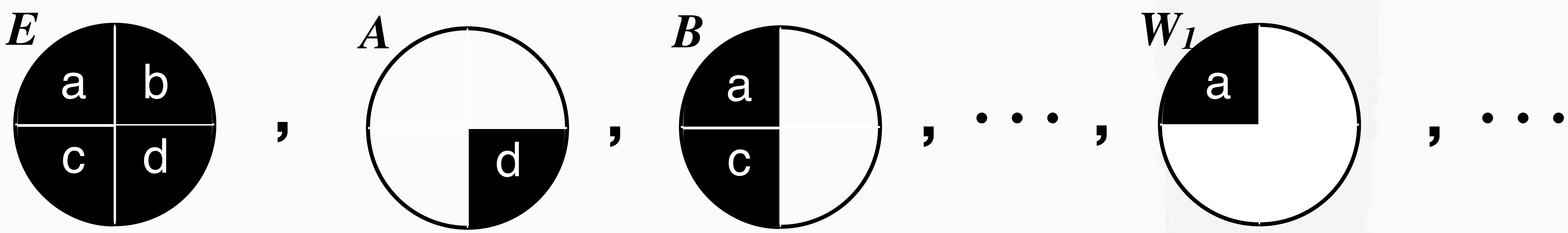
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X\in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X= \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$. $\forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$. $(P(E),\Delta,\cap)$ es un anillo.

Para $W\in P(E)$, la aplicación φ_W: $P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c= \varphi_W(X^c)$ $\quad\forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

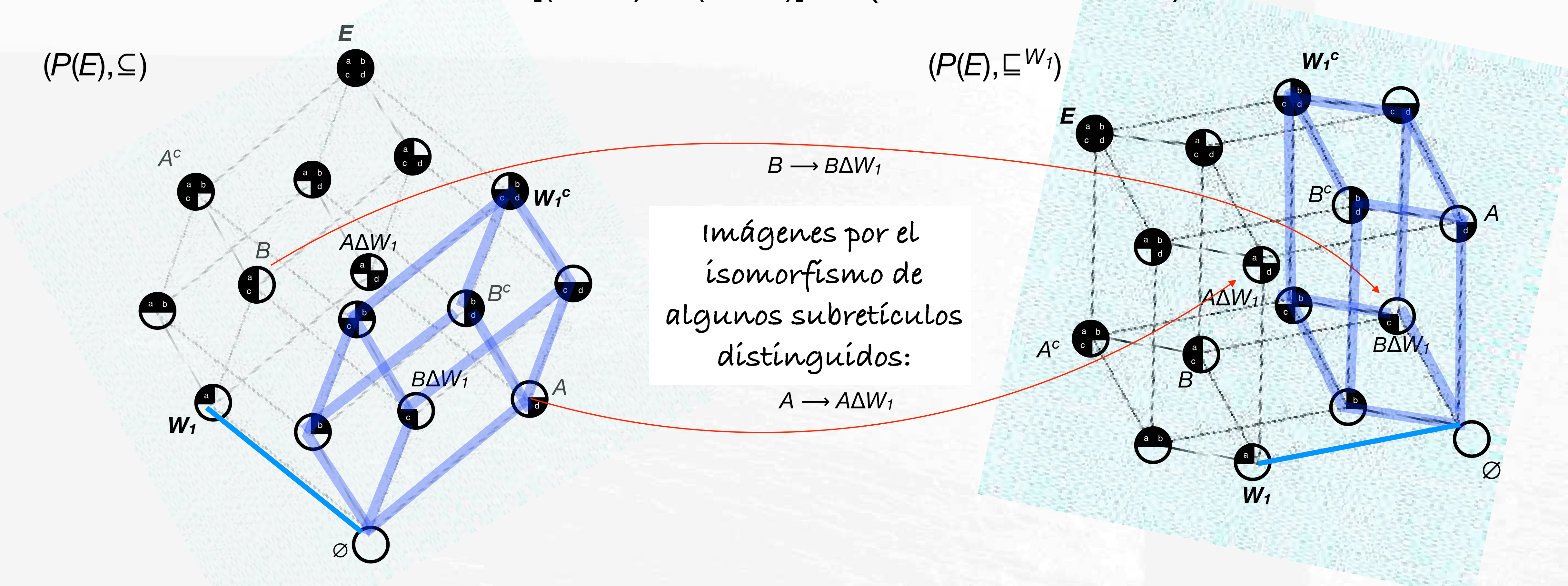
con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y)$ $\quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$



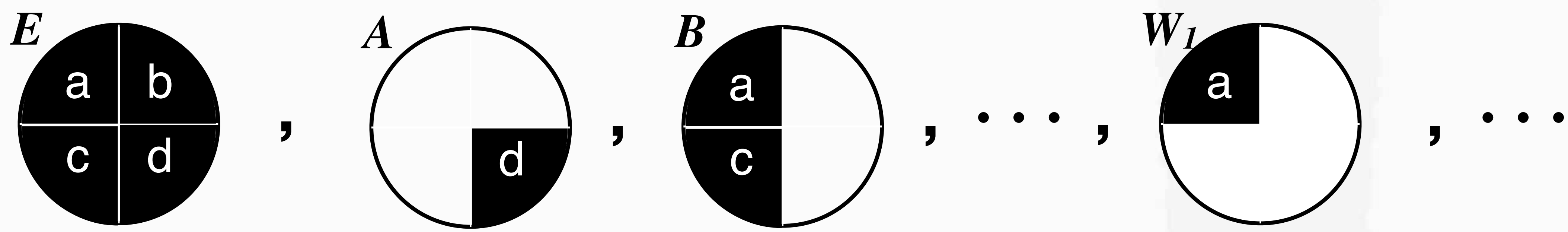
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X\in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$. $\forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$. $(P(E),\Delta,\cap)$ es un anillo.

Para $W\in P(E)$, la aplicación φ_W: $P(E)\to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c)$ $\forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

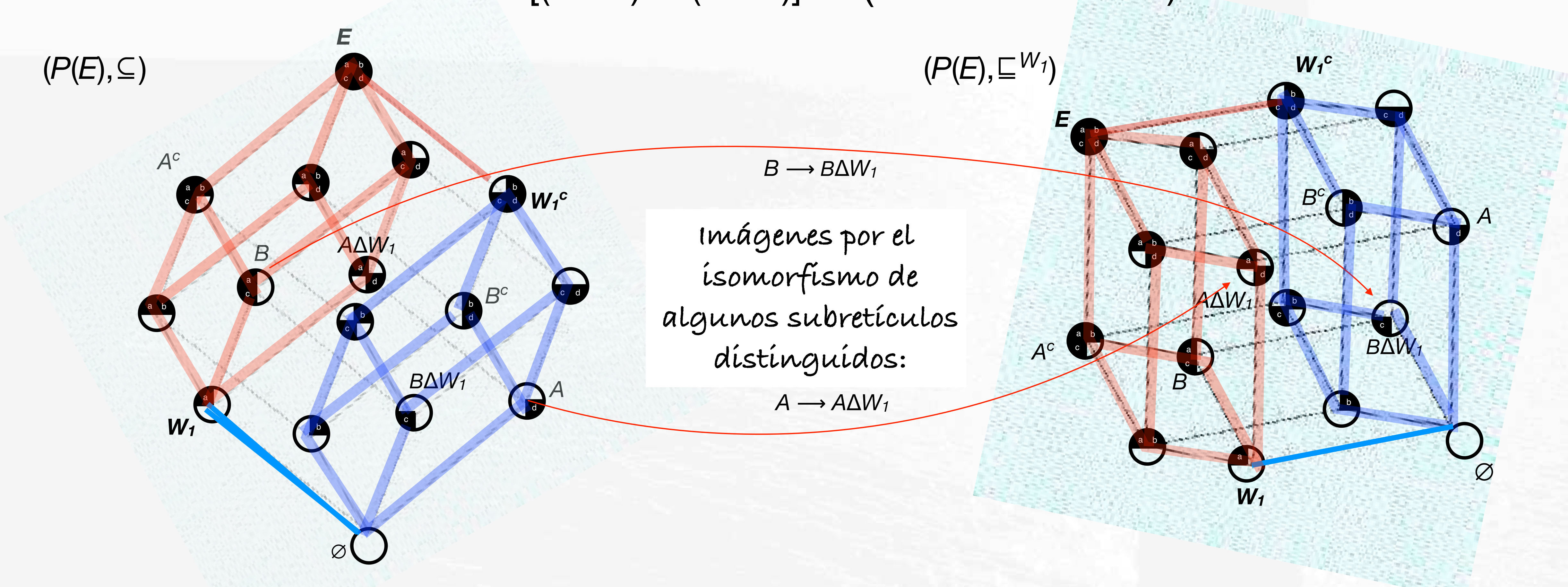
con la complementación $^c : P(E) \to P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \quad \forall (X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X \Delta W) \subseteq (Y \Delta W)] \Leftrightarrow (Y \cap W \subseteq Y \subseteq B \cup W)$$



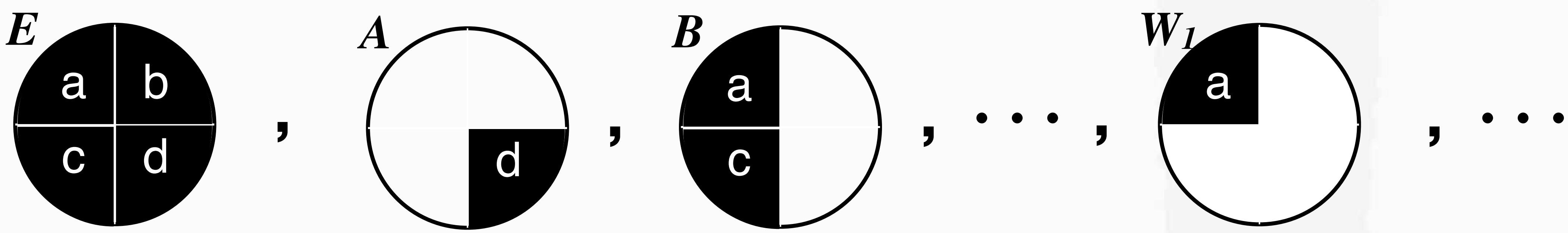
$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X \in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X \Delta X = \varnothing$

Distributividad de la intersección: $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$. $\forall (X,Y,Z) \in P(E)^3$. $(P(E), \Delta, \cap)$ es un anillo.

Para $W \in P(E)$, la aplicación φ_W: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X \Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E), \subseteq)$ y $(P(E), \sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E),{}^c)$ Álgebra de Boole de las partes de E

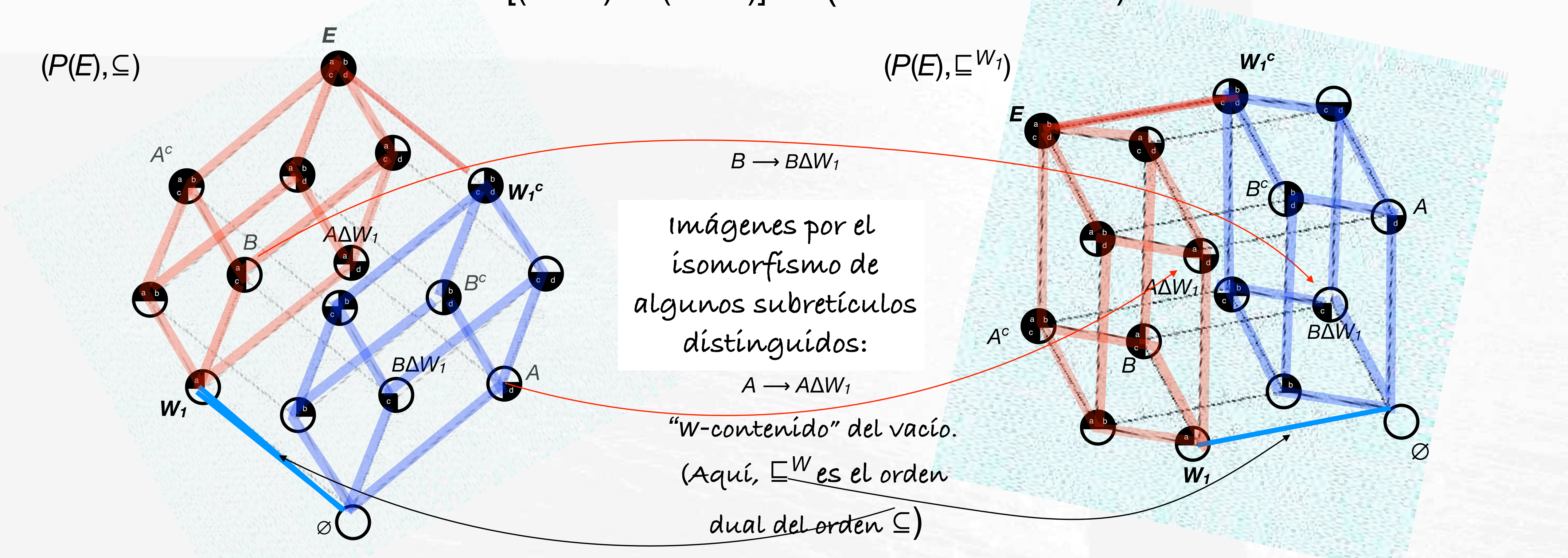
con la complementación ${}^c : P(E) \rightarrow P(E)$.



(Un orden de actividad en $P(E)$ asociado a W)

Operador diferencia simétrica: $X\Delta Y = (X\cap Y^c)\cup(X^c\cap Y) \quad \forall(X,Y) \in P(E)^2$

$$X \sqsubseteq^W Y \Leftrightarrow [(X\Delta W) \subseteq (Y\Delta W)] \Leftrightarrow (Y\cap W \subseteq Y \subseteq B\cup W)$$



$(P(E), \Delta)$ es un grupo abeliano, con elemento neutro $\varnothing$ y tal que, $\forall X\in P(E)$, X coincide con su simétrico X^{-1}: $X\Delta X = \varnothing$

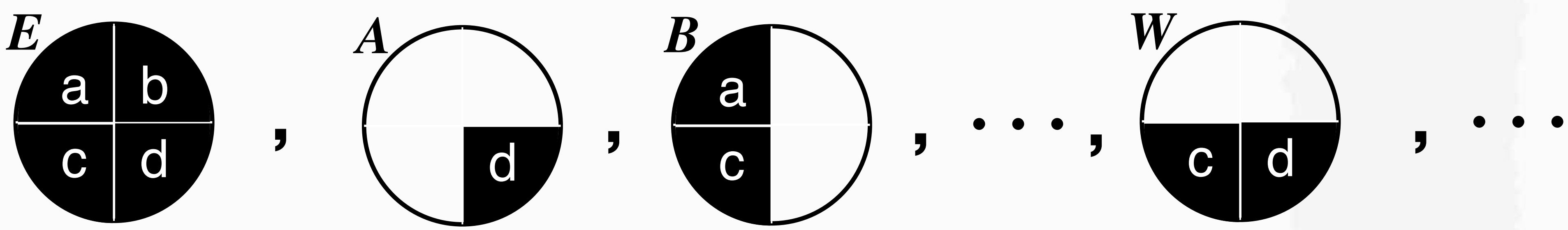
Distributividad de la intersección: $X\cap(Y\Delta Z) = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$. $\forall(X,Y,Z) \in P(E)^3$. $(P(E),\Delta,\cap)$ es un anillo.

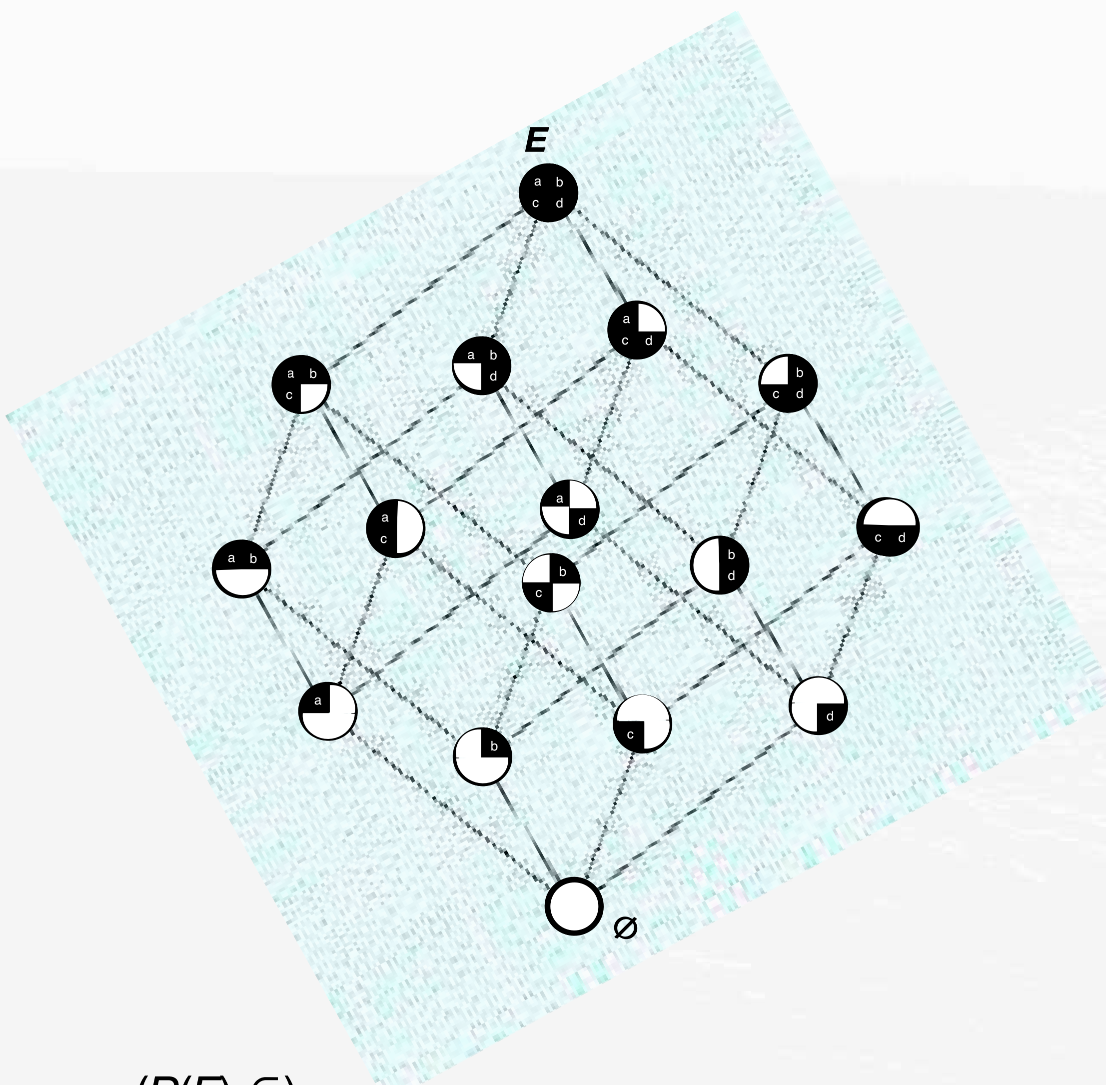
Para $W\in P(E)$, la aplicación $\varphi_W: P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_W(X) = X\Delta W$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(E),\subseteq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^W)$. Además: $[\varphi_W(X)]^c = \varphi_W(X^c) \quad \forall X \in P(E)$

Aunque los “giros” en el grafo que representa el Álgebra de Boole inicial $(P(E),\subseteq)$, son los que parecen proporcionar buenos ejemplos de los efectos del operador diferencia simétrica $A \longrightarrow A\Delta W$; veremos que en realidad la obtención del álgebra isomorfa $(P(E),\sqsubseteq^W)$ responde más bien a “movimientos” relacionados con combinaciones de varias “simetrías”:

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica , del Álgebra de Boole ($P(E),\sqsubseteq^{W}$) isomorfa a ($P(E),\subseteq$).

$P(E)$:

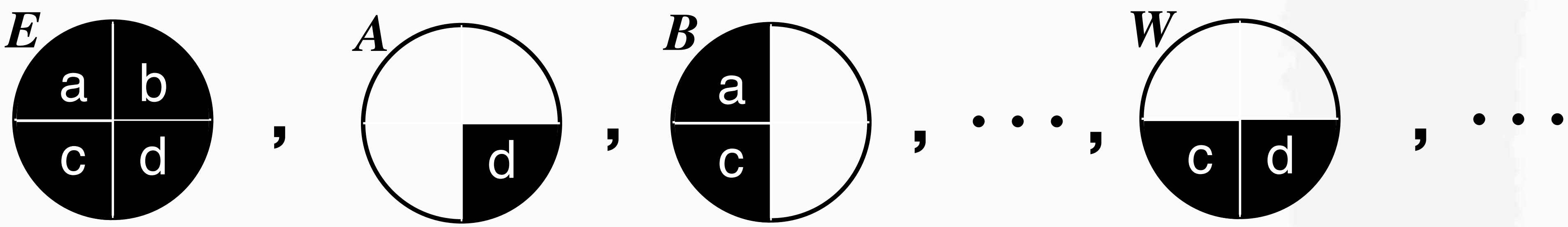


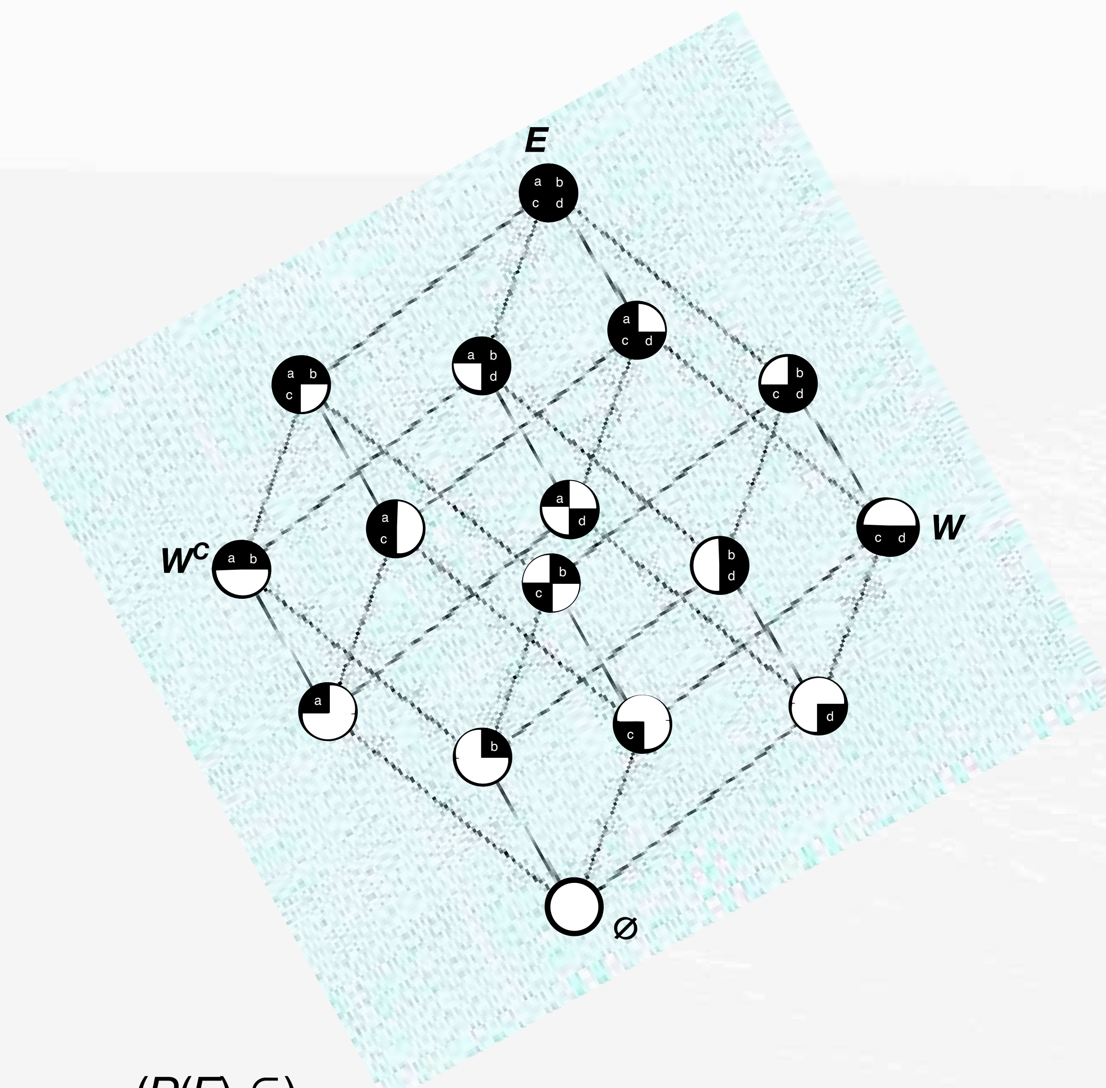


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E), \subseteq)$.

$P(E)$:

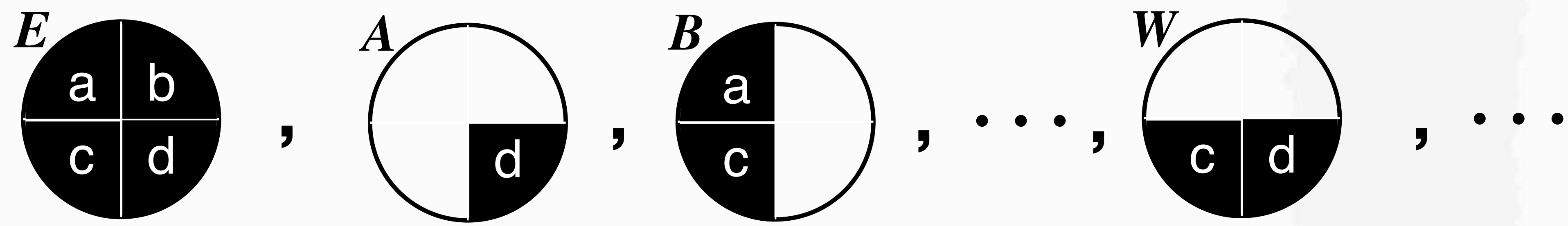


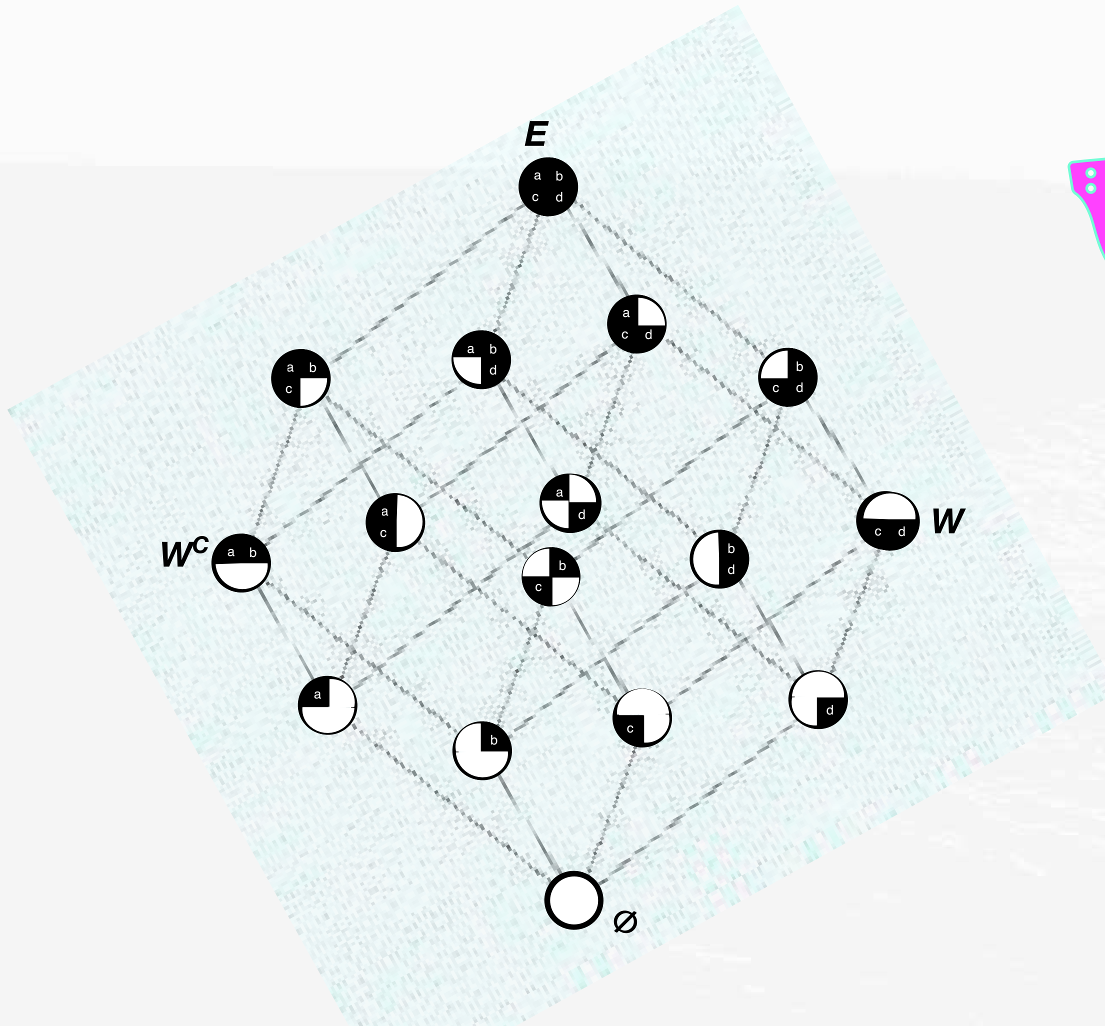


$(P(E), \subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica , del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.

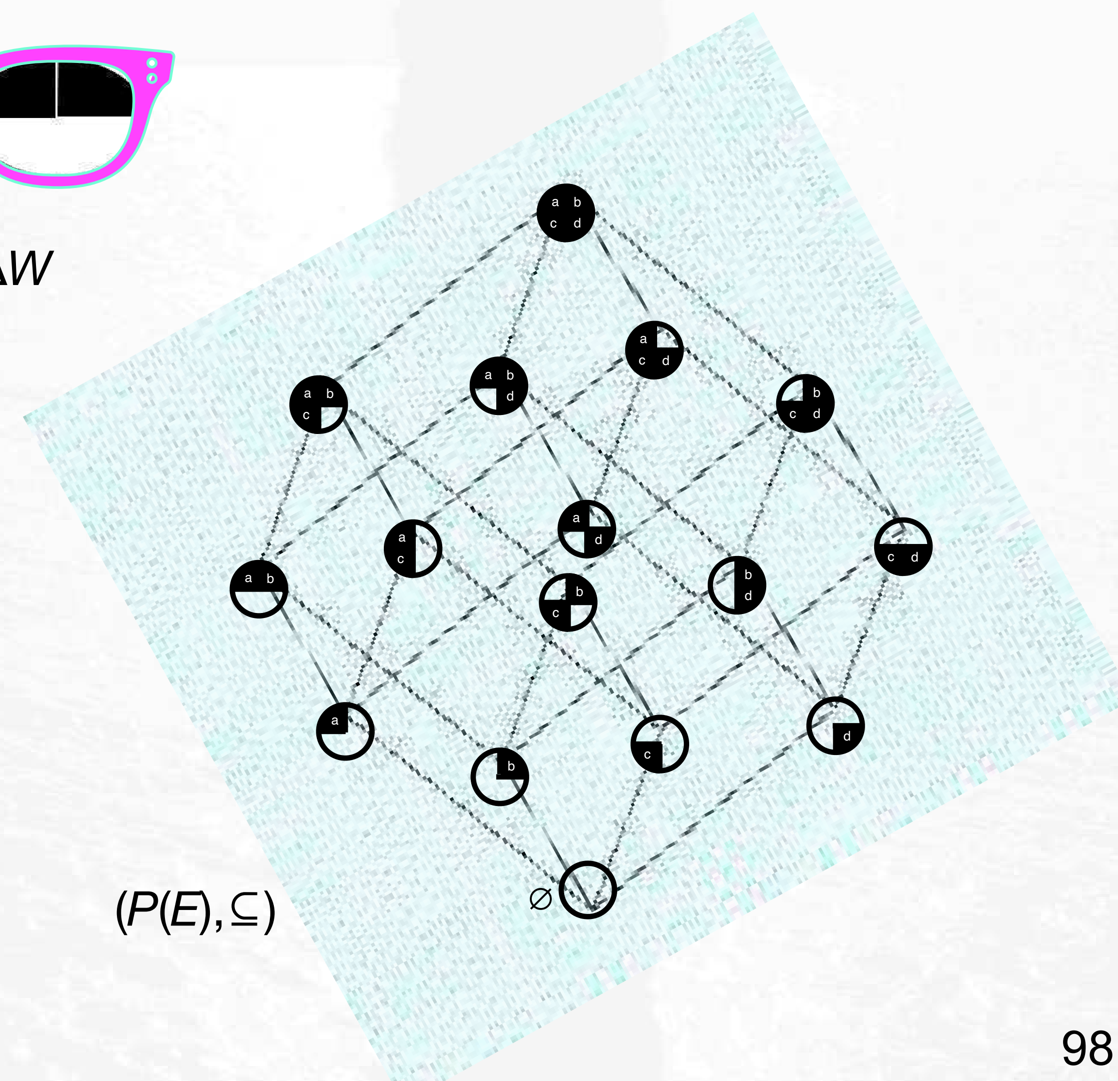
$P(E)$:





$(P(E),\subseteq)$

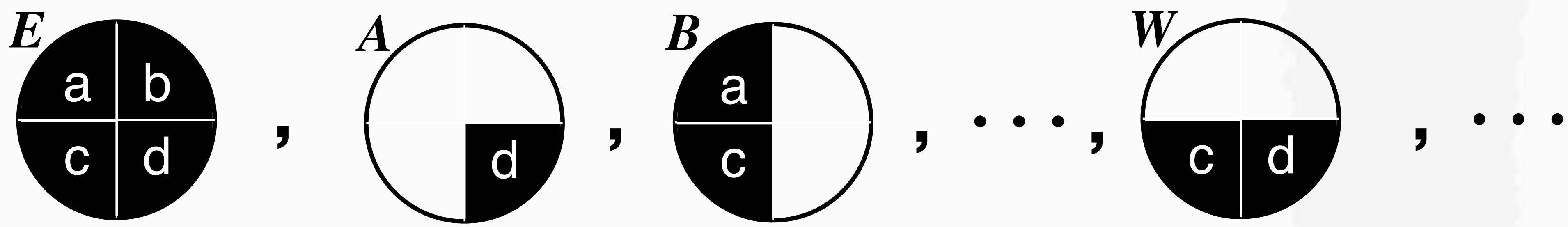
$A \longrightarrow A\Delta W$

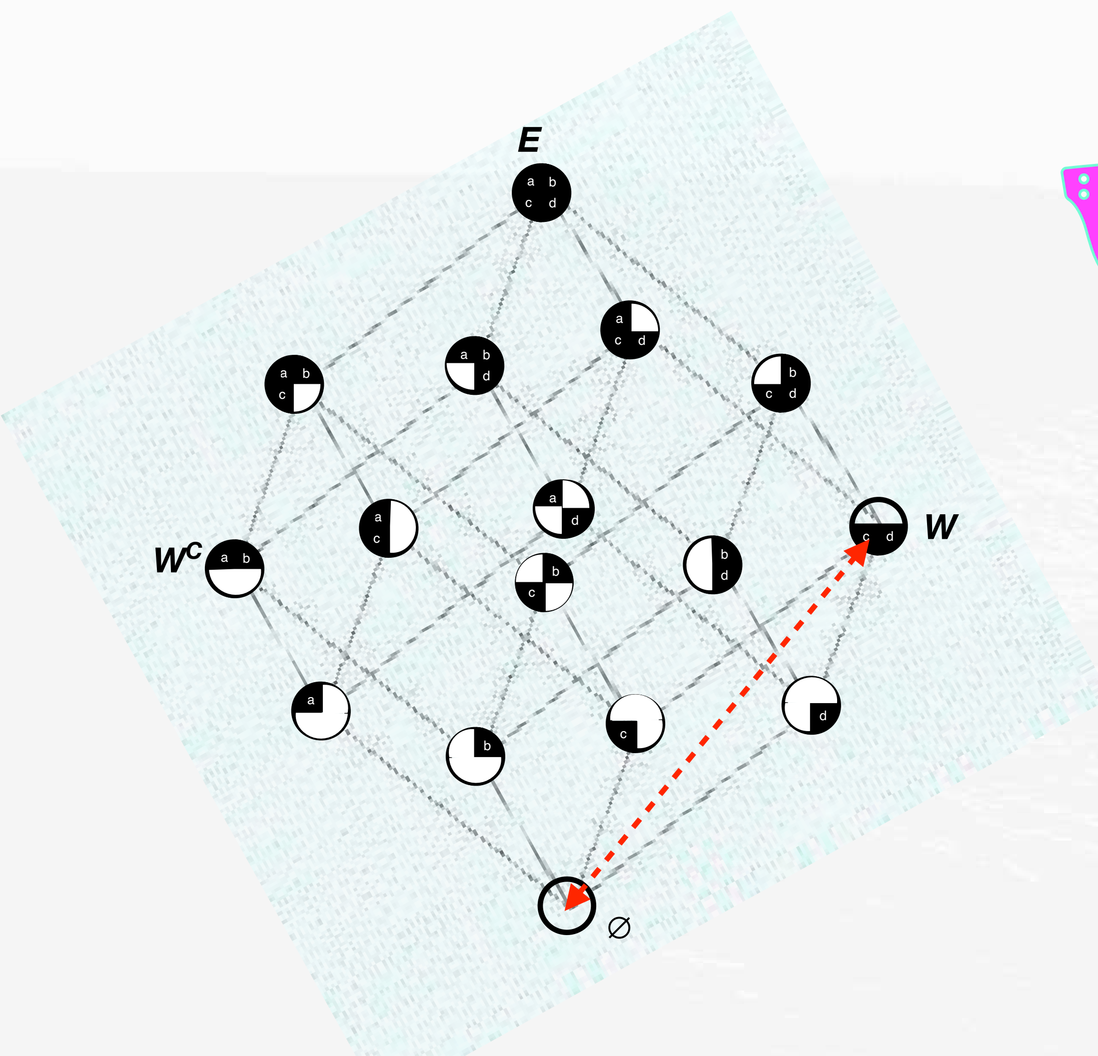


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W})$ isomorfa a $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.

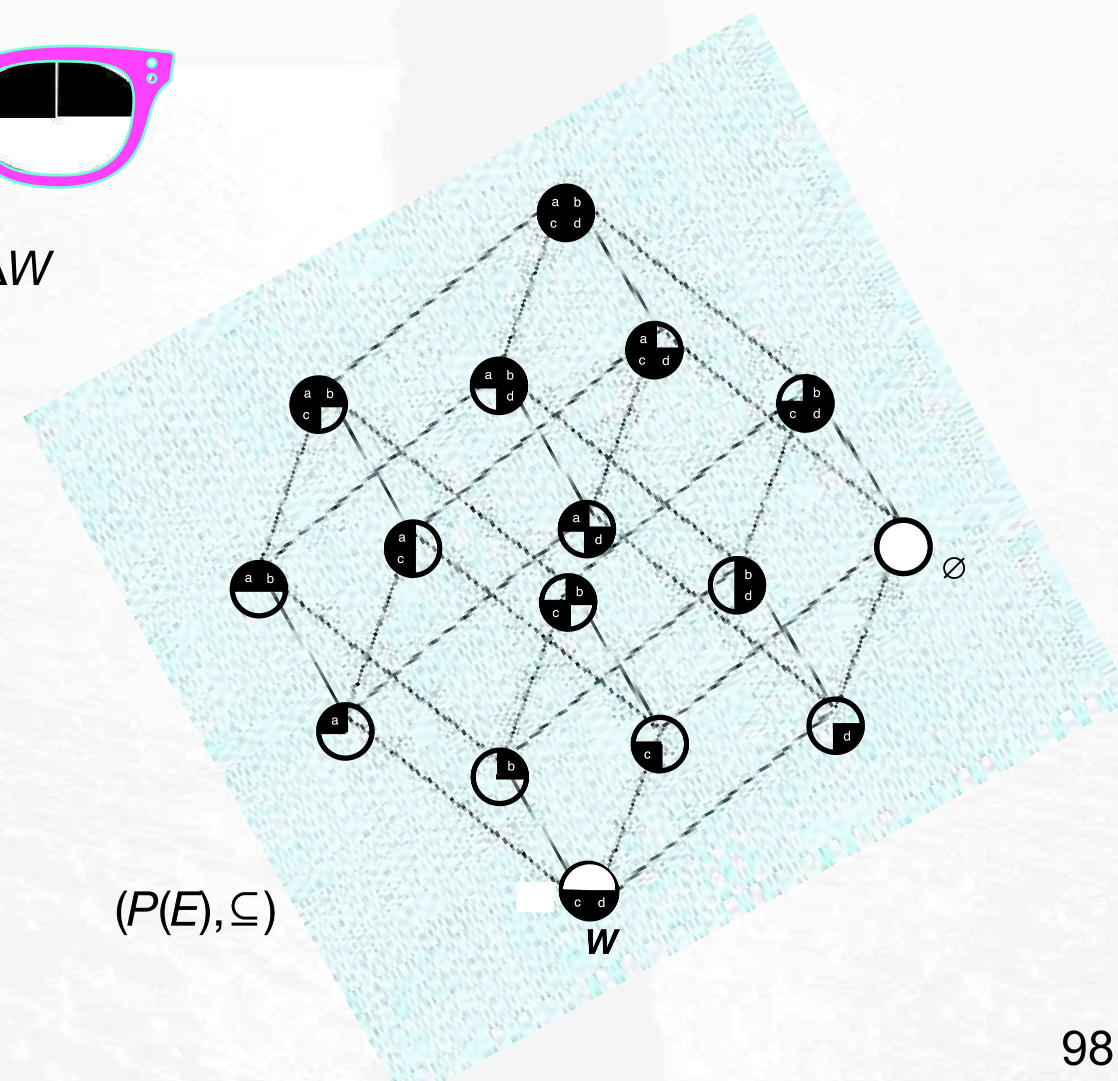
$P(E)$:





$(P(E), \subseteq)$

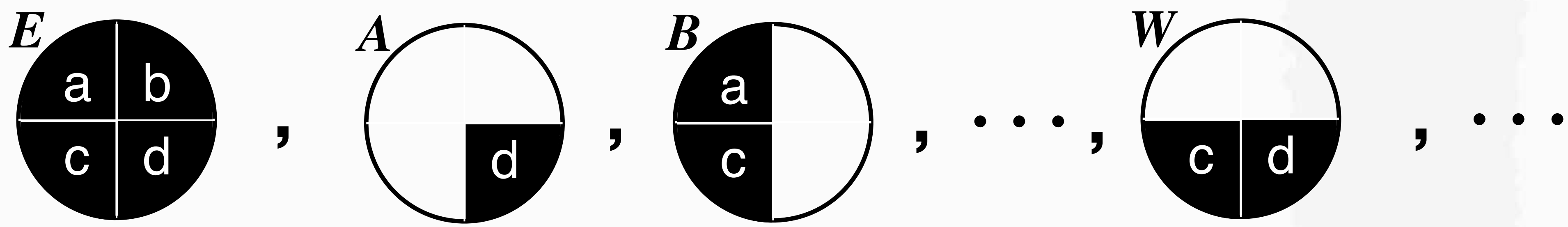
$A \longrightarrow A \Delta W$

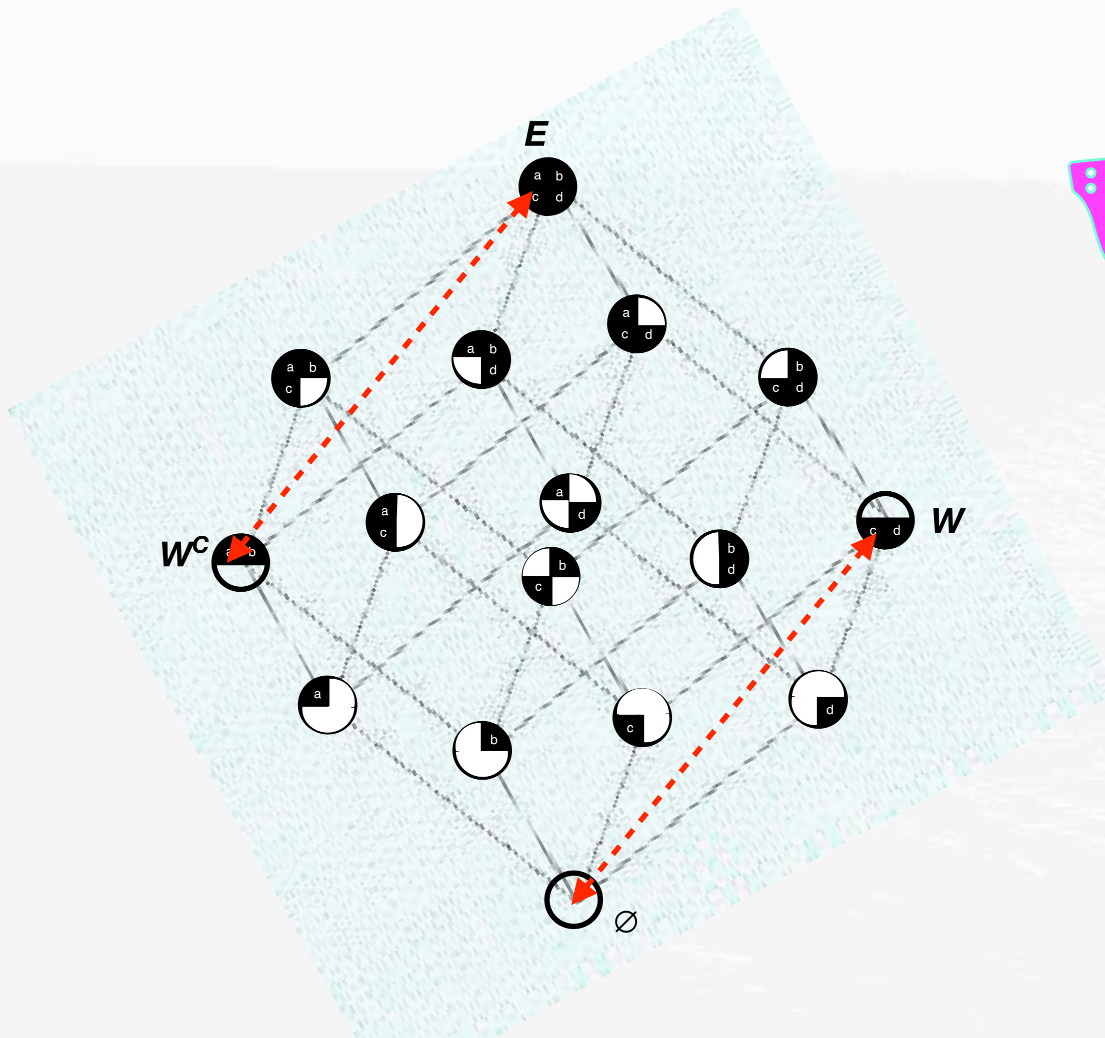


$(P(E), \subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{W})$ isomorfa a $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$.

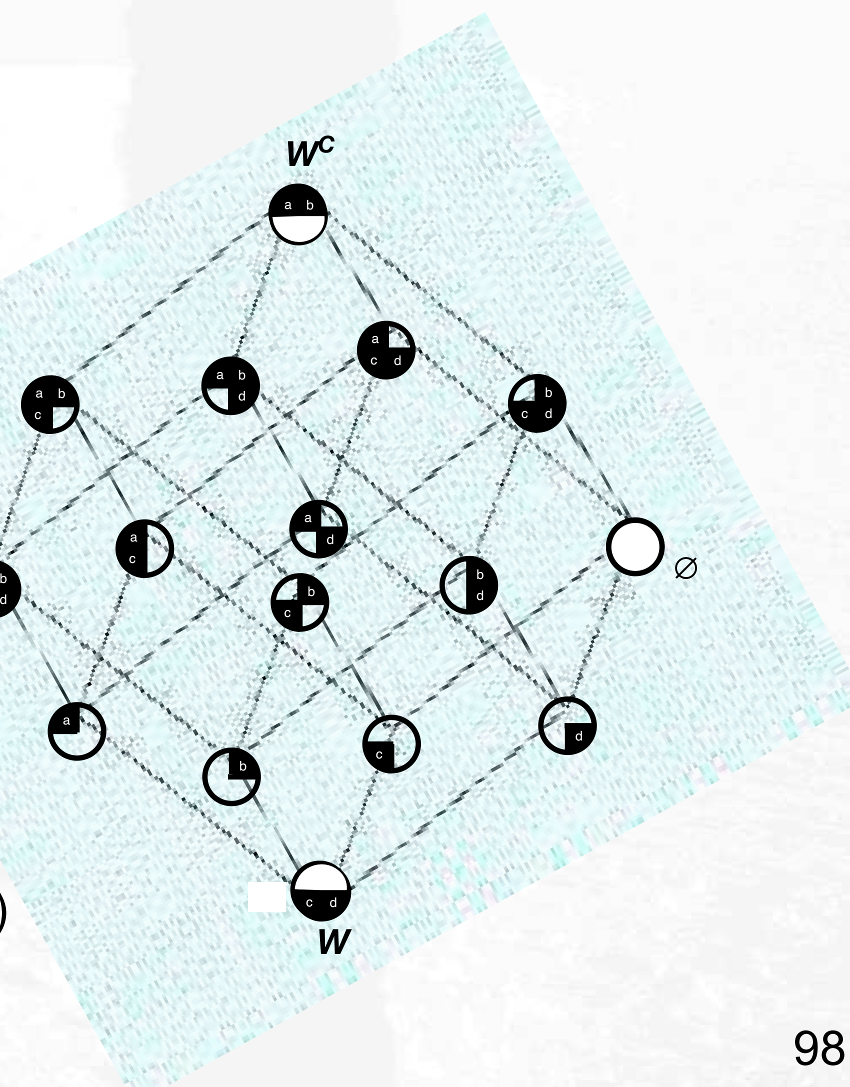
$P(E)$:





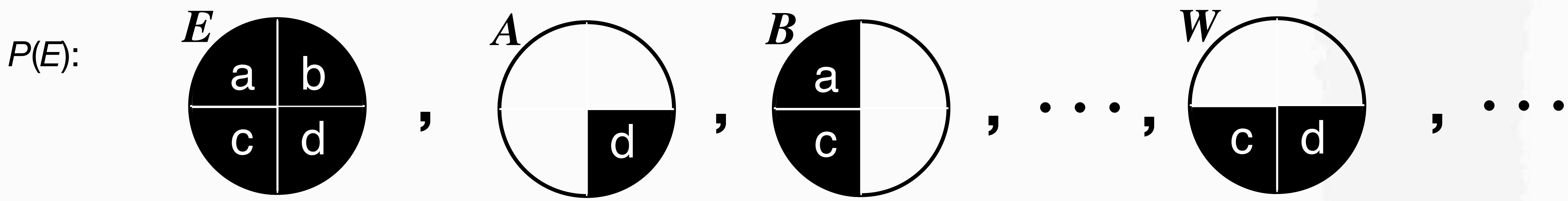
$(P(E),\subseteq)$

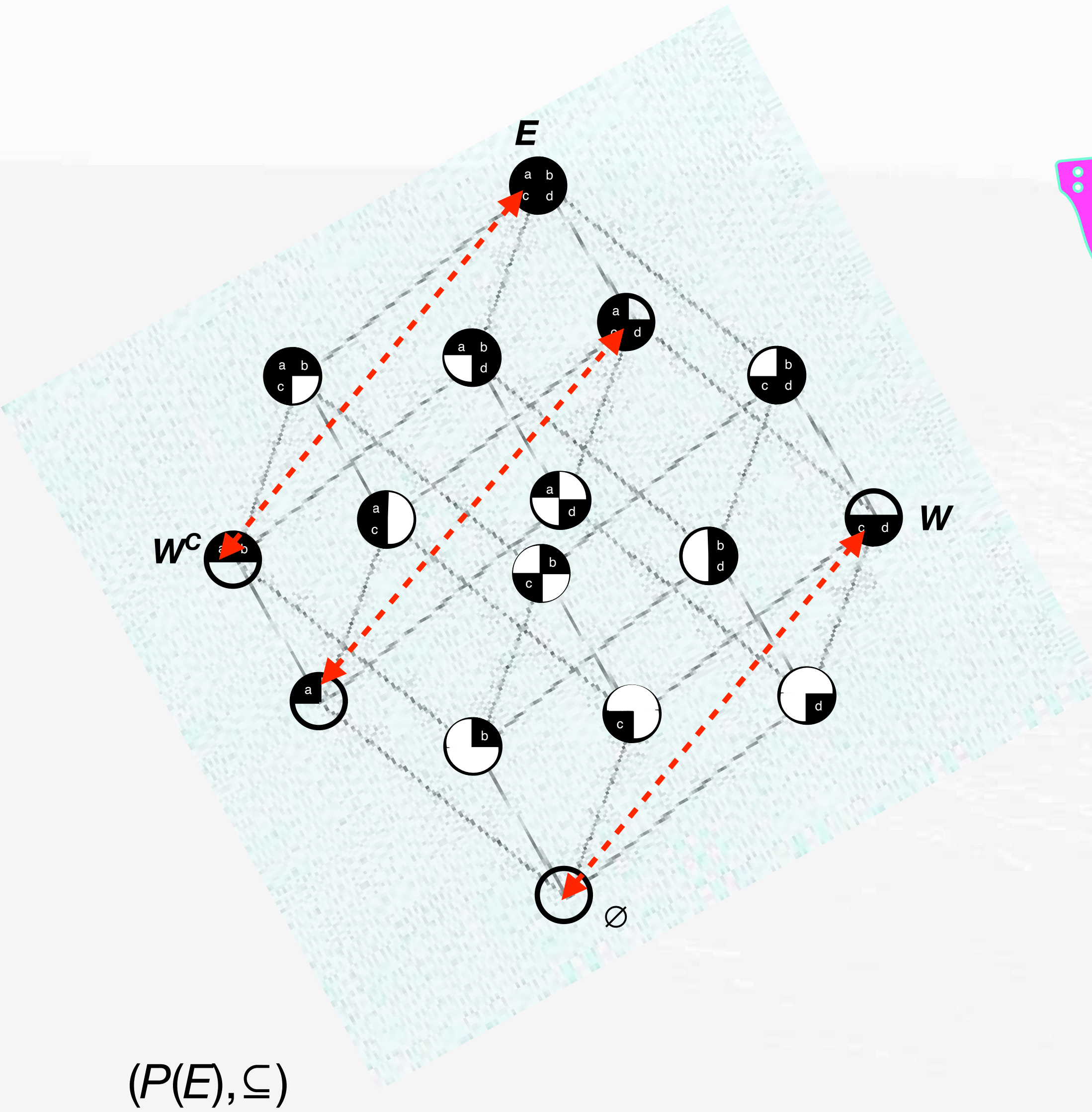
$A \longrightarrow A \Delta W$

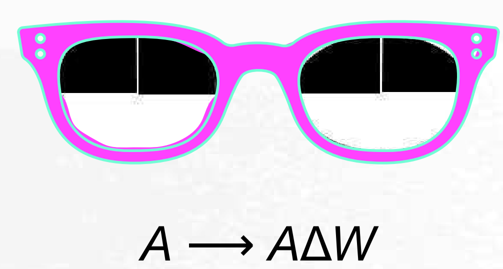


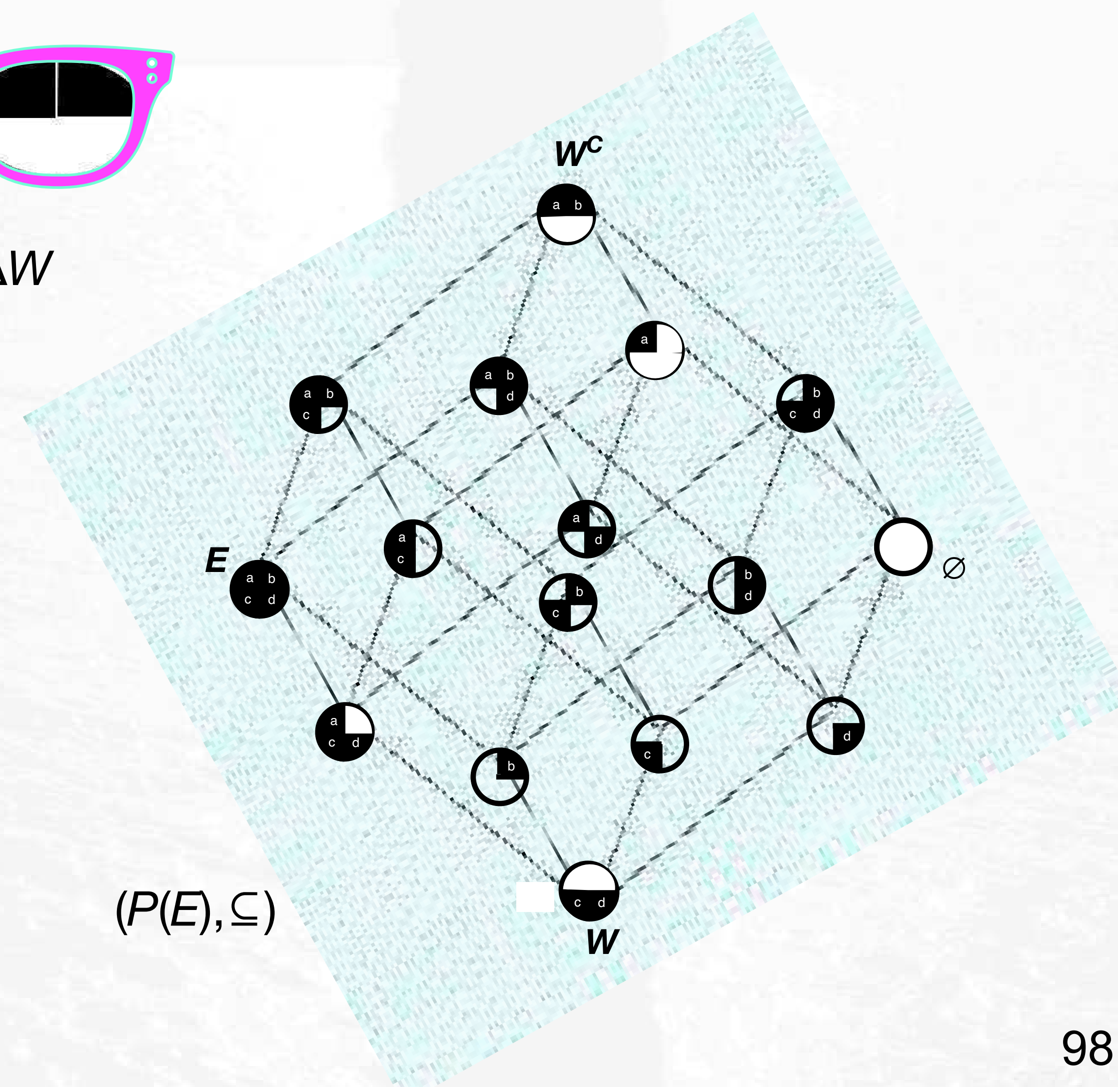
$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.



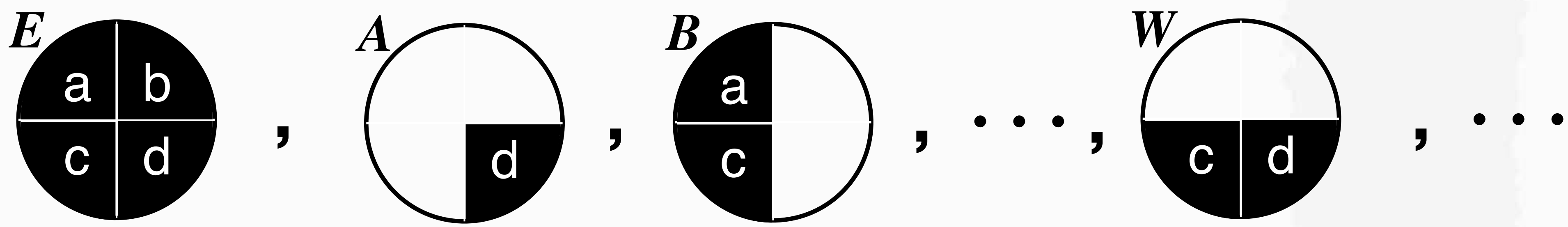


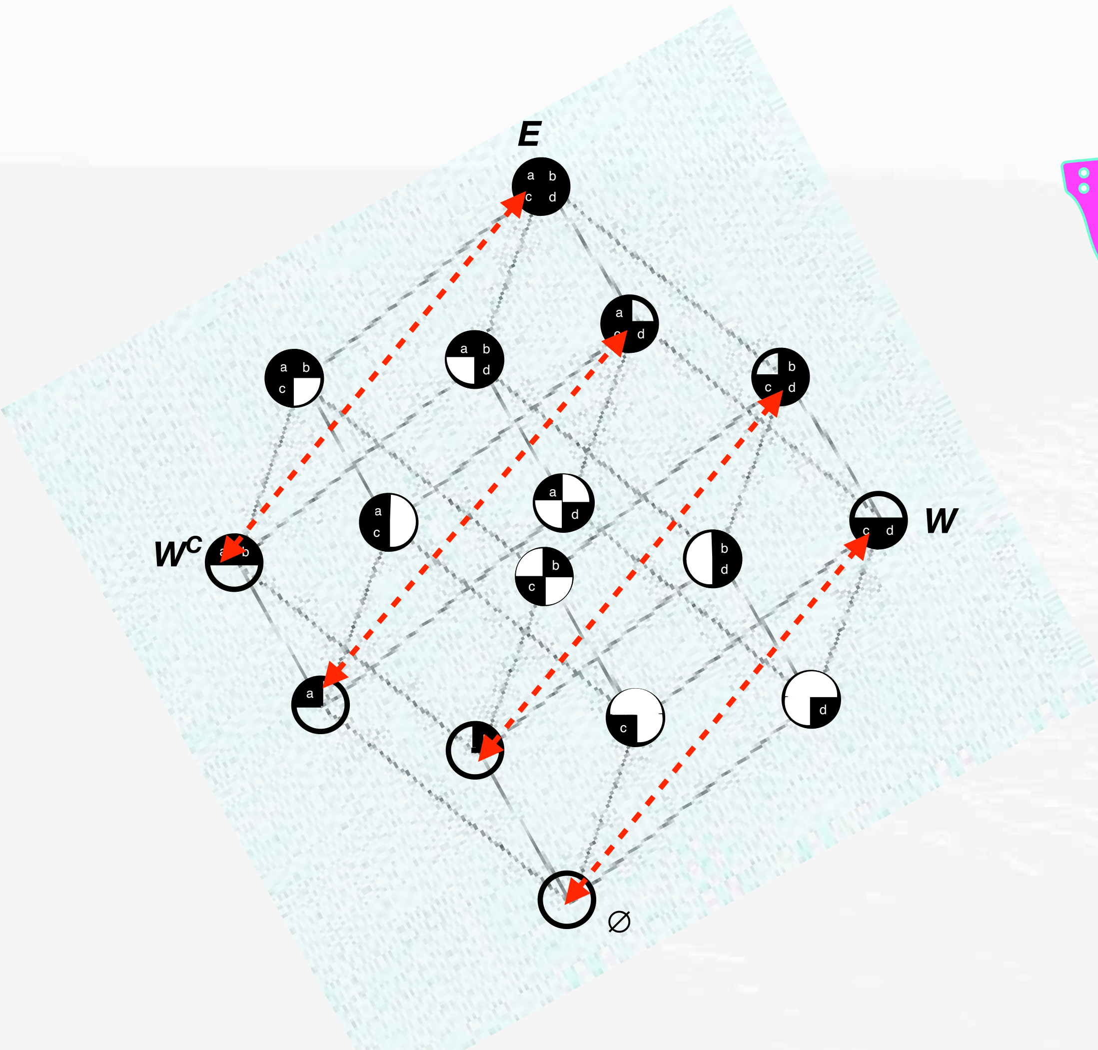




Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{W})$ isomorfa a $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$.

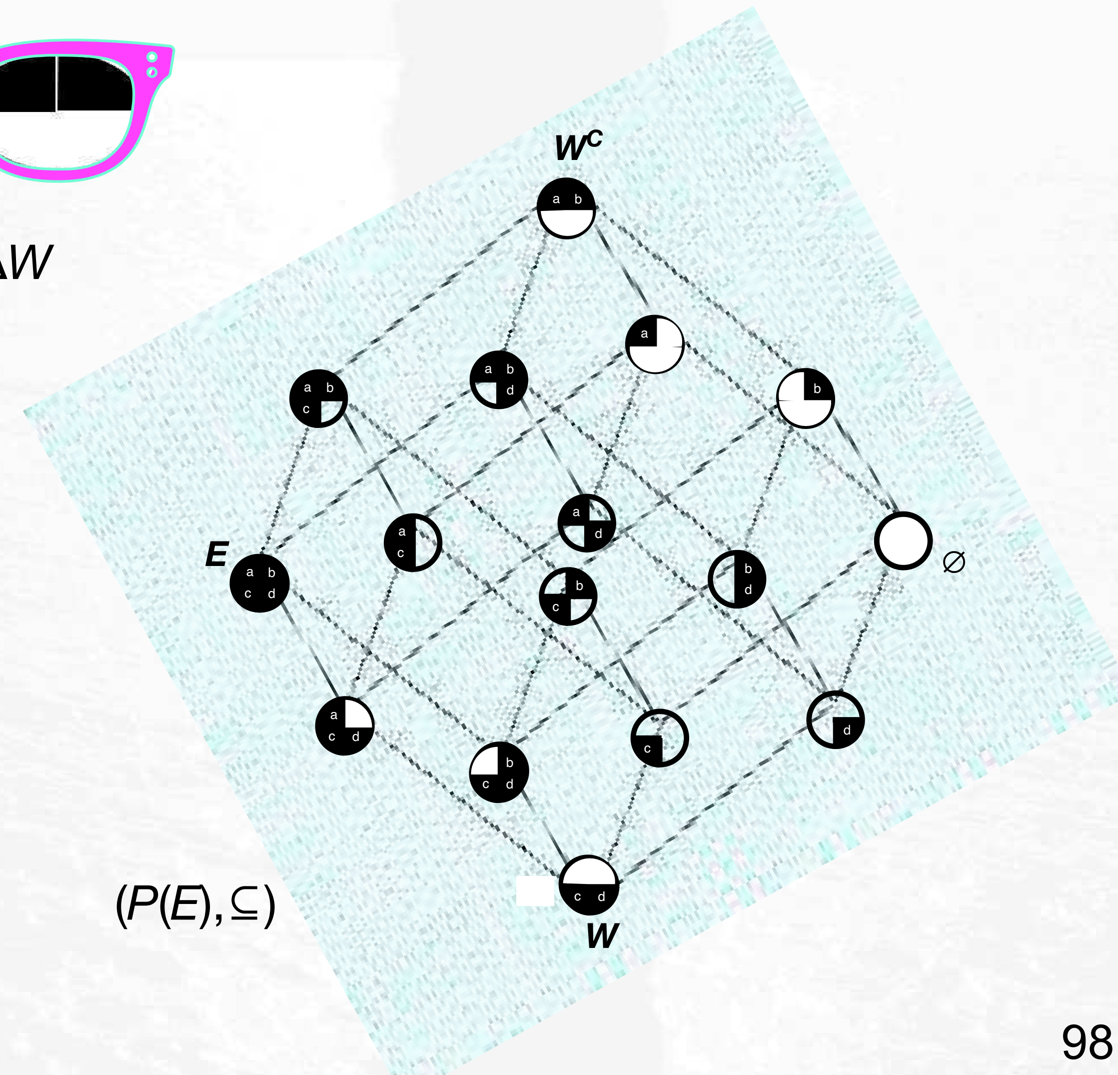
$P(E)$:





$(P(E),\subseteq)$

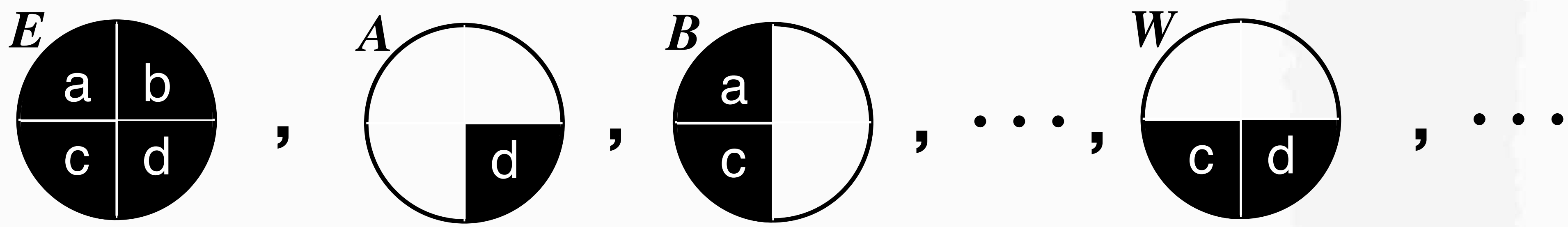
$A \longrightarrow A\Delta W$

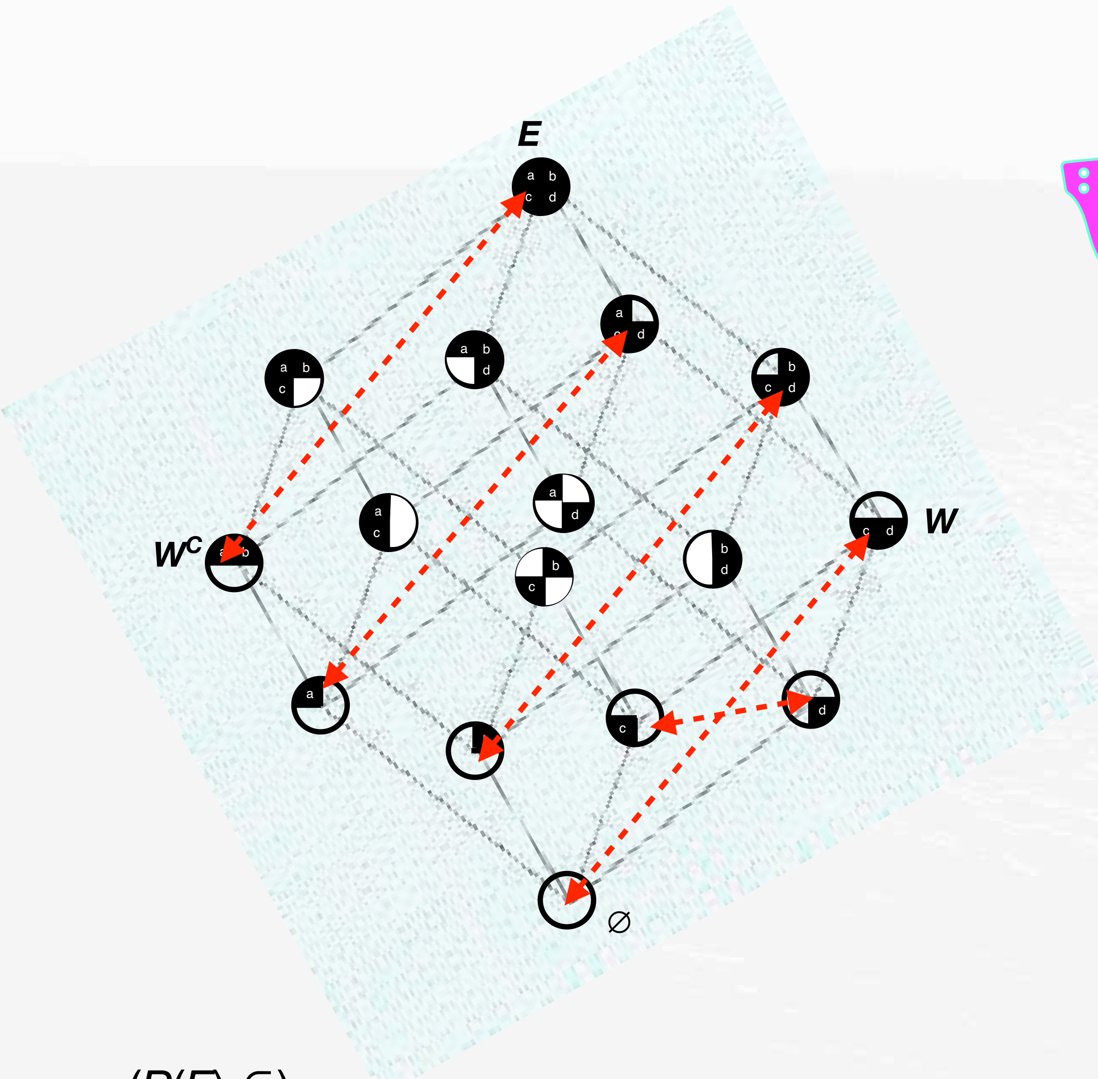


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica , del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.

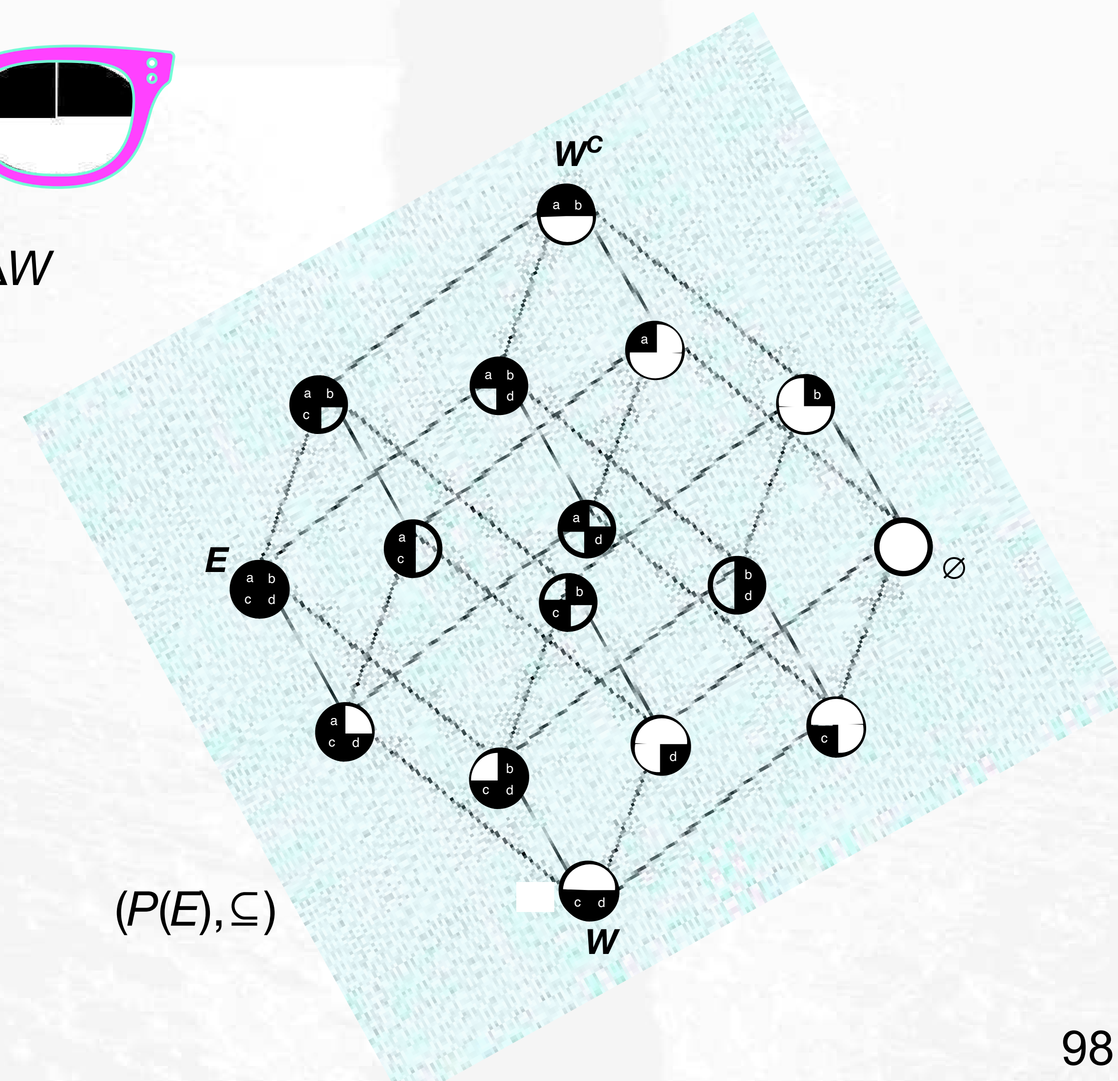
$P(E)$:





$(P(E),\subseteq)$

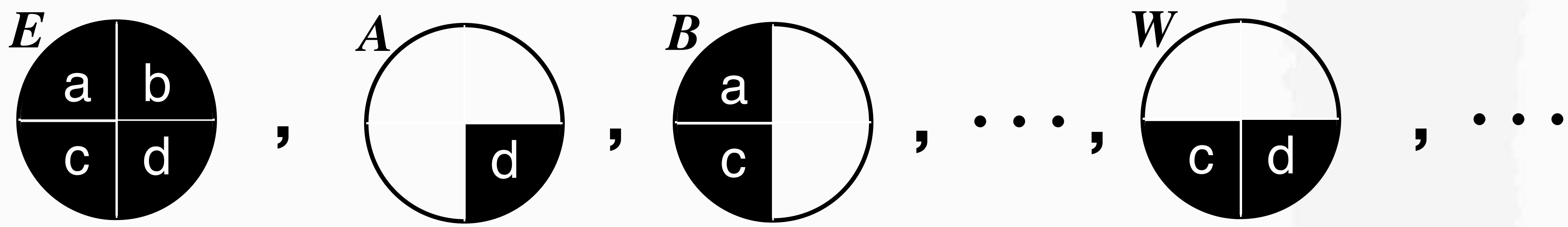
$A \longrightarrow A\Delta W$

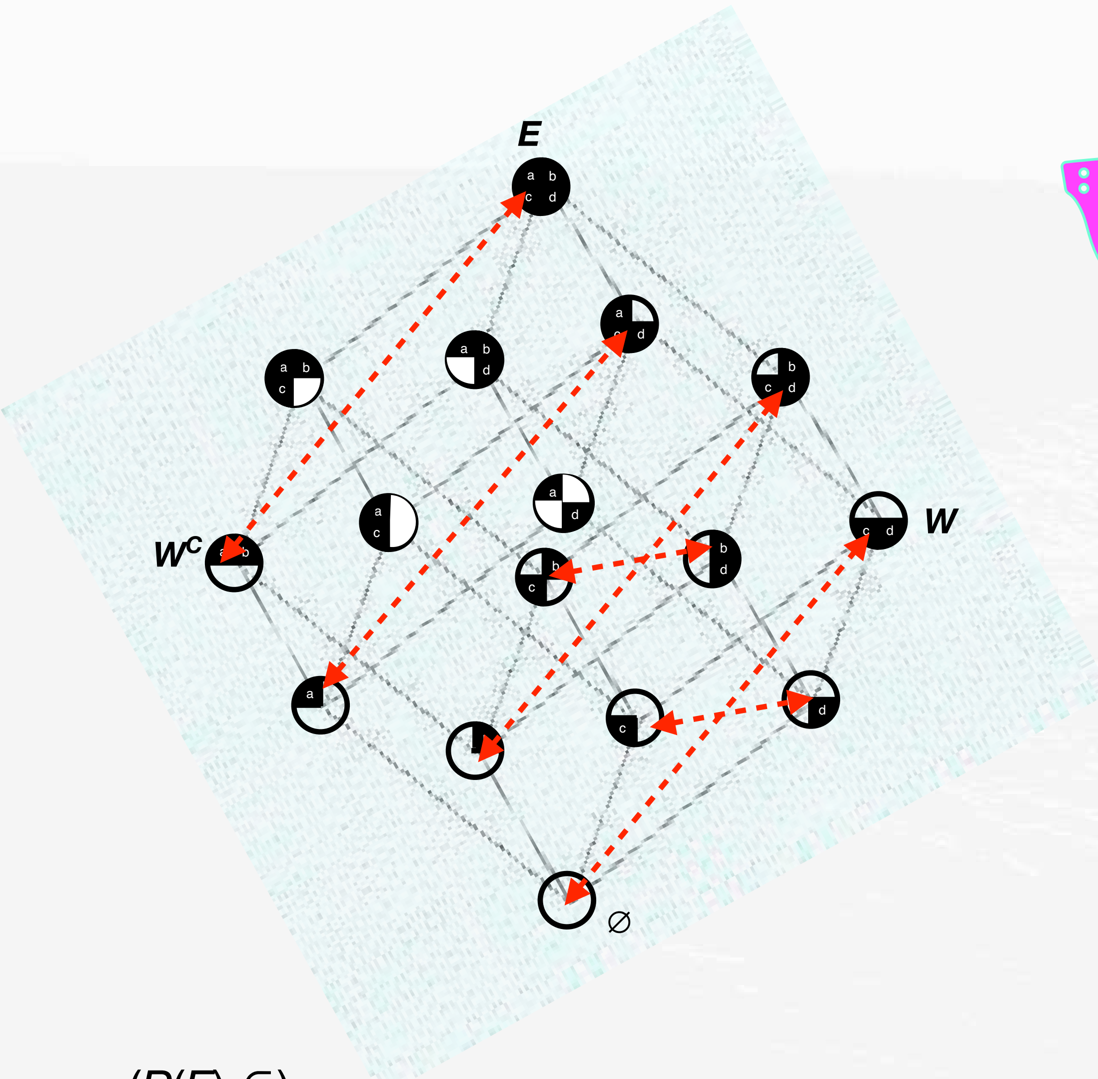


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{W})$ isomorfa a $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$.

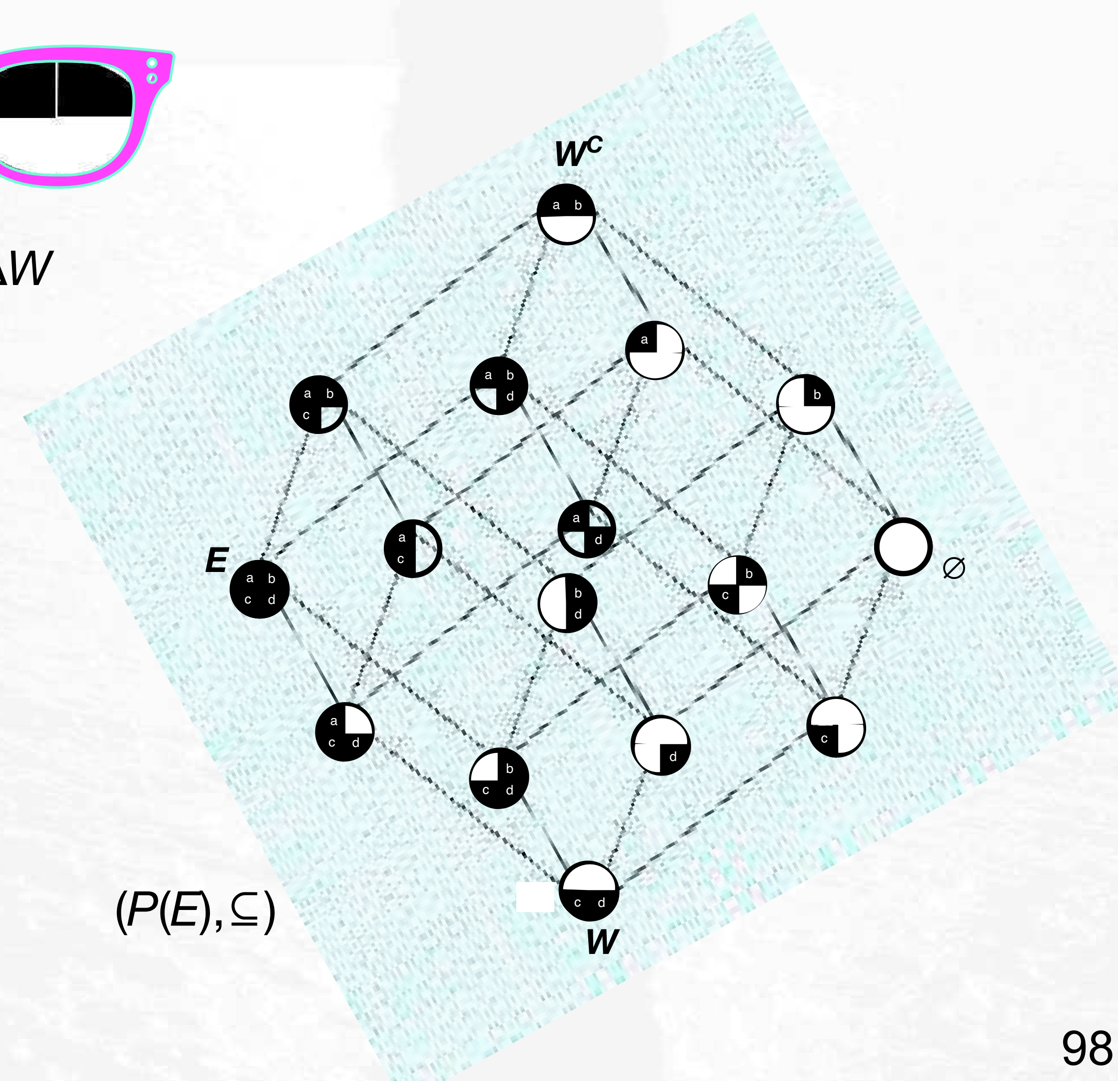
$P(E)$:





$(P(E),\subseteq)$

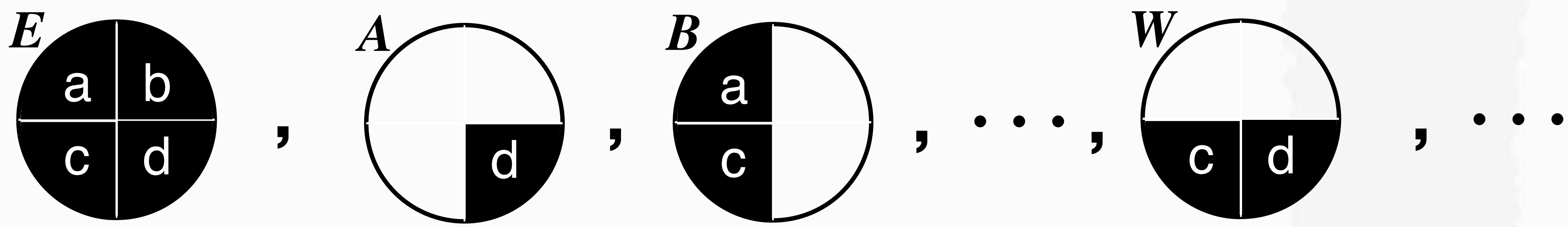
$A \longrightarrow A\Delta W$

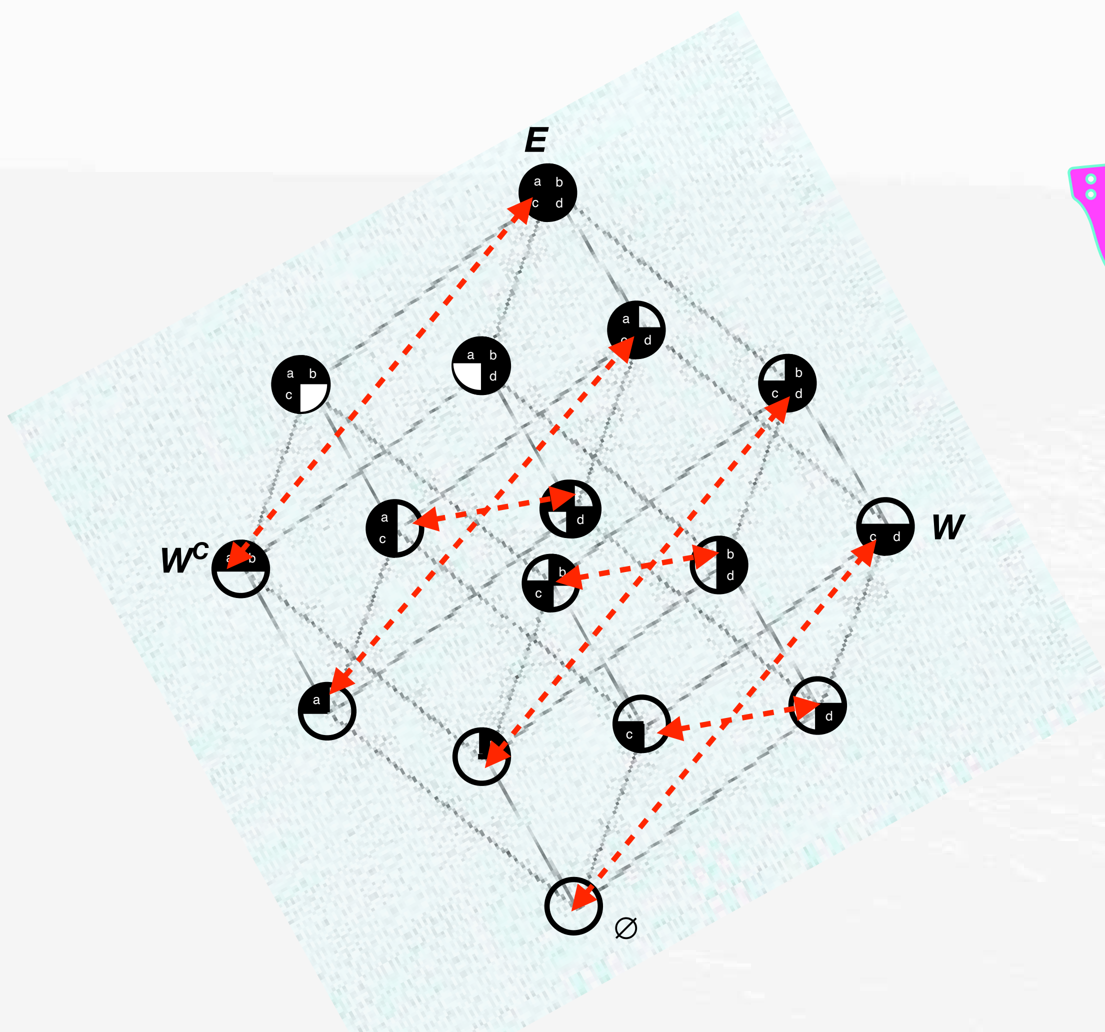


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica , del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^{W})$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.

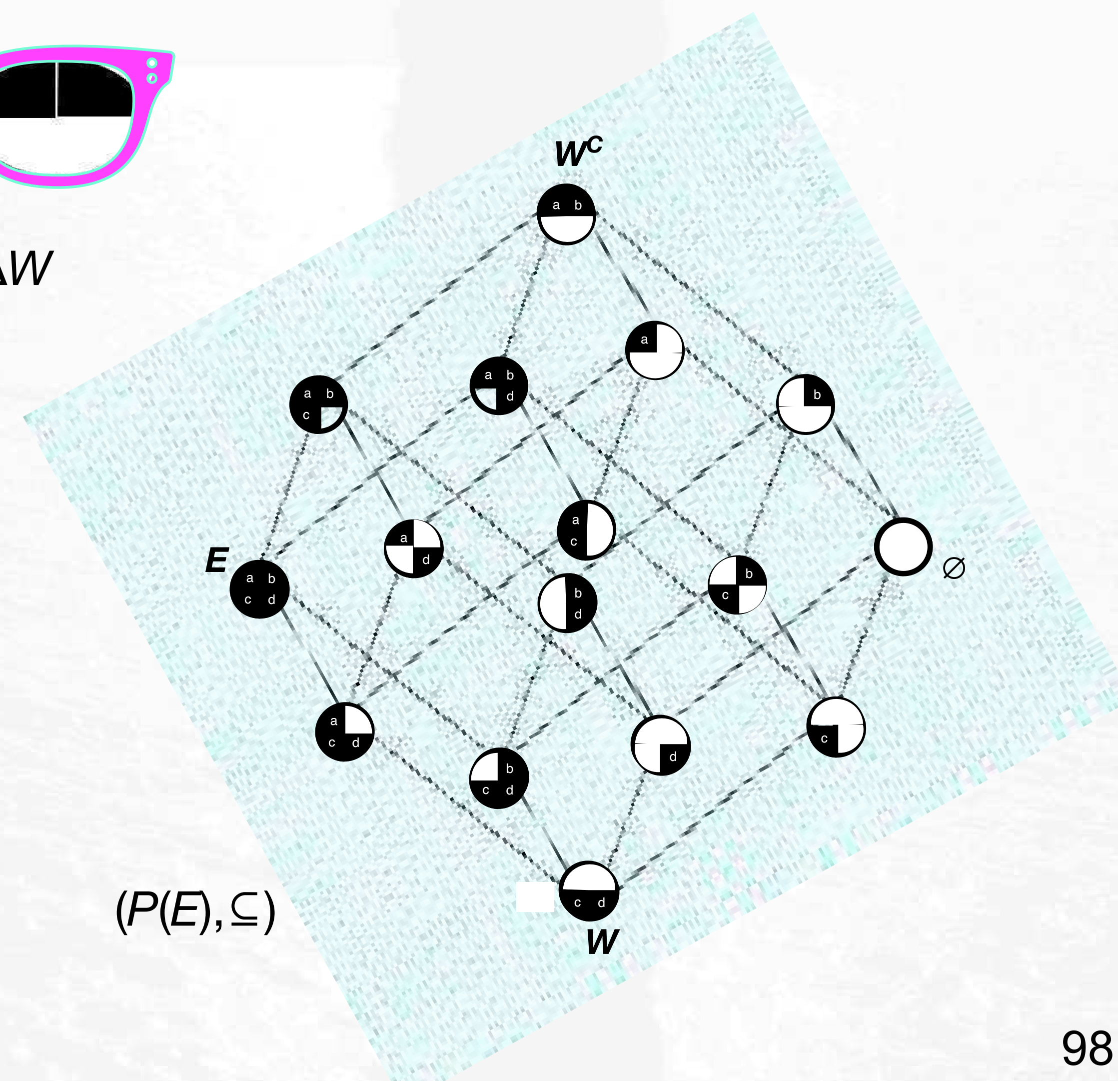
$P(E)$:





$(P(E),\subseteq)$

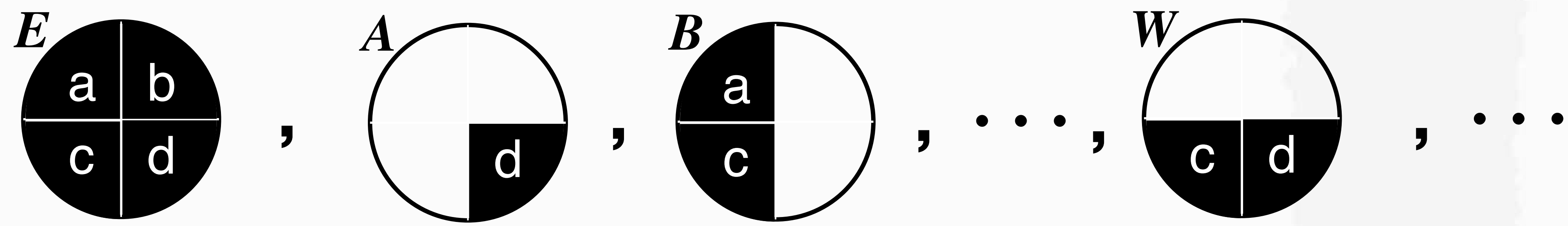
$A \longrightarrow A\Delta W$

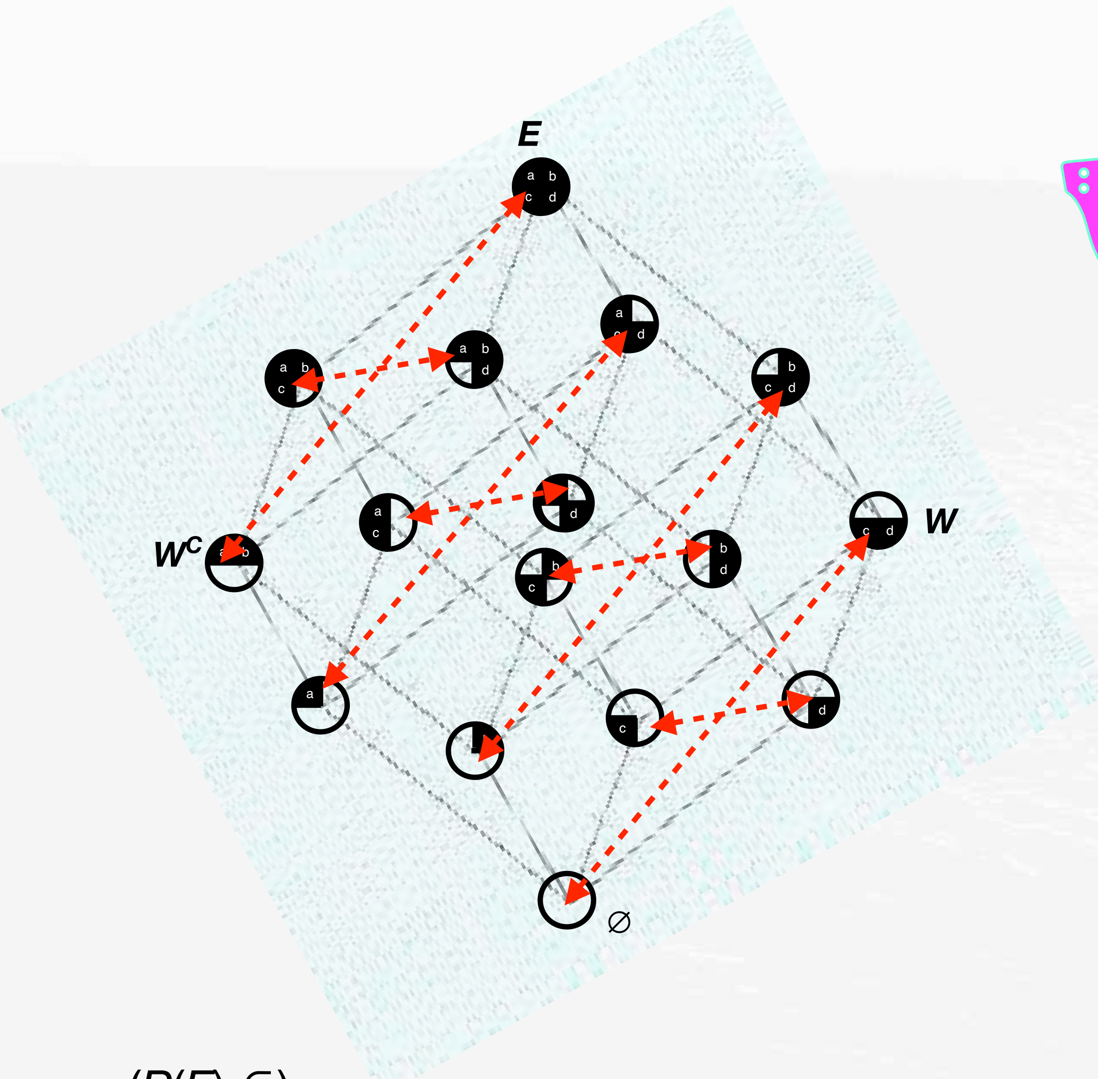


$(P(E),\subseteq)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E), \subseteq)$.

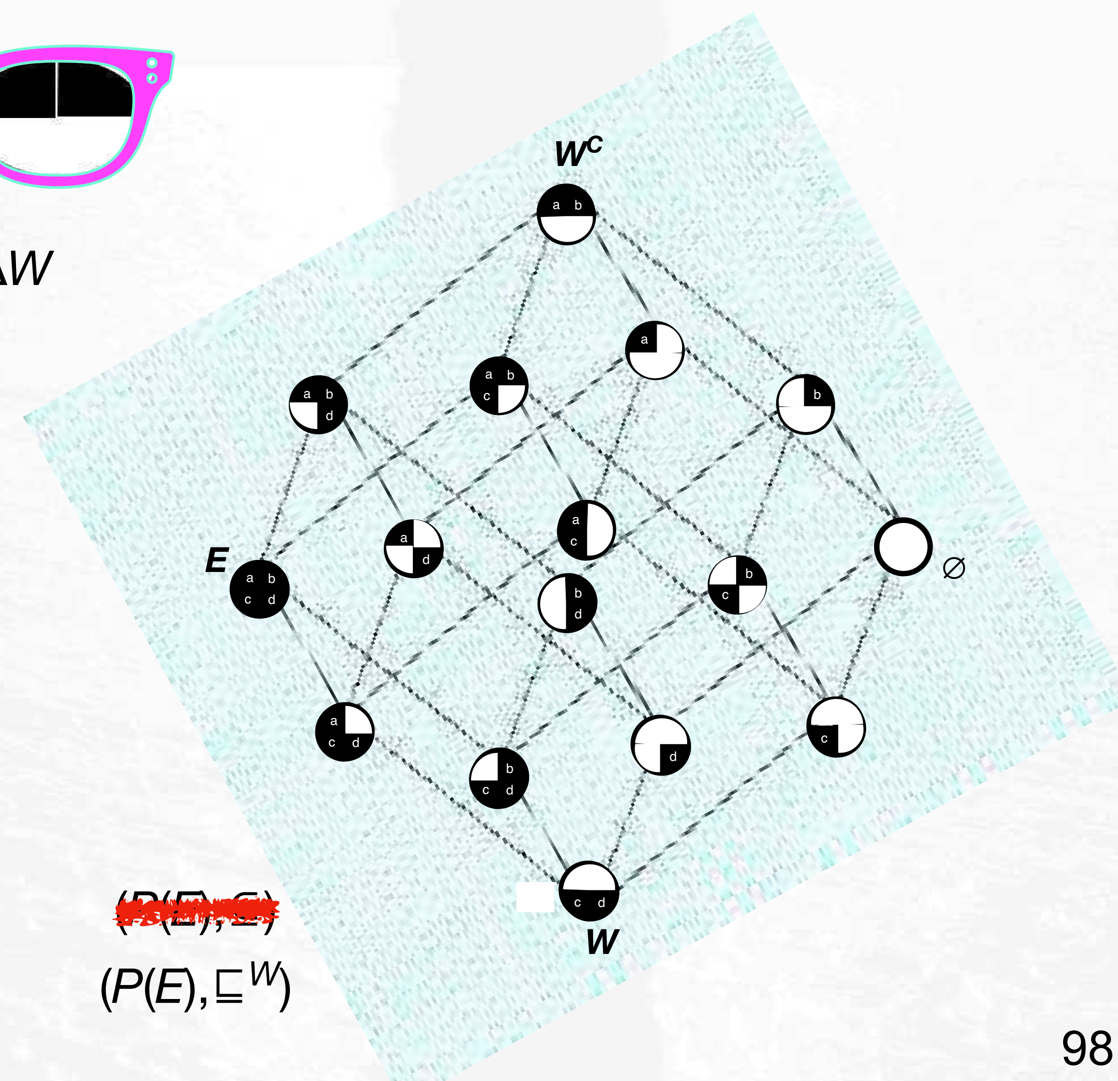
$P(E)$:





$(P(E), \subseteq)$

$A \longrightarrow A \Delta W$

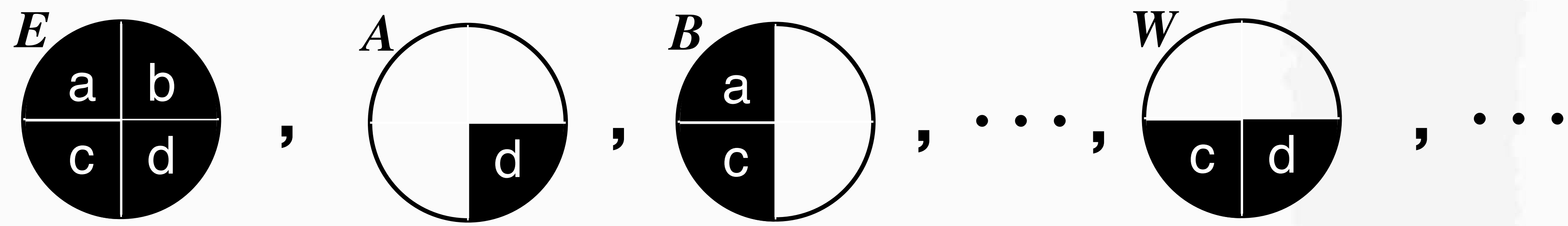


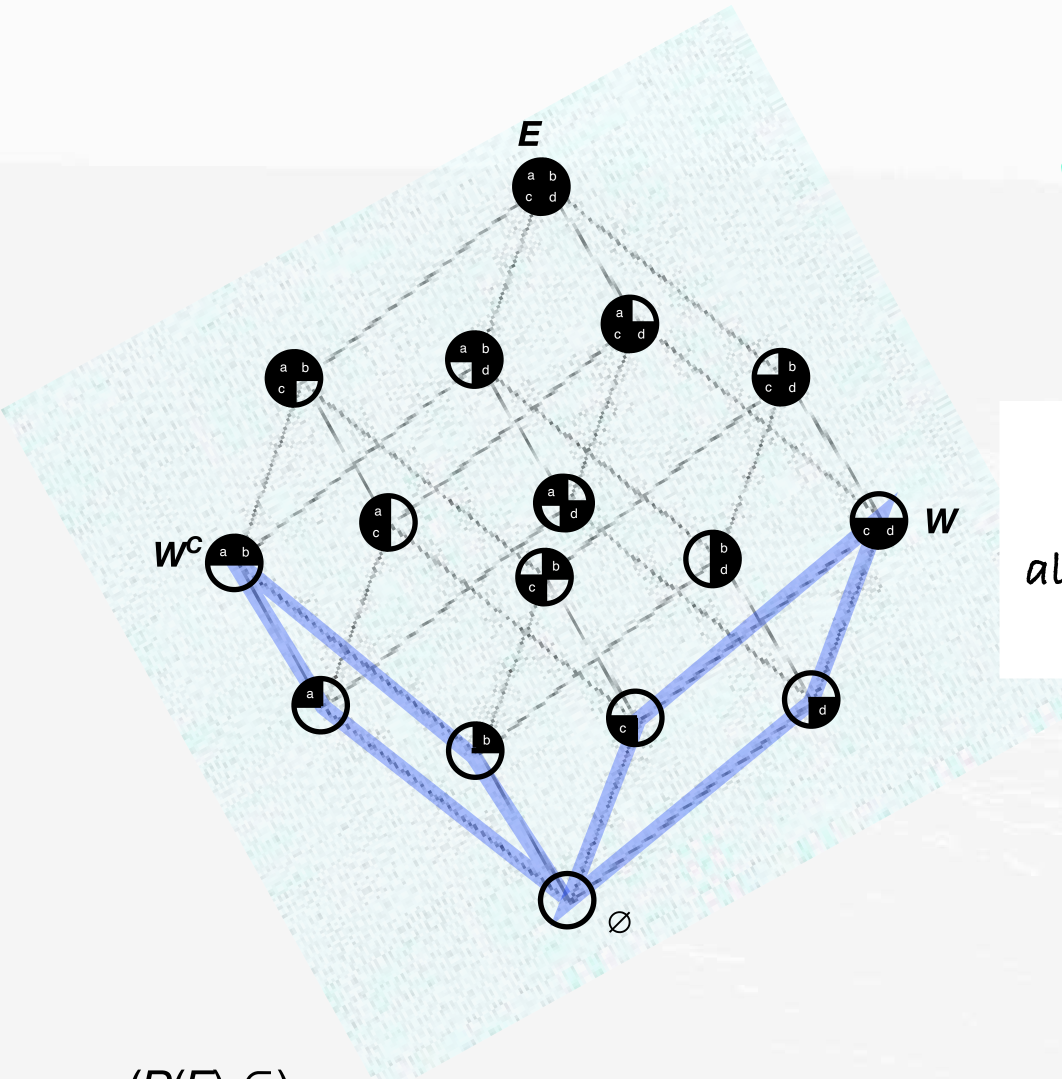
~~$(P(E), \subseteq)$~~

$(P(E), \sqsubseteq^W)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica , del Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E), \subseteq)$.

$P(E)$:

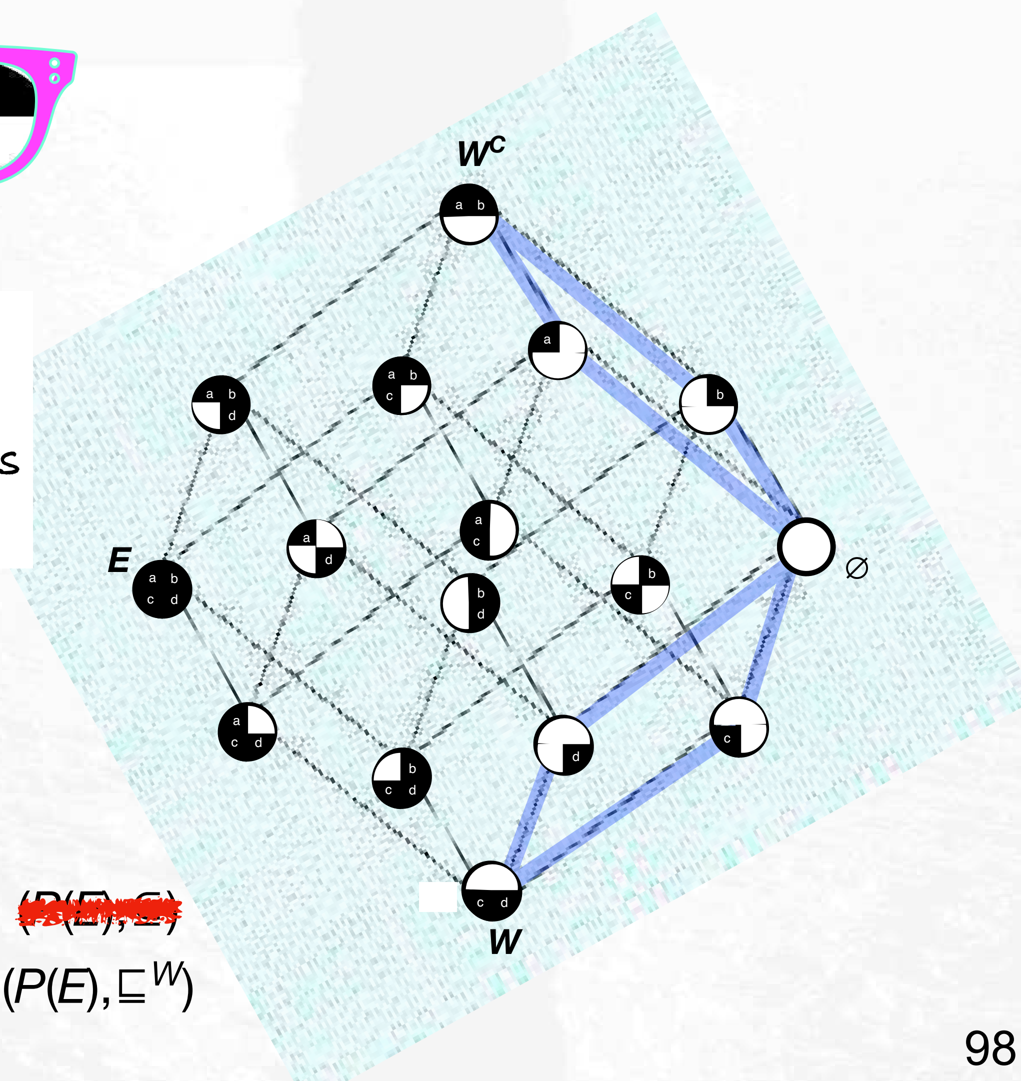




$(P(E),\subseteq)$

$A \longrightarrow A \Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:

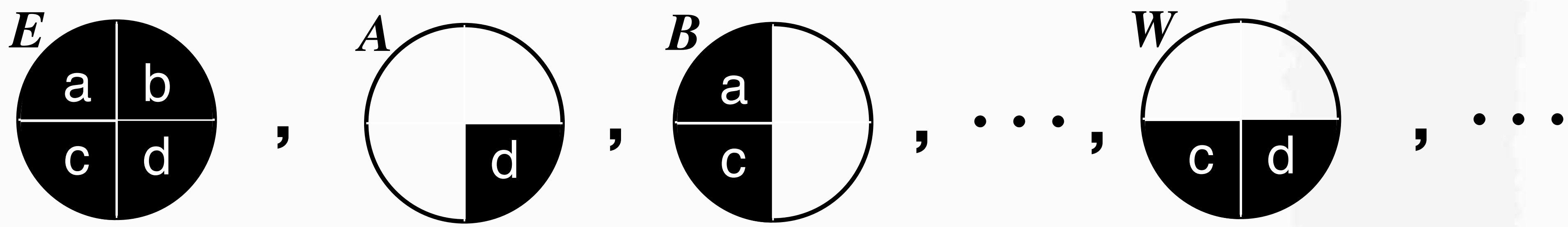


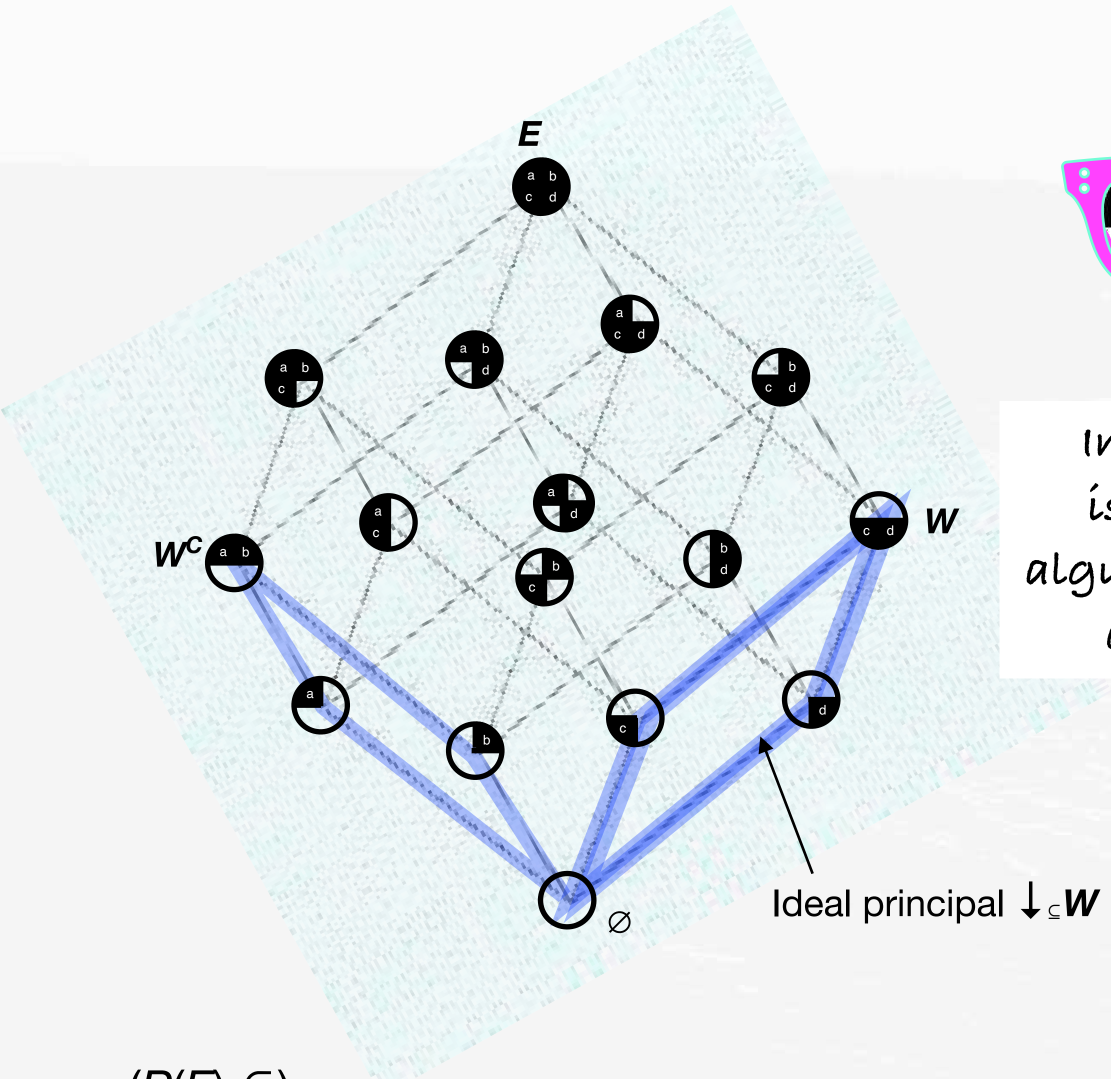
~~$(P(E),\subseteq)$~~

$(P(E),\sqsubseteq^W)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$.

$P(E)$:

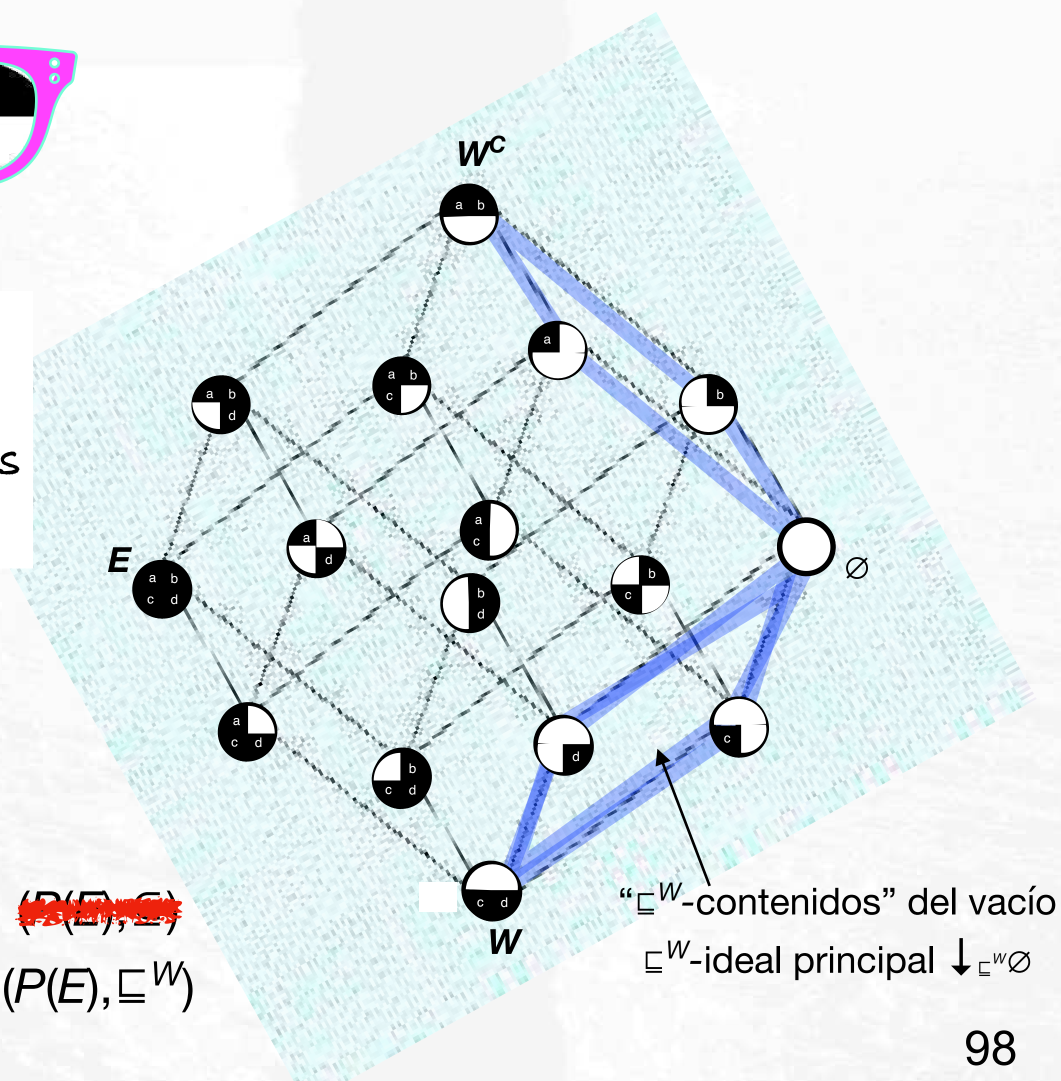




$(P(E),\subseteq)$

$A \longrightarrow A \Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:

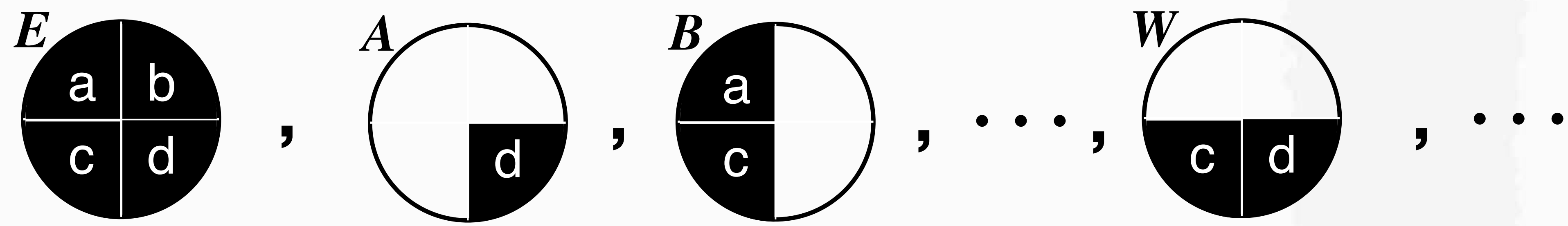


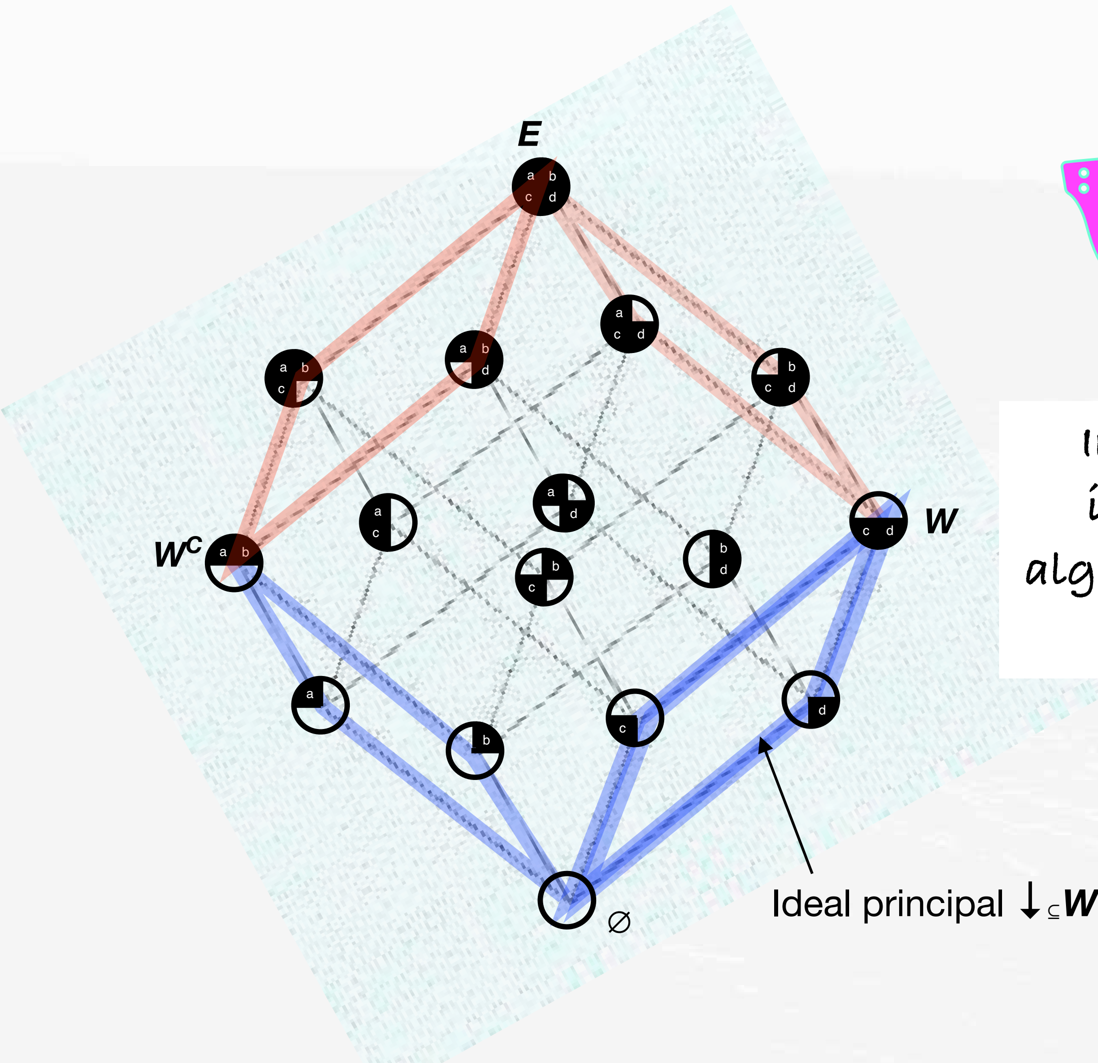
~~$(P(E),\subseteq)$~~

$(P(E),\sqsubseteq^W)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E), \subseteq)$.

$P(E)$:

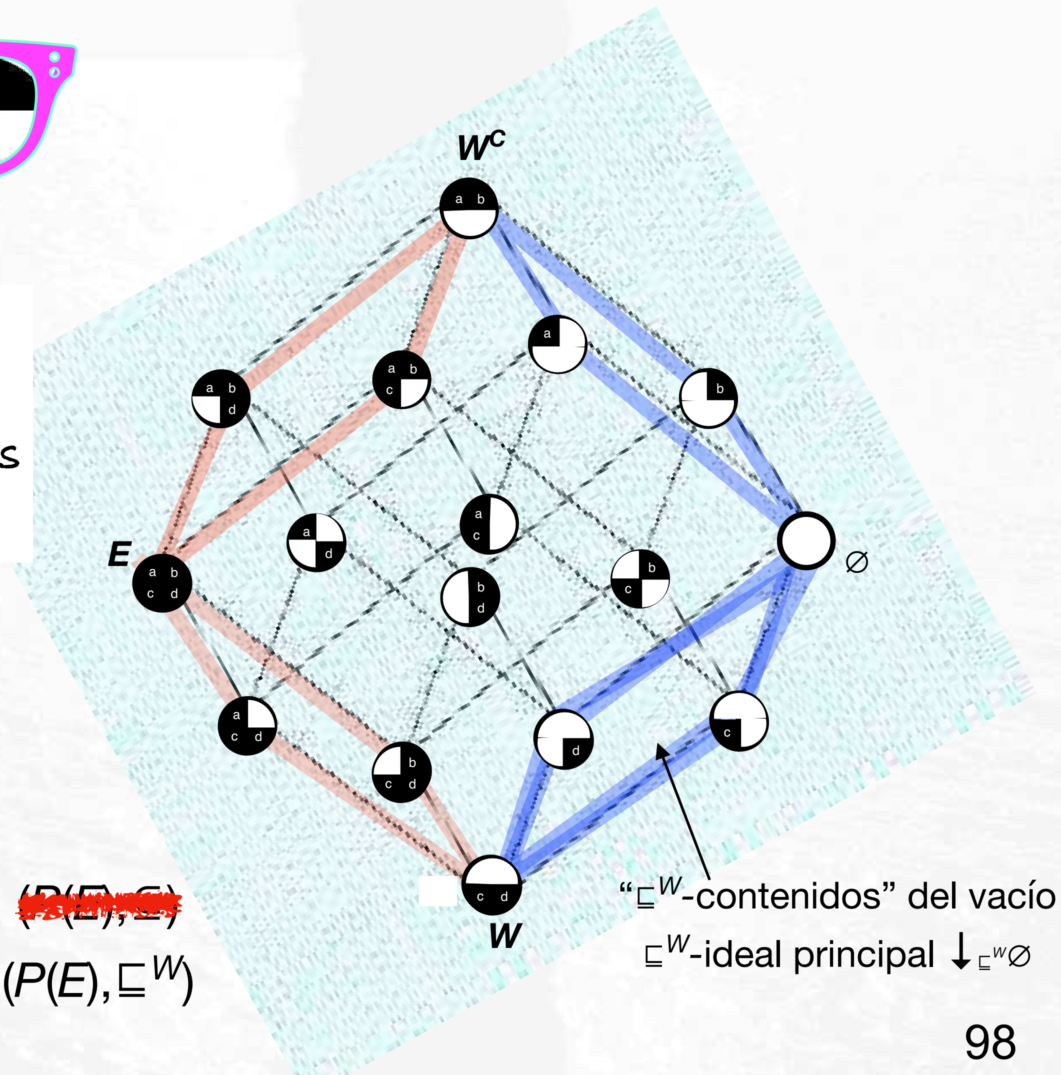




$(P(E), \subseteq)$

$A \longrightarrow A \Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:

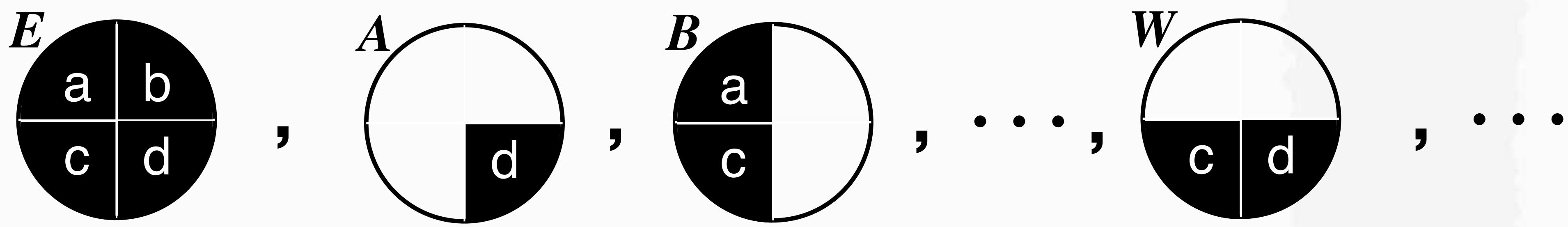


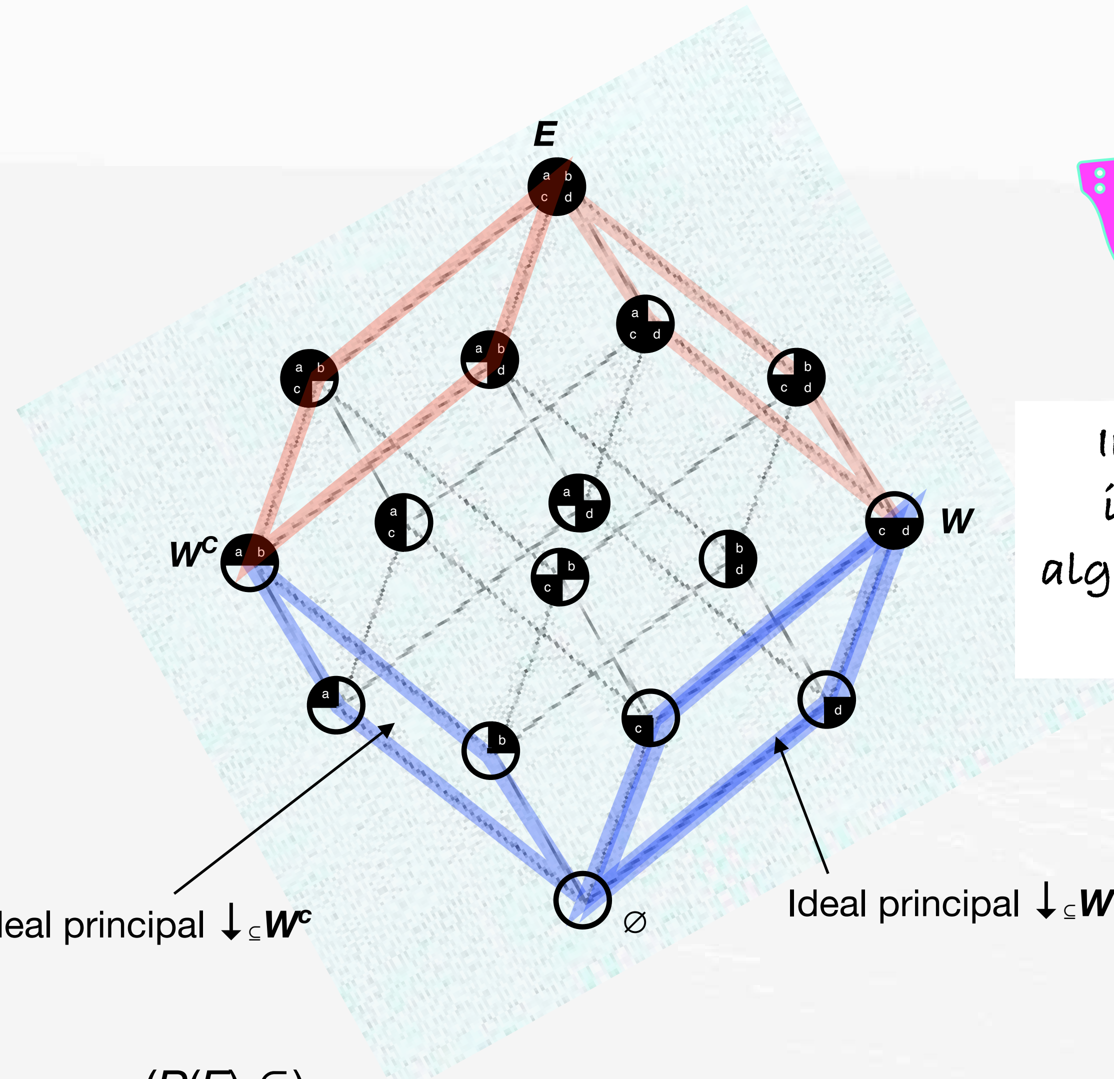
~~$(P(E), \subseteq)$~~

$(P(E), \sqsubseteq^W)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.

$P(E)$:

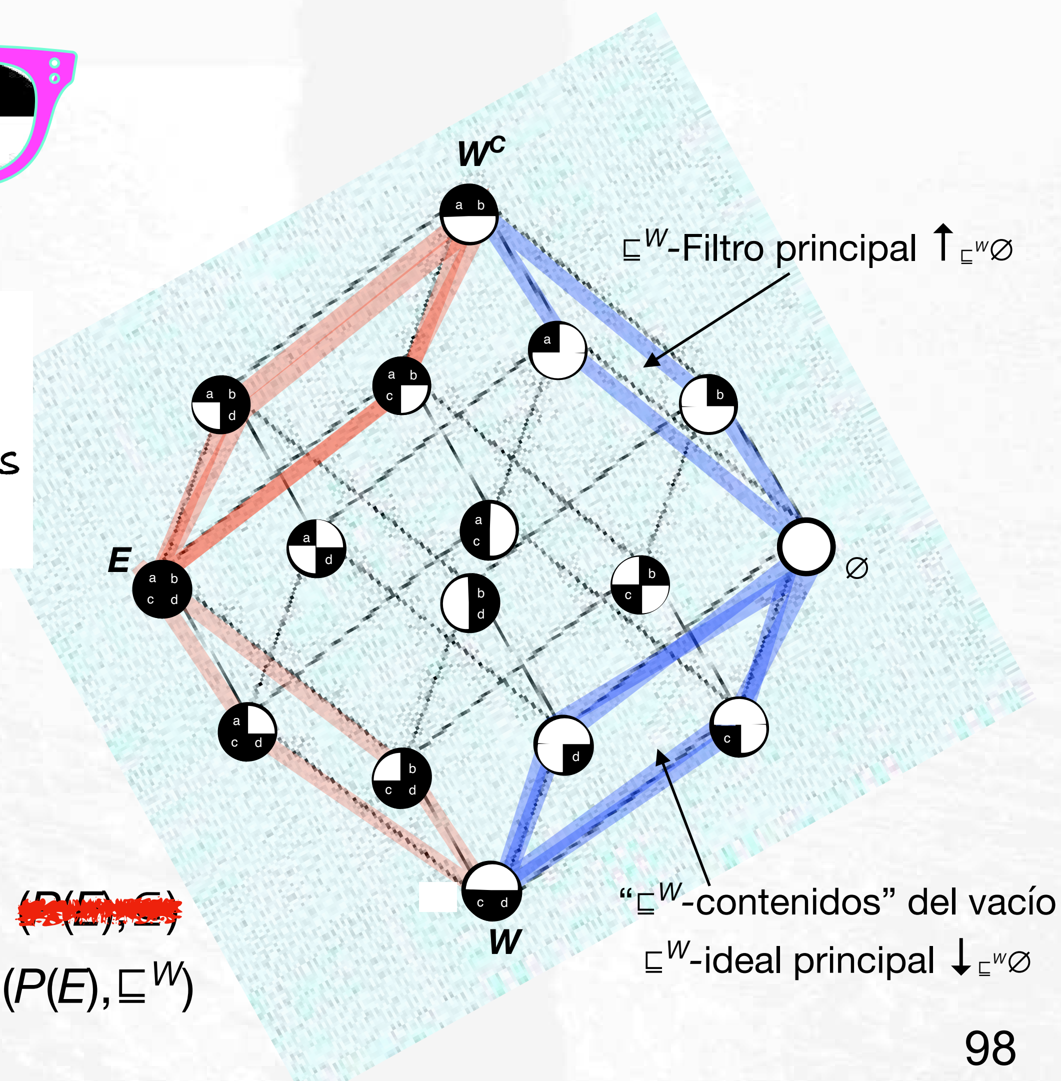




$(P(E),\subseteq)$

$A \longrightarrow A \Delta W$

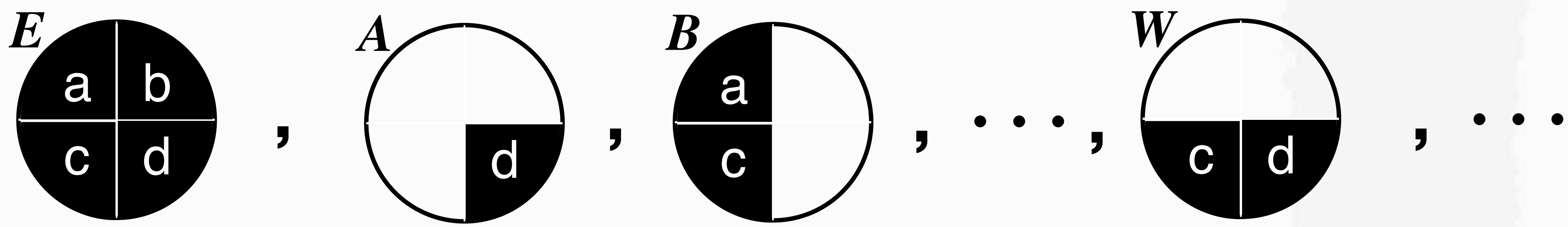
Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:

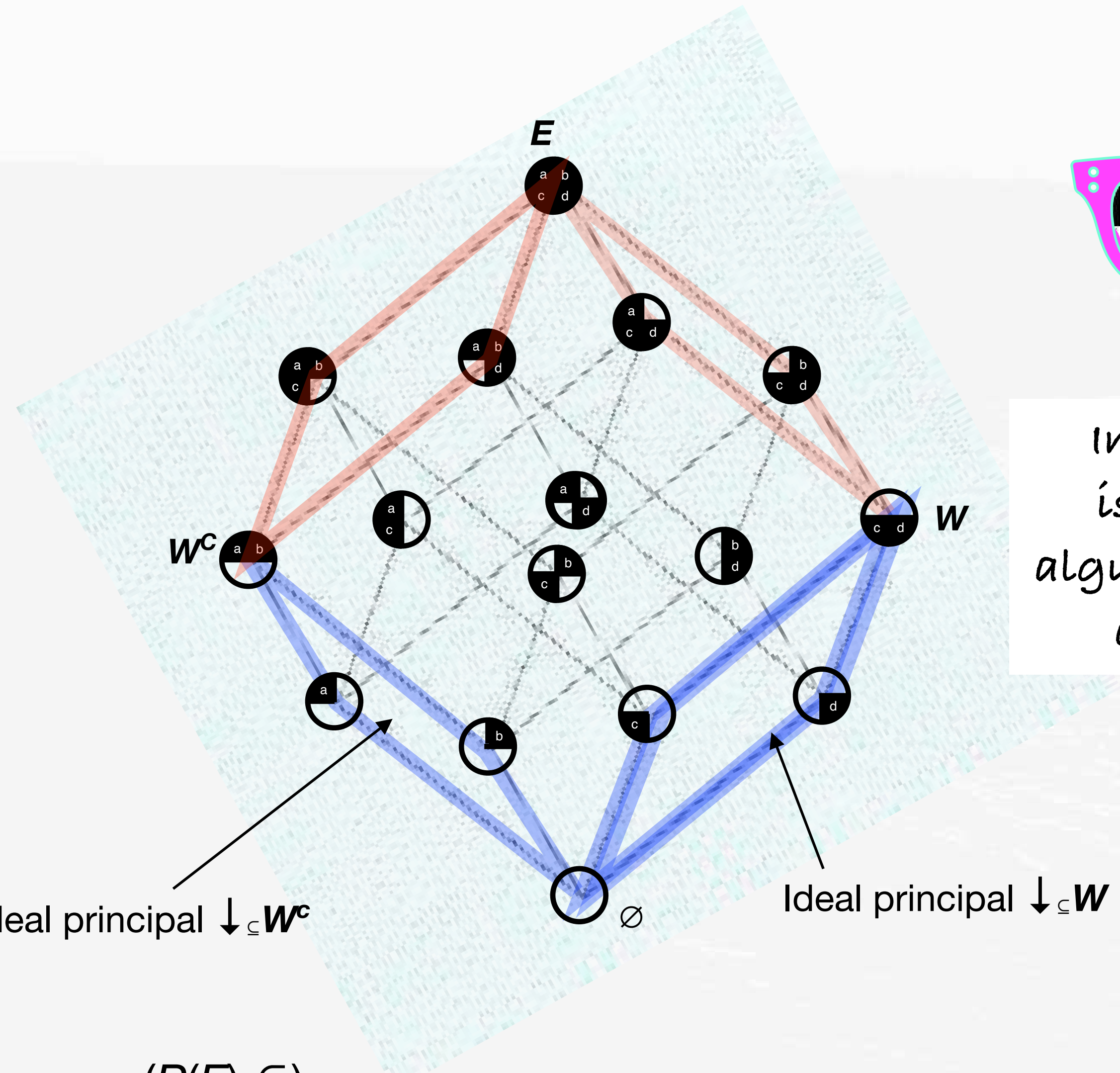


~~$(P(E),\subseteq)$~~
$(P(E),\sqsubseteq^W)$

Un ejemplo de la obtención, mediante el operador diferencia simétrica, del Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$ isomorfa a $(P(E),\subseteq)$.

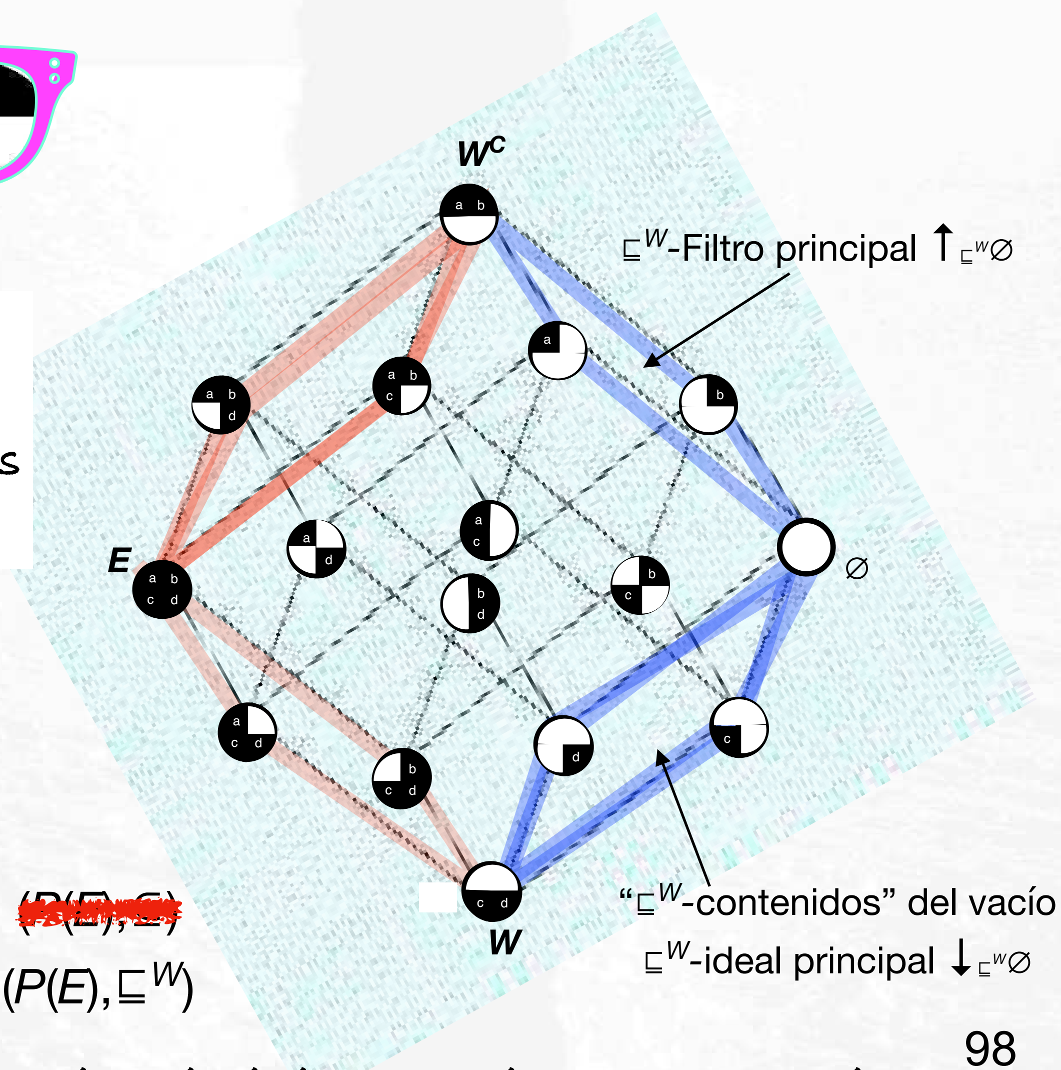
$P(E)$:





$A \longrightarrow A \Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:



Nota. No obstante, nos parece más sugerente la interpretación inicial asociada a los "giros", y es la que seguiremos utilizando en lo sucesivo en este trabajo.

Subconjuntos “w-disjuntos"

<u>Definición</u>. A y B w-disjuntos si y solo si:

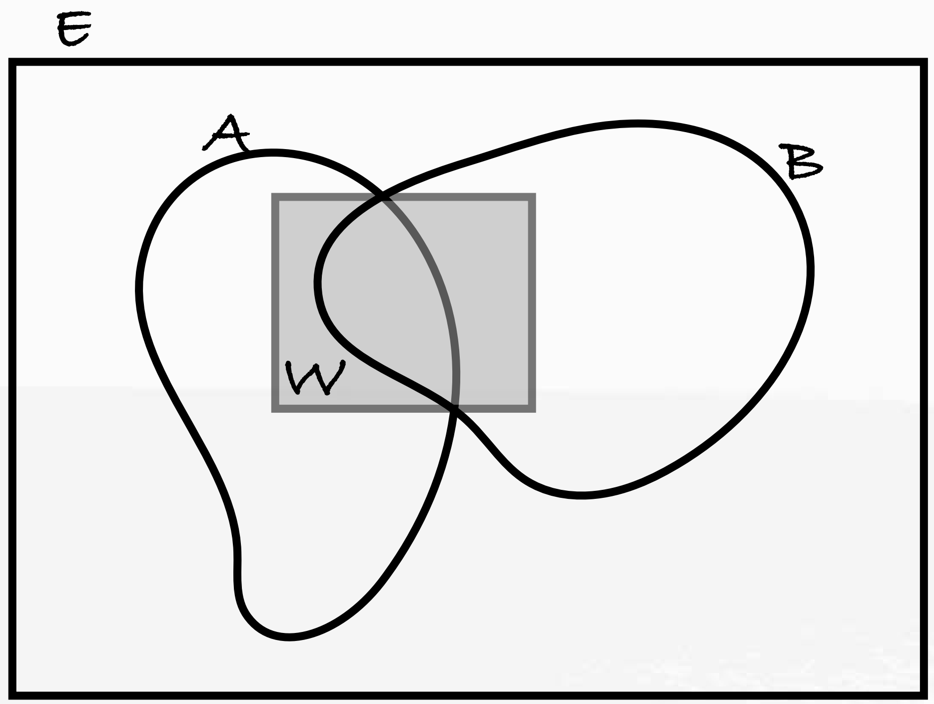
$$A \sqcap^{W} B = W$$

A y B son w-disjuntos, es decir:
$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W$,
si y solo si:
$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B)$,
si y solo si:
$W \sqsubseteq^{B} A$,
siy solo si:
$W \sqsubseteq^{A} B$.

__Definición__. A y B w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{W} B = W$$

Ejemplos:



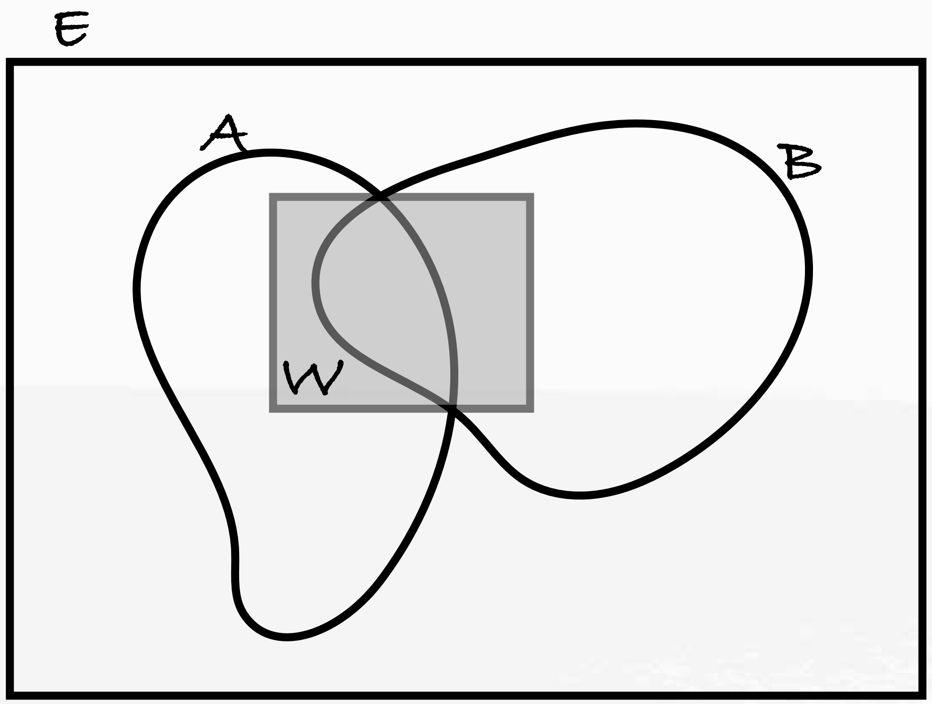
A y B son w-disjuntos, es decir:
$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W$,
si y solo si:
$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B)$,
si y solo si:
$W \sqsubseteq^{B} A$,
siy solo si:
$W \sqsubseteq^{A} B$.

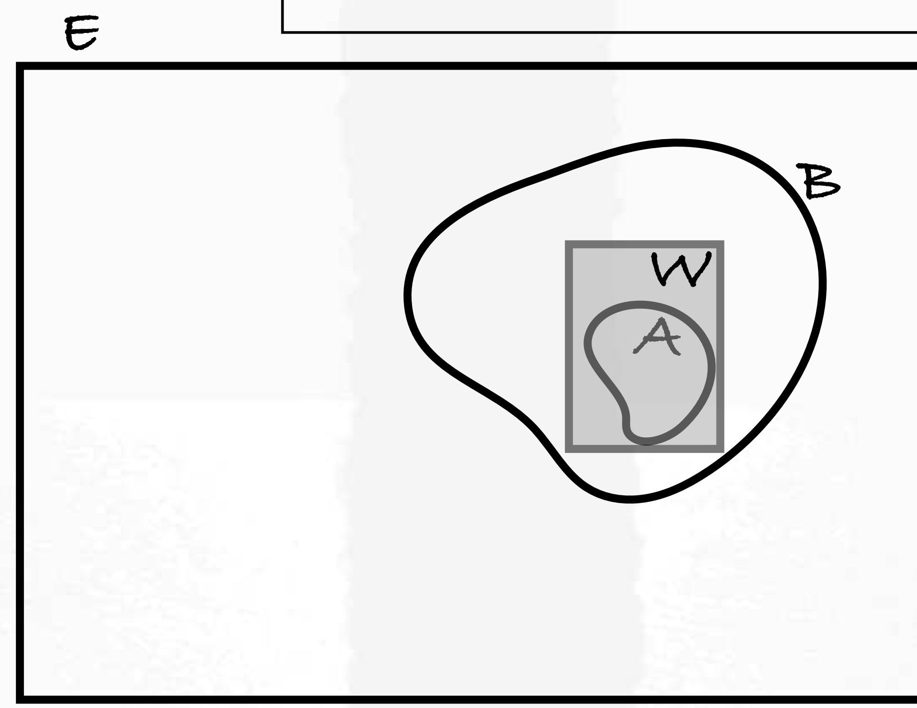
Definición. A y B w-disjuntos si y solo si:

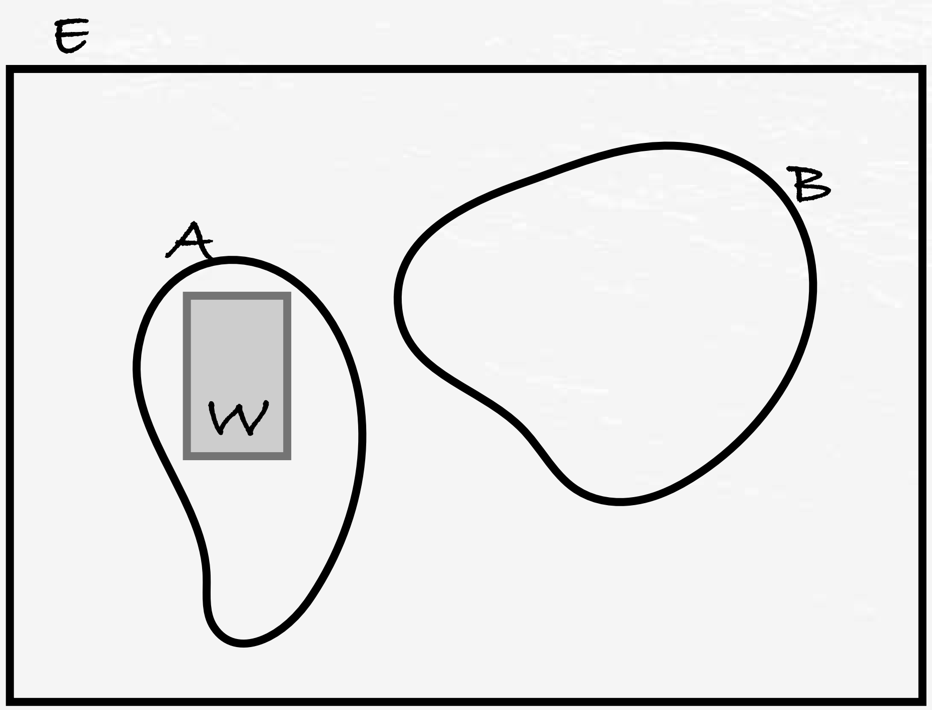
$$A \sqcap^{W} B = W$$

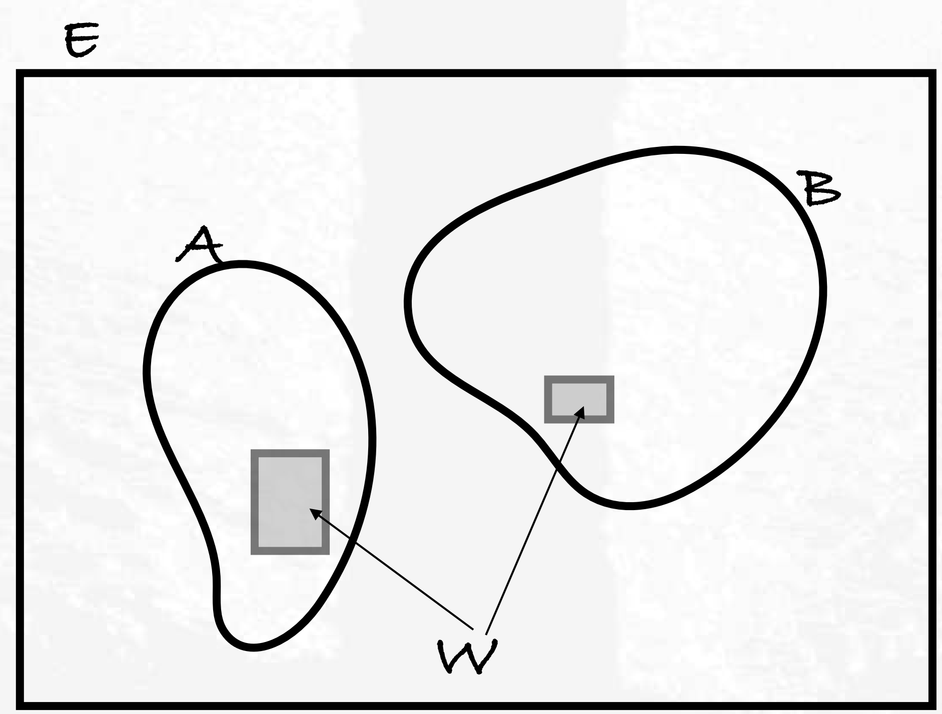
A y B son w-disjuntos, es decir:
$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W$,
si y solo si:
$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B)$,
si y solo si:
$W \sqsubseteq^{B} A$,
si y solo si:
$W \sqsubseteq^{A} B$.

Ejemplos:





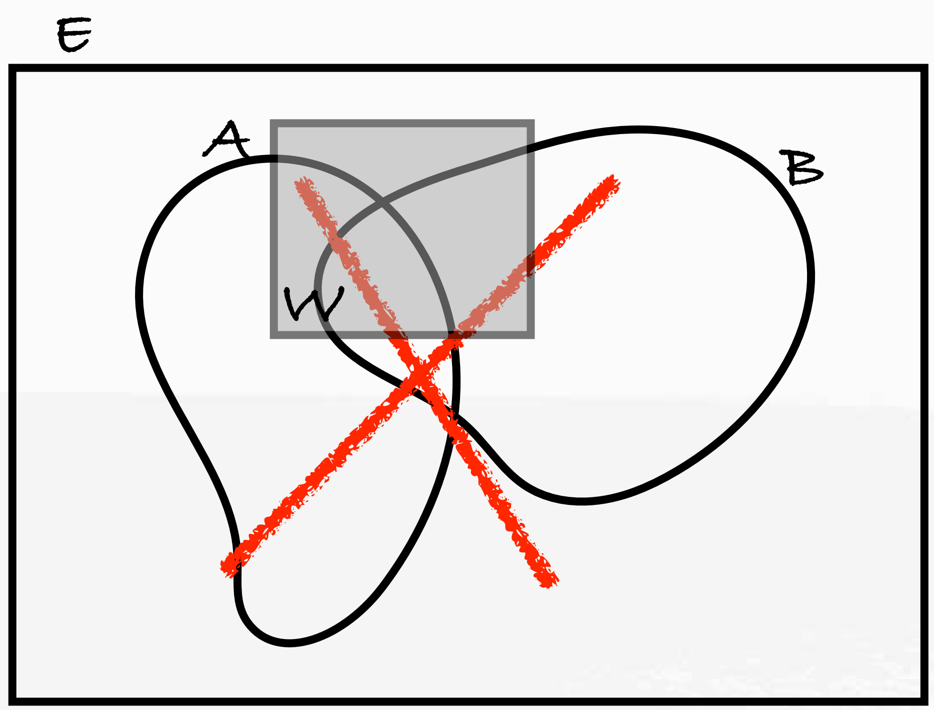


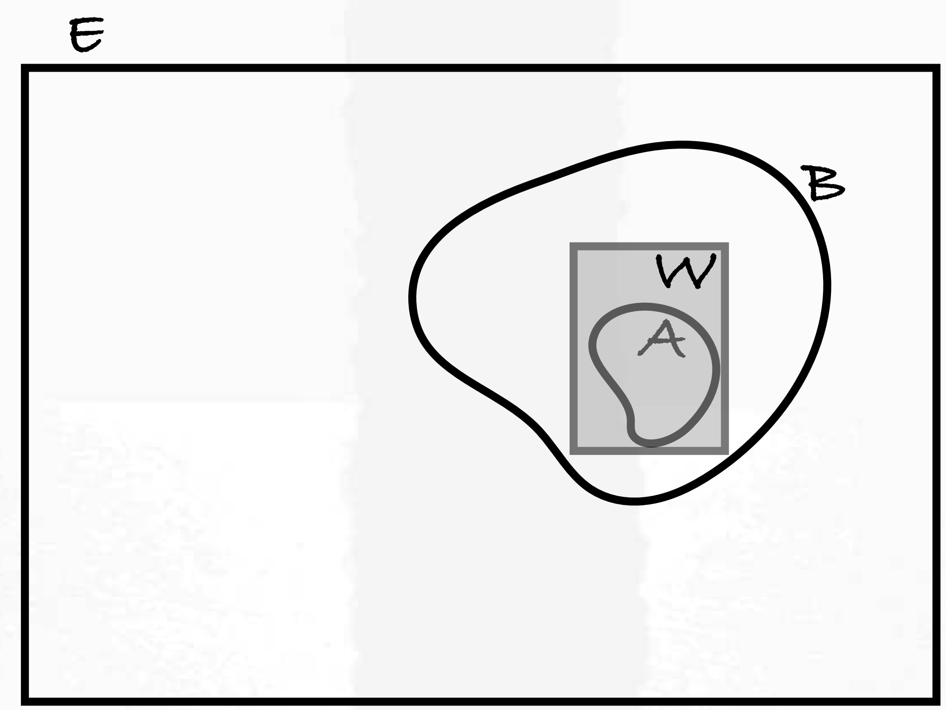


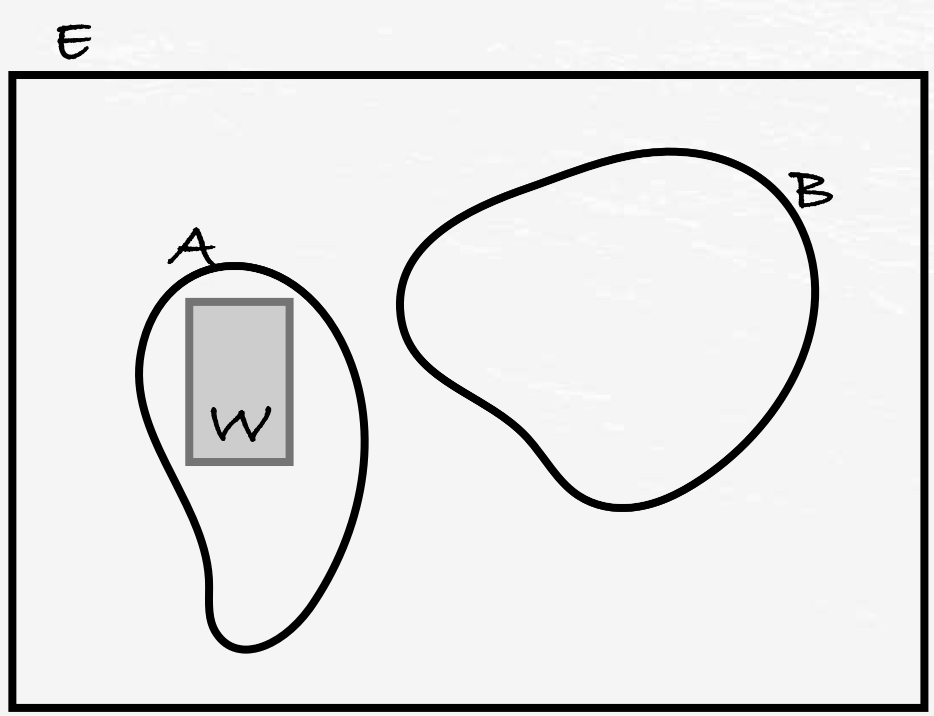
Definición. A y B ~~w-disjuntos si~~ y solo si:

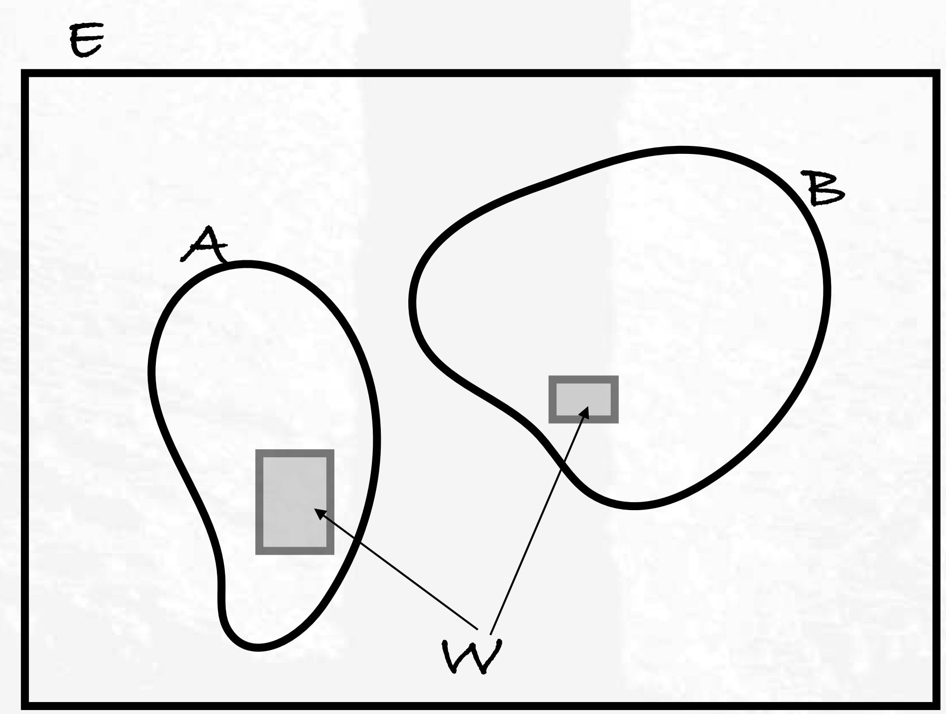
$$A \sqcap^{W} B \neq W$$

Contra-Ejemplos:





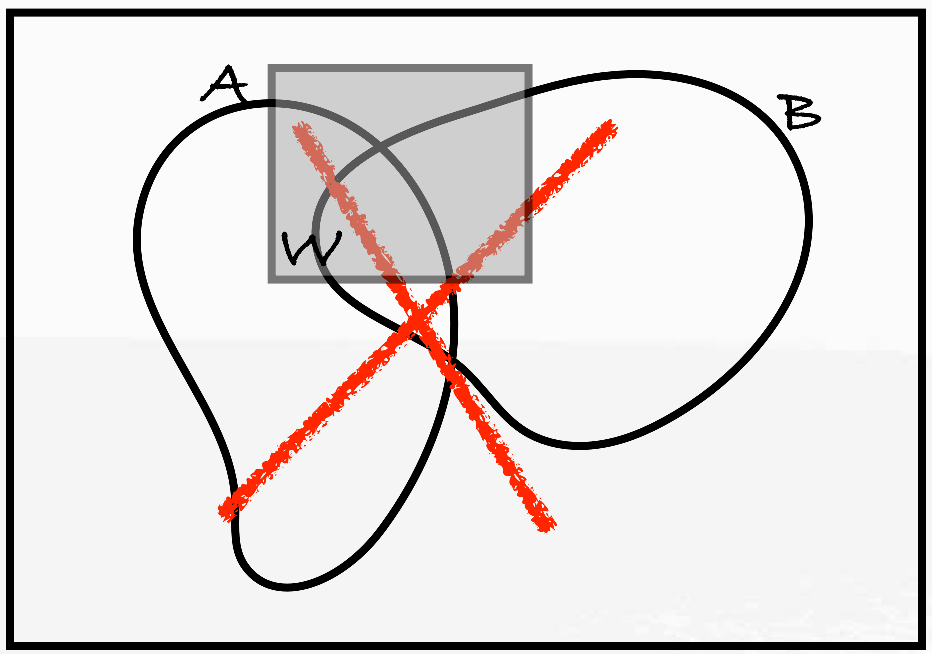


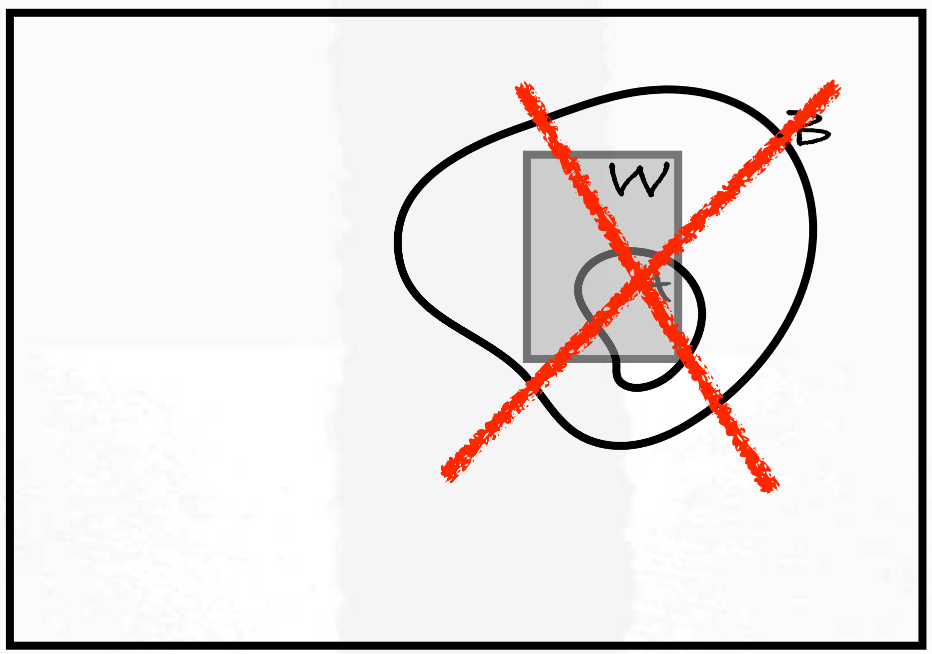


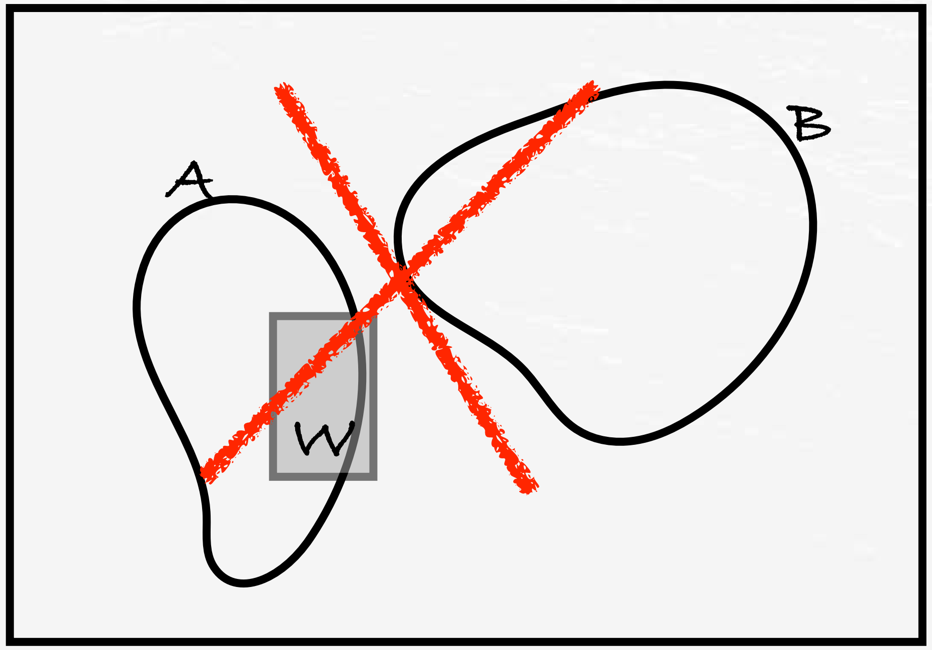
Definición. A y B ~~w-disjuntos si~~ y solo si:

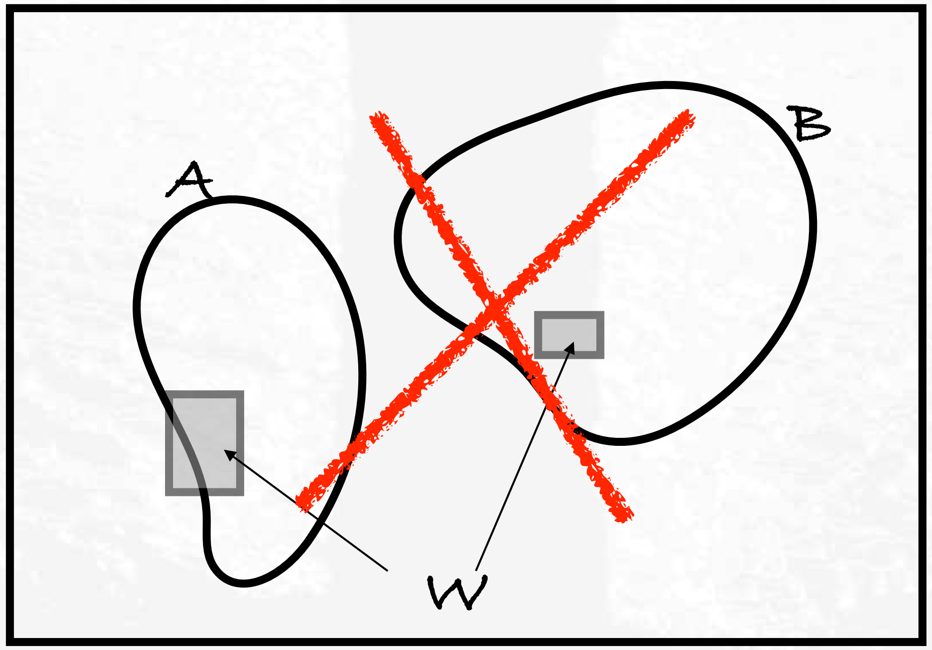
$$A \sqcap^{W} B \neq W$$

Contra-Ejemplos:



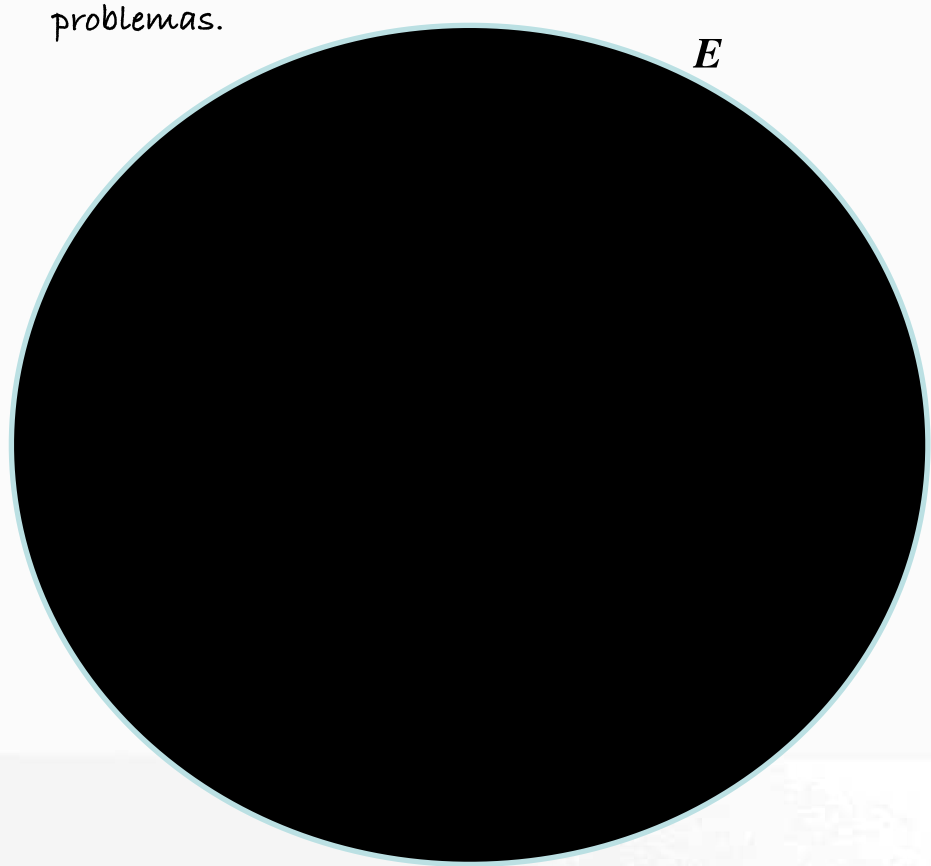






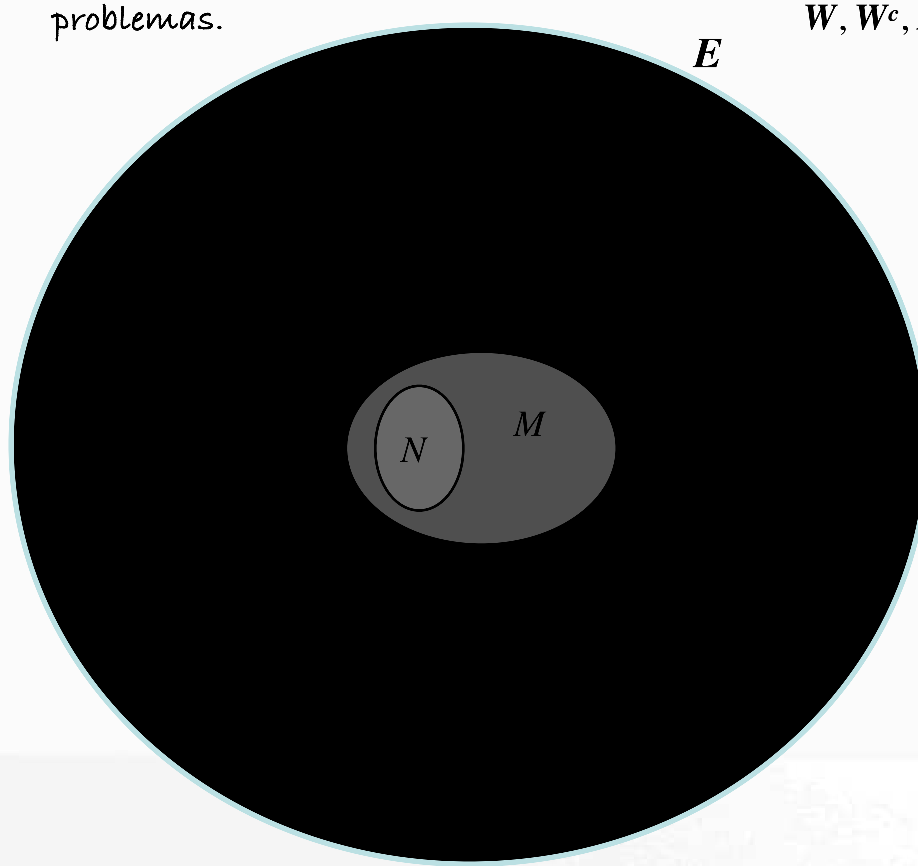
Ejemplo. Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{w}$ entre subconjuntos cualesquiera. (No necesariamente relacionados con imágenes)

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.

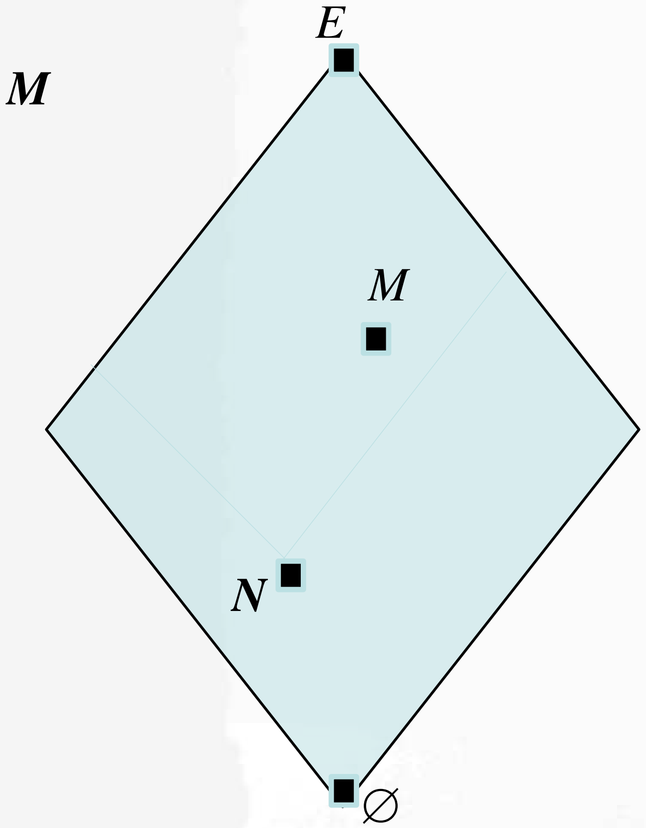


<u>Referencial E</u>: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \emptyset, E), {}^{c})$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\emptyset, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.



$N \subseteq M$

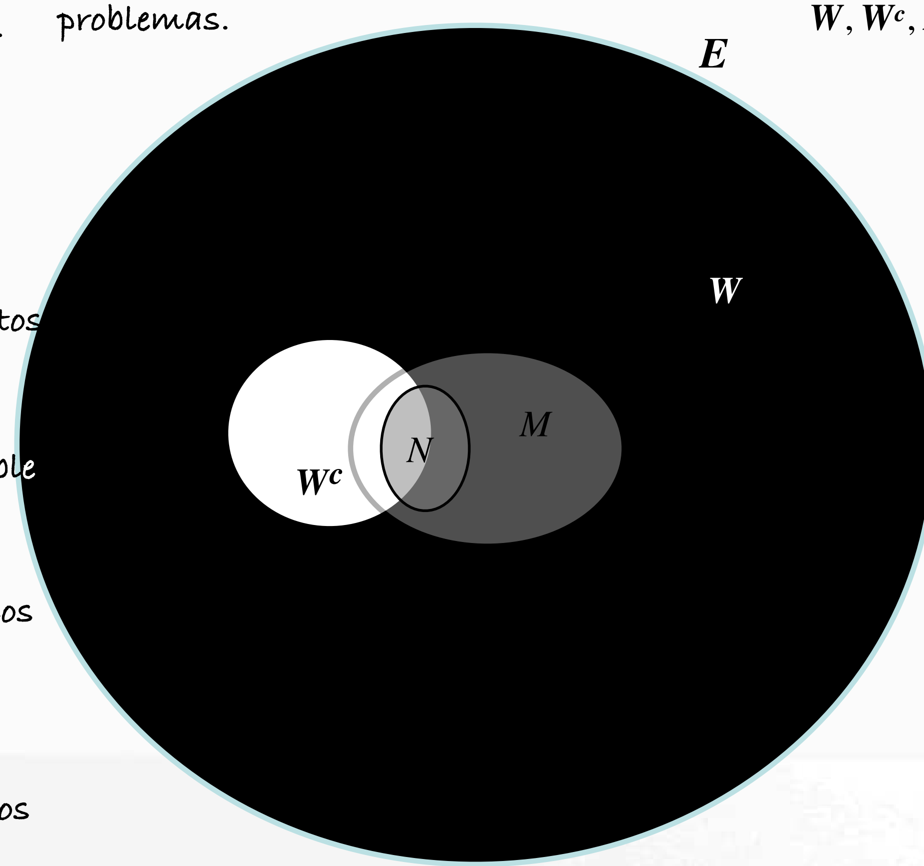


El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc...
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

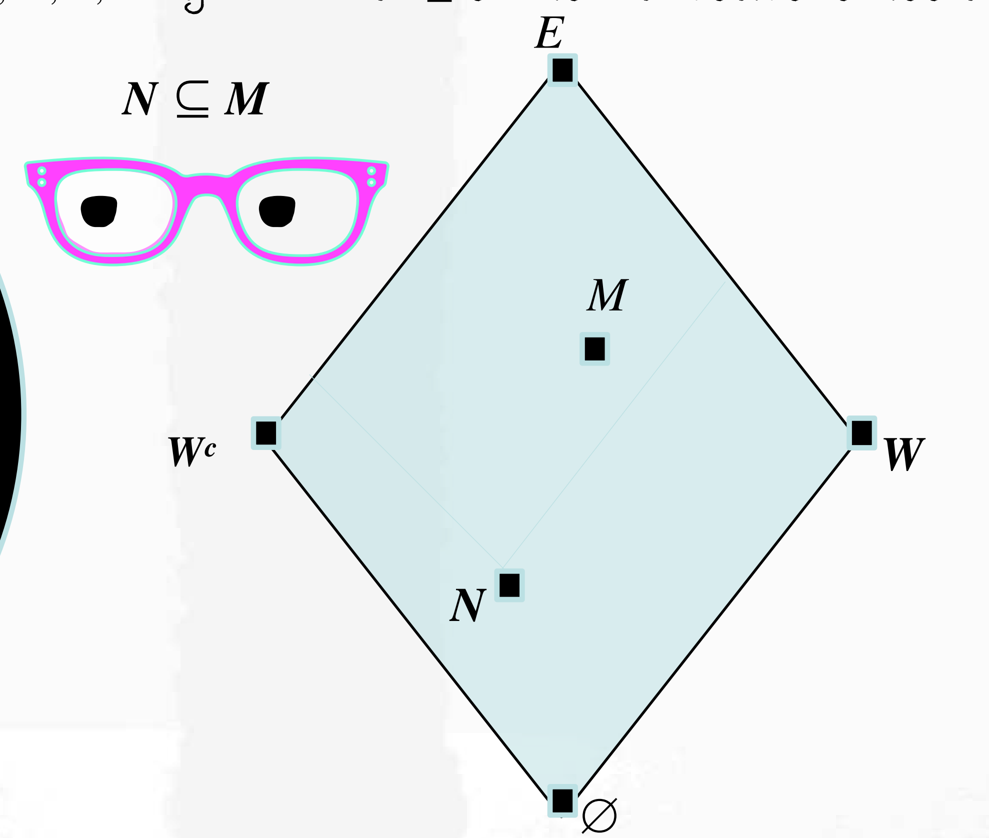
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots$ E y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

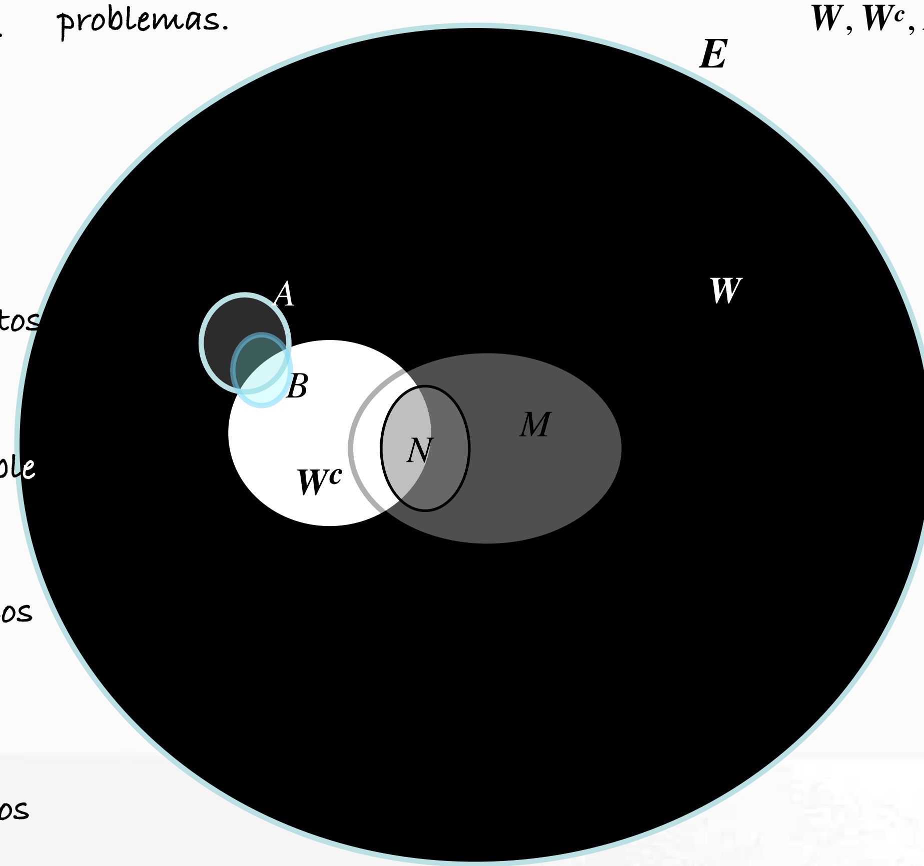


El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc...
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Si A y B , (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

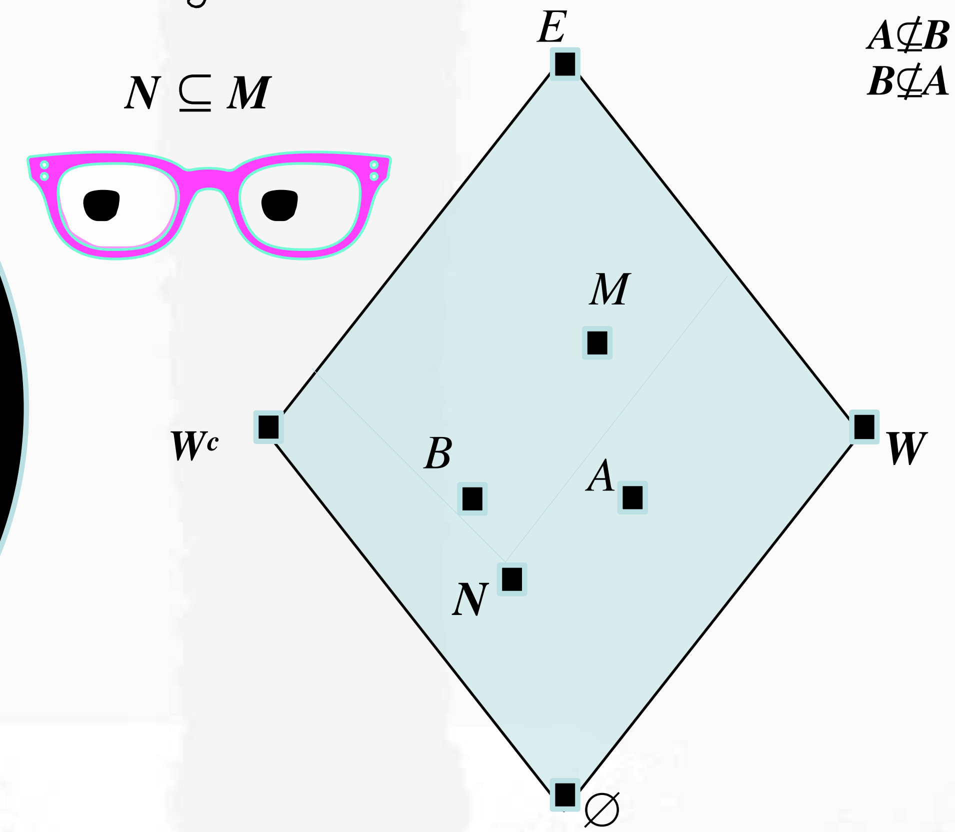
Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$

$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$



El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc...
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

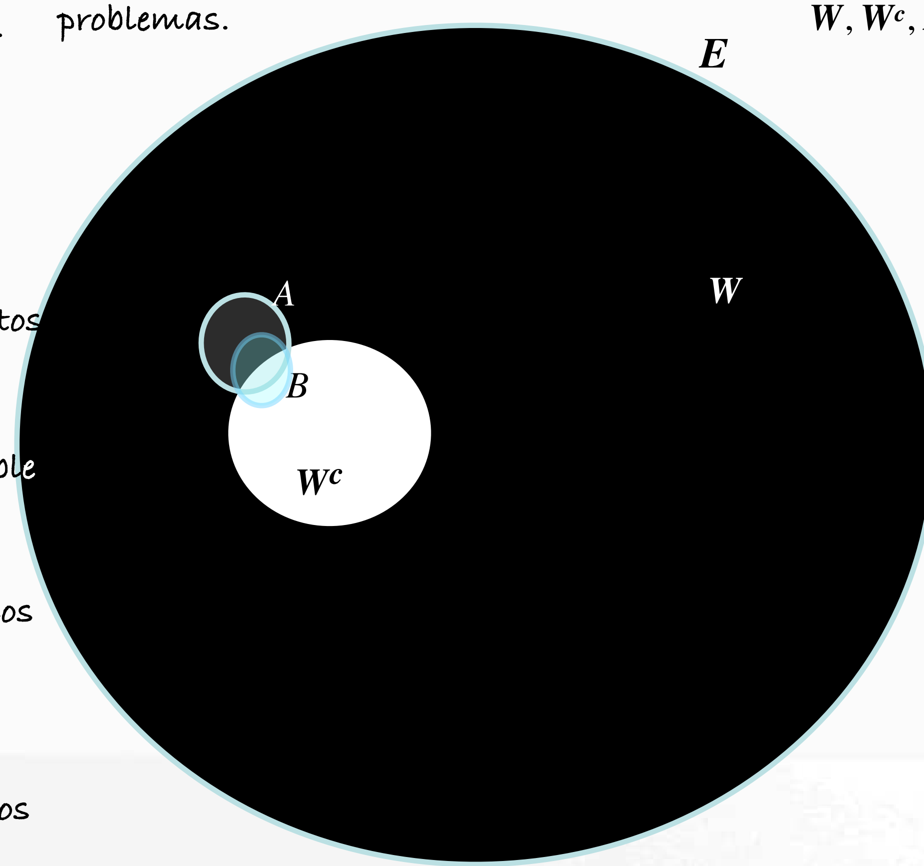
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Si A y B, (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

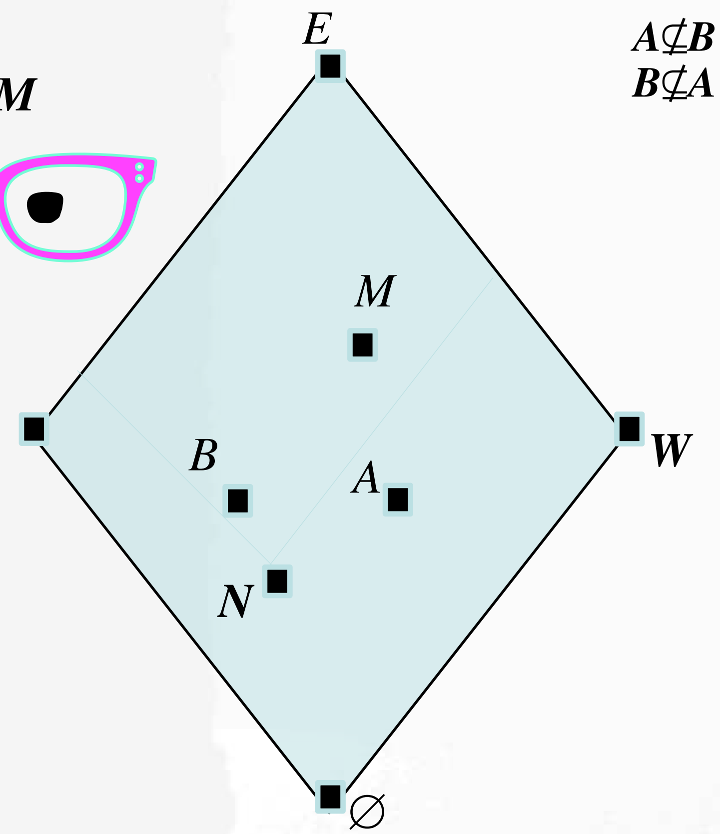
La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W " :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W)$ & $(A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$

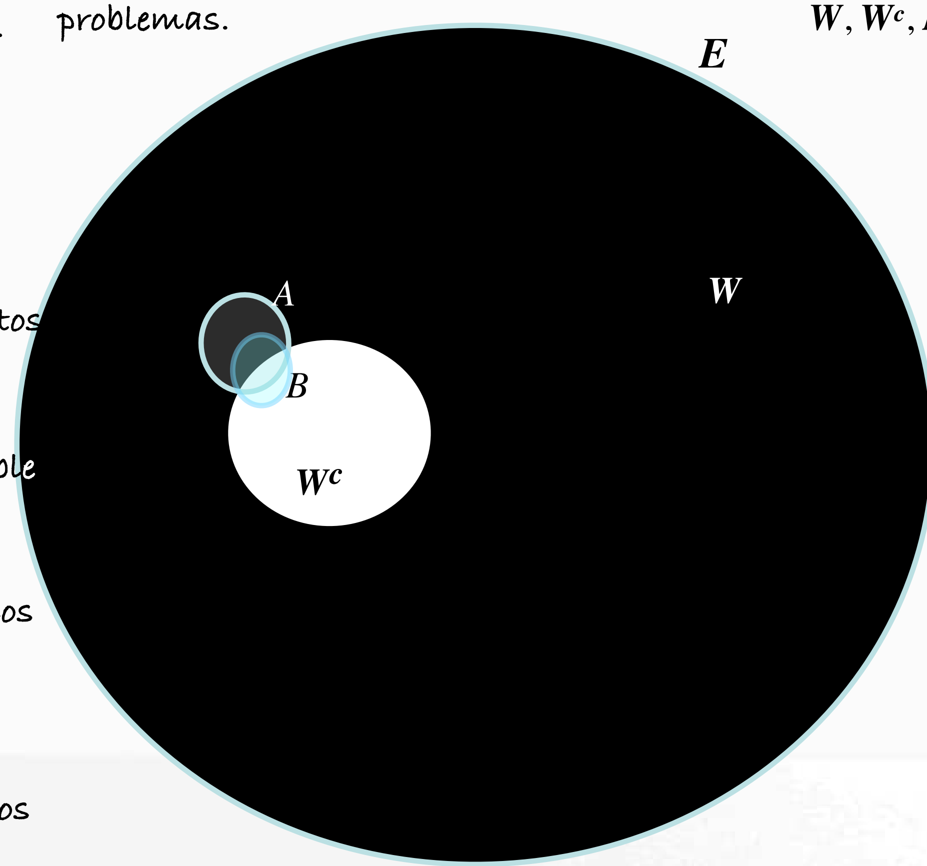


El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc…
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

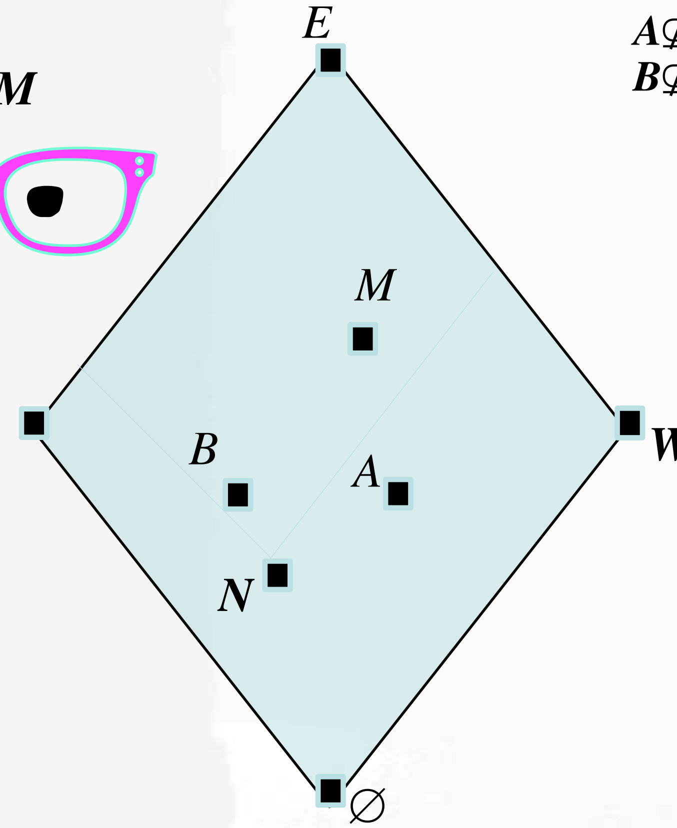
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$



$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$

Si A y B , (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W " :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

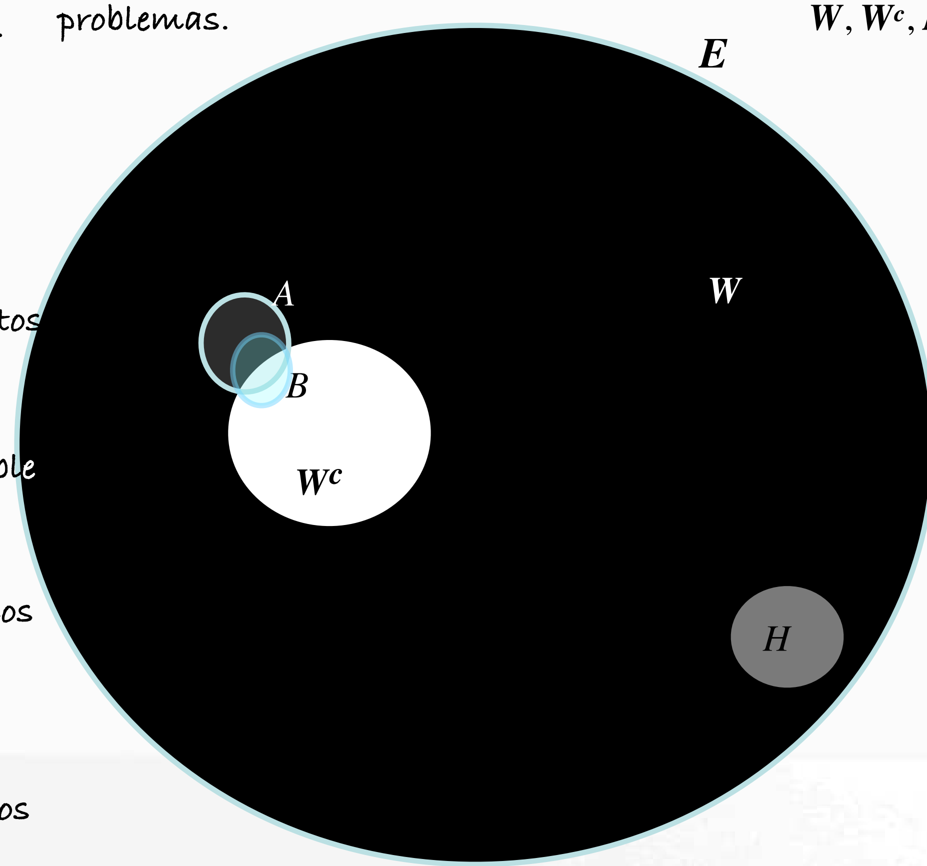
La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$:

$$A \sqsubseteq^W B \ \Leftrightarrow\ (A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \ \Leftrightarrow\ (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \ \Leftrightarrow\ A \in [(B \cap W)\, , (B \cup W)]$$

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc…
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

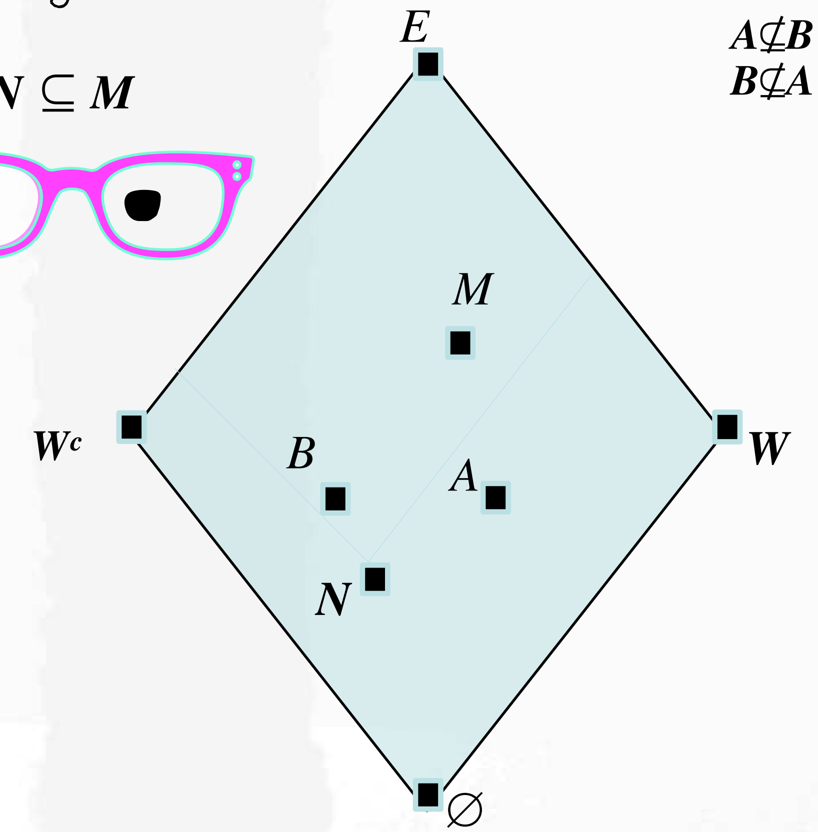
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), ^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$



$A \nsubseteq B$
$B \nsubseteq A$

Si A y B, (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W)$ & $(A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), ^c)$:

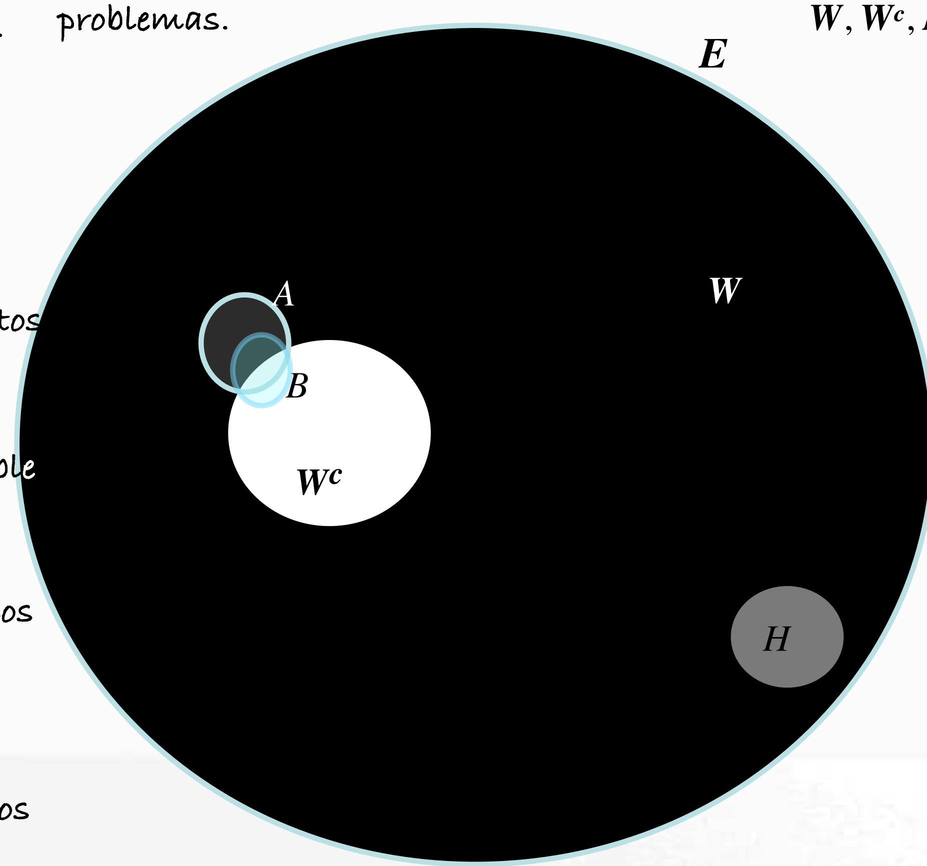
$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (A \cap W \supseteq B \cap W) \;\&\; (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \;\Leftrightarrow\; A \in [(B \cap W)\,,(B \cup W)]$$

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc… Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.

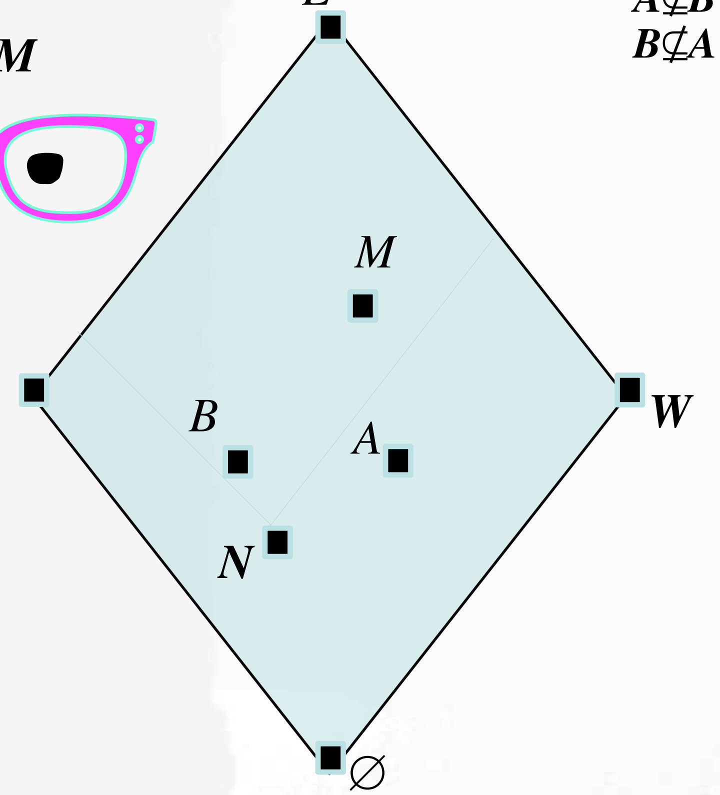
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema: utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).



$N \subseteq M$

$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$



Si A y B , (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡*Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos*!

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W\,)\ \&\ (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c\,)$

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$:

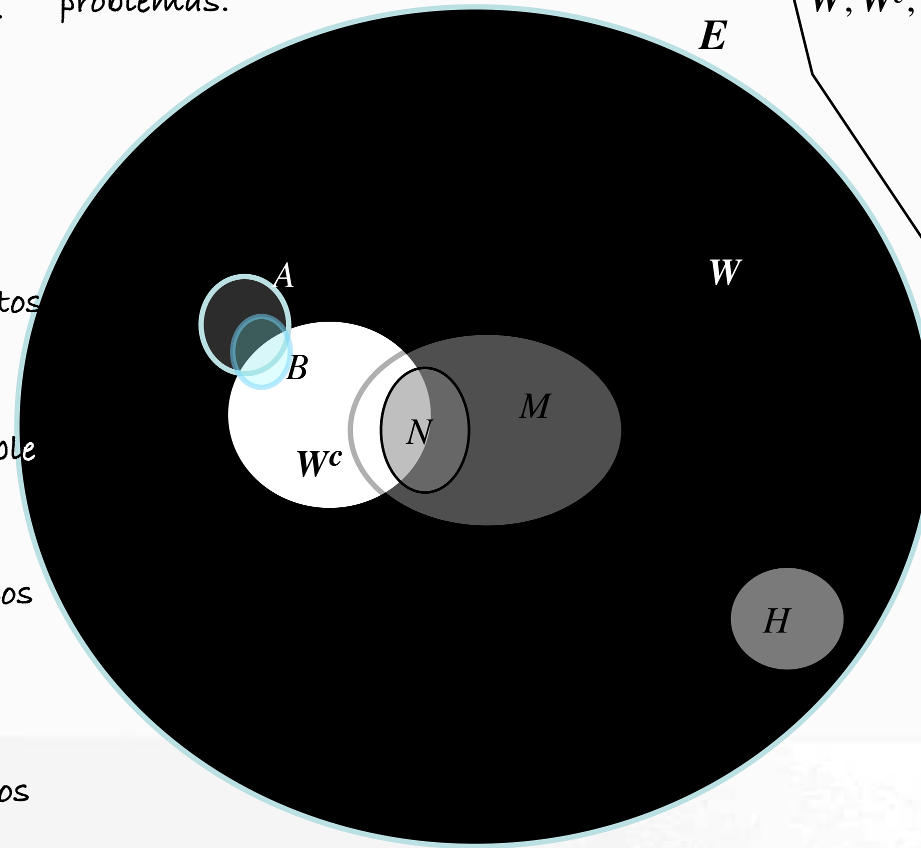
$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$

$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \;\Leftrightarrow\; A \in [(B \cap W)\,, (B \cup W)]$$

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc... Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

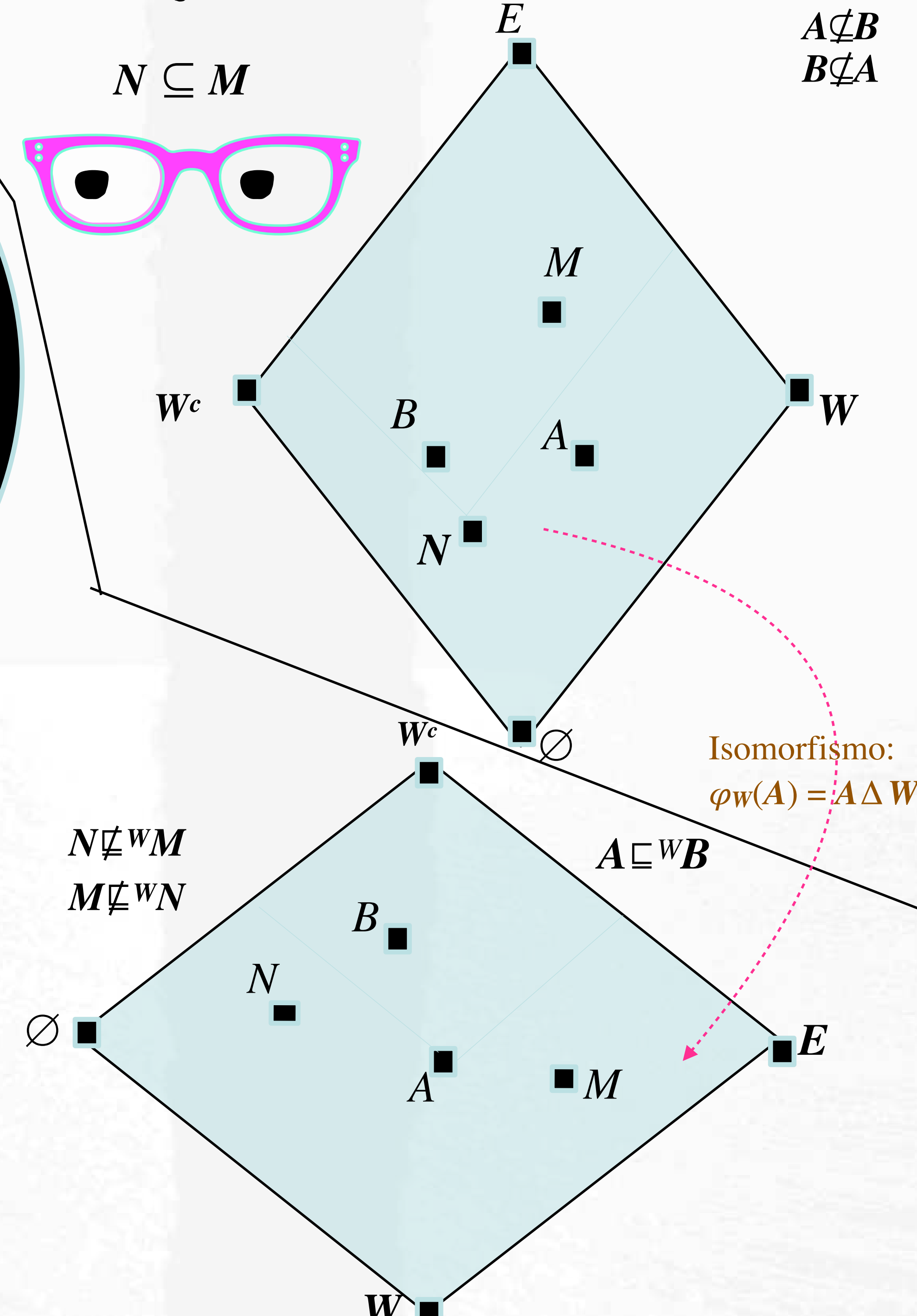
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$



Si A y B, (no relacionados por la inclusión $\subseteq$), representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

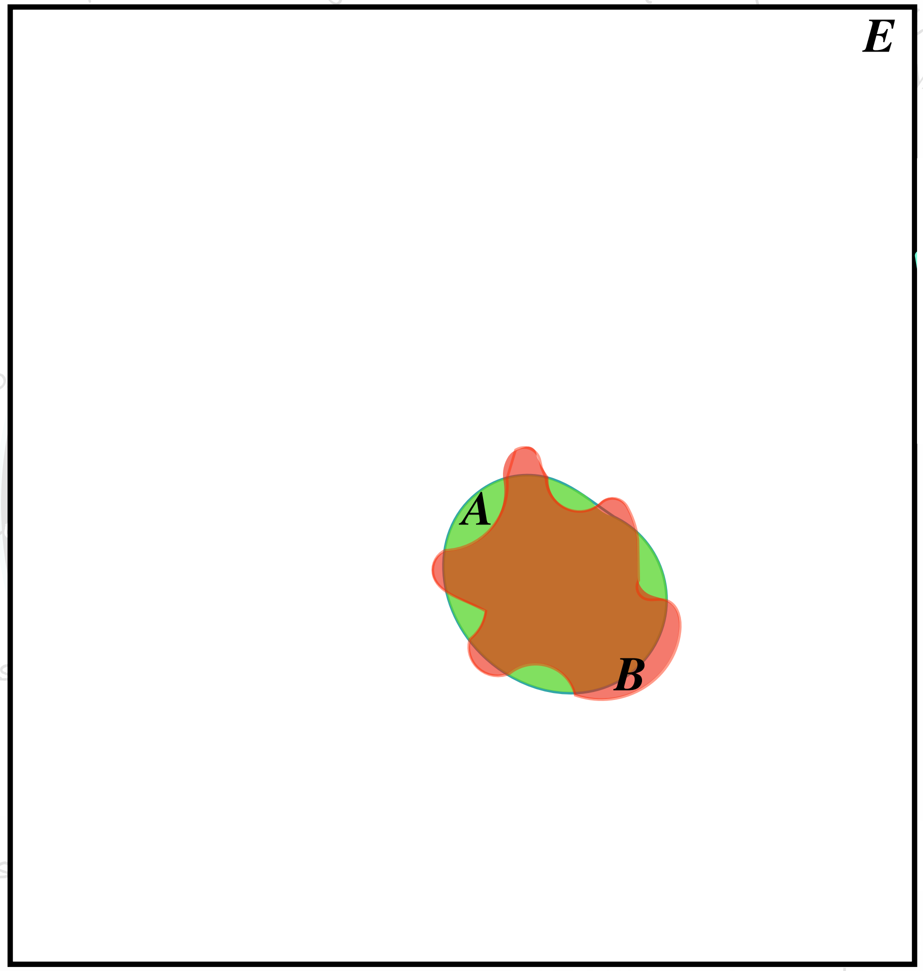
La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W\,)\ \&\ (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c\,)$

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$, resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$.

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$:

$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \;\Leftrightarrow\; A \in [(B \cap W)\,, (B \cup W)]$$

A y B, subconjuntos de E. ($A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq A$)



El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc…
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

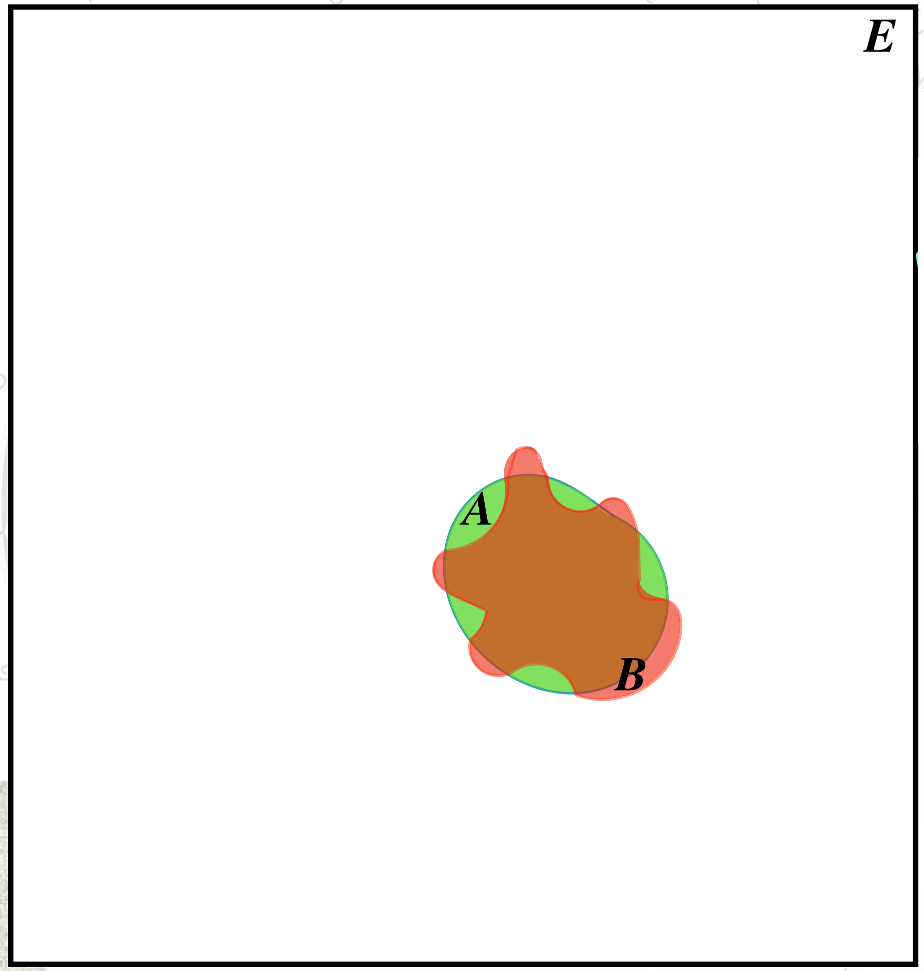
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

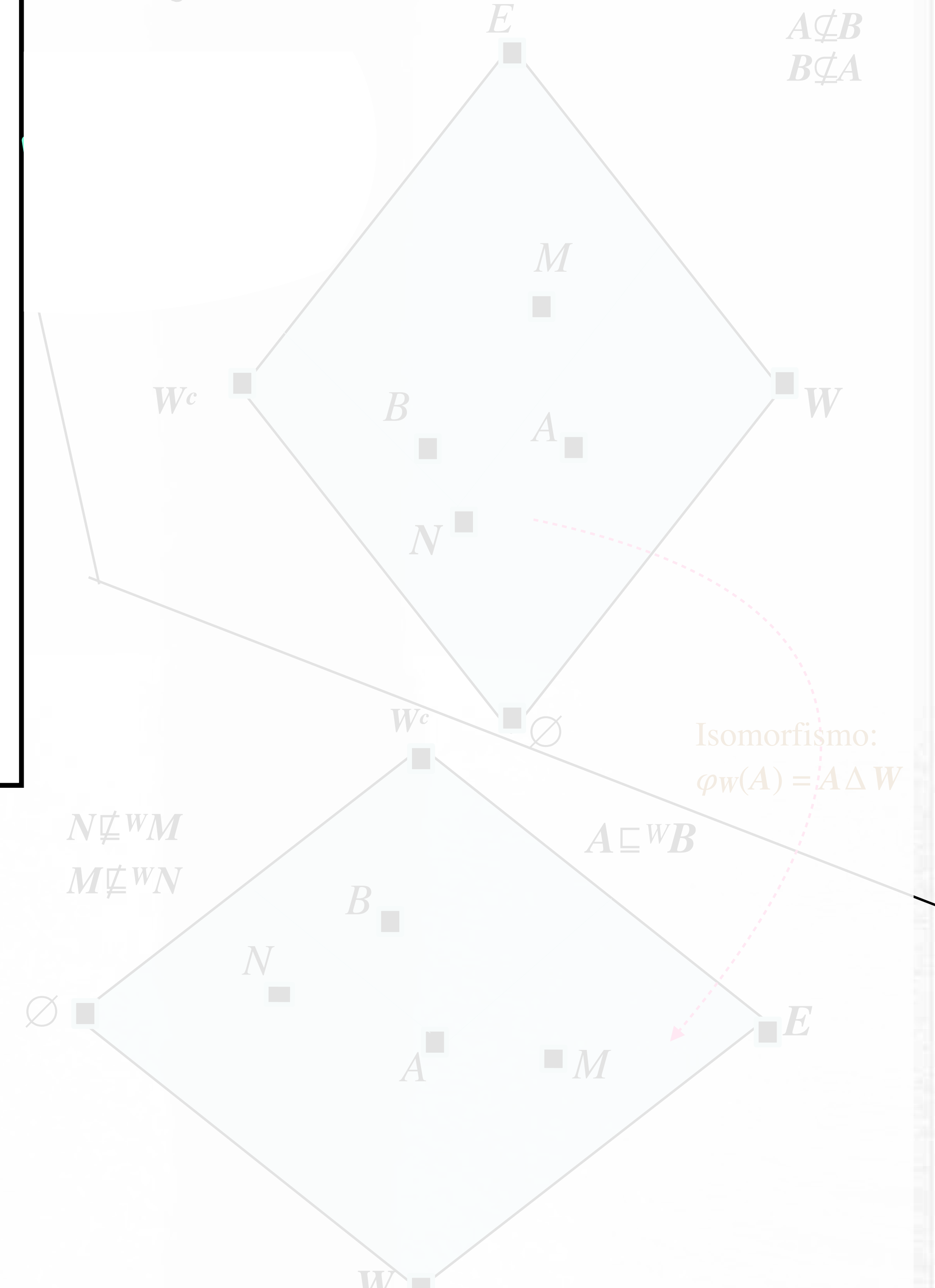
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjunto de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos. Además, es mejor utilizar el mayor número posibl de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste. También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:

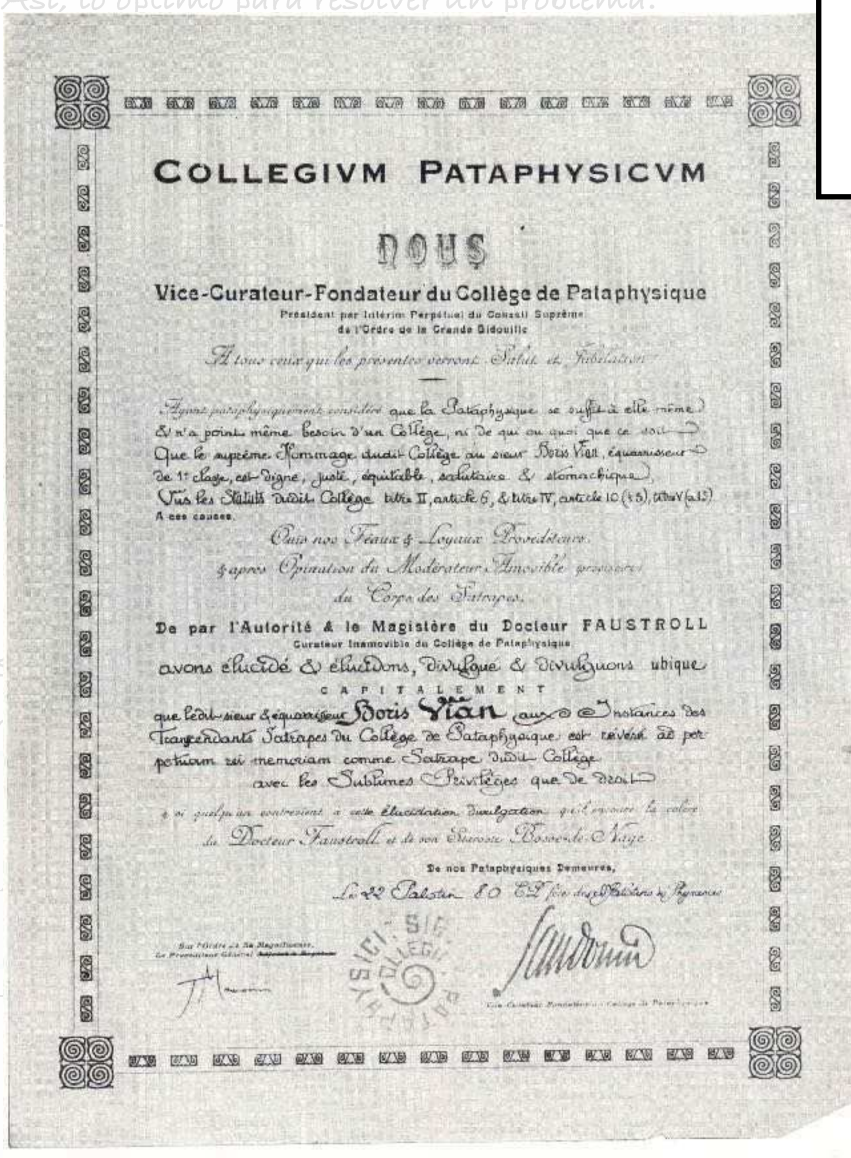
Referencial E: conjunto de recursos que se

$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup\, \emptyset, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la comple-ón. En la figura los puntos son subconjuntos $\emptyset, A, B,$ $M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

A y B, subconjuntos de E. $(A \not\subseteq B,\ B \not\subseteq A)$






COLLEGIVM PATAPHYSICVM

NOUS

Vice-Curateur-Fondateur du Collège de Pataphysique

Président par Intérim Perpétuel du Conseil Suprême de l'Ordre de la Grande Gidouille

A tous ceux qui les présentes verront Salut et Jubilation

A ces causes,

De par l'Autorité & le Magistère du Docteur FAUSTROLL

Curateur Inamovible du Collège de Pataphysique

avons élucidé & élucidons, divulgué & divulguons ubique

CAPITALEMENT

Boris Vian

De nos Pataphysiques Demeures,

Diplôme de Satrape du Collège de 'Pataphysique, délivré à Boris Vian, le 22 Palotin 80 (11 mai 1953).

de dos
ue B
ás
n, no
tre subconjuntos de
se la siguiente:

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \emptyset$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

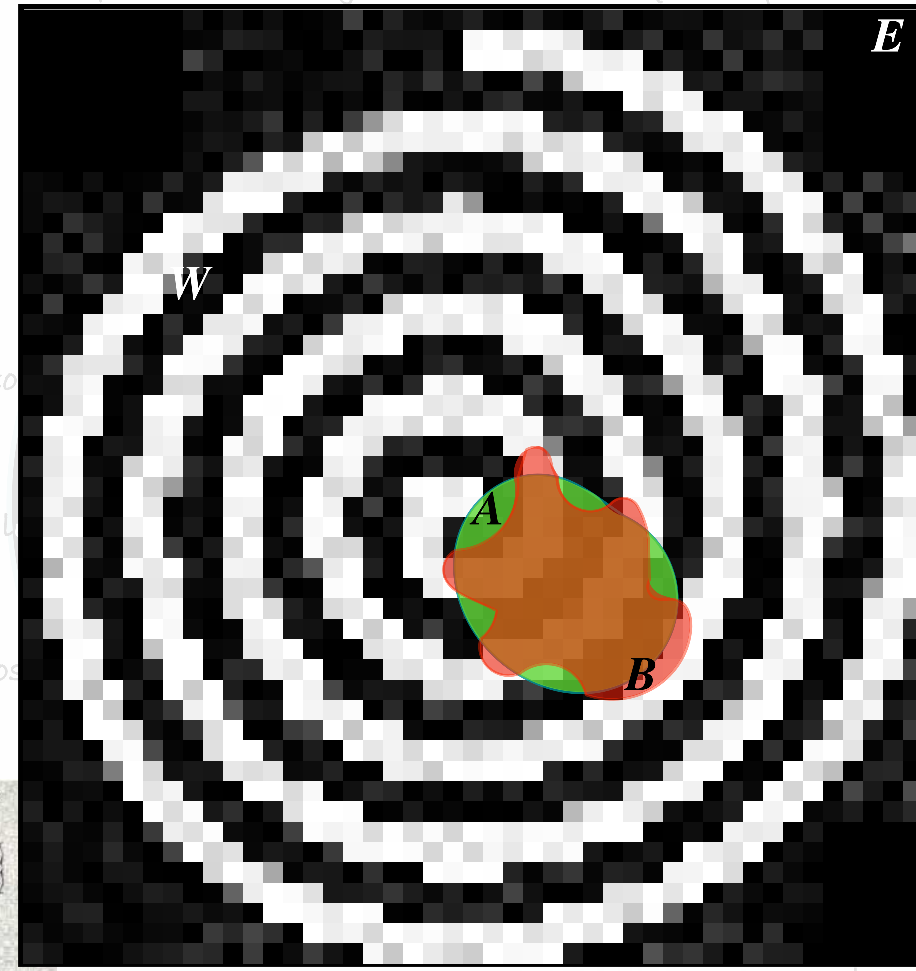
La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

$((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$, resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$.

$\subseteq, \cap, \cup\, \emptyset, E), {}^c)$:
$\cup\, W)$
$), (B \cup W)]$

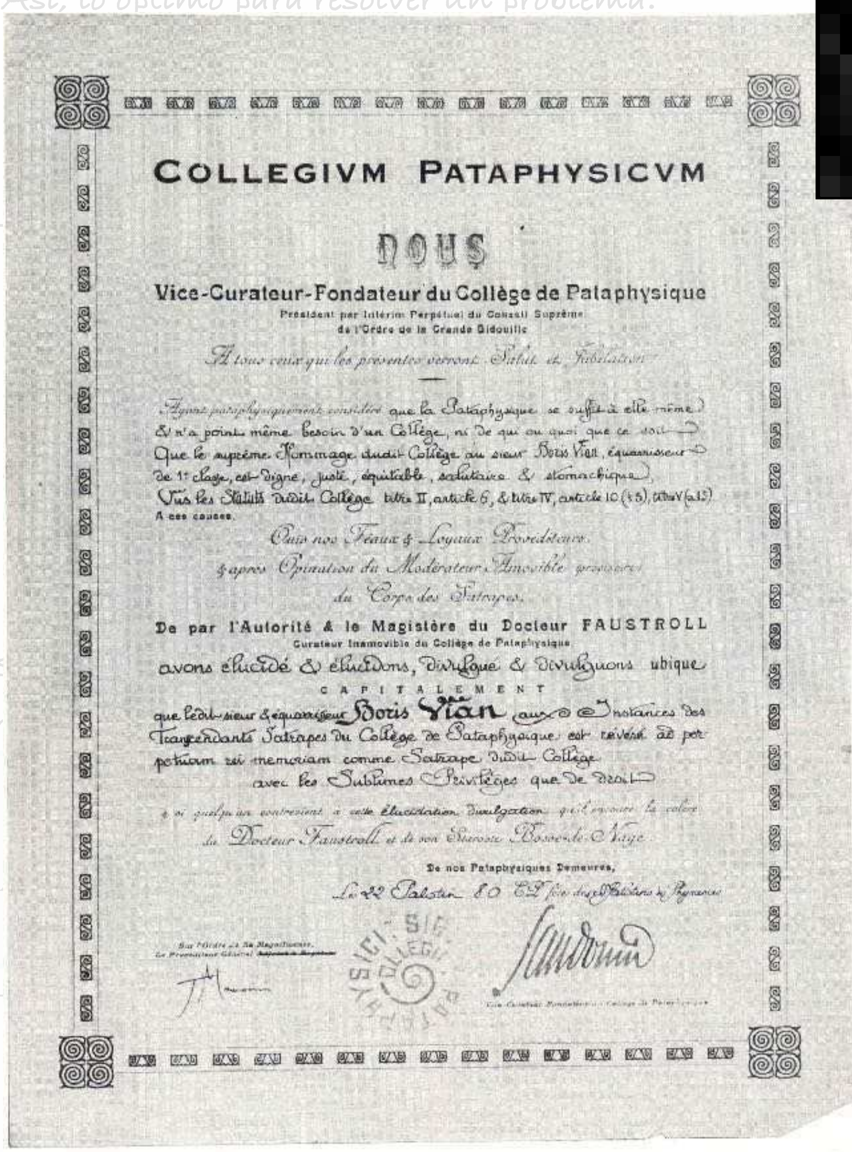
¡Una perspectiva patafísica! 😊

$$A \sqsubseteq^W B$$



A y B, subconjuntos de E. $(A \not\subseteq B, B \not\subseteq A)$

Perspectiva W



COLLEGIVM PATAPHYSICVM

NOUS

Vice-Curateur-Fondateur du Collège de Pataphysique

Président par Intérim Perpétuel du Conseil Suprême de l'Ordre de la Grande Gidouille

A tous ceux qui les présentes verront Salut et Jubilation

De par l'Autorité & le Magistère du Docteur FAUSTROLL

avons élucidé & élucidons, divulgué & divulguons ubique

CAPITALEMENT

que ... Boris Vian ...

Diplôme de Satrape du Collège de 'Pataphysique, délivré à Boris Vian, le 22 Palotin 80 (11 mai 1953).

Ejemplo: Marginando los números irracionales...

Ejemplo: Marginando los números irracionales...

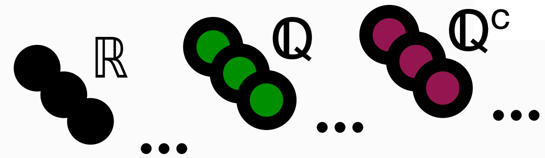
En la práctica sólo utilizamos números racionales,
(en realidad algún subconjunto finito de ellos...)

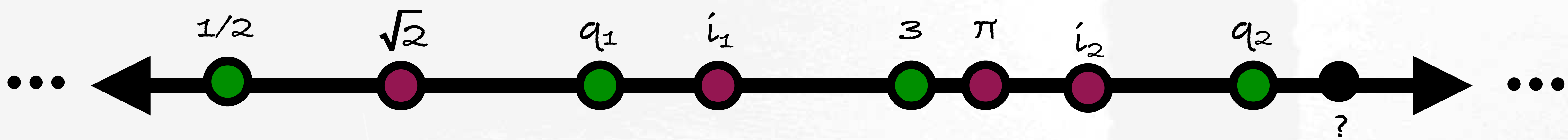
Y aproximamos los irracionales mediante los anteriores.

$\mathbb{R}$, Números reales

$\mathbb{Q}$, Números racionales

$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.



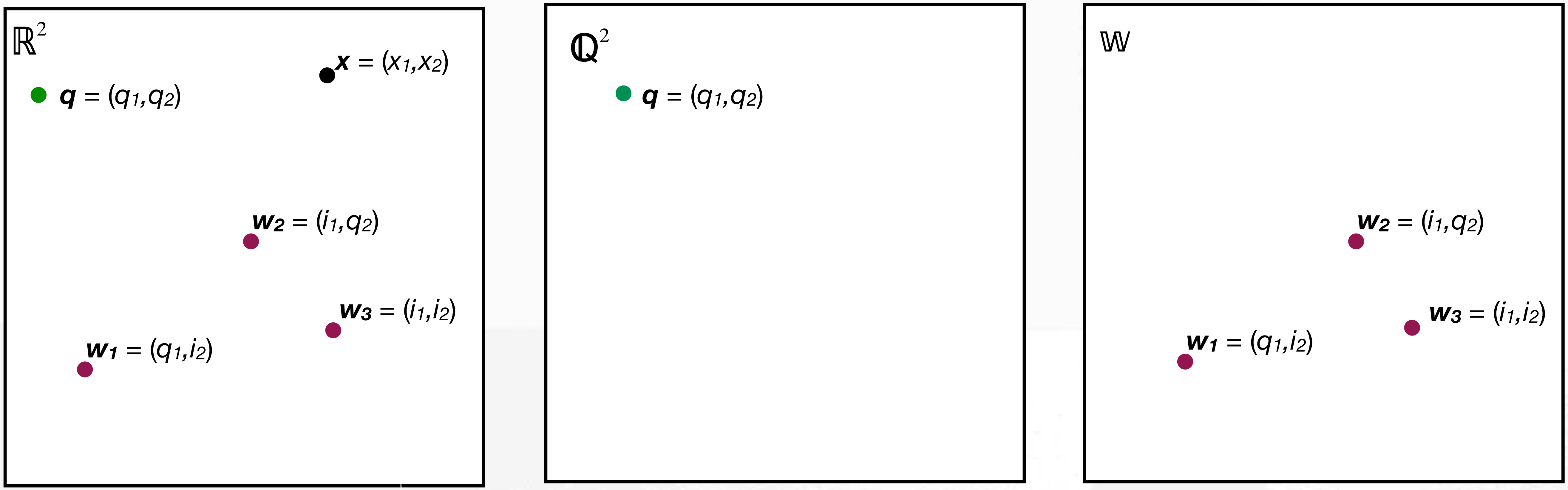


Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1,x_2) con <u>al menos</u> una coordenada x_i irracional).

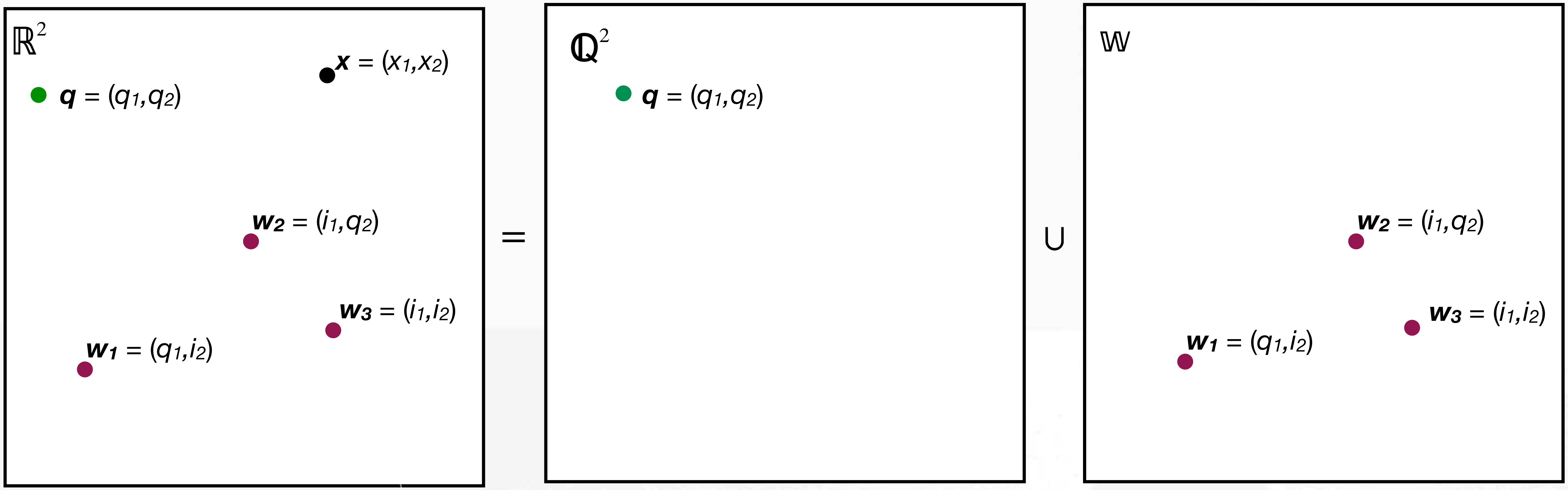


Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1, x_2) con <u>al menos</u> una coordenada x_i irracional).



102

Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$ $\quad \mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1,x_2) con al menos una coordenada x_i irracional).

Si intentamos representar muchos pares (x_1,x_2) ...

$=$

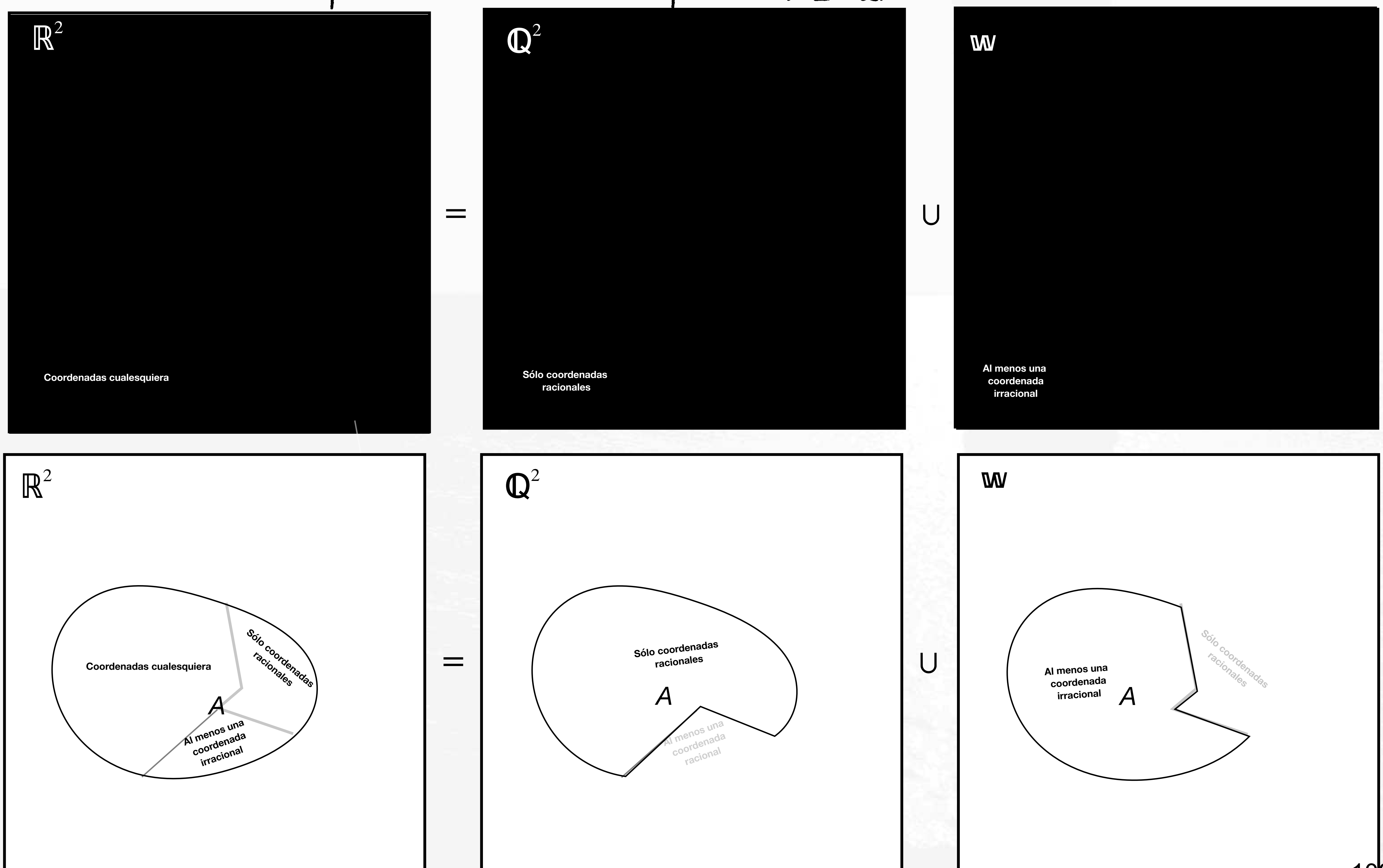
$\cup$

Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

$x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$ $\quad \mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1,x_2) con al menos una coordenada x_i irracional).

Si intentamos representar muchos pares (x_1,x_2) ...

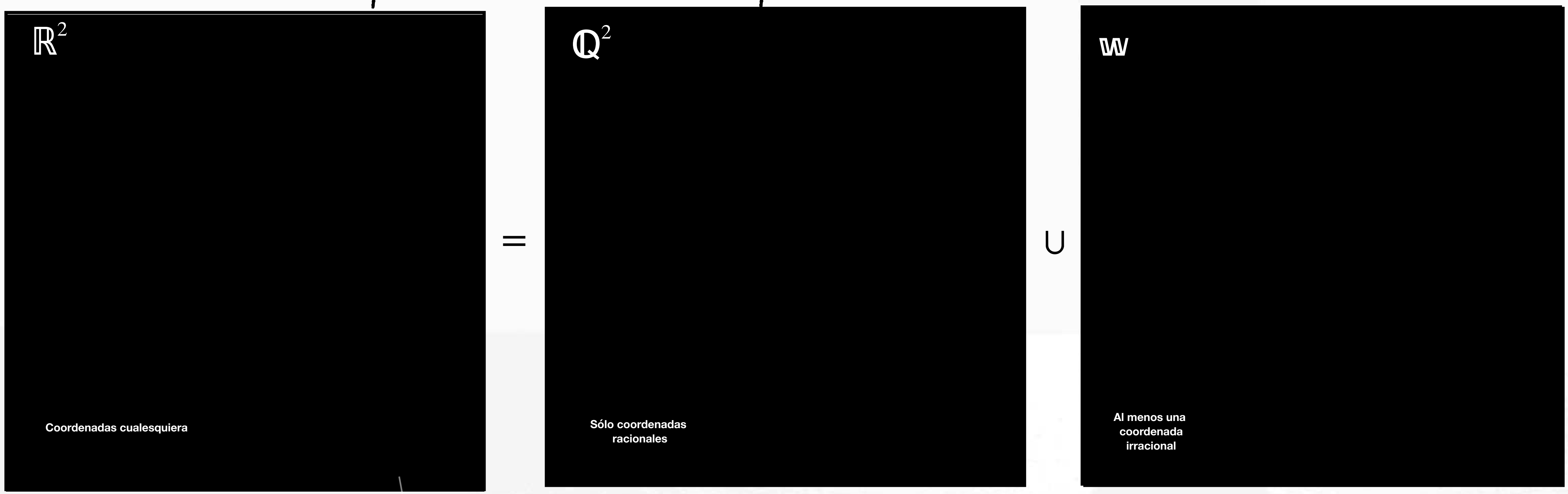


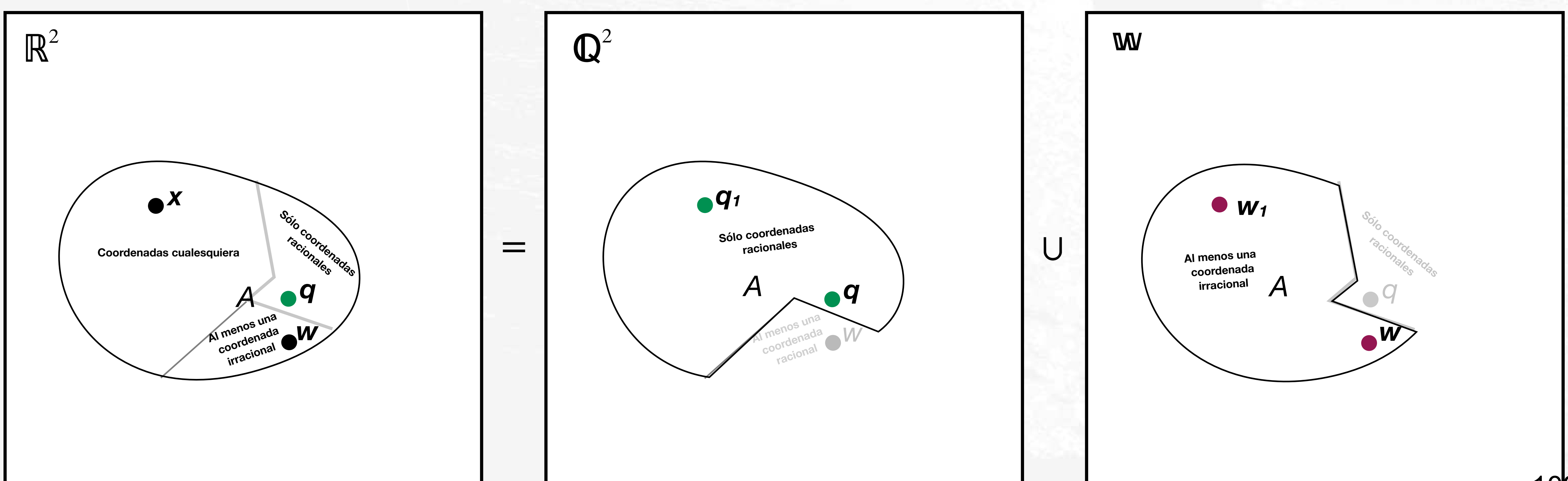
Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

$x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$ $\quad \mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1,x_2) con al menos una coordenada x_i irracional).

Si intentamos representar muchos pares (x_1,x_2) ...



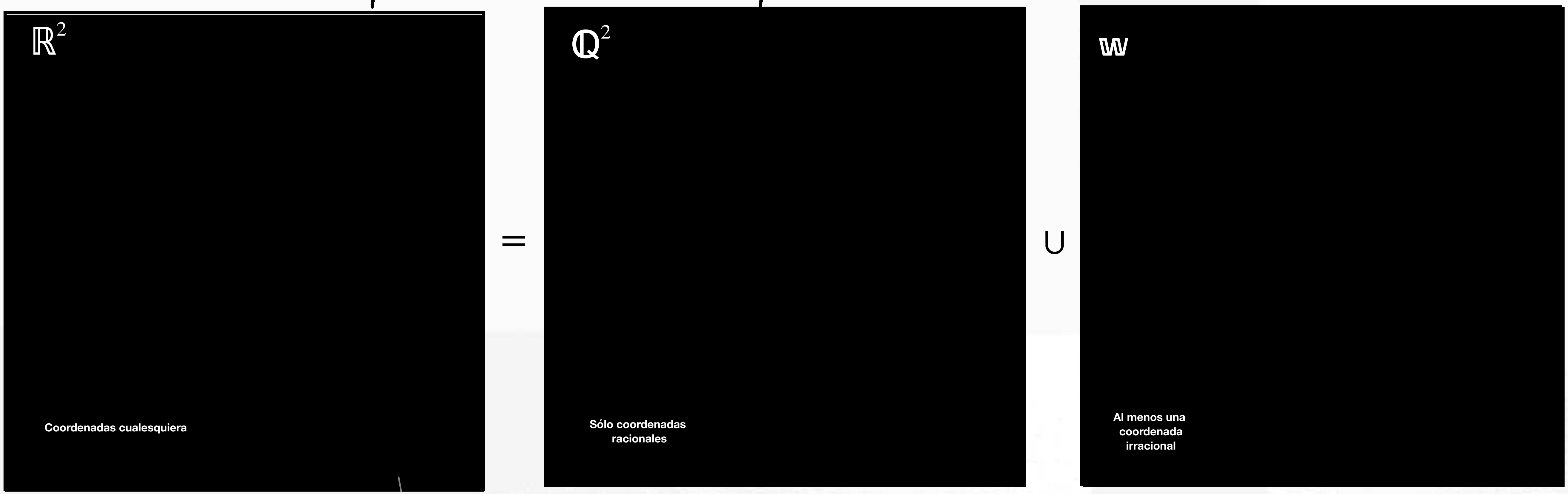


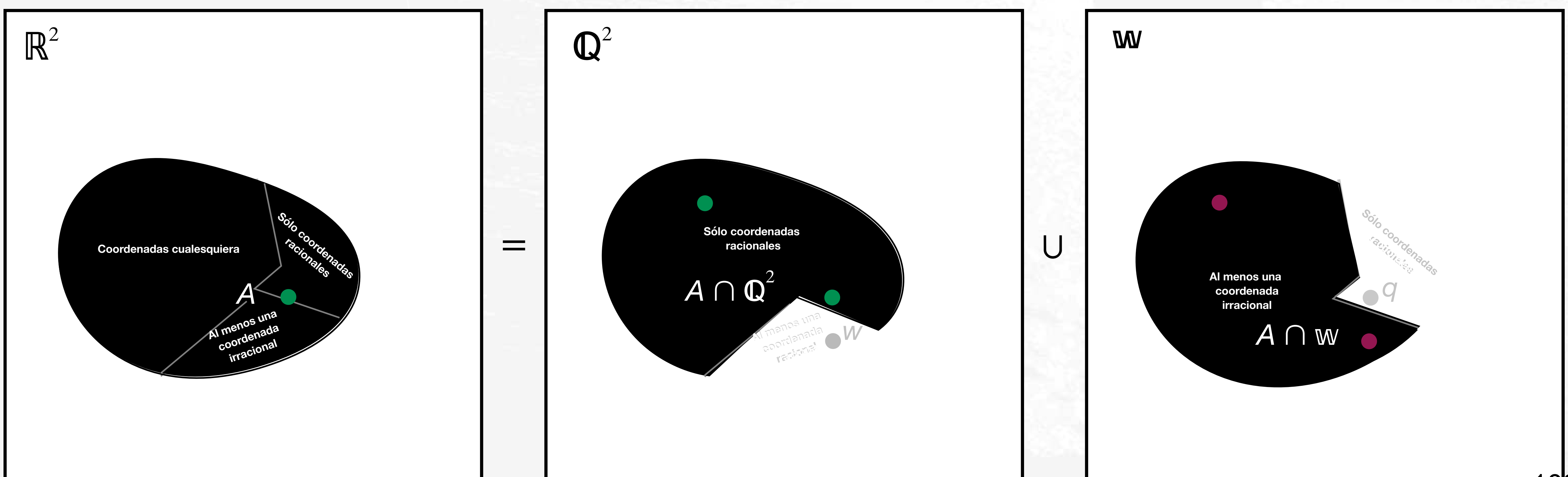
Aunque una versión en $\mathbb{R}^2$ parece más ilustrativa:

De nuevo,... $x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$ $\quad \mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1,x_2) con al menos una coordenada x_i irracional).

Si intentamos representar muchos pares (x_1,x_2) ...



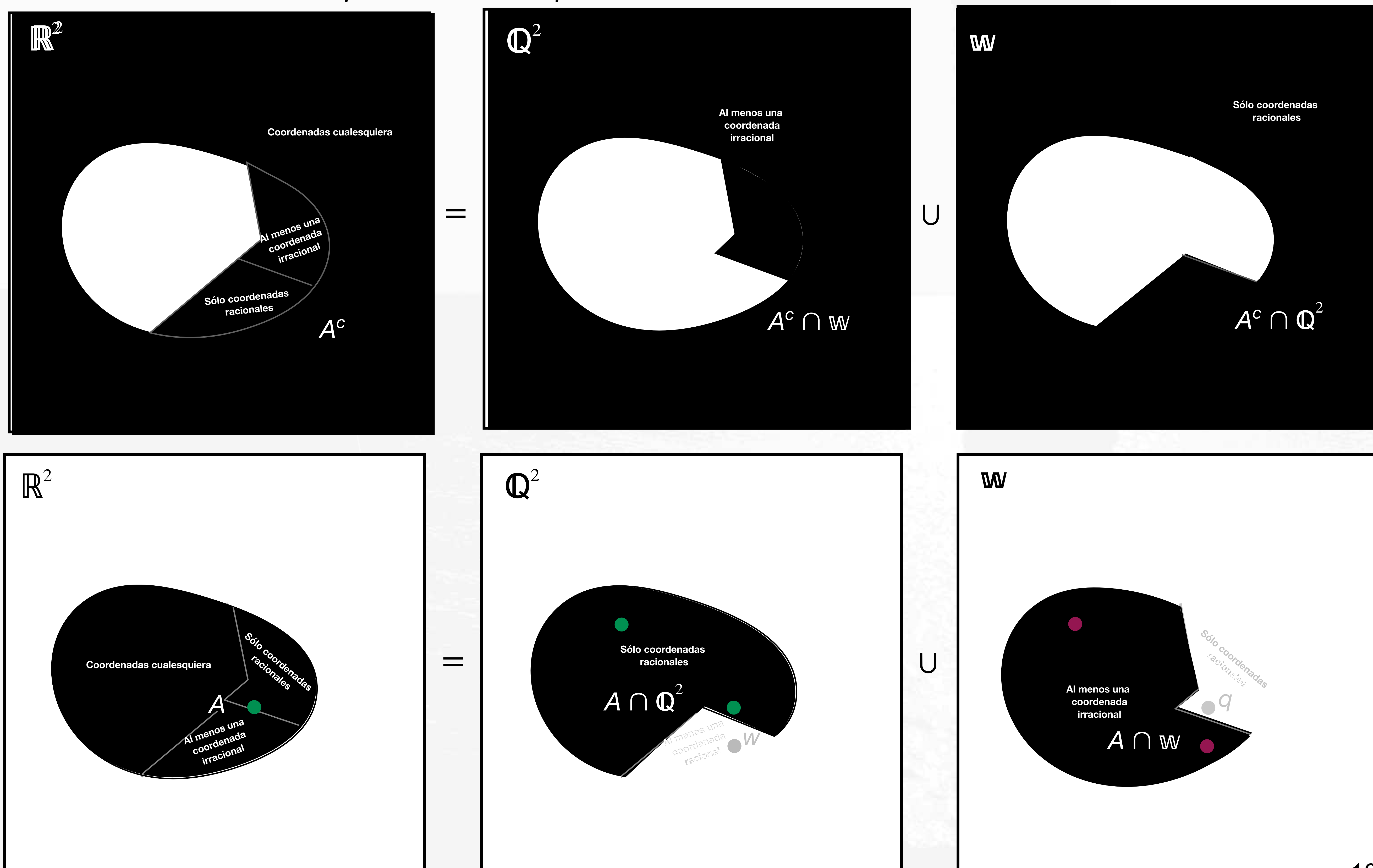


$x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

(Pares (x_1, x_2) con al menos una coordenada x_i irracional).

También para el complementario...



Un convenio de representación para distinguir en $\mathbb{R}^2$ elementos que pertenecen a $\mathbb{Q}^2$ de otros que están en su complementario $\mathbb{W}$......

$\mathbb{R}$, Números reales

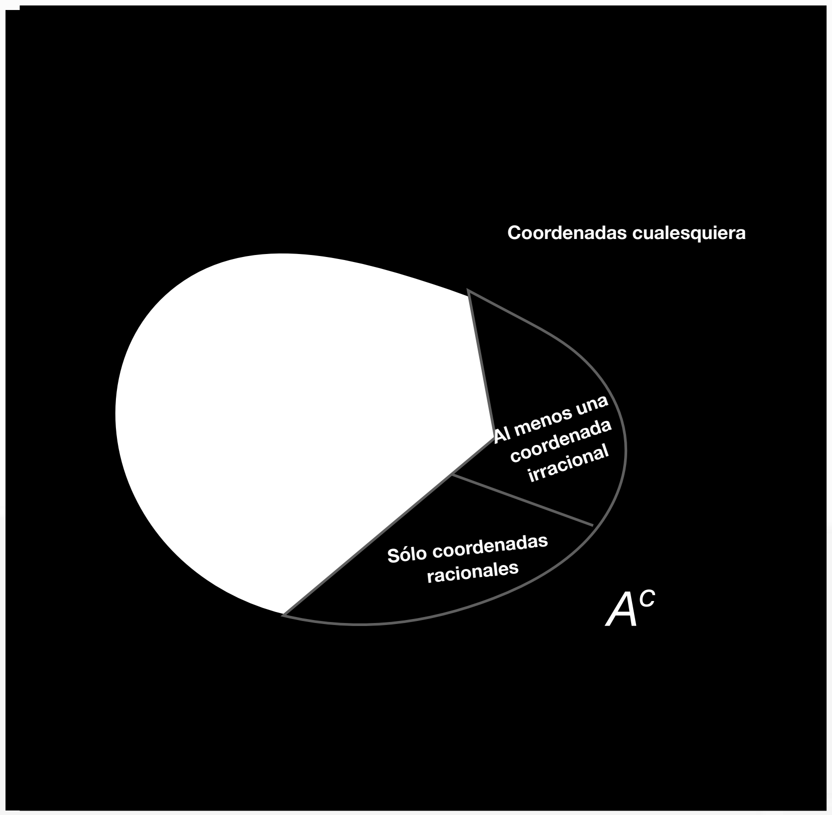
$\mathbb{Q}$, Números racionales

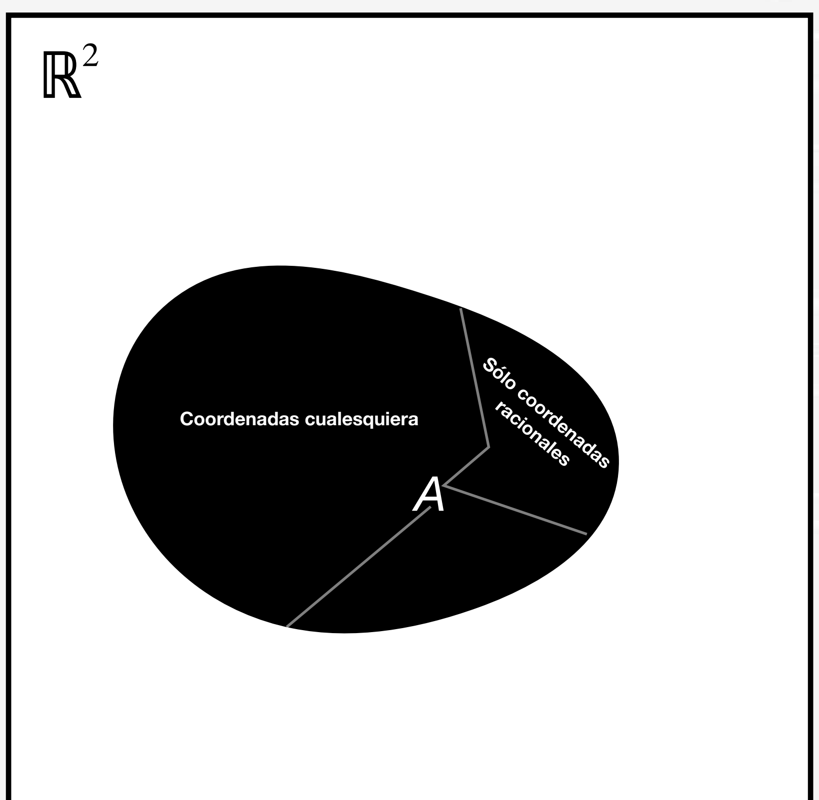
$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

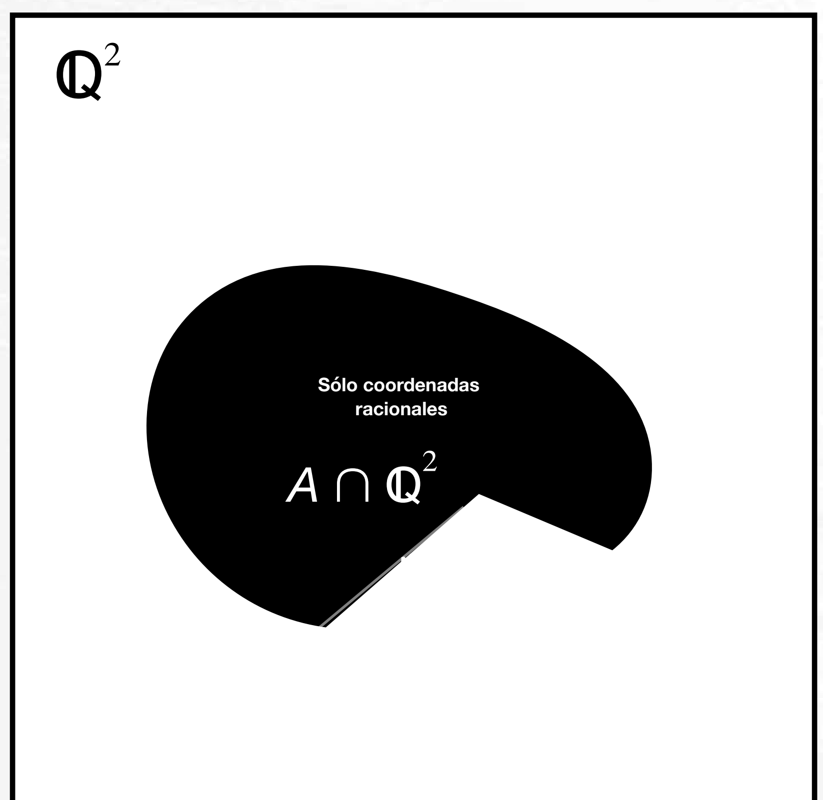
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$

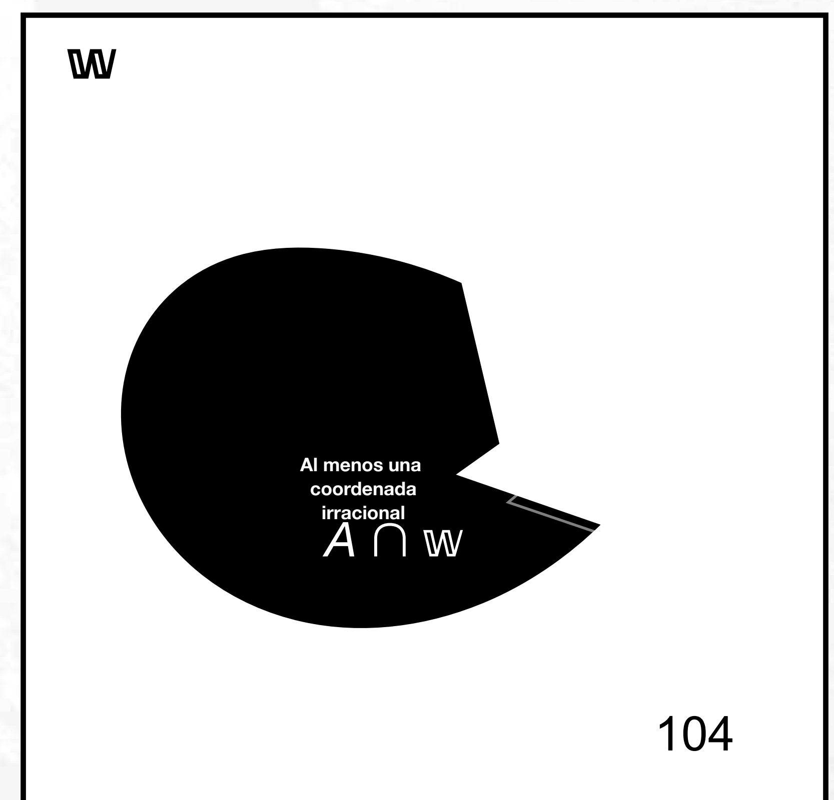
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$$









$\mathbb{R}$, Números reales

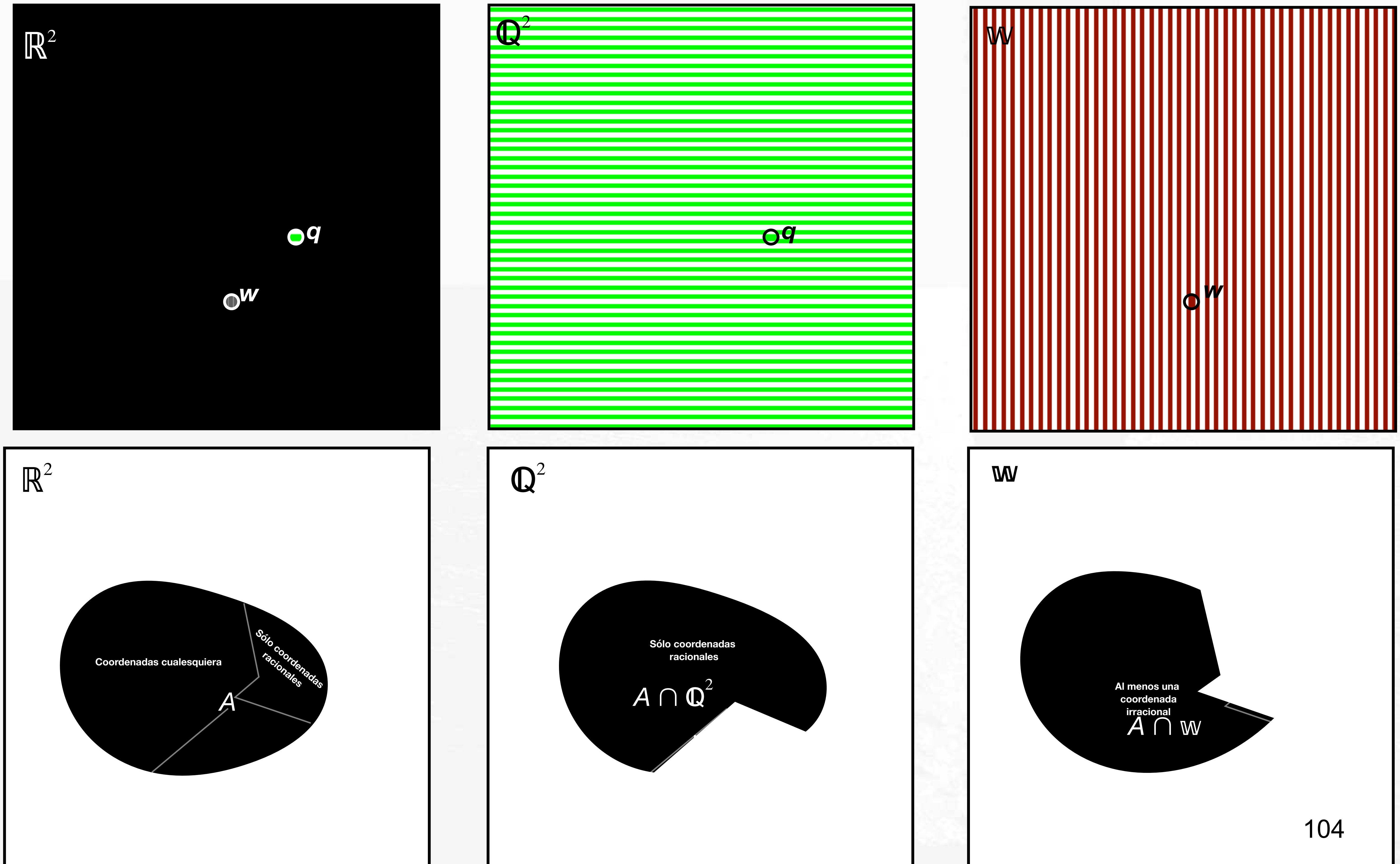
$\mathbb{Q}$, Números racionales

$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

$x \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$$



$\mathbb{R}$, Números reales

$\mathbb{Q}$, Números racionales

$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

$x \in \mathbb{R}^2$

Mena? Ganga?

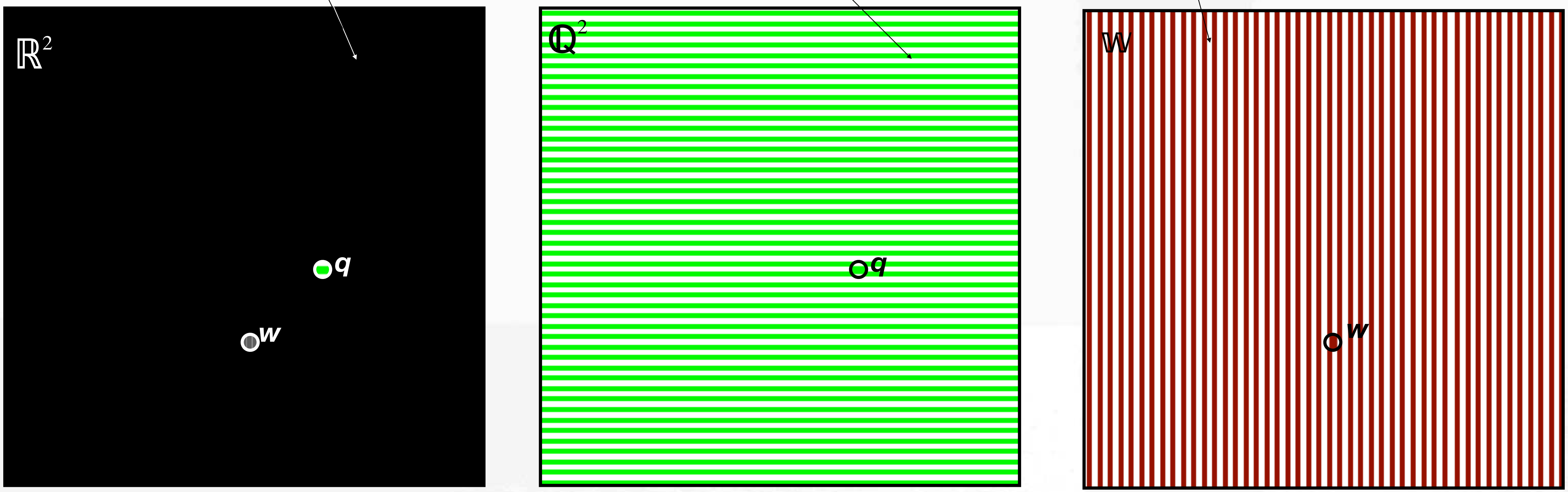
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\quad \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

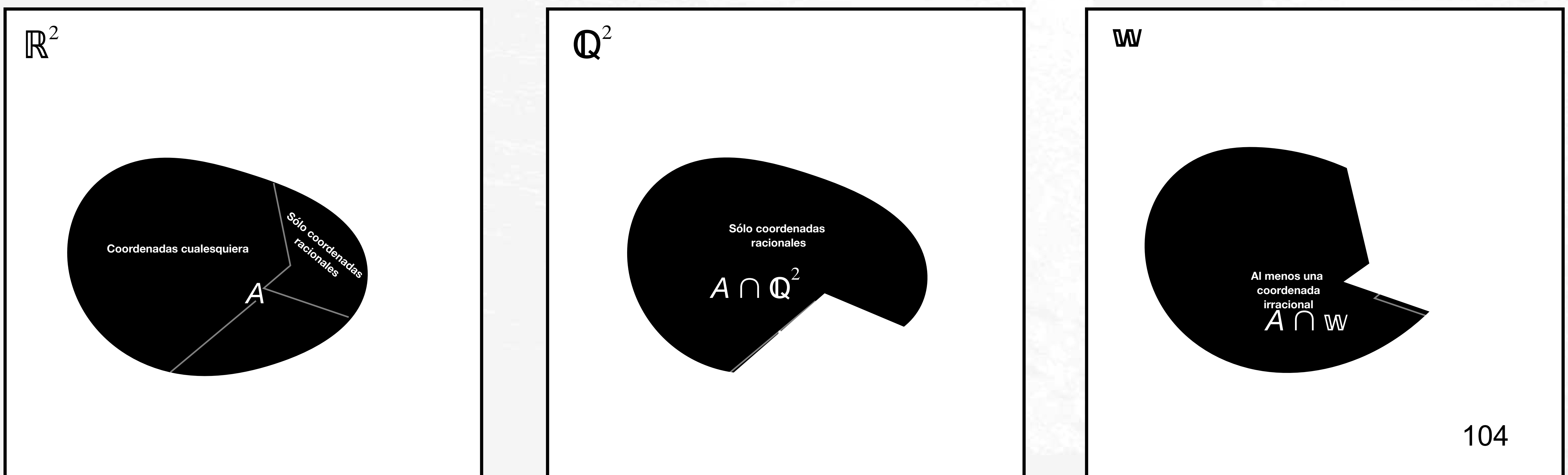
$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q}\mathrm{X}\mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c\mathrm{X}\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c\mathrm{X}\mathbb{Q}^c)$$

Textura "par de reales" $x=(x_1,x_2)$

Textura "par de componentes racionales" $q=(q_1,q_2)$

Textura "al menos una componente irracional" $w=(i_1,q_2)$ o $w=(q_1,i_2)$ o $w=(i_1,i_2)$





$\mathbb{R}$, Números reales

$\mathbb{Q}$, Números racionales

$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

$x \in \mathbb{R}^2$

Mena?

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},\ \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

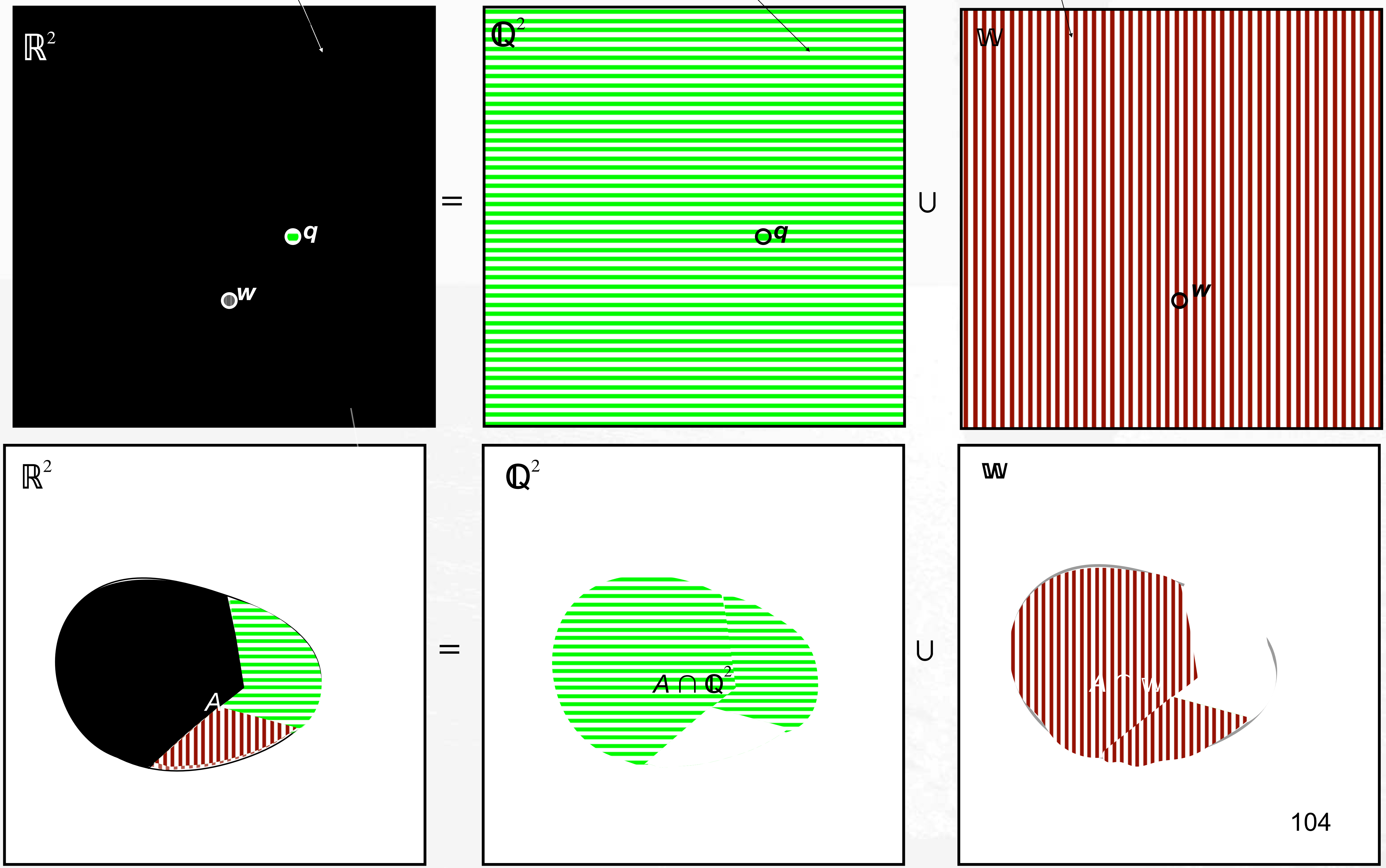
Ganga?

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

Textura "par de reales" $x=(x_1,x_2)$

Textura "par de componentes racionales" $q=(q_1,q_2)$

Textura "al menos una componente irracional" $w=(i_1,q_2)$ o $w=(q_1,i_2)$ o $w=(i_1,i_2)$



$\mathbb{R}$, Números reales

$\mathbb{Q}$, Números racionales

$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

$x \in \mathbb{R}^2$

Mena?

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup W, \ \mathbb{Q}^2 \cap W = \varnothing$

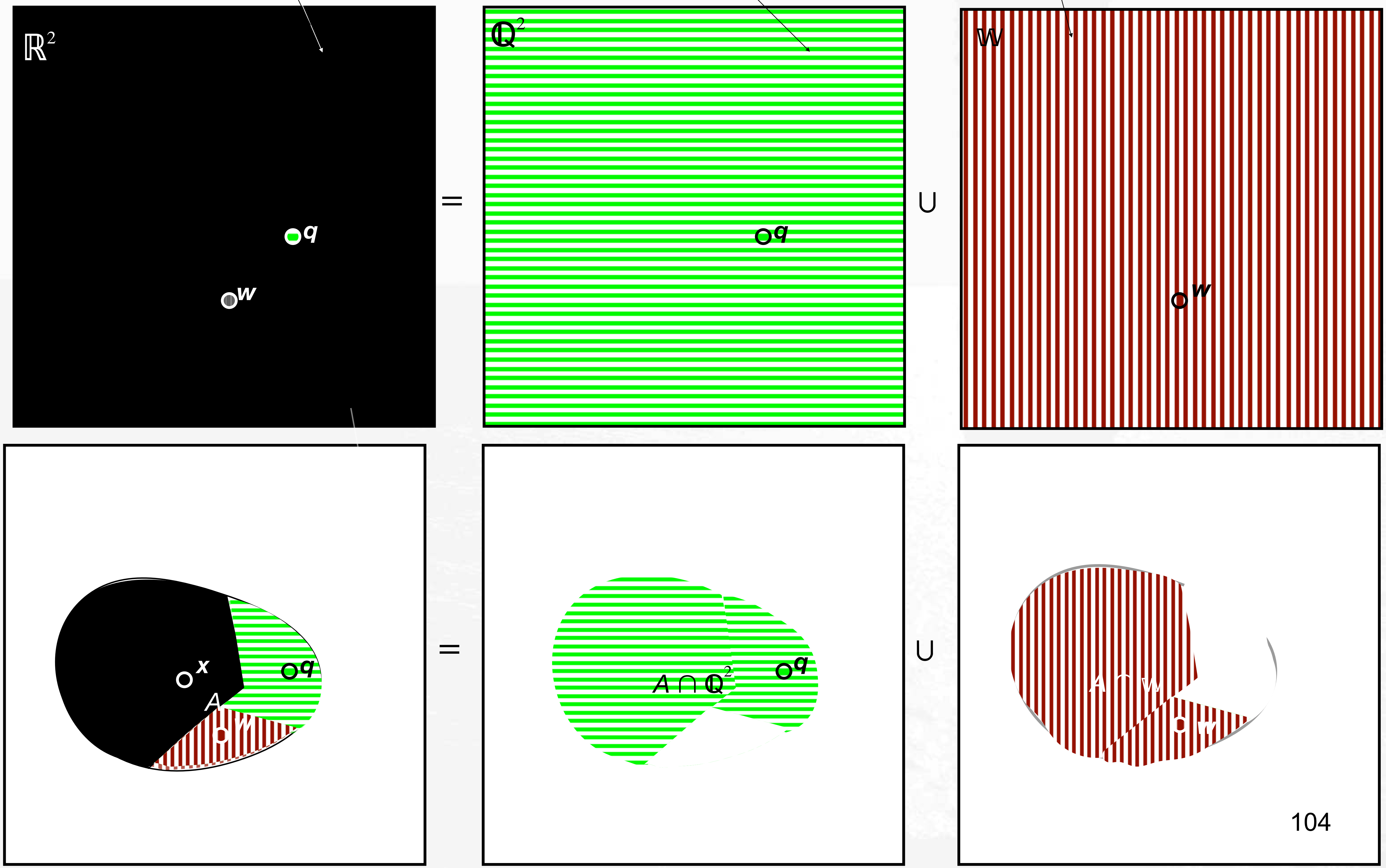
Ganga?

$W = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$

Textura "par de reales" $x=(x_1,x_2)$

Textura "par de componentes racionales" $q=(q_1,q_2)$

Textura "al menos una componente irracional" $w=(i_1,q_2)$ ó $w=(q_1,i_2)$ o $w=(i_1,i_2)$



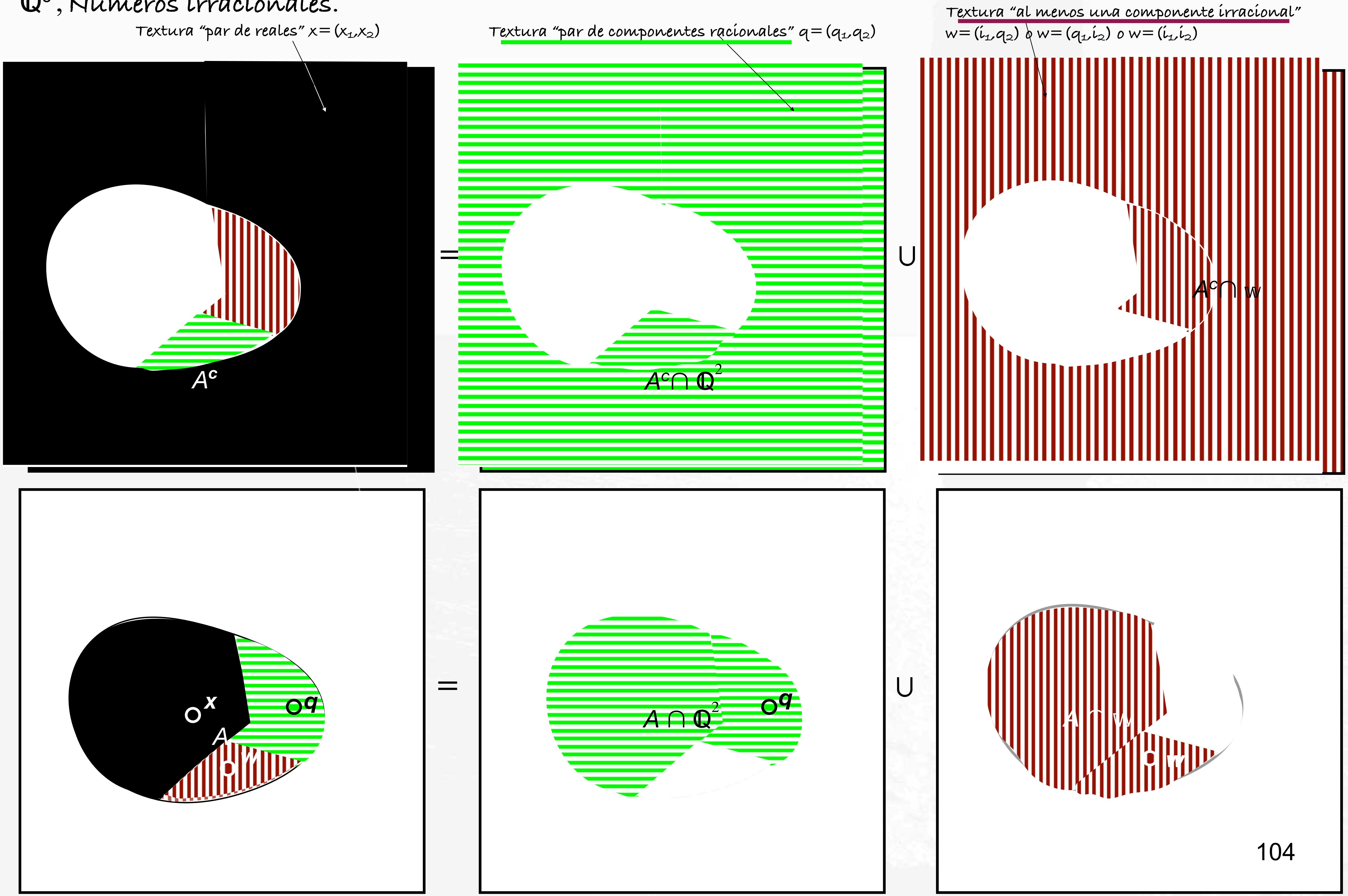
$\mathbb{R}$, Números reales $\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$

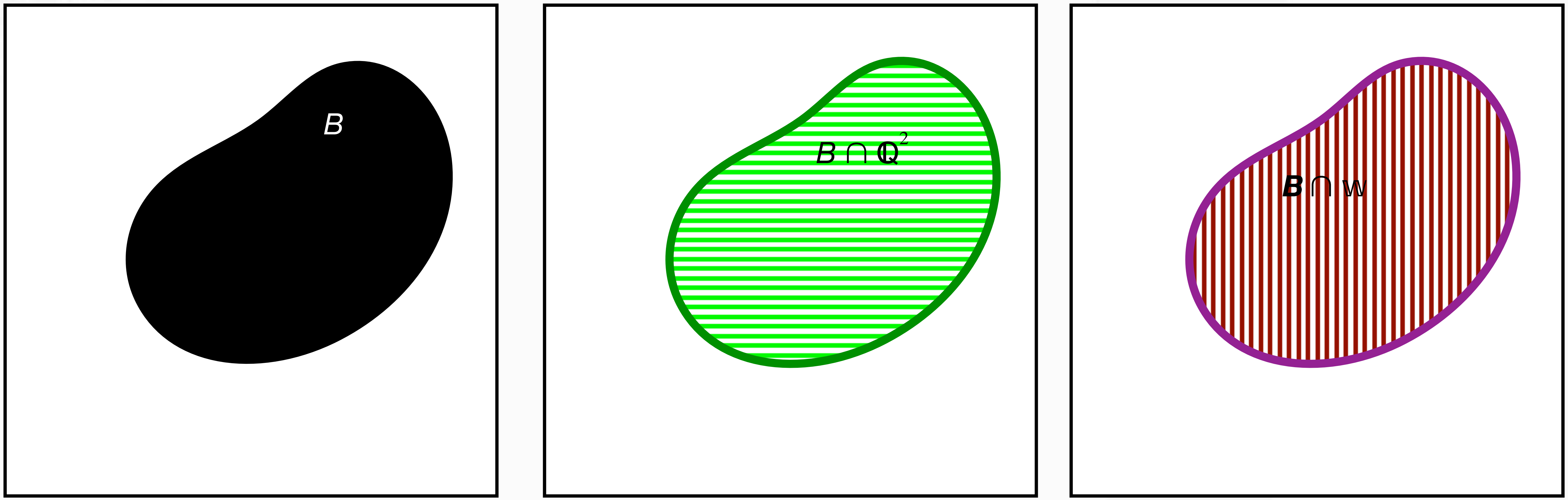
$\mathbb{Q}$, Números racionales

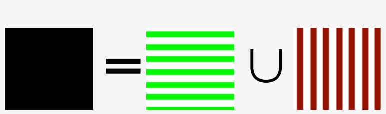
$\mathbb{Q}^c$, Números irracionales.

Mena? $\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup w,\ \mathbb{Q}^2 \cap w = \varnothing$

Ganga? $w = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c)$



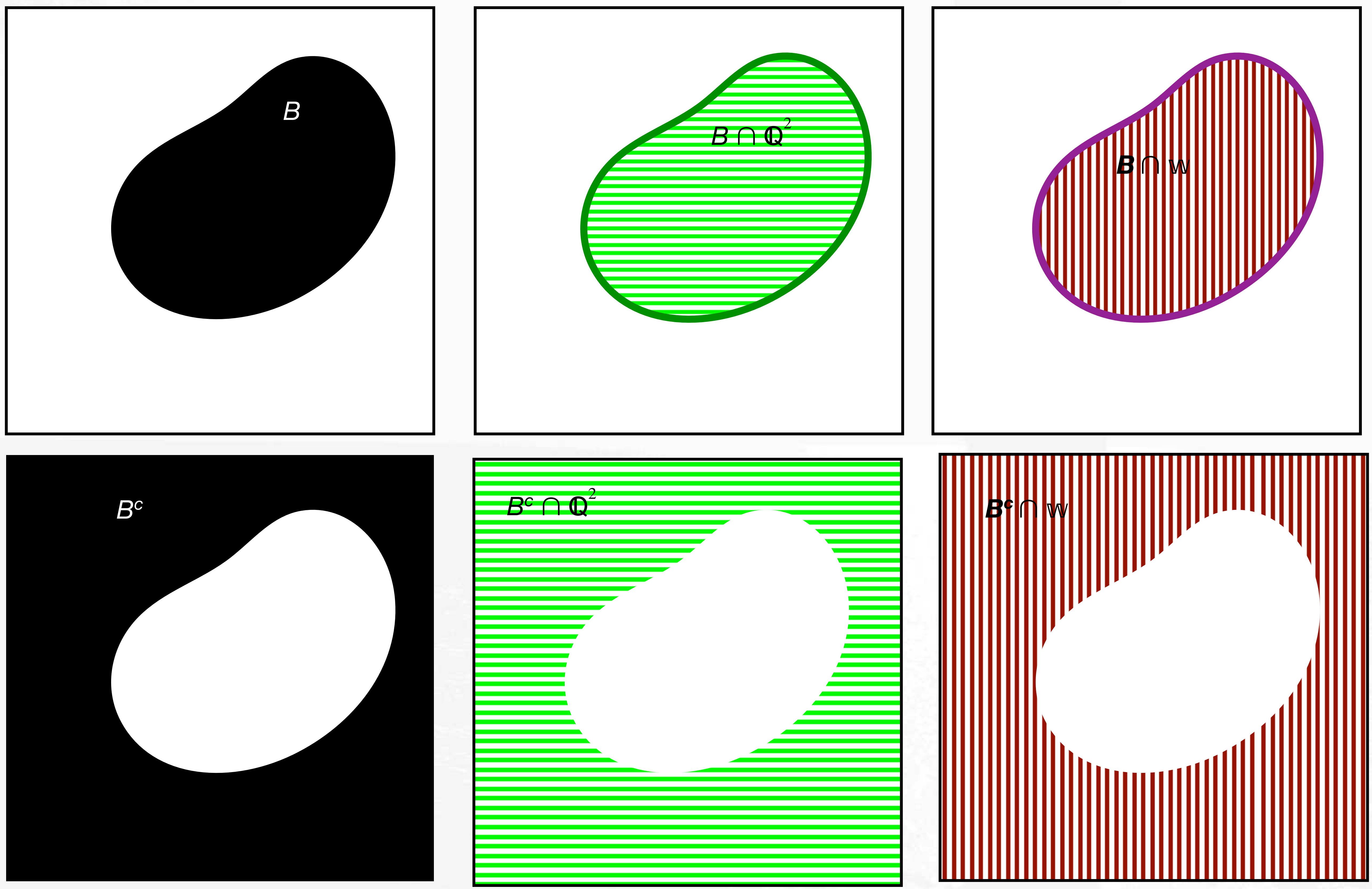


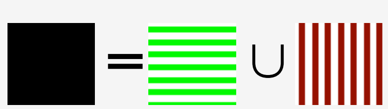


$= \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$



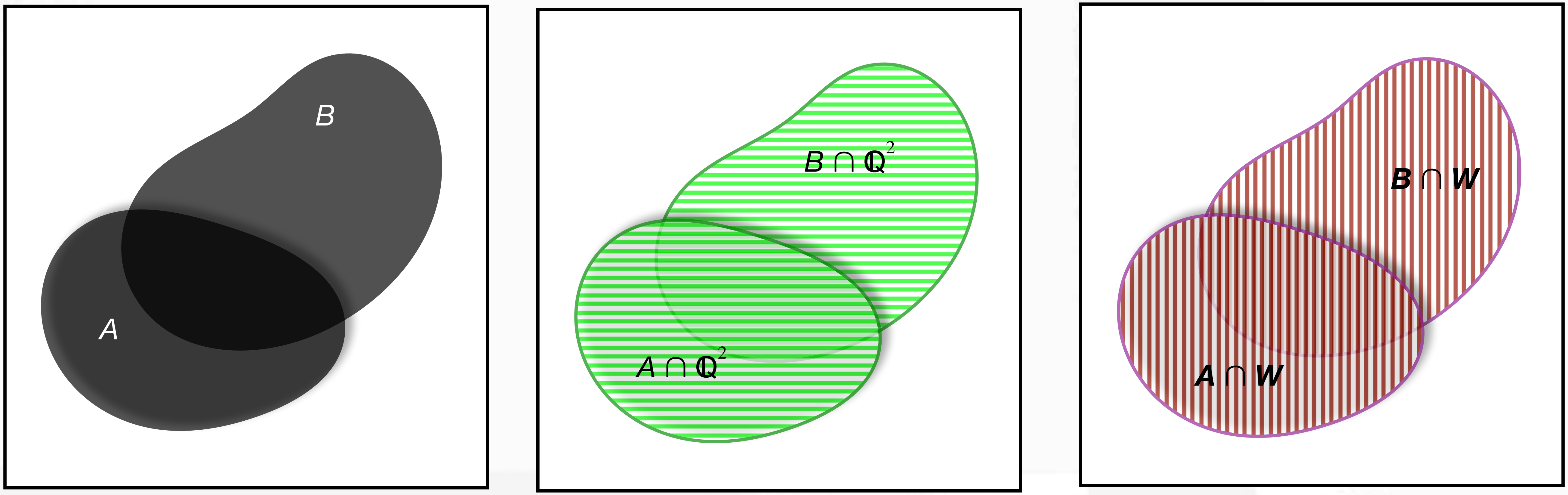


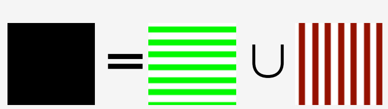
$= \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \mathrm{X} \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \mathrm{X} \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \mathrm{X} \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

Intersección y unión (diagramas básicos):



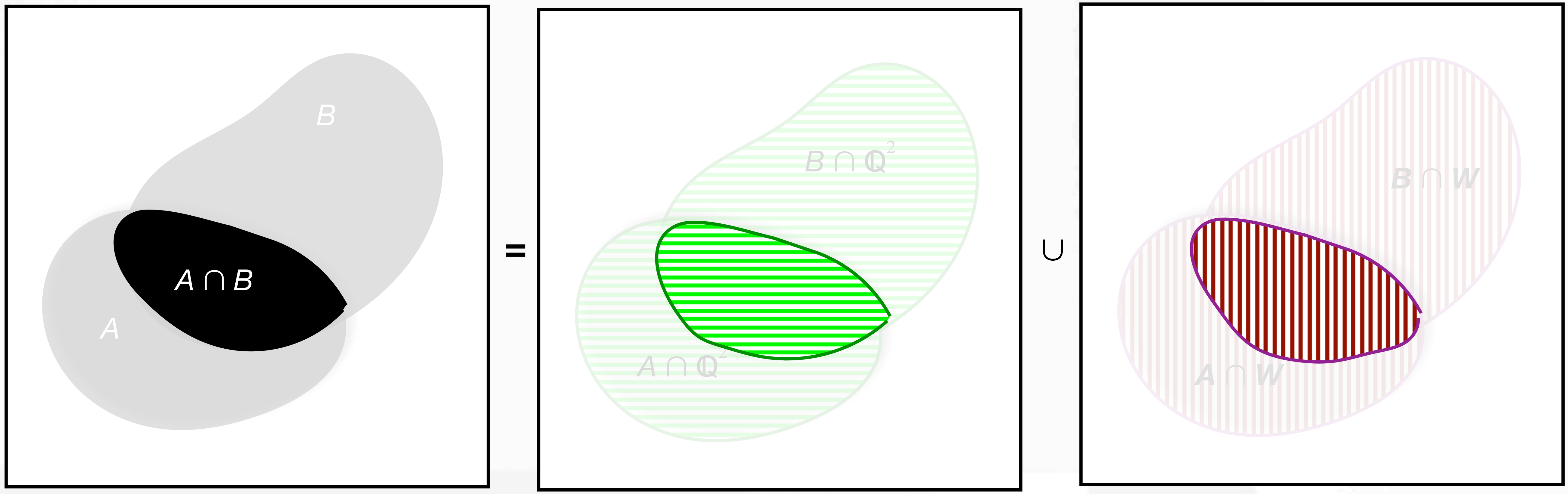


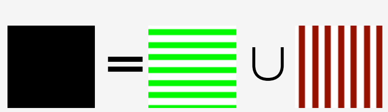
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

Intersección y unión (diagramas básicos):



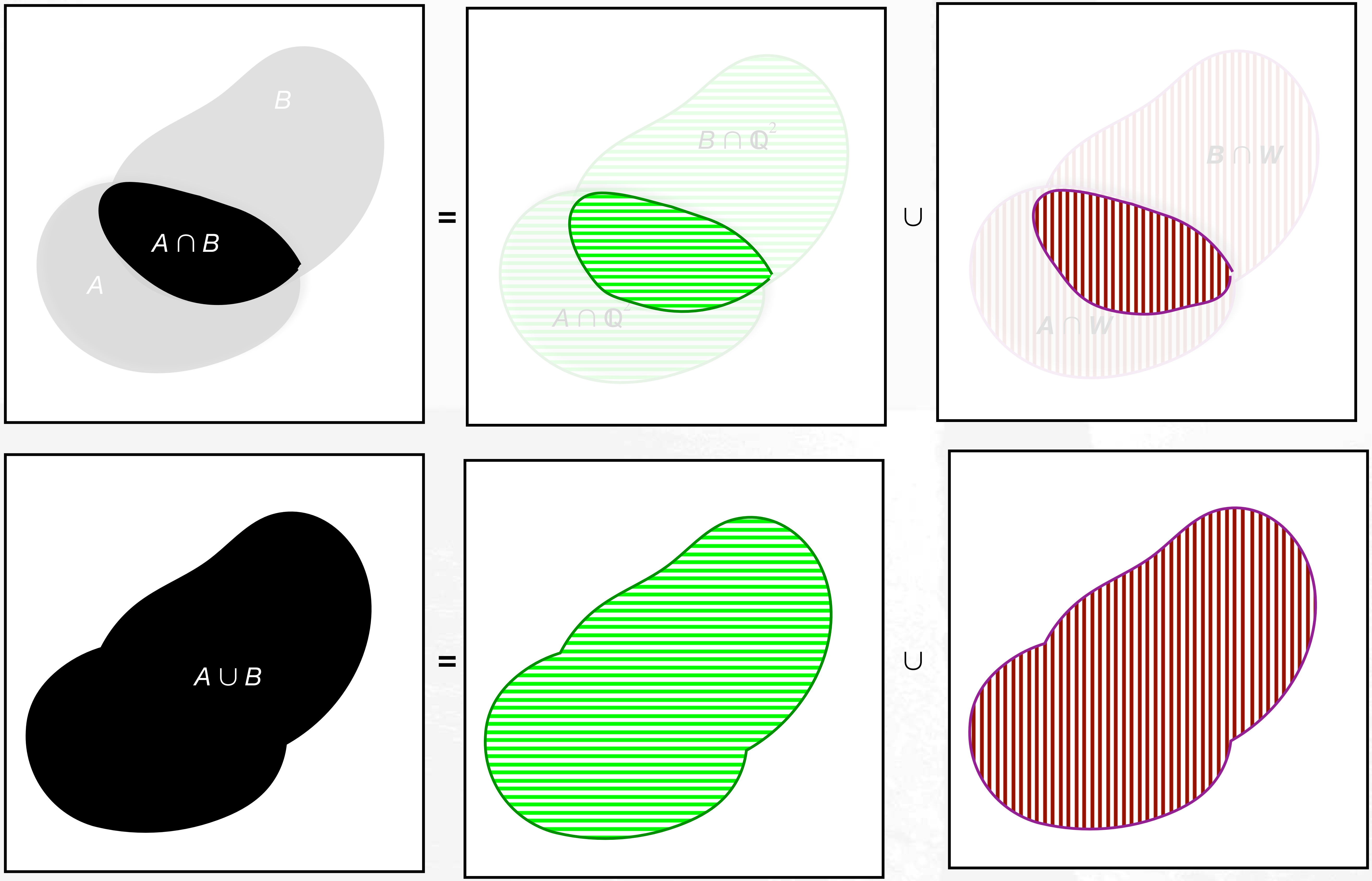


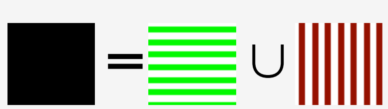
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q}X\mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^cX\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^cX\mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

Intersección y unión (diagramas básicos):





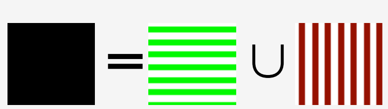
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

La w-intersección $\sqcap^{w}$, la w-unión $\sqcup^{w}$, la w-inclusión $\sqsubseteq^{w}$

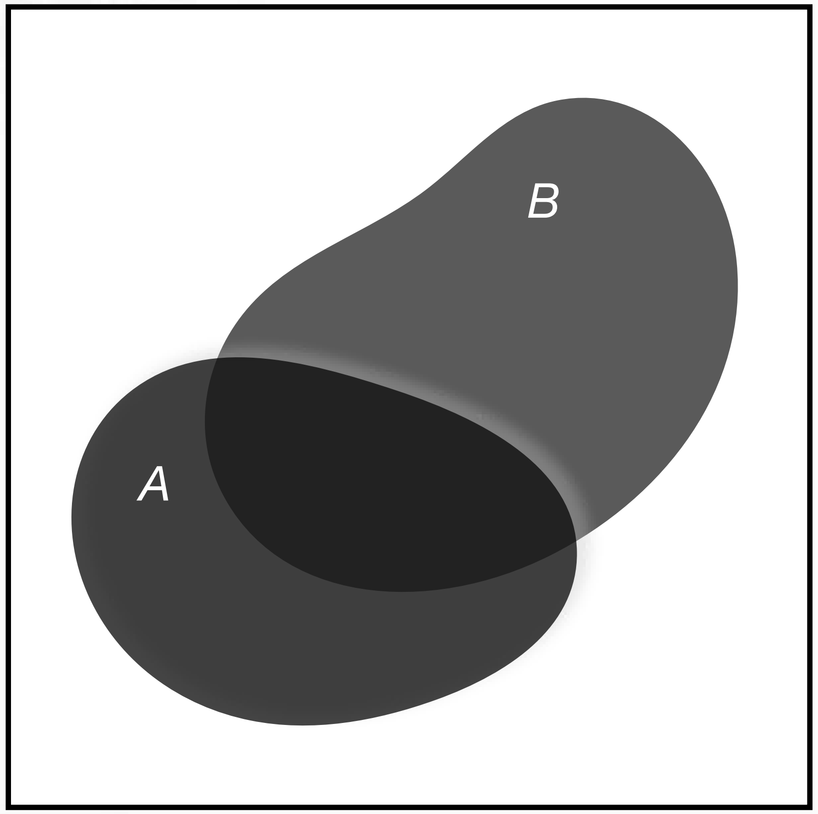
(no tan evidentes desde la "perspectiva" que proporciona $\mathbb{W}$)

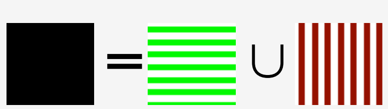


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

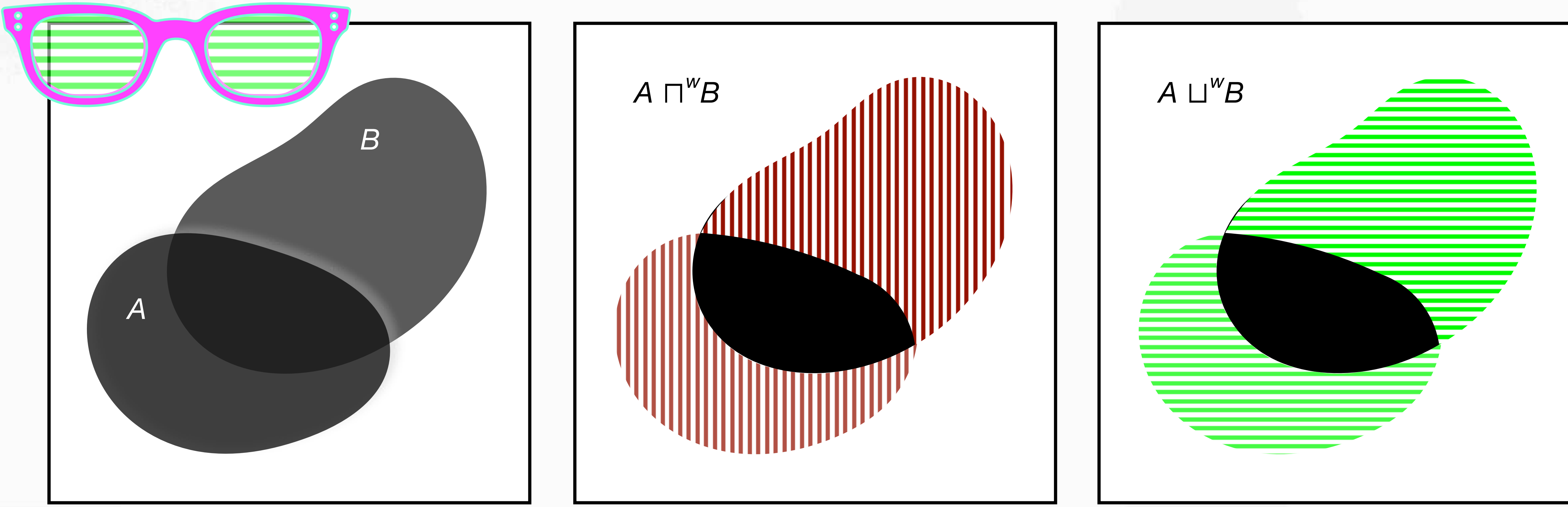


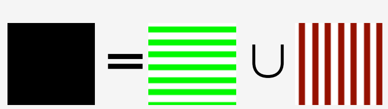


$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$$

$$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

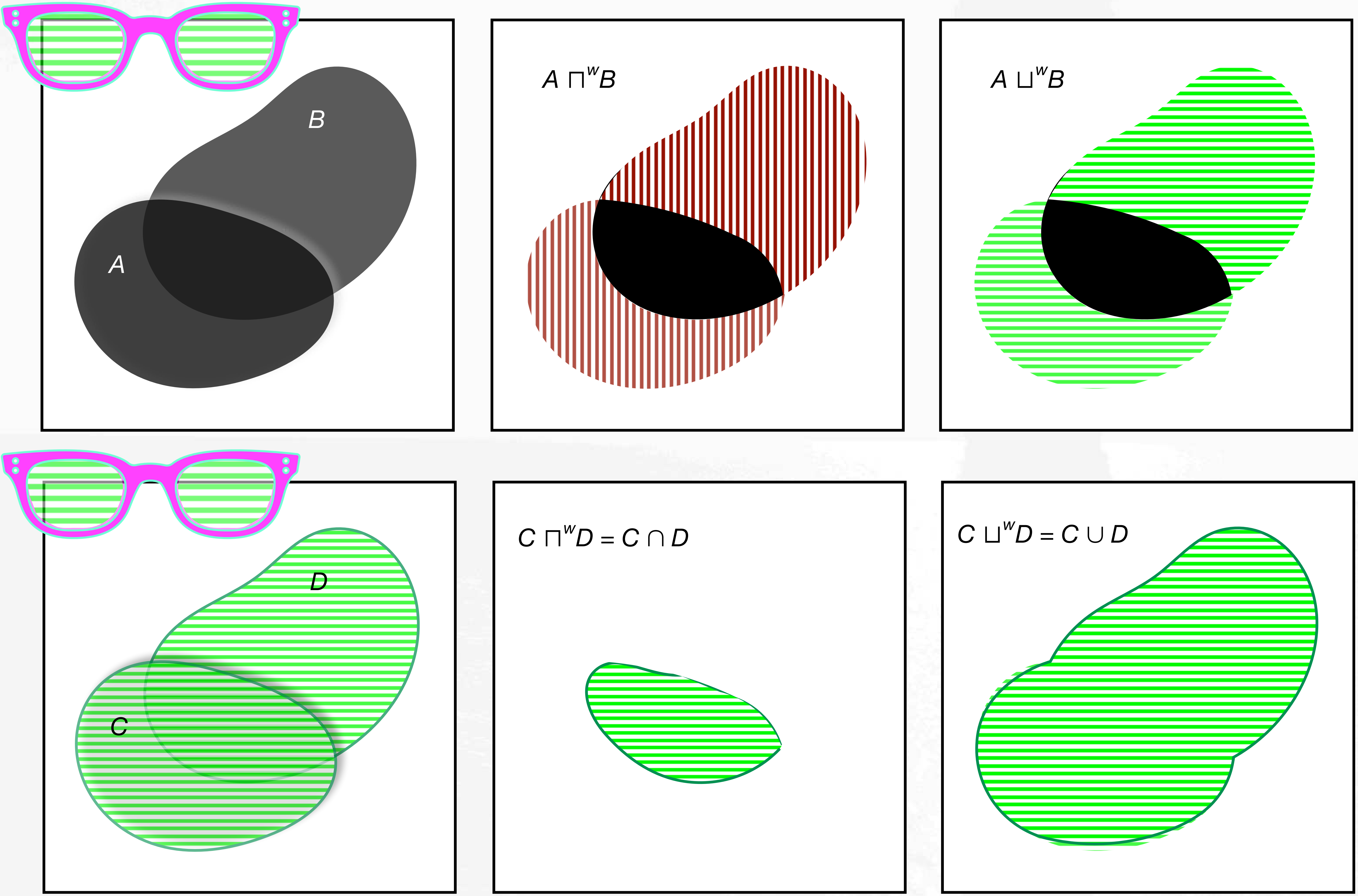


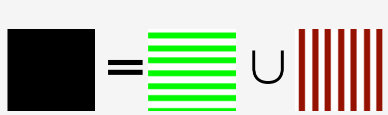


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

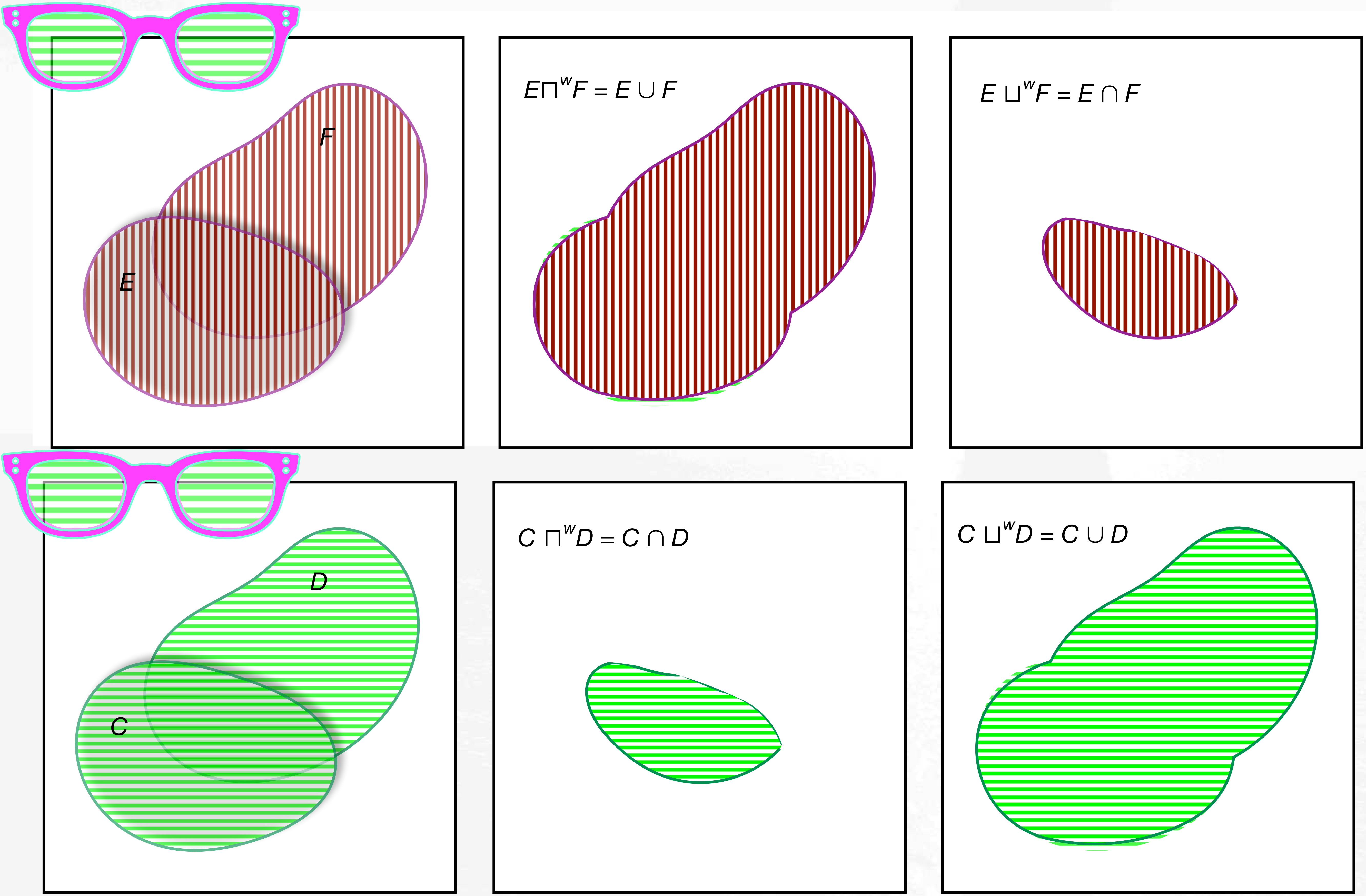


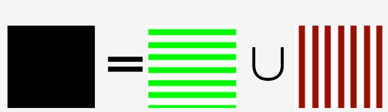


$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

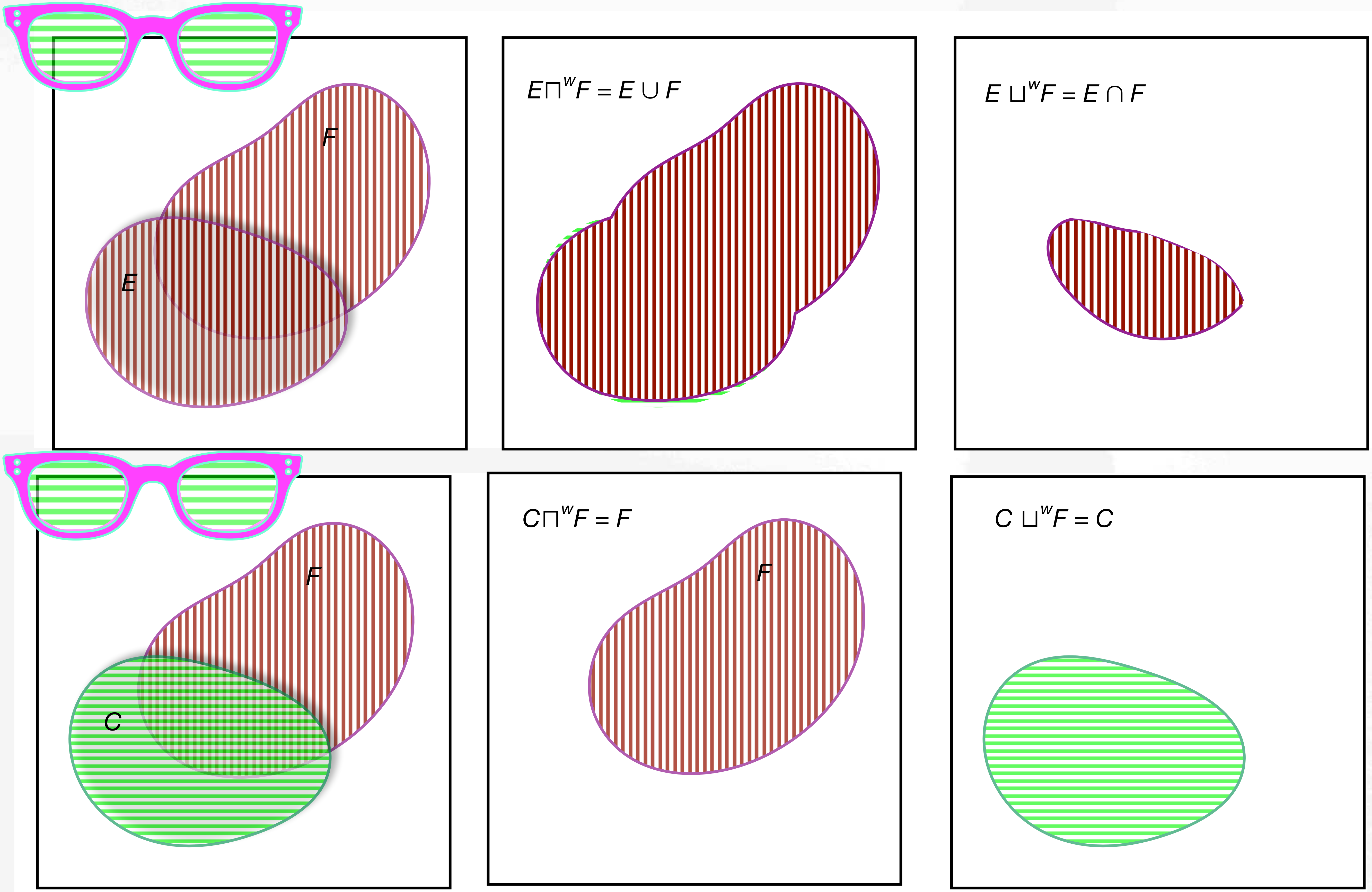


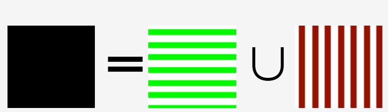


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{w},$

$\mathbb{w} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{w} = \varnothing$

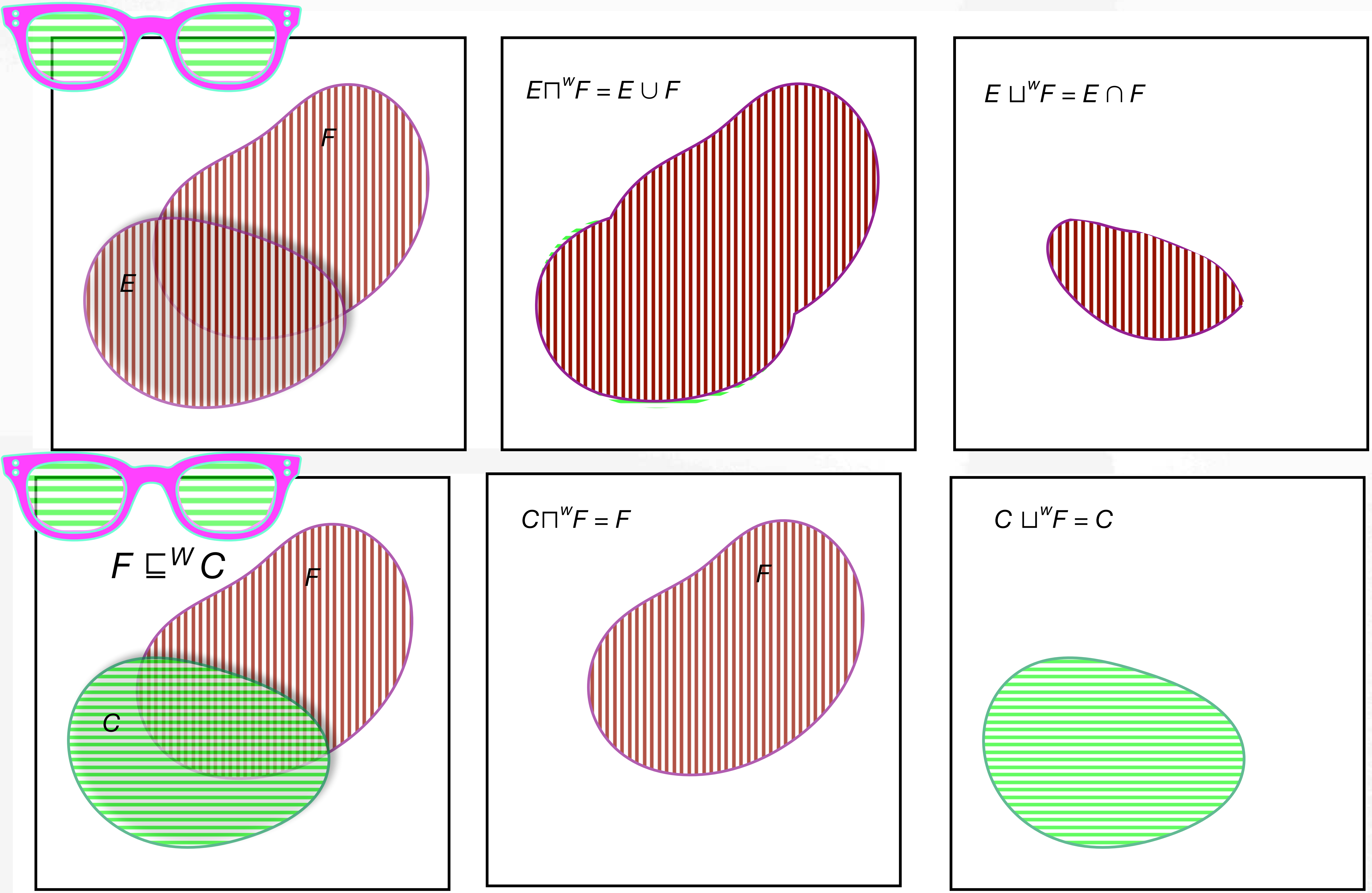


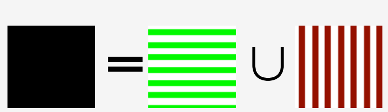


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

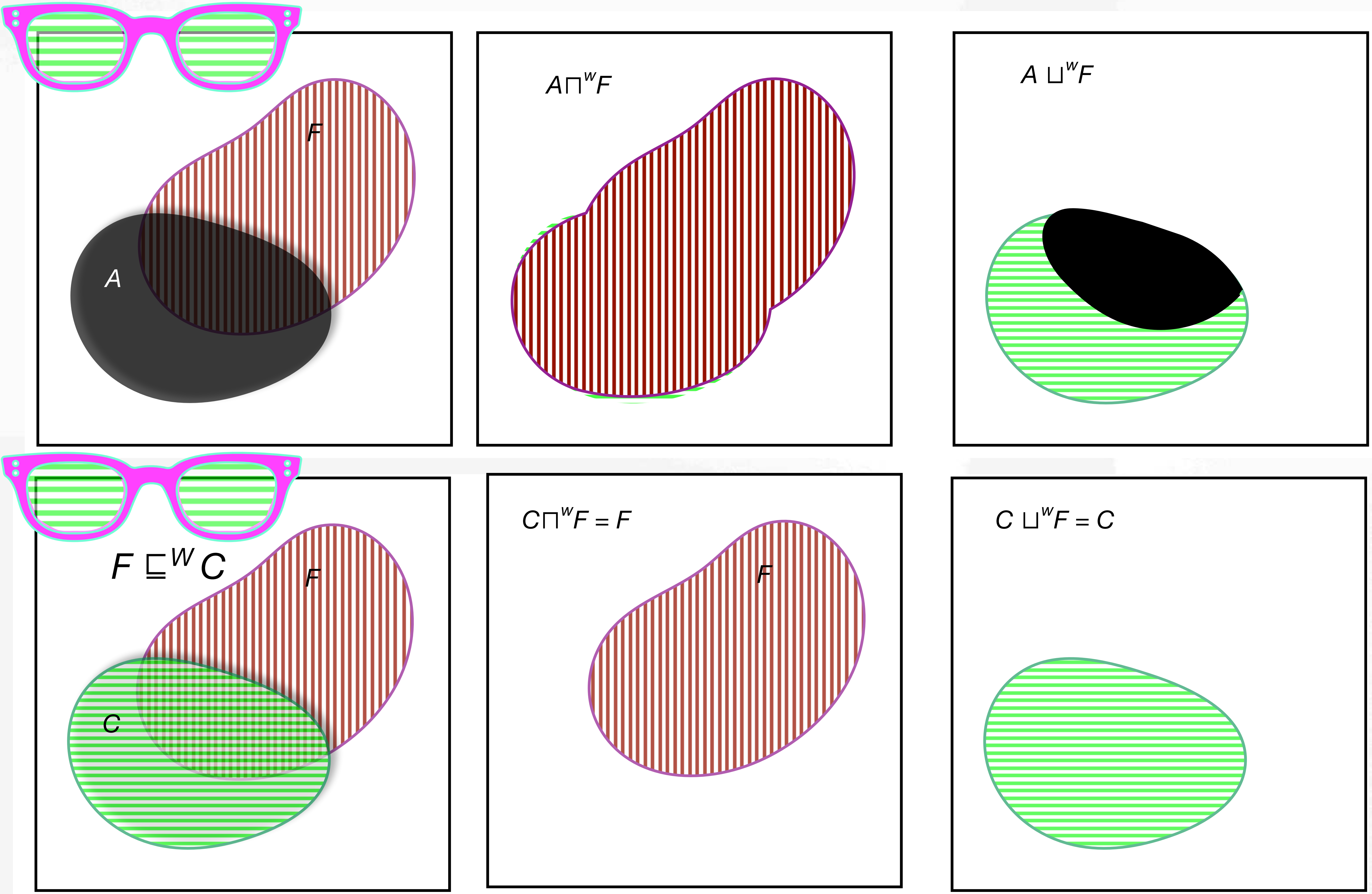


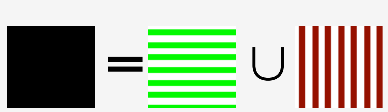


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

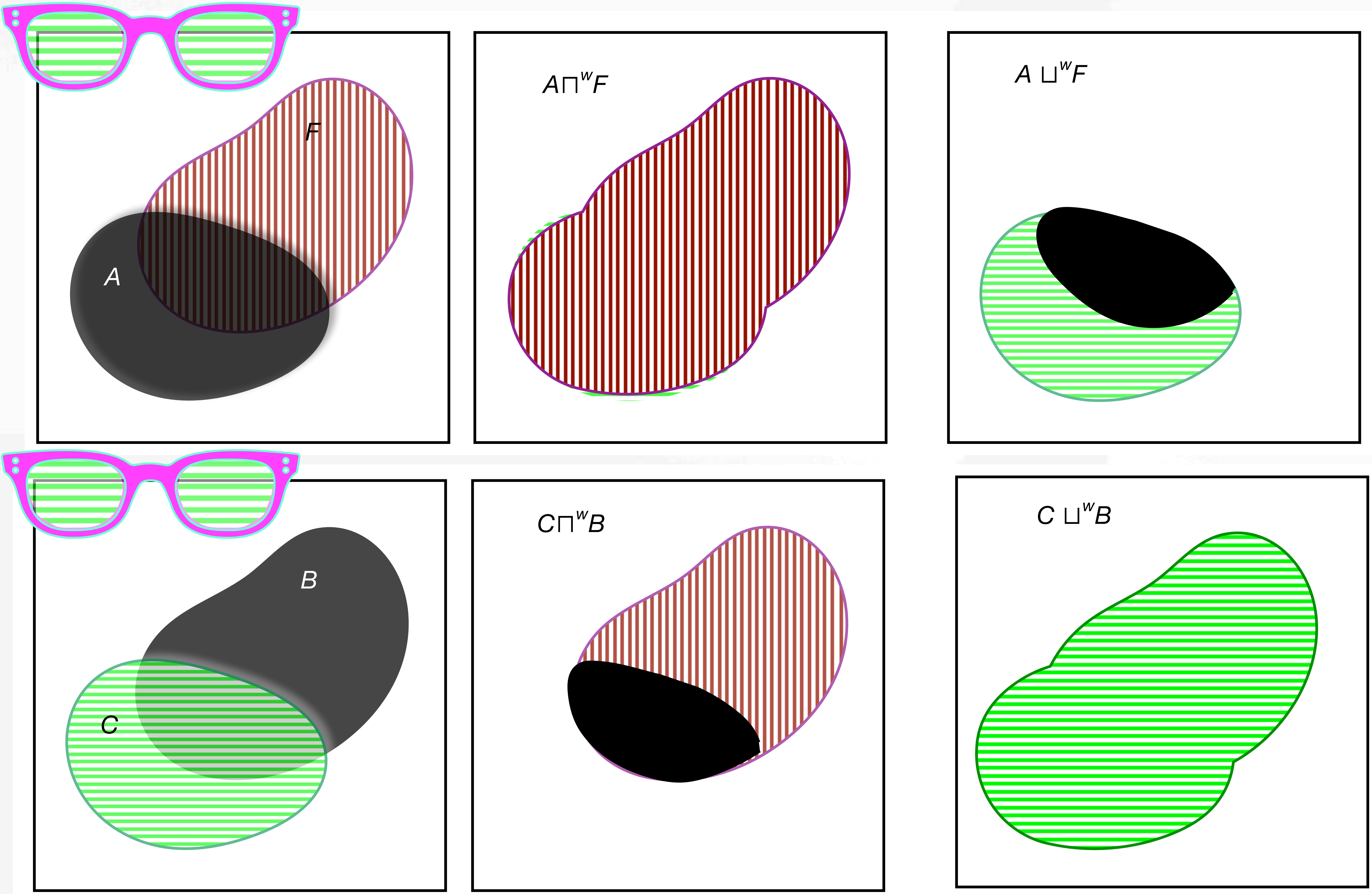


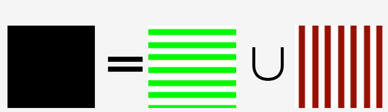


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

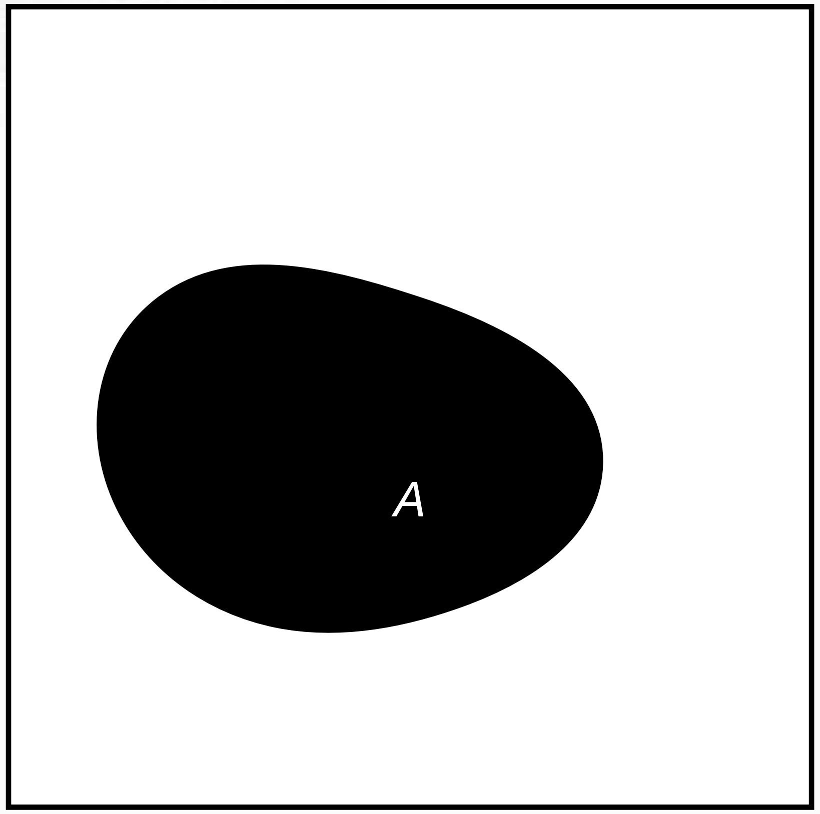
$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

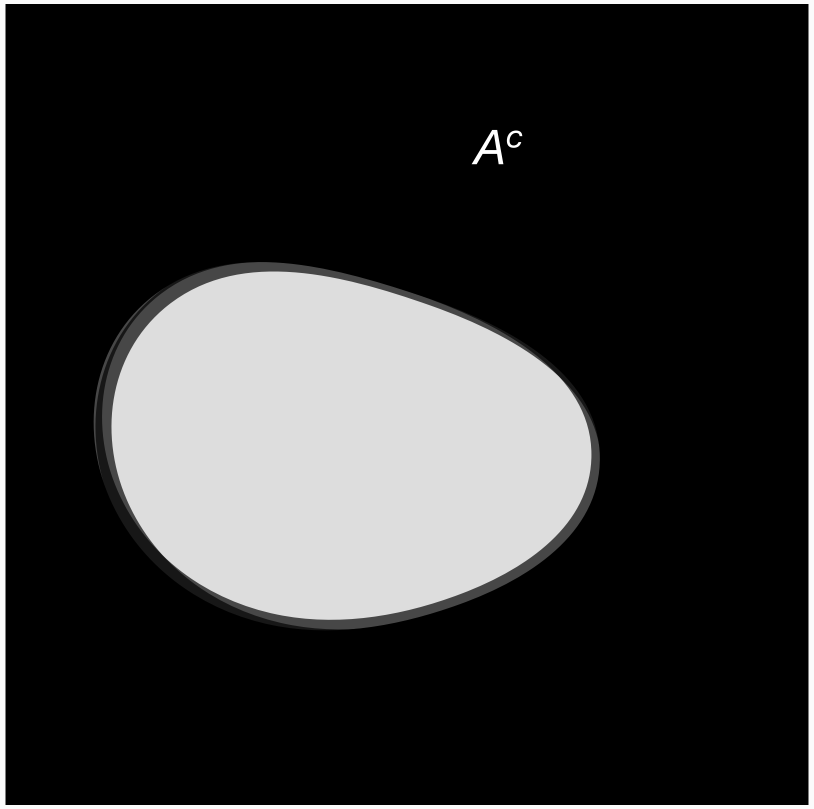




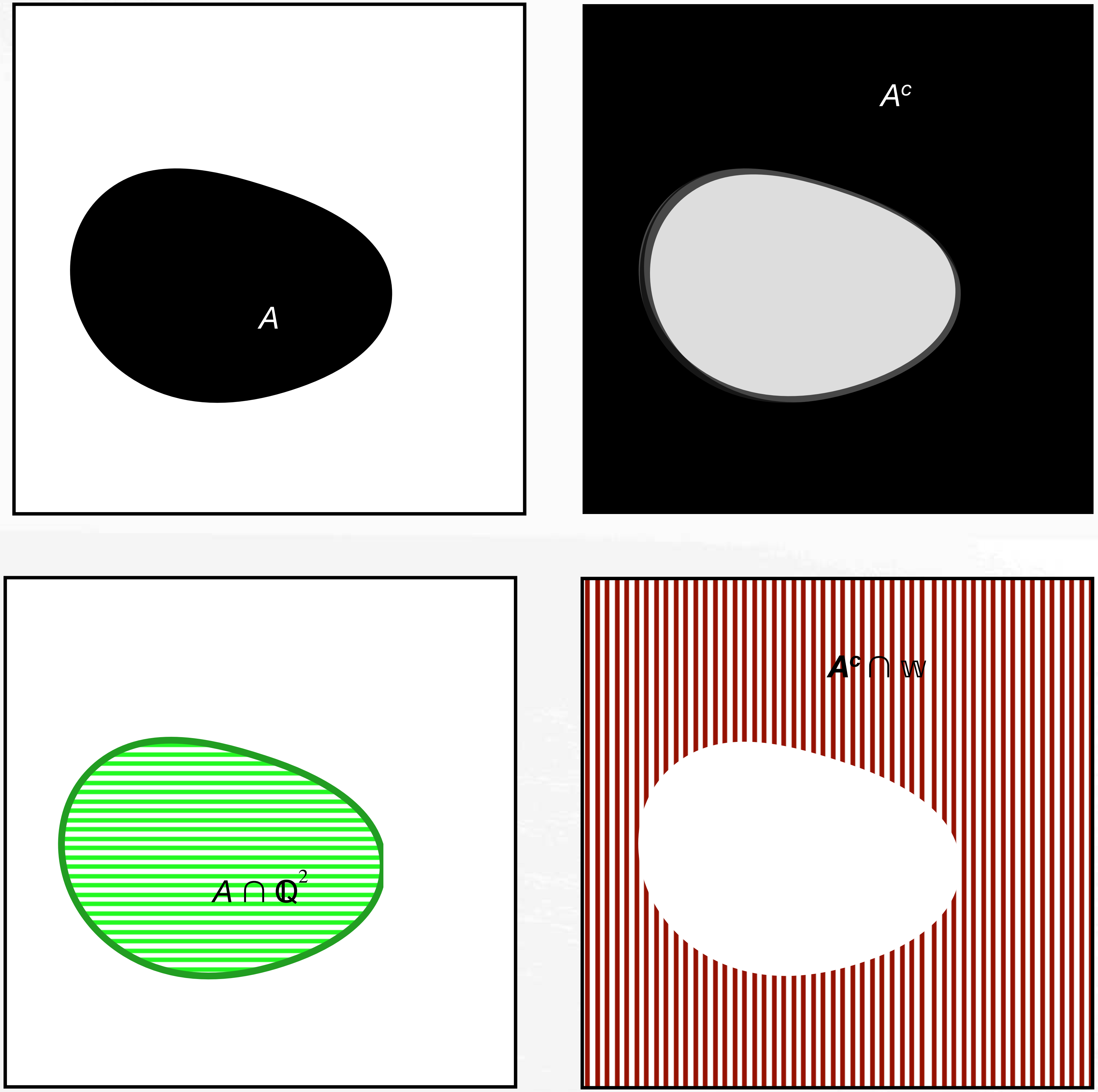
$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \mathrm{X} \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \mathrm{X} \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \mathrm{X} \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$ $\quad \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

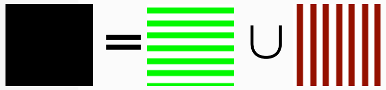




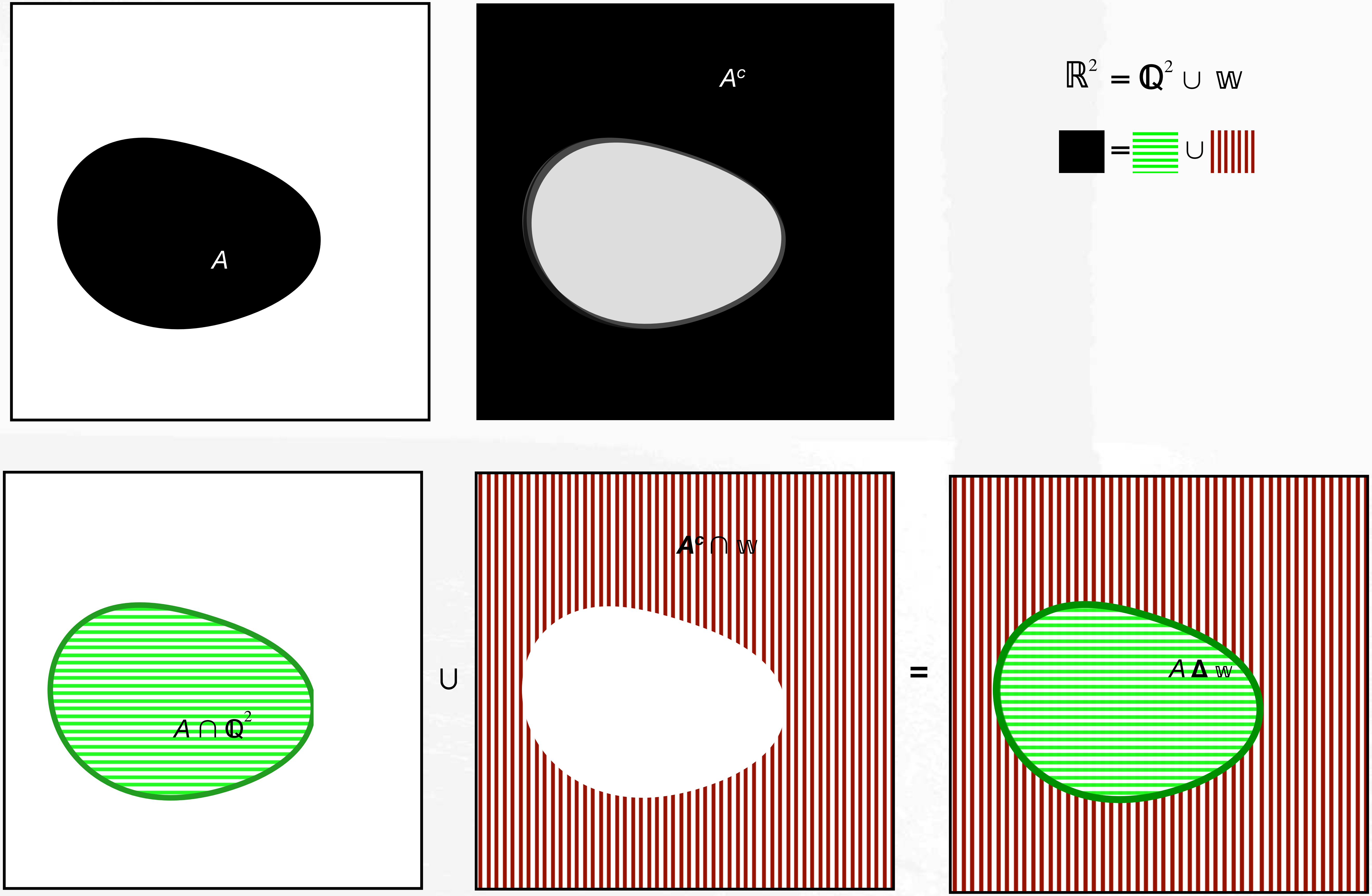
Perspectiva asociada a W



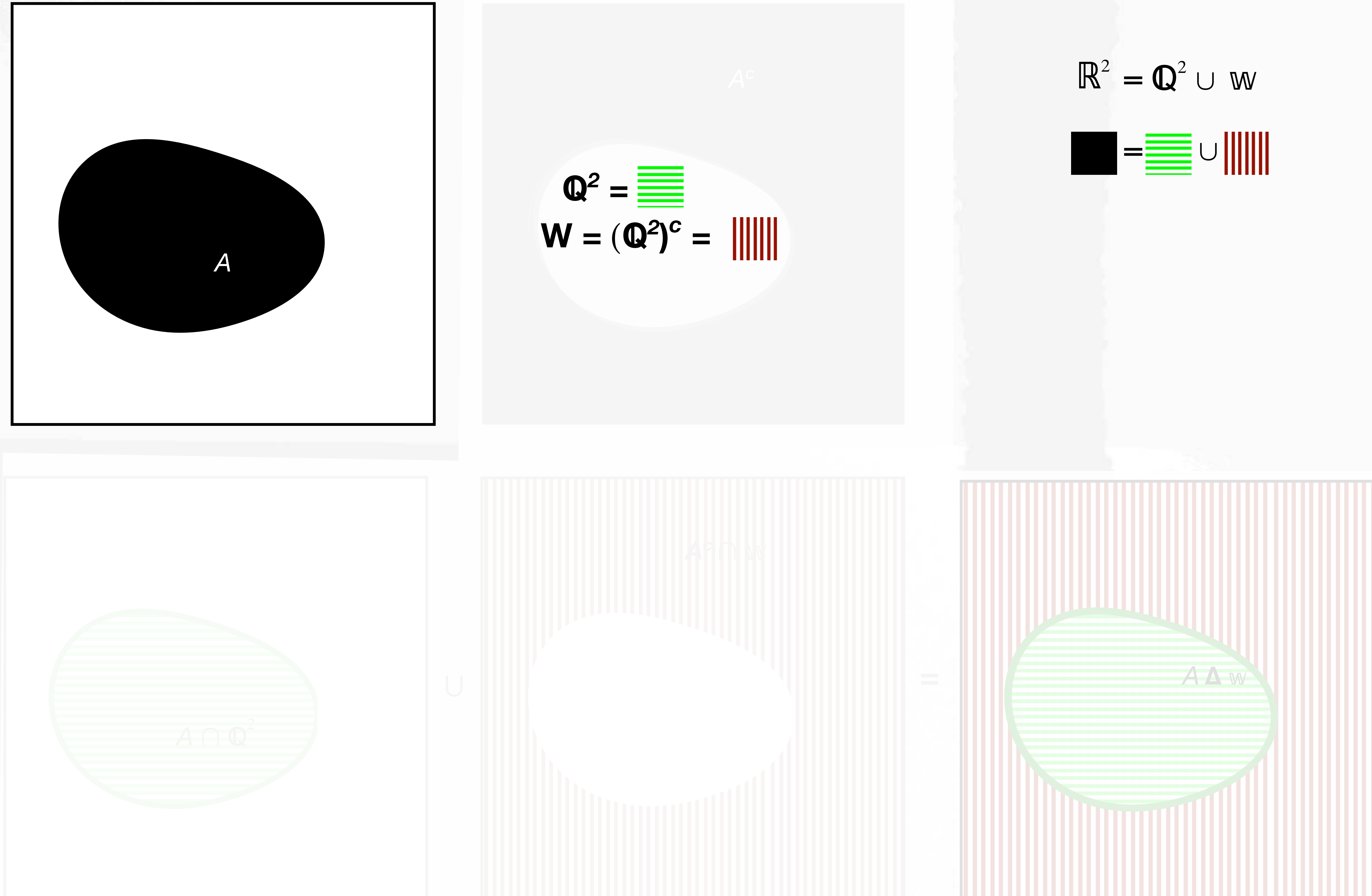
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$



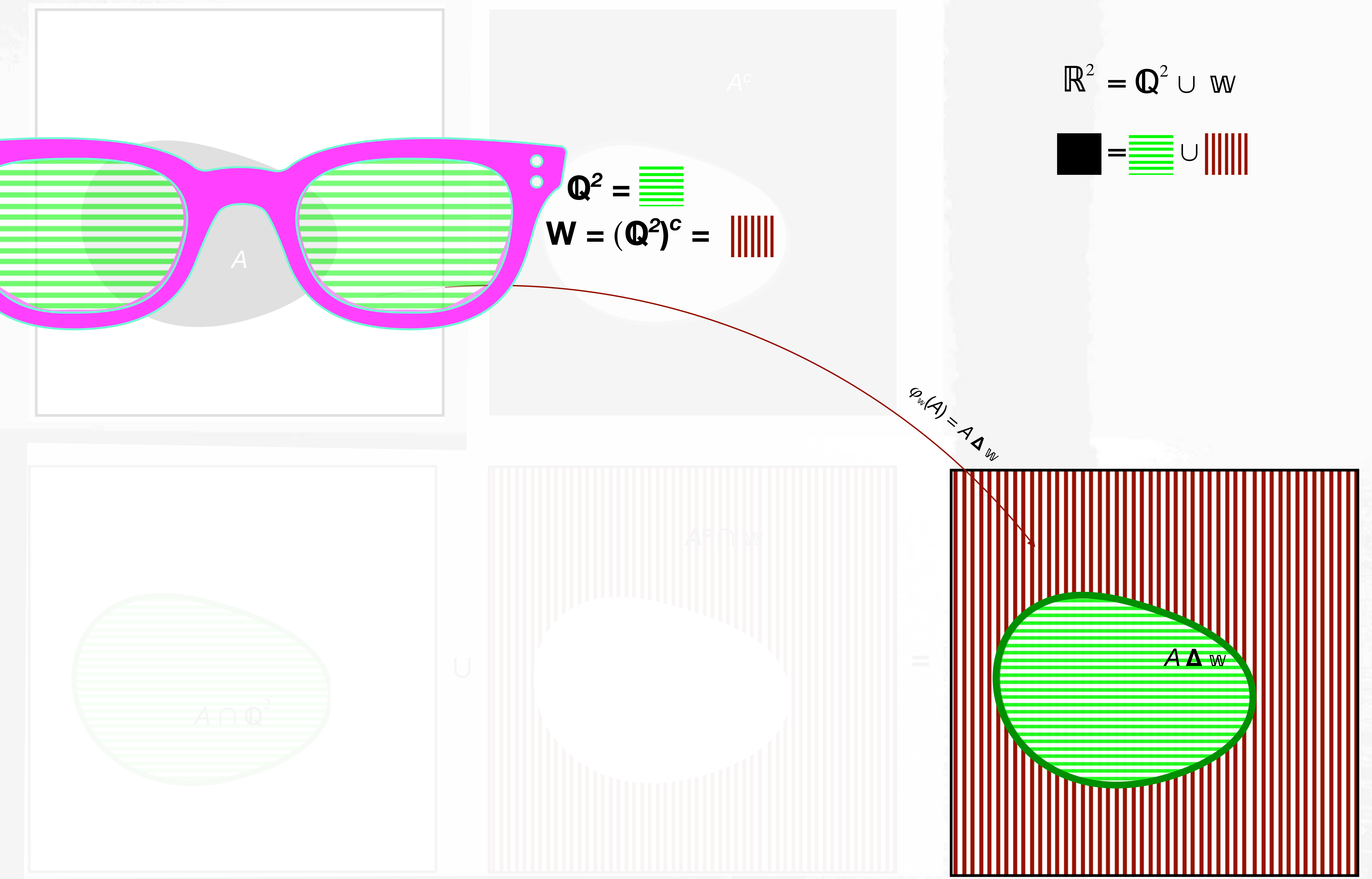
Perspectiva asociada a W



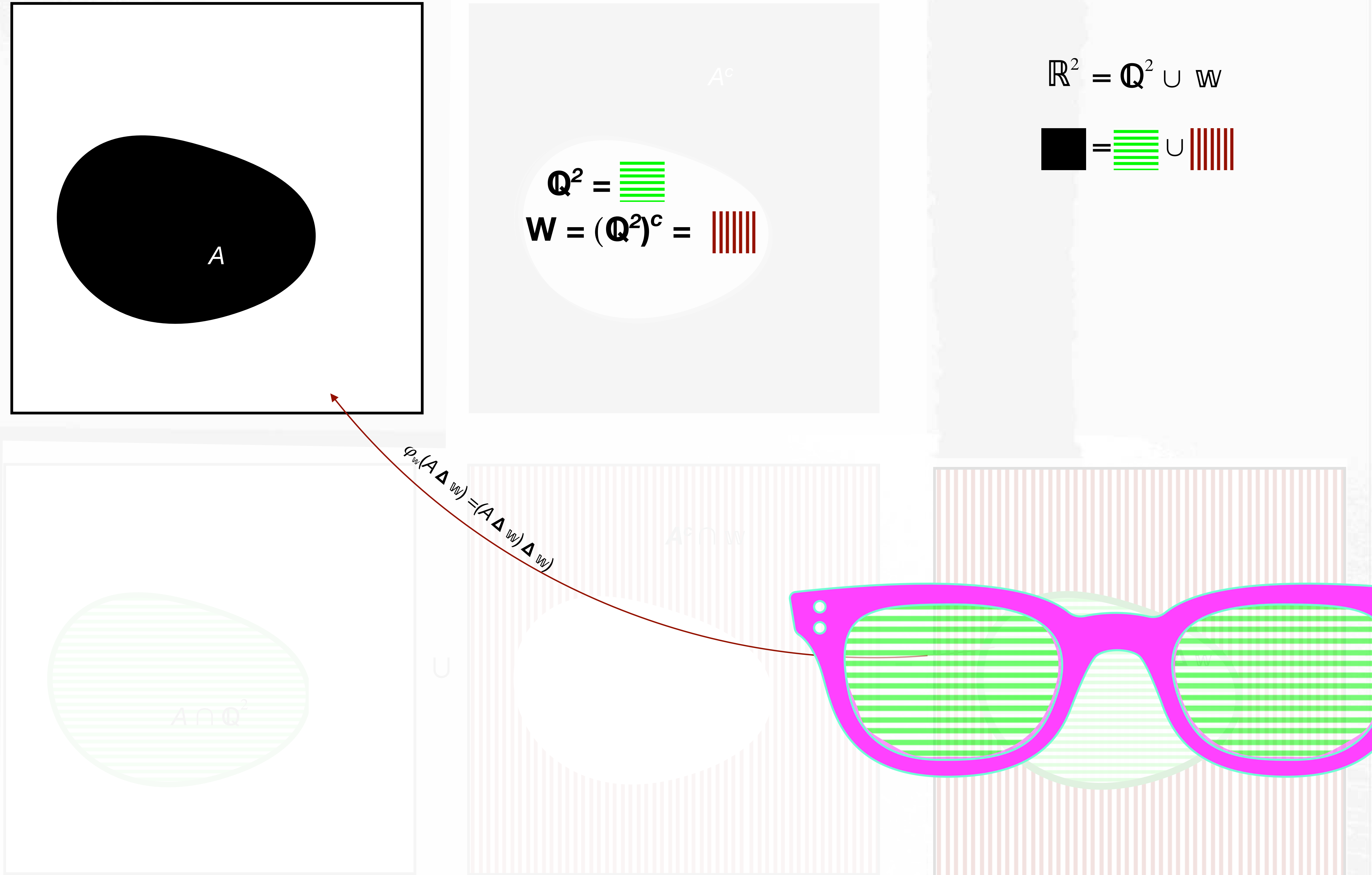
Perspectiva asociada a W



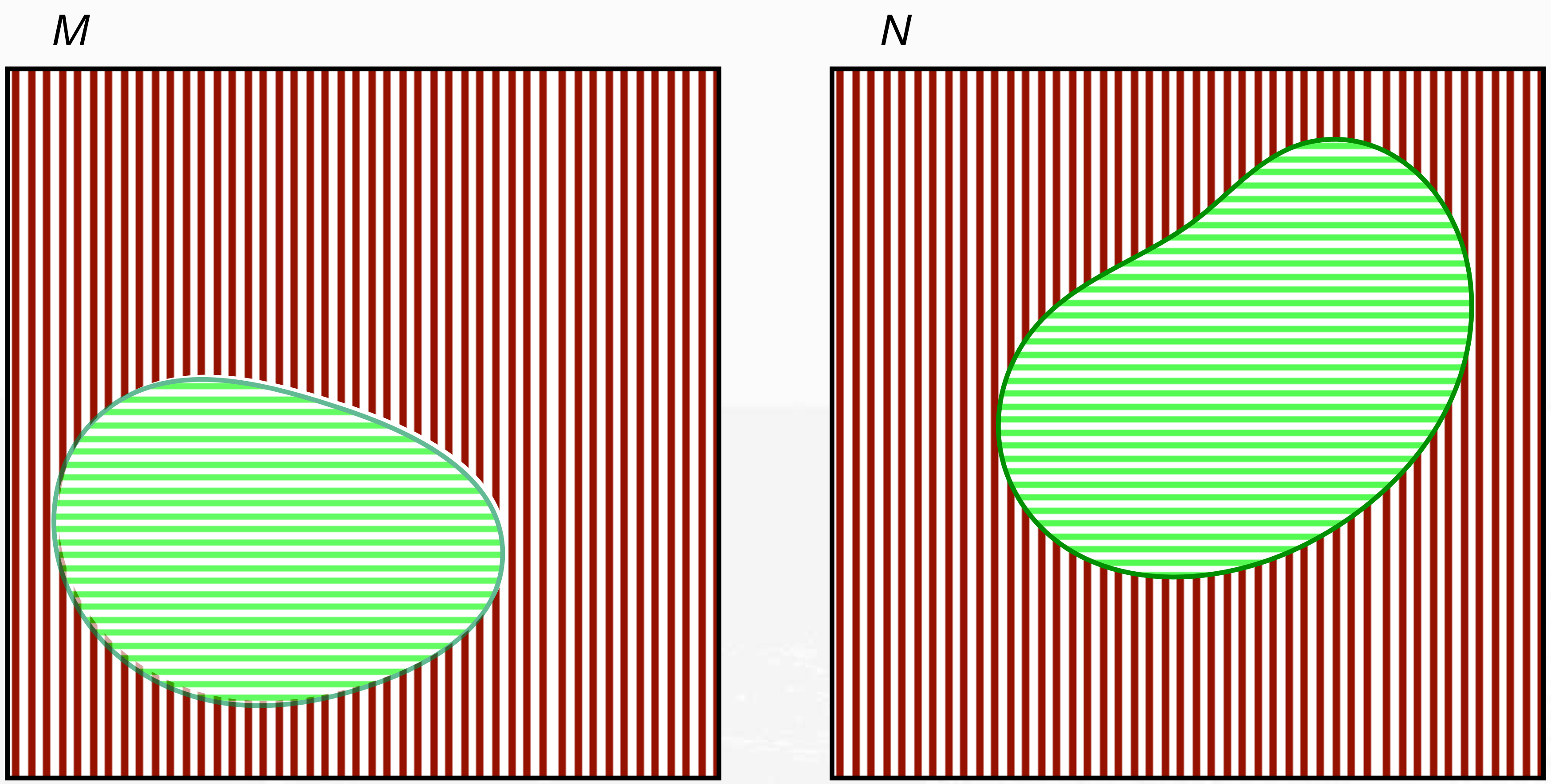
Perspectiva asociada a W

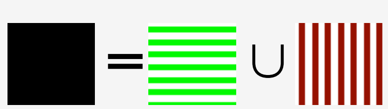


Perspectiva asociada a W



Perspectiva asociada a W

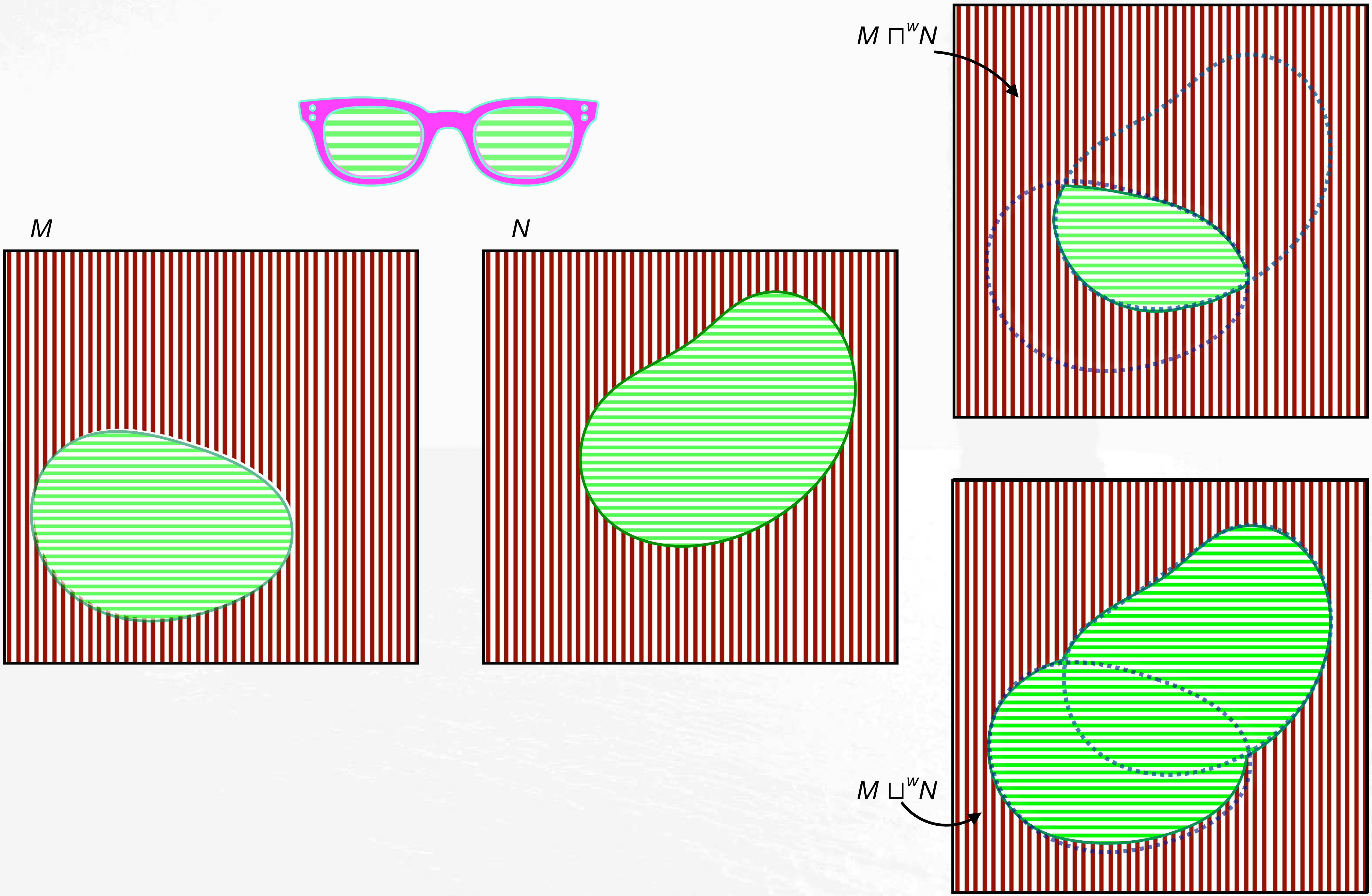


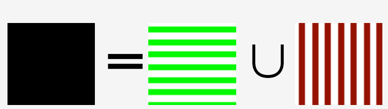


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{w},$

$\mathbb{w} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{w} = \varnothing$

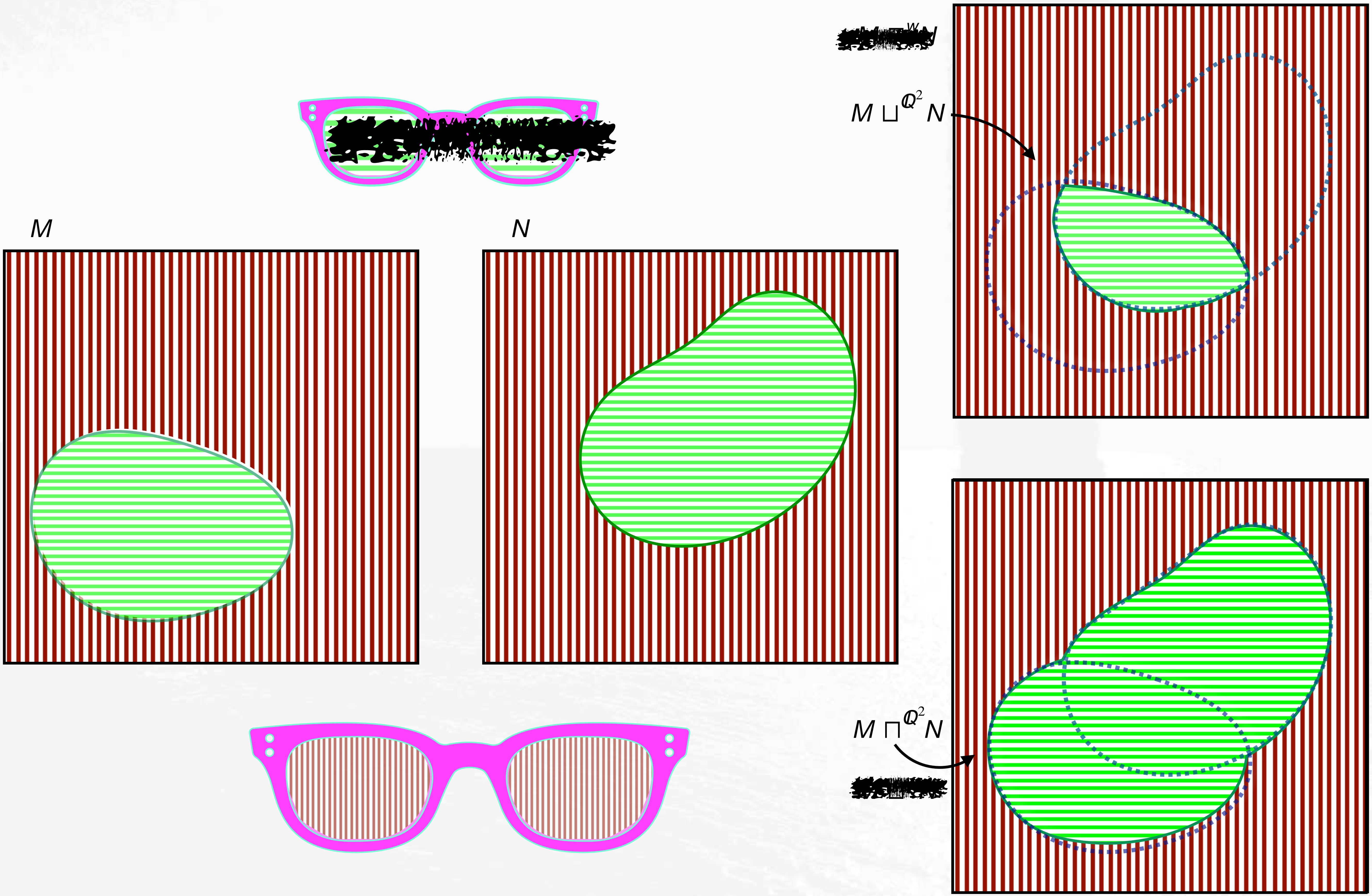


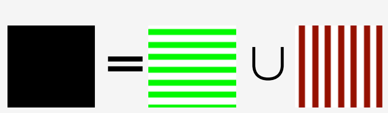


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W}$,

$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$



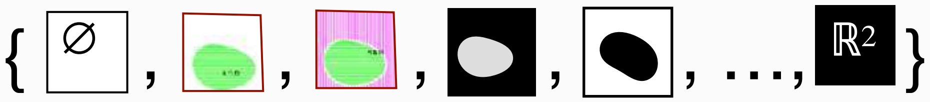


$\mathbb{R}^2 = \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

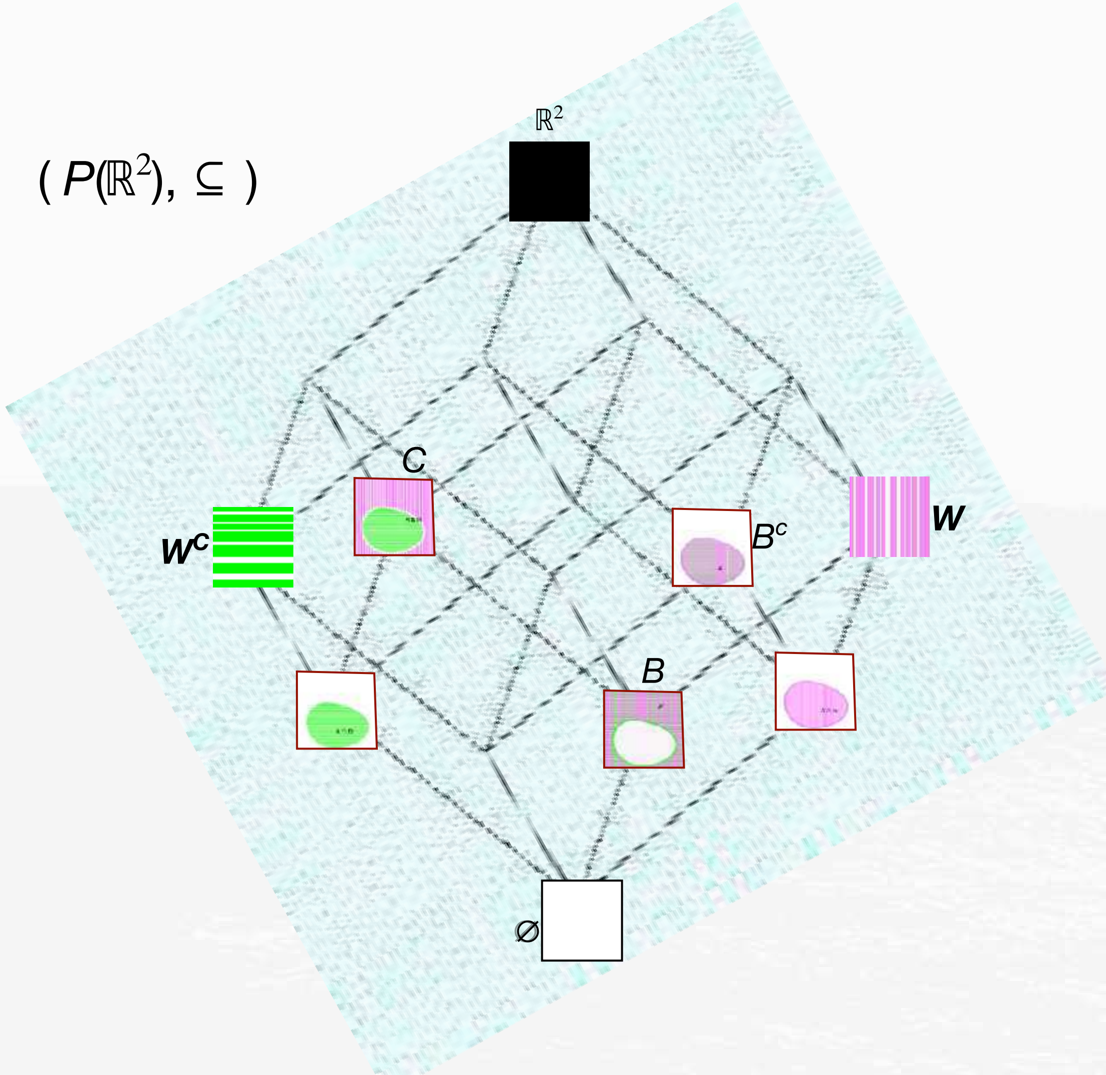
$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$

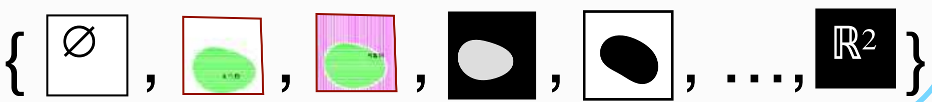
$\varnothing$, A, B, ..., subconjuntos de $\mathbb{R}^2$



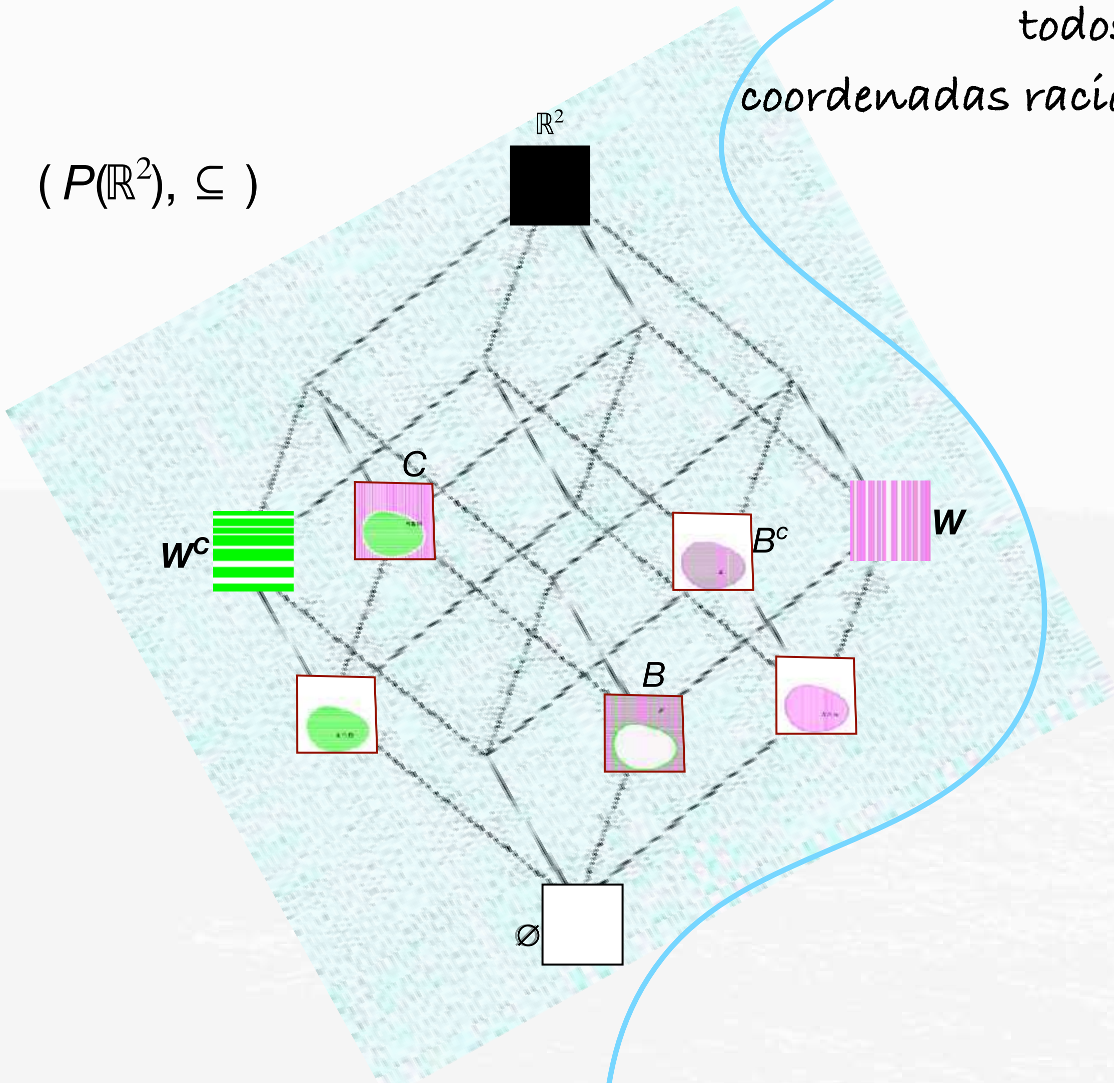
$(P(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



$\varnothing$, A, B, …, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$



$(P(\mathbb{R}^2), \subseteq)$

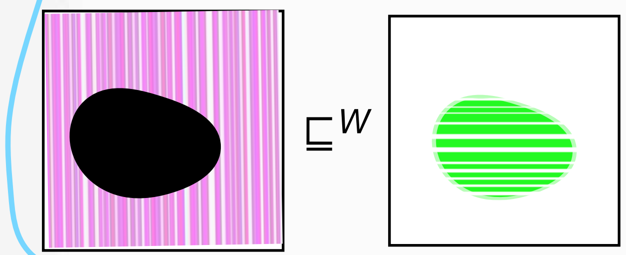


$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow$

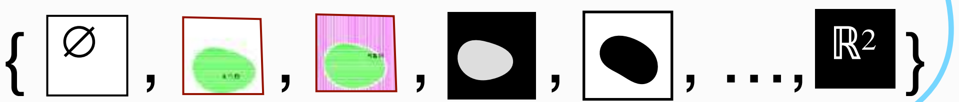
(Todos los elementos de B con al menos una coordenada irracional, (tipos: (q_1,i_2), (i_1,q_2), (i_1,i_2)), pertenecen a A

y

todos los elementos de A con las dos coordenadas racionales, (tipo: (q_1,q_2)), pertenecen a B).



$\varnothing$, A, B, …, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

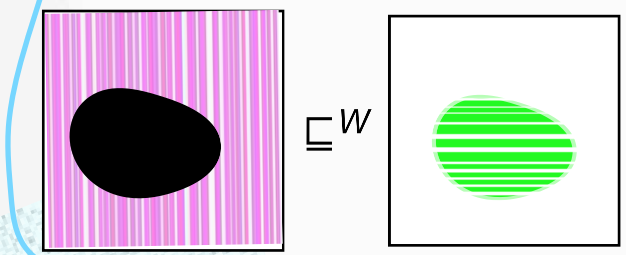


$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow$

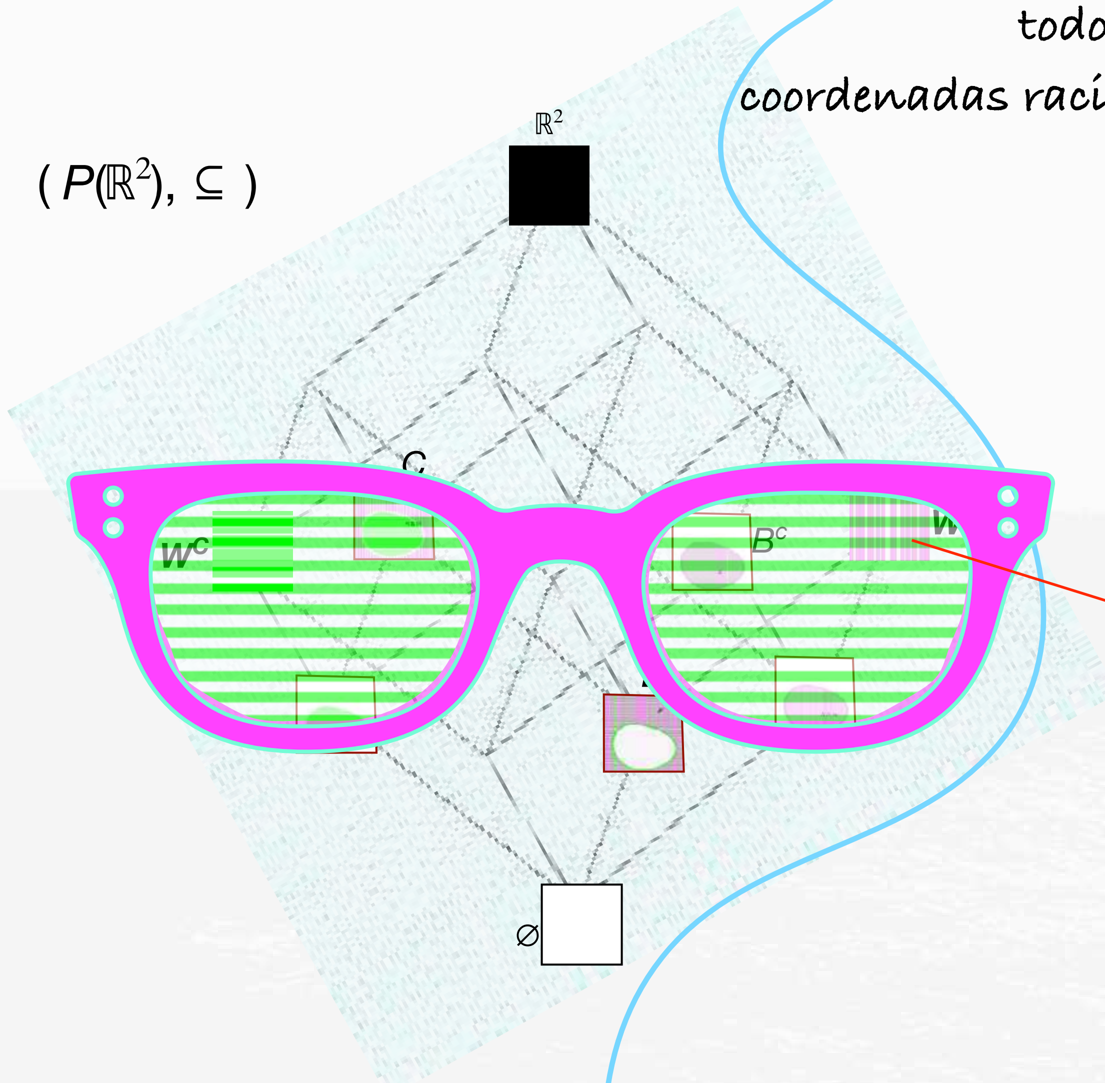
(Todos los elementos de B con al menos una coordenada irracional, (tipos: (q_1,i_2), (i_1,q_2), (i_1,i_2)), pertenecen a A

y

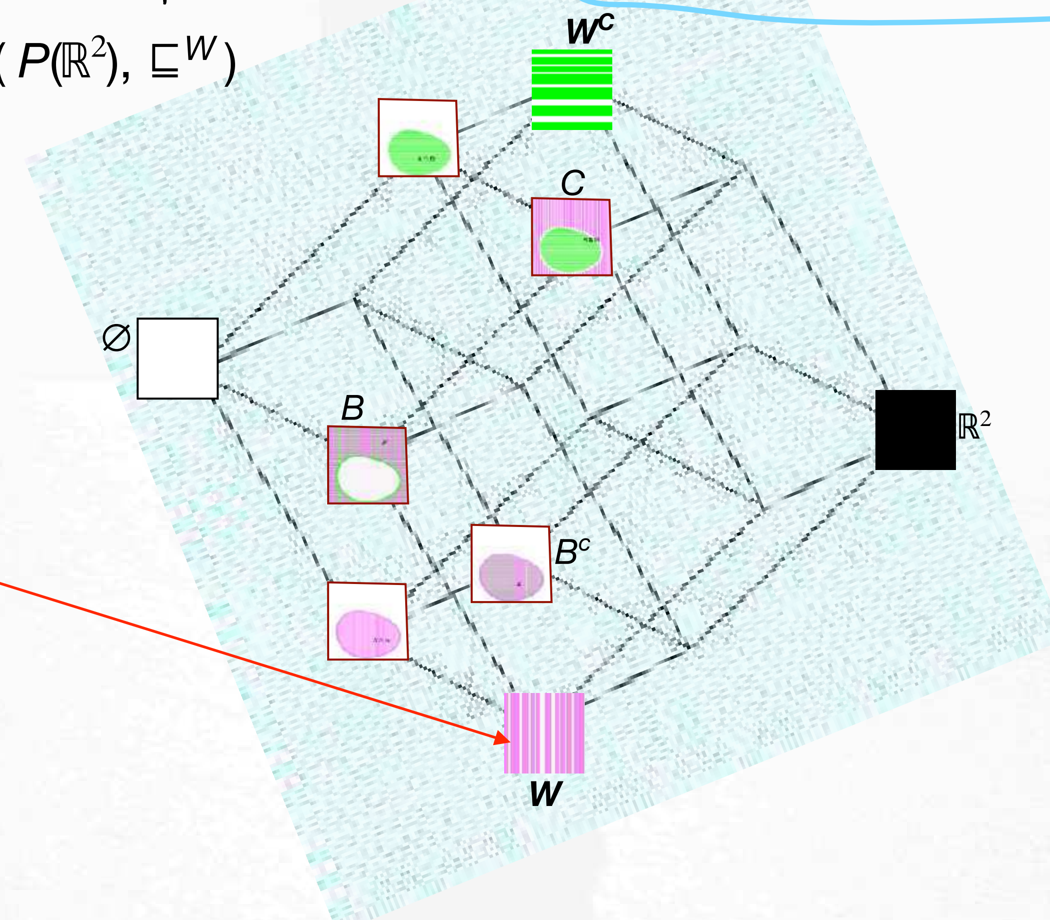
todos los elementos de A con las dos coordenadas racionales, (tipo: (q_1,q_2)), pertenecen a B).



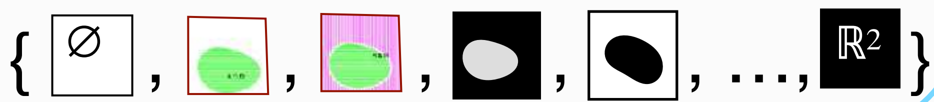
$(P(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



$(P(\mathbb{R}^2), \sqsubseteq^W)$



$\varnothing$, A, B, …, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

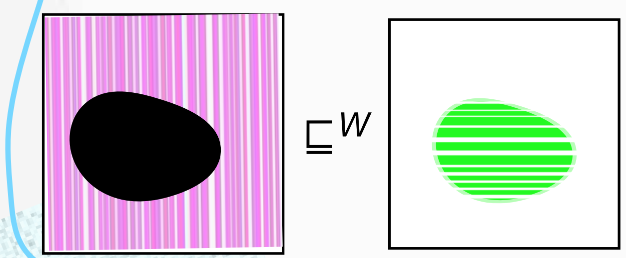


$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow$

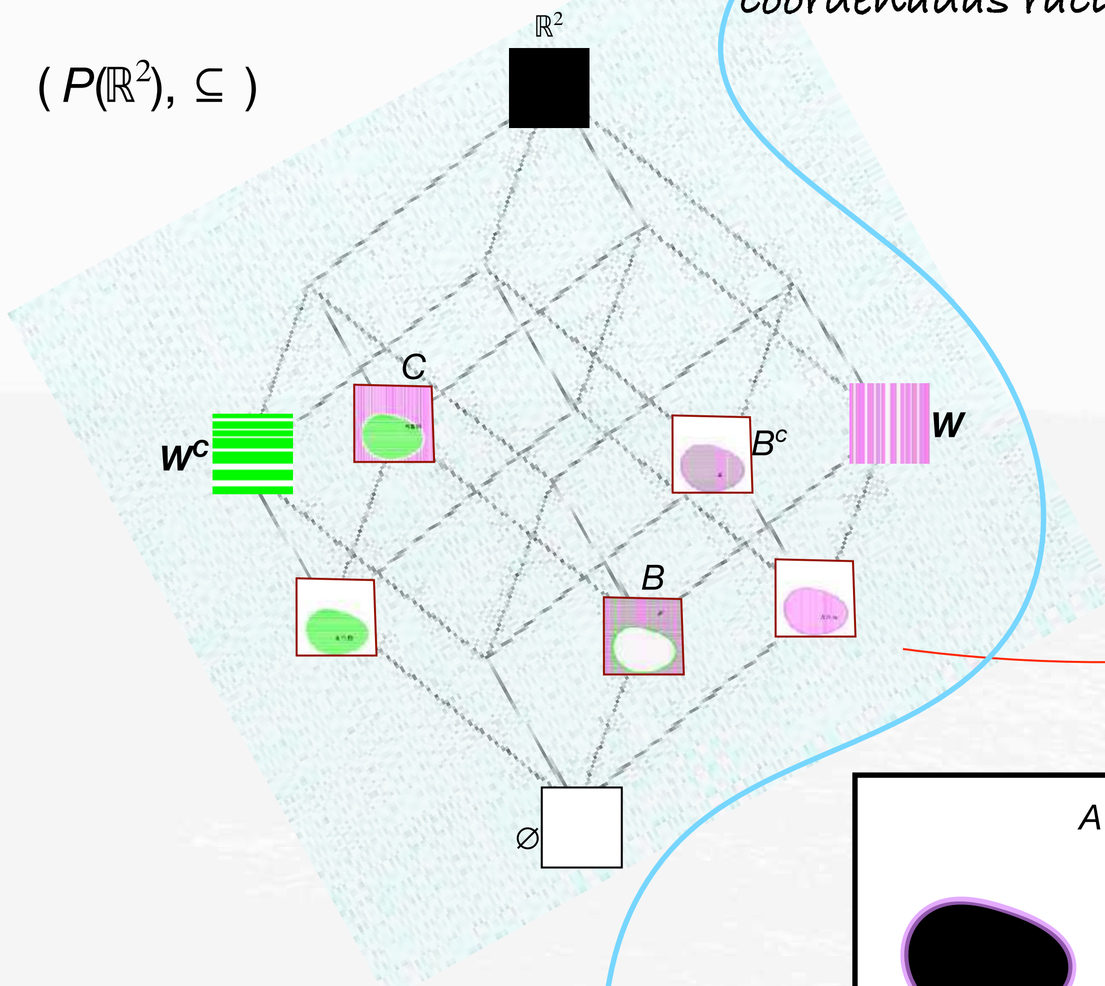
(Todos los elementos de B con al menos una coordenada irracional, (tipos: (q_1,i_2), (i_1,q_2), (i_1,i_2)), pertenecen a A

y

todos los elementos de A con las dos coordenadas racionales, (tipo: (q_1,q_2)), pertenecen a B).

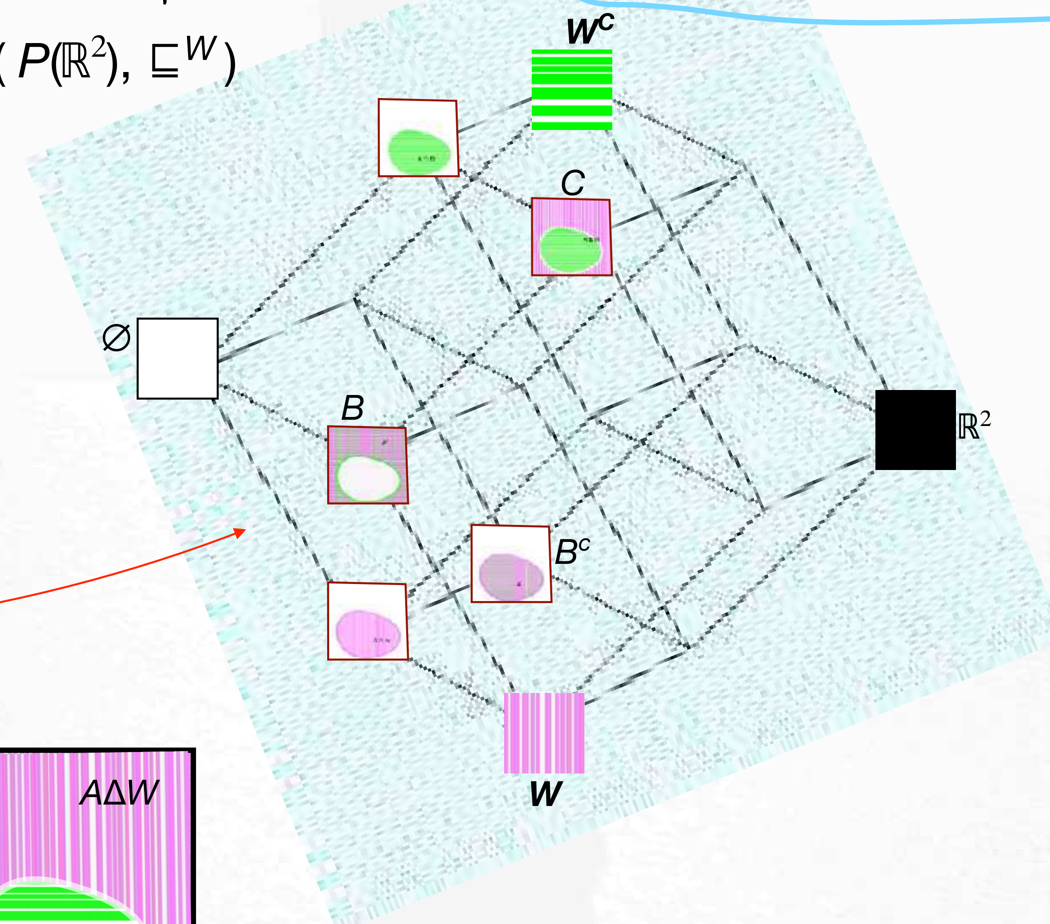


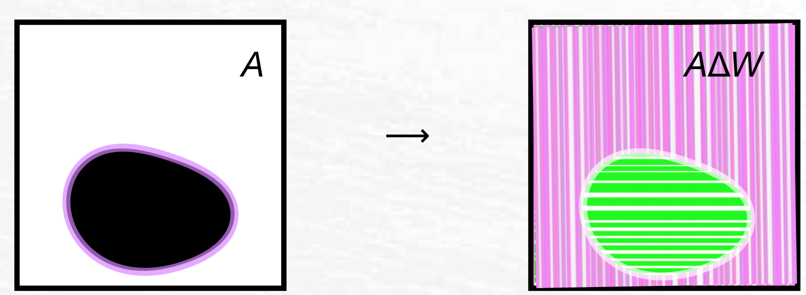
$(\,P(\mathbb{R}^2), \subseteq\,)$

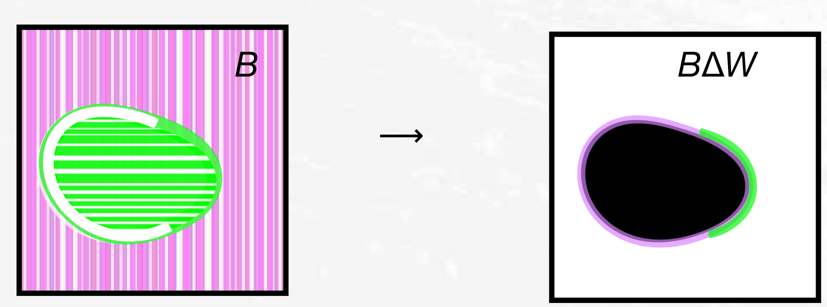


$X \longrightarrow X \Delta W$

$(\,P(\mathbb{R}^2), \sqsubseteq^W)$

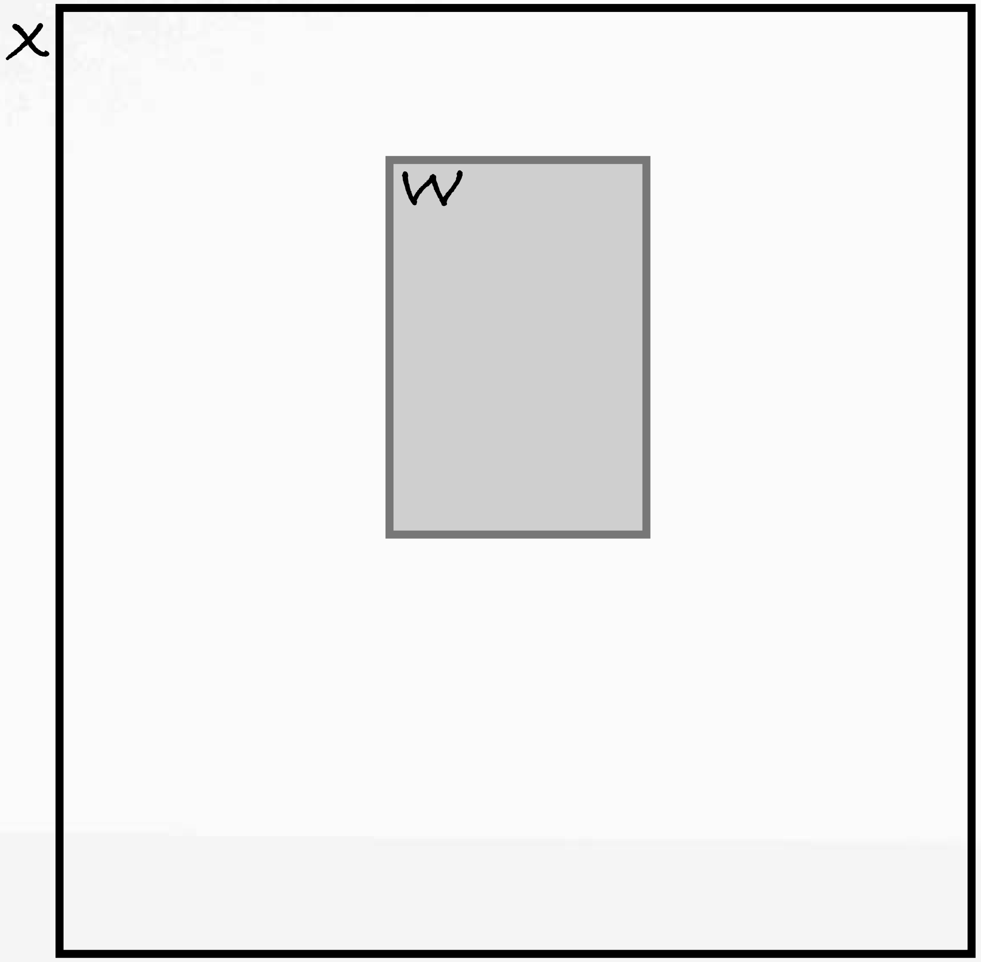


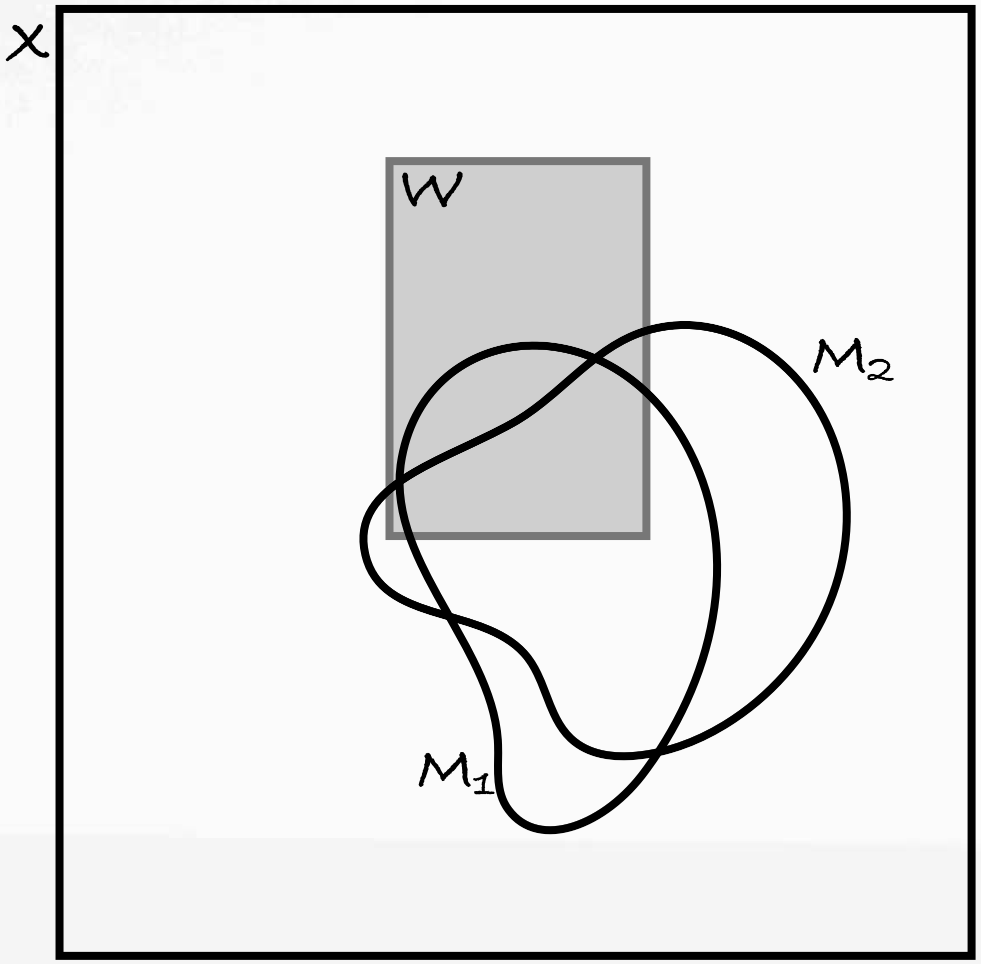


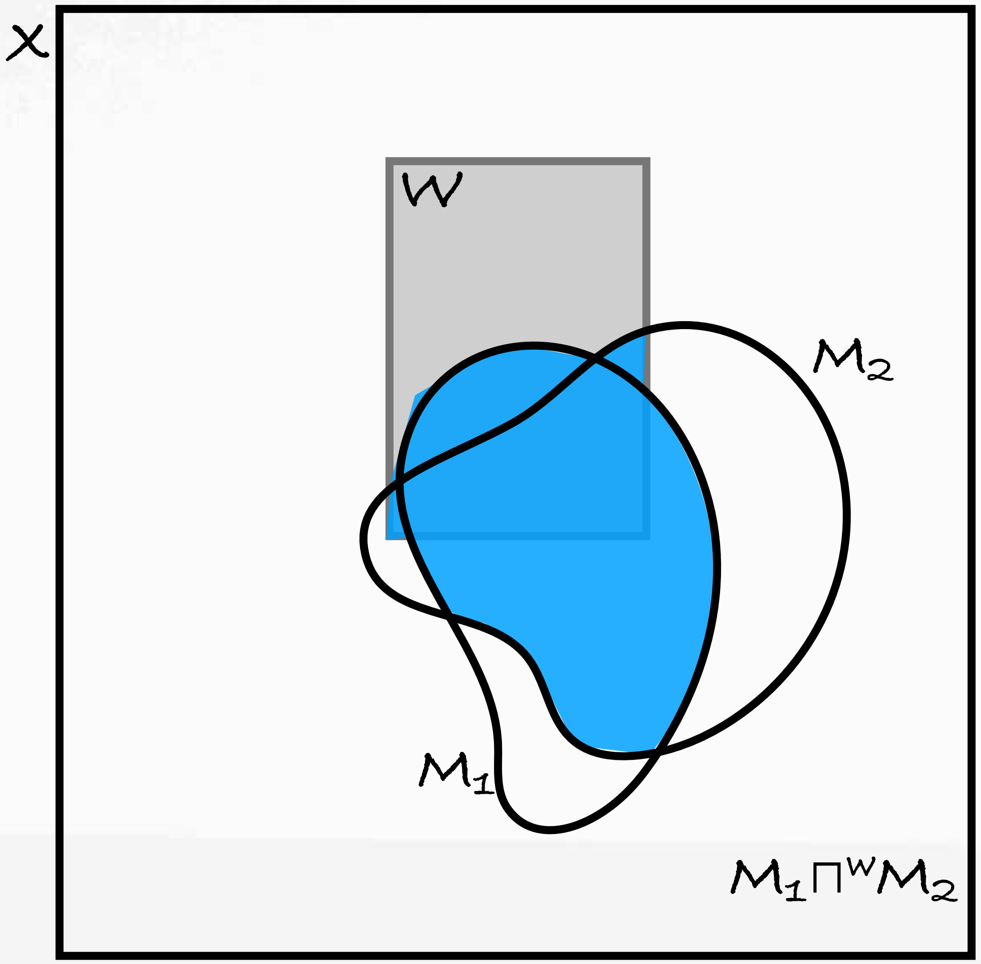


…

Extensión de los operadores w-intersección $\sqcap^w$ y w-unión $\sqcup^w$ a familias cualesquiera de subconjuntos $(M_s)_{s \in S}$

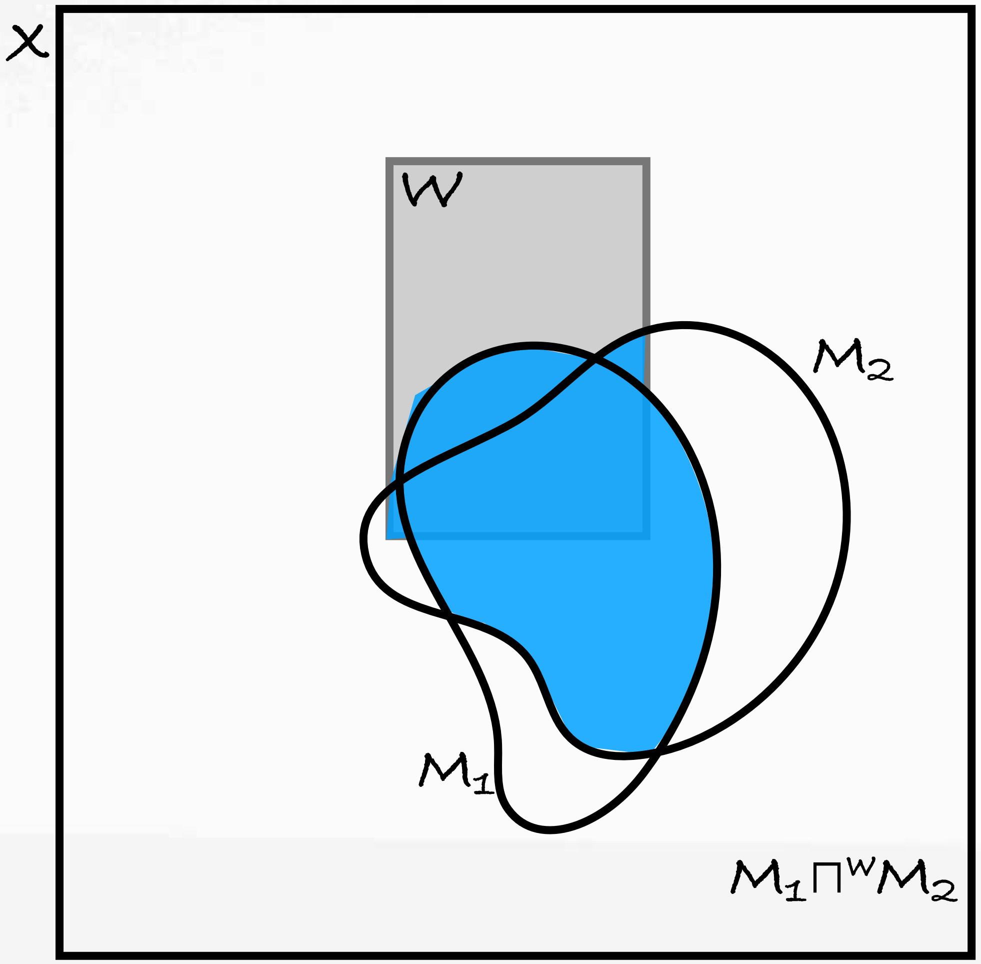

X
W


X
W
M_2
M_1



$M_1 \sqcap^W M_2 =$

$(M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$

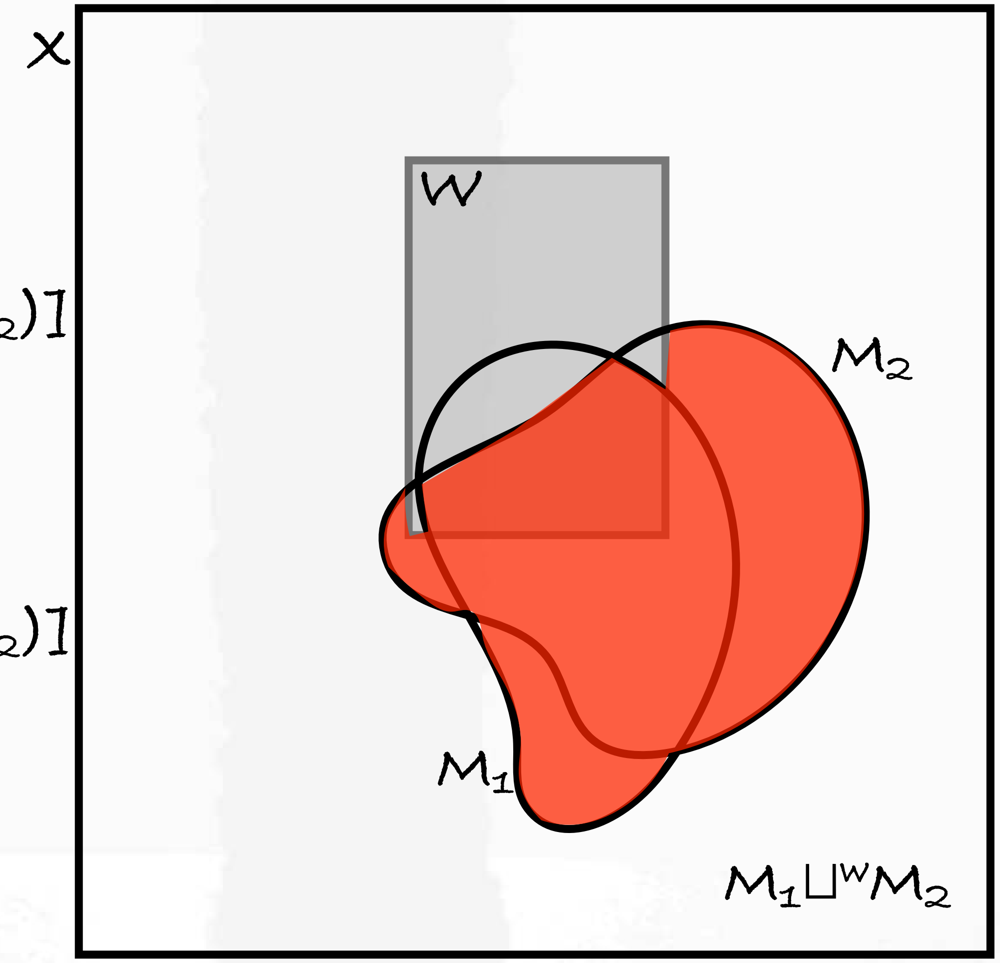


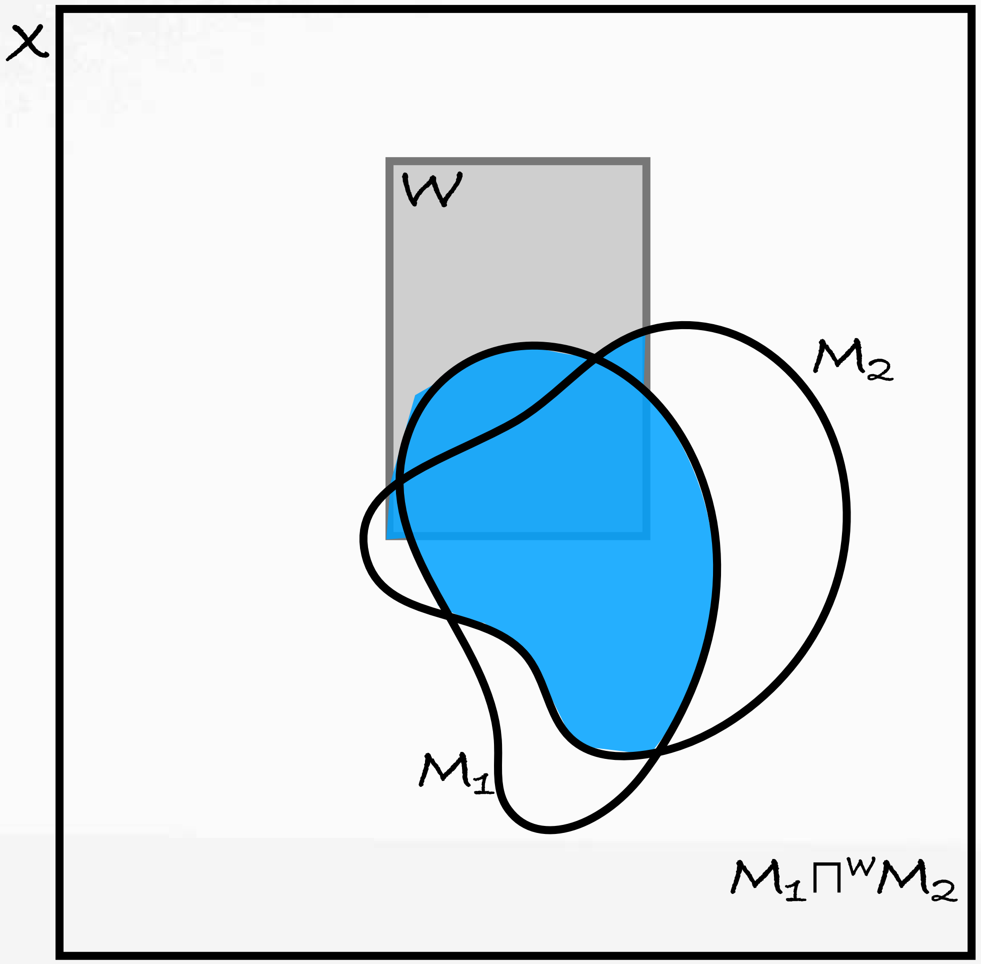
$M_1 \sqcap^W M_2 =$

$(M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$

$M_1 \sqcup^W M_2 =$

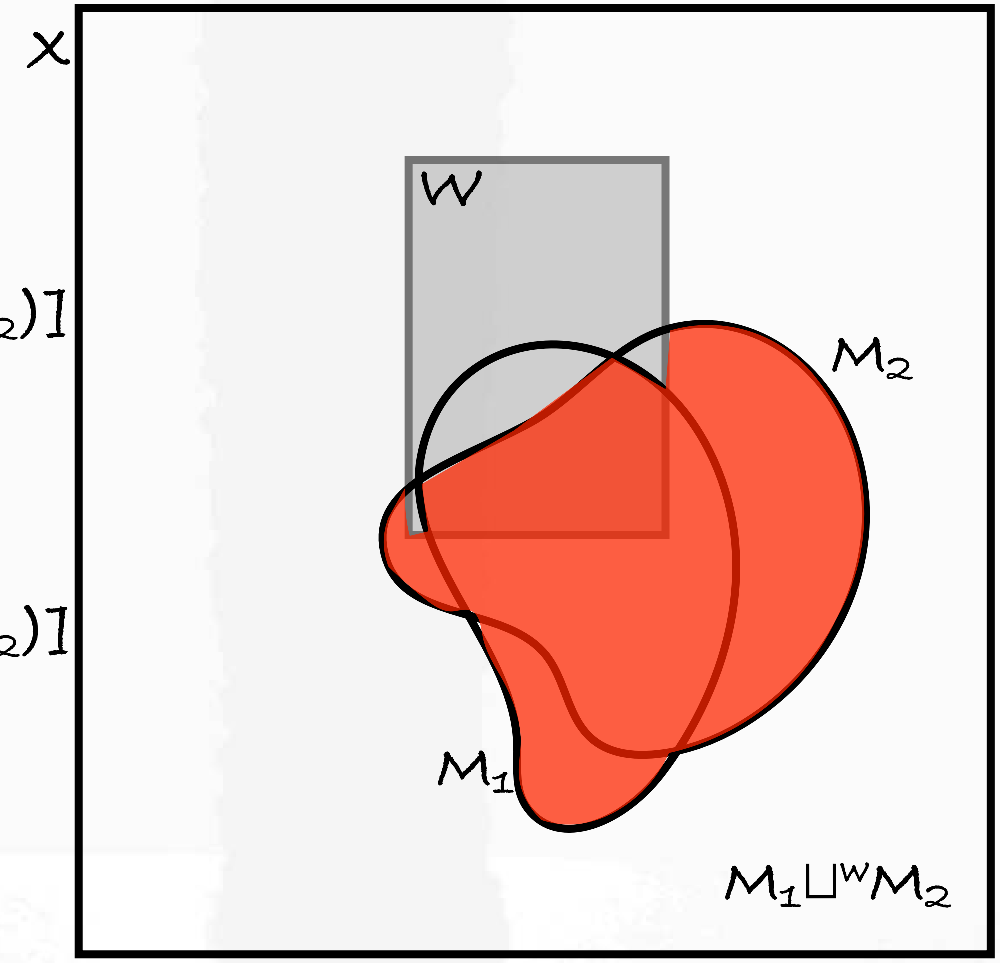
$(M_1 \cap M_2) \cup [W^c \cap (M_1 \cup M_2)]$

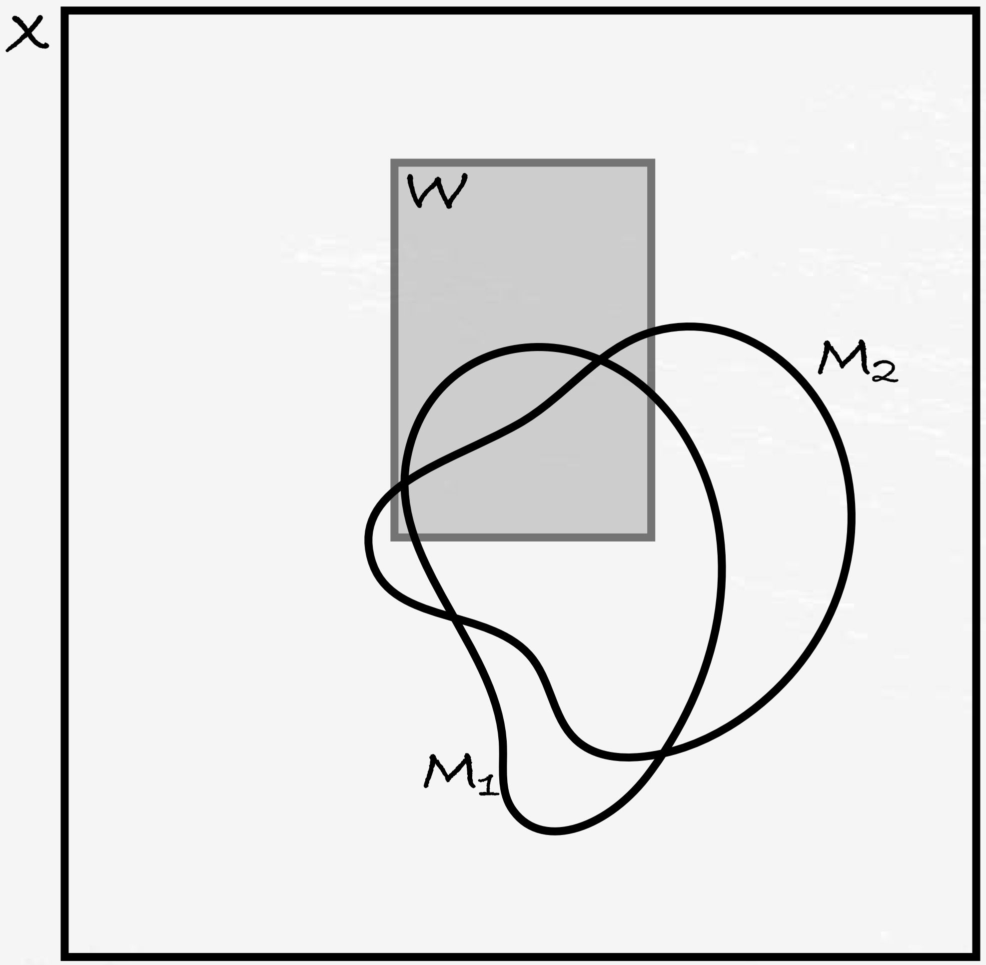


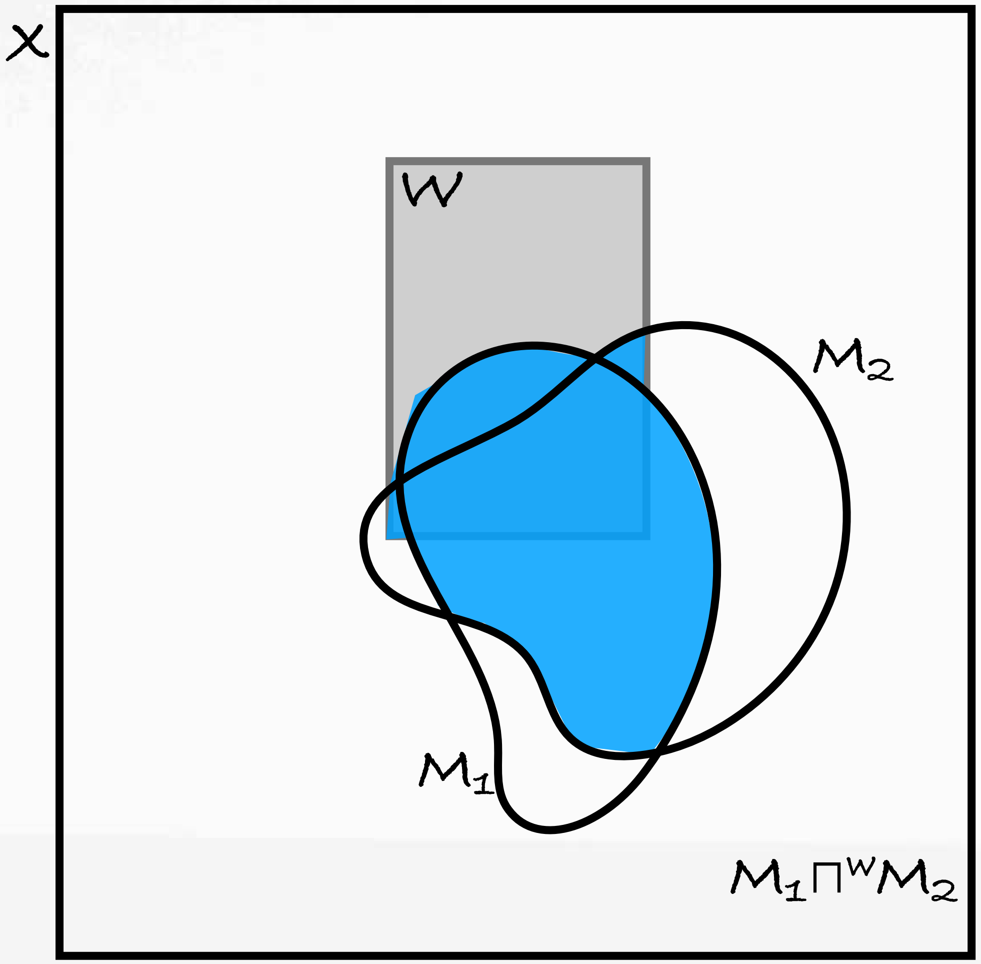


$$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$$

$$M_1 \sqcup^W M_2 = (M_1 \cap M_2) \cup [W^c \cap (M_1 \cup M_2)]$$





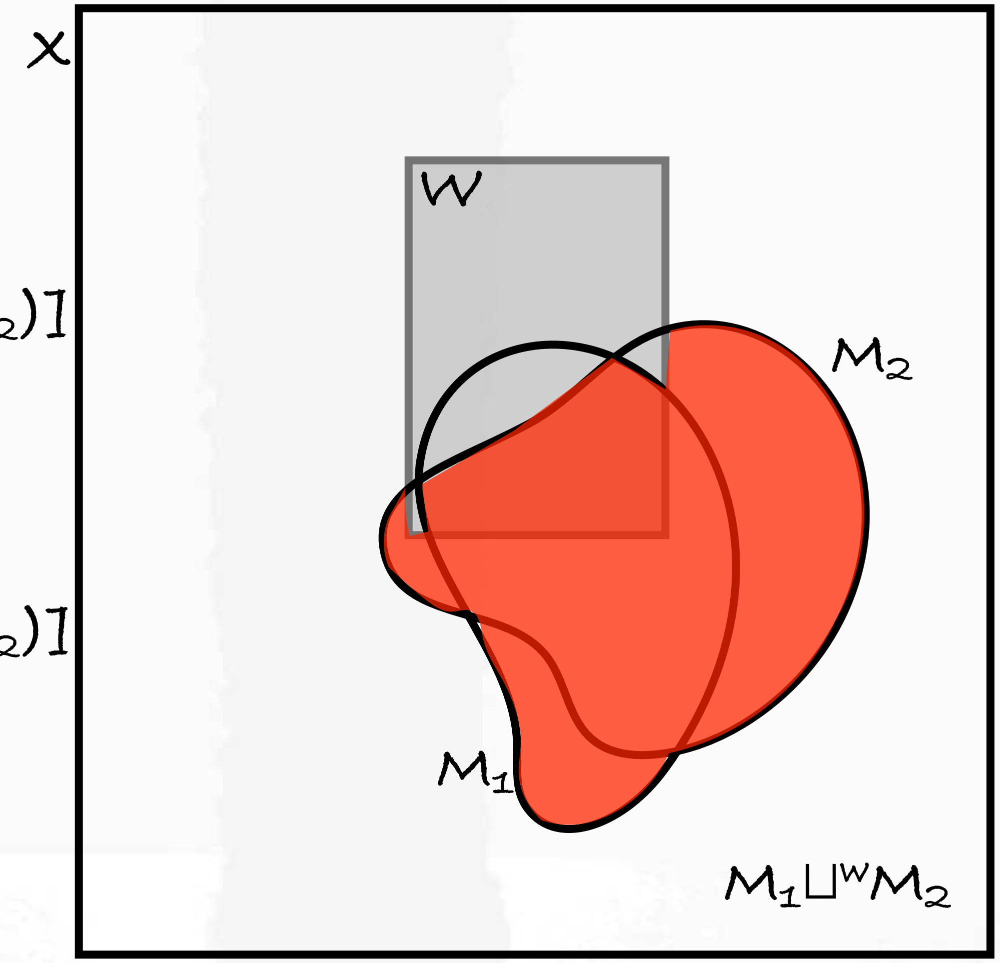


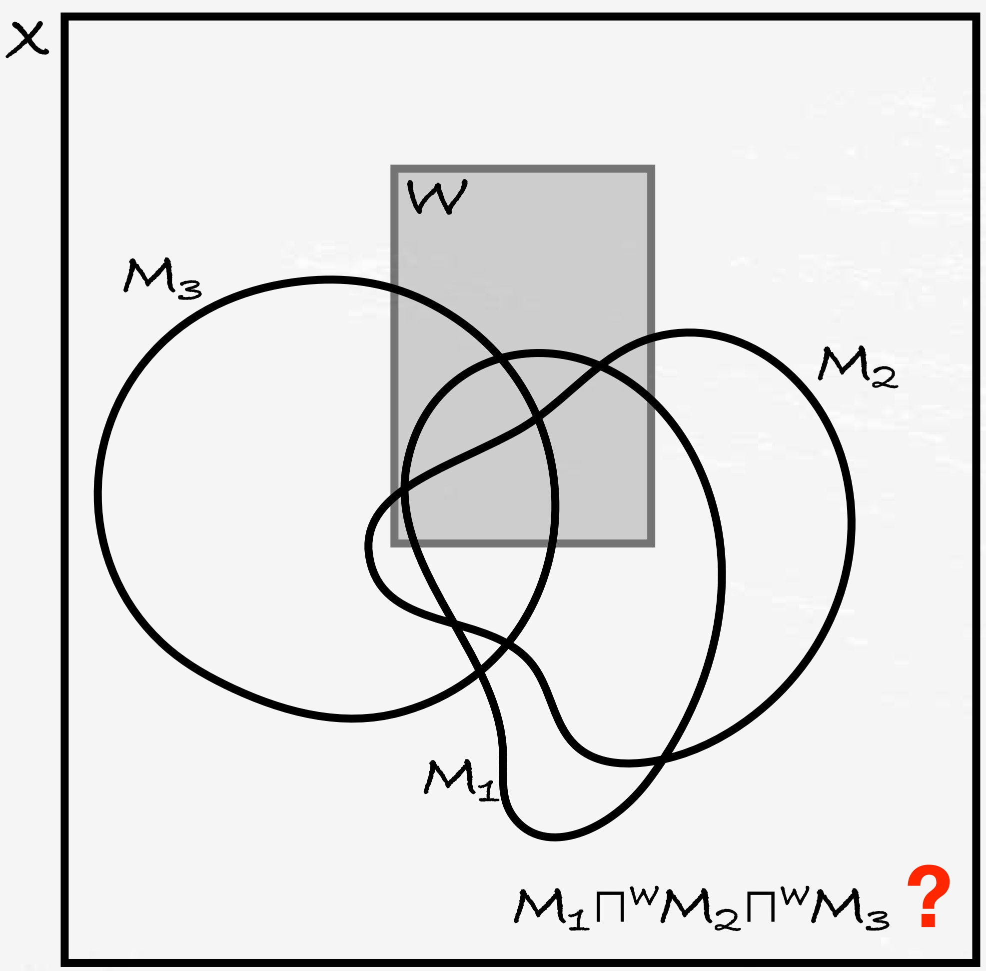
$M_1 \sqcap^W M_2 =$

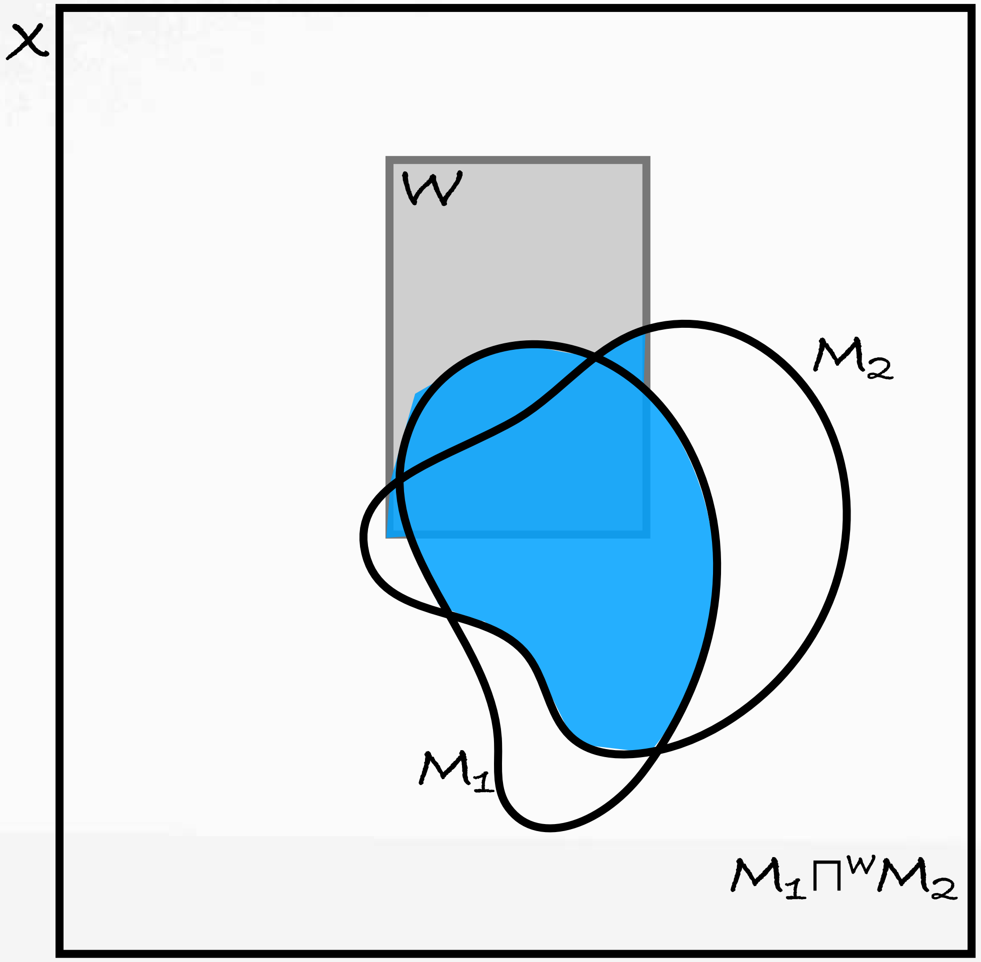
$(M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$

$M_1 \sqcup^W M_2 =$

$(M_1 \cap M_2) \cup [W^c \cap (M_1 \cup M_2)]$

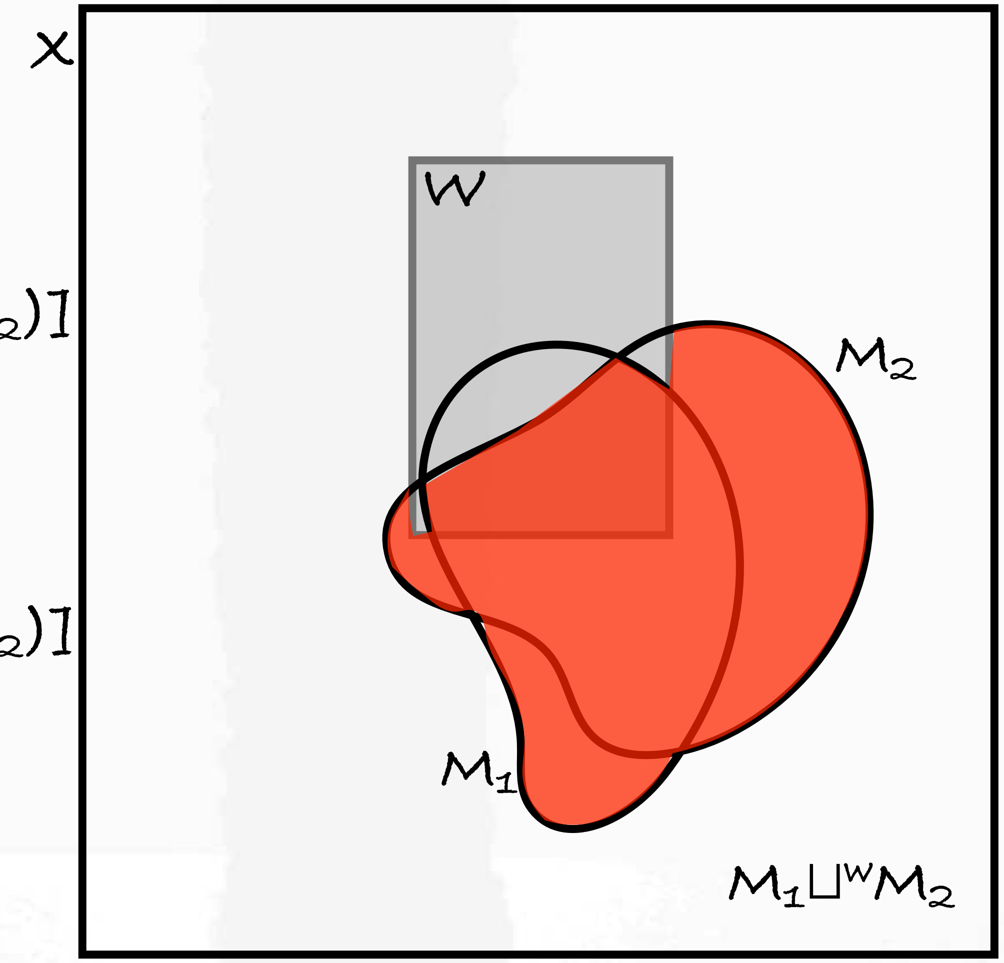


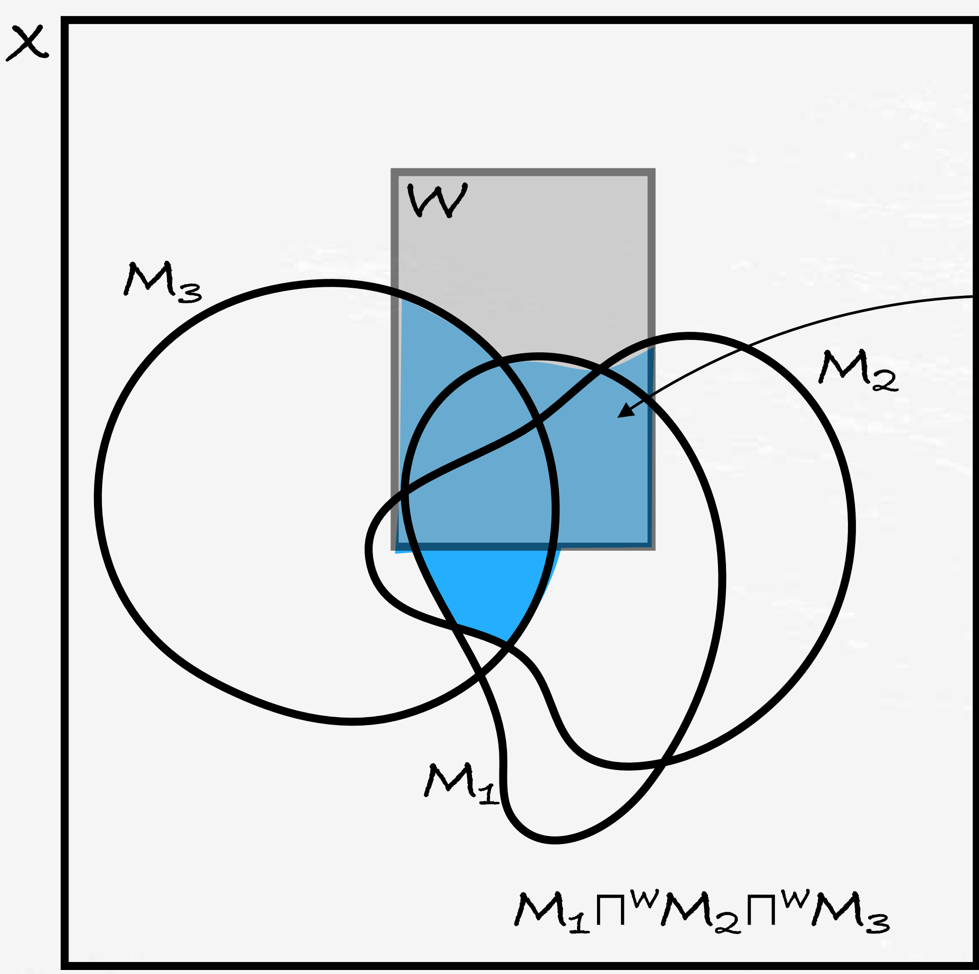




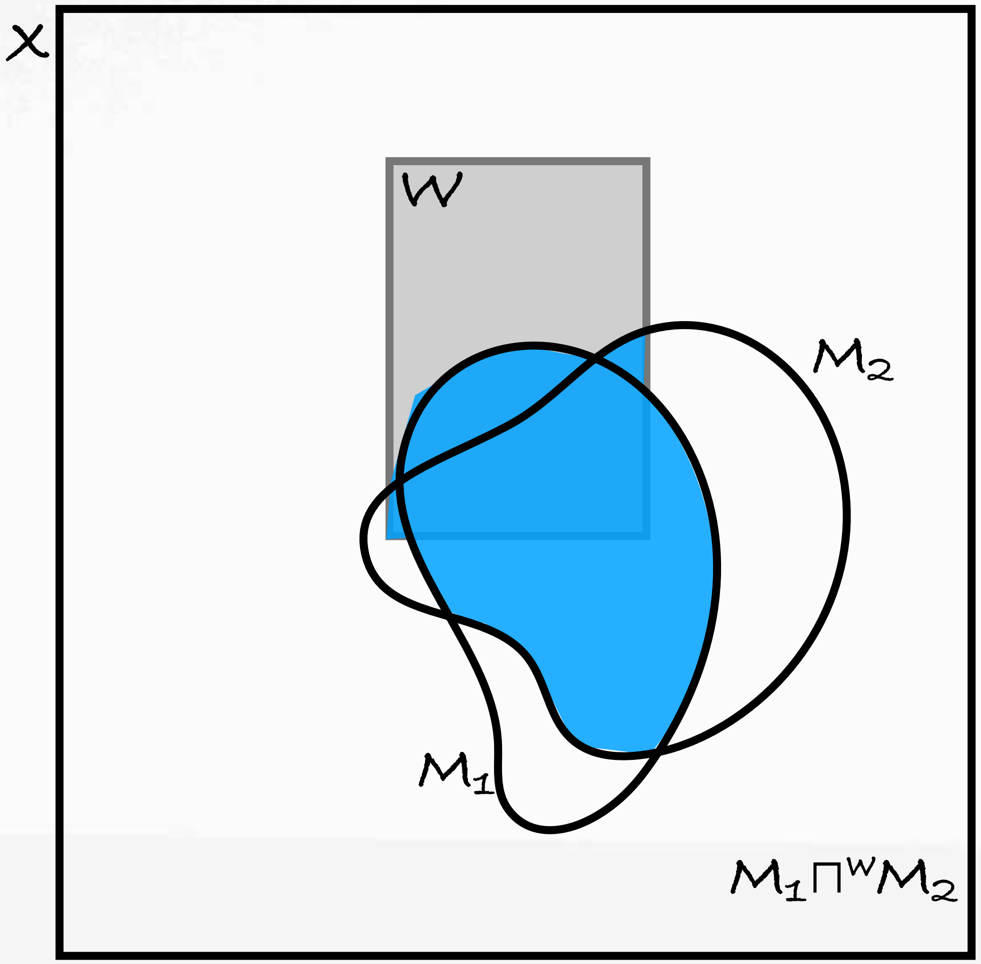
$$M_1 \sqcap^W M_2 =$$
$$(M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$$

$$M_1 \sqcup^W M_2 =$$
$$(M_1 \cap M_2) \cup [W^c \cap (M_1 \cup M_2)]$$



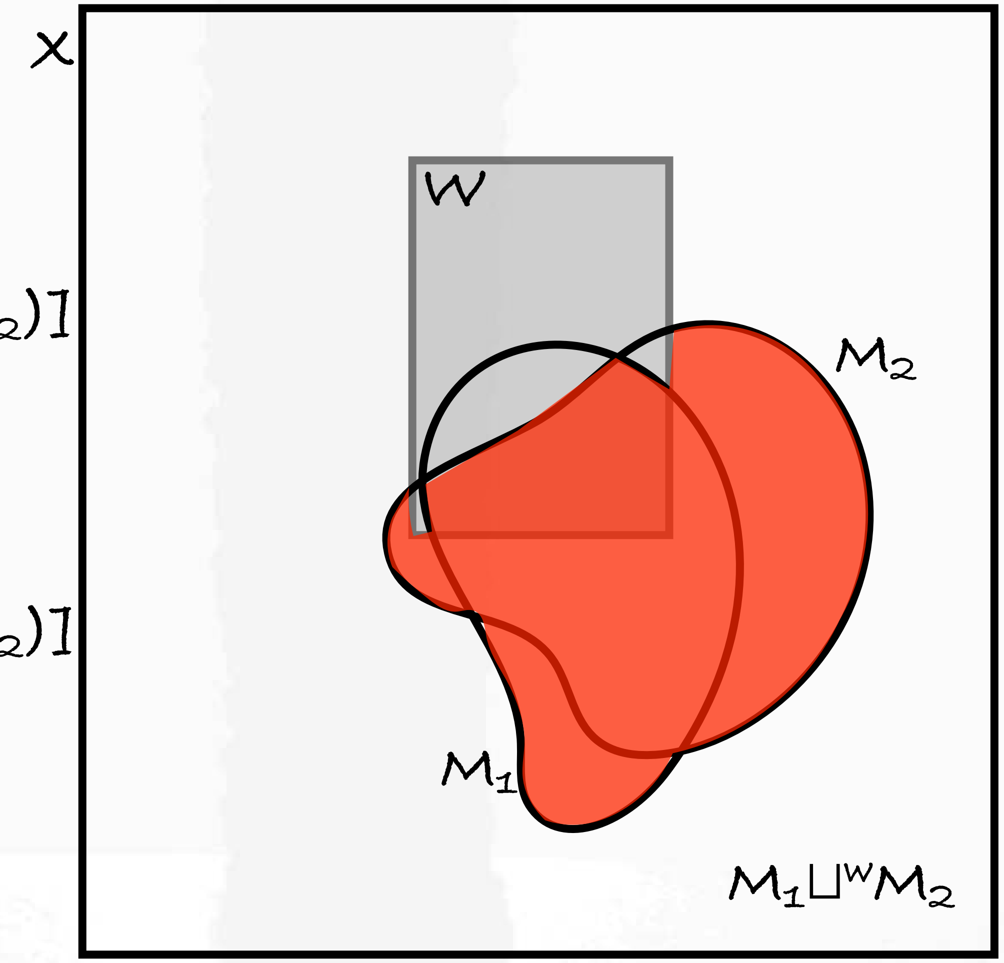


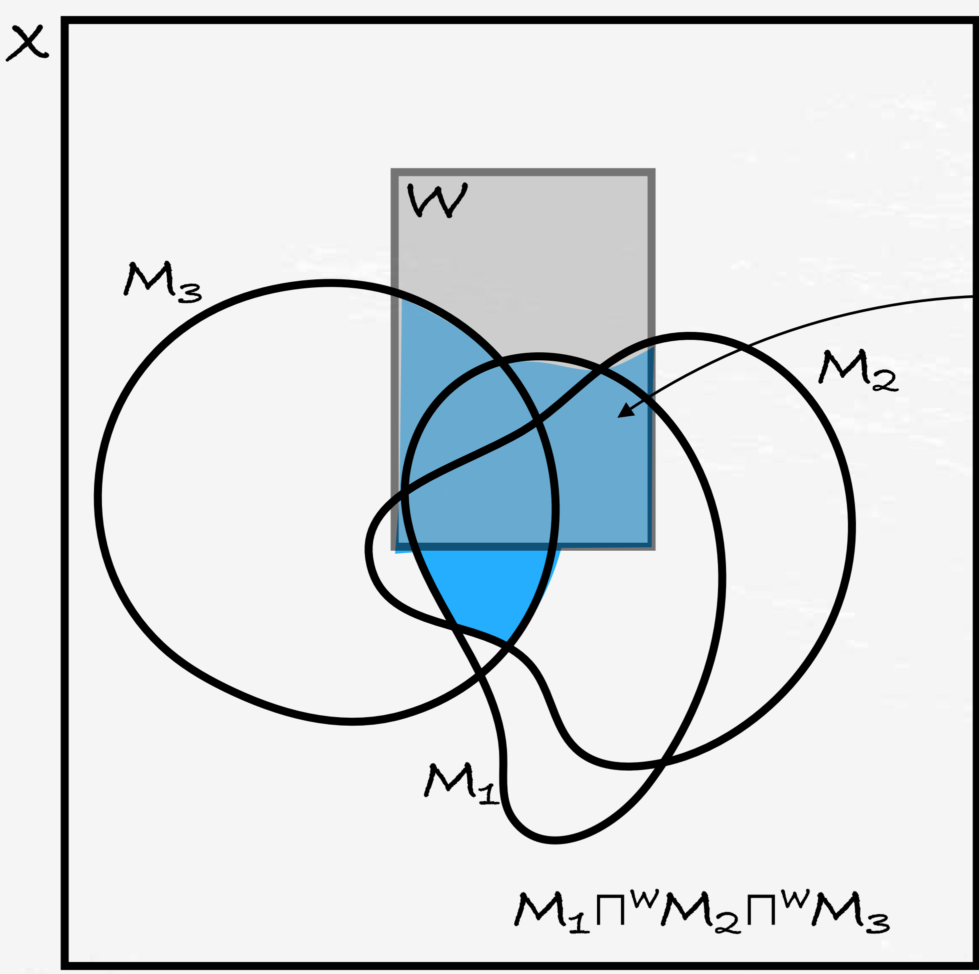
$$M_1 \sqcap^W M_2 \sqcap^W M_3 =$$
$$(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup$$
$$[W \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3)]$$



$M_1 \sqcap^W M_2 =$
$(M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$

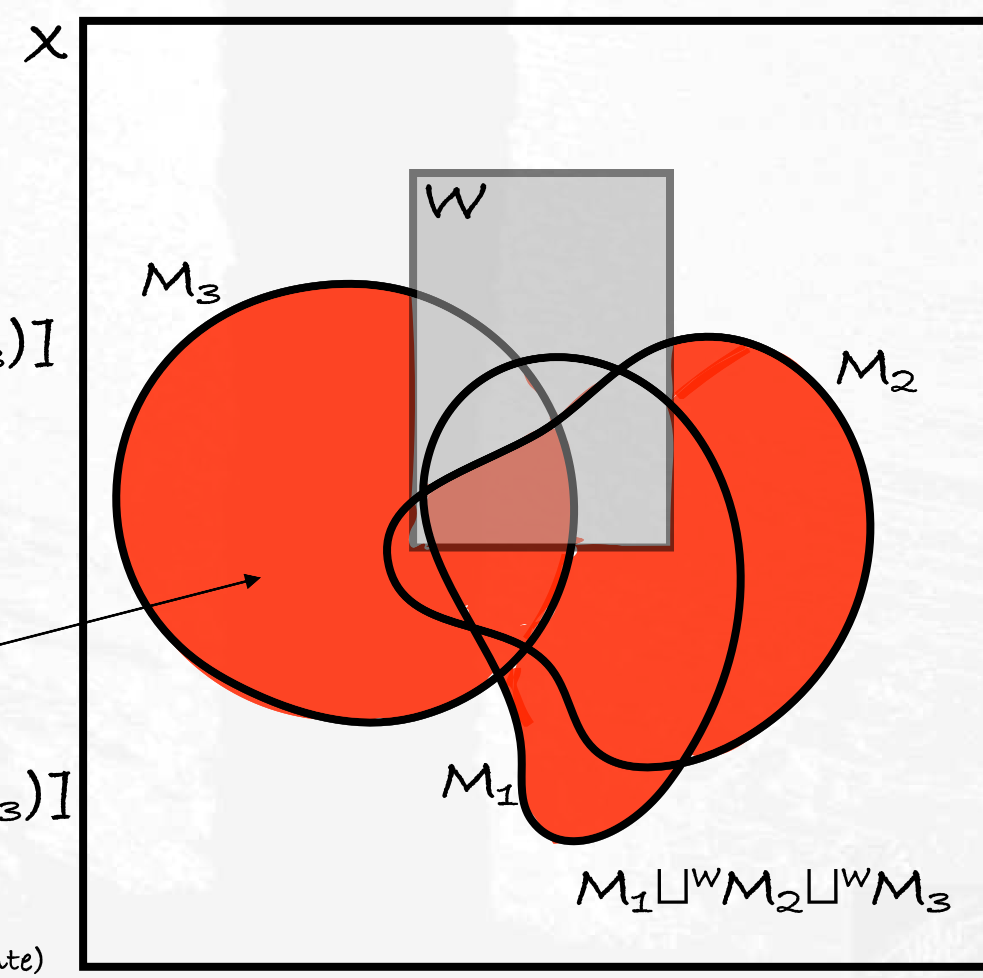
$M_1 \sqcup^W M_2 =$
$(M_1 \cap M_2) \cup [W^c \cap (M_1 \cup M_2)]$





$M_1 \sqcap^W M_2 \sqcap^W M_3 =$
$(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup$
$[W \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3)]$

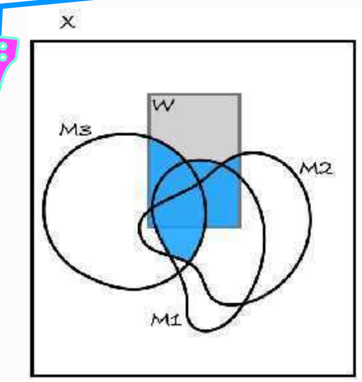
$M_1 \sqcup^W M_2 \sqcup^W M_3 =$
$(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup$
$[W^c \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3)]$



(formalización en la transparencia siguiente)

$(P(X), \sqsubseteq^{W})$ es un retículo completo distributivo y con la complementación, un Álgebra de Boole

Proposición. Para todo $W\in P(X)$, el Álgebra de Boole $(P(X),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w,w^c),^c,)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $P(X)$ tiene elementos w-ínfimo $\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s$ y w-supremo $\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s$ tales que

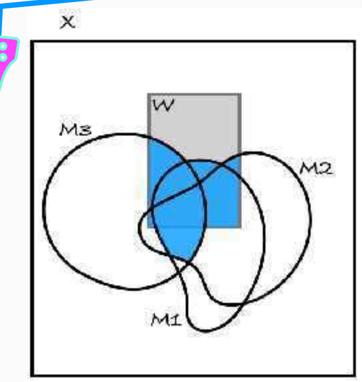


$M_1 \sqcap^w M_2 \sqcap^w M_3$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)],$$

$$\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s = \underset{s\in S}{\sqcap^{w^c}} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[\,W^c\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)].$$

Proposición. Para todo $W\in P(X)$, el Álgebra de Boole $(P(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),{}^c,)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $P(X)$ tiene elementos w-ínfimo $\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s$ y w-supremo $\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s$ tales que



$M_1\sqcap^W M_2\sqcap^W M_3$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)],$$

$$\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s = \underset{s\in S}{\sqcap^{W^c}} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[W^c\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)].$$

Demostración. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X.

Demostremos primero que $(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)\sqsubseteq^W M_k\ \forall k\in S$:

$$(M_k\cap W)\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\subseteq[(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]] = \underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s$$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s = [(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]]\subseteq[M_k\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]]\subseteq(M_k\cup W).$$

luego $\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(P(X),\sqsubseteq^W)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H\sqsubseteq^W M_s\ \forall s\in S$. Entonces $(M_s\cap W)\subseteq H\subseteq(M_s\cup W)\ \forall s\in S$, luego

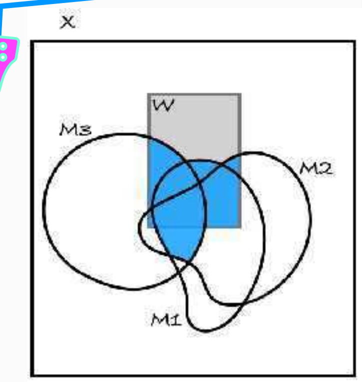
$(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)\cap W=[(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]]\cap W=[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] =\bigcup_{s\in S}(M_s\cap W)\subseteq H$, y

$H\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup W)=[W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]=[W\cup(\bigcup_{s\in S} M_s)]\cap[W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]=[(\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]]\cup W=(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)\cup W,$

que demuestra que $H\sqsubseteq^W(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

Un razonamiento análogo prueba que $\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s$ es el w-supremo en $(P(X),\sqsubseteq^W)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

Proposición. Para todo $W\in P(X)$, el Álgebra de Boole $(P(X),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w, w^c),^c,)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $P(X)$ tiene elementos w-ínfimo $\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s$ y w-supremo $\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s$ tales que



$M_1\sqcap^w M_2 \sqcap^w M_3$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)],$$

$$\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s = \underset{s\in S}{\sqcap^{w^c}} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = (\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[\,W^c\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)].$$

Demostración. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X.

Demostremos primero que $(\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s)\sqsubseteq^w M_k\ \forall k\in S$:

$$(M_k\cap W)\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\subseteq[\,(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\,] = \underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s$$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s = [\,(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\,]\subseteq[\,M_k\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\,]\subseteq(M_k\cup W).$$

luego $\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(P(X),\sqsubseteq^w)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H\sqsubseteq^w M_s\ \forall s\in S$. Entonces $(M_s\cap W)\subseteq H\subseteq(M_s\cup W)\ \forall s\in S$, luego

$(\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s)\cap W=[(\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]\,]\cap W=[\,W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = \bigcup_{s\in S}(M_s\cap W)\subseteq H$, y

$H\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup W) = [\,W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]=[\,W\cup(\bigcup_{s\in S} M_s)]\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]=[(\bigcup_{s\in S} M_s)\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup W=(\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s)\cup W$,

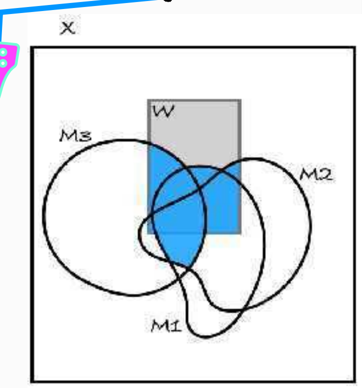
que demuestra que $H\sqsubseteq^w(\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

Un razonamiento análogo prueba que $\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s$ es el w-supremo en $(P(X),\sqsubseteq^w)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

Corolario. Si definimos $\sqcap^w\emptyset=W^c$ y $\sqcup^w\emptyset=W$, entonces $(P(X),\sqsubseteq^w)$ es un retículo completo.

(Se demuestra que es distributivo y con la complementación, es Álgebra de Boole completa). ∎

Proposición. Para todo $W\in P(X)$, el Álgebra de Boole $(P(X),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w,w^c),^c,)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $P(X)$ tiene elementos w-ínfimo $\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s$ y w-supremo $\underset{s\in S}{\sqcup^w}M_s$ tales que



$M_1\sqcap^w M_2\sqcap^w M_3$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s = (\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]= (\bigcup_{s\in S}M_s)\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S}M_s)],$$

$$\underset{s\in S}{\sqcup^w}M_s = \underset{s\in S}{\sqcap^{w^c}}M_s =(\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[\,W^c\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]= (\bigcup_{s\in S}M_s)\cap[\,W^c\cup(\bigcap_{s\in S}M_s)].$$

Demostración. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X.

Demostremos primero que $(\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s)\sqsubseteq^w M_k\ \forall k\in S$:

$$(M_k\cap W)\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]\subseteq[\,(\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]\,]=\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s$$

$$\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s = [\,(\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]\,]\subseteq[\,M_k\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]\,]\subseteq(M_k\cup W).$$

luego $\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(P(X),\sqsubseteq^w)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H\sqsubseteq^w M_s\ \forall s\in S$. Entonces $(M_s\cap W)\subseteq H\subseteq(M_s\cup W)\ \forall s\in S$, luego

$(\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s)\cap W=[(\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]\,]\cap W=[\,W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]=\bigcup_{s\in S}(M_s\cap W)\subseteq H$, y

$H\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup W)=[\,W\cup(\bigcap_{s\in S}M_s)]=[\,W\cup(\bigcup_{s\in S}M_s)]\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S}M_s)]=[(\bigcup_{s\in S}M_s)\cap[\,W\cup(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup W=(\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s)\cup W$,

que demuestra que $H\sqsubseteq^w(\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

Un razonamiento análogo prueba que $\underset{s\in S}{\sqcup^w}M_s$ es el w-supremo en $(P(X),\sqsubseteq^w)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

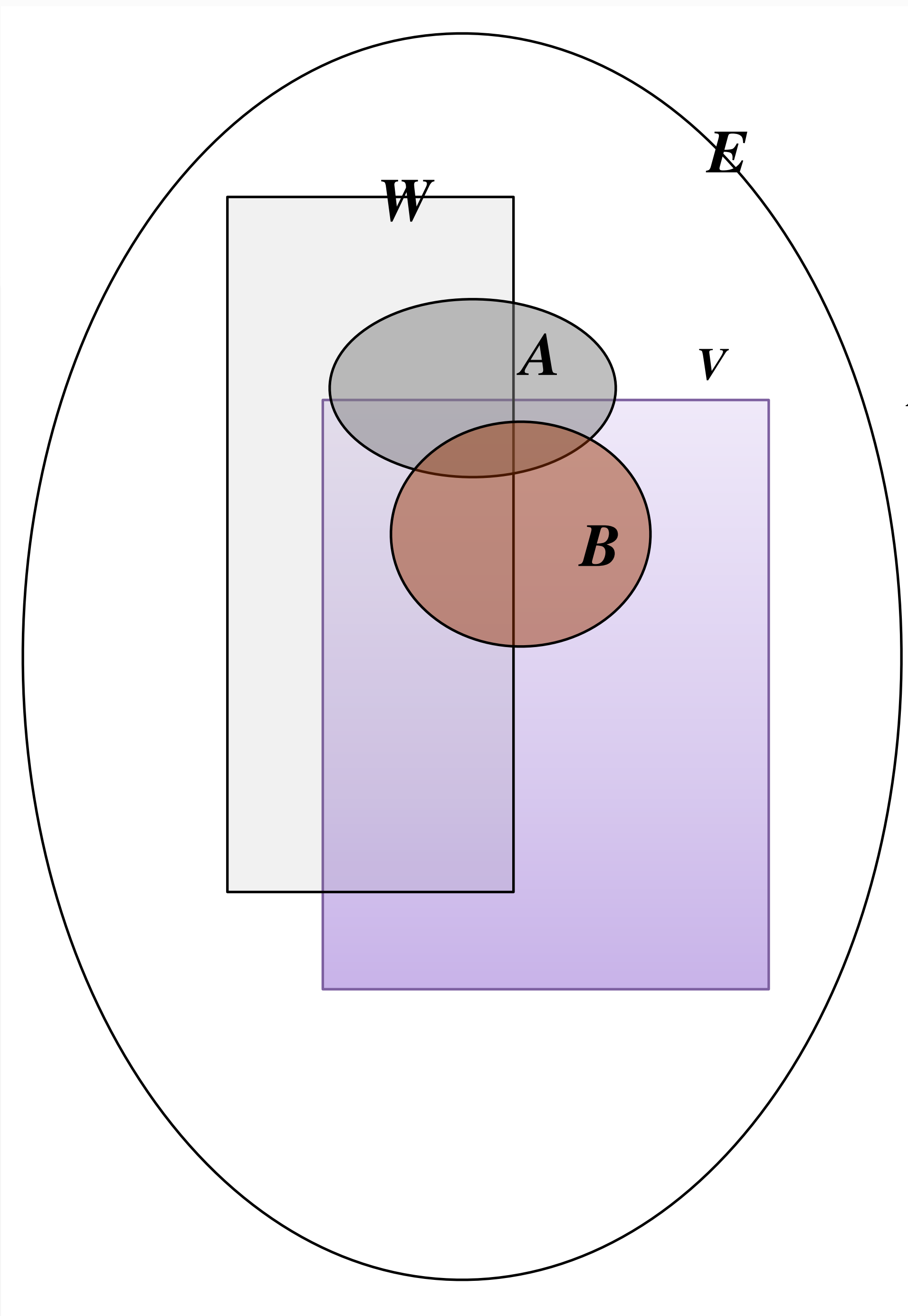
Corolario. Si definimos $\sqcap^w\emptyset=W^c$ y $\sqcup^w\emptyset=W$, entonces $(P(X),\sqsubseteq^w)$ es un retículo completo.
(Se demuestra que es distributivo y con la complementación, es Álgebra de Boole completa). ∎

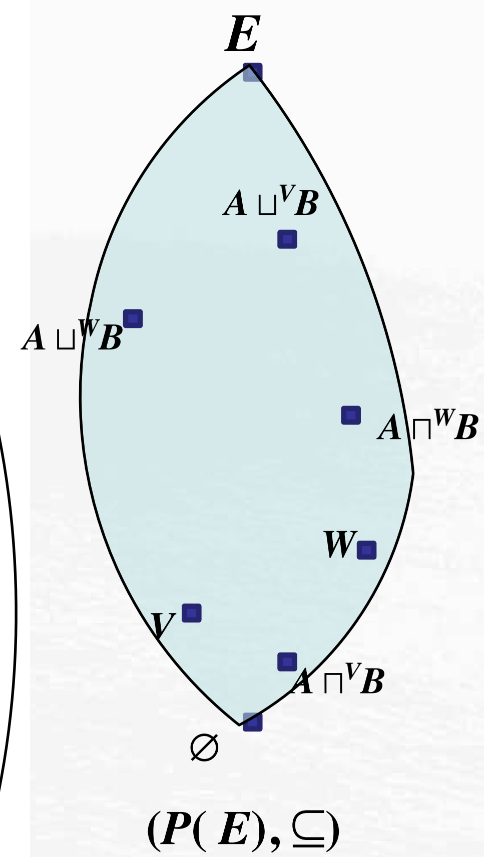
Nota. Es inmediato comprobar que se cumplen las leyes de Morgan: $(\underset{s\in S}{\sqcap^w}M_s)^c=(\underset{s\in S}{\sqcup^w}M_s^c)$,... etc

Ilustración de algunas propiedades asociadas a los operadores w-intersección $\sqcap^{w}$ y w-unión $\sqcup^{w}$

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$





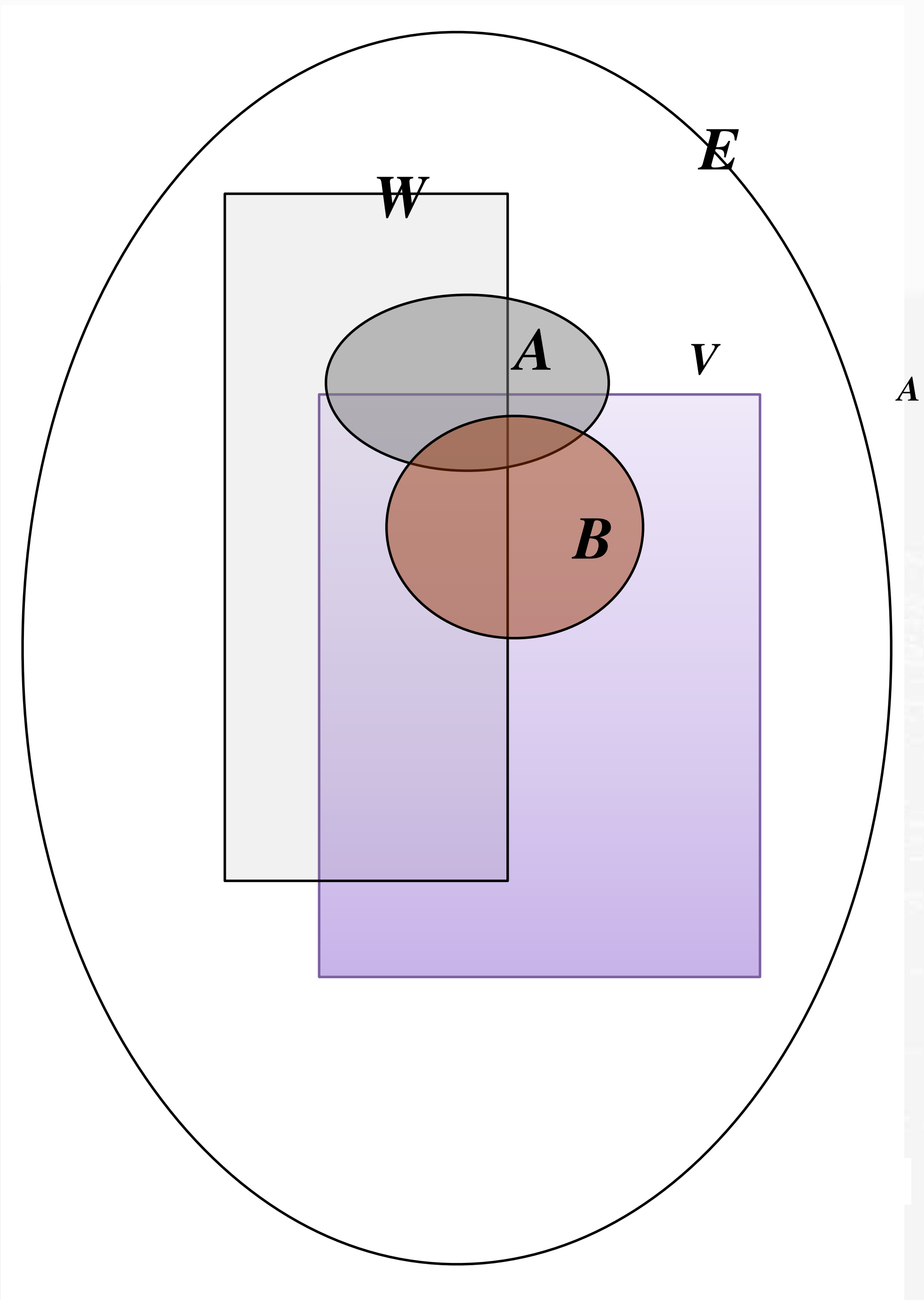
Relación entre pares de operadores

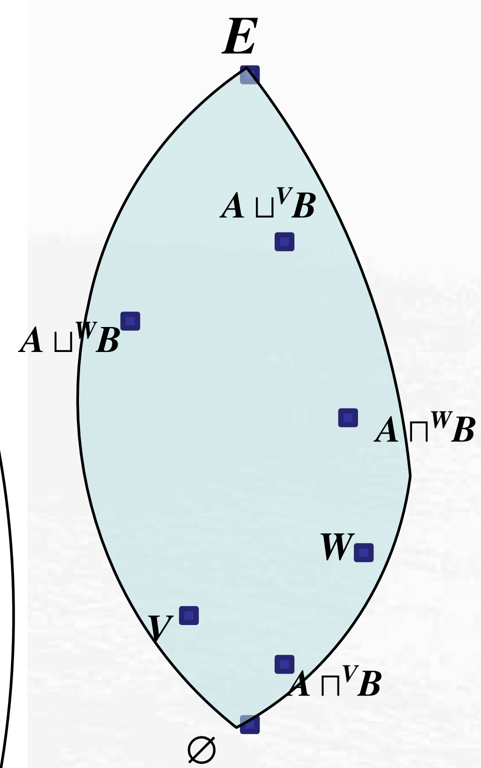
$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$





$(P(E), \subseteq)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

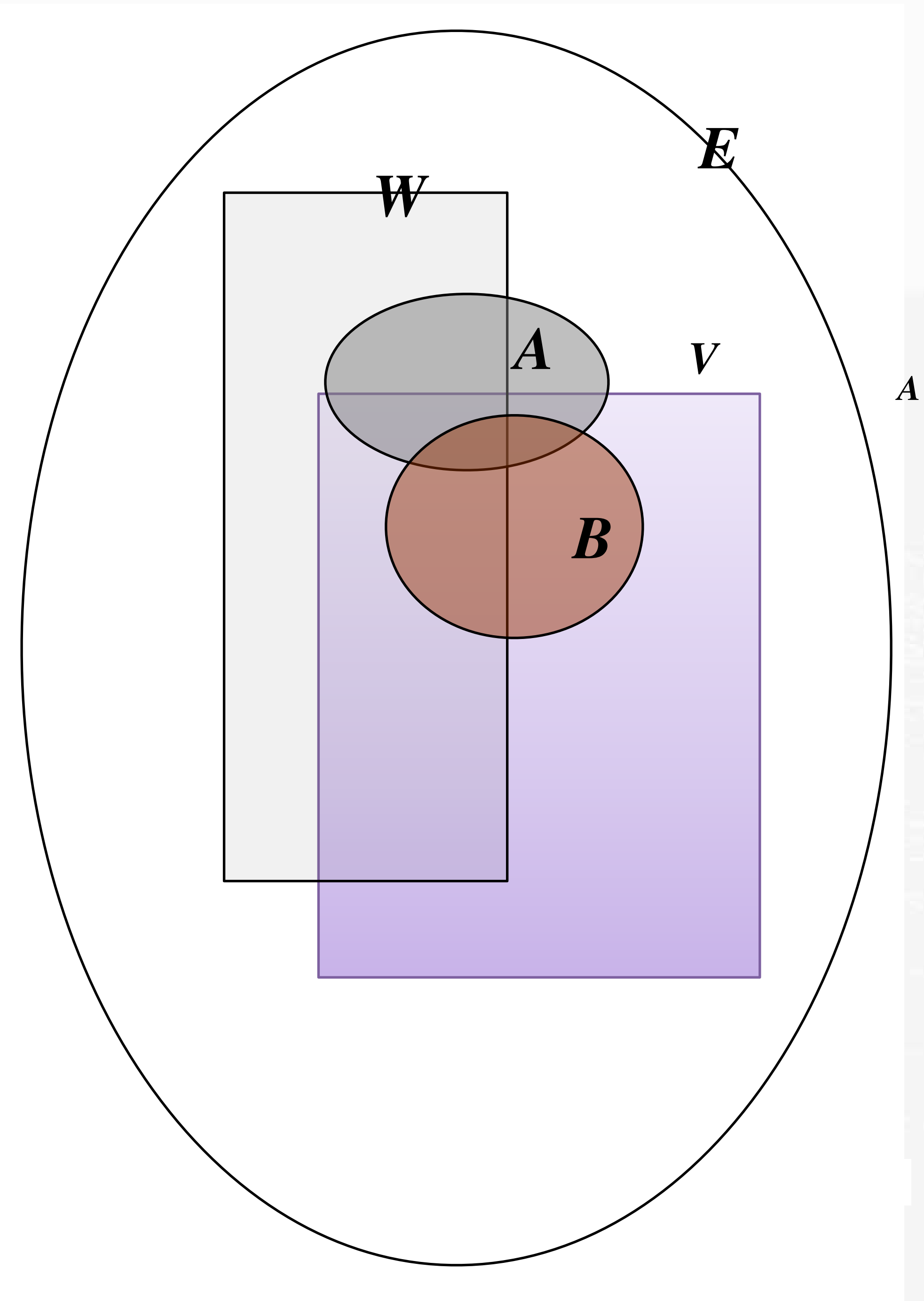
Relación entre pares de operadores

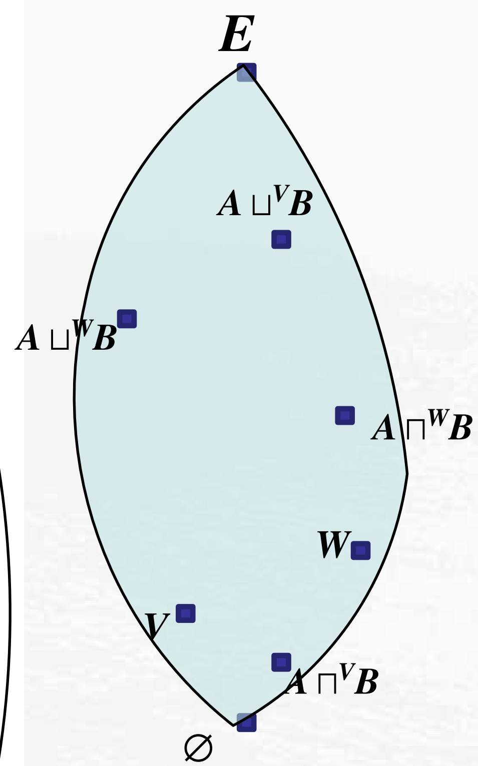
$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

<u>Proposición</u>(*)

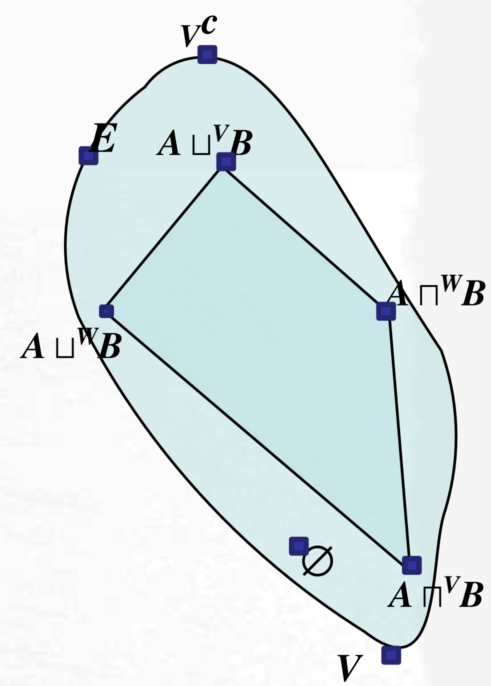
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

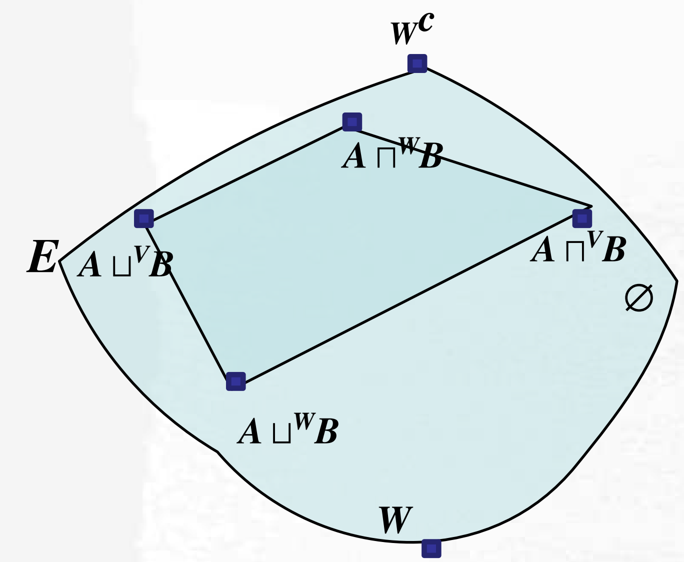




(P(E), ⊆)



(P(E), ⊑^V)



(P(E), ⊑^W)

(*) (<u>Nota</u>. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

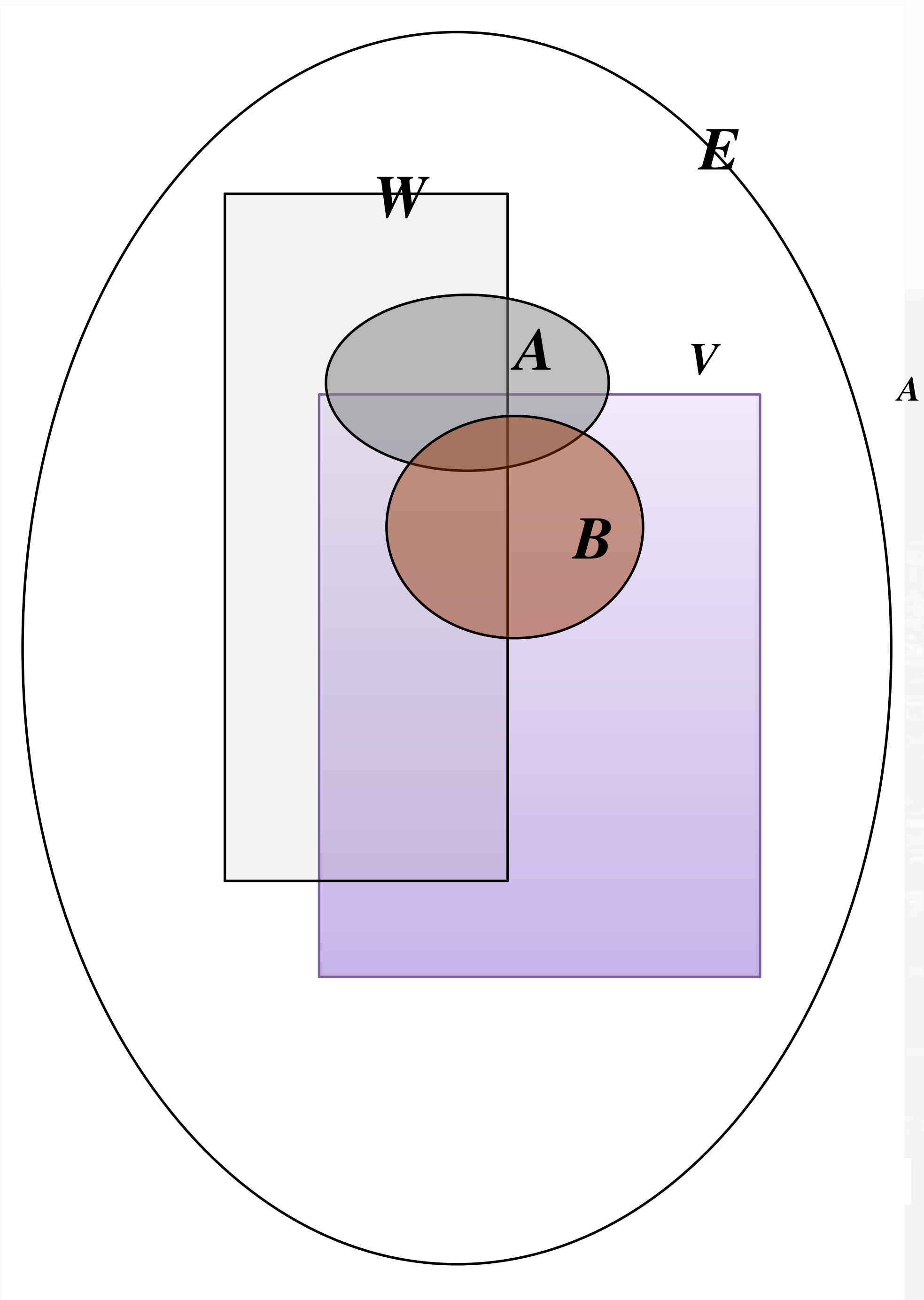
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

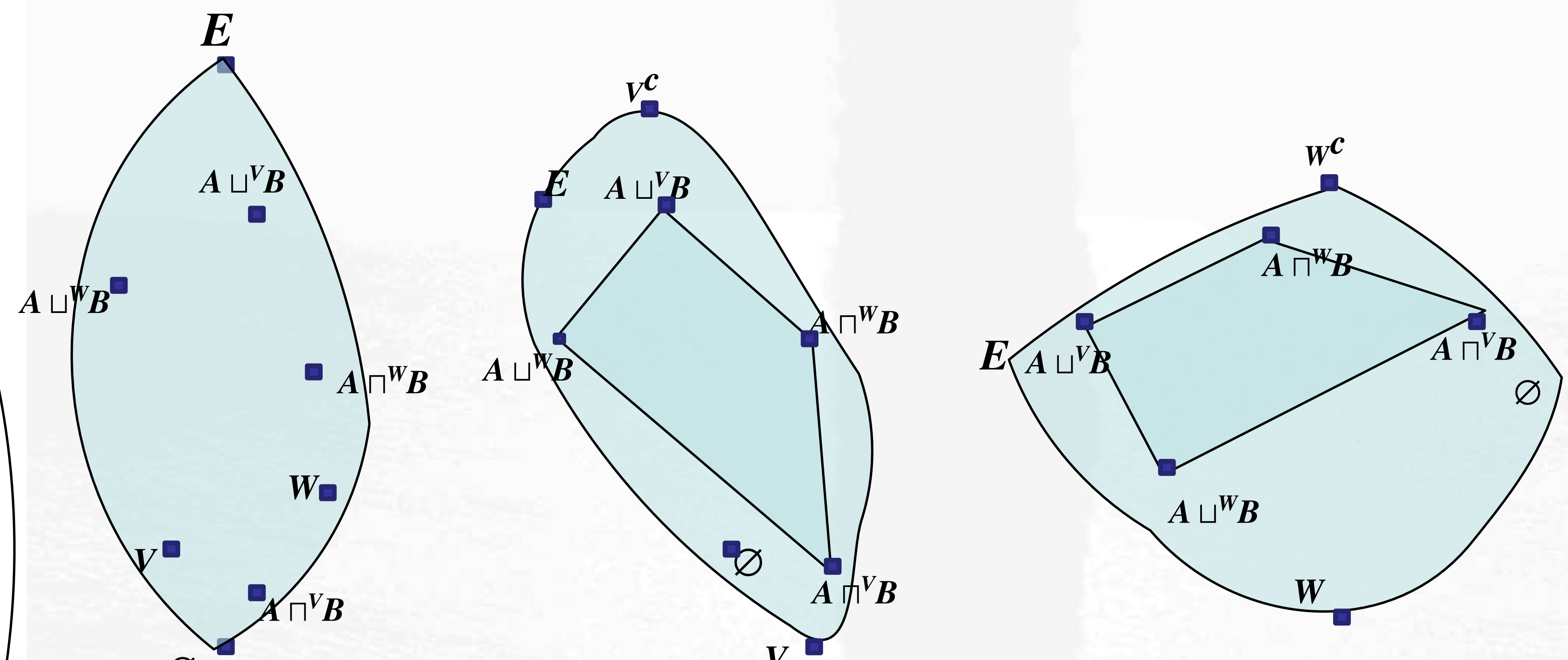
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$





$(P(E), \subseteq)$ $(P(E), \sqsubseteq^V)$ $(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

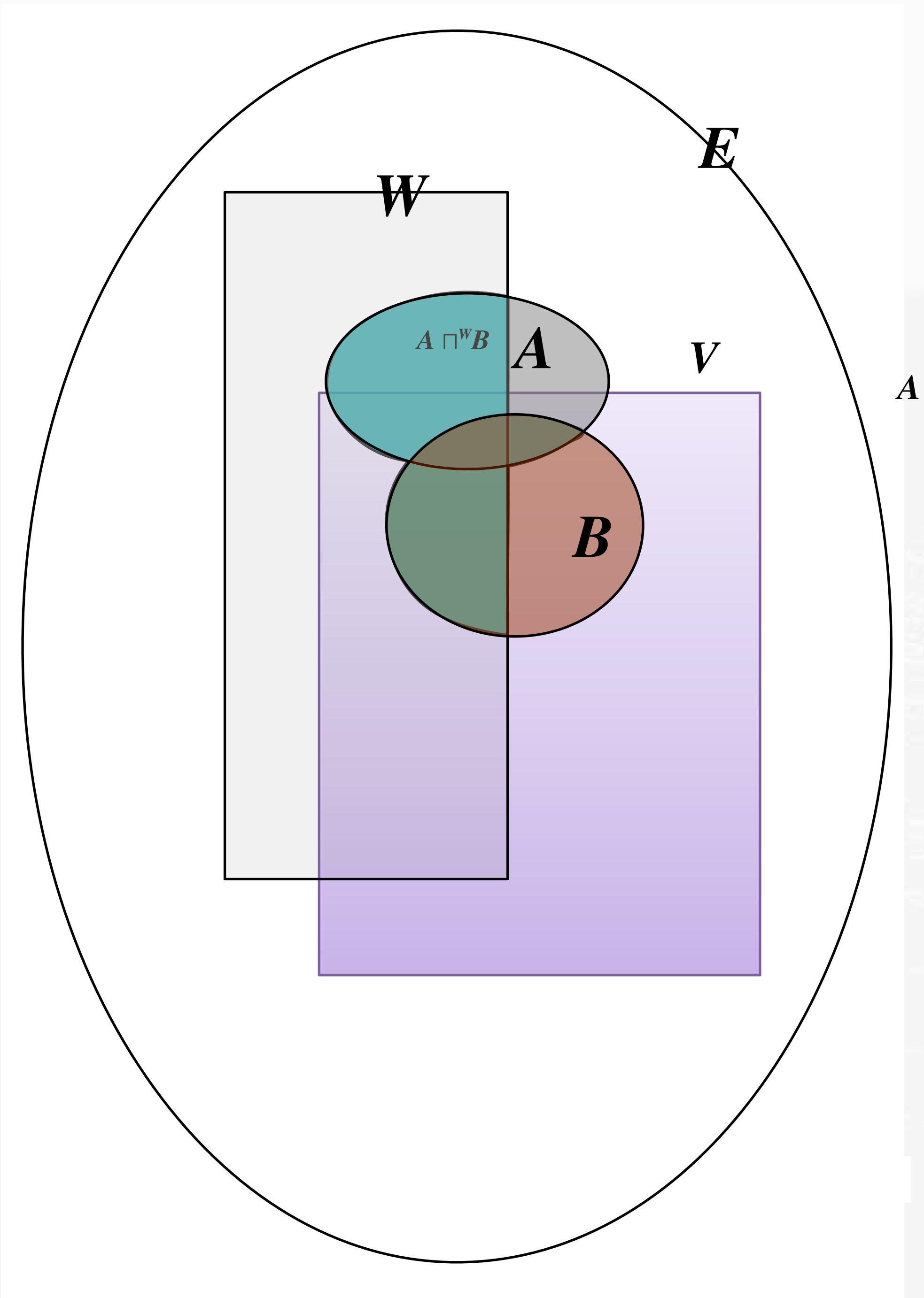
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

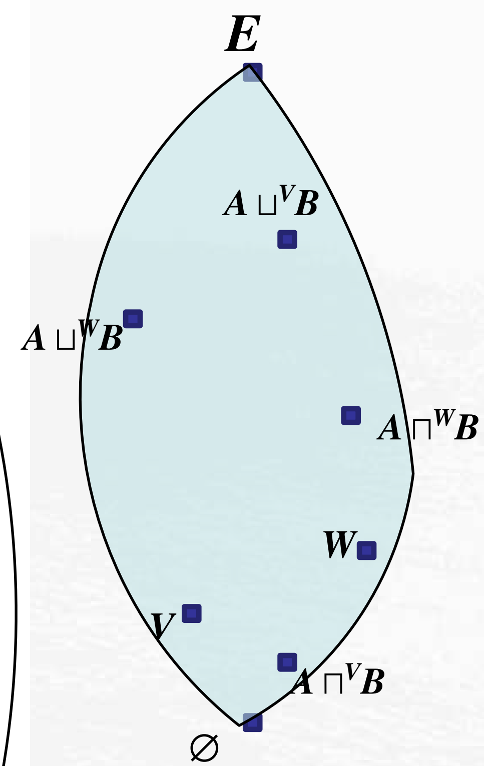
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

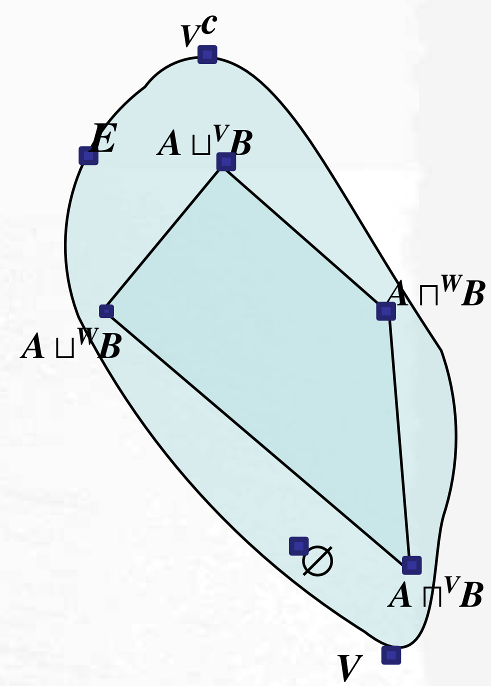
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

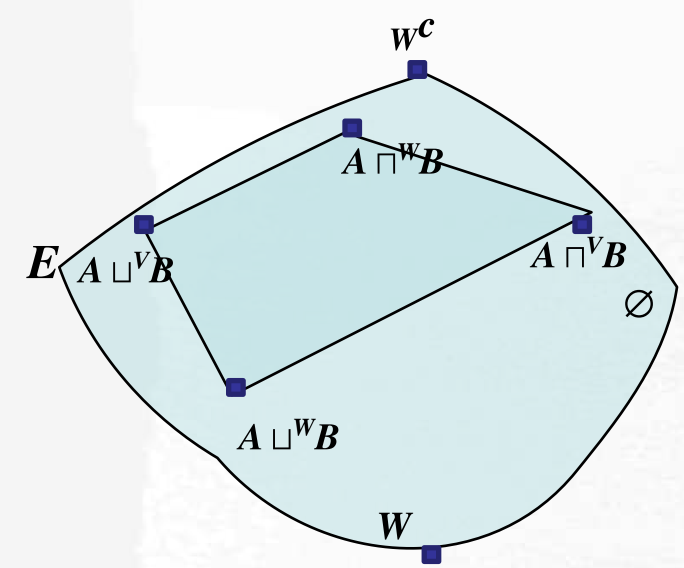




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS INTERSECCIONES

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

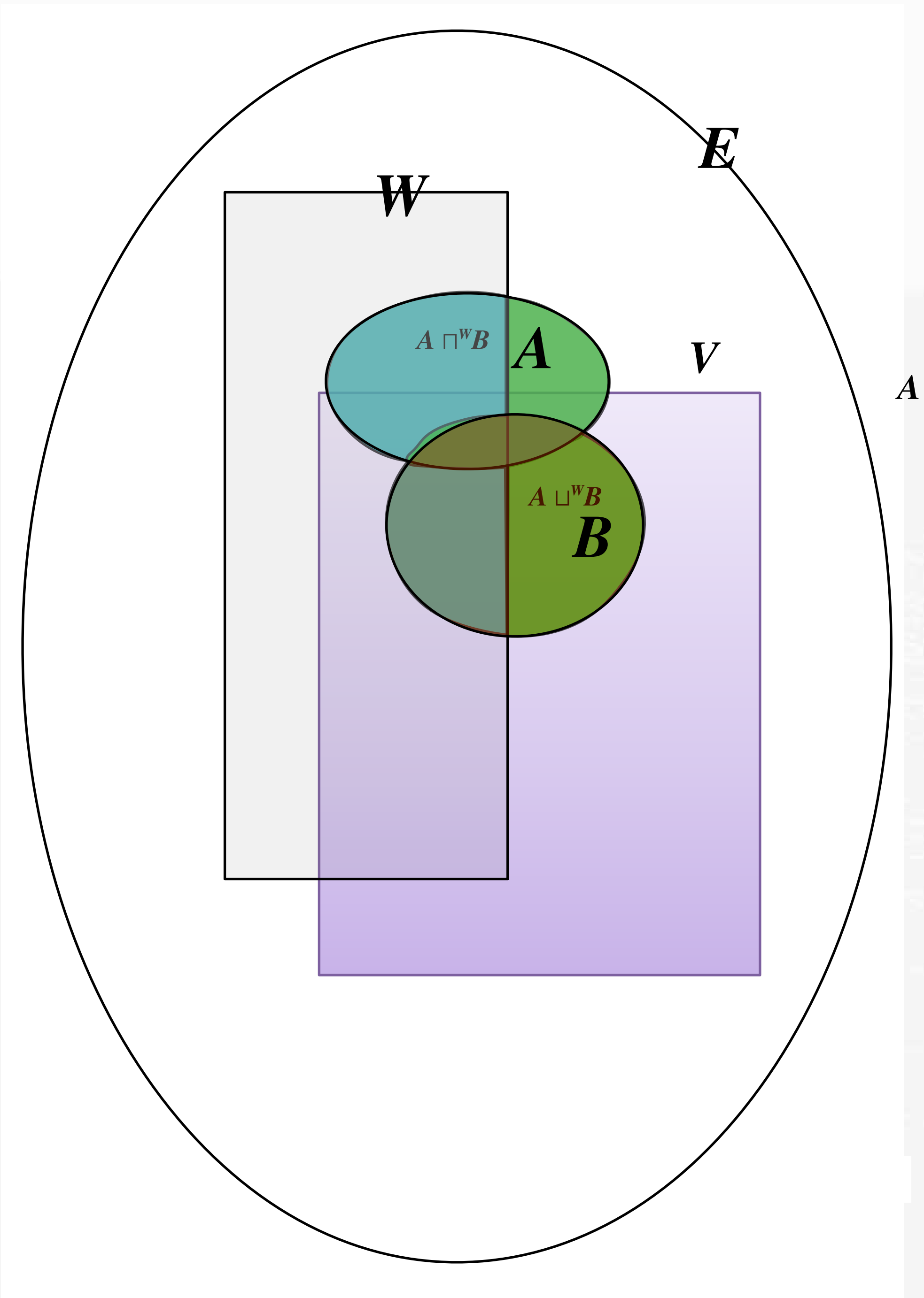
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

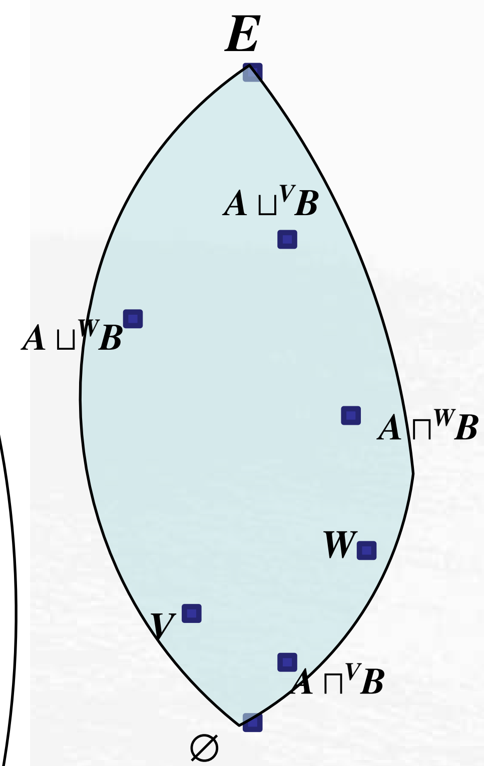
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

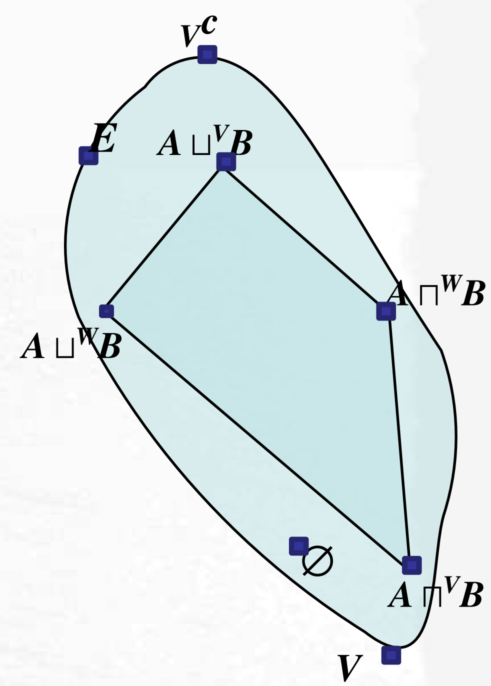
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

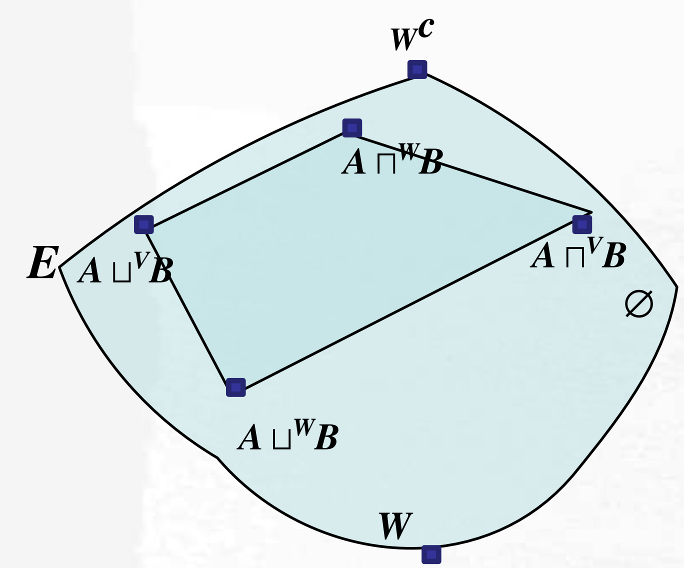




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

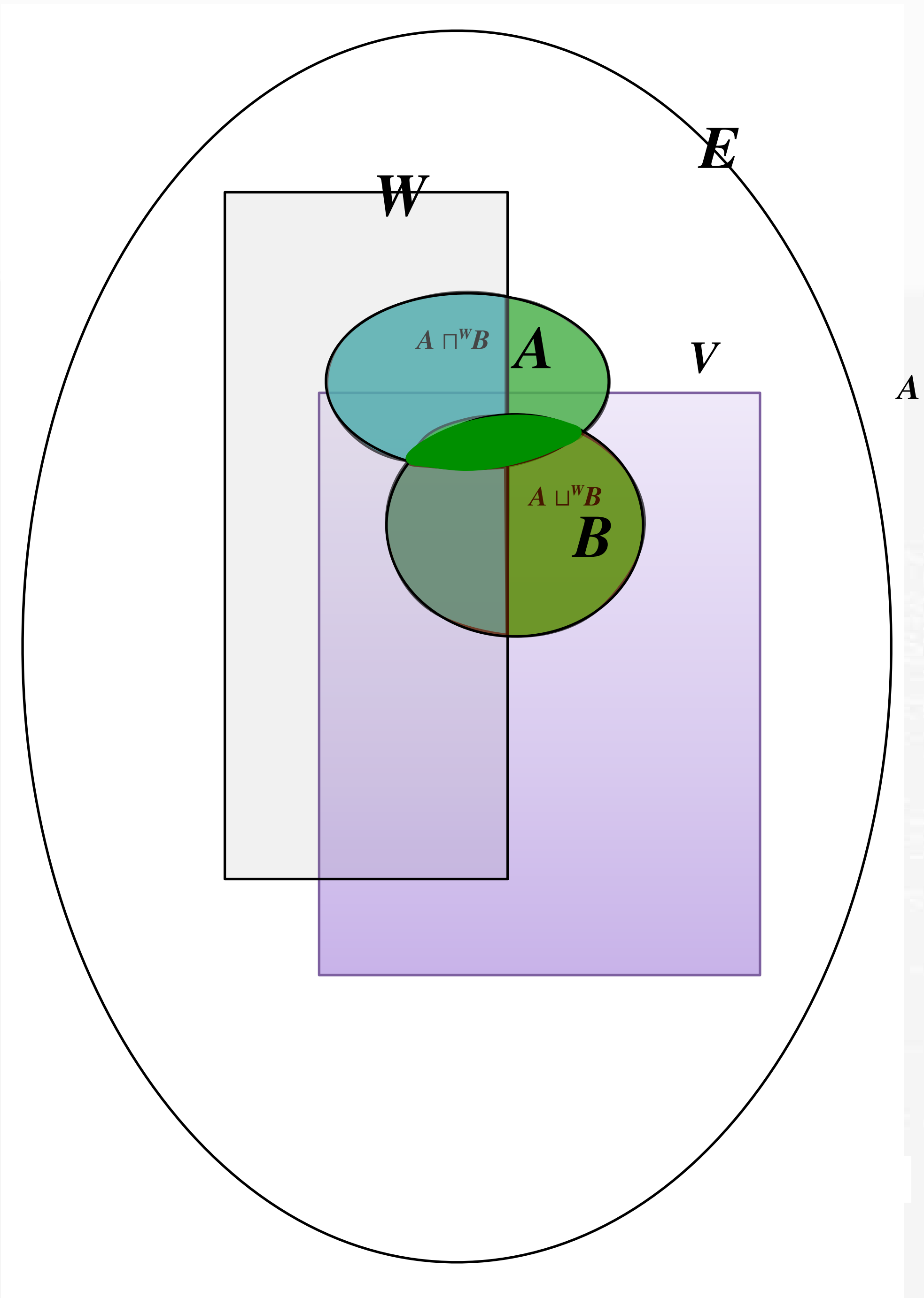
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

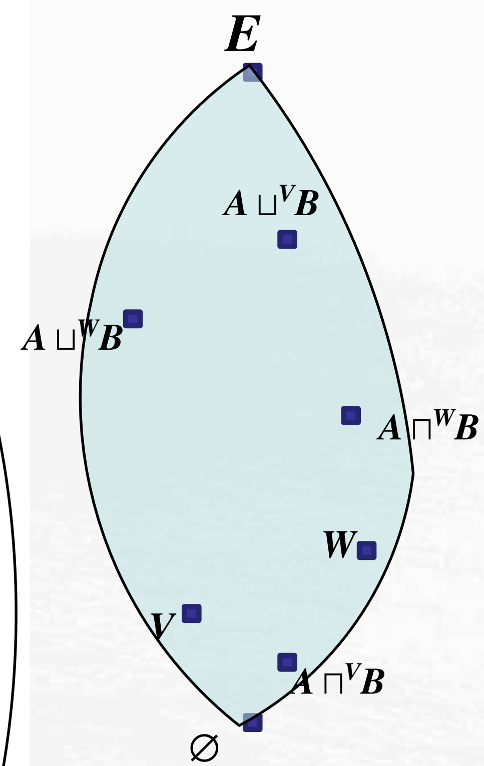
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

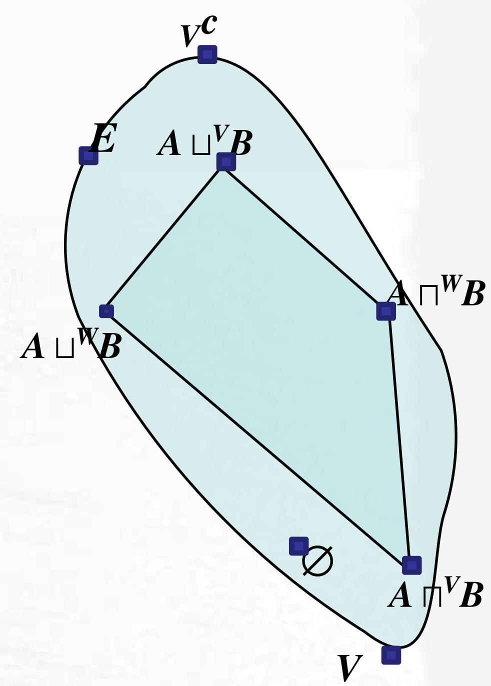
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

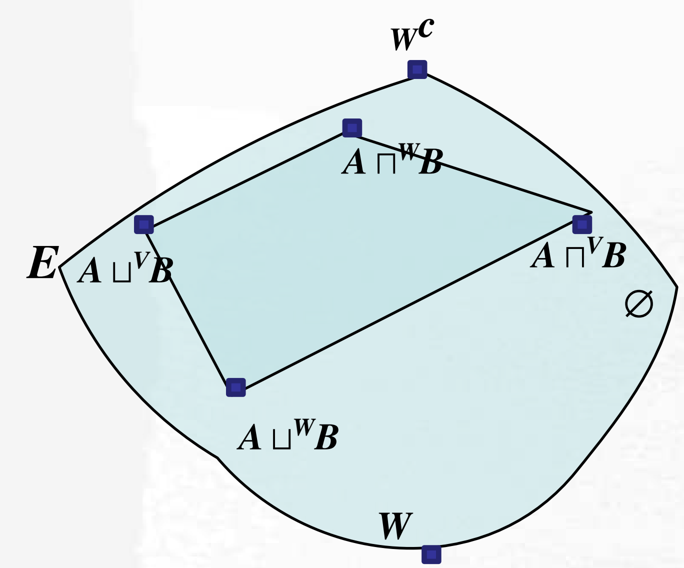




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

<u>Proposición</u>(*) 

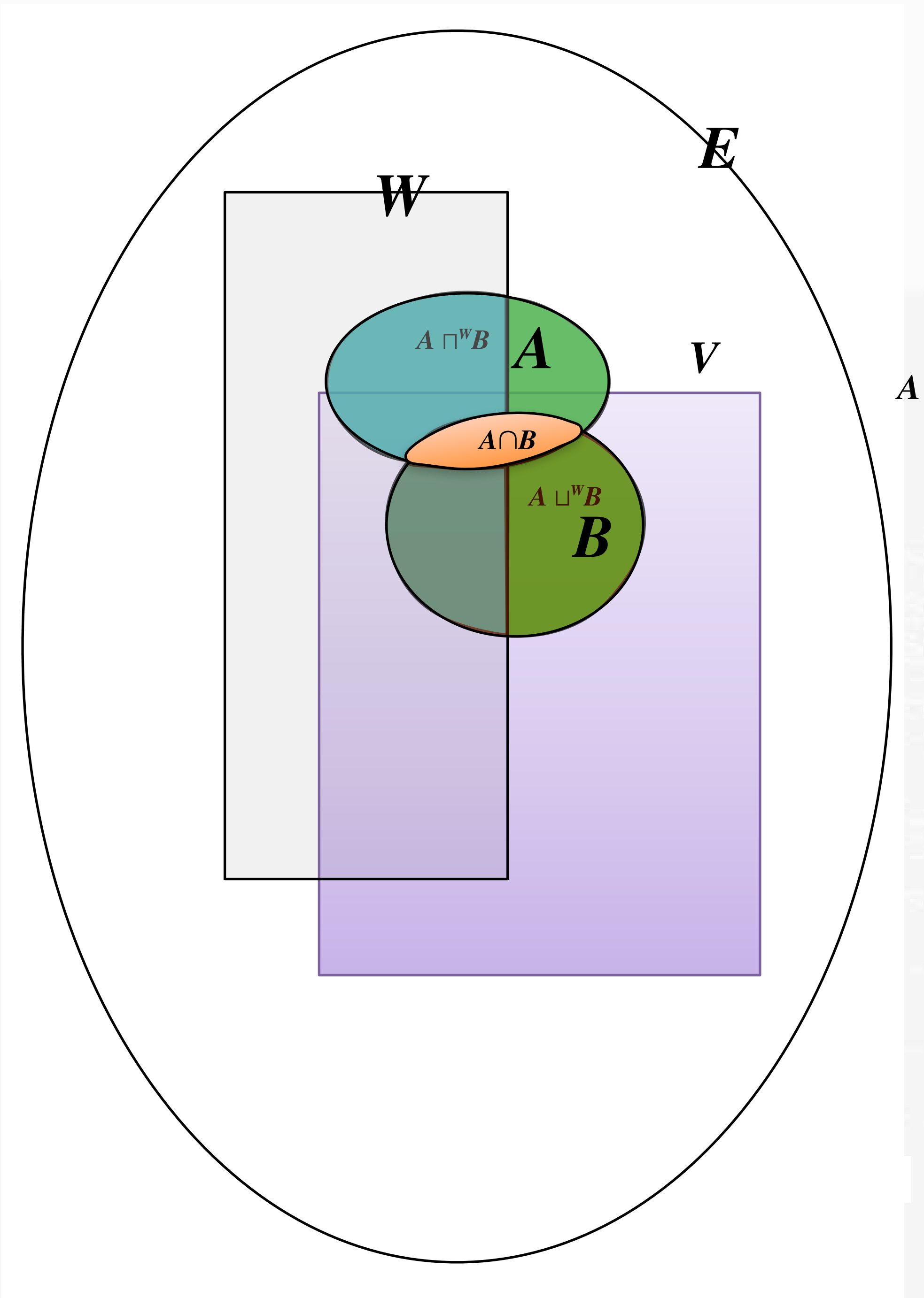
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

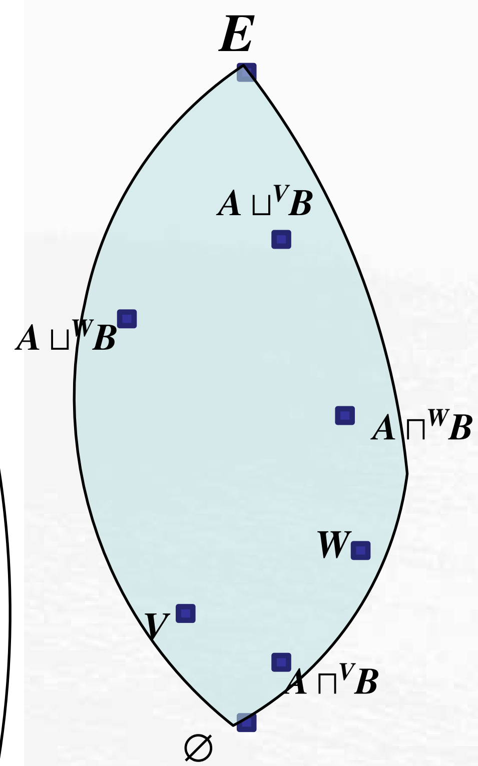
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

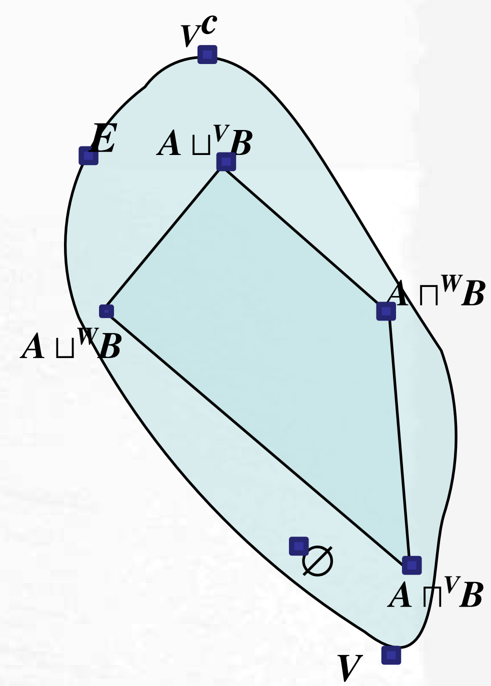
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

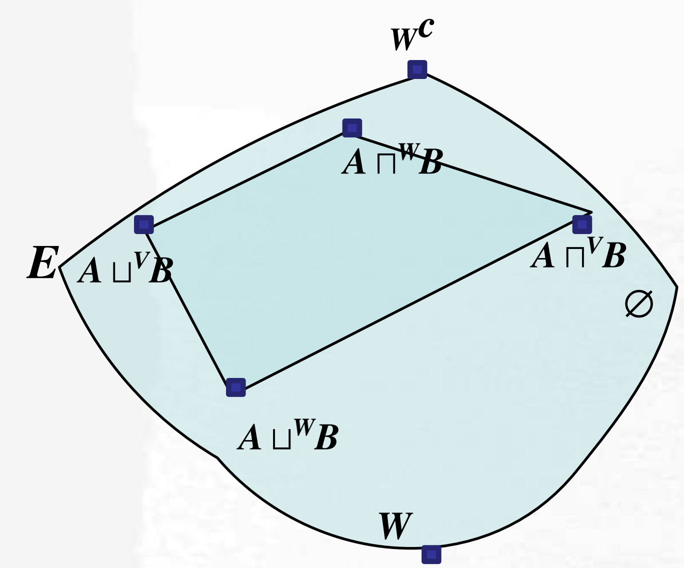




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (<u>Nota</u>. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

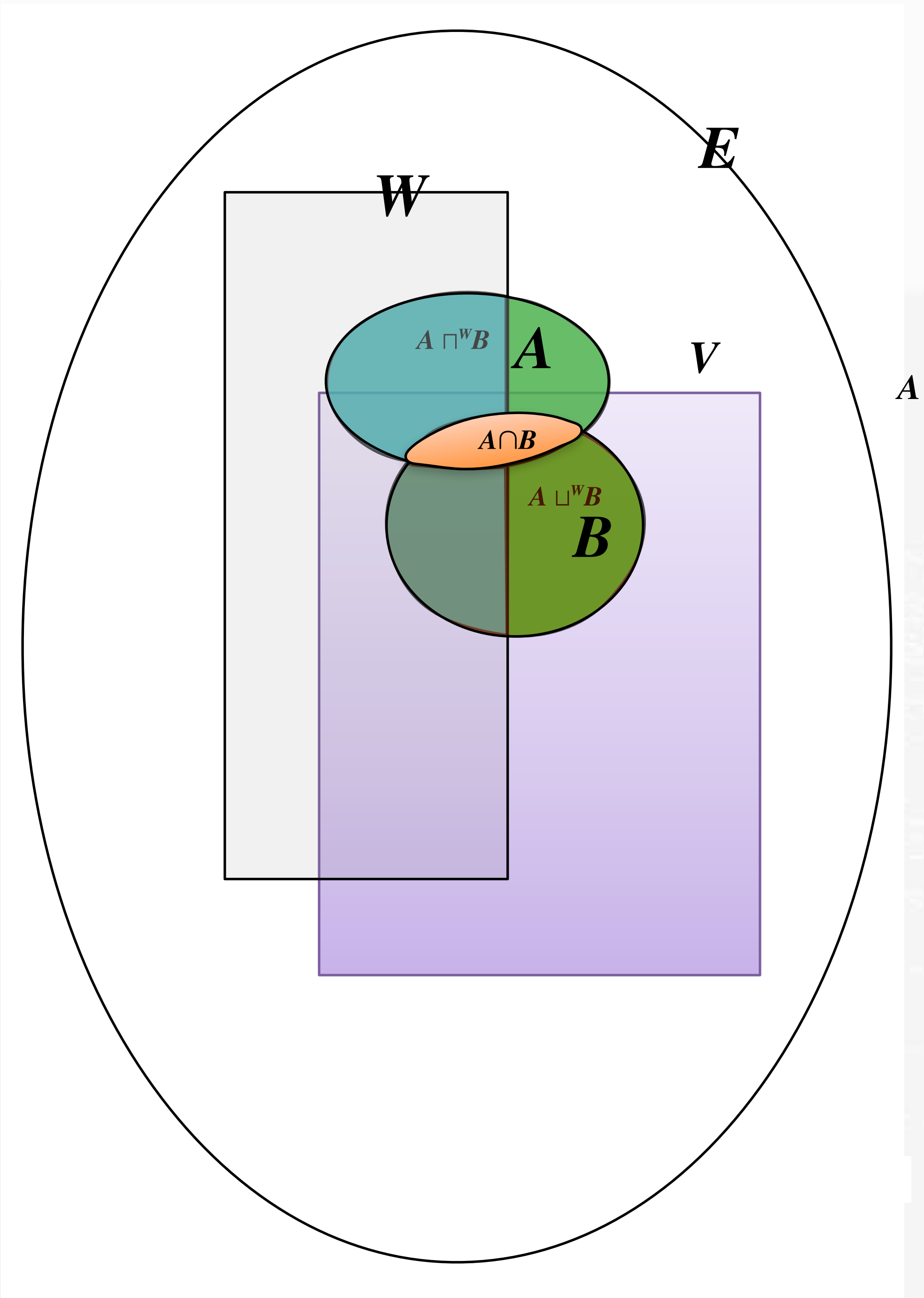
$$\underline{(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)}$$

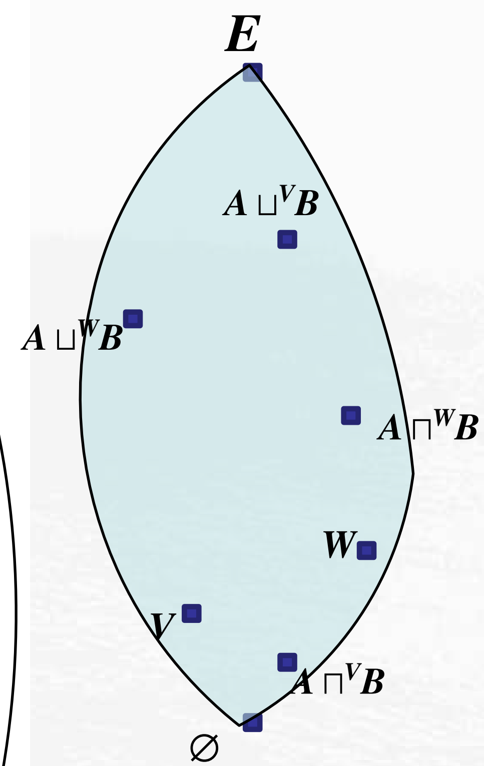
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

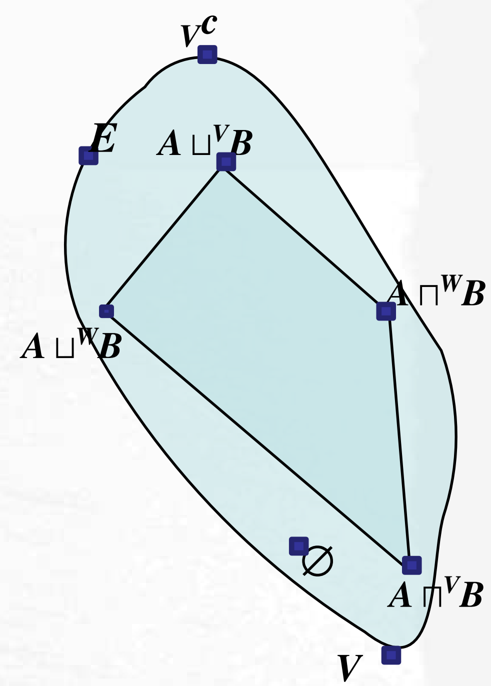
$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

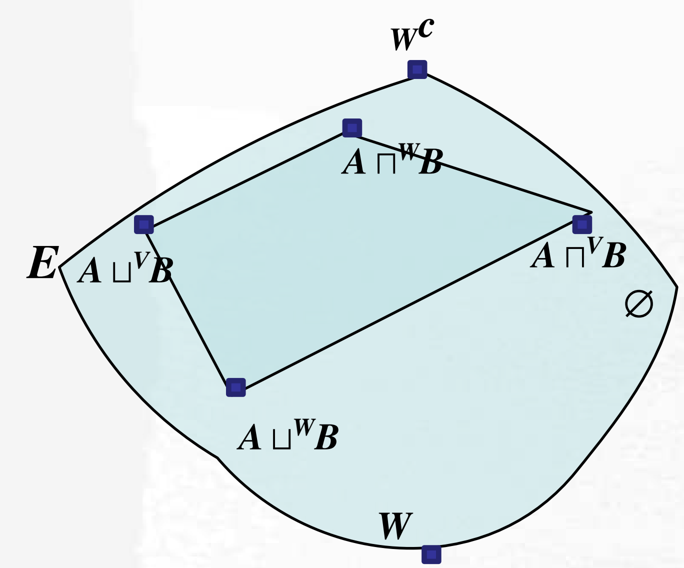




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores $(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

<u>Proposición</u>(*)

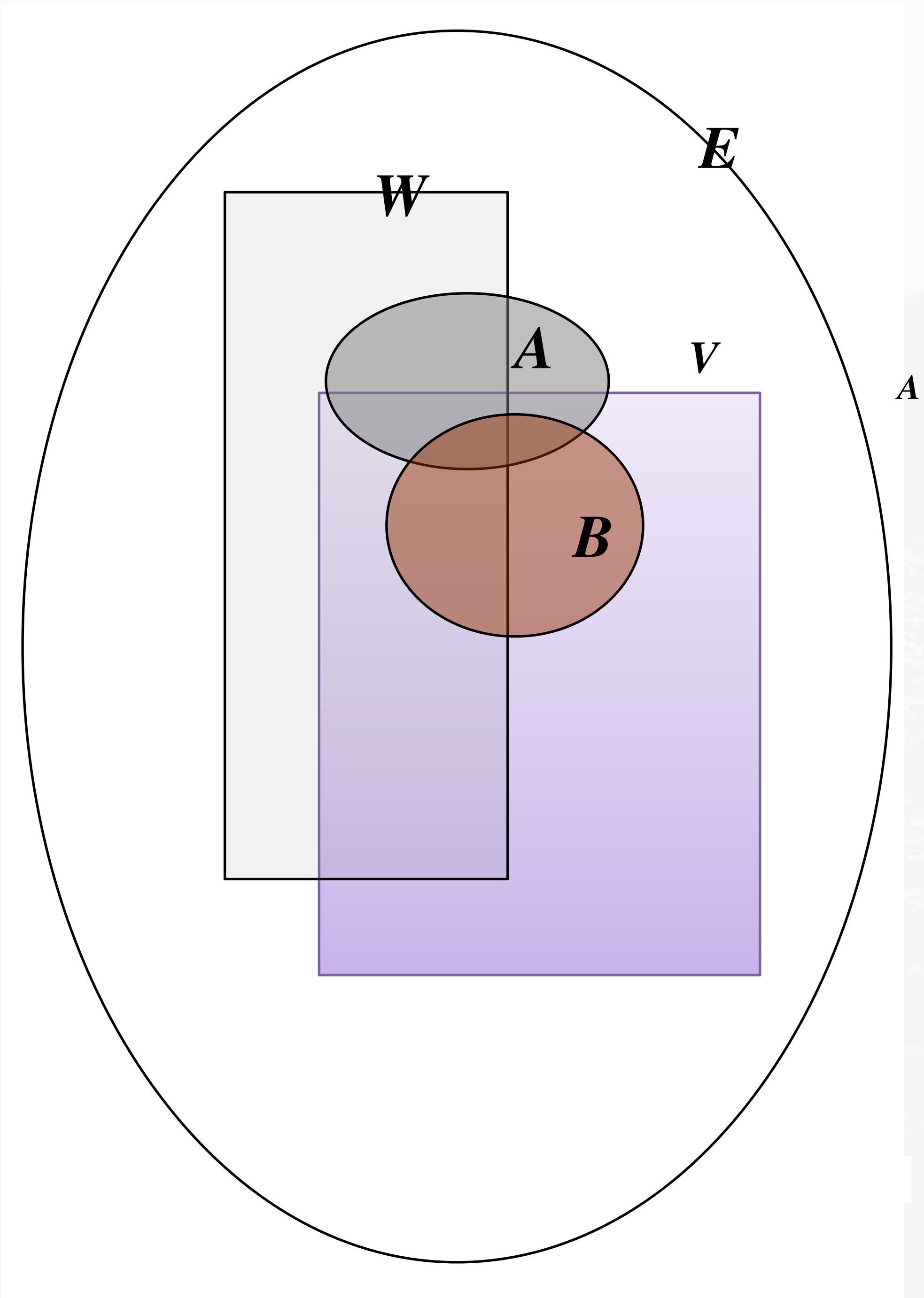
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

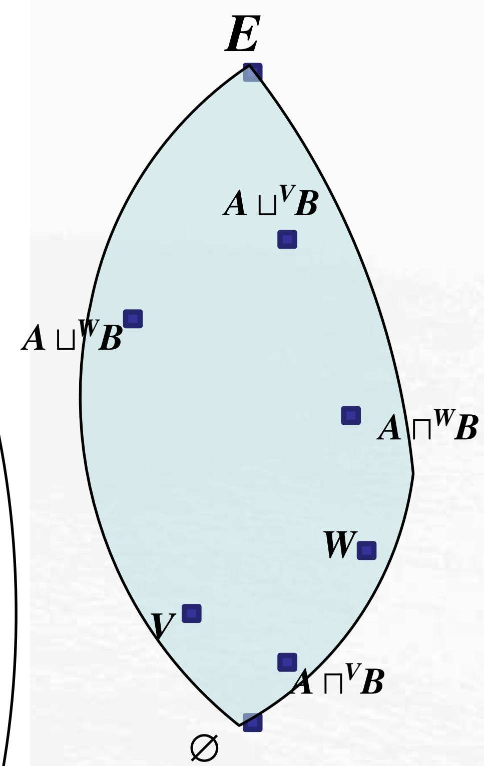
En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

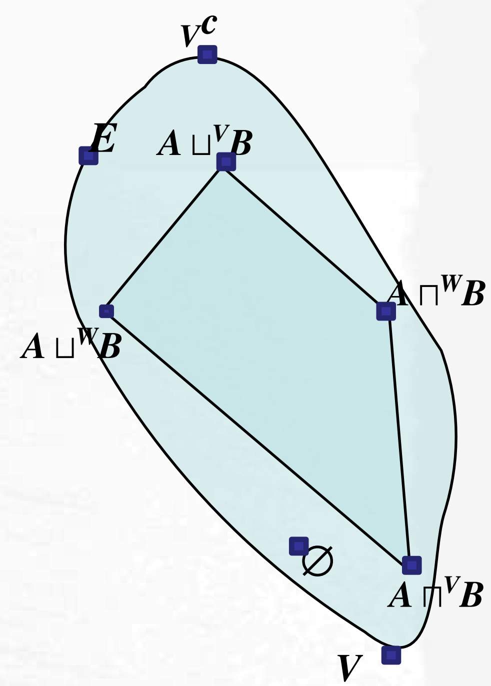
Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

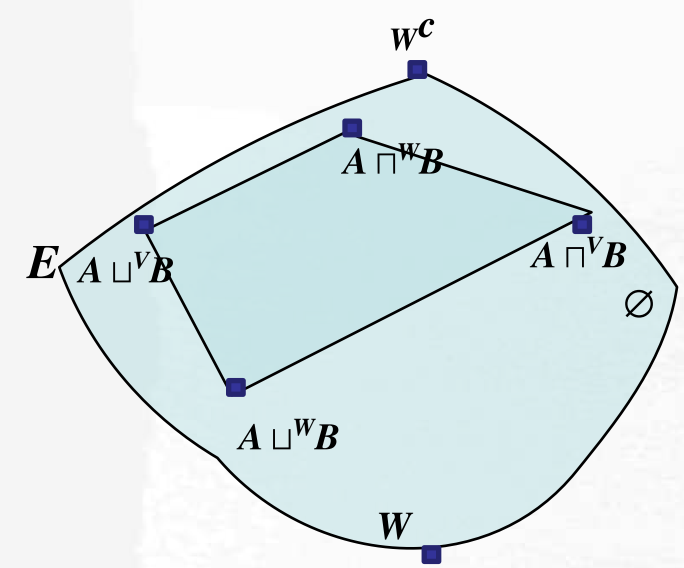




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) (<u>Nota</u>. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E*: RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS INTERSECCIONES

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

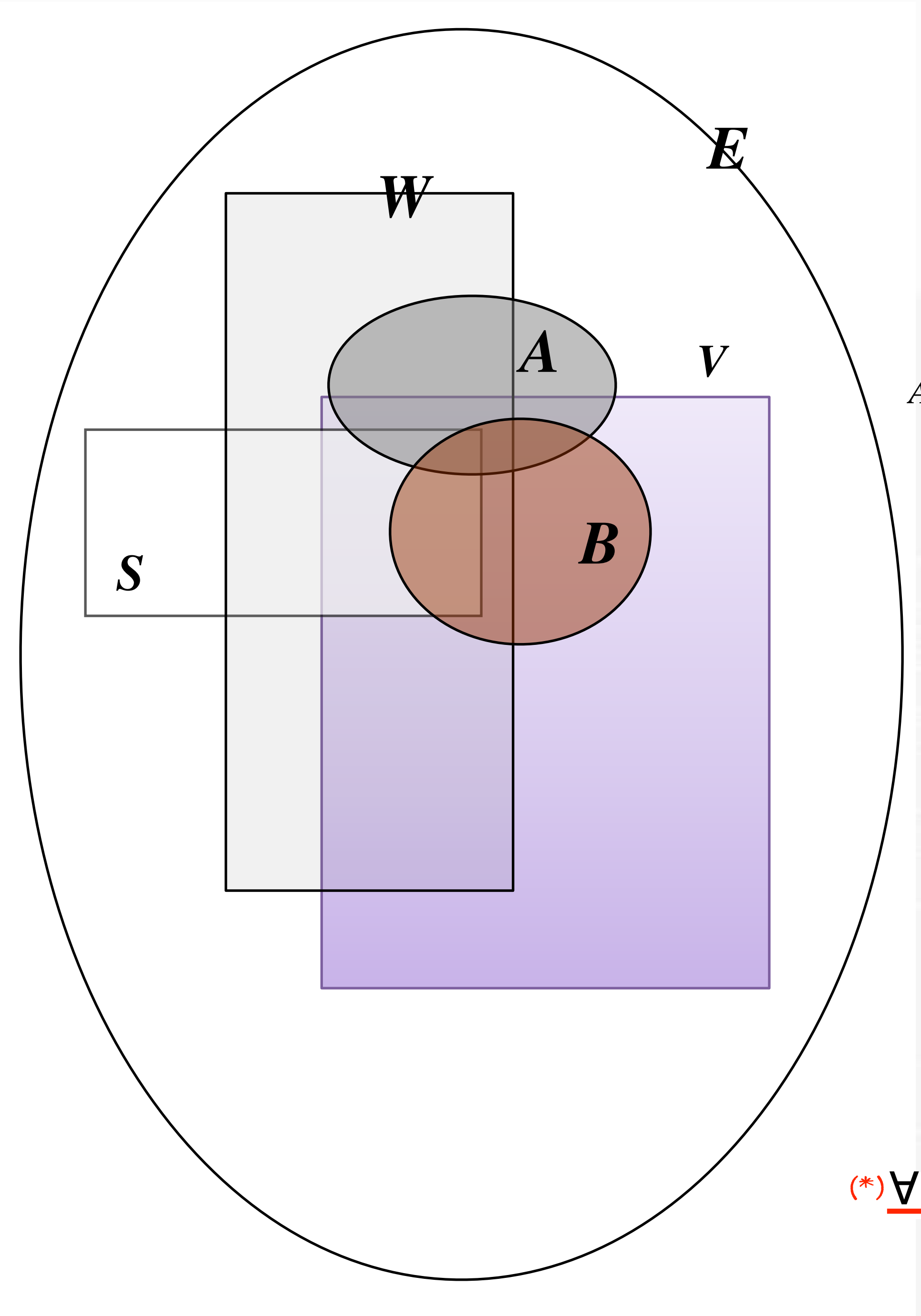
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

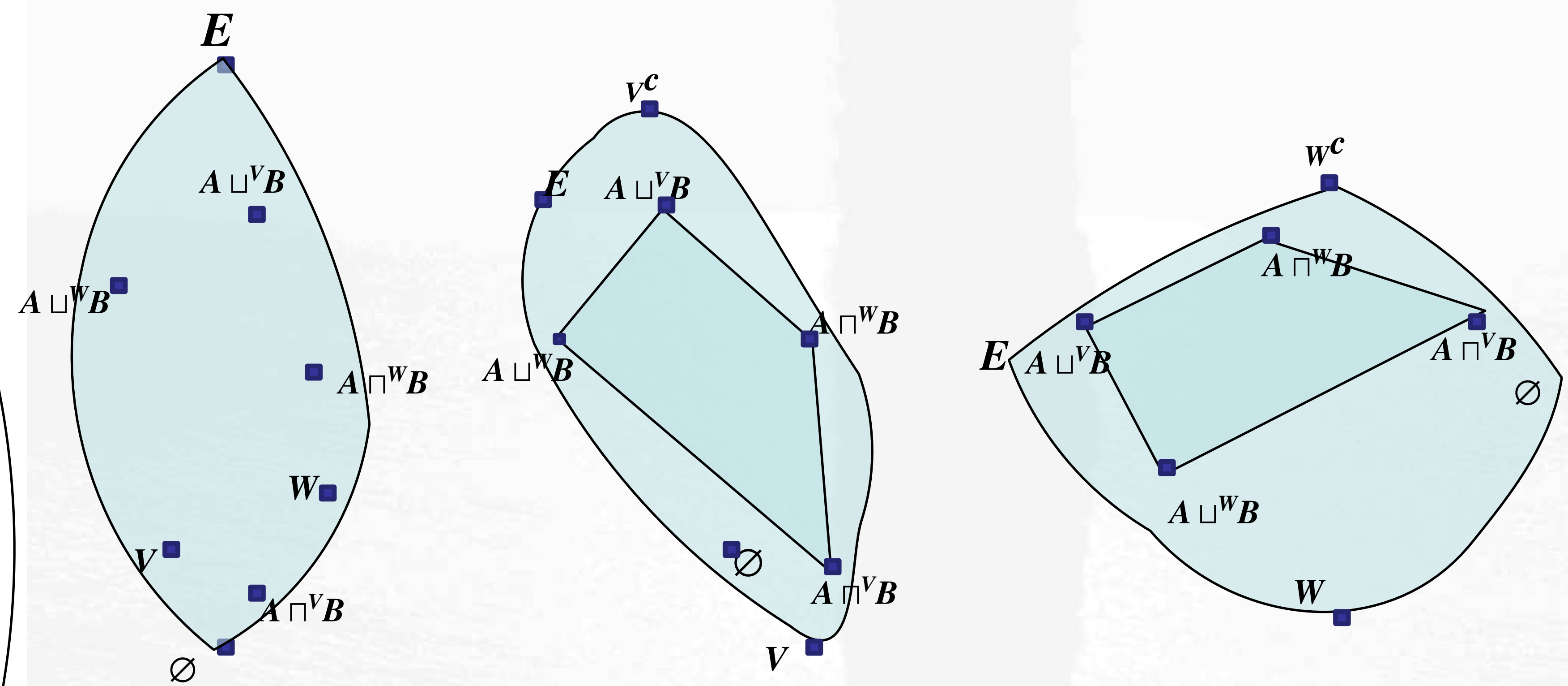
En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$





$(P(E), \subseteq)$ $\qquad$ $(P(E), \sqsubseteq^V)$ $\qquad$ $(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^{W}, \sqcup^{W})$ y $(\sqcap^{V}, \sqcup^{V})$

Proposición(*)

$$(A \sqcap^{W} B) \sqcap^{V} (A \sqcup^{W} B) = (A \sqcap^{V} B)$$

$$(A \sqcap^{W} B) \sqcup^{V} (A \sqcup^{W} B) = (A \sqcup^{V} B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

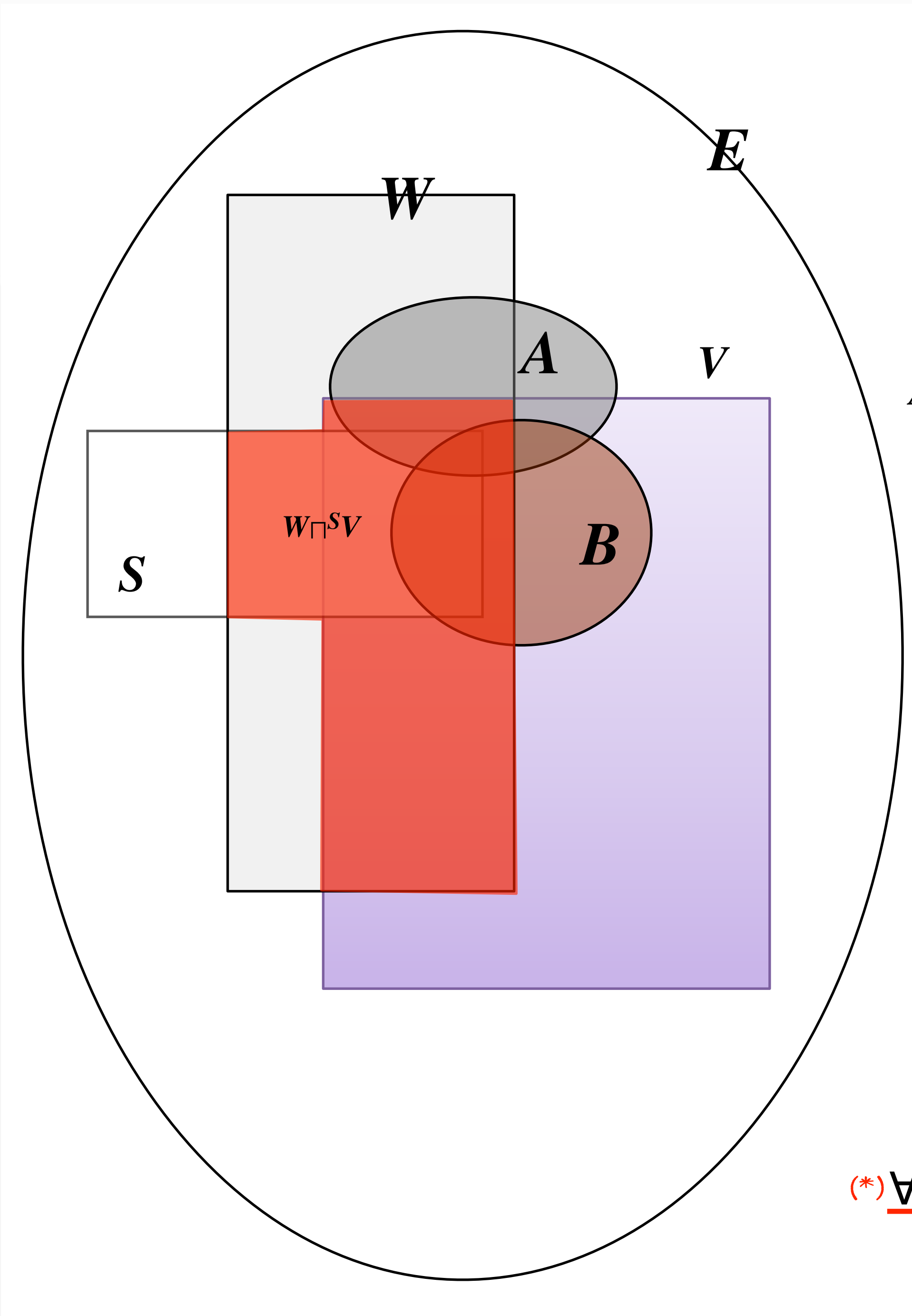
$$(A \sqcap^{W} B) \cap (A \sqcup^{W} B) = (A \cap B)$$

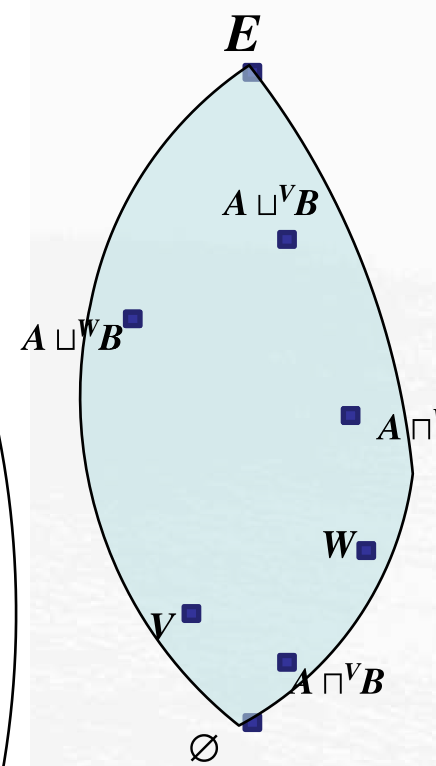
$$(A \sqcap^{W} B) \cup (A \sqcup^{W} B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

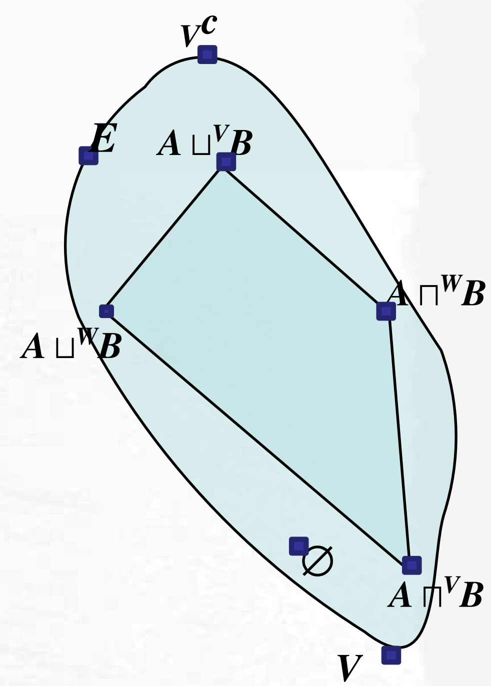
$$(A \cap B) \sqcap^{V} (A \cup B) = (A \sqcap^{V} B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^{V} (A \cup B) = (A \sqcup^{V} B)$$

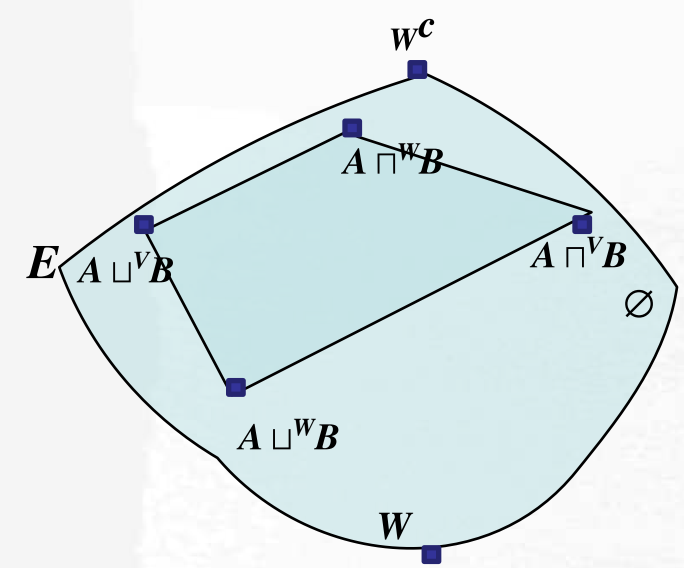




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^{V})$



$(P(E), \sqsubseteq^{W})$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^{W} B = (A \sqcap^{V} B) \sqcup^{V} (A \sqcap^{V} W) \sqcup^{V} (B \sqcap^{V} W) = (A \sqcup^{V} B) \sqcap^{V} (A \sqcup^{V} W) \sqcap^{V} (B \sqcup^{V} W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^{S} V)} B = (A \sqcap^{W} B) \sqcap^{S} (A \sqcap^{V} B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

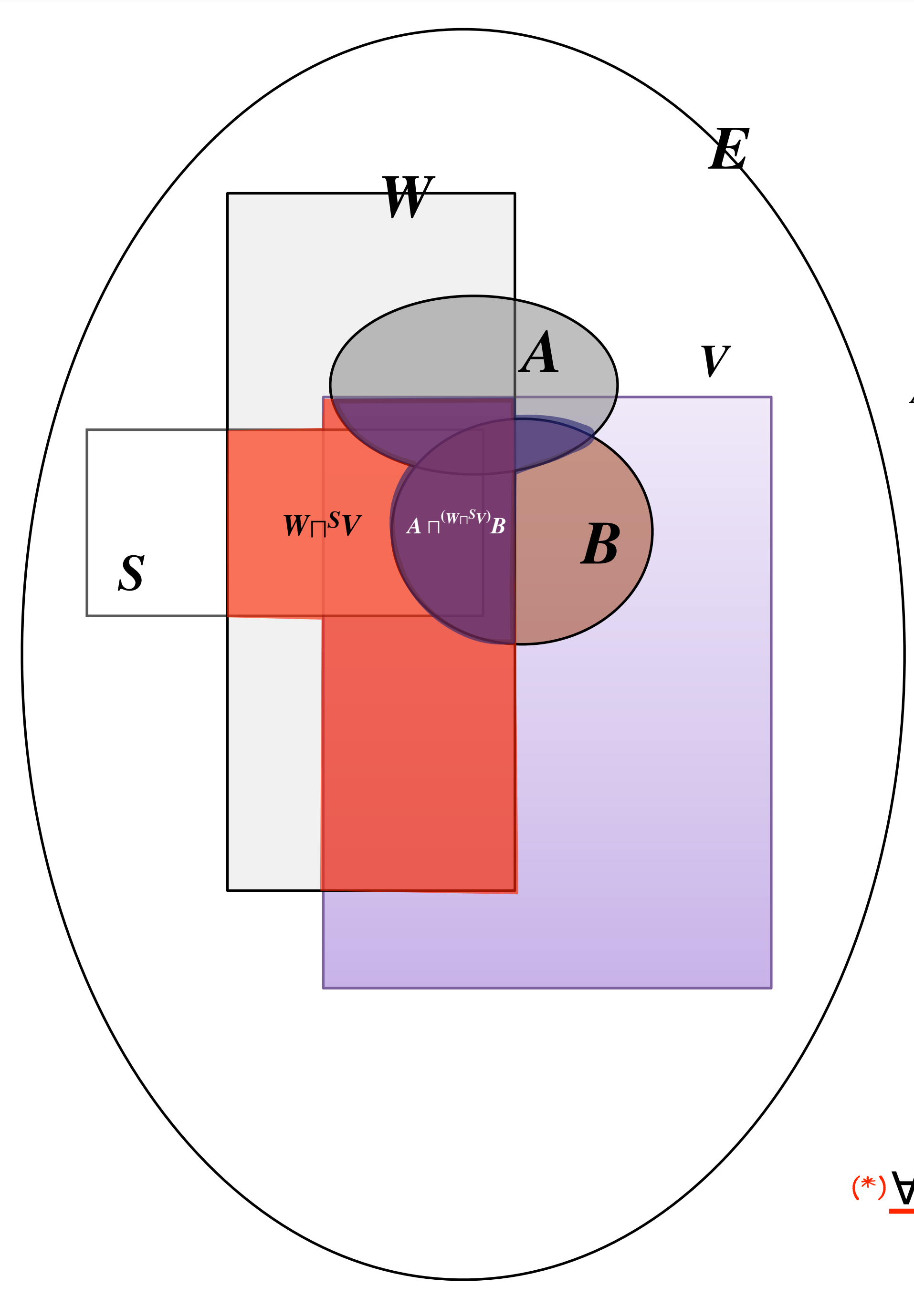
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

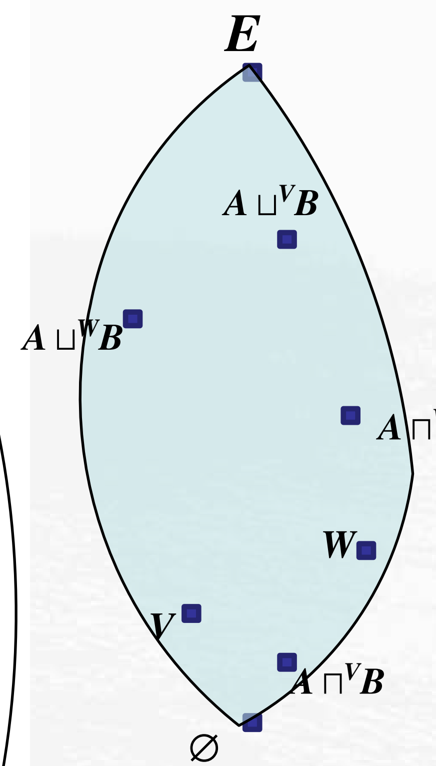
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

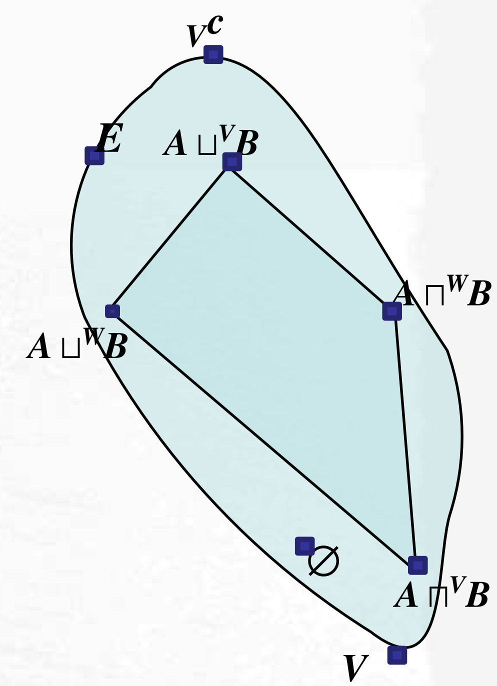
$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

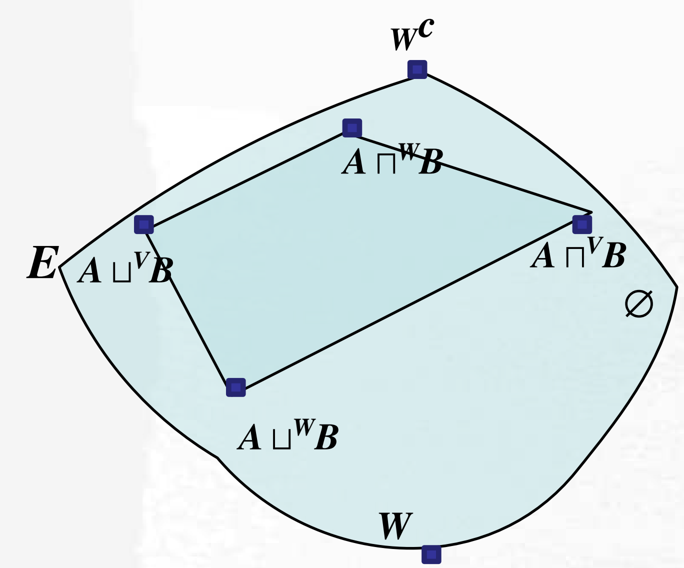




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

<u>Proposición</u>(*)

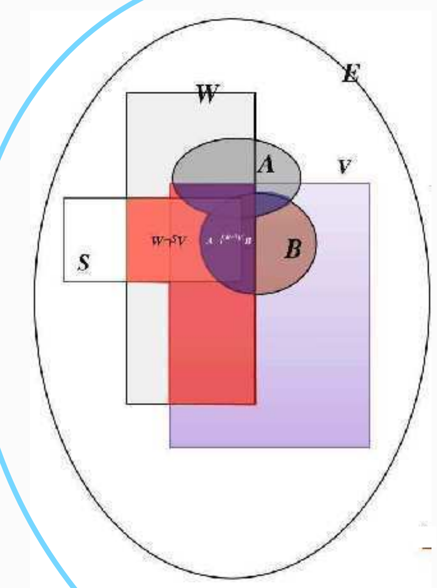
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

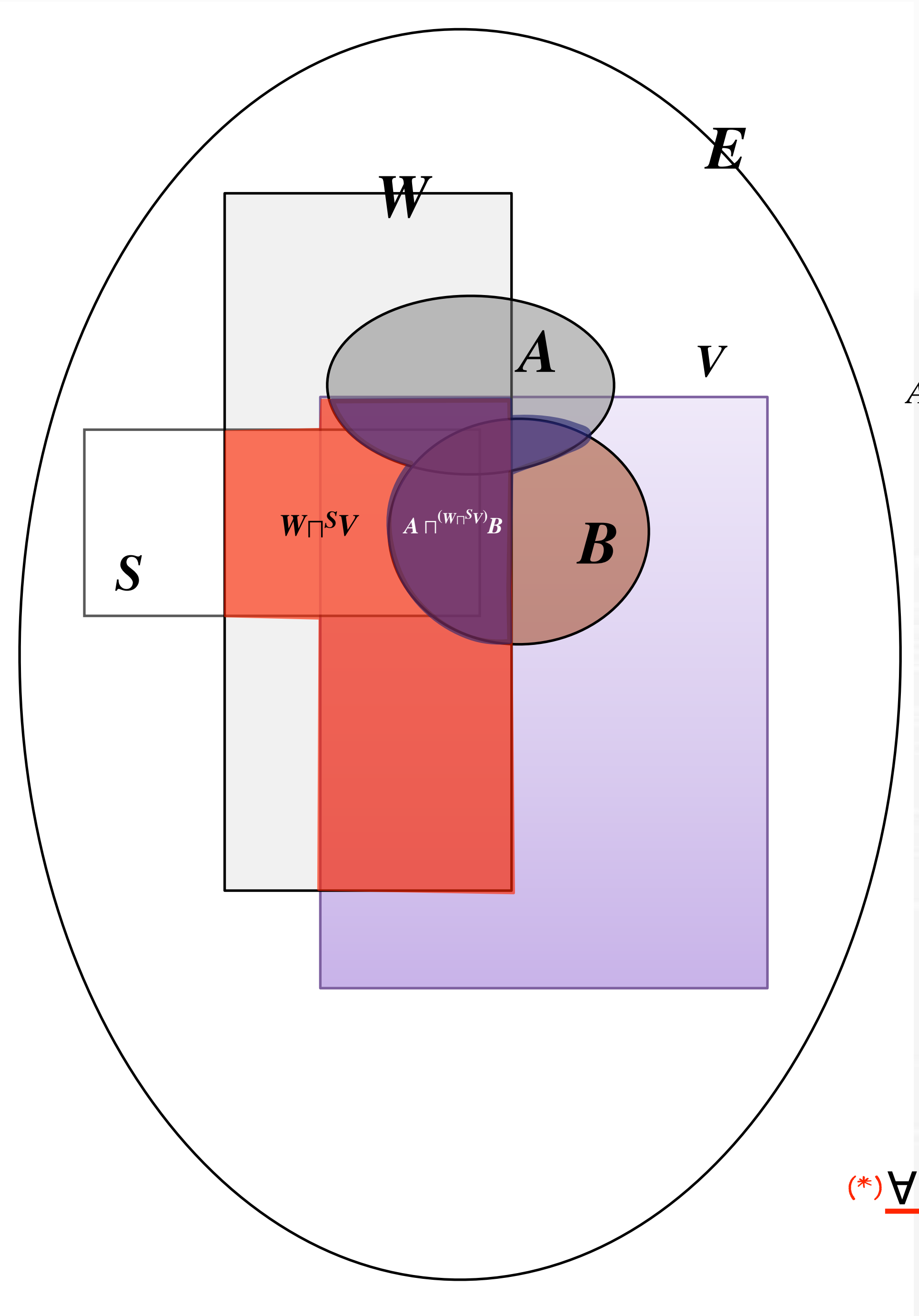
En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

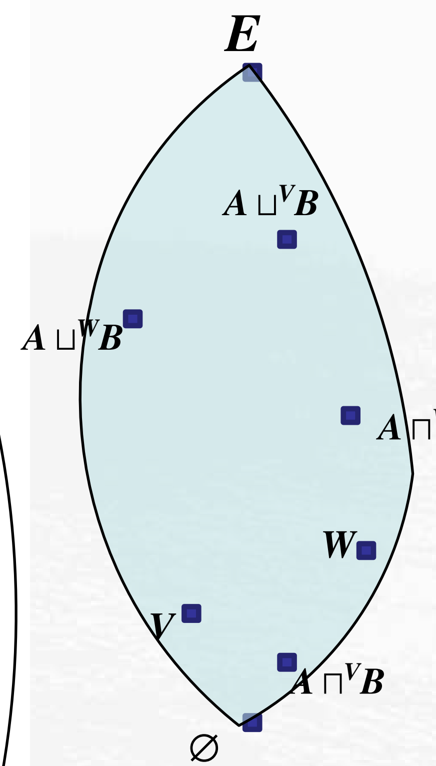
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

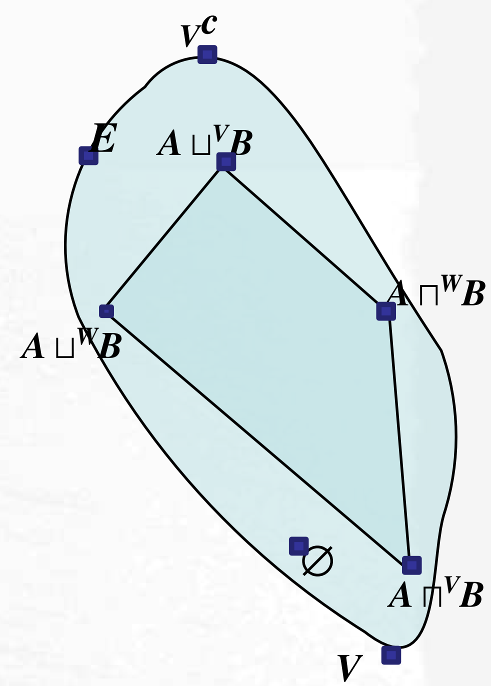
$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$



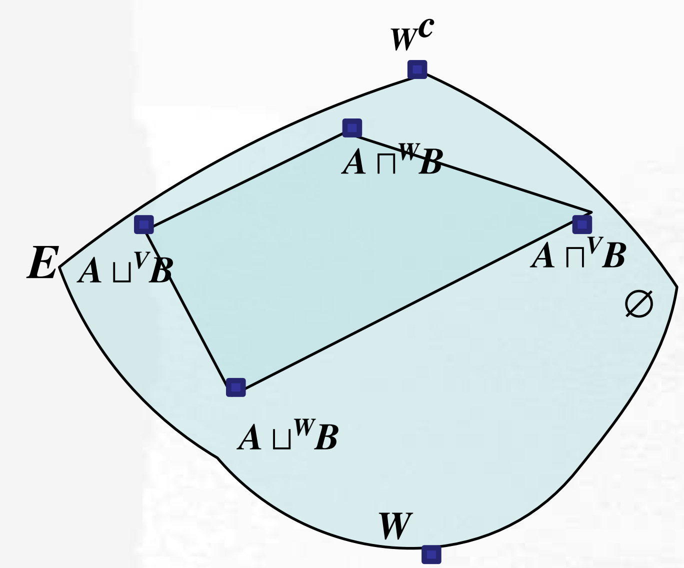




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

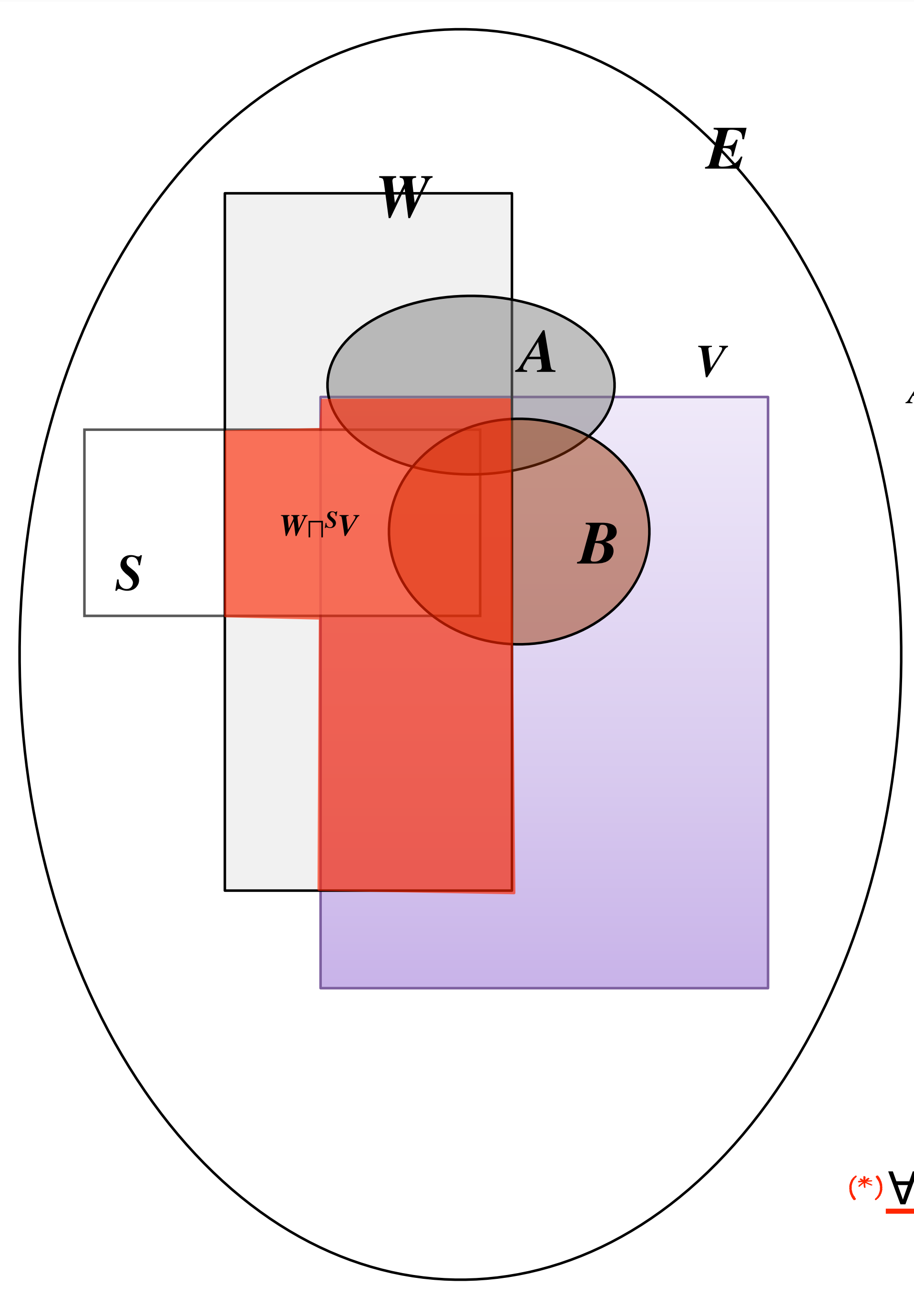
(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (<u>Nota</u>. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)



$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

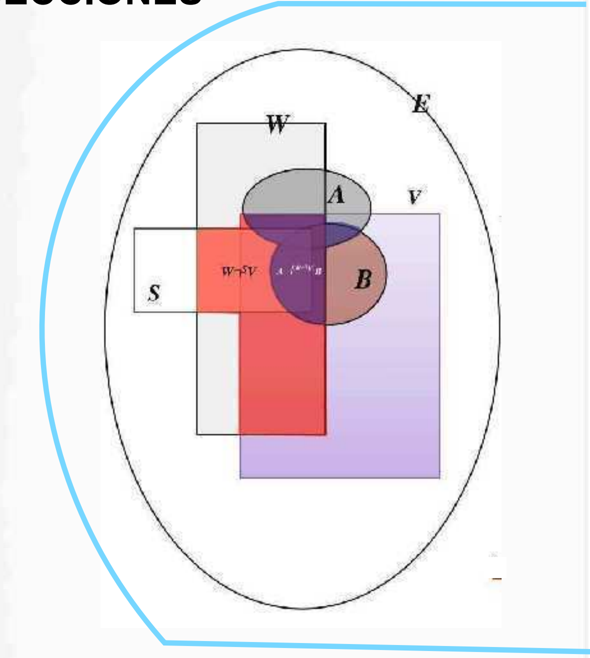
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

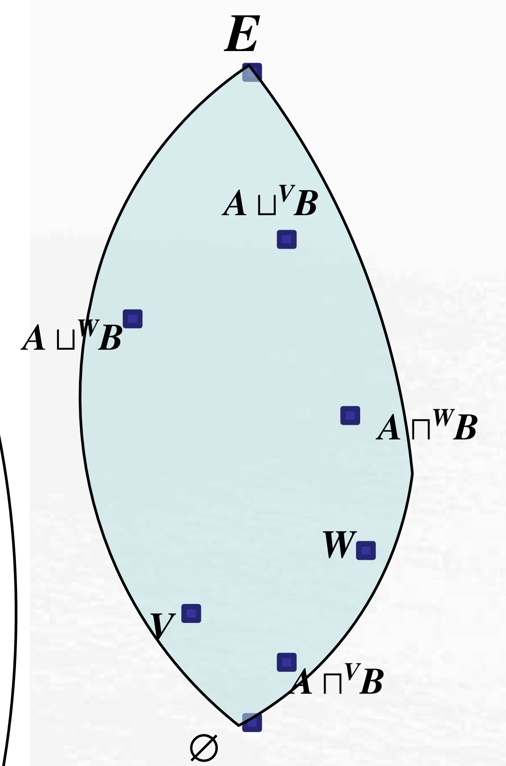
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

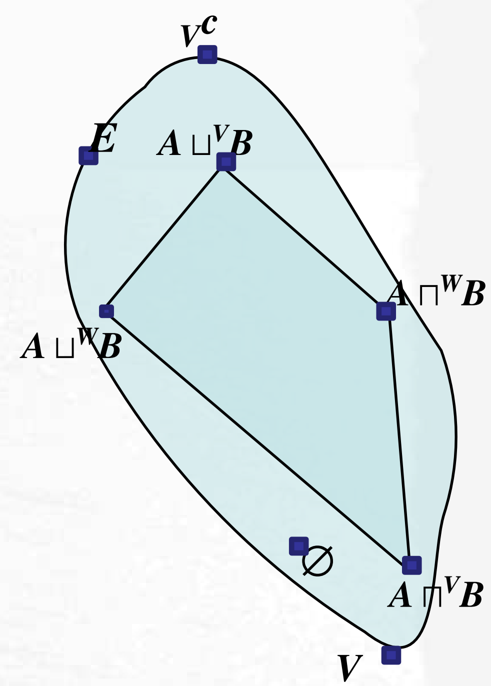
$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

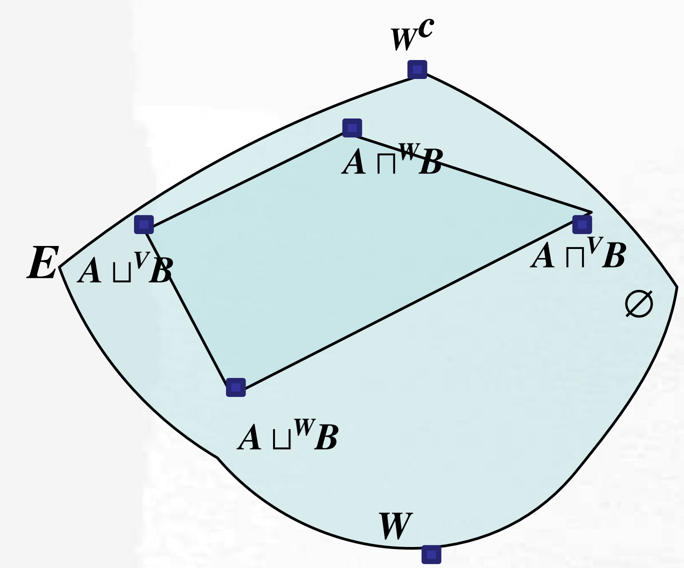




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

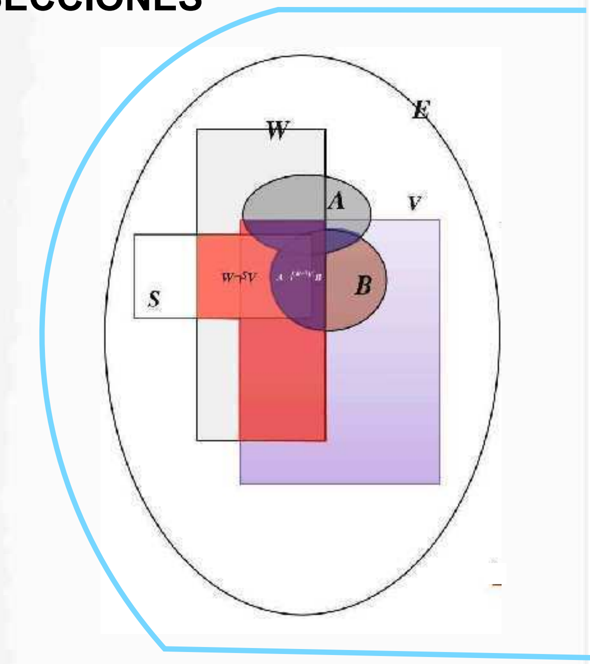
$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E*: RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS INTERSECCIONES



Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

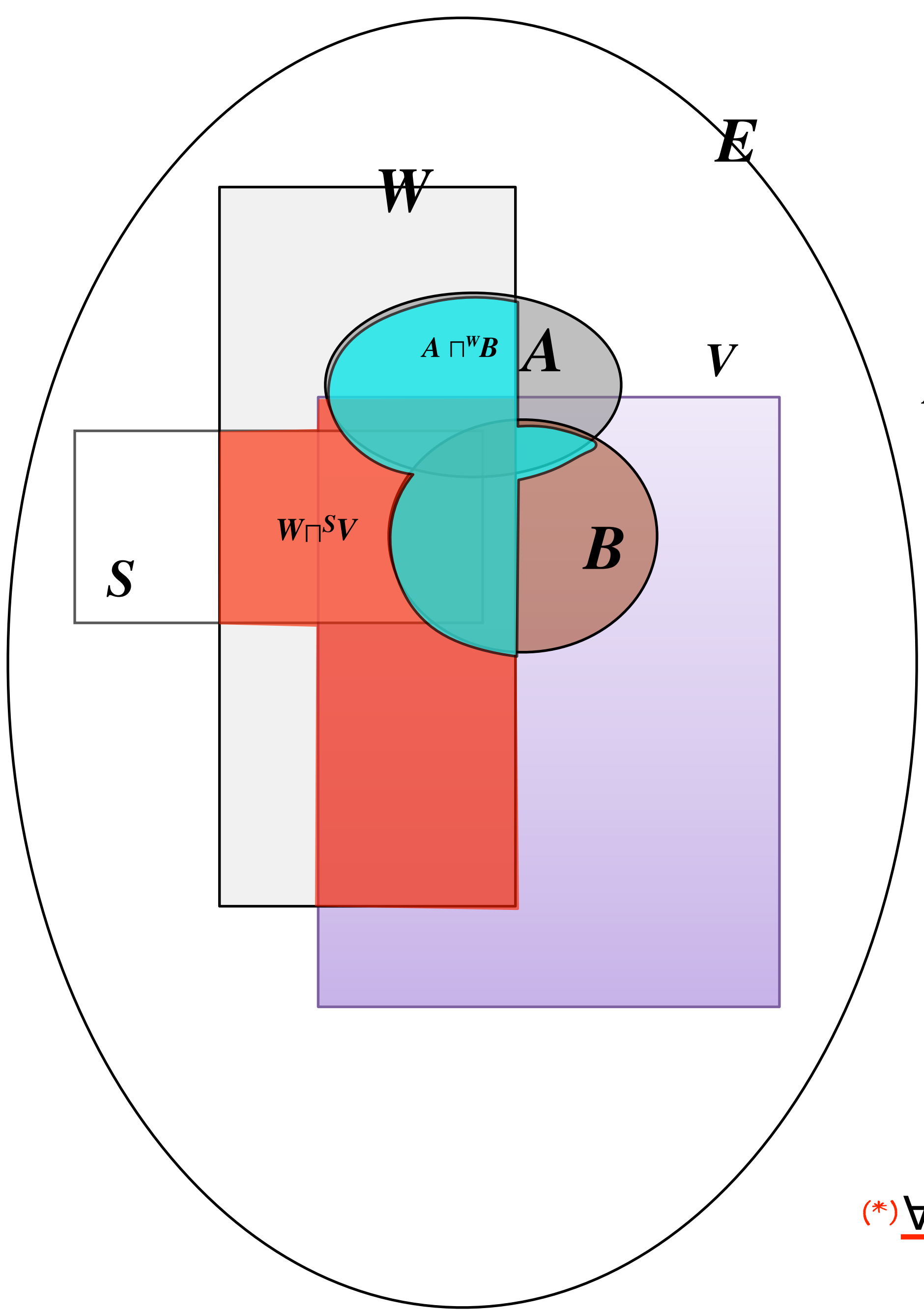
$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

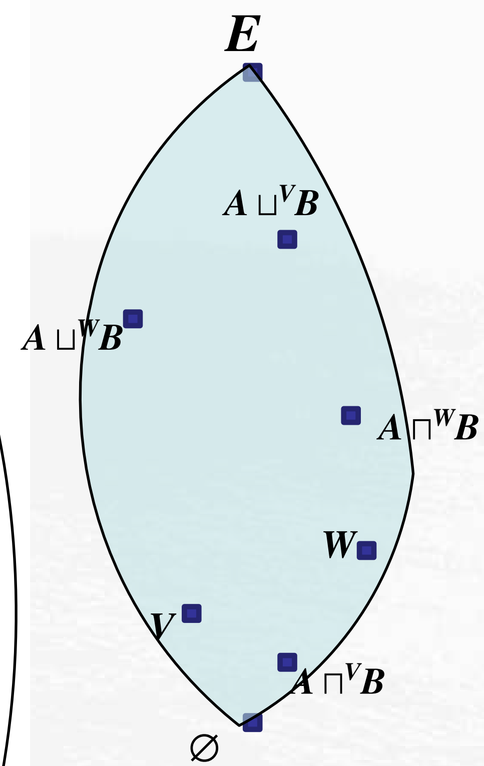
En particular, para $V \in \{\emptyset, E\}$

$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

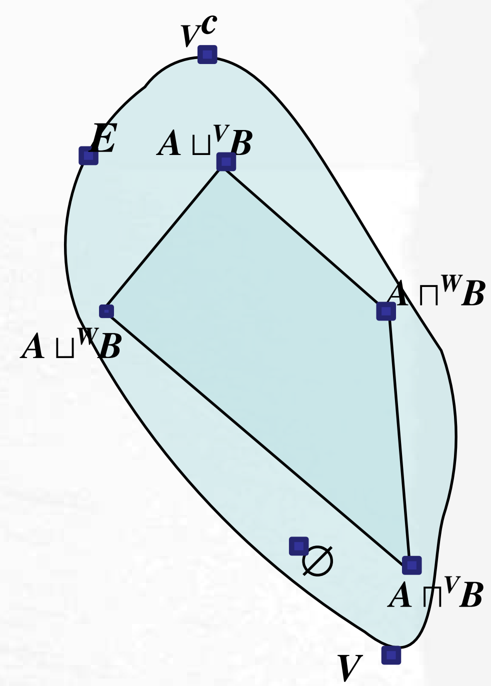
Y para $W \in \{\emptyset, E\}$

$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$
$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

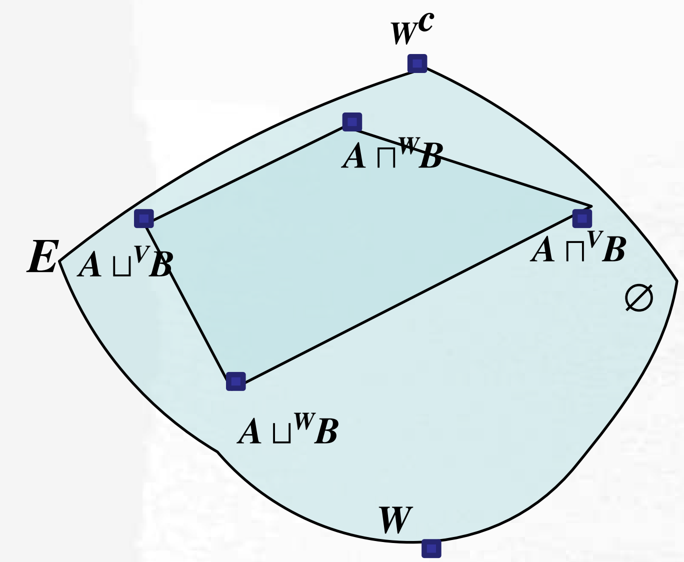




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

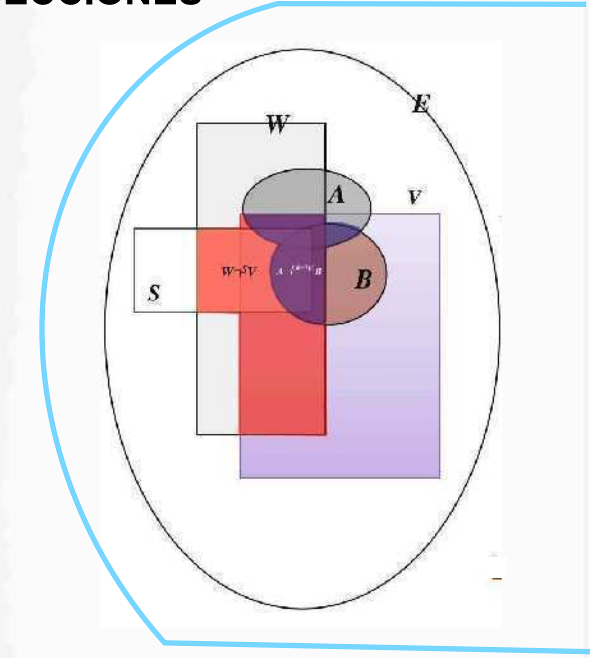
$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$



Proposición(*)

$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

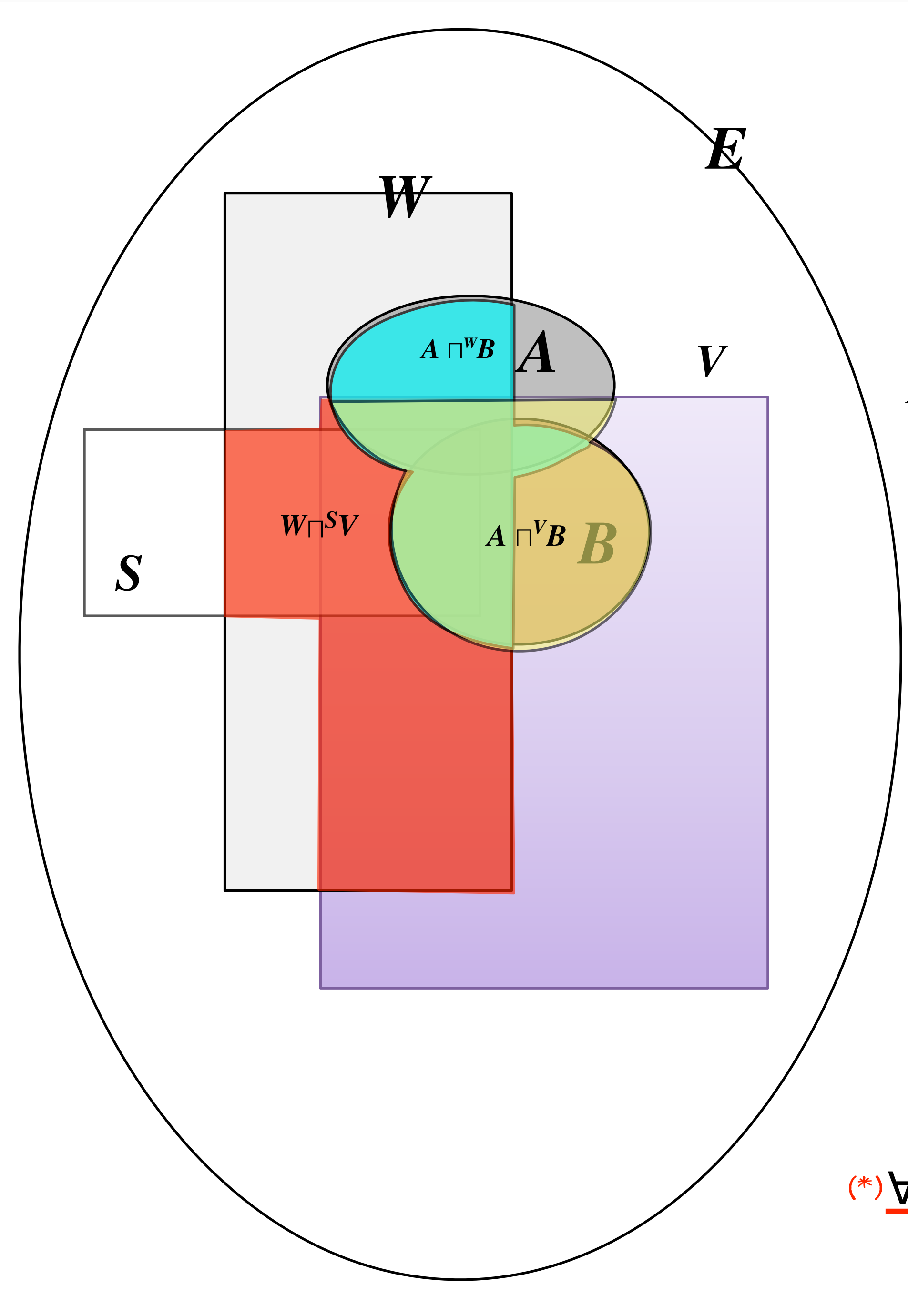
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

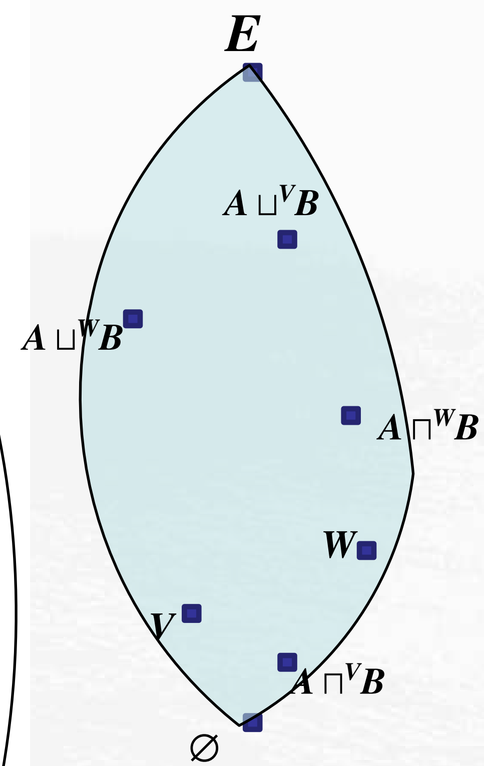
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

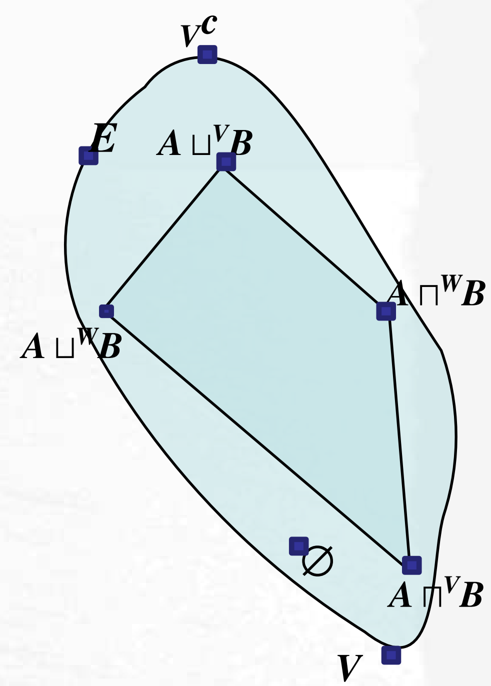
$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$

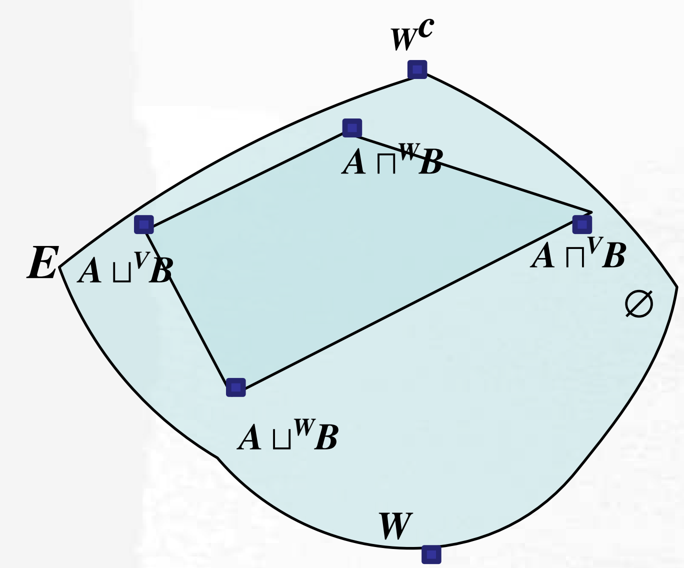




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



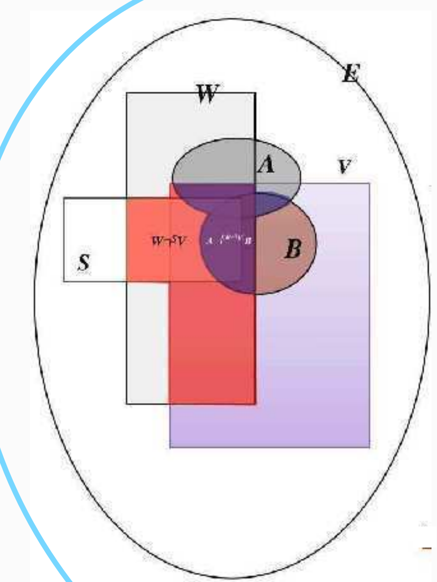
$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).



Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$

$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

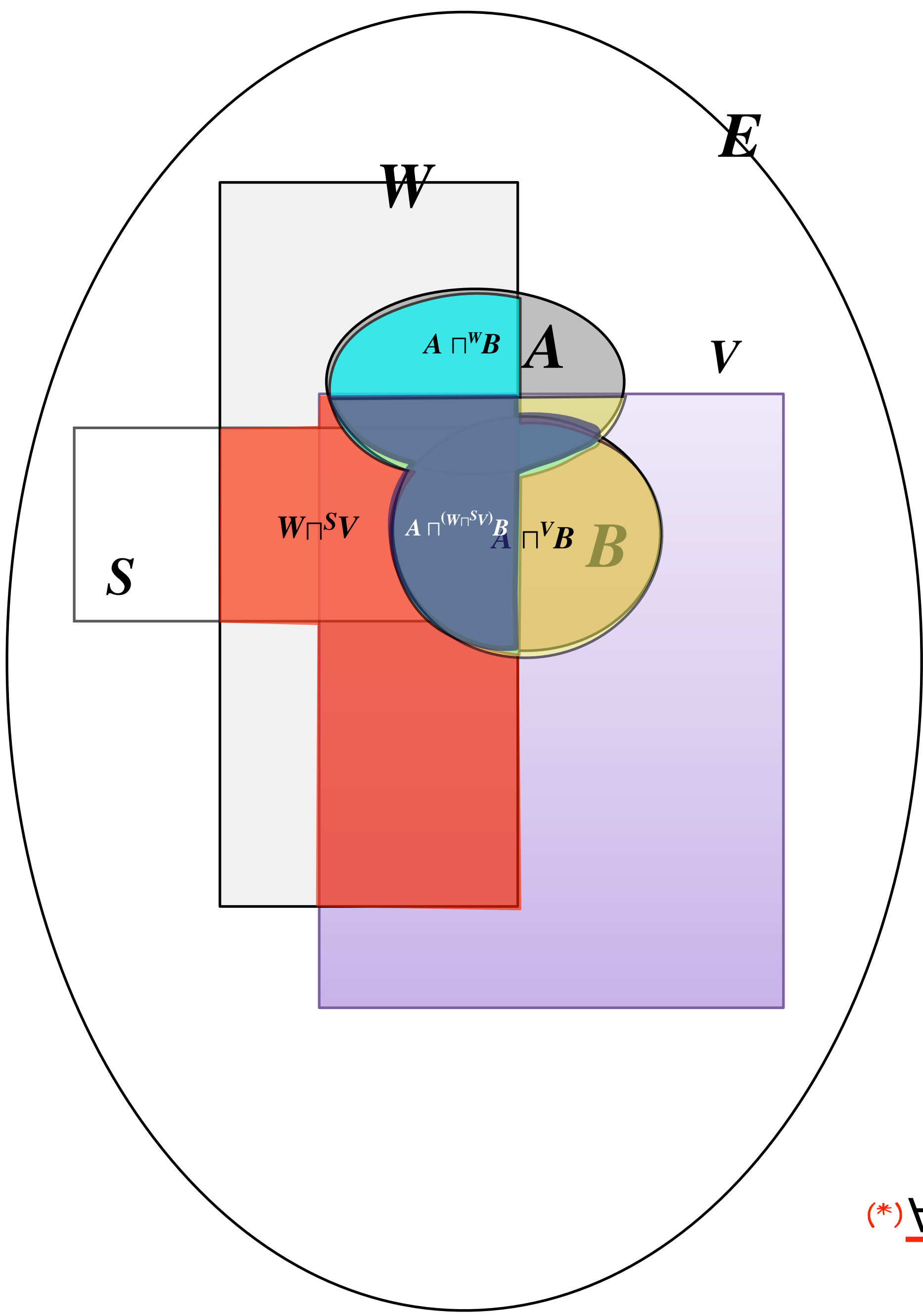
$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$

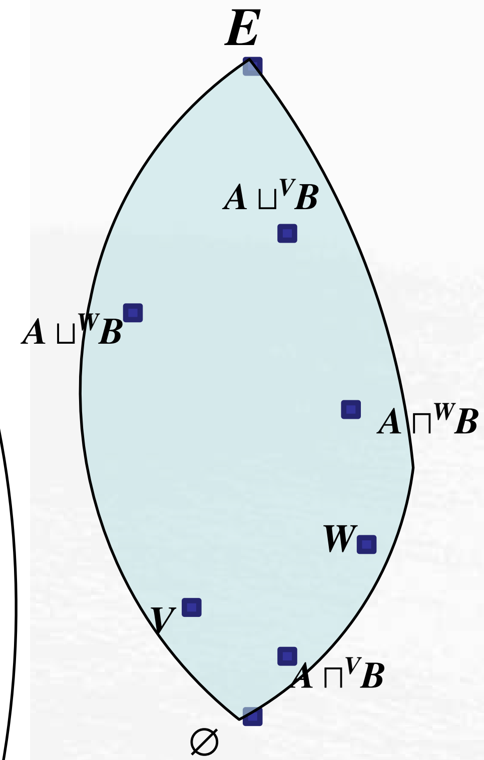
$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

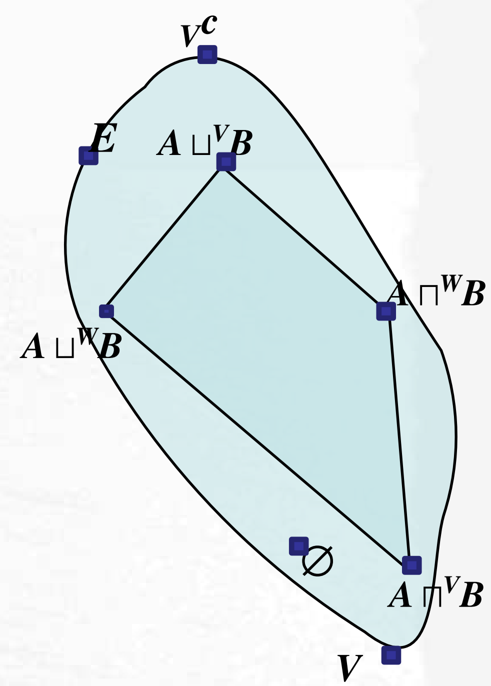
$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$

$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$

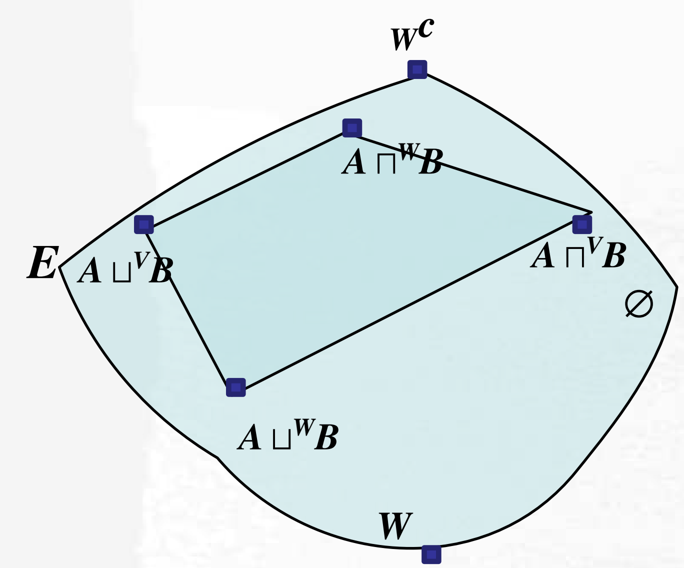




$(P(E), \subseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^V)$



$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Relación entre pares de operadores

$(\sqcap^W, \sqcup^W)$ y $(\sqcap^V, \sqcup^V)$

Proposición(*)

$$(A \sqcap^W B) \sqcap^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \sqcap^W B) \sqcup^V (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^V B)$$

En particular, para $V \in \{\varnothing, E\}$

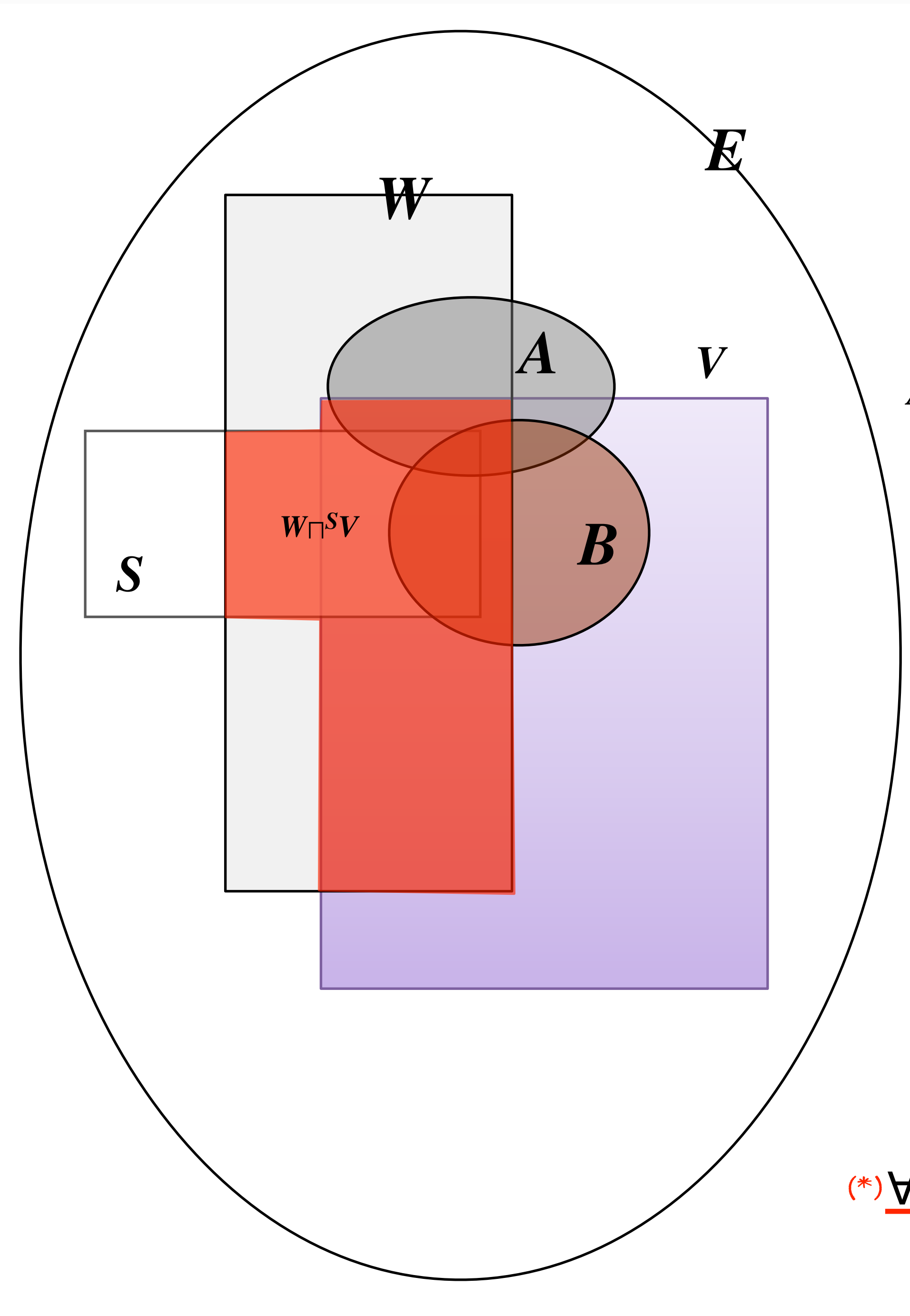
$$(A \sqcap^W B) \cap (A \sqcup^W B) = (A \cap B)$$

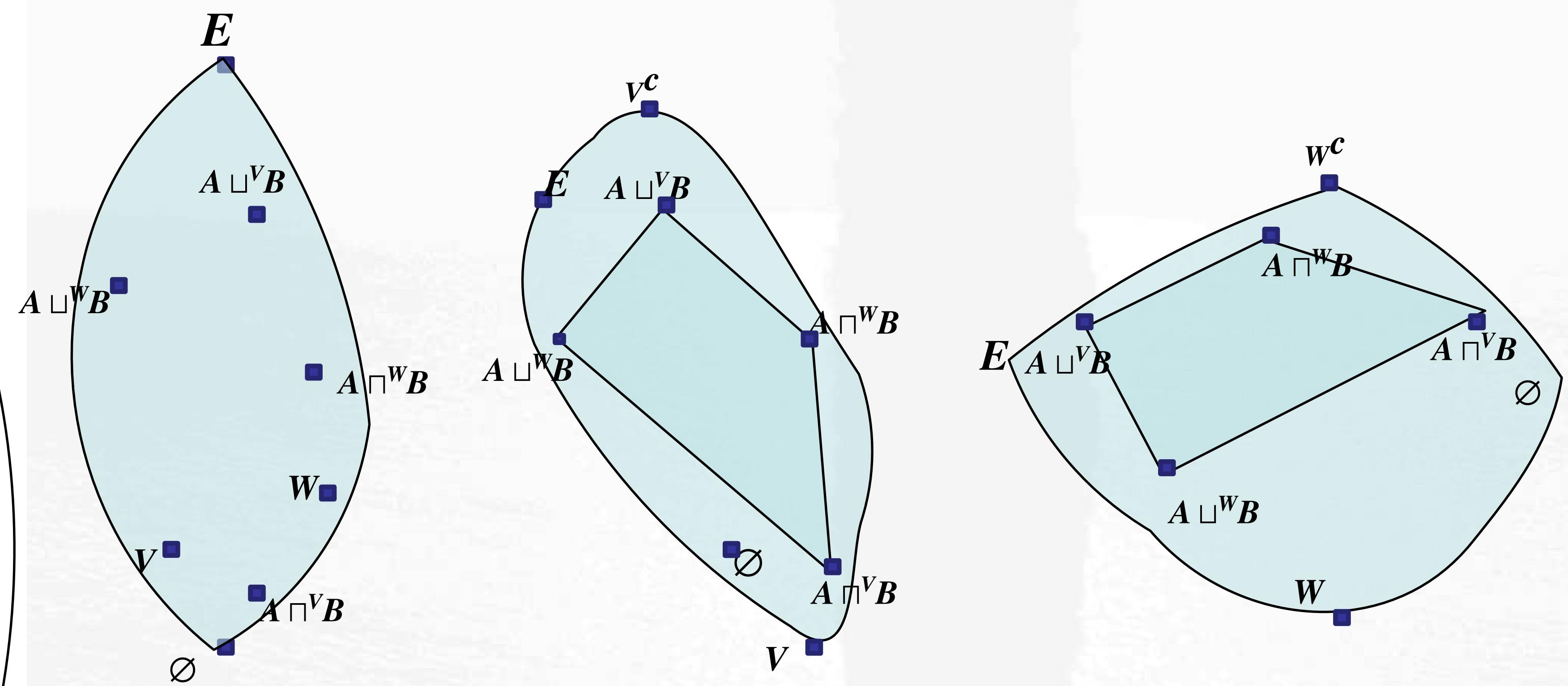
$$(A \sqcap^W B) \cup (A \sqcup^W B) = (A \cup B)$$

Y para $W \in \{\varnothing, E\}$

$$(A \cap B) \sqcap^V (A \cup B) = (A \sqcap^V B)$$

$$(A \cap B) \sqcup^V (A \cup B) = (A \sqcup^V B)$$





$(P(E), \subseteq)$ $(P(E), \sqsubseteq^V)$ $(P(E), \sqsubseteq^W)$

$\forall (A,B,W,V) \in P(E)^4$:

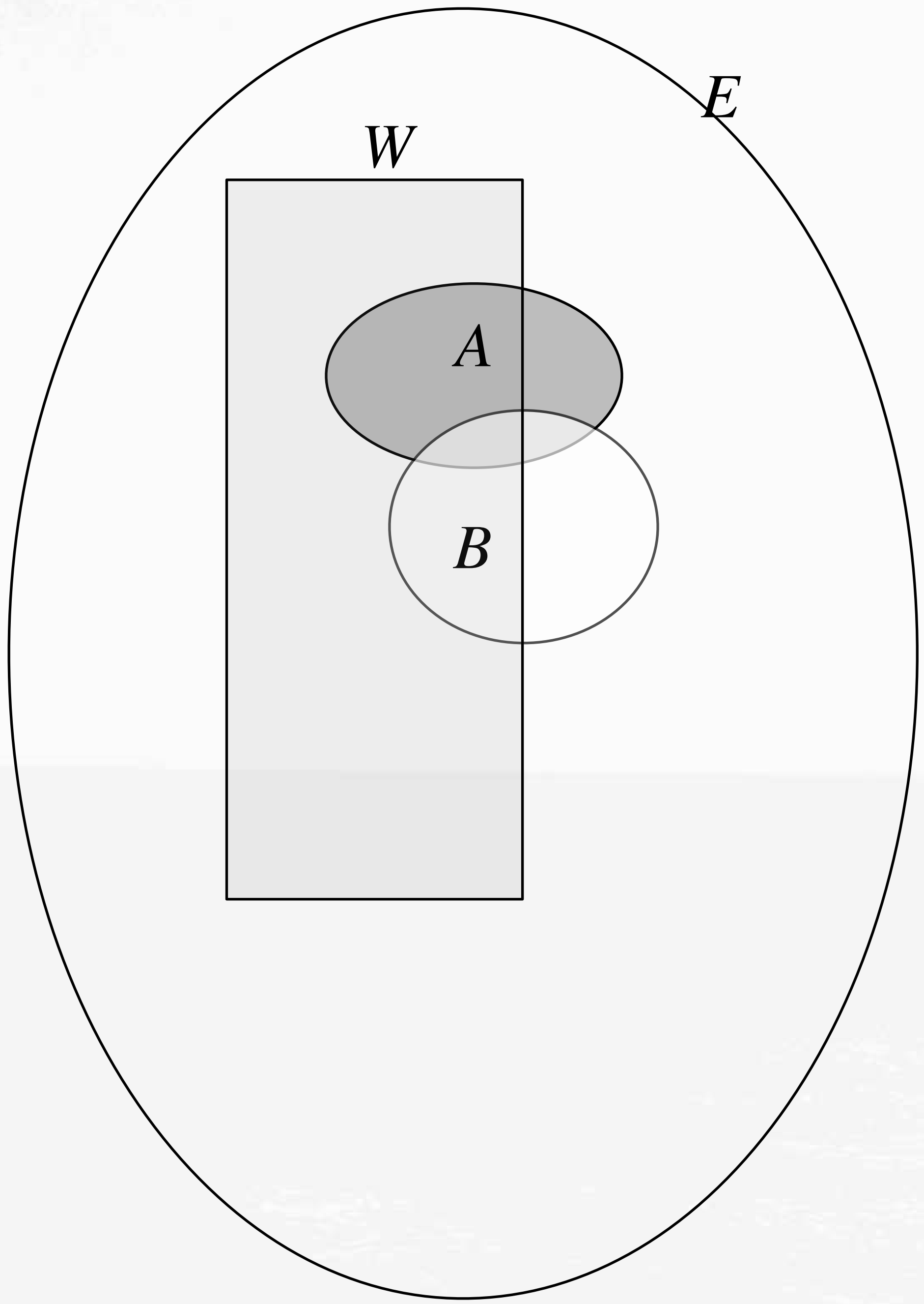
$$A \sqcap^W B = (A \sqcap^V B) \sqcup^V (A \sqcap^V W) \sqcup^V (B \sqcap^V W) = (A \sqcup^V B) \sqcap^V (A \sqcup^V W) \sqcap^V (B \sqcup^V W)$$

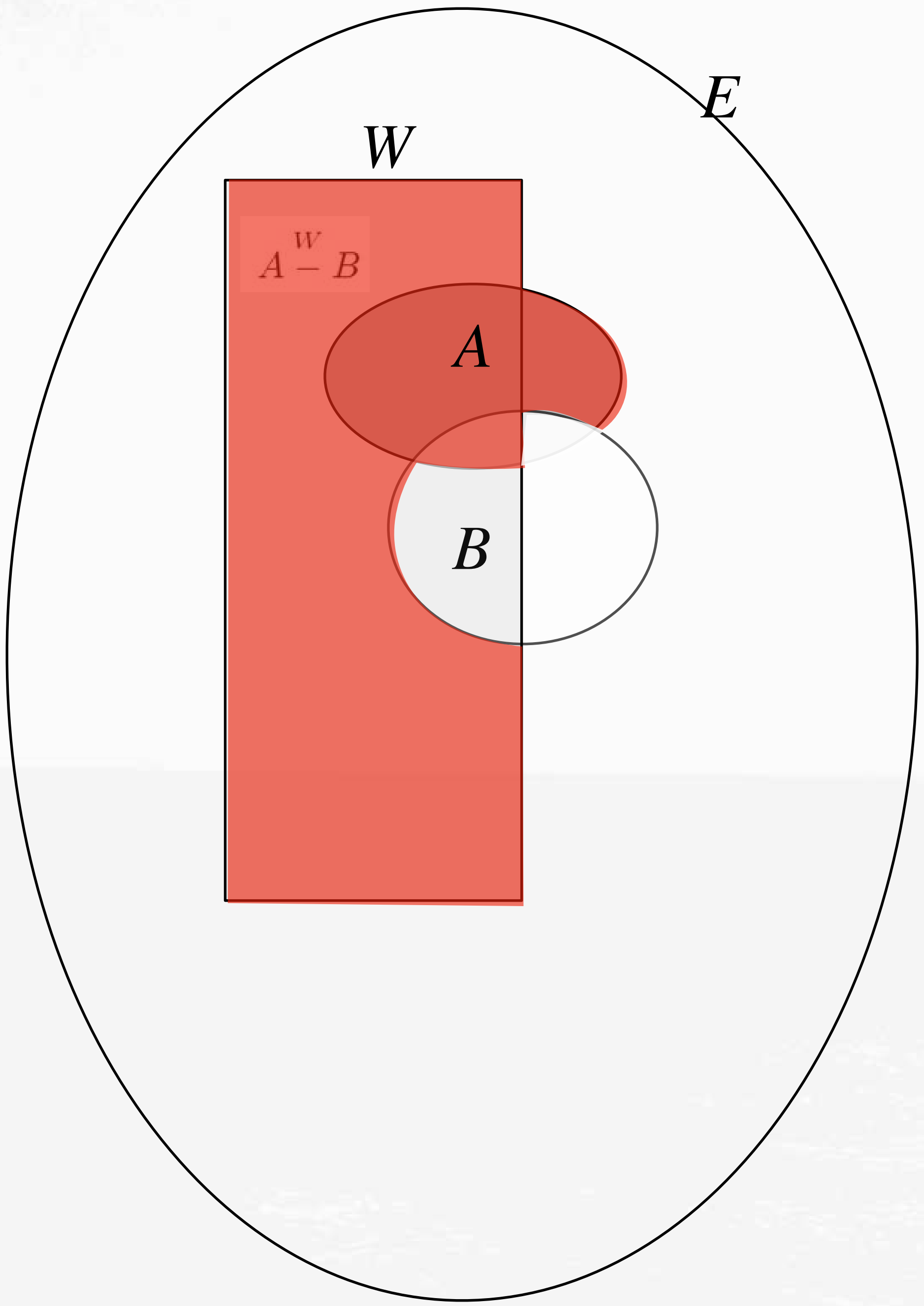
(*) $\forall (A,B,W,V,S) \in P(E)^5$: $\quad A \sqcap^{(W \sqcap^S V)} B = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^V B)$

(*) (Nota. Demostraciones incluidas en otras más generales más adelante).

Operadores w-diferencia, w-diferencia simétrica y w-residuo

OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN P(E)





<u>Definición</u>.

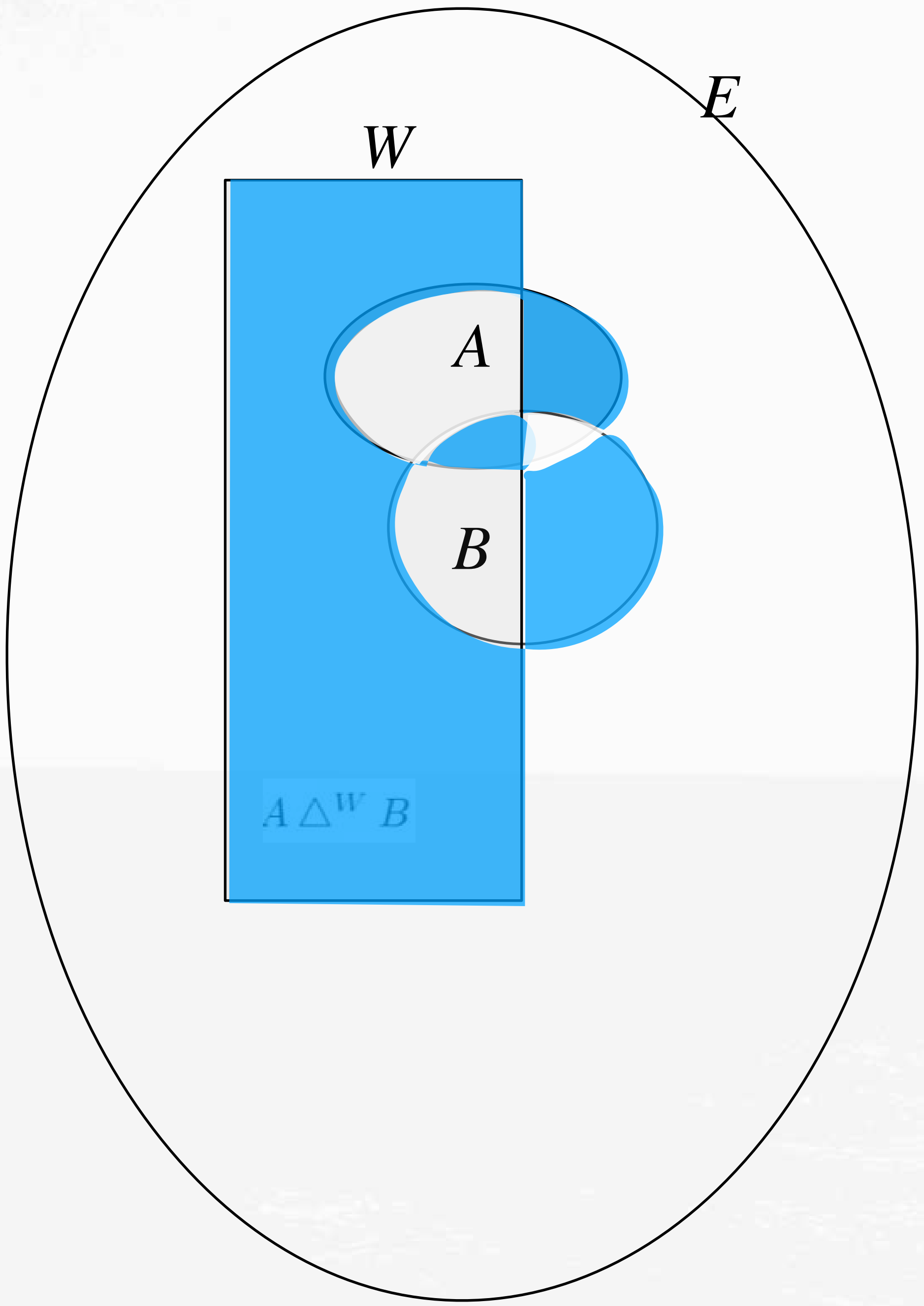
Llamaremos "w-diferencia" $A \overset{W}{-} B$ a la diferencia del conjunto A menos el conjunto B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$:

$A \overset{W}{-} B = A \sqcap^W B^c = (A \cap B^c) \cup [W \cap (A \cup B^c)] =$

$(A - B) \cup [W \cap (B - A)^c] = (A - B) \cup [W \cap (B \to A)] =$

$(A \cup B^c) \cap [W \cup (A \cap B^c)] = (B - A^c) \cap [W \cup (A - B)] =$

$(B \to A) \cap [W \cup (A - B)]$



Definición.

Llamaremos "w-diferencia" $A \overset{W}{-} B$ a la diferencia del conjunto A menos el conjunto B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$:

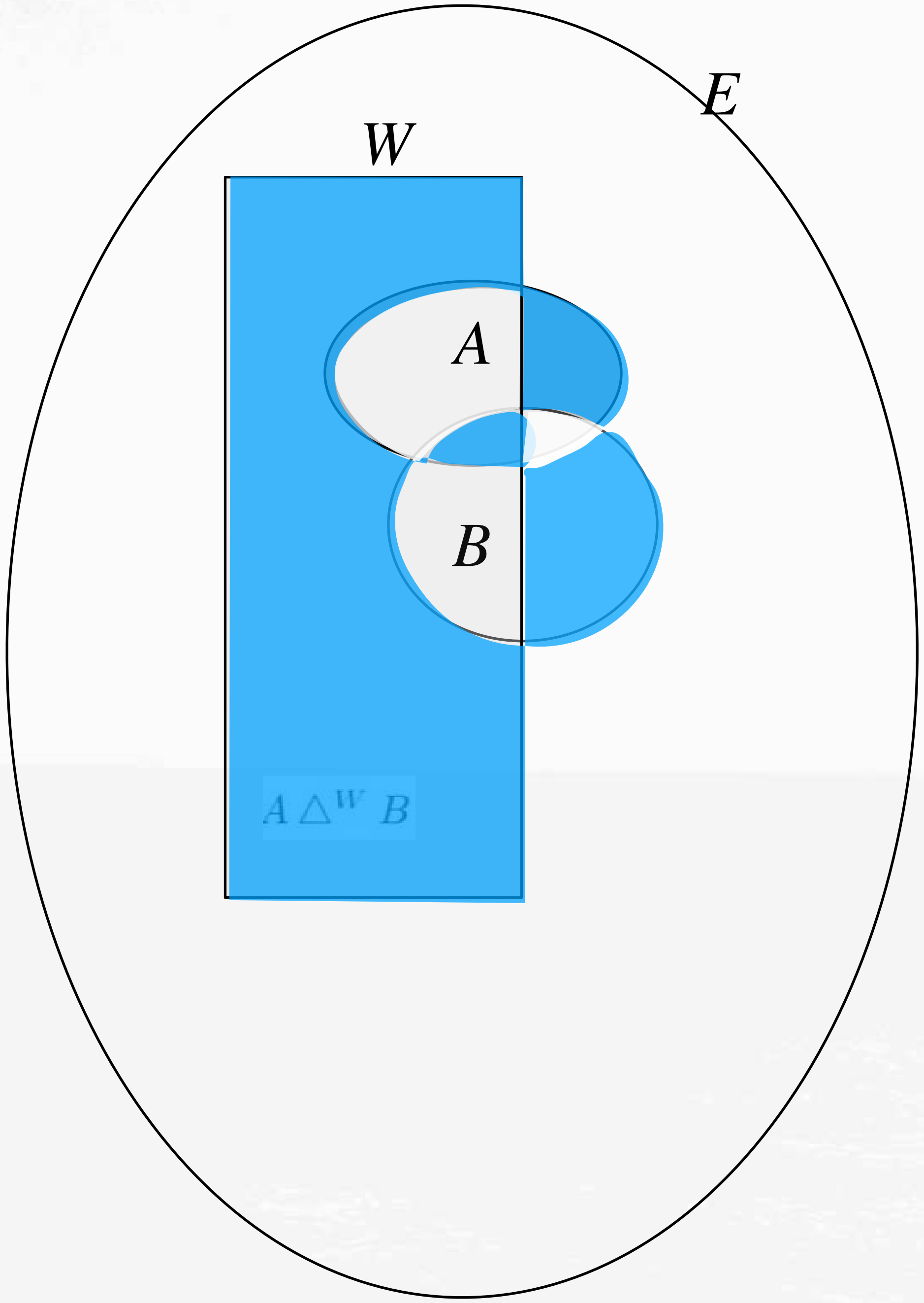
$$A \overset{W}{-} B = A \sqcap^W B^c = (A \cap B^c) \cup [W \cap (A \cup B^c)] =$$
$$(A - B) \cup [W \cap (B - A)^c] = (A - B) \cup [W \cap (B \to A)] =$$
$$(A \cup B^c) \cap [W \cup (A \cap B^c)] = (B - A^c) \cap [W \cup (A - B)] =$$
$$(B \to A) \cap [W \cup (A - B)]$$

Definición.

Llamaremos "w-diferencia simétrica" $A \Delta^W B$ a la diferencia simétrica de los conjuntos A y B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$:

$$A \Delta^W B = [A \sqcap {}^W B^c] \sqcup^W [A^c \sqcap {}^W B] = (A \overset{W}{-} B) \sqcup^W (B \overset{W}{-} A)$$

OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN P(E)



<u>Definición</u>.

Llamaremos "w-diferencia" $A \overset{W}{-} B$ a la diferencia del conjunto A menos el conjunto B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$:

$A \overset{W}{-} B = A \sqcap^W B^c = (A \cap B^c) \cup [W \cap (A \cup B^c)] =$
$(A - B) \cup [W \cap (B - A)^c] = (A - B) \cup [W \cap (B \to A)] =$
$(A \cup B^c) \cap [W \cup (A \cap B^c)] = (B - A^c) \cap [W \cup (A - B)] =$
$(B \to A) \cap [W \cup (A - B)]$

<u>Definición</u>.

Llamaremos "w-diferencia simétrica" $A \, \Delta^W B$ a la diferencia simétrica de los conjuntos A y B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$:

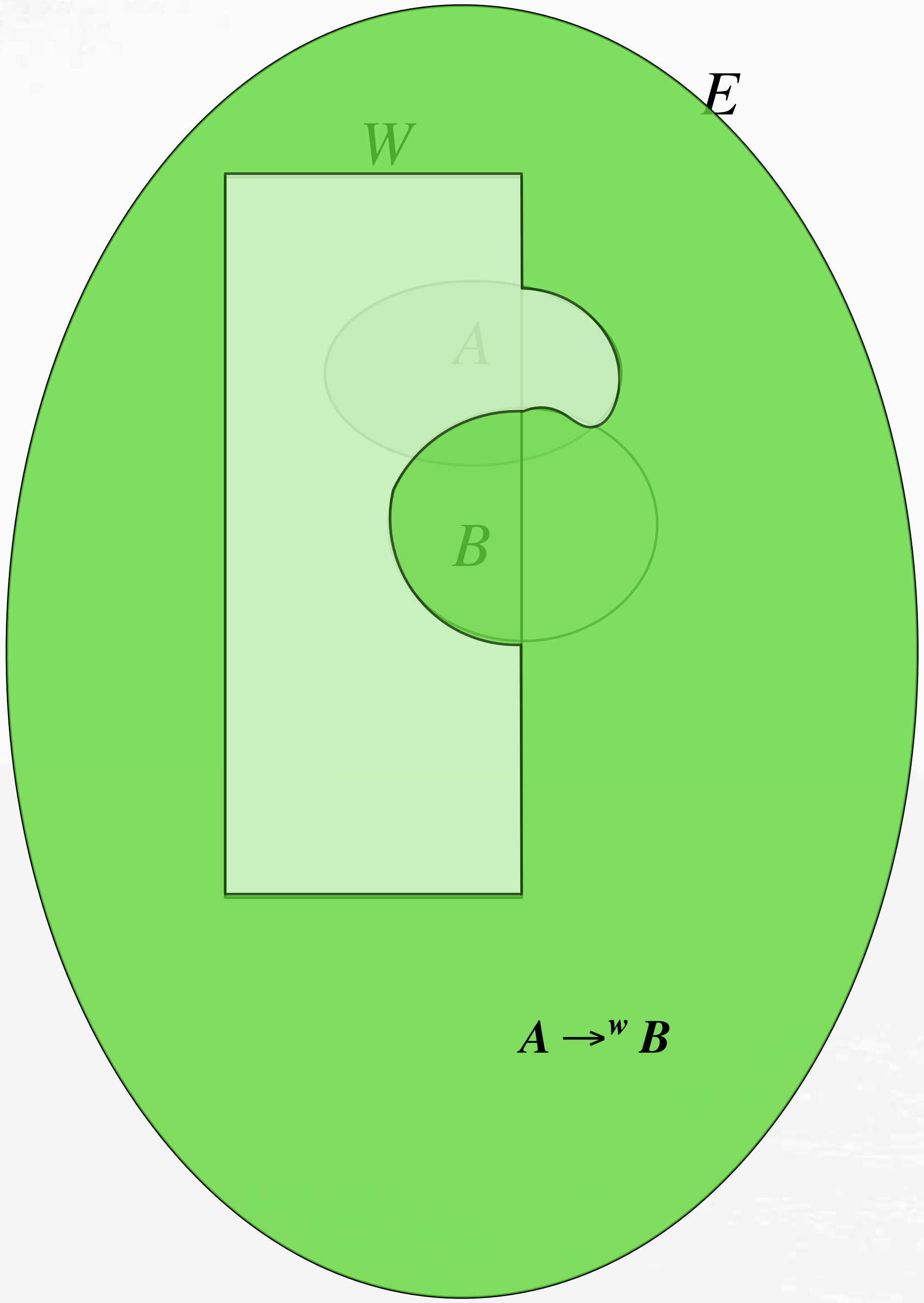
$$A \, \Delta^W B = [A \sqcap^W B^c] \sqcup^W [A^c \sqcap^W B] = (A \overset{W}{-} B) \sqcup^W (B \overset{W}{-} A)$$

<u>Proposición</u> (*)

1. Si $\varphi_W(A) = A \, \Delta \, W$, entonces $\varphi_W(A \, \Delta \, B) = \varphi_W(A) \, \Delta^W \varphi_W(B)$
2. $A \, \Delta^W B = (A \, \Delta \, B \, \Delta \, W)$

(*) (<u>Nota</u>. Véanse trasparencias 190 y siguientes).

OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN P(E)



Definición.

Llamaremos "w-diferencia" $A \stackrel{W}{-} B$ a la diferencia del conjunto A menos el conjunto B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$:

$A \stackrel{W}{-} B = A \sqcap^W B^c = (A \cap B^c) \cup [W \cap (A \cup B^c)] =$

$(A - B) \cup [W \cap (B - A)^c] = (A - B) \cup [W \cap (B \to A)] =$

$(A \cup B^c) \cap [W \cup (A \cap B^c)] = (B - A^c) \cap [W \cup (A - B)] =$

$(B \to A) \cap [W \cup (A - B)]$

Definición.

Llamaremos "w-diferencia simétrica" $A \,\Delta^W B$ a la diferencia simétrica de los conjuntos A y B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$:

$$A \,\Delta^W B = [A \sqcap^W B^c] \sqcup^W [A^c \sqcap^W B] = (A \stackrel{W}{-} B) \sqcup^W (B \stackrel{W}{-} A)$$

Definición.

Llamaremos "w-residuo" $\to^W$ de $\sqcap^W$ en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$ al operador tal que :

$A \to^W B = A^c \sqcup^W B = (A^c \cap B) \cup [W^c \cap (A^c \cup B)] =$

$(B - A) \cup [W^c \cap (A \to B)] = (A^c \cup B) \cap [W^c \cup (A^c \cap B)] =$

$((A \to B) \cap [(B - A) \cup W^c]$.

Proposición (*)

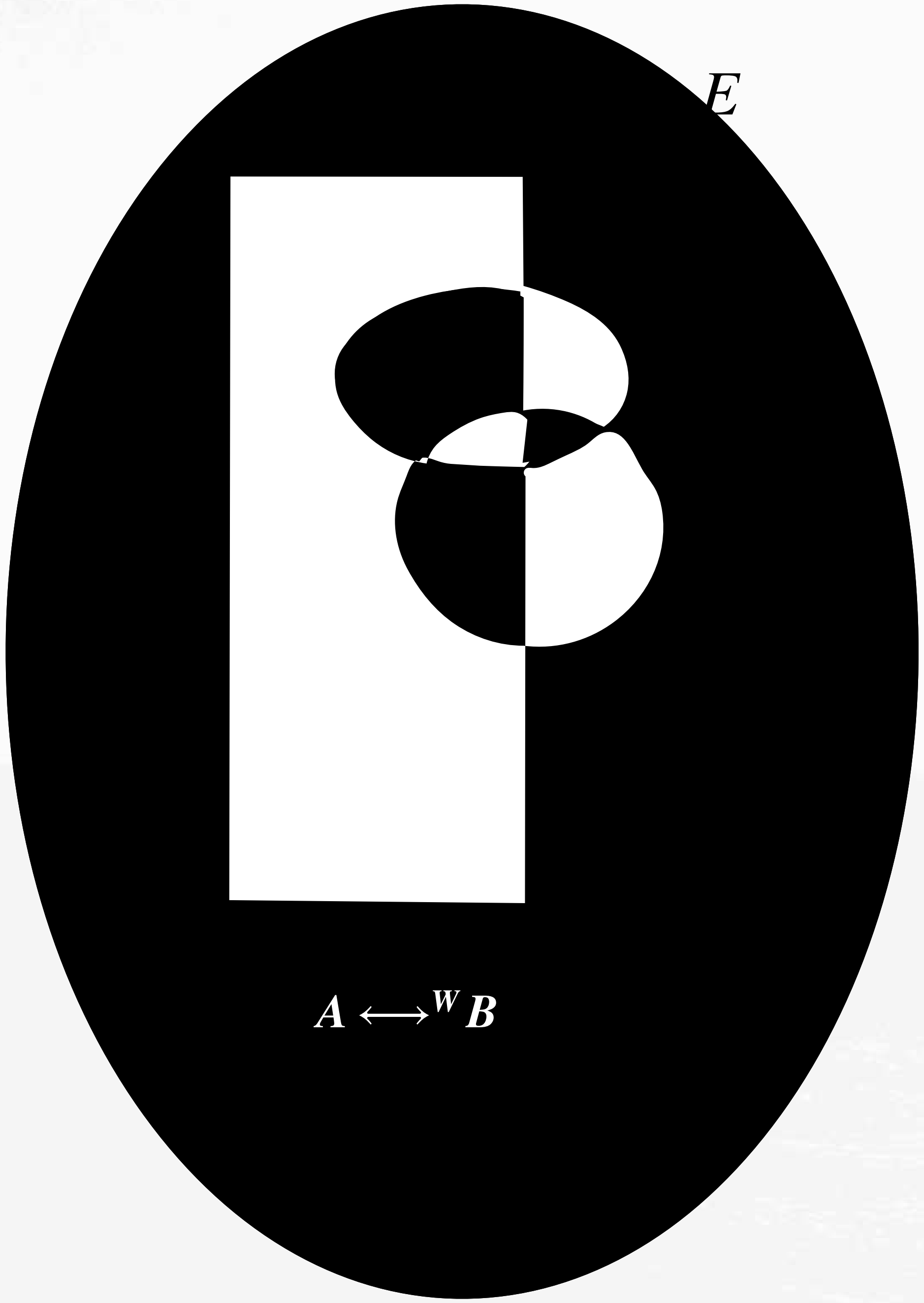
1. Si $\varphi_W(A) = A \,\Delta\, W$, entonces

$\varphi_W(A \,\Delta\, B) = \varphi_W(A) \,\Delta^W \varphi_W(B)$

2. $A \,\Delta^W B = (A \,\Delta\, B \,\Delta\, W)$

(*) (Nota. Véanse trasparencias 190 y siguientes).

OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN P(E)



__Definición.__

Llamaremos "w-diferencia" $A \overset{W}{-} B$ a la diferencia del conjunto A menos el conjunto B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$:

$A \overset{W}{-} B = A \sqcap^W B^c = (A \cap B^c) \cup [W \cap (A \cup B^c)] =$

$(A - B) \cup [W \cap (B - A)^c] = (A - B) \cup [W \cap (B \to A)] =$

$(A \cup B^c) \cap [W \cup (A \cap B^c)] = (B - A^c) \cap [W \cup (A - B)] =$

$(B \to A) \cap [W \cup (A - B)]$

__Definición.__

Llamaremos "w-diferencia simétrica" $A \Delta^W B$ a la diferencia simétrica de los conjuntos A y B en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$:

$$A \Delta^W B = [A \sqcap^W B^c] \sqcup^W [A^c \sqcap^W B] = (A \overset{W}{-} B) \sqcup^W (B \overset{W}{-} A)$$

__Definición.__

Llamaremos "w-residuo" $\to^W$ de $\sqcap^W$ en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$ al operador tal que :

$A \to^W B = A^c \sqcup^W B = (A^c \cap B) \cup [W^c \cap (A^c \cup B)] =$

$(B - A) \cup [W^c \cap (A \to B)] = (A^c \cup B) \cap [W^c \cup (A^c \cap B)] =$

$((A \to B) \cap [(B - A) \cup W^c)]$.

__Proposición__ (*)

1. Si $\varphi_W(A) = A \Delta W$, entonces $\varphi_W(A \Delta B) = \varphi_W(A) \Delta^W \varphi_W(B)$
2. $A \Delta^W B = (A \Delta B \Delta W)$

__Definición.__

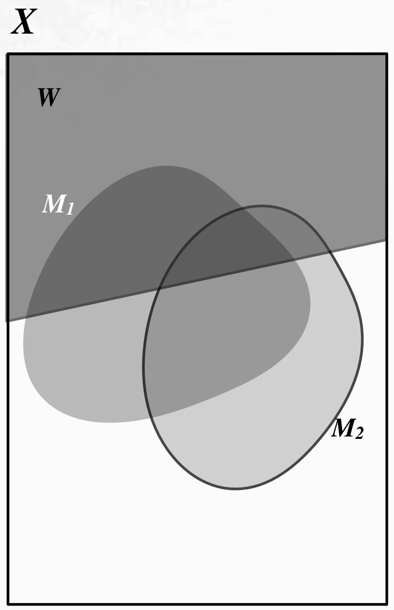
Llamaremos "w-equivalencia" $\longleftrightarrow^W$ en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$ al operador tal que :

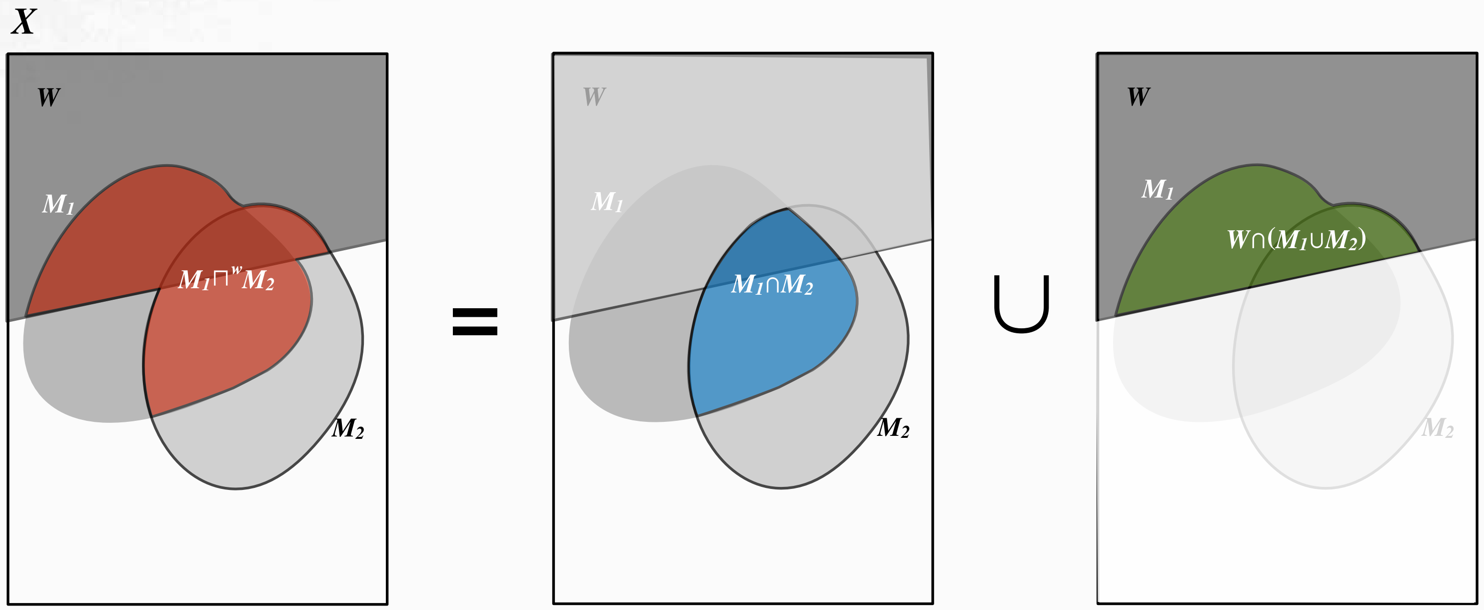
$A \longleftrightarrow^W B = (A \to^W B) \sqcap^W (B \to^W A) =$

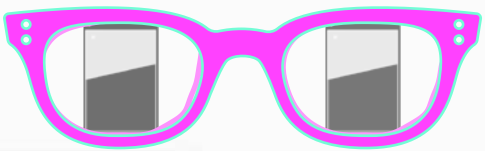
$(A^c \sqcup^W B) \sqcap^W [B^c \sqcup^W A)] = (A \Delta B \Delta W)^c = (A \Delta^W B)^c$.

(*) (__Nota__. Véanse trasparencias 190 y siguientes).

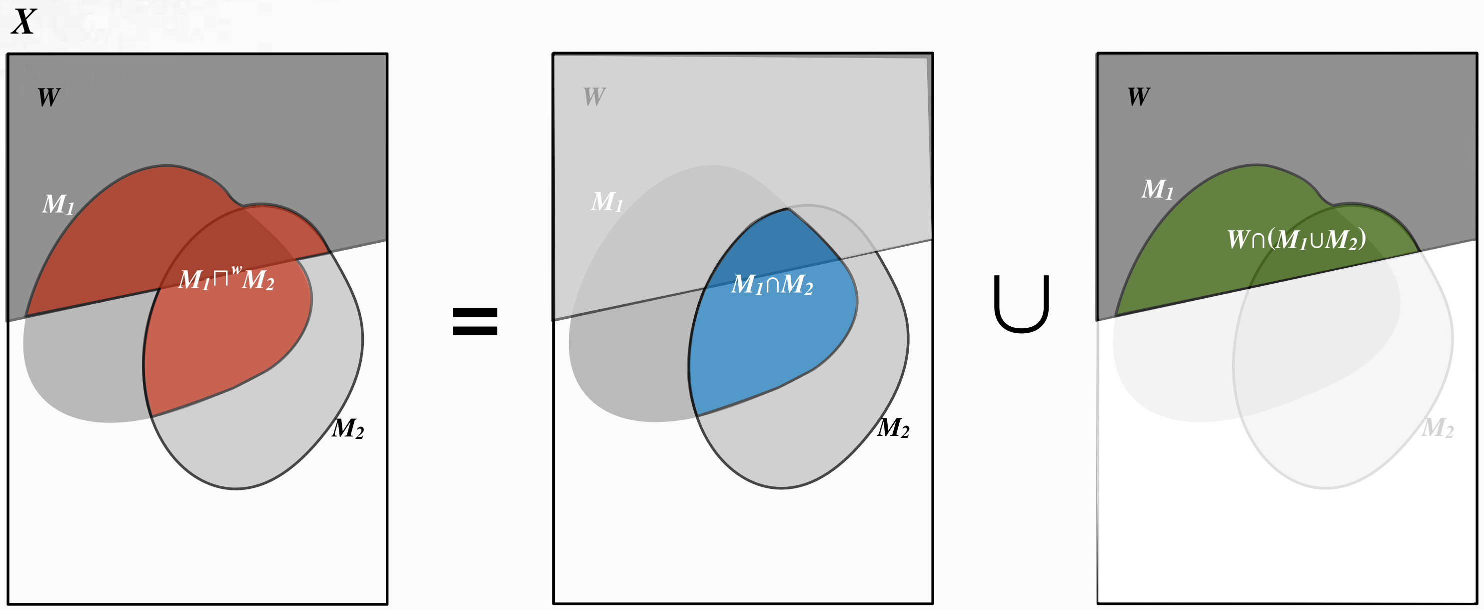
Expresión de $A \sqcap^{w} B$ y $A \sqcup^{w} B$ como unión (usual) de subconjuntos disjuntos

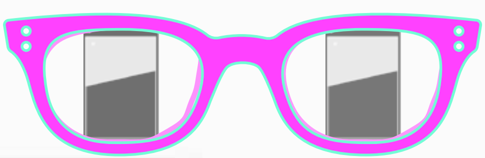

X
W
M_1
M_2





$$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1 \cap M_2) \cup [W \cap (M_1 \cup M_2)]$$





$$M_1\sqcap^{w}M_2=(M_1\cap M_2)\cup[W\cap(M_1\cup M_2)]$$

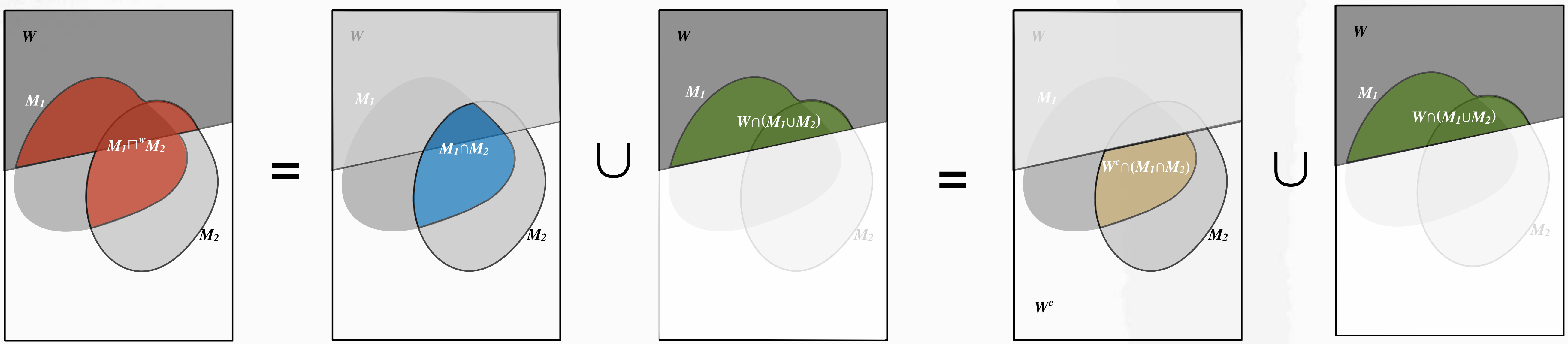
<u>Proposición</u>. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X. Demostremos que $(\sqcap^{w}_{s\in S}M_s)$ y $(\sqcup^{w}_{s\in S}M_s)$ pueden representarse mediante la unión de dos subconjuntos disjuntos:

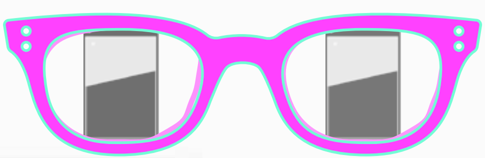
$$(\sqcap^{w}_{s\in S}M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)],\ y\ (\sqcup^{w}_{s\in S}M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)].$$

<u>Demostración</u> En efecto, $\bigcap_{s\in S}M_s=X\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)=(W^c\cup W)\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]$, luego $\sqcap^{w}_{s\in S}M_s=(\bigcap_{s\in S}M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]=$ $[W^c\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]$, pues $[W\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]$.

Como $(\sqcup^{w}_{s\in S}M_s)=(\sqcap^{w^c}_{s\in S}M_s)$ y de $(W^c)^c=W$, se deduce $(\sqcup^{w}_{s\in S}M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S}M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S}M_s)]$.∎

Ilustración de la proposición:





$M_1\sqcap^W M_2 = (M_1\cap M_2)\cup[W\cap(M_1\cup M_2)]$

$=[W^c\cap(M_1\cap M_2)]\cup[W\cap(M_1\cup M_2)]$,

$([W^c\cap(M_1\cap M_2)]\cap[W\cap(M_1\cup M_2)]=\varnothing)$.

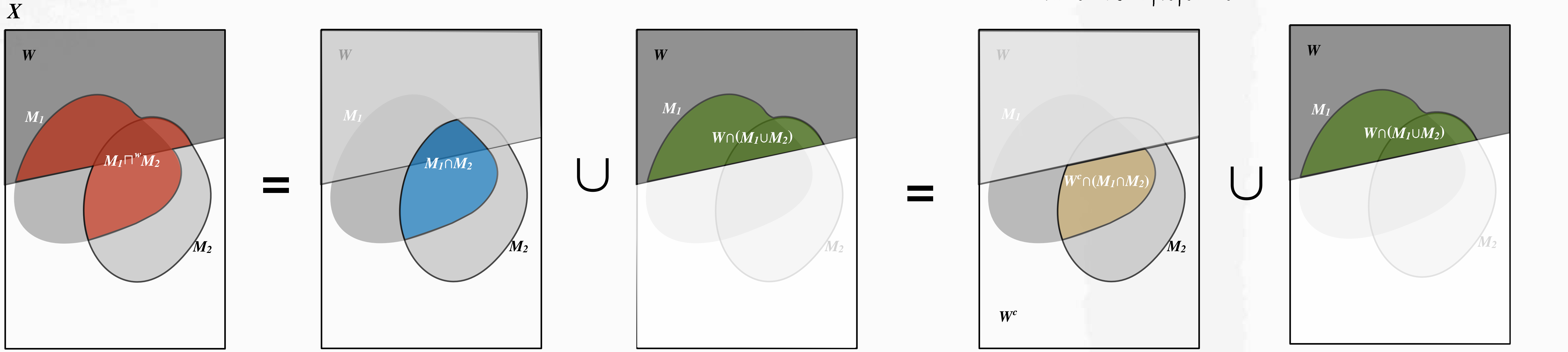
<u>Proposición</u>. Sea $S\neq\varnothing$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X. Demostremos que $(\sqcap^W_{s\in S} M_s)$ y $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)$ pueden representarse mediante la unión de dos subconjuntos disjuntos:

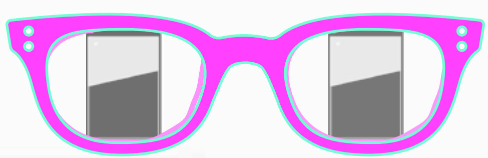
$$(\sqcap^W_{s\in S} M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)],\text{ y }(\sqcup^W_{s\in S} M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)].$$

<u>Demostración</u> En efecto, $\bigcap_{s\in S} M_s = X\cap(\bigcap_{s\in S} M_s) = (W^c\cup W)\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]$, luego $\sqcap^W_{s\in S} M_s = (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] = [W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)] =$ $[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$, pues $[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$.

Como $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)=(\sqcap^{W^c}_{s\in S} M_s)$ y de $(W^c)^c=W$, se deduce $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$.∎

Ilustración de la proposición:





$M_1\sqcap^W M_2 = (M_1\cap M_2)\cup[W\cap(M_1\cup M_2)]$ $= [W^c\cap(M_1\cap M_2)]\cup[W\cap(M_1\cup M_2)]$,

$([W^c\cap(M_1\cap M_2)]\cap[W\cap(M_1\cup M_2)]=\varnothing)$.

Proposición. Sea $S\neq\varnothing$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de X. Demostremos que $(\sqcap^W_{s\in S} M_s)$ y $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)$ pueden representarse mediante la unión de dos subconjuntos disjuntos:

$$(\sqcap^W_{s\in S} M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)], \text{ y } (\sqcup^W_{s\in S} M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)].$$

Demostración En efecto, $\bigcap_{s\in S} M_s = X\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)= (W^c\cup W)\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)=[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]$,

luego $\sqcap^W_{s\in S} M_s= (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]= [W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]=$

$[W^c\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$, pues $[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\subseteq[W\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$.

Como $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)=(\sqcap^{W^c}_{s\in S} M_s)$ y de $(W^c)^c=W$, se deduce $(\sqcup^W_{s\in S} M_s)=[W\cap(\bigcap_{s\in S} M_s)]\cup[W^c\cap(\bigcup_{s\in S} M_s)]$.∎

Nota. Esta representación es compatible con las definiciones: $\overset{\text{w-inf del conjunto vacío}}{\sqcap^W\varnothing}=W^c$ y $\overset{\text{w-sup del conjunto vacío}}{\sqcup^W\varnothing}=W$, pues

$$\sqcap^W\varnothing=[W^c\cap(\bigcap\varnothing)]\cup[W\cap(\bigcup\varnothing)]=(W^c\cap X)\cup(W\cap\varnothing)=W^c,$$

$$\sqcup^W\varnothing=\sqcap^{W^c}\varnothing=[W\cap(\underset{\text{inf del conjunto vacío}}{\bigcap\varnothing})]\cup[W^c\cap(\underset{\text{sup del conjunto vacío}}{\bigcup\varnothing})]=(W\cap X)\cup(W^c\cap\varnothing)=W.$$

La relación de "w-pertenencia" $\in^w$ en $P(E)$

Al igual que la inclusión usual se define mediante la pertenencia:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

y dado que

$$(A \sqsubseteq^w B) \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow (x \in A \triangle W \Rightarrow x \in B \triangle W),$$

proponemos las siguiente definiciones de "w-pertenencia" $\in^w$ y su "negación" $\notin^w$

Relaciones de w-pertenencia $\in^W$ y $\notin^W$ en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica,

consideremos la relaciones $\in^W \subseteq E \times P(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^W \subseteq E \times P(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^W A) \Leftrightarrow (x \in^{W^c} A)}$

Es decir, $x \in (A\cup W)-(A\cap W)$. (un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").

Al igual que la inclusión usual se define mediante la pertenencia:

$$(A\subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

y dado que

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A\triangle W \subseteq B\triangle W) \Leftrightarrow (x \in A\triangle W \Rightarrow x \in B\triangle W),$$

proponemos las siguiente definiciones de "w-pertenencia" $\in^W$ y su "negación" $\notin^W$

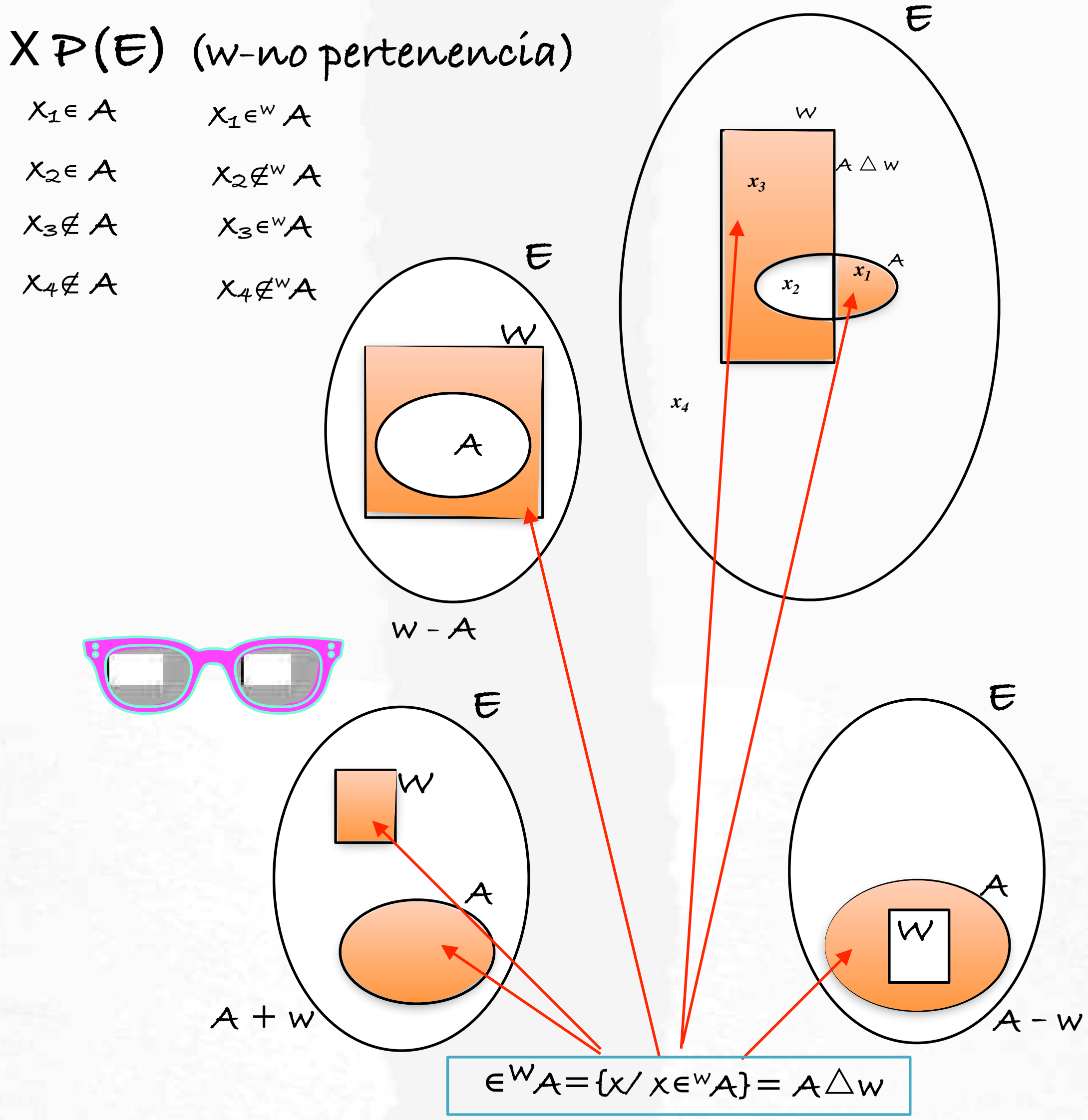
Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$

Es decir, $x\in (A\cup W)-(A\cap W)$. (Un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").



Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

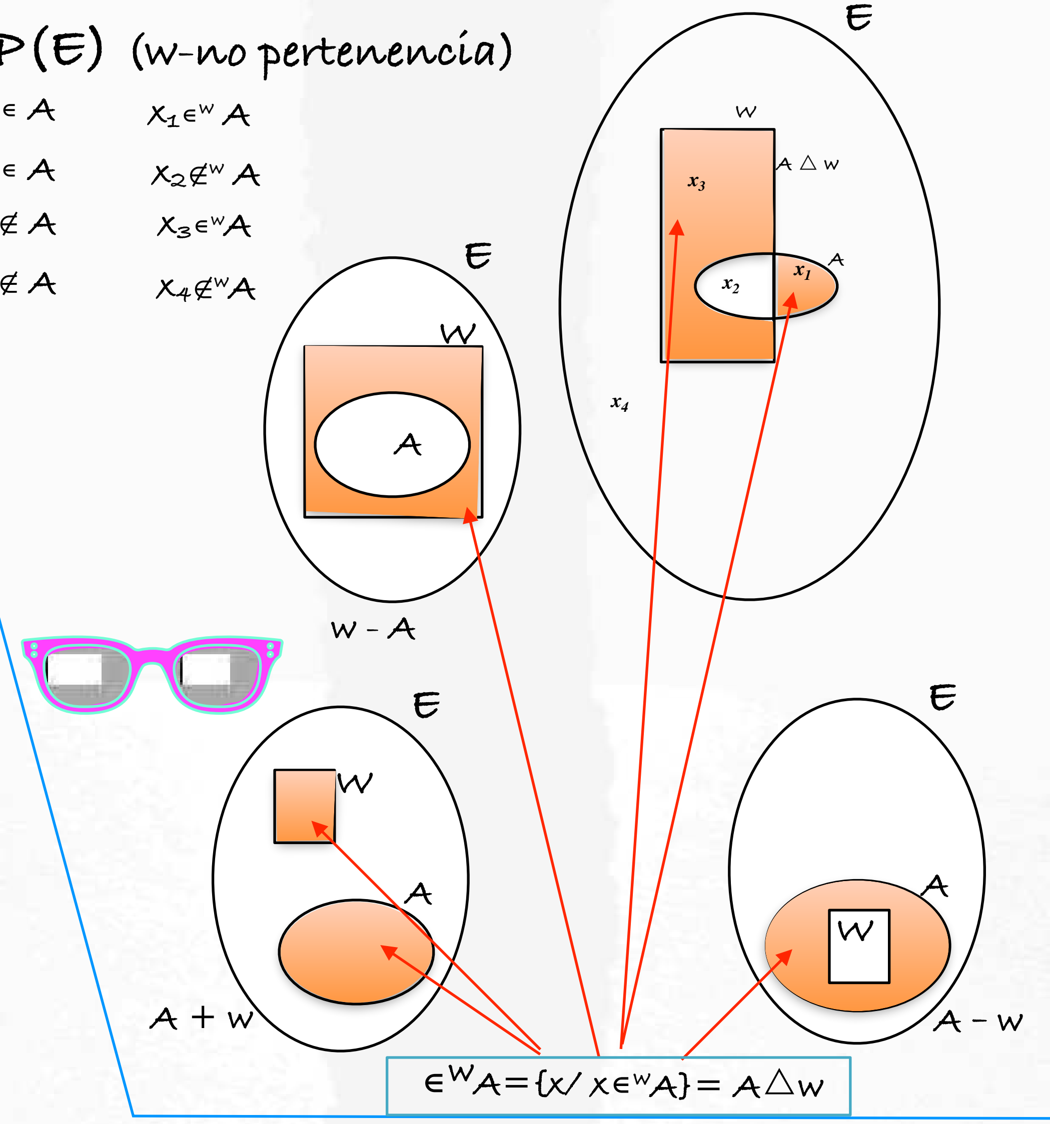
Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A \triangle w = (A \cap w^c) \cup (A^c \cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A \triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$

Es decir, $x \in (A \cup W) - (A \cap W)$. (Un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").

$x_1 \in A$	$x_1 \in^w A$
$x_2 \in A$	$x_2 \notin^w A$
$x_3 \notin A$	$x_3 \in^w A$
$x_4 \notin A$	$x_4 \notin^w A$



Proposición. Se verifica:

$(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$

Dem. $(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A) \Leftrightarrow (x \in A \triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in (A \triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \in (A^c \triangle w))$

$\Leftrightarrow (x \in A^c \triangle w) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$. ∎

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica,

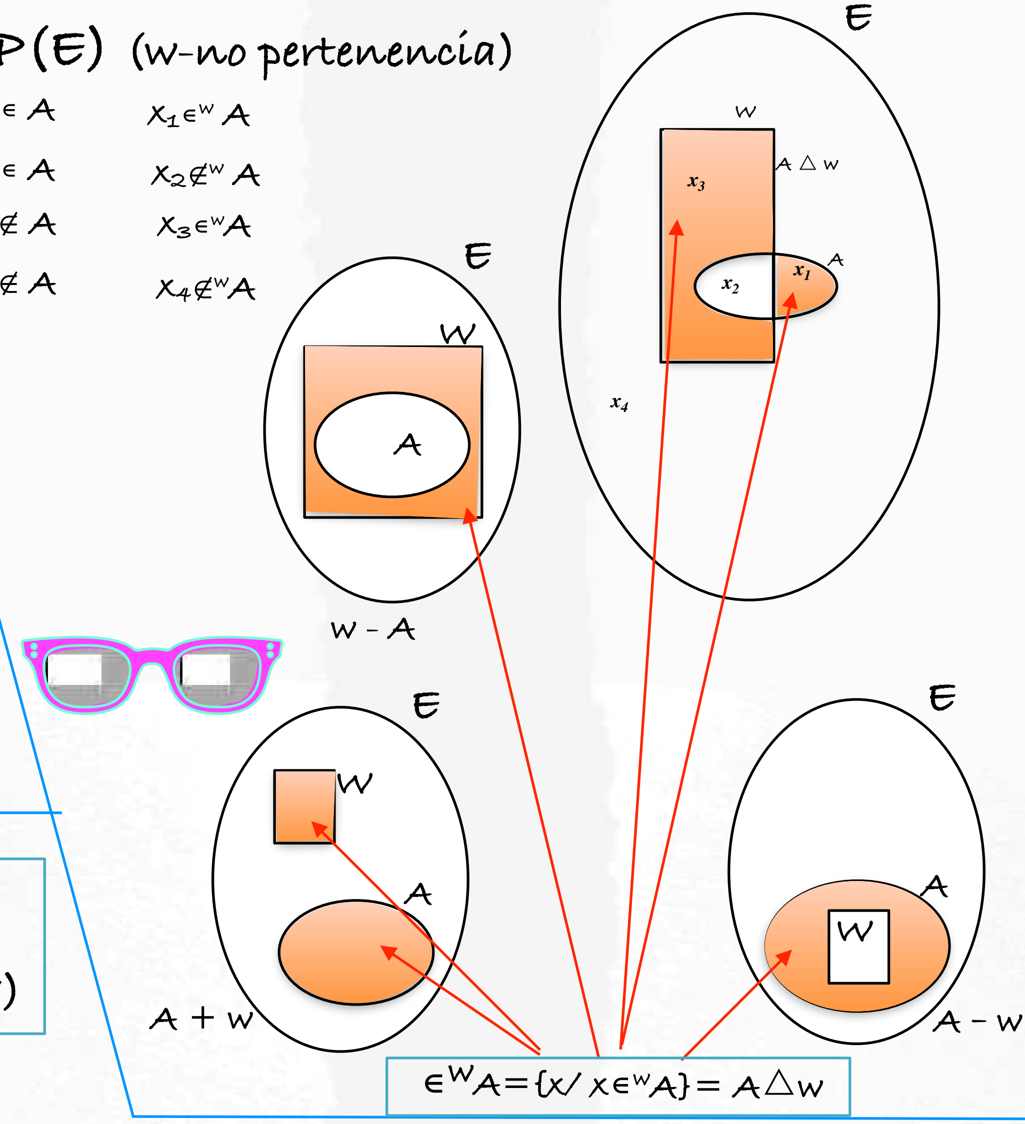
consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$

Es decir, $x \in (A\cup W)-(A\cap W)$. (Un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").

$x_1 \in A$	$x_1 \in^w A$
$x_2 \in A$	$x_2 \notin^w A$
$x_3 \notin A$	$x_3 \in^w A$
$x_4 \notin A$	$x_4 \notin^w A$



Proposición. Se verifica:

$(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$

Dem. $(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \in (A^c\triangle w))$

$\Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$. ∎

Proposición. Se verifica:

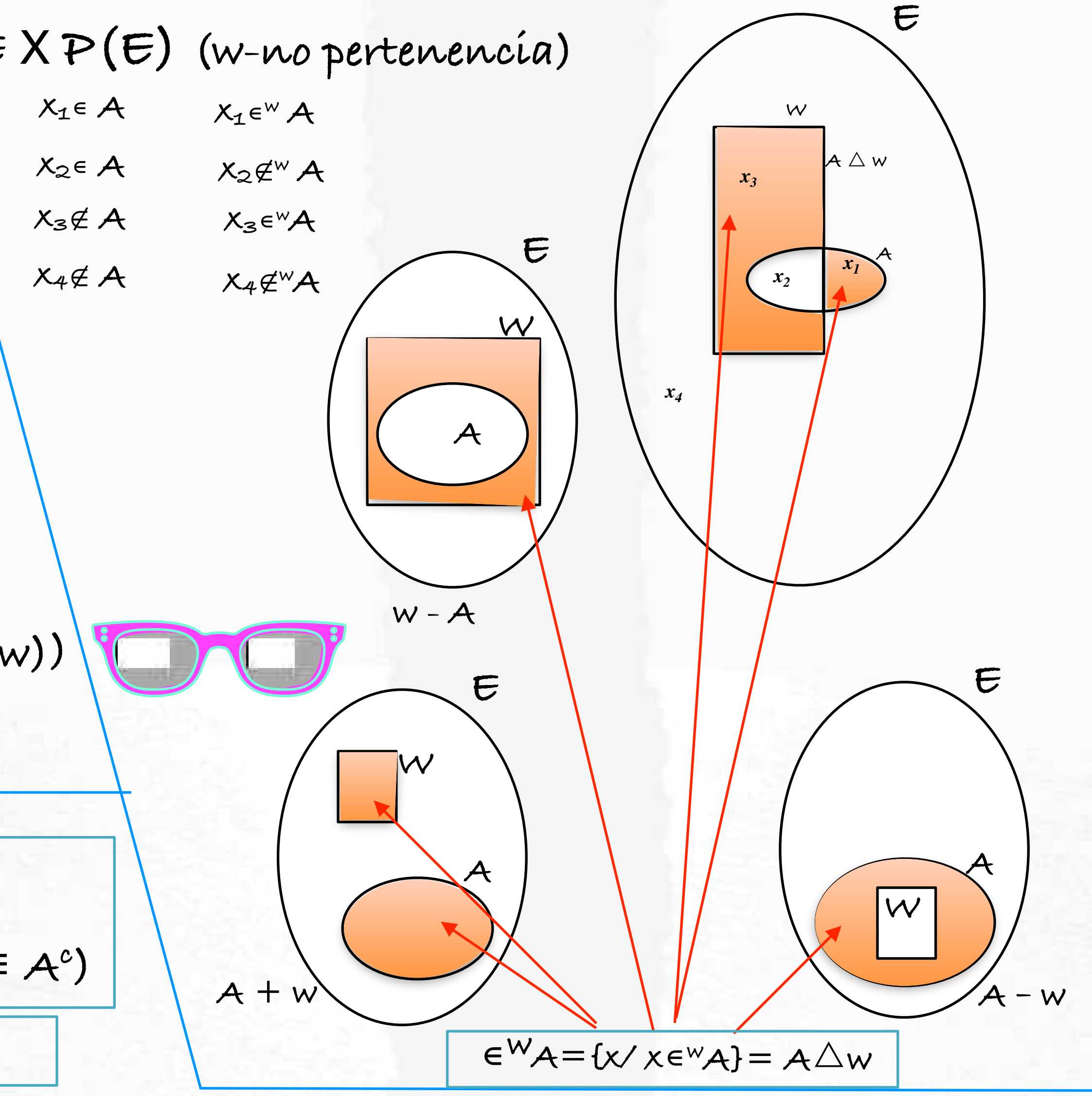
$\forall x\in E$: $(x \in^w W^c)$ $\forall x\in E$: $(x \notin^w W)$	$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$ $(x \in^w \emptyset) \Leftrightarrow (x \in W)$	$(x \in^\emptyset A) \Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$
$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^{W}\subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^{W}\subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^{W} A)\Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^{W} A)\Leftrightarrow(x \in^{W^c} A)}$

Es decir, $x\in (A\cup W)-(A\cap W)$. (Un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").



Proposición. Se verifica:

$(x \notin^{W} A)\Leftrightarrow(x \in^{W} A^c)$

Dem. $(x \notin^{W} A)\Leftrightarrow(x \in^{W^c}A)\Leftrightarrow(x \in A\triangle w^c)\Leftrightarrow(x \in (A\triangle w)^c)\Leftrightarrow(x \in (A^c\triangle w))$

$\Leftrightarrow(x \in A^c\triangle w)\Leftrightarrow(x \in^{W} A^c)$.∎

Proposición. Se verifica:

$\forall x\in E$: $(x \in^{W} W^c)$ $\forall x\in E$: $(x \notin^{W} W)$	$(x \in^{W} E)\Leftrightarrow (x \in W^c)$ $(x \in^{W} \emptyset)\Leftrightarrow (x \in W)$	$(x \in^{\emptyset} A)\Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^{E} A)\Leftrightarrow (x \notin A)\Leftrightarrow (x \in A^c)$
$(x \in^{W} A\triangle w)\Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^{W}(\in^{W} A))\Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^{W} A)\Leftrightarrow (x \in^{A} w)$

Dem. $((W^c\triangle W)=E)\Rightarrow(\forall x\in E: (x \in^{W} W^c))$; $((W\triangle W)=\emptyset)\Rightarrow(\forall x\in E: (x \notin^{W} W))$.

$(x \in^{W} E)\Leftrightarrow (x \in E\triangle w) \Leftrightarrow(x \in (E\cap W^c)\cup(\emptyset\cap W)) \Leftrightarrow(x \in W^c)$.

$(x \in^{W} \emptyset)\Leftrightarrow (x \in \emptyset\triangle w) \Leftrightarrow(x \in W)$.

$(x \in^{\emptyset} A)\Leftrightarrow(x \in A\triangle\emptyset)\Leftrightarrow(x \in A)$; $(x \in^{E} A)\Leftrightarrow(x \in A\triangle E)\Leftrightarrow(x \in A^c\cap E))\Leftrightarrow(x \in A^c)$.

$(x \in^{W} A\triangle w)\Leftrightarrow(x \in A\triangle w\triangle w)\Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^{W}(\in^{W} A))\Leftrightarrow (x \in (\in^{W} A)\triangle w)\Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)\triangle w)\Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^{W} A)\Leftrightarrow (x \in A\triangle w)\Leftrightarrow(x \in w\triangle A)\Leftrightarrow (x \in^{A} w)$.∎

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

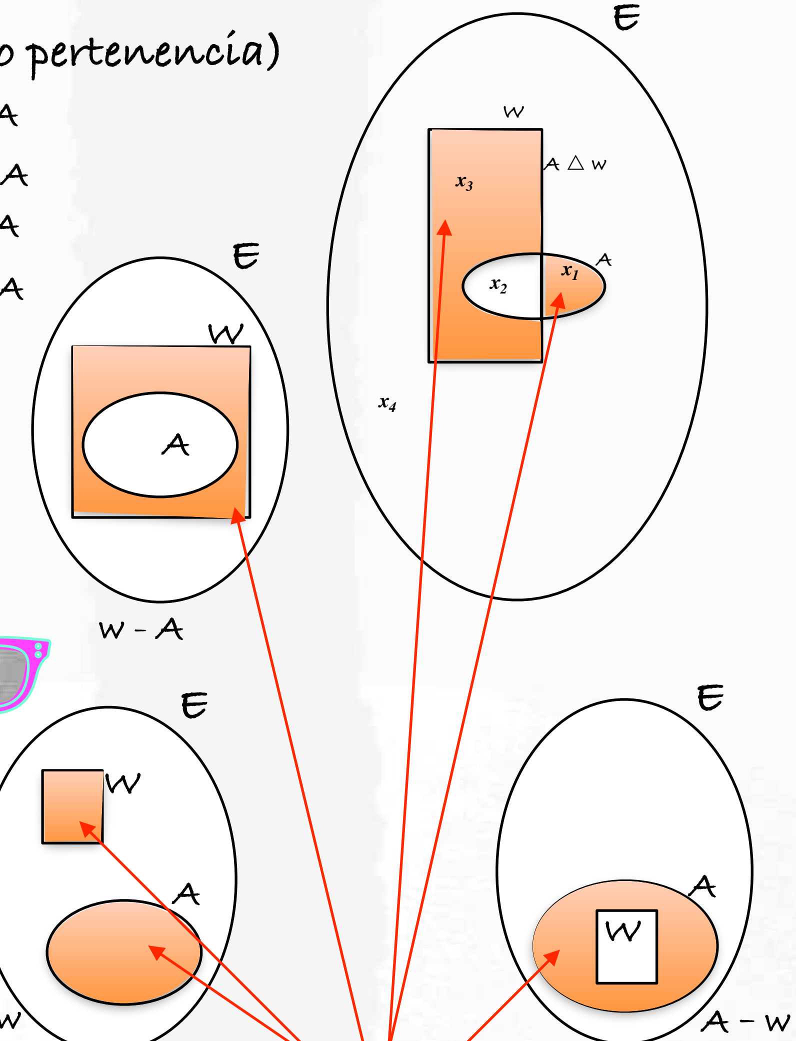
Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$ $\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$

Es decir, $x\in (A\cup W)-(A\cap W)$. (Un "o" exclusivo:

"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").

$x_1\in A$	$x_1\in^w A$
$x_2\in A$	$x_2\notin^w A$
$x_3\notin A$	$x_3\in^w A$
$x_4\notin A$	$x_4\notin^w A$



$\in^W A = \{x/\ x\in^W A\} = A\triangle w$

Proposición . Se verifica:

$(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$

Dem. $(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \in (A^c\triangle w))$

$\Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$.∎

Proposición . Se verifica:

$\forall x\in E$: $(x \in^w W^c)$ $\forall x\in E$: $(x \notin^w W)$	$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$ $(x \in^w \varnothing) \Leftrightarrow (x \in W)$	$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$
$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$

Dem. $((W^c\triangle W) = E) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \in^w W^c))$; $((W\triangle W) = \varnothing) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \notin^w W))$.

$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in E\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (E\cap W^c)\cup(\varnothing\cap W)) \Leftrightarrow (x \in W^c)$.

$(x \in^w \varnothing) \Leftrightarrow (x \in \varnothing\triangle w) \Leftrightarrow (x \in W)$.

$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle\varnothing) \Leftrightarrow (x \in A)$; $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle E) \Leftrightarrow (x \in A^c\cap E)) \Leftrightarrow (x \in A^c)$.

$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in (\in^w A)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in w\triangle A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$.∎

Proposición(*) . Se verifica:

$A \sqsubseteq^w B \Leftrightarrow [(x \in^W A) \Rightarrow (x \in^W B)]$

$(x \in^W A\sqcap^w B) \Leftrightarrow (x \in^W A) \& (x \in^W B)$

$(x \in^W A\sqcup^w B) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E\times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x\in A\triangle w)}$ $\boxed{(x\notin^w A)\Leftrightarrow(x \in^{w^c} A)}$

Es decir, $x\in(A\cup W)-(A\cap W)$. (Un "o" exclusivo:

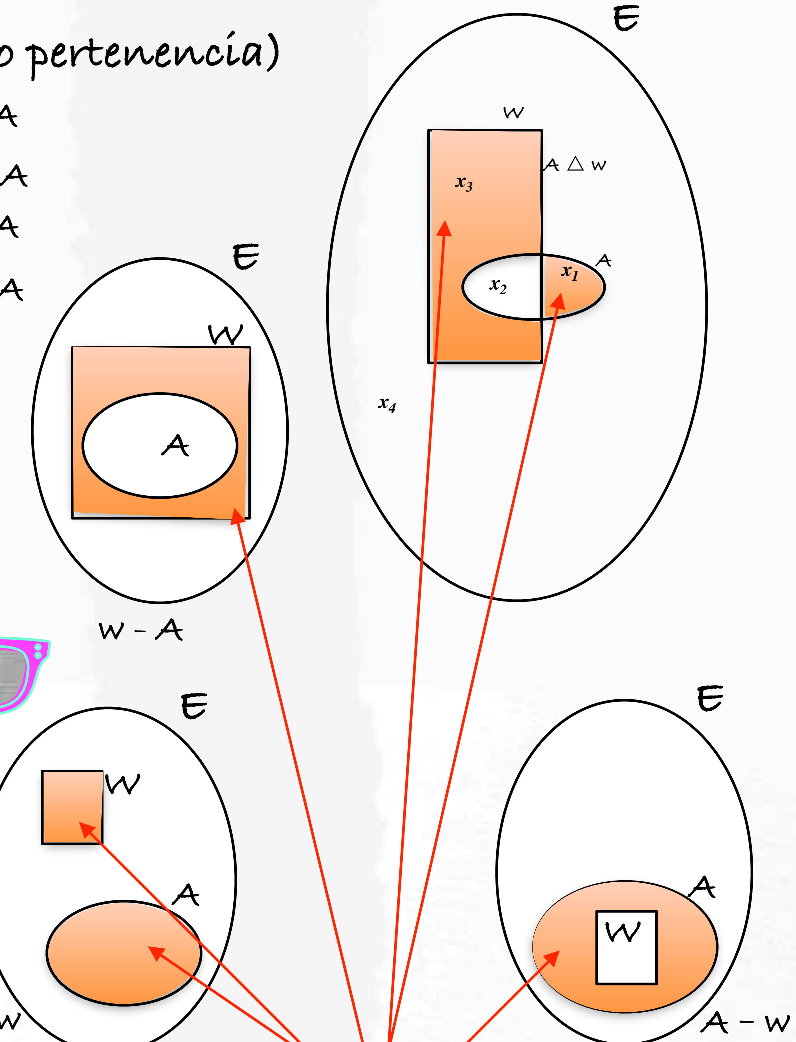
"ó x pertenece a A ó x pertenece al contenido W del vacío").

$x_1\in A$ $x_1\in^w A$

$x_2\in A$ $x_2\notin^w A$

$x_3\notin A$ $x_3\in^w A$

$x_4\notin A$ $x_4\notin^w A$



Proposición. Se verifica:

$(x\notin^w A)\Leftrightarrow(x\in^w A^c)$

Dem. $(x\notin^w A)\Leftrightarrow(x\in^{w^c}A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w^c)\Leftrightarrow(x\in(A\triangle w)^c)\Leftrightarrow(x\in(A^c\triangle w))$

$\Leftrightarrow(x\in A^c\triangle w)\Leftrightarrow(x\in^w A^c)$.∎

$\in^w A=\{x/\, x\in^w A\}=A\triangle w$

Proposición. Se verifica:

$\forall x\in E$: $(x\in^w W^c)$ $\forall x\in E$: $(x\notin^w W)$	$(x\in^w E)\Leftrightarrow(x\in W^c)$ $(x\in^w\emptyset)\Leftrightarrow(x\in W)$	$(x\in^{\emptyset} A)\Leftrightarrow(x\in A)$ $(x\in^E A)\Leftrightarrow(x\notin A)\Leftrightarrow(x\in A^c)$
$(x\in^w A\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$	$(x\in^w(\in^w A))\Leftrightarrow(x\in A)$	$(x\in^w A)\Leftrightarrow(x\in^A w)$

Dem. $((W^c\triangle W)=E)\Rightarrow(\forall x\in E: (x\in^w W^c))$; $((W\triangle W)=\emptyset)\Rightarrow(\forall x\in E: (x\notin^w W))$.

$(x\in^w E)\Leftrightarrow(x\in E\triangle w)\Leftrightarrow(x\in(E\cap W^c)\cup(\emptyset\cap W))\Leftrightarrow(x\in W^c)$.

$(x\in^w\emptyset)\Leftrightarrow(x\in\emptyset\triangle w)\Leftrightarrow(x\in W)$.

$(x\in^{\emptyset} A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle\emptyset)\Leftrightarrow(x\in A)$; $(x\in^E A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle E)\Leftrightarrow(x\in A^c\cap E))\Leftrightarrow(x\in A^c)$.

$(x\in^w A\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$.

$(x\in^w(\in^w A))\Leftrightarrow(x\in(\in^w A)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in(A\triangle w)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$.

$(x\in^w A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w)\Leftrightarrow(x\in w\triangle A)\Leftrightarrow(x\in^A w)$.∎

(*) (Continúa)

Proposición(*). Se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{c} A\sqsubseteq^w B\Leftrightarrow[(x\in^w A)\Rightarrow(x\in^w B)] \\ (x\in^w A\sqcap^w B)\Leftrightarrow(x\in^w A)\&(x\in^w B) \\ (x\in^w A\sqcup^w B)\Leftrightarrow(x\in^w A) \text{ ó } (x\in^w B)\end{array}}$$

Dem. $A\sqsubseteq^w B\Leftrightarrow((A\triangle w)\subseteq(A\triangle w))\Leftrightarrow[(x\in^w A)\Rightarrow(x\in^w B)]$.

$(x\in^w A\sqcap^w B)\Leftrightarrow x\in(A\sqcap^w B)\triangle w\Leftrightarrow(x\in(A\cap B\cap W^c)\cup(A^c\cap B^c\cap W))$

$\Leftrightarrow(x\in[(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)]\cap[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)])\Leftrightarrow$

$(x\in(A\triangle W)\cap(B\triangle W))\Leftrightarrow(x\in^w A)\&(x\in^w B)$.

$(x\in^w A\sqcup^w B)\Leftrightarrow x\in(A\sqcup^w B)\triangle w\Leftrightarrow(x\in((A\cup B)\cap W^c)\cup((A^c\cup B^c)\cap W)$

$\Leftrightarrow x\in[(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)]\cup[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)]\Leftrightarrow$

$x\in((A\triangle W)\cup(B\triangle W))\Leftrightarrow(x\in^w A)$ ó $(x\in^w B)$.∎

(Continuación)

<u>Proposición</u> (Auxiliar). Para todo par de familias no vacías $(M_s)_{s\in S}$, $(N_s)_{s\in S}$ de subconjuntos, (subindicadas por el mismo conjunto de índices S), se verifica:

$$(1)^{(**)}\quad (\bigcap_{s\in S}(M_s)\cup(\bigcap_{s\in S}N_s)\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s),\quad (\bigcup_{s\in S}M_s)\cup(\bigcup_{s\in S}N_s)=\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s).$$

(2) Si existe $w\in P(E)$ y unas familias $(A_s)_{s\in S}$, $(B_s)_{s\in S}$, incluidas en $P(E)$ tales que $M_s=A_s\cap w^c$, $N_s=B_s\cap w$ $\forall s\in S$, entonces la primera de las inclusiones también es una igualdad:

$$(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w))=\bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)).$$

(**) En general, la igualdad en la primera expresión no es cierta como muestra el siguiente ejemplo: $M_1=\{a,b,c,x,y\}$, $M_2=\{b,c,y\}$, $N_1=\{c,d,f\}$, $N_2=\{d,e,f,x,y\}$, se verifica $M_1\cap M_2=\{b,c,y\}$, $N_1\cap N_2=\{d,f\}$, $M_1\cup N_1=\{a,b,c,d,f,x,y\}$, $M_2\cup N_2=\{b,c,d,e,f,x,y\}$; luego $(M_1\cup N_1)\cap(M_2\cup N_2)=\{b,c,d,f,x,y\}\not\subseteq\{b,c,d,f,y\}=(M_1\cap M_2)\cup(N_1\cap N_2)$.

(Continuación)

Proposición (Auxiliar). Para todo par de familias no vacías $(M_s)_{s\in S}$, $(N_s)_{s\in S}$ de subconjuntos, (subindicadas por el mismo conjunto de índices S), se verifica:

$$(1)^{(**)}\quad (\bigcap_{s\in S}(M_s)\cup(\bigcap_{s\in S}N_s)\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s),\quad (\bigcup_{s\in S}M_s)\cup(\bigcup_{s\in S}N_s)=\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s).$$

(2) Si existe $w\in P(E)$ y unas familias $(A_s)_{s\in S}$, $(B_s)_{s\in S}$, incluidas en $P(E)$ tales que $M_s=A_s\cap w^c$, $N_s=B_s\cap w$ $\forall s\in S$, entonces la primera de las inclusiones también es una igualdad:

$$(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w))=\bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)).$$

Demostración.

(1) $((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S)\Rightarrow((\bigcap_{s\in S}M_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcap_{s\in S}N_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))\Rightarrow((\bigcap_{s\in S}M_s)\cup(\bigcap_{s\in S}N_s))\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))$.

$((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S)\Rightarrow((\bigcup_{s\in S}M_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcup_{s\in S}N_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))\Rightarrow((\bigcup_{s\in S}M_s)\cup(\bigcup_{s\in S}N_s))\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))$

$x\in\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s)\Rightarrow(\exists k\in S:\ x\in M_k\cup N_k)$ y como $(M_k\subseteq\bigcup_{s\in S}M_s)$ y $K_k\subseteq\bigcup_{s\in S}N_s))$, obtenemos finalmente $x\in(\bigcup_{s\in S}M_s)\cup(\bigcup_{s\in S}N_s)$.

(2) $(x\in\bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w))\Rightarrow(x\in(A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, luego, si $x\in w^c$ entonces $(x\in(A_s\cap w^c)\ \forall s\in S)$ o si $x\in w$ entonces $(x\in(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, es decir $(x\in(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w))$. ∎

(**) En general, la igualdad en la primera expresión no es cierta como muestra el siguiente ejemplo: $M_1=\{a,b,c,x,y\}$, $M_2=\{b,c,y\}$, $N_1=\{c,d,f\}$, $N_2=\{d,e,f,x,y\}$, se verifica $M_1\cap M_2=\{b,c,y\}$, $N_1\cap N_2=\{d,f\}$, $M_1\cup N_1=\{a,b,c,d,f,x,y\}$, $M_2\cup N_2=\{b,c,d,e,f,x,y\}$; luego $(M_1\cup N_1)\cap(M_2\cup N_2)=\{b,c,d,f,x,y\}\not\subseteq\{b,c,d,f,y\}=(M_1\cap M_2)\cup(N_1\cap N_2)$.

(Continuación)

<u>Proposición</u> (Auxiliar). Para todo par de familias no vacías $(M_s)_{s\in S}$, $(N_s)_{s\in S}$ de subconjuntos, (subindicadas por el mismo conjunto de índices S), se verifica:

$$(1)^{(**)} \quad (\bigcap_{s\in S} M_s)\cup(\bigcap_{s\in S} N_s) \subseteq \bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s), \quad (\bigcup_{s\in S} M_s)\cup(\bigcup_{s\in S} N_s) = \bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s).$$

(2) Si existe $w\in P(E)$ y unas familias $(A_s)_{s\in S}$, $(B_s)_{s\in S}$, incluidas en $P(E)$ tales que $M_s=A_s\cap w^c$, $N_s=B_s\cap w$ $\forall s\in S$, entonces la primera de las inclusiones también es una igualdad:

$$(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w)) = \bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)).$$

<u>Demostración</u>.

(1) $((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S) \Rightarrow ((\bigcap_{s\in S} M_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcap_{s\in S} N_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s)) \Rightarrow ((\bigcap_{s\in S} M_s)\cup(\bigcap_{s\in S} N_s)) \subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s)).$

$((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S) \Rightarrow ((\bigcup_{s\in S} M_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcup_{s\in S} N_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s)) \Rightarrow ((\bigcup_{s\in S} M_s)\cup(\bigcup_{s\in S} N_s)) \subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))$

$x\in\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s)\Rightarrow(\exists k\in S:\ x\in M_k\cup N_k)$ y como $(M_k\subseteq\bigcup_{s\in S} M_s)$ y $K_k\subseteq\bigcup_{s\in S} N_s))$, obtenemos finalmente $x\in(\bigcup_{s\in S} M_s)\cup(\bigcup_{s\in S} N_s)$.

(2) $(x\in\bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w))\Rightarrow(x\in(A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, luego, si $x\in w^c$ entonces $(x\in(A_s\cap w^c)\ \forall s\in S)$ o si $x\in w$ entonces $(x\in(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, es decir $(x\in(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w))$. ∎

Como consecuencia de la proposición auxiliar anterior, se obtiene el siguiente resultado que incluye al de la última proposición en la transparencia anterior:

<u>Proposición</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $P(E)$, se verifica:

(i) $(x\in^W \sqcap^W_{j\in J} A_j)\Leftrightarrow\forall k\in J:(x\in^W A_k)$, es decir $(\sqcap^W_{j\in J} A_j)\triangle w=\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x\in^W \sqcup^W_{j\in J} A_j)\Leftrightarrow\exists k\in J:(x\in^W A_k)$, es decir $(\sqcup^W_{j\in J} A_j)\triangle w=\bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

En particular, $(x\in^W A\sqcap^W B)\Leftrightarrow(x\in^W A)\ \&\ (x\in^W B)$,
$(x\in^W A\sqcup^W B)\Leftrightarrow(x\in^W A)$ ó $(x\in^W B)$.

(**) En general, la igualdad en la primera expresión no es cierta como muestra el siguiente ejemplo: $M_1=\{a,b,c,x,y\}$, $M_2=\{b,c,y\}$, $N_1=\{c,d,f\}$, $N_2=\{d,e,f,x,y\}$, se verifica $M_1\cap M_2=\{b,c,y\}$, $N_1\cap N_2=\{d,f\}$, $M_1\cup N_1=\{a,b,c,d,f,x,y\}$, $M_2\cup N_2=\{b,c,d,e,f,x,y\}$; luego $(M_1\cup N_1)\cap(M_2\cup N_2)=\{b,c,d,f,x,y\}\not\subseteq\{b,c,d,f,y\}=(M_1\cap M_2)\cup(N_1\cap N_2)$.

(Continuación)

<u>Proposición</u> (Auxiliar). Para todo par de familias no vacías $(M_s)_{s\in S}$, $(N_s)_{s\in S}$ de subconjuntos, (subindicadas por el mismo conjunto de índices S), se verifica:

$$(1)^{(**)}\quad \Big(\bigcap_{s\in S}(M_s)\cup\big(\bigcap_{s\in S} N_s\big) \subseteq \bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s),\qquad \big(\bigcup_{s\in S} M_s\big)\cup\big(\bigcup_{s\in S} N_s\big) = \bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s).$$

(2) Si existe $w\in P(E)$ y unas familias $(A_s)_{s\in S}$, $(B_s)_{s\in S}$, incluidas en $P(E)$ tales que $M_s=A_s\cap w^c$, $N_s=B_s\cap w$ $\forall s\in S$, entonces la primera de las inclusiones también es una igualdad:

$$\big(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup\big(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w)\big) = \bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)).$$

<u>Demostración</u>.

(1) $((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S)\Rightarrow((\bigcap_{s\in S} M_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcap_{s\in S} N_s\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))\Rightarrow((\bigcap_{s\in S} M_s)\cup(\bigcap_{s\in S} N_s))\subseteq\bigcap_{s\in S}(M_s\cup N_s))$.

$((M_s\subseteq(M_s\cup N_s))\,\&\,(N_s\subseteq(M_s\cup N_s)\ \forall s\in S)\Rightarrow((\bigcup_{s\in S} M_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))\,\&\,(\bigcup_{s\in S} N_s\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))\Rightarrow((\bigcup_{s\in S} M_s)\cup(\bigcup_{s\in S} N_s))\subseteq\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s))$

$x\in\bigcup_{s\in S}(M_s\cup N_s)\Rightarrow(\exists k\in S:\ x\in M_k\cup N_k)$ y como $(M_k\subseteq\bigcup_{s\in S} M_s)$ y $K_k\subseteq\bigcup_{s\in S} N_s))$, obtenemos finalmente $x\in(\bigcup_{s\in S} M_s)\cup(\bigcup_{s\in S} N_s)$.

(2) $(x\in\bigcap_{s\in S}((A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w))\Rightarrow(x\in(A_s\cap w^c)\cup(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, luego, si $x\in w^c$ entonces $(x\in(A_s\cap w^c)\ \forall s\in S)$ o si $x\in w$ entonces $(x\in(B_s\cap w)\ \forall s\in S)$, es decir $(x\in(\bigcap_{s\in S}(A_s\cap w^c)\cup(\bigcap_{s\in S}(B_s\cap w))$. ∎

Como consecuencia de la proposición auxiliar anterior, se obtiene el siguiente resultado que incluye al de la última proposición en la transparencia anterior:

<u>Proposición</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $P(E)$, se verifica:

(i) $(x\in^W \prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\Leftrightarrow\forall k\in J:(x\in^W A_k)$, es decir $(\prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w=\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x\in^W \bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\Leftrightarrow\exists k\in J:(x\in^W A_k)$, es decir $(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w=\bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

En particular, $(x\in^W A\sqcap^W B)\Leftrightarrow(x\in^W A)\ \&\ (x\in^W B)$,
$(x\in^W A\sqcup^W B)\Leftrightarrow(x\in^W A)$ ó $(x\in^W B)$.

<u>Demostración</u>.

(i) $(\prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w=[(\prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\cap W^c]\cup[(\prod_{j\in J}{}^{W} A_j)^c\cap W] = [(((\bigcap_{j\in J} A_j)\cup(W\cap(\bigcup_{j\in J} A_j)))\cap W^c]\cup[(((\bigcup_{j\in J} A_j^c)\cap(W^c\cup(\bigcap_{j\in J} A_j^c)))\cap W]=[(\bigcap_{j\in J} A_j)\cap W^c]\cup[(\bigcap_{j\in J} A_j^c)\cap W]$.

$(x\in^W \prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\Leftrightarrow(x\in(\prod_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in((\bigcap_{j\in J} A_j)\cap W^c))\cup((\bigcap_{j\in J} A_j^c)\cap W))\Leftrightarrow(x\in\bigcap_{j\in J}[(A_j\cap W^c)\cup(A_j^c\cap W)])\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x\in\bigcap_{j\in J}[(A_j\triangle w)\Leftrightarrow(\forall k\in J:x\in(A_k\triangle w)))\Leftrightarrow(\forall k\in J:x\in^W A_k)$.

(ii) $(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w=[(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\cap W^c]\cup[(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)^c\cap W] = [(((\bigcap_{j\in J} A_j)\cup(W^c\cap(\bigcup_{j\in J} A_j)))\cap W^c]\cup[(((\bigcup_{j\in J} A_j^c)\cap(W\cup(\bigcap_{j\in J} A_j^c)))\cap W]=[(\bigcup_{j\in J} A_j)\cap W^c]\cup[(\bigcup_{j\in J} A_j^c)\cap W]$.

$(x\in^W \bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\Leftrightarrow(x\in(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W} A_j)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in((\bigcup_{j\in J} A_j)\cap W^c))\cup((\bigcup_{j\in J} A_j^c)\cap W))\Leftrightarrow(x\in((\bigcup_{j\in J}(A_j\cap W^c)))\cup((\bigcup_{j\in J}(A_j^c\cap W)))\Leftrightarrow(x\in\bigcup_{j\in J}[(A_j\cap W^c)\cup(A_j^c\cap W)])\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x\in\bigcup_{j\in J}[(A_j\triangle w))\Leftrightarrow(\exists k\in J:x\in(A_k\triangle w))\Leftrightarrow(\exists k\in J:x\in^W A_k)$. ∎

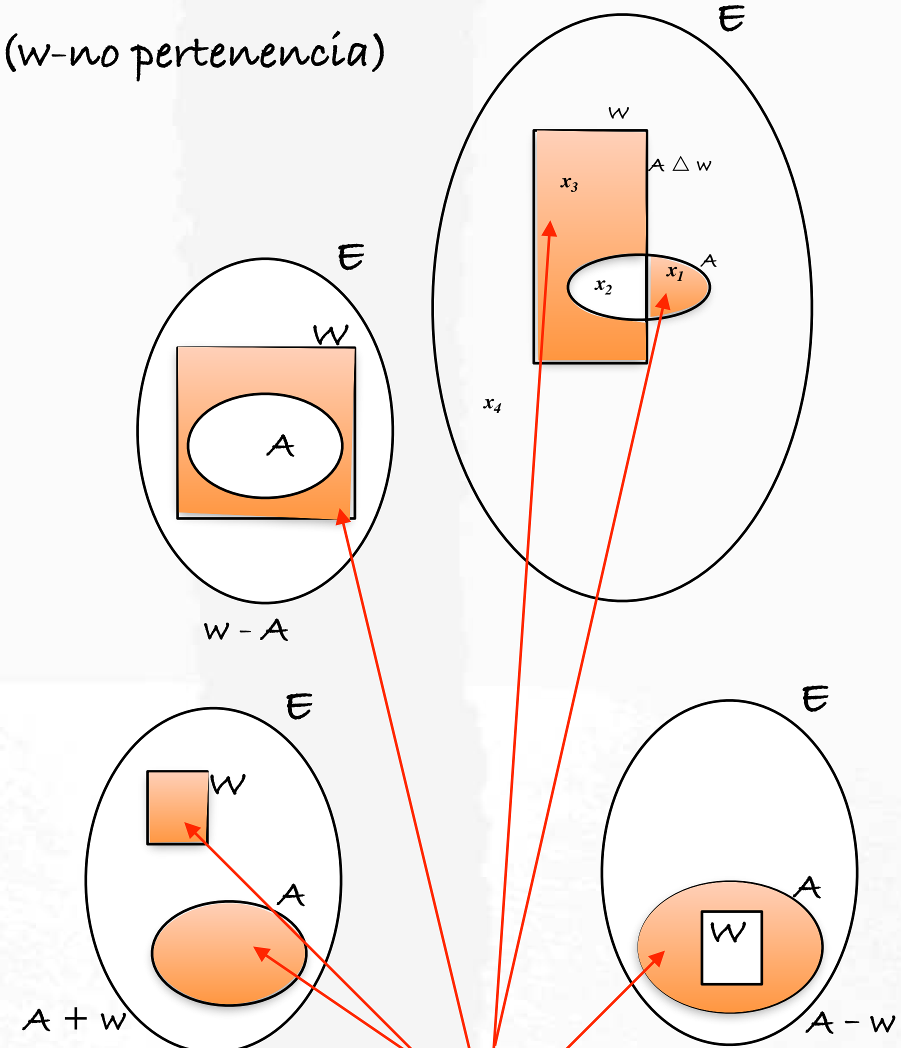
(**) En general, la igualdad en la primera expresión no es cierta como muestra el siguiente ejemplo: $M_1=\{a,b,c,x,y\}$, $M_2=\{b,c,y\}$, $N_1=\{c,d,f\}$, $N_2=\{d,e,f,x,y\}$, se verifica $M_1\cap M_2=\{b,c,y\}$, $N_1\cap N_2=\{d,f\}$, $M_1\cup N_1=\{a,b,c,d,f,x,y\}$, $M_2\cup N_2=\{b,c,d,e,f,x,y\}$;
luego $(M_1\cup N_1)\cap(M_2\cup N_2)=\{b,c,d,f,x,y\}\not\subseteq\{b,c,d,f,y\}=(M_1\cap M_2)\cup(N_1\cap N_2)$.

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia)

tales que $\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$

$\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$



$\boxed{\in^w A = \{x / x \in^w A\} = A\triangle w}$

Proposición. Se verifica:

$(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$

$\Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \notin A\triangle w)$

Dem. $(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c)$

$\Leftrightarrow (x \notin (A\triangle w)) \Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w)$. ∎

Proposición. Se verifica:

$\forall x\in E$: $(x \in^w W^c)$ $\forall x\in E$: $(x \notin^w W)$	$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$ $(x \in^w \emptyset) \Leftrightarrow (x \in W)$	$(x \in^\emptyset A) \Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$
$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$

Dem. $((W^c\triangle W) = E) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \in^w W^c))$; $((W\triangle W) = \emptyset) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \notin^w W))$.

$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in E\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (E\cap W^c)\cup(\emptyset\cap W)) \Leftrightarrow (x \in W^c)$.

$(x \in^w \emptyset) \Leftrightarrow (x \in \emptyset\triangle w) \Leftrightarrow (x \in W)$.

$(x \in^\emptyset A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle\emptyset) \Leftrightarrow (x \in A)$; $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle E) \Leftrightarrow (x \in A^c\cap E)) \Leftrightarrow (x \in A^c)$.

$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in (\in^w A)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)\ (x \in w\triangle A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$. ∎

Proposición. Se verifica:

$A \sqsubseteq^w B \Leftrightarrow [(x \in^w A) \Rightarrow (x \in^w B)]$
$(x \in^w A\sqcap^w B) \Leftrightarrow (x \in^w A) \& (x \in^w B)$
$(x \in^w A\sqcup^w B) \Leftrightarrow (x \in^w A)$ ó $(x \in^w B)$

Dem. $A \sqsubseteq^w B \Leftrightarrow ((A\triangle w) \subseteq (A\triangle w)) \Leftrightarrow [(x \in^w A) \Rightarrow (x \in^w B)]$.

$(x \in^w A\sqcap^w B) \Leftrightarrow x \in (A\sqcap^w B)\triangle w \Leftrightarrow (x \in (A\cap B\cap W^c)\cup(A^c\cap B^c\cap W))$

$\Leftrightarrow (x \in [(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)]\cap[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)]) \Leftrightarrow$

$(x \in (A\triangle W)\cap(B\triangle W)) \Leftrightarrow (x \in^W A) \& (x \in^W B)$.

$(x \in^w A\sqcup^w B) \Leftrightarrow x \in (A\sqcup^w B)\triangle w \Leftrightarrow (x \in ((A\cup B)\cap W^c)\cup((A^c\cup B^c)\cap W)$

$\Leftrightarrow x \in [(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)]\cup[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)] \Leftrightarrow$

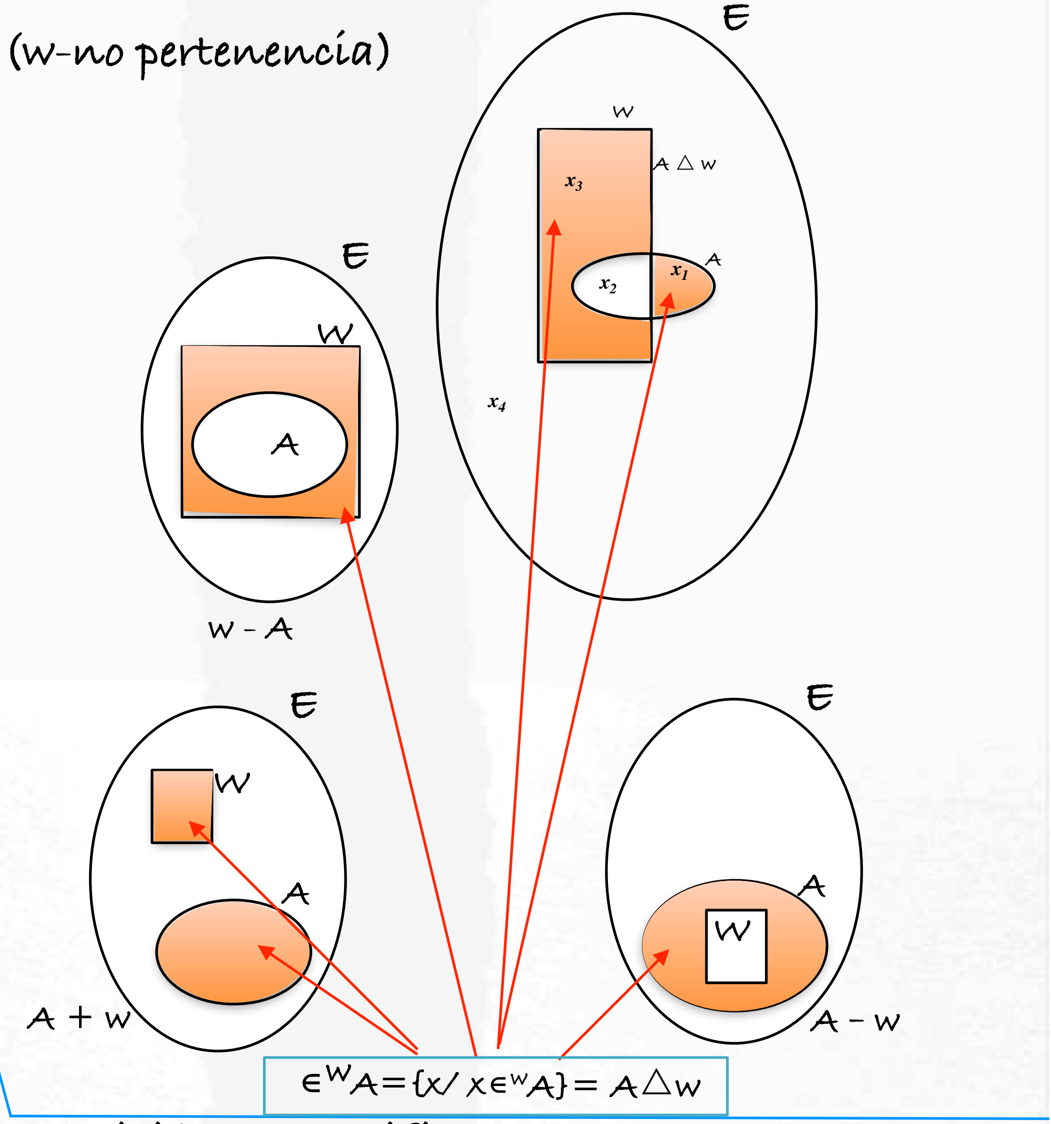
$x \in ((A\triangle W)\cup(B\triangle W)) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$. ∎

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c)\cup(A^c\cap w)$ es su diferencia simétrica, consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E \times \mathcal{P}(E)$ (w-no pertenencia) tales que

$$\boxed{(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$$

$$\boxed{(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A)}$$



Proposición. Se verifica:

$(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w) \Leftrightarrow (x \in^w A^c)$

$\Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \notin A\triangle w)$

Dem. $(x \notin^w A) \Leftrightarrow (x \in^{w^c} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^c)$

$\Leftrightarrow (x \notin (A\triangle w)) \Leftrightarrow (x \in A^c\triangle w)$.■

Proposición. Se verifica:

$\forall x\in E: (x \in^w w^c)$ $\forall x\in E: (x \notin^w w)$	$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in w^c)$ $(x \in^w \varnothing) \Leftrightarrow (x \in w)$	$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$
$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$

Dem. $((w^c\triangle w) = E) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \in^w w^c))$; $((w\triangle w) = \varnothing) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \notin^w w))$.

$(x \in^w E) \Leftrightarrow (x \in E\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (E\cap w^c)\cup(\varnothing\cap w)) \Leftrightarrow (x \in w^c)$.

$(x \in^w \varnothing) \Leftrightarrow (x \in \varnothing\triangle w) \Leftrightarrow (x \in w)$.

$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle\varnothing) \Leftrightarrow (x \in A)$; $(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle E) \Leftrightarrow (x \in A^c\cap E)) \Leftrightarrow (x \in A^c)$.

$(x \in^w A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w (\in^w A)) \Leftrightarrow (x \in (\in^w A)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$.

$(x \in^w A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)\ (x \in w\triangle A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$.■

Proposición. Se verifica:

Luego la expresión general de la proposición:

(i) $(x \in^w \prod^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \forall k\in J: (x \in^w A_k)$,

es decir $(\prod^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x \in^w \coprod^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \exists k\in J: (x \in^w A_k)$,

es decir $(\coprod^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$.■

Relaciones de w-pertenencia $\in^{w}$ y $\notin^{w}$ en $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^{c})$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^{c} y A^{c} sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^{c}$

consideremos la relaciones $\in^{w} \subseteq E \times P(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^{w} \subseteq E \times P(E)$ (w-

tales que $\boxed{(x \in^{w} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)}$

$\boxed{(x \notin^{w} A) \Leftrightarrow (x \in^{w^{c}} A)}$

<u>Corolario</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $P(E)$, se verifica:

$$(\bigcap_{j\in J} A_j)\triangle w = \prod_{j\in J}^{w}(A_j\triangle w),$$
$$(\bigcup_{j\in J} A_j)\triangle w = \coprod_{j\in J}^{w}(A_j\triangle w).$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$(x \notin^{w} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^{c}) \Leftrightarrow (x \in A^{c}\triangle w) \Leftrightarrow (x \in^{w} A^{c})$

$\Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^{c}) \Leftrightarrow (x \notin A\triangle w)$

<u>Dem</u>. $(x \notin^{w} A) \Leftrightarrow (x \in^{w^{c}} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w^{c}) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^{c}) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)^{c})$

$\Leftrightarrow (x \notin (A\triangle w)) \Leftrightarrow (x \in A^{c}\triangle w).$ ∎

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$\forall x\in E: (x \in^{w} W^{c})$ $\forall x\in E: (x \notin^{w} W)$	$(x \in^{w} E) \Leftrightarrow (x \in W^{c})$ $(x \in^{w} \varnothing) \Leftrightarrow (x \in W)$	$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A)$ $(x \in^{E} A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^{c})$
$(x \in^{w} A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^{w} (\in^{w} A)) \Leftrightarrow (x \in A)$	$(x \in^{w} A) \Leftrightarrow (x \in^{A} w)$

<u>Dem</u>. $((W^{c}\triangle W) = E) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \in^{w} W^{c}))$; $((W\triangle W) = \varnothing) \Rightarrow (\forall x\in E: (x \notin^{w} W))$.

$(x \in^{w} E) \Leftrightarrow (x \in E\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (E\cap W^{c})\cup(\varnothing\cap W)) \Leftrightarrow (x \in W^{c}).$

$(x \in^{w} \varnothing) \Leftrightarrow (x \in \varnothing\triangle w) \Leftrightarrow (x \in W).$

$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle\varnothing) \Leftrightarrow (x \in A)$; $(x \in^{E} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle E) \Leftrightarrow (x \in A^{c}\cap E)) \Leftrightarrow (x \in A^{c}).$

$(x \in^{w} A\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A).$

$(x \in^{w} (\in^{w} A)) \Leftrightarrow (x \in (\in^{w} A)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in (A\triangle w)\triangle w) \Leftrightarrow (x \in A).$

$(x \in^{w} A) \Leftrightarrow (x \in A\triangle w)\,(x \in w\triangle A) \Leftrightarrow (x \in^{A} w).$ ∎

<u>Proposición</u>. Se verifica:

Luego la expresión general de la proposición:

(i) $(x \in^{w} \prod_{j\in J}^{w} A_j) \Leftrightarrow \forall k\in J: (x \in^{w} A_k)$,

es decir $(\prod_{j\in J}^{w} A_j)\triangle w = \bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x \in^{w} \coprod_{j\in J}^{w} A_j) \Leftrightarrow \exists k\in J: (x \in^{w} A_k)$,

es decir $(\coprod_{j\in J}^{w} A_j)\triangle w = \bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$. ∎

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean w y A subconjuntos de E y sean w^c y A^c sus complementos. Si $A\triangle w = (A\cap w^c$ consideremos la relaciones $\in^w \subseteq E\times \mathcal{P}(E)$ (w-pertenencia) y $\notin^w \subseteq E\times \mathcal{P}(E)$ (w-

tales que $\boxed{(x\in^w A)\Leftrightarrow (x\in A\triangle w)}$

$$\boxed{(x\notin^w A)\Leftrightarrow(x\in^{w^c}A)}$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$(x\notin^w A)\Leftrightarrow (x\in A\triangle w^c)\Leftrightarrow(x\in A^c\triangle w)\Leftrightarrow(x\in^w A^c)$$

$$\Leftrightarrow (x\in (A\triangle w)^c)\Leftrightarrow(x\notin A\triangle w)$$

<u>Dem</u>. $(x\notin^w A)\Leftrightarrow(x\in^{w^c}A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w^c)\Leftrightarrow(x\in(A\triangle w)^c)\Leftrightarrow(x\in(A\triangle w)^c)$

$\Leftrightarrow(x\notin(A\triangle w))\Leftrightarrow(x\in A^c\triangle w)$.∎

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$\forall x\in E: (x\in^w w^c)$ $\forall x\in E: (x\notin^w w)$	$(x\in^w E)\Leftrightarrow(x\in w^c)$ $(x\in^w\emptyset)\Leftrightarrow(x\in w)$	$(x\in^{\emptyset}A)\Leftrightarrow(x\in A)$ $(x\in^E A)\Leftrightarrow(x\notin A)\Leftrightarrow(x\in A^c)$
$(x\in^w A\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$	$(x\in^w(\in^w A))\Leftrightarrow(x\in A)$	$(x\in^w A)\Leftrightarrow(x\in^A w)$

<u>Dem</u>. $((w^c\triangle w)=E)\Rightarrow(\forall x\in E: (x\in^w w^c))$; $((w\triangle w)=\emptyset)\Rightarrow(\forall x\in E: (x\notin^w w))$.

$(x\in^w E)\Leftrightarrow(x\in E\triangle w)\Leftrightarrow(x\in(E\cap w^c)\cup(\emptyset\cap w))\Leftrightarrow(x\in w^c)$.

$(x\in^w\emptyset)\Leftrightarrow(x\in\emptyset\triangle w)\Leftrightarrow(x\in w)$.

$(x\in^{\emptyset}A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle\emptyset)\Leftrightarrow(x\in A)$; $(x\in^E A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle E)\Leftrightarrow(x\in A^c\cap E))\Leftrightarrow(x\in A^c)$.

$(x\in^w A\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$.

$(x\in^w(\in^w A))\Leftrightarrow(x\in(\in^w A)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in(A\triangle w)\triangle w)\Leftrightarrow(x\in A)$.

$(x\in^w A)\Leftrightarrow(x\in A\triangle w)(x\in w\triangle A)\Leftrightarrow(x\in^A w)$.∎

<u>Corolario</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $\mathcal{P}(E)$, se verifica:

$$(\bigcap_{j\in J}A_j)\triangle w=\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}(A_j\triangle w),$$
$$(\bigcup_{j\in J}A_j)\triangle w=\mathop{\sqcup^w}_{j\in J}(A_j\triangle w).$$

<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta que $A\triangle w\triangle w=A$, $\forall A\in\mathcal{P}(E)$ y la proposición anterior:

$(\bigcap_{j\in J}A_j)\triangle w=[\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w\triangle w)]\triangle w=$
$[\bigcap_{j\in J}((A_j\triangle w)\triangle w)]\triangle w=([(\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle w)\triangle w=$
$[(\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle(w\triangle w)=\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}(A_j\triangle w)\triangle\emptyset=$
$\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

Un razonamiento análogo prueba que $(\bigcup_{j\in J}A_j)\triangle w=\mathop{\sqcup^w}_{j\in J}(A_j\triangle w)$.∎

<u>Proposición</u>. Se verifica:

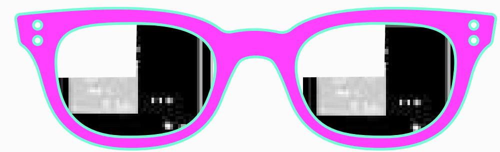
Luego la expresión general de la proposición:

(i) $(x\in^w \mathop{\sqcap^w}_{j\in J}A_j)\Leftrightarrow\forall k\in J:(x\in^w A_k)$,
es decir $(\mathop{\sqcap^w}_{j\in J}A_j)\triangle w=\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x\in^w \mathop{\sqcup^w}_{j\in J}A_j)\Leftrightarrow\exists k\in J:(x\in^w A_k)$,
es decir $(\mathop{\sqcup^w}_{j\in J}A_j)\triangle w=\bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$.∎

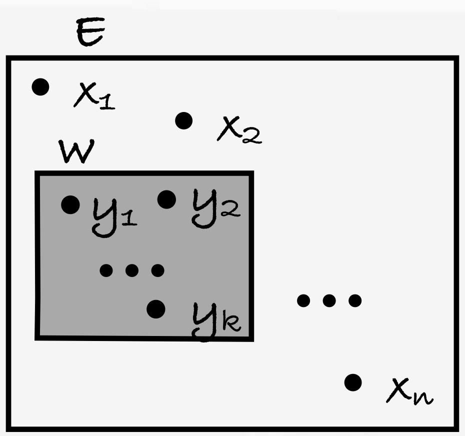
Relaciones de w-pertenencia $\in^{w}$ y $\notin^{w}$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^{c})$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean $\{x\},\{y\},\ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ asociados a $x, y,\ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).



La expresiones $\{x\}_{w}$, $\{y\}_{w}$, ... representan los subconjuntos $\{x\}\triangle W$, $\{y\}\triangle W$, ... , son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w})$ y que llamaremos w-singletones. Se verifica:

$$\{z\}_{w}= \{z\}\triangle W =\big[(W\cup\{z\}) \textbf{ IF } z\notin W\,;\ (W -\{z\}) \textbf{ IF } z\in W\big]$$
$$= \big[(W + z) \textbf{ IF } z\notin W\,;\ (W - z) \textbf{ IF } z\in W\big].$$



Corolario. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $\mathcal{P}(E)$, se verifica:

$$\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)\triangle w = \sqcap^{w}_{j\in J}(A_j\triangle w),$$
$$\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)\triangle w = \sqcup^{w}_{j\in J}(A_j\triangle w).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $A\triangle w\triangle w=A$, $\forall A\in\mathcal{P}(E)$ y la proposición anterior:

$$\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)\triangle w =\Big[\bigcap_{j\in J}(A_j \triangle w\triangle w)\Big]\triangle w =$$
$$\Big[\bigcap_{j\in J}((A_j \triangle w)\triangle w)\Big]\triangle w= \Big(\Big[\Big(\sqcap^{w}_{j\in J}(A_j \triangle w)\Big]\triangle w\Big)\triangle w=$$
$$\Big[\Big(\sqcap^{w}_{j\in J}(A_j \triangle w)\Big]\triangle(w\triangle w)=\sqcap^{w}_{j\in J}(A_j \triangle w)\triangle\varnothing=$$
$$\sqcap^{w}_{j\in J}(A_j \triangle w).$$

Un razonamiento análogo prueba que $\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)\triangle w =\sqcup^{w}_{j\in J}(A_j\triangle w)$. ∎

(i) $\big(x \in^{w} \sqcap^{w}_{j\in J} A_j\big)\Leftrightarrow \forall k\in J: (x \in^{w} A_k)$,

es decir $\big(\sqcap^{w}_{j\in J} A_j\big)\triangle w=\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $\big(x \in^{w} \sqcup^{w}_{j\in J} A_j\big)\Leftrightarrow \exists k\in J: (x \in^{w} A_k)$,

es decir $\big(\sqcup^{w}_{j\in J} A_j\big)\triangle w =\bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$. ∎

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), ^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

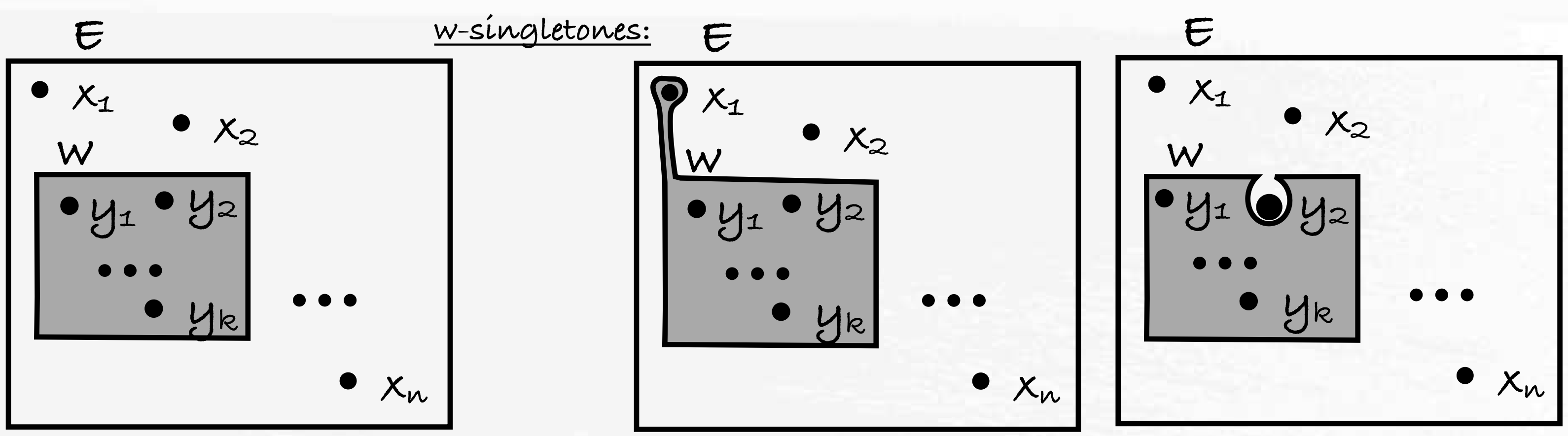
Sean $\{x\},\{y\},\ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ asociados a $x, y,\ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).

La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, … representan los subconjuntos $\{x\}\triangle W$, $\{y\}\triangle W$, … , son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w)$ y que llamaremos <u>w-singletones</u>. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\}\triangle W = [(W\cup\{z\}) \text{ IF } z\notin W \,;\, (W-\{z\}) \text{ IF } z\in W]$$

$$= [(W+z) \text{ IF } z\notin W \,;\, (W-z) \text{ IF } z\in W].$$

w-singletones:



$\{x_1\}_w = w+x_1$ $\quad$ $\{y_2\}_w = w-y_2$

<u>Corolario</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $\mathcal{P}(E)$, se verifica:

$$(\bigcap_{j\in J} A_j)\triangle w = \sqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w),$$

$$(\bigcup_{j\in J} A_j)\triangle w = \sqcup^w_{j\in J}(A_j\triangle w).$$

<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta que $A\triangle w\triangle w = A$, $\forall A\in\mathcal{P}(E)$ y la proposición anterior:

$(\bigcap_{j\in J} A_j)\triangle w = [\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w\triangle w)]\triangle w =$
$[\bigcap_{j\in J}((A_j\triangle w)\triangle w)]\triangle w = ([(\sqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle w)\triangle w =$
$[(\sqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle(w\triangle w) = \sqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)\triangle\varnothing =$
$\sqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

Un razonamiento análogo prueba que $(\bigcup_{j\in J} A_j)\triangle w = \sqcup^w_{j\in J}(A_j\triangle w)$. ∎

(i) $(x \in^w \sqcap^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \forall k\in J: (x \in^w A_k)$,

es decir $(\sqcap^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x \in^w \sqcup^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \exists k\in J: (x \in^w A_k)$,

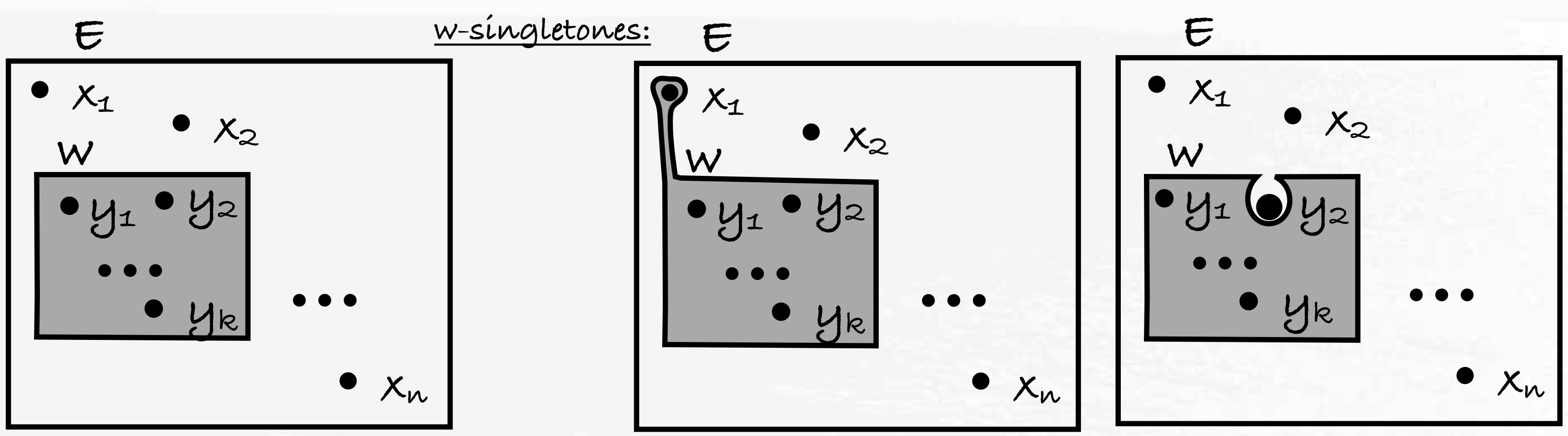
es decir $(\sqcup^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$. ∎

Sean $\{x\}, \{y\}, \ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ asociados a $x, y, \ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).

La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, … representan los subconjuntos $\{x\} \triangle W$, $\{y\} \triangle W$, …, son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w)$ y que llamaremos <u>w-singletones</u>. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\} \triangle W = [(W \cup \{z\}) \textbf{ IF } z \notin W ; (W - \{z\}) \textbf{ IF } z \in W]$$
$$= [(W + z) \textbf{ IF } z \notin W ; (W - z) \textbf{ IF } z \in W].$$

w-singletones:



$\{x_1\}_w = w + x_1$ $\{y_2\}_w = w - y_2$

<u>Proposición</u>.(*) Se verifica: $(x \in^w A) \Leftrightarrow (\{x\}_w \sqsubseteq^w A)$,

$$A = \bigsqcup^w_{x \in^w A} \{x\}_w \quad \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (x \in^w \{x\}) \Leftrightarrow (x \notin W), \quad (x \in^w \{y\}_w) \Leftrightarrow (x = y)$$

(i) $(x \in^w \bigsqcap^w_{j \in J} A_j) \Leftrightarrow \forall k \in J : (x \in^w A_k)$,

es decir $(\bigsqcap^w_{j \in J} A_j) \triangle w = \bigcap_{j \in J} (A_j \triangle w)$.

(ii) $(x \in^w \bigsqcup^w_{j \in J} A_j) \Leftrightarrow \exists k \in J : (x \in^w A_k)$,

es decir $(\bigsqcup^w_{j \in J} A_j) \triangle w = \bigcup_{j \in J} (A_j \triangle w)$. ∎

<u>Corolario</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j \in J}$ de subconjuntos incluida en $\mathcal{P}(E)$, se verifica:

$$(\bigcap_{j \in J} A_j) \triangle w = \bigsqcap^w_{j \in J} (A_j \triangle w),$$
$$(\bigcup_{j \in J} A_j) \triangle w = \bigsqcup^w_{j \in J} (A_j \triangle w).$$

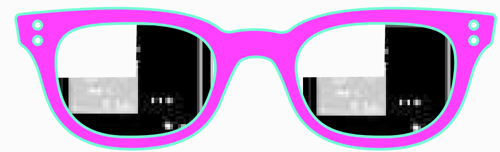
<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta que $A \triangle w \triangle w = A$, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ y la proposición anterior:

$$(\bigcap_{j \in J} A_j) \triangle w = [\bigcap_{j \in J} (A_j \triangle w \triangle w)] \triangle w =$$
$$[\bigcap_{j \in J} ((A_j \triangle w) \triangle w)] \triangle w = ([(\bigsqcap^w_{j \in J} (A_j \triangle w)] \triangle w) \triangle w =$$
$$[(\bigsqcap^w_{j \in J} (A_j \triangle w)] \triangle (w \triangle w) = \bigsqcap^w_{j \in J} (A_j \triangle w) \triangle \varnothing =$$
$$\bigsqcap^w_{j \in J} (A_j \triangle w).$$

Un razonamiento análogo prueba que $(\bigcup_{j \in J} A_j) \triangle w = \bigsqcup^w_{j \in J} (A_j \triangle w)$. ∎

(*) Transparencia siguiente

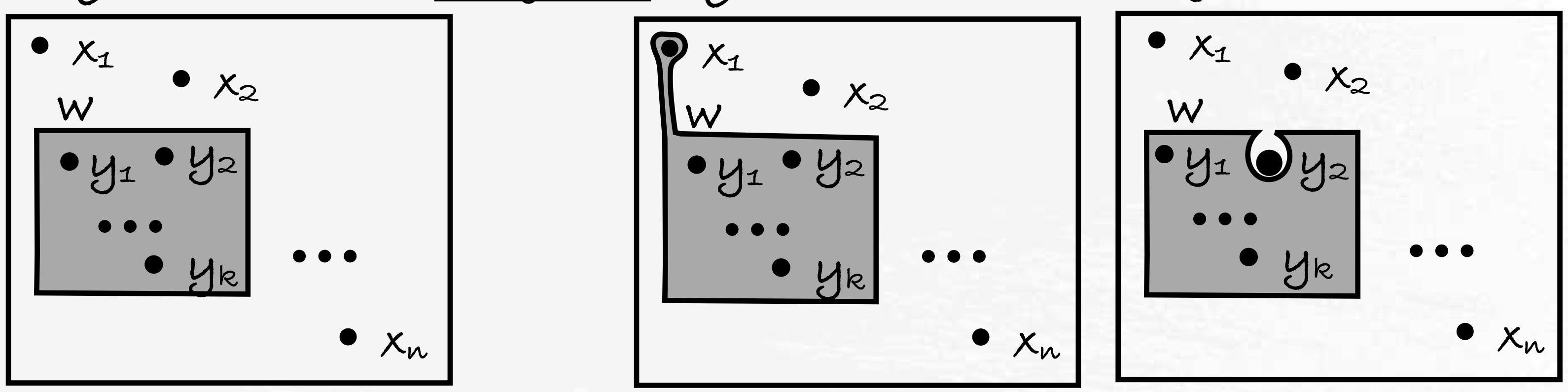
Sean $\{x\}, \{y\}, \ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ asociados a $x, y, \ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).



La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, ... representan los subconjuntos $\{x\}\triangle W$, $\{y\}\triangle W$, ... , son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w)$ y que llamaremos <u>w-singletones</u>. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\}\triangle W = [(W\cup\{z\}) \textbf{ IF } z\notin W ; (W-\{z\}) \textbf{ IF } z\in W]$$
$$= [(W+z) \textbf{ IF } z\notin W ; (W-z) \textbf{ IF } z\in W].$$

w-singletones:



$\{x_1\}_w = w + x_1$ $\qquad$ $\{y_2\}_w = w - y_2$

<u>Proposición</u>.(*) Se verifica: $(x\in^w A) \Leftrightarrow (\{x\}_w \sqsubseteq^w A)$, ($\{x\}_w$ es w-átomo w-incluido en A)

$$A = \bigsqcup^w_{x\in^w A} \{x\}_w \quad \forall A\in\mathcal{P}(E), \quad (x\in^w\{x\}) \Leftrightarrow (x\notin W), \quad (x\in^w\{y\}_w) \Leftrightarrow (x=y)$$

<u>Corolario</u>. Para todo subconjunto W y para toda familia no vacía $(A_j)_{j\in J}$ de subconjuntos incluida en $\mathcal{P}(E)$, se verifica:

$$(\bigcap_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigsqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w),$$
$$(\bigcup_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigsqcup^w_{j\in J}(A_j\triangle w).$$

<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta que $A\triangle w\triangle w = A$, $\forall A\in\mathcal{P}(E)$ y la proposición anterior:

$(\bigcap_{j\in J} A_j)\triangle w = [\bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w\triangle w)]\triangle w =$
$[\bigcap_{j\in J}((A_j\triangle w)\triangle w)]\triangle w = ([(\bigsqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle w)\triangle w =$
$[(\bigsqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)]\triangle(w\triangle w) = \bigsqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)\triangle\emptyset =$
$\bigsqcap^w_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

Un razonamiento análogo prueba que $(\bigcup_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigsqcup^w_{j\in J}(A_j\triangle w)$.∎

(i) $(x\in^w \bigsqcap^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \forall k\in J: (x\in^w A_k)$,
es decir $(\bigsqcap^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcap_{j\in J}(A_j\triangle w)$.

(ii) $(x\in^w \bigsqcup^w_{j\in J} A_j) \Leftrightarrow \exists k\in J: (x\in^w A_k)$,
es decir $(\bigsqcup^w_{j\in J} A_j)\triangle w = \bigcup_{j\in J}(A_j\triangle w)$.∎

(*) Transparencia siguiente

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

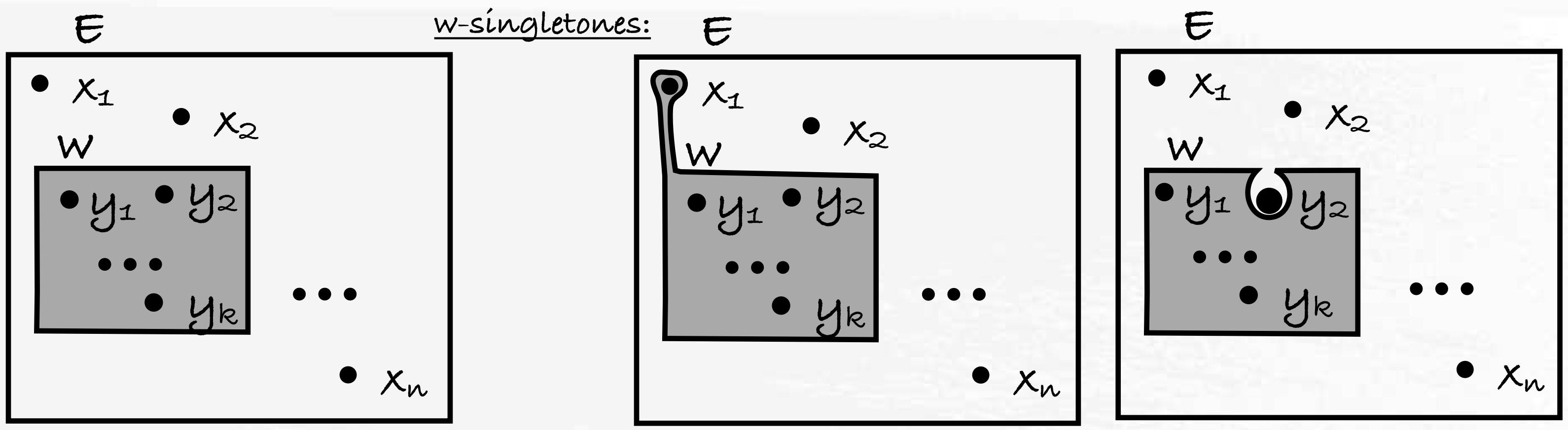
Sean $\{x\}, \{y\}, \ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ asociados a $x, y, \ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).

La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, … representan los subconjuntos $\{x\} \triangle W$, $\{y\} \triangle W$, … , son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ y que llamaremos w-singletones. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\} \triangle W = [(W \cup \{z\}) \textbf{ IF } z \notin W ; (W - \{z\}) \textbf{ IF } z \in W]$$

$$= [(W + z) \textbf{ IF } z \notin W ; (W - z) \textbf{ IF } z \in W].$$

w-singletones:

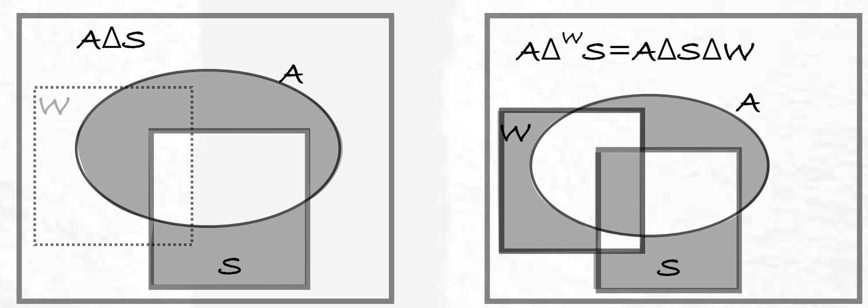


$\{x_1\}_w = w + x_1$

$\{y_2\}_w = w - y_2$

<u>Proposición</u>.(*) Se verifica: $(x \in^w A) \Leftrightarrow (\{x\}_w \sqsubseteq^W A)$, ($\{x\}_w$ es w-átomo w-incluido en A)

$$A = \bigsqcup^W_{x \in^w A} \{x\}_w \quad \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (x \in^w \{x\}) \Leftrightarrow (x \notin W), \quad (x \in^w \{y\}_w) \Leftrightarrow (x = y)$$



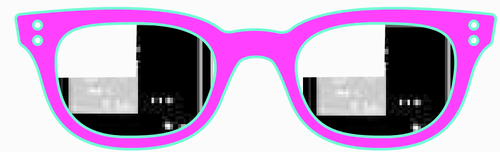
<u>Proposición</u>(**) Sea $W \subseteq E$. Si $\triangle^W$ representa la w-diferencia simétrica en el álgebra $((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, es decir:

$A \triangle^W S = (A \sqcap^W S^c) \sqcup^W (A^c \sqcap^W S)$, entonces (1) $A \triangle^W S = A \Delta S \Delta W$

(2) $A (\Delta^W)^S P = A \Delta^W S \Delta^W P = A \Delta S \Delta W \Delta P \Delta W$
$= A \Delta S \Delta P = A \Delta^S P$

(*), (**) Transparencia siguiente

Sean $\{x\},\{y\},\ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ asociados a $x, y,\ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).

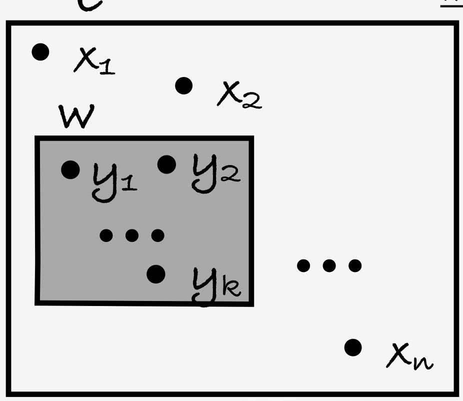


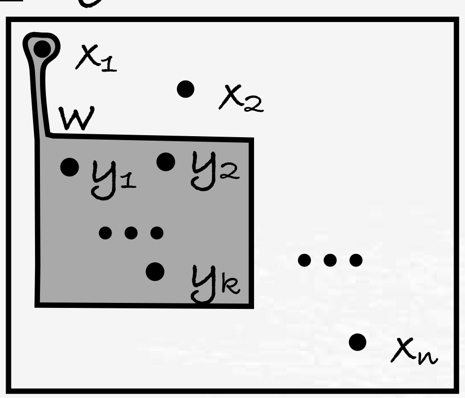
La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, … representan los subconjuntos $\{x\}\triangle W$, $\{y\}\triangle W$, … , son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W})$ y que llamaremos <u>w-singletones</u>. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\}\triangle W = [(W\cup\{z\}) \textbf{ IF } z\notin W\,;\ (W-\{z\}) \textbf{ IF } z\in W]$$

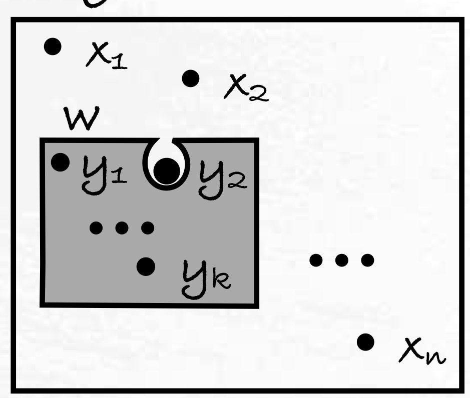
$$= [(W+z) \textbf{ IF } z\notin W\,;\ (W-z) \textbf{ IF } z\in W].$$

<u>w-singletones:</u>





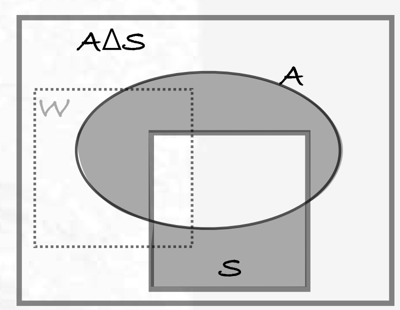
$\{x_1\}_w = w+x_1$

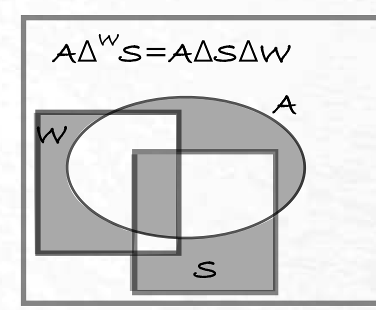


$\{y_2\}_w = w-y_2$

<u>Proposición</u>.(*) Se verifica: $(x \in^{w} A) \Leftrightarrow (\{x\}_w \sqsubseteq^{W} A)$, ($\{x\}_w$ es w-átomo w-incluido en A)

$$A=\bigsqcup^{W}_{x\,\in^{w} A}\{x\}_w \quad \forall A\in\mathcal{P}(E),\quad (x\in^{w}\{x\})\Leftrightarrow(x\notin W),\quad (x\in^{w}\{y\}_w)\Leftrightarrow(x=y)$$





<u>Proposición</u>(**) Sea $W\subseteq E$. Si $\triangle^{W}$ representa la w-diferencia simétrica en el álgebra $((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W}, W, W^{c}), {}^{c})$, es decir:

$A\triangle^{W}S=(A\sqcap^{W}S^{c})\sqcup^{W}(A^{c}\sqcap^{W}S)$, entonces (1) $A\triangle^{W}S=A\triangle S\triangle W$

(2) $A(\triangle^{W})^{S}P = A\triangle^{W}S\triangle^{W}P = A\triangle S\triangle W\triangle P\triangle W$
$= A\triangle S\triangle P = A\triangle^{S}P$

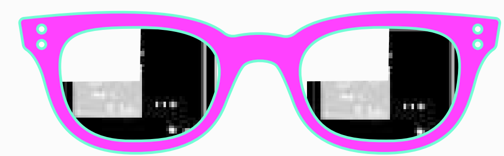
(3) Si $(\in^{W})^{S}$ representa la s-pertenencia en el álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W}, \in^{W}, \triangle^{W})$

es decir: $[x(\in^{W})^{S}A]\Leftrightarrow[x\in^{W}(A\triangle^{W}S)]$, entonces $\boxed{(x(\in^{W})^{S}A)\ \Leftrightarrow\ (x\in^{S}A)}$

(*), (**) Transparencia siguiente

Relaciones de w-pertenencia $\in^w$ y $\notin^w$ en $((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$ como re-interpretación de la diferencia simétrica $\triangle$

Sean $\{x\},\{y\},\ldots$ átomos en $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ asociados a $x, y,\ldots \in E$ y sea $A(E)$ el subconjunto de los átomos. (Es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado por los singletones o subconjuntos unitarios de E).

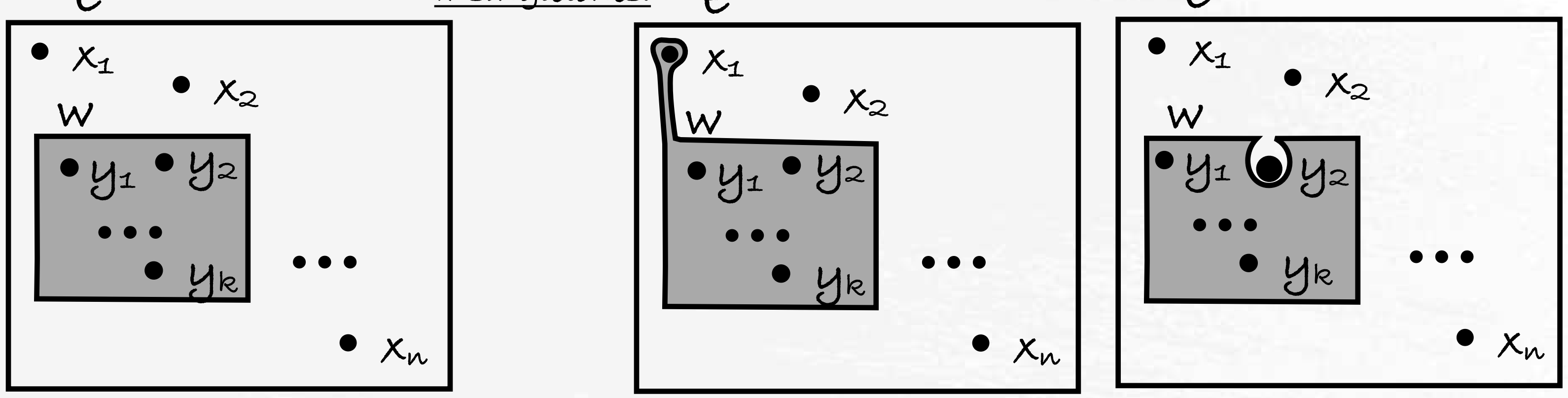


La expresiones $\{x\}_w$, $\{y\}_w$, ... representan los subconjuntos $\{x\}\triangle W$, $\{y\}\triangle W$, ..., son los átomos de $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w)$ y que llamaremos w-singletones. Se verifica:

$$\{z\}_w = \{z\}\triangle W = [(W\cup\{z\}) \textbf{ IF } z\notin W ; (W-\{z\}) \textbf{ IF } z\in W]$$

$$= [(W + z) \textbf{ IF } z\notin W ; (W - z) \textbf{ IF } z\in W].$$

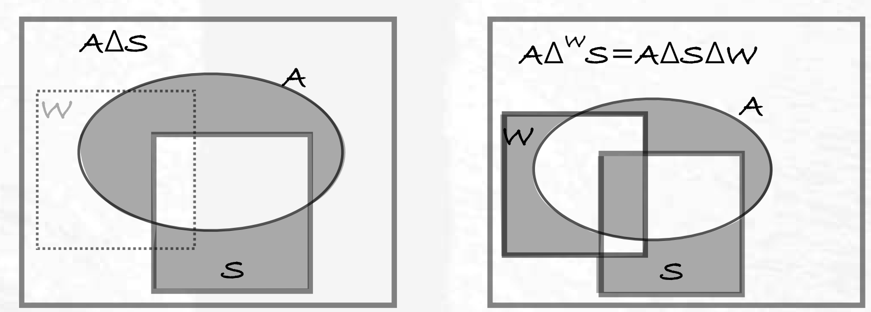
w-singletones:



$\{x_1\}_w = w+x_1$ $\qquad$ $\{y_2\}_w = w-y_2$

Proposición.(*) Se verifica: $(x \in^w A) \Leftrightarrow (\{x\}_w \sqsubseteq^w A)$, ($\{x\}_w$ es w-átomo w-incluido en A)

$$A = \bigsqcup^w_{x\,\in^w A}\{x\}_w \quad \forall A\in\mathcal{P}(E), \quad (x \in^w \{x\}) \Leftrightarrow (x\notin W), \quad (x \in^w \{y\}_w) \Leftrightarrow (x=y)$$



Proposición(**) Sea $W\subseteq E$. Si $\triangle^w$ representa la w-diferencia simétrica en el álgebra $((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c), ^c)$, es decir:

$A\triangle^w S = (A \sqcap^w S^c) \sqcup^w (A^c \sqcap^w S)$, entonces (1) $A\triangle^w S = A\Delta S\Delta W$

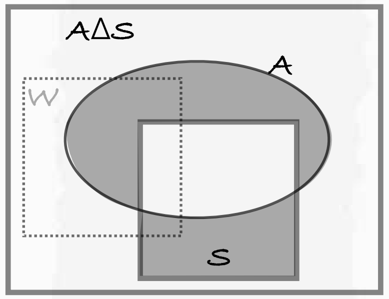
(2) $A(\Delta^w)^S P = A\Delta^w S\Delta^w P = A\Delta S\Delta W\Delta P\Delta W = A\Delta S\Delta P = A\Delta^S P$

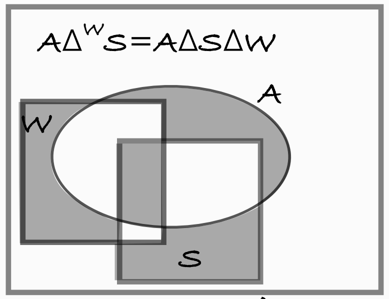
(3) si $(\in^w)^s$ representa la s-pertenencia en el álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w, \in^w, \triangle^w)$ es decir: $[x(\in^w)^s A] \Leftrightarrow [x\in^w (A\triangle^w S)]$, entonces $\boxed{(x(\in^w)^s A) \Leftrightarrow (x\in^s A)}$

(4) $\in^s(\in^w(A)) = \in^{(w\triangle s)}(A)$, $\quad \in^w(\in^w(A)) = A$, $\quad \in^{w^c}(\in^w(A)) = A^c$

(*), (**) Transparencia siguiente

(Continuación)





Proposición. Se verifica:

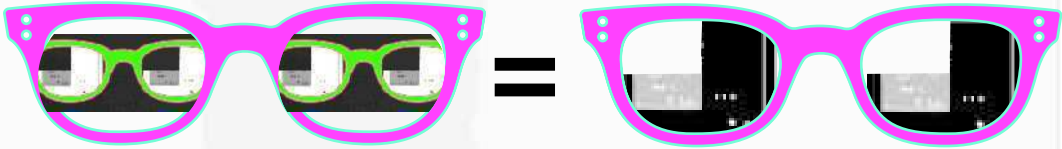
({x}$_W$ es w-átomo w-incluido en A)

(1) $(x \in^W A) \Leftrightarrow (\{x\}_W \sqsubseteq^W A)$, $(x \in^W \{x\}) \Leftrightarrow (x \notin W)$, $(x \in^W \{y\}_W) \Leftrightarrow (x=y)$

(2) $A = \bigsqcup^W_{x \in^W A} \{x\}_W \quad \forall A \in P(E)$,

(3) Si $\triangle^W$ representa la w-diferencia simétrica en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, es decir:

$A \triangle^W S = (A \sqcap^W S^c) \sqcup^W (A^c \sqcap^W S)$, entonces $A \triangle^W S = A \Delta S \Delta W$.



(4) $A(\Delta^W)^S B = A \Delta^S B \quad \forall (A,B,S,W) \in P(E)^4$.

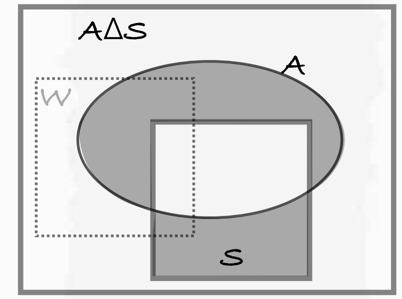
(5) Si $(\in^W)^s$ representa la s-pertenencia en el álgebra $(P(E), \sqsubseteq^W, \in^W, \triangle^W)$,

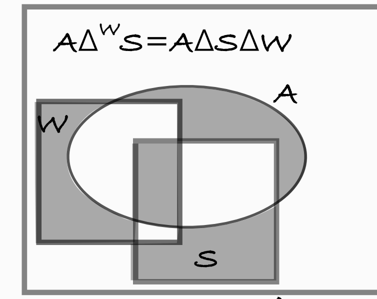
(es decir: $[x(\in^W)^s A] \Leftrightarrow [x \in^W (A \triangle^W S)]$), entonces $\boxed{(x(\in^W)^s A) \Leftrightarrow (x \in^s A)}$.

(6) Si $\in^W(A) = A \ \forall (A,W) \in P(E)^2$, entonces $\in^s(\in^W(A)) = \in^{(W \triangle S)}(A)$, $\in^W(\in^W(A)) = A$, $\in^{W^c}(\in^W(A)) = A^c$.

(Continuación)

<u>Proposición</u>. Se verifica:





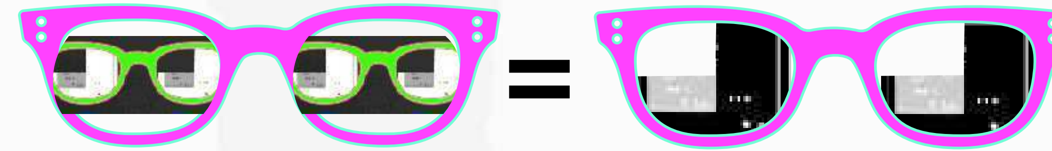
({x}$_W$ es W-átomo W-incluido en A)

(1) $(x \in^W A) \Leftrightarrow (\{x\}_W \sqsubseteq^W A)$, $(x \in^W \{x\}) \Leftrightarrow (x \notin W)$, $(x \in^W \{y\}_W) \Leftrightarrow (x=y)$

(2) $A=\bigsqcup^W_{x\in^W A}\{x\}_W \quad \forall A\in P(E)$,

(3) Si $\triangle^W$ representa la W-diferencia simétrica en el álgebra $((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, es decir:

$A\triangle^W S=(A\sqcap^W S^c)\sqcup^W(A^c\sqcap^W S)$, entonces $A\triangle^W S=A\Delta S\Delta W$.



(4) $A(\Delta^W)^S B = A\Delta^S B \quad \forall (A,B,S,W)\in P(E)^4$.

(5) Si $(\in^W)^s$ representa la s-pertenencia en el álgebra $(P(E), \sqsubseteq^W, \in^W, \triangle^W)$,

(es decir: $[x(\in^W)^s A]\Leftrightarrow[x\in^W(A\triangle^W S)]$), entonces $\boxed{(x(\in^W)^s A) \Leftrightarrow (x\in^s A)}$.

(6) Si $\in^W(A)=A \;\forall (A,W)\in P(E)^2$, entonces $\in^s(\in^W(A))=\in^{(W\triangle S)}(A)$, $\in^W(\in^W(A))=A$, $\in^{W^c}(\in^W(A))=A^c$.

<u>Demostración</u>.

(1) $(\{x\}_W \sqsubseteq^W A)\Leftrightarrow((\{x\}_W\triangle W)\sqsubseteq^W A)\Leftrightarrow((\{x\}\triangle W\triangle W)\subseteq(A\triangle W))\Leftrightarrow\{x\}\subseteq(A\triangle W)\Leftrightarrow x\in(A\triangle W)\Leftrightarrow(x\in^W A)$

$(x\in^W\{x\})\Leftrightarrow x\in(\{x\}\triangle W)\Leftrightarrow x\in(\{x\}\cap W^c)\cup(\{x\}^c\cap W)\Leftrightarrow x\in W^c$

$(x\in^W\{y\}_W)\Leftrightarrow(x\in^W\{y\}\triangle W)\Leftrightarrow(x\in\{y\}\triangle W\triangle W)\Leftrightarrow(x\in\{y\})\Leftrightarrow(x=y)$.

(2) $\bigsqcup^W_{x\in^W A}\{x\}_W=\bigsqcup^W_{x\in^W A}(\{x\}\triangle W)=(\bigcup_{x\in A\triangle W}\{x\})\triangle W=(A\triangle W)\triangle W=A$.

(3) Sea $\triangle^W$ tal que $A\triangle^W S=(A\sqcap^W S^c)\sqcup^W(A^c\sqcap^W S)$, entonces $A\triangle^W S=[(A\cap S^c)\cup(W\cap(A\cup S^c)]\sqcup^W[(A^c\cap S)\cup(W\cap(A^c\cup S)]=$

$[(A\cap S^c)\cup(W\cap A)\cup(W\cup S^c)]\cap[(A^c\cap S)\cup(W\cap A^c)\cup(W\cap S)]\cup[W^c\cap((A\cap S^c)\cup(W\cap A)\cup(W\cap S^c)\cup(A^c\cap S)\cup(W\cap A^c)\cup(W\cap S))]=$

$((A\cap S\cap W)\cup(A^c\cap S^c\cap W)\cup(A\cap S^c\cap W^c)\cup(A^c\cap W^c\cap S)=[(A\cap W\cap S)\cup(A^c\cap S^c\cap W)]\cup[(A^c\cap W^c\cap S)\cup(A\cap W^c\cap S^c)]=$

$[((A\cap S)\cup(A^c\cap S^c))\cap W]\cup[((A\cap S^c)\cup(A^c\cap S))\cap W^c]=[((A\cap S^c)\cup(A^c\cap S))^c\cap W]\cup[((A\cap S^c)\cup(A^c\cap S))\cap W^c]=$

$[(A\triangle S)^c\cap W]\cup[(A\triangle S)\cap W^c]=(A\triangle S)\triangle W$.

(4) Según el resultado anterior: $A(\Delta^W)^S B = A\Delta^W B\Delta^W S = A\Delta B\Delta W\Delta S\Delta W = A\Delta B\Delta W\Delta W\Delta S = A\Delta B\Delta S = A\Delta^S B$.

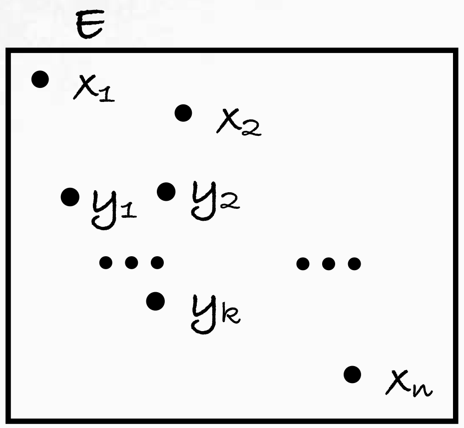
(5) $[x(\in^W)^s A]\Leftrightarrow[x\in^W(A\triangle^W S)]\Leftrightarrow[x\in(A\triangle^W S)\triangle W]\Leftrightarrow[x\in(A\triangle S\triangle W)\triangle W]\Leftrightarrow[x\in(A\triangle S(\triangle W\triangle W)\;[x\in(A\triangle S)]\Leftrightarrow(x\in^s A)$.

(6) $[x\in^s(\in^W(A))]\Leftrightarrow[x\in(\in^W(A))\triangle S]\Leftrightarrow[x\in(A\triangle W)\triangle S]\Leftrightarrow[x\in(A\triangle(W\triangle S)]\Leftrightarrow[x\in^{(W\triangle S)}(A)]$.

En particular: $[x\in^W(\in^W(A))]\Leftrightarrow[x\in^{(W\triangle W)}(A)]\Leftrightarrow[x\in^{\emptyset}(A)]\Leftrightarrow[x\in(A)]$, es decir, $\in^W(\in^W(A))=A$.

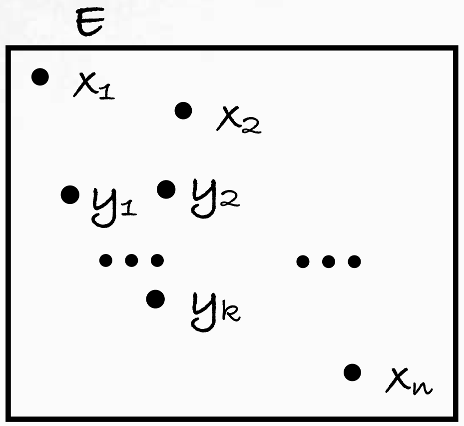
Análogamente, $[x\in^{W^c}(\in^W(A))]\Leftrightarrow[x\in^{(W^c\triangle W)}(A)]\Leftrightarrow[x\in^E(A)]\Leftrightarrow[x\notin(A)]$, es decir, $\in^{W^c}(\in^W(A))=A^c$.∎

Sobre la w-pertenencia $\in^{w}$ y su relación con los w-átomos



$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$

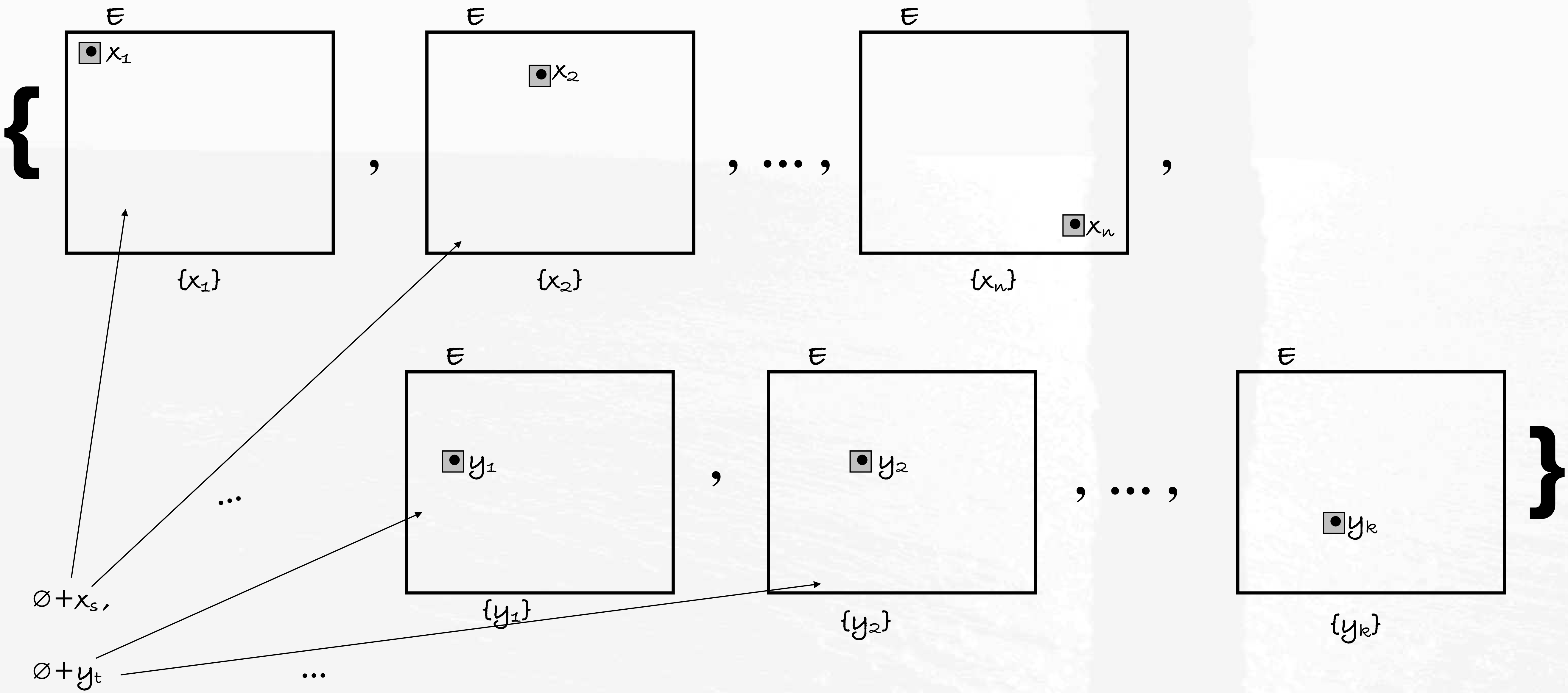
Si $z \in E$, los singletones $\{z\}$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$) son tales que: $\{z\} = \{z\} \triangle \emptyset = \emptyset + z$

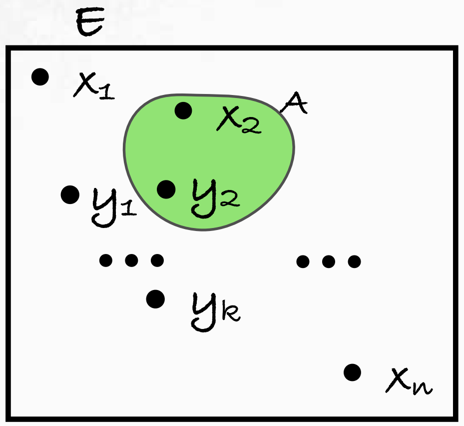


$E=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_k\}$

Si $z\in E$, los singletones $\{z\}$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$) son tales que: $\{z\}=\{z\}\triangle\emptyset=\emptyset+z$

Conjunto de singletones: $\{\ \{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_n\},\{y_1\},\{y_2\},\dots,\{y_k\}\ \}$ $\quad(x_k\in E,\ y_s\in E)$

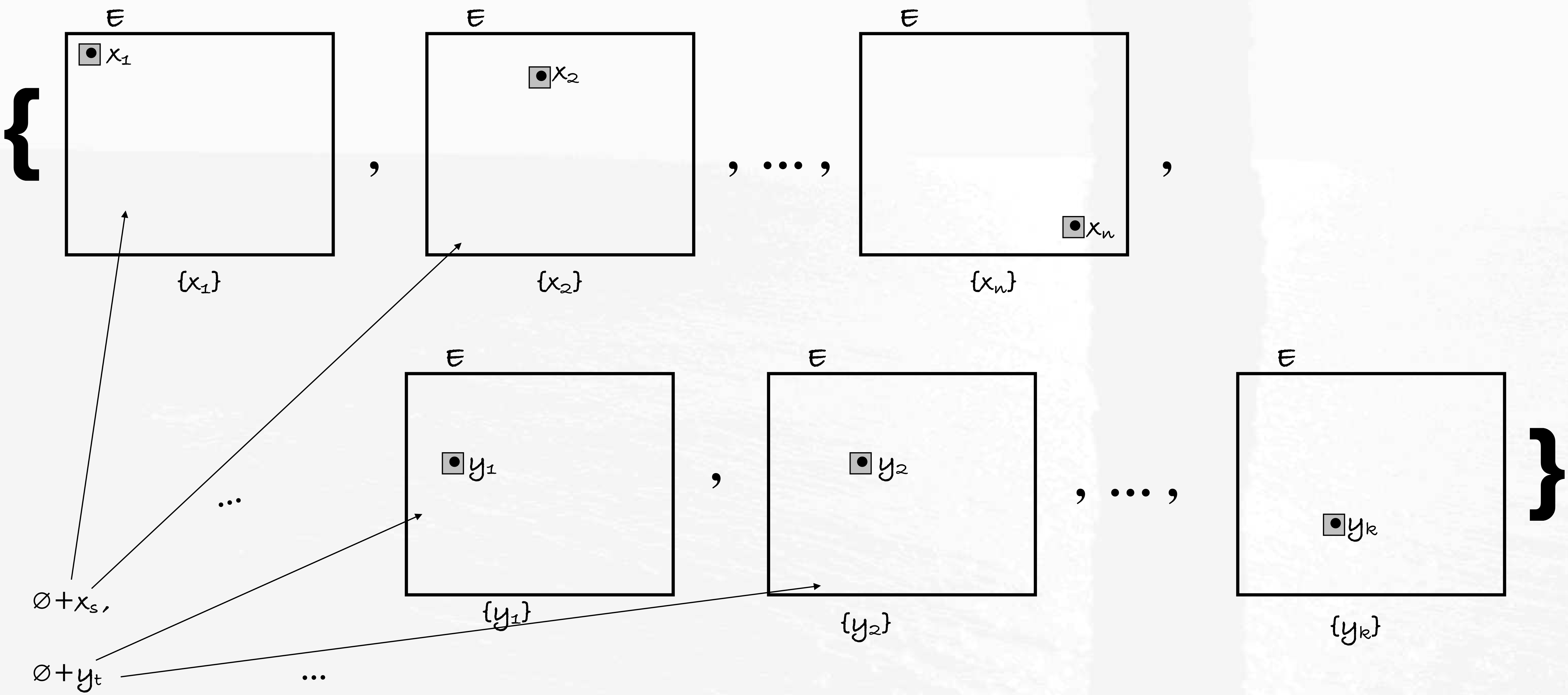


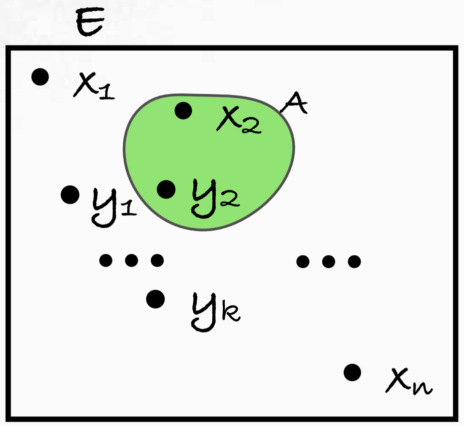


$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\}$

Sea el subconjunto $A = \{x_2, y_2\}$

Conjunto de singletones: $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_k\} \}$ $\quad (x_k \in E,\ y_s \in E)$





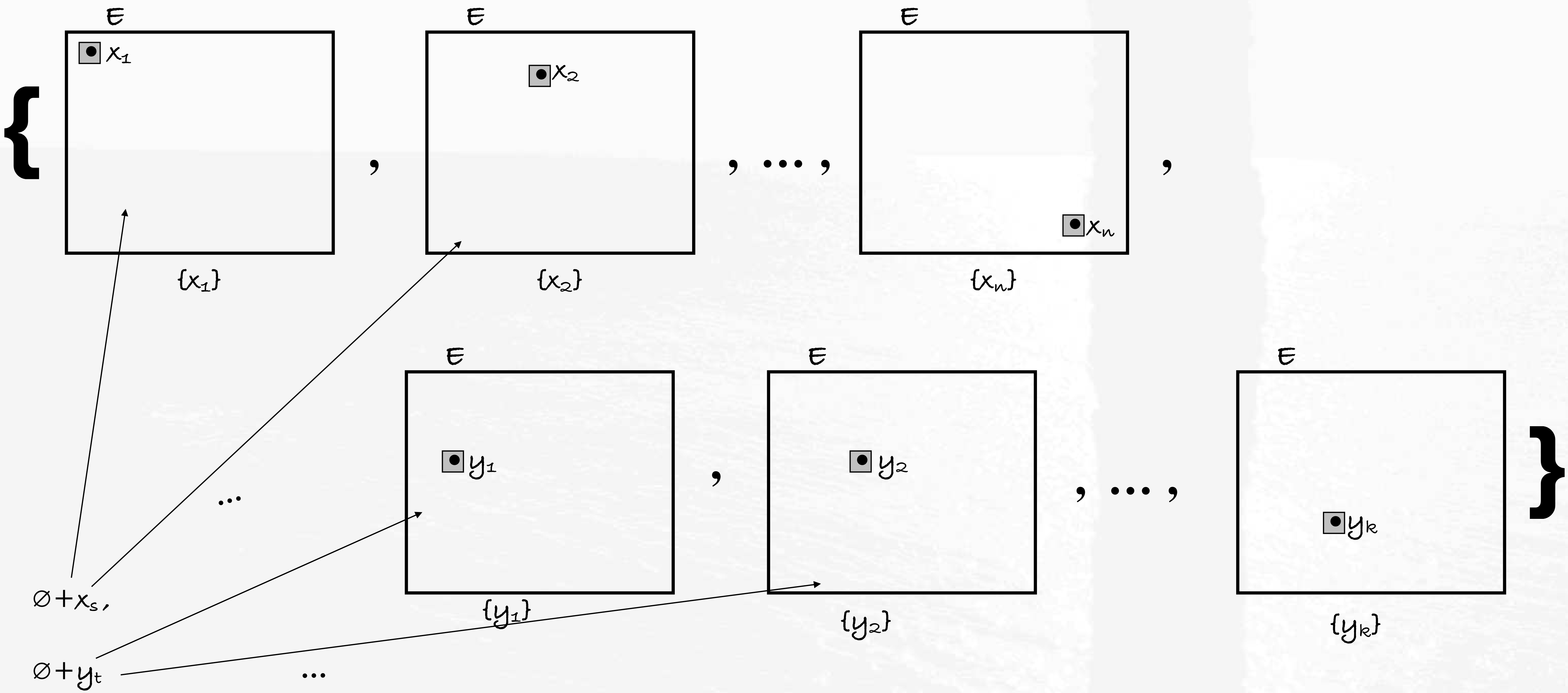
$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$

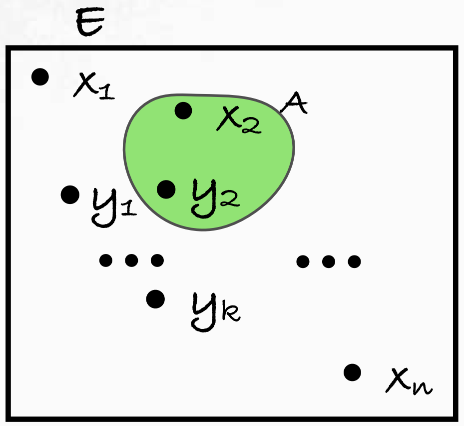
Sea el subconjunto $A = \{x_2, y_2\}$

$(x_1 \notin A), (x_2 \in A), (x_3 \notin A), \ldots, (x_n \notin A),$

$(y_1 \notin A), (y_2 \in A), (y_3 \notin A), \ldots, (y_k \notin A).$

Conjunto de singletones: $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_k\} \}$ $\quad (x_k \in E,\ y_s \in E)$





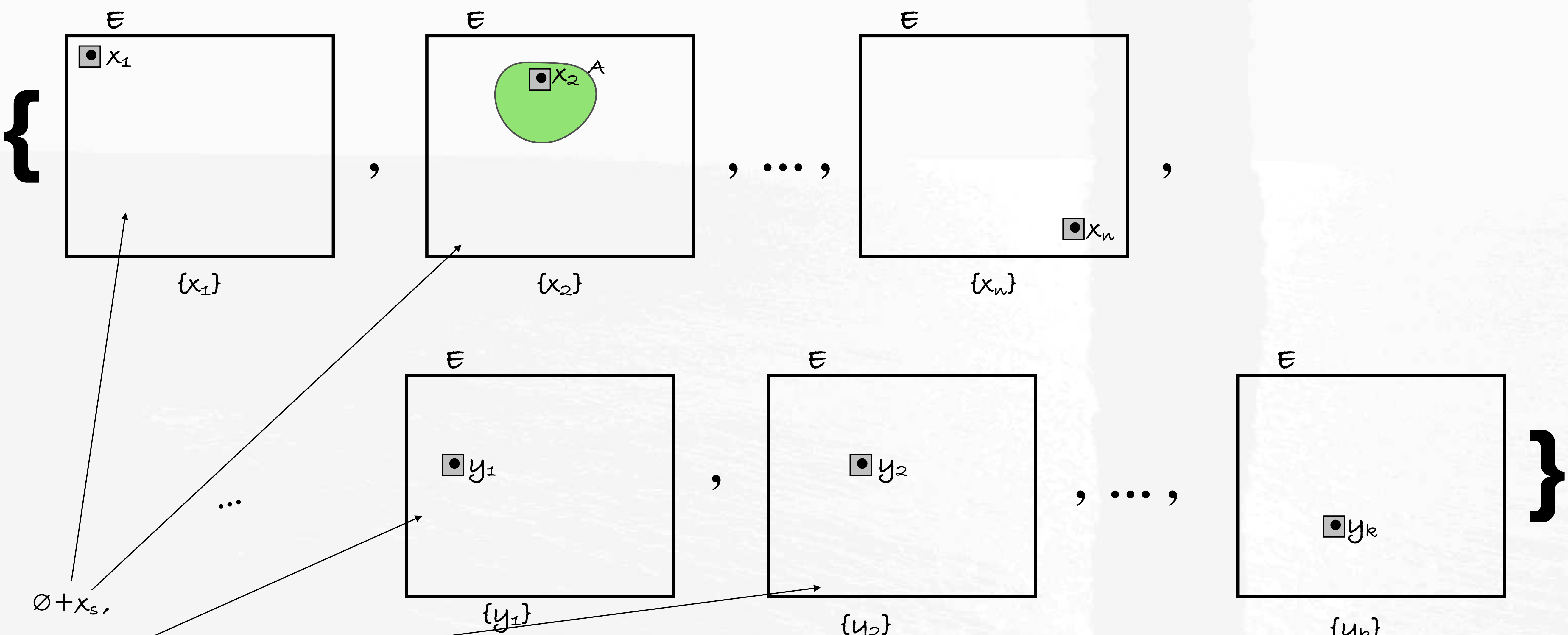
$E=\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\}$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

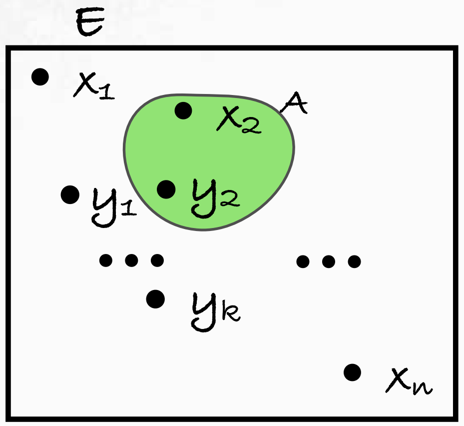
$(x_1\notin A), \boxed{(x_2\in A)}, (x_3\notin A), \dots, (x_n\notin A),$

$(y_1\notin A), (y_2\in A), (y_3\notin A), \dots, (y_k\notin A).$

Conjunto de singletones: $\{\ \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_k\}\ \}$ $(x_k\in E,\ y_s\in E)$



(equivalente a $(\{x_2\}\subseteq A)$),



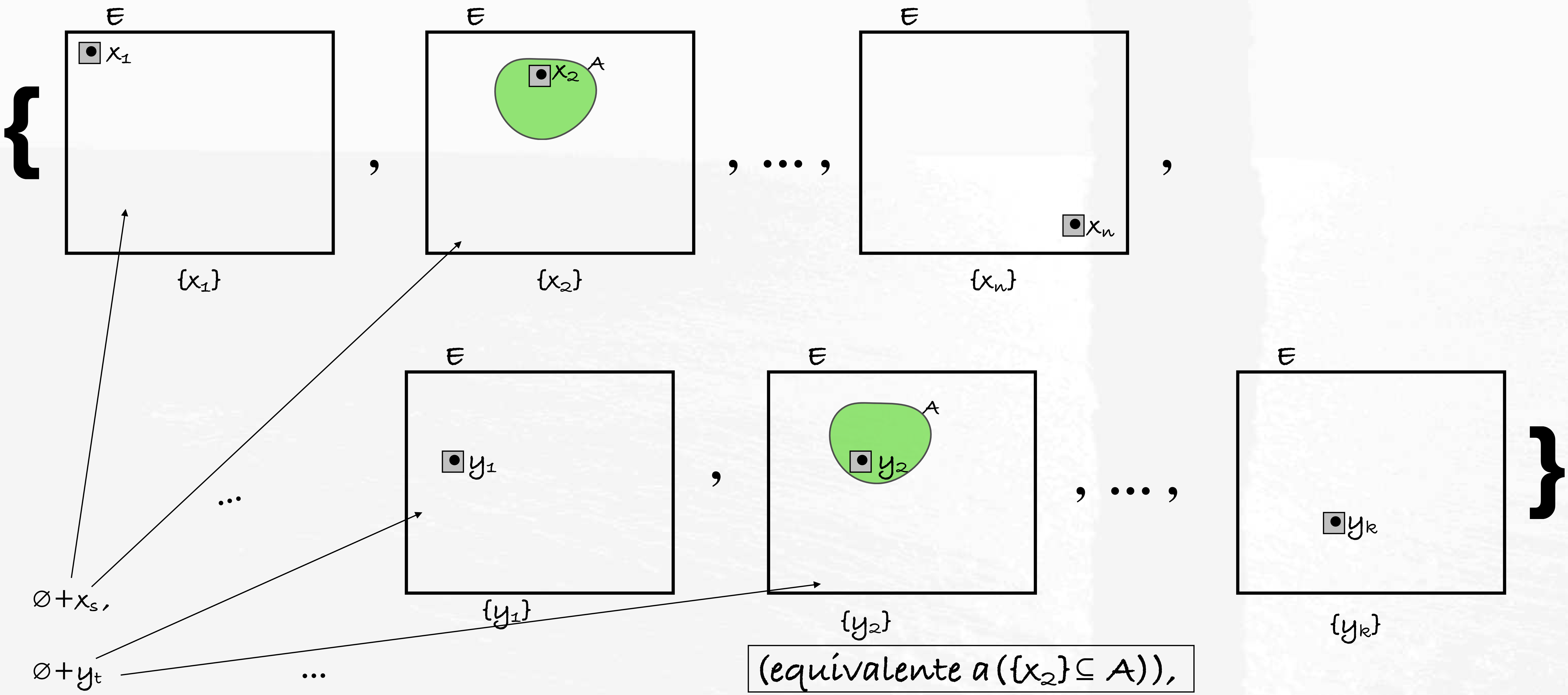
$E=\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\}$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

$(x_1 \notin A), \boxed{(x_2 \in A)}, (x_3 \notin A), \dots, (x_n \notin A),$

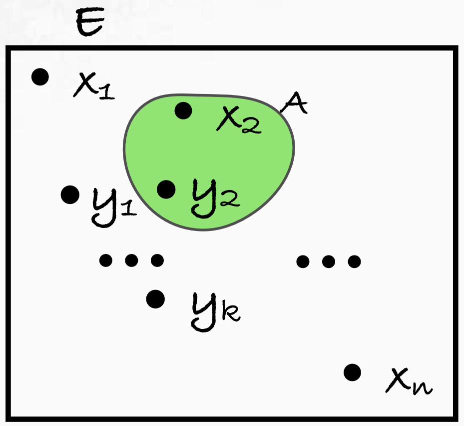
$(y_1 \notin A), \boxed{(y_2 \in A)}, (y_3 \notin A), \dots, (y_k \notin A).$

Conjunto de singletones: $\{\, \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_k\} \,\}$ $\quad (x_k \in E,\ y_s \in E)$



$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\} \subseteq A)),}$

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_2\} \subseteq A)).}$



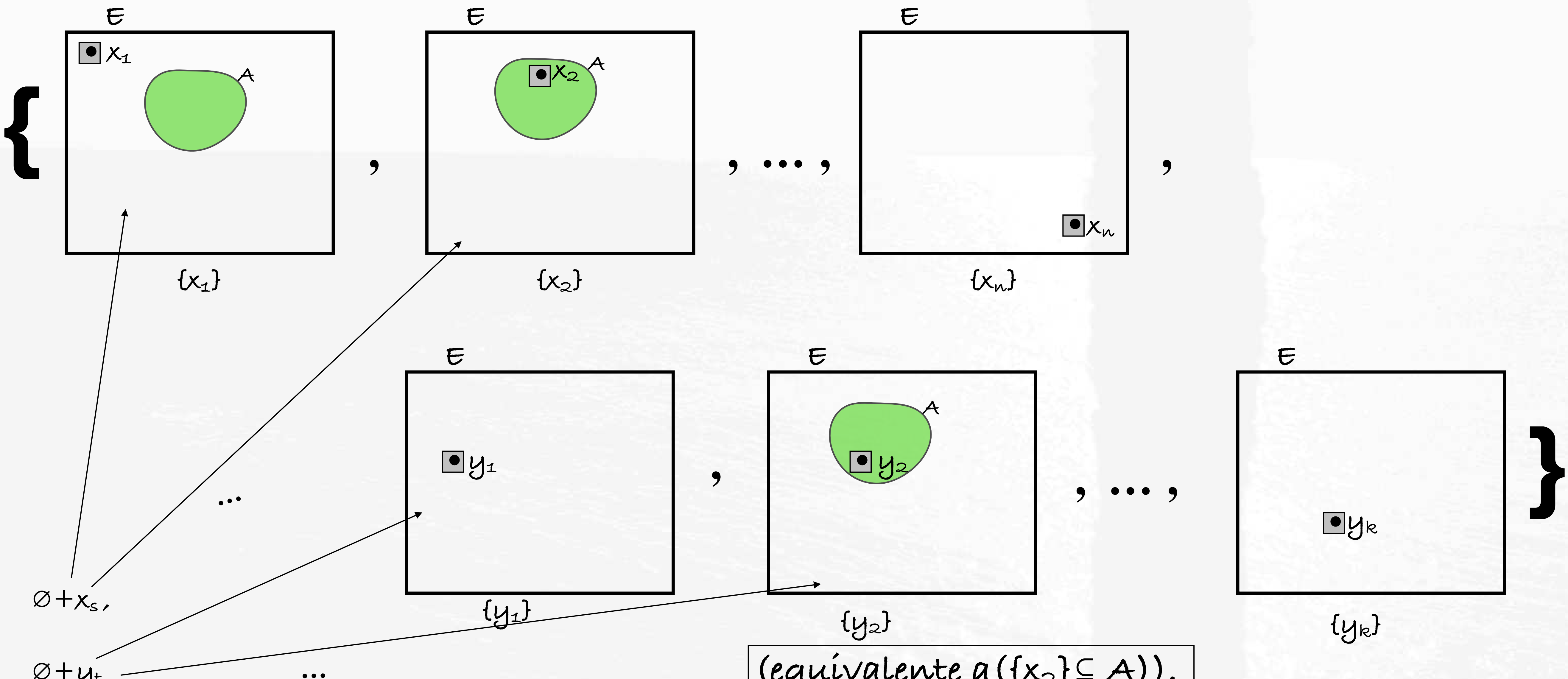
$E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_k\}$

Sea el subconjunto $A=\{x_2,y_2\}$

$\boxed{(x_1\notin A)},\boxed{(x_2\in A)},(x_3\notin A),\ldots,(x_n\notin A),$

$(y_1\notin A),\boxed{(y_2\in A)},(y_3\notin A),\ldots,(y_k\notin A).$

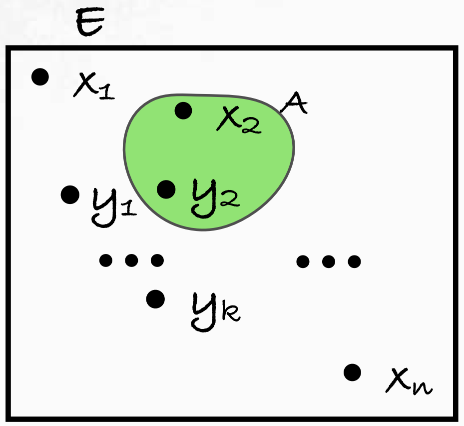
Conjunto de singletones: $\{\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\},\{y_1\},\{y_2\},\ldots,\{y_k\}\}$ $(x_k\in E,\ y_s\in E)$



(equivalente a $(\{x_1\}\cap A)=\varnothing$),

$\boxed{\text{(equivalente a } (\{x_2\}\subseteq A)),}$

$\boxed{\text{(equivalente a } (\{y_2\}\subseteq A)).}$



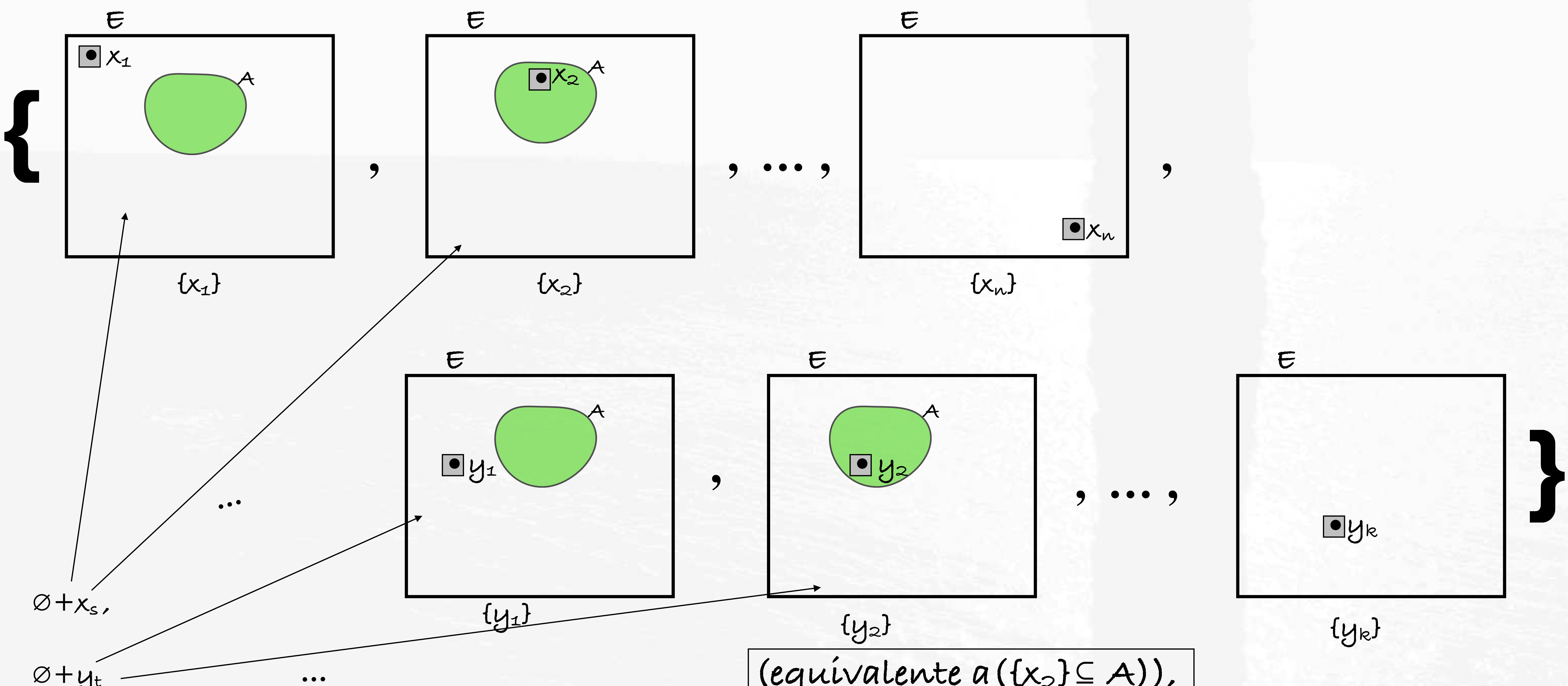
$E=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_k\}$

Sea el subconjunto $A=\{x_2,y_2\}$

$\boxed{(x_1\notin A)},\boxed{(x_2\in A)},(x_3\notin A),\dots,(x_n\notin A),$

$\boxed{(y_1\notin A)},\boxed{(y_2\in A)},(y_3\notin A),\dots,(y_k\notin A).$

Conjunto de singletones: $\{\ \{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_n\},\{y_1\},\{y_2\},\dots,\{y_k\}\ \}$ $(x_k\in E,\ y_s\in E)$



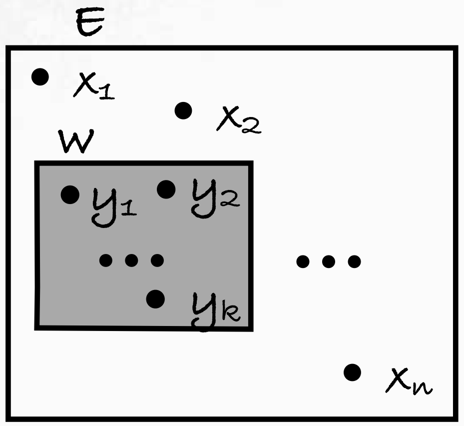
...

$\boxed{(\text{equivalente a }(\{x_2\}\subseteq A)),}$

(equivalente a $(\{x_1\}\cap A)=\varnothing$),

$\boxed{(\text{equivalente a }(\{y_2\}\subseteq A)).}$

(equivalente a $(\{y_1\}\cap A)=\varnothing$).



$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} = W^c \cup W$

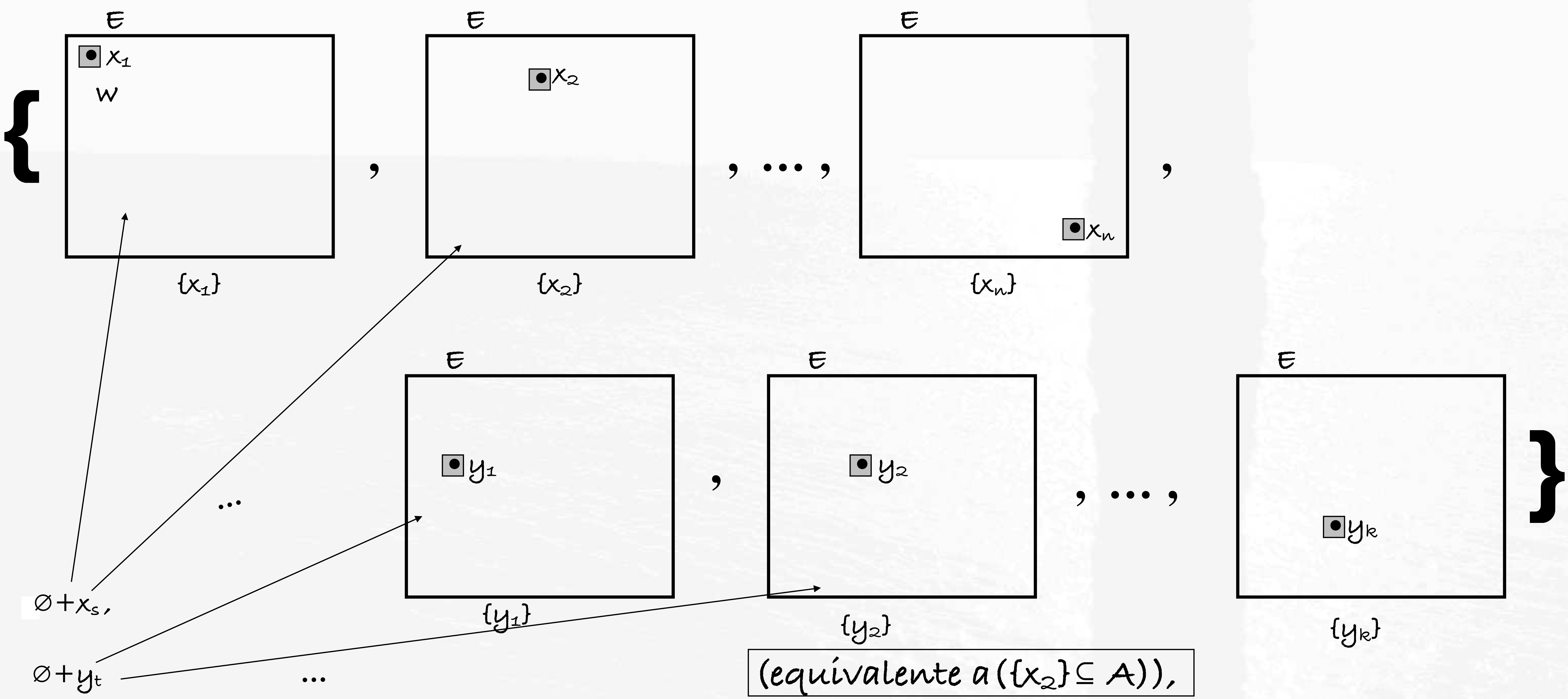
Sea el subconjunto $A = \{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

$(x_1 \notin A), \boxed{(x_2 \in A)}, (x_3 \notin A), \ldots, (x_n \notin A),$

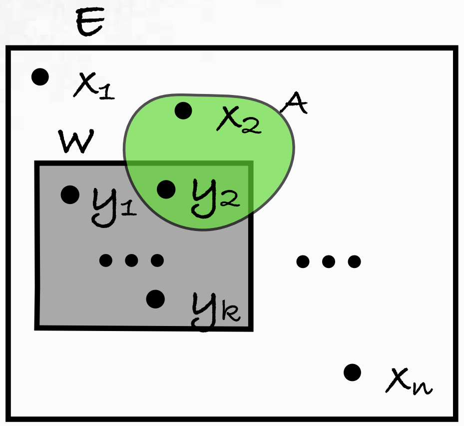
$(y_1 \notin A), \boxed{(y_2 \in A)}, (y_3 \notin A), \ldots, (y_k \notin A).$

Conjunto de singletones: $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_k\} \}$ $(x_k \in E,\ y_s \in E)$



$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\} \subseteq A)),}$

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_2\} \subseteq A)).}$



$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} = W^c \cup W$

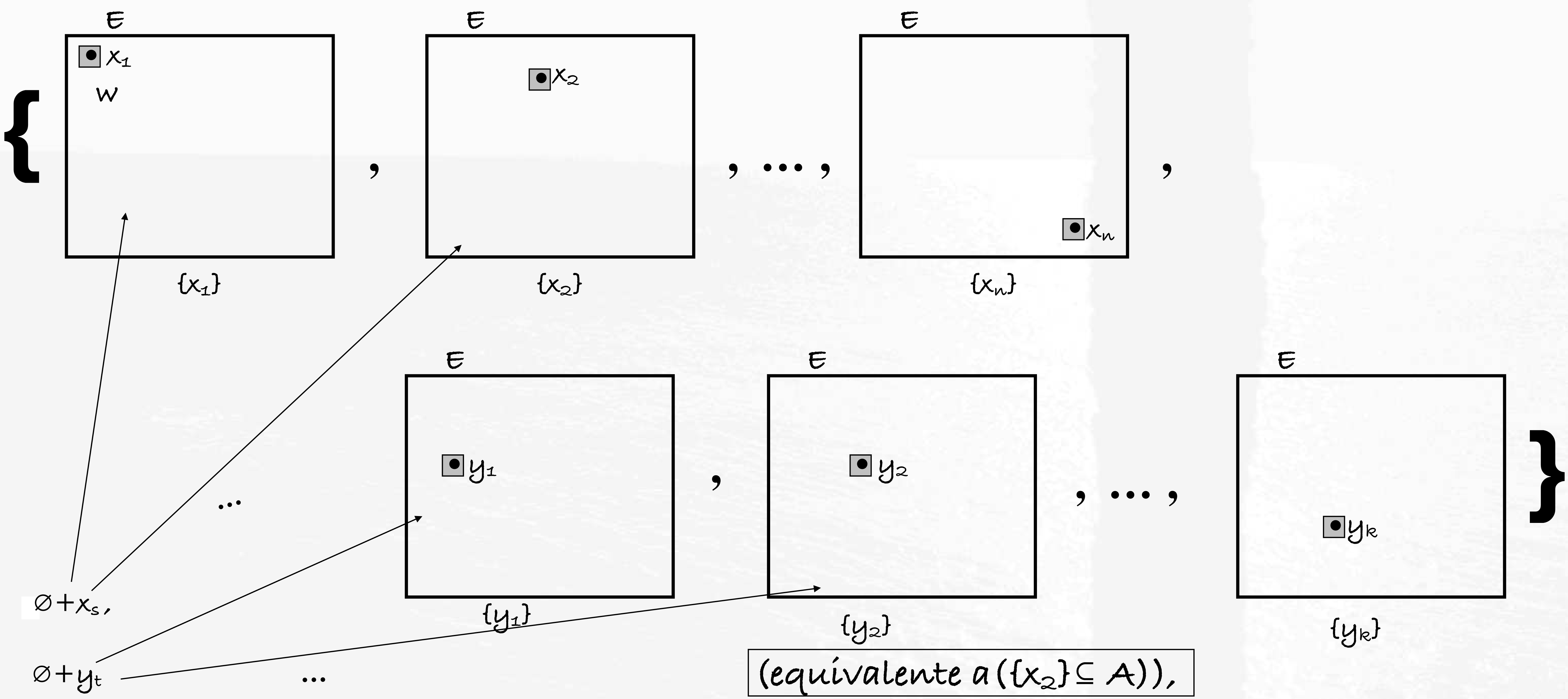
Sea el subconjunto $A = \{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

$(x_1 \notin A), \boxed{(x_2 \in A)}, (x_3 \notin A), \ldots, (x_n \notin A),$

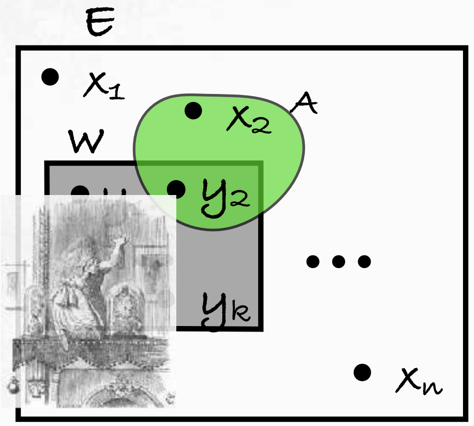
$(y_1 \notin A), \boxed{(y_2 \in A)}, (y_3 \notin A), \ldots, (y_k \notin A).$

Conjunto de singletones: $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_k\} \}$ $(x_k \in E,\ y_s \in E)$



$\boxed{\text{(equivalente a } (\{x_2\} \subseteq A)\text{),}}$

$\boxed{\text{(equivalente a } (\{y_2\} \subseteq A)\text{).}}$



$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} = W^c \cup W$

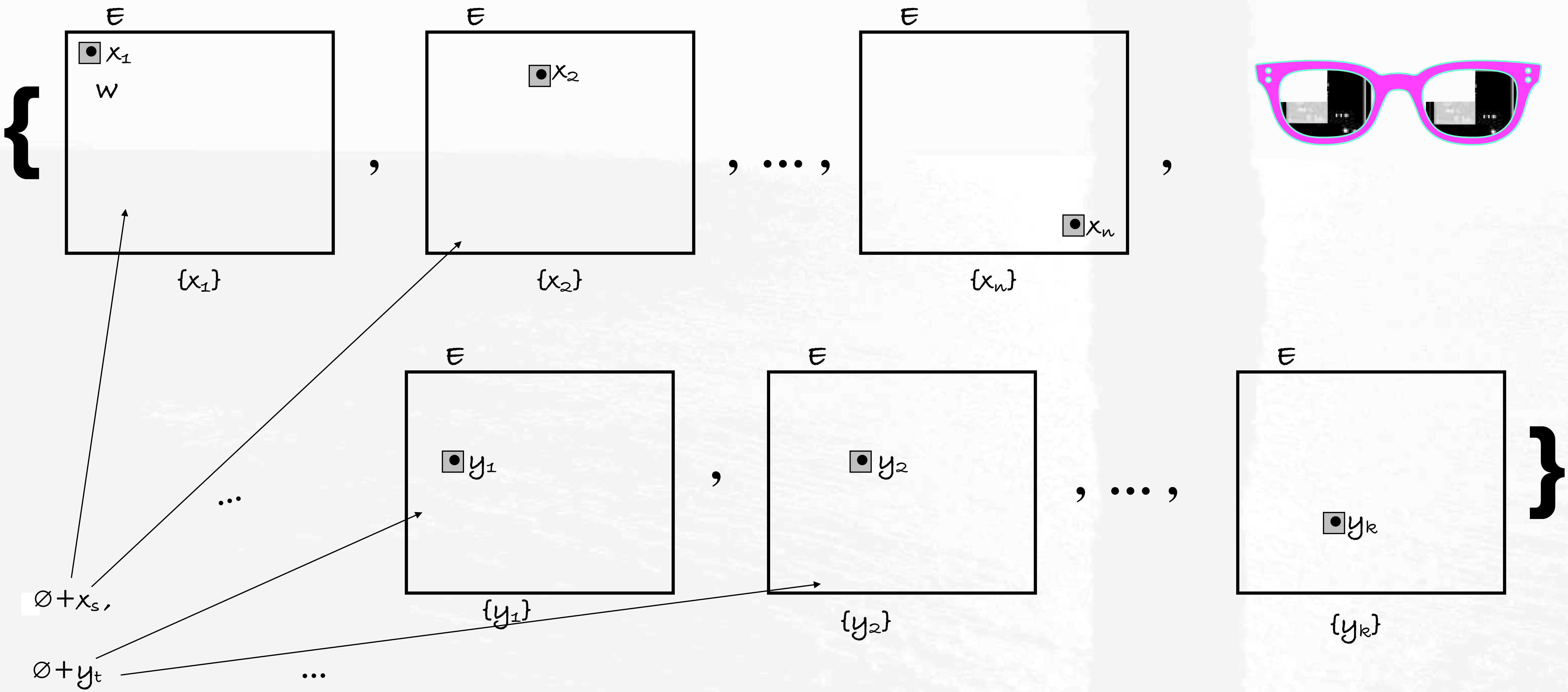
Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

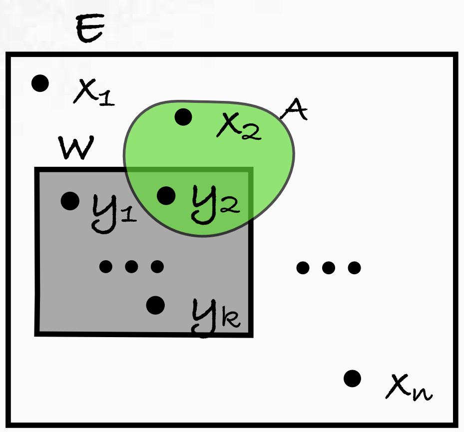
Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

$(x_1 \notin^W A), (x_2 \in^W A), (x_3 \notin^W A), \ldots, (x_n \notin^W A),$
$(y_1 \in^W A), (y_2 \notin^W A), (y_3 \in^W A), \ldots, (y_k \in^W A).$

$(\in^W = \notin$ en W,
$\in^W = \in$ en $W^c)$

Conjunto de singletones: $\{\ \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_k\}\ \}$ $\quad (x_k \in E,\ y_s \in E)$





$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} \;=W^c \cup W$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

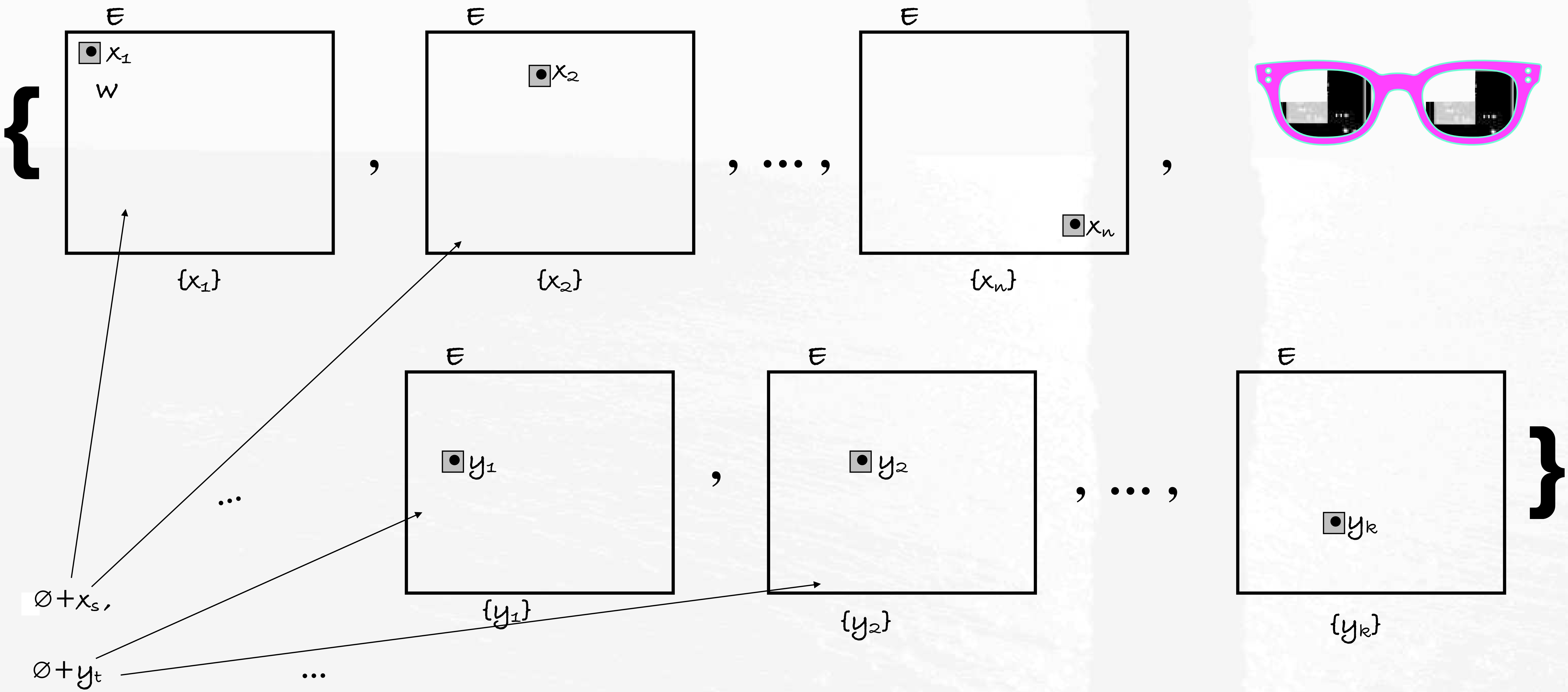
Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

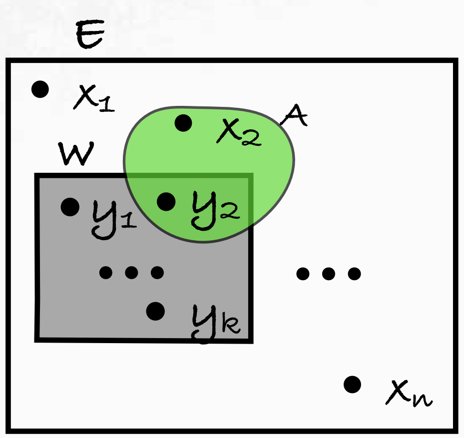
Si $z \in E$, $\quad \{z\}_w=\{z\} \triangle W=(\{z\} \cap W^c) \cup (\{z\}^c \cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z \notin W \\ W-z \text{ si } z \in W \end{cases}$

$(x_1 \notin^w A), (x_2 \in^w A), (x_3 \notin^w A), \ldots, (x_n \notin^w A),$
$(y_1 \in^w A), (y_2 \notin^w A), (y_3 \in^w A), \ldots, (y_k \in^w A).$

$(\in^w = \notin$ en W,
$\in^w = \in$ en $W^c)$

Conjunto de singletones: $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_k\} \}$ $\quad (x_k \in E, y_s \in E)$





$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} \;=W^c \cup W$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

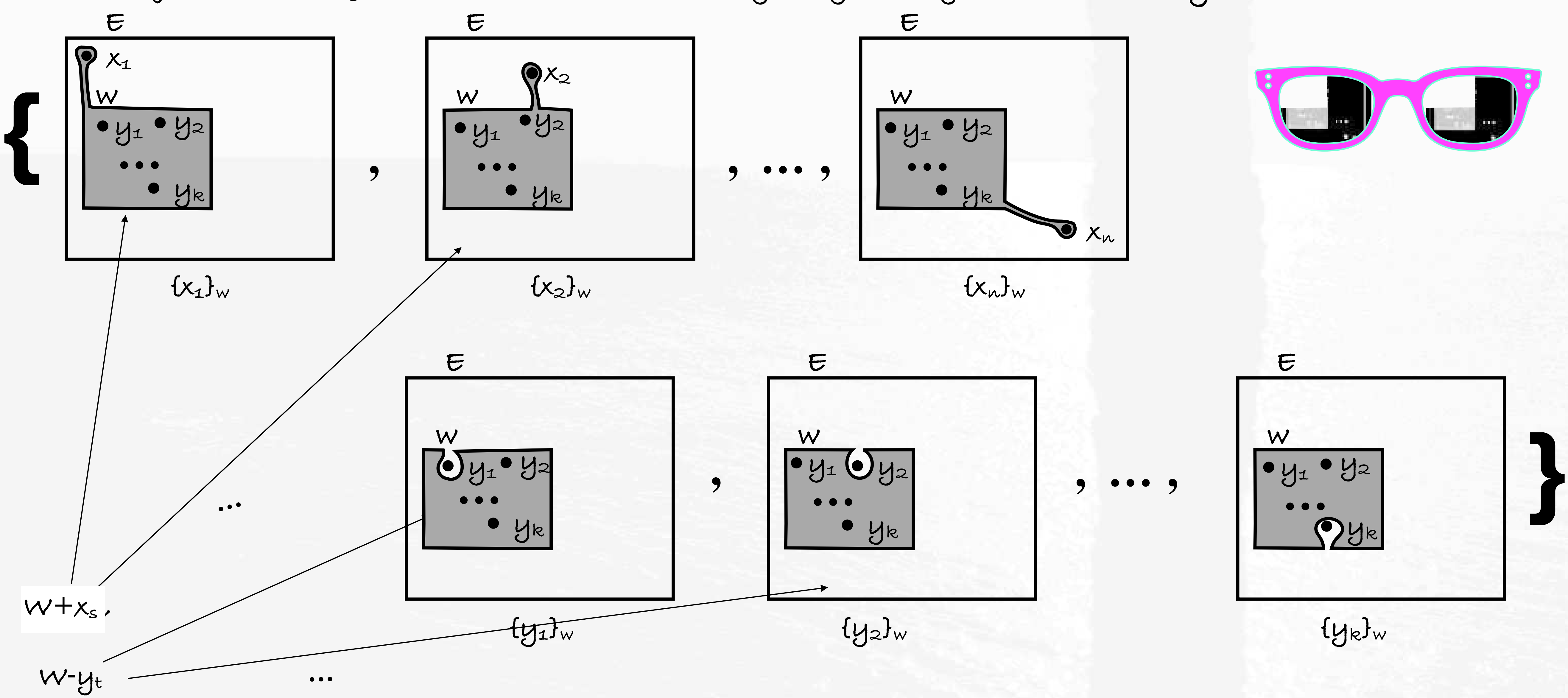
$(x_1 \notin^W A), (x_2 \in^W A), (x_3 \notin^W A), \ldots, (x_n \notin^W A),$
$(y_1 \in^W A), (y_2 \notin^W A), (y_3 \in^W A), \ldots, (y_k \in^W A).$

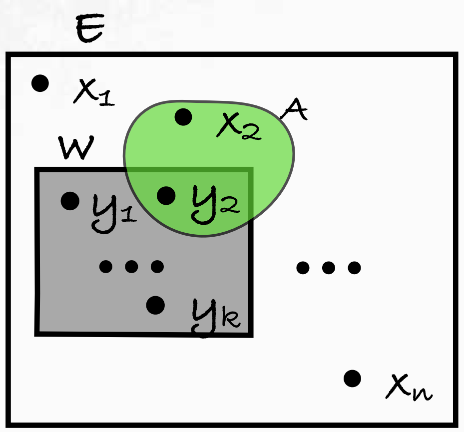
($\in^W = \notin$ en W,
$\in^W = \in$ en W^c)

Si $z \in E$, $\quad \{z\}_w=\{z\}\triangle W=(\{z\}\cap W^c)\cup(\{z\}^c \cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z\notin W \\ W\text{-}z \text{ si } z\in W \end{cases}$

W-singletones $\{z\}_w$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$):

Conjunto de W-singletones: $\{\, \{x_1\}_w, \{x_2\}_w, \ldots, \{x_n\}_w, \{y_1\}_w, \{y_2\}_w, \ldots, \{y_k\}_w \}$ $\quad (x_k \notin W,\; y_s \in W)$





$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} = W^c \cup W$

Sea el subconjunto $A = \{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

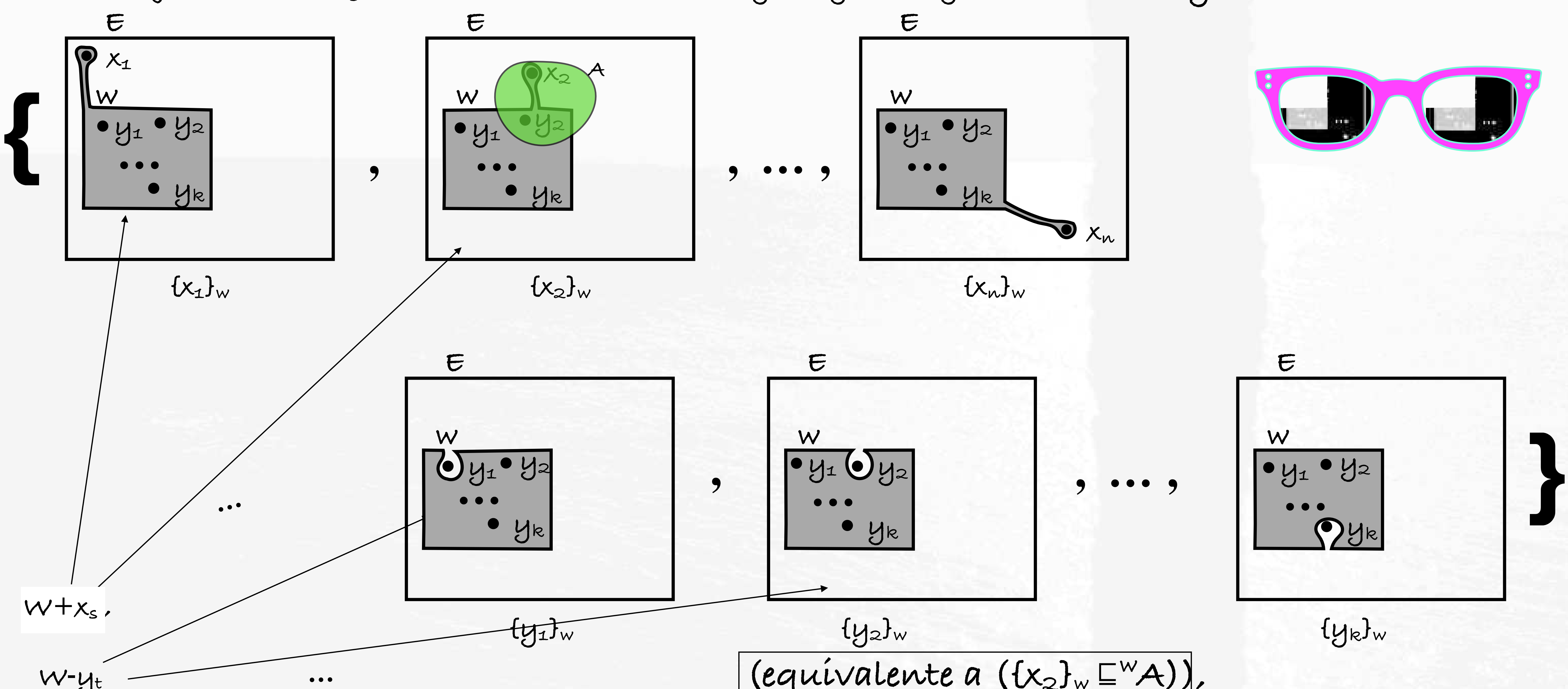
Si $z \in E$, $\{z\}_W = \{z\} \triangle W = (\{z\} \cap W^c) \cup (\{z\}^c \cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z \notin W \\ W-z \text{ si } z \in W \end{cases}$

W-singletones $\{z\}_W$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$):

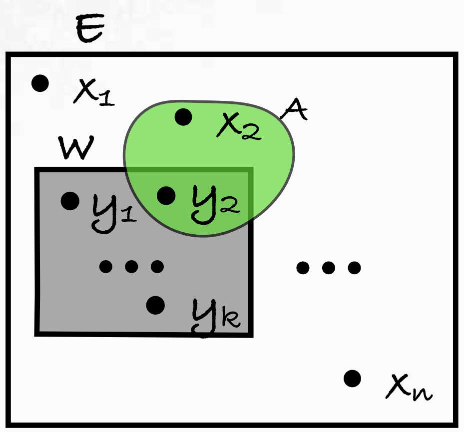
$(x_1 \notin^W A), \boxed{(x_2 \in^W A)}, (x_3 \notin^W A), \ldots, (x_n \notin^W A),$
$(y_1 \in^W A), (y_2 \notin^W A), (y_3 \in^W A), \ldots, (y_k \in^W A).$

$(\in^W = \notin$ en W,
$\in^W = \in$ en $W^c)$

Conjunto de W-singletones: $\{ \{x_1\}_W, \{x_2\}_W, \ldots, \{x_n\}_W, \{y_1\}_W, \{y_2\}_W, \ldots, \{y_k\}_W \}$ $\quad (x_k \notin W,\ y_s \in W)$



$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\}_W \sqsubseteq^W A))},$



$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\} \;=W^c \cup W$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

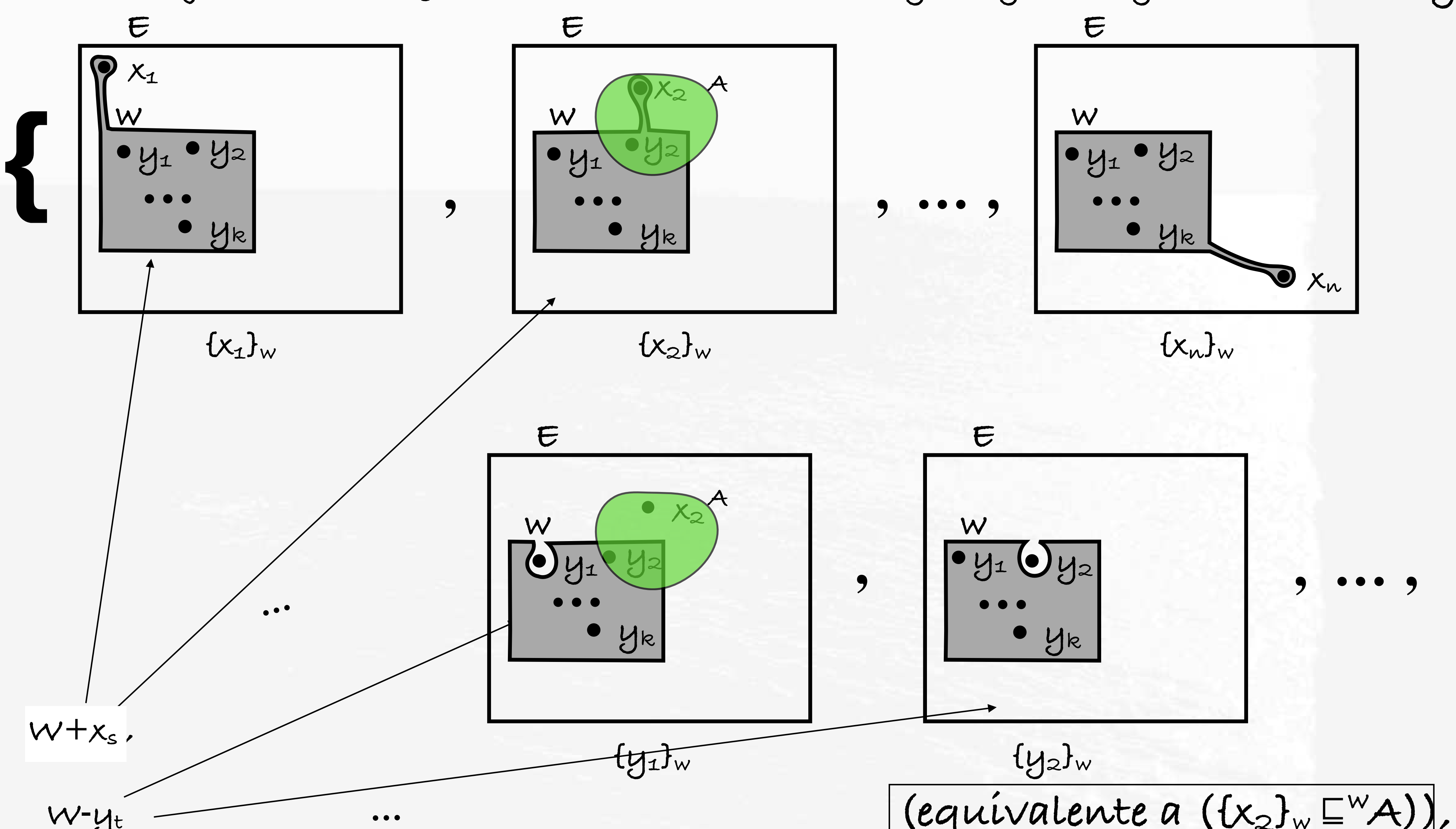
$(x_1 \notin^W A), \boxed{(x_2 \in^W A)}, (x_3 \notin^W A), \ldots, (x_n \notin^W A),$
$\boxed{(y_1 \in^W A)}, (y_2 \notin^W A), (y_3 \in^W A), \ldots, (y_k \in^W A).$

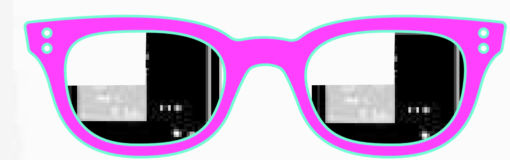
Si $z \in E$, $\quad \{z\}_w = \{z\} \triangle W = (\{z\} \cap W^c) \cup (\{z\}^c \cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z \notin W \\ W-z \text{ si } z \in W \end{cases}$

$(\in^W = \notin$ en W,
$\in^W = \in$ en $W^c)$

W-singletones $\{z\}_w$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$):

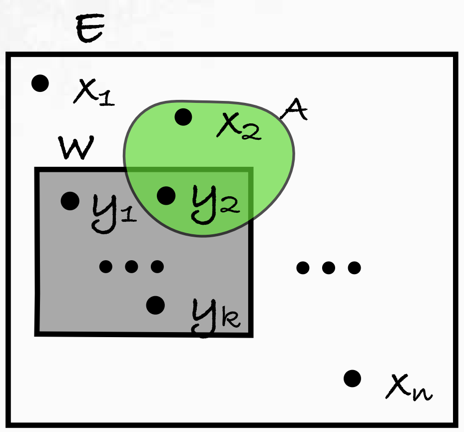
Conjunto de W-singletones: $\{\, \{x_1\}_w, \{x_2\}_w, \ldots, \{x_n\}_w, \{y_1\}_w, \{y_2\}_w, \ldots, \{y_k\}_w \,\}$ $\quad (x_k \notin W,\ y_s \in W)$





$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\}_w \sqsubseteq^W A))}$,

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_1\}_w \sqsubseteq^W A)),}$



$E=\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\} = W^c \cup W$

Sea el subconjunto $A=\{x_2, y_2\}$

Supongamos $W \subseteq E$ tal que: $x_k \notin W$, $y_s \in W$,

Si $z \in E$, $\{z\}_W = \{z\} \triangle W = (\{z\} \cap W^c) \cup (\{z\}^c \cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z \notin W \\ W-z \text{ si } z \in W \end{cases}$

W-singletones $\{z\}_W$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$):

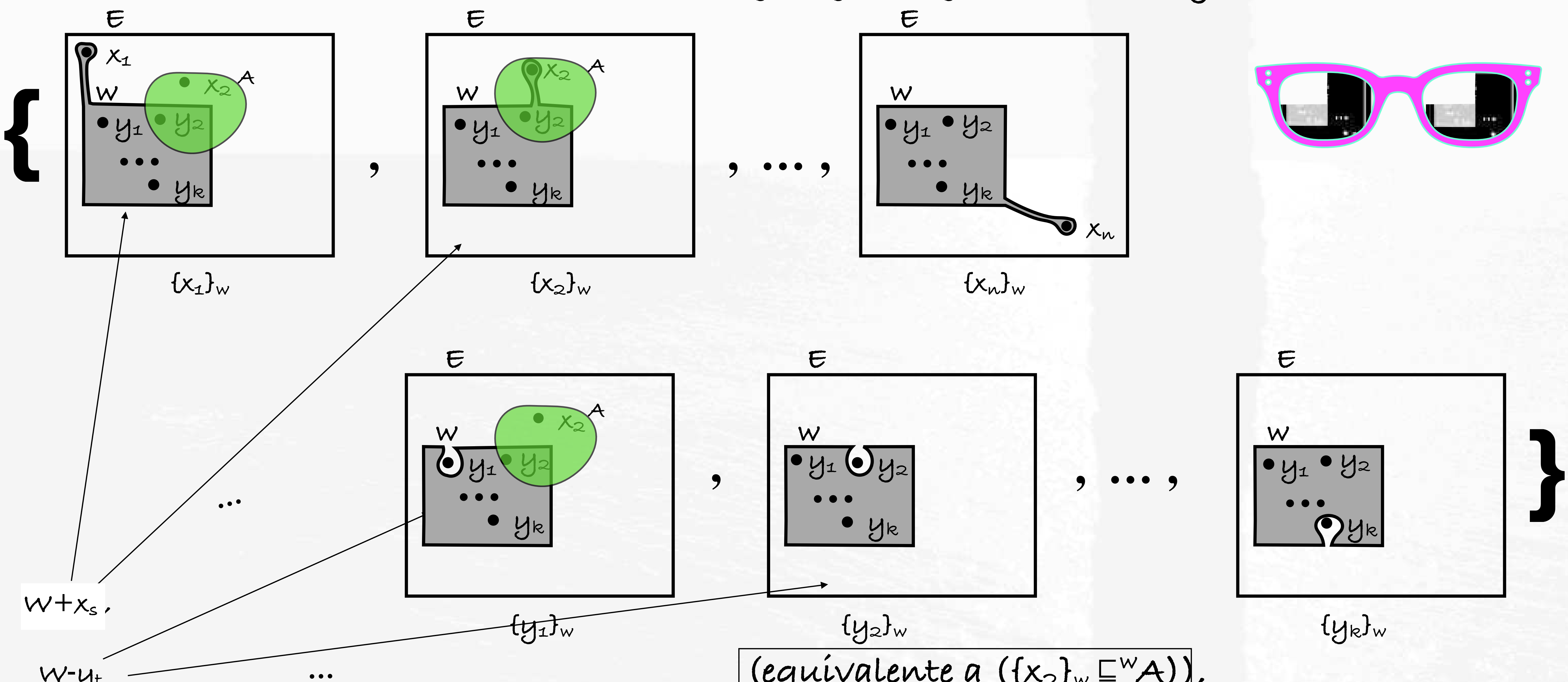
$\boxed{(x_1 \notin^W A)}, \boxed{(x_2 \in^W A)}, (x_3 \notin^W A), \dots, (x_n \notin^W A),$

$\boxed{(y_1 \in^W A)}, (y_2 \notin^W A), (y_3 \in^W A), \dots, (y_k \in^W A).$

$(\in^W = \notin$ en W,

$\in^W = \in$ en $W^c)$

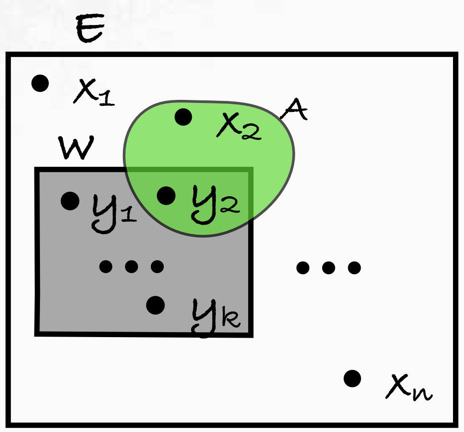
Conjunto de W-singletones: $\{ \{x_1\}_W, \{x_2\}_W, \dots, \{x_n\}_W, \{y_1\}_W, \{y_2\}_W, \dots, \{y_k\}_W \}$ $\quad (x_k \notin W, y_s \in W)$



$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_1\}_W \sqcap^W A) = W)},$

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\}_W \sqsubseteq^W A))},$

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_1\}_W \sqsubseteq^W A))},$



$E=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_k\} = W^c\cup W$

Sea el subconjunto $A=\{x_2,y_2\}$

Supongamos $W\subseteq E$ tal que: $x_k\notin W$, $y_s\in W$,

Si $z\in E$, $\{z\}_W=\{z\}\triangle W=(\{z\}\cap W^c)\cup(\{z\}^c\cap W) = \begin{cases} W+z \text{ si } z\notin W \\ W-z \text{ si } z\in W \end{cases}$

W-singletones $\{z\}_W$ (átomos del álgebra $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$):

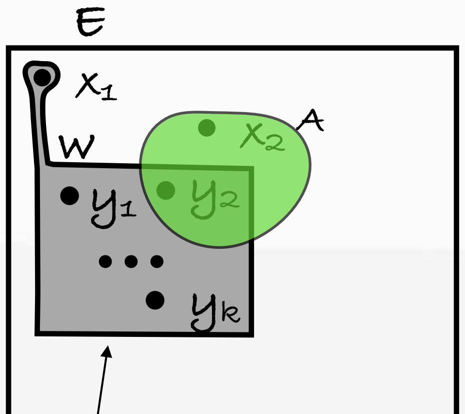
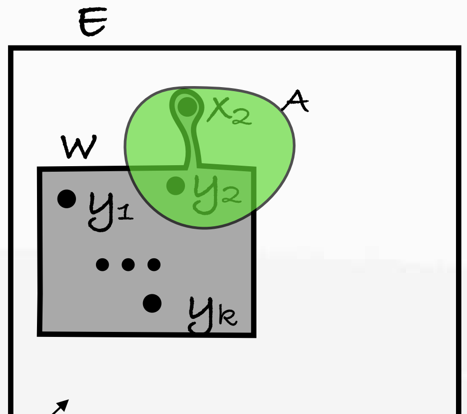
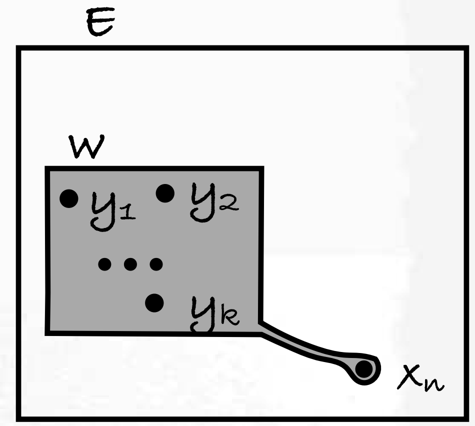
$\boxed{(x_1\notin^W A)}$, $\boxed{(x_2\in^W A)}$, $(x_3\notin^W A),\dots,(x_n\notin^W A)$,

$\boxed{(y_1\in^W A)}$, $\boxed{(y_2\notin^W A)}$, $(y_3\in^W A),\dots,(y_k\in^W A)$.

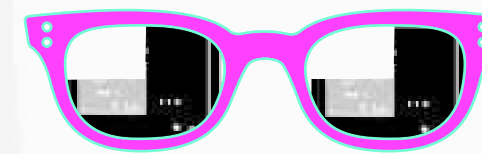
($\in^W=\notin$ en W,

$\in^W=\in$ en W^c)

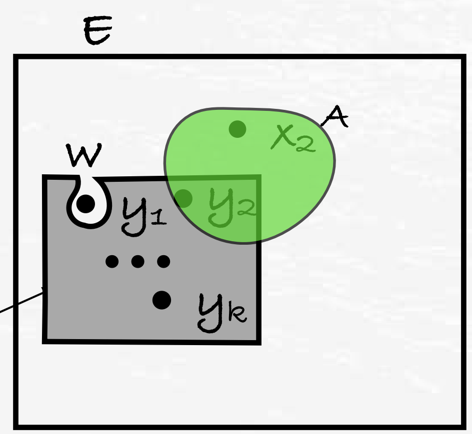
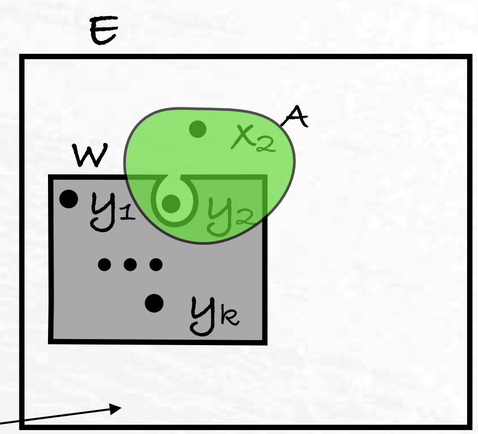
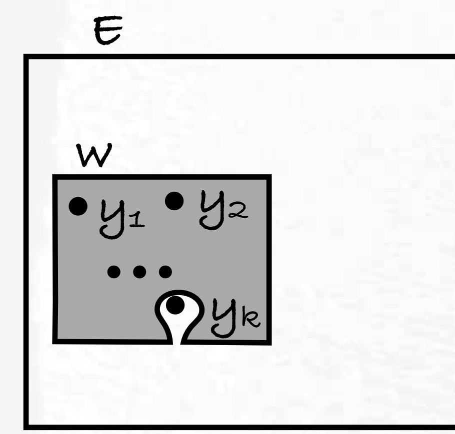
Conjunto de W-singletones: $\{\ \{x_1\}_W,\{x_2\}_W,\dots,\{x_n\}_W,\{y_1\}_W,\{y_2\}_W,\dots,\{y_k\}_W\ \}$ $\quad(x_k\notin W,\ y_s\in W)$

{  ,  , … , 

$\{x_1\}_W$ $\qquad$ $\{x_2\}_W$ $\qquad$ $\{x_n\}_W$



…

 ,  , … ,  }

$\{y_1\}_W$ $\qquad$ $\{y_2\}_W$ $\qquad$ $\{y_k\}_W$

$W+x_s$,

$W-y_t$

…

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_2\}_W\sqsubseteq^W A))}$,

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{x_1\}_W\sqcap^W A)=W)}$,

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_1\}_W\sqsubseteq^W A))}$,

$\boxed{(\text{equivalente a } (\{y_2\}_W\sqcap^W A)=W)}$.

Ilustración de la “w-pertenencia“ $\in^w$ en imágenes binarias del plano digital

E [redacted]

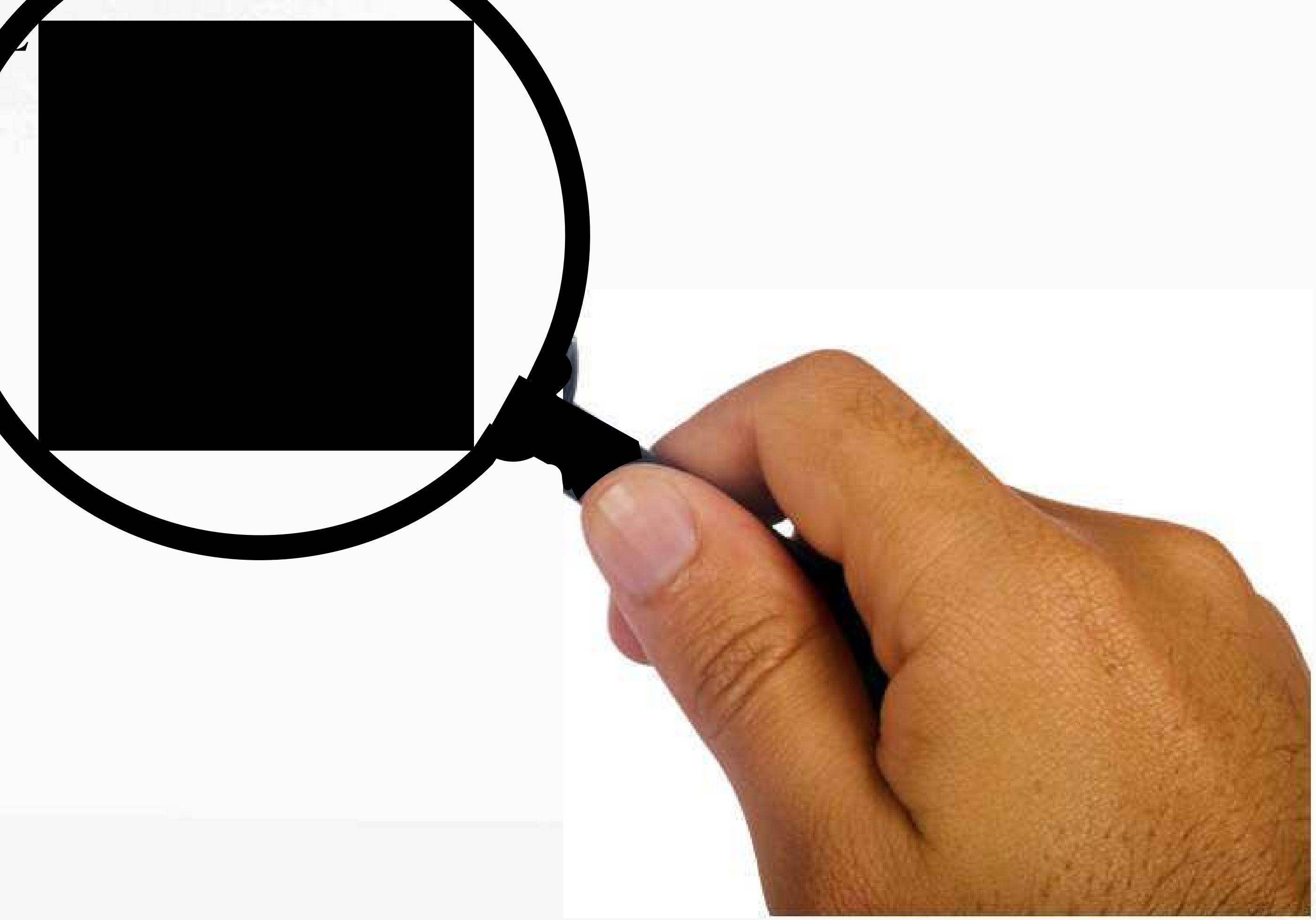
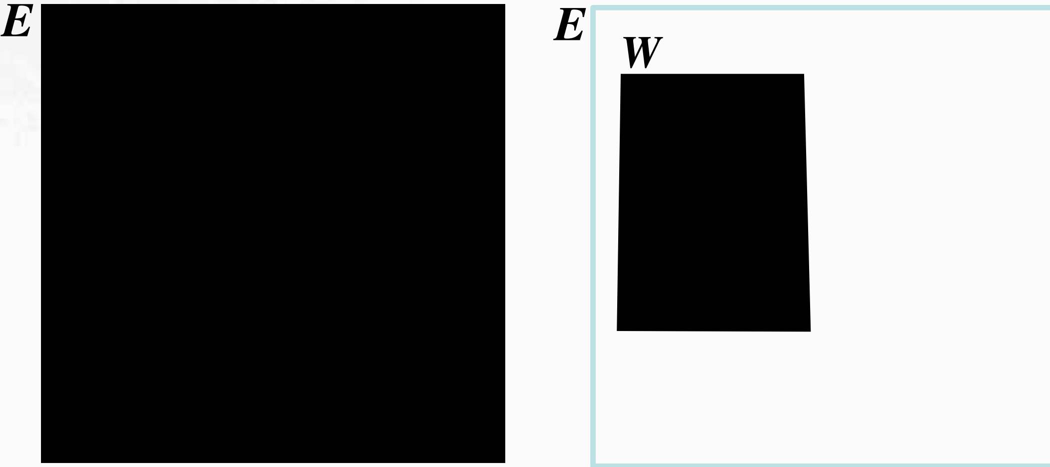


Imagen que representa la pertenencia usual $\in$ como el operador identidad,...

La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in (X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

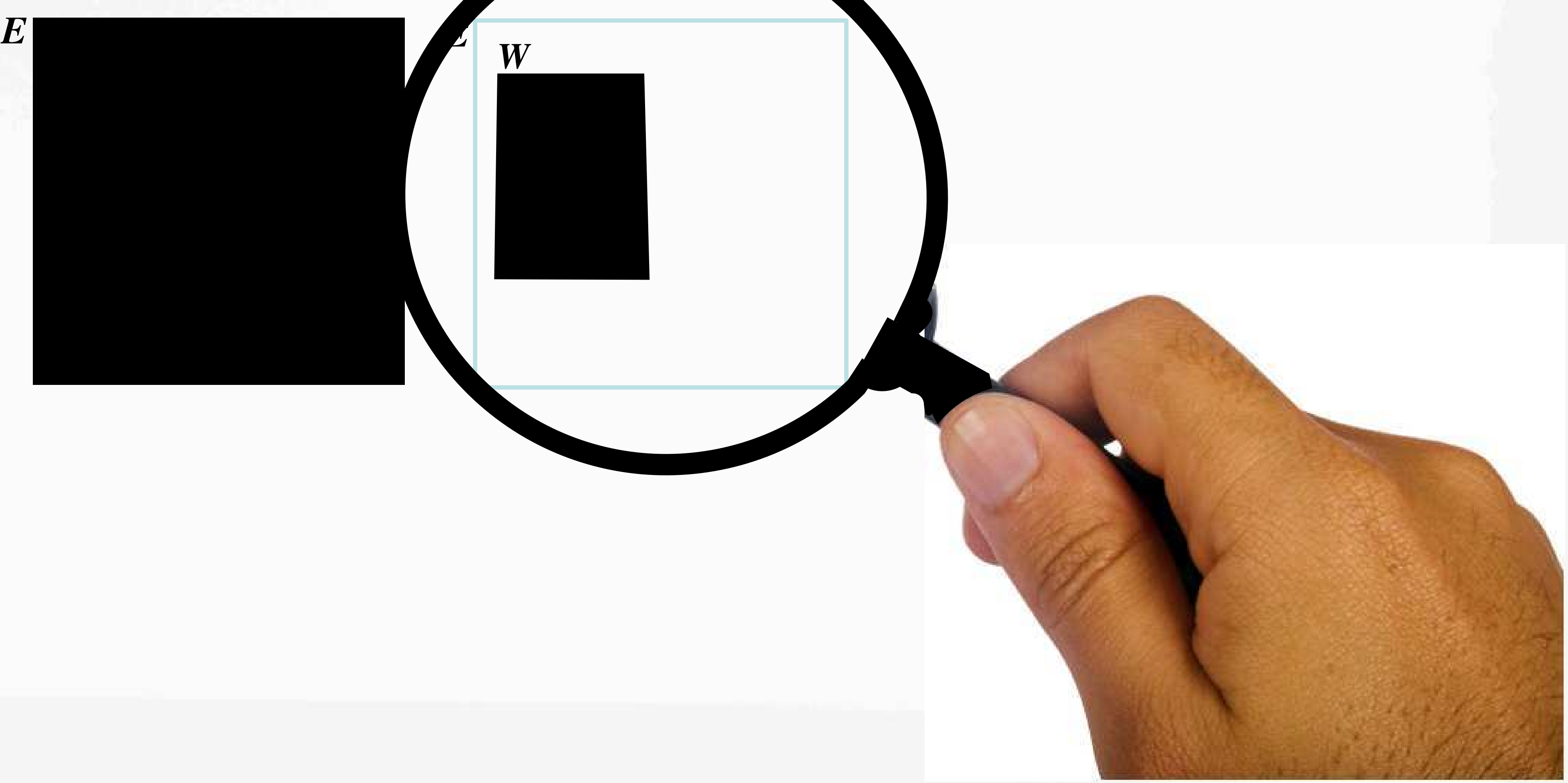


Imagen que representa la pertenencia usual $\in$ como el operador identidad,...

La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

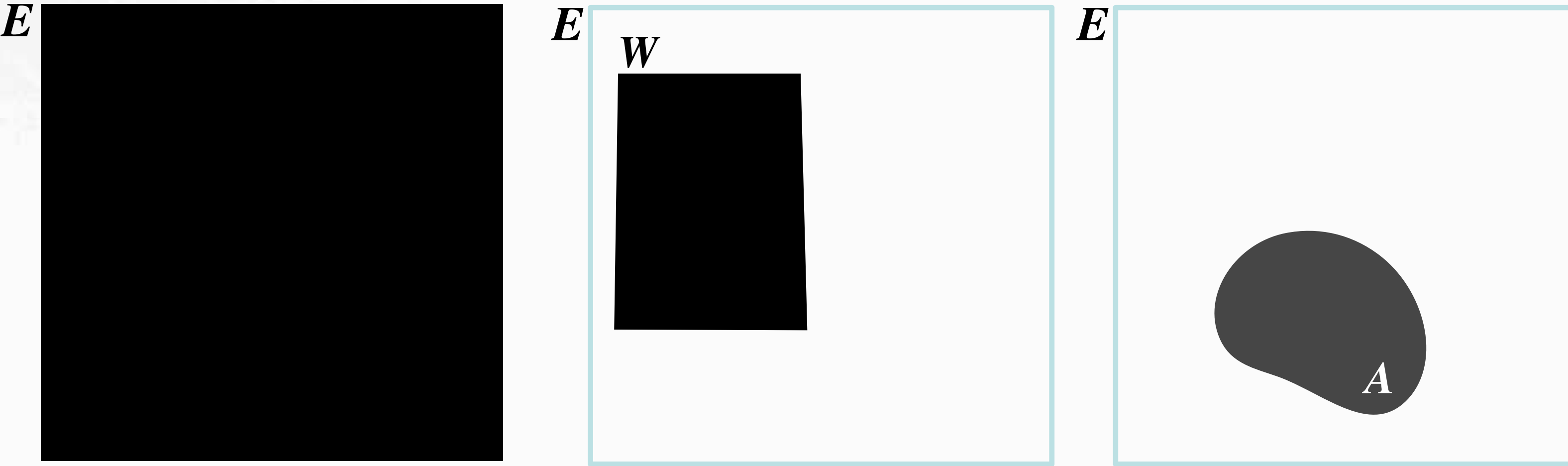


Imagen que representa la pertenencia usual $\in$ como el operador identidad,...

La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

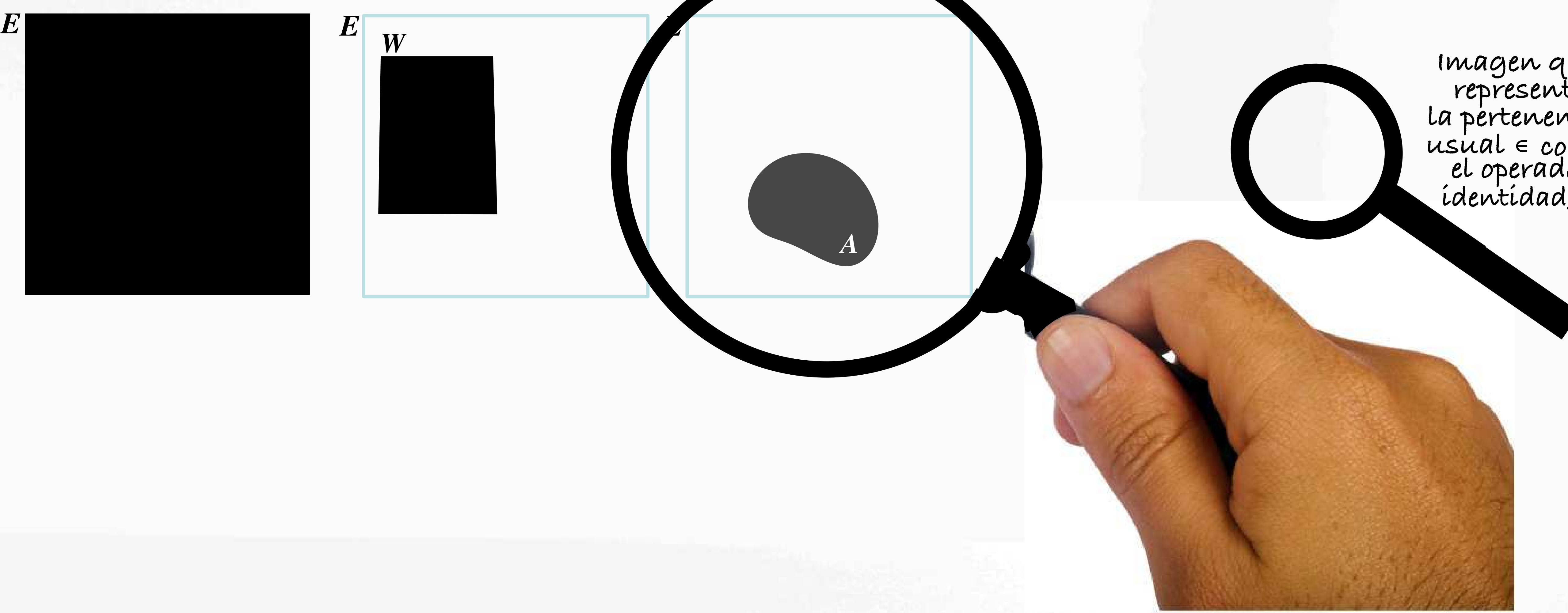
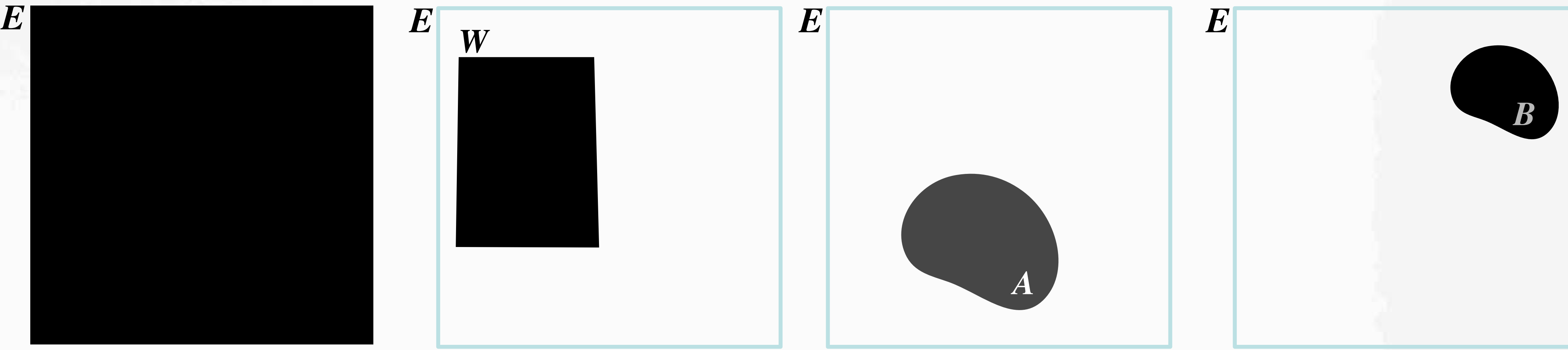


Imagen que representa la pertenencia usual ∈ como el operador identidad,...

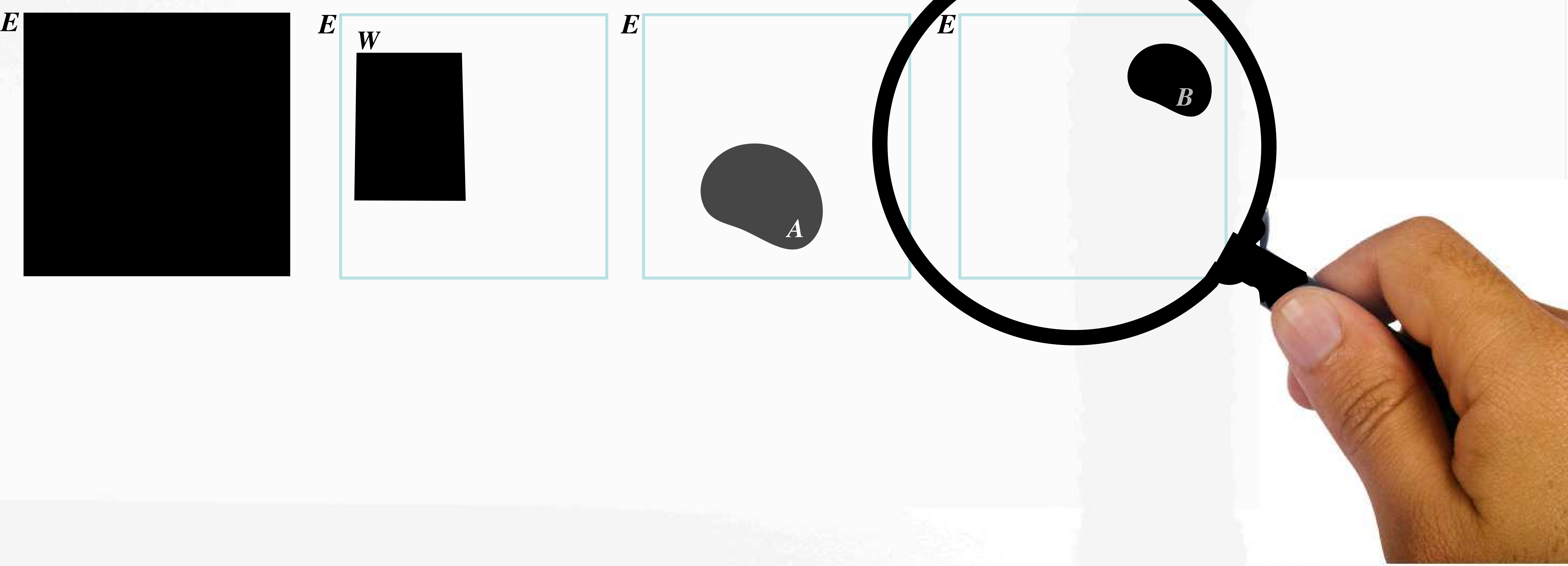
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X)=X \quad \forall X\in\mathcal{P}(E).$$



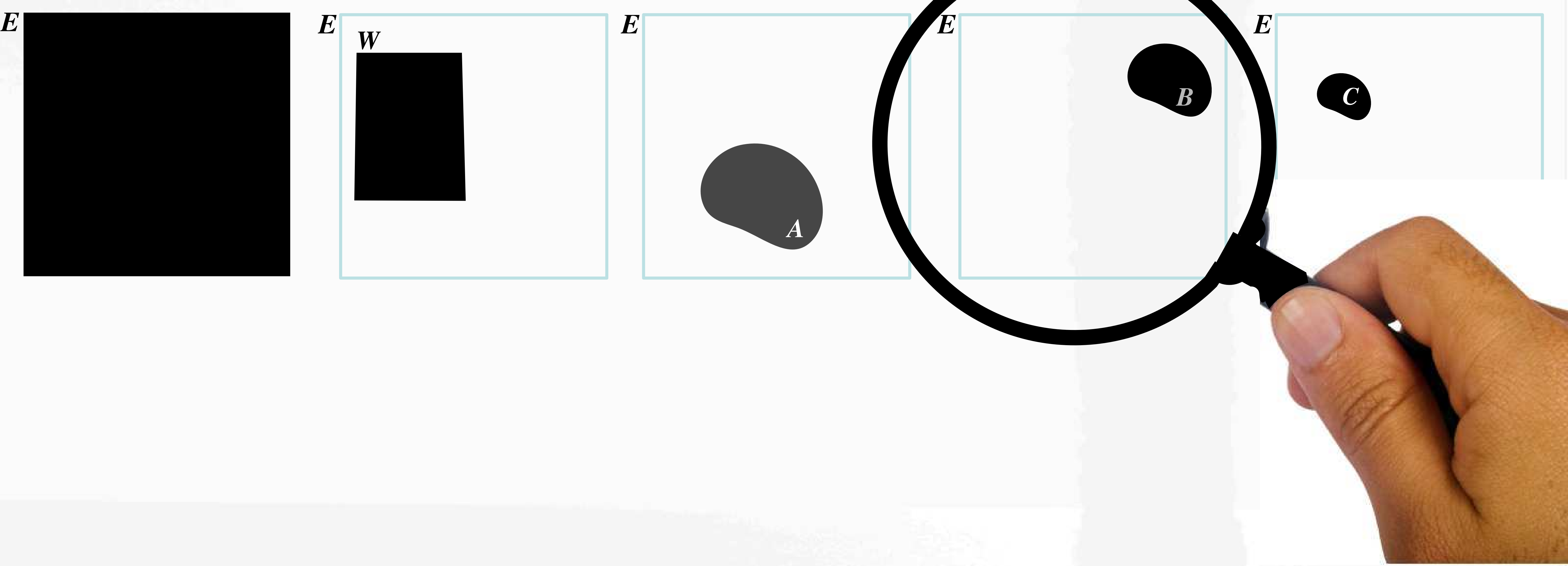
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



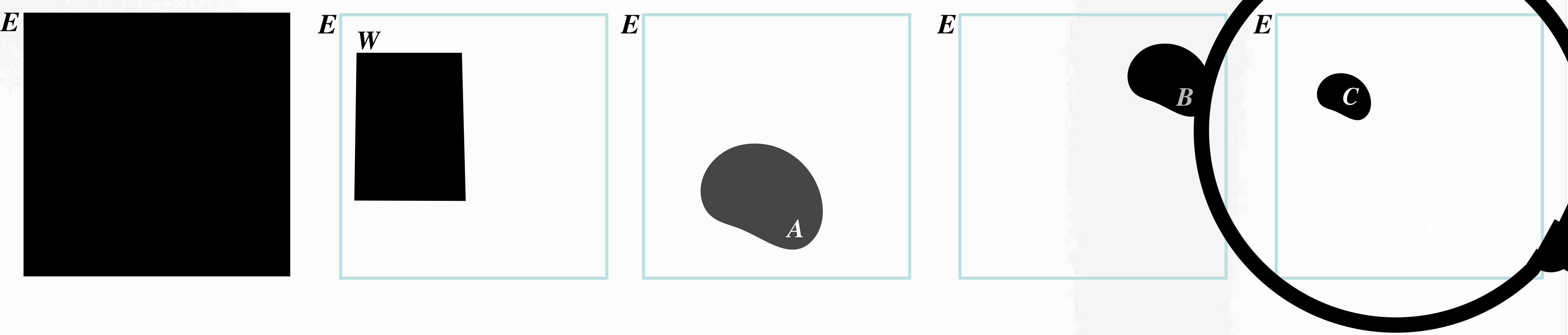
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



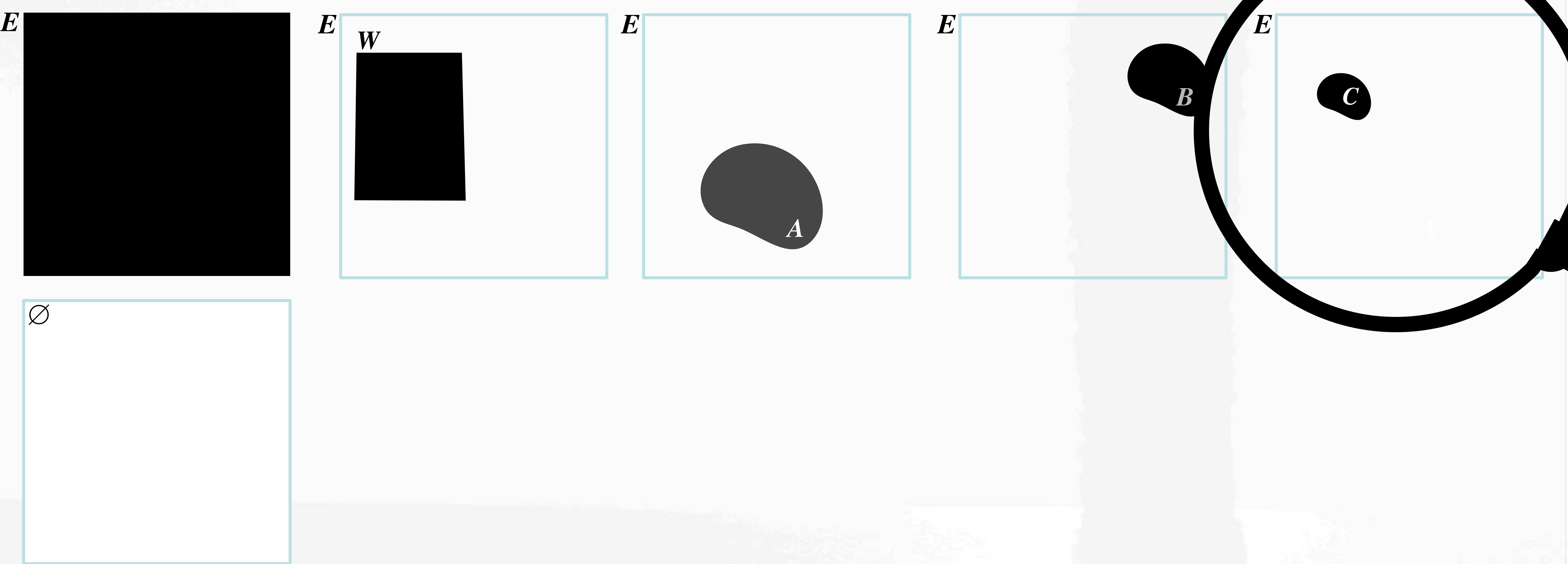
La pertenencia como “operador identidad” en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X)=X \quad \forall X\in\mathcal{P}(E).$$



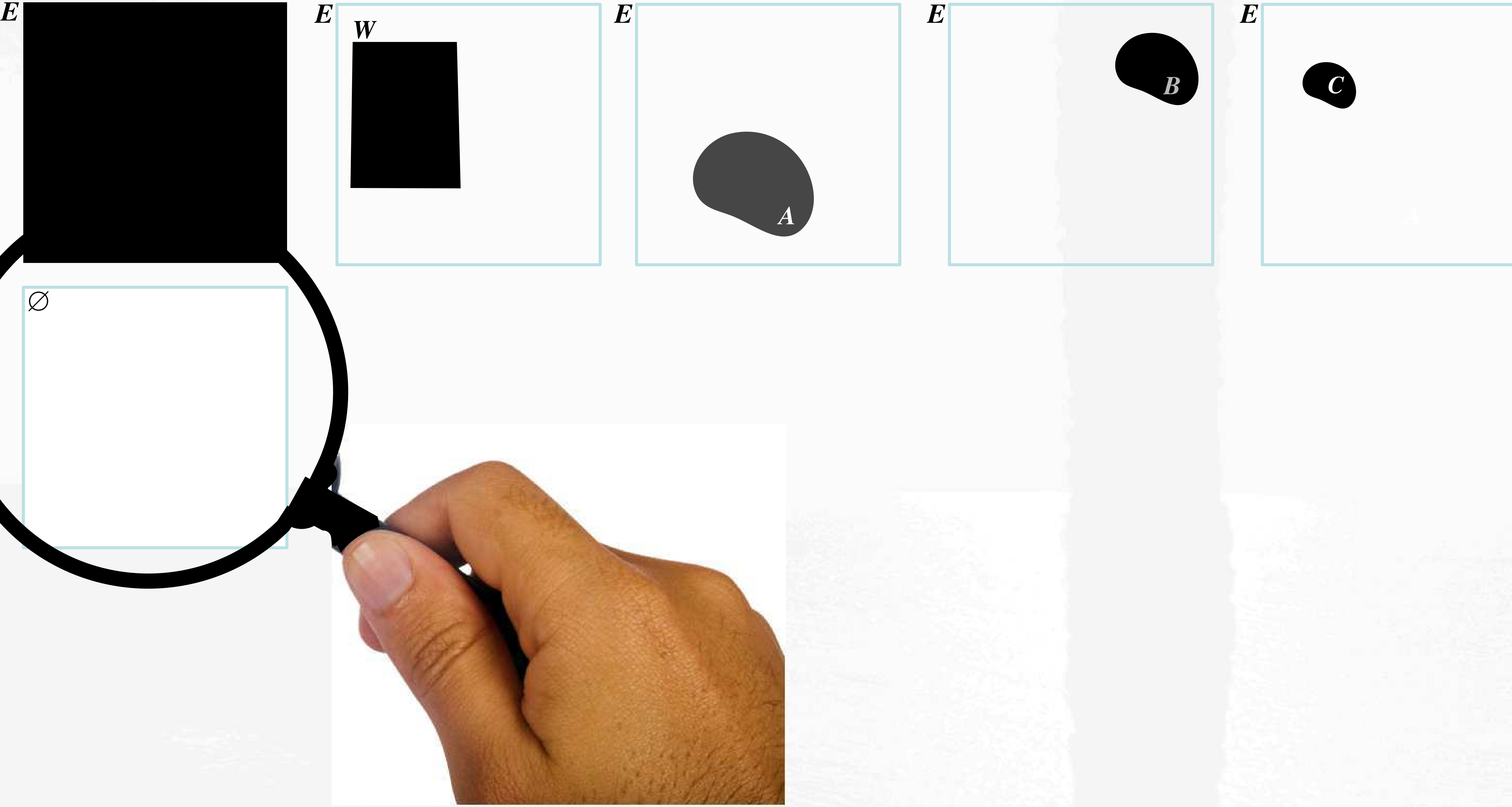
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



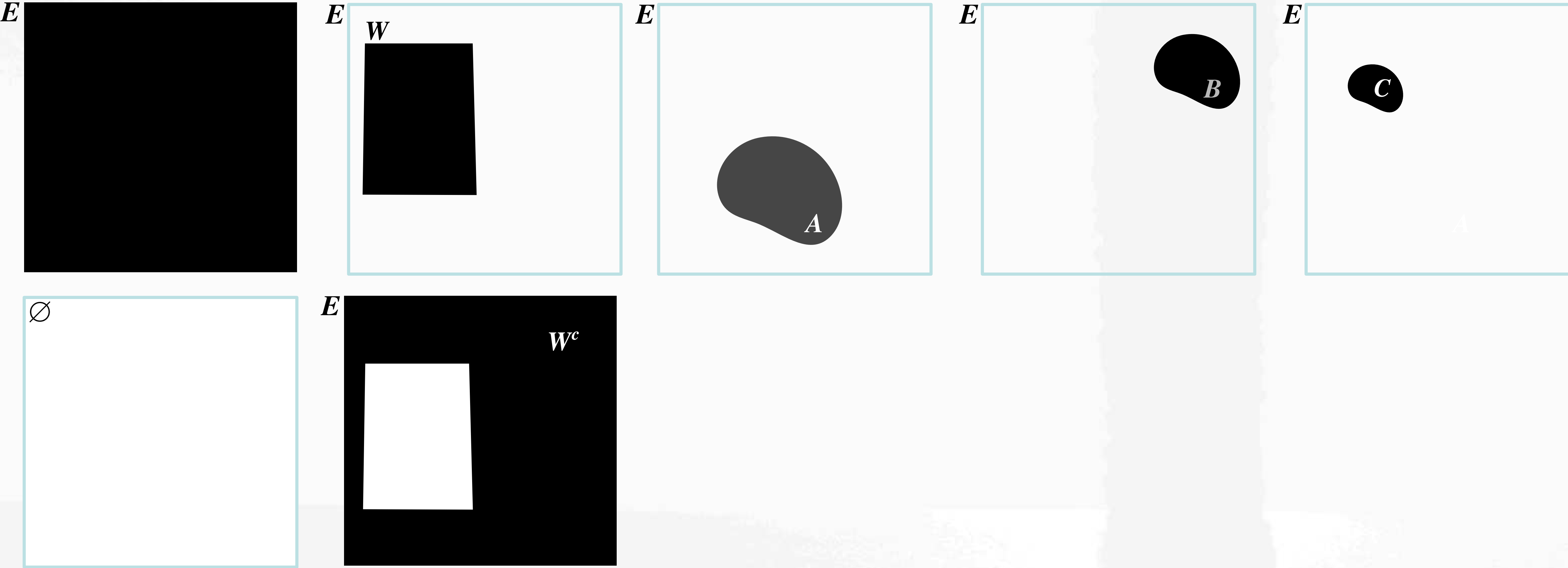
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



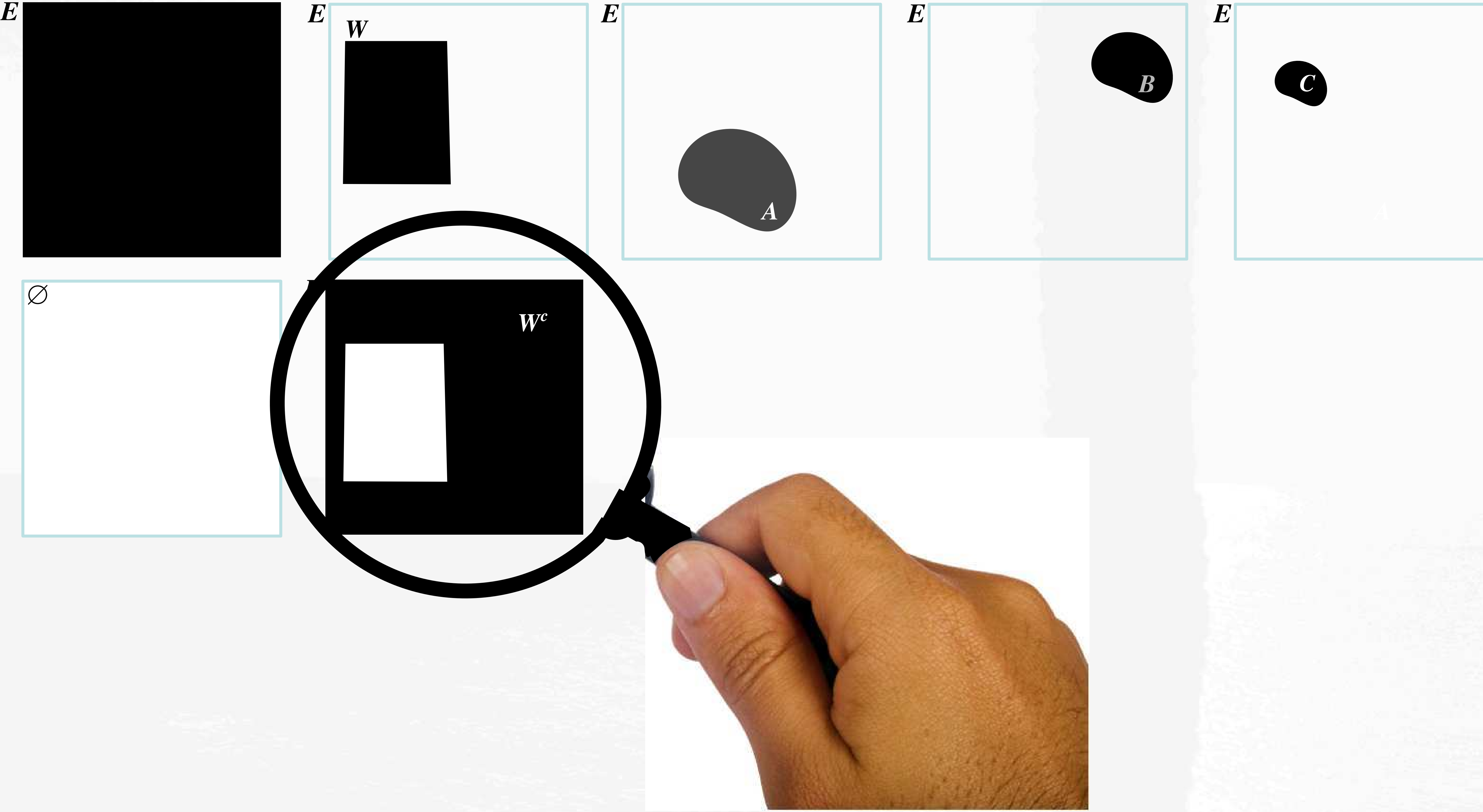
La pertenencia como “operador identidad” en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



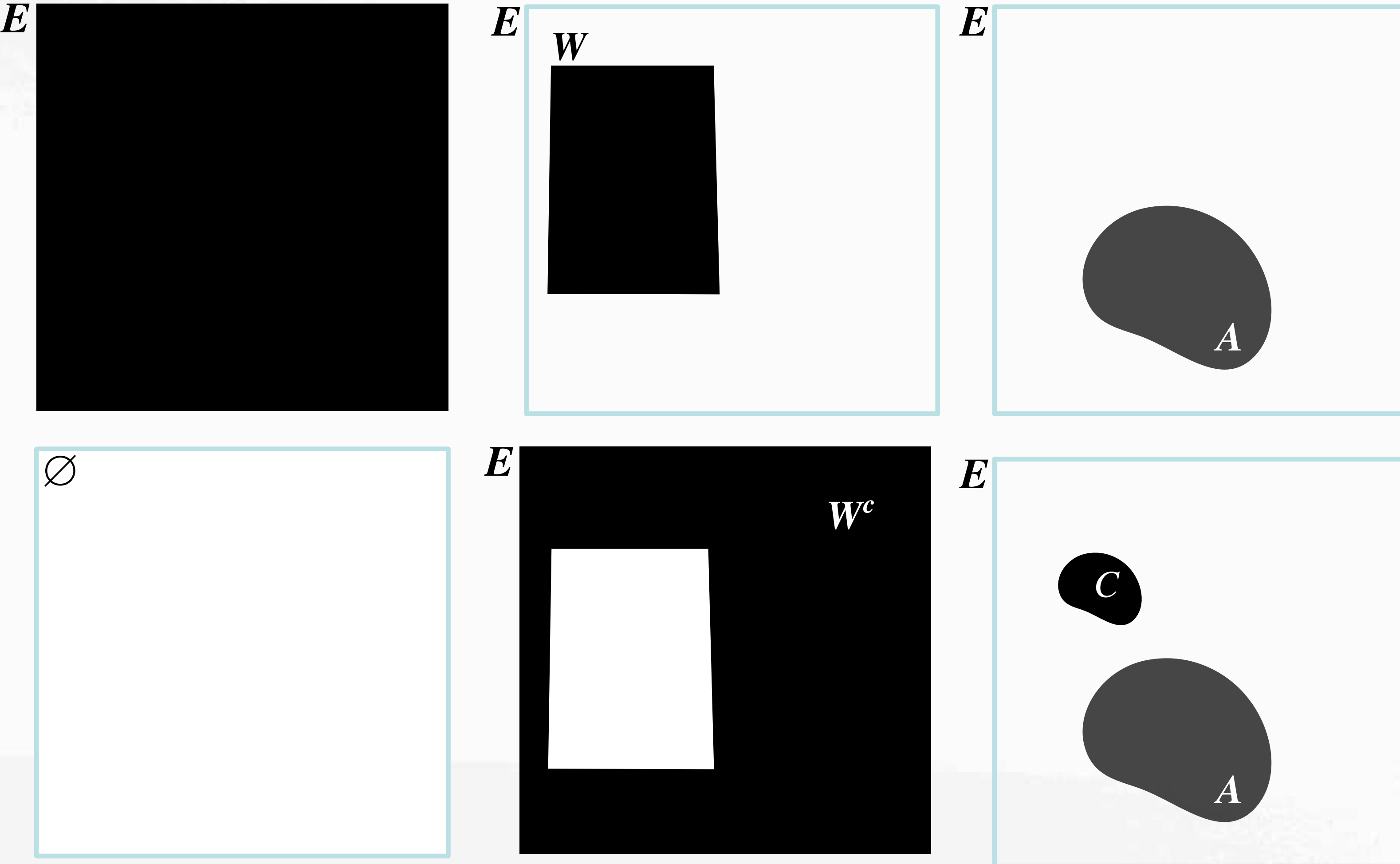
La pertenencia como “operador identidad” en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



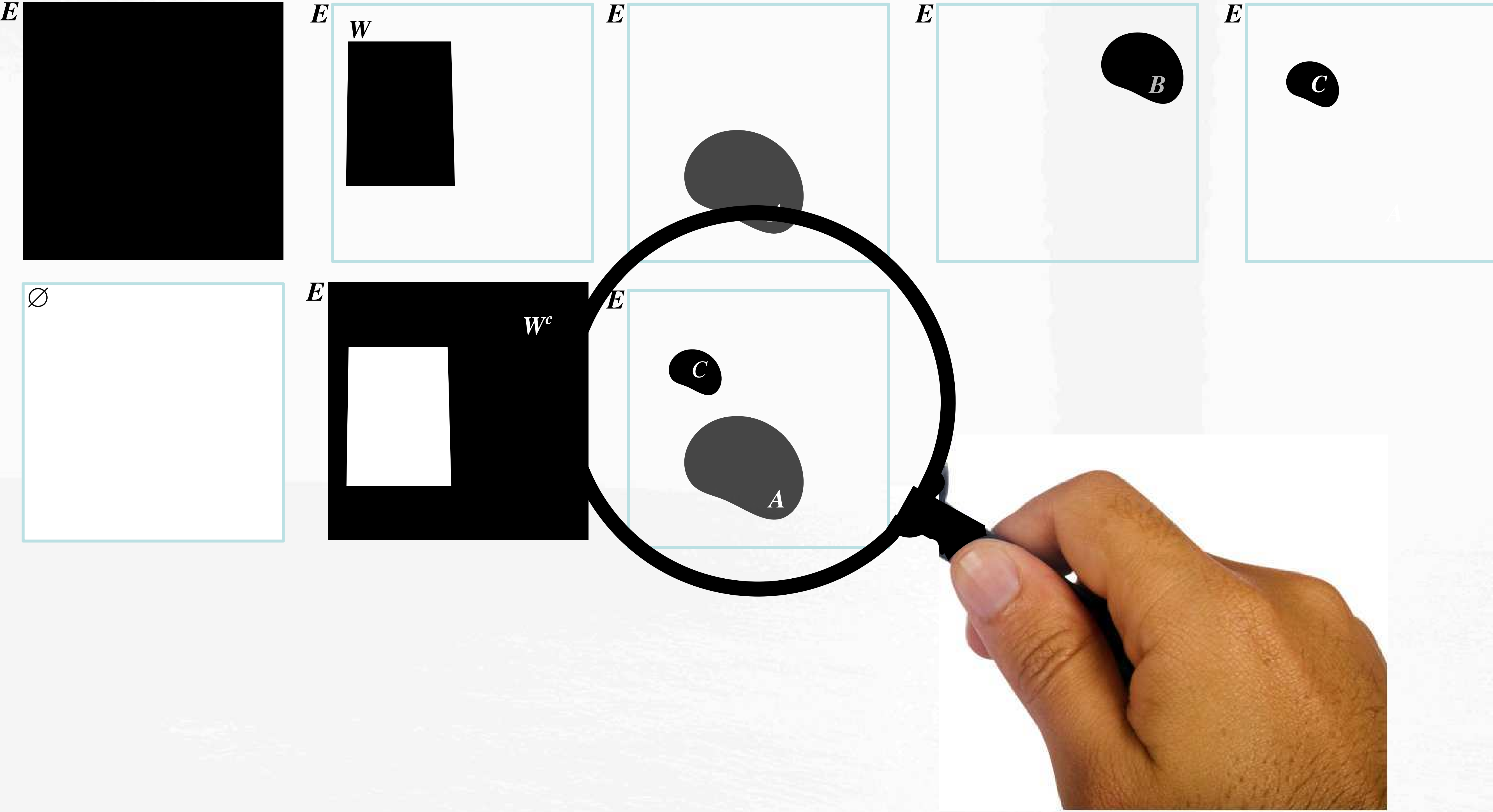
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in (X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



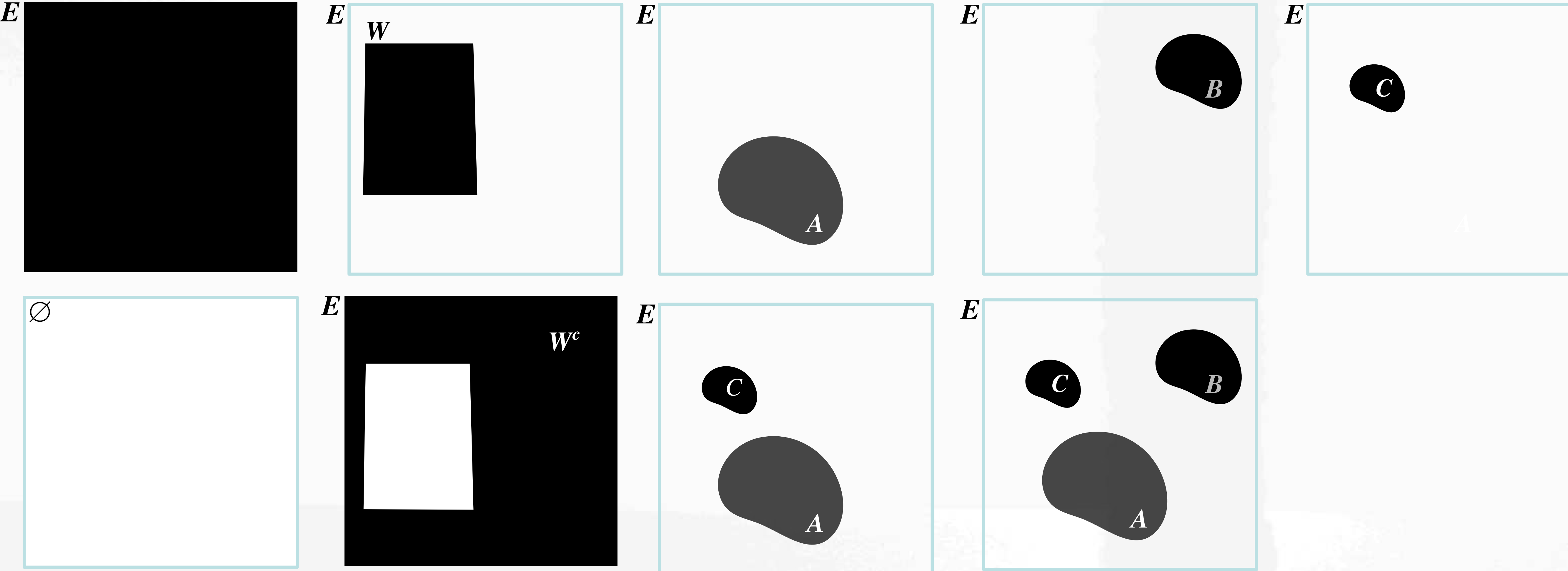
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



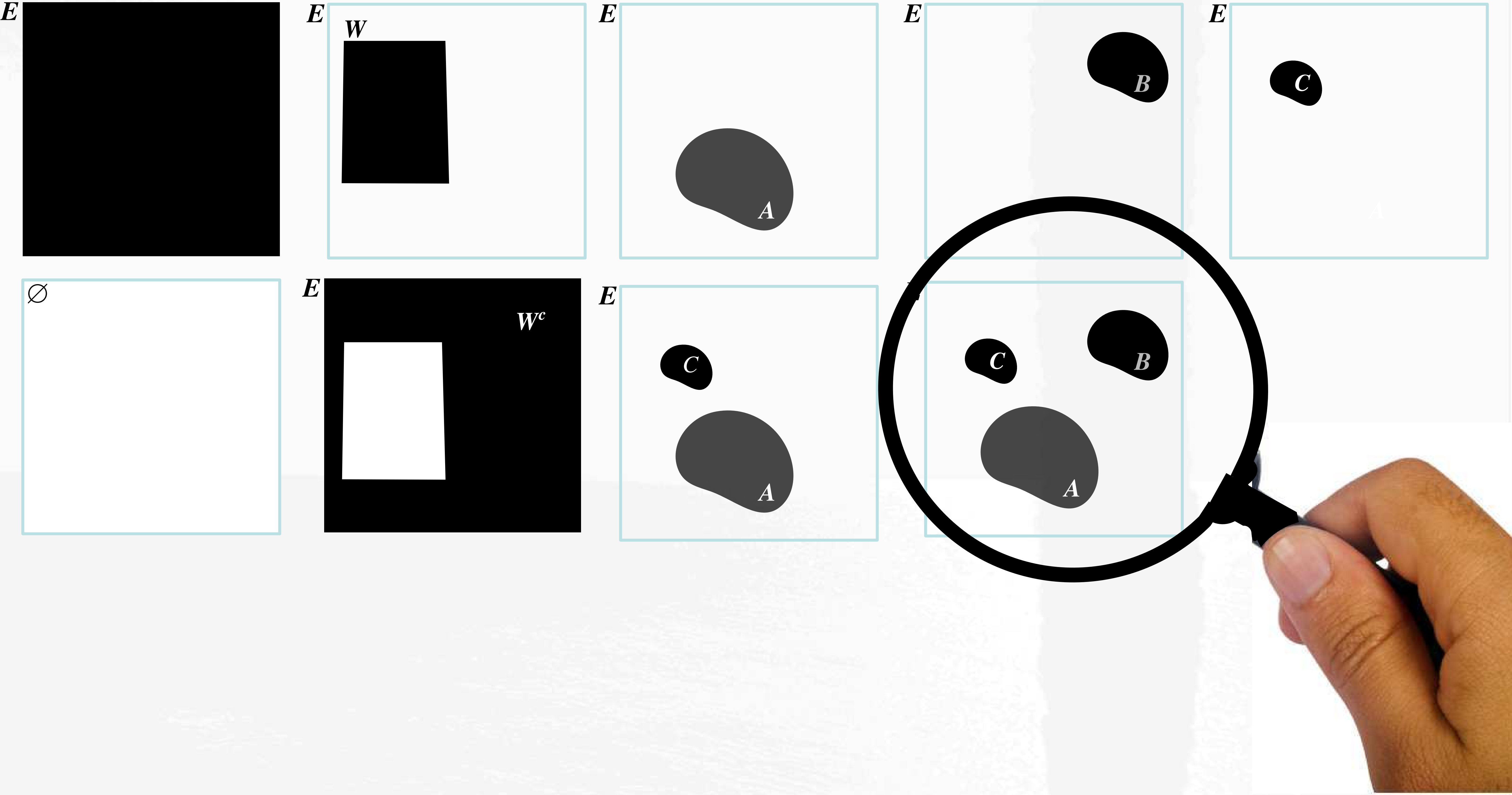
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



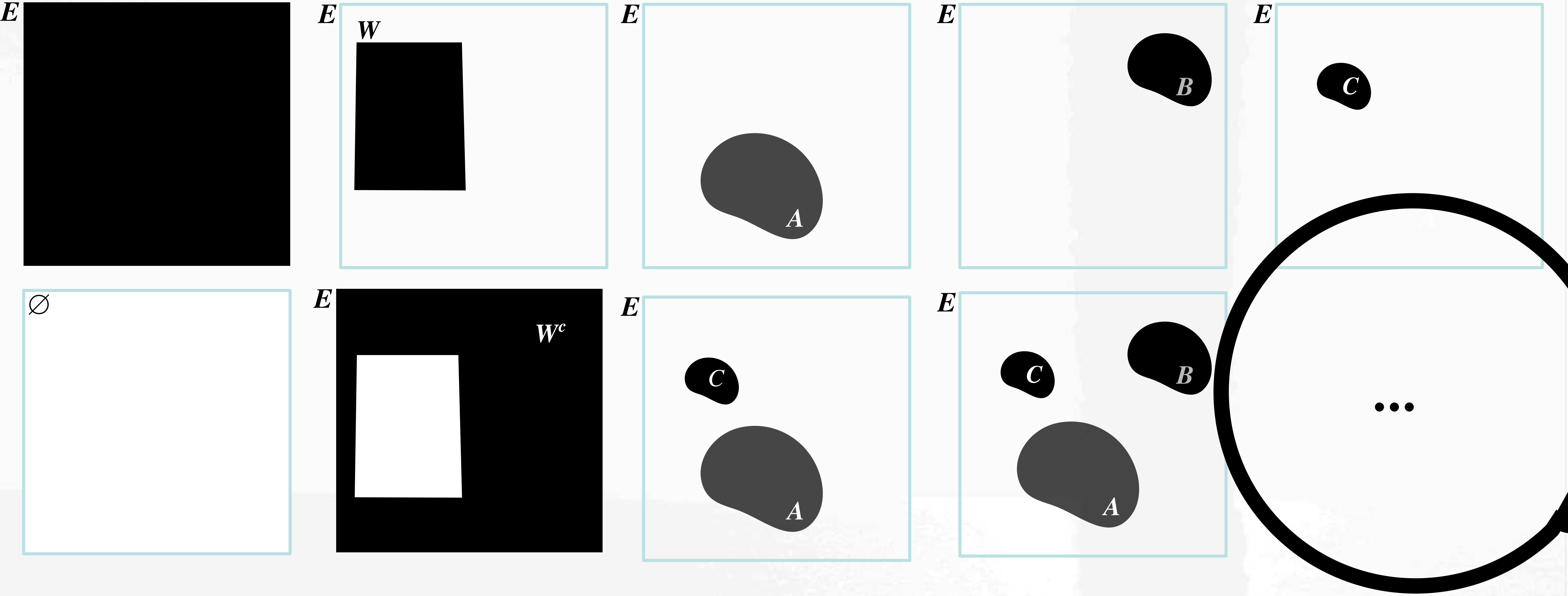
La pertenencia como "operador identidad" en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



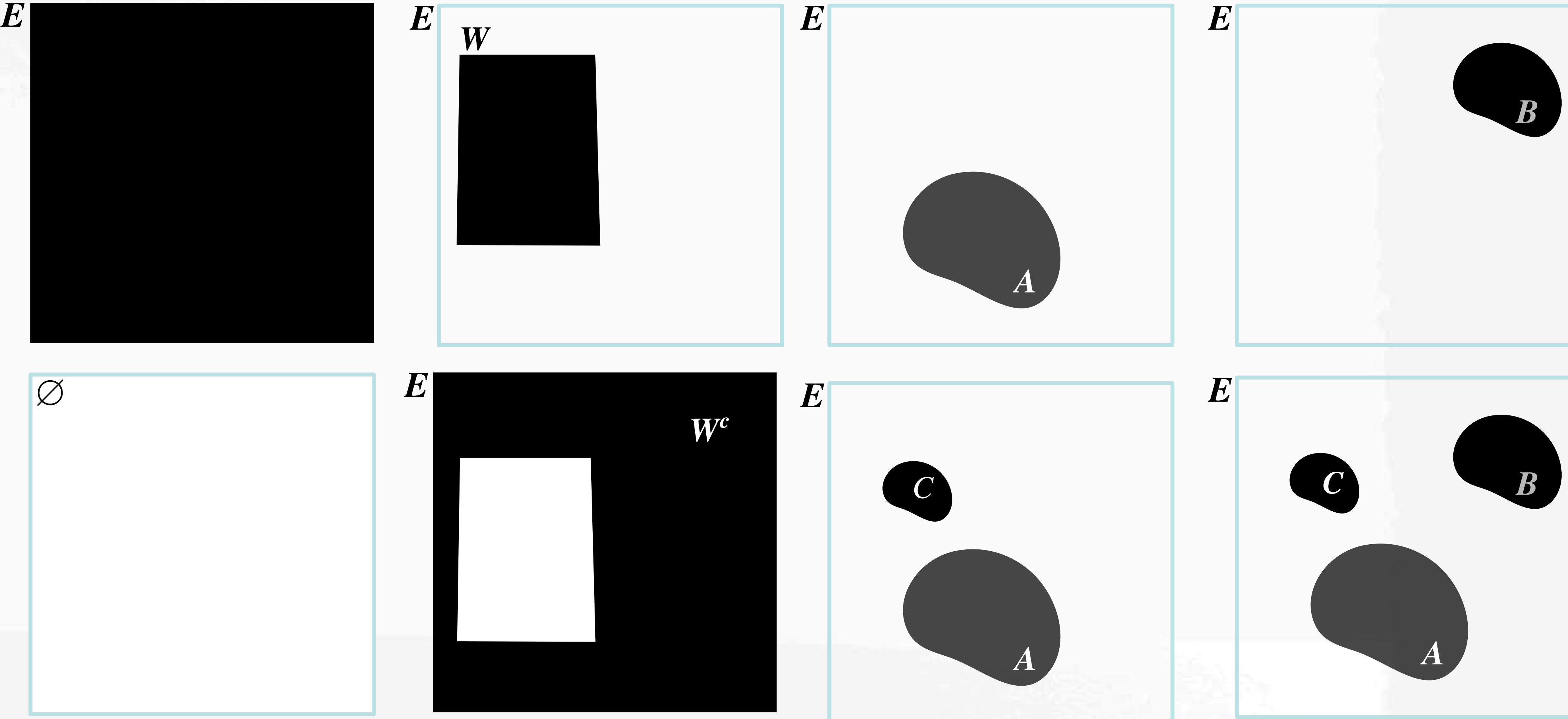
La pertenencia como “operador identidad” en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$



La pertenencia como “operador identidad” en $\mathcal{P}(E)$:

$$\in(X) = X \quad \forall X \in \mathcal{P}(E).$$

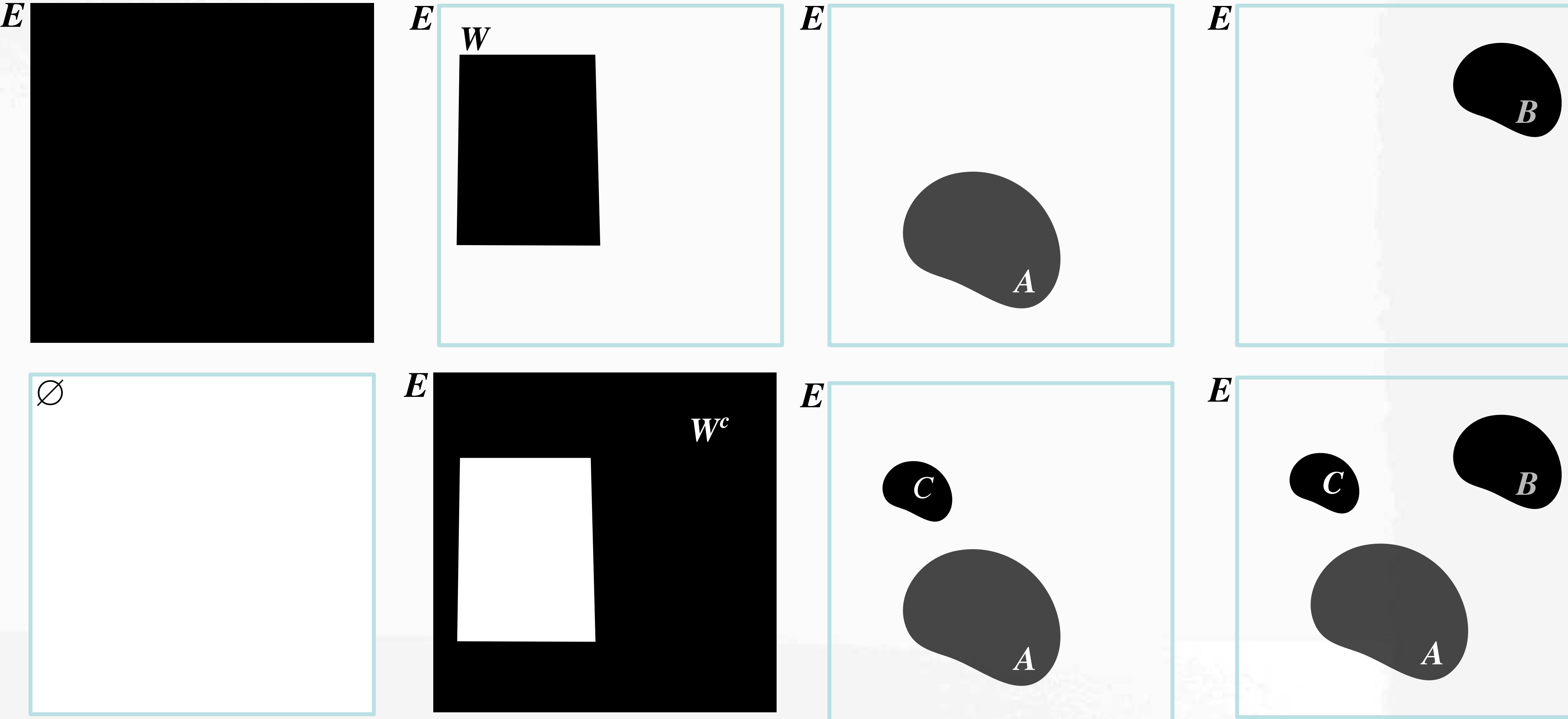


Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^W N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$

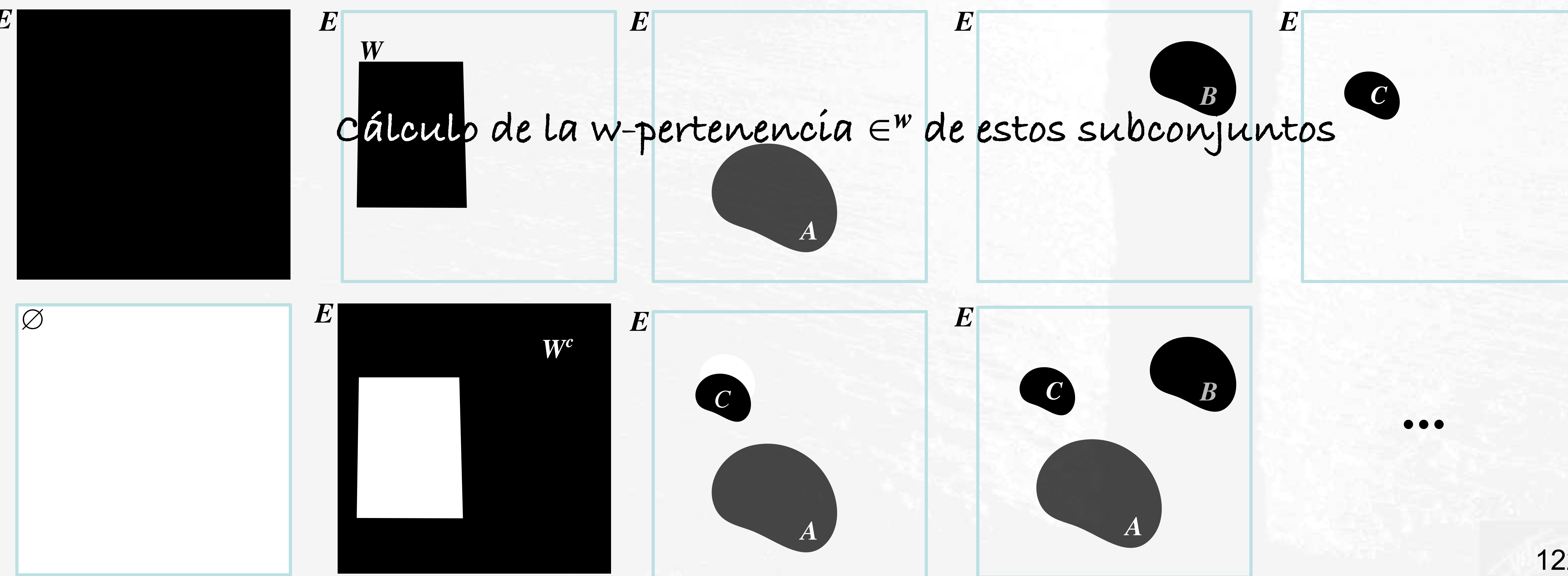


Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M)=M\Delta W$, es decir

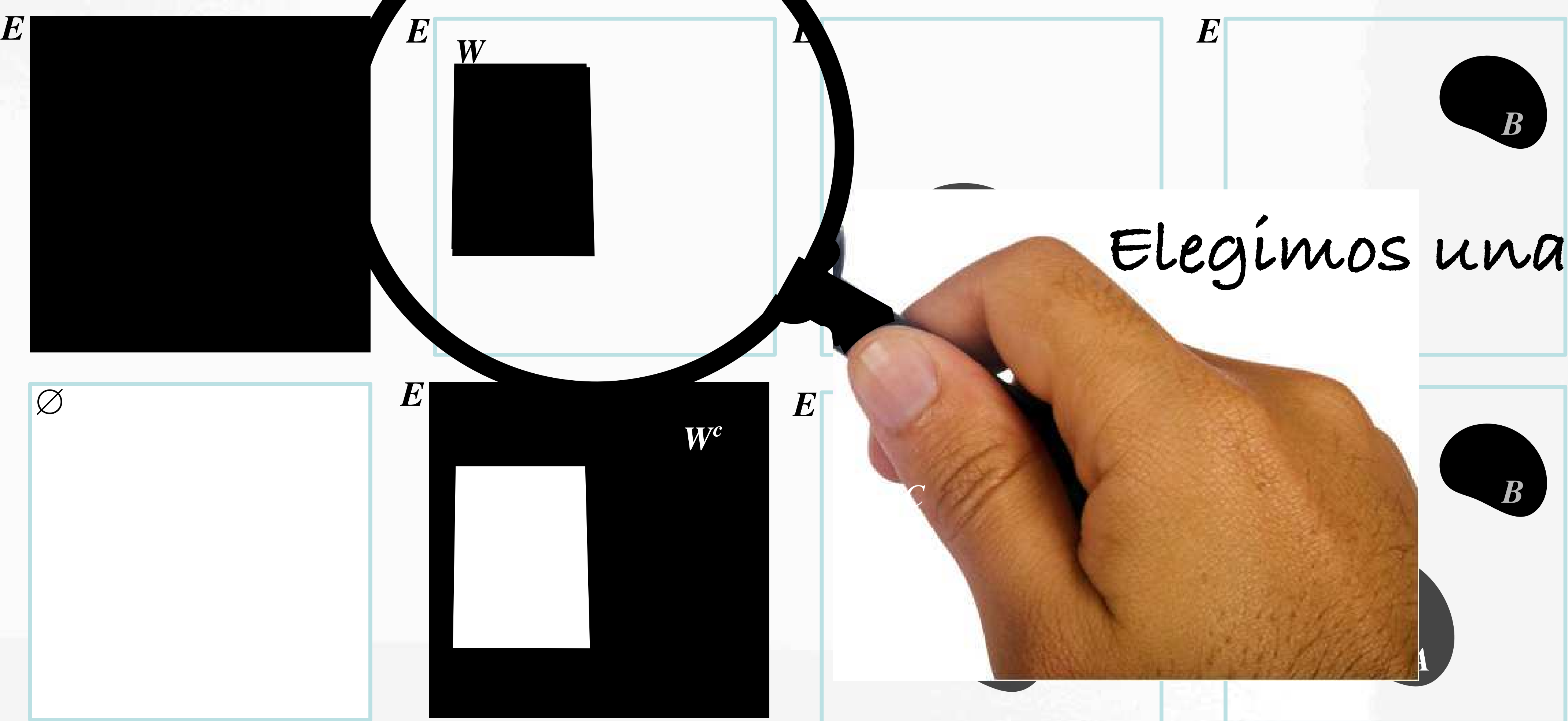
$(x\in^w M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

$(M\sqsubseteq^w N)\Leftrightarrow([\in^w(M)]\subseteq[\in^w(M)])$



Cálculo de la w-pertenencia $\in^w$ de estos subconjuntos

Elegimos una perspectiva…



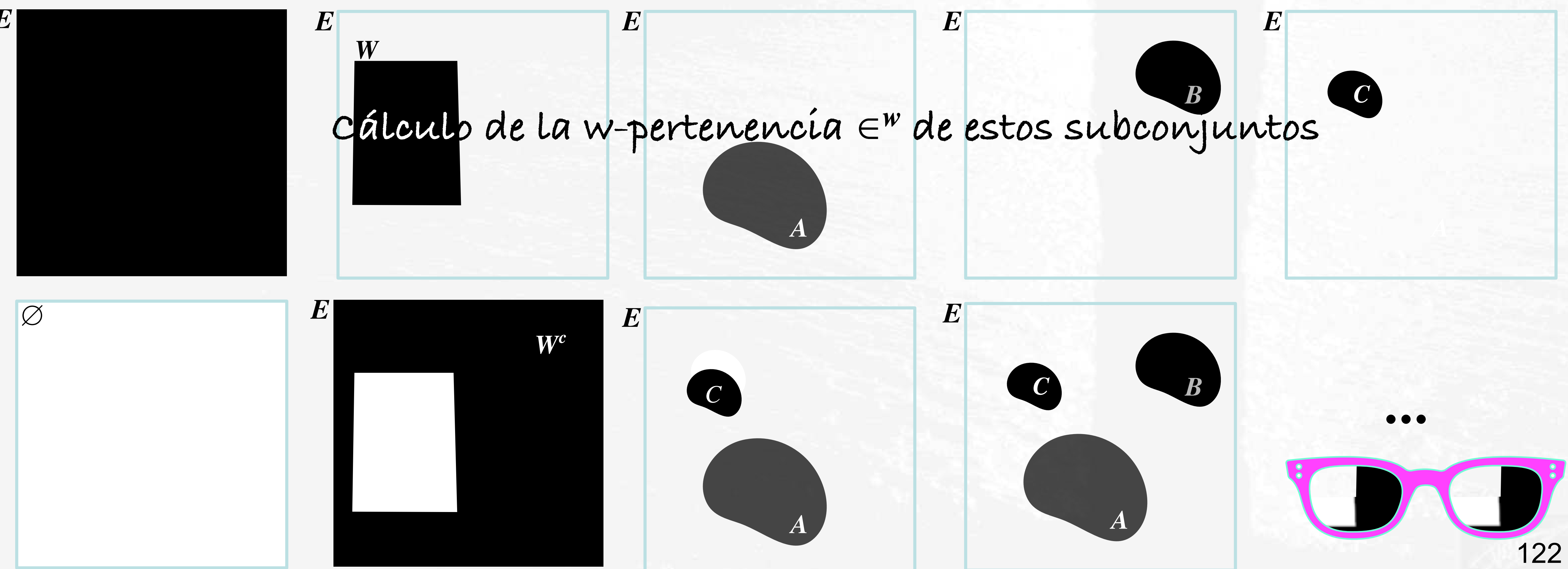
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

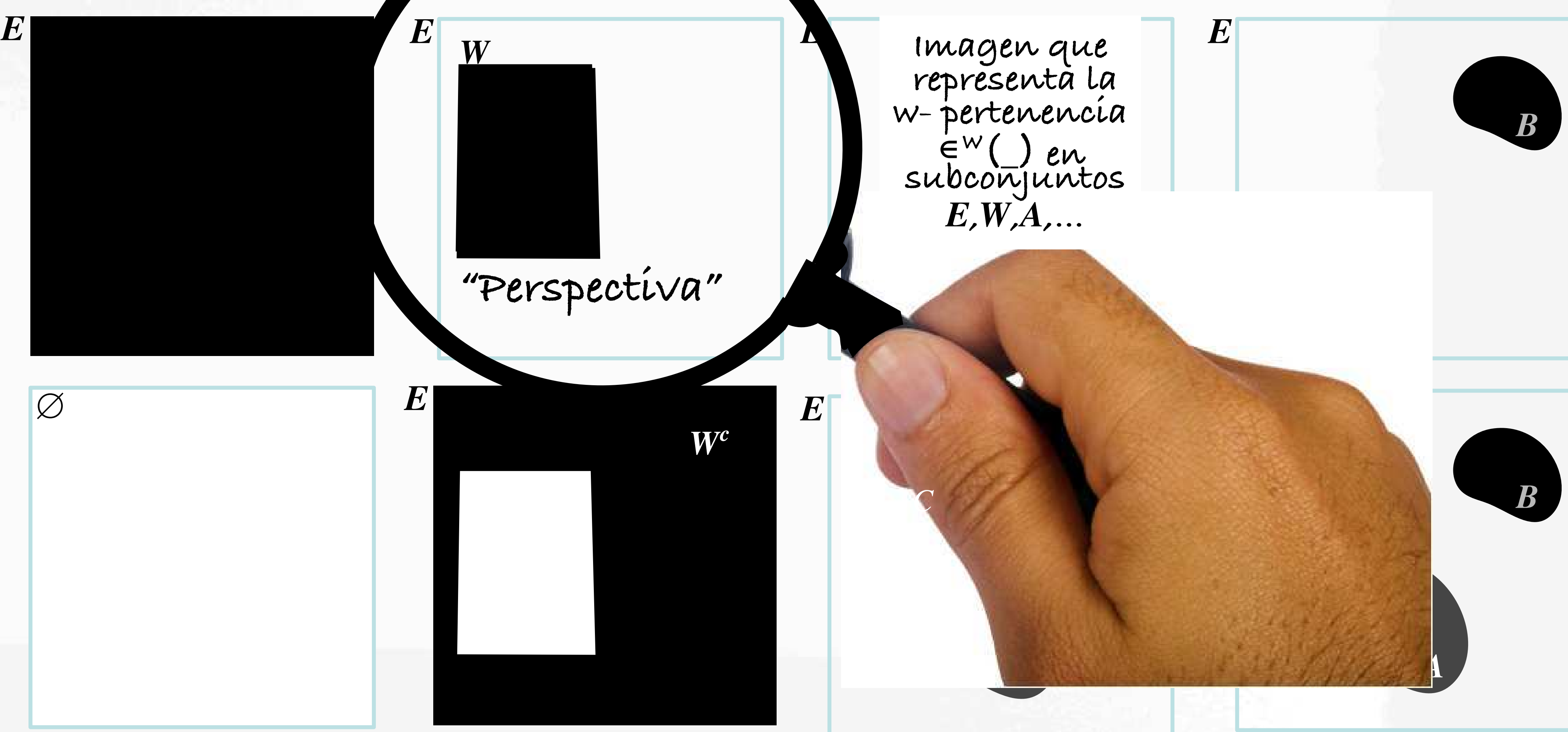
$\in^w(M) = M\Delta W$, es decir

$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M\Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$

Cálculo de la w-pertenencia $\in^w$ de estos subconjuntos



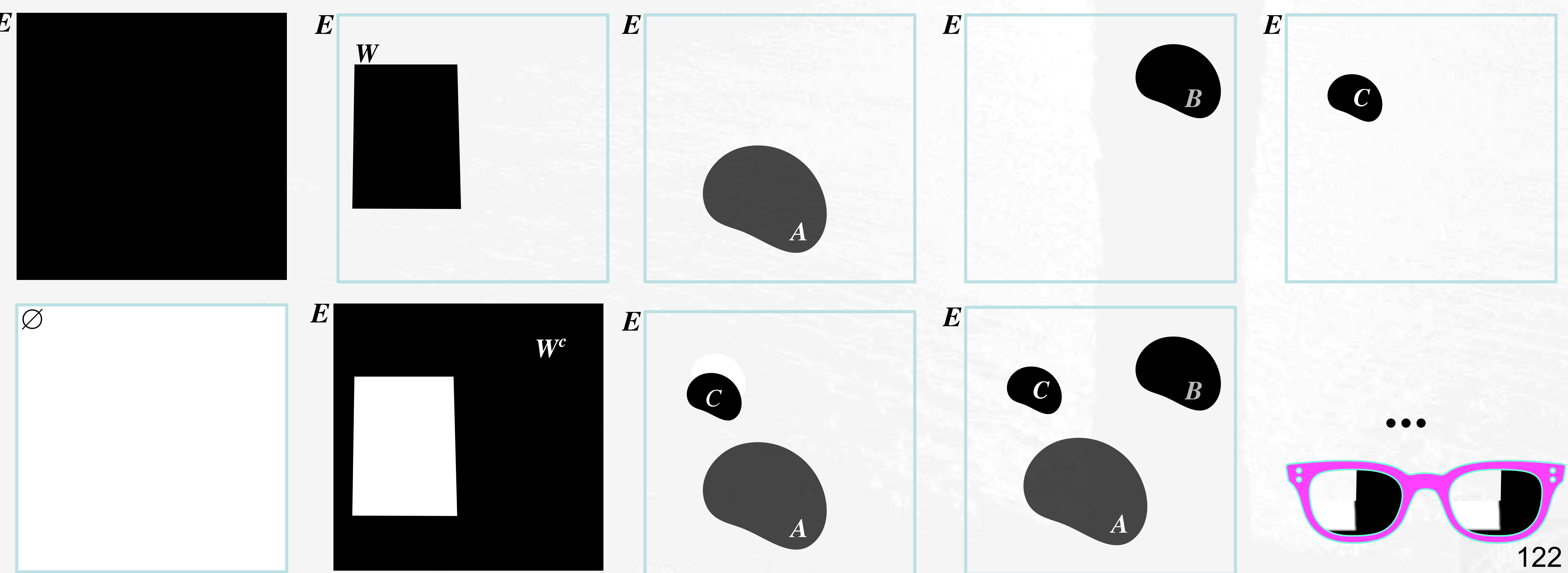


Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

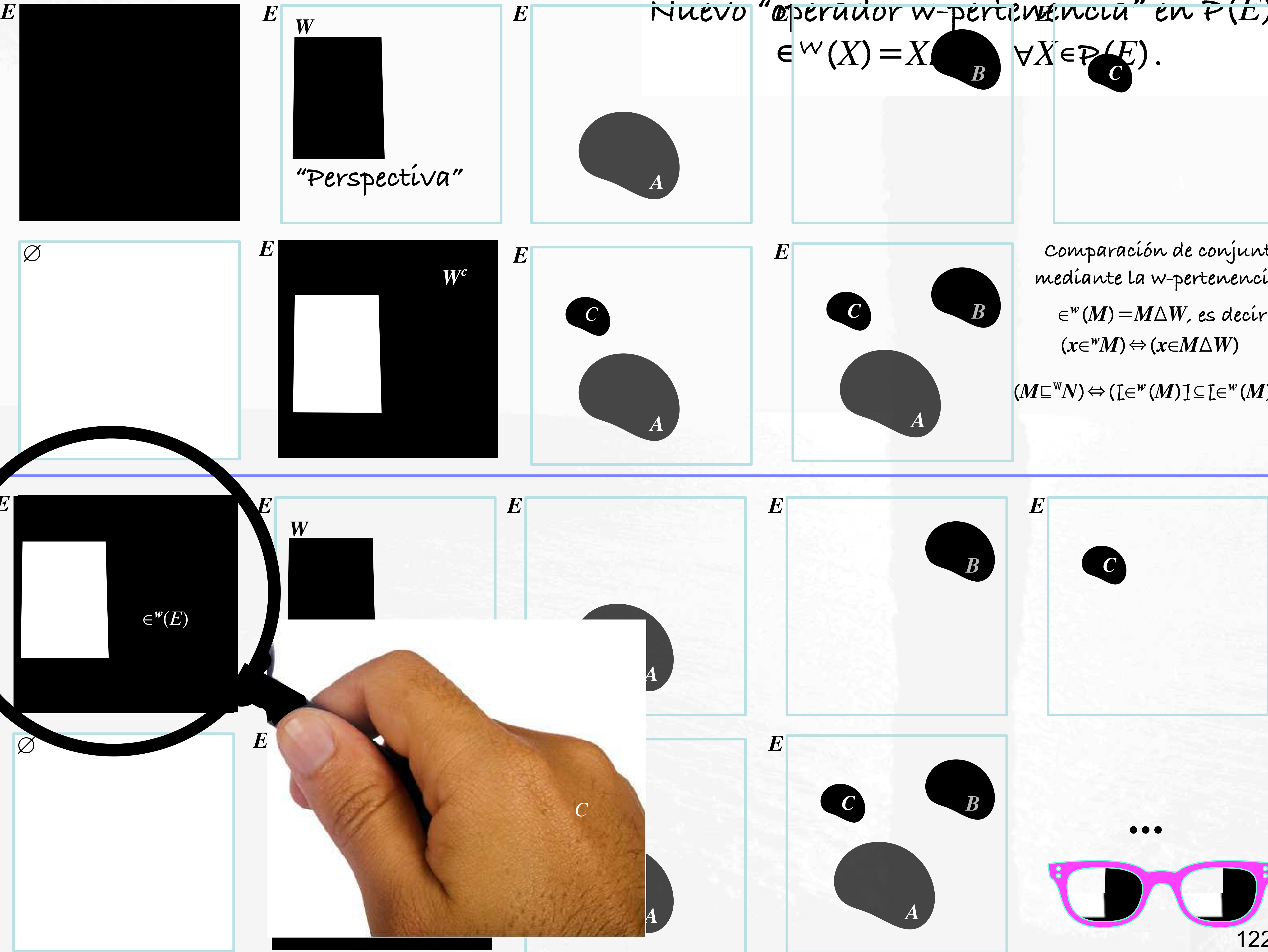
$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$



Nuevo "operador w-pertenencia" en $\mathcal{P}(E)$:

$\in^{W}(X)=X$ $\forall X\in\mathcal{P}(E)$.



Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^{w}(M)=M\Delta W$, es decir

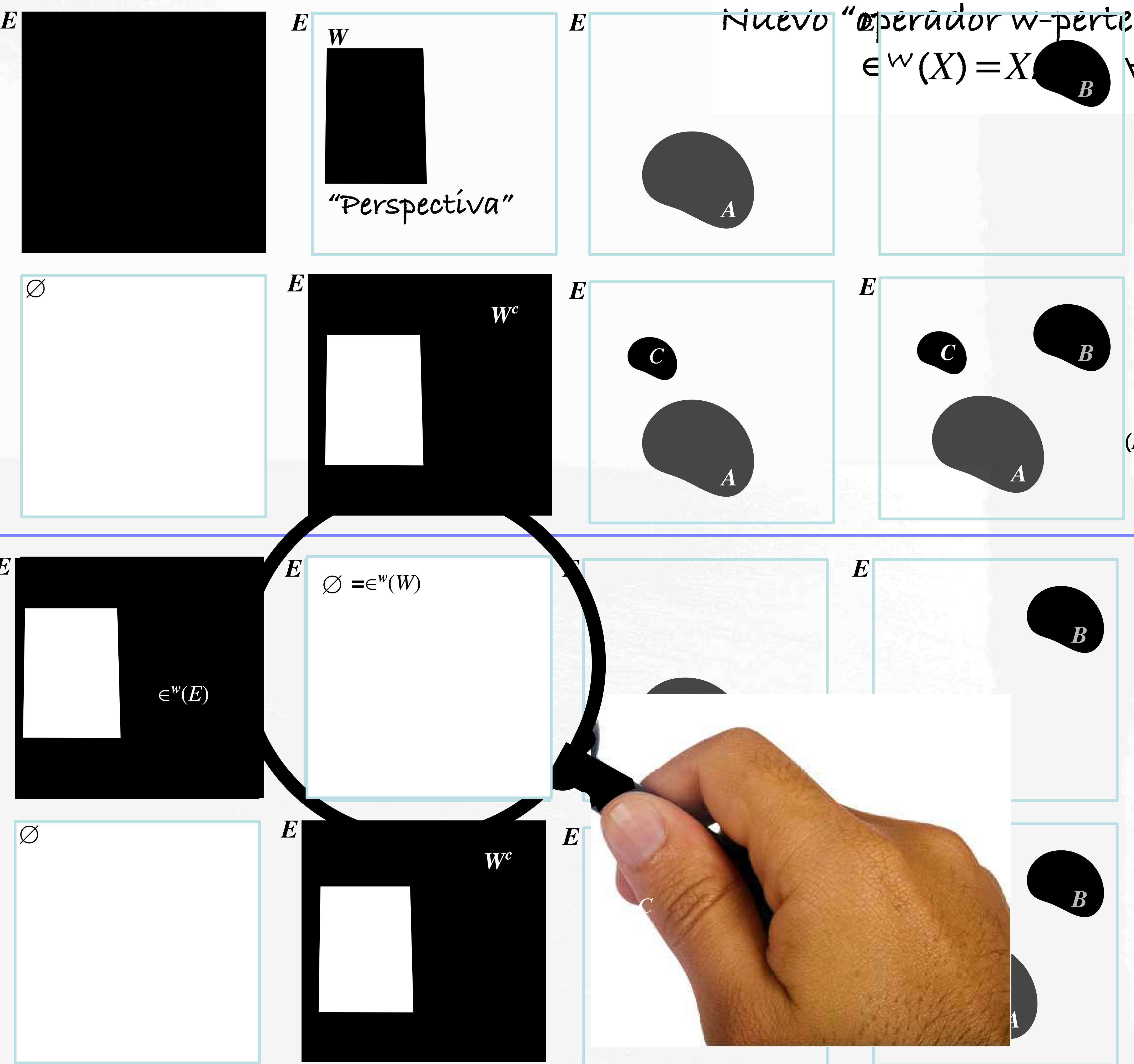
$(x\in^{w}M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

$(M\sqsubseteq^{W}N)\Leftrightarrow([\in^{w}(M)]\subseteq[\in^{w}(M)])$

...

Nuevo “operador w-pertenencia” en $\mathcal{P}(E)$:

$\in^{w}(X)=X \quad \forall X\in\mathcal{P}(E)$.



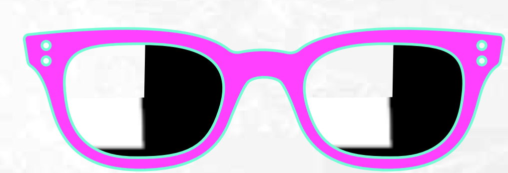
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

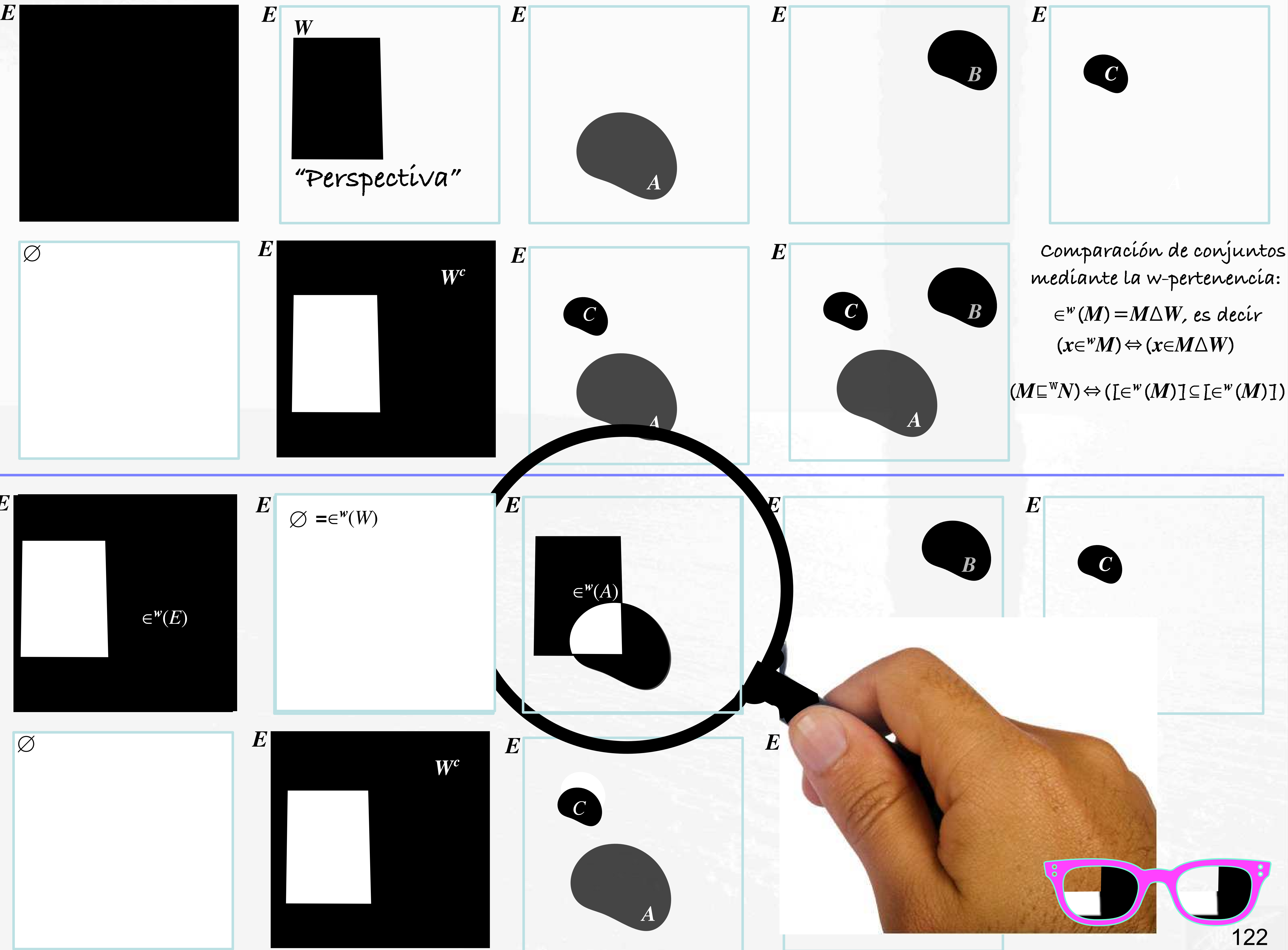
$\in^w(M)=M\Delta W$, es decir

$(x\in^w M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

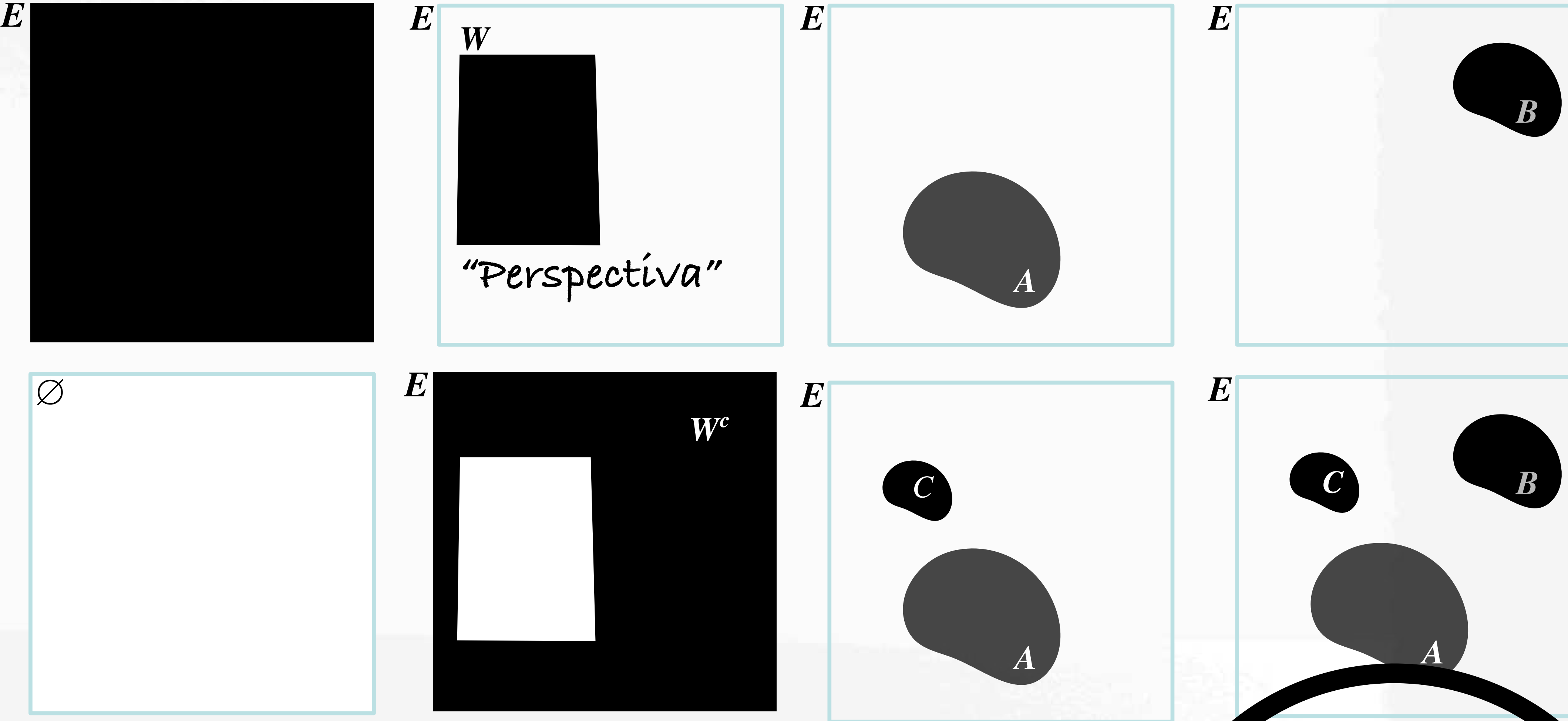
$(M\sqsubseteq^w N)\Leftrightarrow([\in^w(M)]\subseteq[\in^w(M)])$

…





E
W
"Perspectiva"
A
B
C
∅
W^c
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:
$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir
$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$
$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$
$\in^w(E)$
$\varnothing = \in^w(W)$
$\in^w(A)$

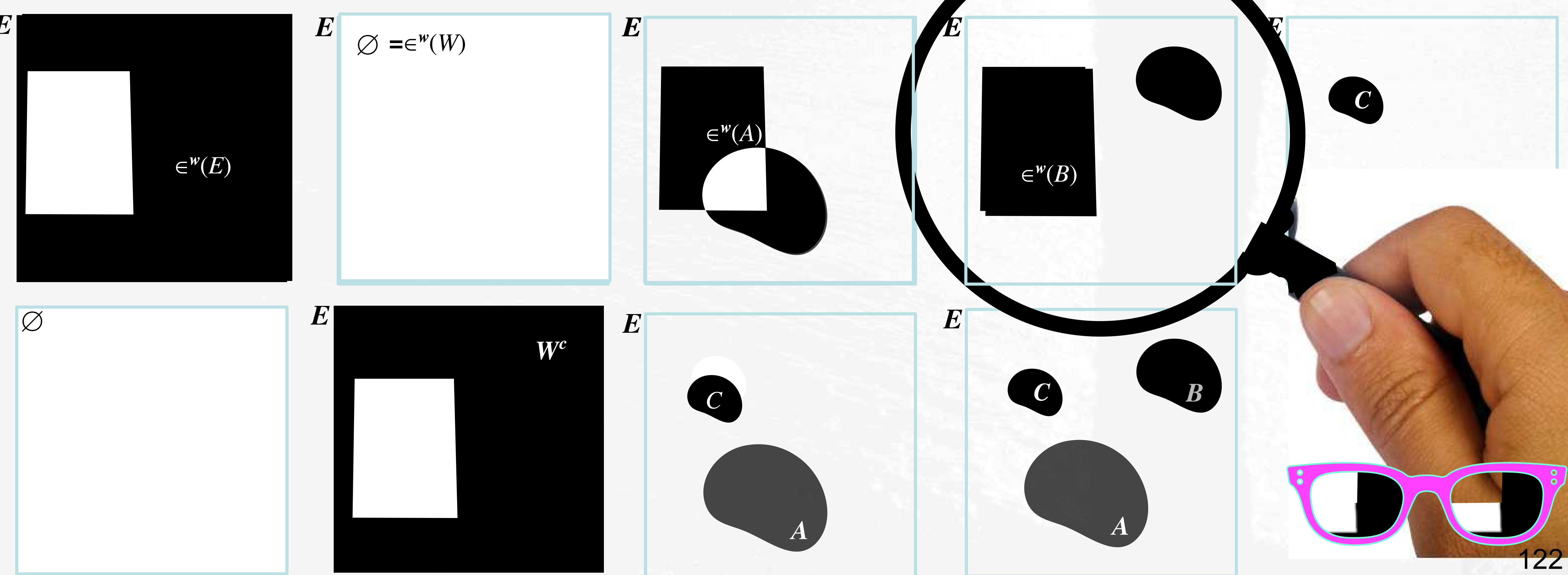


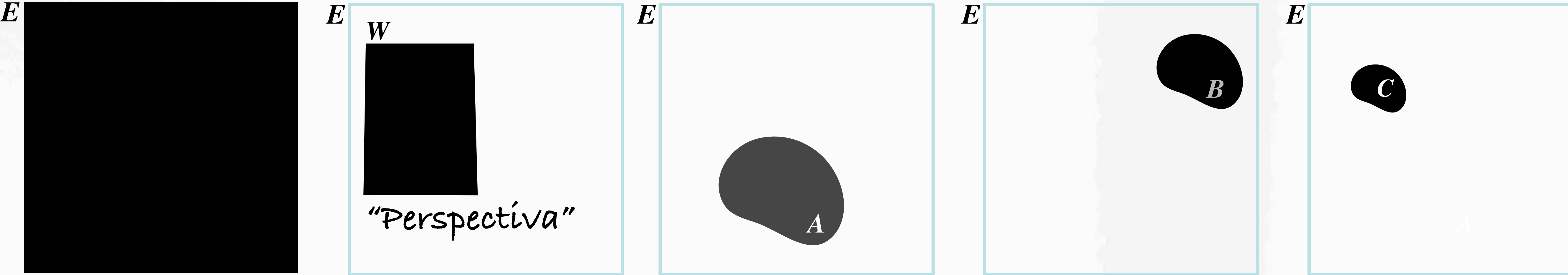
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

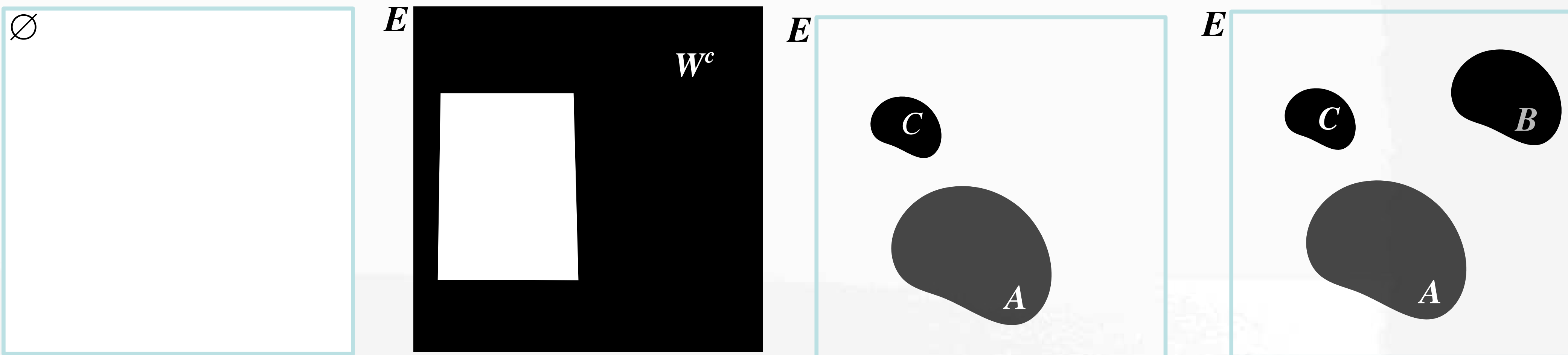
$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$





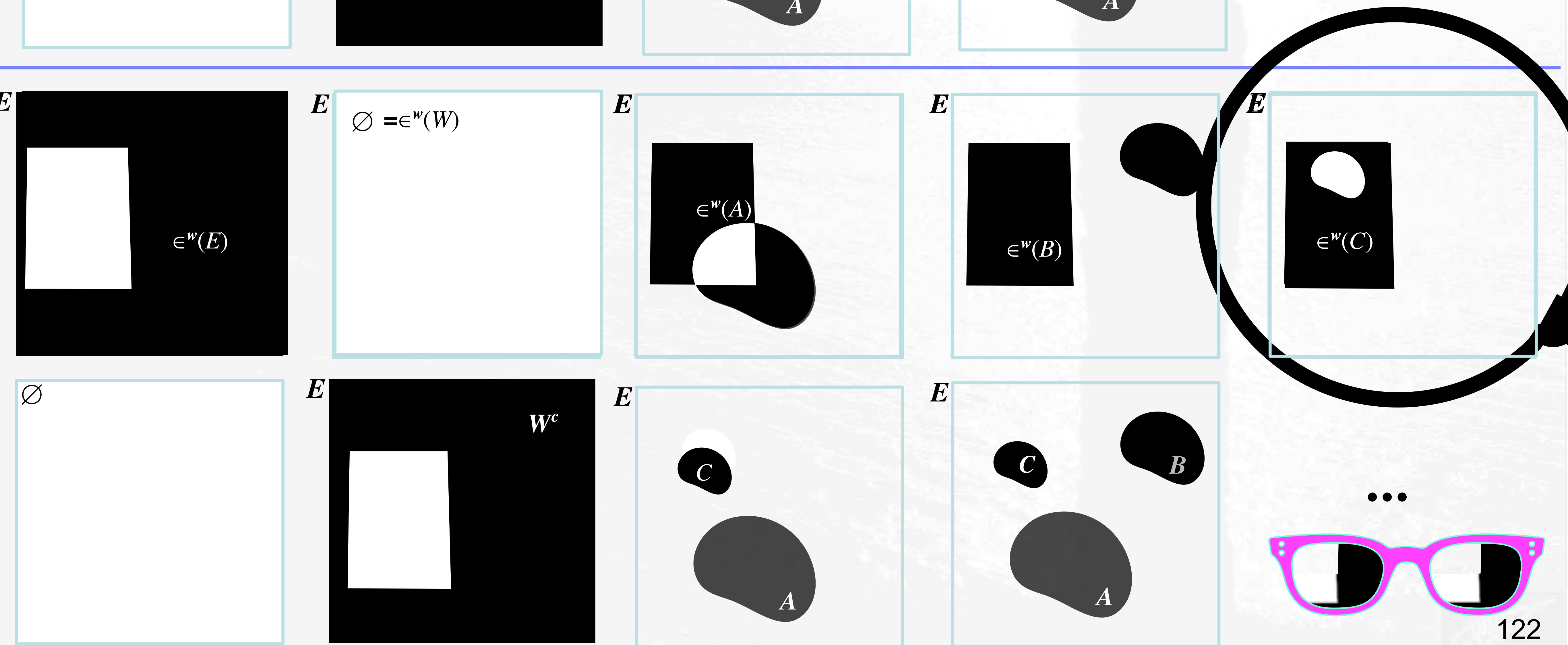


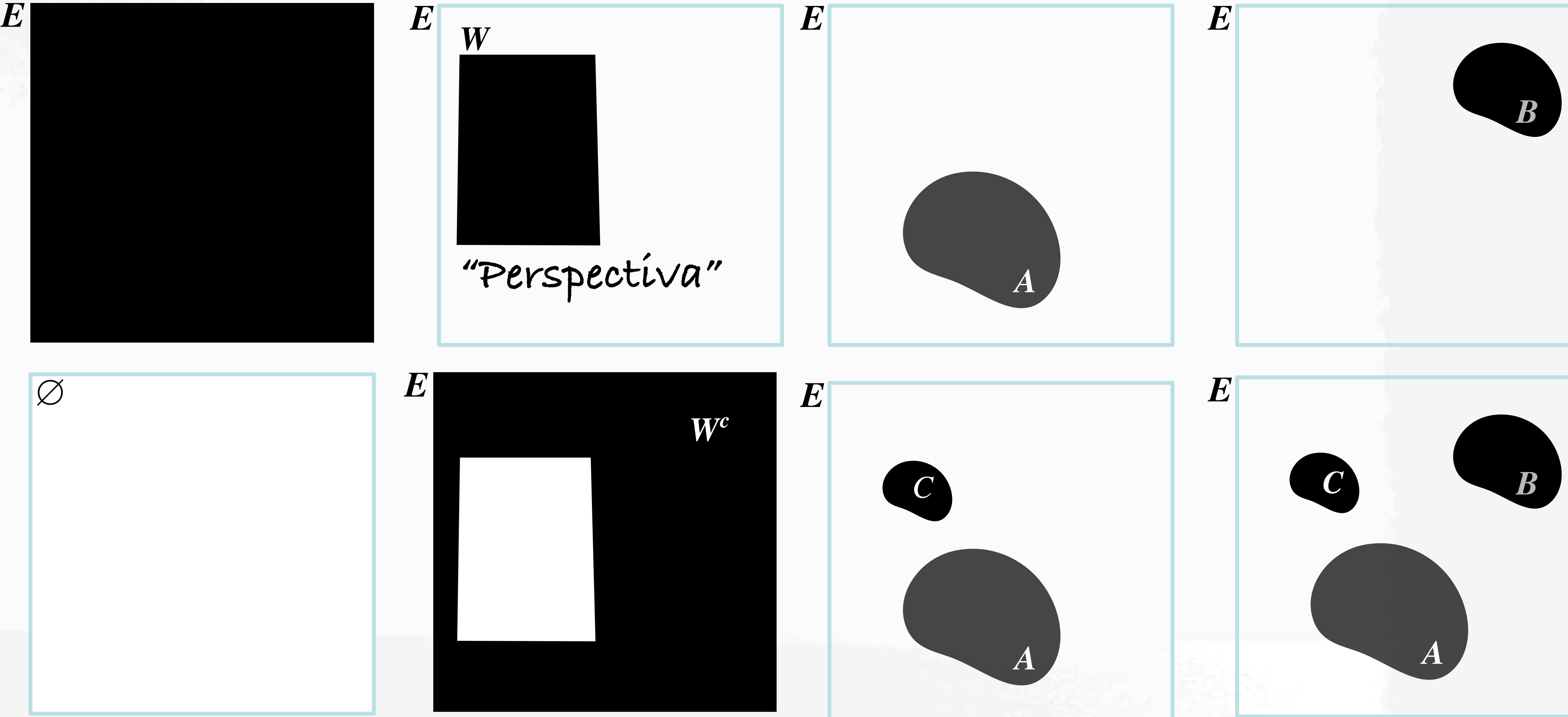
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$



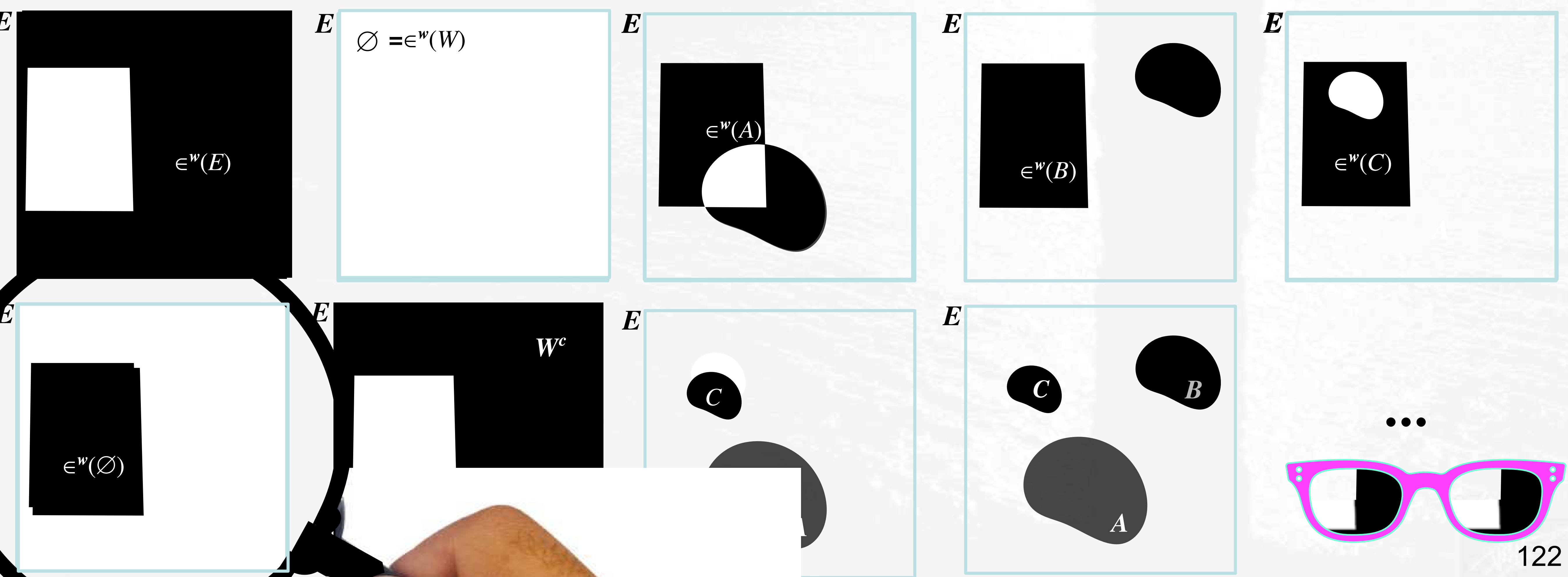


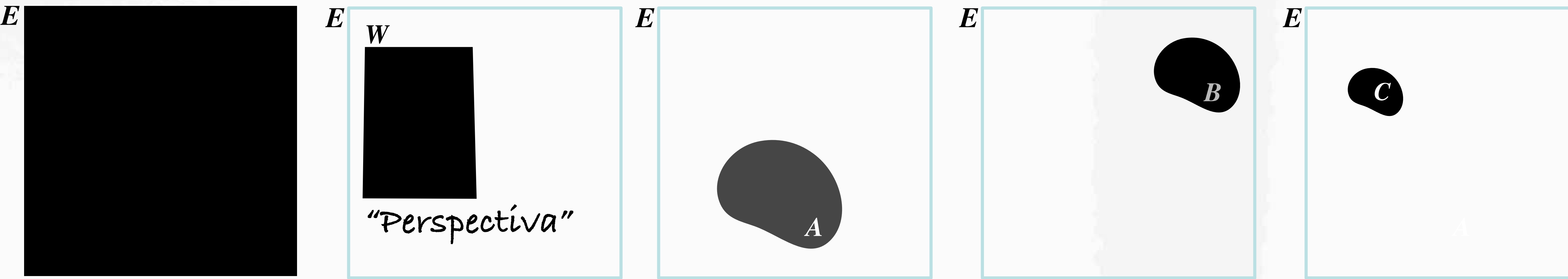
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

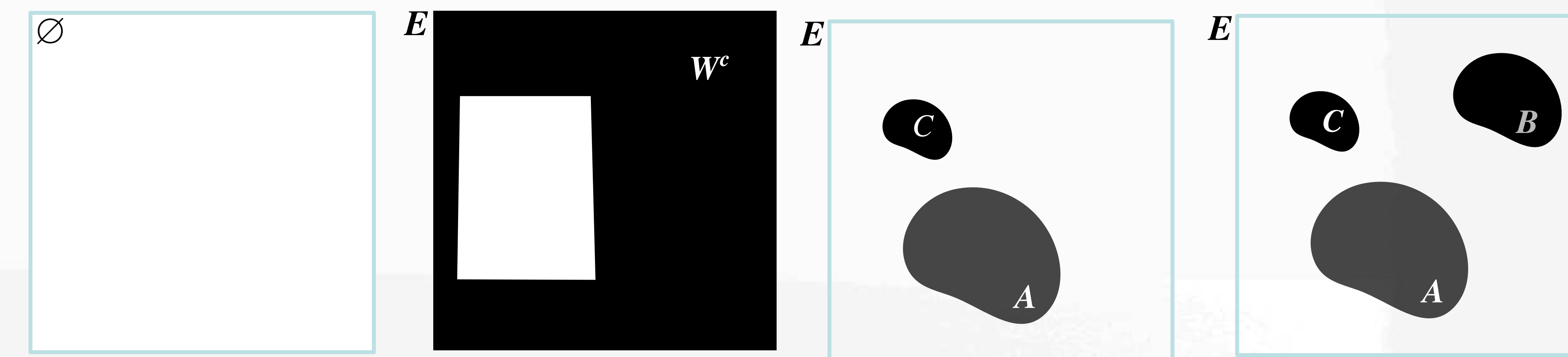
$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$





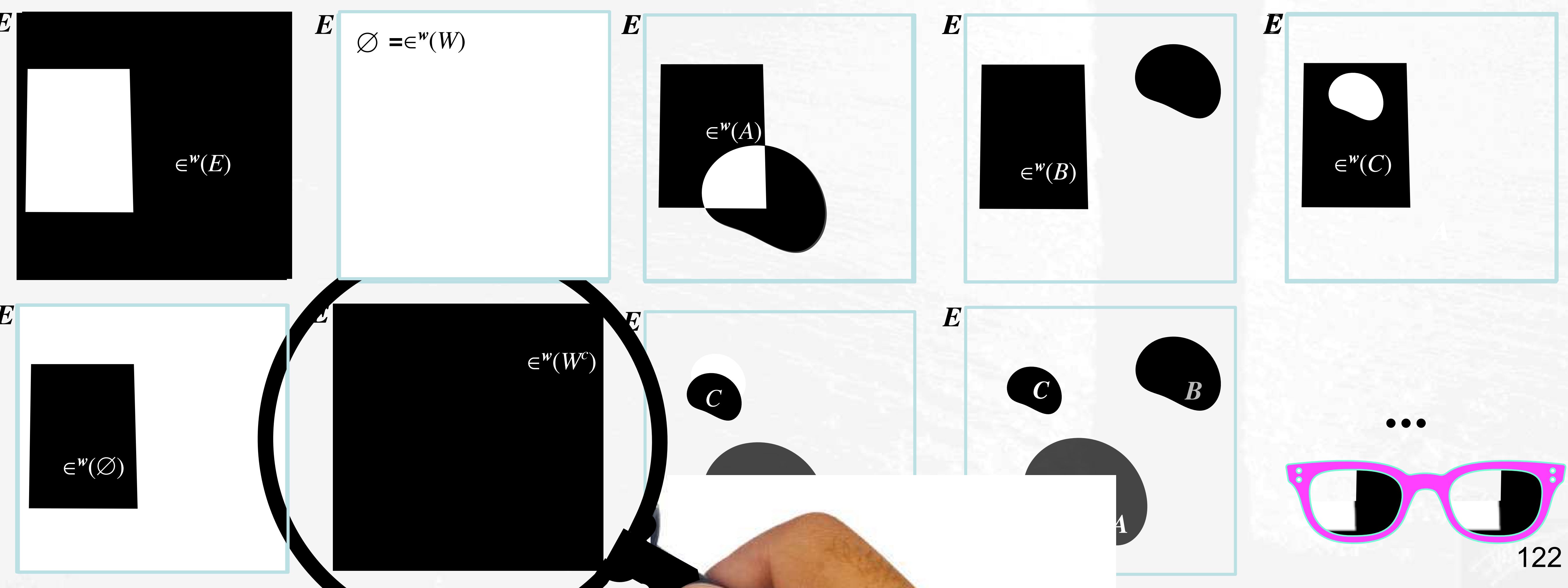


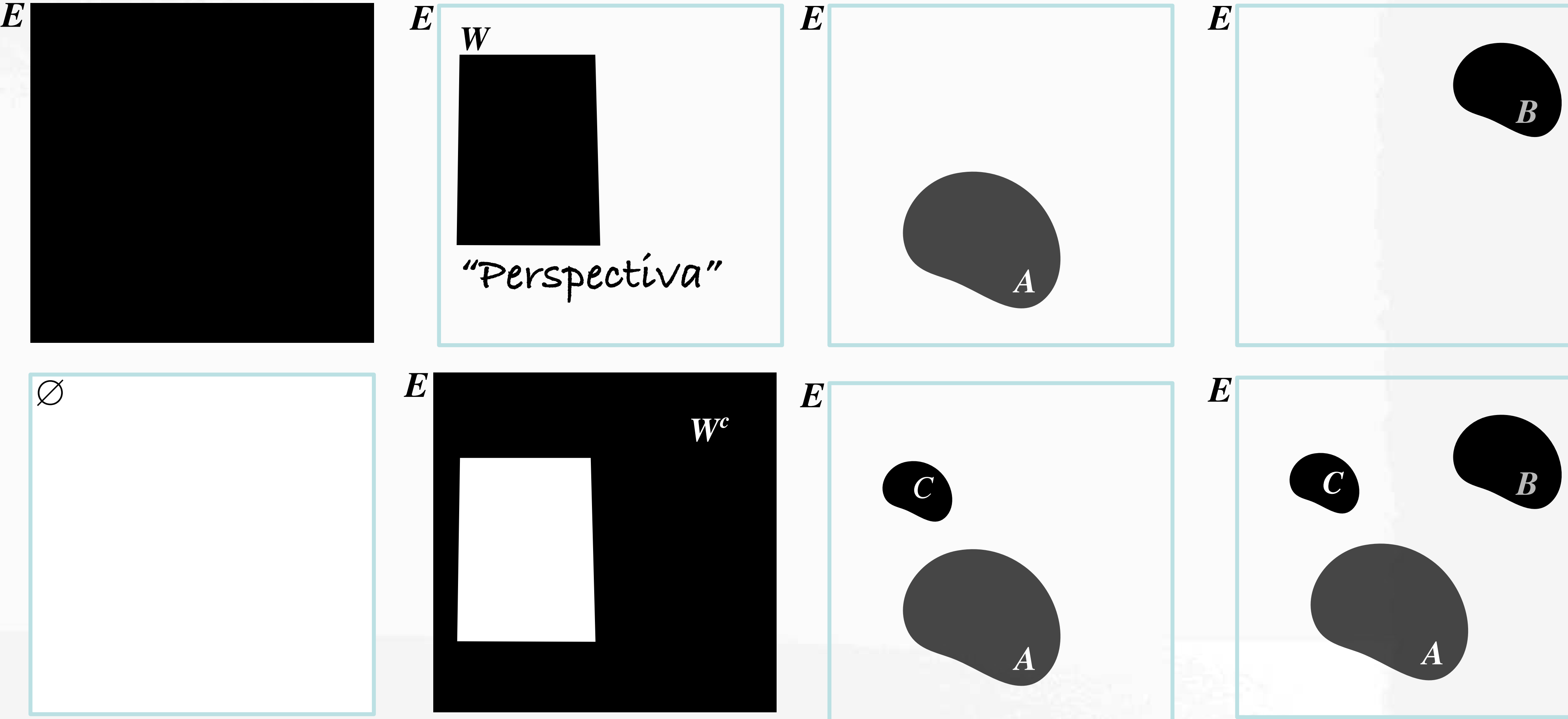
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M\Delta W$, es decir

$(x\in^w M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

$(M\sqsubseteq^w N)\Leftrightarrow([\in^w(M)]\subseteq[\in^w(M)])$



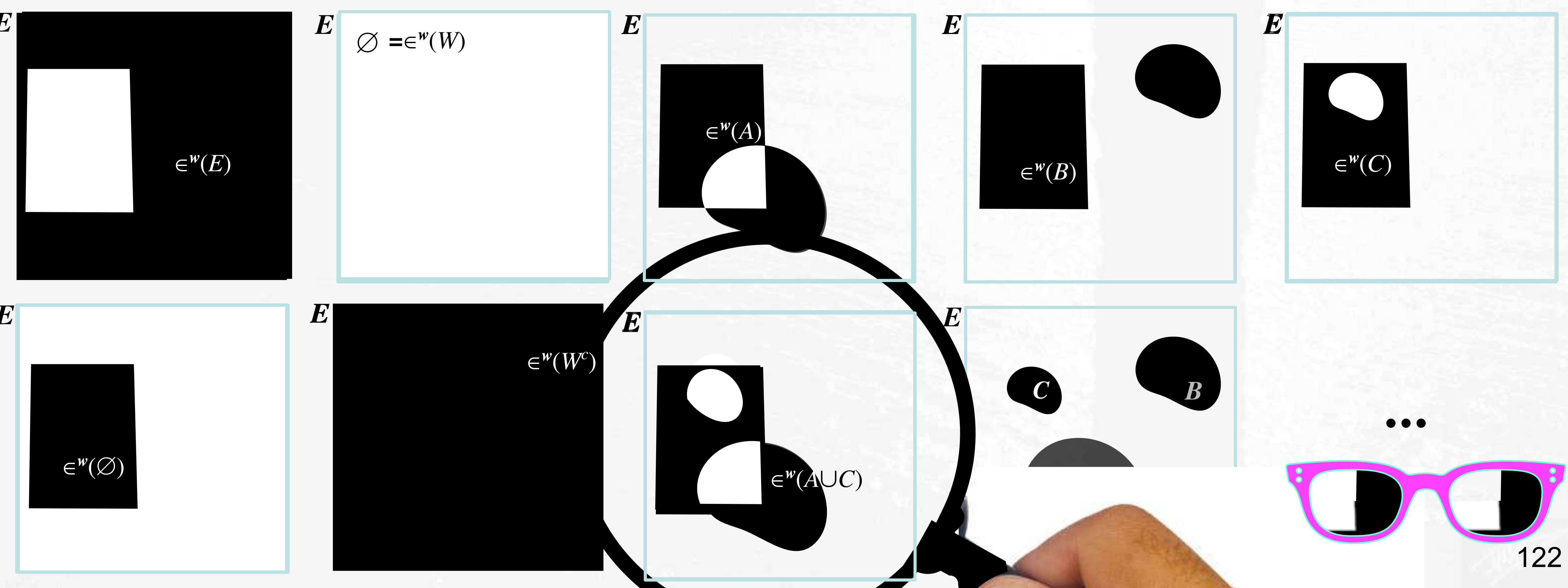


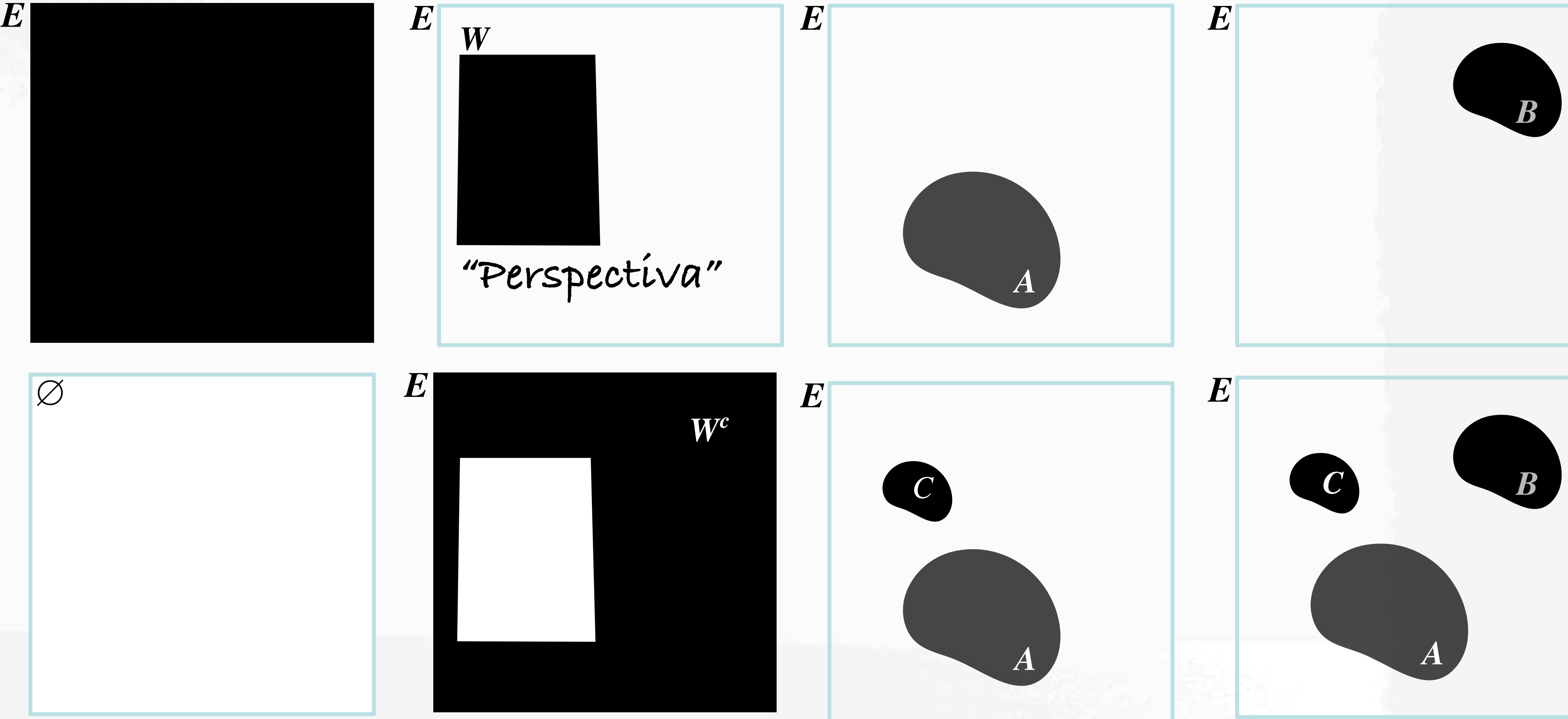
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M\Delta W$, es decir

$(x\in^w M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

$(M\sqsubseteq^w N)\Leftrightarrow([\in^w(M)]\subseteq[\in^w(M)])$



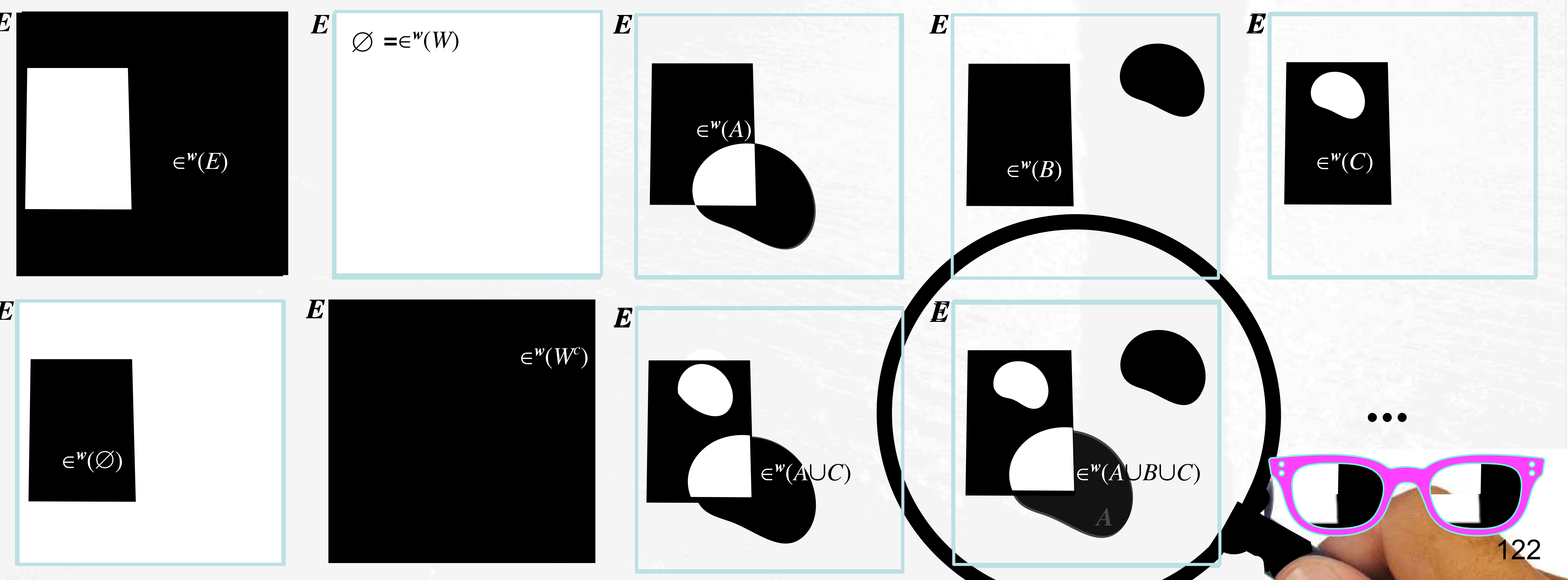


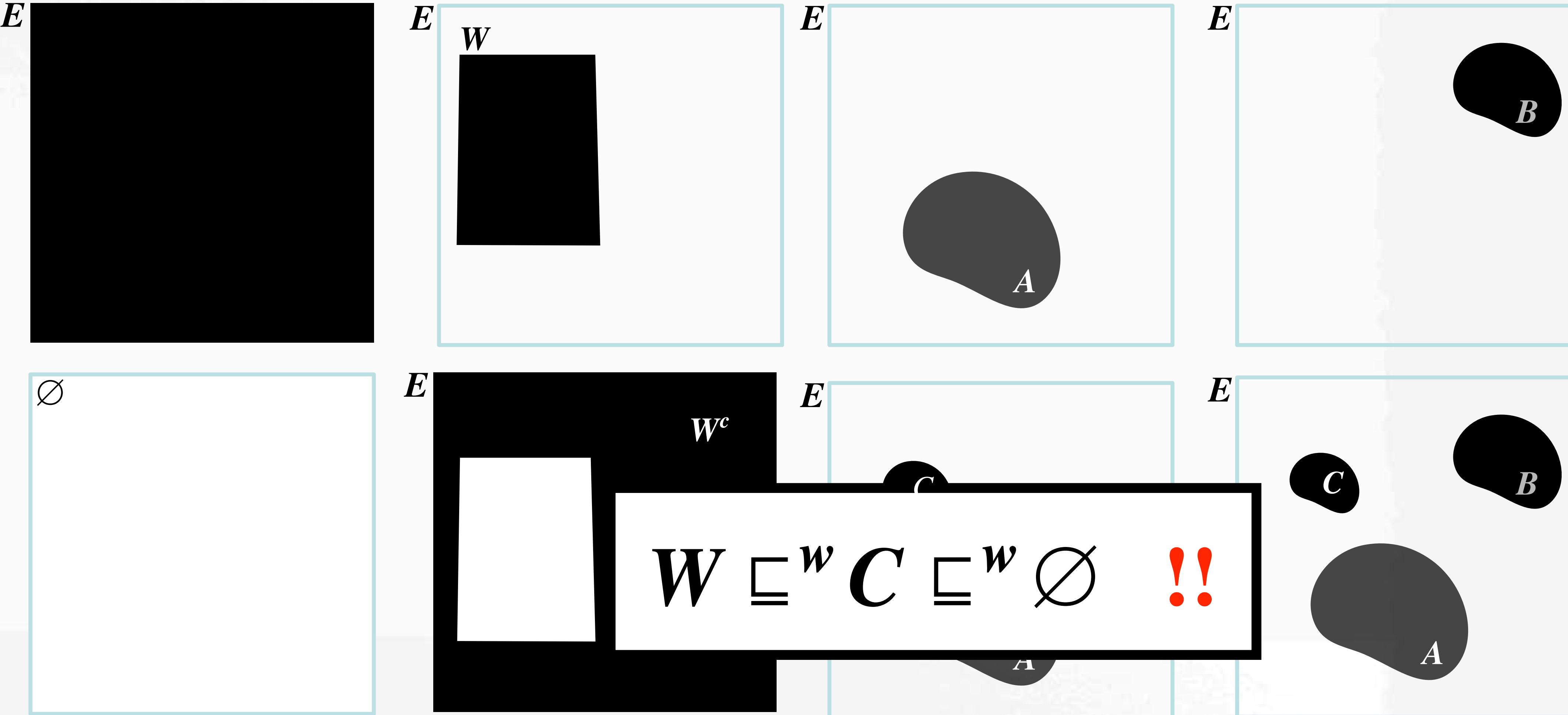
Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M\Delta W$, es decir

$(x\in^w M)\Leftrightarrow(x\in M\Delta W)$

$(M\sqsubseteq^w N)\Leftrightarrow([\in^w(M)]\subseteq[\in^w(M)])$



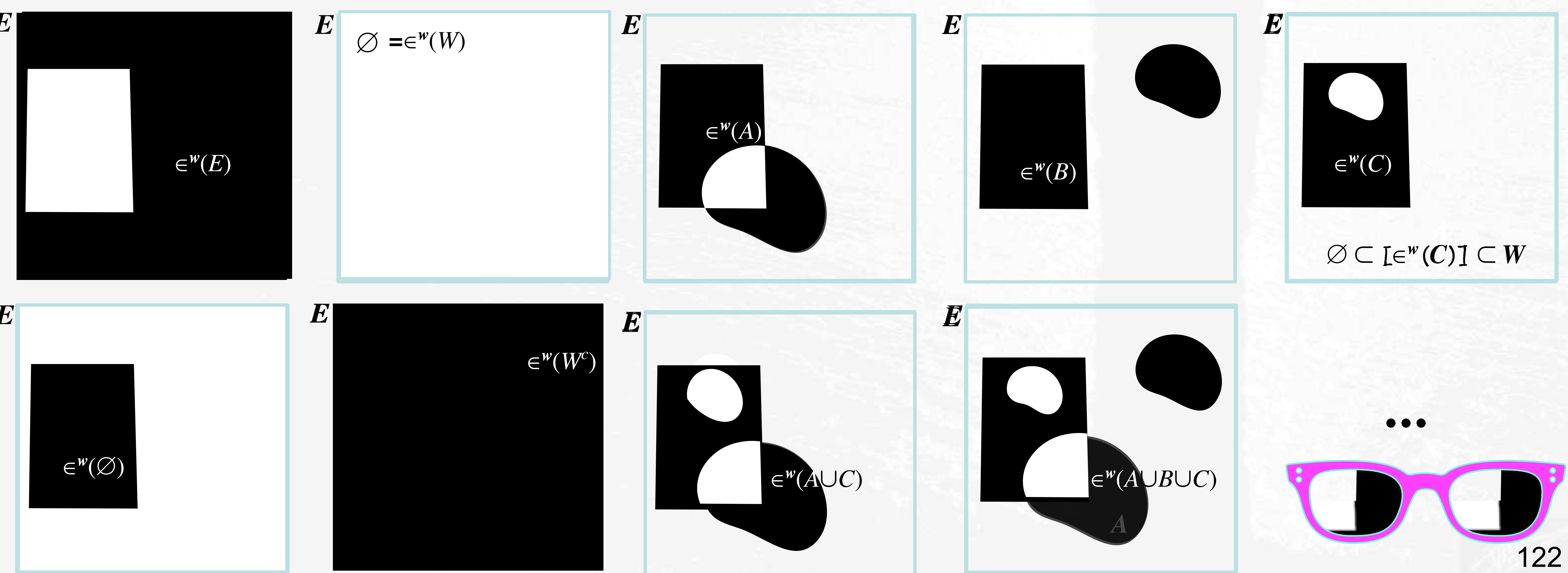


Comparación de conjuntos mediante la w-pertenencia:

$\in^w(M) = M \Delta W$, es decir

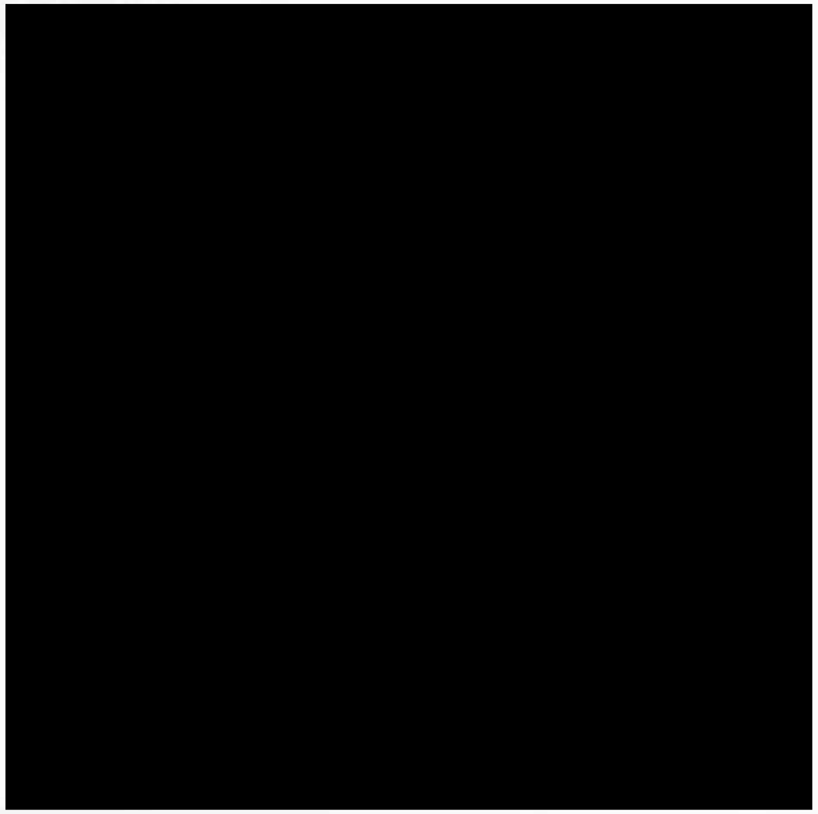
$(x \in^w M) \Leftrightarrow (x \in M \Delta W)$

$(M \sqsubseteq^w N) \Leftrightarrow ([\in^w(M)] \subseteq [\in^w(M)])$

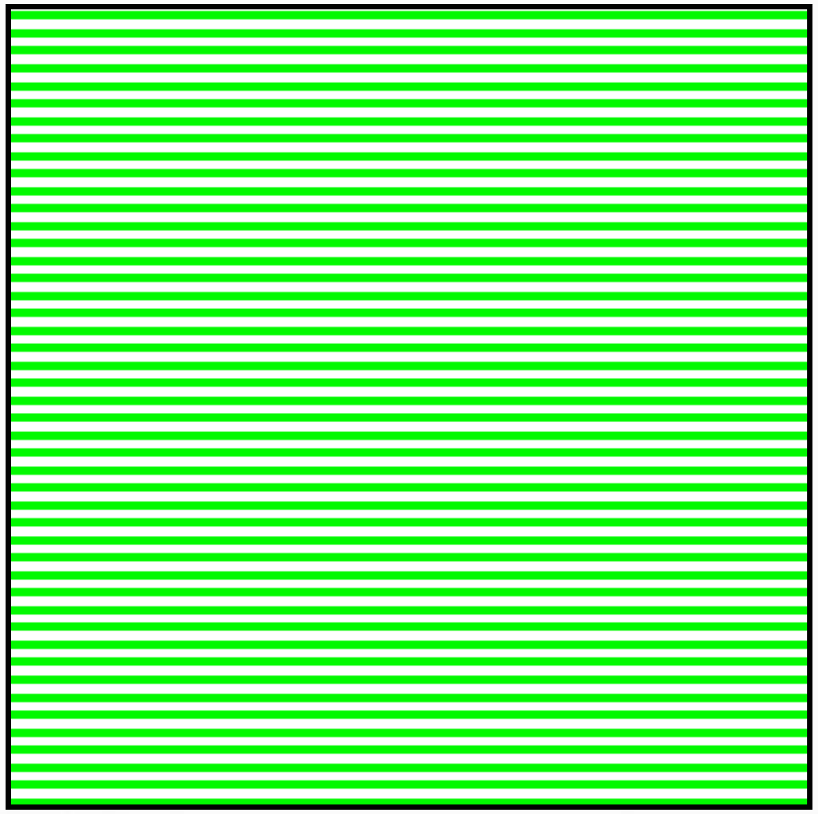


Ejemplo de “w-pertenencia”

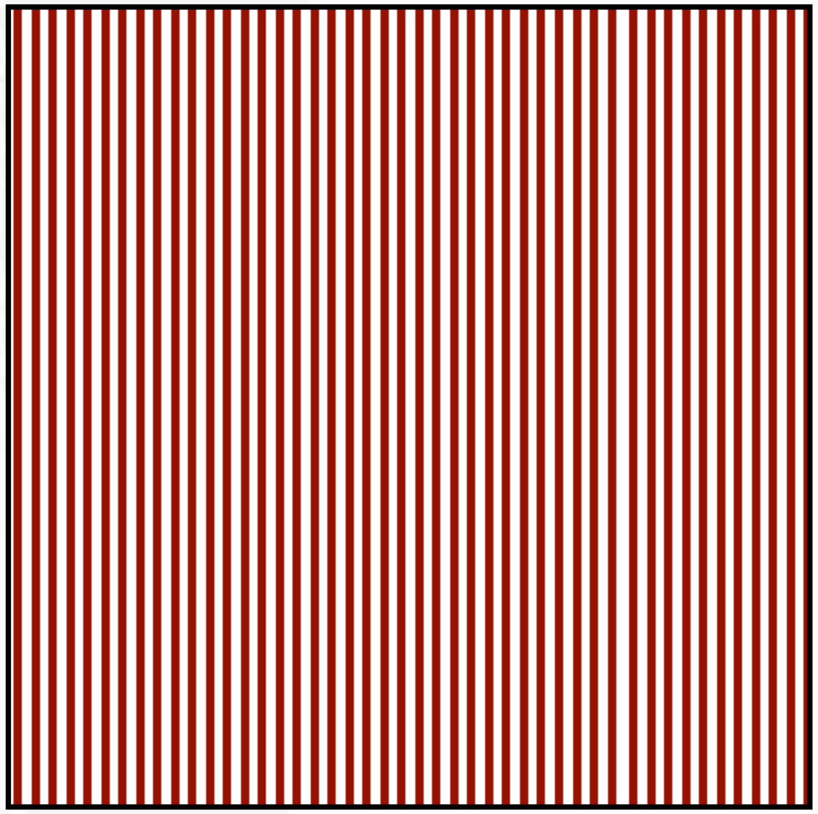
$\mathbb{R}^2$

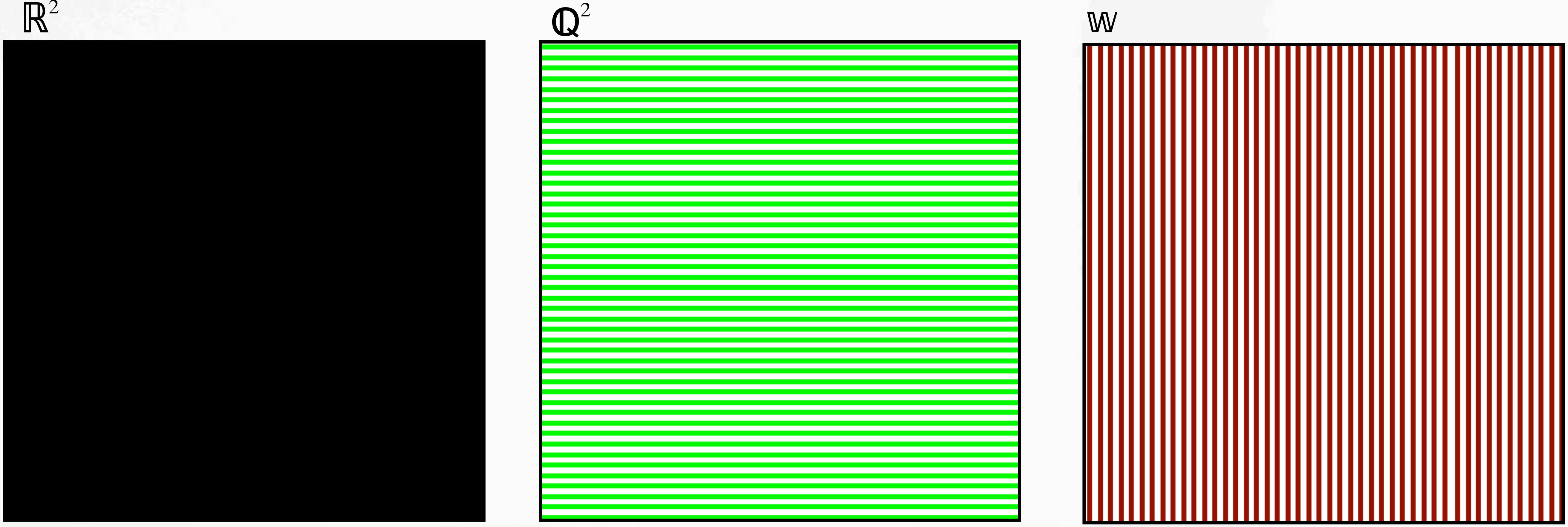


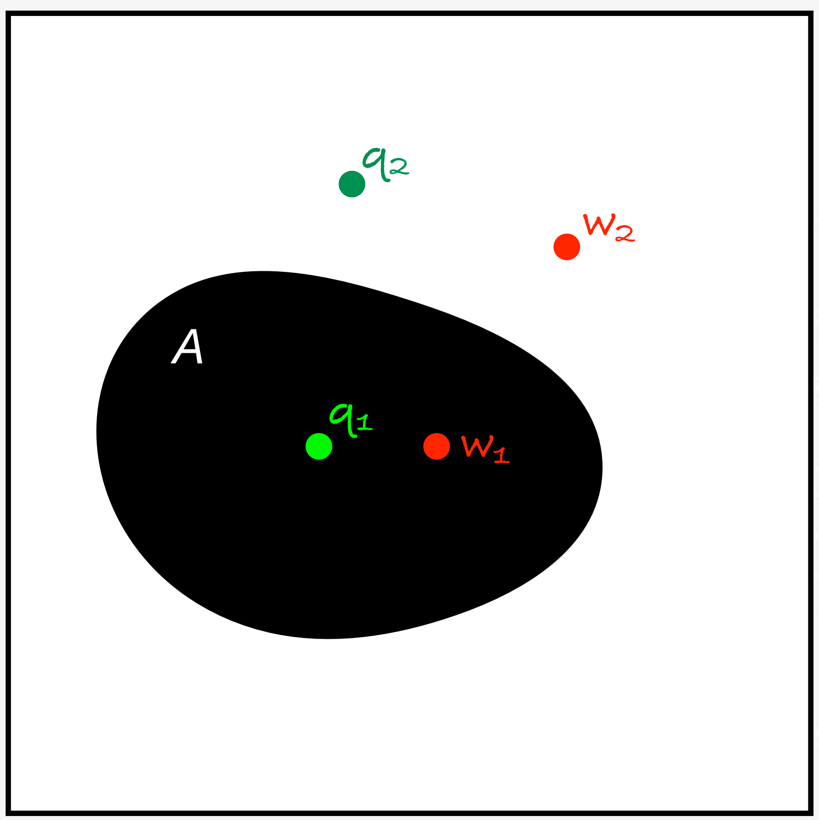
$\mathbb{Q}^2$



$\mathbb{W}$







$q_1 \in A$

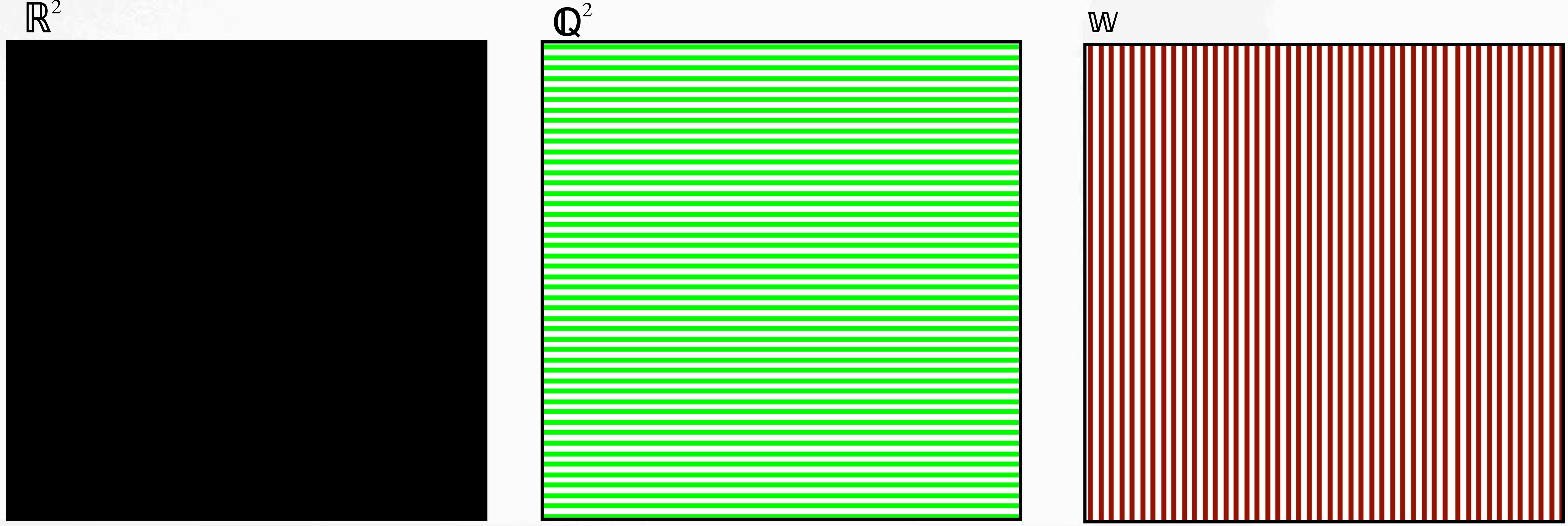
$q_2 \notin A$

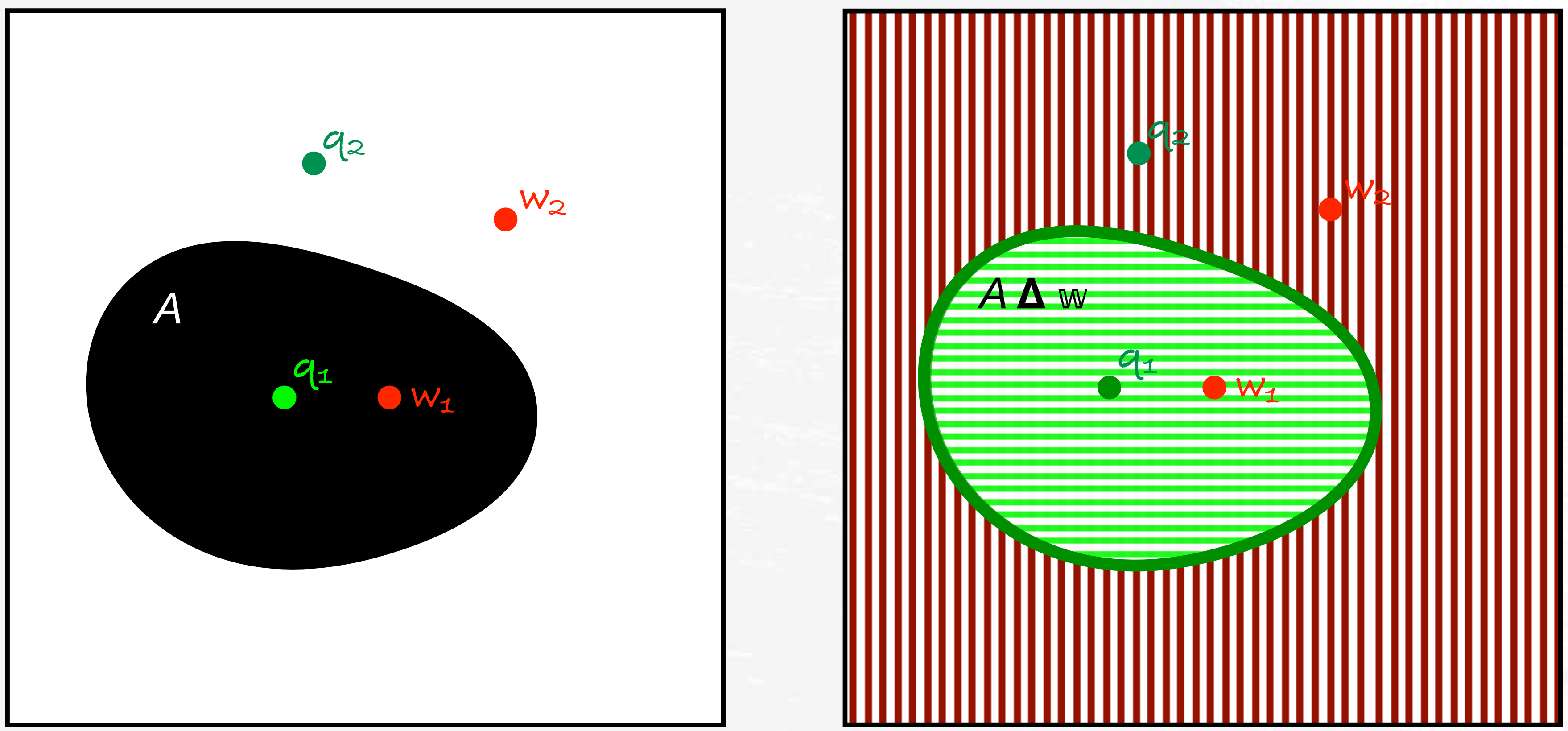
$w_1 \in A$

$w_2 \notin A$

● ≡ (punto $q = (q^1, q^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con las dos coordenadas racionales).

● ≡ (punto $w = (w^1, w^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con al menos una coordenada irracional).





$q_1 \in A$ $\quad q_1 \in^{\mathbb{W}} A$

$q_2 \notin A$ $\quad q_2 \notin^{\mathbb{W}} A$

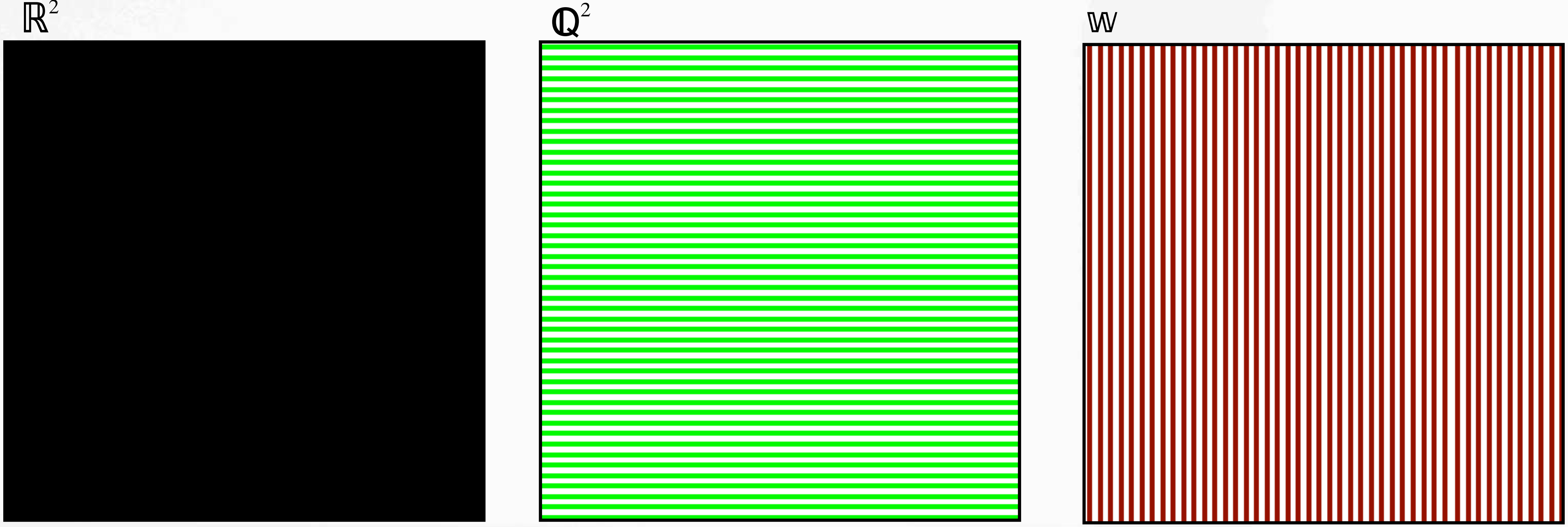
$w_1 \in A$ $\quad w_1 \notin^{\mathbb{W}} A$

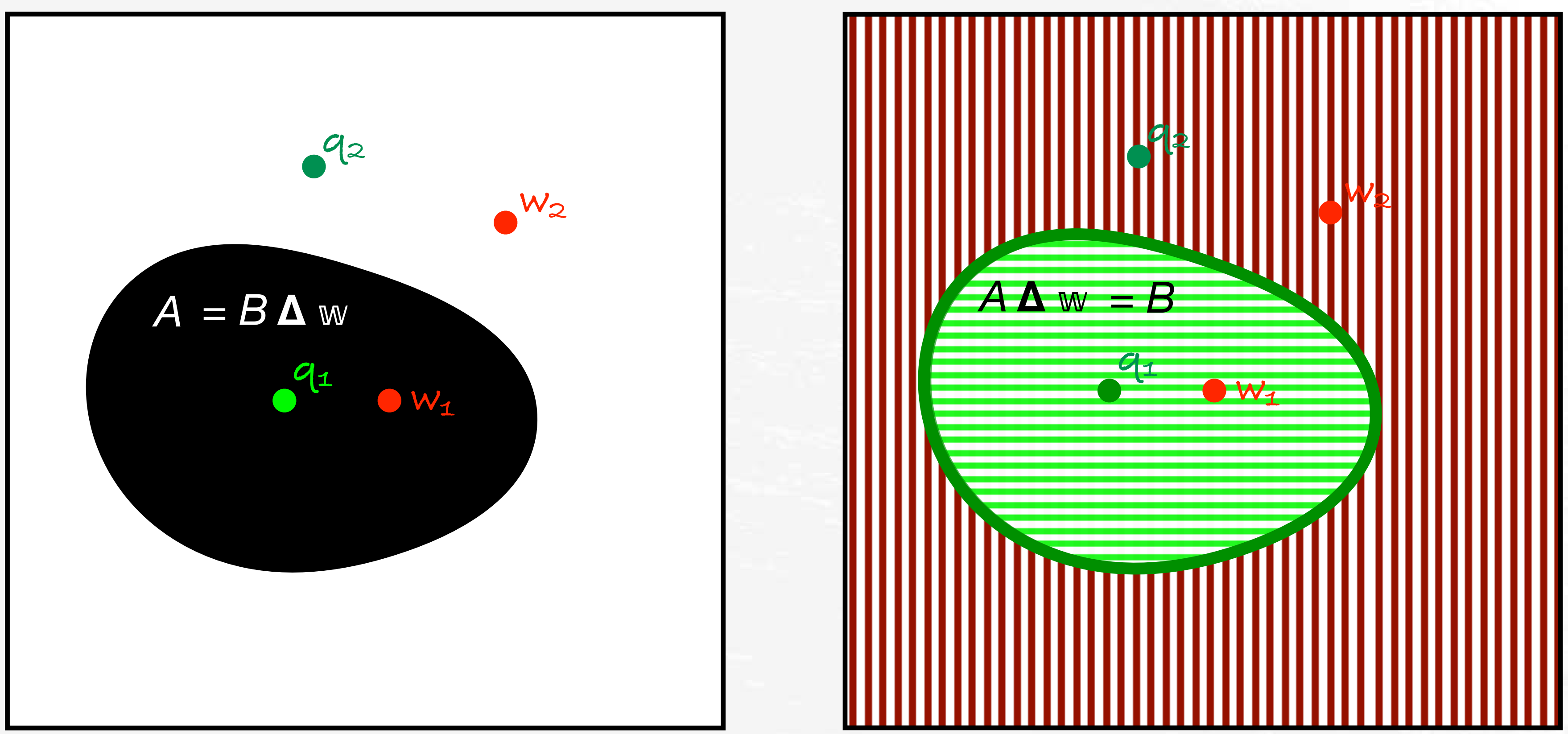
$w_2 \notin A$ $\quad w_2 \in^{\mathbb{W}} A$

"Localiza puntos q_i con coordenadas racionales en A y puntos w_j con al menos una coordenada irracional en A^c".

● ≡ (punto $q = (q^1, q^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con las dos coordenadas racionales).

● ≡ (punto $w = (w^1, w^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con al menos una coordenada irracional).



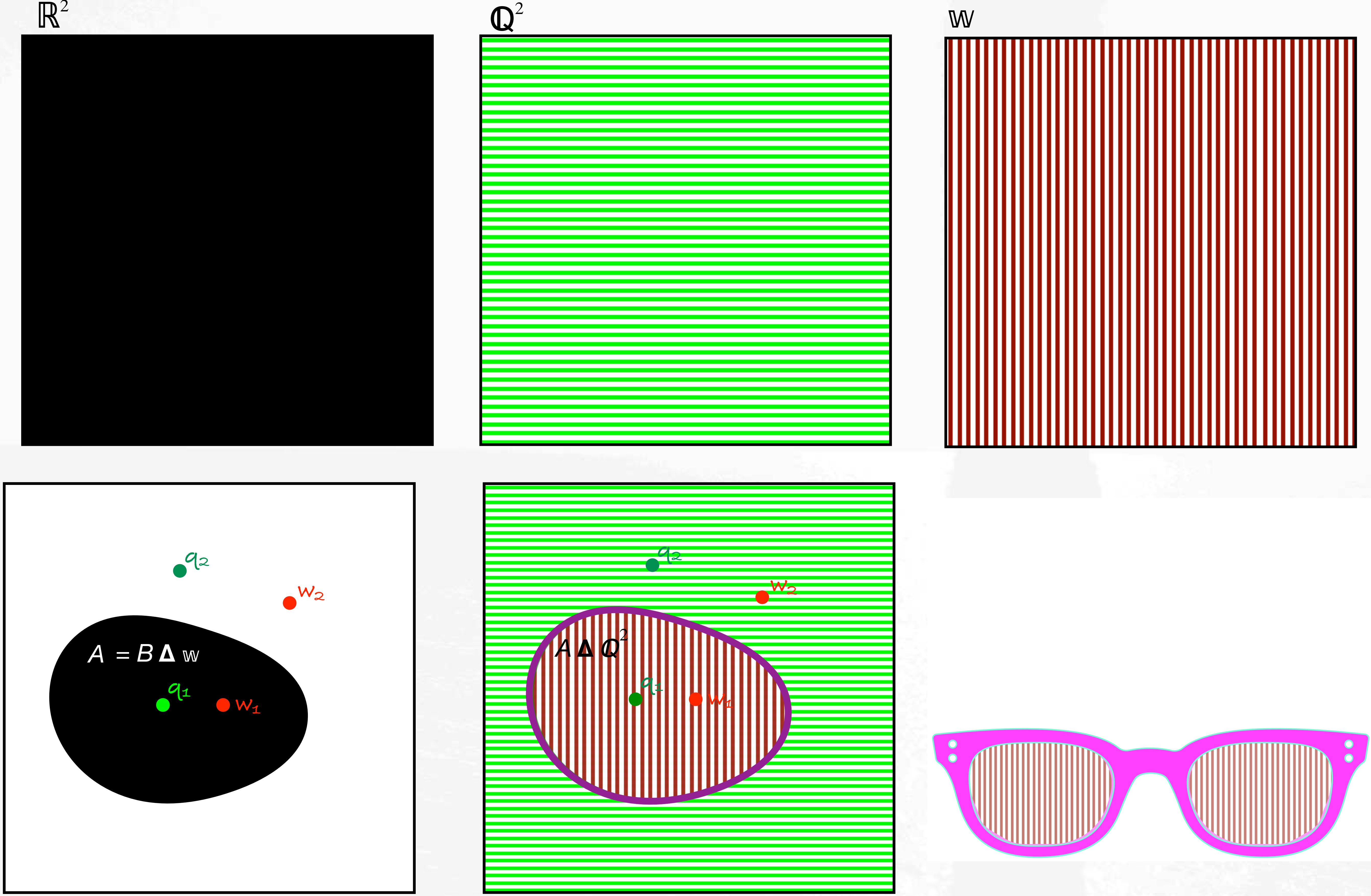


$q_1 \in A$	$q_1 \in^{W} A$	$q_1 \in^{W} B$
$q_2 \notin A$	$q_2 \notin^{W} A$	$q_2 \notin^{W} B$
$w_1 \in A$	$w_1 \notin^{W} A$	$w_1 \in^{W} B$
$w_2 \notin A$	$w_2 \in^{W} A$	$w_2 \notin^{W} B$

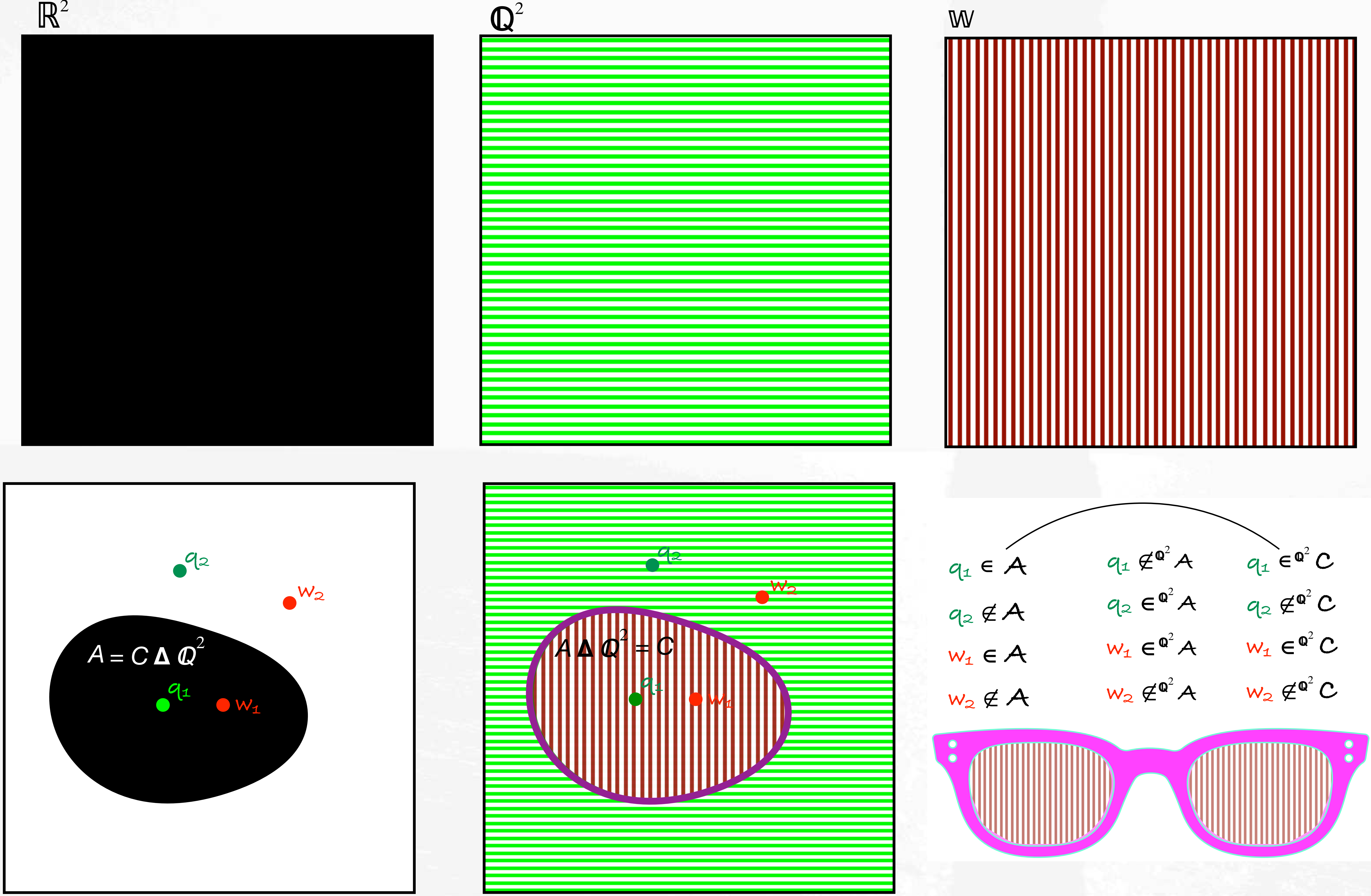
"Localiza puntos q_i con coordenadas racionales en A y puntos w_j con al menos una coordenada irracional en A^c".

● ≡ (punto $q = (q^1, q^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con las dos coordenadas racionales).

● ≡ (punto $w = (w^1, w^2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con al menos una coordenada irracional).



¡También hay gafas para irracionales...!
(Números)



ℝ²
ℚ²
W
q₂
w₂
A = C Δ ℚ²
q₁
w₁
q₂
w₂
A Δ ℚ² = C
q₁
w₁
q₁ ∈ A
q₂ ∉ A
w₁ ∈ A
w₂ ∉ A
q₁ ∉^ℚ² A
q₂ ∈^ℚ² A
w₁ ∈^ℚ² A
w₂ ∉^ℚ² A
q₁ ∈^ℚ² C
q₂ ∉^ℚ² C
w₁ ∈^ℚ² C
w₂ ∉^ℚ² C

Ejemplo:

Expresión de A mediante la w-pertenencia $\in^{w}$

A continuación te escribo en una lista los **adjetivos personales positivos** que puedes utilizar **para describirte como persona y profesional**, se pueden usar en el CV, en la carta de presentación o en la entrevista cuando te pregunten cómo eres.

Antes de escoger un adjetivo u otro, es importante **conocer qué competencias o cualidades piden** (en la oferta, en tu puesto de trabajo anterior...) para que estén en su mayor medida **relacionadas con el puesto al que se opta.** Obviamente **no debes mentir**, si el puesto requiere liderazgo (competencia) y tú no eres líder (adjetivo personal), el **otorgarte una cualidad que no posees puede conseguirte el puesto, pero no te ayudará a conservarlo,** pues si es importante saber liderar a un equipo y no tienes esa competencia, lo más probable es que lo detecten en el período de prueba.

Listado de adjetivos extraído del Post con la dirección:

www.mejorartucv.com/

A continuación te escribo en una lista los **adjetivos personales positivos** que puedes utilizar **para describirte como persona y profesional**, se pueden usar en el CV, en la carta de presentación o en la entrevista cuando te pregunten cómo eres.

Antes de escoger un adjetivo u otro, es importante **conocer qué competencias o cualidades piden** (en la oferta, en tu puesto de trabajo anterior...) para que estén en su mayor medida **relacionadas con el puesto al que se opta.** Obviamente **no debes mentir**, si el puesto requiere liderazgo (competencia) y tú no eres líder (adjetivo personal), el **otorgarte una cualidad que no posees puede conseguirte el puesto, pero no te ayudará a conservarlo,** pues si es importante saber liderar a un equipo y no tienes esa competencia, lo más probable es que lo detecten en el período de prueba.

LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES POSITIVOS

Abierto	Diplomático	Objetivo
Activo	Discreto	Optimista
Actual	Económico	Orientado
Adaptable	Ecuánime	Ordenado
Afable	Eficaz	Organizado
Ágil de mente	Eficiente	Paciente
Alerta	Ejecutivo	Perceptivo
Amable	Emprendedor	Persistente
Ambicioso	Enérgico	Persuasivo
Amplio de mente	Entregado	Polivalente
Analítico	Entusiasta	Ponderado
Animoso	Especializado en...	Positivo
Asertivo	Estable	Práctico
Atento	Ético	Precavido
Auténtico	Exacto	Preciso
Capaz	Exigente	Previsor
Carácter (con)	Experto	Productivo
Cauto	Extravertido	Puntual
Claro	Fiable	Rápido
Coherente	Fiel	Razonable
Colaborador	Firme	Recto
Comunicador	Flexible	Recursos (rico en)
Conciliador	Formal	Reflexivo
Concreto	Gerencial (capacidad)	Relacionado (bien)
Confianza en sí	Hábil	Respetuoso
Consciente	Honesto	Responsable
Constante	Imaginativo	Resuelto
Constructivo	Independiente	Seguro
Control emocional	Inventivo	Sensato
Convincente	Justo	Sereno
Convicciones (con)	Laborioso	Sincero
Cooperativo	Leal	Sistemático
Coordinador	Líder	Solucionador
Cordial	Lógico	Tacto
Cortés	Maduro	Tenaz
Creativo	Mando (con)	Tolerante
Criterio (buen)	Mañoso	Trato (buen)
Crítico	Matemático	Vendedor

LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES POSITIVOS

Abierto	Diplomático	Objetivo
Activo	Discreto	Optimista
Actual	Económico	Orientado
Adaptable	Ecuánime	Ordenado
Afable	Eficaz	Organizado
Ágil de mente	Eficiente	Paciente
Alerta	Ejecutivo	Perceptivo
Amable	Emprendedor	Persistente
Ambicioso	Enérgico	Persuasivo
Amplio de mente	Entregado	Polivalente
Analítico	Entusiasta	Ponderado
Animoso	Especializado en...	Positivo
Asertivo	Estable	Práctico
Atento	Ético	Precavido
Auténtico	Exacto	Preciso
Capaz	Exigente	Previsor
Carácter (con)	Experto	Productivo
Cauto	Extravertido	Puntual
Claro	Fiable	Rápido
Coherente	Fiel	Razonable
Colaborador	Firme	Recto
Comunicador	Flexible	Recursos (rico en)
Conciliador	Formal	Reflexivo
Concreto	Gerencial (capacidad)	Relacionado (bien)
Confianza en sí	Hábil	Respetuoso
Consciente	Honesto	Responsable
Constante	Imaginativo	Resuelto
Constructivo	Independiente	Seguro
Control emocional	Inventivo	Sensato
Convincente	Justo	Sereno
Convicciones (con)	Laborioso	Sincero
Cooperativo	Leal	Sistemático
Coordinador	Líder	Solucionador
Cordial	Lógico	Tacto
Cortés	Maduro	Tenaz
Creativo	Mando (con)	Tolerante
Criterio (buen)	Mañoso	Trato (buen)
Crítico	Matemático	Vendedor

LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES NEGATIVOS

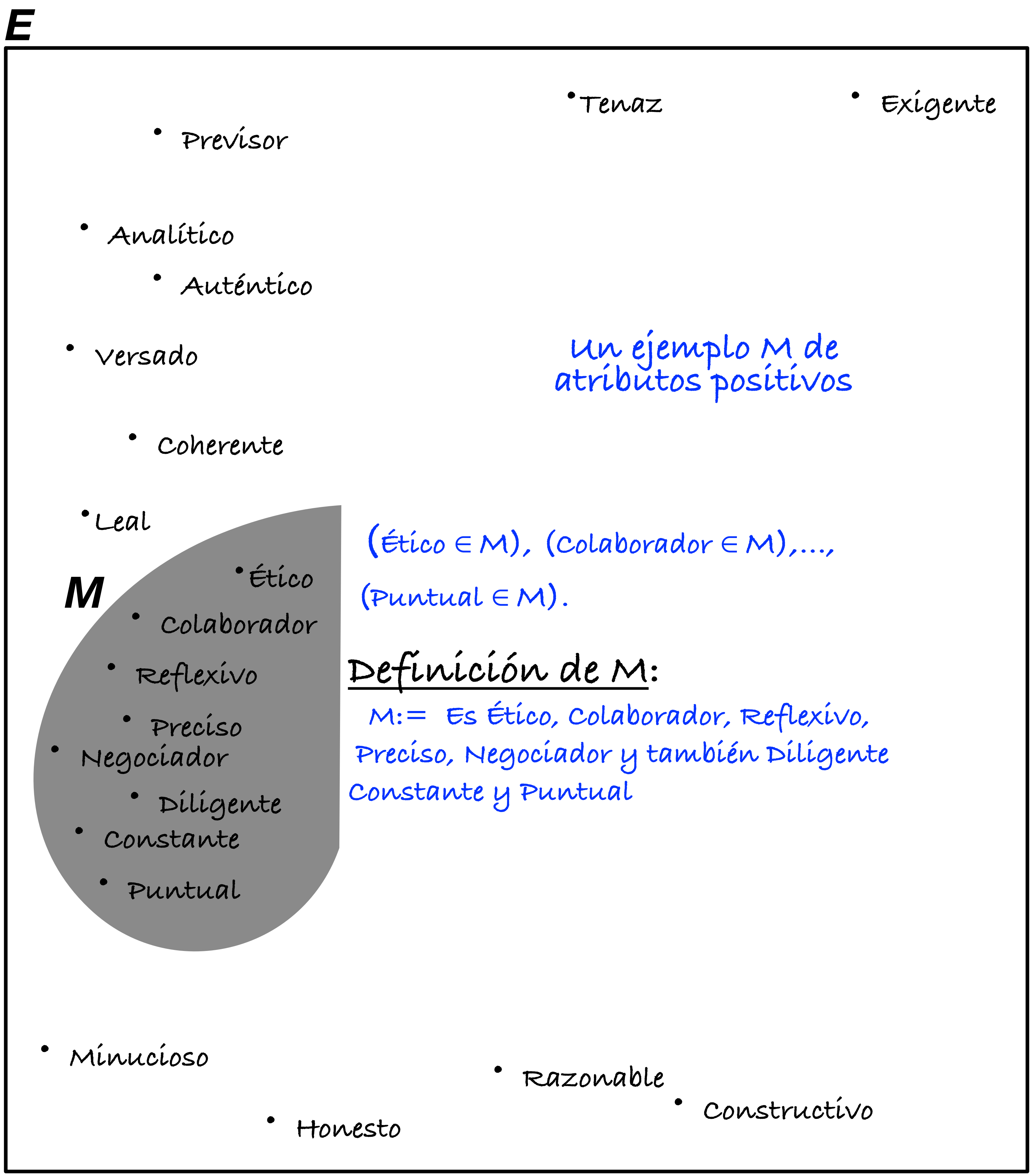
Aburrido	Estúpido	Pánfilo
Agresivo	Excéntrico	Parcial
Antipático	Falso	Perdedor
Autoritario	Fisgón	Perezoso
Avaricioso	Frívolo	Pesado
Avaro	Hipócrita	Pesimista
Ávido	Impaciente	Posesivo
Celoso	Imprudente	Presumido
Chiflado	Imprevisible	Provocador
Cobarde	Infiel	Quisquilloso
Codicioso	Influenciable	Raro
Creído (engreído)	Ingenuo	Rencoroso
Crédulo	Inseguro	Resentido
Critico	Intolerante	Tacaño
Cruel	Introvertido	Terco
Débil	Irrespetuoso	Testarudo
Desafiante	Loco	Timido
Desleal	Malhumorado	Tonto
Desagradable	Malicioso	Tramposo
Deshonesto	Malo	Torpe
Desobediente	Malvado	Travieso
Desorganizado	Mandón	Vago
Despistado	Materialista	Vengativo
Despreciable	Mezquino	Vergonzoso
Egoísta	Negligente	Vicioso
Envidioso	Olvidadizo	Zoquete
Estricto	Orgulloso	

E

- Tenaz
- Exigente
- Previsor
- Analítico
- Auténtico
- Versado
- Coherente
- Leal
- Ético
- Colaborador
- Reflexivo
- Preciso
- Negociador
- Diligente
- Constante
- Puntual
- Minucioso
- Razonable
- Constructivo
- Honesto

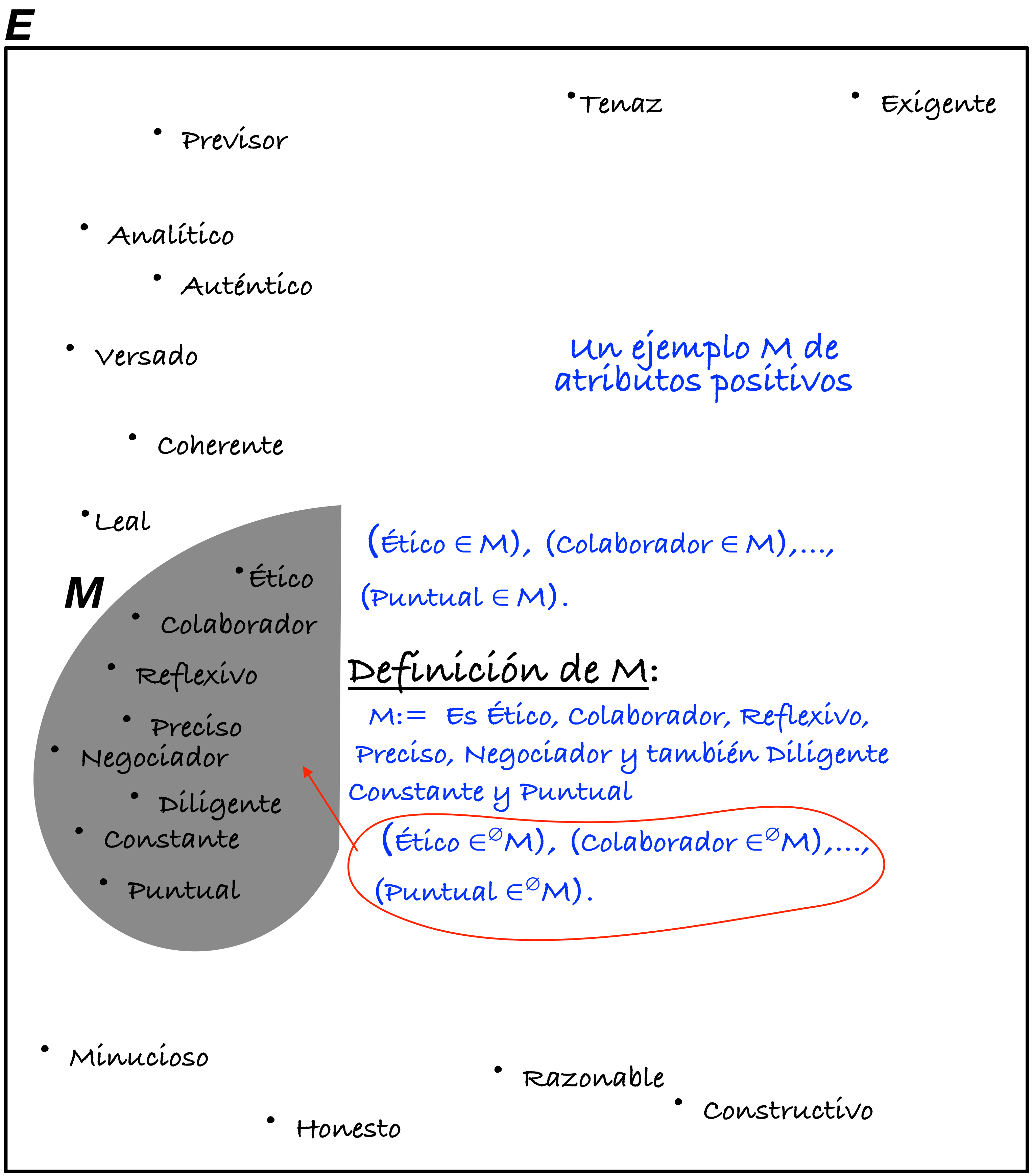
LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES NEGATIVOS

Aburrido	Estúpido	Pánfilo
Agresivo	Excéntrico	Parcial
Antipático	Falso	Perdedor
Autoritario	Fisgón	Perezoso
Avaricioso	Frívolo	Pesado
Avaro	Hipócrita	Pesimista
Ávido	Impaciente	Posesivo
Celoso	Imprudente	Presumido
Chiflado	Imprevisible	Provocador
Cobarde	Infiel	Quisquilloso
Codicioso	Influenciable	Raro
Creído (engreído)	Ingenuo	Rencoroso
Crédulo	Inseguro	Resentido
Critico	Intolerante	Tacaño
Cruel	Introvertido	Terco
Débil	Irrespetuoso	Testarudo
Desafiante	Loco	Tímido
Desleal	Malhumorado	Tonto
Desagradable	Malicioso	Tramposo
Deshonesto	Malo	Torpe
Desobediente	Malvado	Travieso
Desorganizado	Mandón	Vago
Despistado	Materialista	Vengativo
Despreciable	Mezquino	Vergonzoso
Egoísta	Negligente	Vicioso
Envidioso	Olvidadizo	Zoquete
Estricto	Orgulloso	



LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES NEGATIVOS

Aburrido	Estúpido	Pánfilo
Agresivo	Excéntrico	Parcial
Antipático	Falso	Perdedor
Autoritario	Fisgón	Perezoso
Avaricioso	Frívolo	Pesado
Avaro	Hipócrita	Pesimista
Ávido	Impaciente	Posesivo
Celoso	Imprudente	Presumido
Chiflado	Imprevisible	Provocador
Cobarde	Infiel	Quisquilloso
Codicioso	Influenciable	Raro
Creído (engreído)	Ingenuo	Rencoroso
Crédulo	Inseguro	Resentido
Critico	Intolerante	Tacaño
Cruel	Introvertido	Terco
Débil	Irrespetuoso	Testarudo
Desafiante	Loco	Tímido
Desleal	Malhumorado	Tonto
Desagradable	Malicioso	Tramposo
Deshonesto	Malo	Torpe
Desobediente	Malvado	Travieso
Desorganizado	Mandón	Vago
Despistado	Materialista	Vengativo
Despreciable	Mezquino	Vergonzoso
Egoísta	Negligente	Vicioso
Envidioso	Olvidadizo	Zoquete
Estricto	Orgulloso	



LISTADO DE ADJETIVOS PERSONALES NEGATIVOS

Aburrido	Estúpido	Pánfilo
Agresivo	Excéntrico	Parcial
Antipático	Falso	Perdedor
Autoritario	Fisgón	Perezoso
Avaricioso	Frívolo	Pesado
Avaro	Hipócrita	Pesimista
Ávido	Impaciente	Posesivo
Celoso	Imprudente	Presumido
Chiflado	Imprevisible	Provocador
Cobarde	Infiel	Quisquilloso
Codicioso	Influenciable	Raro
Creído (engreído)	Ingenuo	Rencoroso
Crédulo	Inseguro	Resentido
Critico	Intolerante	Tacaño
Cruel	Introvertido	Terco
Débil	Irrespetuoso	Testarudo
Desafiante	Loco	Tímido
Desleal	Malhumorado	Tonto
Desagradable	Malicioso	Tramposo
Deshonesto	Malo	Torpe
Desobediente	Malvado	Travieso
Desorganizado	Mandón	Vago
Despistado	Materialista	Vengativo
Despreciable	Mezquino	Vergonzoso
Egoísta	Negligente	Vicioso
Envidioso	Olvidadizo	Zoquete
Estricto	Orgulloso	

E

• Tenaz • Exigente

• Previsor

• Analítico

• Auténtico

• Versado

Un ejemplo M de atributos positivos

• Coherente

• Leal

M

• Ético
• Colaborador
• Reflexivo
• Preciso
• Negociador
• Diligente
• Constante
• Puntual

(Ético $\in$ M), (Colaborador $\in$ M),...,
(Puntual $\in$ M).

Definición de M:

M:= Es Ético, Colaborador, Reflexivo, Preciso, Negociador y también Diligente Constante y Puntual

(Ético $\in^{\varnothing}$M), (Colaborador $\in^{\varnothing}$M),...,
(Puntual $\in^{\varnothing}$M).

• Minucioso

• Razonable

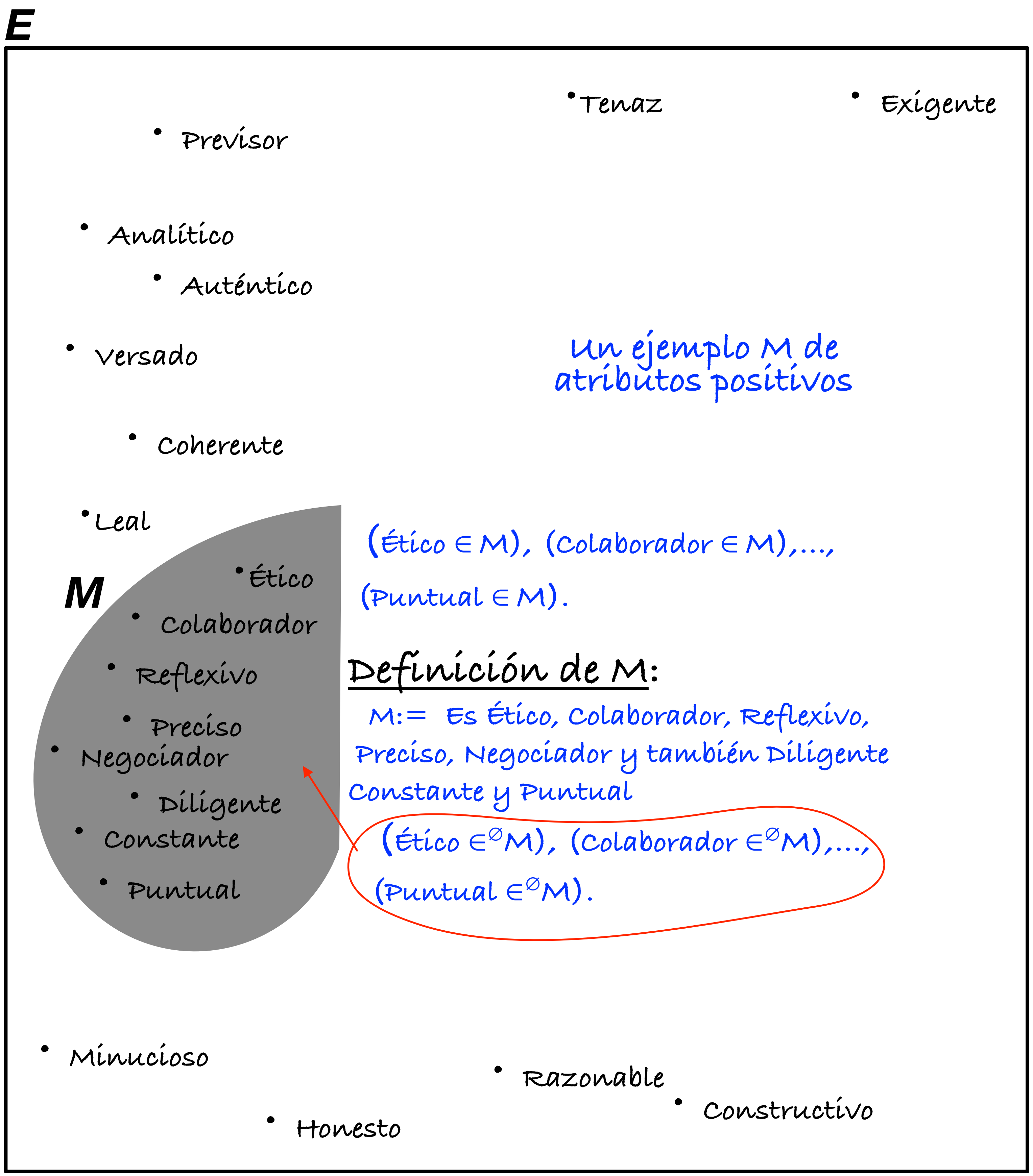
• Constructivo

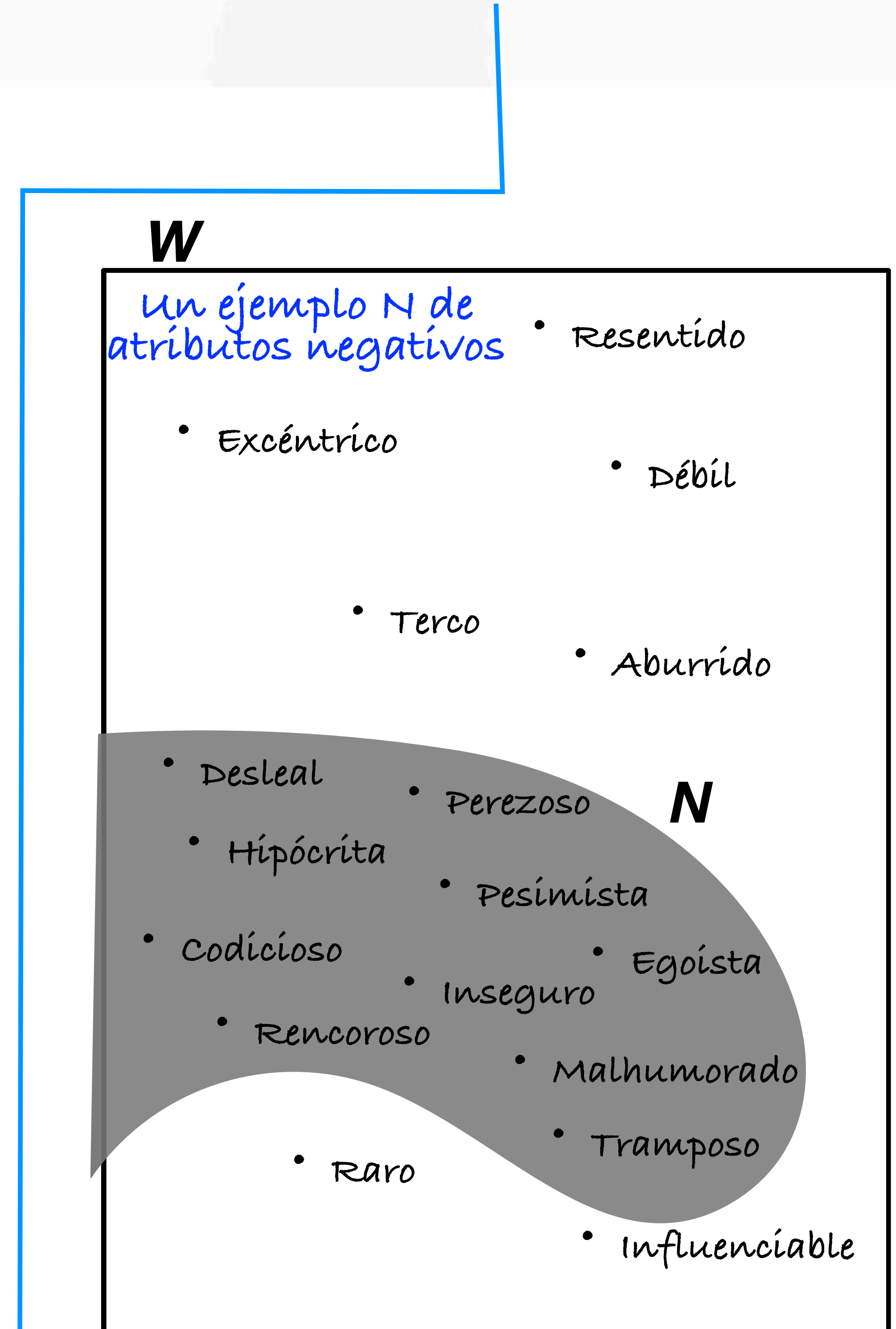
• Honesto

W

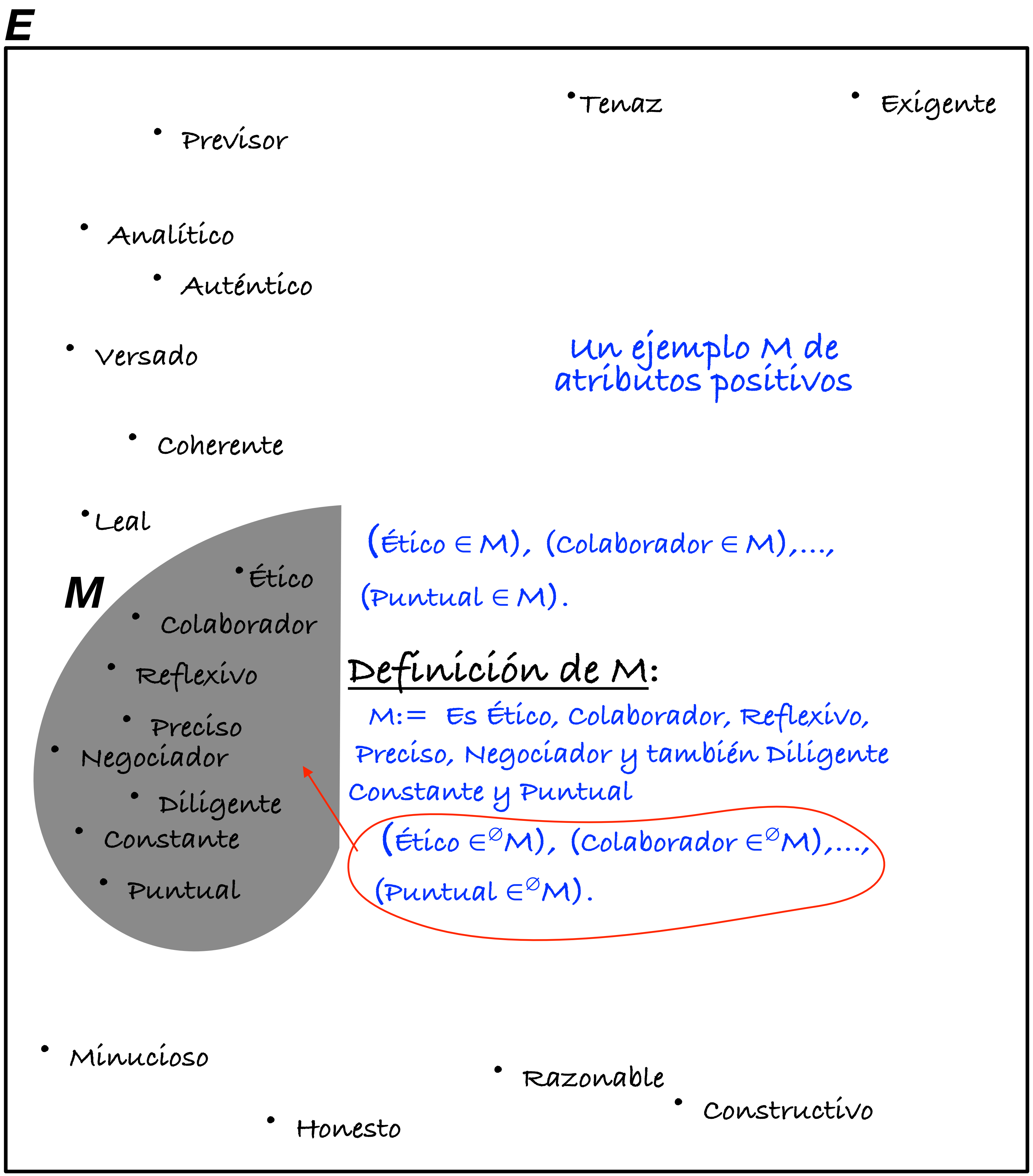
• Resentido
• Excéntrico
• Débil
• Terco
• Aburrido
• Desleal
• Perezoso
• Hipócrita
• Pesimista
• Codicioso
• Egoista
• Inseguro
• Rencoroso
• Malhumorado
• Tramposo
• Raro
• Influenciable

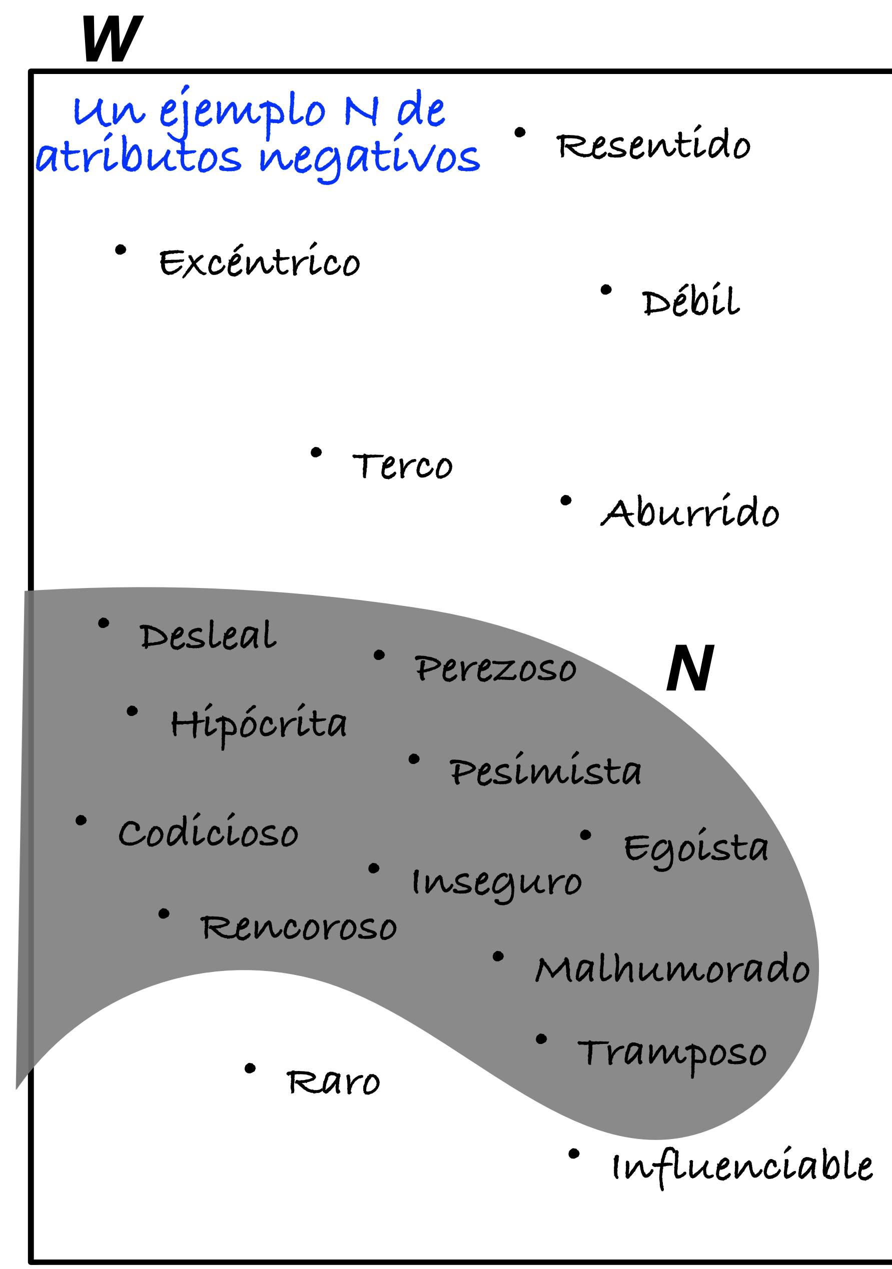
Despreciable Mezquino Vergonzoso
Egoísta Negligente Vicioso
Envidioso Olvidadizo Zoquete
Estricto Orgulloso





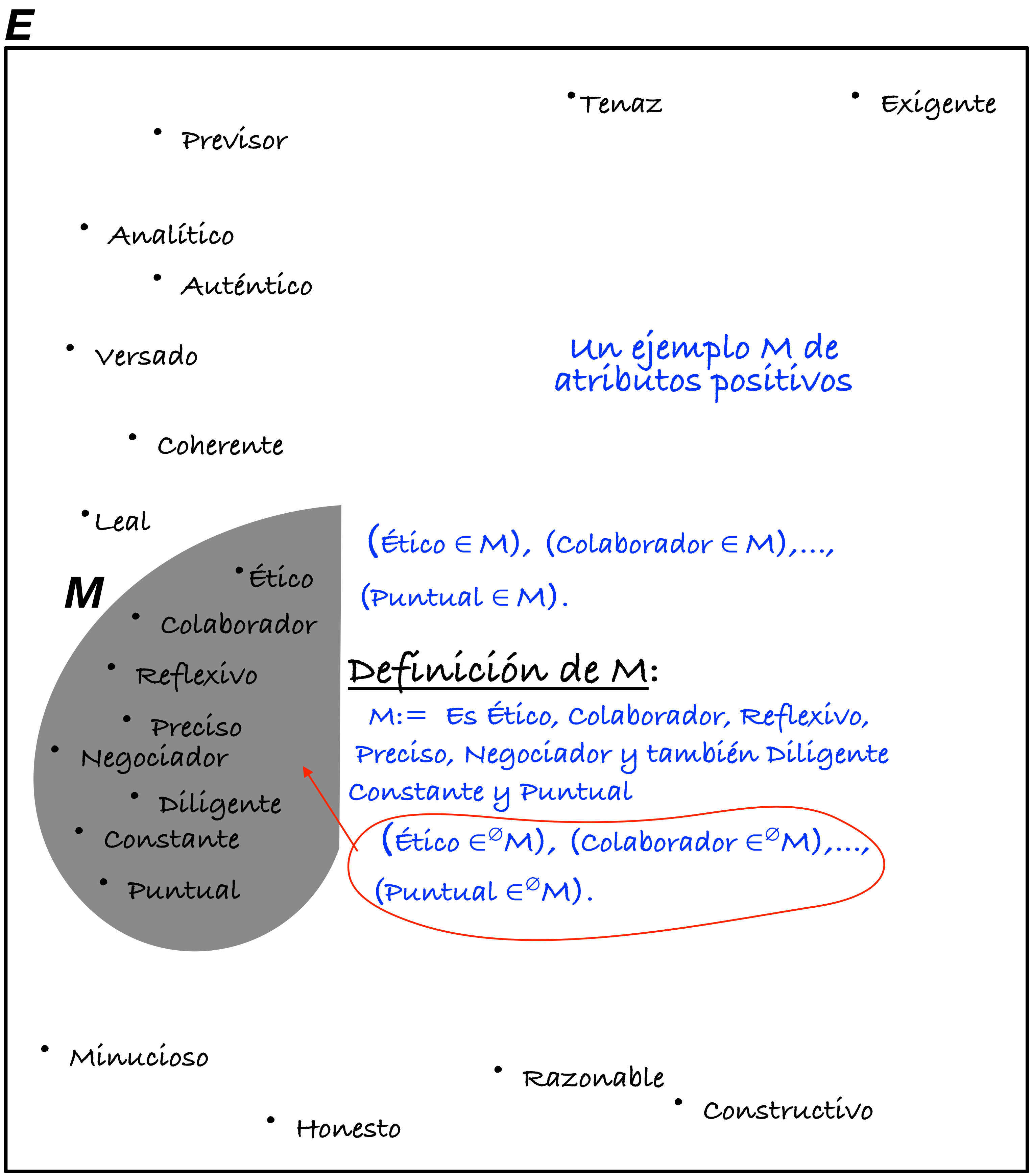
N:= Es Desleal, Hipócrita, Perezoso, Pesimista, Codicioso y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Tramposo .

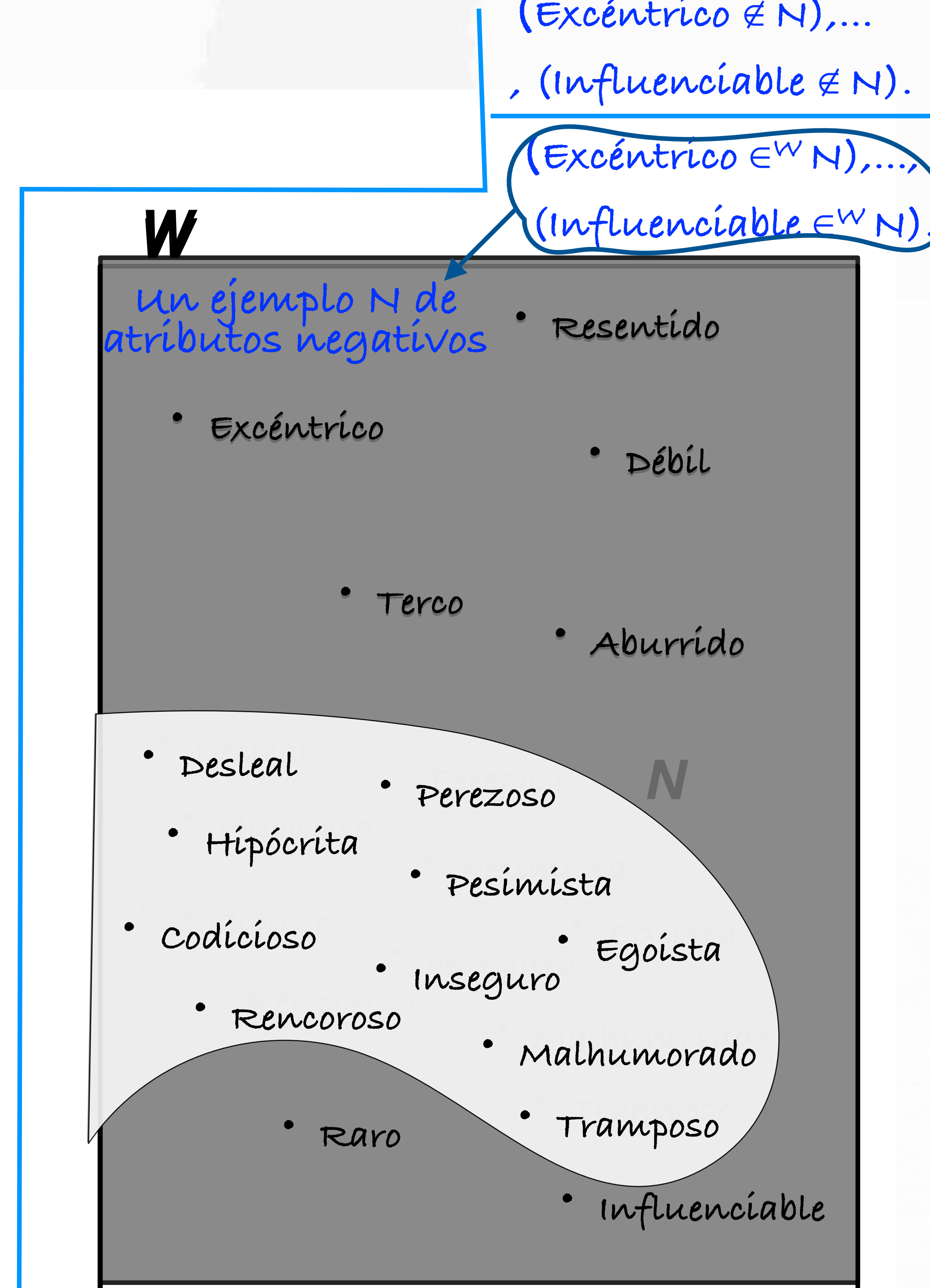




N:= Es Desleal, Hipócrita, Perezoso, Pesimista, Codicioso y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Tramposo .

¿Descripción del subconjunto N que no conviene hacer pública... ?

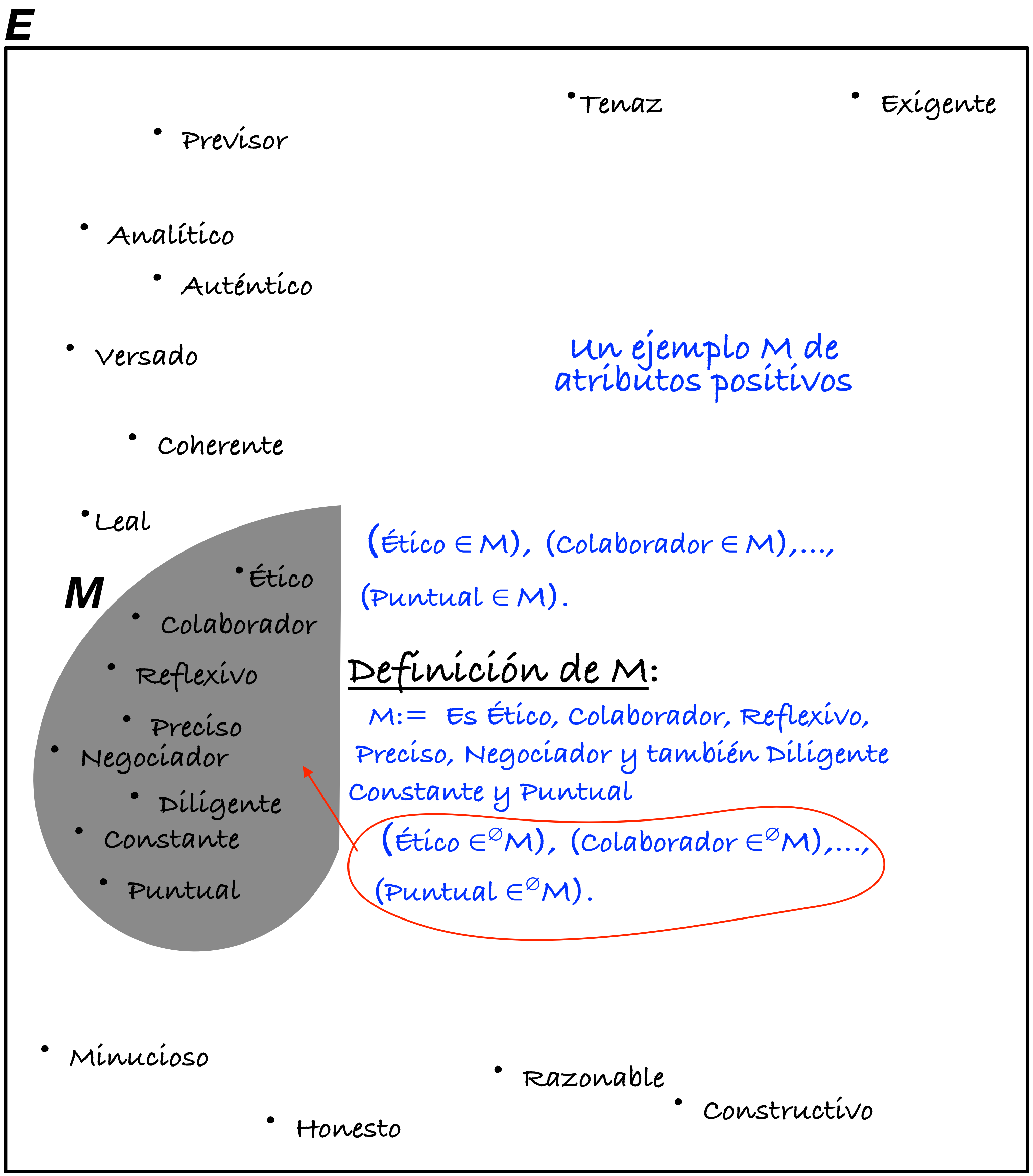




N:= Es Desleal, Hipócrita, Perezoso, Pesimista, Codicioso y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Tramposo

Mediante su complementario en W...

¿Descripción del subconjunto N que no conviene hacer pública... ?



(Ético ∈ M), (Colaborador ∈ M),…,
(Puntual ∈ M).

Definición de M:

M:= Es Ético, Colaborador, Reflexivo, Preciso, Negociador y también Diligente Constante y Puntual

(Ético $\in^{\varnothing}$M), (Colaborador $\in^{\varnothing}$M),…,
(Puntual $\in^{\varnothing}$M).

(Excéntrico ∉ N),…
, (Influenciable ∉ N).

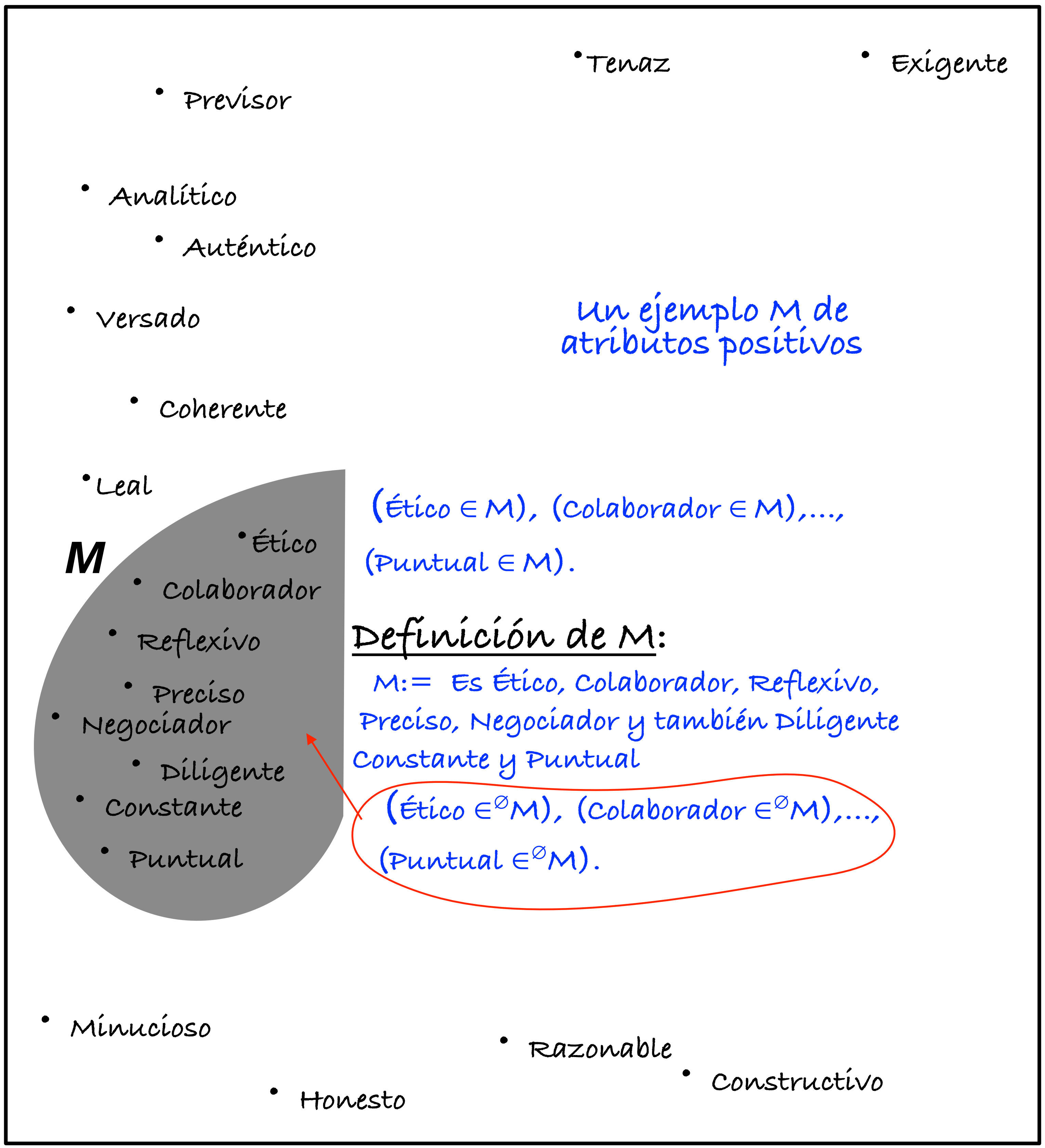
(Excéntrico $\in^{W}$ N),…,
(Influenciable $\in^{W}$ N).

N:= [redacted] Tramposo

Mediante su complementario en W…

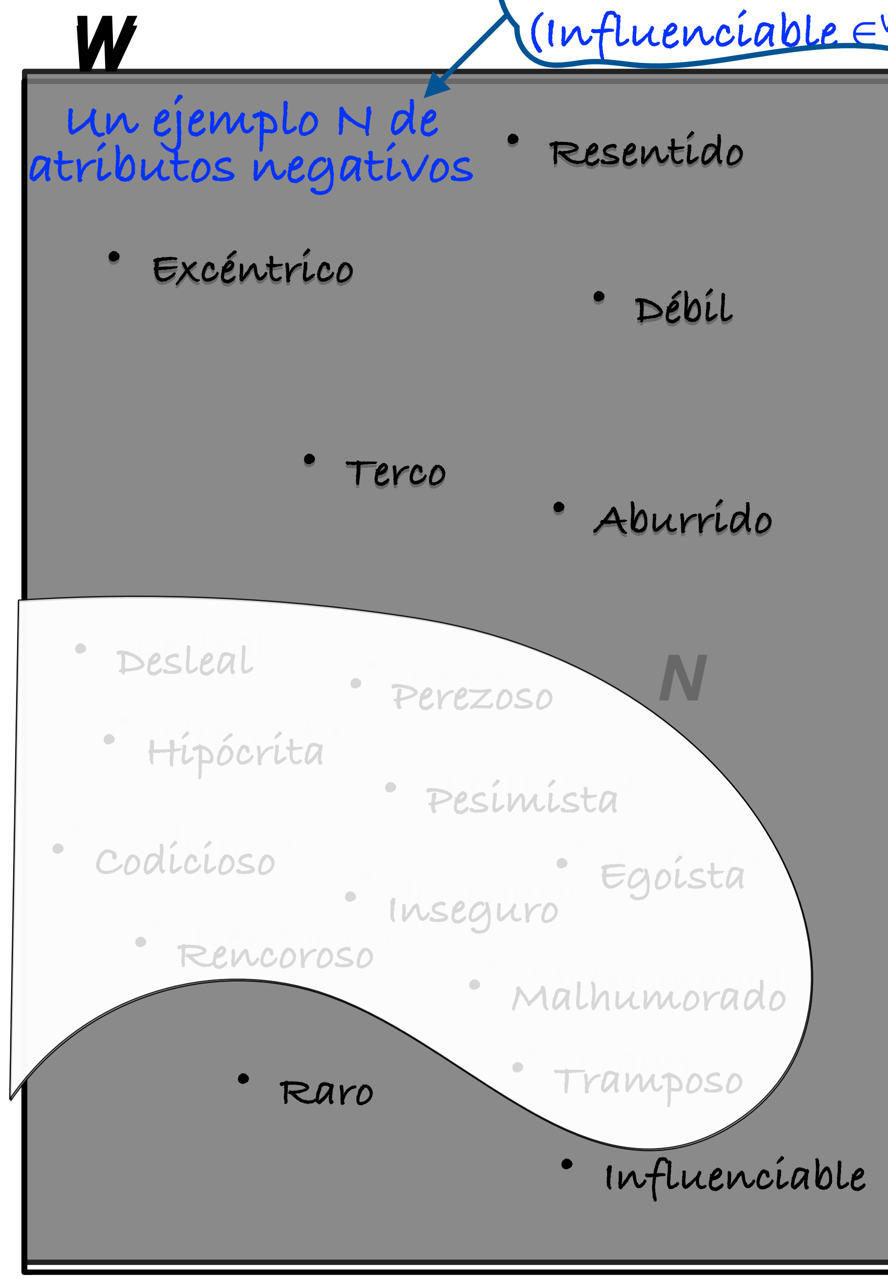
N:= No es Excéntrico, ni Resentido, ni es Débil, ni Terco, tampoco Aburrido, ni Raro y no es Influenciable .

¡Una descripción "cosmética" menos impactante que la inicial!



(Excéntrico ∉ N),…
, (Influenciable ∉ N).

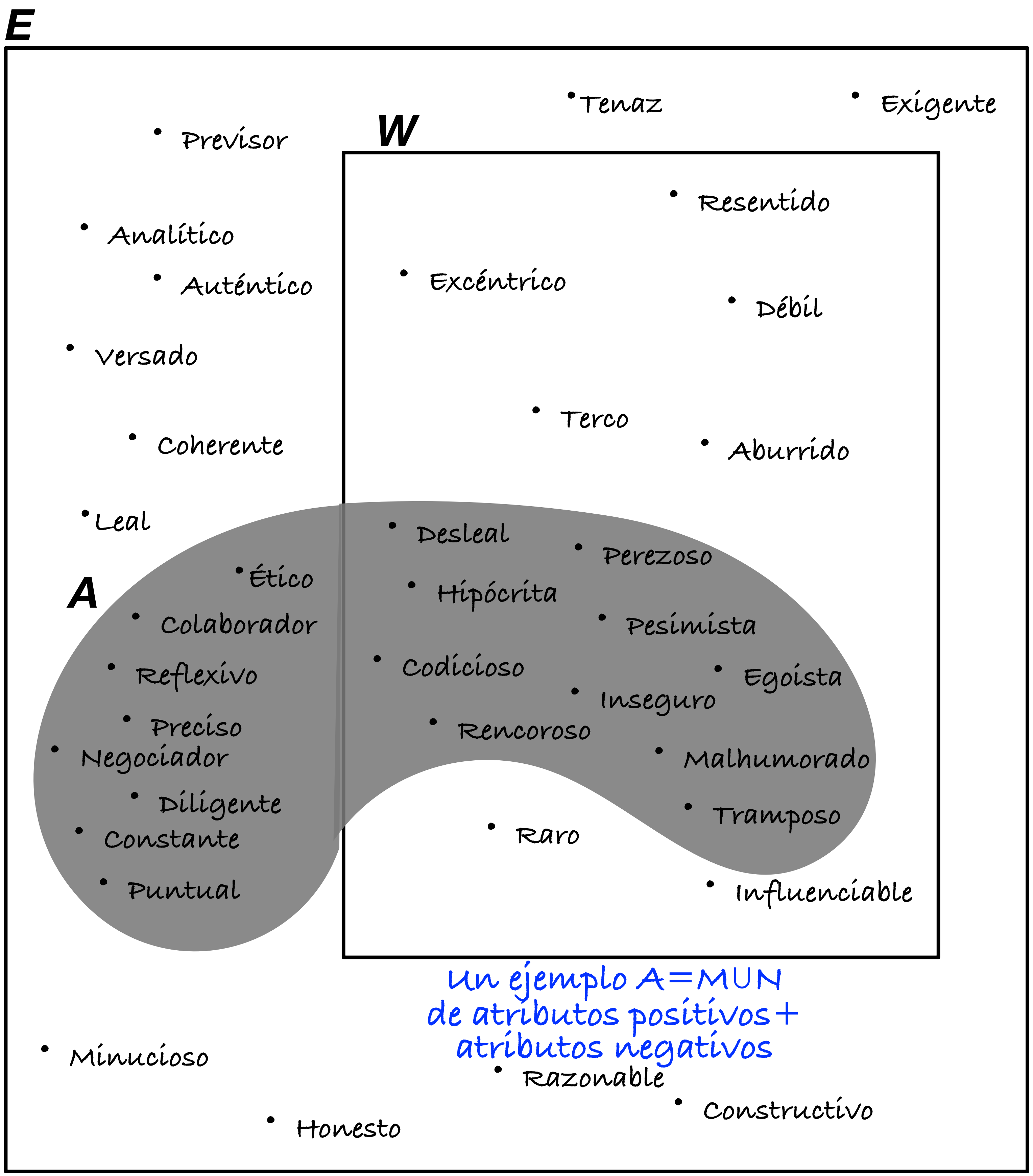
(Excéntrico ∈W N),…,
(Influenciable ∈W N).



N:= [redacted] y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Tramposo

Mediante su complementario en W…
N:= No es Excéntrico, ni Resentido, ni es Débil, ni Terco, tampoco Aburrido, ni Raro y no es Influenciable. (Aunque sabemos como eres…)

¡Una descripción "cosmética" menos impactante que la inicial!



(Excéntrico $\notin$ N),...

, (Influenciable $\notin$ N).

(Excéntrico $\in^{W}$ N),...,

(Influenciable $\in^{W}$ N).

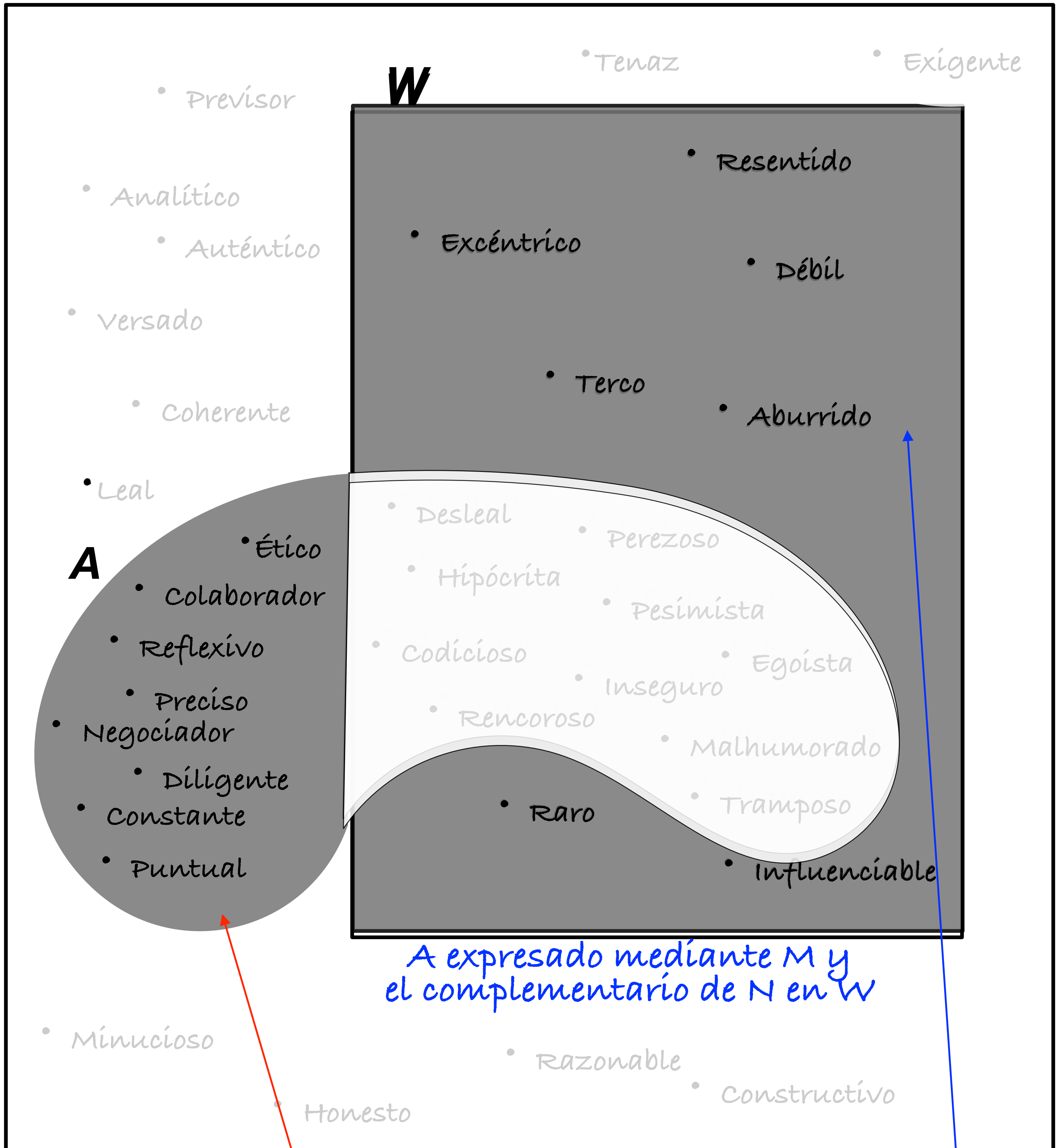
N:= [redacted] y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Tramposo.

Mediante su complementario en W...

N:= No es Excéntrico, ni Resentido, ni es Débil, ni Terco, tampoco Aburrido, ni Raro y no es Influenciable .

¡Una descripción "cosmética" menos impactante que la inicial!

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A\Delta W =$ $(A\cap W_c)\cup(A_c\cap W)$: (Ético $\in^W A$), (Colaborador $\in^W A$),..., (Puntual $\in^W A$), (Excéntrico $\in^W A$),..., (Influenciable $\in^W A$),.

$A\Delta W$

(Excéntrico $\notin$ N),...

, (Influenciable $\notin$ N).

(Excéntrico $\in^W$ N),...,

(Influenciable $\in^W$ N).

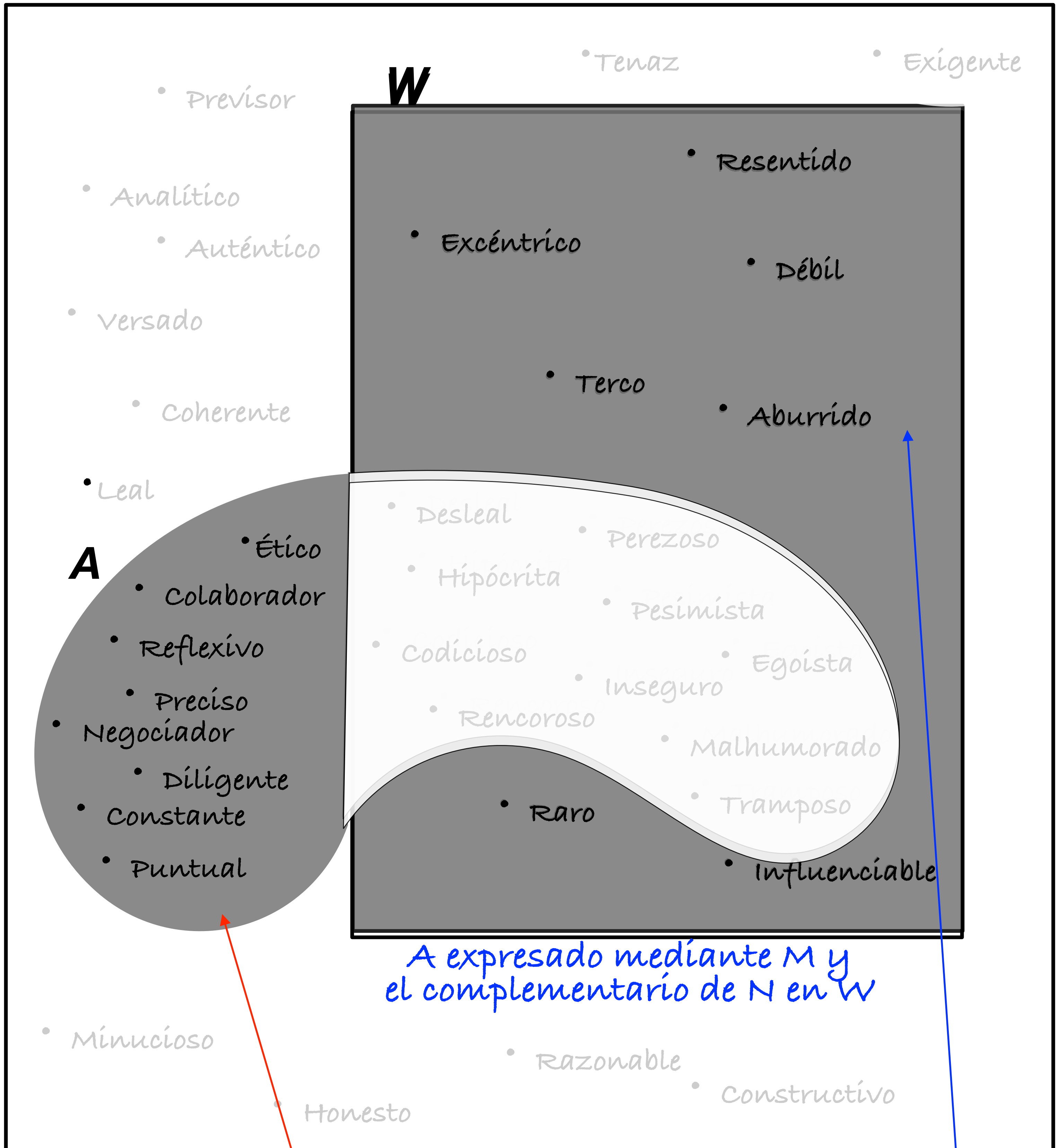
N:= [redacted] y también Egoísta, Inseguro, Rencoroso, Malhumorado, Trampaso

Mediante su complementario en W...

N:= No es Excéntrico, ni Resentido, ni es Débil, ni Terco, tampoco Aburrido, ni Raro y no es Influenciable .

¡Una descripción "cosmética" menos impactante que la inicial!

$E_1 = E \cup W$

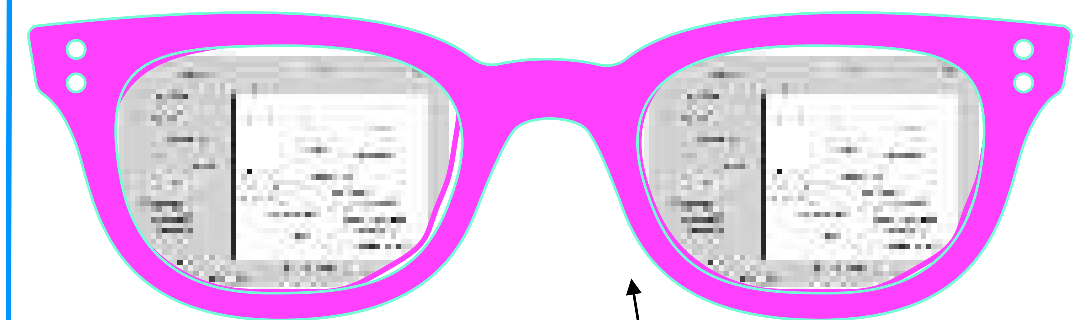


$\in^W(A) = A\Delta W = (A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W A$), (Colaborador $\in^W A$),..., (Puntual $\in^W A$),
(Excéntrico $\in^W A$),..., (Influenciable $\in^W A$),.

$A\Delta W$

(Excéntrico $\notin$ N),...
, (Influenciable $\notin$ N).

(Excéntrico $\in^W$ N),...,
(Influenciable $\in^W$ N).



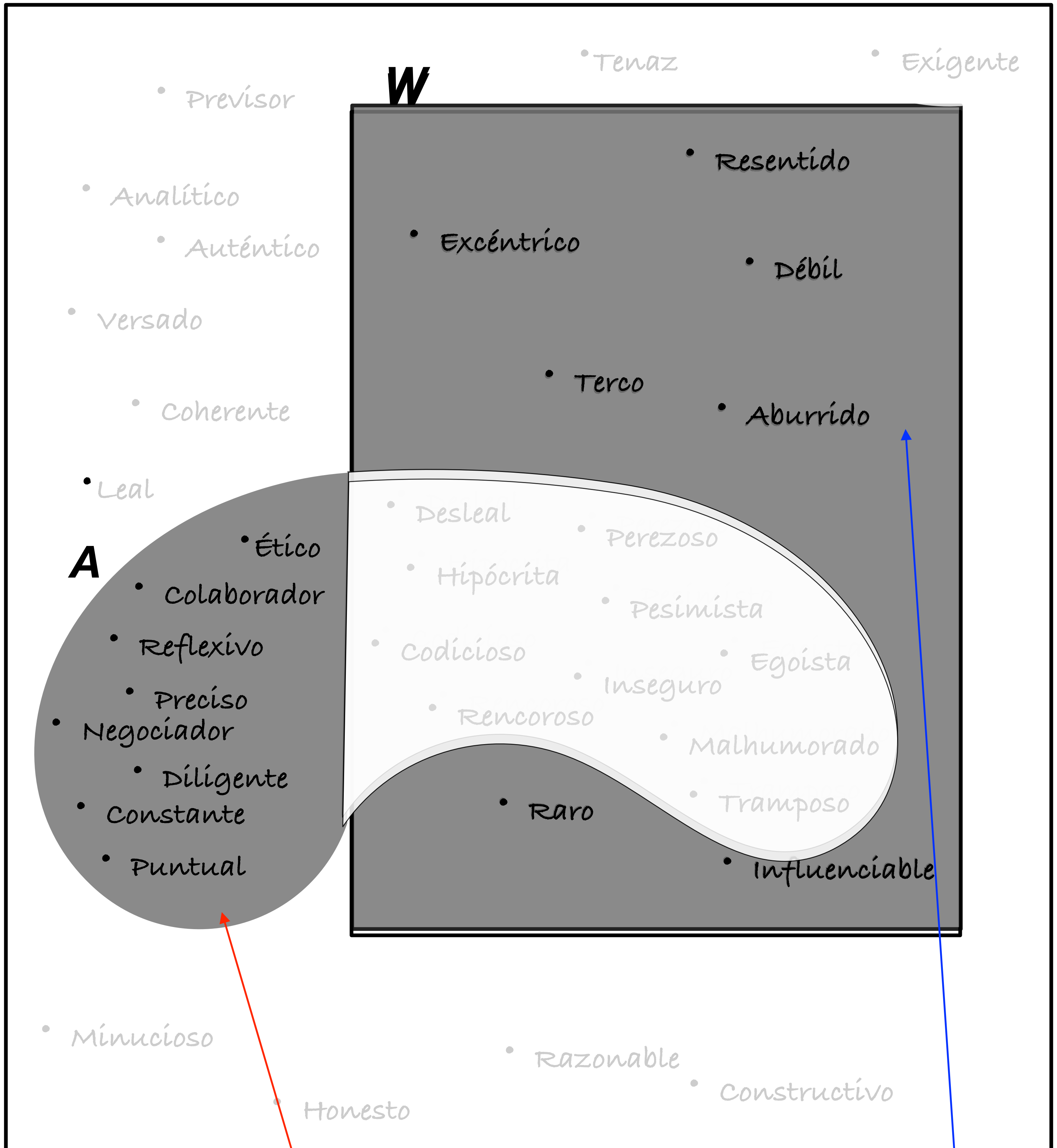
Definición de A desde la perspectiva de W:

$\left\{\right.$ A:= Es Ético, Colaborador, Reflexivo, Preciso, Negociador y también Diligente Constante y Puntual y

No es Excéntrico, ni Resentido, ni es Débil, ni Terco, tampoco Aburrido, ni Raro y no es Influenciable . $\left.\right\}$

¡Una descripción "cosmética" menos impactante que la inicial! 😊

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A\Delta W = (A\cap W^c) \cup (A^c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$A\Delta W$

(Excéntrico $\notin$ N),... , (Influenciable $\notin$ N).

(Excéntrico $\in^W$ N),..., (Influenciable $\in^W$ N).

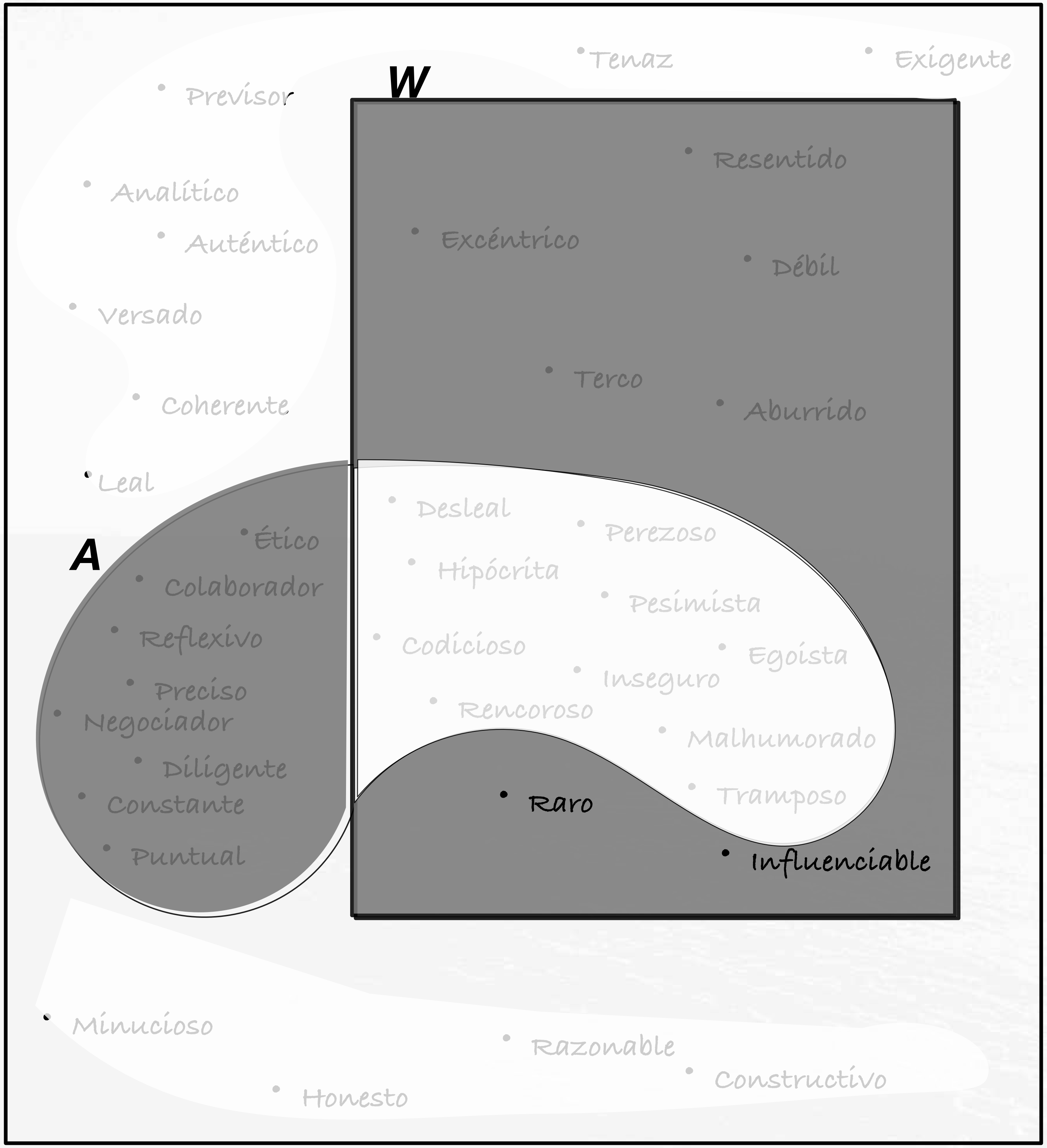
Definición de A desde la perspectiva de W:

$\Big\{$ A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A, Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A, Influenciable$\in^W$A. $\Big\}$

¡Una descripción "cosmética" del subconjunto A! 😊

A continuación la expresión de A mediante la w-unión $\sqcup^{w}$ de w-átomos $\{x\}_{w}$ en el Álgebra de Boole: $((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, W, W^{c}), {}^{c})$

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A \Delta W =$
$(A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W A$), (Colaborador $\in^W A$),..., (Puntual $\in^W A$), (Excéntrico $\in^W A$),..., (Influenciable $\in^W A$),.

$A \Delta W$

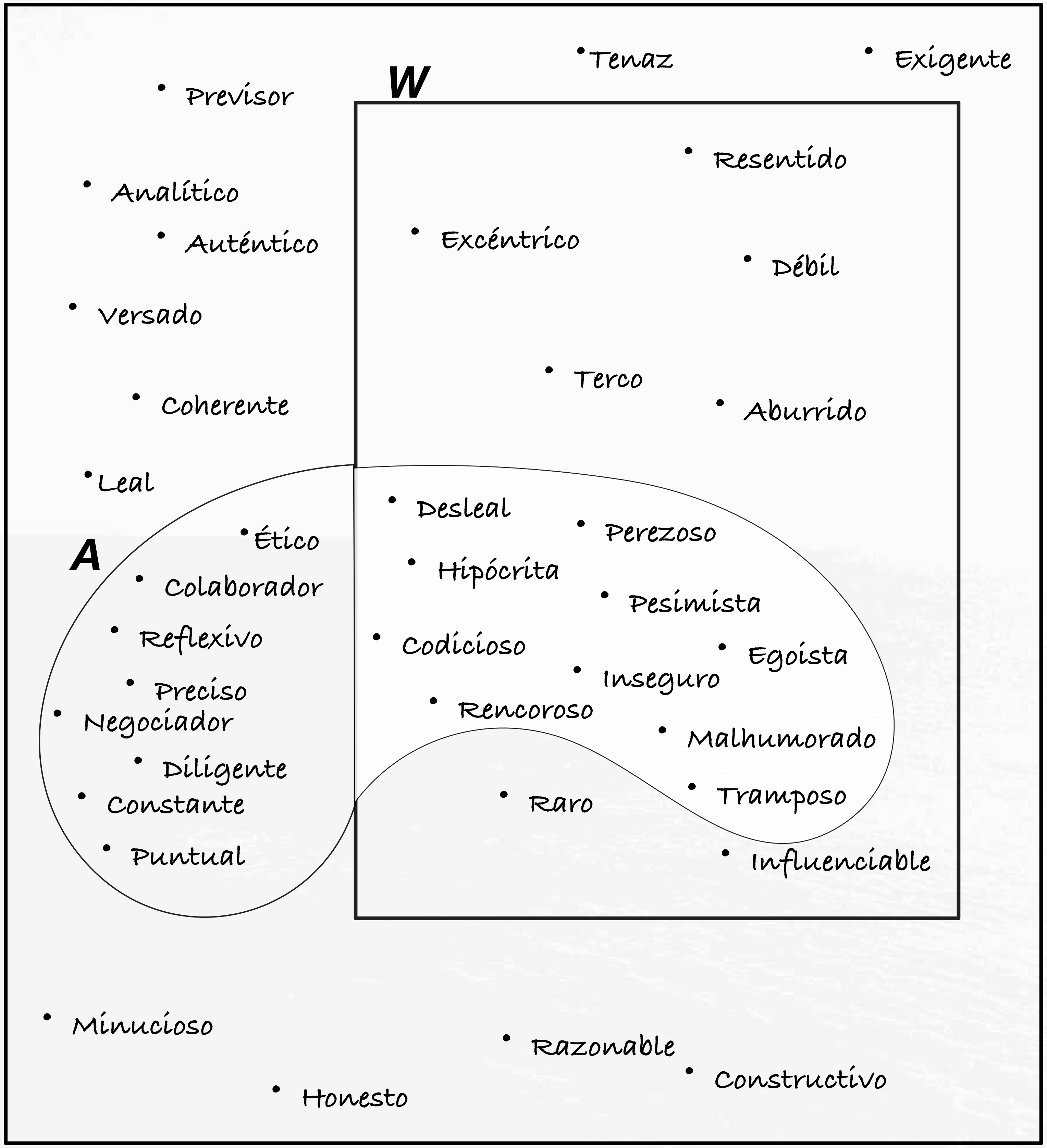
(Excéntrico $\notin$ N),...
, (Influenciable $\notin$ N).

(Excéntrico $\in^W$ N),...,
(Influenciable $\in^W$ N).

<u>Definición de A desde la perspectiva de W:</u>

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A, Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$E_1 = E \cup W$



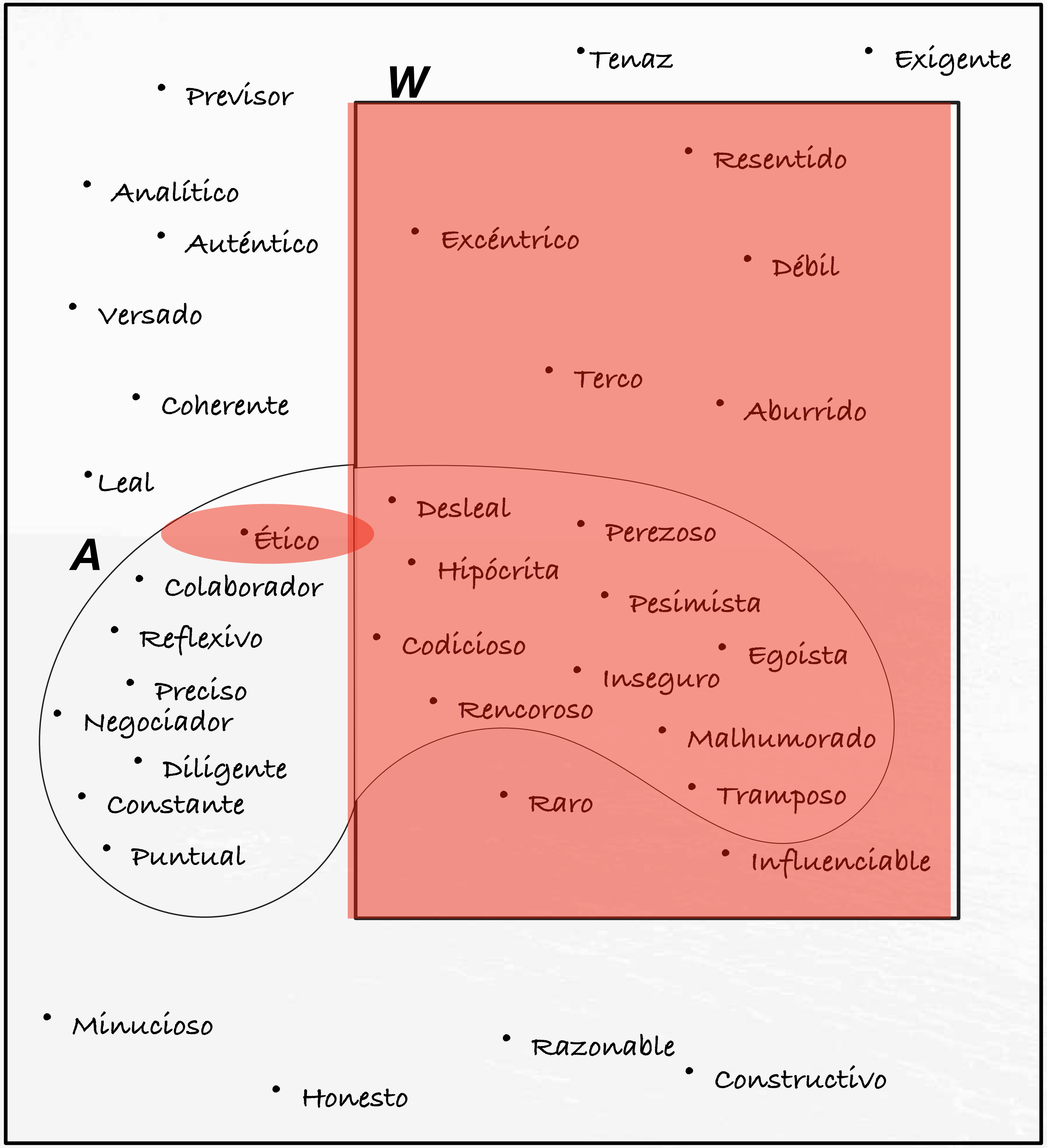
<u>Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:</u>

<u>Definición de A desde la perspectiva de W:</u>

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$E_1 = E \cup W$



Átomos $\{x\}_W$, (w-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

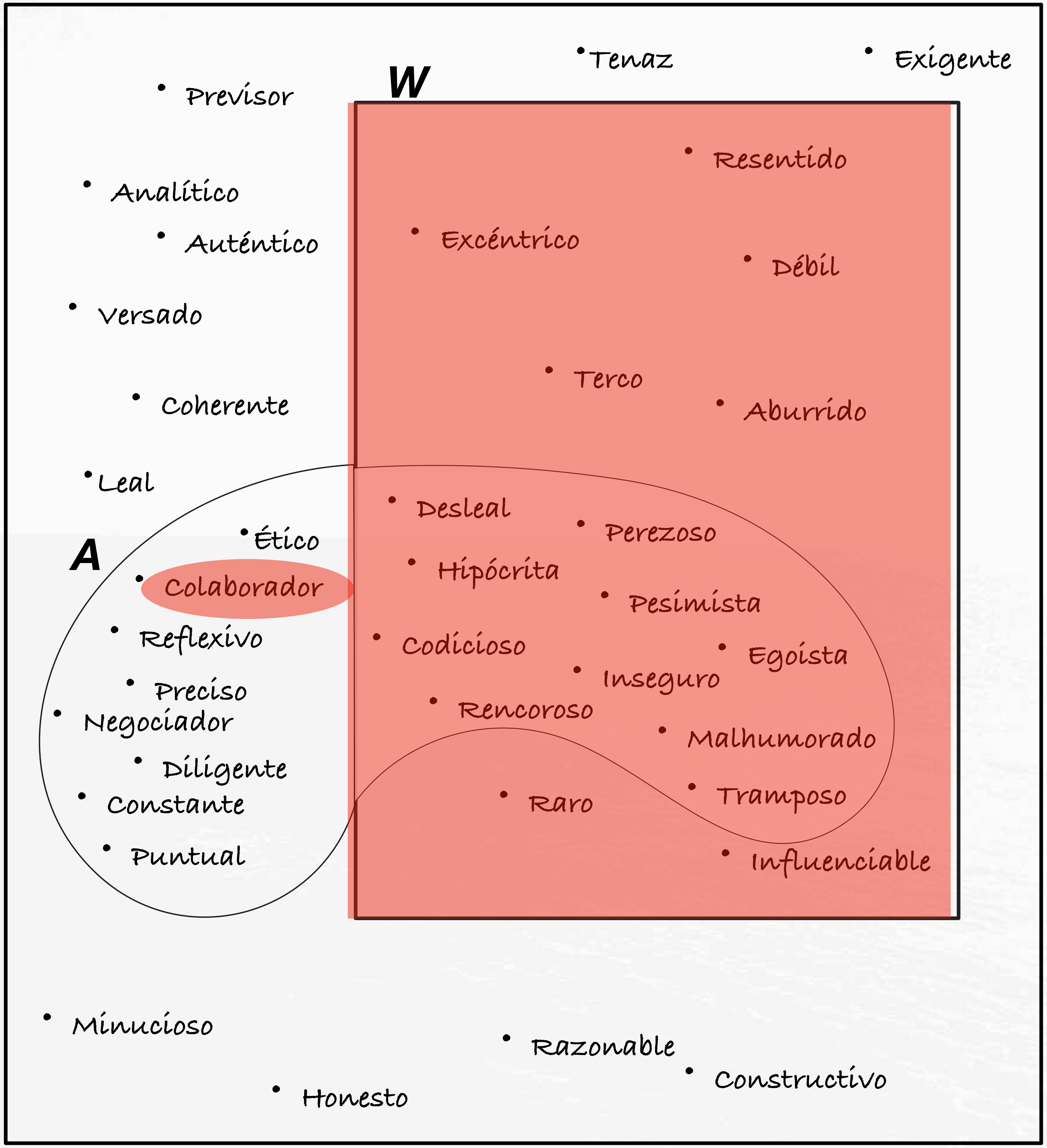
$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A, Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A \Delta W =$
$(A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),…, (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),…, (Influenciable $\in^W$ A),.

Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

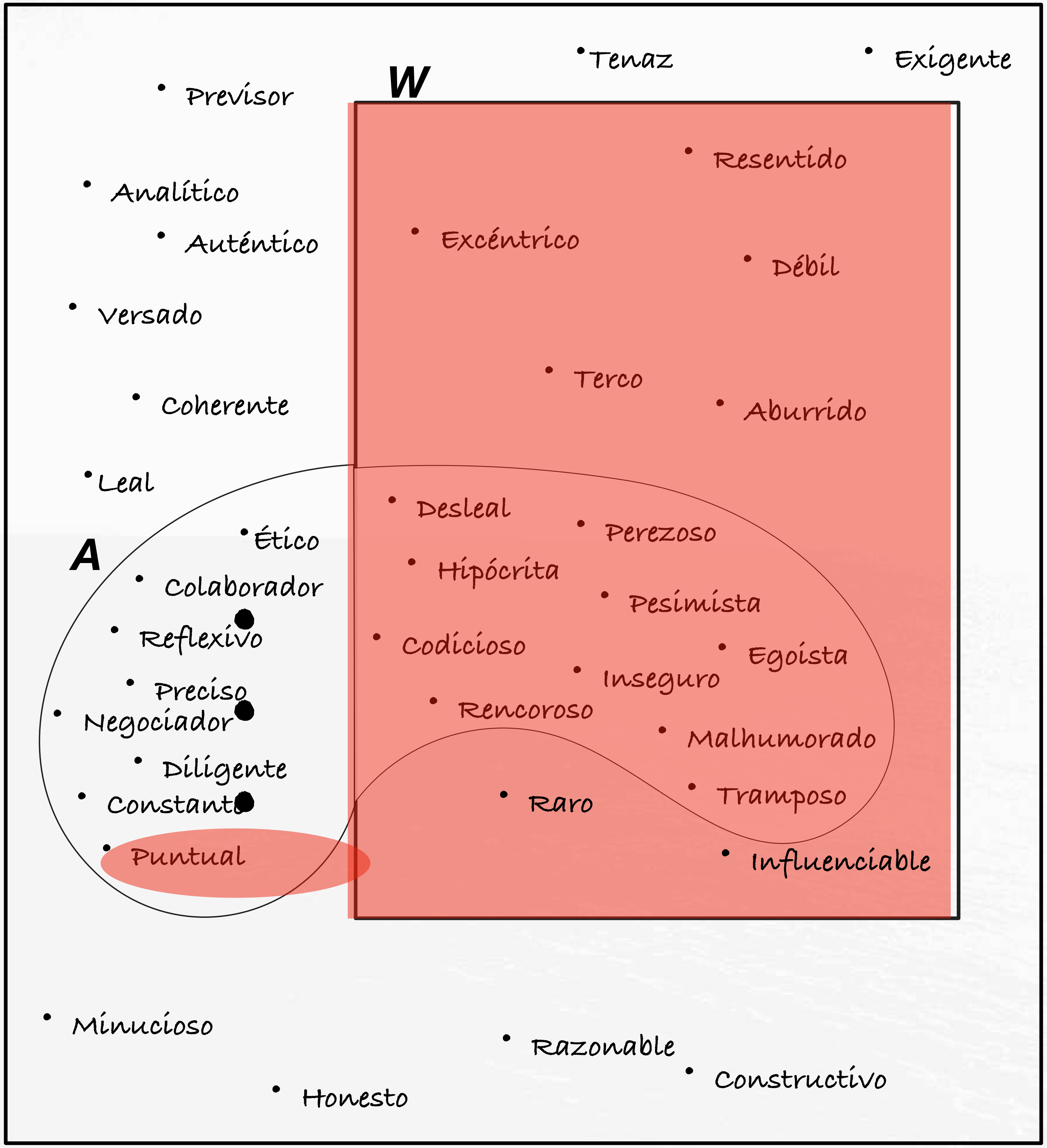
$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

$\{\text{Colaborador}\}_W = (W \cup \{\text{Colaborador}\}) = (W + \text{Colaborador})$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A\Delta W =$
$(A\cap W^c) \cup (A^c\cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),…, (Puntual $\in^W$ A),
(Excéntrico $\in^W$ A),…, (Influenciable $\in^W$ A),.

Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{$Ético$\}_W = (W \cup \{$Ético$\}) = (W+$Ético$)$

$\{$Colaborador$\}_W = (W \cup \{$Colaborador$\}) = (W+$Colaborador$)$

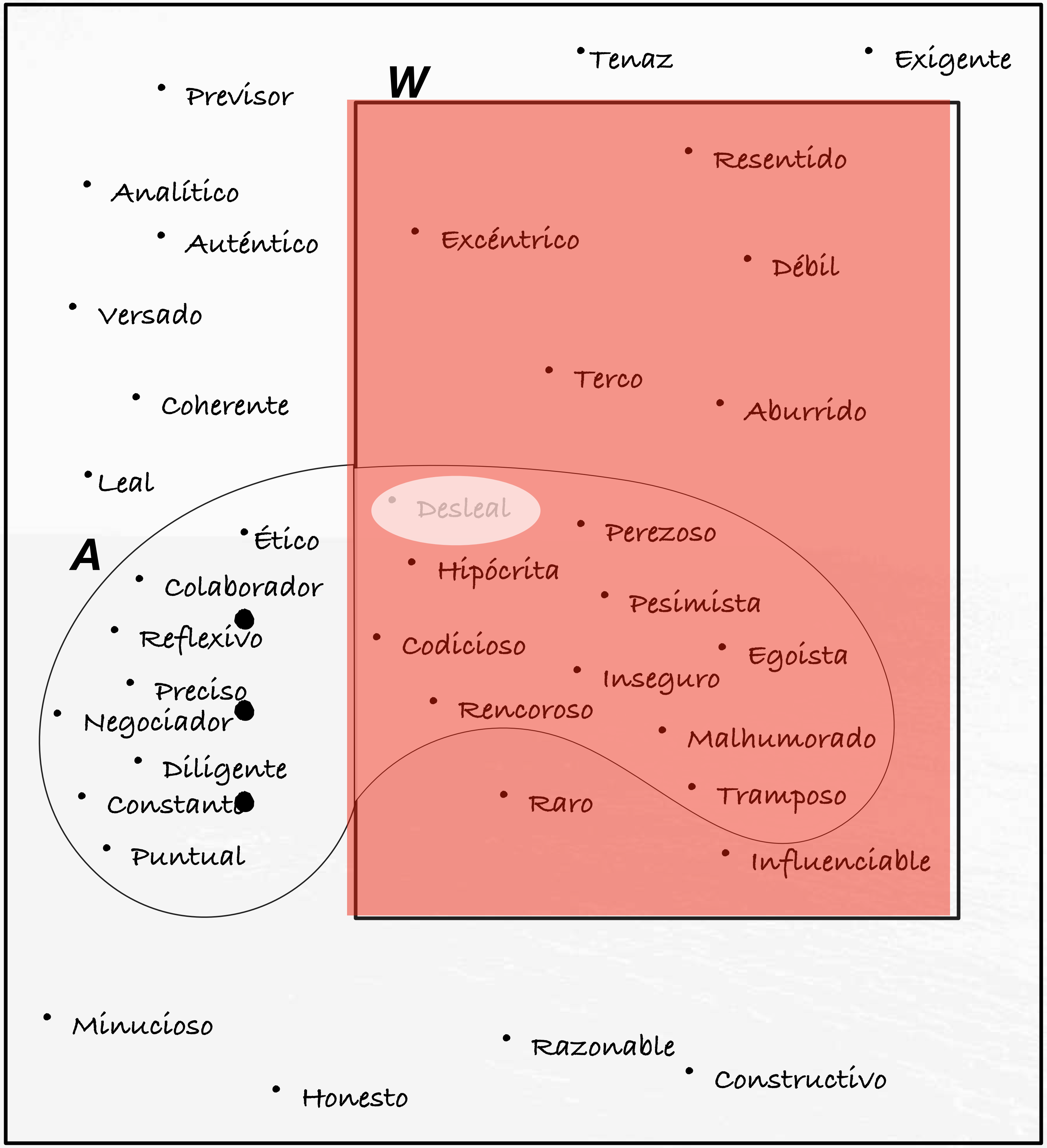
. . .

$\{$Puntual$\}_W = (W \cup \{$Puntual$\}) = (W+$Puntual$)$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$E_1 = E \cup W$



Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

$\{\text{Colaborador}\}_W = (W \cup \{\text{Colaborador}\}) = (W + \text{Colaborador})$

. . .

$\{\text{Puntual}\}_W = (W \cup \{\text{Puntual}\}) = (W + \text{Puntual})$

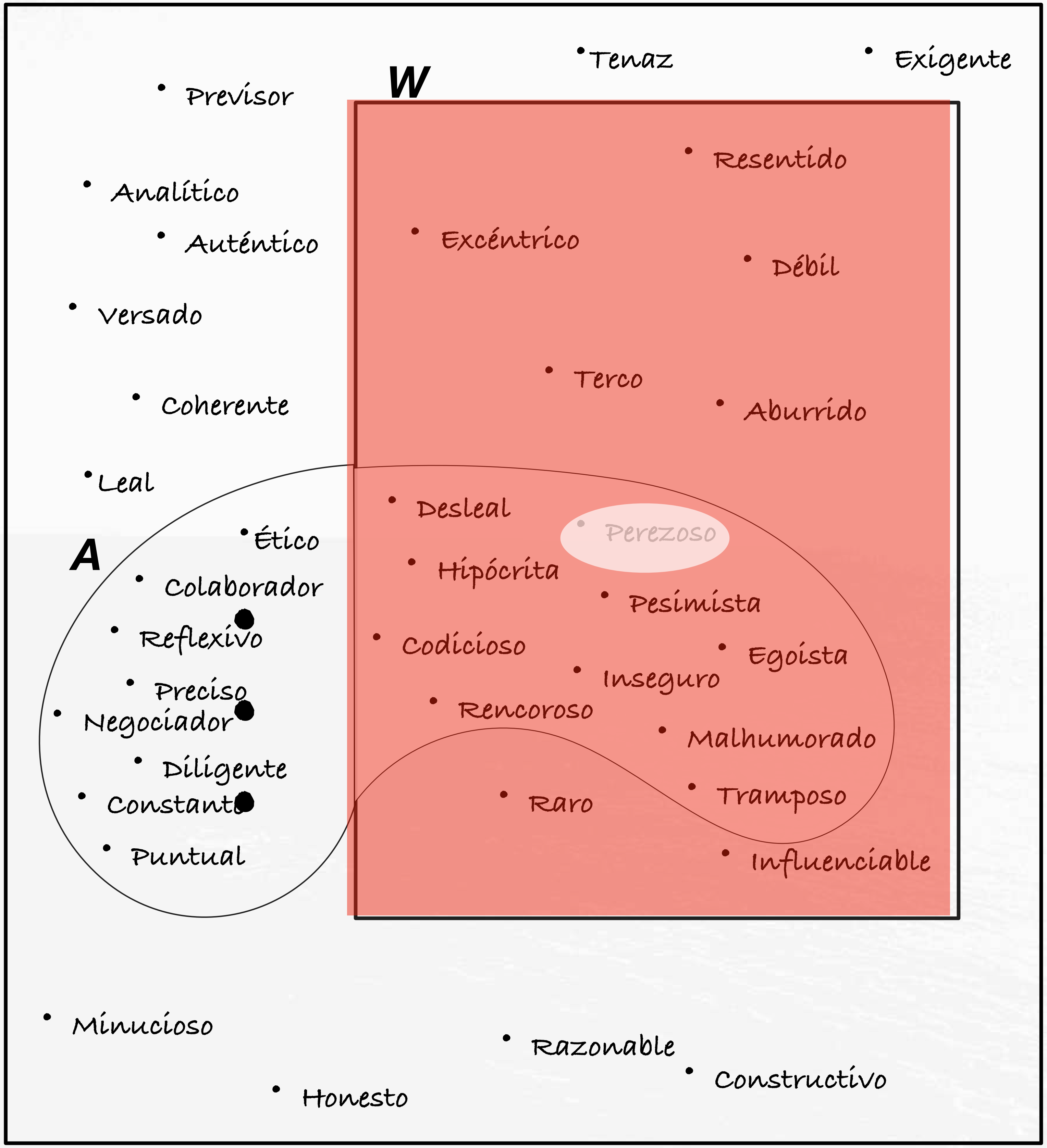
$\{\text{Desleal}\}_W = (W \cap \{\text{Desleal}\}^c) = (W - \text{Desleal})$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$E_1 = E \cup W$



Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

$\{\text{Colaborador}\}_W = (W \cup \{\text{Colaborador}\}) = (W + \text{Colaborador})$

. . .

$\{\text{Puntual}\}_W = (W \cup \{\text{Puntual}\}) = (W + \text{Puntual})$

$\{\text{Desleal}\}_W = (W \cap \{\text{Desleal}\}^c) = (W - \text{Desleal})$

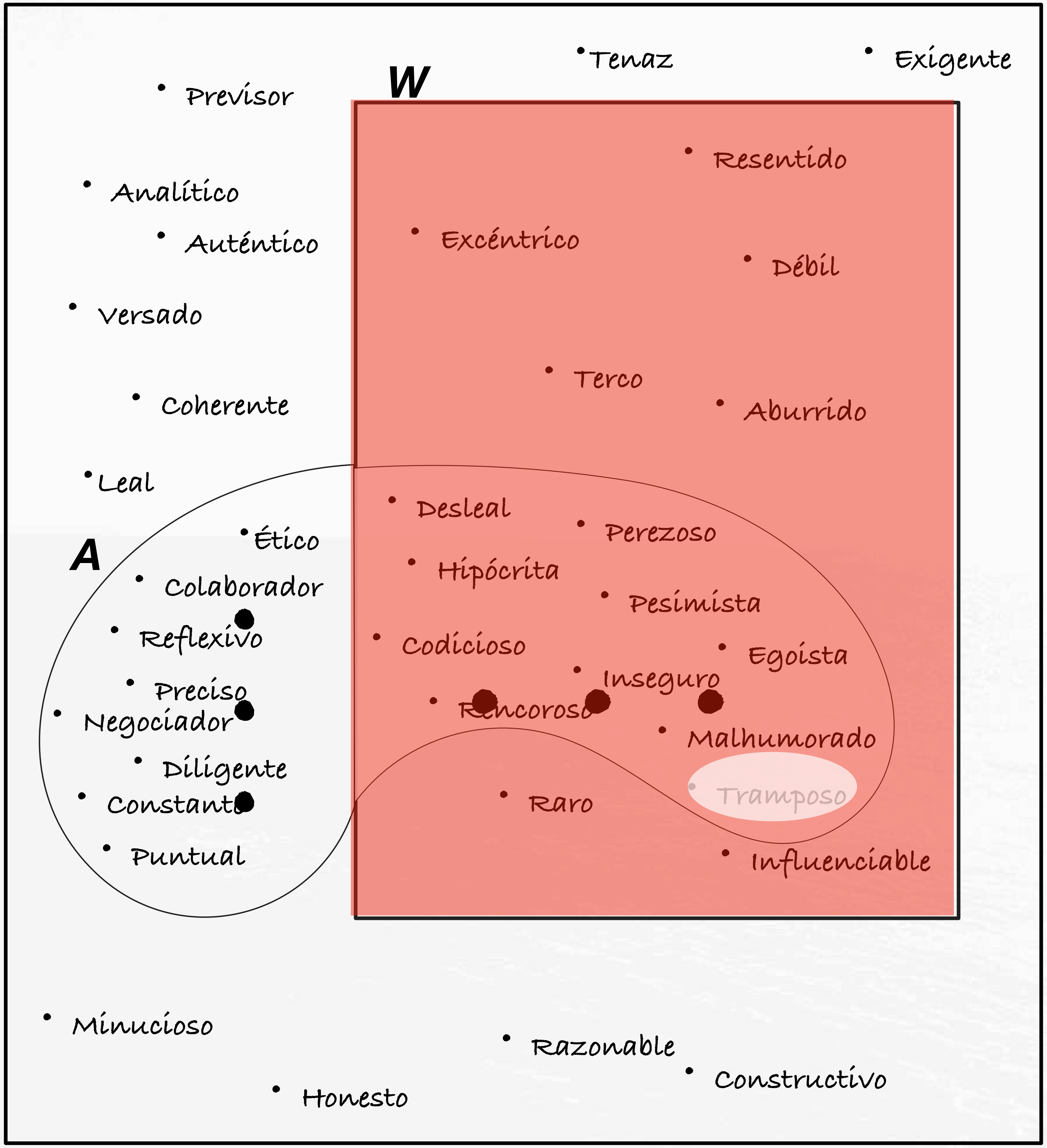
$\{\text{Perezoso}\}_W = (W \cap \{\text{Perezoso}\}^c) = (W - \text{Perezoso})$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A, Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$E_1 = E \cup W$



Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

$\{\text{Colaborador}\}_W = (W \cup \{\text{Colaborador}\}) = (W + \text{Colaborador})$

. . .

$\{\text{Puntual}\}_W = (W \cup \{\text{Puntual}\}) = (W + \text{Puntual})$

$\{\text{Desleal}\}_W = (W \cap \{\text{Desleal}\}^c) = (W - \text{Desleal})$

$\{\text{Perezoso}\}_W = (W \cap \{\text{Perezoso}\}^c) = (W - \text{Perezoso})$

. . .

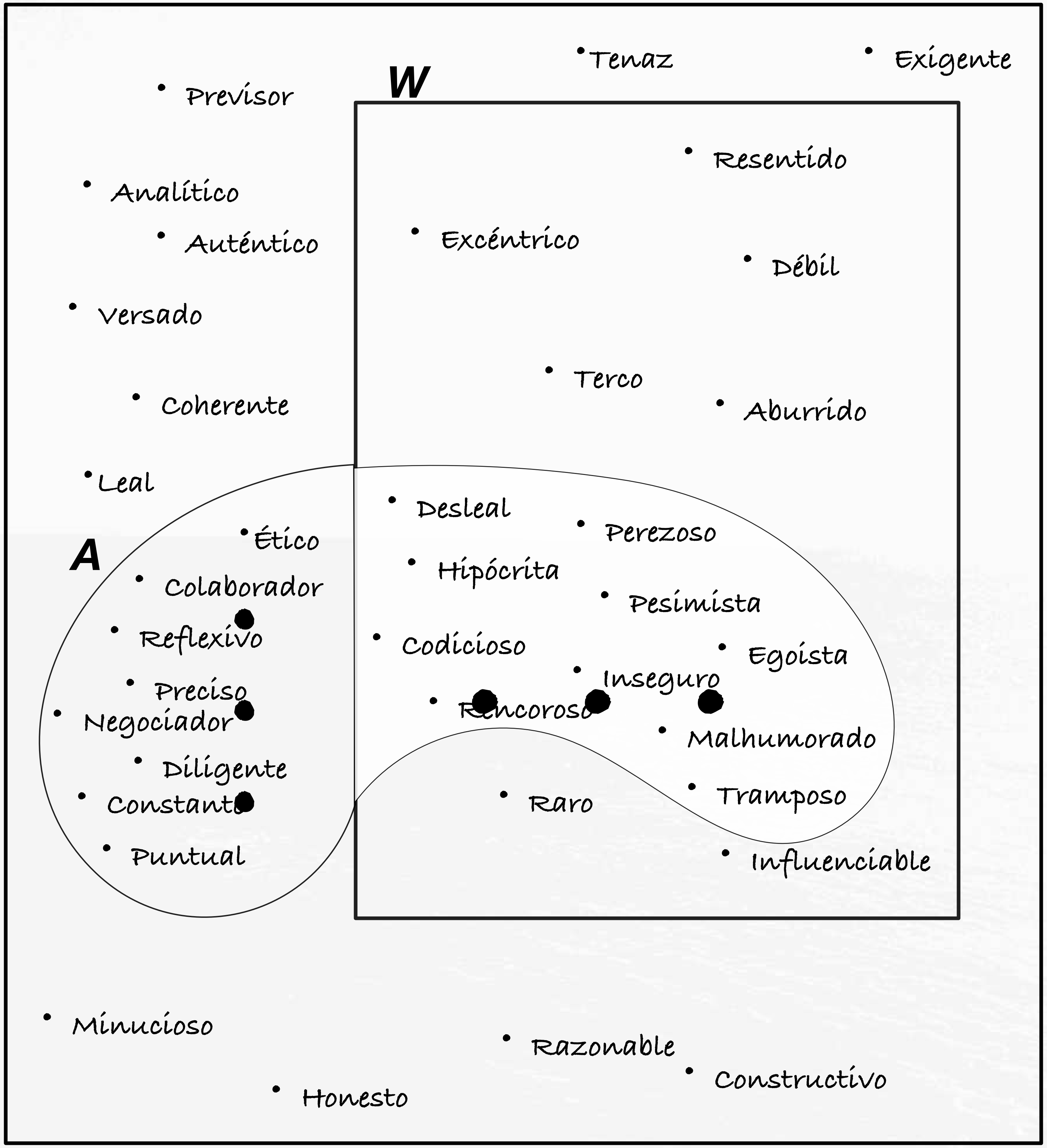
$\{\text{Tramposo}\}_W = (W \cap \{\text{Tramposo}\}^c) = (W - \text{Tramposo})$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

$E_1 = E \cup W$



$\in^W(A) = A \Delta W =$
$(A \cap W_c) \cup (A_c \cap W)$: (Ético $\in^W$ A), (Colaborador $\in^W$ A),..., (Puntual $\in^W$ A), (Excéntrico $\in^W$ A),..., (Influenciable $\in^W$ A),.

Átomos $\{x\}_W$, (W-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{\text{Ético}\}_W = (W \cup \{\text{Ético}\}) = (W + \text{Ético})$

$\{\text{Colaborador}\}_W = (W \cup \{\text{Colaborador}\}) = (W + \text{Colaborador})$

. . .

$\{\text{Puntual}\}_W = (W \cup \{\text{Puntual}\}) = (W + \text{Puntual})$

$\{\text{Desleal}\}_W = (W \cap \{\text{Desleal}\}^c) = (W - \text{Desleal})$

$\{\text{Perezoso}\}_W = (W \cap \{\text{Perezoso}\}^c) = (W - \text{Perezoso})$

. . .

$\{\text{Tramposo}\}_W = (W \cap \{\text{Tramposo}\}^c) = (W - \text{Tramposo})$

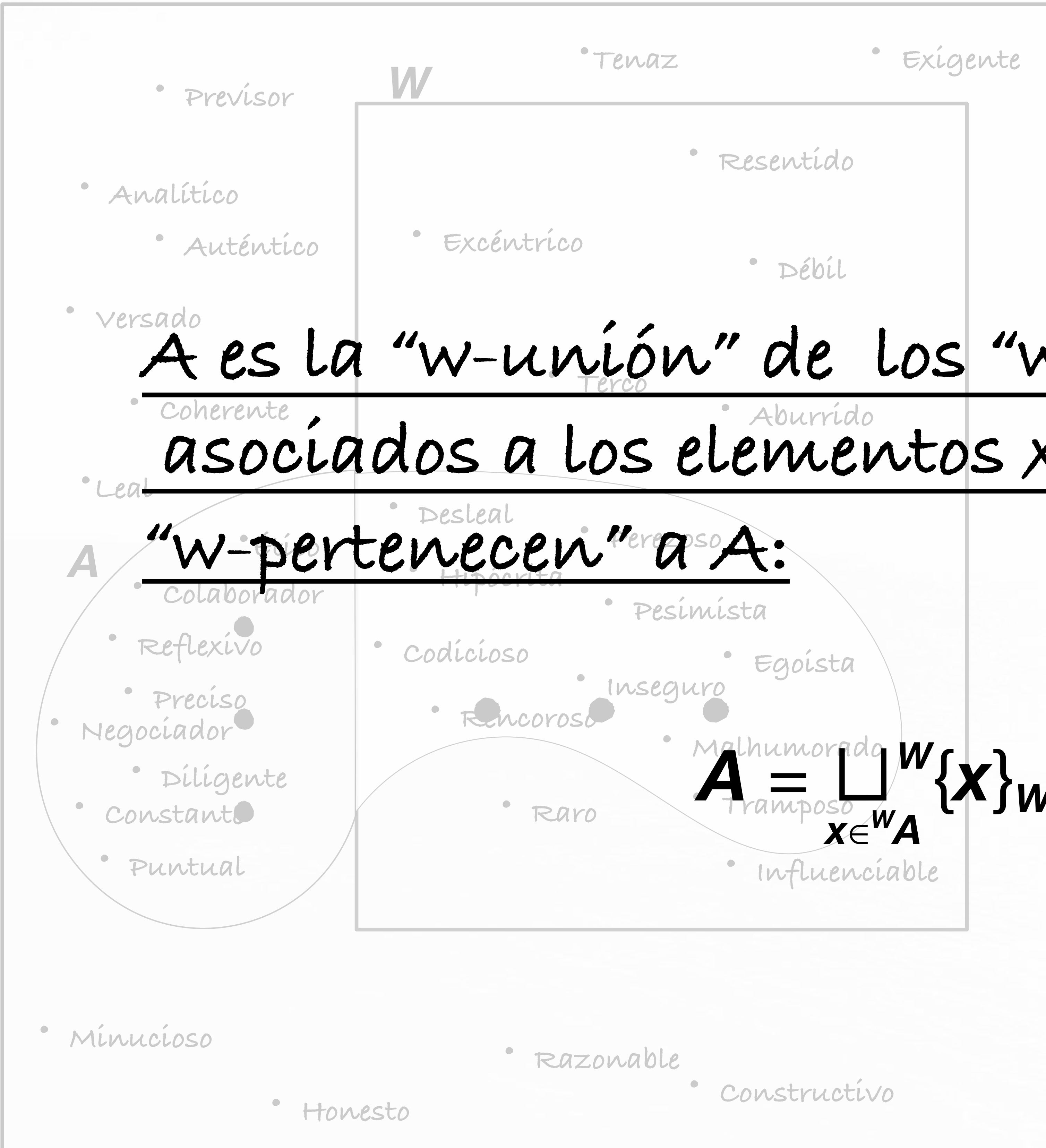
Es decir, al igual que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \ldots$$

Definición de A desde la perspectiva de W:

A:= Ético$\in^W$A, Colaborador$\in^W$A, Reflexivo$\in^W$A,Preciso$\in^W$A, Negociador$\in^W$A, Diligente$\in^W$A, Constante$\in^W$A, Puntual$\in^W$A, Excéntrico$\in^W$A Resentido$\in^W$A, Débil$\in^W$A, Terco$\in^W$A, Aburrido$\in^W$A, Raro$\in^W$A , Influenciable$\in^W$A.

$E_1 = E \cup W$



A es la "w-unión" de los "w-singletones" $\{x\}_W$ asociados a los elementos x de E_1 que "w-pertenecen" a A:

$$A = \bigsqcup_{x \in^W A}^{W} \{x\}_W$$

Átomos $\{x\}_W$, (w-singletones), de $(P(E1), \sqsubseteq^W)$ que están "W-incluidos" en A:

$\{Ético\}_W = (W \cup \{Ético\}) = (W+Ético)$

$\{Colaborador\}_W = (W \cup \{Colaborador\}) = (W+Colaborador)$

...

$\{Puntual\}_W = (W \cup \{Puntual\}) = (W+Puntual)$

$\{Desleal\}_W = (W \cap \{Desleal\}^c) = (W-Desleal)$

$\{Perezoso\}_W = (W \cap \{Perezoso\}^c) = (W-Perezoso)$

...

$\{Tramposo\}_W = (W \cap \{Tramposo\}^c) = (W-Tramposo)$

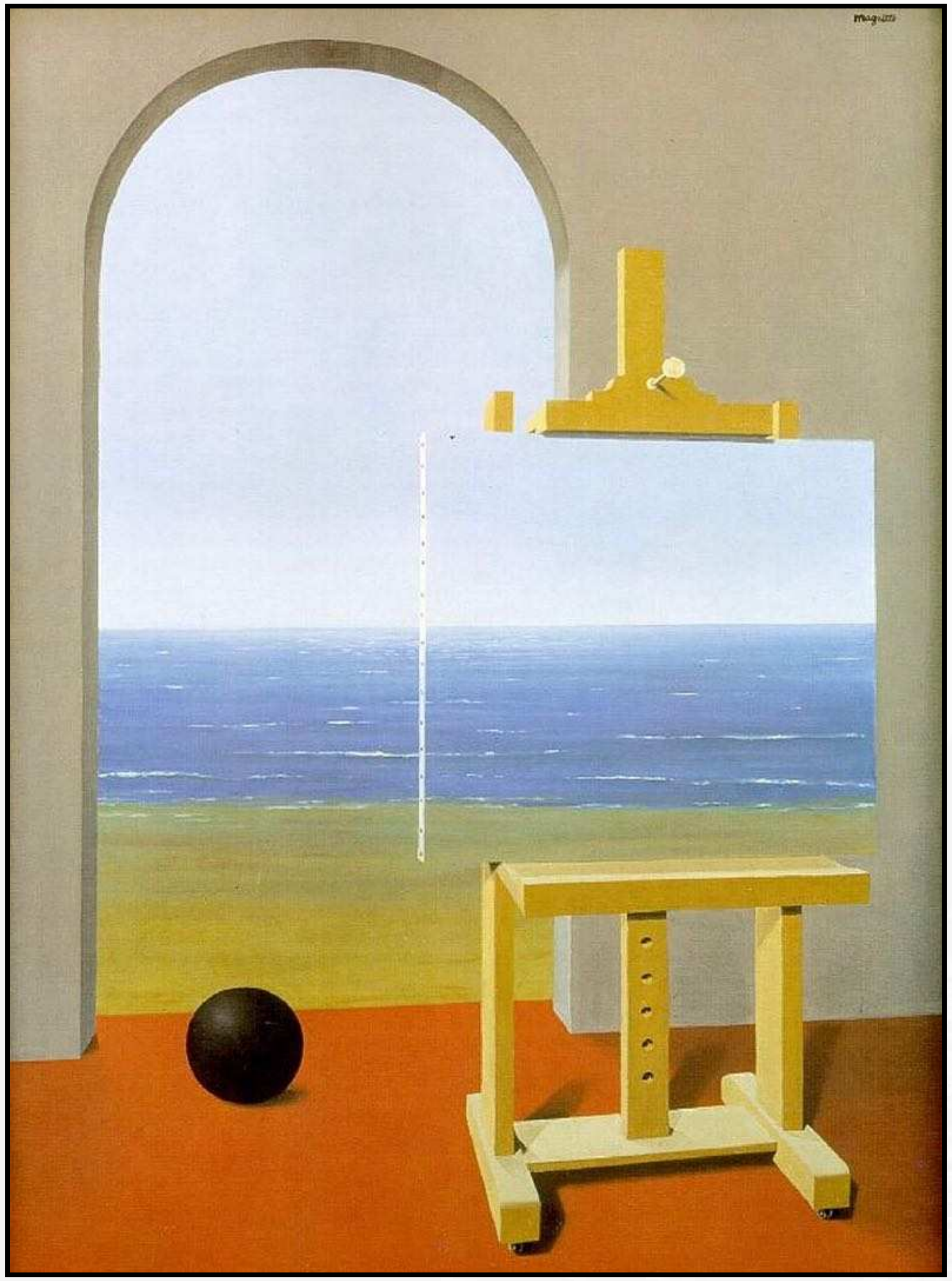
Definición de A desde la perspectiva de W:

$A = [(W+Ético) \cap \ldots \cap (W+Puntual) \cap$
$\cap (W-Desleal) \cap \ldots \cap (W-Tramposo)] \cup$
$\cup [W \cap [(W+Ético) \cup \ldots \cup (W+Puntual) \cup$
$\cup (W-Desleal) \cup \ldots \cup (W-Tramposo)]]$

$\in^W(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$: $(Ético \in^W A)$, $(Colaborador \in^W A)$,..., $(Puntual \in^W A)$, $(Excéntrico \in^W A)$,..., $(Influenciable \in^W A)$,.

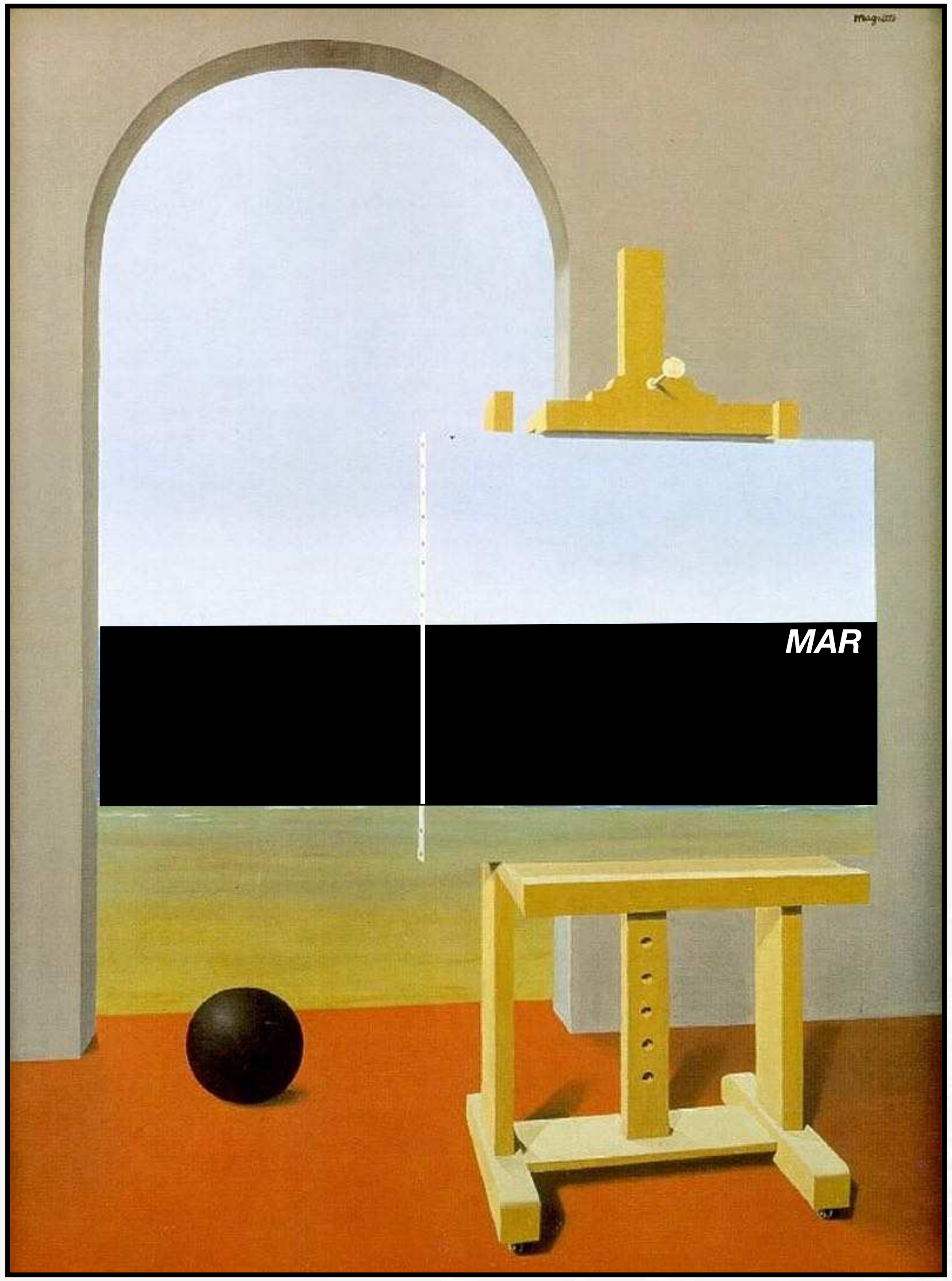
Un ejemplo gráfico : w-pertenencia $\in^E$

E



R. Magritte. "La condición humana"

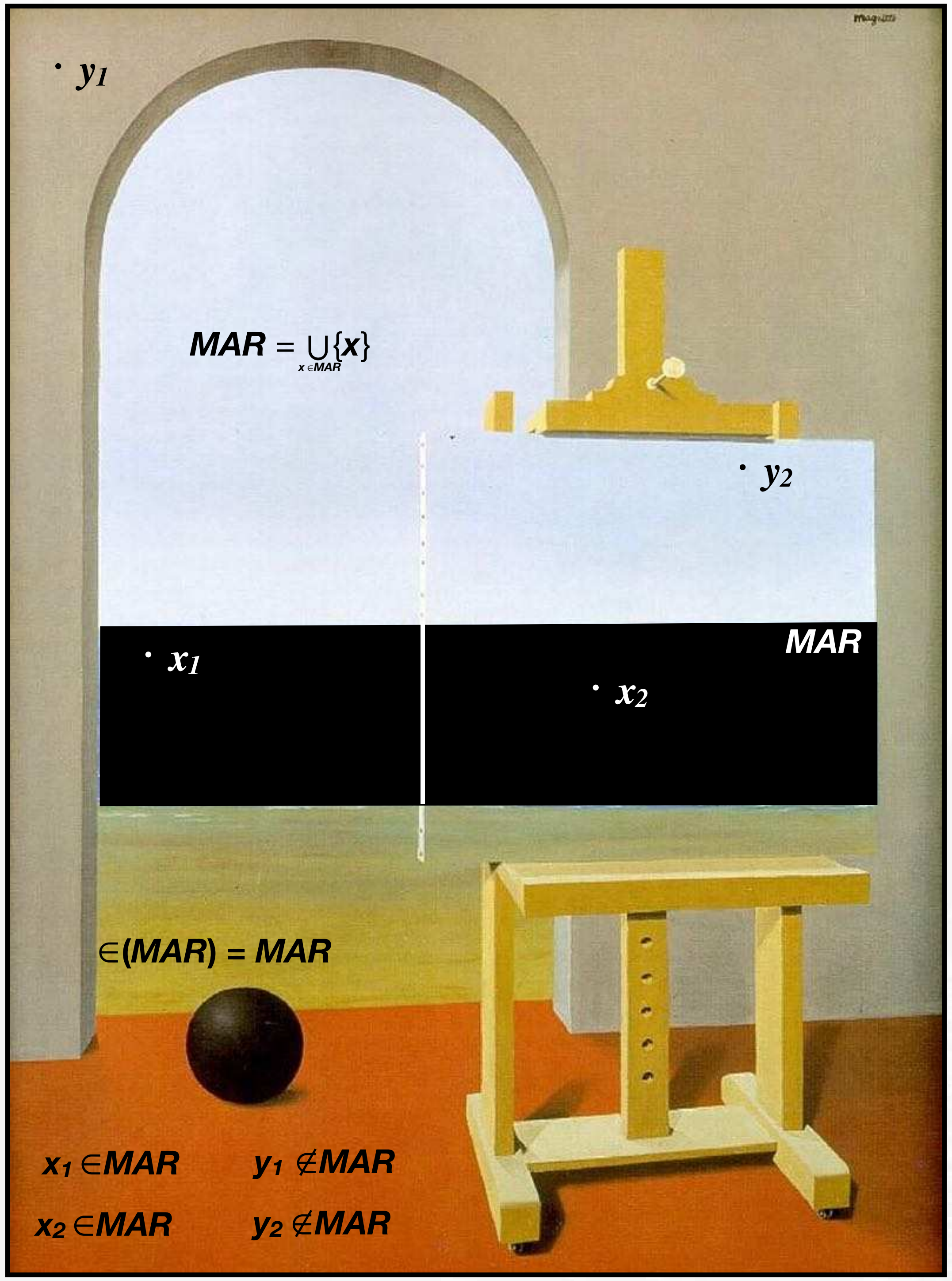
E



R. Magritte. "La condición humana"

Subconjunto "*MAR*" de la imagen *E*

E



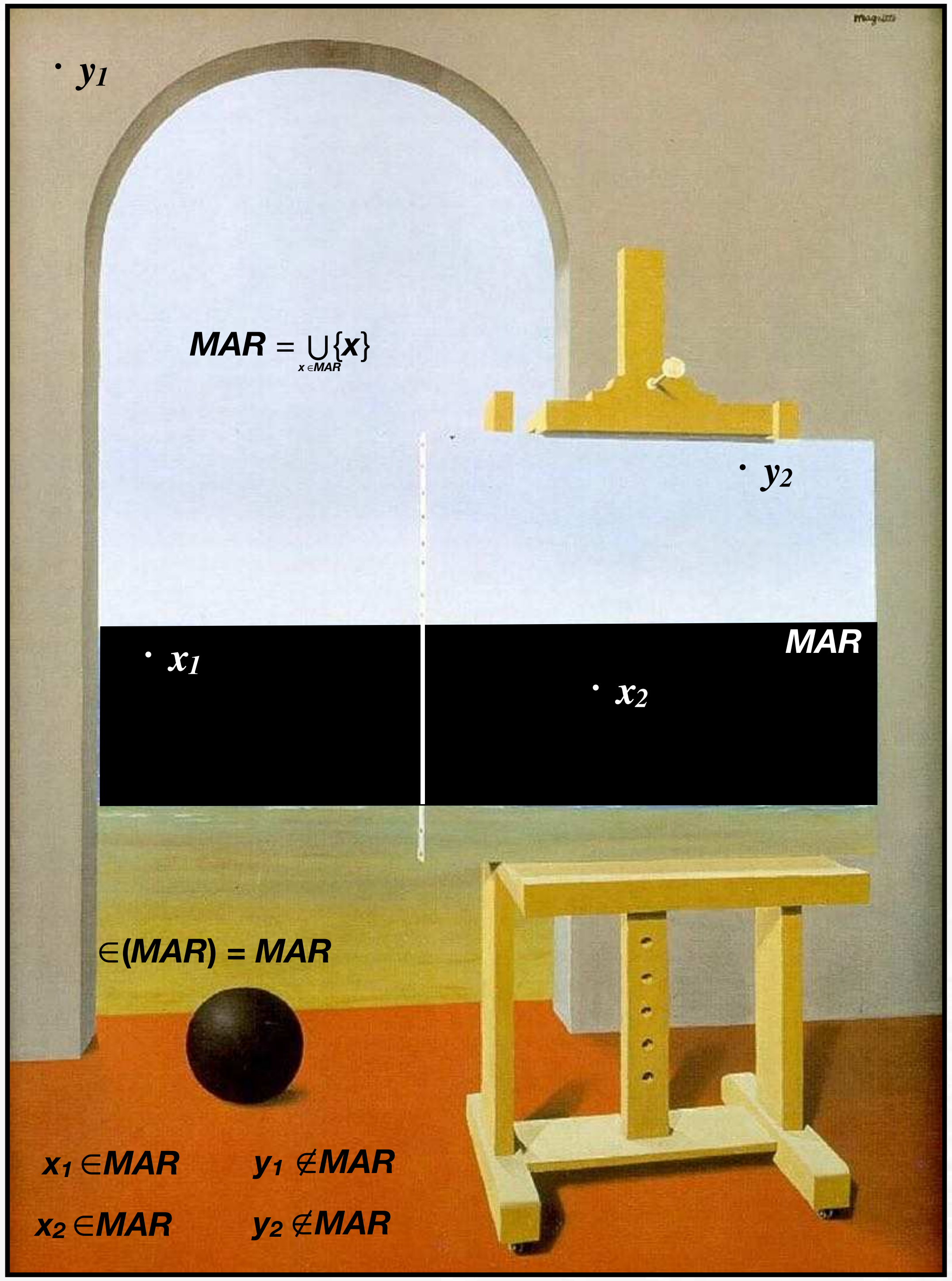
R. Magritte. “La condición humana”

Subconjunto “*MAR*” de la imagen *E*

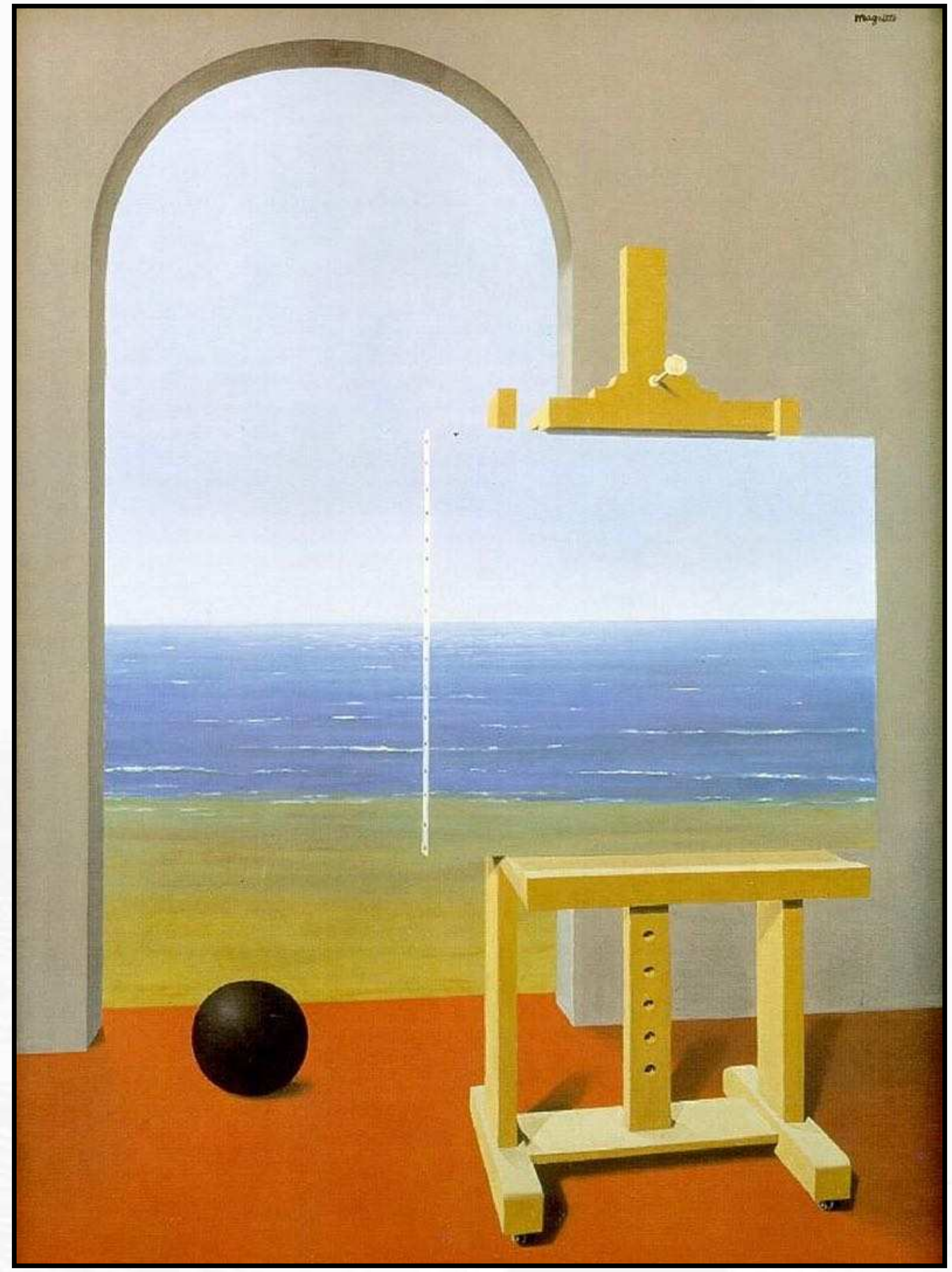
(Es la perspectiva usual, que asociamos a $\varnothing$):

$MAR = (MAR \,\Delta\, \varnothing)$

E



E



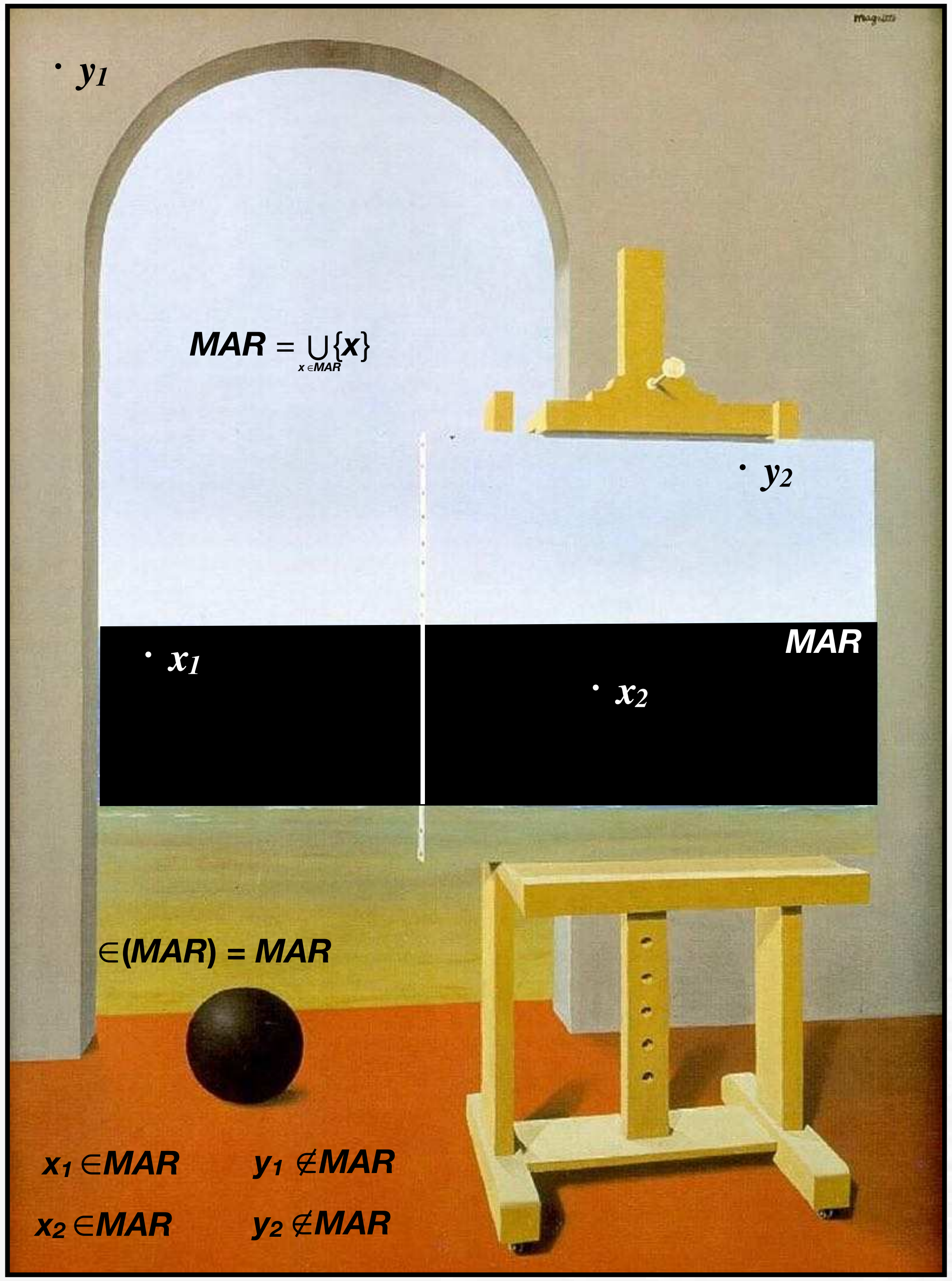
R. Magritte. “La condición humana”

Subconjunto “*MAR*” de la imagen *E*

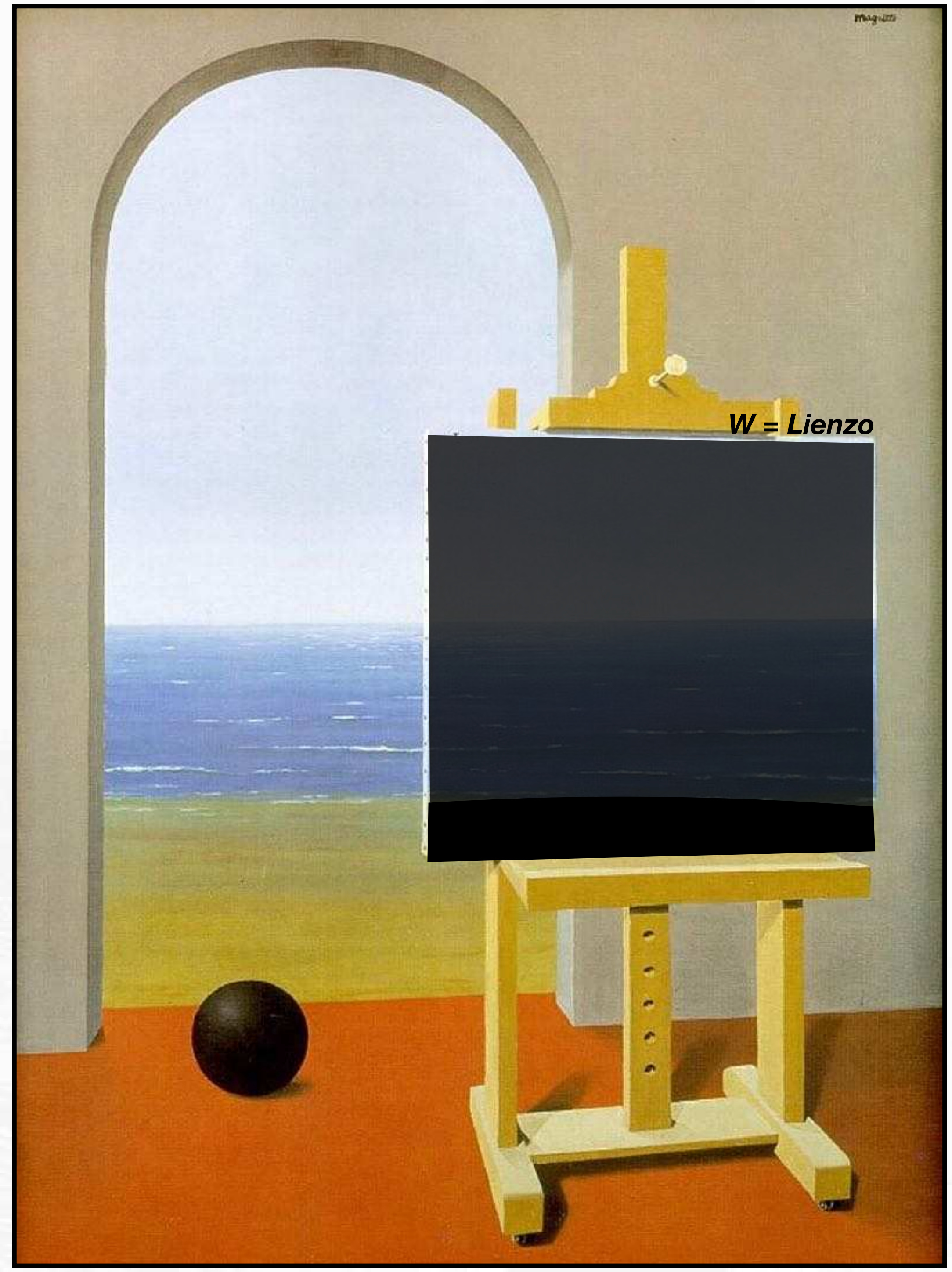
(Es la perspectiva usual, que asociamos a $\varnothing$):

$\boldsymbol{MAR = (MAR \,\Delta\, \varnothing)}$

E



E



R. Magritte. “La condición humana”

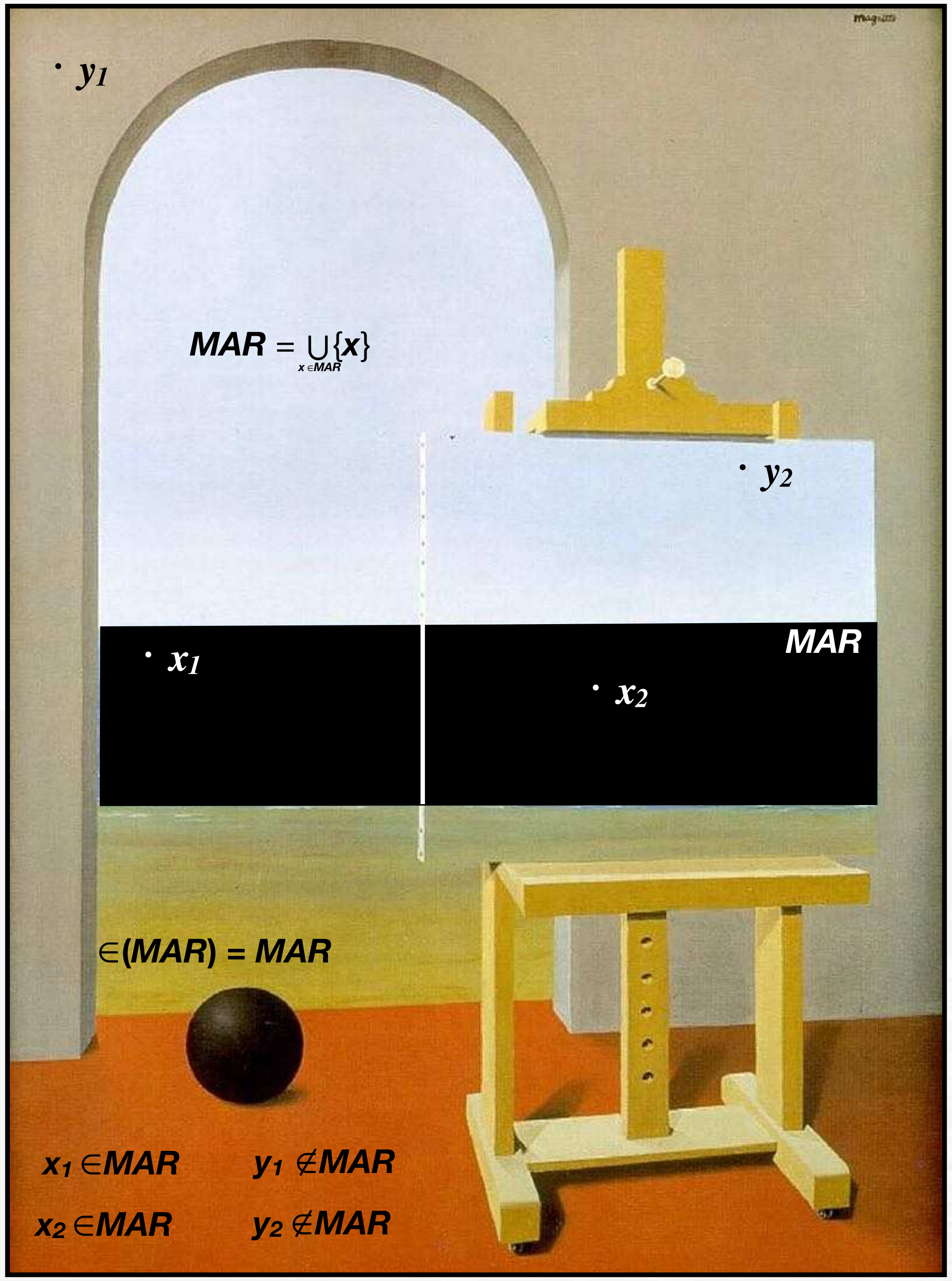
Subconjunto “*MAR*” de la imagen *E*

***W* = “*Lienzo*”**

(Es la perspectiva usual, que asociamos a ∅):

$$\boldsymbol{MAR = (MAR \,\Delta\, \varnothing)}$$

E



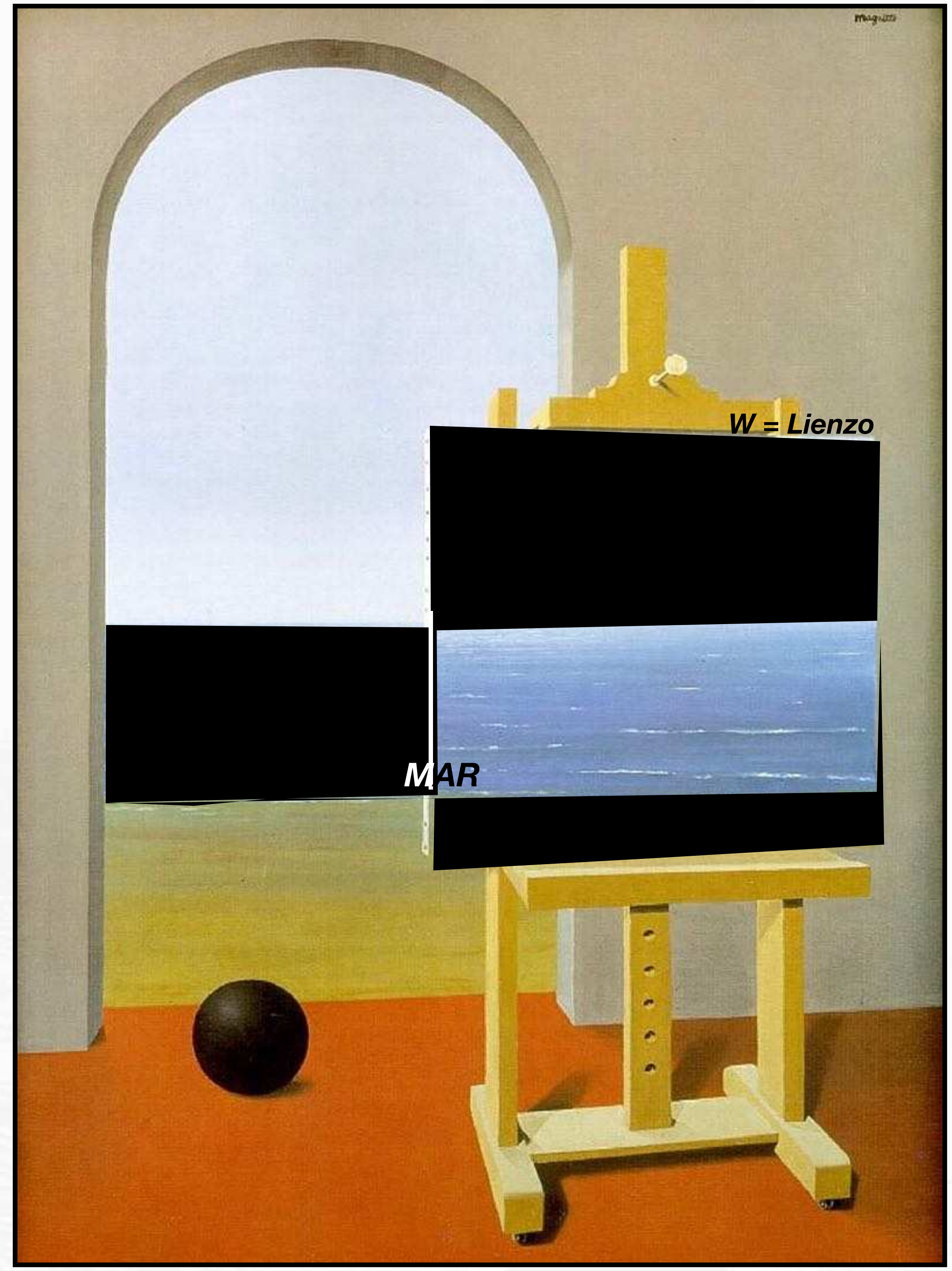
R. Magritte. “La condición humana”

Subconjunto “*MAR*” de la imagen *E*

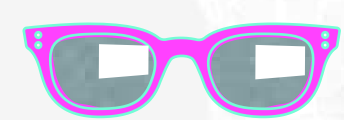
(Es la perspectiva usual, que asociamos a $\varnothing$):

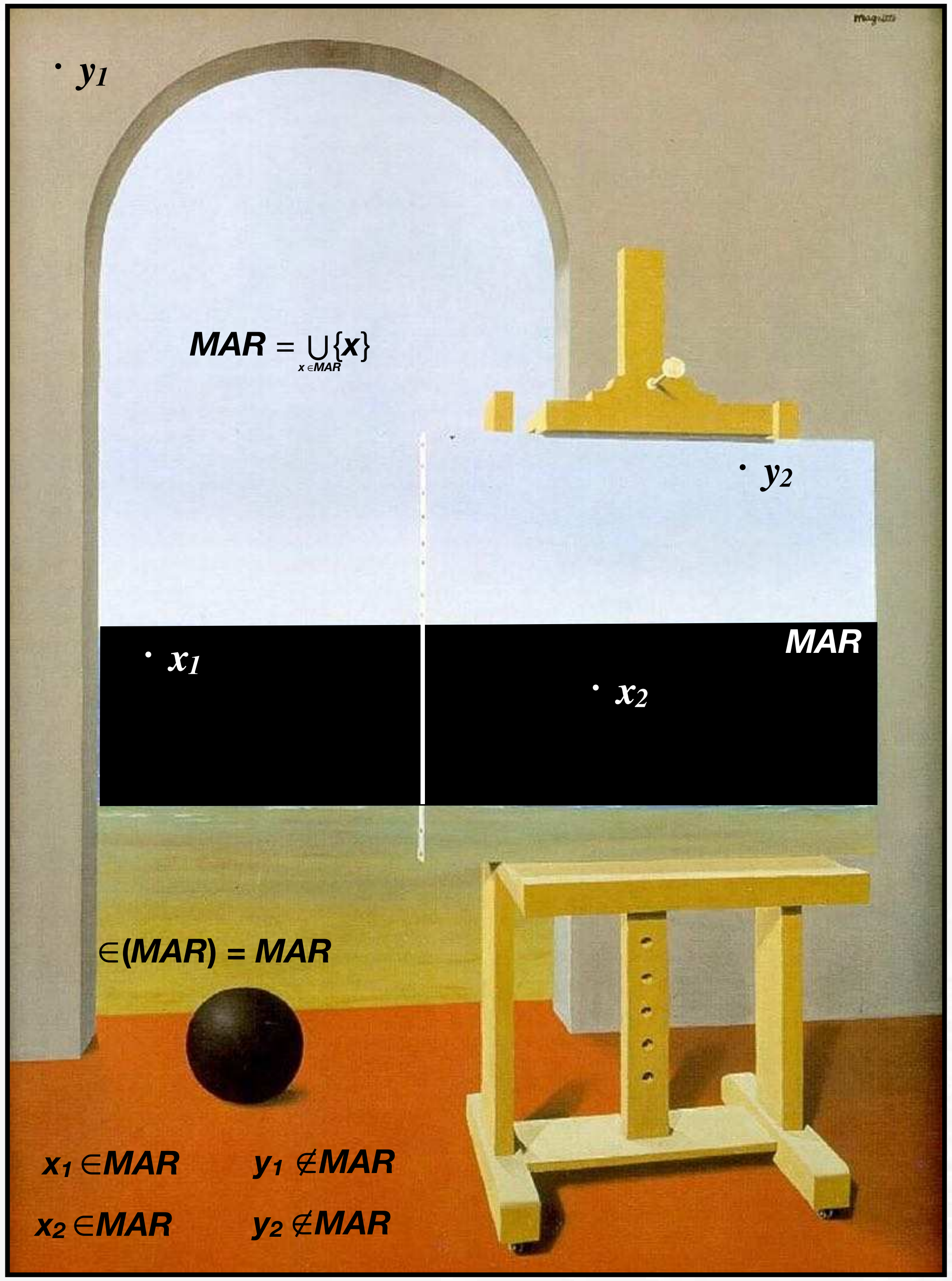
$\boldsymbol{MAR = (MAR \, \Delta \, \varnothing)}$

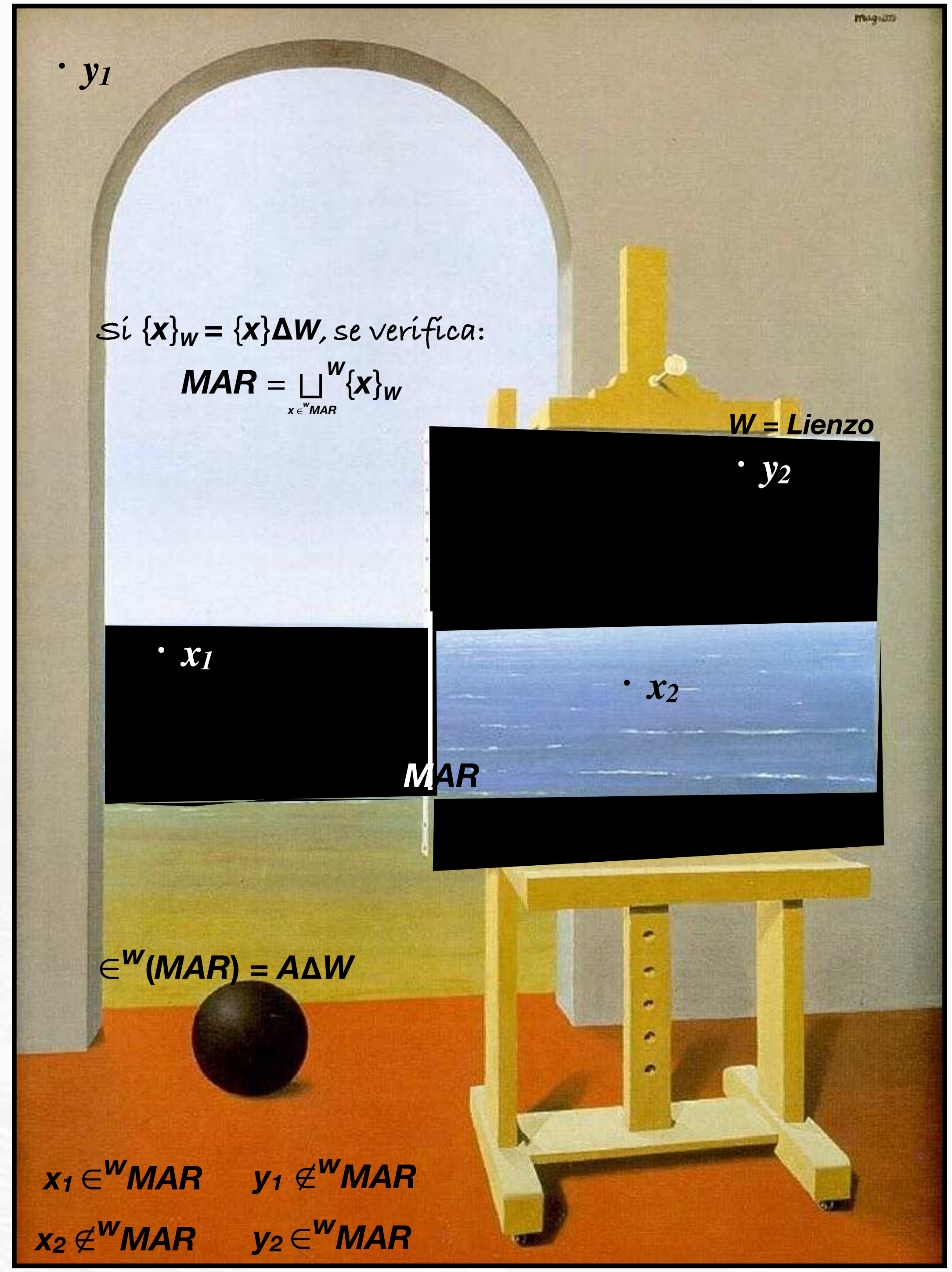
E



El subconjunto “*MAR*” desde la perspectiva: *W* = “*Lienzo”*







R. Magritte. "La condición humana"

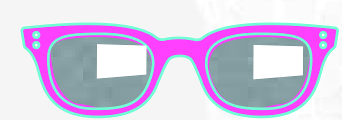
($\in^W$ define el subconjunto mediante: (***MAR* Δ *W***))

Subconjunto "*MAR*" de la imagen *E*

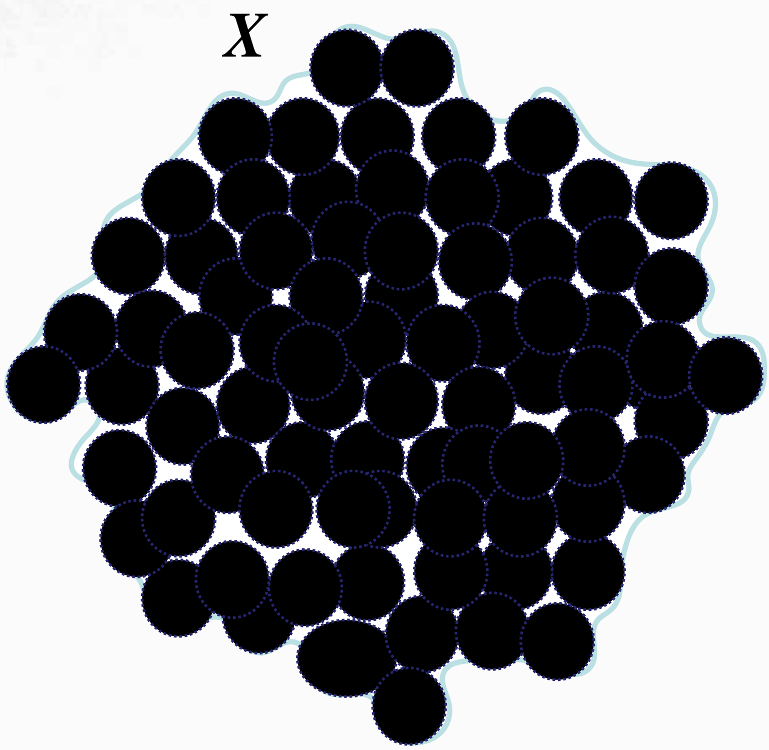
El subconjunto "*MAR*" desde la perspectiva: *W* = "*Lienzo*"

(Es la perspectiva usual, que asociamos a ∅):

***MAR* = (*MAR* Δ ∅)**

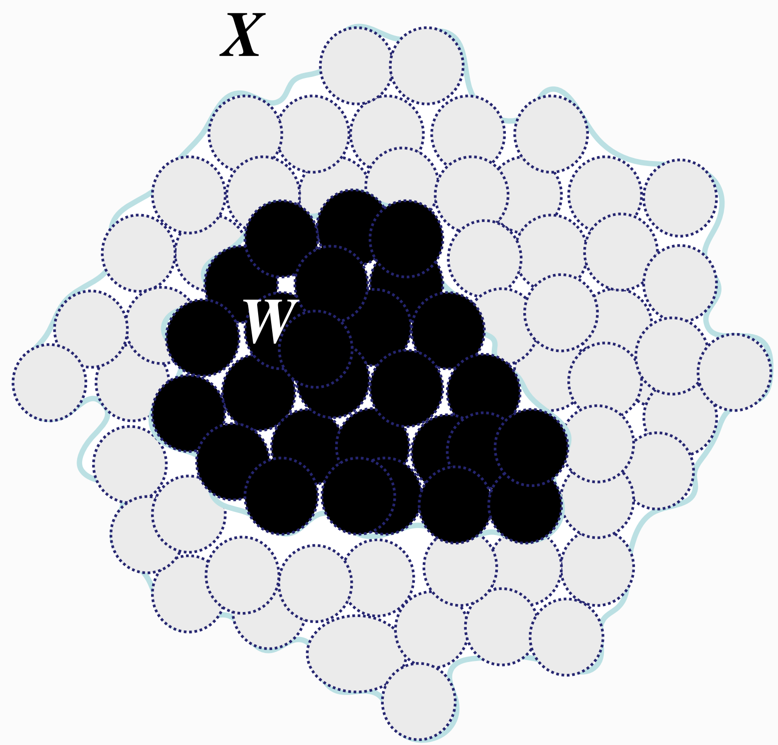


Sobre los átomos en $(\, \boldsymbol{P(X)}, \sqsubseteq^{W}\,)$, sobre el "w-contenido" de $\varnothing$ y sobre una interpretación de $\sqsubseteq^{W}$.



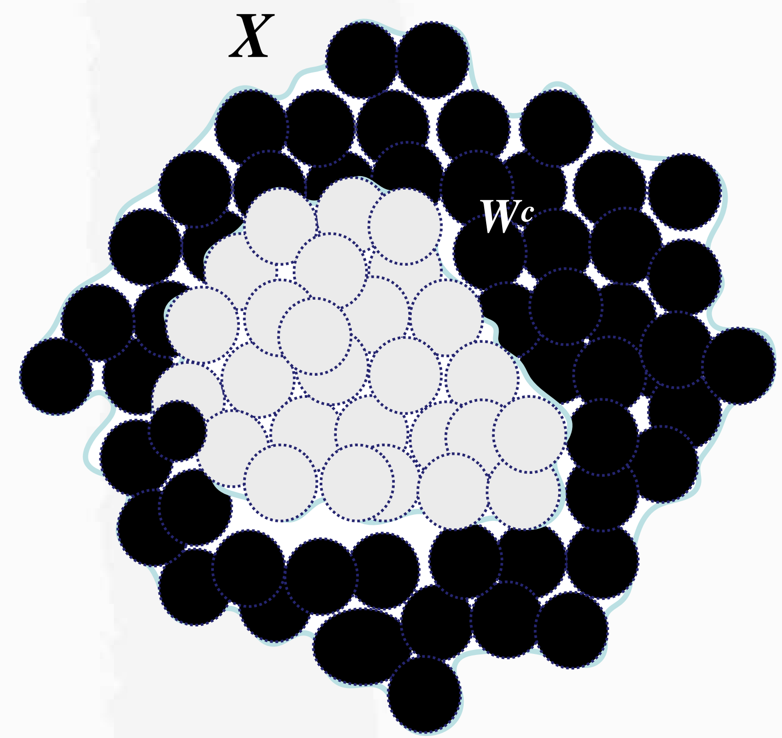
Referencial X

$|X| = 78$

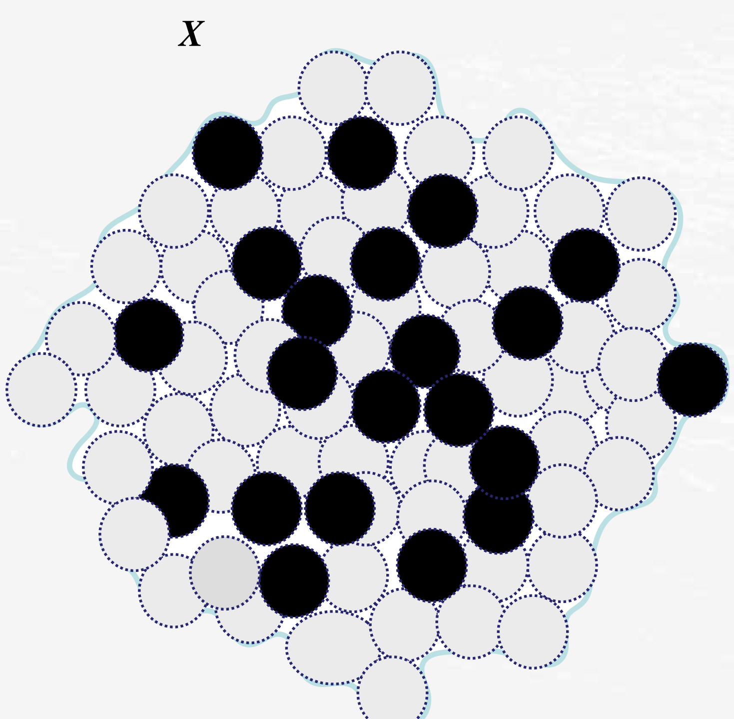


Subconjunto W de E

$|W| = 27$

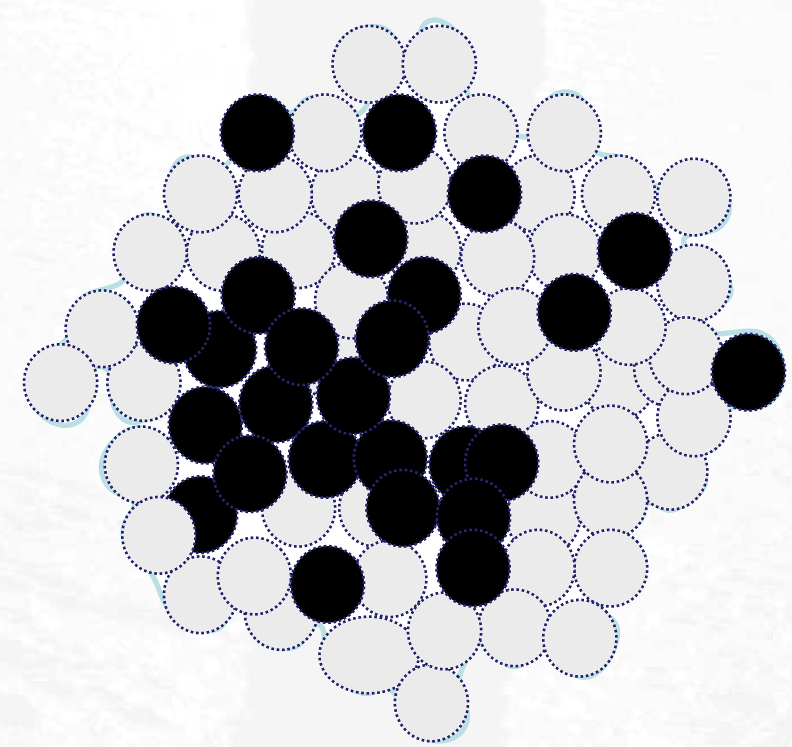


Complementario W^c



Un subconjunto A de X

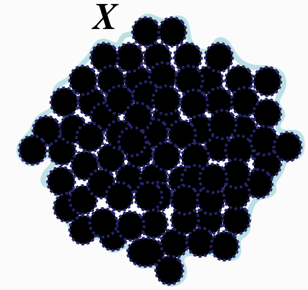
$|A| = 21$



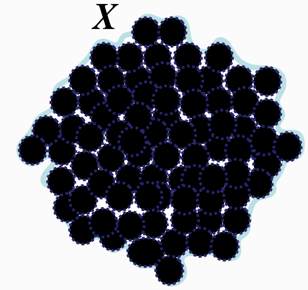
El subconjunto $\varphi_W(A) = A \triangle W$

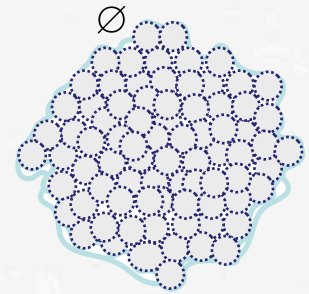
$d(A,W) = |A \triangle W| = 26$

Referencial X

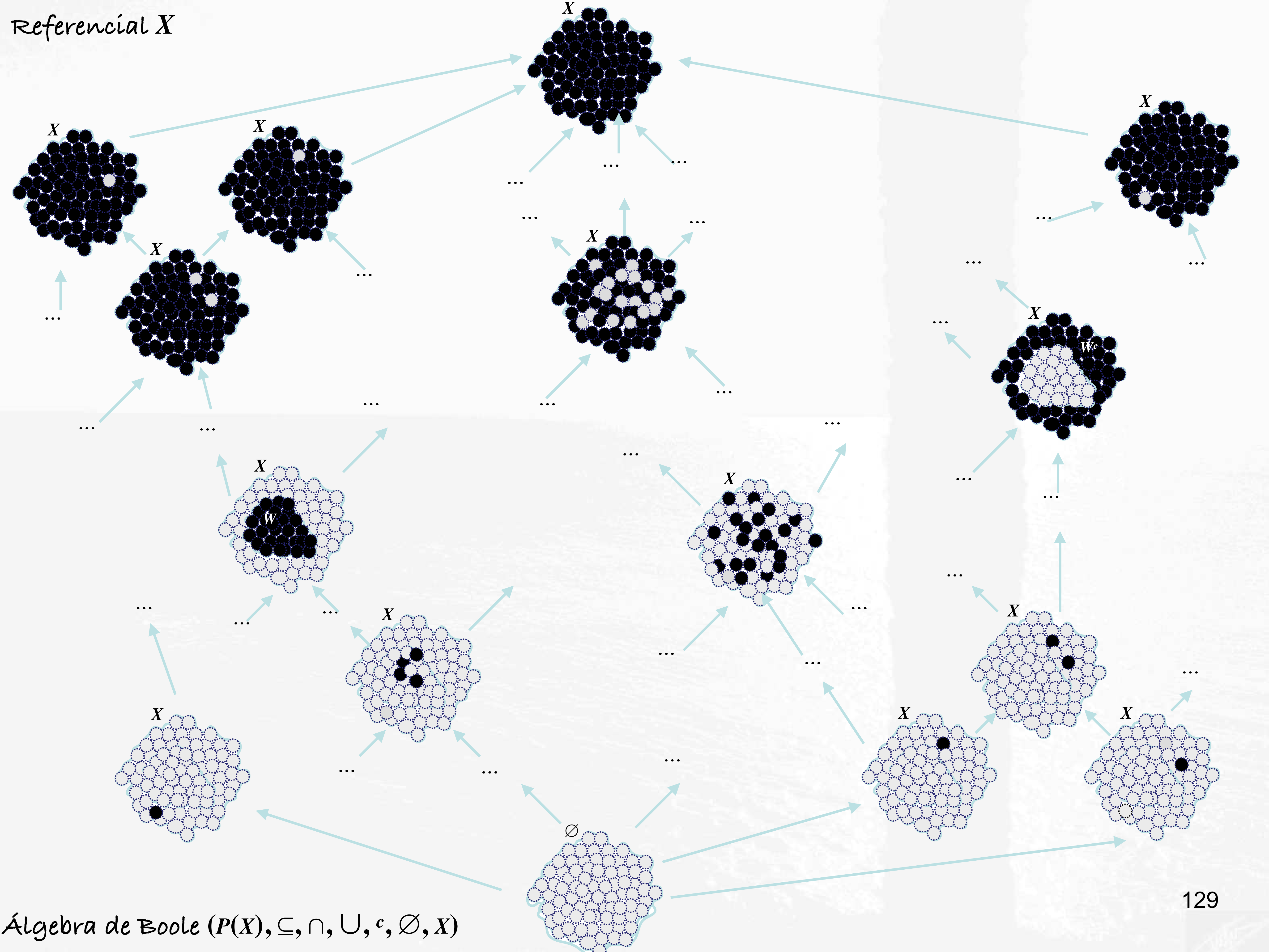


Referencial X



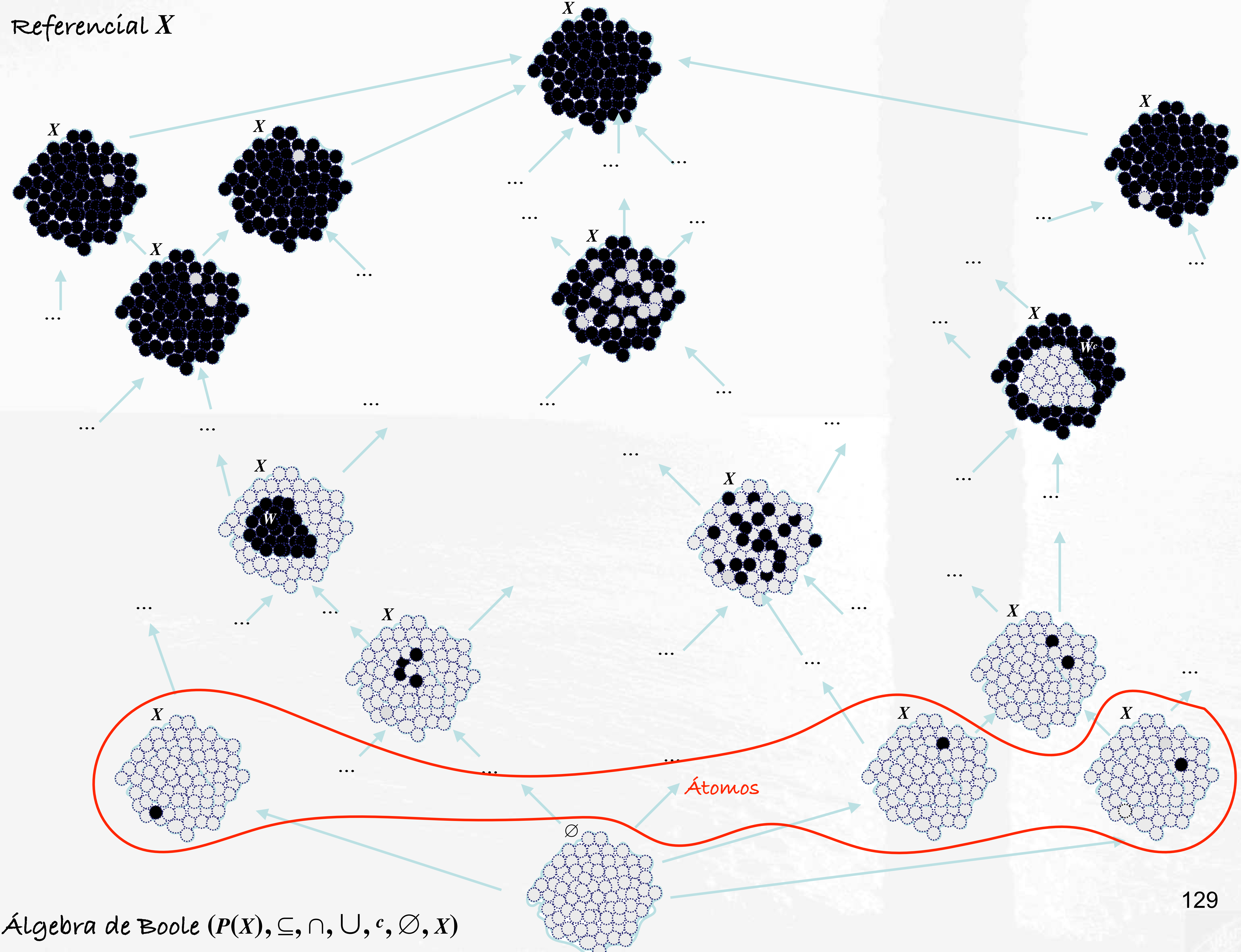


Referencial X



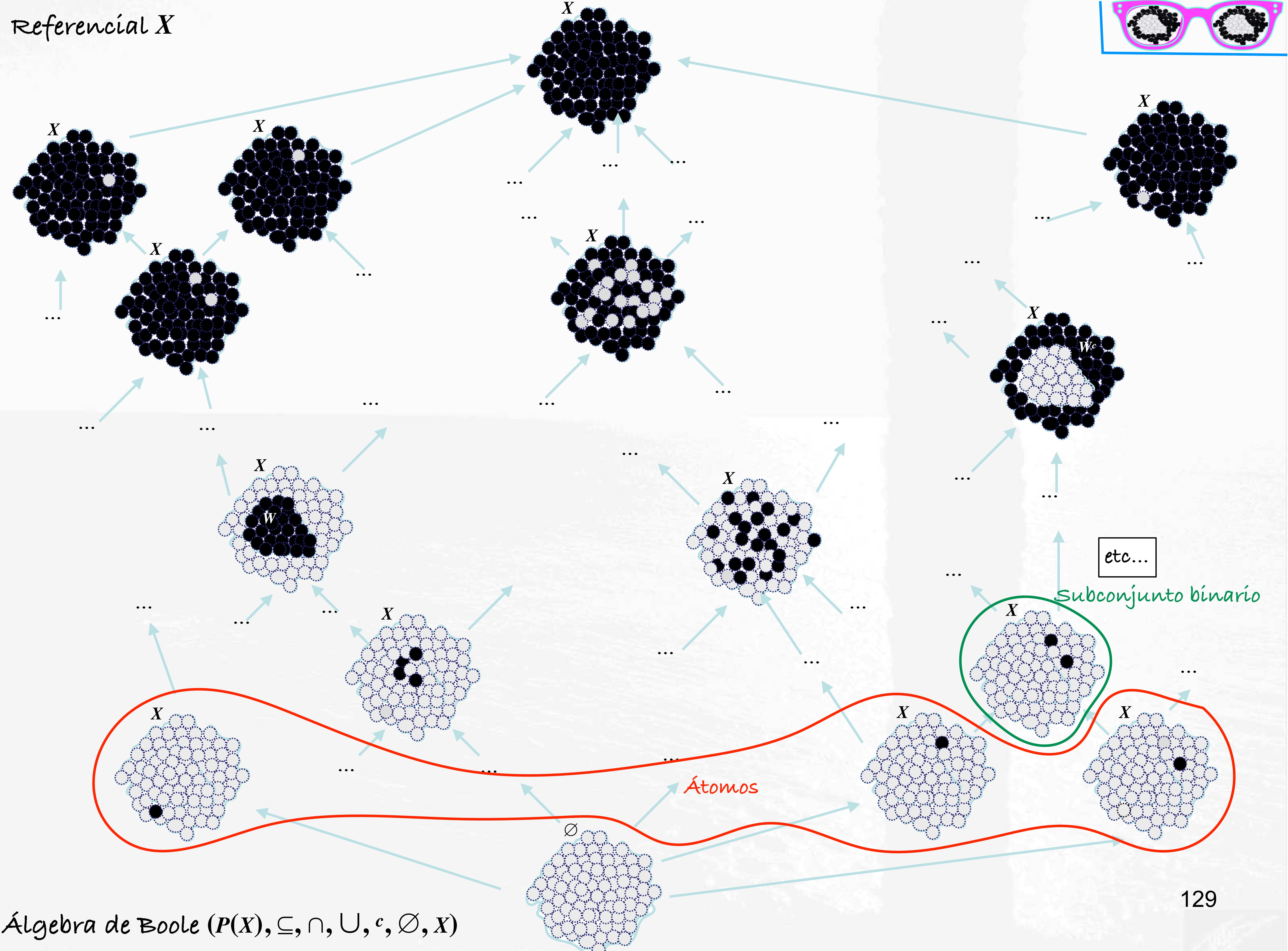
Álgebra de Boole $(P(X), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, X)$

Referencial X



Álgebra de Boole $(P(X), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, X)$

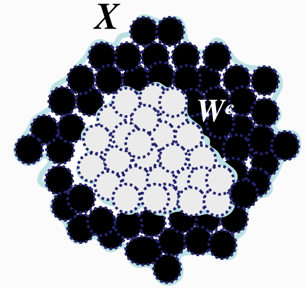
Referencial X



129

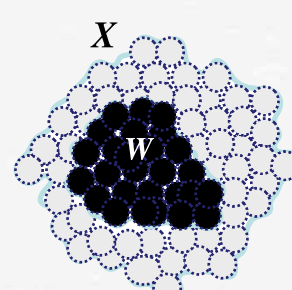
Álgebra de Boole $(P(X), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, X)$

Subconjuntos W y W^c del referencial X



$P(X)\Delta W = \{ A \Delta W / A \in P(X) \} = P(X)$

$A \sqcap^{W} B = (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup W)]$

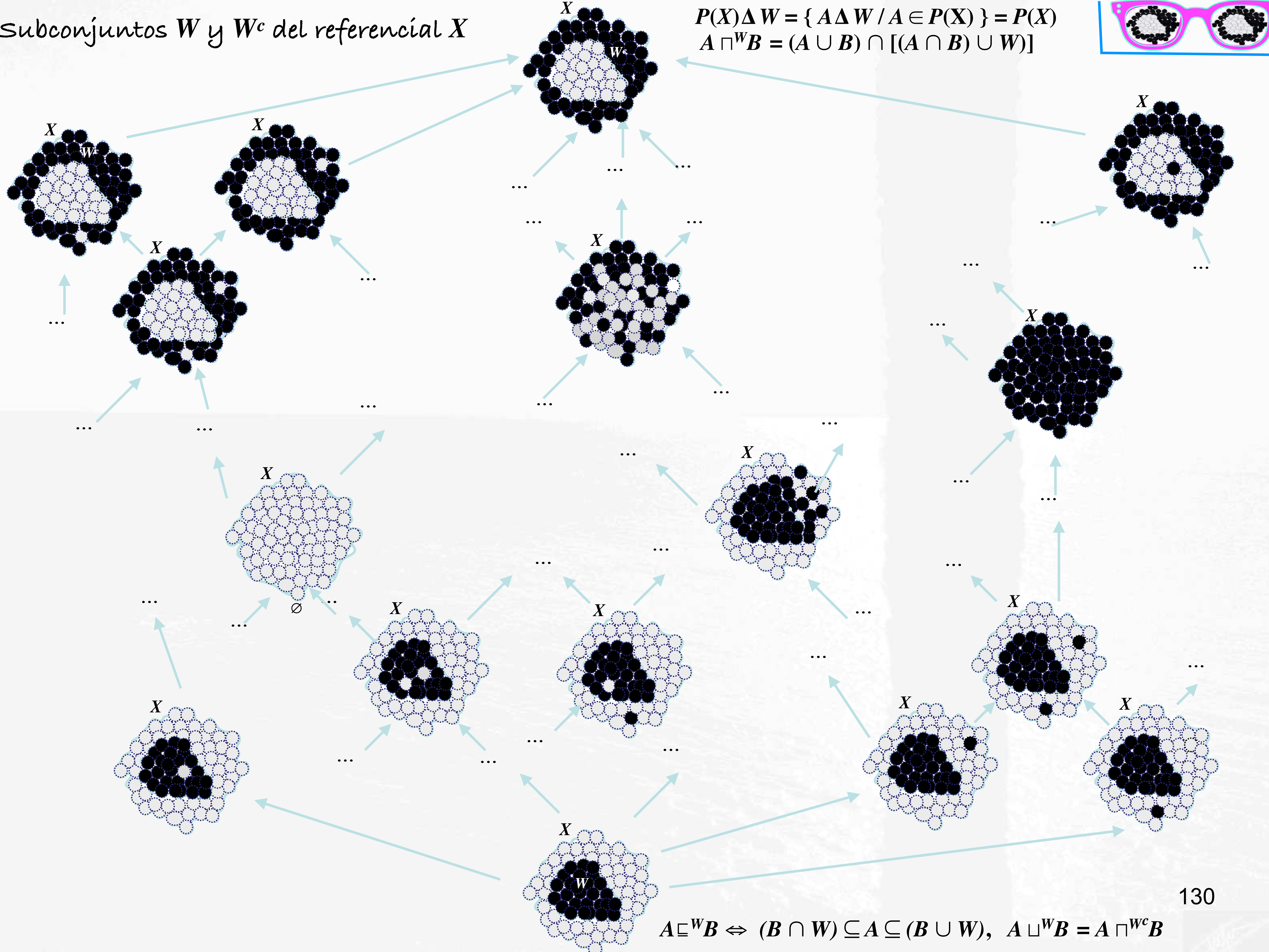


$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W), \quad A \sqcup^{W} B = A \sqcap^{W^c} B$

Subconjuntos W y W^c del referencial X

$$P(X)\Delta W = \{ A\Delta W \,/\, A \in P(X) \} = P(X)$$

$$A \sqcap^{W} B = (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup W)]$$

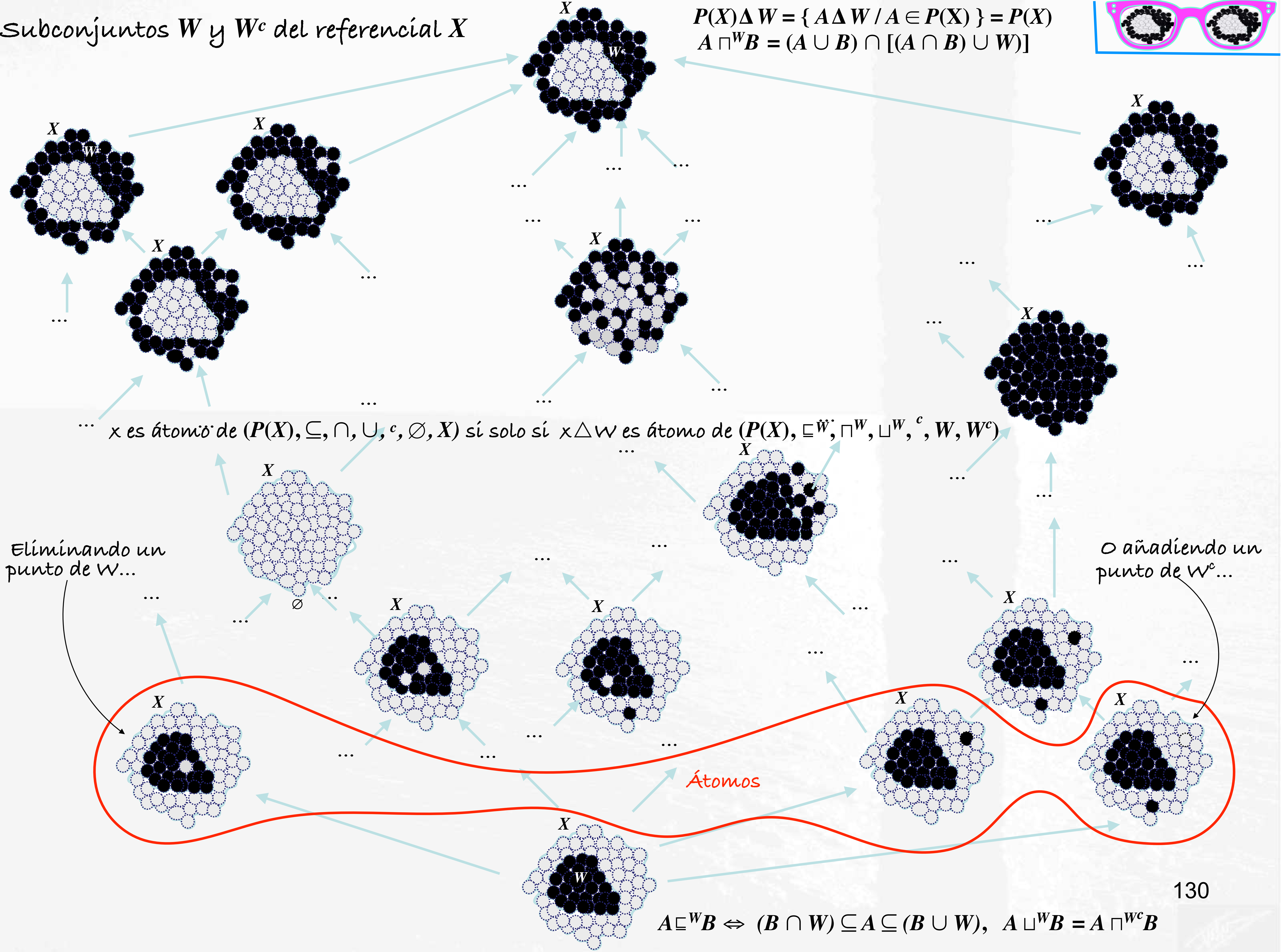


$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W), \quad A \sqcup^{W} B = A \sqcap^{W^c} B$$

Subconjuntos W y W^c del referencial X

$P(X)\Delta W = \{ A\Delta W \,/\, A \in P(X) \} = P(X)$

$A \sqcap^W B = (A\cup B) \cap [(A\cap B)\cup W)]$



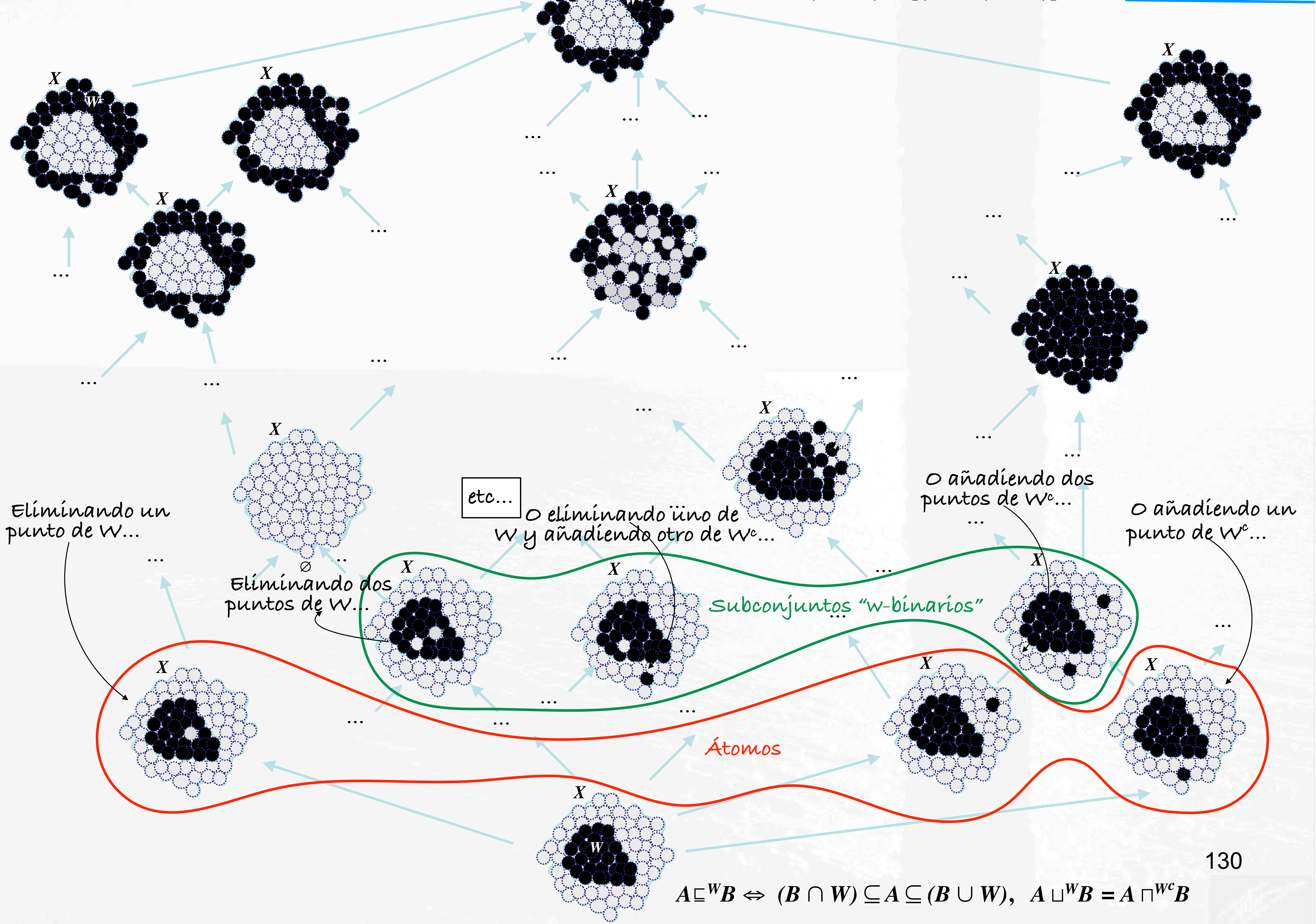
x es átomo de $(P(X),\subseteq,\cap,\cup,{}^c,\emptyset,X)$ si solo si $x\triangle W$ es átomo de $(P(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,{}^c,W,W^c)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cap W)\subseteq A\subseteq(B\cup W)$, $A\sqcup^W B = A\sqcap^{W^c} B$

Subconjuntos W y W^c del referencial X

$P(X)\Delta W = \{ A \Delta W / A \in P(X) \} = P(X)$

$A \sqcap^{W} B = (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup W)]$

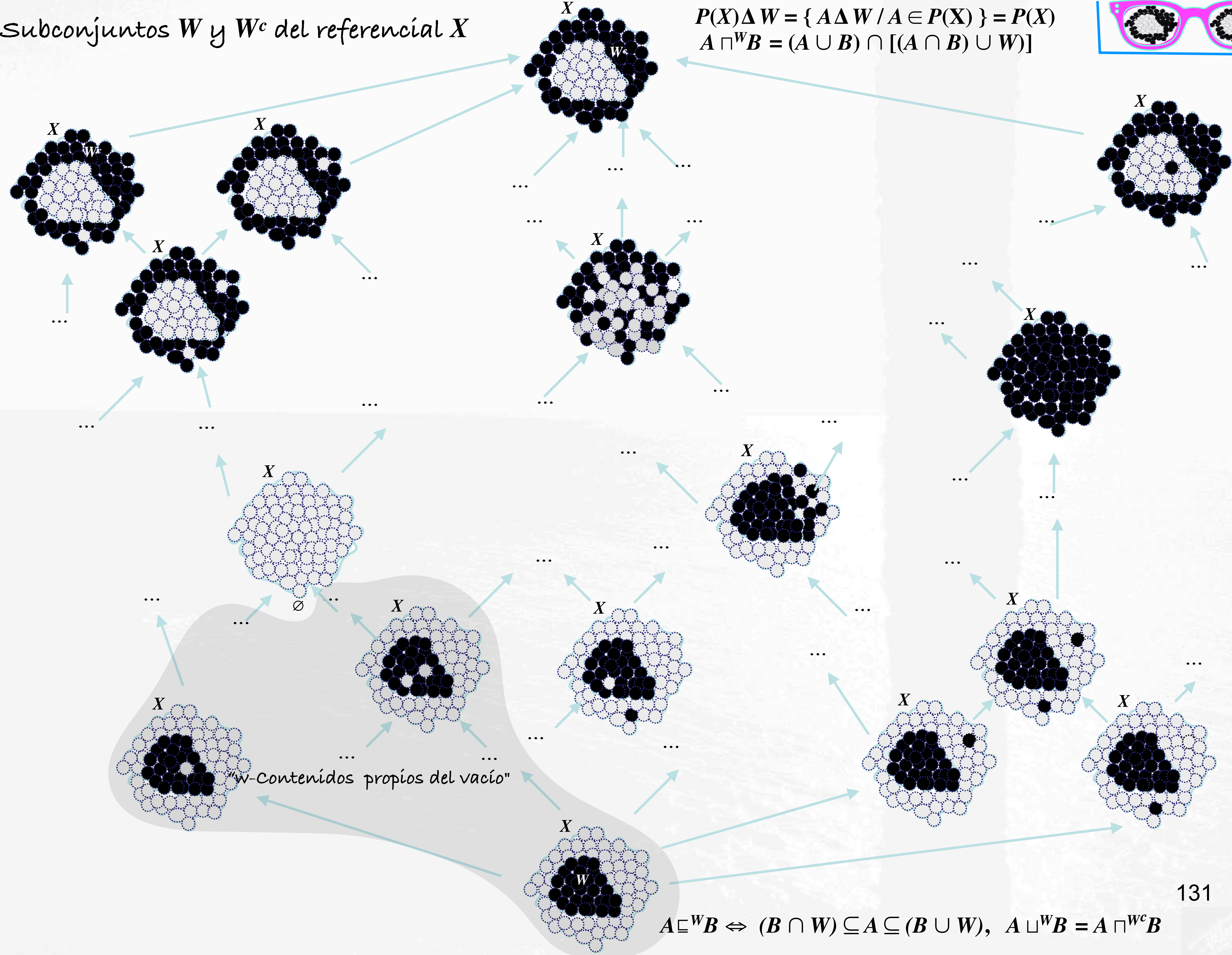


$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W), \quad A \sqcup^{W} B = A \sqcap^{W^c} B$

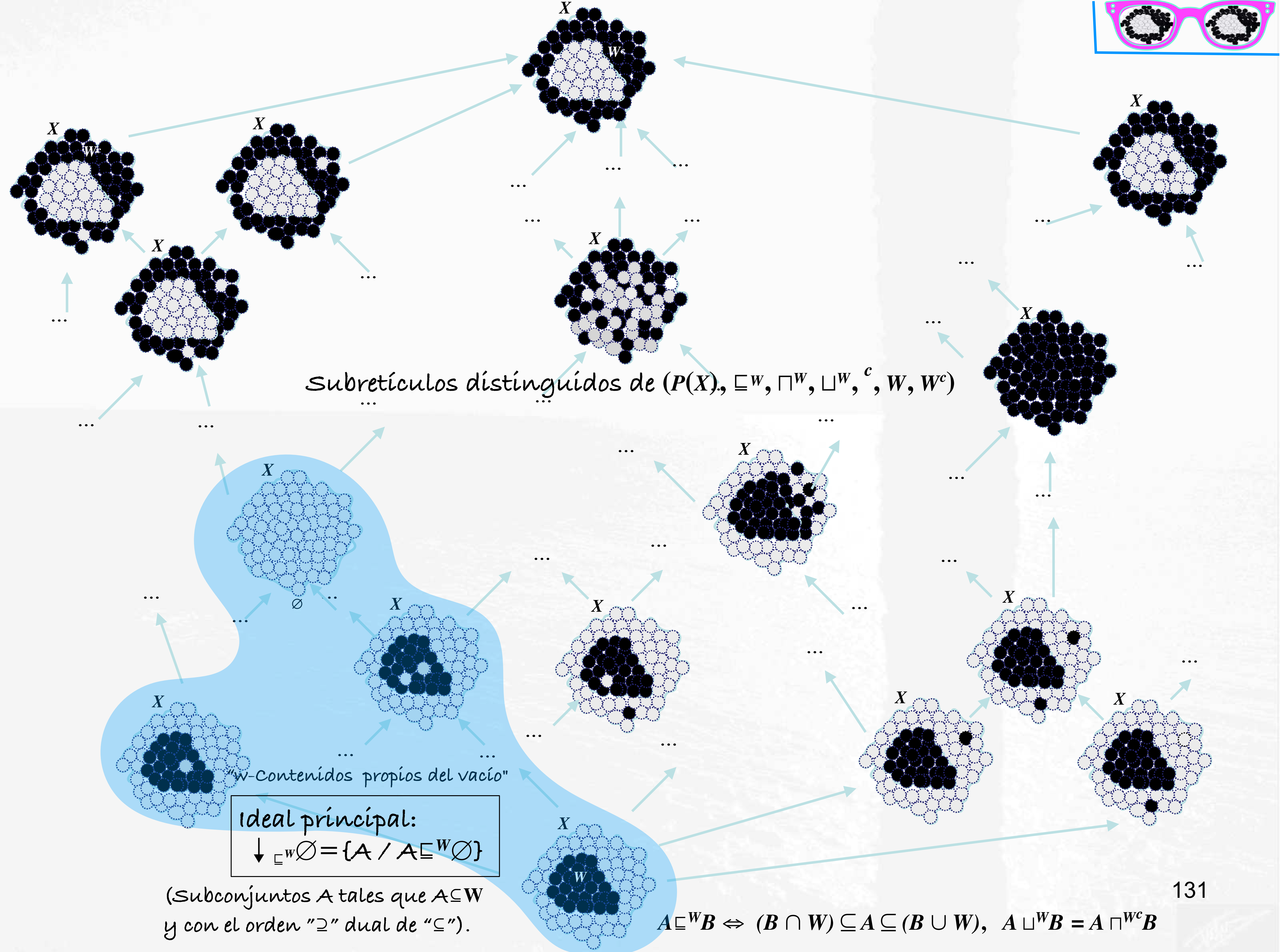
Subconjuntos W y W^c del referencial X

$P(X)\Delta W = \{ A\Delta W / A \in P(X) \} = P(X)$

$A \sqcap^W B = (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup W)]$



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)$, $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B$

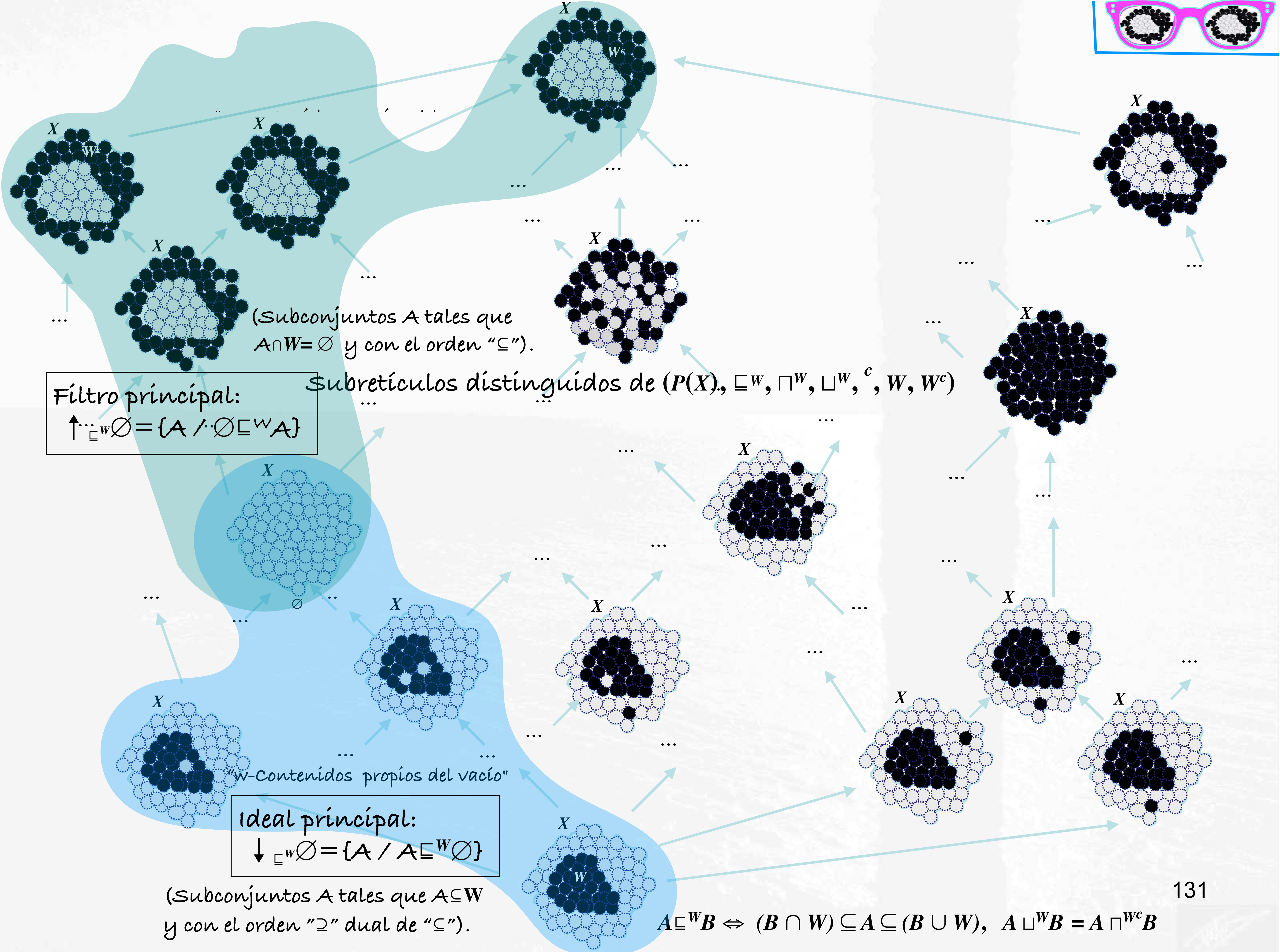


Subretículos distinguidos de $(P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$

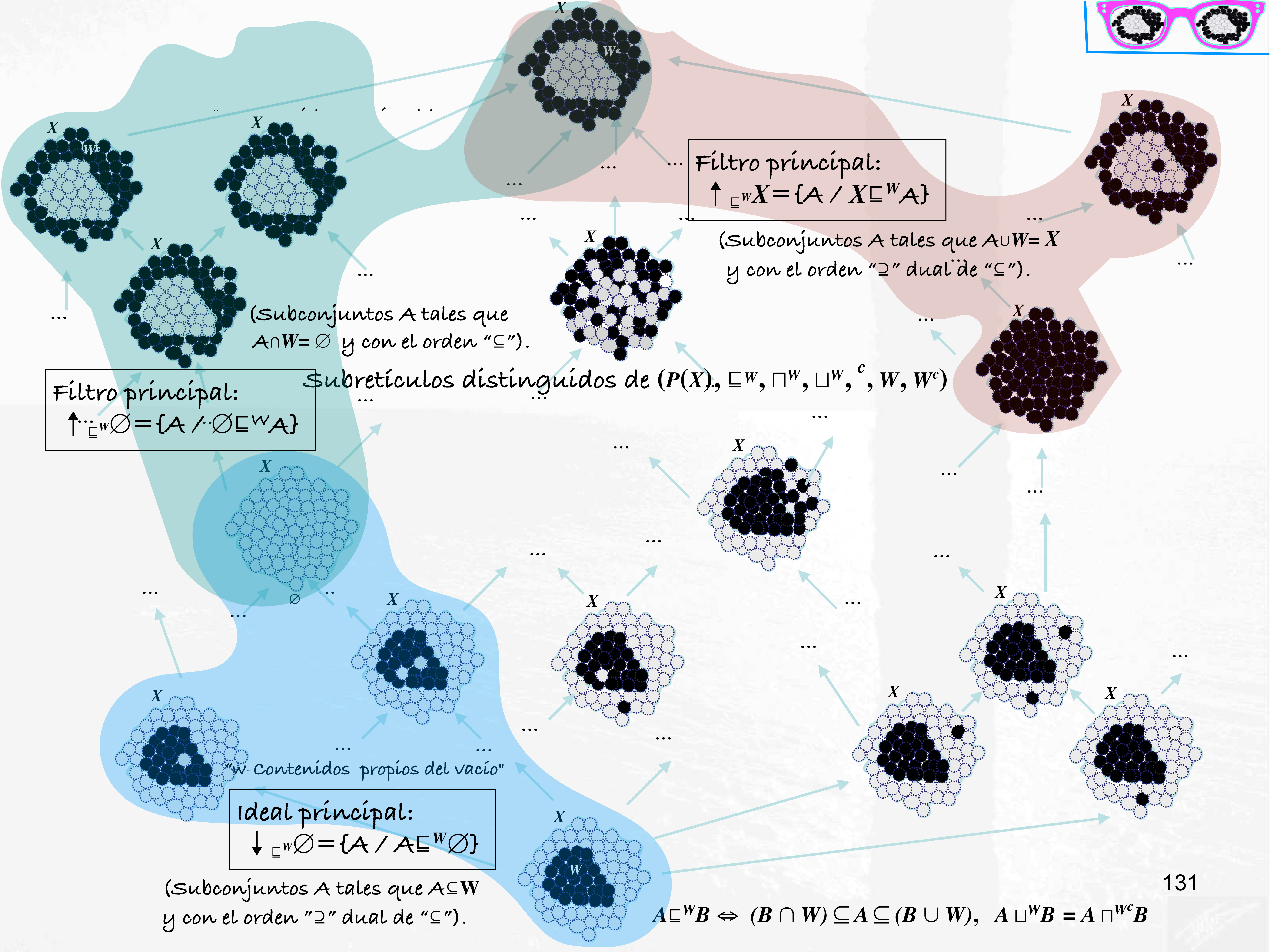
Ideal principal:
$\downarrow_{\sqsubseteq^W} \varnothing = \{A \,/\, A \sqsubseteq^W \varnothing\}$

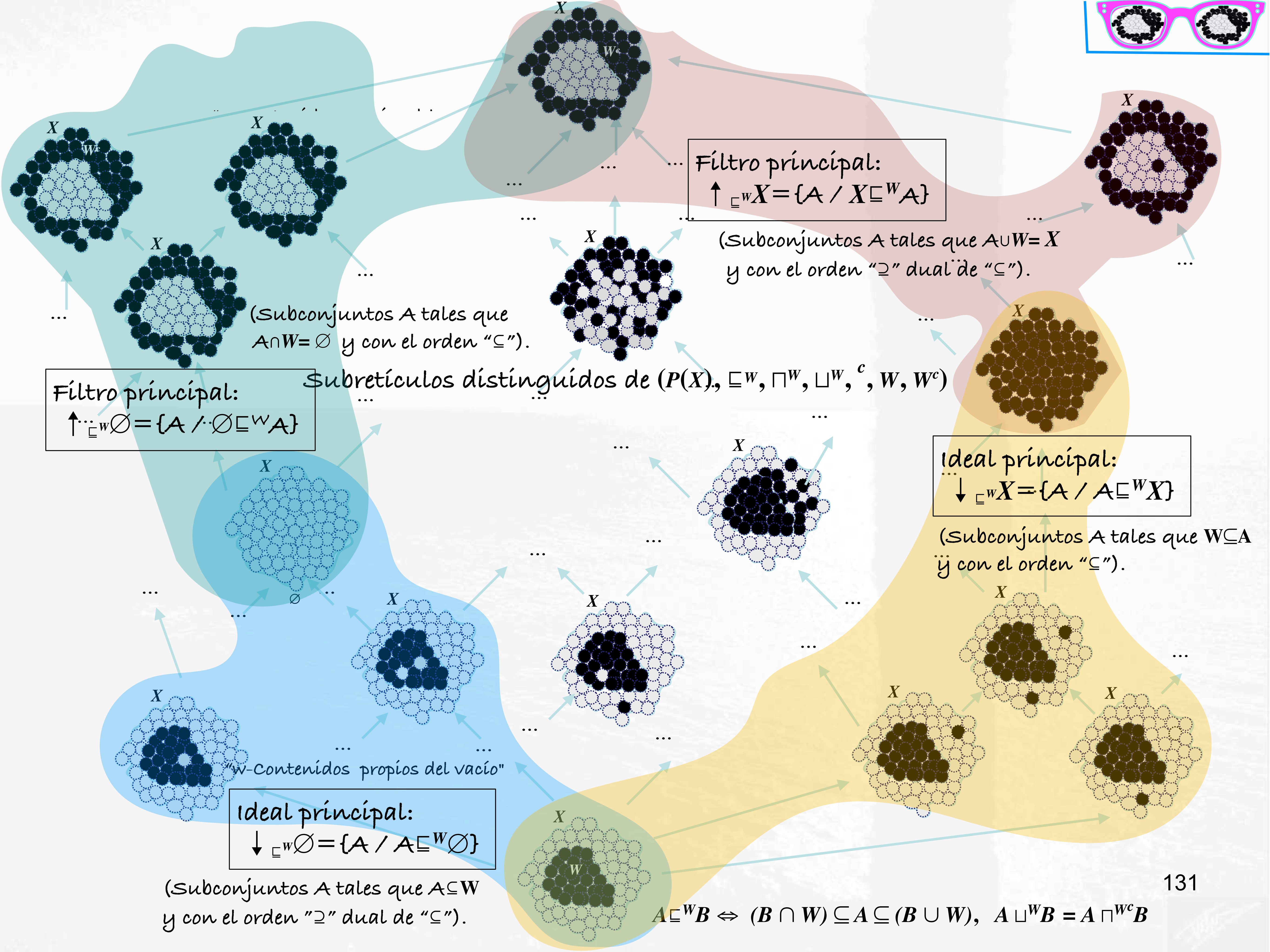
(Subconjuntos A tales que $A \subseteq W$ y con el orden "$\supseteq$" dual de "$\subseteq$").

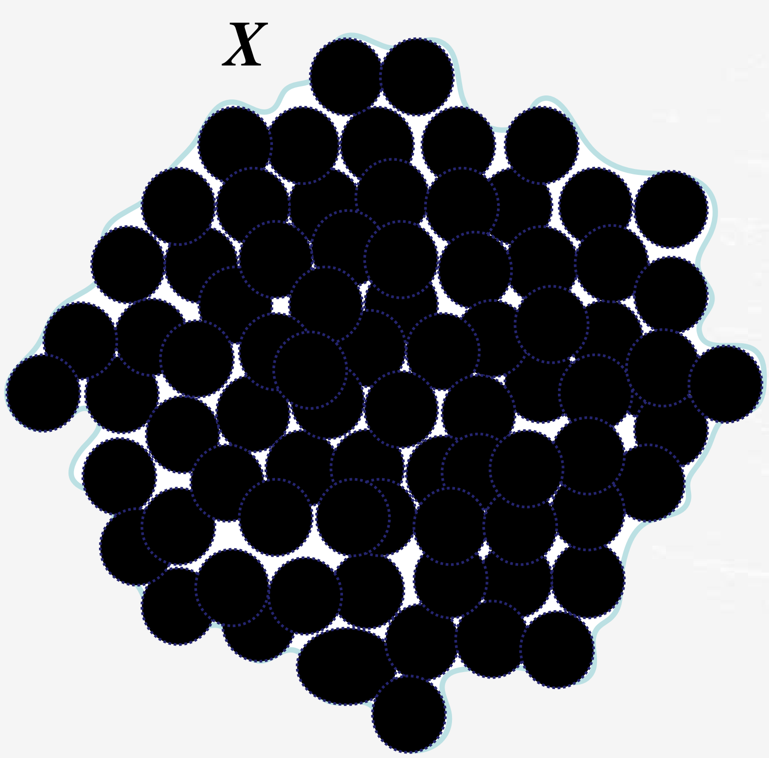
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W),\ \ A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B$



Subretículos distinguidos de $(P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$
Filtro principal:
$\uparrow_{\sqsubseteq^W}\varnothing = \{A \,/\, \varnothing \sqsubseteq^W A\}$
(Subconjuntos A tales que $A \cap W = \varnothing$ y con el orden "⊆").
"W-Contenidos propios del vacío"
Ideal principal:
$\downarrow_{\sqsubseteq^W}\varnothing = \{A \,/\, A \sqsubseteq^W \varnothing\}$
(Subconjuntos A tales que $A \subseteq W$ y con el orden "⊇" dual de "⊆").
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W), \quad A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B$

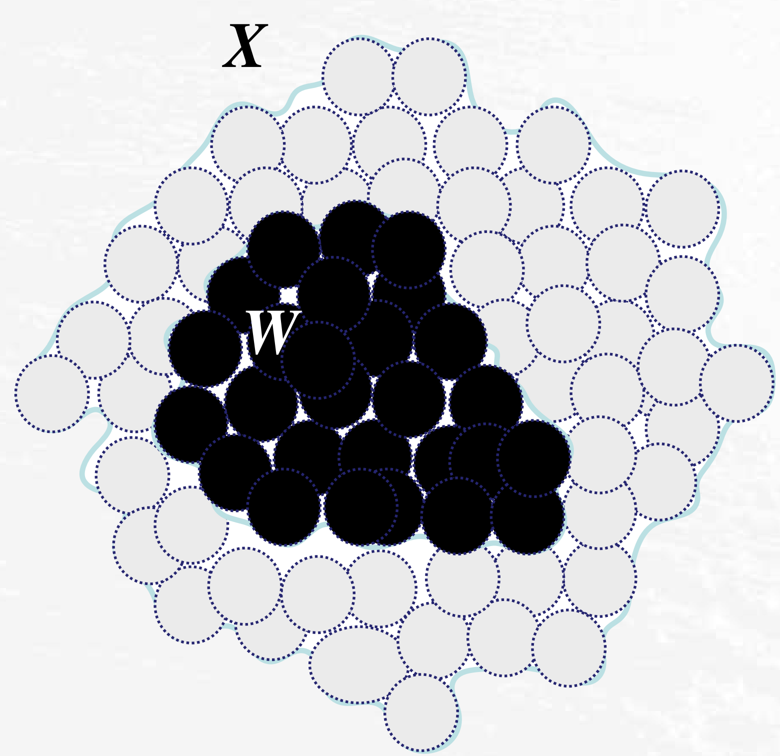

Filtro principal:
$\uparrow_{\sqsubseteq^W} X = \{A \,/\, X \sqsubseteq^W A\}$
(Subconjuntos A tales que $A \cup W = X$
y con el orden "⊇" dual de "⊆").
(Subconjuntos A tales que
$A \cap W = \varnothing$ y con el orden "⊆").
Filtro principal:
$\uparrow_{\sqsubseteq^W} \varnothing = \{A \,/\, \varnothing \sqsubseteq^W A\}$
Subretículos distinguidos de $(P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$
"W-contenidos propios del vacío"
Ideal principal:
$\downarrow_{\sqsubseteq^W} \varnothing = \{A \,/\, A \sqsubseteq^W \varnothing\}$
(Subconjuntos A tales que $A \subseteq W$
y con el orden "⊇" dual de "⊆").
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W),\ \ A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B$


Subretículos distinguidos de $(P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$
Filtro principal:
$\uparrow_{\sqsubseteq^W} X = \{A \,/\, X \sqsubseteq^W A\}$
(Subconjuntos A tales que $A \cup W = X$
y con el orden "⊇" dual de "⊆").
Filtro principal:
$\uparrow_{\sqsubseteq^W} \varnothing = \{A \,/\, \varnothing \sqsubseteq^W A\}$
(Subconjuntos A tales que
$A \cap W = \varnothing$ y con el orden "⊆").
Ideal principal:
$\downarrow_{\sqsubseteq^W} X = \{A \,/\, A \sqsubseteq^W X\}$
(Subconjuntos A tales que $W \subseteq A$
y con el orden "⊆").
"W-Contenidos propios del vacío"
Ideal principal:
$\downarrow_{\sqsubseteq^W} \varnothing = \{A \,/\, A \sqsubseteq^W \varnothing\}$
(Subconjuntos A tales que $A \subseteq W$
y con el orden "⊇" dual de "⊆").
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W),\ \ A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B$
X
W
W^c
∅



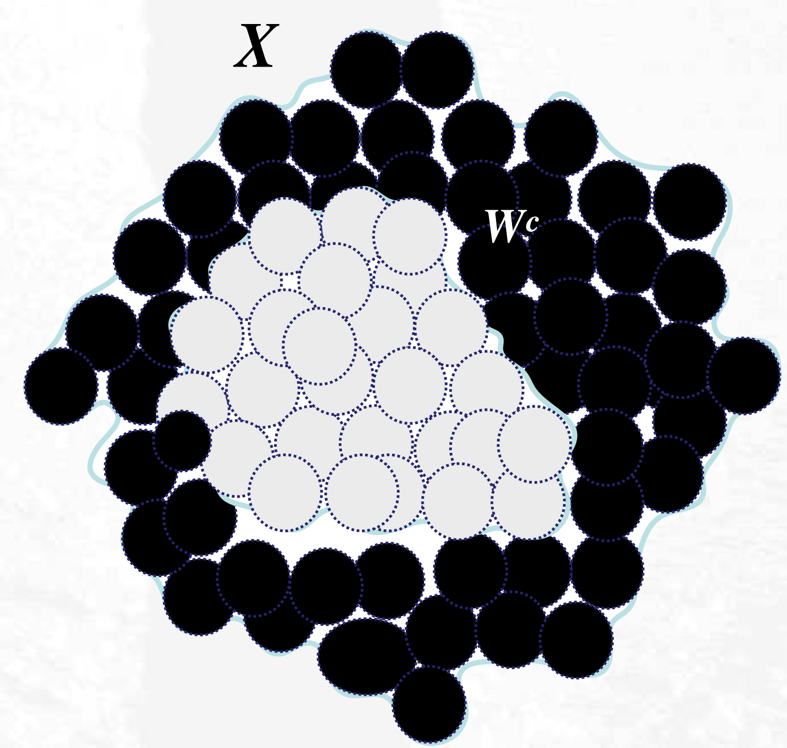
Referencial X

$|X| = 78$

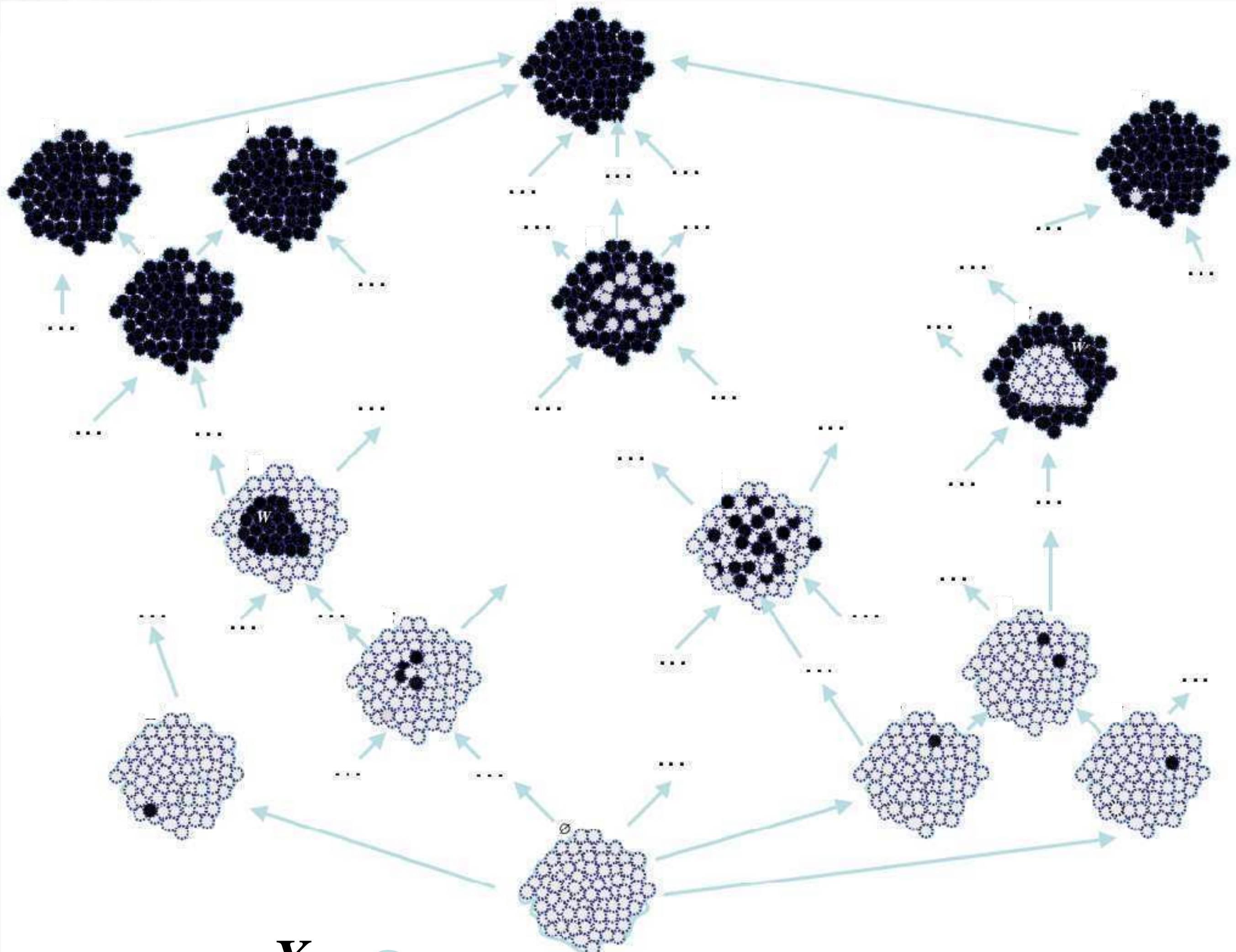


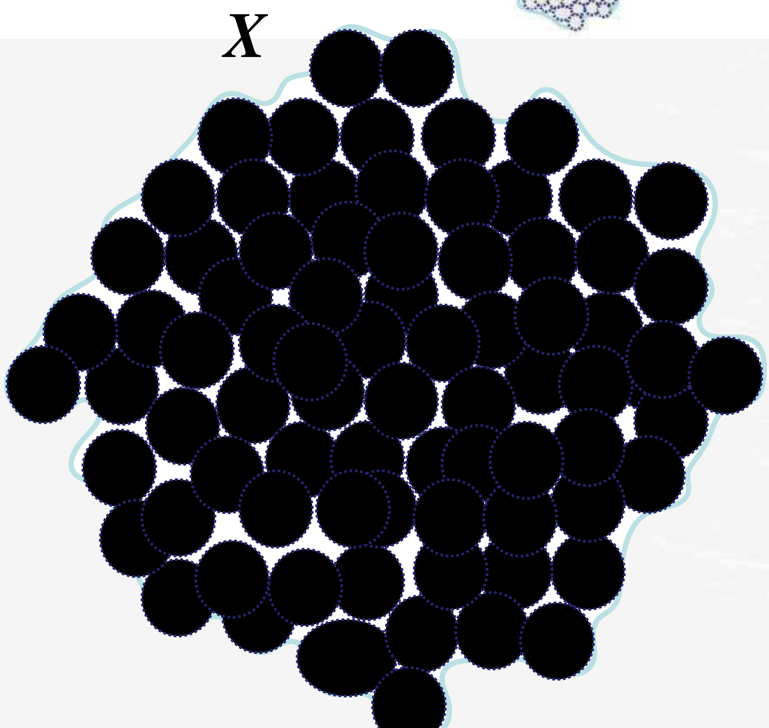
Subconjunto W de E

$|W| = 27$



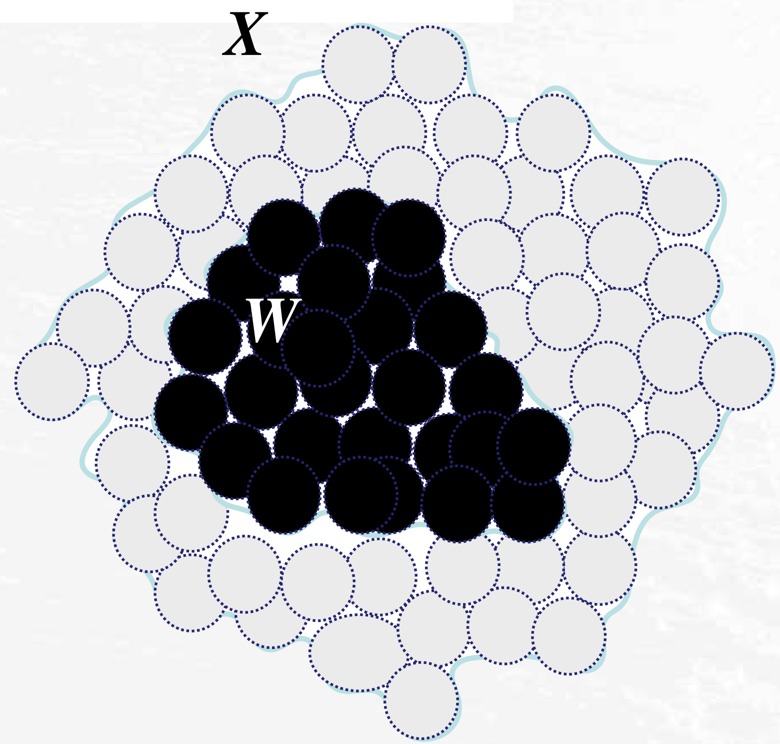
Complementario W^c





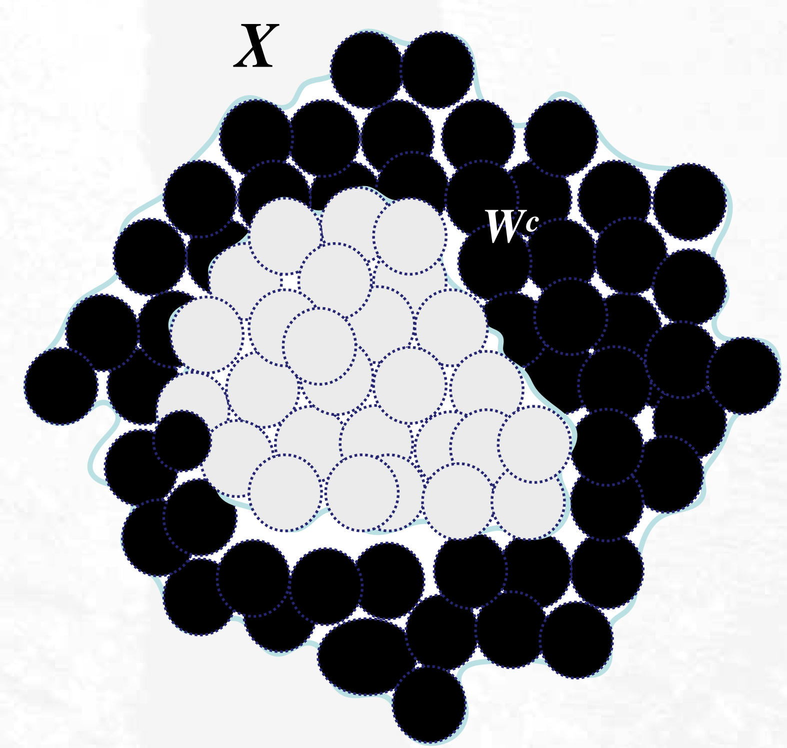
Referencial X

$|X| = 78$

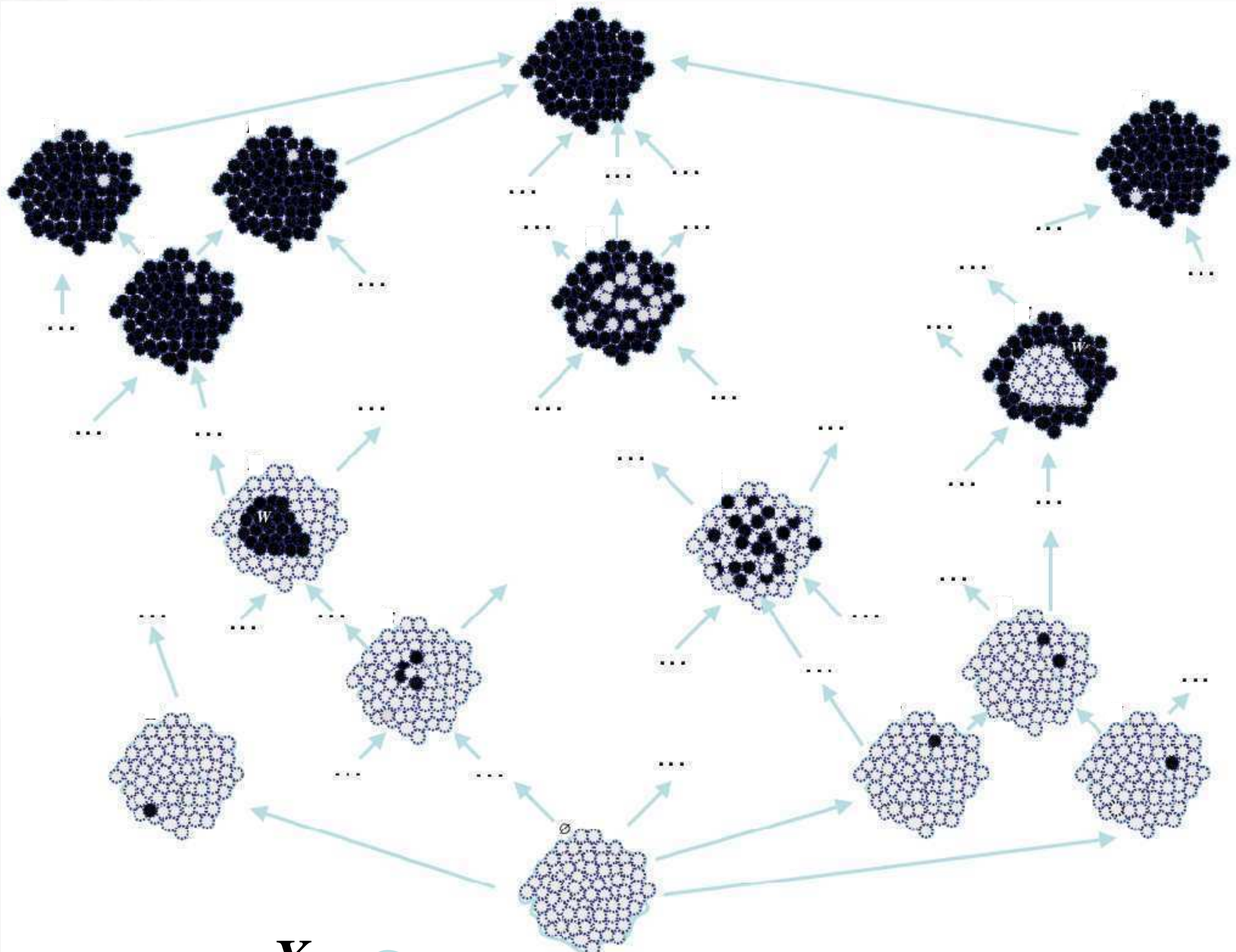


Subconjunto W de E

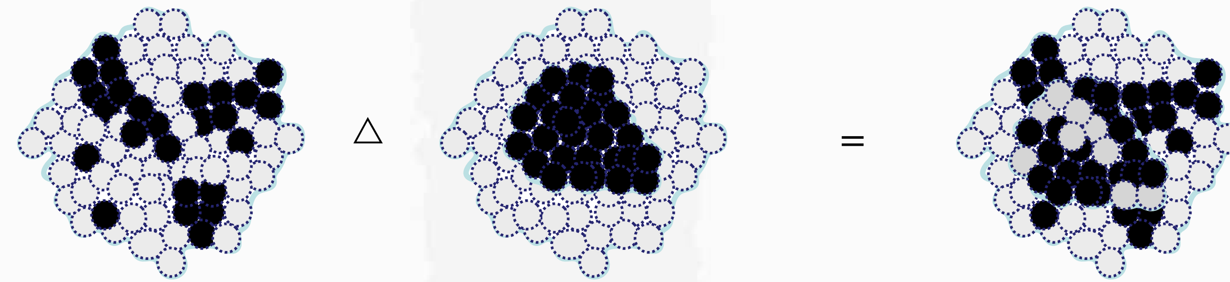
$|W| = 27$



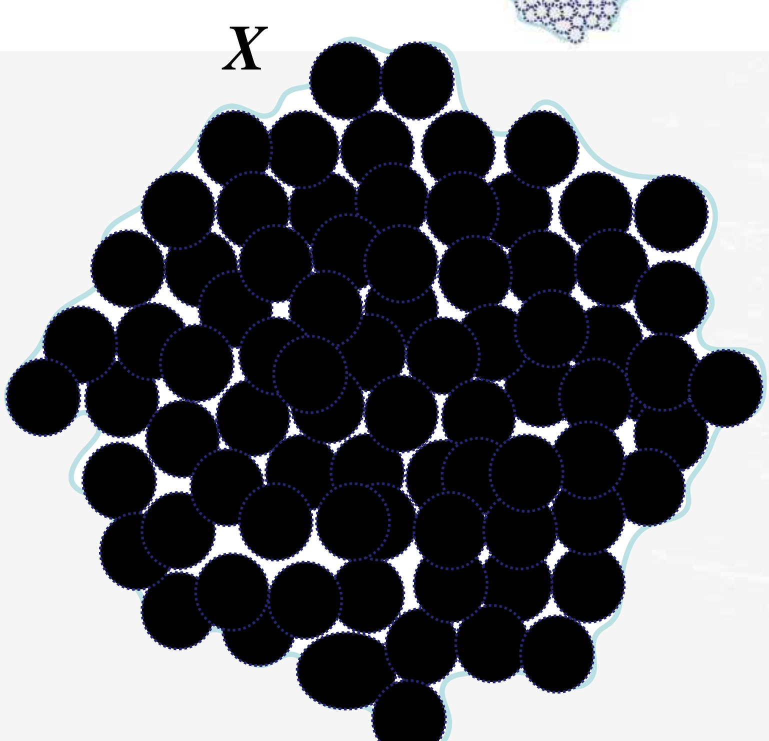
Complementario W^c



$A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

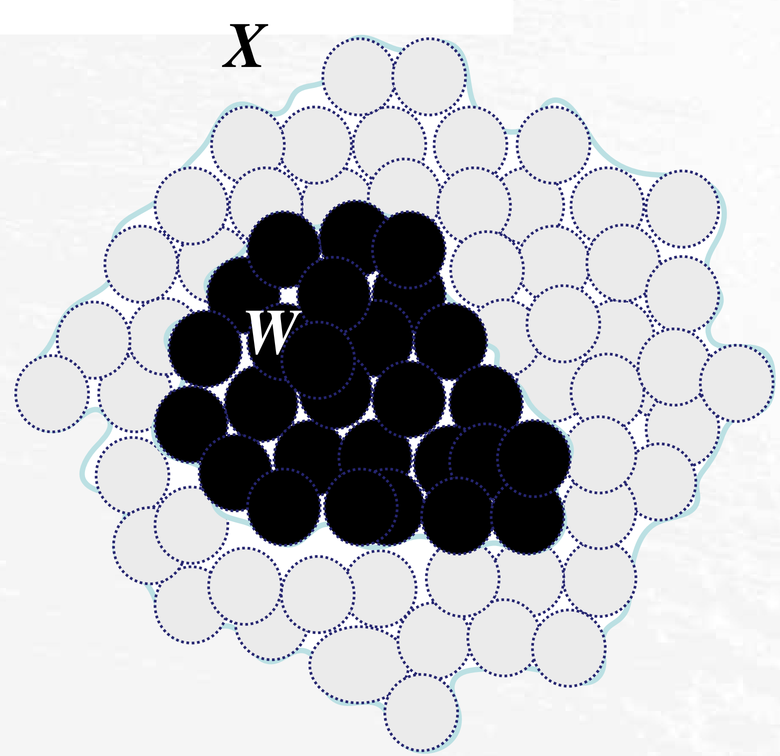


A　　W　　$A \triangle W$



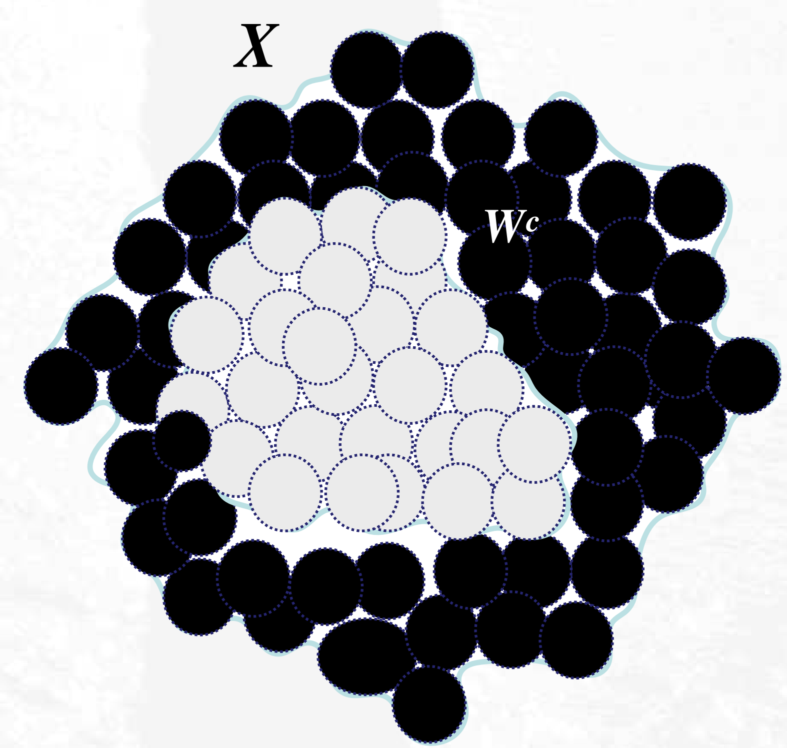
Referencial X

$|X| = 78$



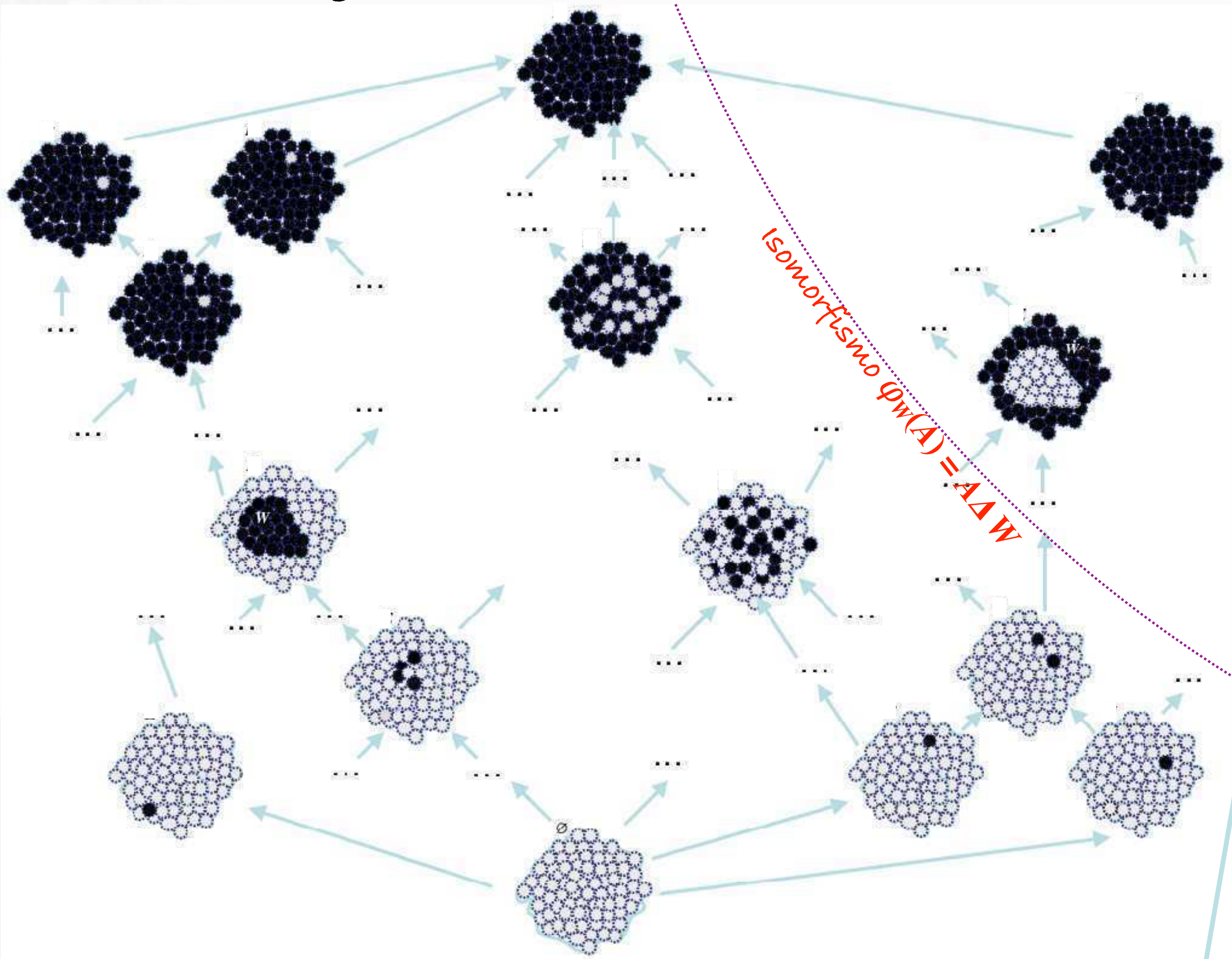
Subconjunto W de E

$|W| = 27$



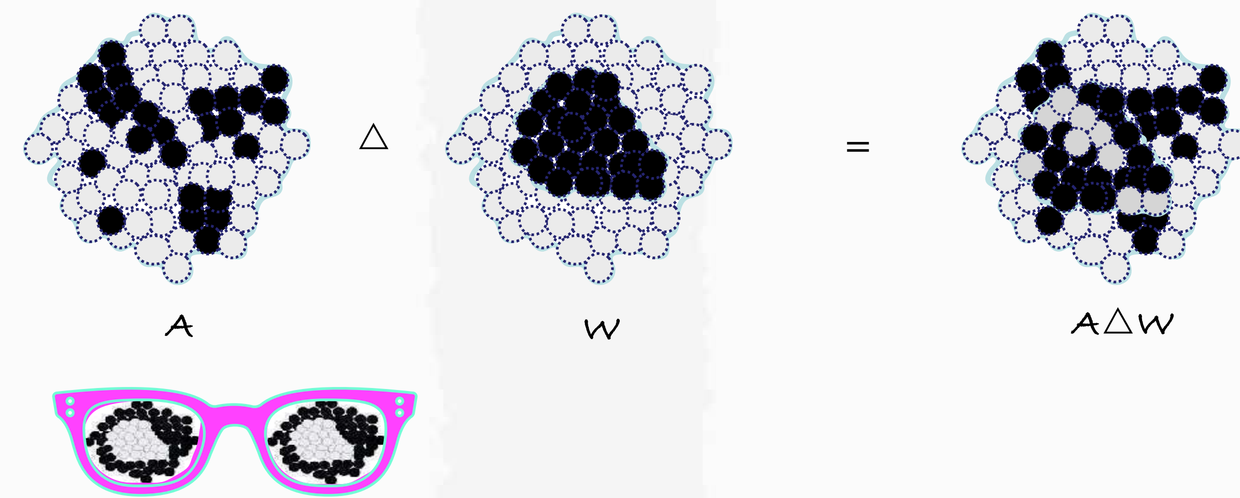
Complementario W^c

Sistema algebraico $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$

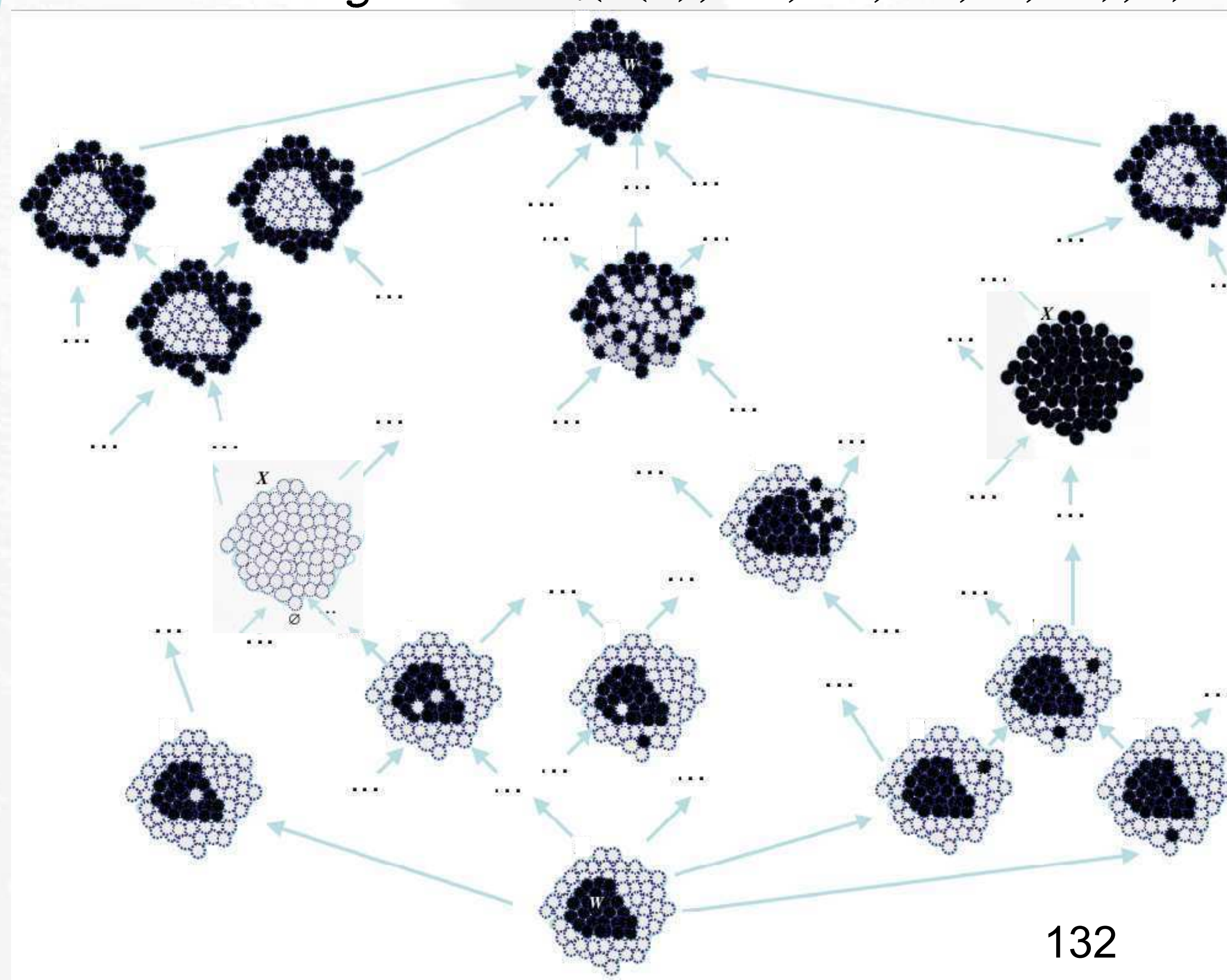


Isomorfismo $\varphi_W(A) = A \Delta W$

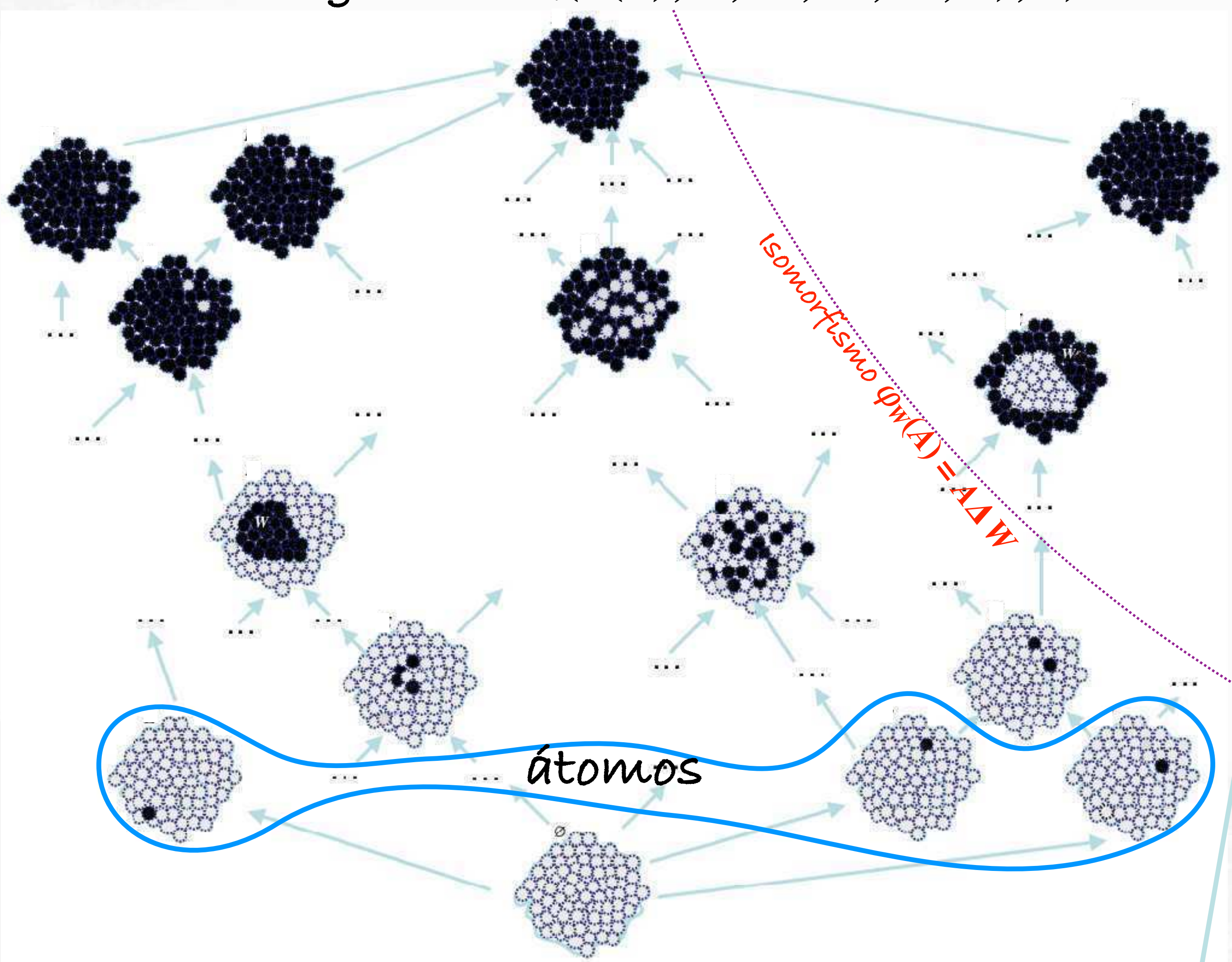
$A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



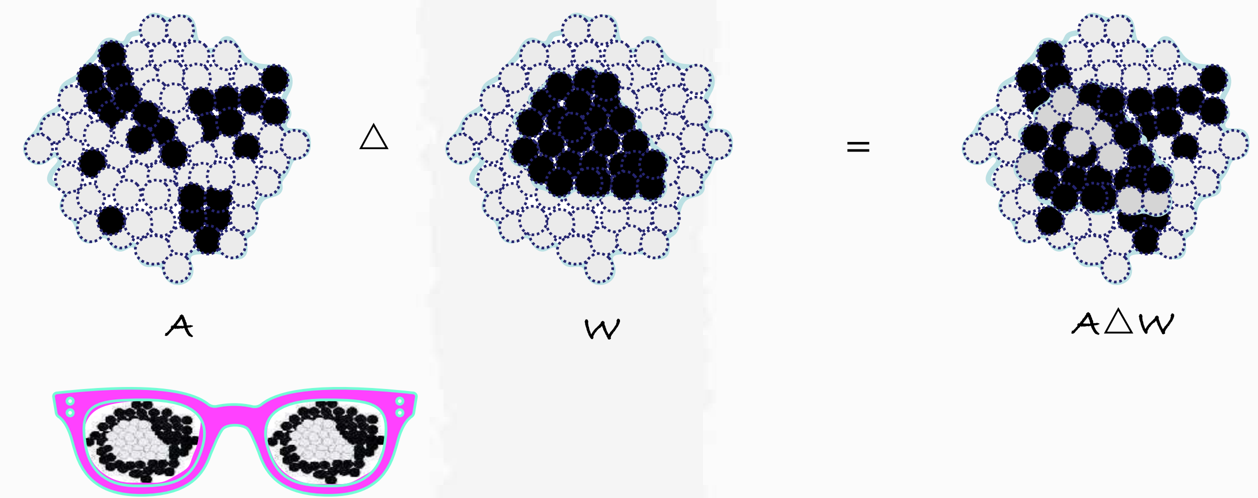
Sistema algebraico $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$



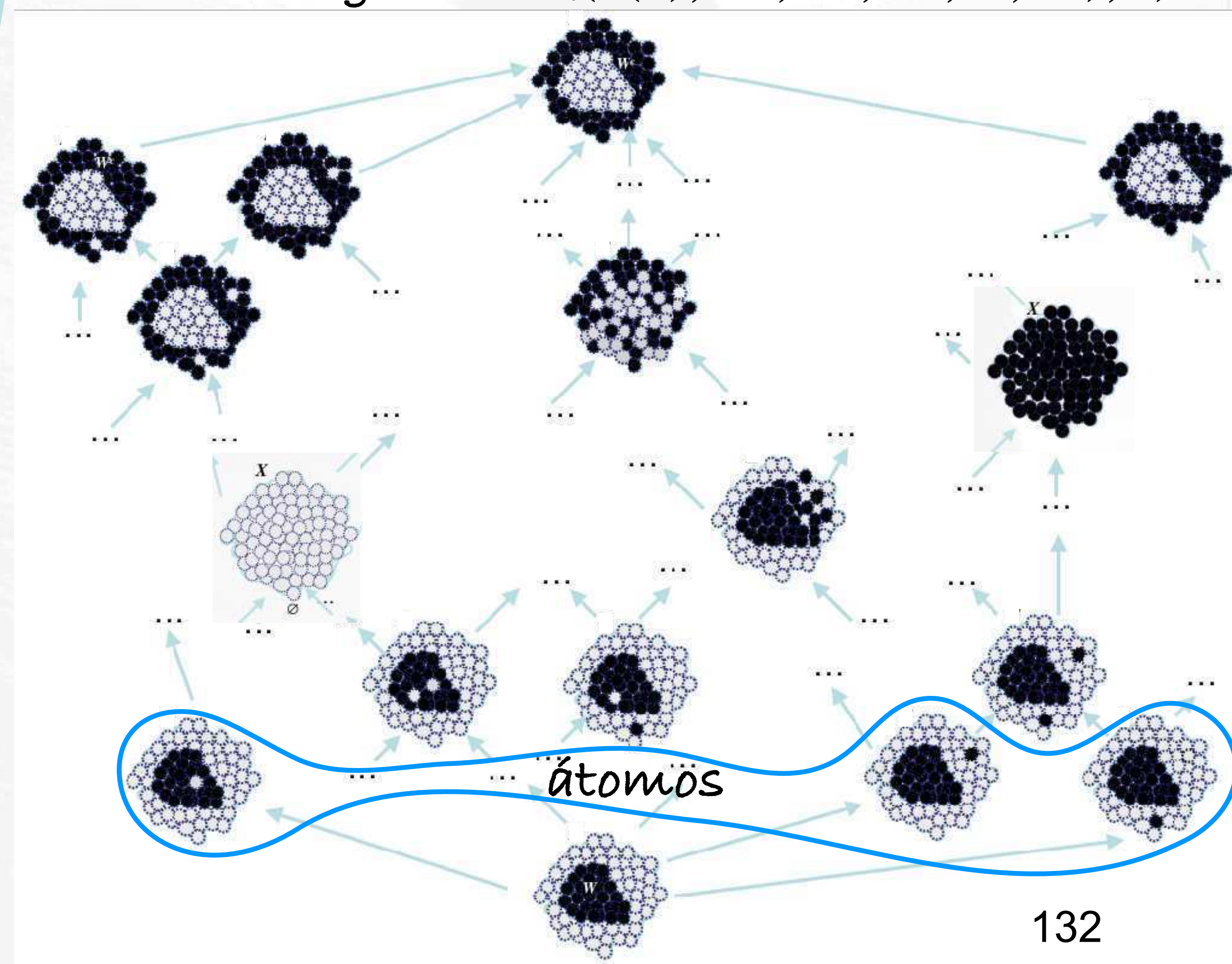
Sistema algebraico $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



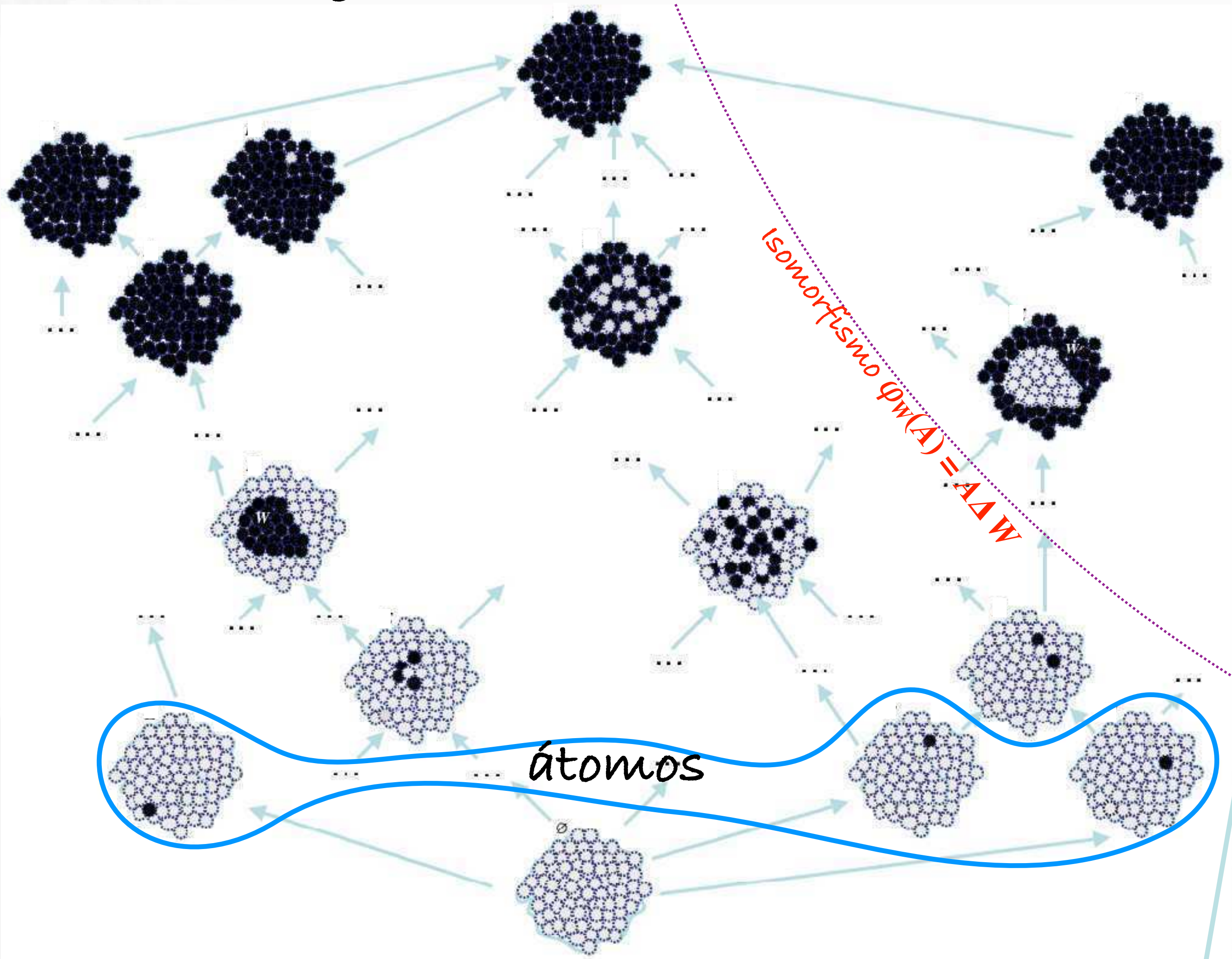
$A \triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



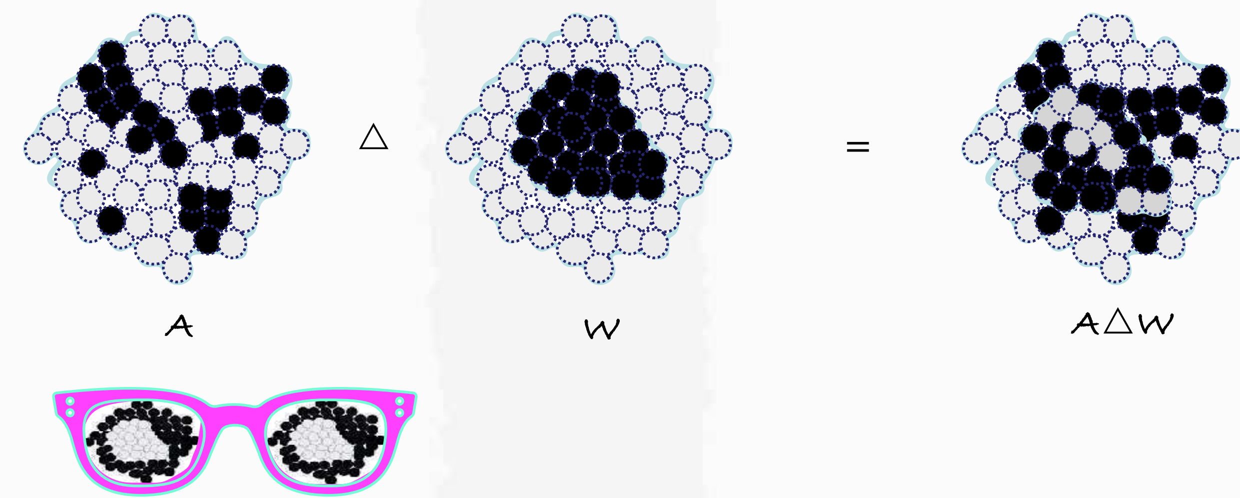
Sistema algebraico $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$



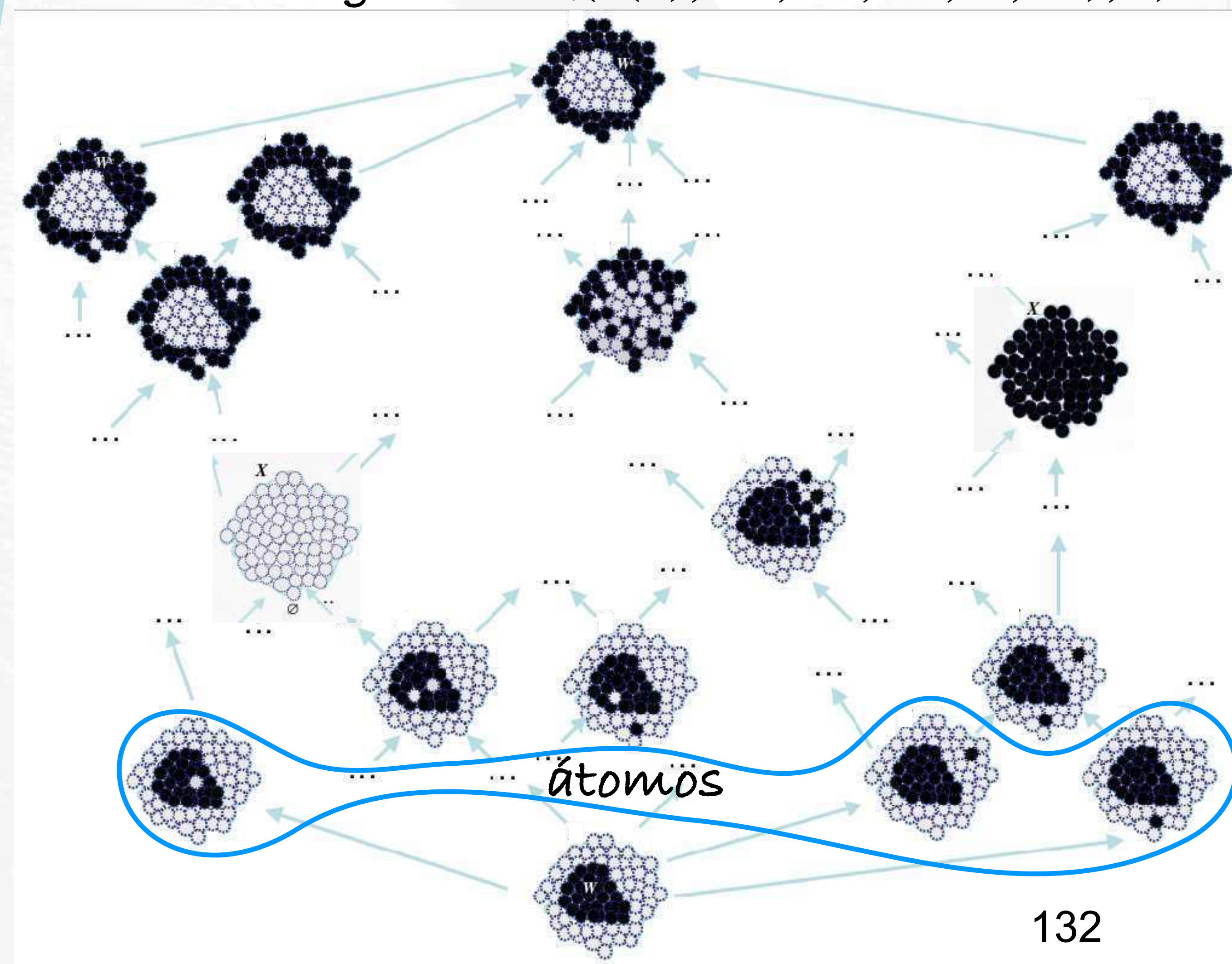
Sistema algebraico $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



$A\triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



Sistema algebraico $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

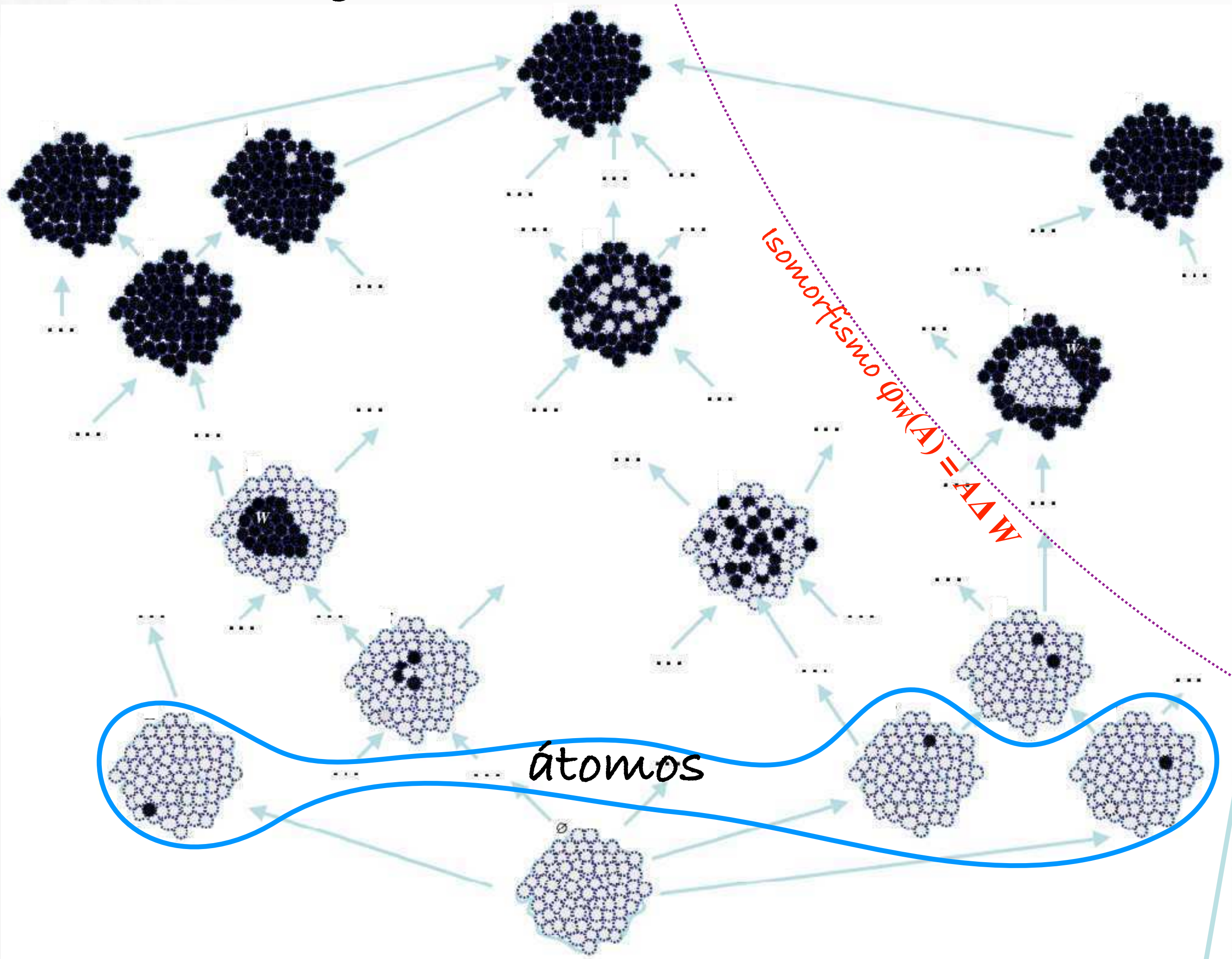


Sean $A, B, W, \ldots \in P(X)$ y

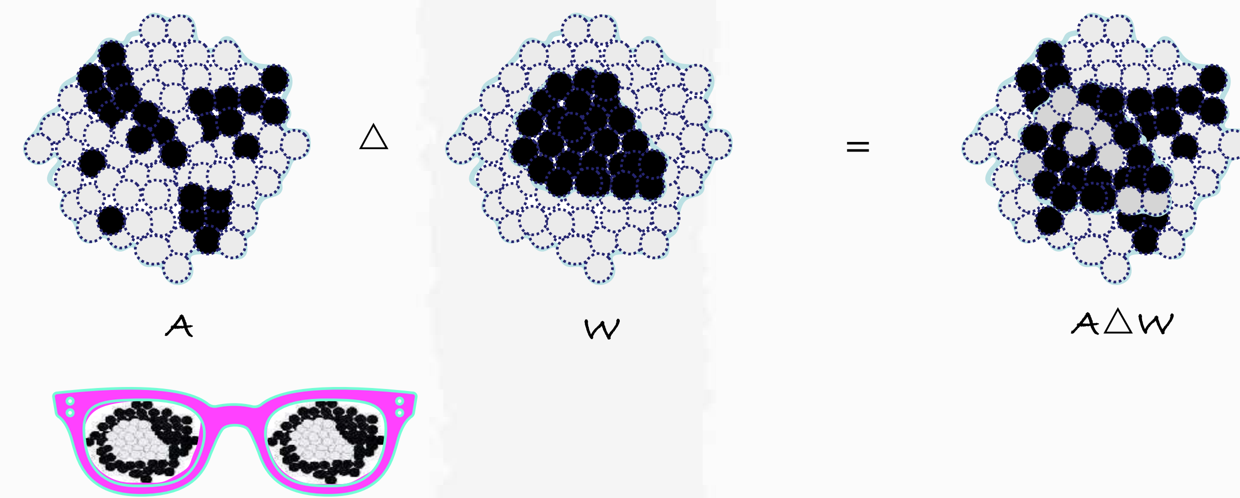
sea la medida sobre $P(X)$: $m(A) = |A|$ (cardinal de A).

La aplicación $d_m(A,B) = m(A\triangle B)$ es una distancia en $P(X)$.

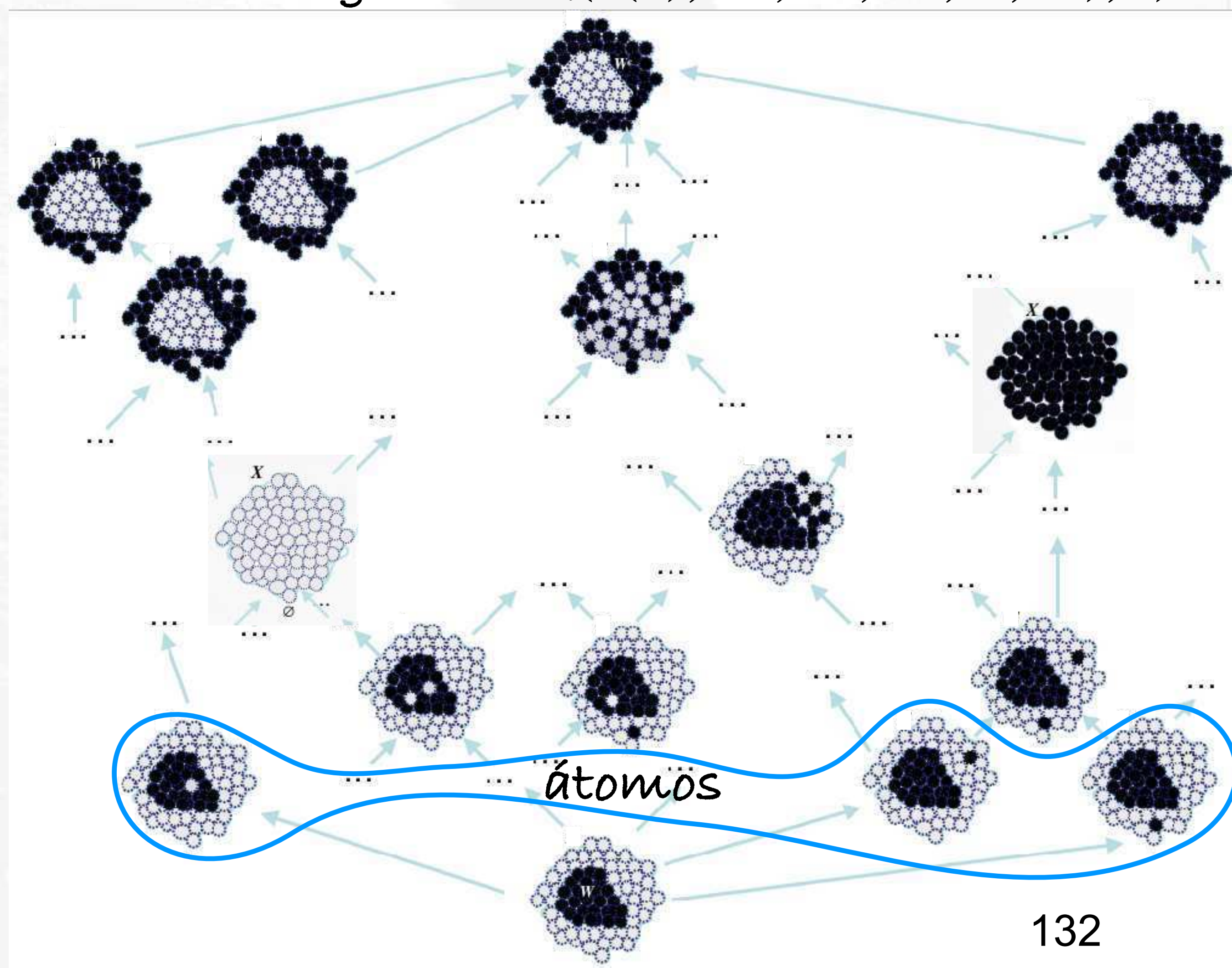
Sistema algebraico $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), {}^c)$



$A\triangle W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$



Sistema algebraico $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$



Sean $A, B, W, \ldots \in P(X)$ y

sea la medida sobre $P(X)$: $m(A) = |A|$ (cardinal de A).

La aplicación $d_m(A,B) = m(A\triangle B)$ es una distancia en $P(X)$.

Una interpretación de la expresión $A \sqsubseteq^W B$:

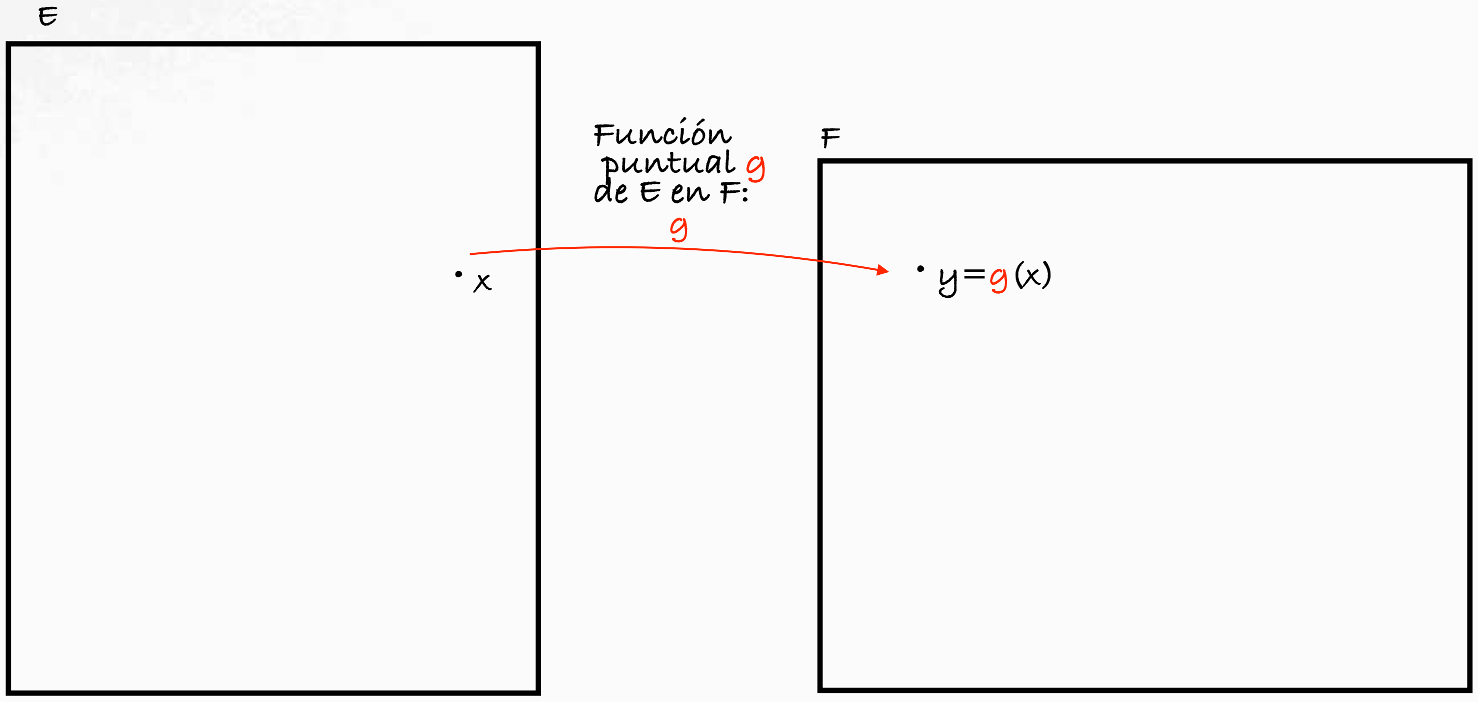
$A \sqsubseteq^W B \Longrightarrow (A\triangle W) \subseteq (B\triangle W) \Longrightarrow$

$[m(A\triangle W) \leq m(B\triangle W)] \Longrightarrow [d_m(A,W) \leq d_m(A,W)]$.

"A difiere menos de W que B"

Esta interpretación también es válida en el caso
En que A,B,... sean subconconjutos borrosos
(o imágenes con tonos de gris), W es un nítido y
$m(A) = \|A\| = A(x_1) + A(x_2) + \ldots + A(x_{78})$

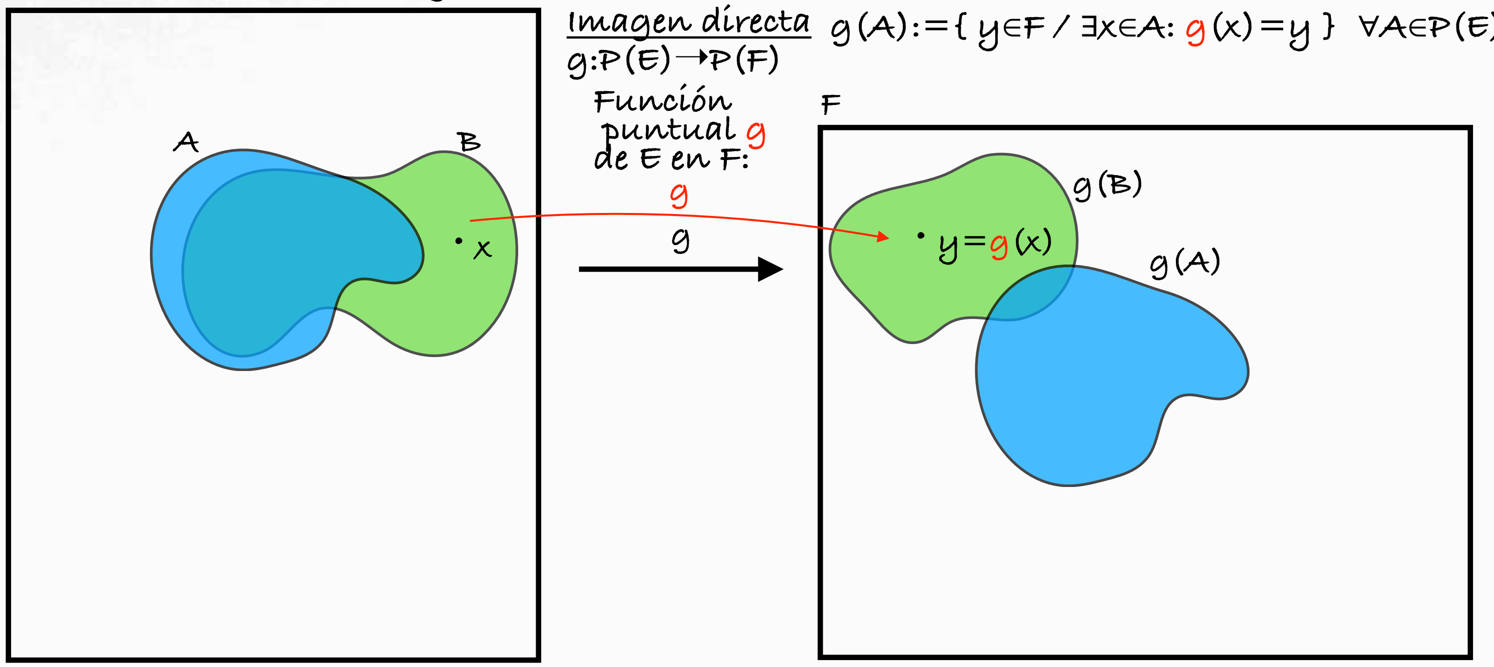
Relación de las imágenes directa $g:P(E) \to P(F)$ e inversa $g^{-1}:P(F) \to P(E)$ de una función $g:E \to F$ con las w-inclusiones $\sqsubseteq^w$, la w-uniones $\sqcup^w$ y las w-intersecciones $\sqcap^w$ en E y F.


E
Función
puntual g
de E en F:
g
x
F
y=g(x)

Extensiones g y g^{-1} de g:E→F a las partes P(E), P(F):

Imagen directa $g(A):=\{ y\in F \,/\, \exists x\in A: g(x)=y \}\ \forall A\in P(E)$

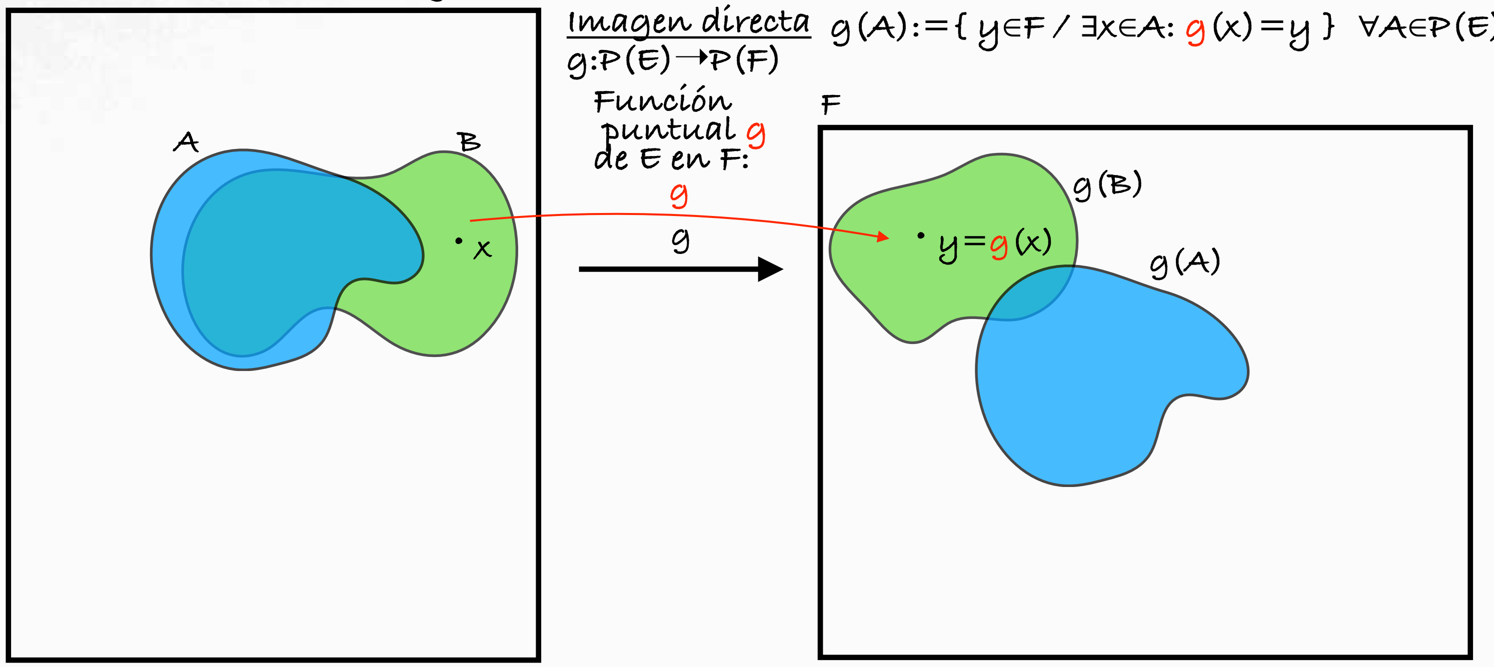
$g:P(E)\to P(F)$



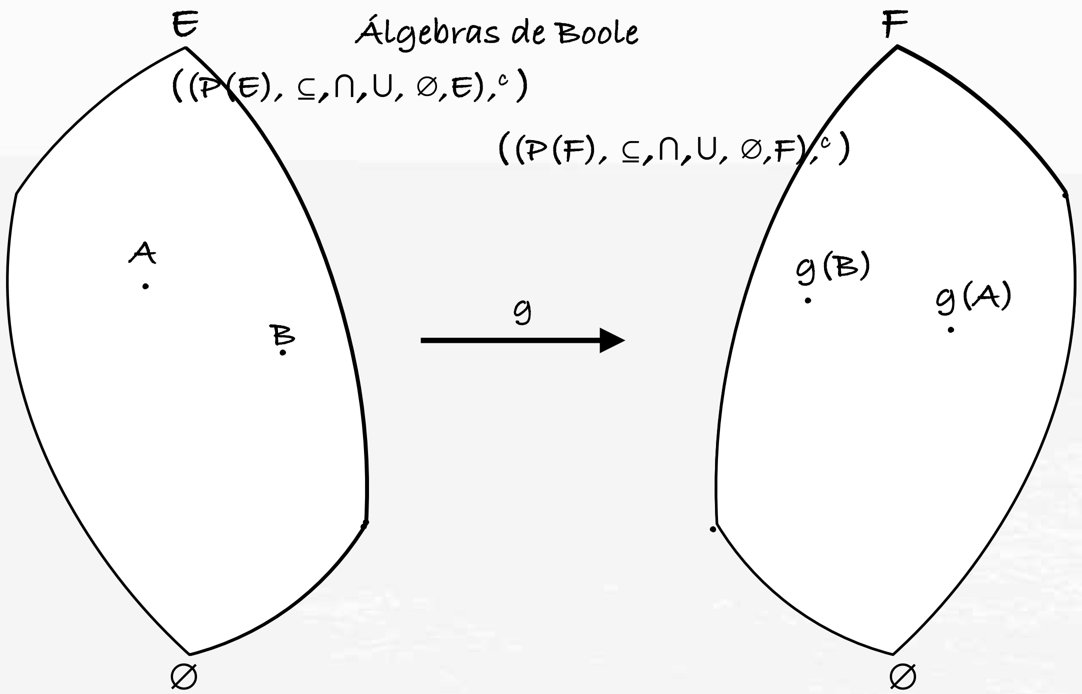
Extensiones g y g^{-1} de $g:E\to F$ a las partes $P(E)$, $P(F)$:

Imagen directa $g(A):=\{\, y\in F \,/\, \exists x\in A:\ g(x)=y \,\}\ \ \forall A\in P(E)$

$g:P(E)\to P(F)$



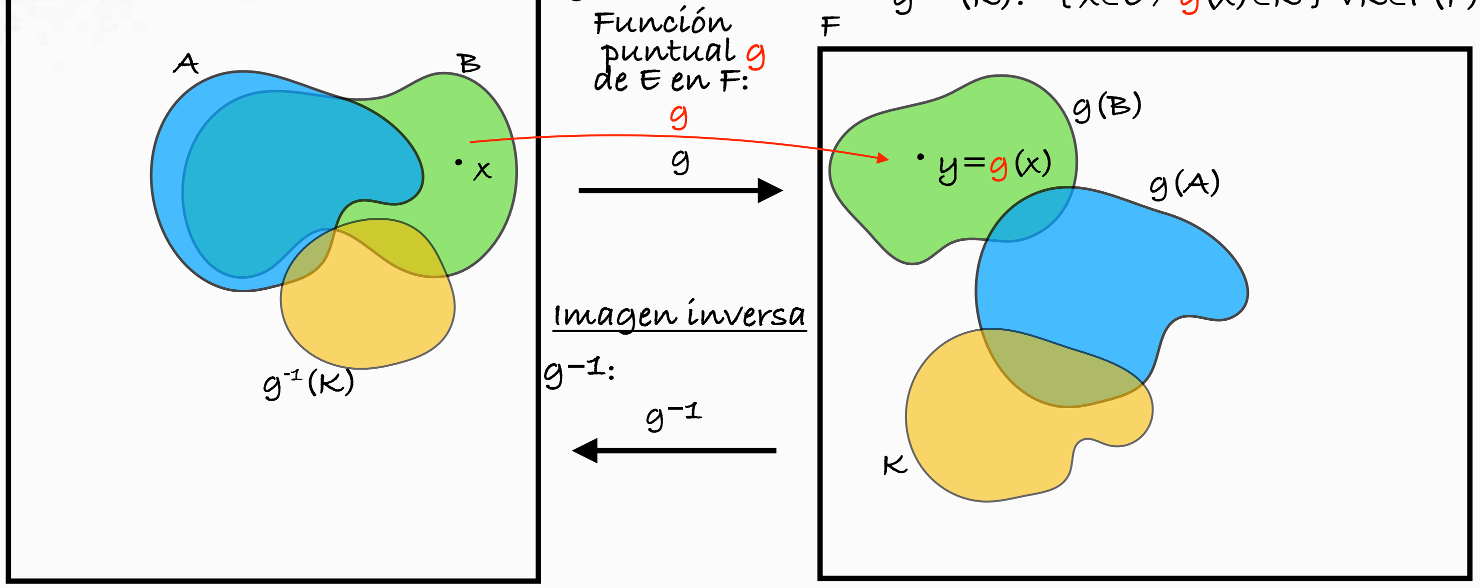
Álgebras de Boole

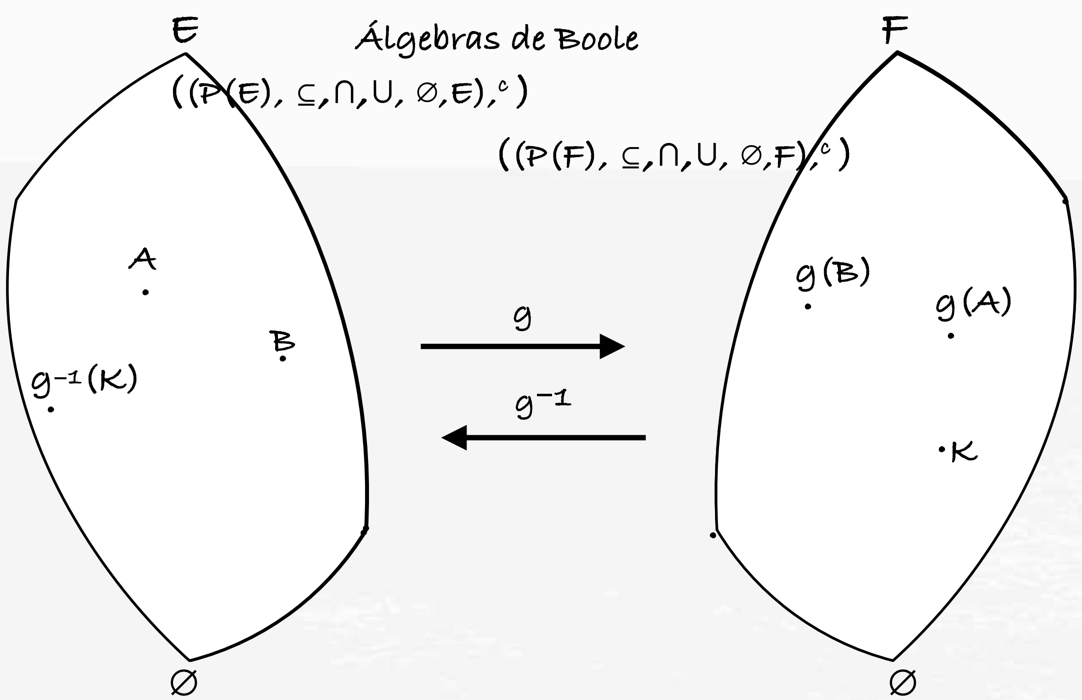


Extensiones g y g^{-1} de $g:E\to F$ a las partes $P(E)$, $P(F)$:

Imagen directa $g:P(E)\to P(F)$ $g(A):=\{y\in F \,/\, \exists x\in A:\ g(x)=y\}\ \ \forall A\in P(E)$

$g^{-1}(K):=\{x\in E \,/\, g(x)\in K\}\ \forall K\in P(F)$





Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\varnothing)=\varnothing$.

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\varnothing)=\varnothing$, $g^{-1}(F)=E$.

$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)$ $g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \ \forall K\in P(K)$

Extensiones g y g^{-1} de $g:E\to F$ a las partes $P(E)$, $P(F)$:

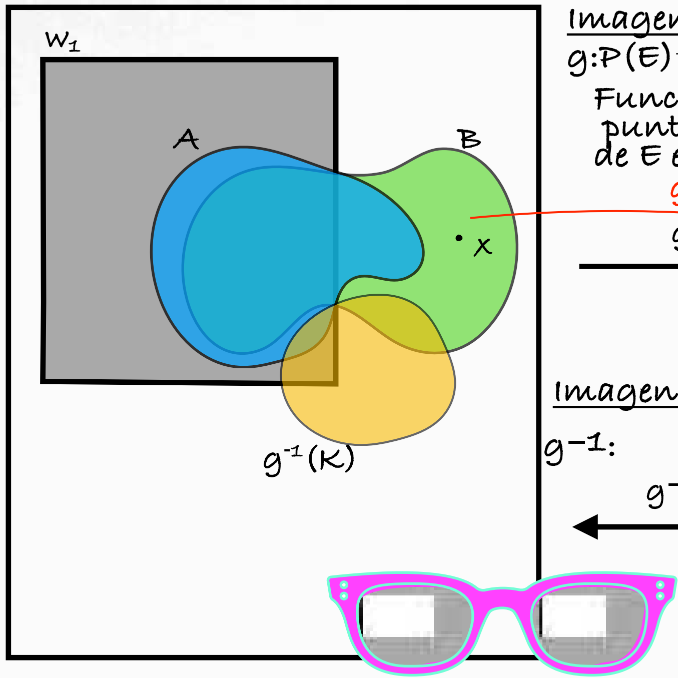


Imagen directa $g:P(E)\to P(F)$

$g(A):=\{y\in F \,/\, \exists x\in A: g(x)=y\}\ \ \forall A\in P(E)$

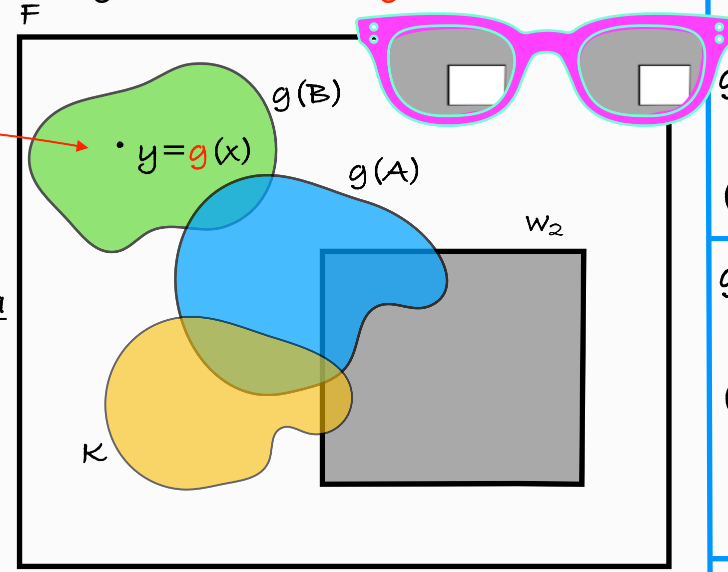
$g^{-1}(K):=\{x\in E \,/\, g(x)\in K\}\ \forall K\in P(F)$

Función puntual g de E en F: g

$\xrightarrow{g}$

Imagen inversa g^{-1}:

$\xleftarrow{g^{-1}}$



Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\emptyset)=\emptyset$.

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S))= g^{-1}(K-S)$,

$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(F)=E$.

$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in P(K)$

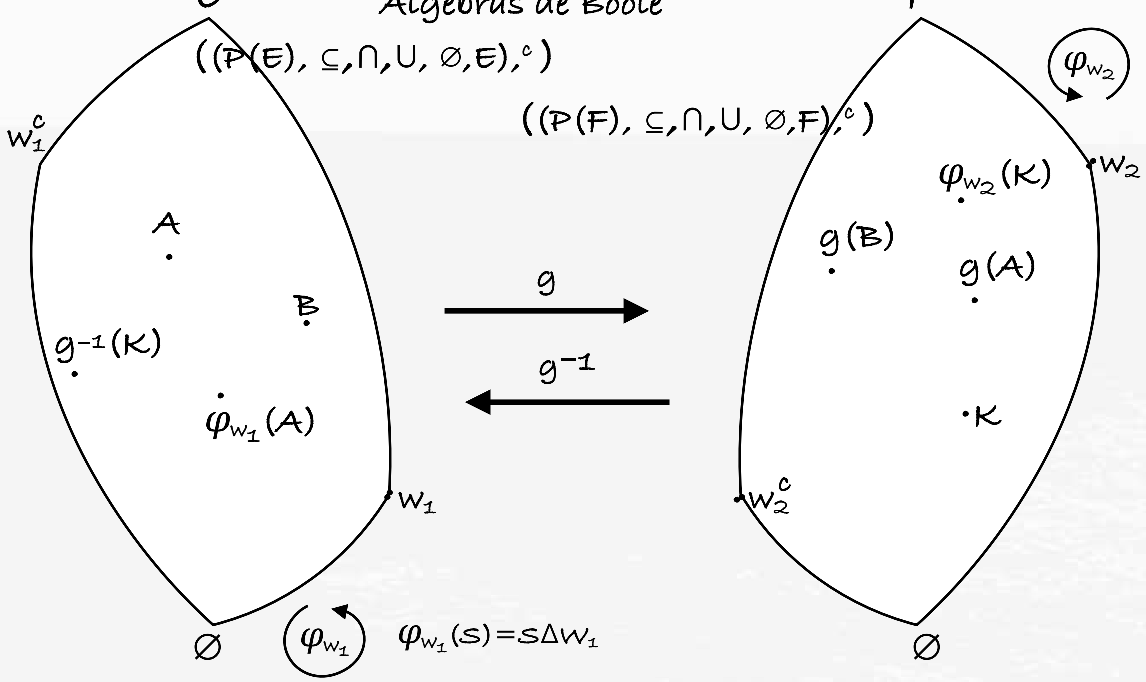
Álgebras de Boole

$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),{}^c)$

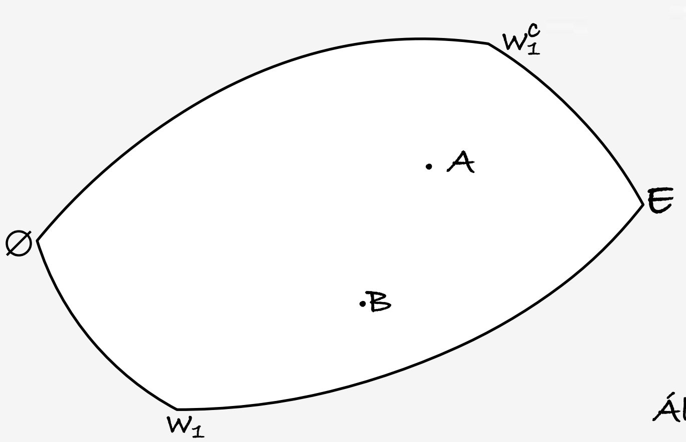
$((P(F),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,F),{}^c)$

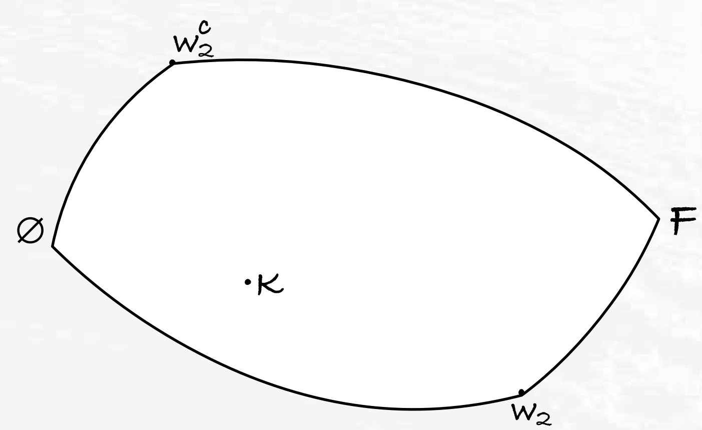
$\varphi_{w_2}(S)=S\Delta w_2$

Introducción de perspectivas w_1 y w_2:



$\varphi_{w_1}(S)=S\Delta w_1$





Álgebras de Boole

$((P(E),\sqsubseteq^{w_1},\sqcap^{w_1},\sqcup^{w_1},w_1,w_1^c),{}^c)$ $\quad$ $((P(F),\sqsubseteq^{w_2},\sqcap^{w_2},\sqcup^{w_2},w_2,w_2^c),{}^c)$

Extensiones g y g^{-1} de $g:E\to F$ a las partes $P(E)$, $P(F)$:

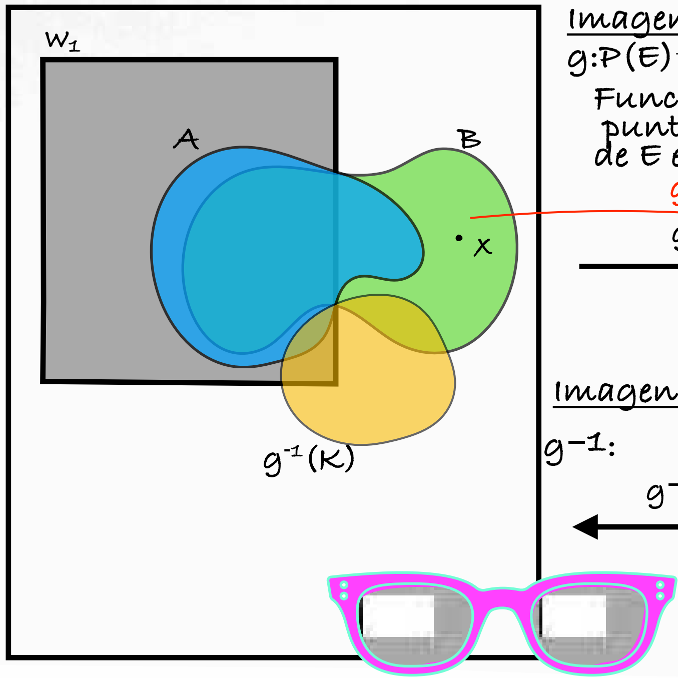


Imagen directa $g(A):=\{\, y\in F \;/\; \exists x\in A:\ g(x)=y \,\}\ \ \forall A\in P(E)$

$g:P(E)\to P(F)$

Función puntual g de E en F:

g

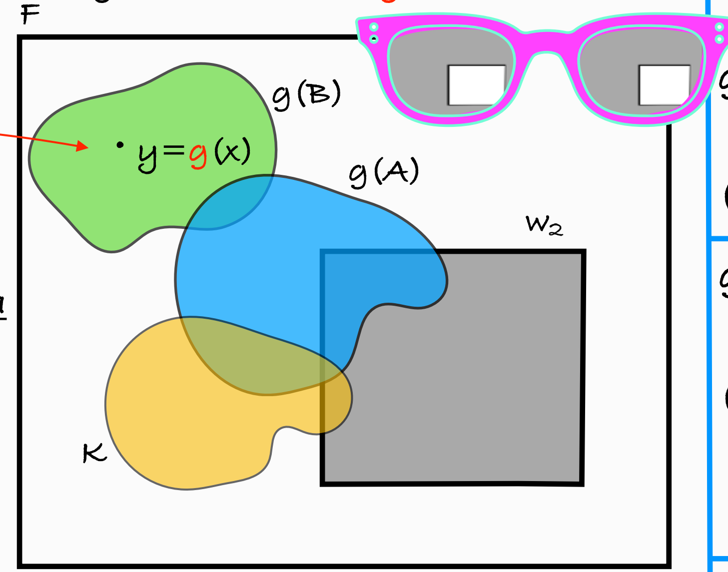
$\xrightarrow{\ g\ }$

$g^{-1}(K):=\{\, x\in E \;/\; g(x)\in K \,\}\ \forall K\in P(F)$

Imagen inversa

g^{-1}:

$\xleftarrow{\ g^{-1}\ }$



La función puntual $g:E\to F$ no varía, pero aparecen nuevas extensiones: $\hat{g}_{\hat{W}}:P(E)\to P(F)$, $\hat{g}_{\hat{W}}^{-1}:P(E)\to P(F)$

Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

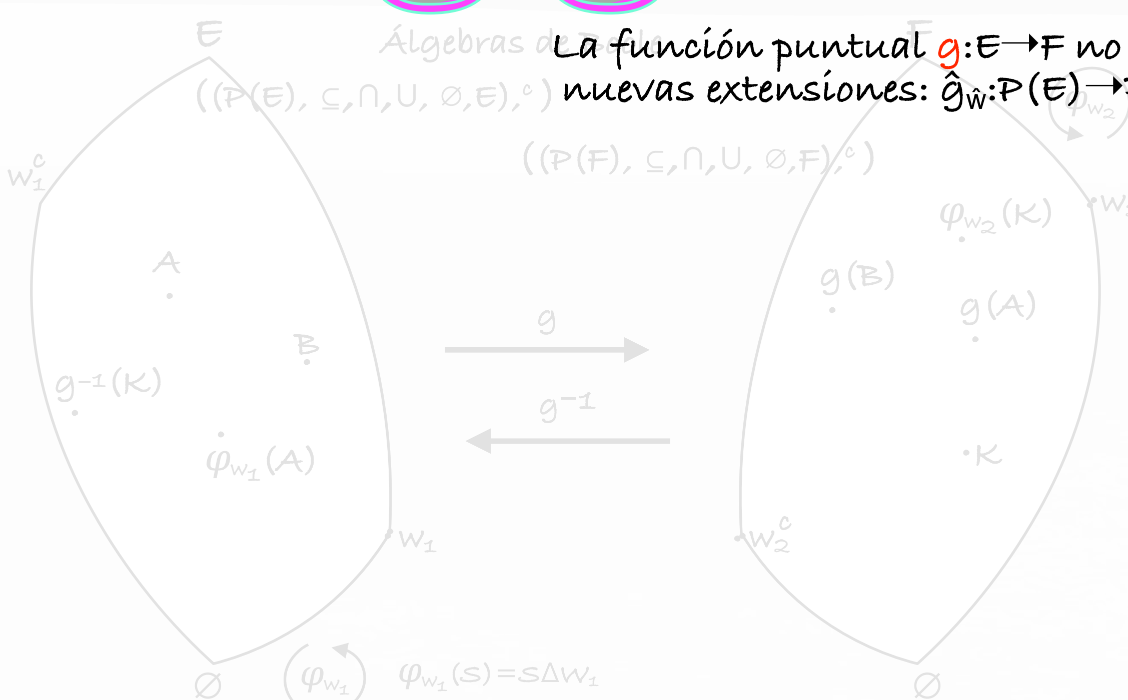
$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\emptyset)=\emptyset$.

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

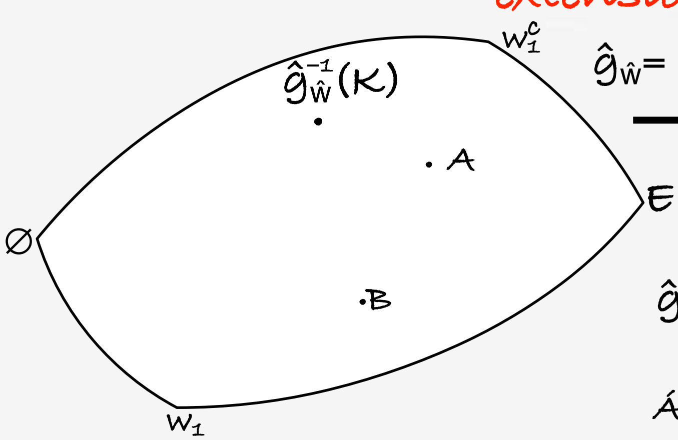
$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(F)=E$.

$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in P(K)$



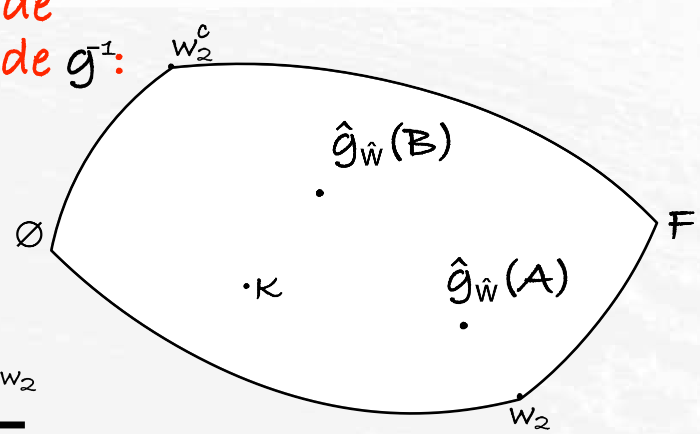
Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}_{\hat{W}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



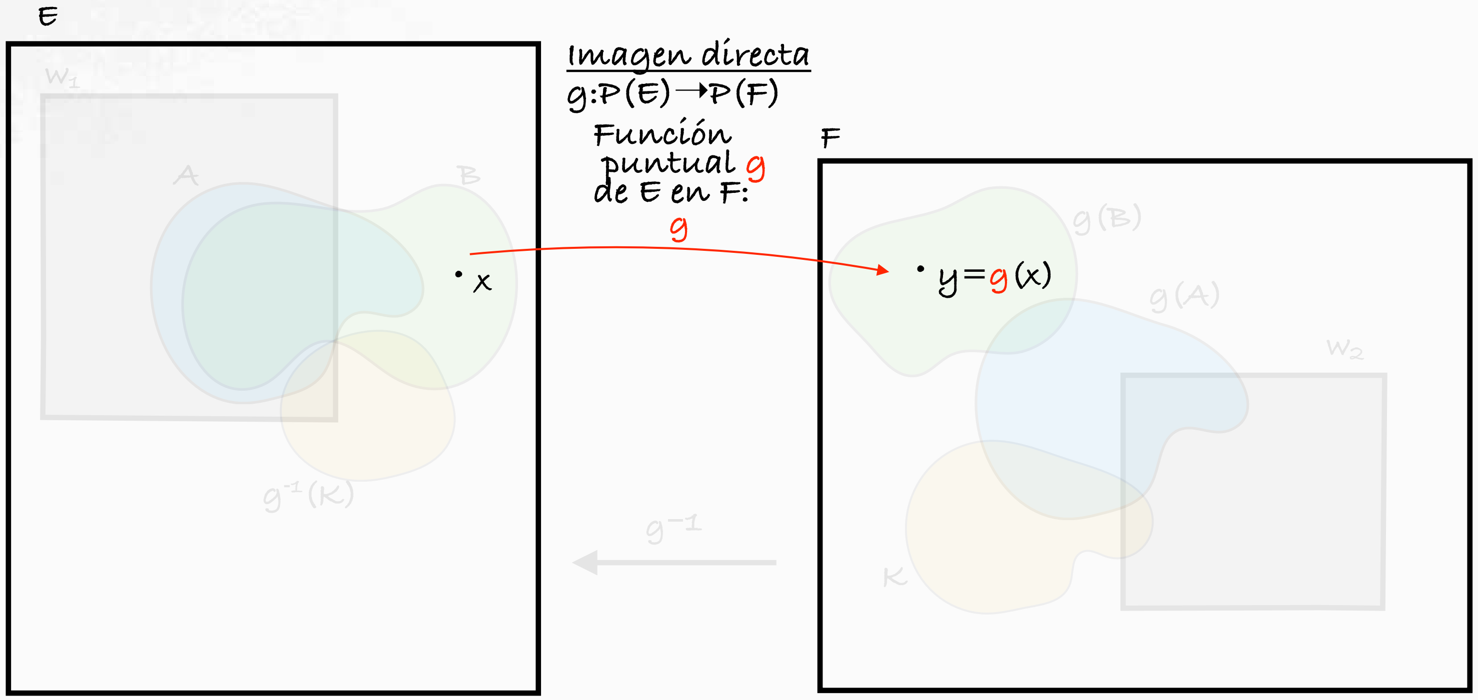
$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_{W_2}\circ g\circ \varphi_{W_1}$

$\hat{g}_{\hat{W}}^{-1} = \varphi_{W_1}\circ g^{-1}\circ \varphi_{W_2}$

Álgebras de Boole



$((P(E),\sqsubseteq^{W_1},\sqcap^{W_1},\sqcup^{W_1},W_1,W_1^c),^c)$ $\quad \hat{W}=(W_2,W_1)\in P(E)\times P(F)$ $\quad ((P(F),\sqsubseteq^{W_2},\sqcap^{W_2},\sqcup^{W_2},W_2,W_2^c),^c)$



Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B)\Rightarrow (g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\varnothing)=\varnothing$.

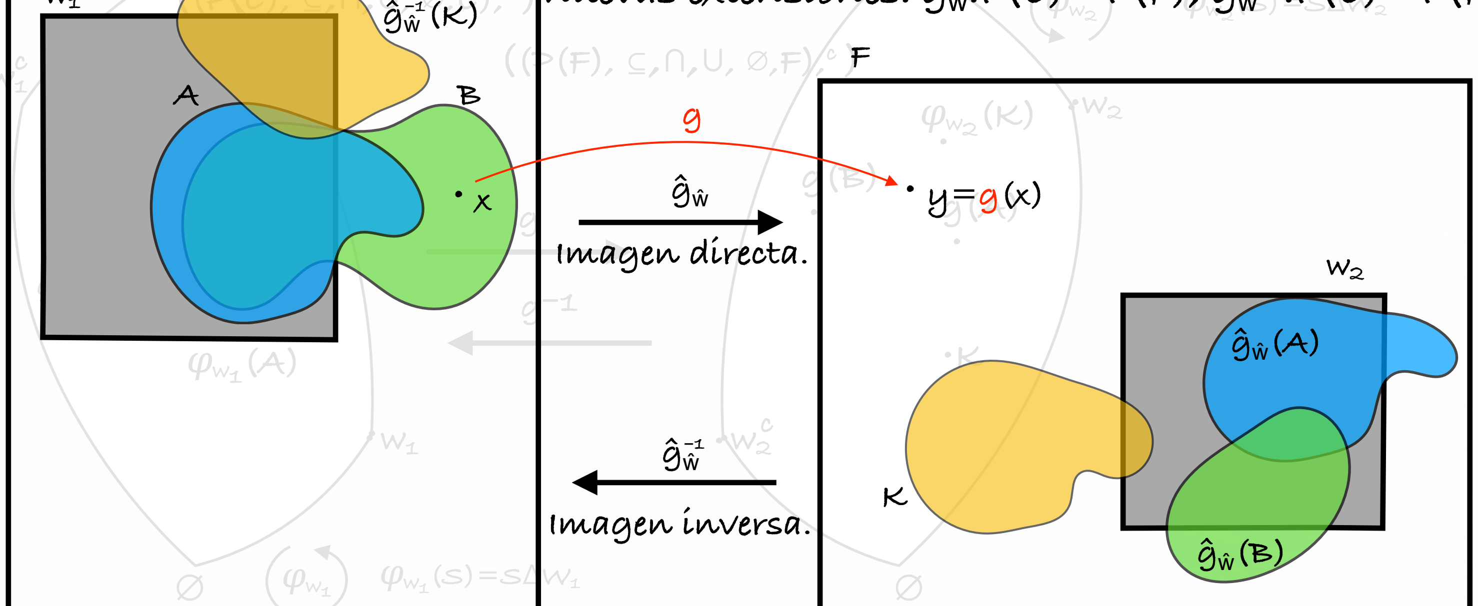
$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S)\Rightarrow (g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

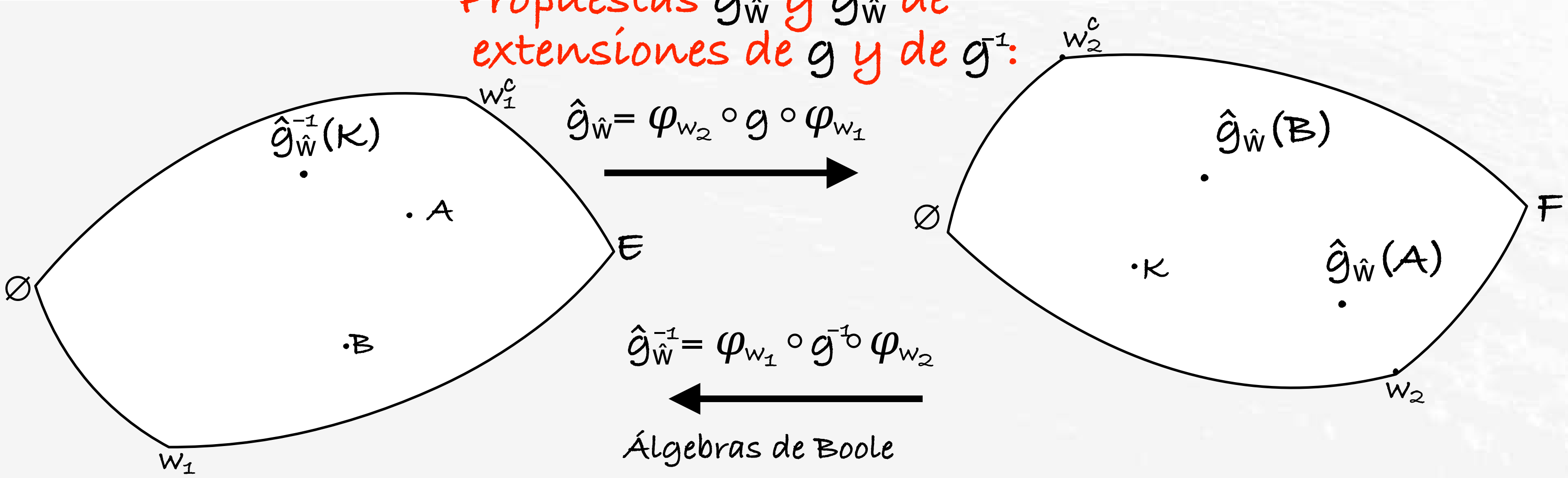
$g^{-1}(K^c) = (g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\varnothing)=\varnothing$, $g^{-1}(F)=E$.

$A \subseteq g^{-1}(g(A))$ $\forall A\in P(E)$ $\quad$ $g(g^{-1}(K))\subseteq K$ $\forall K\in P(K)$

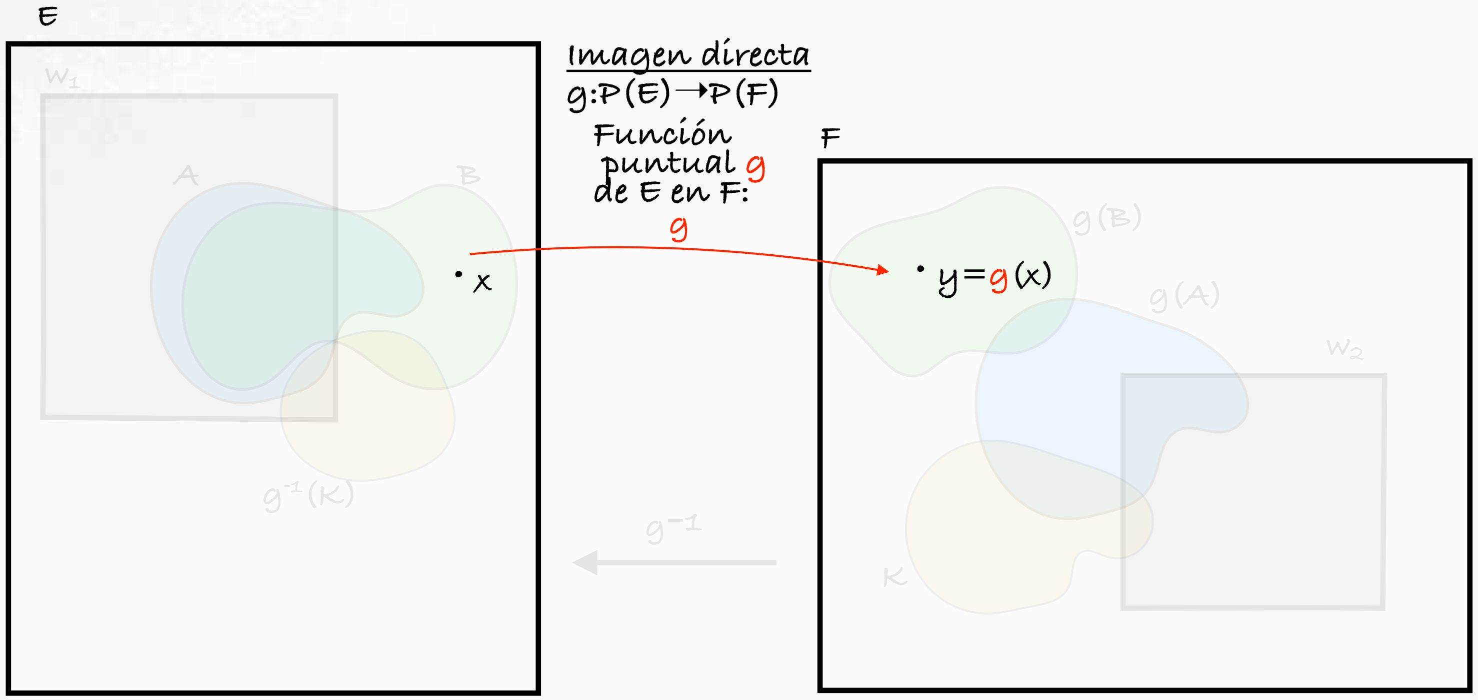
La función puntual $g:E\to F$ no varía, pero aparecen nuevas extensiones: $\hat{g}_{\hat{w}}:P(E)\to P(F)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}:P(E)\to P(F)$

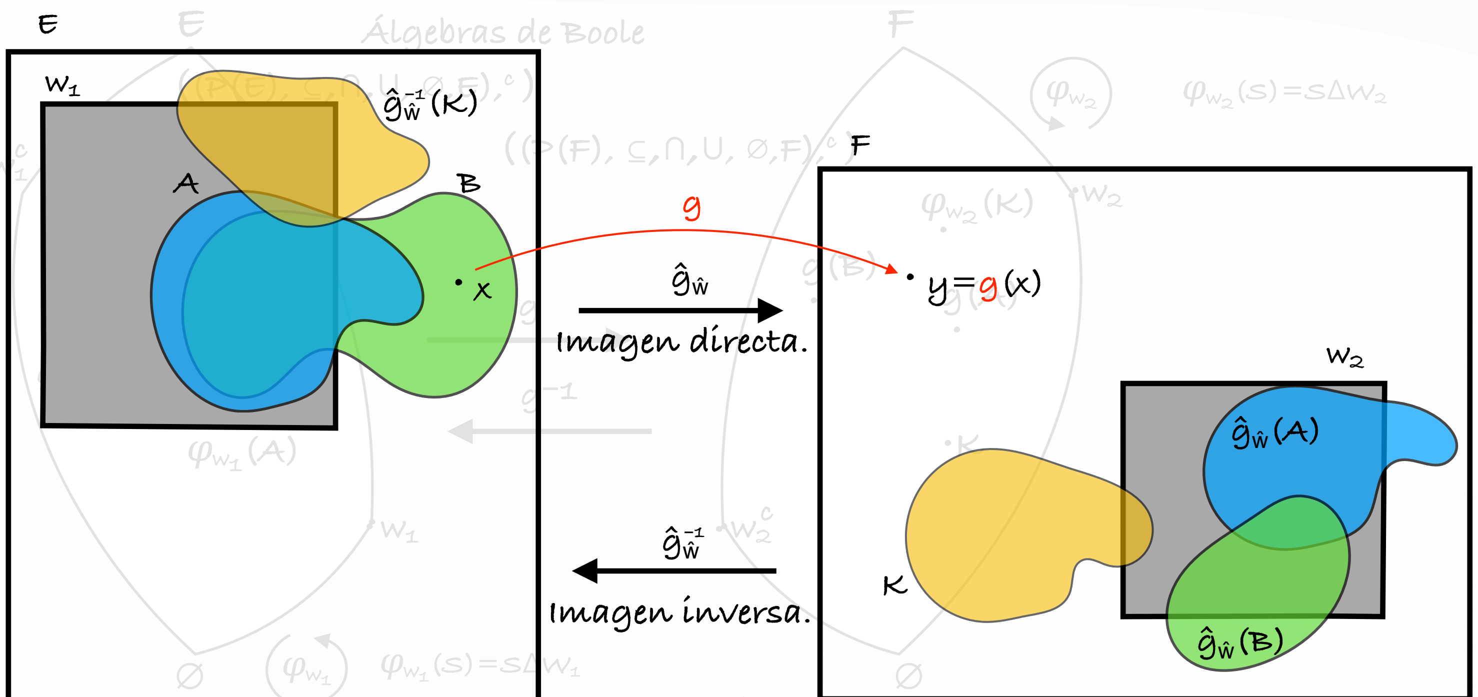


Propuestas $\hat{g}_{\hat{w}}$ y $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



$((P(E), \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), ^c)$ $\quad$ $\hat{W}=(W_2,W_1)\in P(E)\times P(F)$ $\quad$ $((P(F), \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), ^c)$

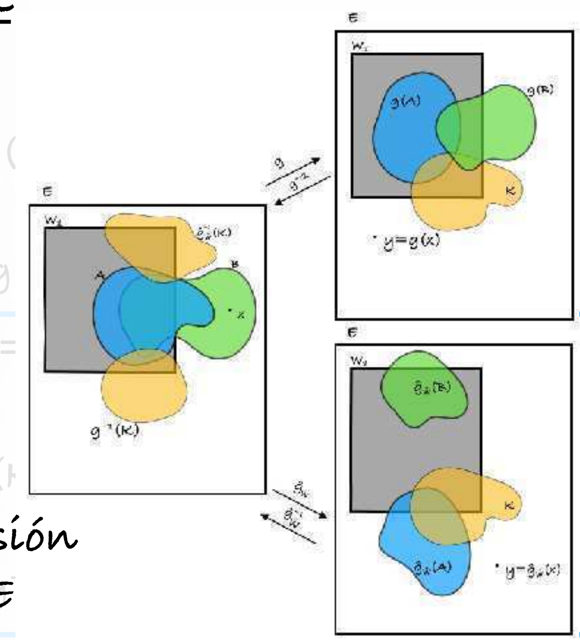




CASO PARTICULAR INTERESANTE:

$E=F$, $g:E\to E$ y

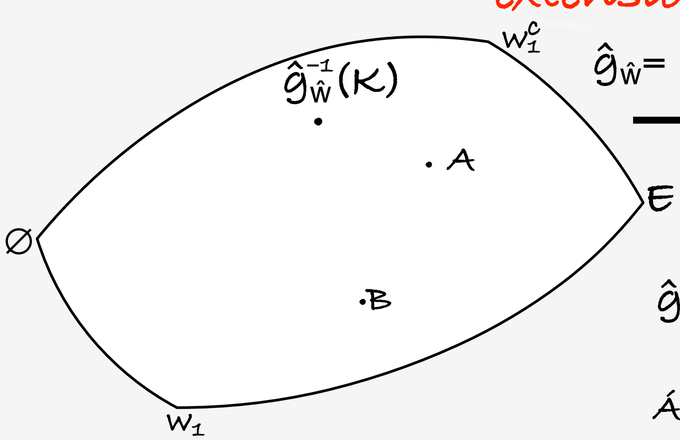
$W_1=W_2=W\in P(E)$



En este caso, si "i" es la extensión a $P(E)$ de la identidad $i_E:E\to E$ en E, se verifica:

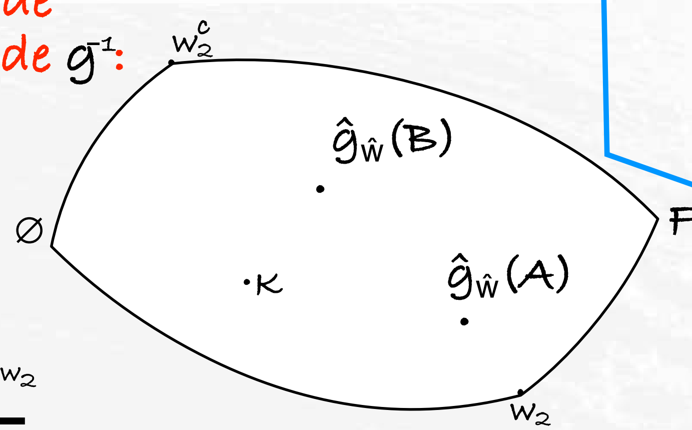
$\hat{i}_W=(\varphi_W\circ i\circ\varphi_W)=i \quad \forall W\in P(E)$.

Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}_{\hat{W}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



$\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}$

$\hat{g}_{\hat{W}}^{-1}=\varphi_{W_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{W_2}$

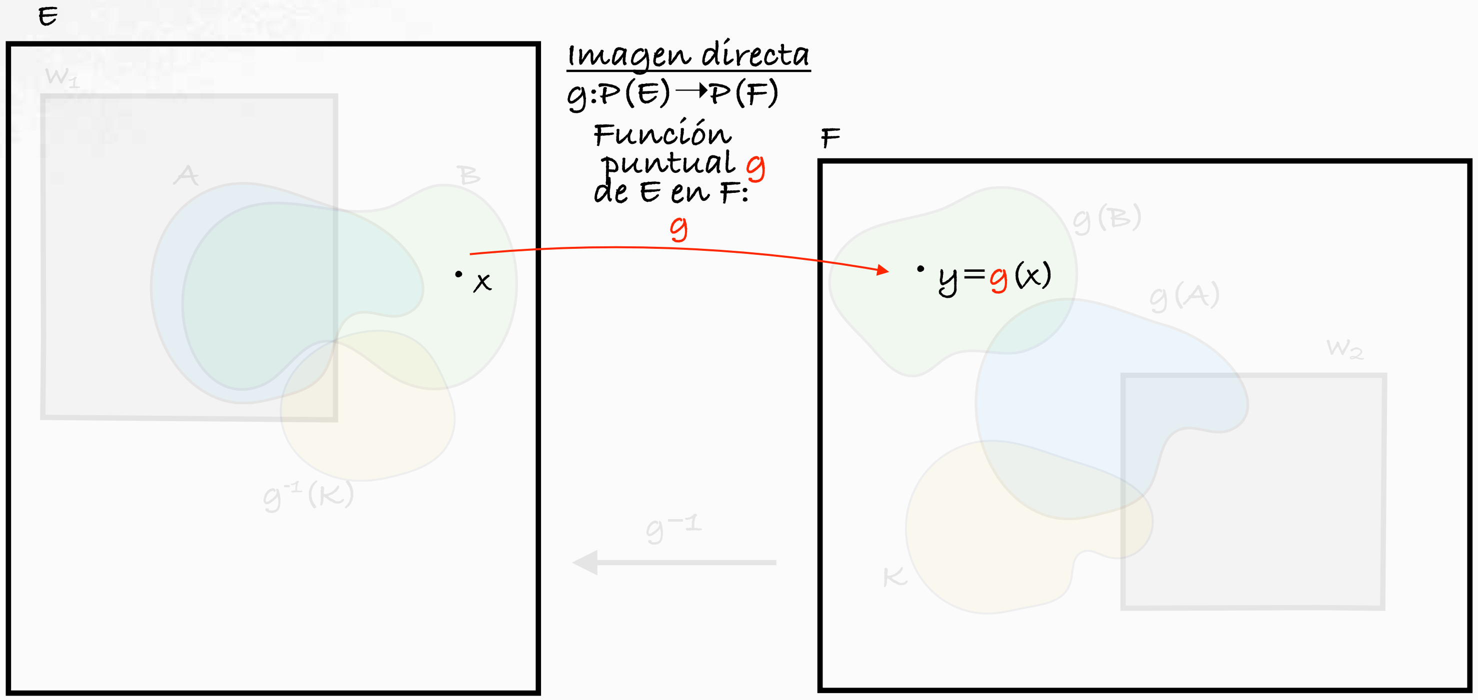


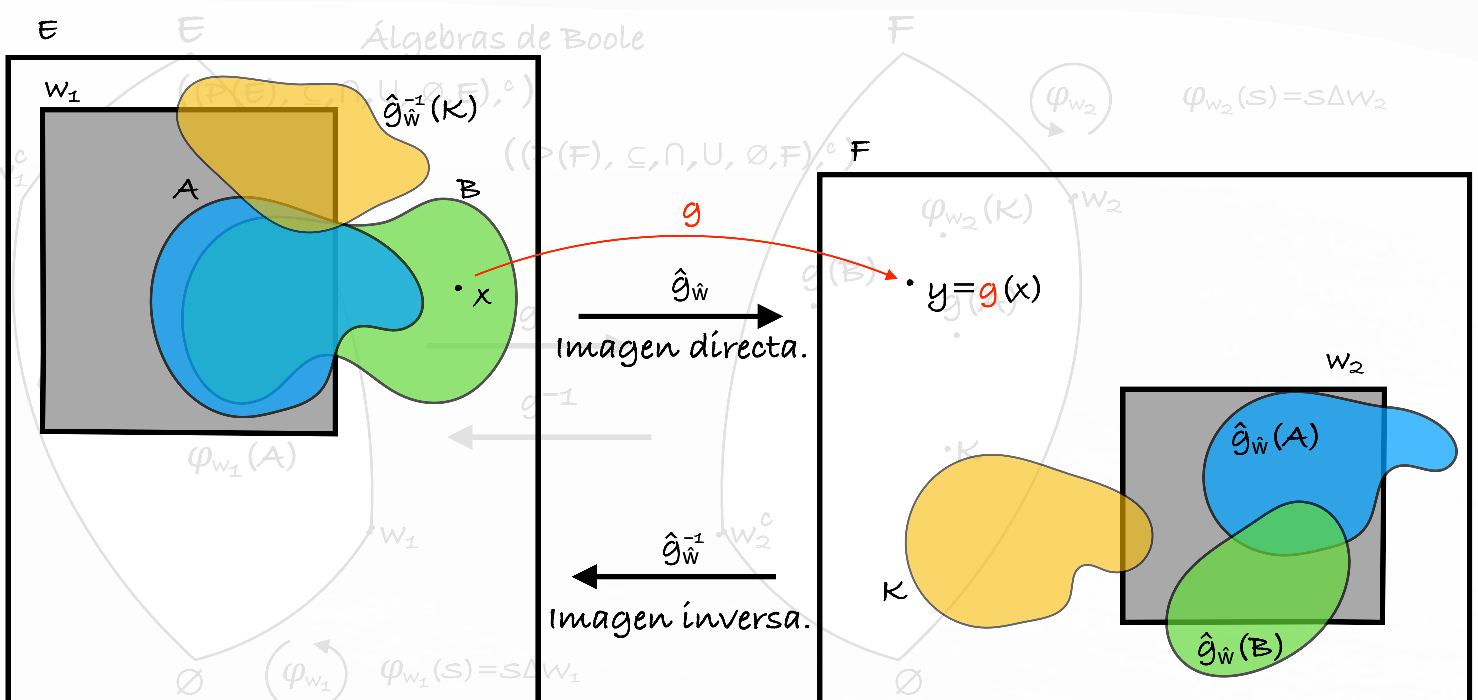
Álgebras de Boole

$((P(E),\sqsubseteq^{W_1},\sqcap^{W_1},\sqcup^{W_1},W_1,W_1^c),^c)$

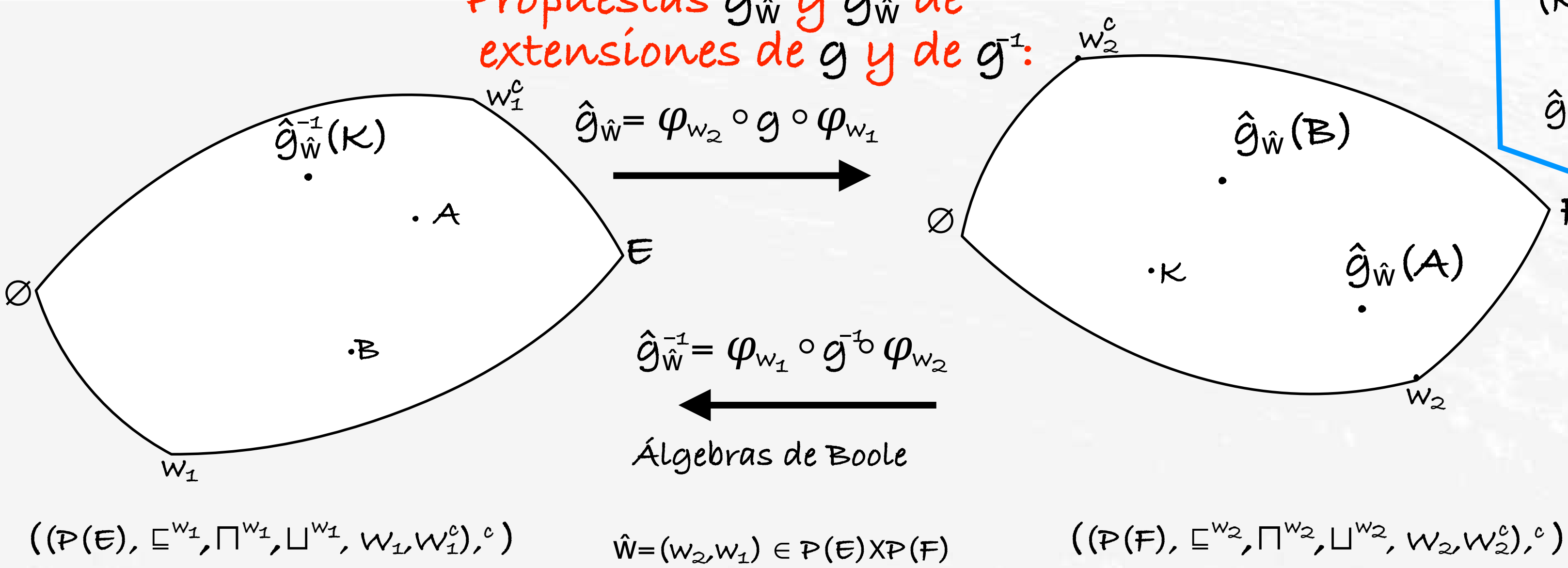
$\hat{W}=(W_2,W_1)\in P(E)XP(F)$

$((P(F),\sqsubseteq^{W_2},\sqcap^{W_2},\sqcup^{W_2},W_2,W_2^c),^c)$





Propuestas $\hat{g}_{\hat{w}}$ y $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j),\ g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)\quad \forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B)),\quad (g(A)-g(B))\subseteq g(A-B),\quad g(\emptyset)=\emptyset.$

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j),\ g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)\quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S)),\ (g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S),$

$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c,\ g^{-1}(\emptyset)=\emptyset,\ g^{-1}(F)=E.$

$A \subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E) \qquad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in P(K)$

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup^{W_1}_{j\in J} A_j) = \bigsqcup^{W_2}_{j\in J}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap^{W_1}_{j\in J} A_j) \sqsubseteq^{W_2} (\bigsqcap^{W_2}_{j\in J}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A\sqsubseteq^{W_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B)),\quad (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{W_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{W_1}{-} B),$

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2.$

¿?

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup^{W_2}_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^{W_1}_{j\in J}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap^{W_2}_{j\in J} K_j) = \bigsqcap^{W_1}_{j\in J}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\sqsubseteq^{W_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)),\ (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{W_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{W_2}{-} S),$

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c)=(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2)=W_1,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(F)=E.$

$A \sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E) \qquad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))\sqsubseteq^{W_2}K\ \forall K\in P(K)$

Propiedades de las w-extensiones

$$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J},$$

$$(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B)),\quad (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w_1}{-} B),$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2.$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$$

$$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)),\ (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S),$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2^{c}) = W_1^{c},\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^{c}) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^{c}.$$

$$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A)) \ \forall A \in P(E) \qquad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K \ \forall K \in P(K)$$

Propiedades de las extensiones

Análogas

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B)) \subseteq g(A-B)$, $g(\varnothing)=\varnothing$.

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

$g^{-1}(K^c) = (g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\varnothing)=\varnothing$, $g^{-1}(F)=E$.

$A \subseteq g^{-1}(g(A))$ $\forall A\in P(E)$ $\quad g(g^{-1}(K)) \subseteq K$ $\forall K\in P(K)$

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j))$ $\forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w}{-} B)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2{}^c) = W_1{}^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))$ $\forall A\in P(E)$ $\quad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K$ $\forall K\in P(K)$

(1) $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$. *Demostración*. $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \Rightarrow ((A \Delta W_1) \subseteq (B \Delta W_1)) \Rightarrow (g(A \Delta W_1) \subseteq g(B \Delta W_1)) \Rightarrow (g(A \Delta W_1) \Delta W_2 \sqsubseteq^{W_2} g(B \Delta W_1) \Delta W_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

$$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}{}^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}{}^{W_1} A_j) \sqsubseteq^{W_2} (\bigsqcap_{j\in J}{}^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J},$$

(1)

$$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B)),\quad (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{W_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{W_1}{-} B),$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2.$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}{}^{W_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}{}^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}{}^{W_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}{}^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$$

$$(K \sqsubseteq^{W_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)),\ (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{W_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{W_2}{-} S),$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2{}^c) = W_1{}^c,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c.$$

$$A \sqsubseteq^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A \in P(E) \qquad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{W_2} K\ \forall K \in P(K)$$

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$. <u>Demostración</u>. $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow ((A \Delta w_1) \subseteq (B \Delta w_1)) \Rightarrow (g(A \Delta w_1) \subseteq g(B \Delta w_1)) \Rightarrow (g(A \Delta w_1) \Delta w_2 \sqsubseteq^{w_2} g(B \Delta w_1) \Delta w_2) \Rightarrow$ $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

(2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}{}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}{}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $(((\prod_{j\in J}{}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_1} A_k) \ \forall k \in J) \Rightarrow ((\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}{}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_k)) \ \forall k \in J) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}{}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}{}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)))$.

<u>Propiedades de las w-extensiones</u> (Demostraciones)

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}{}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}{}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}{}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}{}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w}{-} B)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}{}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}{}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}{}^{w_2} K_j) = \prod_{j\in J}{}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2{}^c) = W_1{}^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A)) \ \forall A \in P(E)$ $\quad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K \ \forall K \in P(K)$

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$. <u>Demostración</u>. $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow ((A \Delta w_1) \subseteq (B \Delta w_1)) \Rightarrow (g(A\Delta w_1) \subseteq g(B\Delta w_1)) \Rightarrow (g(A\Delta w_1)\Delta w_2 \sqsubseteq^{w_2} g(B\Delta w_1)\Delta w_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

(2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $(((\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_1} A_k) \ \forall k \in J) \Rightarrow ((\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_k)) \ \forall k\in J) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)))$.

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = (\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = ((\varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)) = ((\varphi_{w_2} \circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j))) = ((\varphi_{w_2} \circ g)((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1)) =$
$\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1)) = (g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1))\Delta w_2 = (g((\bigcup_{j\in J} A_j \Delta w_1)))\Delta w_2 = (\bigcup_{j\in J} g(A_j \Delta w_1))\Delta w_2 =$
$(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} [g(A_j \Delta w_1)\Delta w_2) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$.

<u>Propiedades de las w-extensiones</u> (Demostraciones)

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w_1}{-} B)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2} K_j) = \prod_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2^c) = W_1^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A)) \ \forall A \in P(E)$ $\quad$ $\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K \ \forall K \in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

(2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)))$.

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$.

(4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2)=((\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqcap^{w_2}(\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat{g}_{\hat{w}}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat{g}_{\hat{w}}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$, (4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{w}{-}B)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2$.

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)=\prod_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\ \ \forall(K_j)_{j\in J}$

$(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\overset{w}{-}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))=\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K\overset{w_2}{-}S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2)=W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2^c)=W_1^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c)=(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \ \forall K\in P(K)$

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$. <u>Demostración</u>. $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow ((A\Delta w_1) \subseteq (B\Delta w_1)) \Rightarrow (g(A\Delta w_1) \subseteq g(B\Delta w_1)) \Rightarrow (g(A\Delta w_1)\Delta w_2 \sqsubseteq^{w_2} g(B\Delta w_1)\Delta w_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

(2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall (A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $(((\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_1} A_k)\ \forall k\in J) \Rightarrow ((\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_k))\ \forall k\in J) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)))$.

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = (\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall (A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = ((\varphi_{w_2}\circ g\circ \varphi_{w_1})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)) = ((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j))) = ((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1)) = \varphi_{w_2}(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1)) = (g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j)\Delta w_1))\Delta w_2 = (g((\bigcup_{j\in J} A_j\Delta w_1)))\Delta w_2 = (\bigcup_{j\in J} g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2) = (\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} [g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$.

(4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w_1}{-} B)$. <u>Demostración</u>. Conocemos que para subconjuntos W, A, B de E y F y funciones $g: E \to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w = A$, $(A \sqsubseteq^{w} B) \Leftrightarrow ((A\Delta w) \subseteq (B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c = (A^c\Delta w)$, $(A \sqcap^{w} B)\Delta w = (A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A) - g(B)) \subseteq g(A - B))$ y $\hat{g}_{\hat{w}}(A) = g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2) = ((\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqcap^{w_2} (\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c)\Delta w_2) = [(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c\Delta w_2)] = [(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2)^c] =$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c] = g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c = g(A\Delta w_1) - g(B\Delta w_1) \subseteq g(A\Delta w_1 - B\Delta w_1) = g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c) =$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1)) = g((A \sqcap^{w_1} B^c)\Delta w_1) = g((A \sqcap^{w_1} B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2 = (g((A \sqcap^{w_1} B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2 = \hat{g}_{\hat{w}}((A \sqcap^{w_1} B^c)\Delta w_2, = \hat{g}_{\hat{w}}((A \overset{w_1}{-} B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1) = g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2 = g(\varnothing)\Delta w_2 = \varnothing\Delta w_2 = w_2$. ∎

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\ \ \forall (A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$, (4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w}{-} B)$,

(5) $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2} K_j) = \prod_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\ \ \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2^c) = W_1^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad \hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K\ \ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow$ $(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\prod^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\prod^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\prod^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=(g((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones g:E→F se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\varnothing)\Delta w_2=\varnothing\Delta w_2=w_2$. ∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$.

Propiedades de las w-extensiones

(Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\prod^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

$\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(\prod^{w_2}_{j\in J}K_j)=\prod^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$,

$\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2{}^c)=W_1{}^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad$ $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow$ $(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$ $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\emptyset)\Delta w_2=\emptyset\Delta w_2=w_2$.∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(S))$.

(7) $\hat g_{\hat w}^{-1}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}^{-1}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=$
$((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2)=$
$\varphi_{w_1}(g^{-1}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$
$(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcap_{j\in J}^{w_1}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(K_j)$.

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

$\hat g_{\hat w}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(K_j)$, (7) $\hat g_{\hat w}^{-1}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(K_j)\ \ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(S))$, $(\hat g_{\hat w}^{-1}(K)\overset{w_1}{-}\hat g_{\hat w}^{-1}(S))=\hat g_{\hat w}^{-1}(K\overset{w_2}{-}S)$,

$\hat g_{\hat w}^{-1}(W_2)=W_1$, $\hat g_{\hat w}^{-1}(W_2{}^c)=W_1{}^c$, $\hat g_{\hat w}^{-1}(K^c)=(\hat g_{\hat w}^{-1}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\hat g_{\hat w}(\hat g_{\hat w}^{-1}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$. <u>Demostración</u>. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$.

(2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad\forall(A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $(((\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)))$.

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad\forall(A_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=(g((\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$.

(4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{w_1}{-}B)$. <u>Demostración</u>. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2)=((\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqcap^{w_2}(\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\Delta w_2)\cap((\hat{g}_{\hat{w}}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat{g}_{\hat{w}}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat{g}_{\hat{w}}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\emptyset)\Delta w_2=\emptyset\Delta w_2=w_2$. ∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$. <u>Demostración</u>. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$.

(7) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)=\prod_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2)=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\prod_{j\in J}^{w_1}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\prod_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$.

(8) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. <u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}((\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1)=(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$.

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\prod_{j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad\forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B))$, (4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{w_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2$.

(8) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, (7) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\prod_{j\in J}^{w_2}K_j)=\prod_{j\in J}^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\quad\forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\overset{w_1}{-}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))=\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K\overset{w_2}{-}S)$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2)=W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2^c)=W_1^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c)=(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow$ $(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=(\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=(g((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\sqcup^{w_2}_{j\in J}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones g:E→F se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\emptyset)\Delta w_2=\emptyset\Delta w_2=w_2$.∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$.

(7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2)=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcap^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcup^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$. Demostración. $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)=$ $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqcap^{w_1}(\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c)\Delta w_1)=[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c\Delta w_1)]=$ $[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)^c]=[(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)^c]=$ $g^{-1}(K\Delta w_2)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2))^c=g^{-1}(K\Delta w_2)-g(S\Delta w_2)=g^{-1}(K\Delta w_2-S\Delta w_2)=g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S\Delta w_2)^c)=$ $g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S^c\Delta w_2))=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1=$ $(g^{-1}((K\sqcap^{w_1}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1)\Delta w_1=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_1,=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\overset{w_2}{-}S)\Delta w_1$ que prueba (9).

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, (7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, (9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$,

$\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2^c)=W_1^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow$ $(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=(\sqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))=(g((\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\sqcup_{j\in J}^{w_2}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\sqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego: $((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$ $[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$ $g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\varnothing)\Delta w_2=\varnothing\Delta w_2=w_2$.∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$.

(7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2)=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcap_{j\in J}^{w_1}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcup_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}((\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcup_{j\in J}^{w_1}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcup_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$. Demostración. $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)=$ $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqcap^{w_1}(\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c)\Delta w_1)=[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c\Delta w_1)]=$ $[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)^c]=[(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)^c]=$ $g^{-1}(K\Delta w_2)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2))^c=g^{-1}(K\Delta w_2)-g(S\Delta w_2)=g^{-1}(K\Delta w_2-S\Delta w_2)=g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S\Delta w_2)^c)=$ $g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S^c\Delta w_2))=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1=$ $(g^{-1}((K\sqcap^{w_1}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1)\Delta w_1=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_1,=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\overset{w_2}{-}S)\Delta w_1$ que prueba (9).

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(F)=E$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2)=g^{-1}(w_2\Delta w_2)\Delta w_1=$ $g^{-1}(\varnothing)\Delta w_1=\varnothing\Delta w_1=w_1$. Por otra parte, $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2{}^c)=(g^{-1}(w_2{}^c\Delta w_2))\Delta w_1=g^{-1}(F)\Delta w_1=E\Delta w_1=w_1{}^c$.

$\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(g^{-1}(K^c\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}((K\Delta w_2)^c))\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2))^c\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1)^c=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.∎

Propiedades de las w-extensiones

(Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_1}A_j)=\sqcup_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_1}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcup_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, (7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap_{j\in J}^{w_2}K_j)=\sqcap_{j\in J}^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, (9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$,

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2{}^c)=W_1{}^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.

$A\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad$ $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \ \forall K\in P(K)$

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=(\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=$
$\varphi_{w_2}(g((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=(g((\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$
$(\sqcup^{w_2}_{j\in J}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\emptyset)\Delta w_2=\emptyset\Delta w_2=w_2$.■

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$
$(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$.

(7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=$
$((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2)=$
$\varphi_{w_1}(g^{-1}((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$
$(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcap^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=$
$((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=$
$\varphi_{w_1}(g^{-1}((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$
$(\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcup^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$. Demostración. $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)=$
$((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqcap^{w_1}(\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c)\Delta w_1)=[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c\Delta w_1)]=$
$[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)^c]=[(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)^c]=$
$g^{-1}(K\Delta w_2)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2))^c=g^{-1}(K\Delta w_2)-g(S\Delta w_2)=g^{-1}(K\Delta w_2-S\Delta w_2)=g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S\Delta w_2)^c)=$
$g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S^c\Delta w_2))=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1=$
$(g^{-1}((K\sqcap^{w_1}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1)\Delta w_1=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_1,=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\overset{w_2}{-}S)\Delta w_1$ que prueba (9).

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(F)=E$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2)=g^{-1}(w_2\Delta w_2)\Delta w_1=$
$g^{-1}(\emptyset)\Delta w_1=\emptyset\Delta w_1=w_1$. Por otra parte, $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2^c)=(g^{-1}(w_2^c\Delta w_2))\Delta w_1=g^{-1}(F)\Delta w_1=E\Delta w_1=w_1^c$.
$\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(g^{-1}(K^c\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}((K\Delta w_2)^c))\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2))^c\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1)^c=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.■

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\sqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=\sqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, (7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, (9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_2}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$,

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2^c)=W_1^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.

(11) $A\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \forall K\in P(K)$

$[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}(g(A\Delta w_1))]\Rightarrow[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}((g(A\Delta w_1))\Delta w_2\Delta w_2)]\Rightarrow$
$[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)]\Rightarrow[A\Delta w_1\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\Delta w_1]\Rightarrow$
$A\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(\hat g_{\hat w}(A))$.

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$. Demostración. $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow((A\Delta w_1)\subseteq(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\subseteq g(B\Delta w_1))\Rightarrow(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}g(B\Delta w_1)\Delta w_2)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$.

(2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $(((\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_1}A_k)\ \forall k\in J)\Rightarrow((\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A_k))\ \forall k\in J)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)))$.

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=((\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1})(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j))=((\varphi_{w_2}\circ g)(\varphi_{w_1}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)))=((\varphi_{w_2}\circ g)((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=$ $\varphi_{w_2}(g((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))=(g((\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)\Delta w_1))\Delta w_2=(g((\bigcup_{j\in J}A_j\Delta w_1)))\Delta w_2=(\bigcup_{j\in J}g(A_j\Delta w_1))\Delta w_2)=$ $(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}[g(A_j\Delta w_1)\Delta w_2)=\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$.

(4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$. Demostración. Conocemos que para subconjuntos W,A,B de E y F y funciones $g:E\to F$ se verifica: $A\Delta w\Delta w=A$, $(A\sqsubseteq^{w}B)\Leftrightarrow((A\Delta w)\subseteq(B\Delta w))$, $(A\Delta w)^c=(A^c\Delta w)$, $(A\sqcap^{w}B)\Delta w=(A\Delta w)\cap(B\Delta w)$, $((g(A)-g(B))\subseteq g(A-B))$ y $\hat g_{\hat w}(A)=g(A\Delta w_1)\Delta w_2$; luego:
$((\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)=((\hat g_{\hat w}(A)\sqcap^{w_2}(\hat g_{\hat w}(B))^c)\Delta w_2)=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))^c\Delta w_2)]=[(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\cap((\hat g_{\hat w}(B))\Delta w_2)^c]=$
$[(g(A\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)\cap(g(B\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2)^c]=g(A\Delta w_1)\cap(g(B\Delta w_1))^c=g(A\Delta w_1)-g(B\Delta w_1)\subseteq g(A\Delta w_1-B\Delta w_1)=g((A\Delta w_1)\cap(B\Delta w_1)^c)=$
$g((A\Delta w_1)\cap(B^c\Delta w_1))=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)=g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2\Delta w_2=(g((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_1)\Delta w_2)\Delta w_2=\hat g_{\hat w}((A\sqcap^{w_1}B^c)\Delta w_2,=\hat g_{\hat w}((A\overset{w_1}{-}B)\Delta w_2$ que prueba (4).

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$. Demostración. $\hat g_{\hat w}(w_1)=g(w_1\Delta w_1)\Delta w_2=g(\varnothing)\Delta w_2=\varnothing\Delta w_2=w_2$.∎

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$. Demostración. $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow((K\Delta w_2)\subseteq(S\Delta w_2))\Rightarrow$ $(g^{-1}(K\Delta w_2)\subseteq g(S\Delta w_2))\Rightarrow(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$.

(7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2)=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\sqcap^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=$ $((\varphi_{w_1}\circ g^{-1}\circ\varphi_{w_2})(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})(\varphi_{w_2}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)))=((\varphi_{w_1}\circ g^{-1})((\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=$ $\varphi_{w_1}(g^{-1}((\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))=(g^{-1}((\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j\Delta w_2))\Delta w_1=$ $(\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j\Delta w_2))\Delta w_1=(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}[g^{-1}(K_j\Delta w_2)\Delta w_1)=\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$.

(9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$. Demostración. $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)=$ $((\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqcap^{w_1}(\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c)\Delta w_1)=[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))^c\Delta w_1)]=$ $[(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\Delta w_1)\cap((\hat g^{-1}_{\hat w}(S))\Delta w_1)^c]=[(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1)^c]=$ $g^{-1}(K\Delta w_2)\cap(g^{-1}(S\Delta w_2))^c=g^{-1}(K\Delta w_2)-g(S\Delta w_2)=g^{-1}(K\Delta w_2-S\Delta w_2)=g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S\Delta w_2)^c)=$ $g^{-1}((K\Delta w_2)\cap(S^c\Delta w_2))=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)=g^{-1}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1\Delta w_1=$ $(g^{-1}((K\sqcap^{w_1}S^c)\Delta w_2)\Delta w_1)\Delta w_1=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\sqcap^{w_2}S^c)\Delta w_1,=\hat g^{-1}_{\hat w}((K\overset{w_2}{-}S)\Delta w_1$ que prueba (9).

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(F)=E$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$. Demostración. $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2)=g^{-1}(w_2\Delta w_2)\Delta w_1=$ $g^{-1}(\varnothing)\Delta w_1=\varnothing\Delta w_1=w_1$. Por otra parte, $\hat g^{-1}_{\hat w}(w_2^c)=(g^{-1}(w_2^c\Delta w_2))\Delta w_1=g^{-1}(F)\Delta w_1=E\Delta w_1=w_1^c$. $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(g^{-1}(K^c\Delta w_2))\Delta w_1=(g^{-1}((K\Delta w_2)^c))\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2))^c\Delta w_1=(g^{-1}(K\Delta w_2)\Delta w_1)^c=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.∎

Propiedades de las w-extensiones

(Demostraciones)

(3) $\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}A_j)=\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$, (2) $\hat g_{\hat w}(\sqcap^{w_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{w_2}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))\ \forall(A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{w_2}\hat g_{\hat w}(B))$, (4) $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{w_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{w_1}{-}B)$,

(5) $\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

(8) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, (7) $\hat g^{-1}_{\hat w}(\sqcap^{w_2}_{j\in J}K_j)=\sqcap^{w_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)\ \forall(K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, (9) $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{w_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{w_2}{-}S)$,

(10) $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2^c)=W_1^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$.

(11) $A\sqsubseteq^{w_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))\ \forall A\in P(E)$ (12) $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{w_2}K\ \forall K\in P(K)$

$[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}(g(A\Delta w_1))]\Rightarrow[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}((g(A\Delta w_1))\Delta w_2\Delta w_2)]\Rightarrow$ $[A\Delta w_1\subseteq g^{-1}(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)]\Rightarrow[A\Delta w_1\Delta w_1\sqsubseteq^{w_1}g^{-1}(\hat g_{\hat w}(A)\Delta w_2)\Delta w_1]\Rightarrow$ $A\sqsubseteq^{w_1}\hat g_{\hat w}^{-1}(\hat g_{\hat w}(A))$.

$[g(g^{-1}(K\Delta w_2))\subseteq K\Delta w_2]\Rightarrow[g((g^{-1}(K\Delta w_2))\Delta w_1\Delta w_1)\subseteq K\Delta w_2]\Rightarrow$ $[g(\hat g_{\hat w}^{-1}(K)\Delta w_1)\subseteq K\Delta w_2]\Rightarrow[g(\hat g_{\hat w}^{-1}(A)\Delta w_1)\Delta w_2\sqsubseteq^{w_2}K\Delta w_2\Delta w_2]\Rightarrow$ $\hat g_{\hat w}(\hat g_{\hat w}^{-1}(K))\sqsubseteq^{w_2}K$.∎

Resultados análogos a los que cumplen las extensiones

$g:P(E)\to P(F)$ y $g^{-1}:P(F)\to P(E)$ de cualquier función $g:E\to F$,

que en consecuencia muestran la coherencia de las definiciones:

$$\hat{g}_{\hat{w}} := \varphi_{w_2}\circ g\circ \varphi_{w_1}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1} := \varphi_{w_1}\circ g\circ \varphi_{w_2}.$$

Propiedades de las w-extensiones (Demostraciones)

(3) $\hat{g}_{\hat{w}}\left(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j\right) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, (2) $\hat{g}_{\hat{w}}\left(\prod_{j\in J}^{w_1} A_j\right) \sqsubseteq^{w_2} \left(\prod_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)\right) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$,

(1) $(A\sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$, (4) $(\hat{g}_{\hat{w}}(A) \overset{w_2}{-} \hat{g}_{\hat{w}}(B)) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}(A \overset{w}{-} B)$,

(5) $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

(8) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}\left(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j\right) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, (7) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}\left(\prod_{j\in J}^{w_2} K_j\right) = \prod_{j\in J}^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$

(6) $(K\sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$, (9) $(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \overset{w_1}{-} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)) = \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K \overset{w_2}{-} S)$,

(10) $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2{}^c) = W_1{}^c$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c) = (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c$.

(11) $A \sqsubseteq^{w_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A)) \ \forall A\in P(E)$ (12) $\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K \ \forall K\in P(K)$

Generalización.

Generalización.

(a funciones de conjunto cualesquiera, no necesariamente ligadas a la extensión de funciones puntuales a las partes)

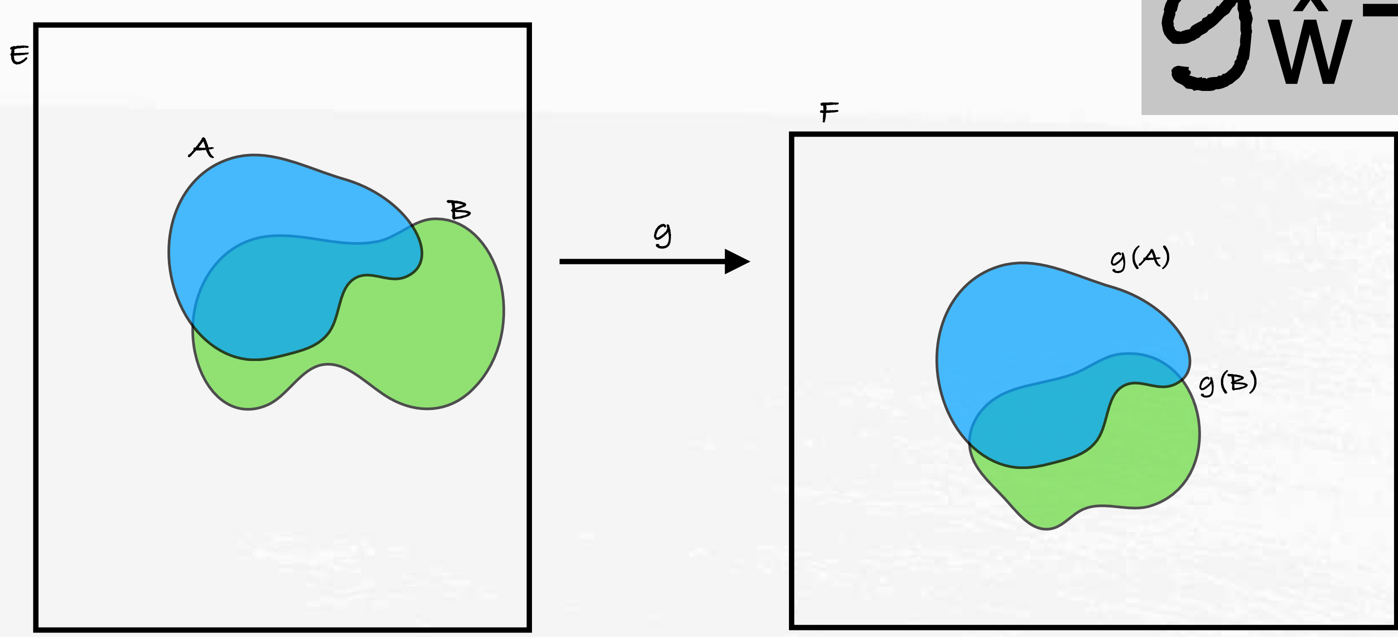
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

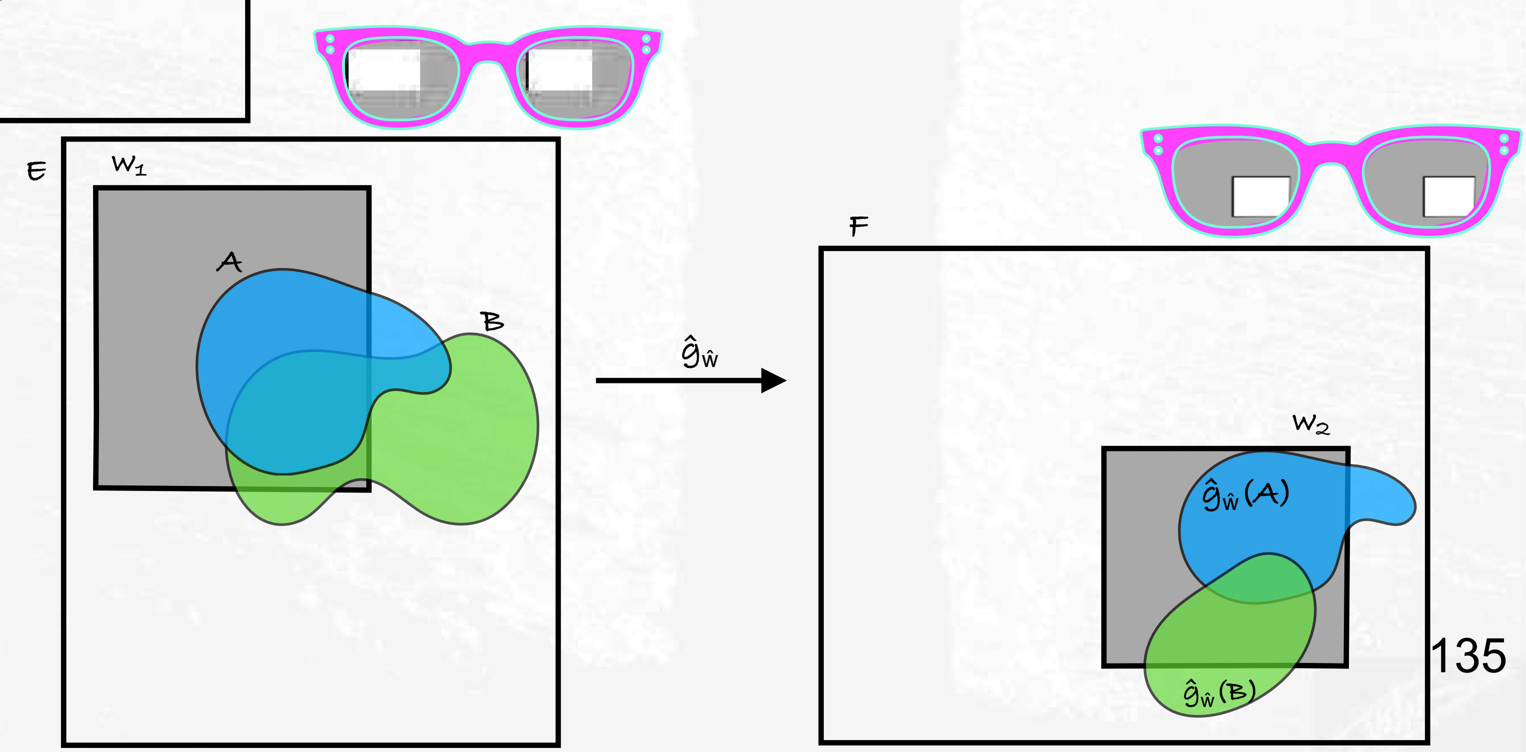
$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq) \longrightarrow (\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{w_1}) \longrightarrow (\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$





$$g : (\mathcal{P}(E), \subseteq) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \subseteq)$$

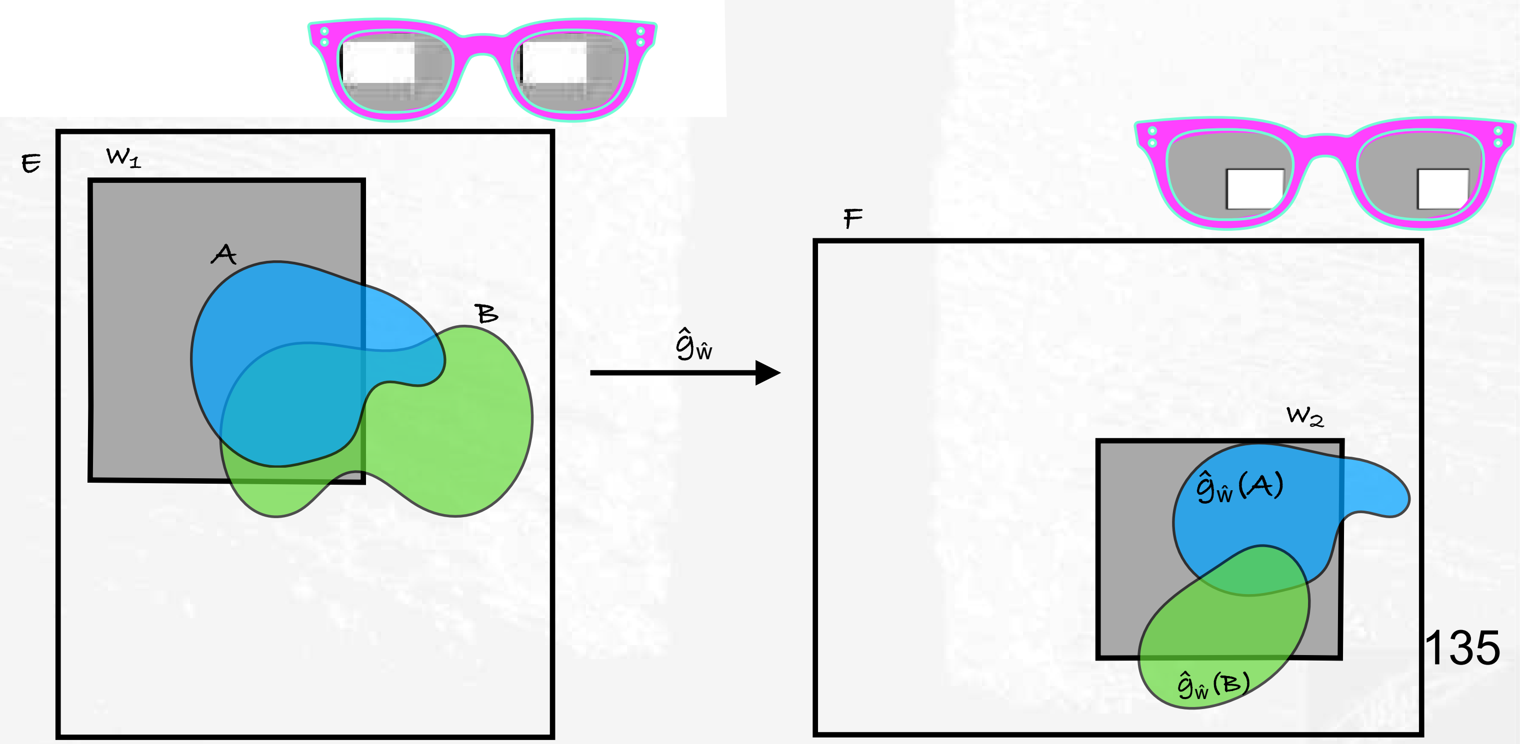
(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

$$\hat{g}_{\hat{w}} : (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w_1}) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \sqsubseteq^{w_2})$$

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A) = (g(A \Delta w_1)) \Delta w_2 \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$



$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq)\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

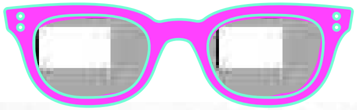
$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{w_1}_{2})\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=(g(A\Delta w_1))\Delta w_2 \quad \forall A\in\mathcal{P}(E)$$

Casos particulares:

$w_2=\varnothing$

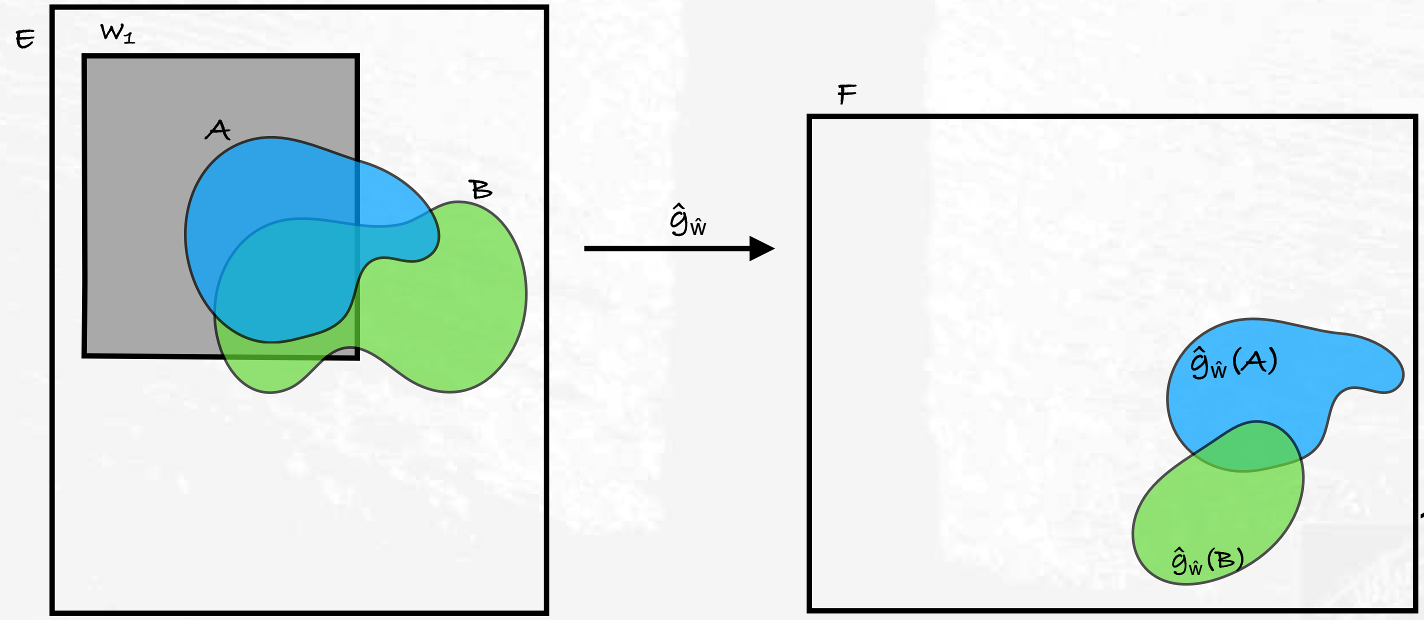


Puesto que $\varphi_{w_2}(K)=\varphi_{\varnothing}(K)=K \quad \forall K\in\mathcal{P}(F)$,

si i_F es la identidad en $\mathcal{P}(F)$, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{w_1}=g\circ\varphi_{w_1}$, es decir

$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1) \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$



$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq)\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{w_1}_{2})\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=(g(A\Delta w_1))\Delta w_2 \quad \forall A\in\mathcal{P}(E)$$

<u>Casos particulares:</u>

$w_2=\emptyset$

Puesto que $\varphi_{w_2}(K)=\varphi_{\emptyset}(K)=K \quad \forall K\in\mathcal{P}(F)$,

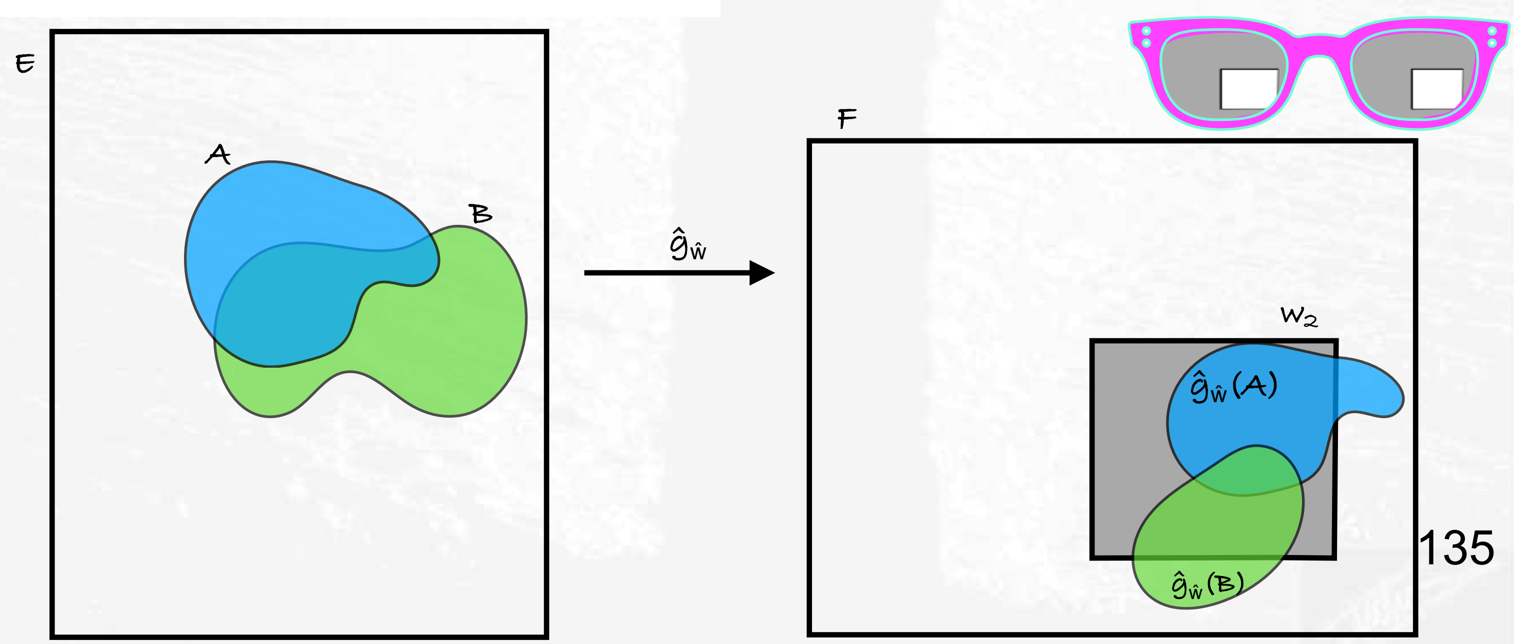
si i_F es la identidad en $\mathcal{P}(F)$, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{w_1}=g\circ\varphi_{w_1}$, es decir

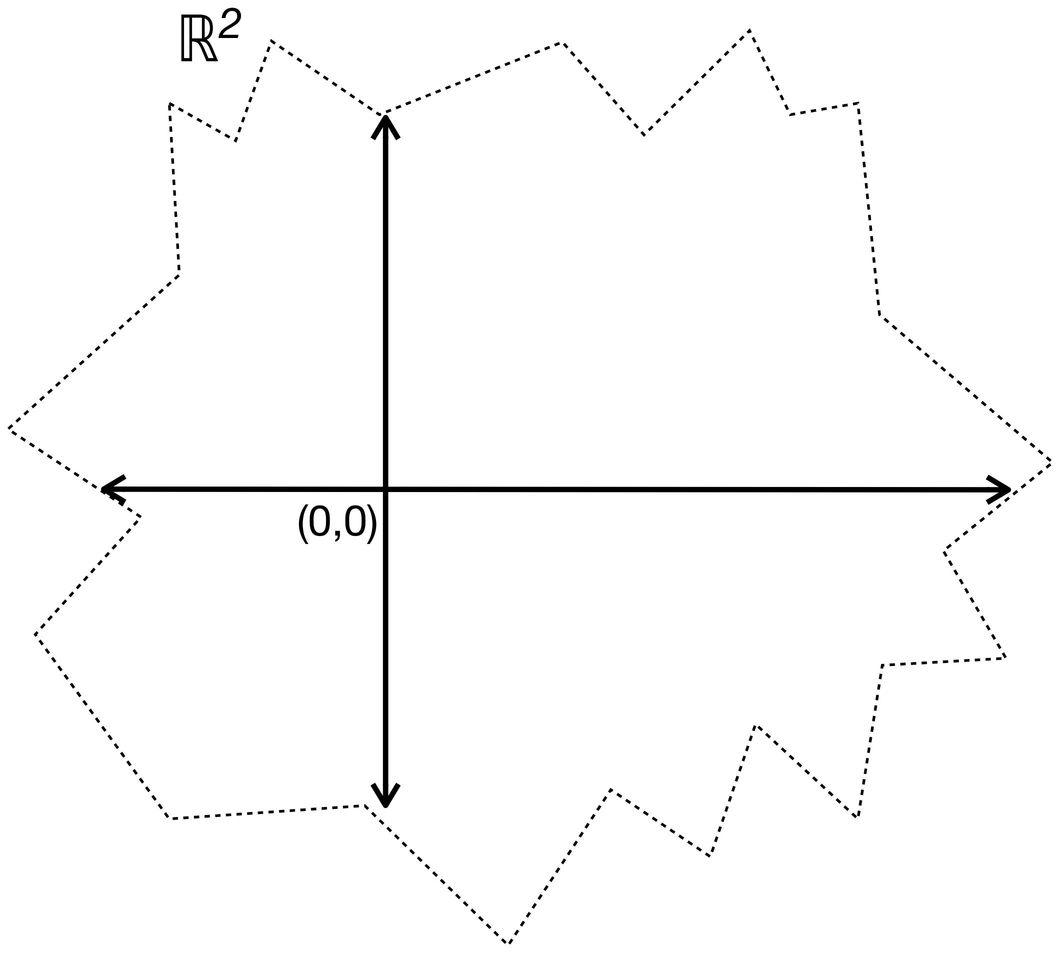
$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$$

Análogamente, si $w_1=\emptyset$:

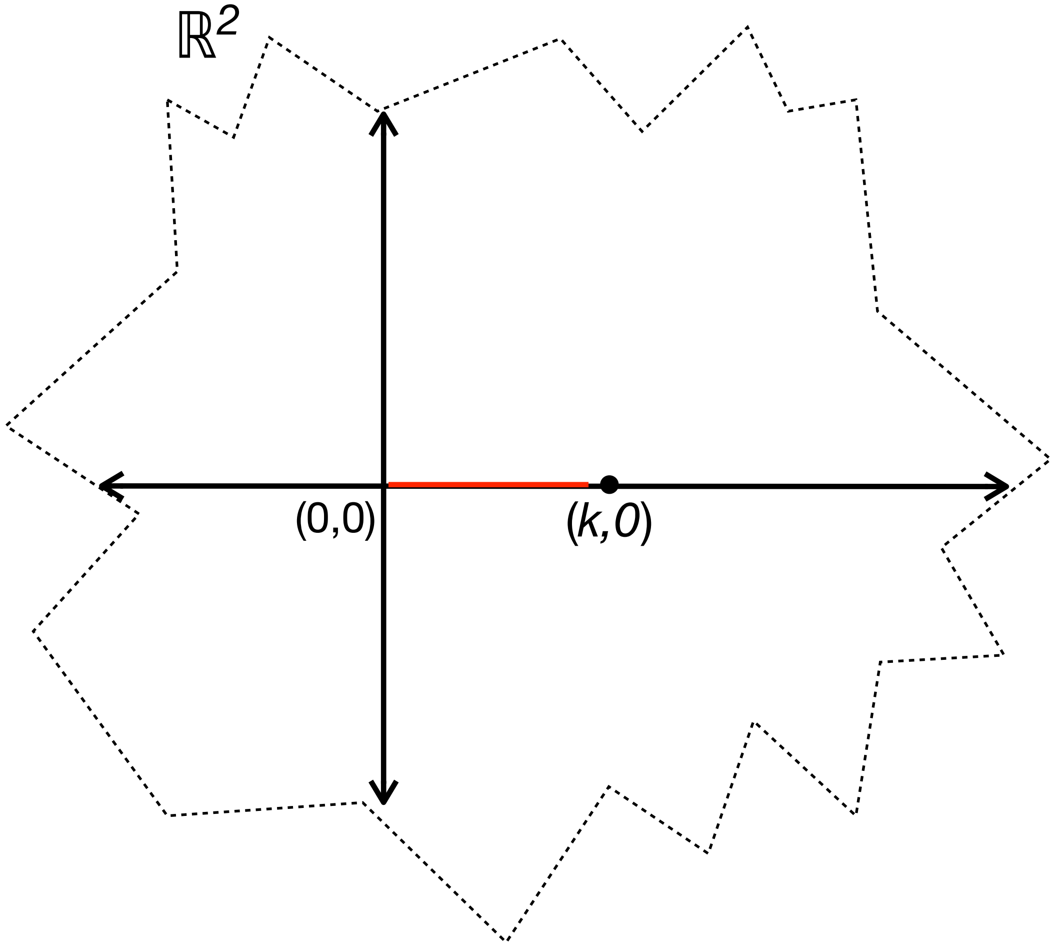
$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A)\Delta w_2\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$$



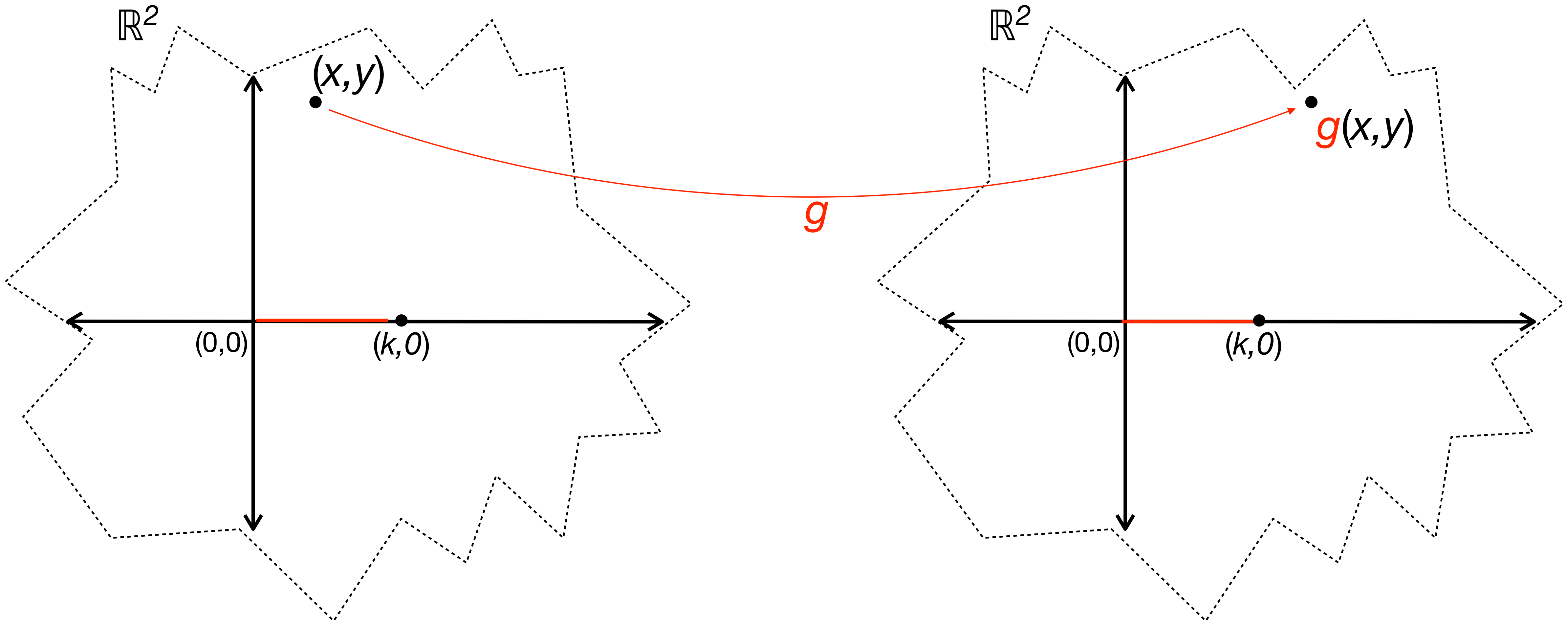
Ejemplo: comparación de los valores $g(A)$ y $\hat{g}_W(A)$ asociados a una función puntual g.


$\mathbb{R}^2$
(0,0)

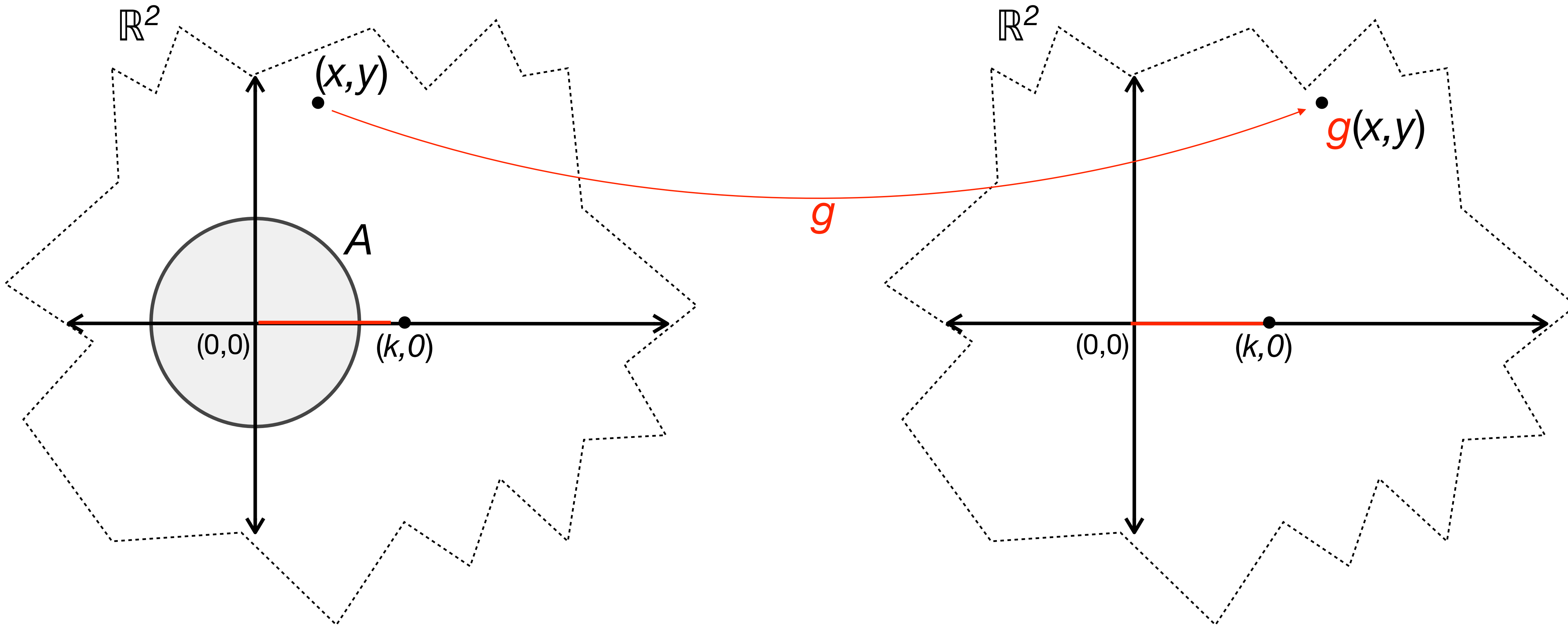
$k \in \mathbb{R}$,



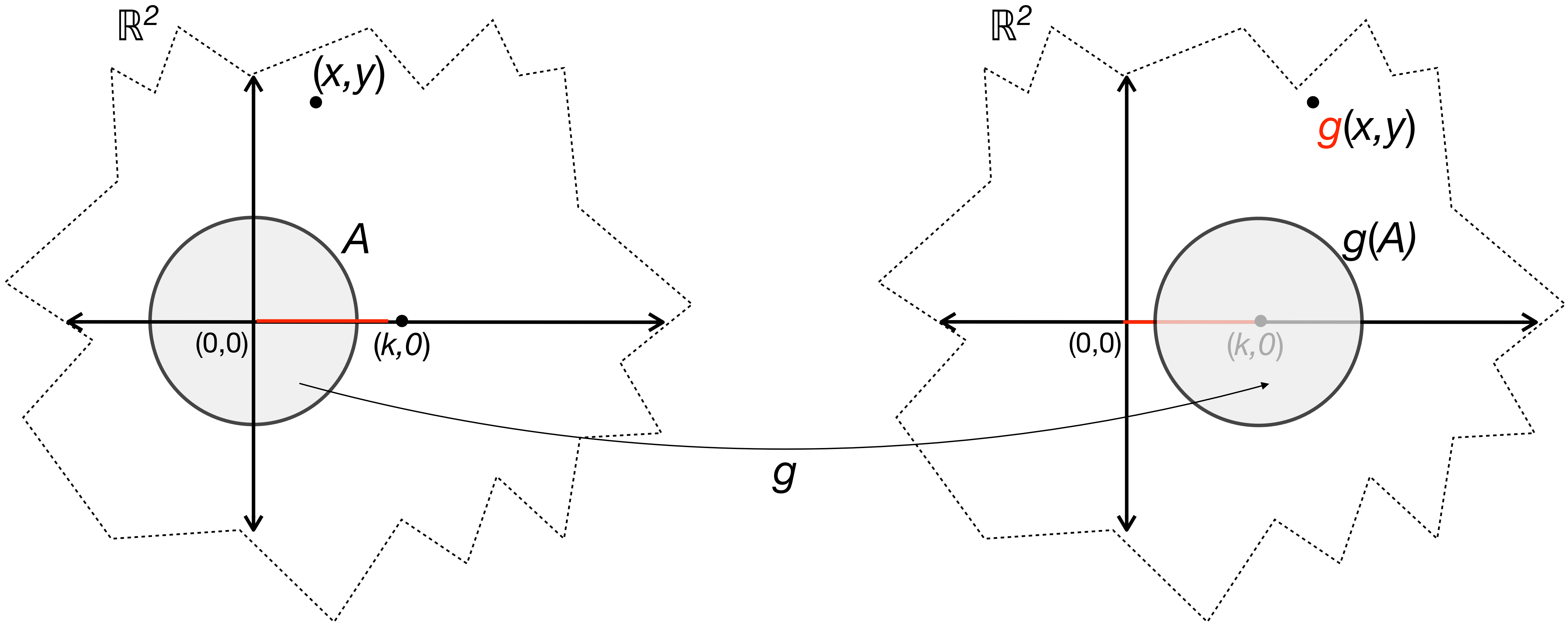
$k \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,



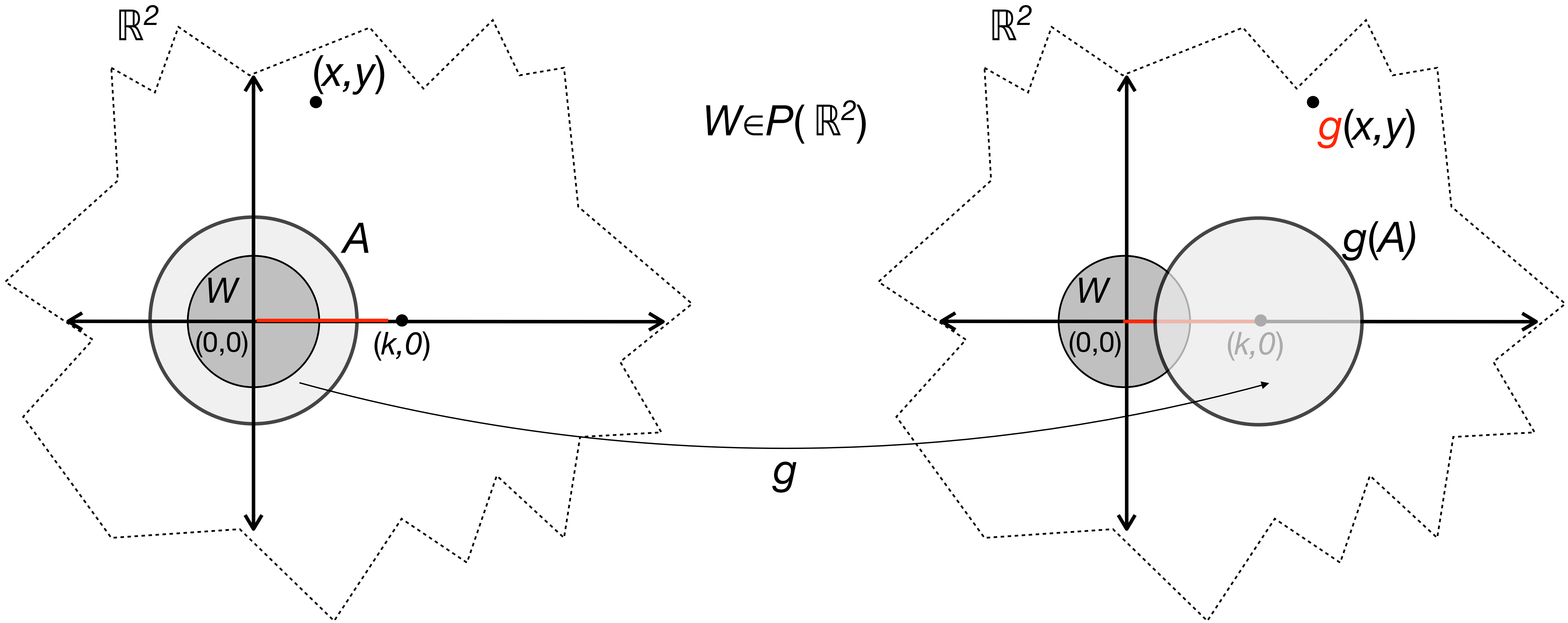
$k \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $A \in P(\mathbb{R}^2)$,



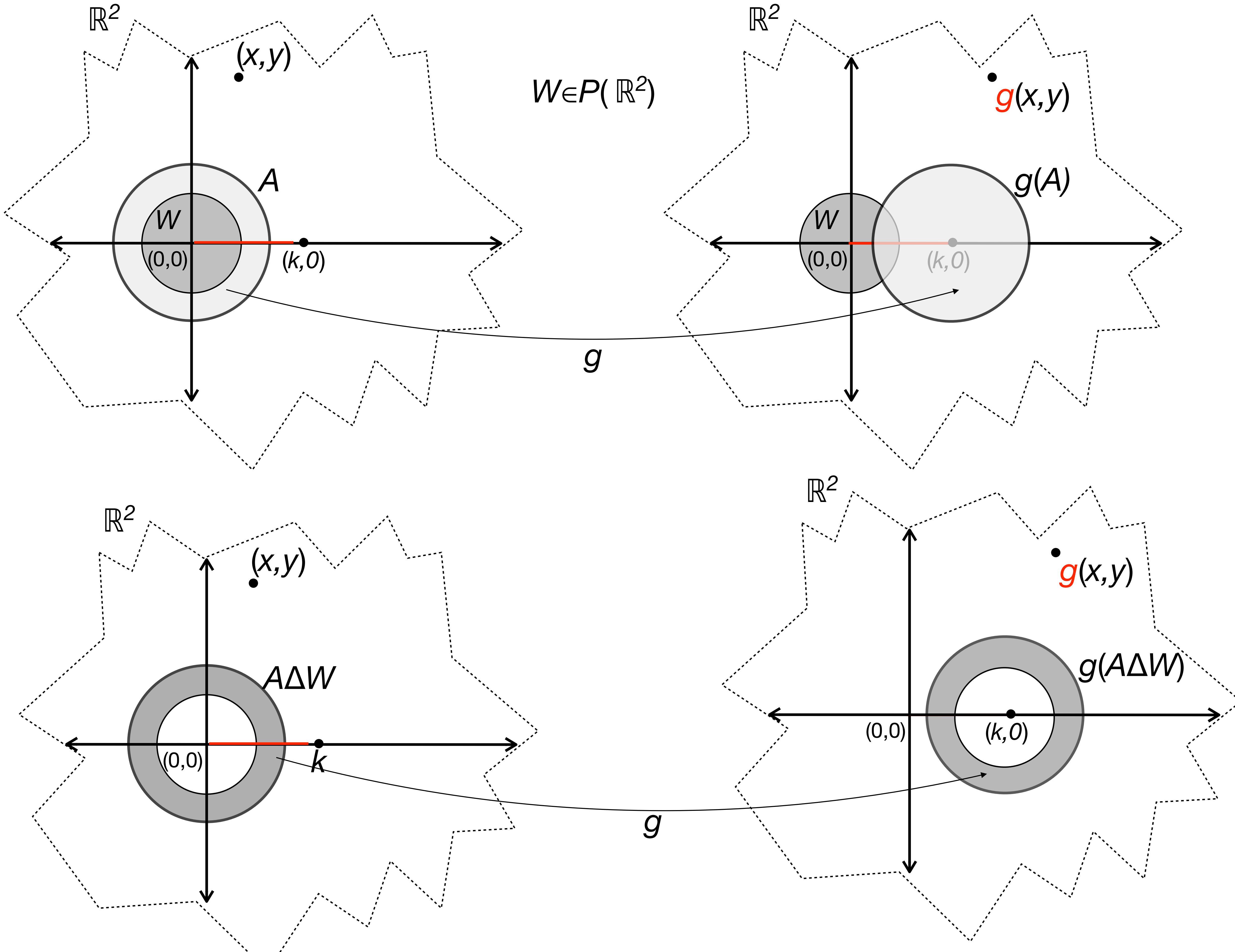
$k\in\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $A\in P(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{g(A) = \{\ g(x,y)\ /\ (x,y)\in A\ \} = \{\ (x+k,y)\ /\ (x,y)\in A\ \}}$



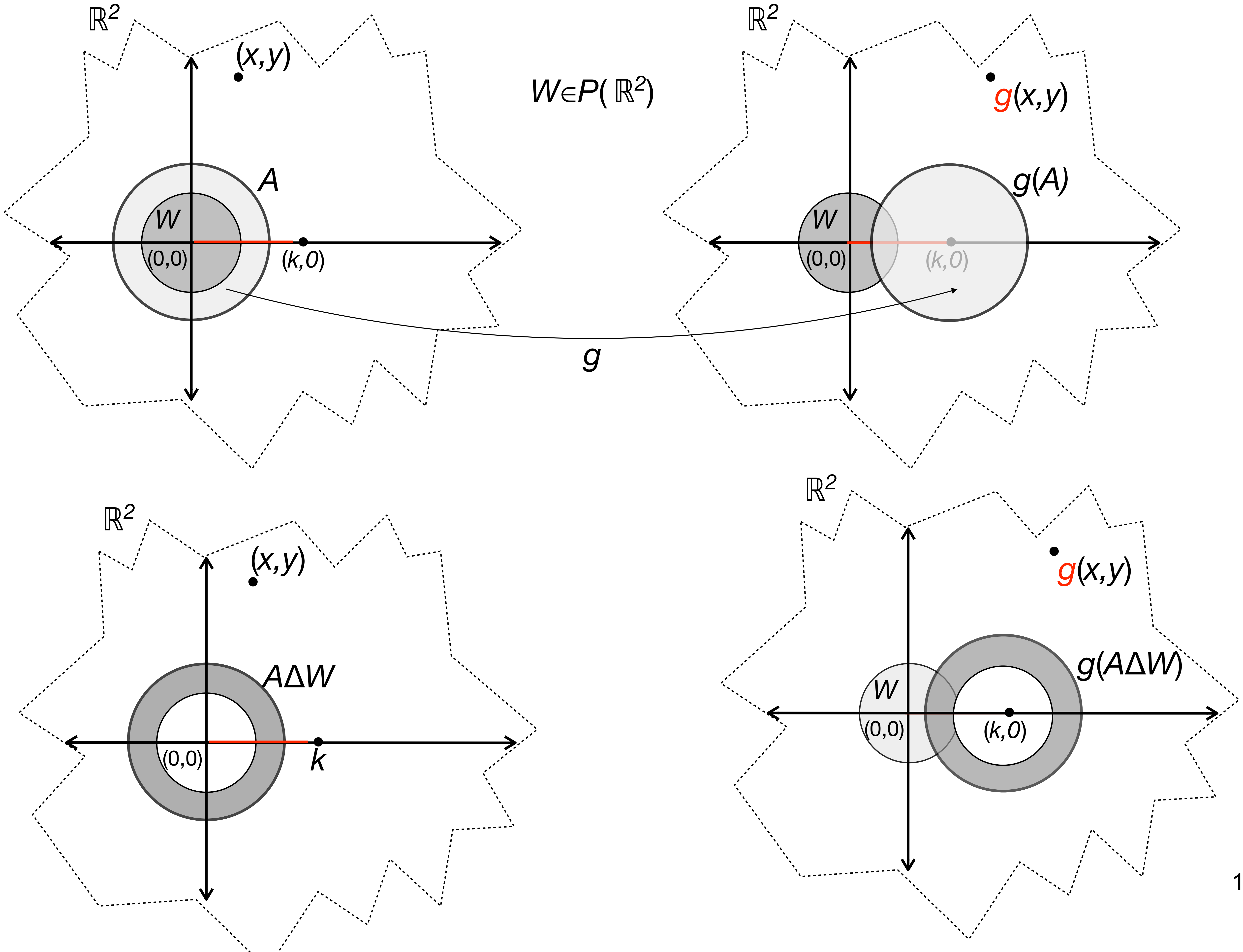
$k \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $A \in P(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{g(A) = \{\ g(x,y)\ /\ (x,y) \in A\ \} = \{\ (x+k,y)\ /\ (x,y) \in A\ \}}$



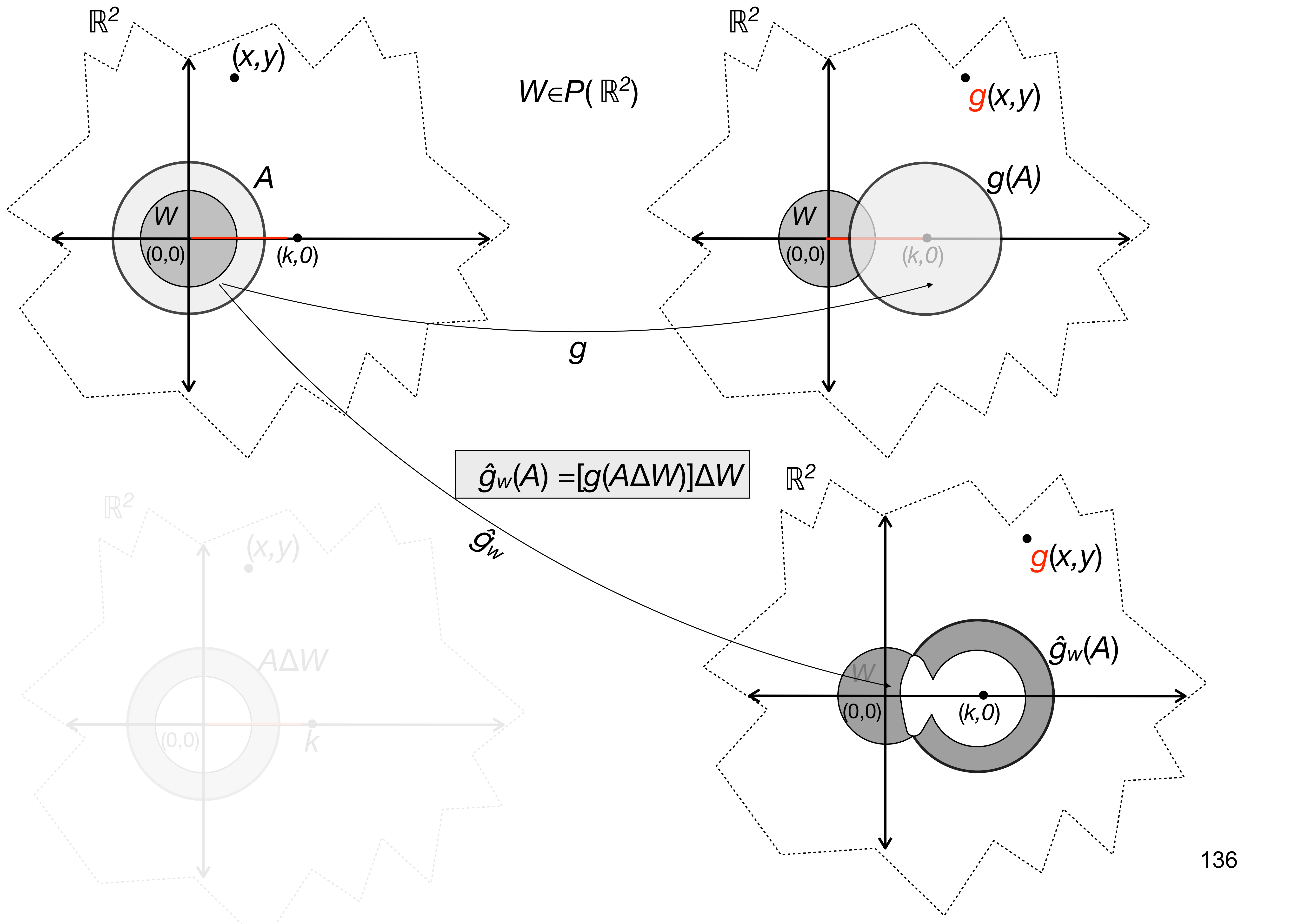
$k\in\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $A\in P(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{g(A) = \{\ g(x,y)\ /\ (x,y)\in A\ \} = \{\ (x+k,y)\ /\ (x,y)\in A\ \}}$



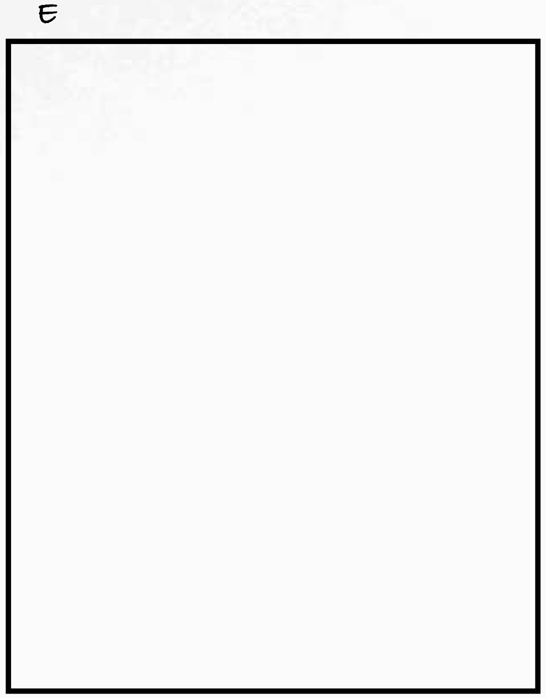
$k\in\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(x+k,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $A\in P(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{g(A)=\{\,g(x,y)\ /\ (x,y)\in A\,\}=\{\,(x+k,y)\ /\ (x,y)\in A\,\}}$

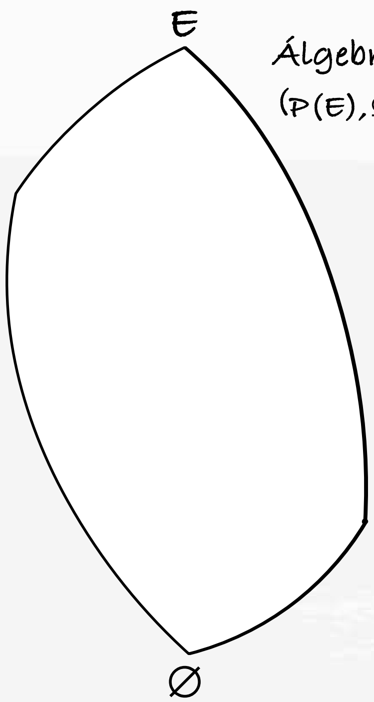


$k \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+k,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $A \in P(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{g(A) = \{\, g(x,y) \,/\, (x,y) \in A \,\} = \{\, (x+k,y) \,/\, (x,y) \in A \,\}}$



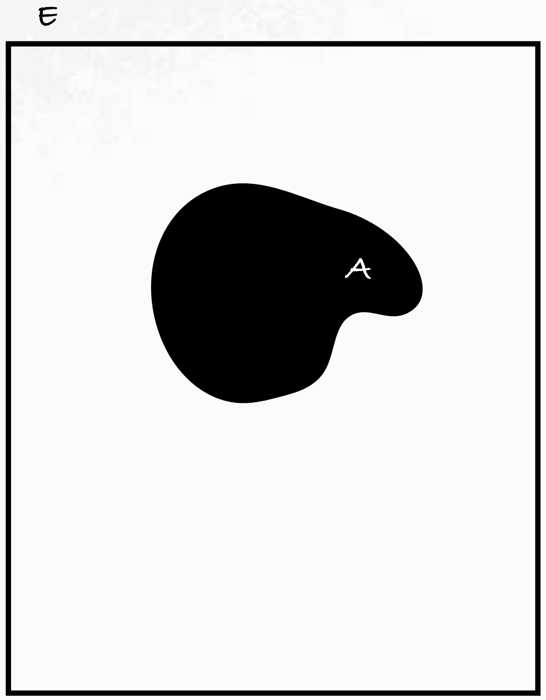
Ejemplo: extensión $\hat{c}_w$:$P(E)\rightarrow P(E)$ al álgebra $(P(E),\sqsubseteq^w)$ de la complementación ^{c}:$P(E)\rightarrow P(E)$ en $(P(E),\subseteq)$.

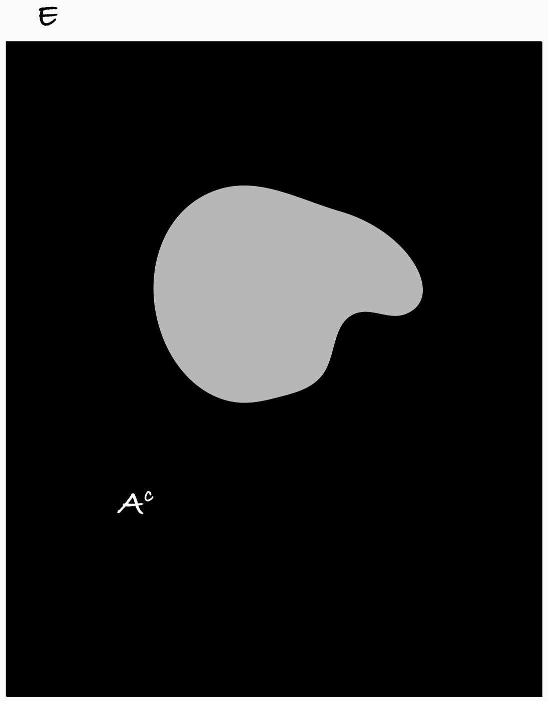


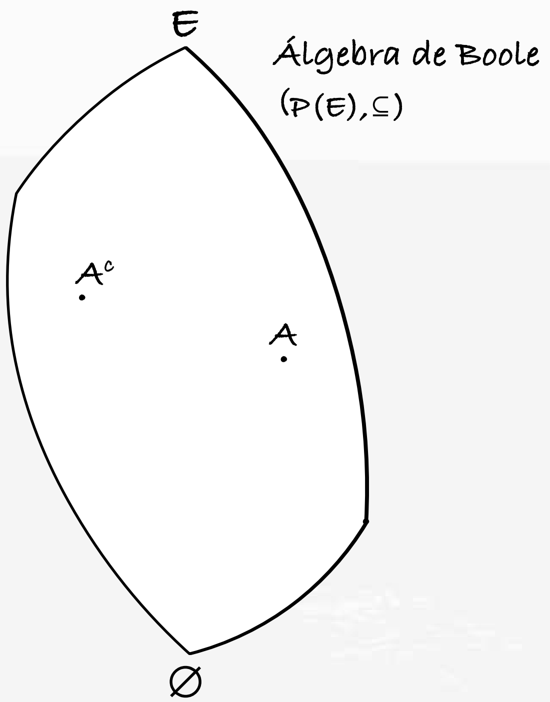


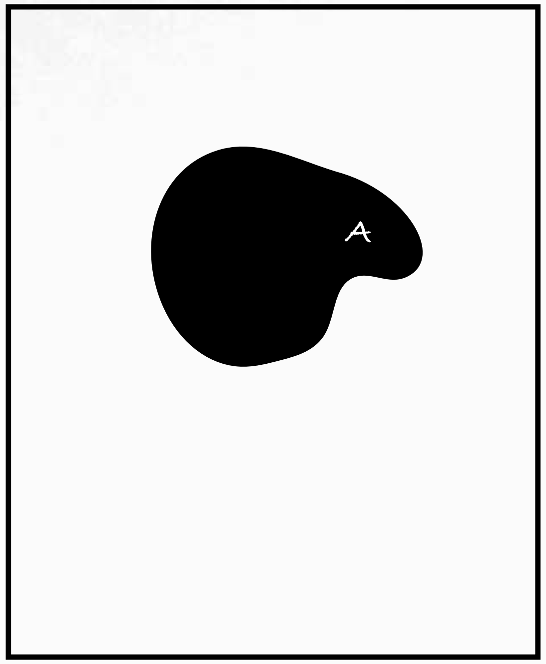
Álgebra de Boole

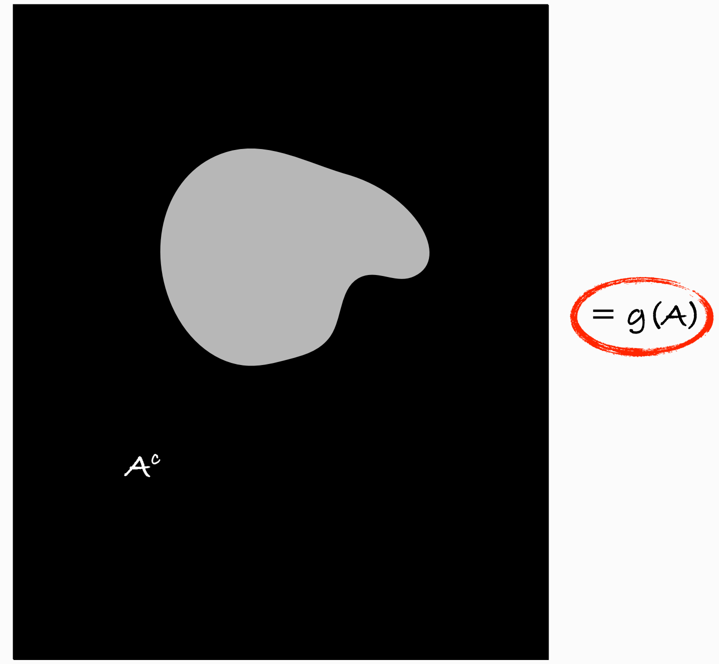
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$

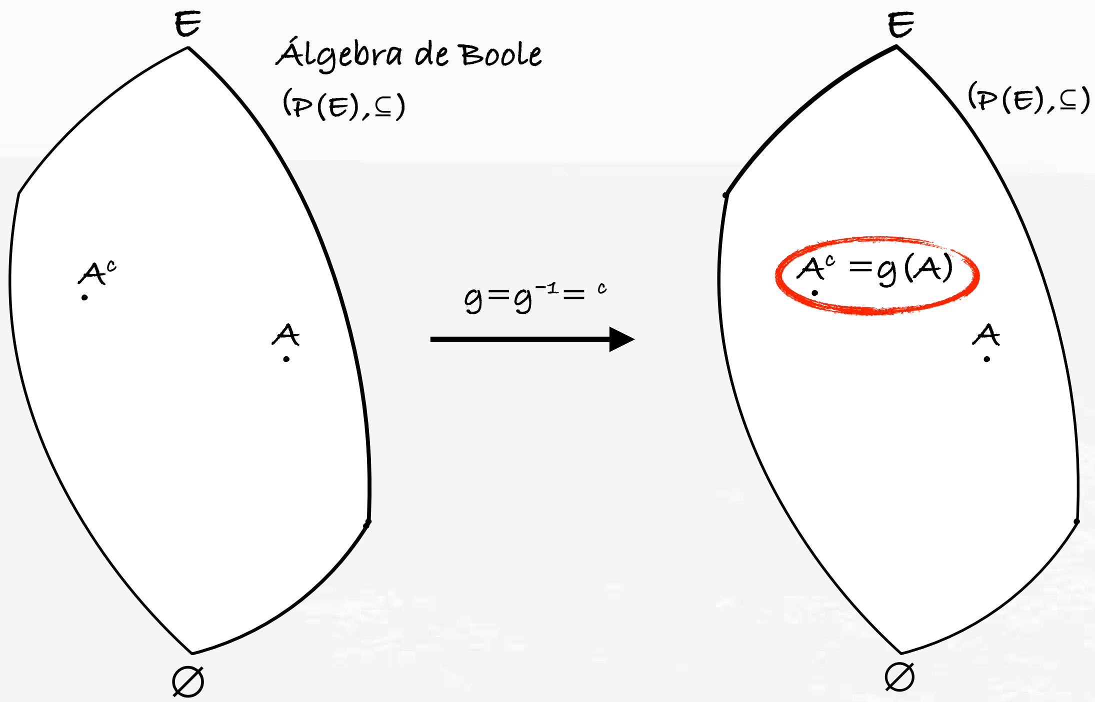

E
A

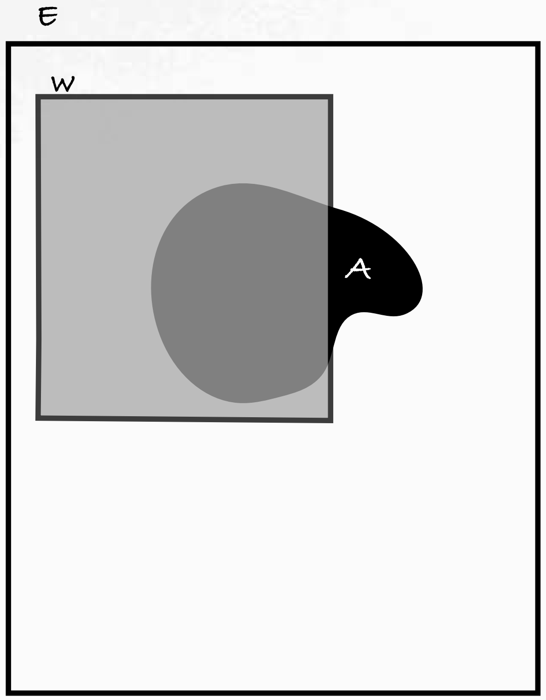

E
A^c

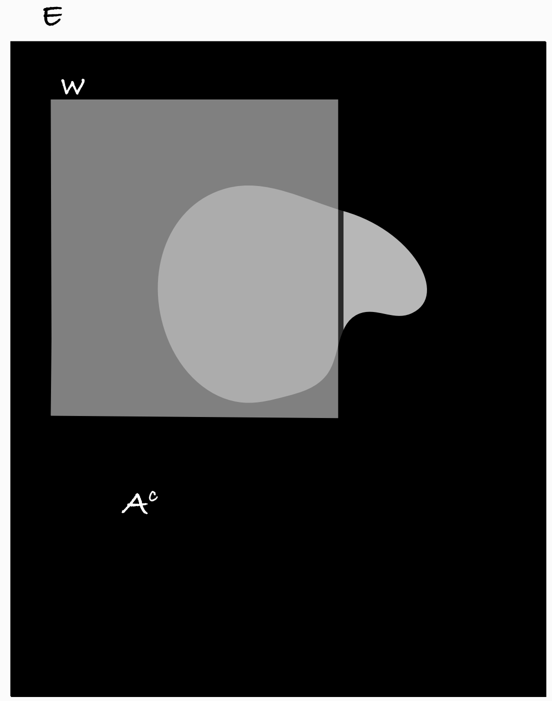

E
Álgebra de Boole
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$
A^c
A
∅


E
A

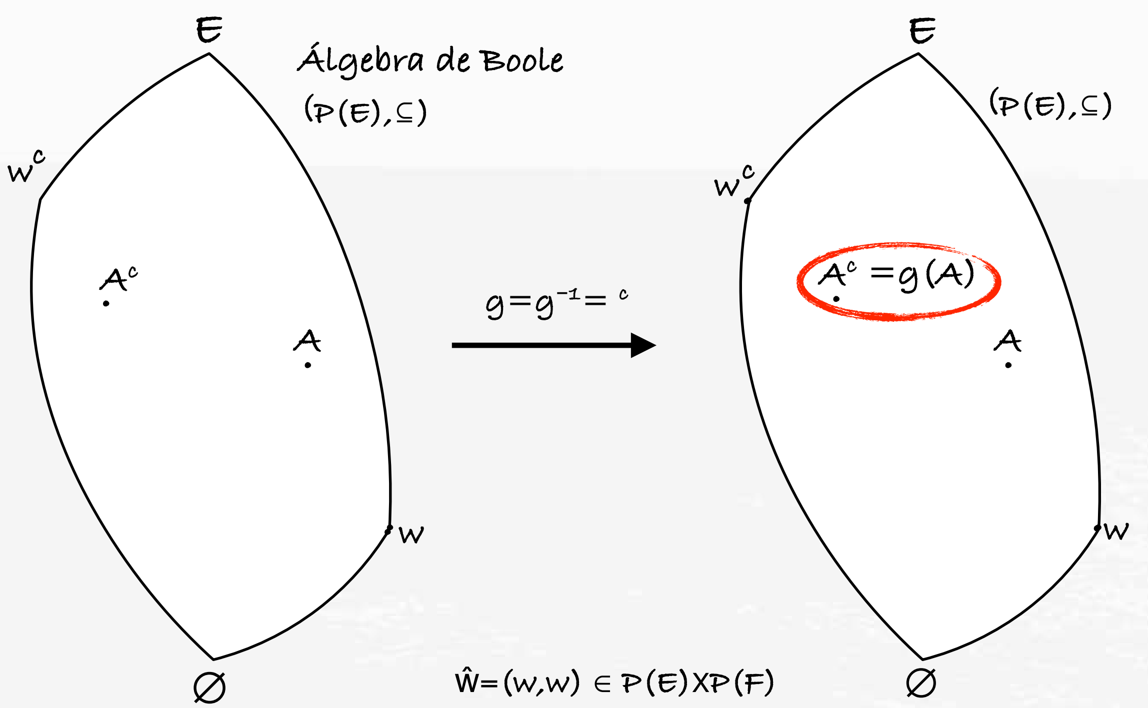

E
A^c
= g(A)

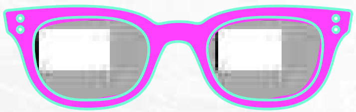

E
Álgebra de Boole
(P(E),⊆)
A^c
A
∅
g=g^-1= ^c
E
(P(E),⊆)
A^c =g(A)
A
∅

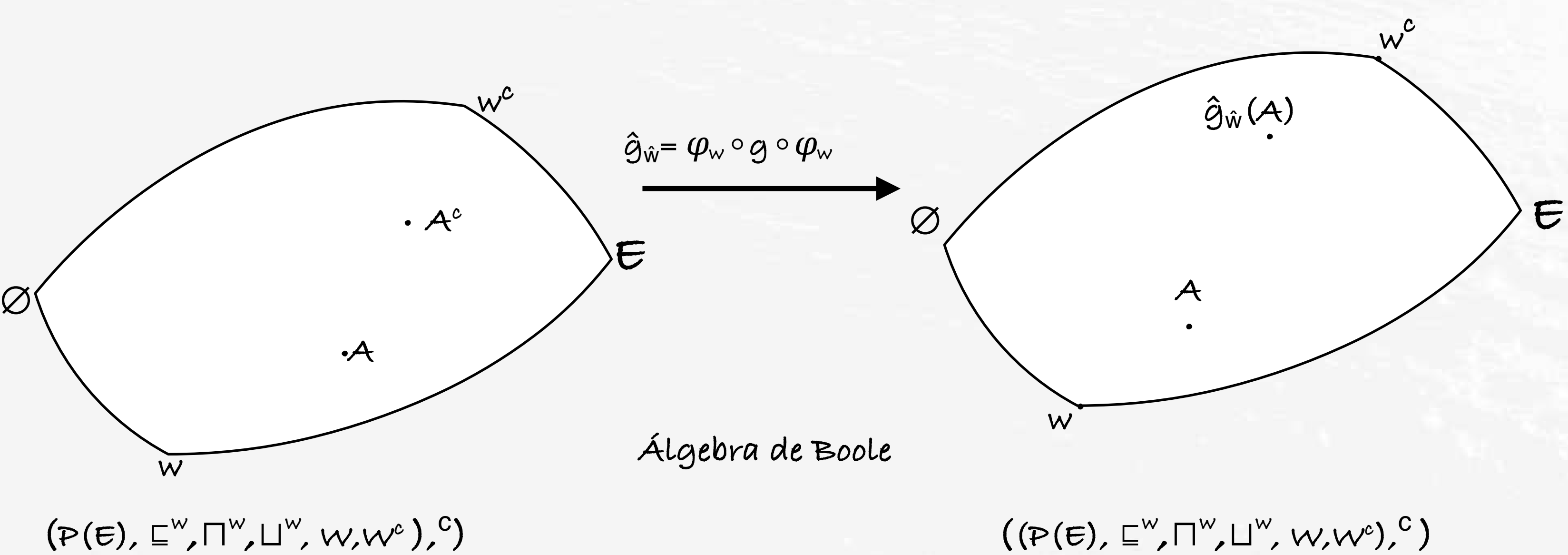

E
W
A

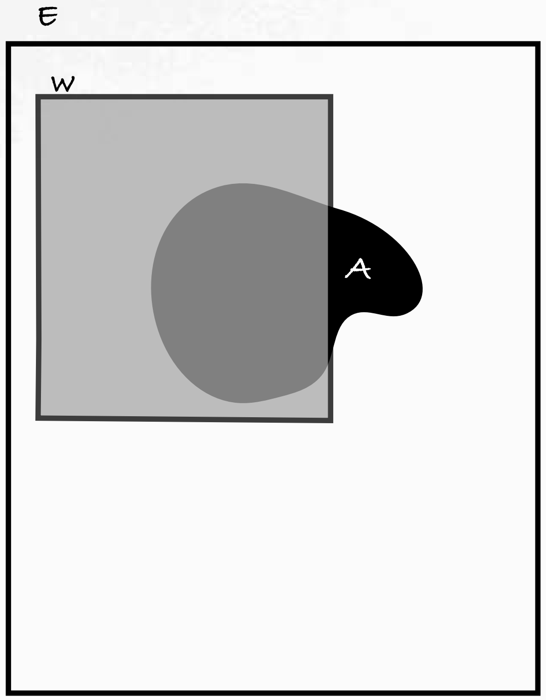

E
W
A^c

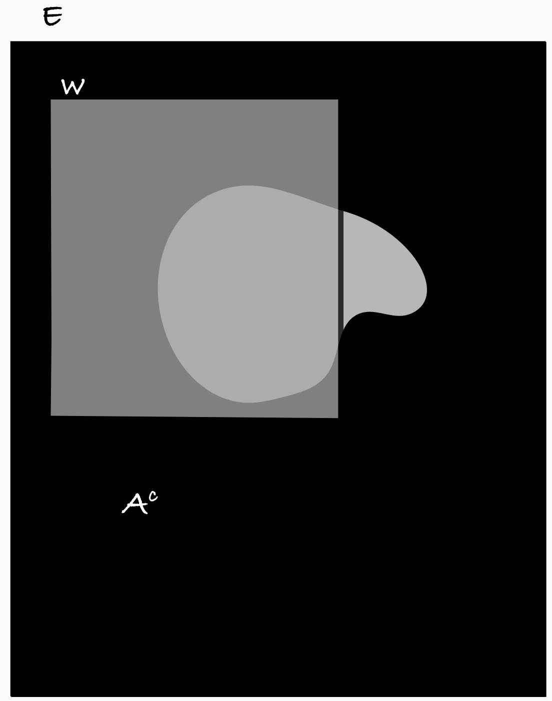
$= g(A)$


E
Álgebra de Boole
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$
W^c
A^c
A
W
∅
$g = g^{-1} = {}^c$
$\hat{W} = (W, W) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$
E
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$
W^c
$A^c = g(A)$
A
W
∅




W^c
A^c
E
∅
A
W
$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_W \circ g \circ \varphi_W$
Álgebra de Boole
$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$
W^c
$\hat{g}_{\hat{W}}(A)$
∅
E
A
W
$((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$



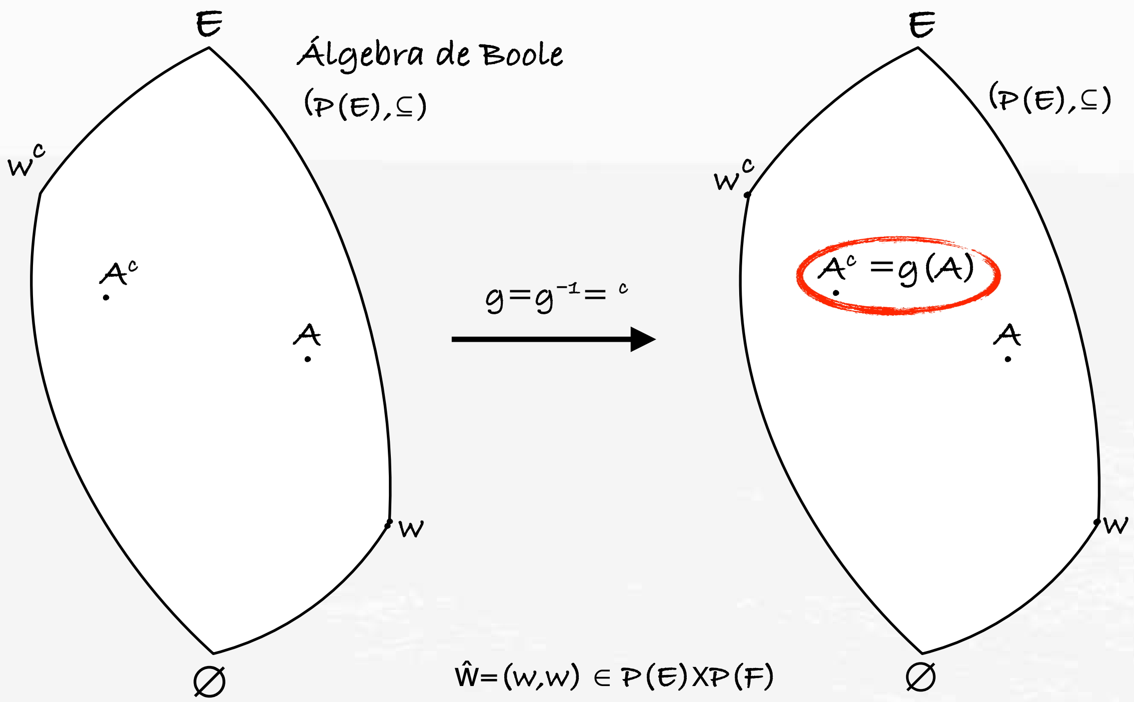


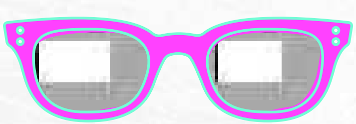
$= g(A) = \hat{g}_{\hat{W}}(A)$

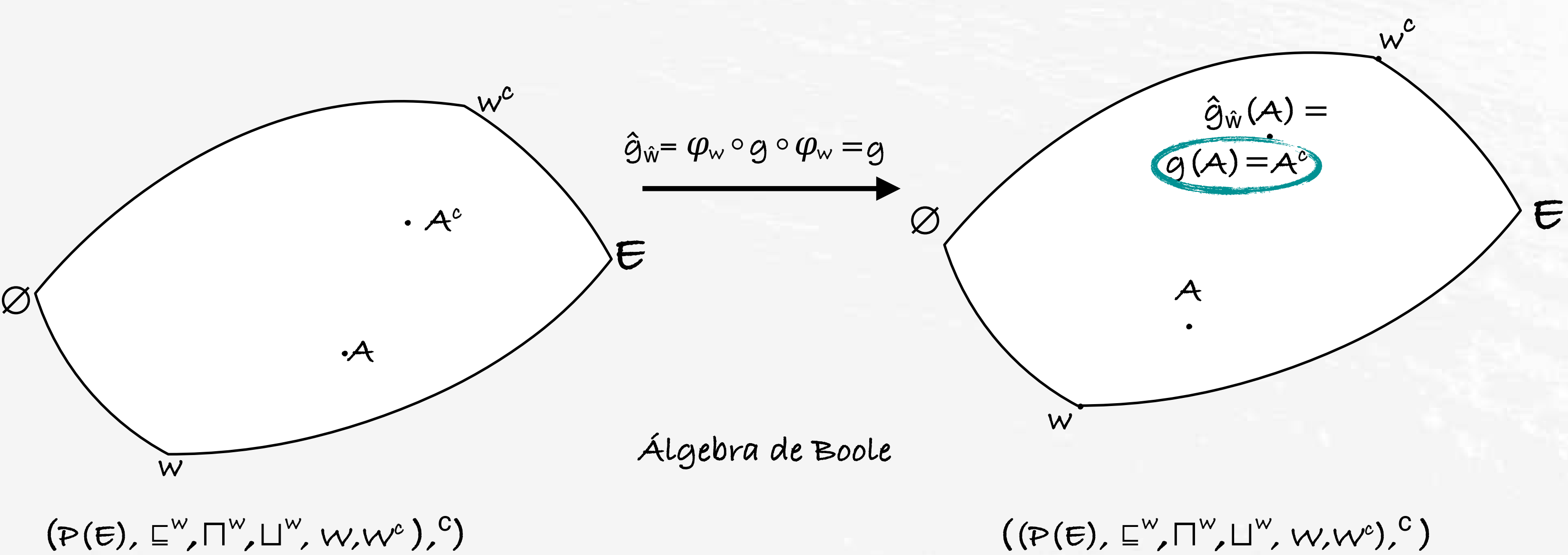
<u>Proposición</u>
Para todo $W\in P(E)$, La W-extensión $\hat{c}_W$ de la función complementación $^c:P(E)\to P(E)$ es ella misma:

$$\hat{c}_W = (\varphi_W \circ {}^c \circ \varphi_W) = {}^c$$

<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta que $(A\triangle W)^c=(A^c\triangle W)$, si $^c:P(E)\to P(E)$ es la complementación en $P(E)$, se verifica $(A\triangle W)^c\triangle W=(A^c\triangle W)\triangle W=A^c$ $\forall A\in P(E)$, es decir $\hat{c}_W=(\varphi_W\circ{}^c\circ\varphi_W)={}^c$ $\forall W\in P(E)$.∎







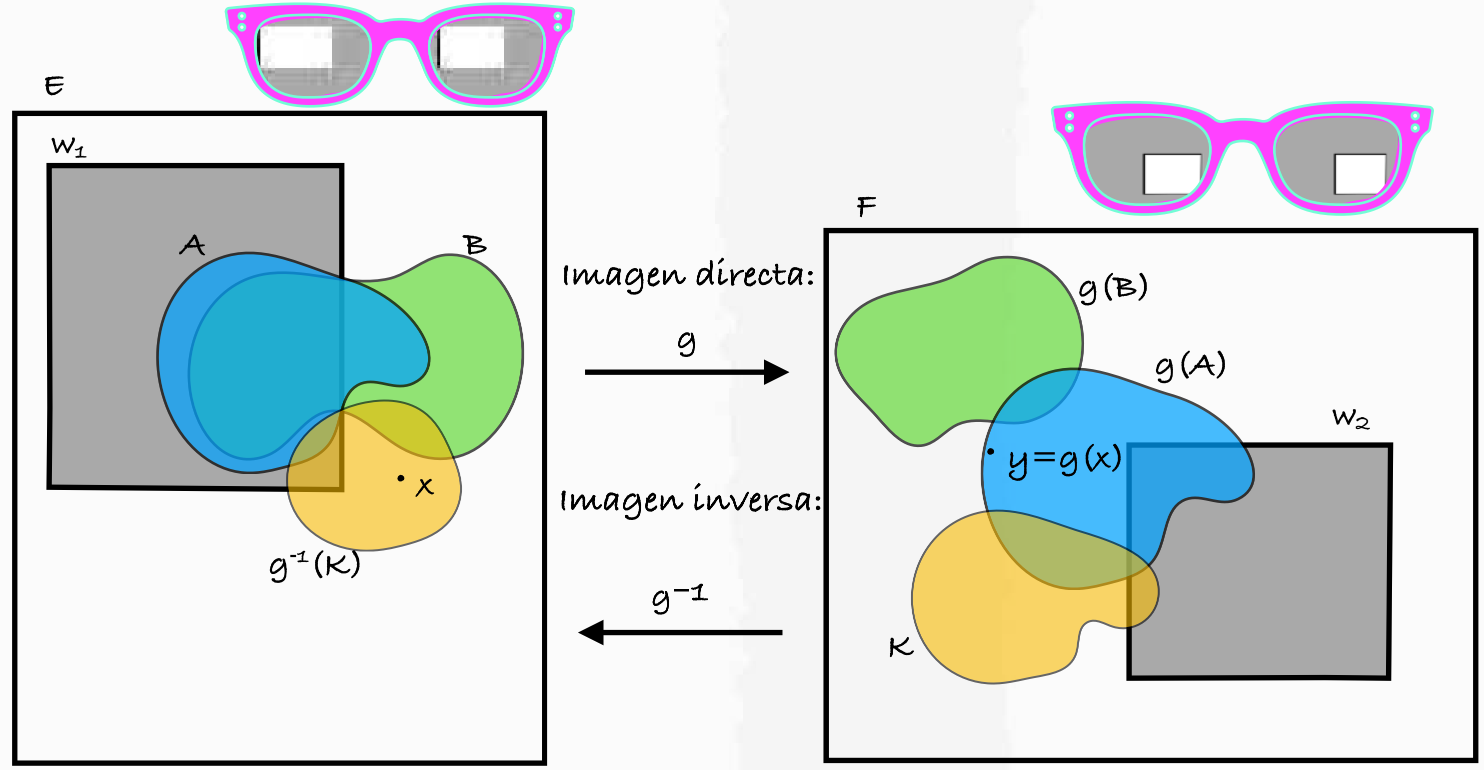
Expresión de la w-imágenes directa e inversa de una función mediante la w-pertenencia $\in^{w}$

$g: E \to F$,

$W_1 \in P(E)$, $W_2 \in P(F)$

$(y \in g(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in A: g(x) = y)$

$(x \in g^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in K)$

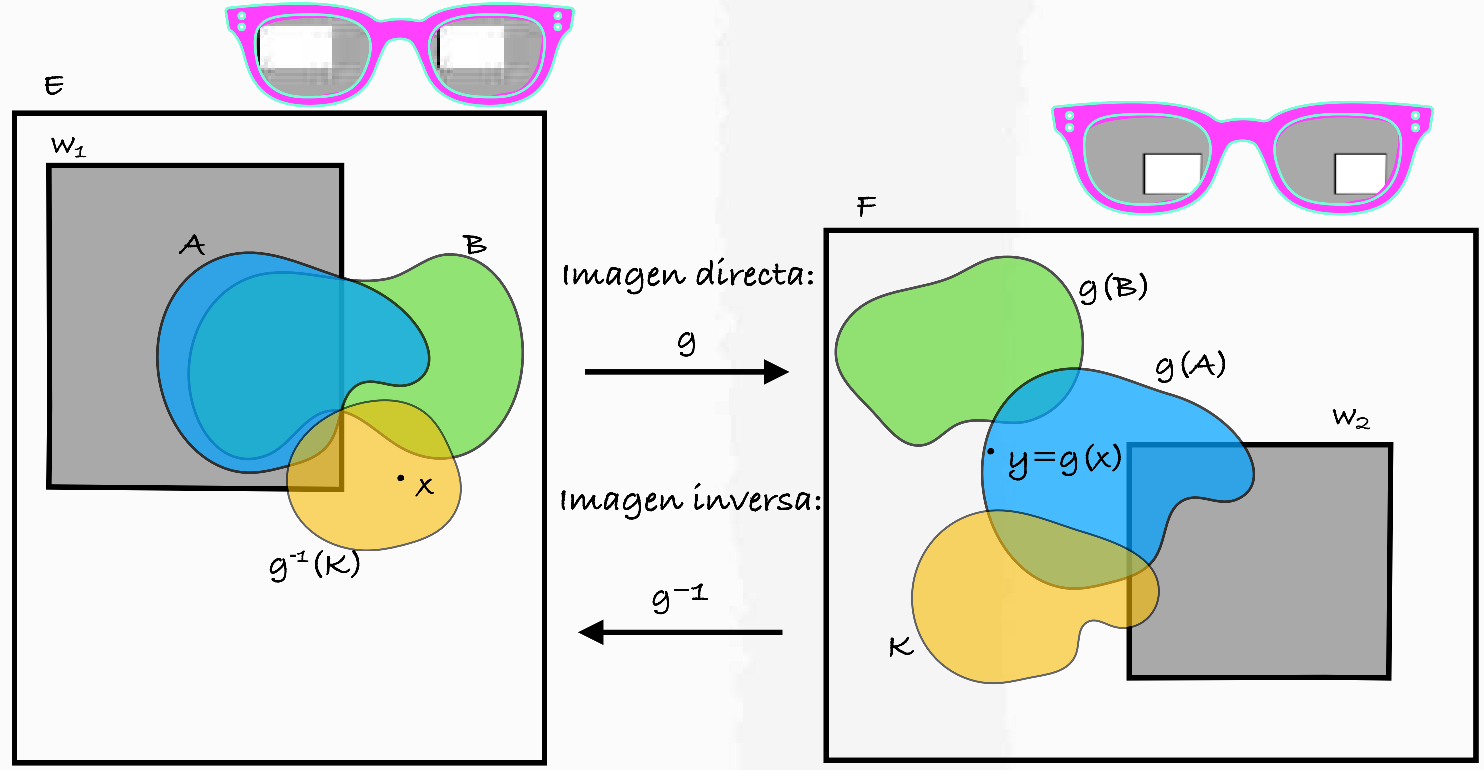


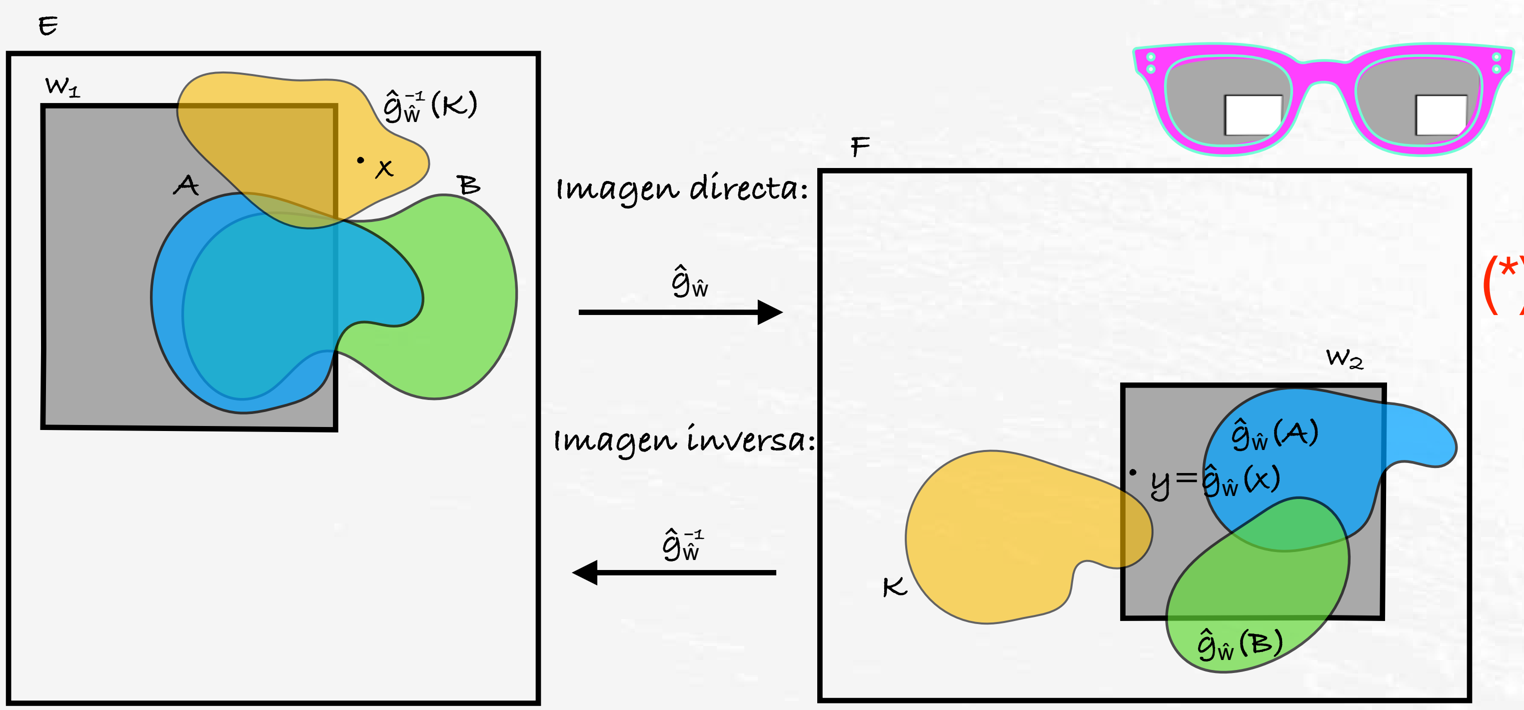
$g: E \to F,$

$W_1 \in P(E),\ W_2 \in P(F)$

$$(y \in g(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in A : g(x) = y)$$

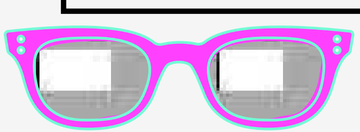
$$(x \in g^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in K)$$





(*) $$(y \in^{W_2} \hat{g}_{\hat{W}}(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in^{W_1} A : g(x) = y)$$

$$(x \in^{W_1} \hat{g}_{\hat{W}}^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in^{W_2} K)$$

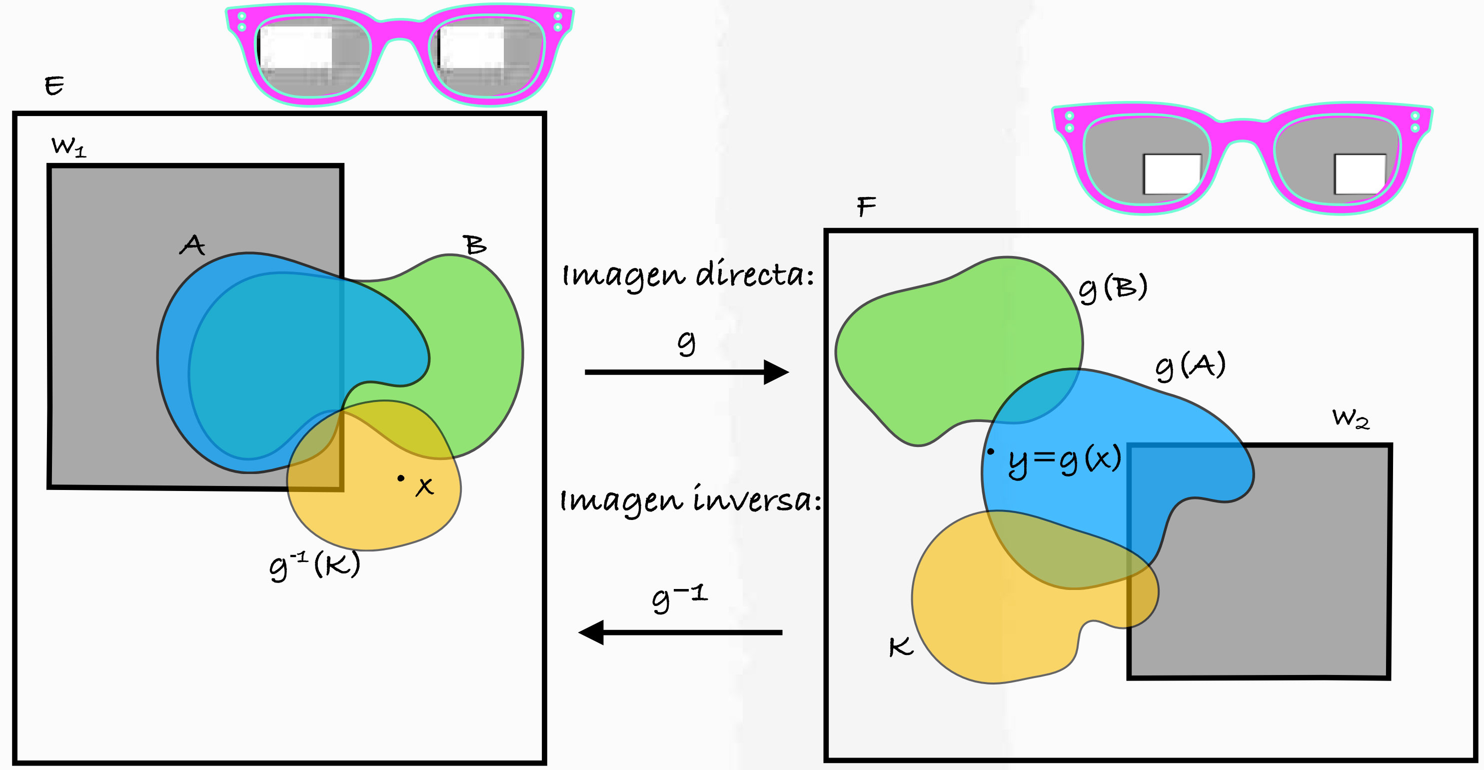


$\hat{W} = (W_2, W_1) \in P(E) \times P(F)$

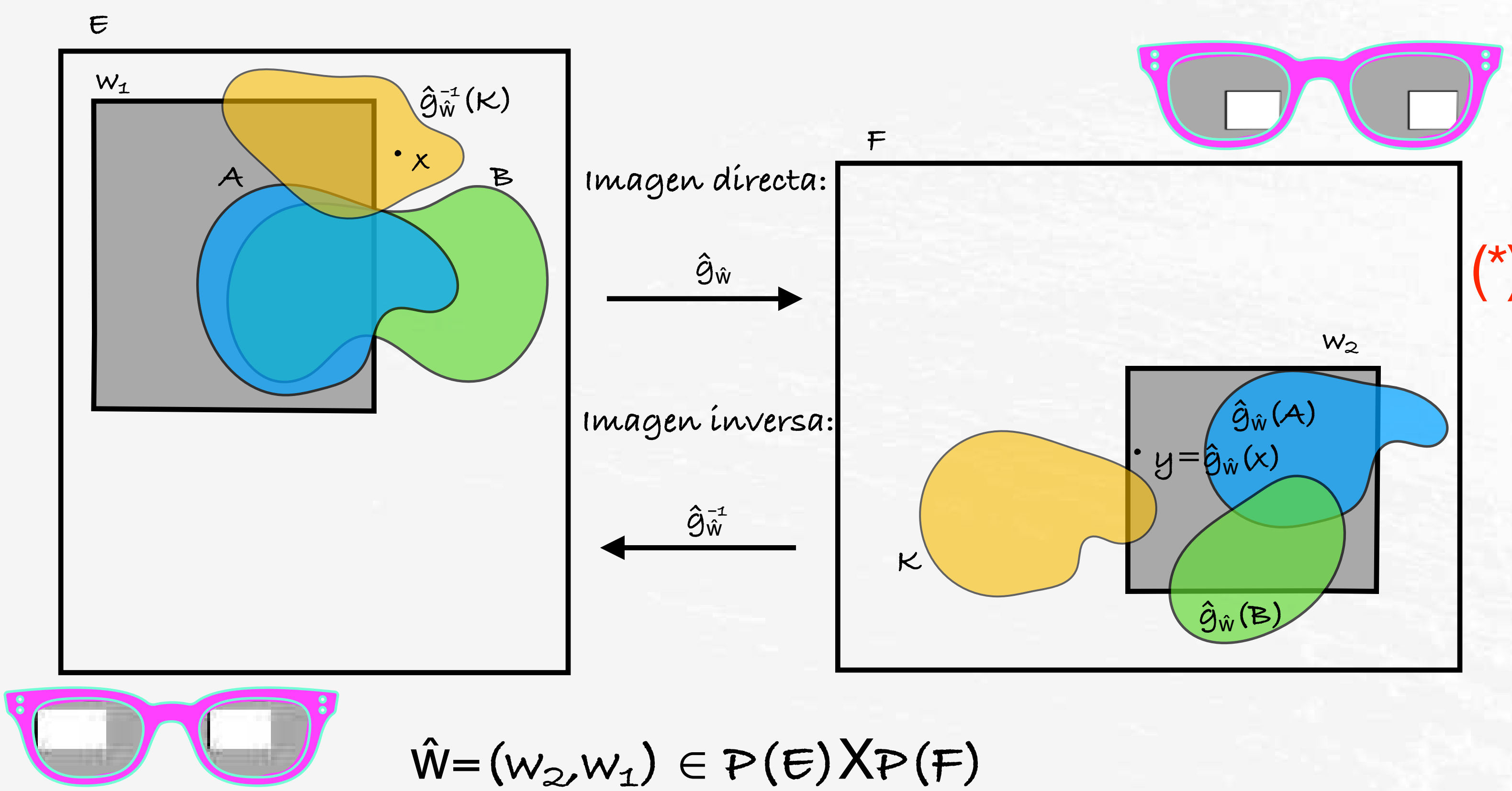
$g : E \to F$,
$W_1 \in P(E),\ W_2 \in P(F)$

$(y \in g(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in A : g(x) = y)$

$(x \in g^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in K)$



Expresiones análogas que también avalan la coherencia de la definición de "w-pertenencia" $\in^{w}$



(*) $(y \in^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in^{W_1} A : g(x) = y)$

$(x \in^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in^{W_2} K)$

$\hat{W} = (W_2, W_1) \in P(E) X P(F)$

(*) (Demostración en la transparencia siguiente)

(Continuación)

<u>Proposición</u>. Para todo $A \in P(E)$ y para todo $\hat{W} = (w_1, w_2) \in P(E)^2$, se verifica:

$$(1)\ \ (y \in^{w_2} \hat{g}_{\hat{W}}(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in^{w_1} A : g(x) = y)$$

$$(2)\ \ (x \in^{w_1} \hat{g}^{-1}_{\hat{W}}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in^{w_2} K)$$

(Continuación)

<u>Proposición</u>. Para todo $A \in P(E)$ y para todo $\hat{W} = (w_1, w_2) \in P(E)^2$, se verifica:

$$(1)\ \ (y \in^{w_2} \hat{g}_{\hat{W}}(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in^{w_1} A : g(x) = y)$$

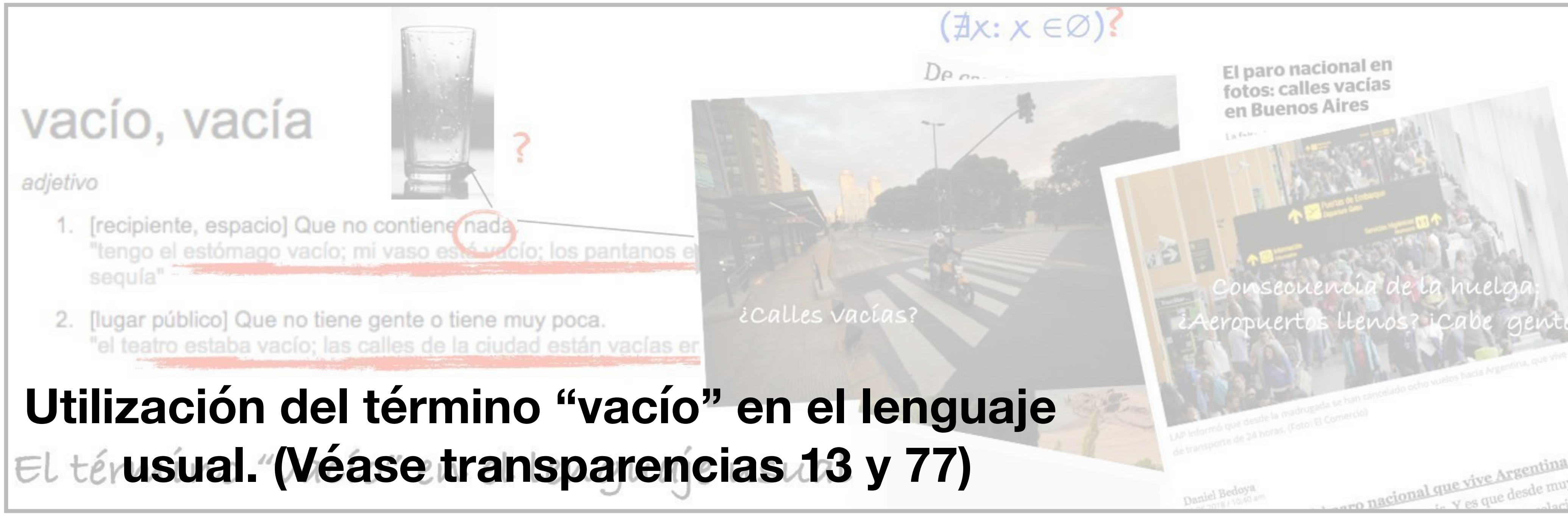
$$(2)\ \ (x \in^{w_1} \hat{g}_{\hat{W}}^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in^{w_2} K)$$

<u>Demostración</u>. (1) $(y \in^{w_2} \hat{g}_{\hat{W}}(A)) \Leftrightarrow (y \in \hat{g}_{\hat{W}}(A) \triangle w_2) \Leftrightarrow (y \in g(A \triangle w_1) \triangle w_2 \triangle w_2) \Leftrightarrow$

$(y \in g(A \triangle w_1)) \Leftrightarrow (\exists x \in A \triangle w_1 : g(x) = y) \Leftrightarrow (\exists x \in^{w_1} A : g(x) = y)$.

(2) $(x \in^{w_1} \hat{g}_{\hat{W}}^{-1}(K)) \Leftrightarrow (x \in \hat{g}_{\hat{W}}^{-1}(K) \triangle w_1) \Leftrightarrow (x \in g^{-1}(K \triangle w_2) \triangle w_1 \triangle w_1) \Leftrightarrow$

$(x \in g^{-1}(K \triangle w_2)) \Leftrightarrow (g(x) \in K \triangle w_2) \Leftrightarrow (g(x) \in^{w_2} K)$. ∎



Utilización del término “vacío” en el lenguaje usual. (Véase transparencias 13 y 77)

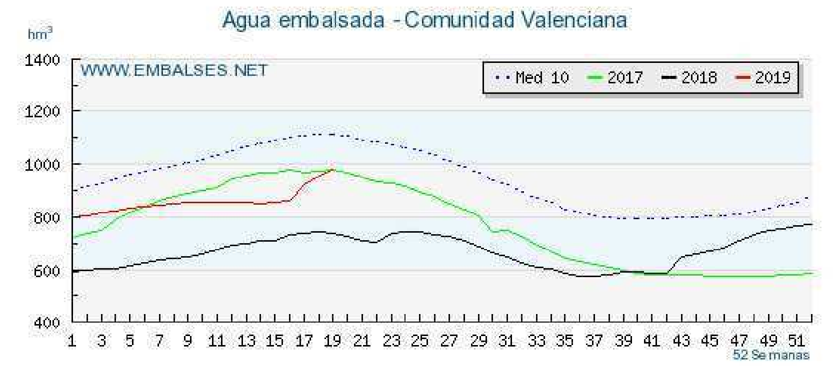
Ejemplo. Incorporación del término “vacío” en herramientas de gestión de recursos, ayuda a la decisión,…

Ejemplo. Incorporación del término "vacío" en herramientas de gestión de recursos, ayuda a la decisión,…

En un sistema de gestión del uso del agua acumulada en los pantanos de la Comunidad Valenciana...

Comunidad: Comunidad Valenciana

Agua embalsada (06-05-2019):	**979**	**hm³**	**40.01**	**%**
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%



Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano	Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	6	1	0
AMADORIO	16	6	1
ARENOS	137	95	0
BELLUS	69	11	0
BENAGEBER	221	164	5
BENIARRES	27	19	1
BUSEO	8	4	0
CONTRERAS	852	198	8
CORTES II	118	105	-7
CREVILLENTE	13	5	1
EL NARANJERO	29	18	-3
EL REGAJO	6	5	0
ESCALONA	99	5	0
FORATA	37	12	0
GUADALEST	13	7	1
LA MUELA	20	16	-1
LA PEDRERA	246	74	0
LORIGUILLA	73	22	-1
MARIA CRISTINA	18	7	0
SICHAR	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	379	161	7
ULLDECONA	11	7	0

Embalses en Comunidad Valenciana (Sin datos Semanales)

Pantano	Capacidad
ALCORA	1
BETIES I	0
CIRAT	0
EL FEDERAL	1
ELCHE	0
ELDA	0
FLORA	0
FRANCISCO MIRA CANOVAS	1
ISBERT	0
ONDA	1
PARAJE DE GALENO	0
RELLEU	1
RIBESALBES	0
SAN VICENTE	0
SECA SALADA	2
TIBI	4
TOLL DE CARMELO I	0
TORRE ALTA	0
VALLAT	1

En un sistema de gestión del uso del agua acumulada en los pantanos de la Comunidad Valenciana...

Comunidad: Comunidad Valenciana				
Agua embalsada (06-05-2019):	979	hm³	40.01	%
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%

Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	17%	6	1	0
AMADORIO	37%	16	6	1
ARENOS	69%	137	95	0
BELLUS	16%	69	11	0
BENAGEBER	74%	221	164	5
BENIARRES	70%	27	19	1
BUSEO	50%	8	4	0
CONTRERAS	23%	852	198	8
CORTES II	89%	118	105	-7
CREVILLENTE	38%	13	5	1
EL NARANJERO	62%	29	18	-3
EL REGAJO	83%	6	5	0
ESCALONA	5%	99	5	0
FORATA	32%	37	12	0
GUADALEST	54%	13	7	1
LA MUELA	80%	20	16	-1
LA PEDRERA	30%	246	74	0
LORIGUILLA	30%	73	22	-1
MARIA CRISTINA	39%	18	7	0
SICHAR	75%	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	42%	379	161	7
ULLDECONA	63%	11	7	0

Embalses en Comunidad Valenciana (Sin datos Semanales)

Pantano	Capacidad
ALCORA	1
BETIES I	0
CIRAT	0
EL FEDERAL	1
ELCHE	0
ELDA	0
FLORA	0
FRANCISCO MIRA CANOVAS	1
ISBERT	0
ONDA	1
PARAJE DE GALENO	0
RELLEU	1
RIBESALBES	0
SAN VICENTE	0
SECA SALADA	2
TIBI	4
TOLL DE CARMELO I	0
TORRE ALTA	0

EV = {AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi} =

{P1, P2, P3, P4}

W

Comunidad: Comunidad Valenciana

Agua embalsada (06-05-2019):	**979**	**hm³**	**40.01**	**%**
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%

Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	17%	6	1	0
AMADORIO	37%	16	6	1
ARENOS	69%	137	95	0
BELLUS	16%	69	11	0
BENAGEBER	74%	221	164	5
BENIARRES	70%	27	19	1
BUSEO	50%	8	4	0
CONTRERAS	23%	852	198	8
CORTES II	89%	118	105	-7
CREVILLENTE	38%	13	5	1
EL NARANJERO	62%	29	18	-3
EL REGAJO	83%	6	5	0
ESCALONA	5%	99	5	0
FORATA	32%	37	12	0
GUADALEST	54%	13	7	1
LA MUELA	80%	20	16	-1
LA PEDRERA	30%	246	74	0
LORIGUILLA	30%	73	22	-1
MARIA CRISTINA	39%	18	7	0
SICHAR	75%	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	42%	379	161	7
ULLDECONA	63%	11	7	0

Una agrupación y simplificación del conjunto de pantanos según su capacidad en una época determinada

EV = {AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí} =
{ P1, P2, P3, P4 }

W ¿Un subconjunto de pantanos "vacíos"?

Comunidad: Comunidad Valenciana

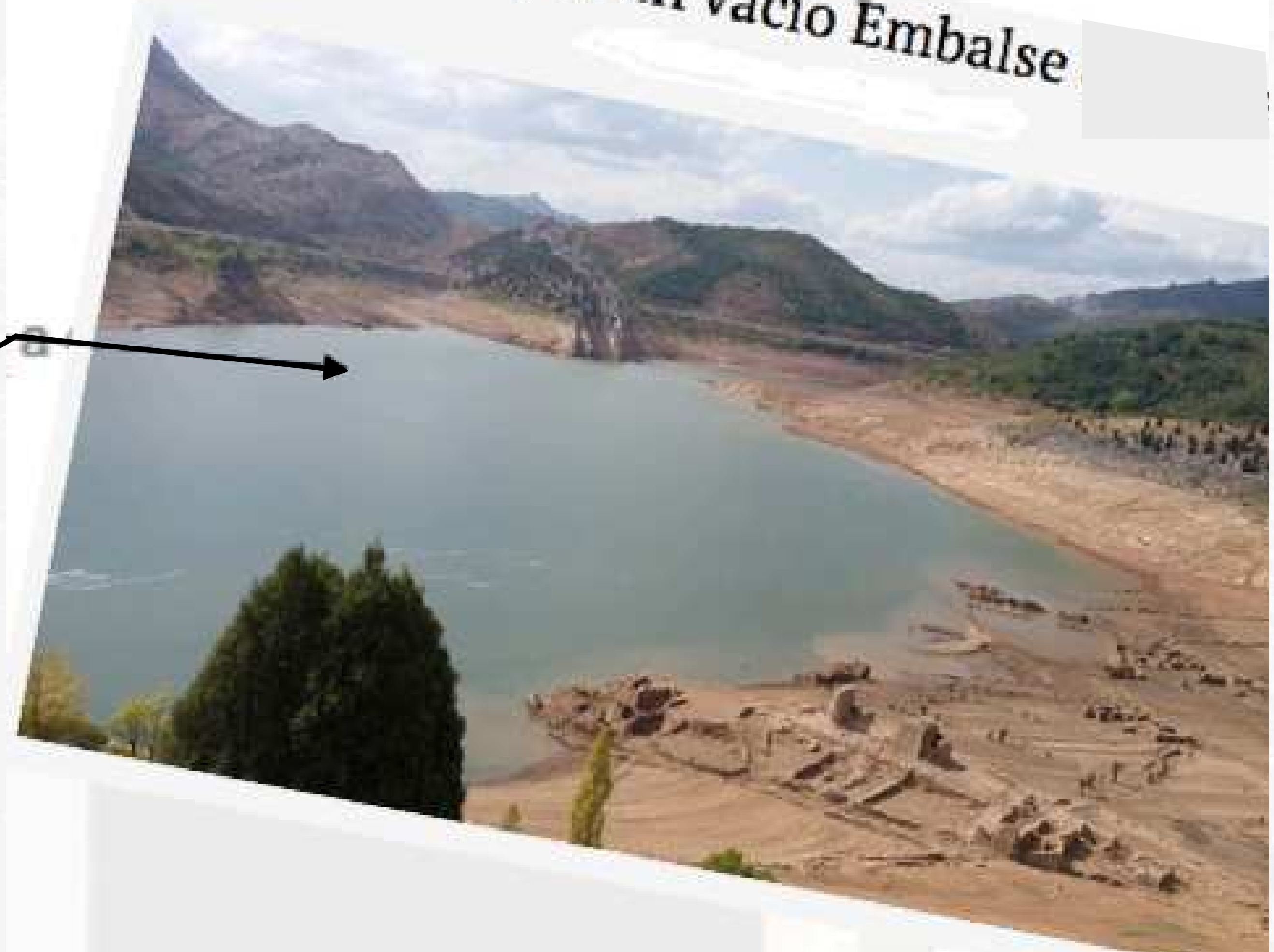
Agua embalsada (06-05-2019):	979	hm³	40.01	%
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%

Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	17%	6	1	0
AMADORIO	37%	16	6	1
ARENOS	69%	137	95	0
BELLUS	16%	69	11	0
BENAGEBER	74%	221	164	5
BENIARRES	70%	27	19	1
BUSEO	50%	8	4	0
CONTRERAS	23%	852	198	8
CORTES II	89%	118	105	-7
CREVILLENTE	38%	13	5	1
EL NARANJERO	62%	29	18	-3
EL REGAJO	83%	6	5	0
ESCALONA	5%	99	5	0
FORATA	32%	37	12	0
GUADALEST	54%	13	7	1
LA MUELA	80%	20	16	-1
LA PEDRERA	30%	246	74	0
LORIGUILLA	30%	73	22	-1
MARIA CRISTINA	39%	18	7	0
SICHAR	75%	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	42%	379	161	7
ULLDECONA	63%	11	7	0

$(\nexists x: x \in \emptyset)$?

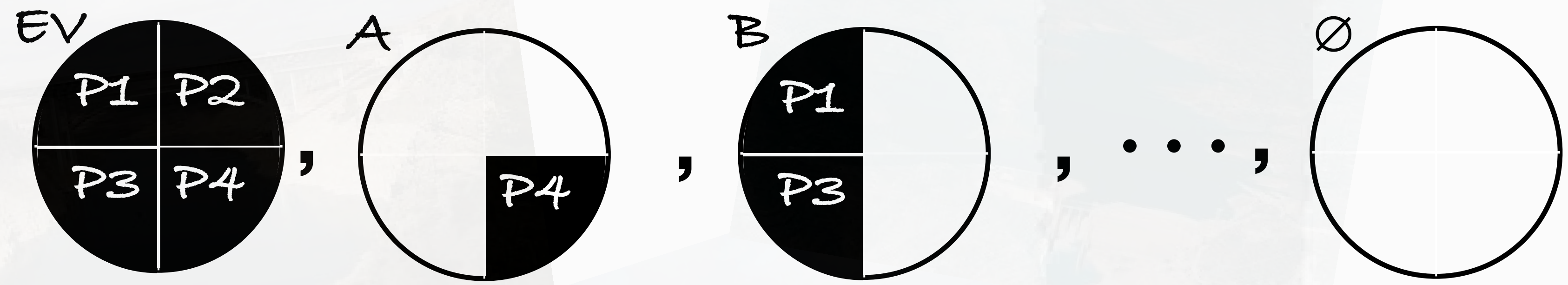
De caminata por un vacío Embalse



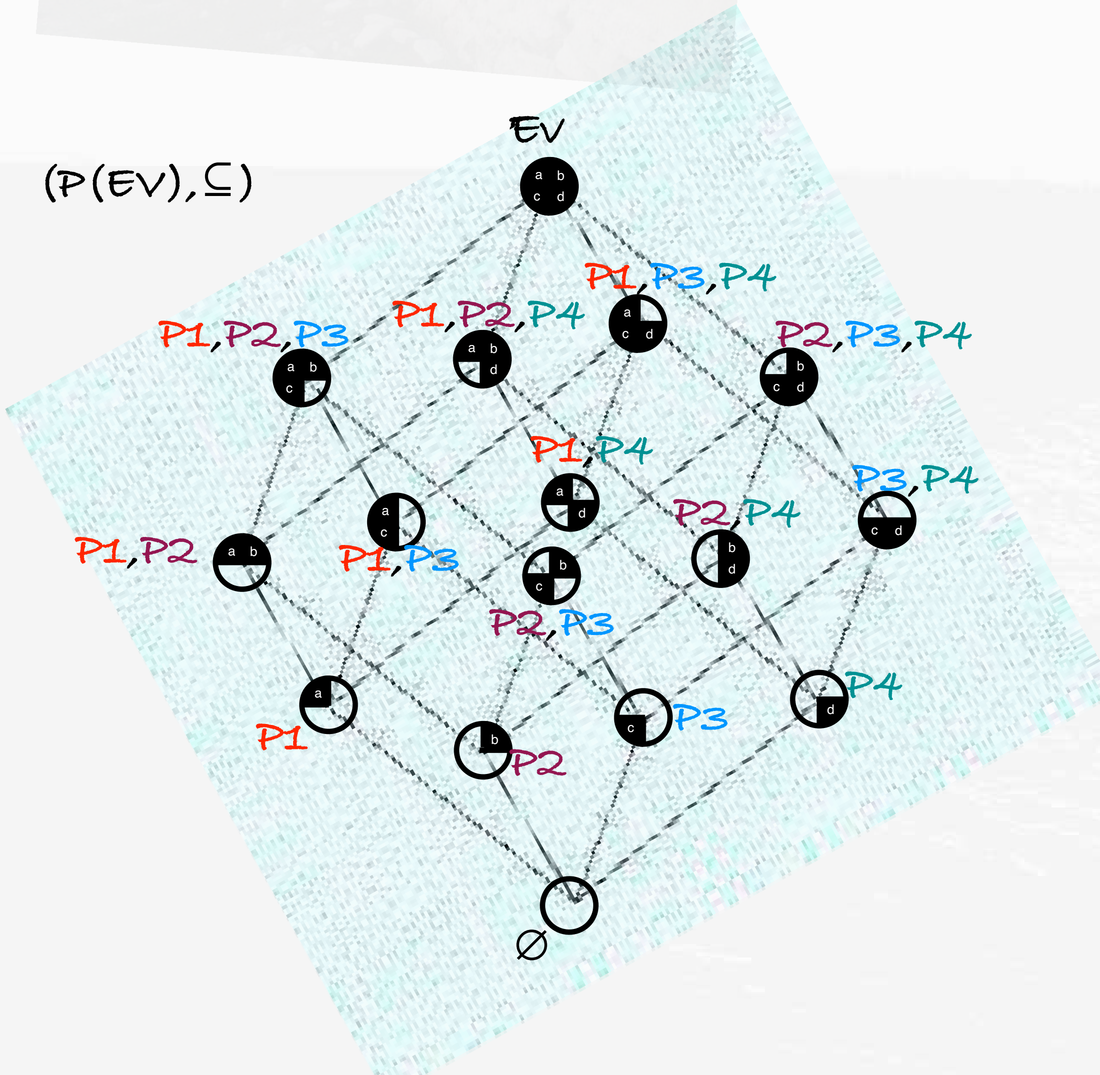
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí }={ P1, P2, P3, P4 }

•••

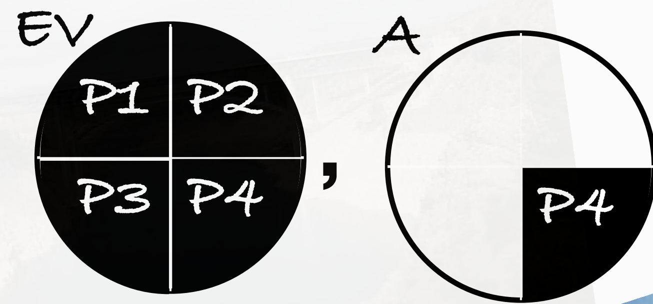
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

P(EV)={  }

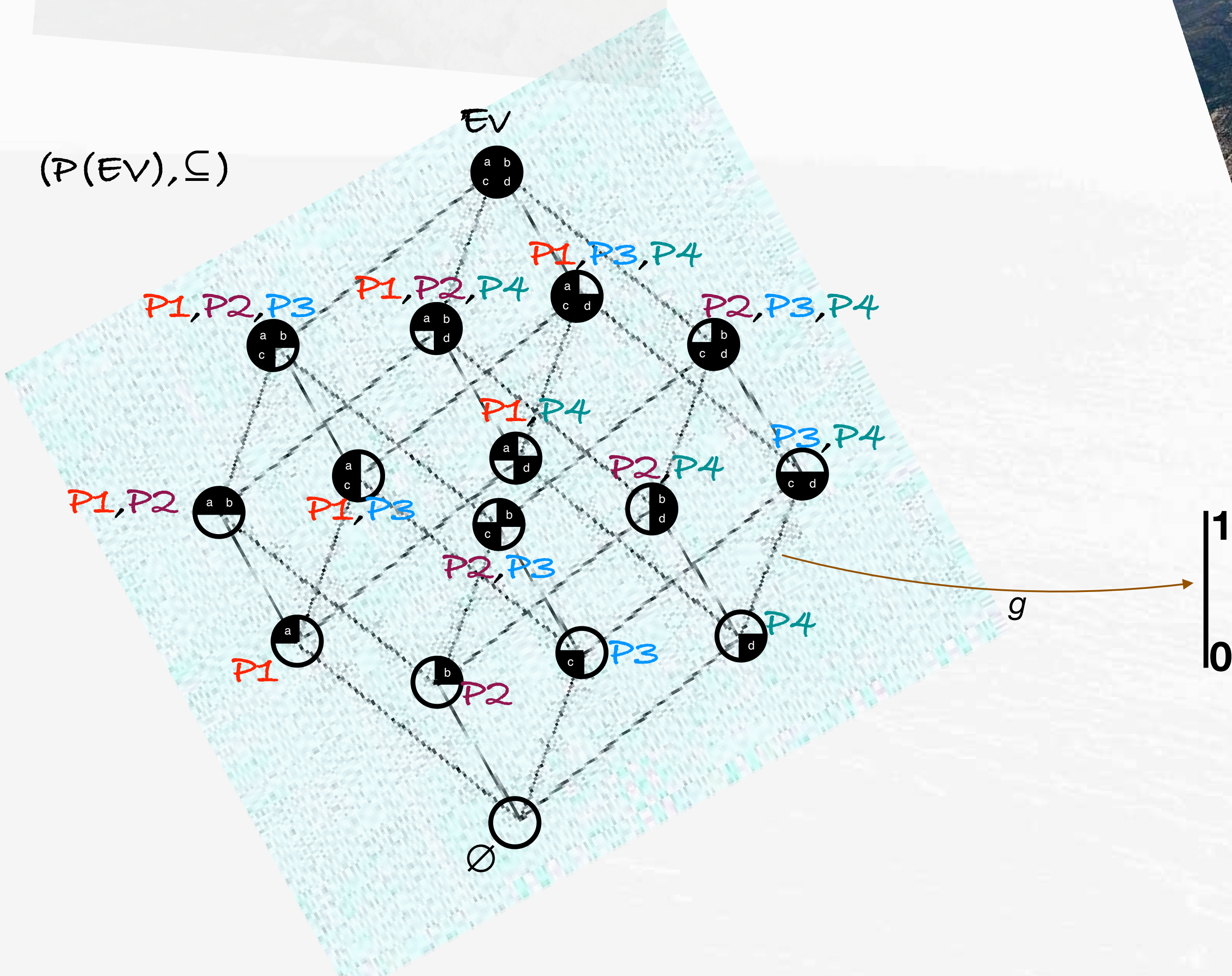
(P(EV),⊆)



EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi }={ P1, P2, P3, P4 }

P(EV)={  }

(P(EV),⊆)



Sistema de gestión de los recursos de EV.

En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

g: (P(EV),⊆)→ ($\mathbb{R}^+$,≤) ó g: (P(EV),⊆)→ ([0.1],≤),

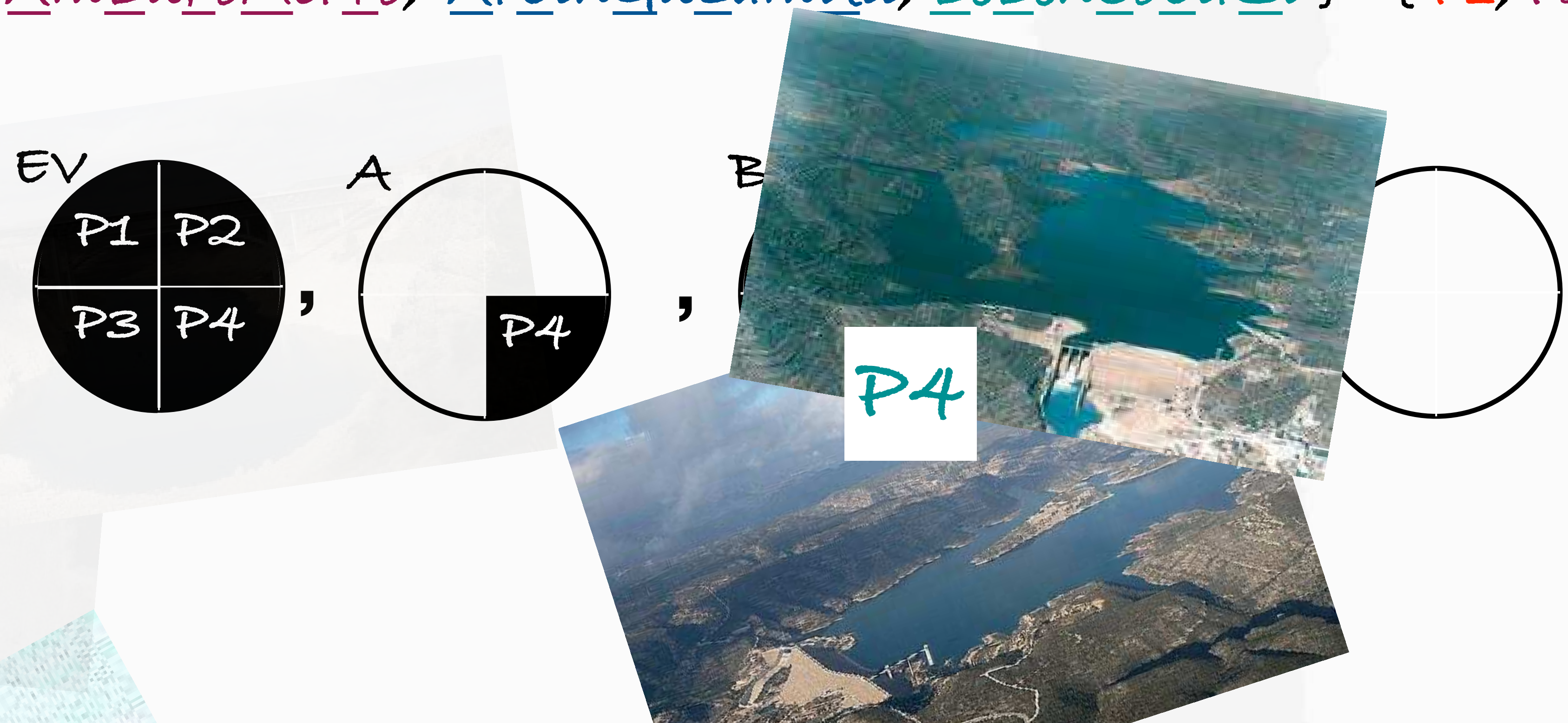
que verifiquen propiedades como

g(∅)=0 ,g(EV)=1 , (A⊆B)⇒(g(A) ≤ g(B)),

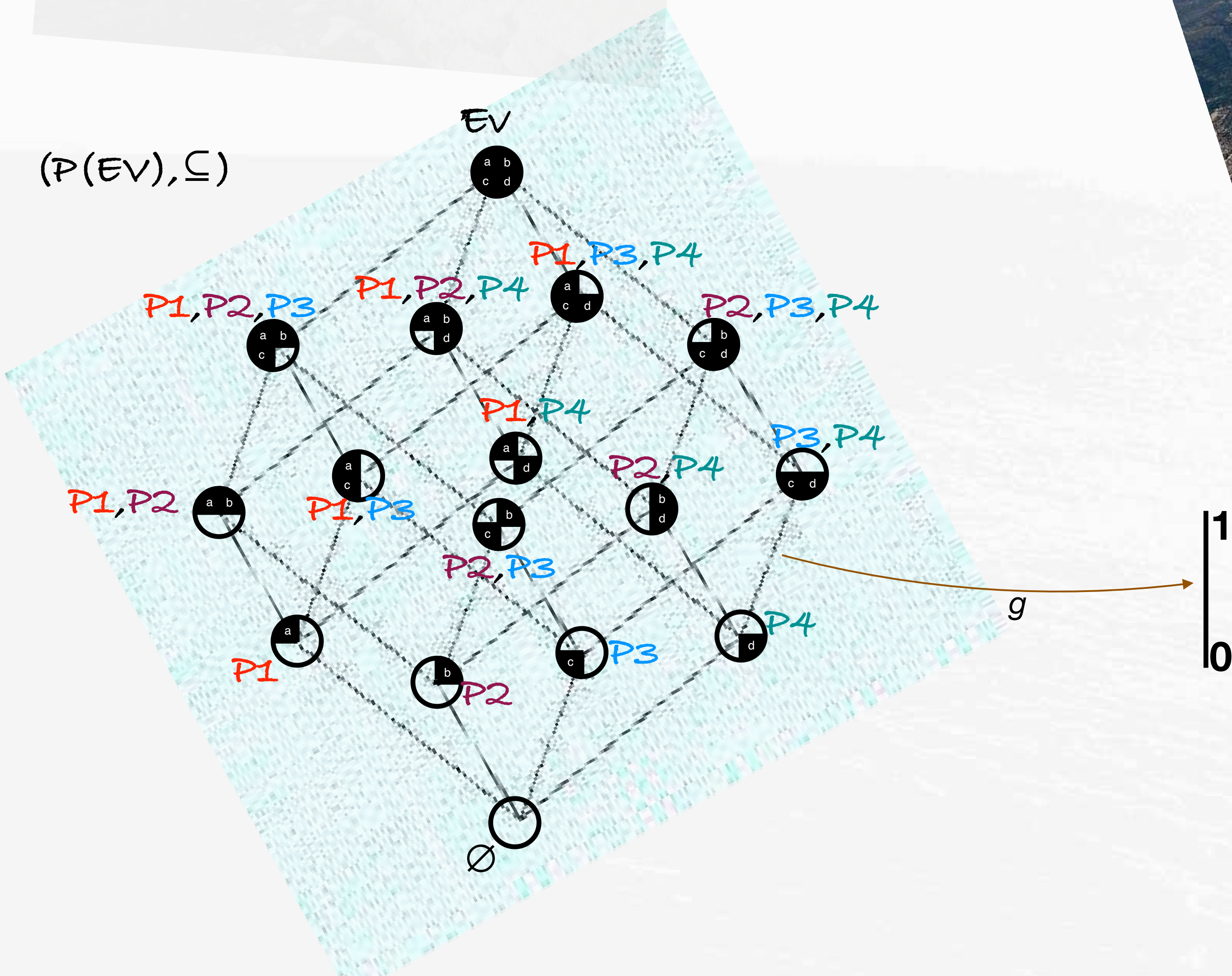
g(A∪B)=max(g(A),g(B)), etc,...

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

P(EV)={



Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifica

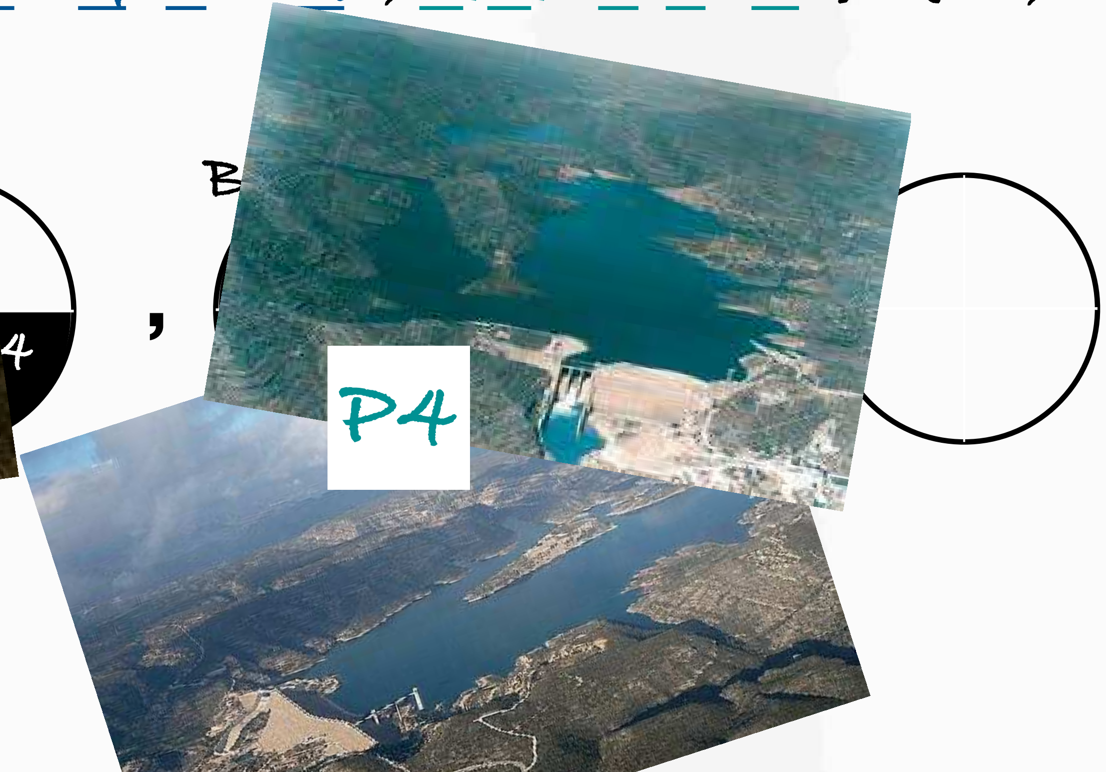
$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(Pr(A)\leq Pr(B))$,

$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

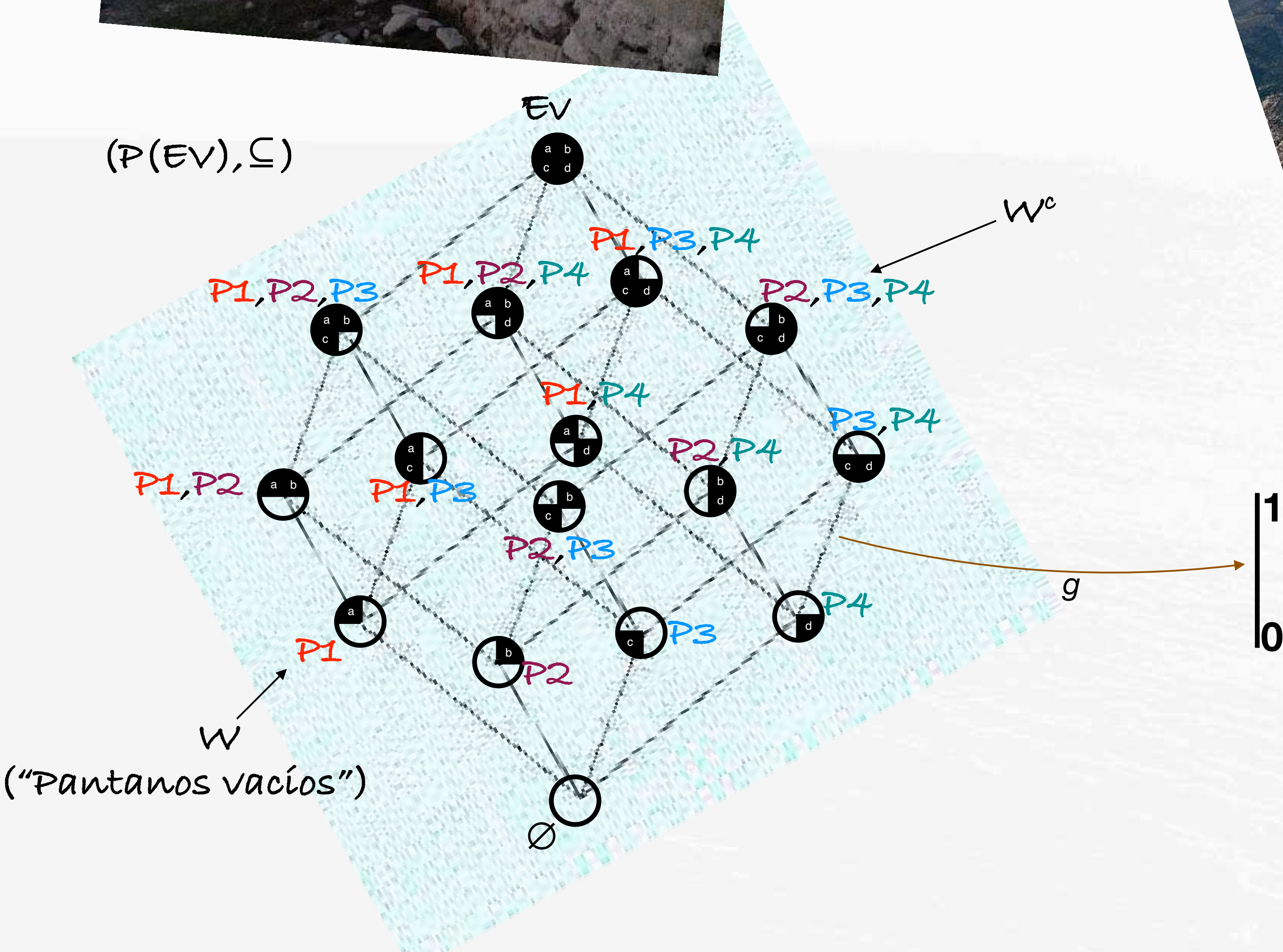
O probabilidades condicionadas:

$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi }={ P1, P2, P3, P4 }



Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (Pr(A) \leq Pr(B))$,

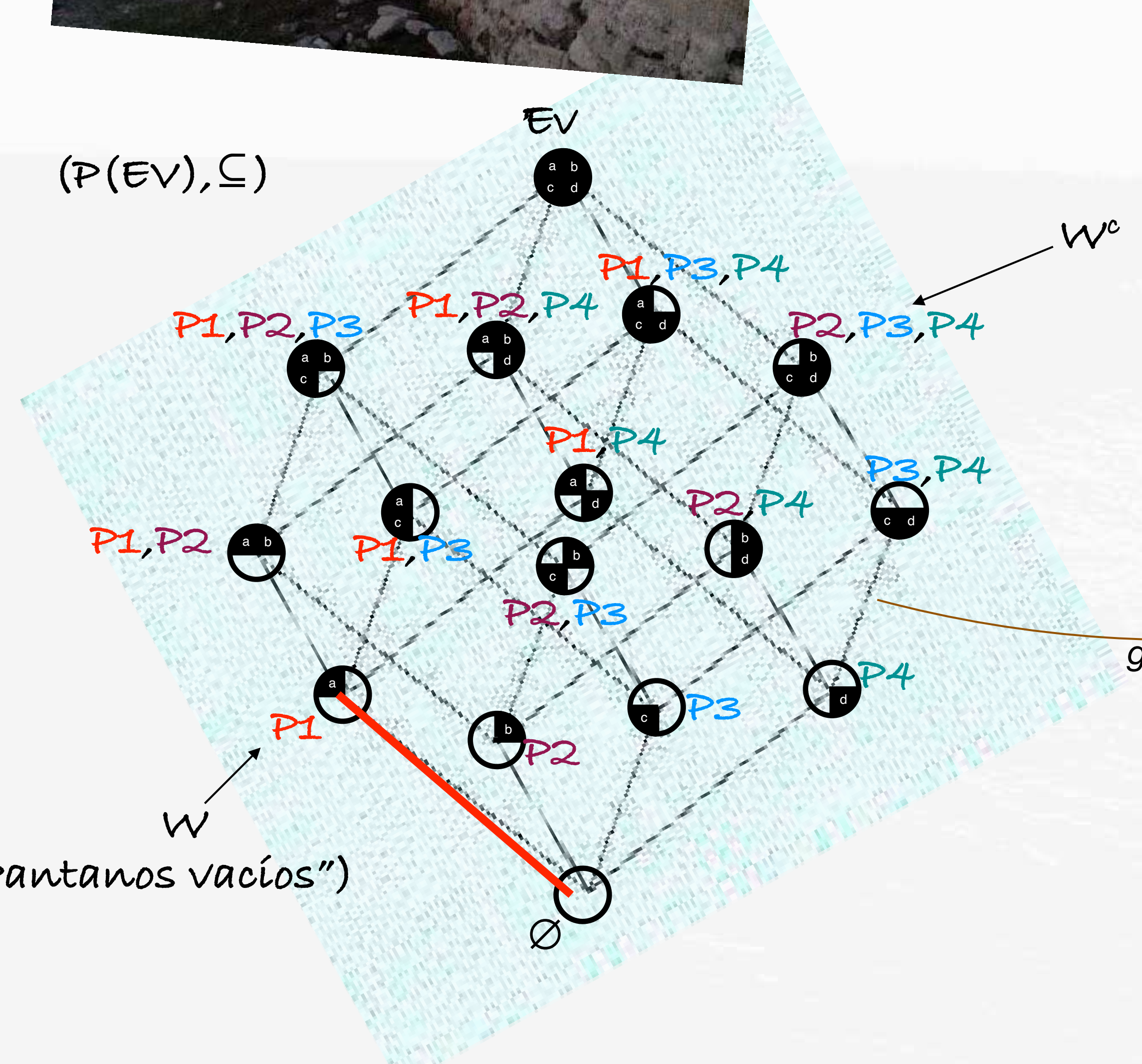
$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

O probabilidades condicionadas:

$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi }={ P1, P2, P3, P4 }

Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (P(EV),\subseteq)\rightarrow (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (P(EV),\subseteq)\rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr:(P(EV),\subseteq)\rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(Pr(A)\leq Pr(B))$,

$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

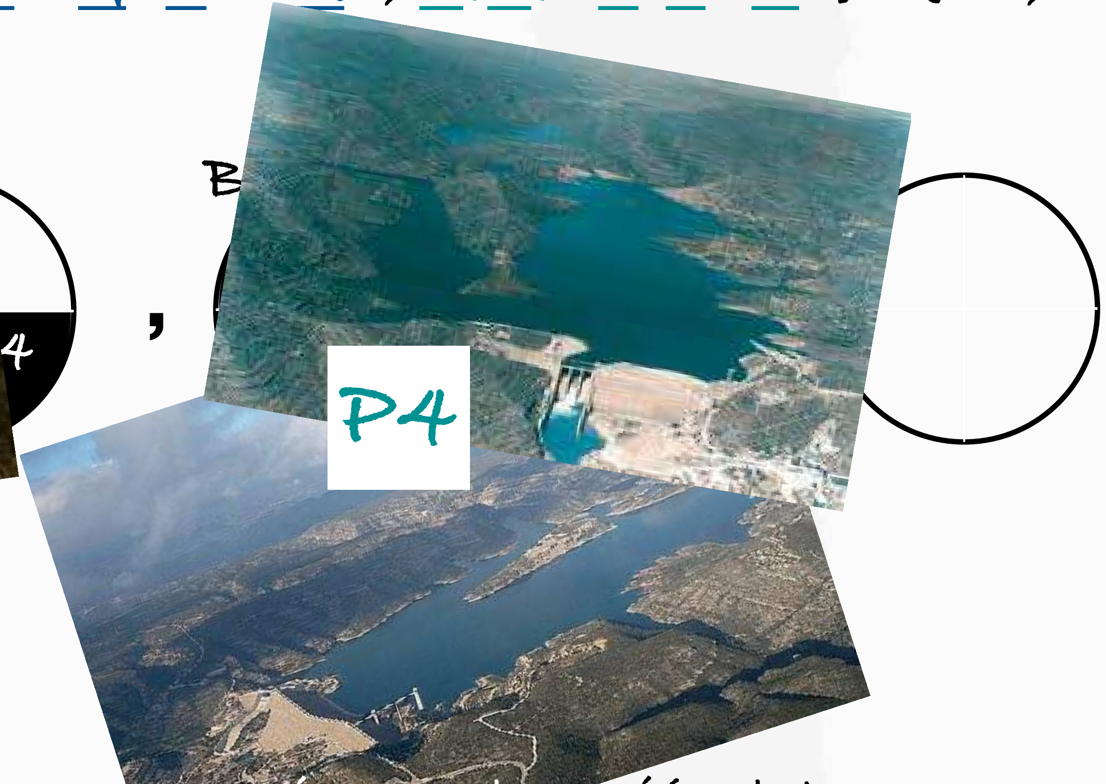
O probabilidades condicionadas:

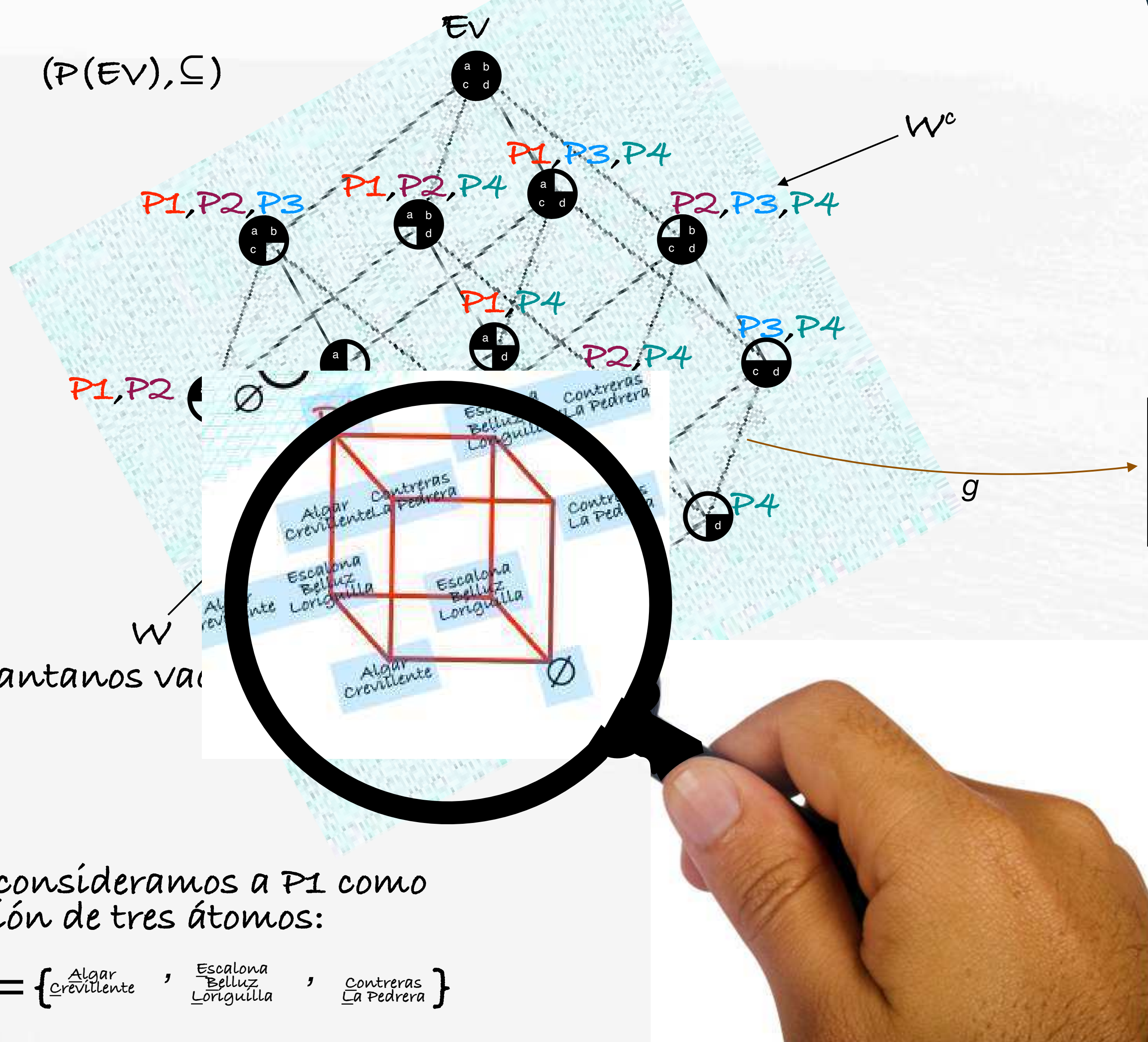
$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = { Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera }

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}





Sistema de gestión de los recursos de EV.

En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

g: $(P(EV),\subseteq)\rightarrow(\mathbb{R}^{+},\leq)$ ó g: $(P(EV),\subseteq)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad Pr: $(P(EV),\subseteq)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(Pr(A)\leq Pr(B))$,

$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

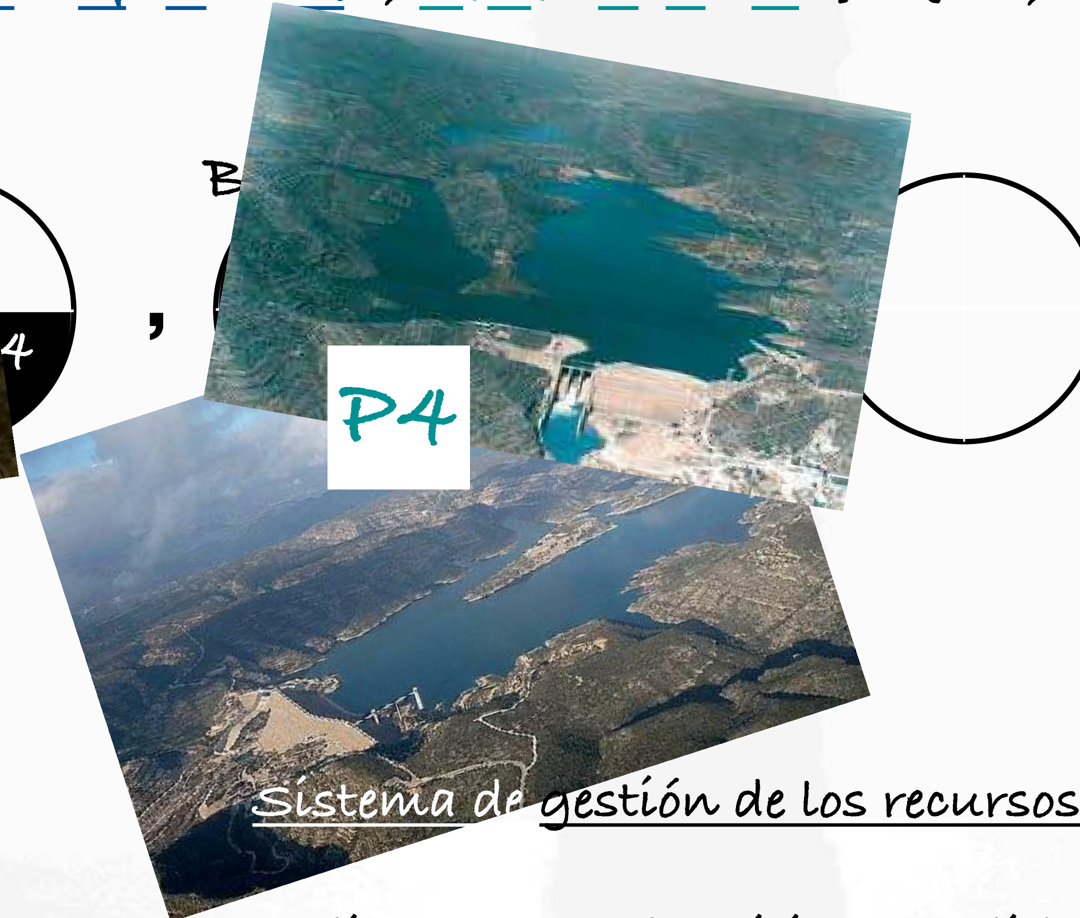
O probabilidades condicionadas:

$Pr^{*}(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

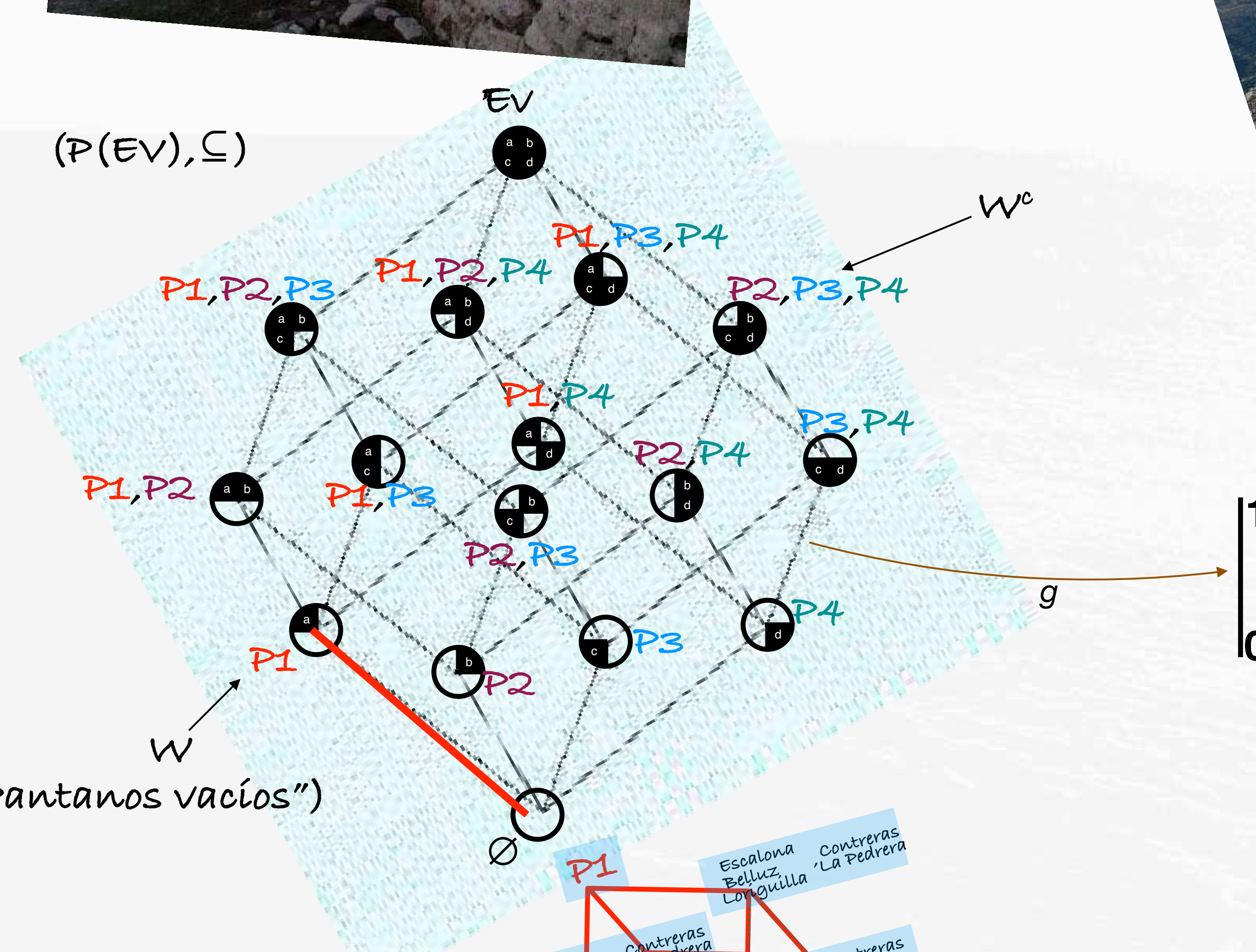
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamuUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}



Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

g: (P(EV),⊆)→ ($\mathbb{R}^+$,≤) ó g: (P(EV),⊆)→ ([0.1],≤),

que verifiquen propiedades como

g(∅)=0 ,g(EV)=1 , (A⊆B)⇒(g(A) ≤ g(B)),

g(A∪B)=max(g(A),g(B)), etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad Pr:(P(EV),⊆)→ ([0.1],≤),

que verifica

Pr(∅)=0 ,Pr(EV)=1 , (A⊆B)⇒(Pr(A)≤Pr(B)),

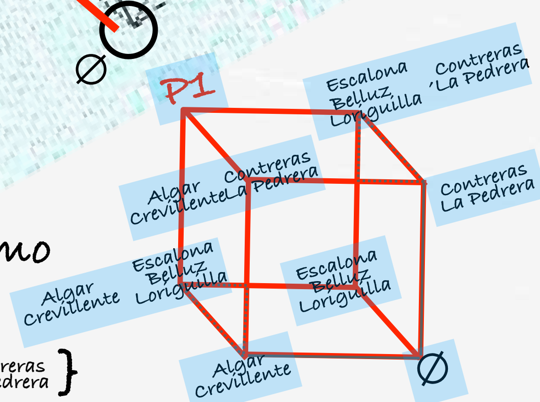
Pr(A∪B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A∩B).

O probabilidades condicionadas:

Pr*(A/B)=Pr(A∩B)/Pr(A), etc...

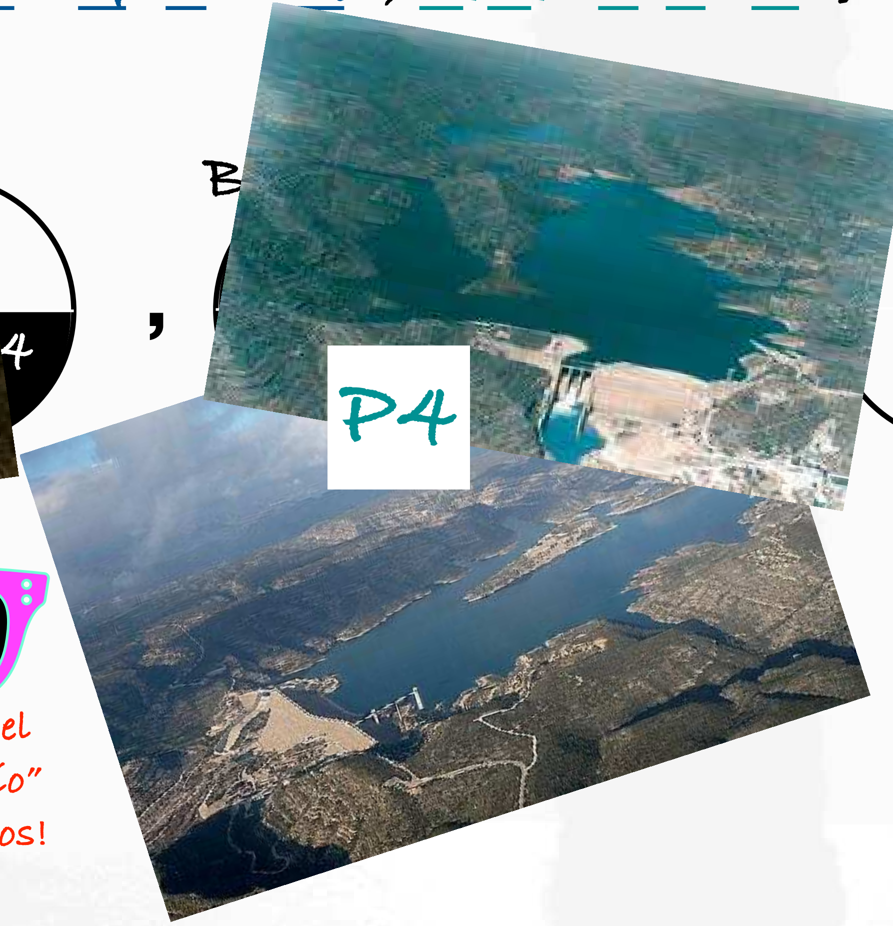
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

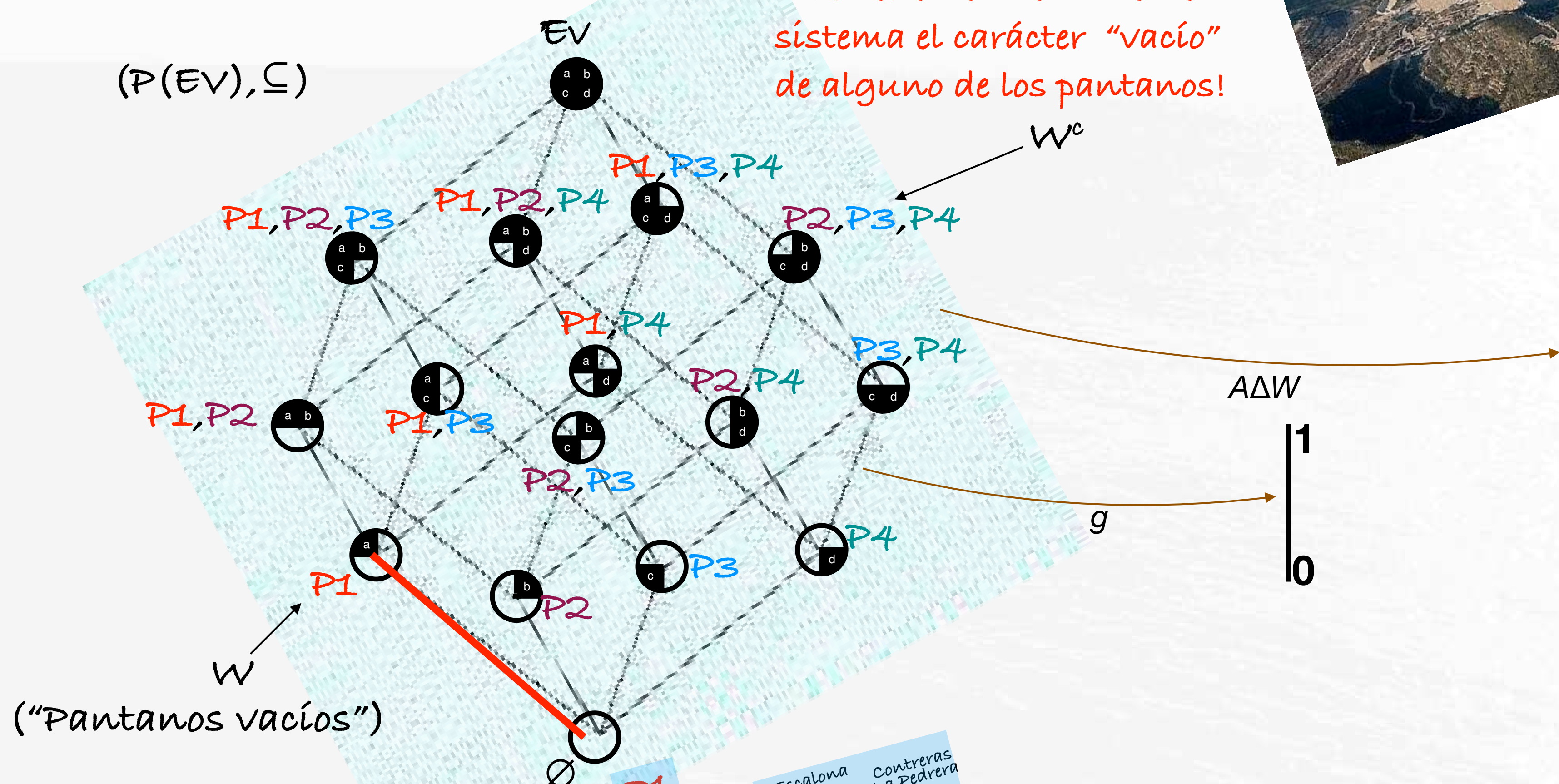


P(P1): una "vista con más detalle".

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

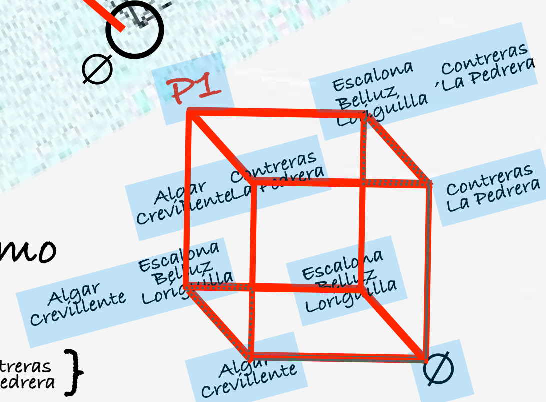


¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!



Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

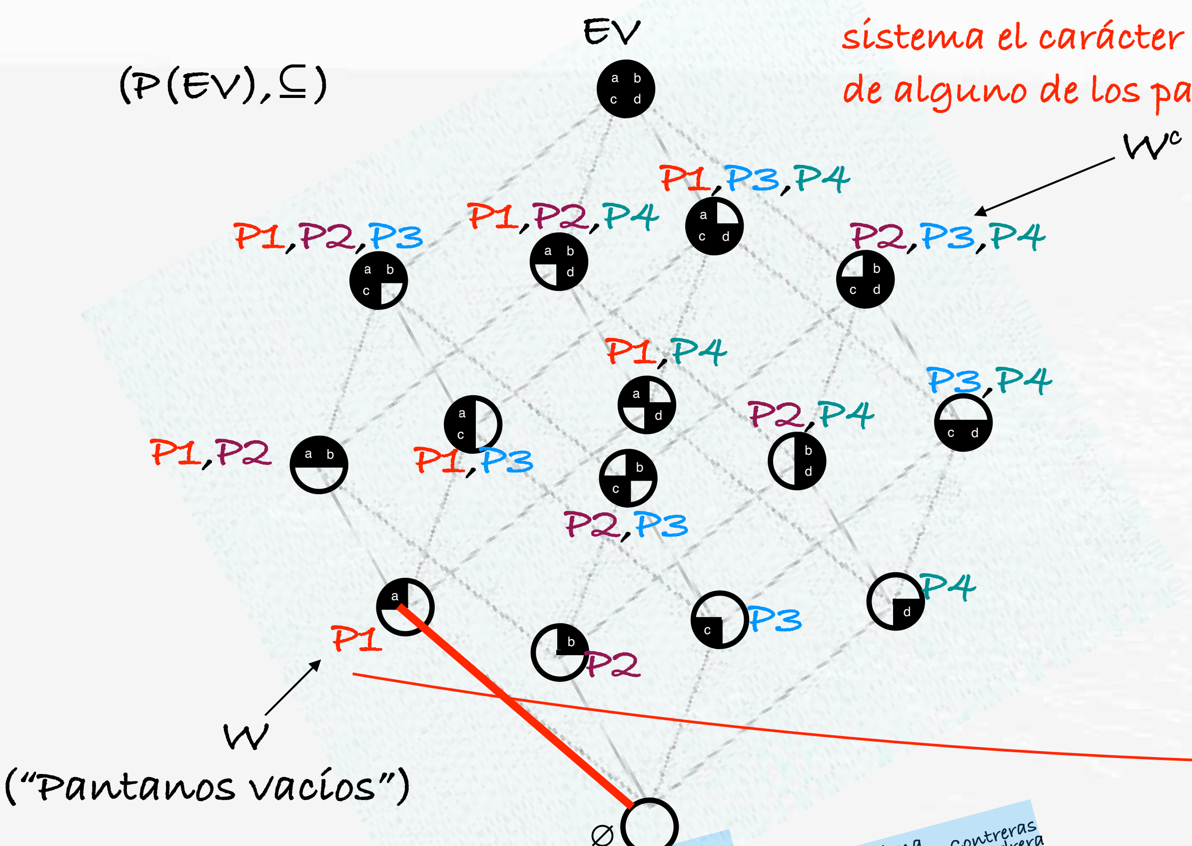
P1 = { Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera }

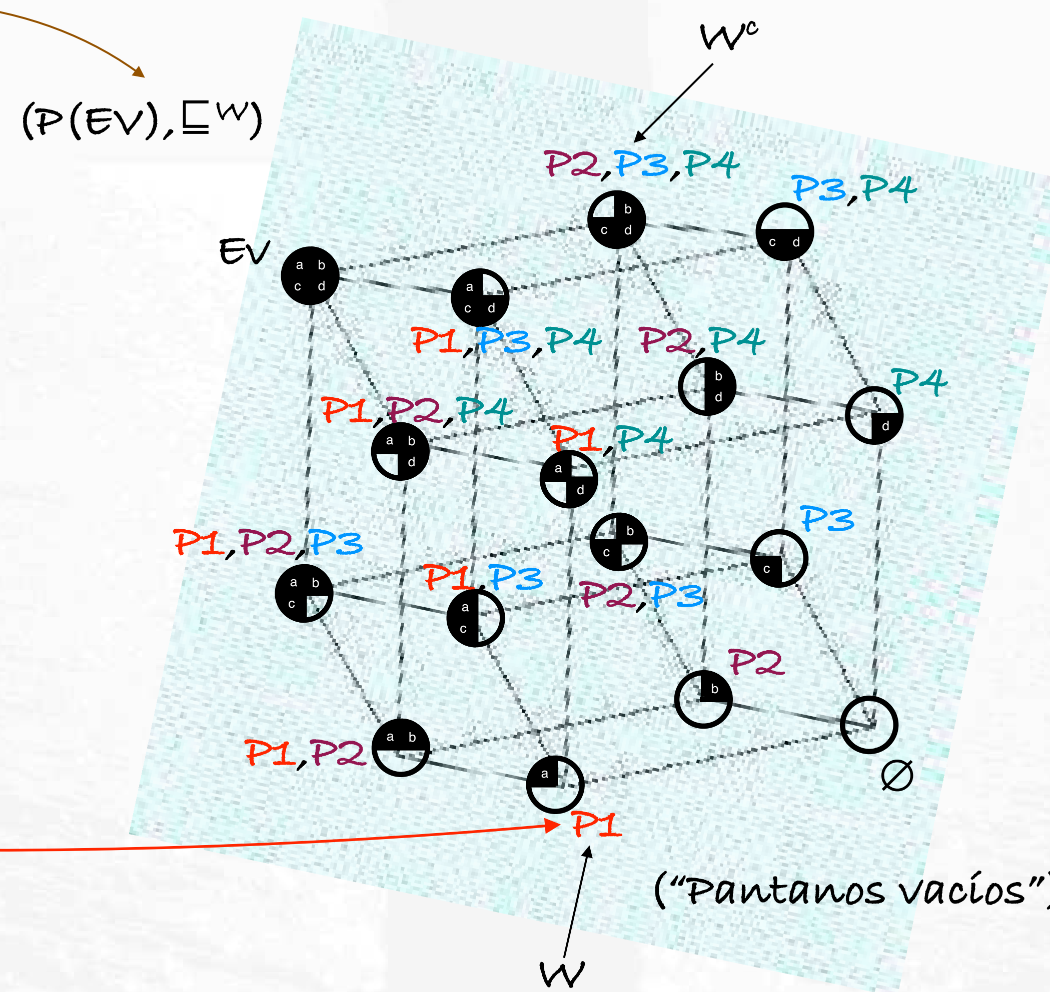


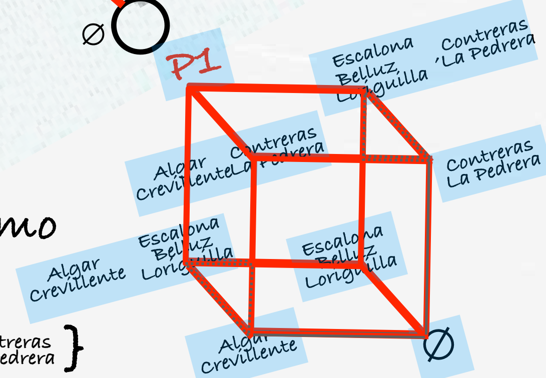
P(P1): una "vista con más detalle".

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

¡Poner en evidencia en el sistema el carácter “vacío” de alguno de los pantanos!







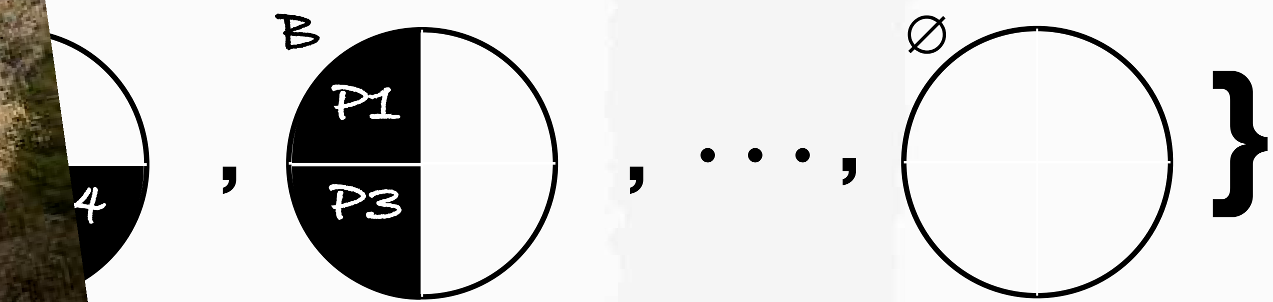
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = {Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

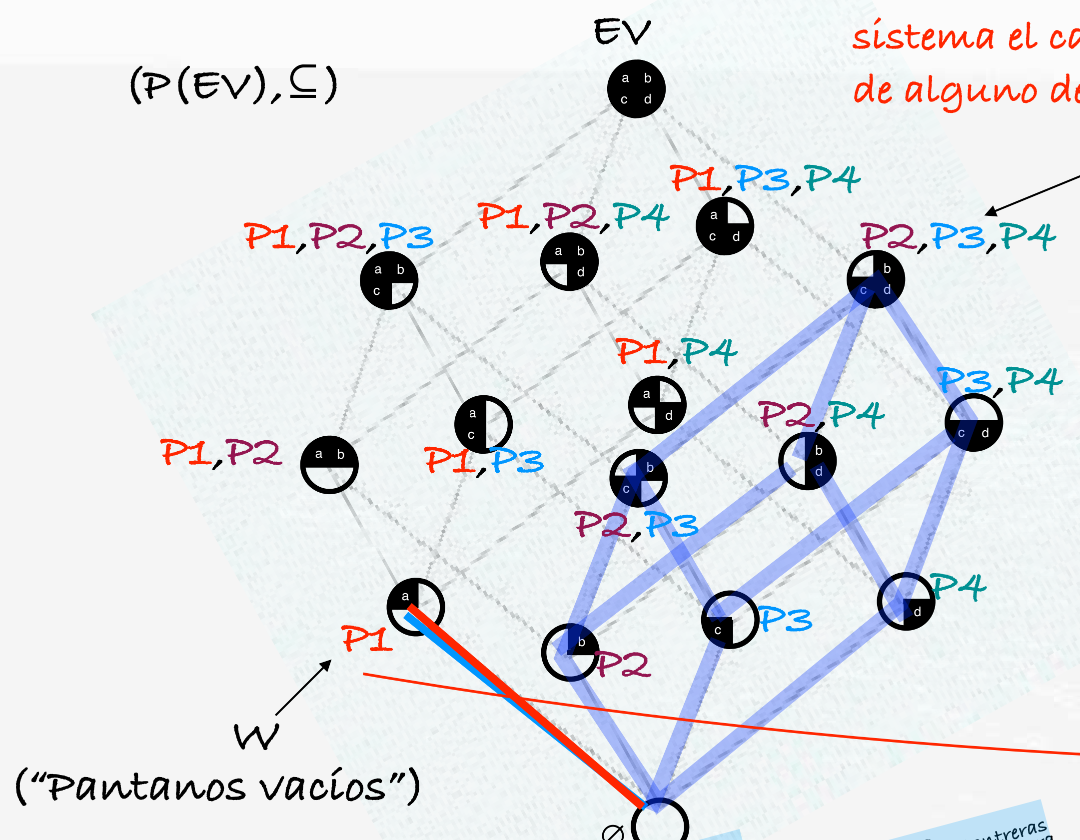
P(P1): una “vista con más detalle”.

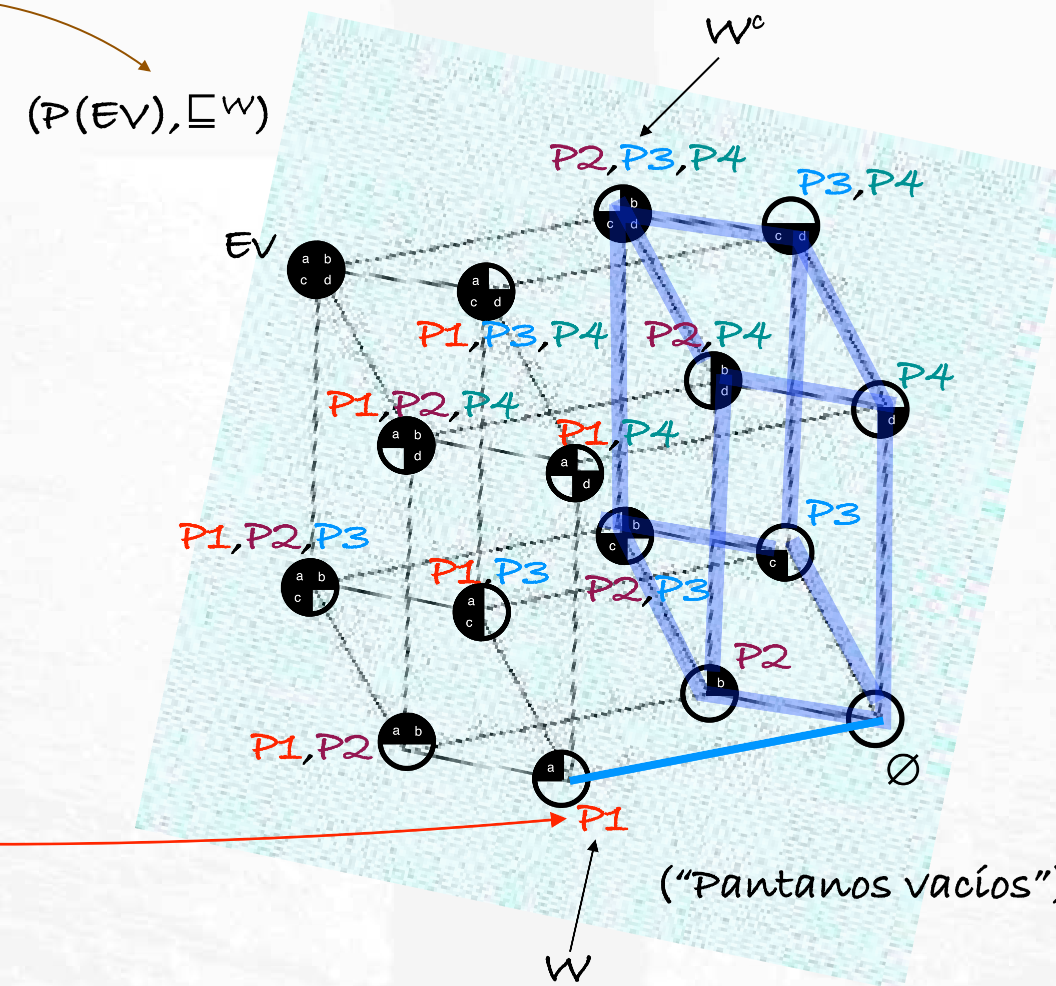
Incorporación al sistema de estados "alarmantes" de algunos pantanos en un periodo determinado...

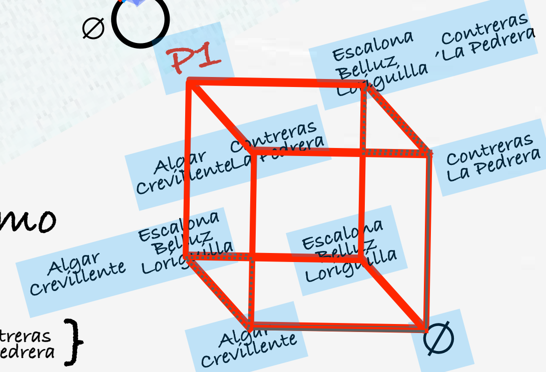
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí}={P1, P2, P3, P4}



¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!







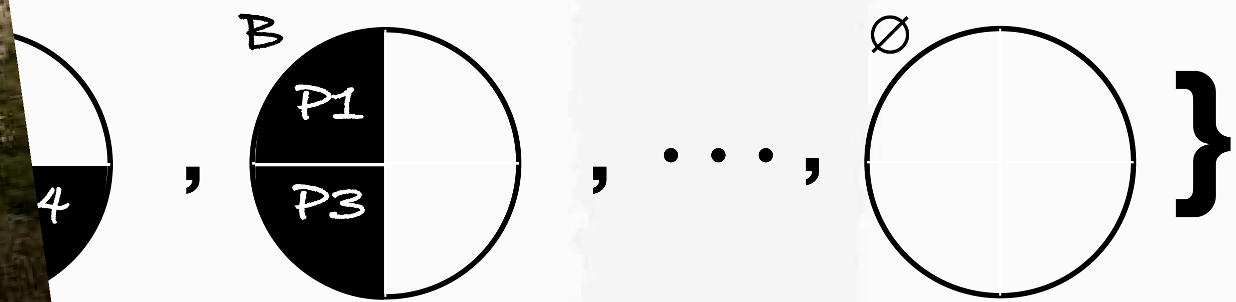
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = {Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

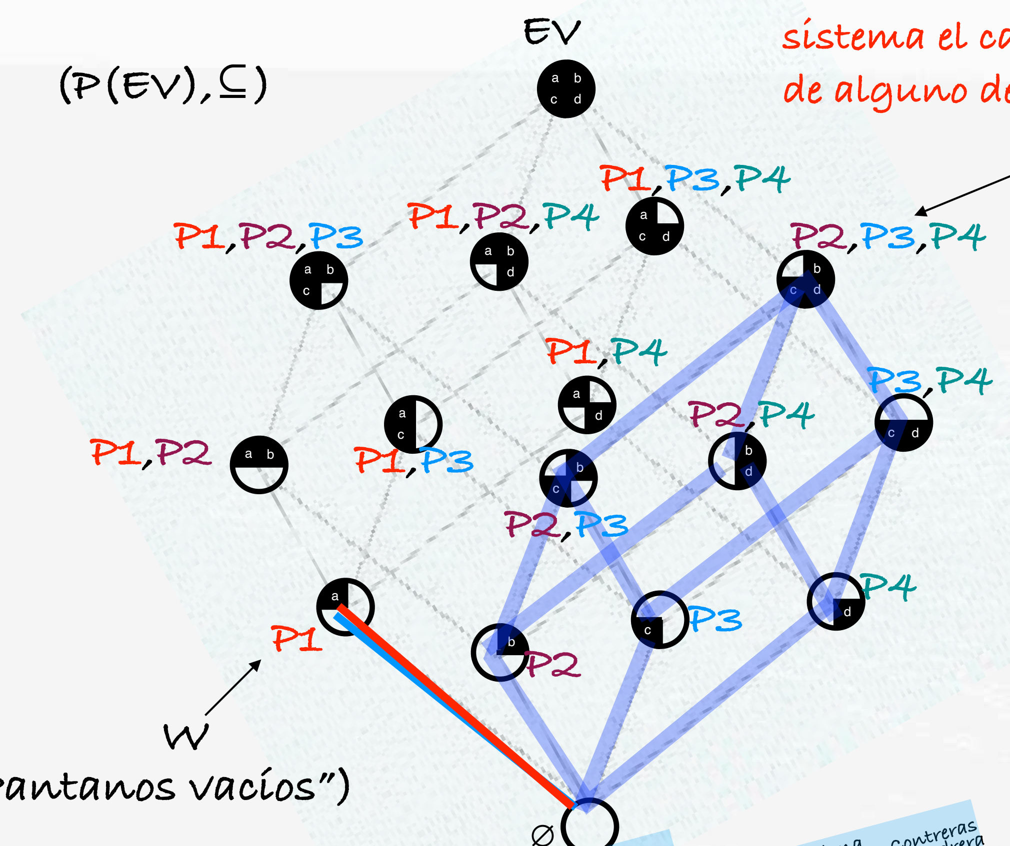
P(P1): una "vista con más detalle".

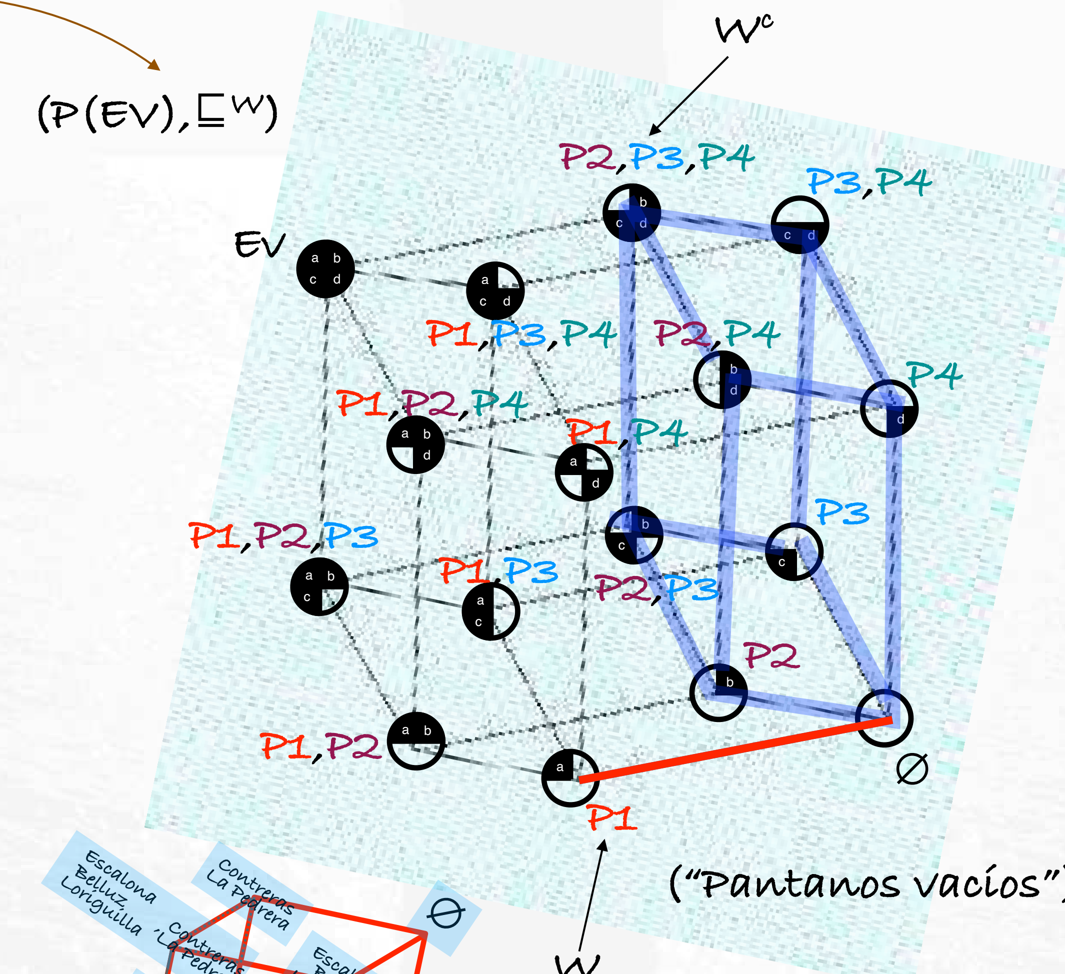
Incorporación al sistema de estados "alarmantes" de algunos pantanos en un período determinado...

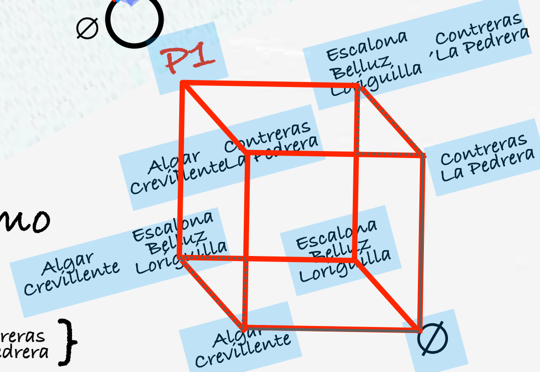
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

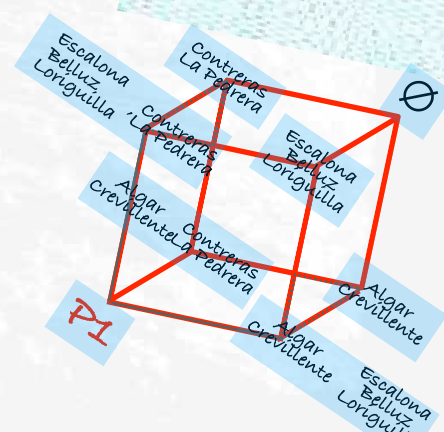


¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!









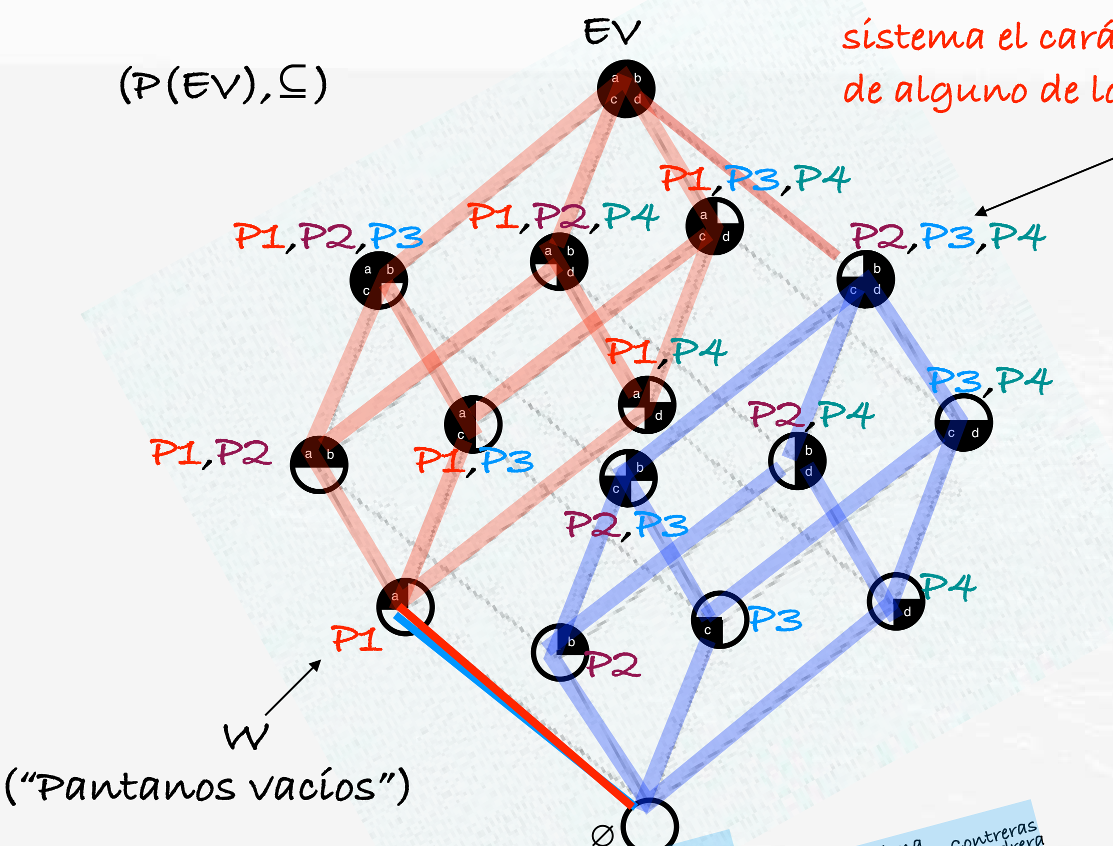
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = {Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

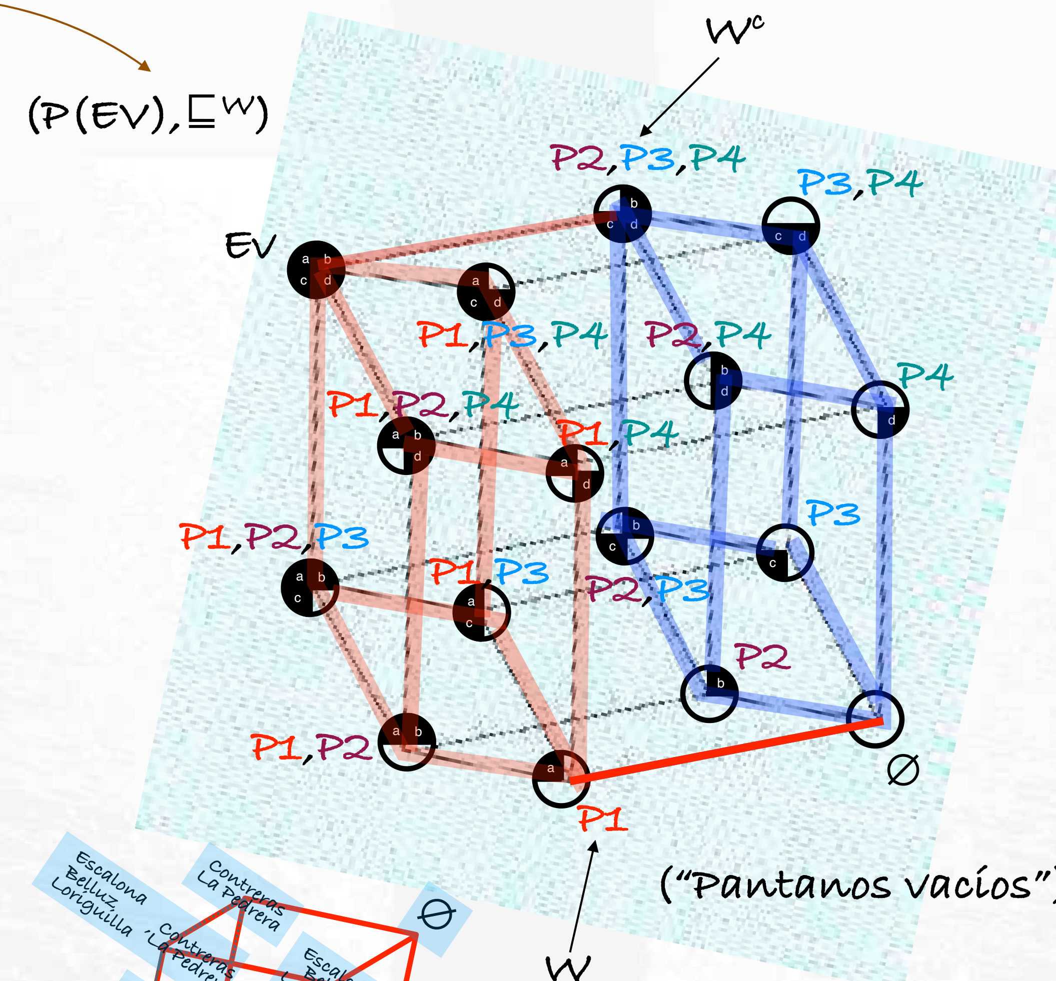
P(P1): una "vista con más detalle".

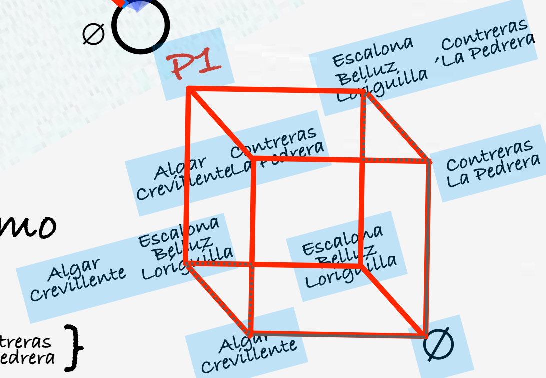
Vista con detalle del "contenido" del vacío.

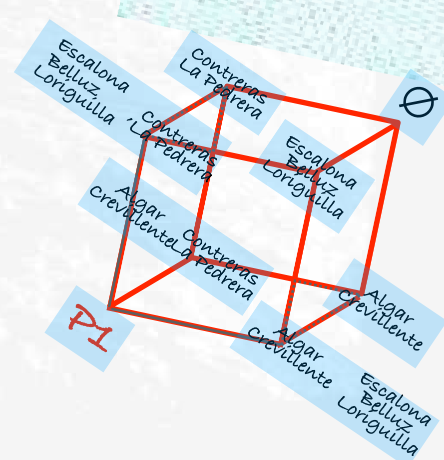
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamuIl, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}



¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!







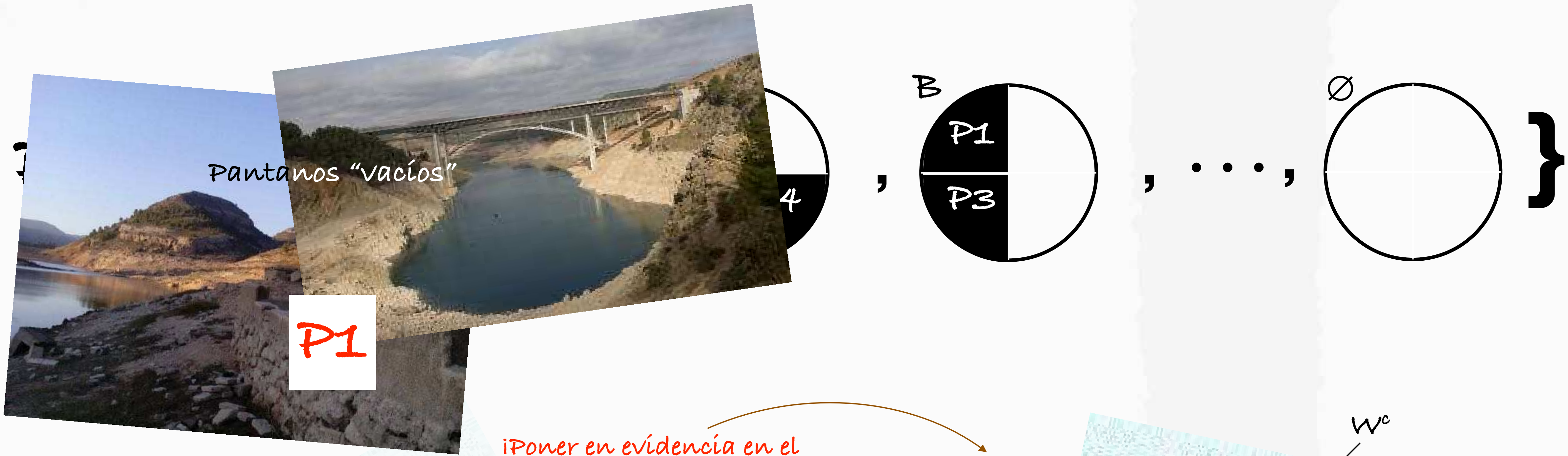
Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = {Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

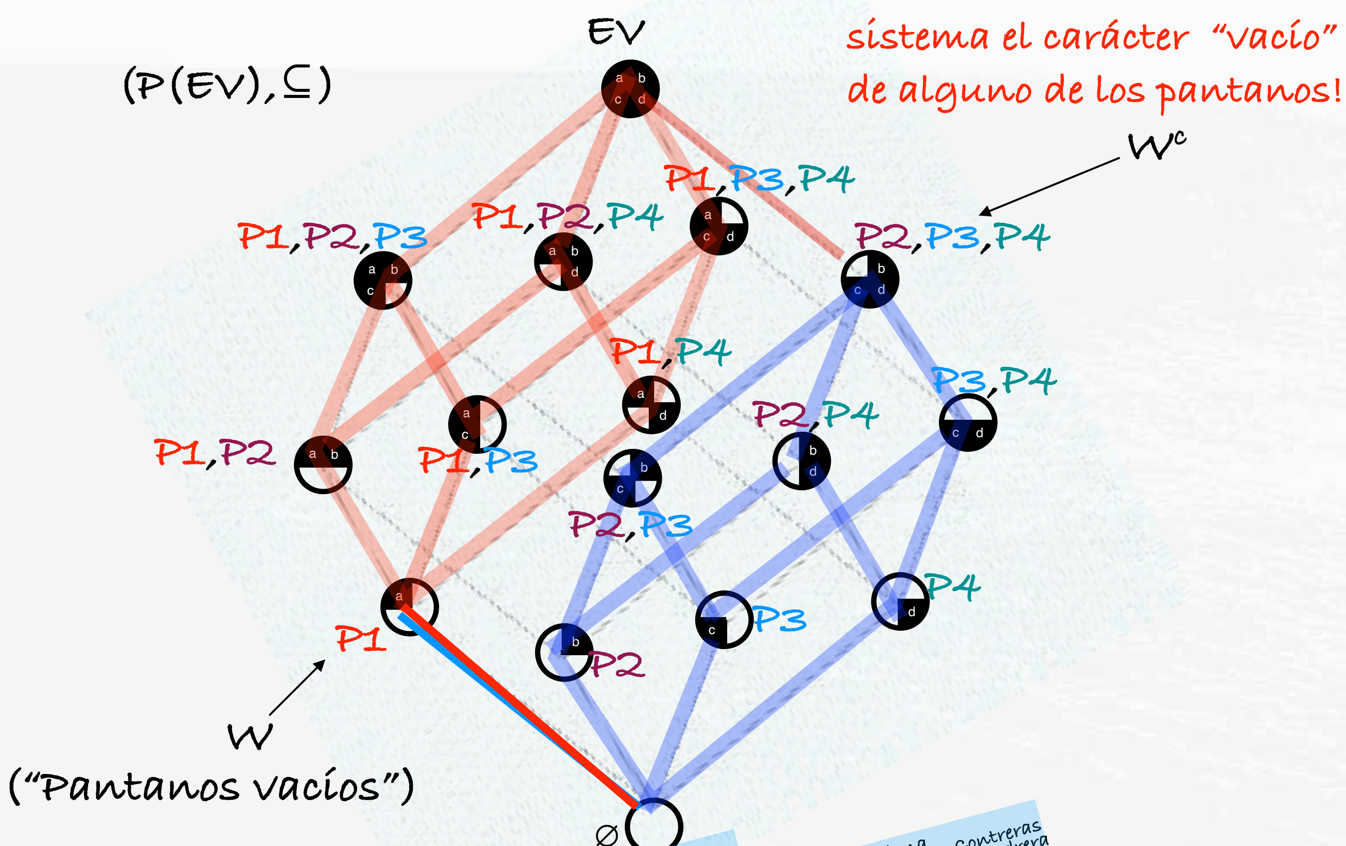
P(P1): una "vista con más detalle".

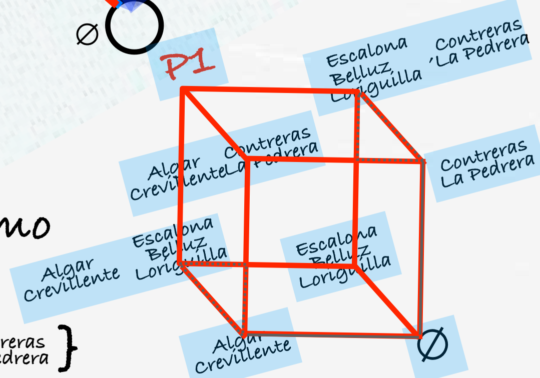
Vista con detalle del "contenido" del vacío.

$EV = \{AlBeConCrEsLapLo,\ AmBuFoMcrTo,\ ArElnGuLamUll,\ BeBenCoElrSi\} = \{P1, P2, P3, P4\}$



¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!

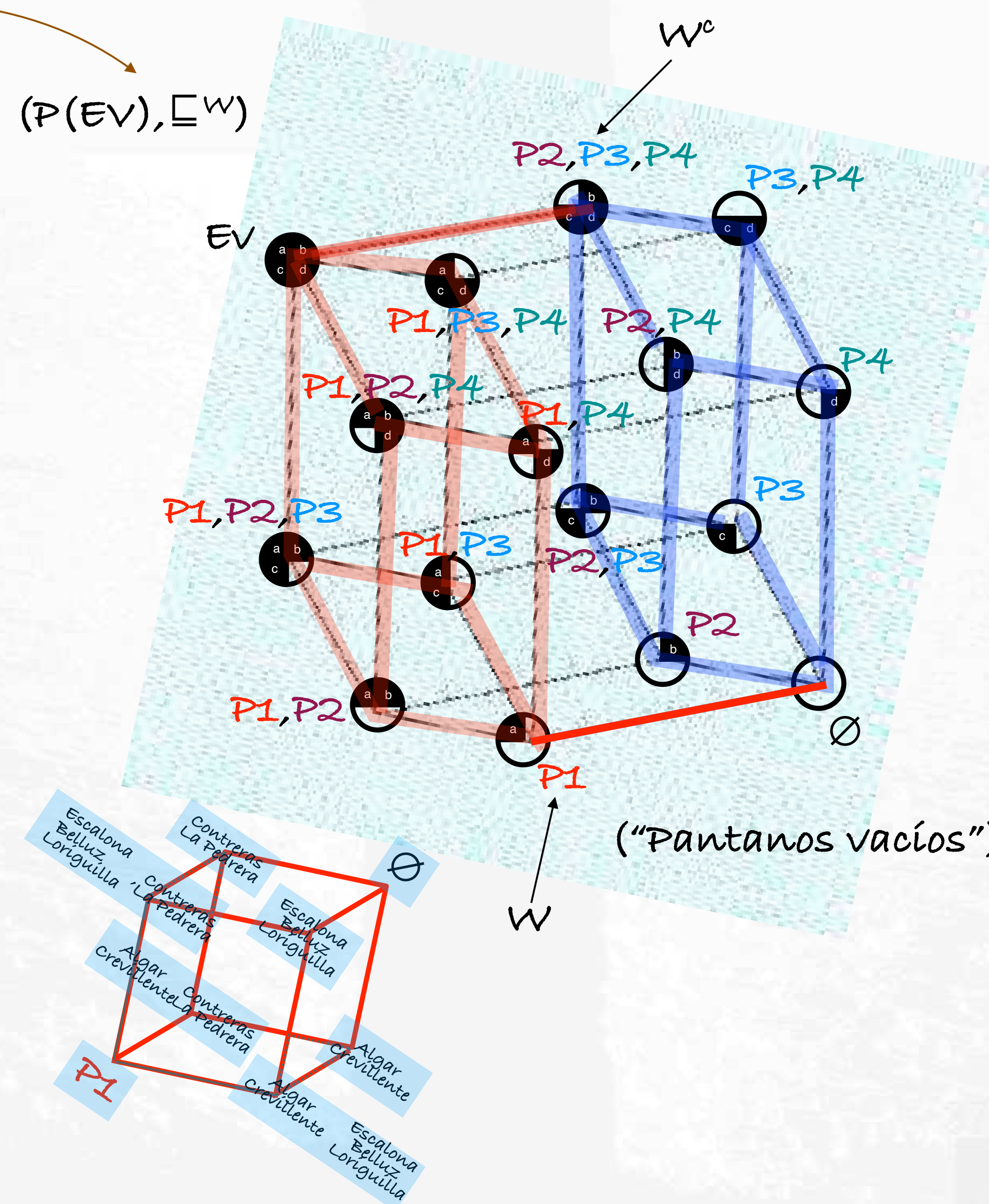




Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = { Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera }

P(P1): una "vista con más detalle".



Vista con detalle del "contenido" del vacío.

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={ P1, P2, P3, P4 }

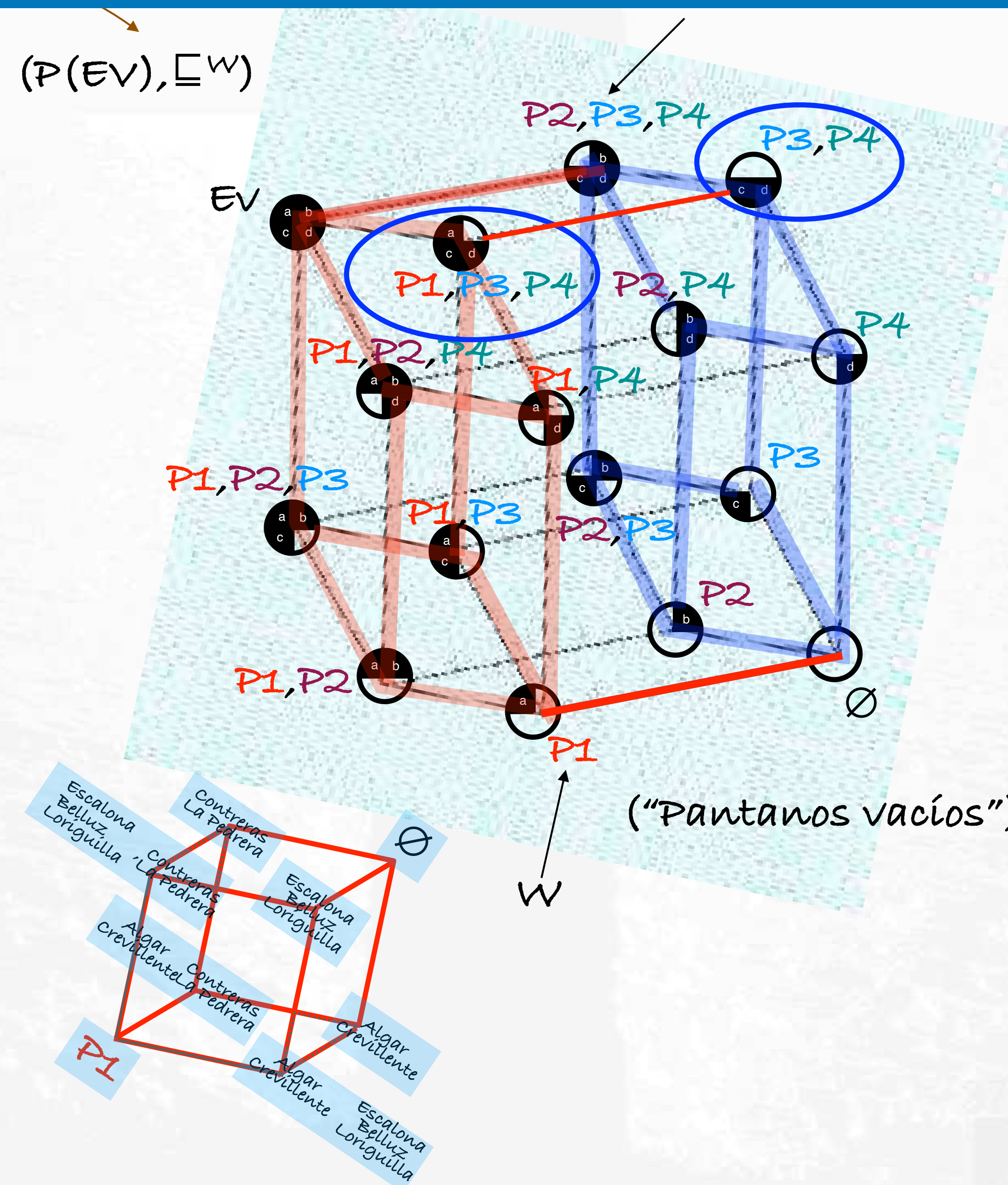
Por ejemplo:

$$(P1, P3, P4) \sqsubseteq^{W} (P3, P4)$$

Esta relación puede ser una formalización del siguiente enunciado:

Si lo que prima es el estado de las reservas de agua, entonces, (dado el carácter de “vacío” que tienen los pantanos incluidos en P1); “si la cuestión es la de extraer agua del grupo de pantanos de EV, para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)”.

¡Poner en evidencia en el sistema el carácter “vacío” de alguno de los pantanos!



Vista con detalle del “contenido” del vacío.

Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = { Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera }

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí}={ P1, P2, P3, P4 }

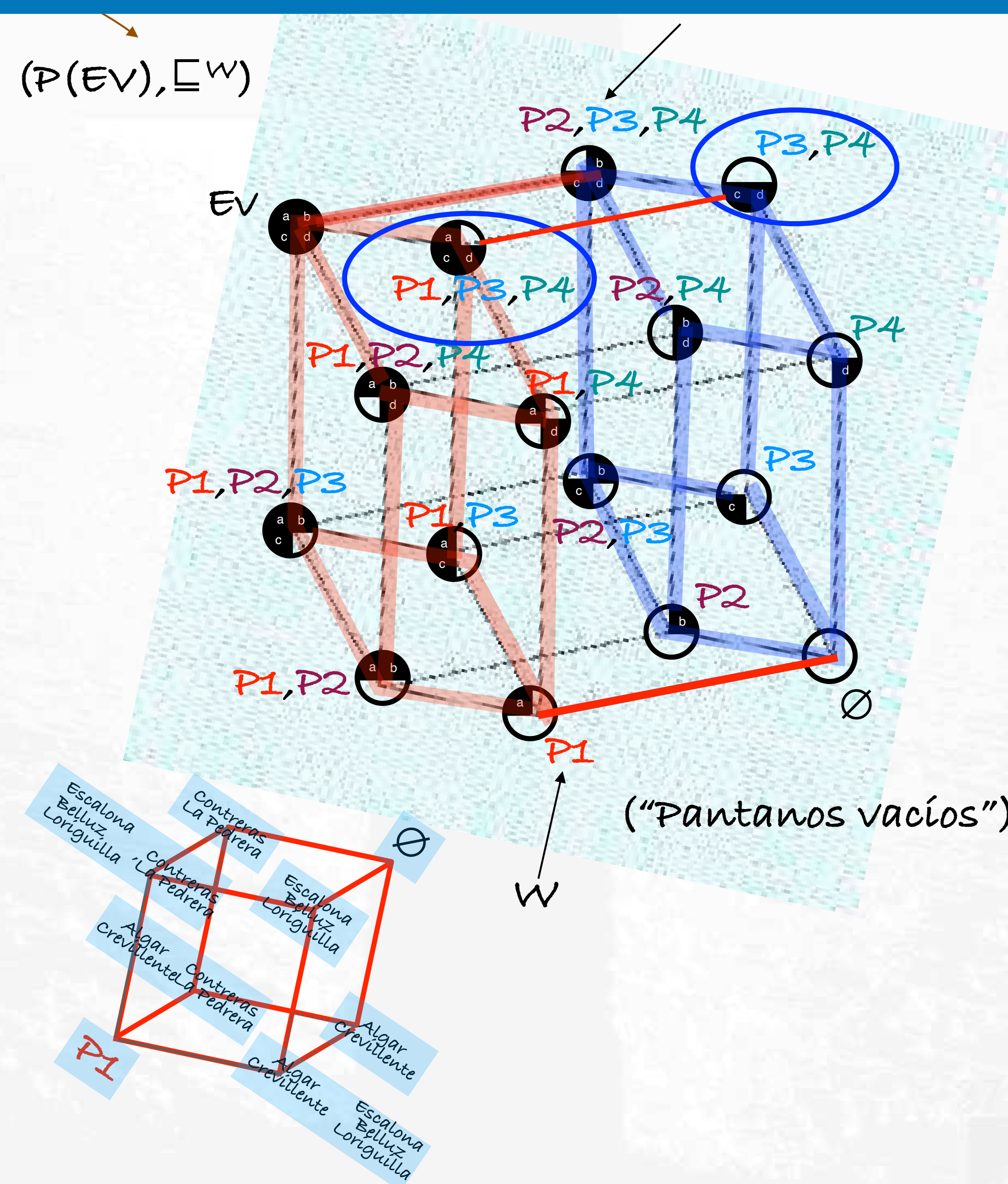
Por ejemplo:

$$(P1,\ P3,\ P4) \sqsubseteq^{W} (\ P3,\ P4\ )$$

Esta relación puede ser una formalización del siguiente enunciado:

Si lo que prima es el estado de las reservas de agua, entonces, (dado el carácter de “vacío” que tienen los pantanos incluidos en P1); “si la cuestión es la de extraer agua del grupo de pantanos de EV, para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)”.

¡Poner en evidencia en el sistema el carácter “vacío” de alguno de los pantanos!



Vista con detalle del “contenido” del vacío.

Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1 = { Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera }

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí}={P1, P2, P3, P4}

Por ejemplo:

(... $\sqsubseteq^W$(P3, P4)

Es ... ión del siguiente enunciado:

Si ... as de agua, entonces, (dado el carácter de “vací ... s incluidos en P1); “si la cuestión es la de extraer agua del grup ... para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)”.

Coherencia con las propiedades de las medidas borrosas g, las probabilidades Pr, etc:

<u>Sistema de gestión de los recursos de EV.</u>

(Incorporación de “contenido de vacío”)

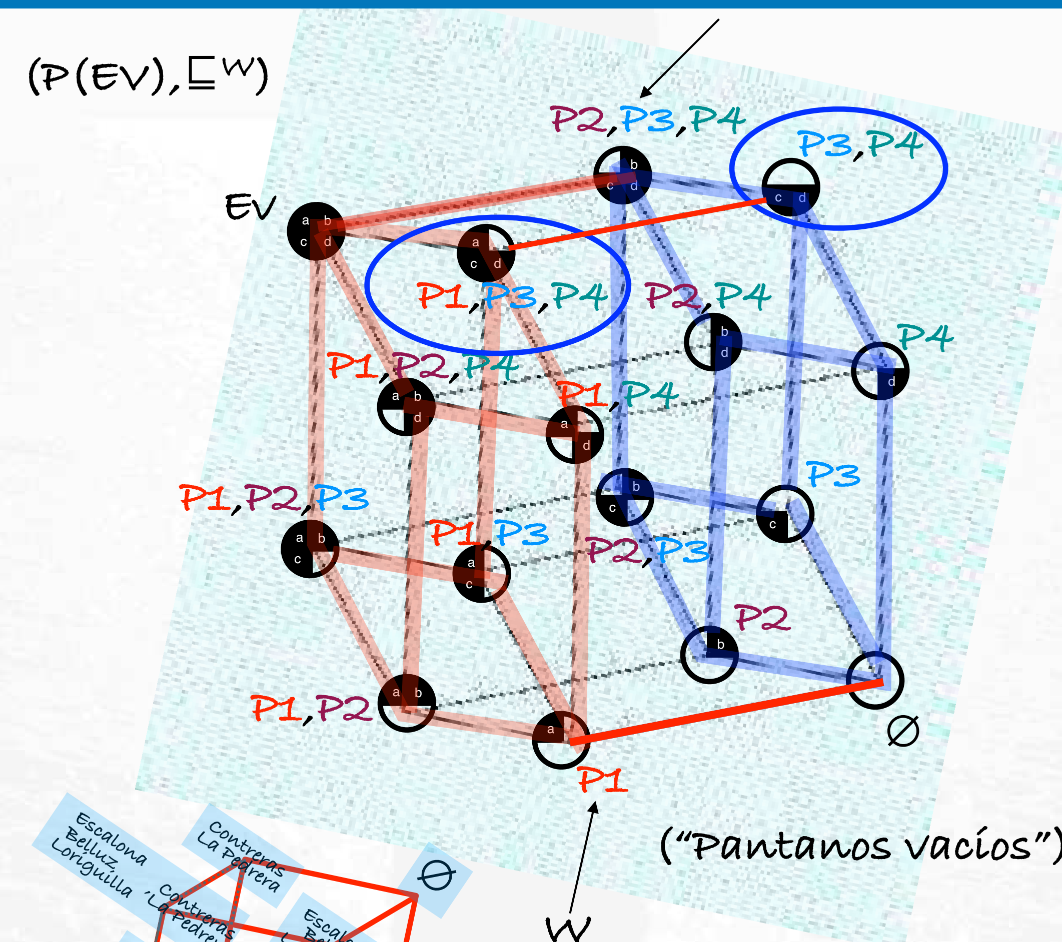
Extensión de medidas borrosas: $\hat{g}_W(A)=g(A\Delta W)$.

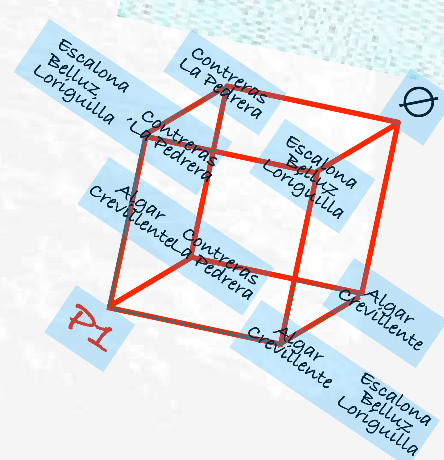
$\hat{g}_W$: $(P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow(\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $\hat{g}_W$: $(P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que, dependiendo de las propiedades de g, verificarán:

$\hat{g}_W(W)=0$, $\hat{g}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{g}_W(A)\leq\hat{g}_W(B))$,

$\hat{g}_W(A\sqcup^W B)=\max(\hat{g}_W(A),\hat{g}_W(B))$, etc,...





Vista con detalle del “contenido” del vacío.

Si consideramos a P1 como unión de tres átomos:

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

Por ejemplo:

$\sqsubseteq^W($ P3, P4 $)$

Es ... ión del siguiente enunciado:

Si ... as de agua, entonces, (dado el carácter de “vací... incluidos en P1); “si la cuestión es la de extraer agua del grup... para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)”.

Coherencia con las propiedades de las medidas borrosas g, las probabilidades Pr, etc:

<u>Sistema de gestión de los recursos de EV.</u>

(Incorporación de “contenido de vacío”)

Extensión de medidas borrosas: $\hat{g}_W(A)=g(A\Delta W)$.

$\hat{g}_W$: $(P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow(\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $\hat{g}_W$: $(P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que, dependiendo de las propiedades de g, verificarán:

$\hat{g}_W(W)=0$, $\hat{g}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{g}_W(A)\leq\hat{g}_W(B))$,

$\hat{g}_W(A\sqcup^W B)=\max(\hat{g}_W(A),\hat{g}_W(B))$, etc,...

O medidas nítidas $\hat{Pr}_W$ como extensiones de probabilidades usuales Pr:

$\hat{Pr}_W$: $(P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$, (tal que $\hat{Pr}_W(A)=Pr(A\Delta W)$)

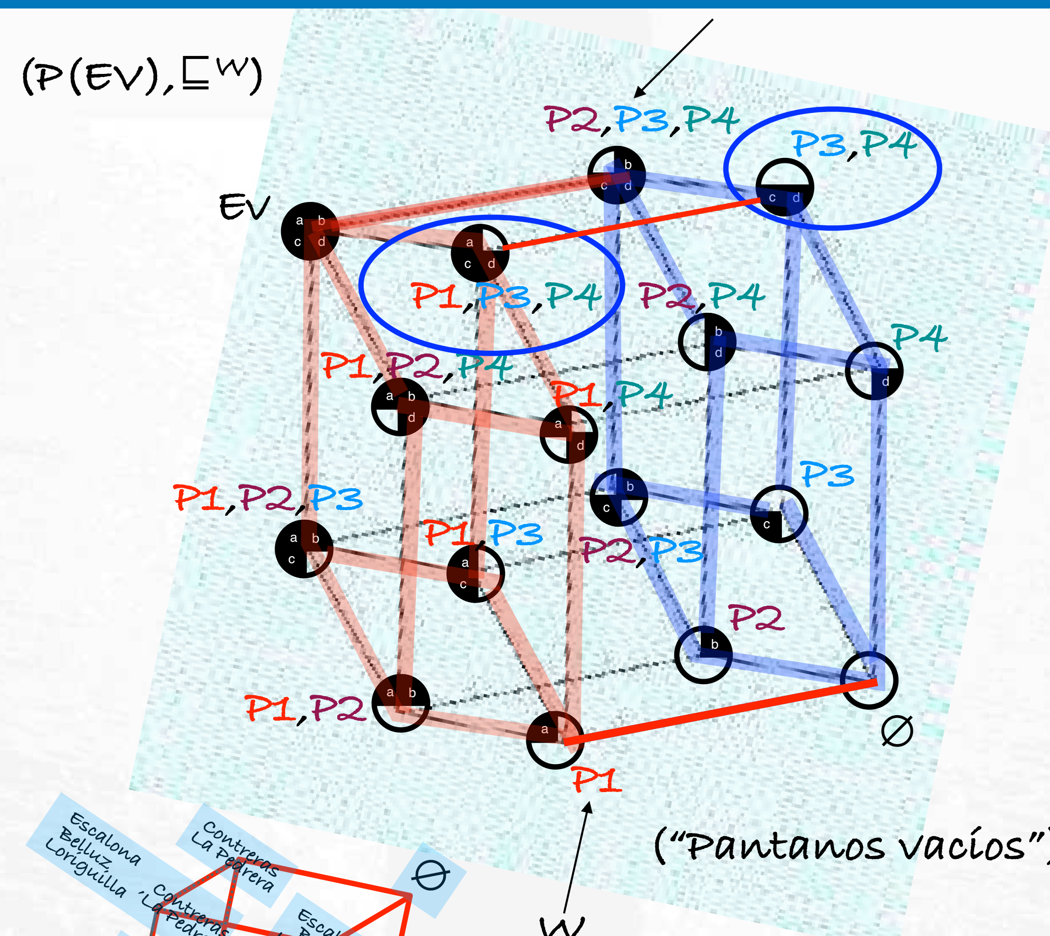
que verificarán:

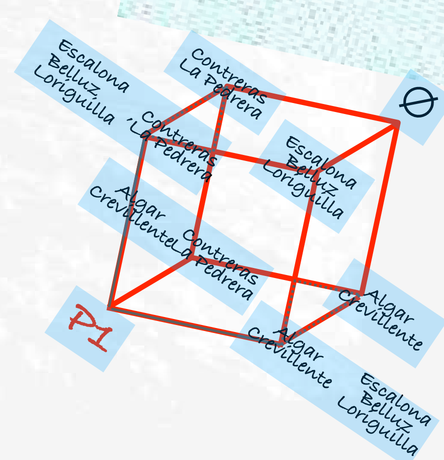
$\hat{Pr}_W(W)=0$, $\hat{Pr}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{Pr}_W(A)\leq\hat{Pr}_W(B))$,

$\hat{Pr}_W(A\sqcup^W B)=\hat{Pr}_W(A)+\hat{Pr}_W(B)-\hat{Pr}_W(A\sqcap^W B)$.

O extensiones de las probabilidades condicionadas:

$\hat{Pr}_W{}^*(A/B)=\hat{Pr}_W(A\sqcap^W B)/\hat{Pr}_W(A)$, etc...





Vista con detalle del “contenido” del vacío.

$EV=\{AlBeConCrEsLapLo,\ AmBuFoMcrTo,\ ArElnGuLamUll,\ BeBenCoElrSi\}=\{P1,\ P2,\ P3,\ P4\}$

Por ejemplo:

$(\ldots \sqsubseteq^W(P3, P4)$

Es ... ión del siguiente enunciado:

Si ... as de agua, entonces, (dado el carácter de “vací ... incluidos en P1); “si la cuestión es la de extraer agua del grup ... para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)”.

Coherencia con las propiedades de las medidas borrosas g, las probabilidades Pr, etc:

<u>Sistema de gestión de los recursos de EV.</u>

(Incorporación de “contenido de vacío”)

Extensión de medidas borrosas: $\hat{g}_W(A)=g(A\Delta W)$.

$\hat{g}_W: (P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow(\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $\hat{g}_W: (P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que, dependiendo de las propiedades de g, verificarán:

$\hat{g}_W(W)=0$, $\hat{g}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{g}_W(A)\leq\hat{g}_W(B))$,

$\hat{g}_W(A\sqcup^W B)=\max(\hat{g}_W(A),\hat{g}_W(B))$, etc,...

O medidas nítidas $\hat{Pr}_W$ como extensiones de probabilidades usuales Pr:

$\hat{Pr}_W: (P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$, (tal que $\hat{Pr}_W(A)=Pr(A\Delta W)$)

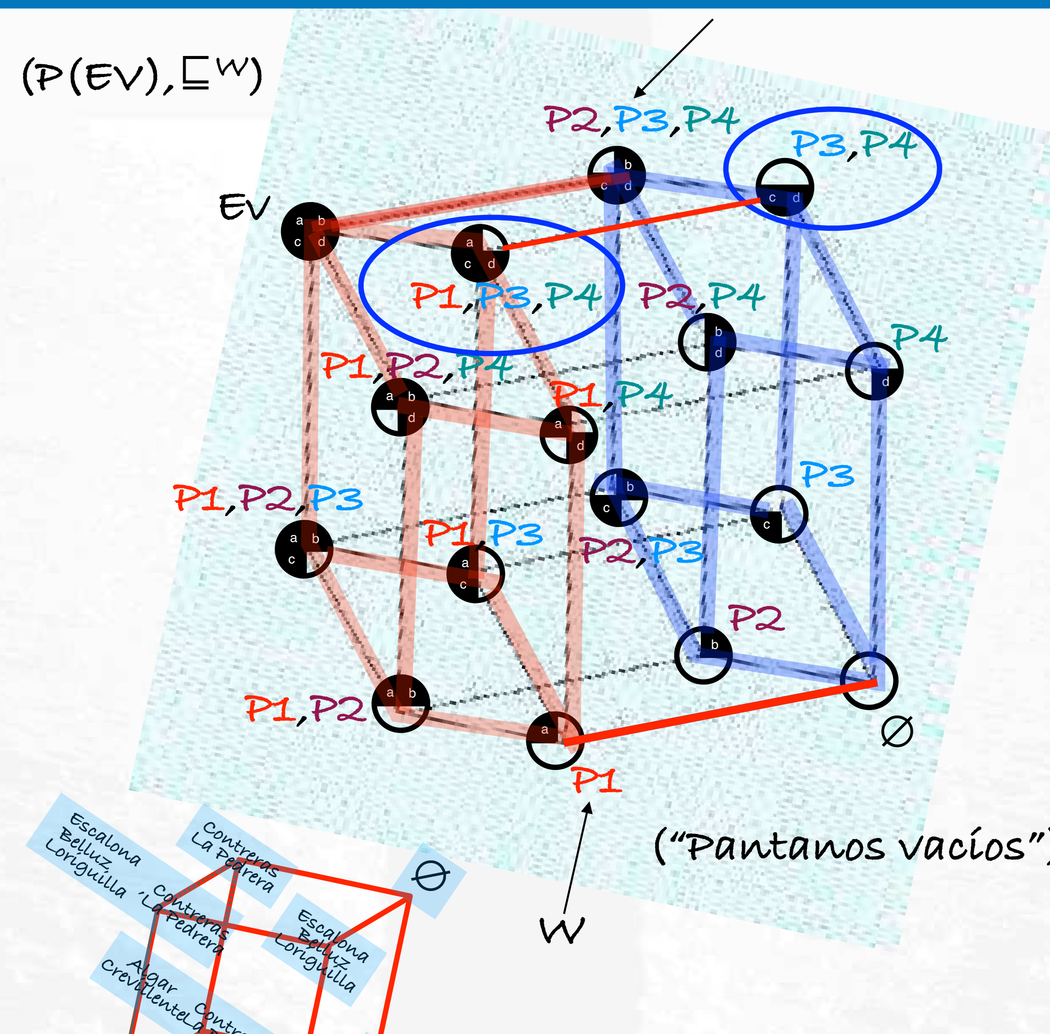
que verificarán:

$\hat{Pr}_W(W)=0$, $\hat{Pr}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{Pr}_W(A)\leq\hat{Pr}_W(B))$,

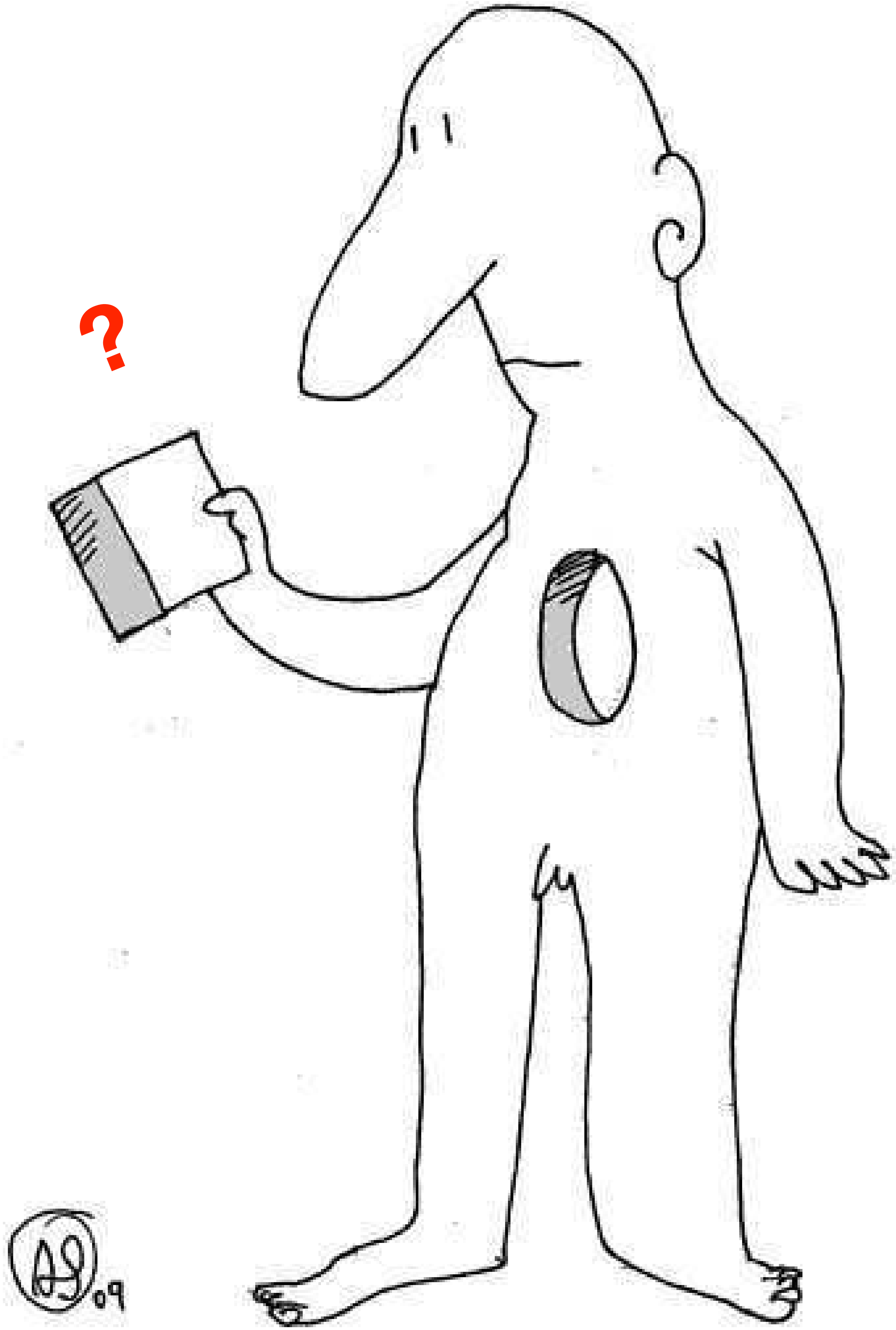
$\hat{Pr}_W(A\sqcup^W B)=\hat{Pr}_W(A)+\hat{Pr}_W(B)-\hat{Pr}_W(A\sqcap^W B)$.

O extensiones de las probabilidades condicionadas:

$\hat{Pr}_W{}^*(A/B)=\hat{Pr}_W(A\sqcap^W B)/\hat{Pr}_W(A)$, etc...



(<u>Nota</u>. Las “w-extensiones” $\hat{g}_W$ asociadas a “perspectivas w” de funciones g definidas como se ha señalado en 130. Más adelante, veremos extensiones $\hat{Pr}_W$ de probabilidades y de probabilidades condicionadas Pr).




W
!
(Modificado)


Parece conforme.

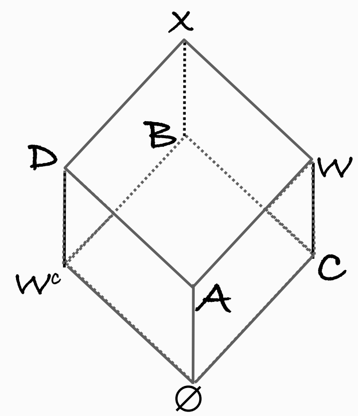

Parece conforme.
Aunque no hayamos hablado del vacío cuántico...

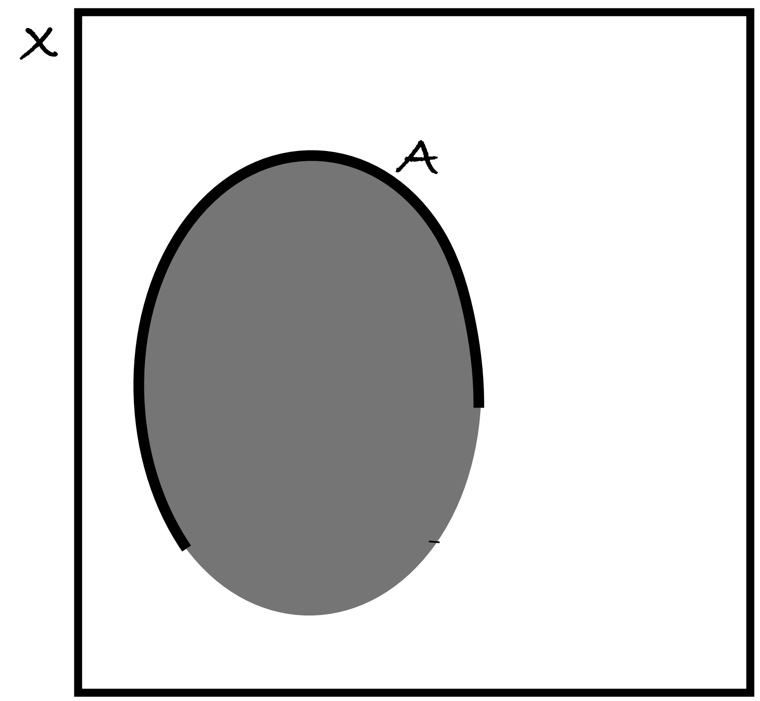
Órdenes de actividad en retículos de subconjuntos borrosos de un referencial X: $\sqsubseteq^{w}$-inclusión, $\sqsubseteq^{w}$-intersección y $\sqsubseteq^{w}$-unión entre subconjuntos L-borrosos A,B,… de un referencial X. Aplicación de w-pertenencia $\in^{w}: L^{X} \rightarrow L^{X}$.

SIN TÍTULO
(Mark Rothko, 1969)

SIN TÍTULO
(Mark Rothko, 1969)

Interpretación:
¿Un subconjunto borroso A?

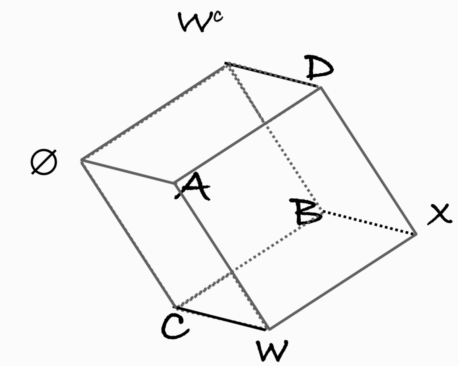




Familia de álgebras:
$((P(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W \subseteq B\triangle W$

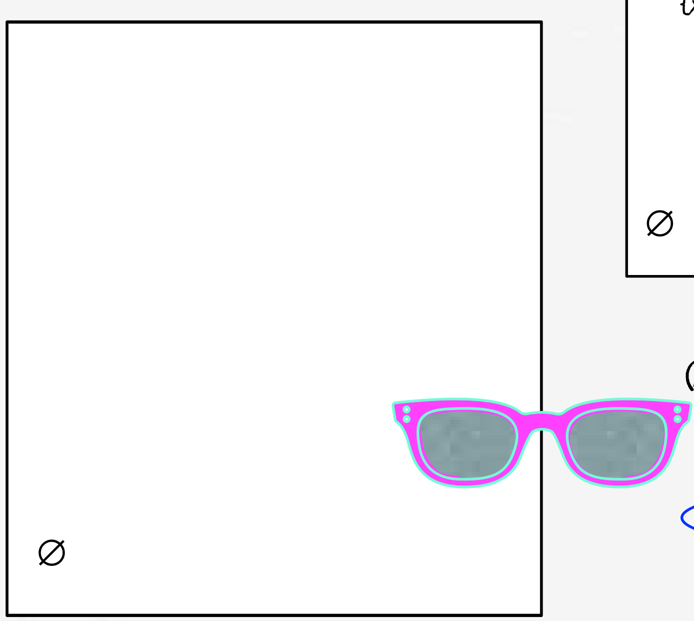
$\Leftrightarrow B\cap W \subseteq A \subseteq B\cup W$



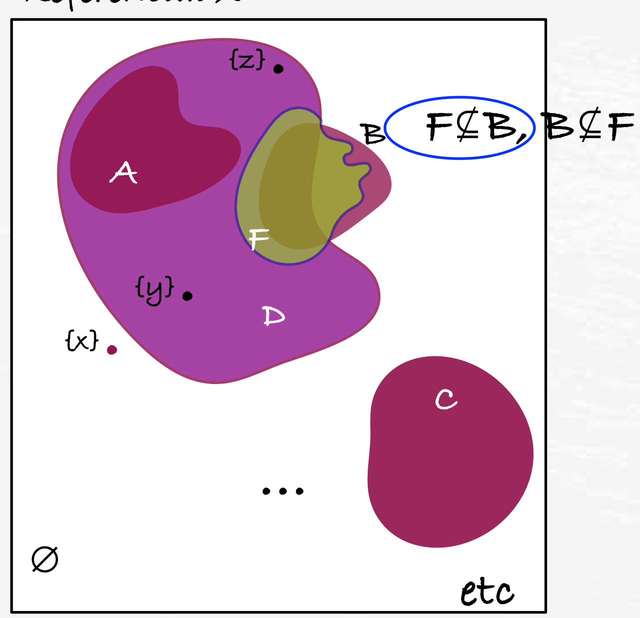
$((P(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W,W^c),^c)$

Subconjuntos ordinarios de X:
$((P(X),\sqsubseteq^\varnothing,\sqcap^\varnothing,\sqcup^\varnothing,\varnothing, X), ^c)$

Interpretación del orden $\subseteq$ como una "perspectiva" del conjunto $P(X)$ proporcionada por el subconjunto $\varnothing$:



Referencial X



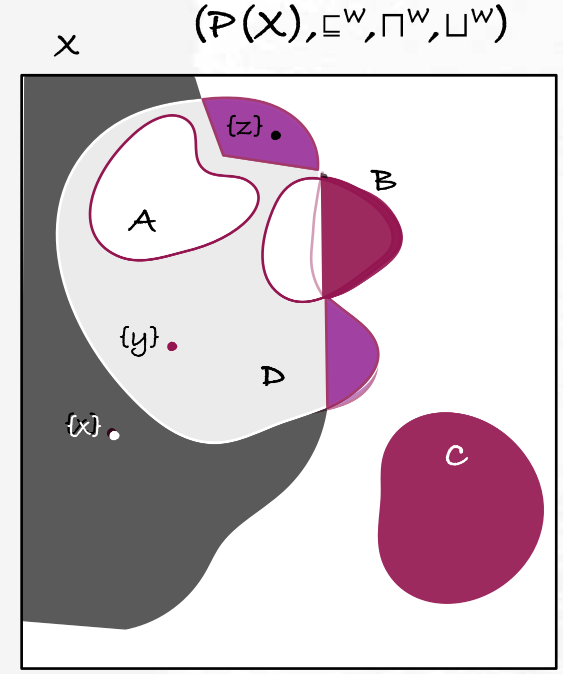
$(P(X),\subseteq,\cap,\cup)$

$(A\subseteq D,\ C\subseteq A^c,\ B\cap D,\ B\cup D,\ldots)$

$x\notin D,\ y\in D,\ z\in D$

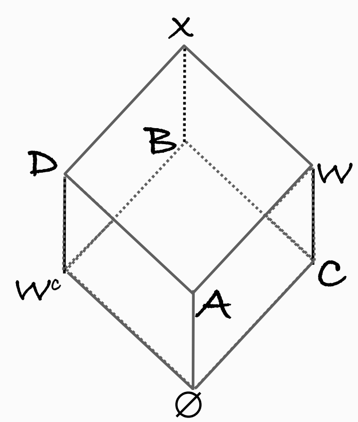
<u>Una nueva interpretación</u> asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $P(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

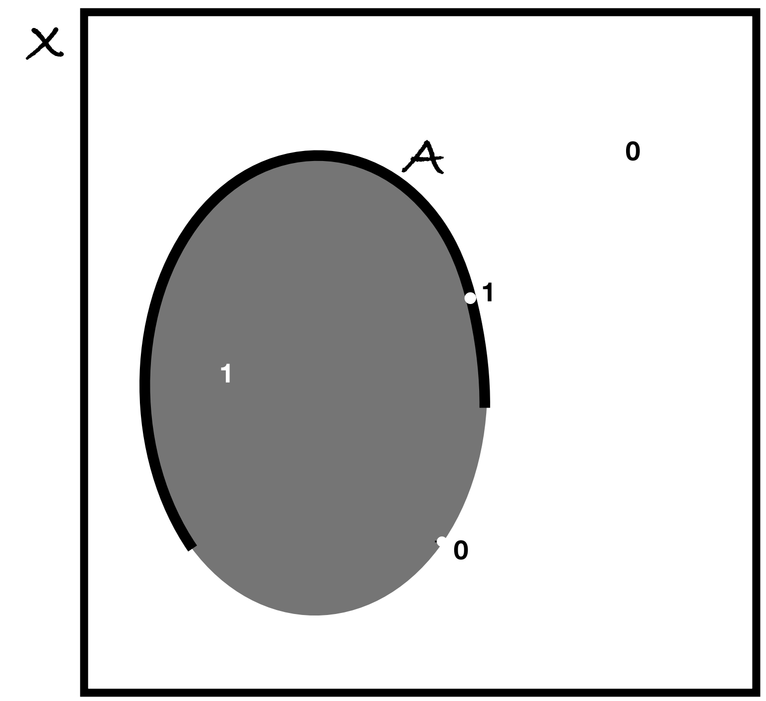
$(P(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



"<u>W-pertenencia</u>": $x\in^W A \Leftrightarrow x\in A\triangle W$

$x\in^W D1,\ y\notin^W D1,\ z\in^W D1$

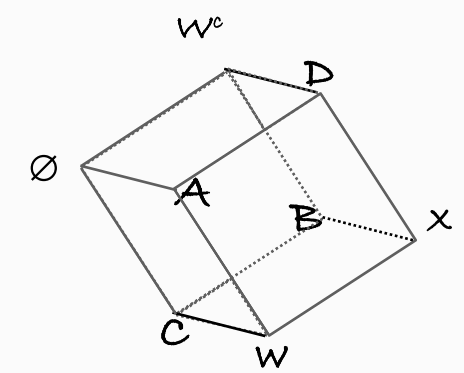




Función característica

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \triangle W \subseteq B \triangle W$

$\Leftrightarrow B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W$

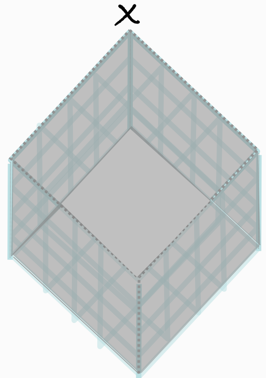


<u>Una nueva interpretación</u>
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto $P(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

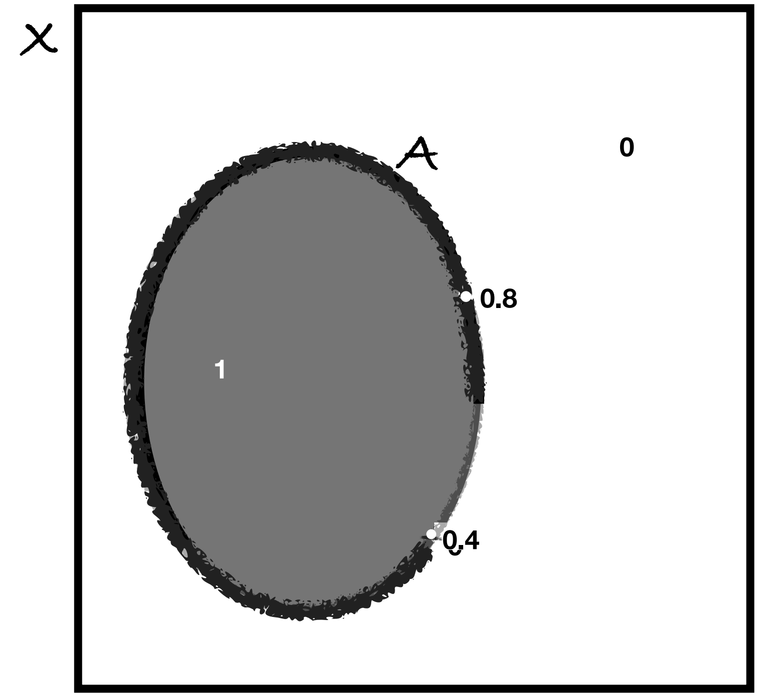
"<u>w-pertenencia</u>":

o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

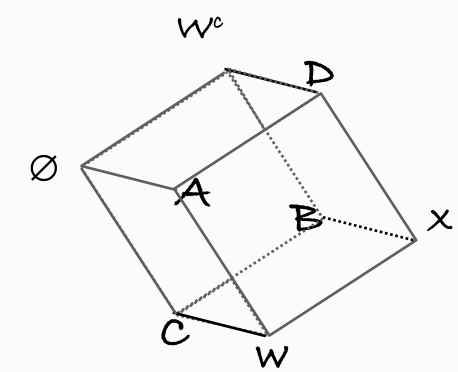
$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte



Función característica generalizada



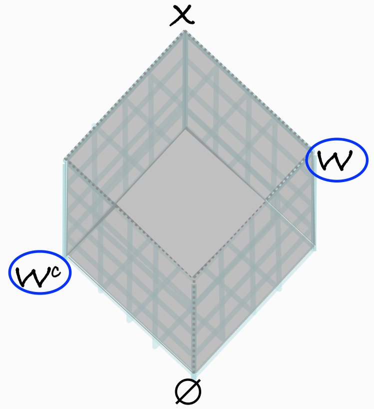
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^{W}$ que representa, en el conjunto $P(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

"w-pertenencia":

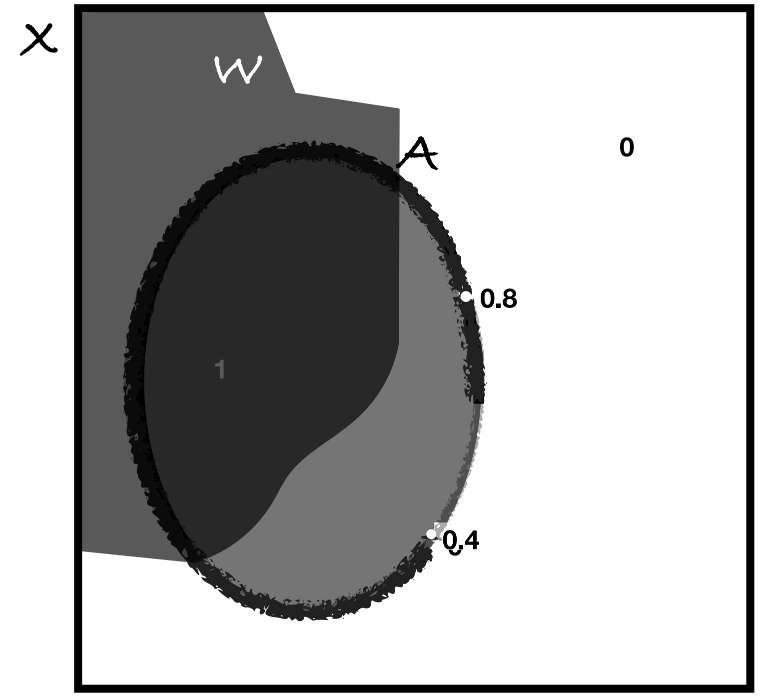
o si L= [0,1] con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:

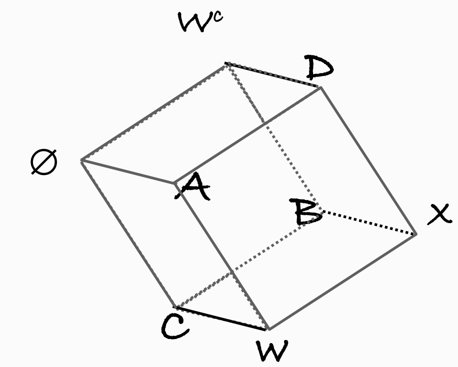


que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X), \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ con una negación fuerte

Sea $W \in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)



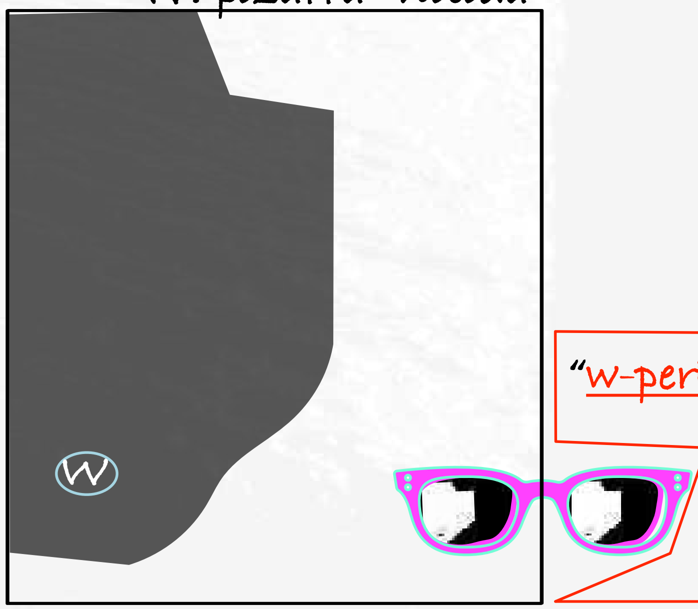
Función característica generalizada



<u>Una nueva interpretación</u>

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto P(X), la"perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

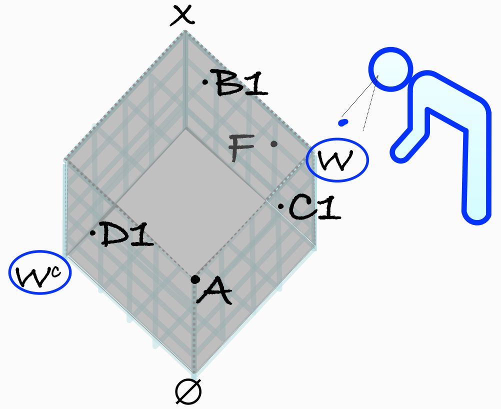
W: pizarra "nítida"



"<u>w-pertenencia</u>":

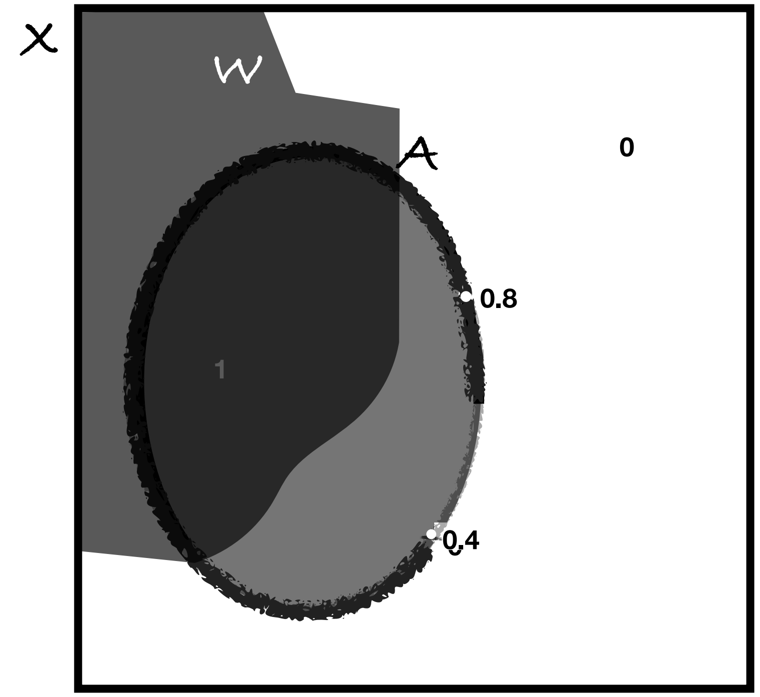
o si L= [0,1] con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)



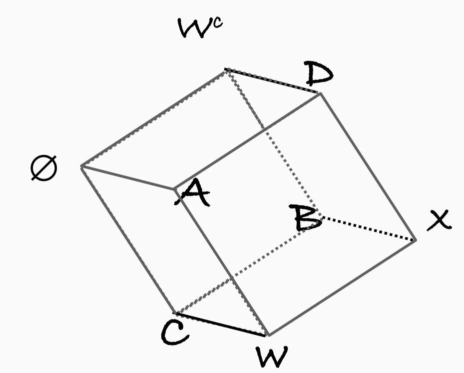
Función característica generalizada

$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

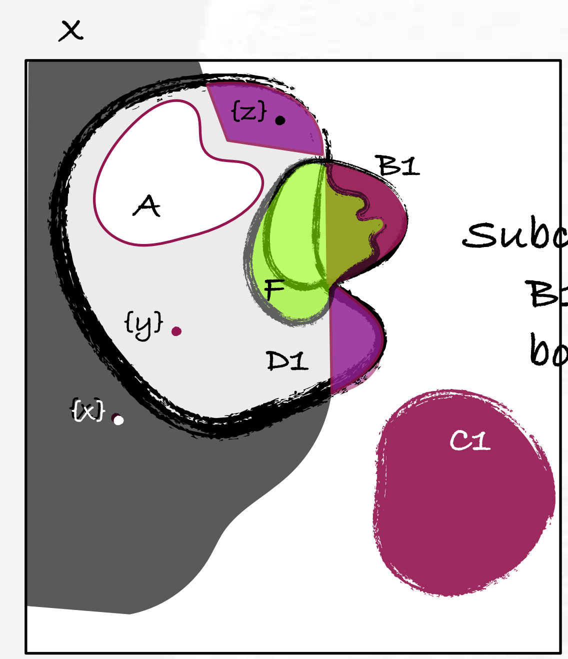
Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".



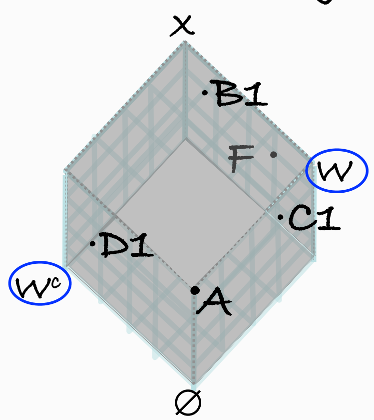
Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

W: pizarra "nítida"

"W-pertenencia":

o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

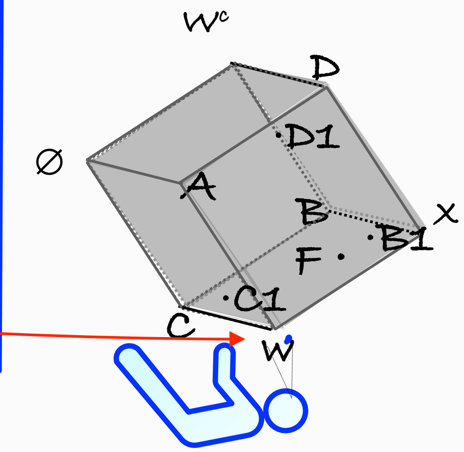
Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

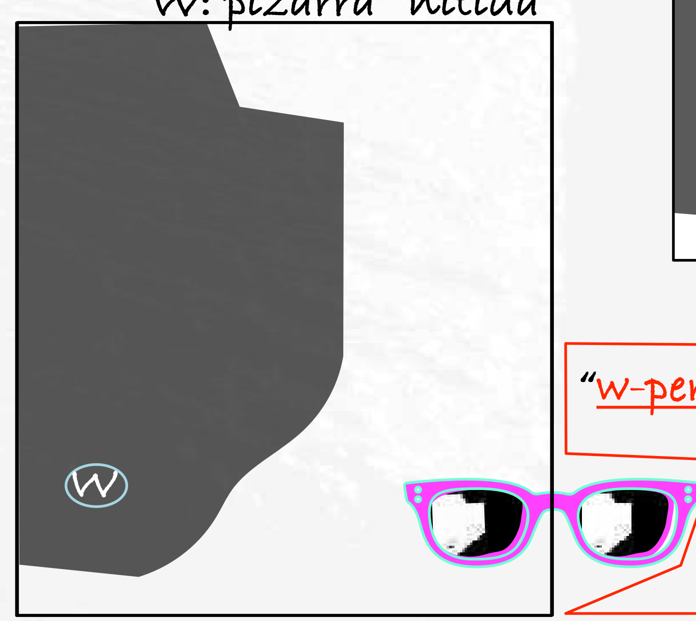
$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$

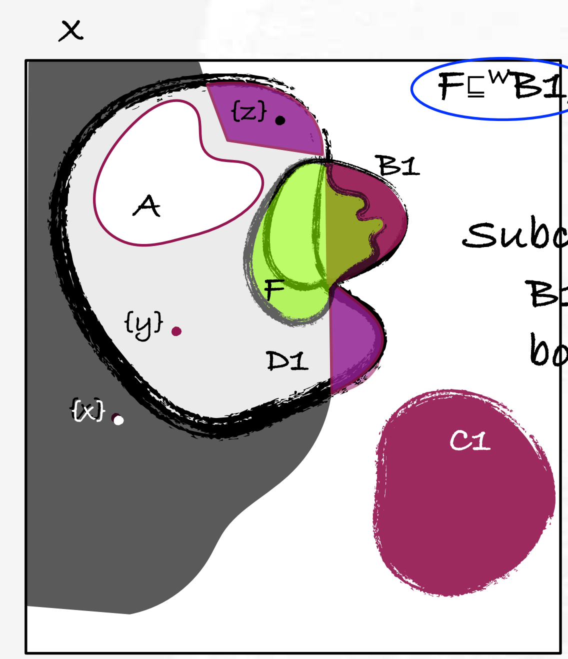


Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"





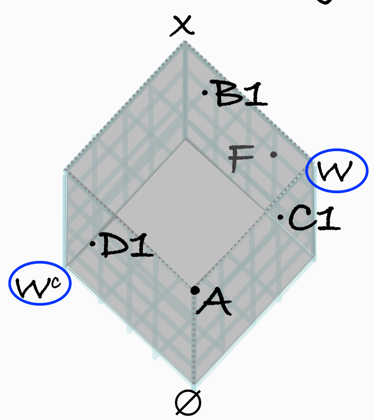
$F\sqsubseteq^W B1,\ B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

"w-pertenencia":

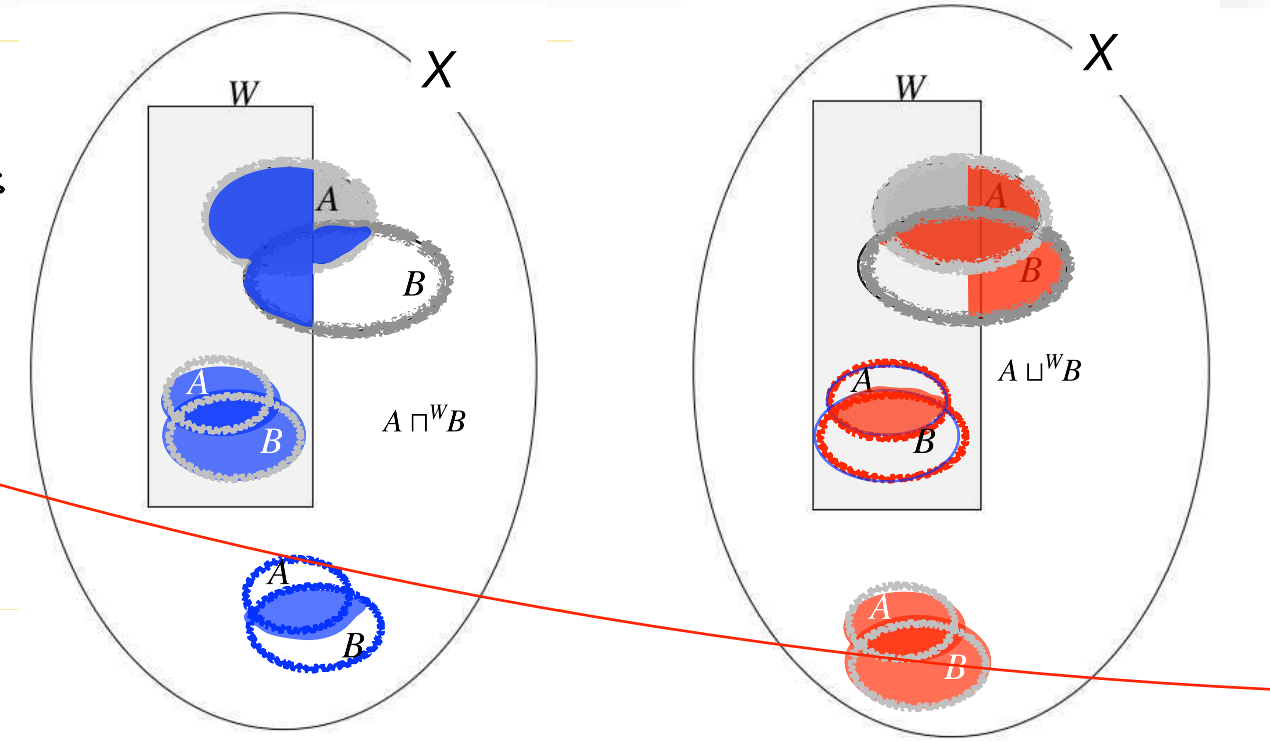
o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\le)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\le,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

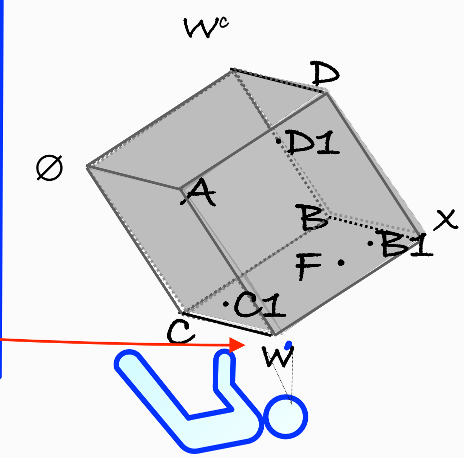
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B\Leftrightarrow A\triangle W\le B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\le A\le B+W$

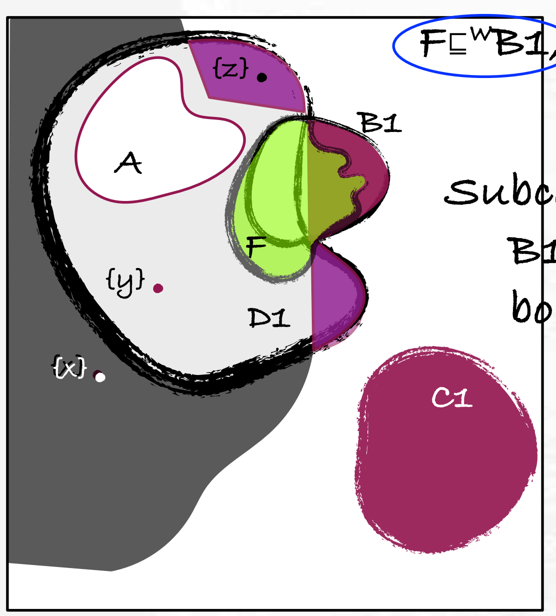


Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, $L(X)$ la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

X

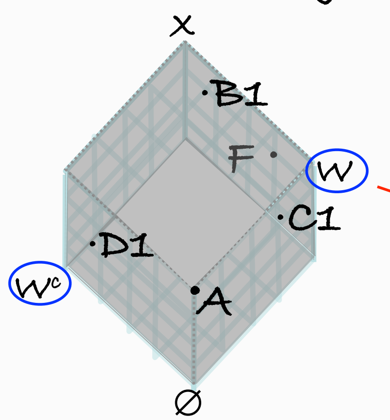


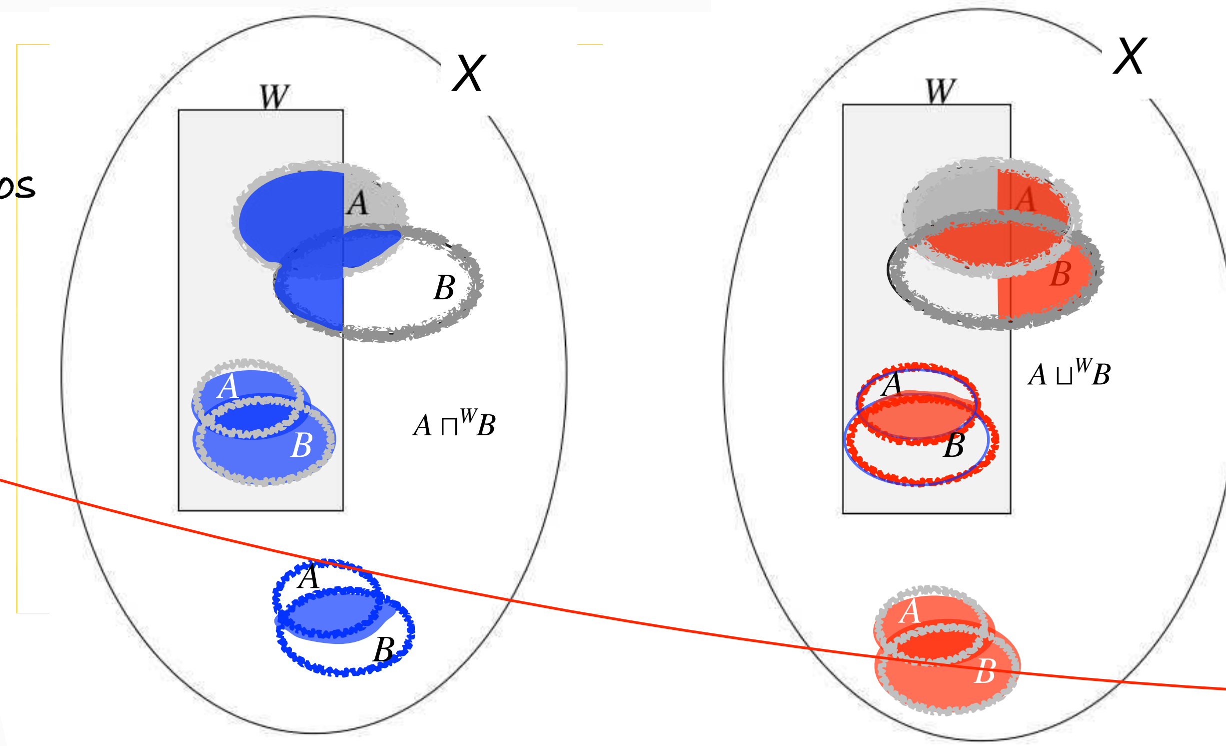
Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

"w-pertenencia":

o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



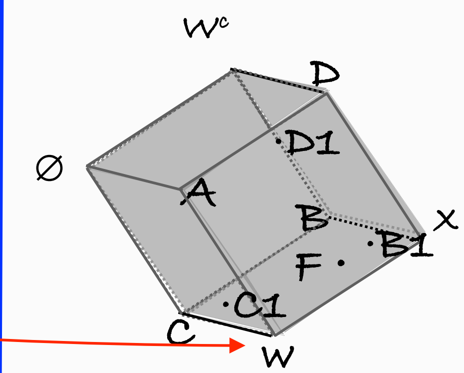


$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Isomorfismo $M\to M\triangle W$,

con $M\triangle W=(M\cdot W^c)+(M'\cdot W)$

Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

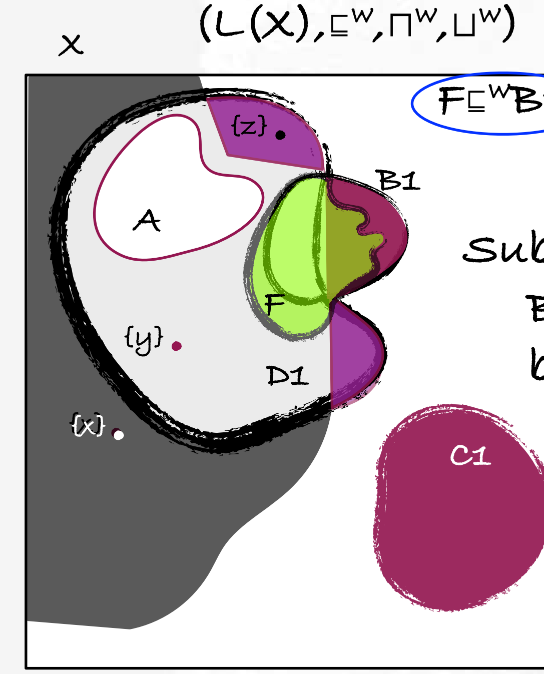
Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ $L(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$

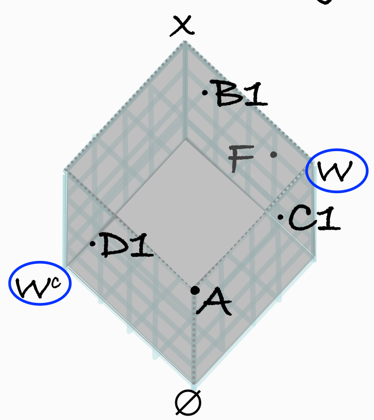
Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

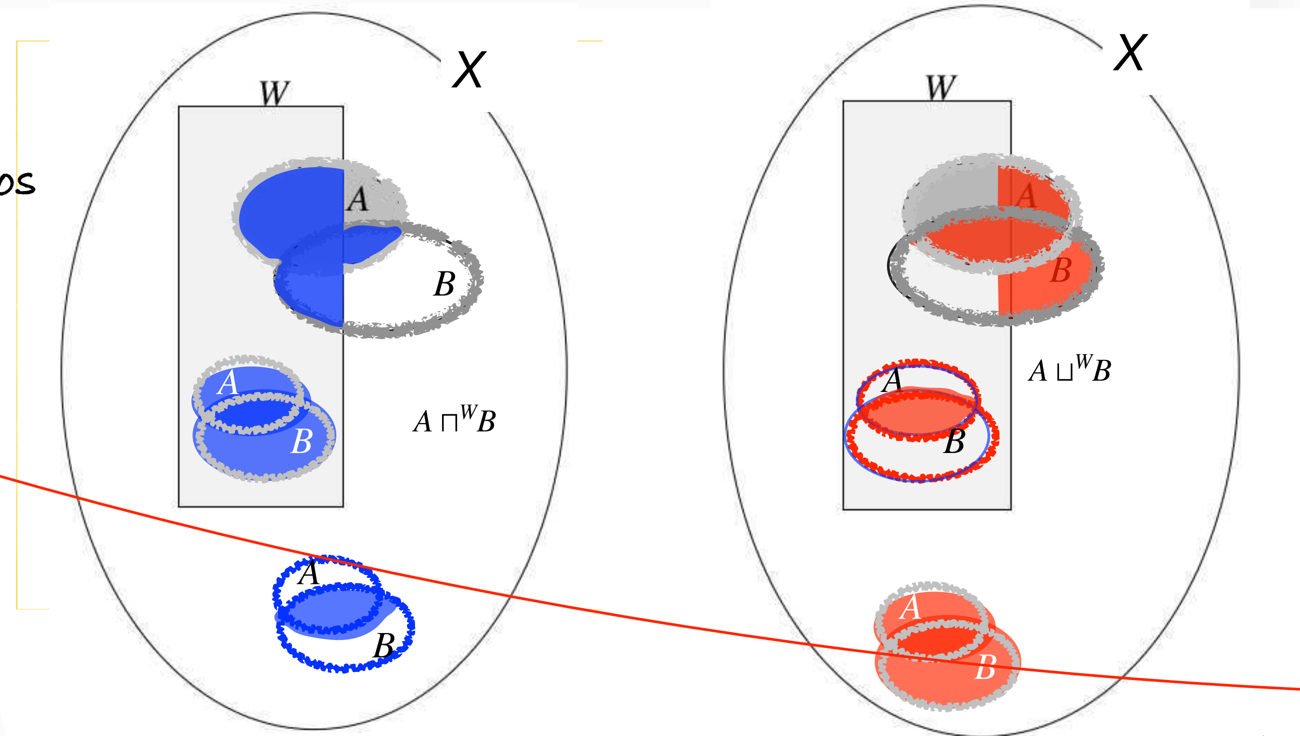
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\dots)$

"W-pertenencia":

o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



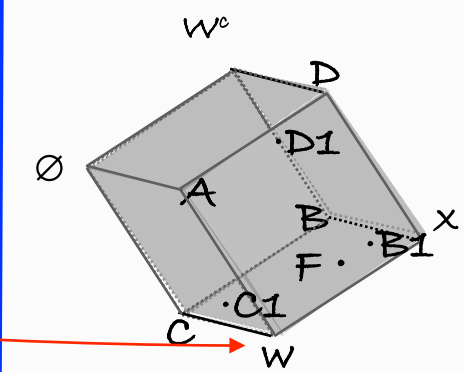


$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Reticulo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c}B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

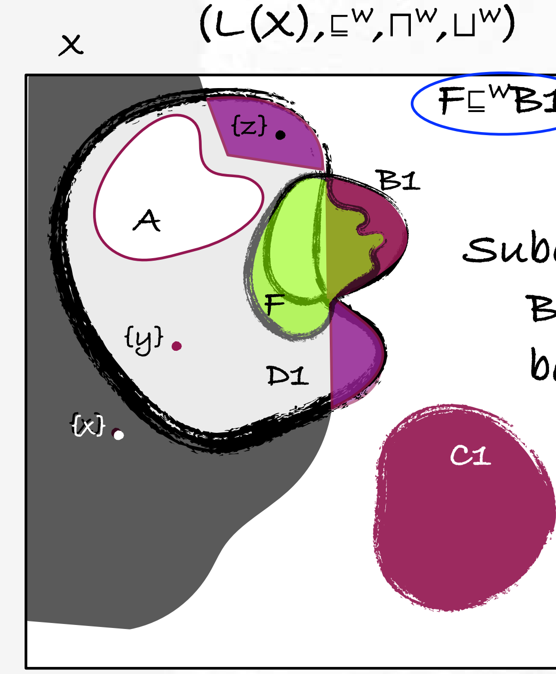
Isomorfismo $M\to M\triangle W$,

con $M\triangle W=(M\cdot W^c)+(M'\cdot W)$

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"



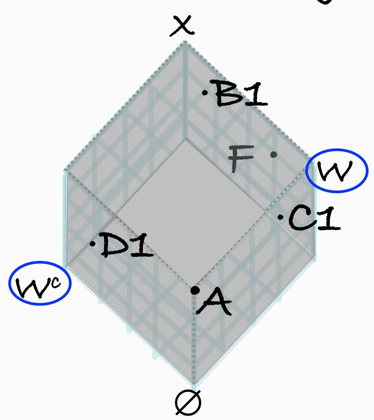
Subconjuntos B1, C1, F,... borrosos

$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,,...)$

"w-pertenencia":

o si $L=[0,1]$ con la negación $x'=1-x$,

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:

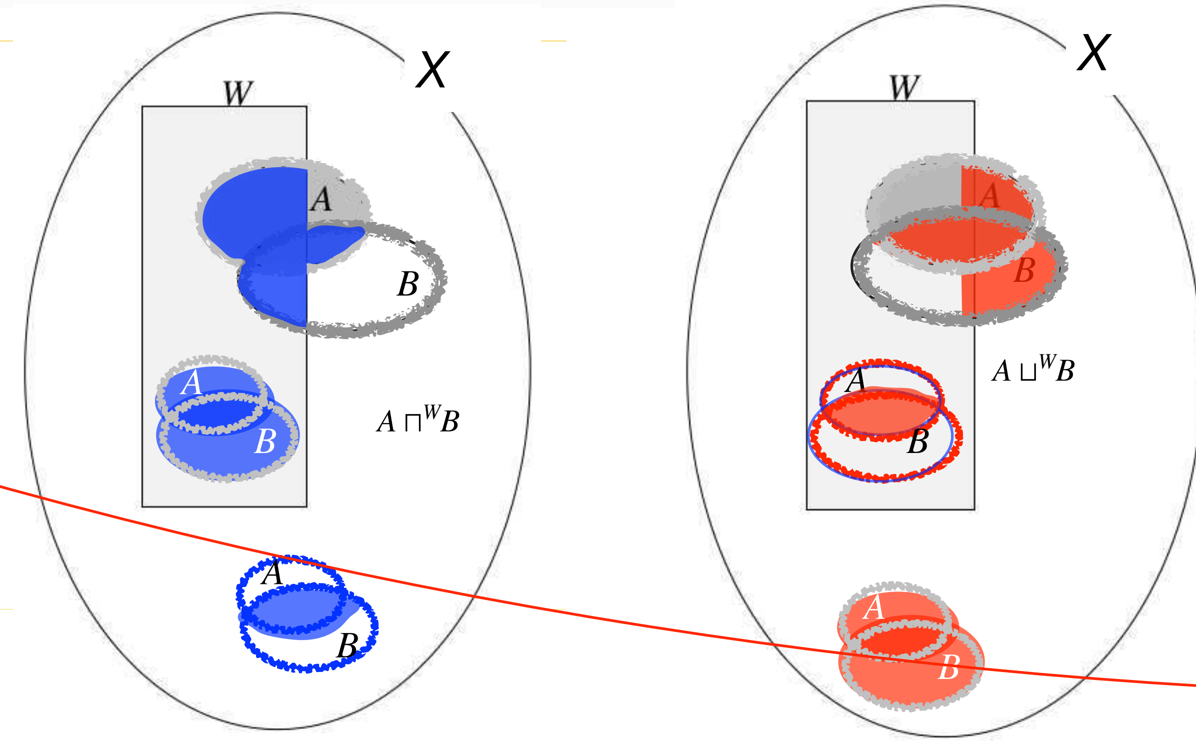


que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Isomorfismo $M\to M\triangle W$,

con $M\triangle W=(M\cdot W^c)+(M'\cdot W)$



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

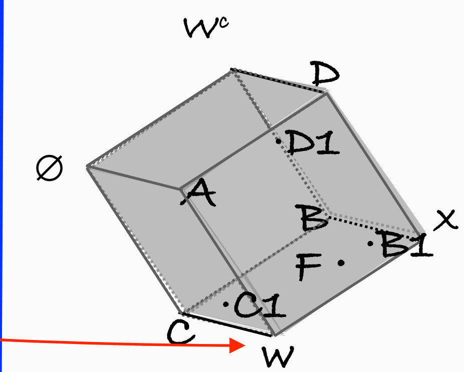
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

$A\triangle W=(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)$

$A\sqsubseteq^W B\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

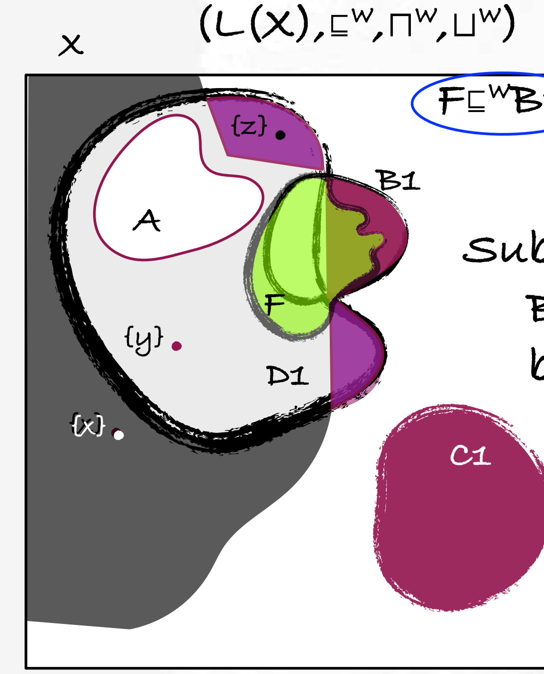
La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ $L(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F,... borrosos

$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\ldots)$

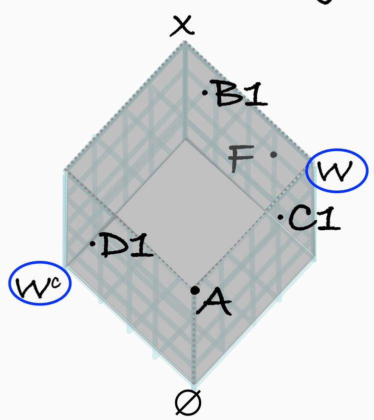
"w-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

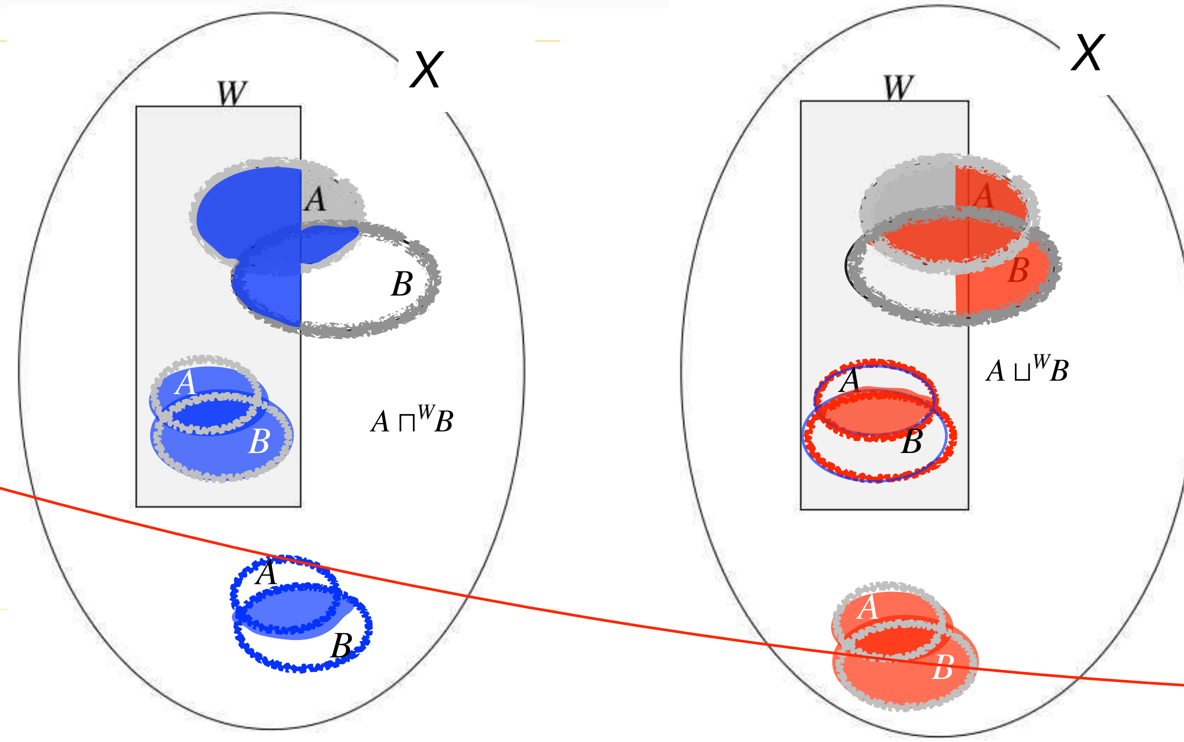
144

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

$\boxed{\sqcap^W \text{ es una uninorma y una nulnorma en } (L(X),\leq)}$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:





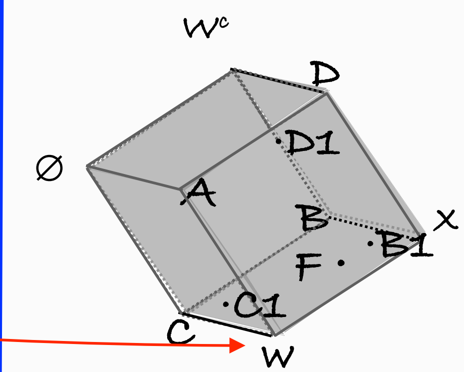
Familia de retículos:

$((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W \leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W \leq A \leq B + W$



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),{}')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Isomorfismo $M\to M\triangle W$,

con $M\triangle W=(M\cdot W^c)+(M'\cdot W)$

Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W'=W^c),{}')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

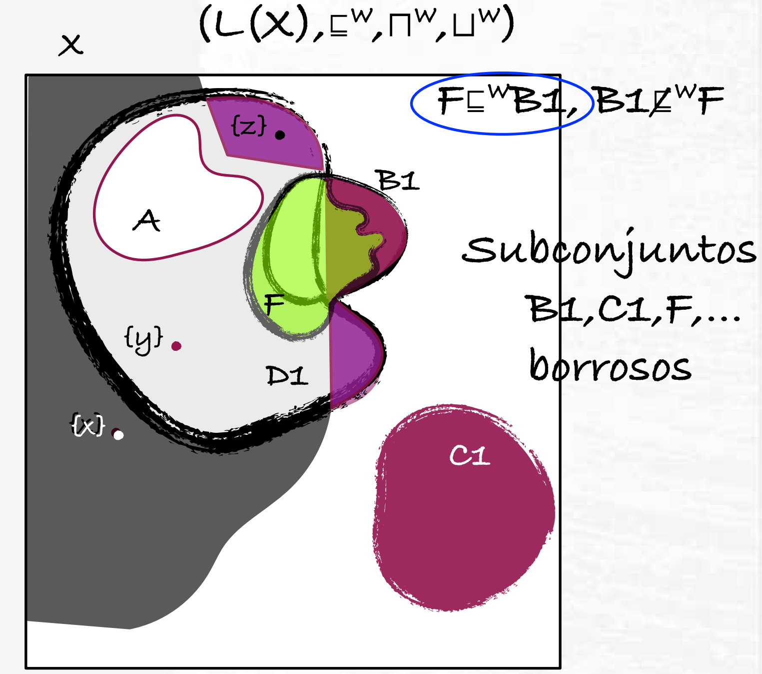
Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

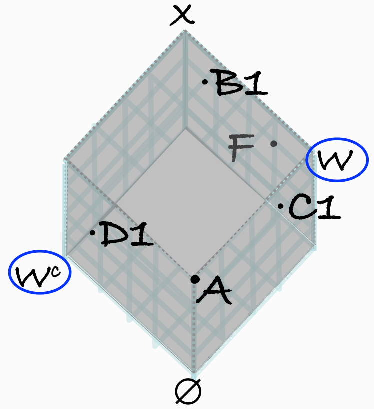
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x) = (A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

$\boxed{\sqcap^W \text{ es una uninorma y una nulnorma en } (L(X),\leq)}$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole…

Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

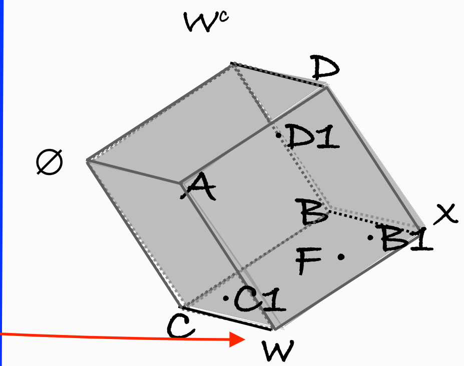
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



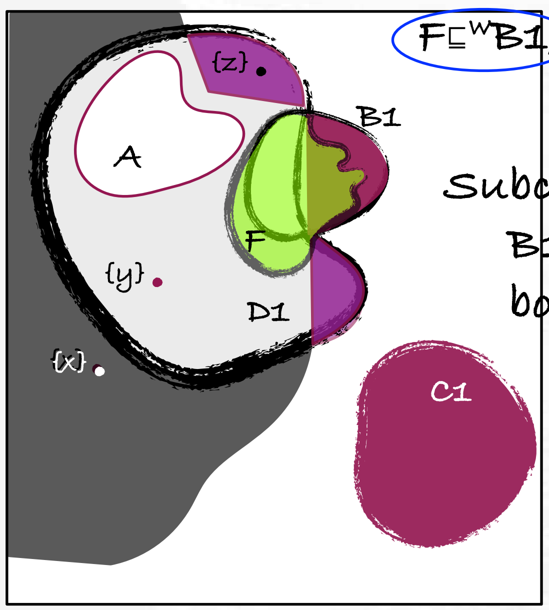
Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1,\ B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F, … borrosos

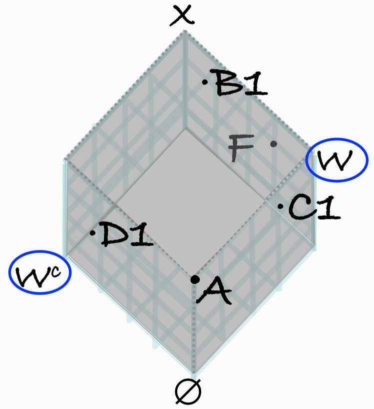
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,,\ldots)$

"w-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

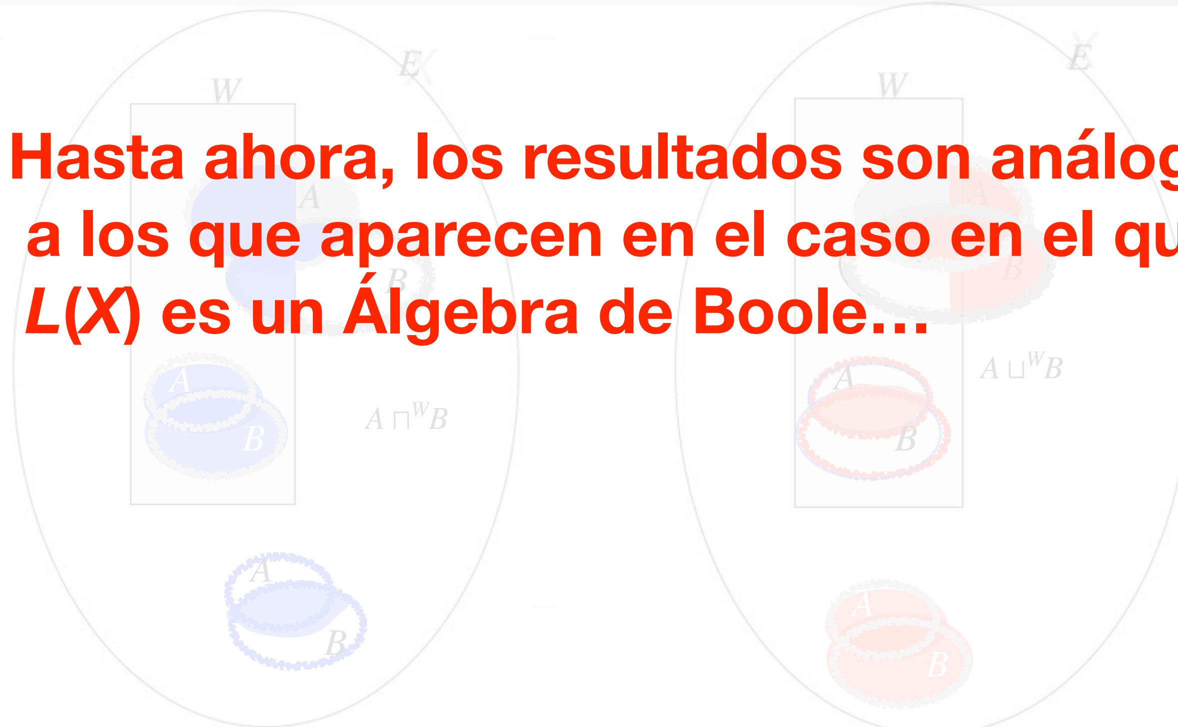
$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\leq)$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole...



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)

Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

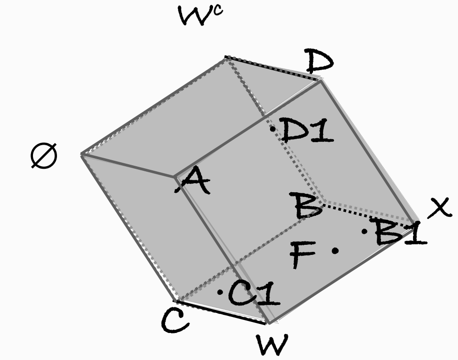
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

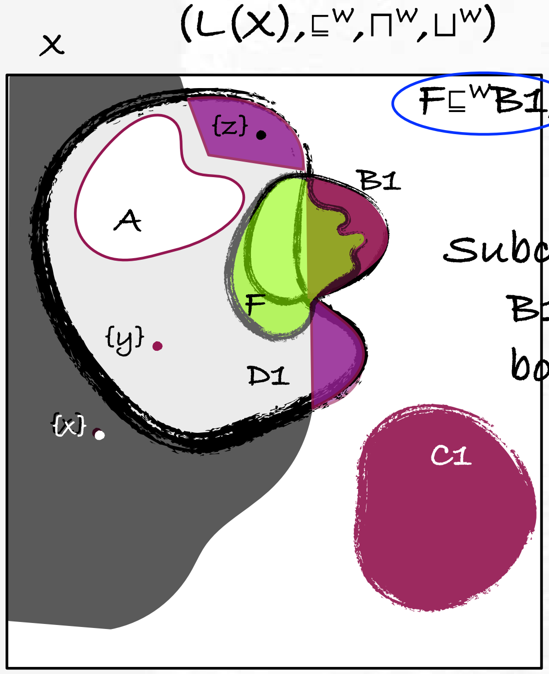
Pero...

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "nítida"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

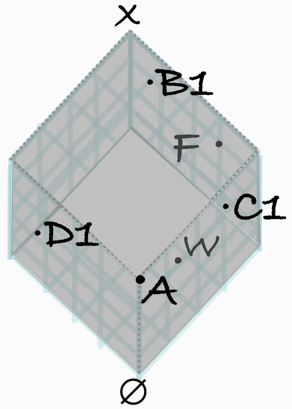
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x),(\in^W D1)(y),(\in^W D1)(z)$

$\boxed{\sqcap^W \text{ es una uninorma y una nulnorma en } (L(X),\leq)}$

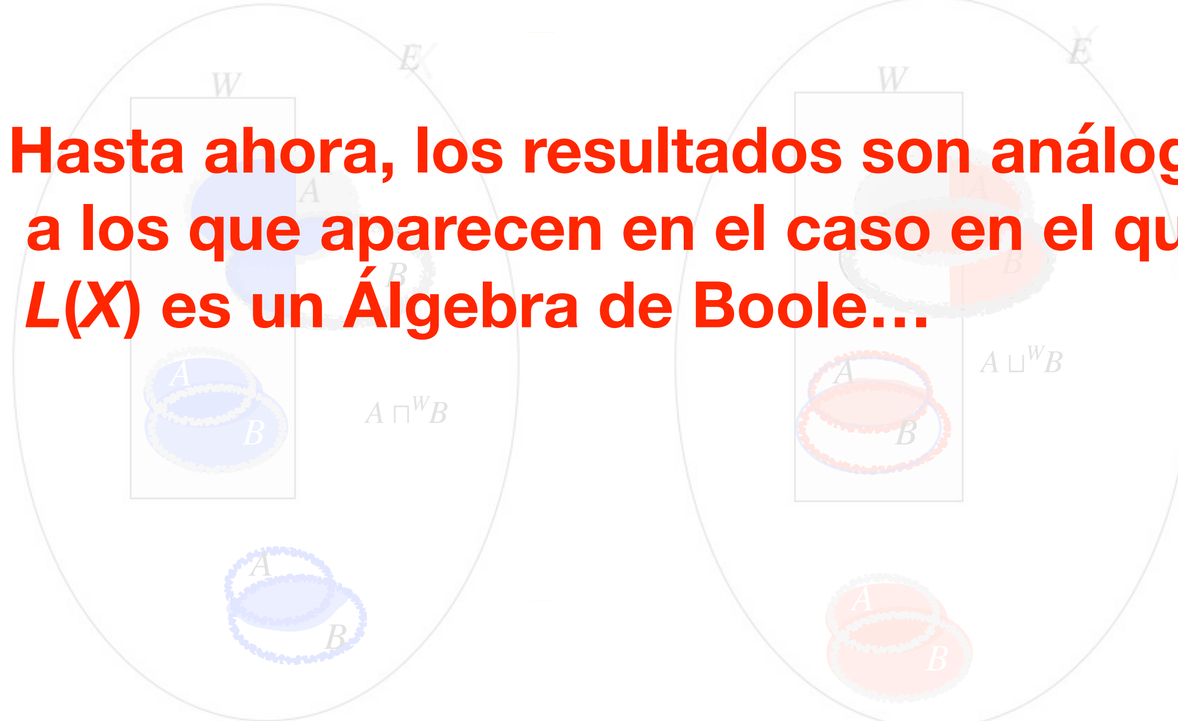
$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X), \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ con una negación fuerte

~~Sea W∈L(X) nítido (complementado y tal que W′=W^c)~~

Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole...



Operador inf: $A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A+B)]$

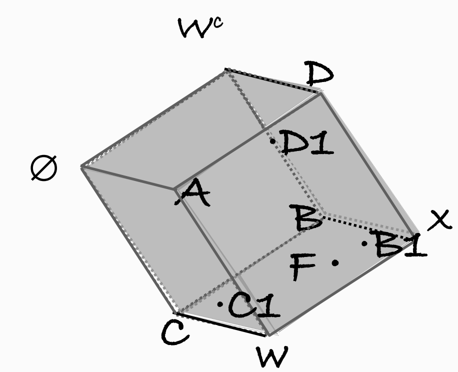
Operador sup: $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = (A \cdot B) + [W^c \cdot (A+B)]$

Familia de retículos:
$((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow \cancel{A \triangle W \leq B \triangle W}$

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B \cdot W \leq A \leq B+W$



Retículo distributivo:
$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Pero...

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

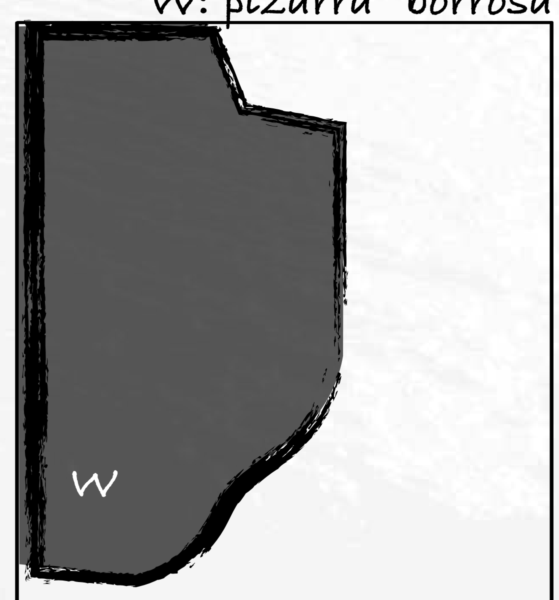
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$B \cdot W \leq A \leq B+W$

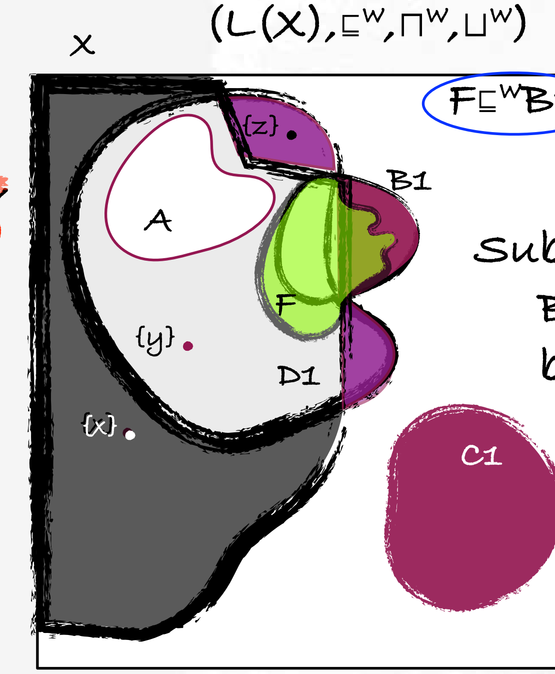
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"



$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F \sqsubseteq^W B1,\ B1 \not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

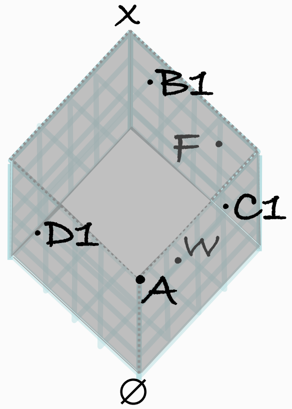
$(D1 \sqsubseteq^W A,\ B1 \sqcap^W D1,\ B1 \sqcup^W D1, ,...)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x) = (A \triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\leq)$

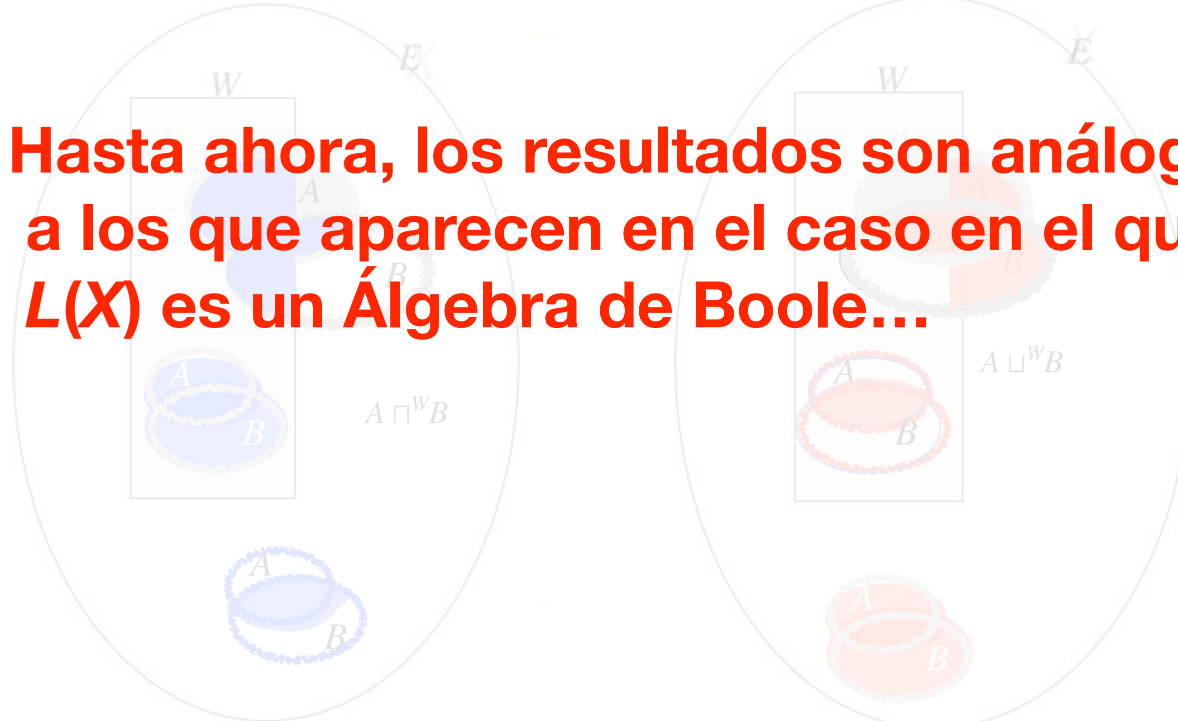
$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)~~

Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole...



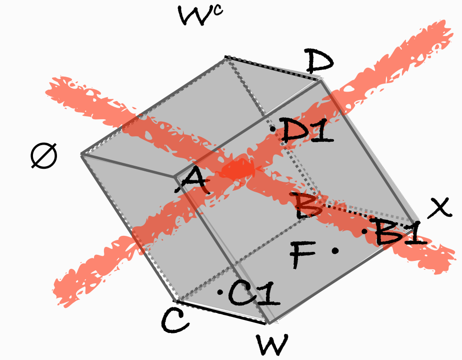
Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$~~ Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$

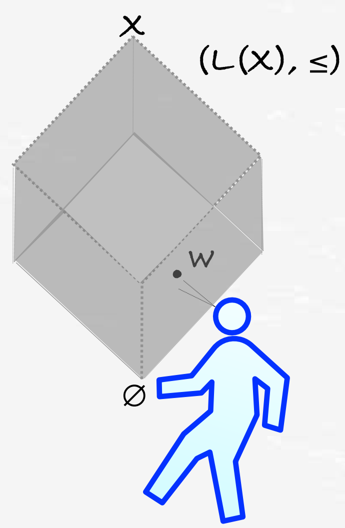


Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Pero...

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).



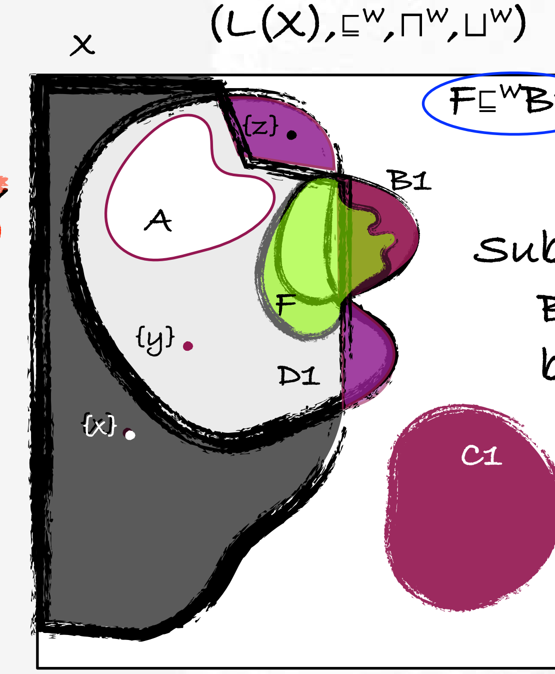
$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$B\cdot W\leq A\leq B+W$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F,... borrosos

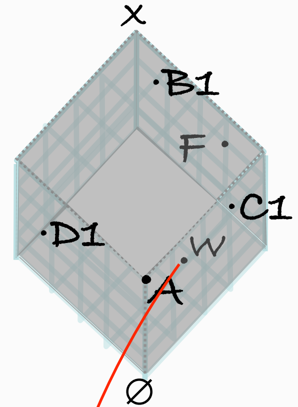
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x),(\in^W D1)(y),(\in^W D1)(z)$

$\boxed{\sqcap^W \text{ es una uninorma y una nulnorma en } (L(X),\le)}$

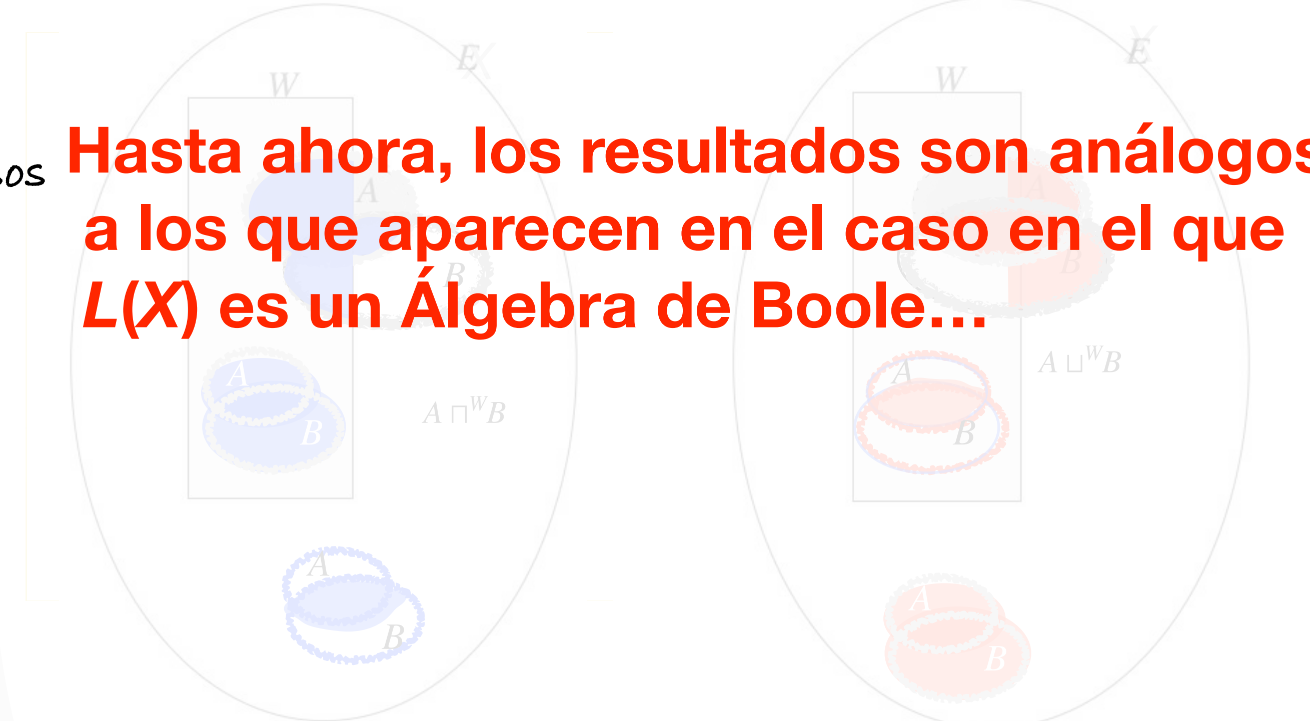
$(L(X),\le)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\le,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea W∈L(X) nítido (complementado y tal que W'=W^c)~~

Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole...



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

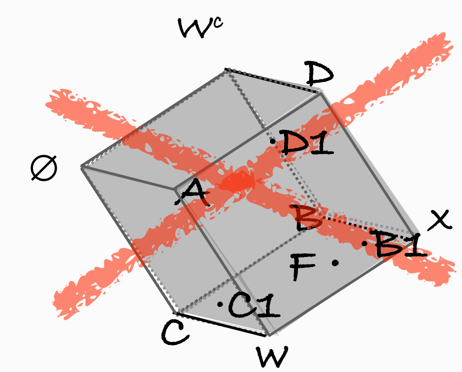
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\le B\triangle W$~~

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\le A\le B+W$

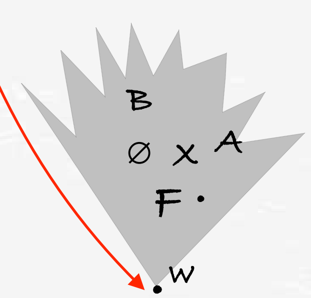


Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Pero...

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).



$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$B\cdot W\le A\le B+W$

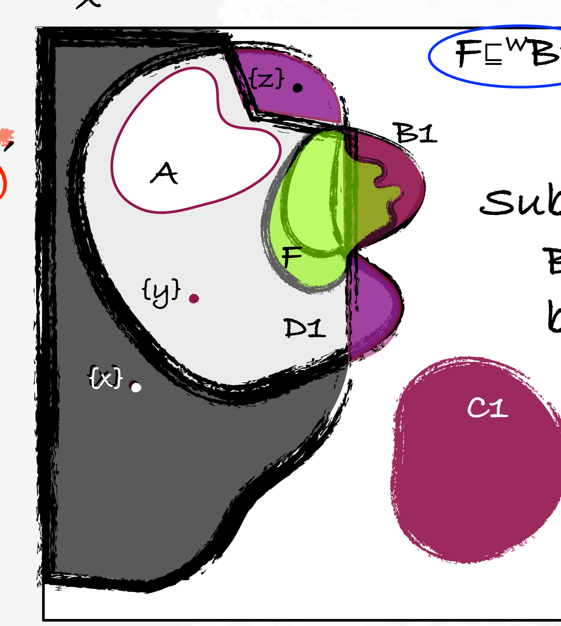
$\boxed{(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W) \text{ inf-semirretículo con elemento mínimo } W.}$

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

$F\sqsubseteq^W B1,\ B1\not\sqsubseteq^W F$



Subconjuntos B1, C1, F,... borrosos

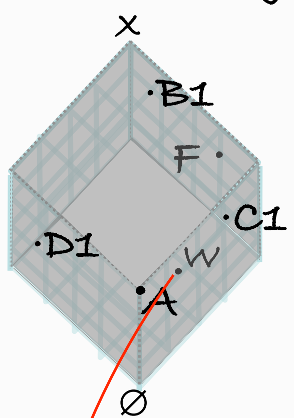
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\leq)$

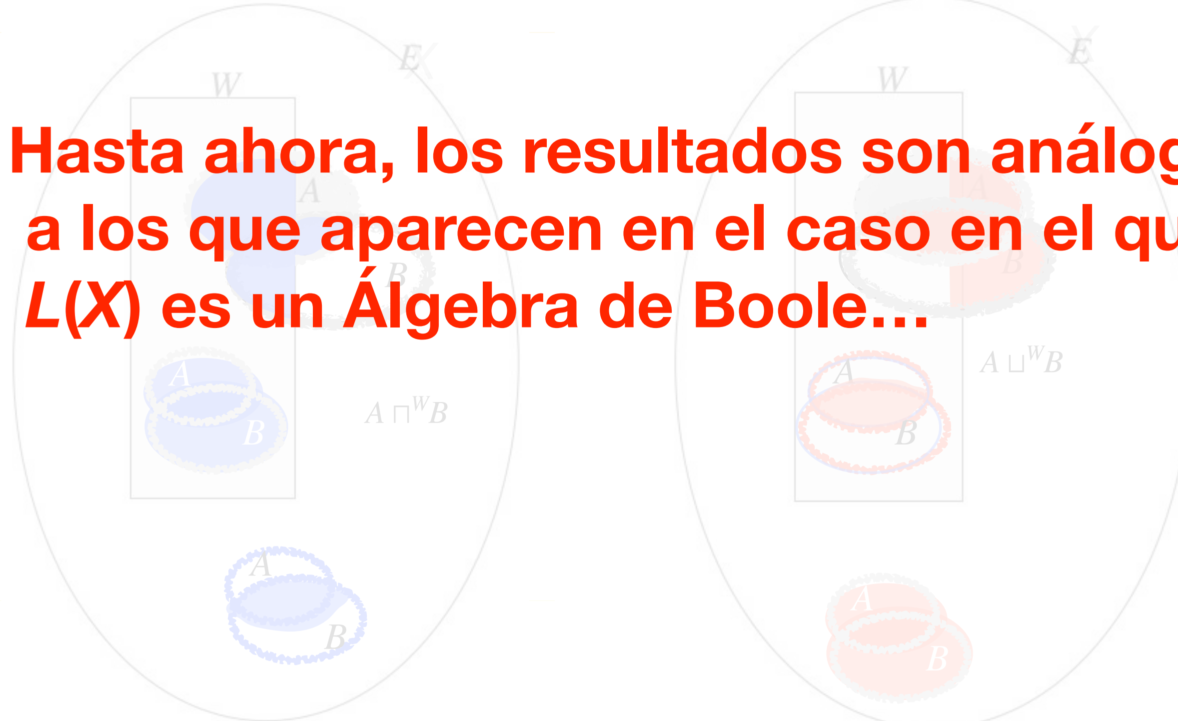
$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\emptyset,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)~~

Hasta ahora, los resultados son análogos a los que aparecen en el caso en el que *L*(*X*) es un Álgebra de Boole…



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

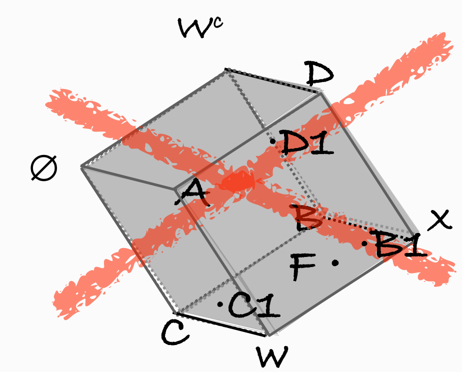
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c}B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$~~

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



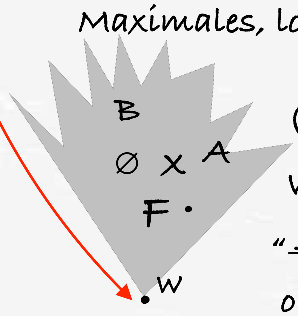
Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

Pero…

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

Maximales, los que verifican $W\rightarrow Q=Q\dot{-}W$



("$\rightarrow$" es operador implicación en $L(X)$: $W\rightarrow Q=\sup\{S\in L(X)\ /\ W\cdot S\leq Q\}$, y "$\dot{-}$" el operador diferencia o co-implicación en $L(X)$: $Q\dot{-}W=\inf\{U\in L(X)\ /\ Q\leq W+U\}$)

$A\sqsubseteq^W B\ \Leftrightarrow$

$B\cdot W\leq A\leq B+W$

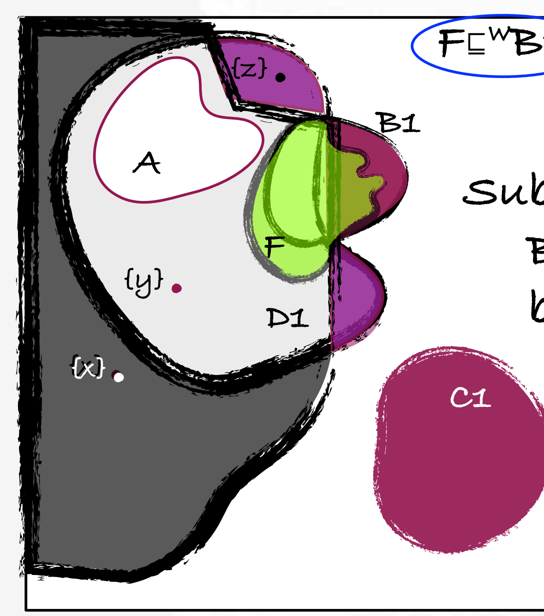
$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W)$ inf-semirretículo con elemento mínimo W.

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~$P(X)$~~ $L(X)$, la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$



Subconjuntos B1, C1, F,… borrosos

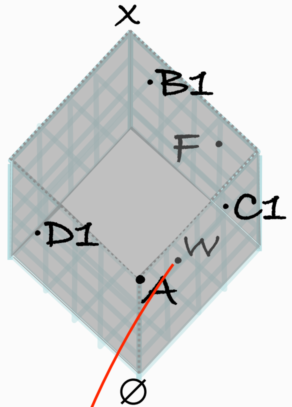
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x),(\in^W D1)(y),(\in^W D1)(z)$

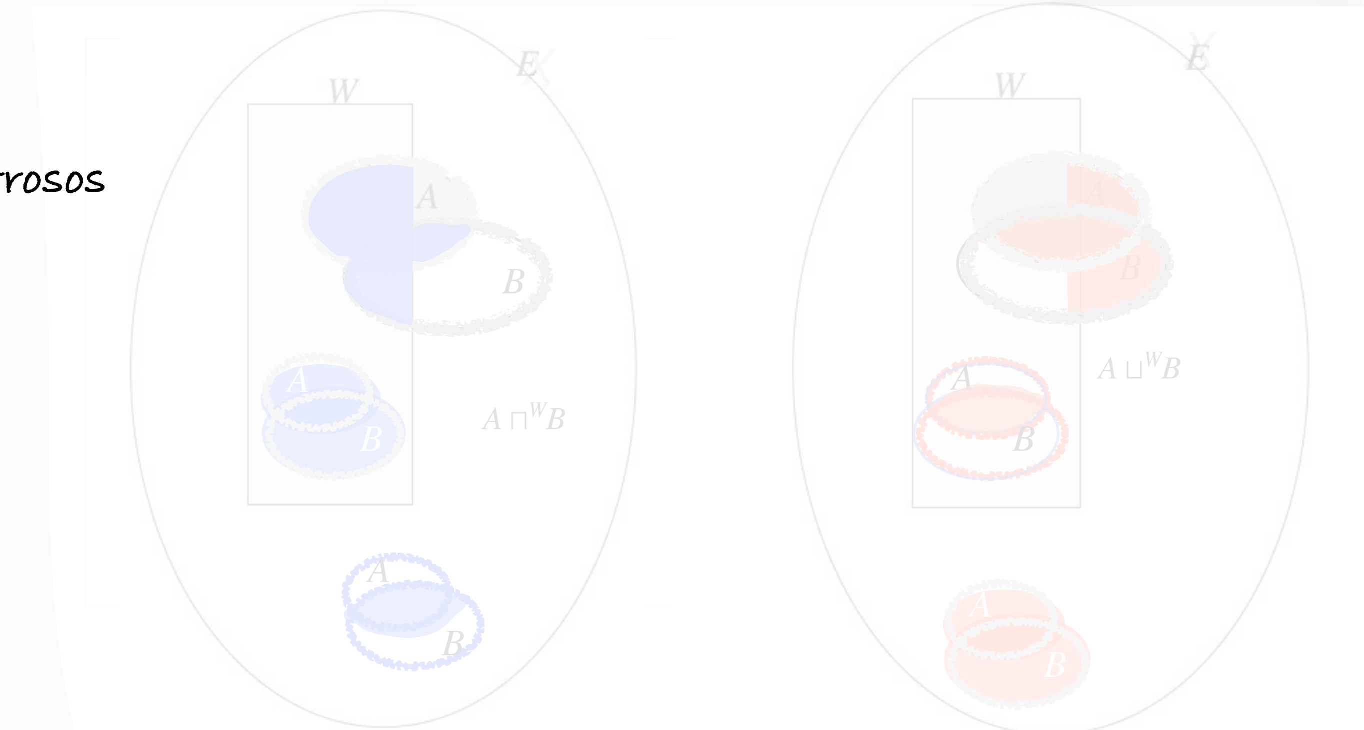
$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\leq)$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)~~



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

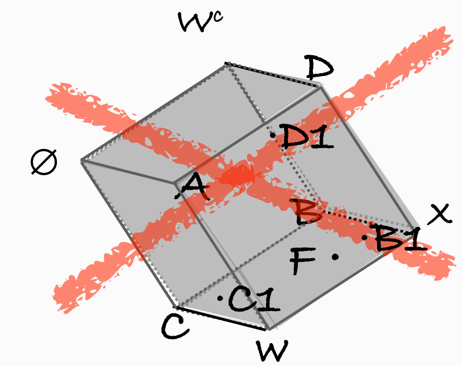
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c}B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$~~

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



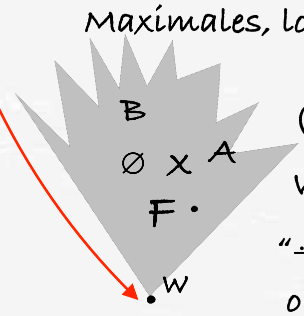
Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W'=W^c),')$

La negación inicial también es aquí negación fuerte.

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

Maximales, los que verifican $W\to Q=Q\dot{-}W$



("$\to$" es operador implicación en $L(X)$: $W\to Q=\sup\{S\in L(X)\ /\ W\cdot S\leq Q\}$, y

"$\dot{-}$" el operador diferencia o co-implicación en $L(X)$: $Q\dot{-}W=\inf\{U\in L(X)\ /\ Q\leq W+U\}$)

$A\sqsubseteq^W B\ \Leftrightarrow$

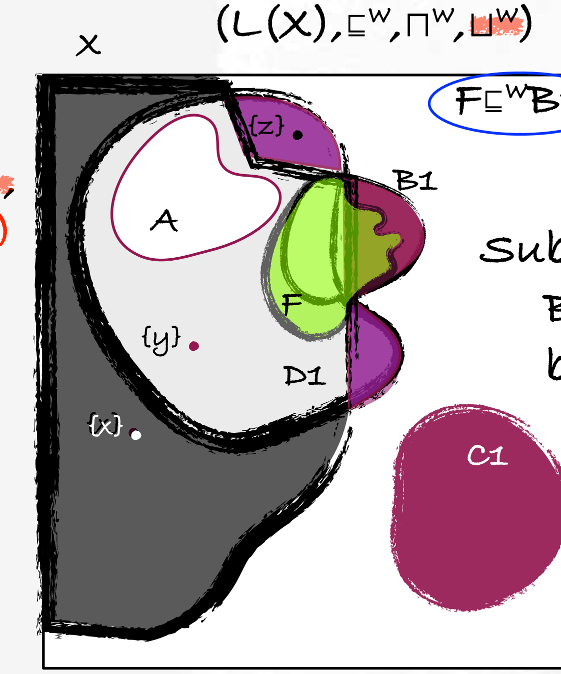
$B\cdot W\leq A\leq B+W$

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W)$ inf-semirretículo con elemento mínimo W.

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F,… borrosos

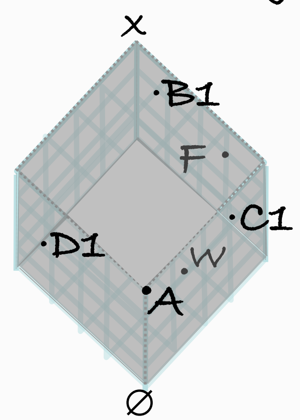
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x),(\in^W D1)(y),(\in^W D1)(z)$

$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\leq)$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea $w\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $w'=w^c$)~~

Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

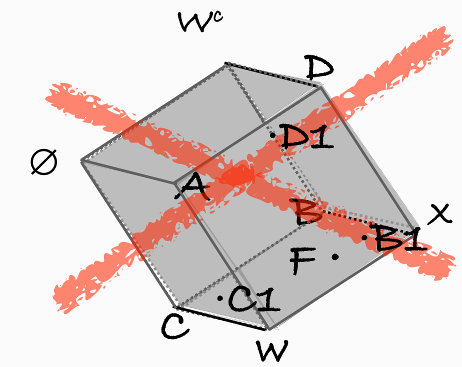
Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$~~

Orden de actividad

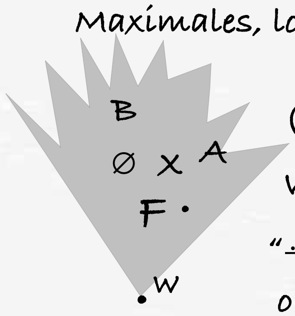
$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W'=W^c),')$

~~La negación inicial también es aquí negación fuerte.~~

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).



Maximales, los que verifican $W\to Q=Q\dot{-}W$

("$\to$" es operador implicación en $L(X)$: $W\to Q=\sup\{S\in L(X)\ /\ W\cdot S\leq Q\}$, y

"$\dot{-}$" el operador diferencia o co-implicación en $L(X)$: $Q\dot{-}W=\inf\{U\in L(X)\ /\ Q\leq W+U\}$)

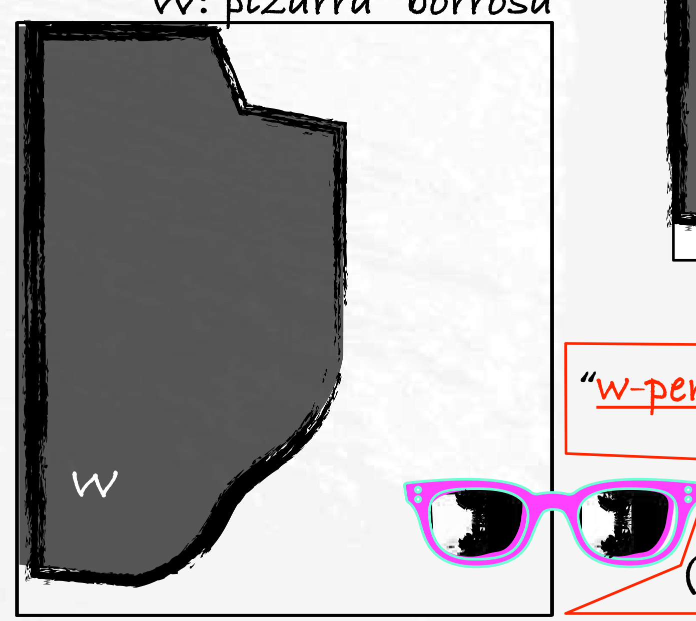
$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$B\cdot W\leq A\leq B+W$

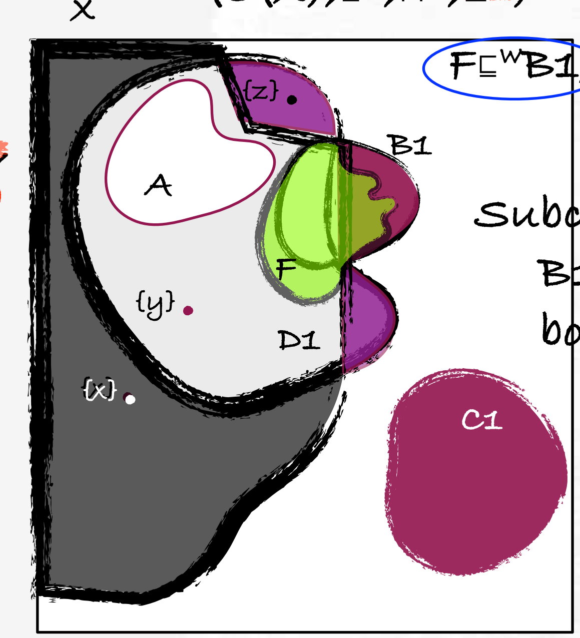
$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W)$ inf-semirretículo con elemento mínimo W.

Una nueva interpretación asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X),~~ L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"



$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F,... borrosos

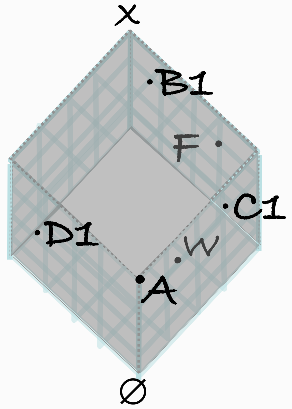
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\ldots)$

"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

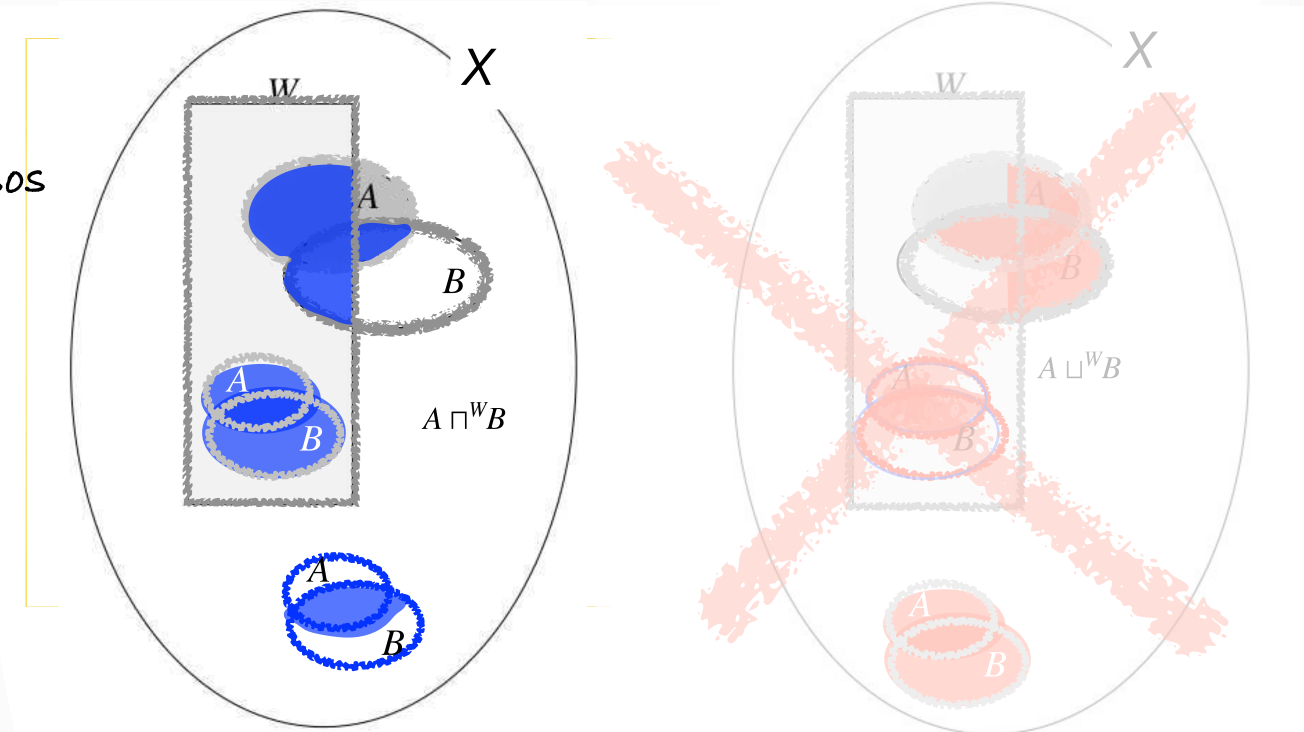
$\sqcap^W$ es una uninorma y una nulnorma en $(L(X),\le)$

$(L(X),\le)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\le,\cdot,+,\emptyset,X),{}')$ con una negación fuerte

~~Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)~~



Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

~~Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c}B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$~~

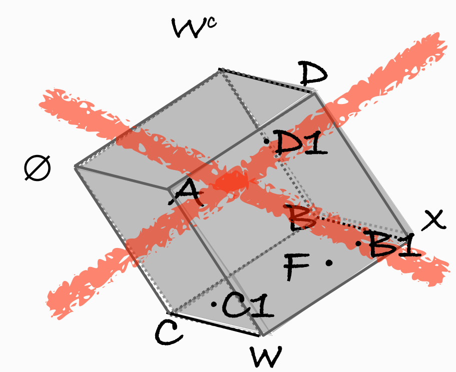
Familia de retículos:

$((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\le B\triangle W$~~

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\le A\le B+W$



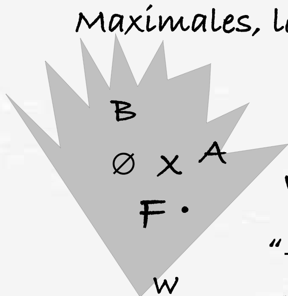
Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W'=W^c),{}')$

~~La negación inicial también es aquí negación fuerte.~~

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

Maximales, los que verifican



$W\to Q=Q\dot{-}W$

(“$\to$” es operador implicación en $L(X)$: $W\to Q=\sup\{S\in L(X)\ /\ W\cdot S\le Q\}$, y

“$\dot{-}$“ el operador diferencia o co-implicación en $L(X)$: $Q\dot{-}W=\inf\{U\in L(X)\ /\ Q\le W+U\}$)

$A\sqsubseteq^W B\ \Leftrightarrow$

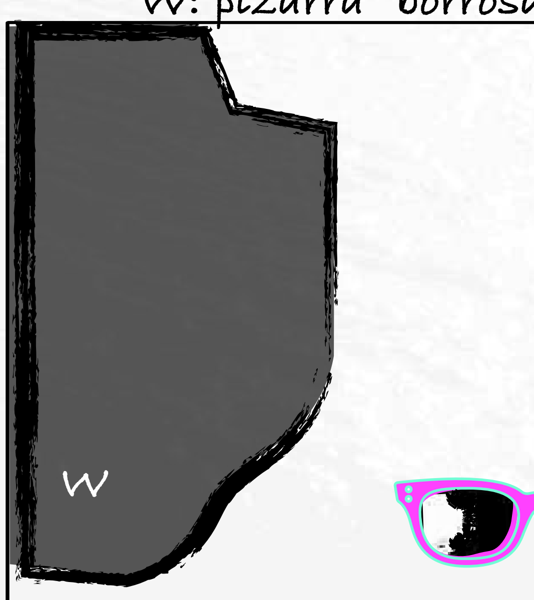
$B\cdot W\le A\le B+W$

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$
inf-semirretículo con elemento mínimo W.

Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la “perspectiva” desde ese subconjunto W: el orden de “W-inclusión”.

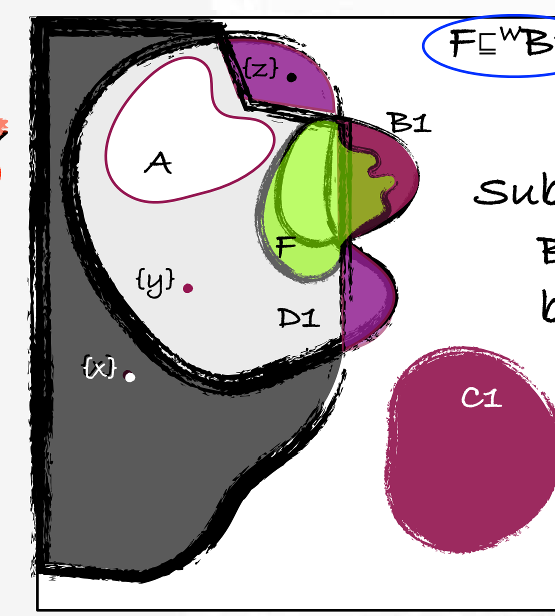
W: pizarra “borrosa”



X

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$



Subconjuntos B1, C1, F,… borrosos

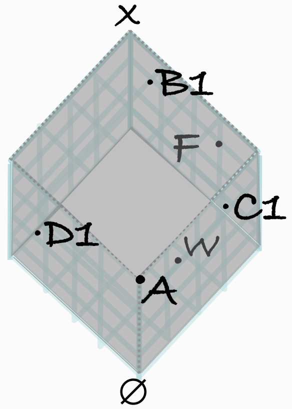
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1,\dots)$

“W-pertenencia”: $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$

$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$

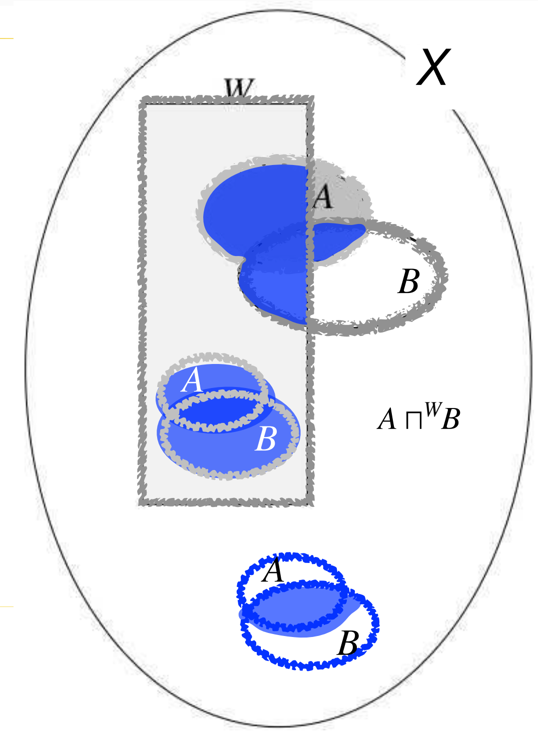
$\boxed{\sqcap^W \text{ es una uninorma y una nulnorma en } (L(X),\leq)}$

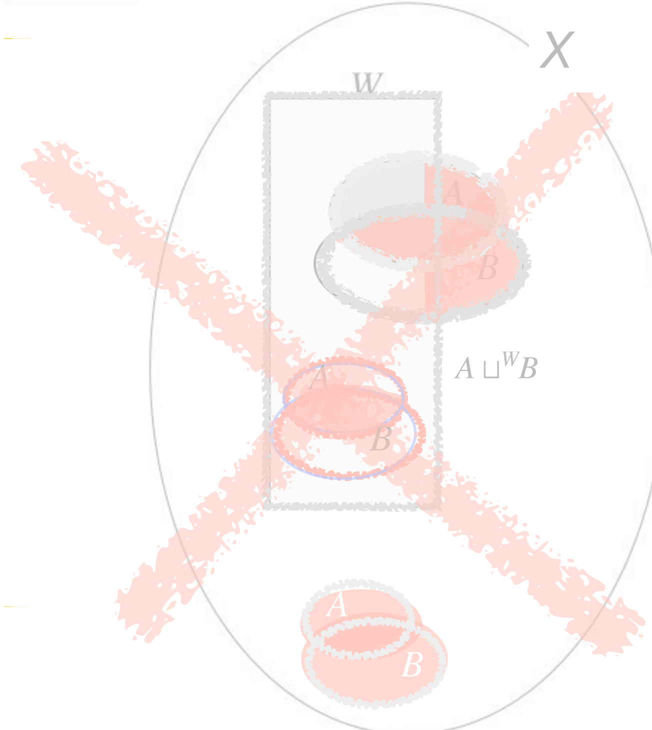
$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X), \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ')$ con una negación fuerte

~~Sea W∈L(X) nítido (complementado y tal que W'=W^c)~~





Operador inf: $A\sqcap^W B=(A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

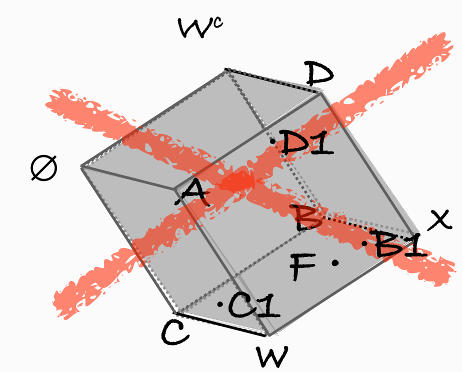
~~Operador sup: $A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c} B=(A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$~~

Familia de retículos: $((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A\sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W\leq B\triangle W$~~

Orden de actividad

$\Leftrightarrow B\cdot W\leq A\leq B+W$



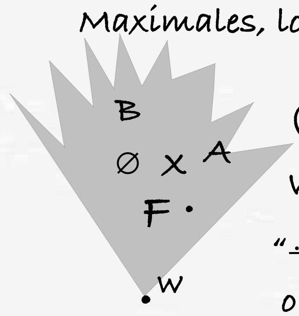
Retículo distributivo: $((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,$ ~~$\sqcup^W$~~$, W,$ ~~$W'=W^c), '$~~$)$

~~La negación inicial también es aquí negación fuerte.~~

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

Maximales, los que verifican

$W\rightarrow Q=Q\dot{-}W$



("→" es operador implicación en L(X):

$W\rightarrow Q=\sup\{S\in L(X)\ /\ W\cdot S\leq Q\}$, y

"$\dot{-}$" el operador diferencia o co-implicación en L(X) :

$Q\dot{-}W=\inf\{U\in L(X)\ /\ Q\leq W+U\}$)

$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

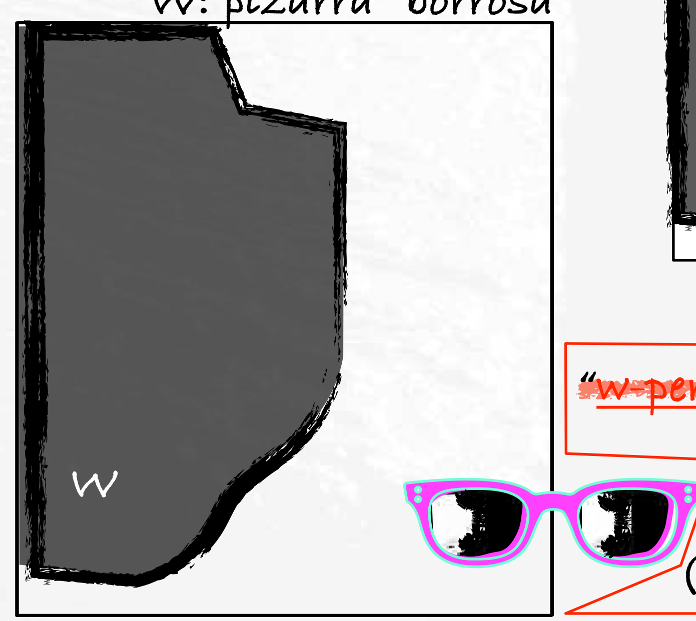
$B\cdot W\leq A\leq B+W$

$(L(X), \sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$
inf-semirretículo con elemento mínimo W.

Una nueva interpretación

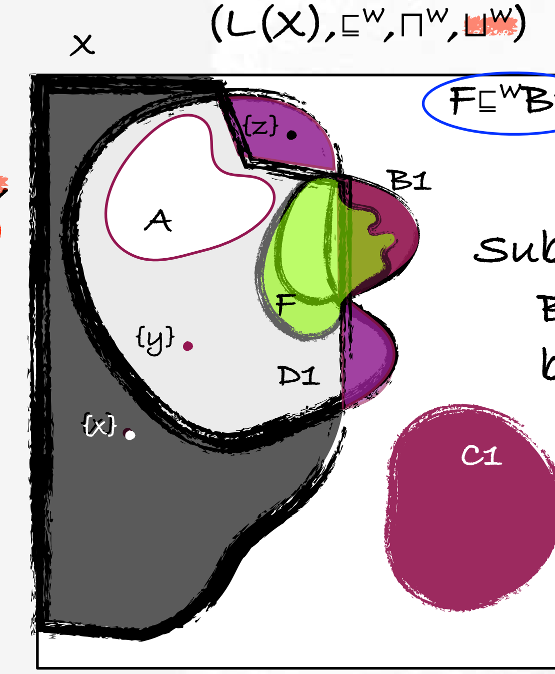
asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~ L(X), la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"



$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,$ ~~$\sqcup^W$~~$)$

$F\sqsubseteq^W B1$, $B1\not\sqsubseteq^W F$



Subconjuntos B1,C1,F,... borrosos

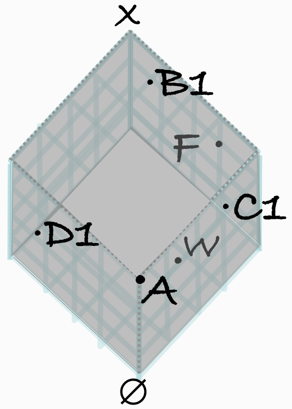
$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,$ ~~$B1\sqcup^W D1$~~$,\ldots)$

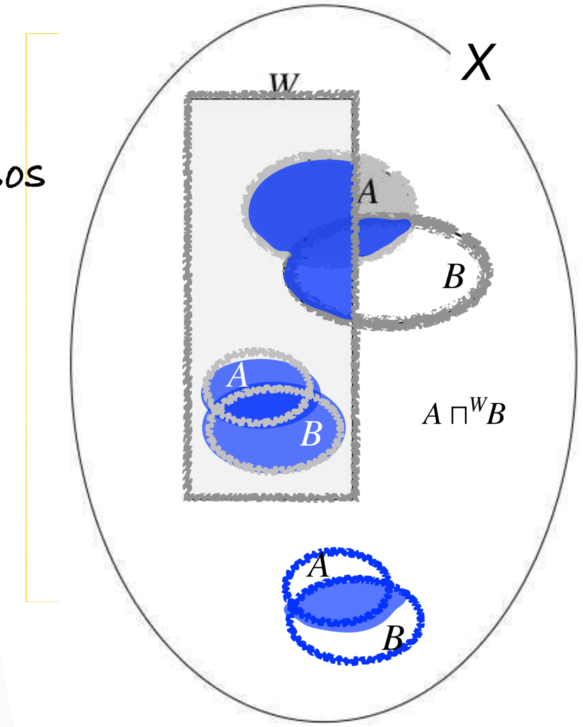
~~"W-pertenencia": $(\in^W A)(x)=(A\triangle W)(x)$~~

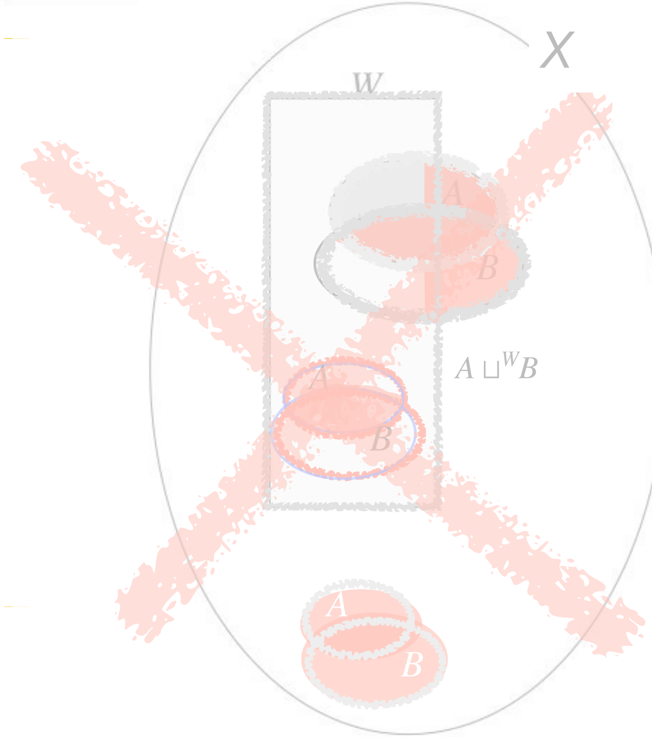
~~$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$~~

$\sqcap^W$ ~~es una uninorma y~~ una nulnorma en $(L(X),\leq)$

$(L(X),\leq)$ retículo de subconjuntos L-borrosos de X:





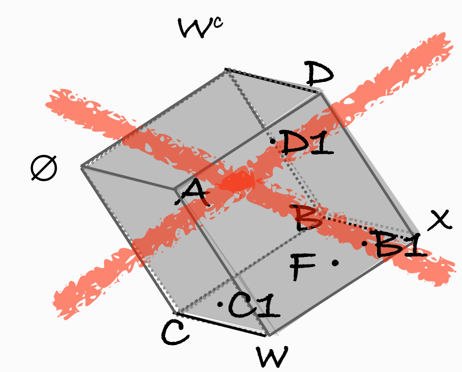


Familia de retículos:

$((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in P(X)}$

$A \sqsubseteq^W B$ ~~$\Leftrightarrow A\triangle W \leq B \triangle W$~~

$\Leftrightarrow B\cdot W \leq A \leq B+W$



que, en ambos casos, es un retículo distributivo $((L(X),\leq,\cdot,+,\varnothing,X),')$ con una negación fuerte

~~Sea $W\in L(X)$ nítido (complementado y tal que $W'=W^c$)~~

Operador inf: $A\sqcap^W B = (A\cdot B)+[W\cdot(A+B)]$

~~Operador sup: $A\sqcup^W B = A\sqcap^{W^c} B = (A\cdot B)+[W^c\cdot(A+B)]$~~

Retículo distributivo:

$((L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W'=W^c),')$

~~La negación inicial también es aquí negación fuerte.~~

W subconjunto borroso no nítido (no complementado).

$((L(X),\sqsubseteq^W))_{W\in L(X)}$

Maximales, los que verifican

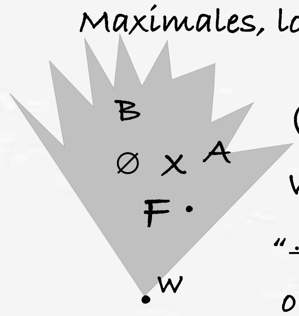
$W\rightarrow Q = Q \dot{-} W$

("→" es operador implicación en L(X):

$W\rightarrow Q = \sup\{S\in L(X) \,/\, W\cdot S\leq Q\}$, y

"$\dot{-}$" el operador diferencia o co-implicación en L(X):

$Q \dot{-} W = \inf\{U\in L(X) \,/\, Q\leq W+U\}$)



$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

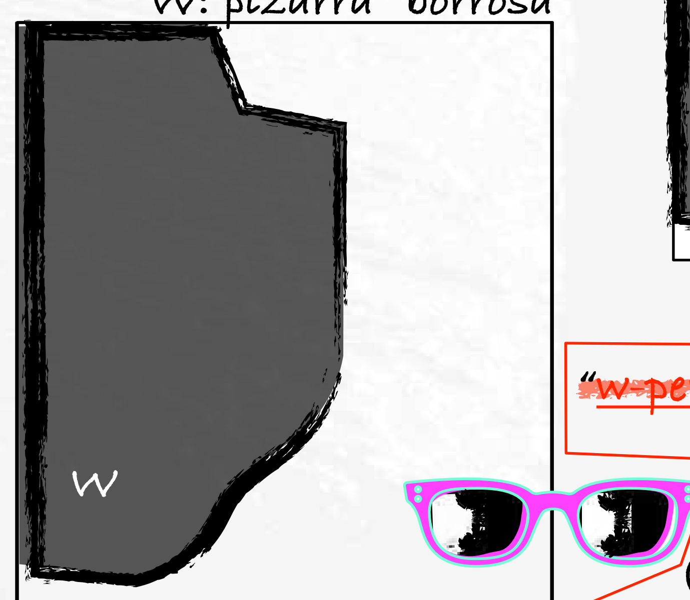
$B\cdot W\leq A\leq B+W$

$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$ inf-semirretículo con elemento mínimo W.

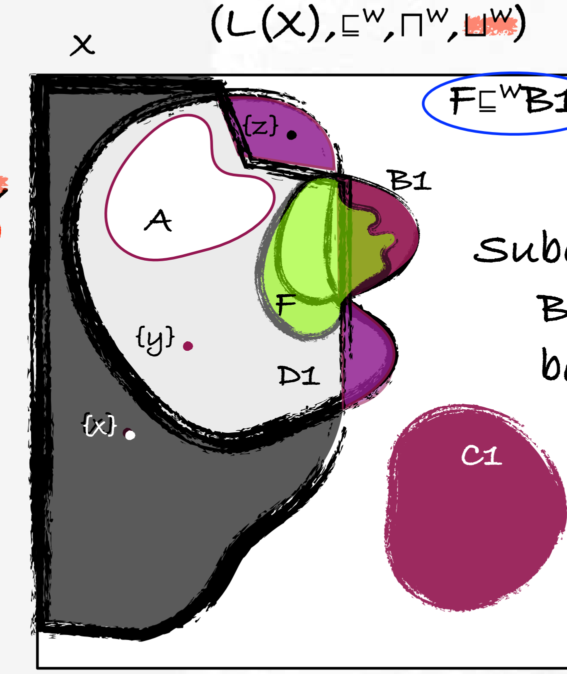
Una nueva interpretación

asociada a un orden $\sqsubseteq^W$ que representa, en el conjunto ~~P(X)~~, L(X) la "perspectiva" desde ese subconjunto W: el orden de "W-inclusión".

W: pizarra "borrosa"



$(L(X),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$



$F\sqsubseteq^W B1$, $B1 \not\sqsubseteq^W F$

Subconjuntos B1, C1, F, ... borrosos

$(D1\sqsubseteq^W A,\ B1\sqcap^W D1,\ B1\sqcup^W D1, \ldots)$

~~"W-pertenencia": $(\in^W A)(x) = (A\triangle W)(x)$~~

~~$(\in^W D1)(x), (\in^W D1)(y), (\in^W D1)(z)$~~

Ejemplos ilustrativos del isomorfismo $\varphi_W(X) = X \Delta W$ en L^E

Ejemplos ilustrativos del isomorfismo

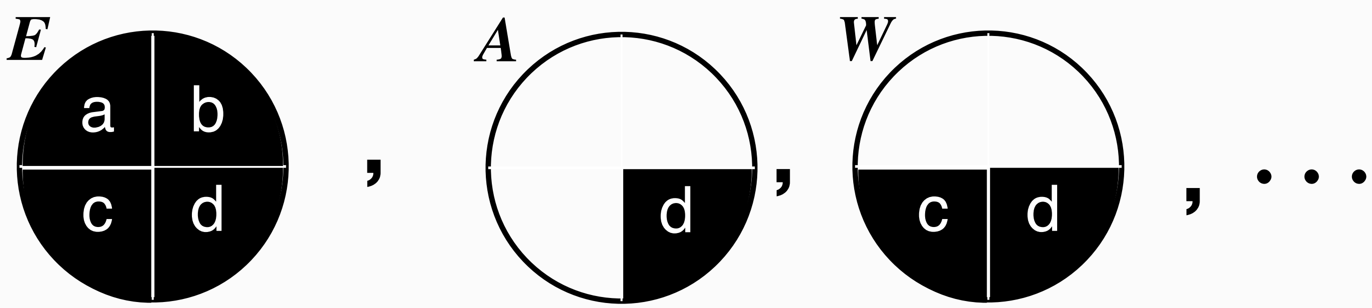
$\varphi_w(X) = X \Delta W$ en L^E

(¡Únicamente si w es complementado con complemento w^c tal que $w^c = w'$!).

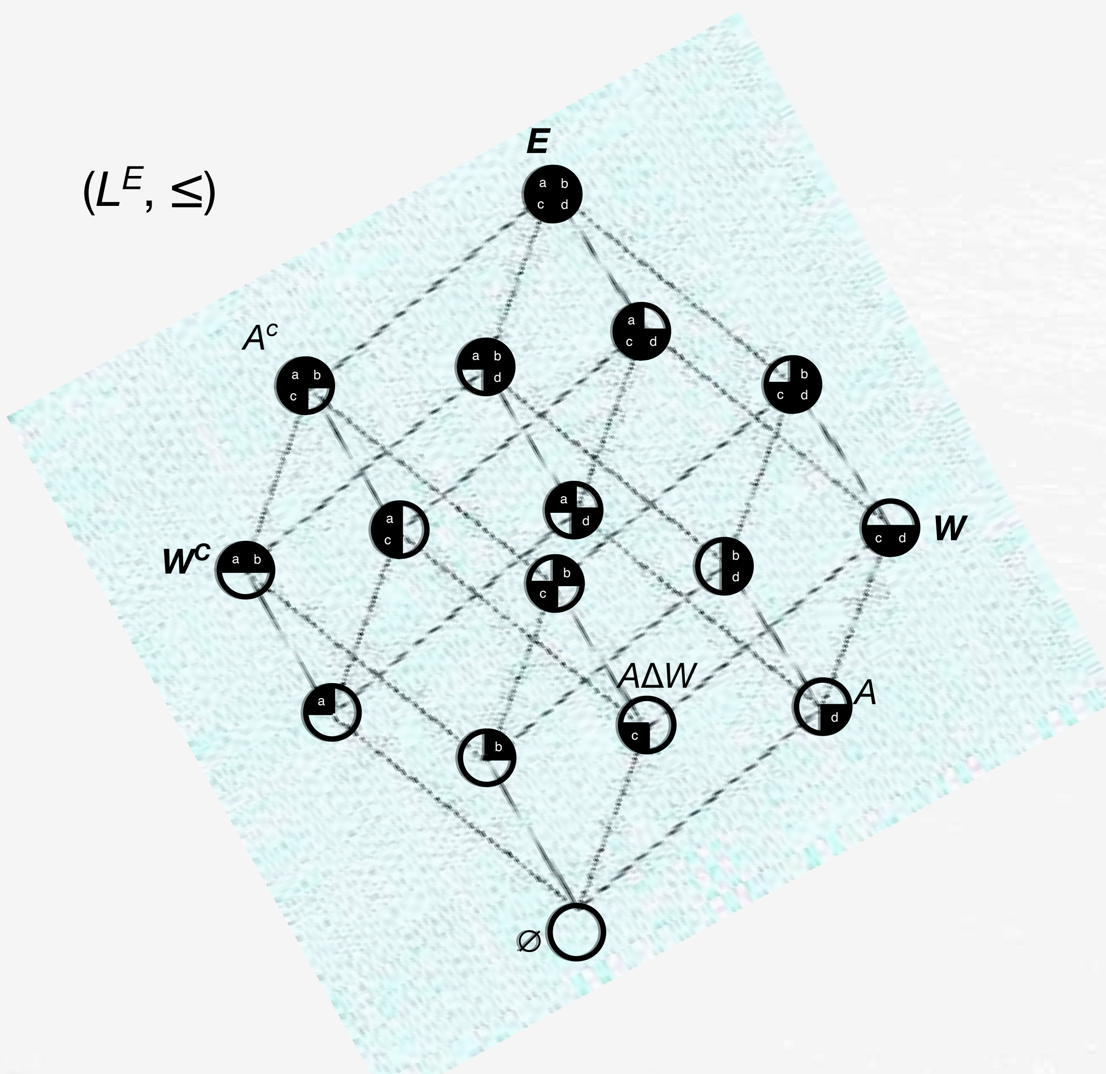
$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L \to L$ tal que, si $x \in L$ es complementado, entonces $x' = x^c$.

E un referencial no vacío y $((L^E,\leq, \cdot,+,\emptyset, E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.

Nítidos:



$(L^E, \leq)$



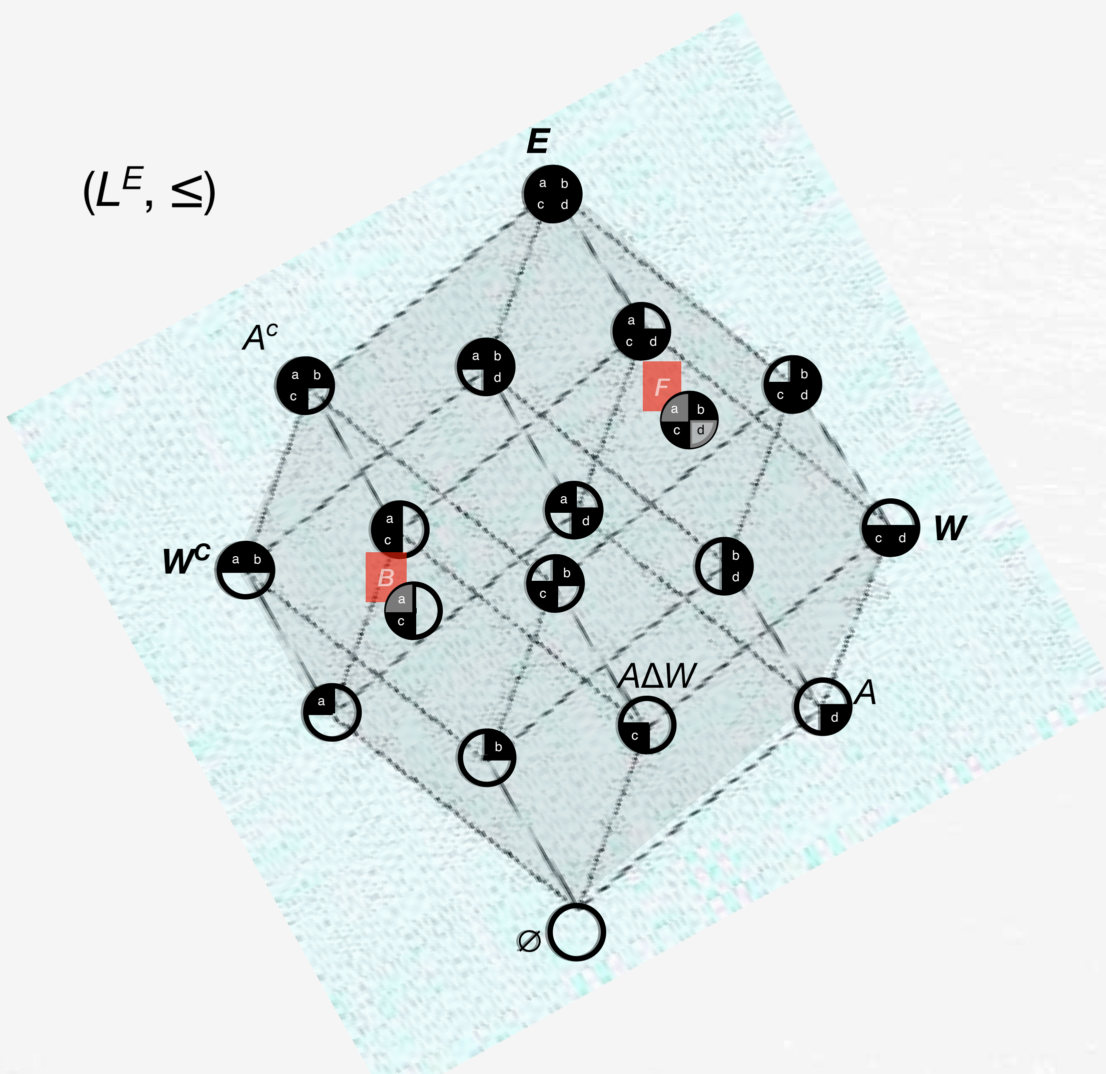
$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L\to L$ tal que, si $x\in L$ es complementado, entonces $x'=x^c$.

E un referencial no vacío y $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.

Nítidos:

Borrosos propios:

$(L^E,\leq)$



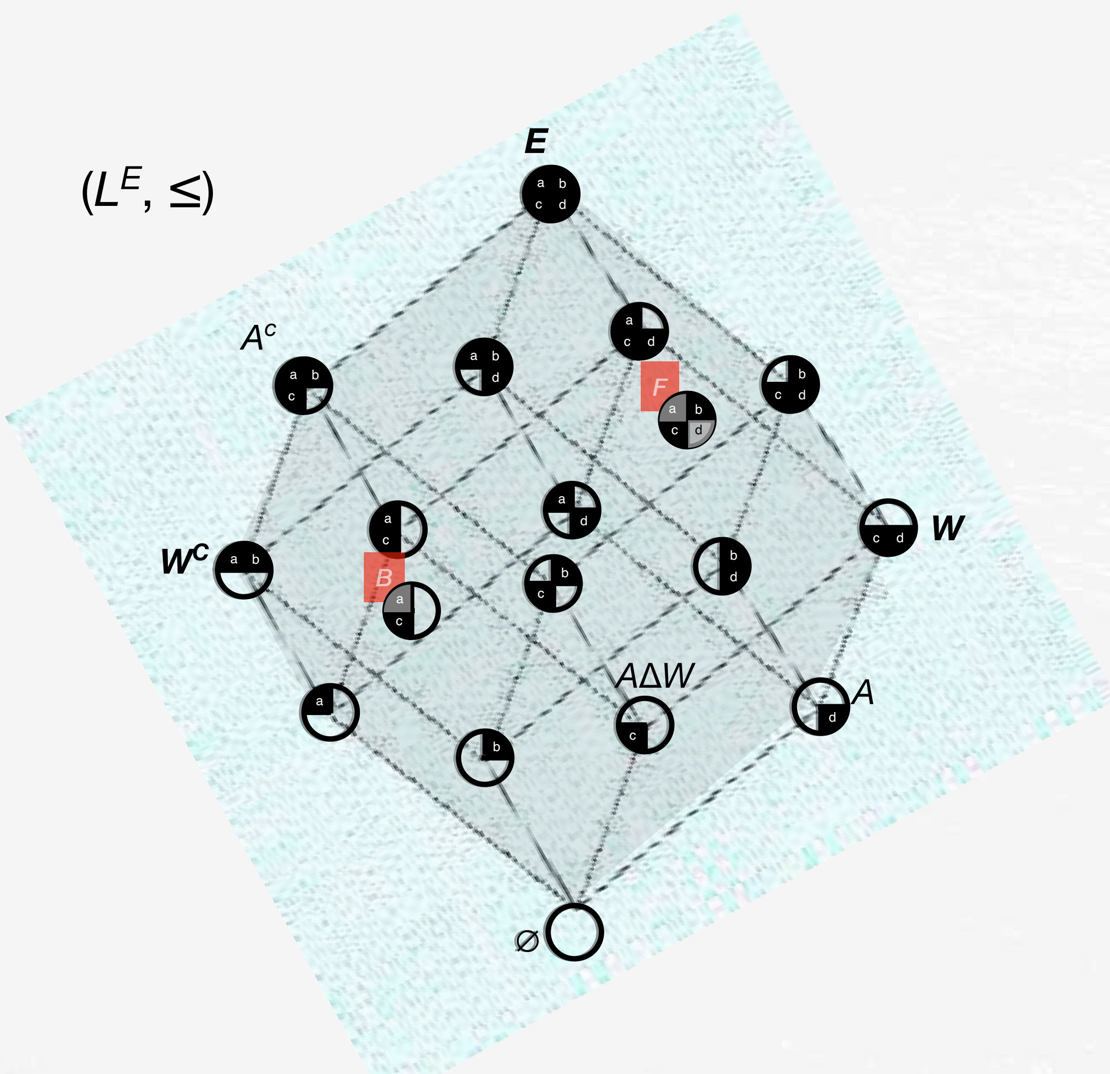
$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L\to L$ tal que, si $x \in L$ es complementado, entonces $x'=x^c$.

E un referencial no vacío y $((L^E,\leq, \cdot,+,\varnothing, E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.

Nítidos: Borrosos propios:

$$X\Delta W = (X\cdot W^c)+(X'\cdot W) \quad \forall (X, W) \in L^E X P(E)$$

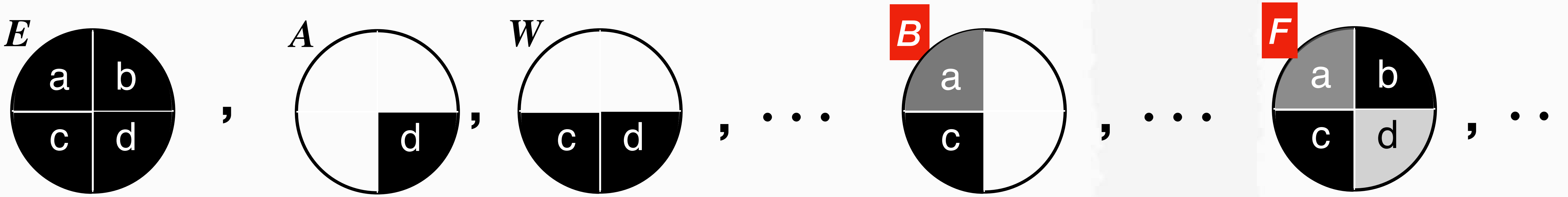
$(L^E, \leq)$



$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L\to L$ tal que, si $x \in L$ es complementado, entonces $x'=x^c$.

E un referencial no vacío y $((L^E,\leq, \cdot,+,\varnothing, E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.

Nítidos: Borrosos propios:

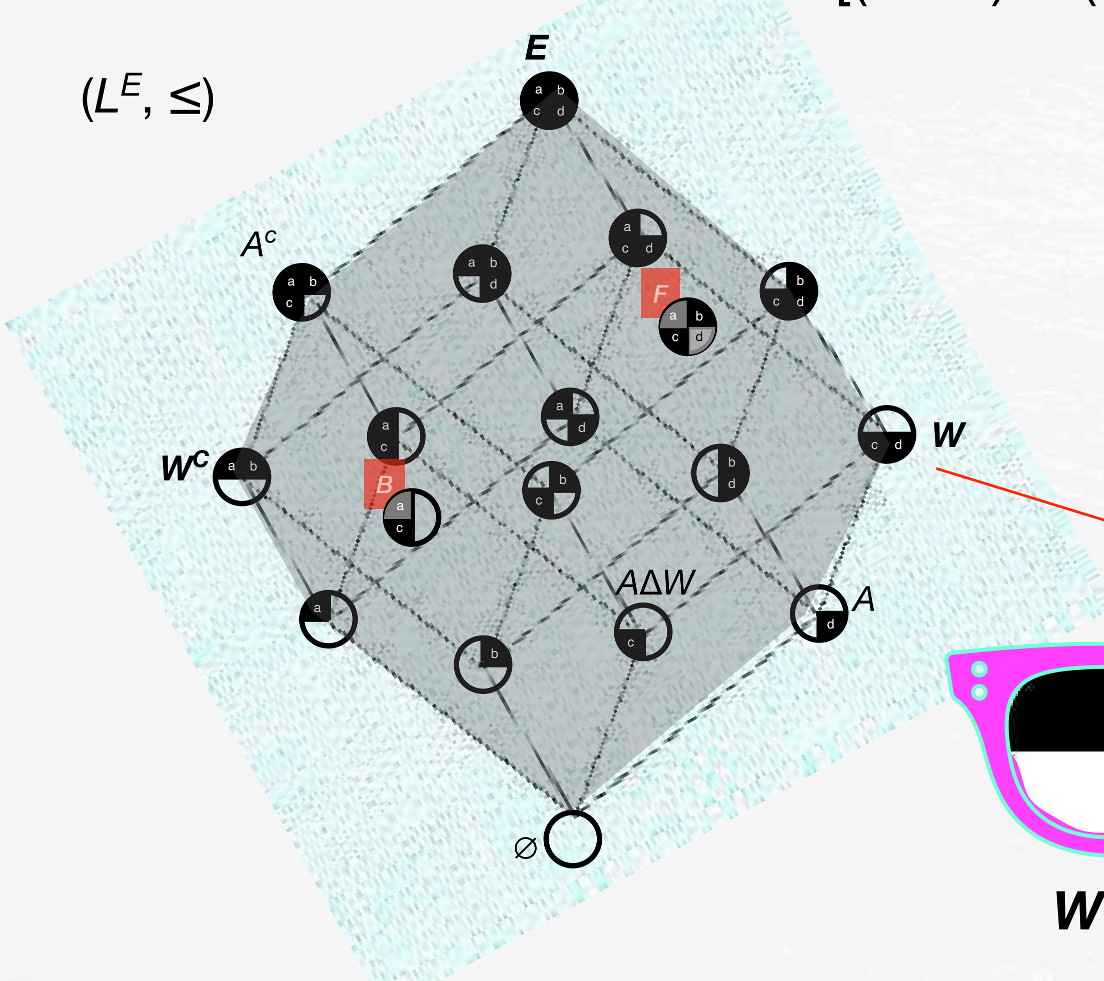


(Orden de actividad)

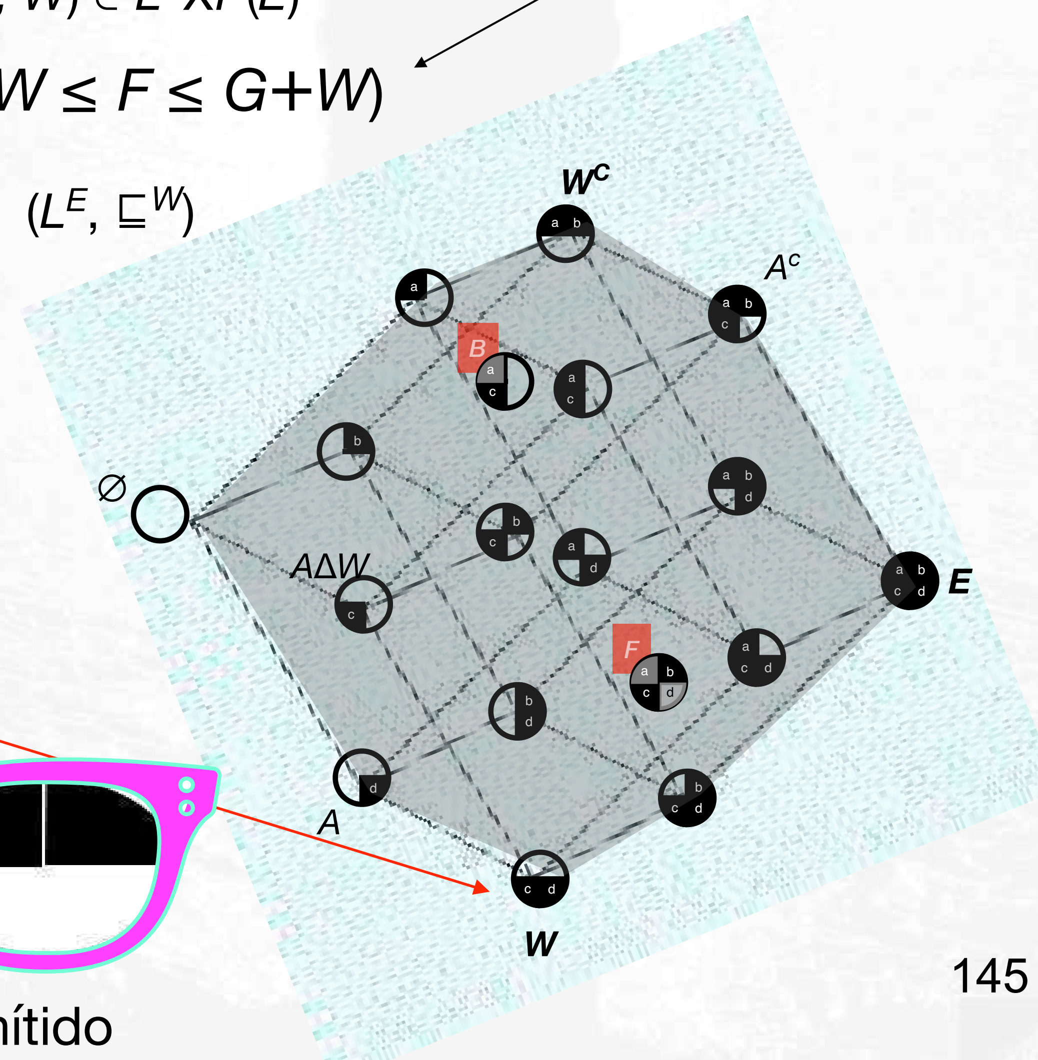
$$X\Delta W = (X\cdot W^c)+(X'\cdot W) \quad \forall(X, W) \in L^E X P(E)$$

$$F \sqsubseteq^W G \Leftrightarrow [(F\Delta W) \leq (G\Delta W)] \Leftrightarrow (G\cdot W \leq F \leq G+W)$$

$(L^E, \leq)$



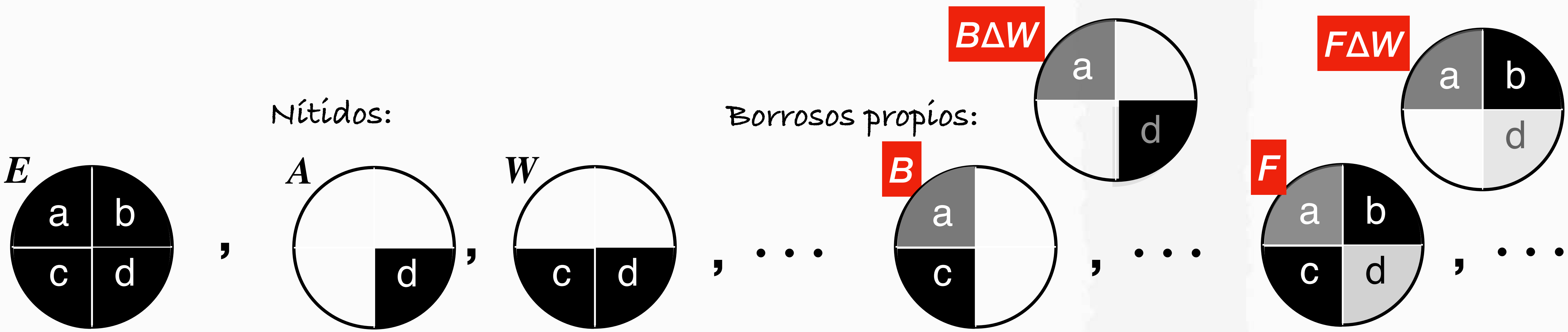
$(L^E, \sqsubseteq^W)$



W subconjunto nítido

$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L\rightarrow L$ tal que, si $x \in L$ es complementado, entonces $x'=x^c$.

E un referencial no vacío y $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.

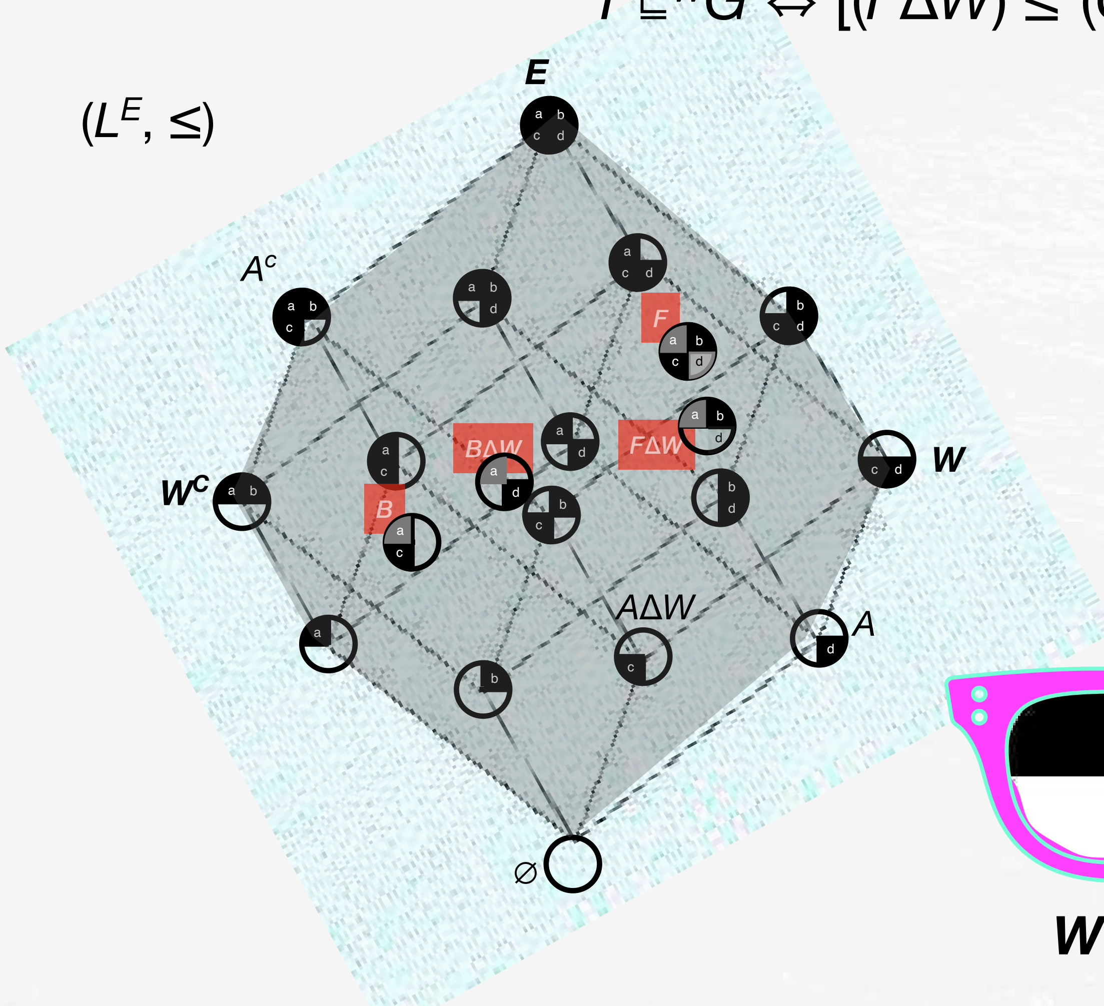


(Orden de actividad)

$$X\Delta W = (X\cdot W^c)+(X'\cdot W) \quad \forall (X, W) \in L^E X P(E)$$

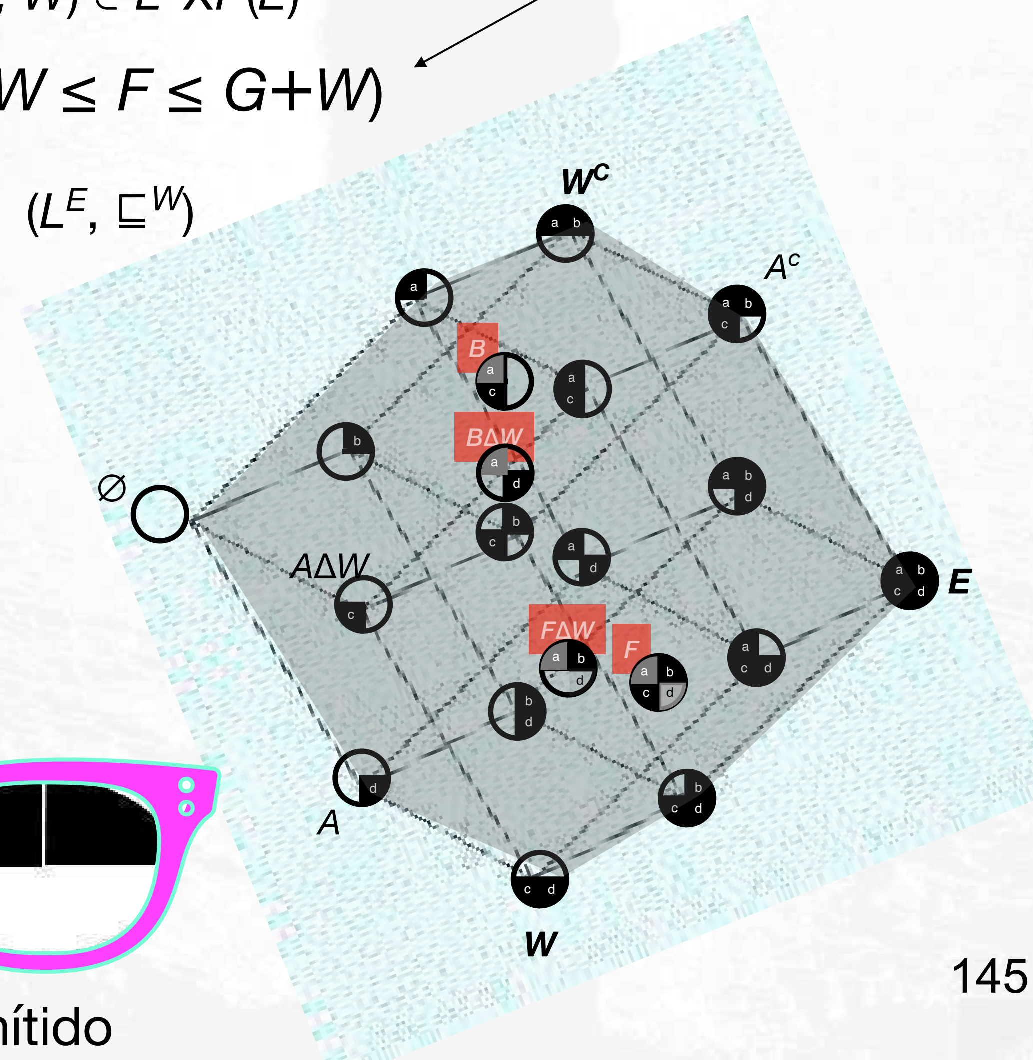
$$F \sqsubseteq^W G \Leftrightarrow [(F\Delta W) \leq (G\Delta W)] \Leftrightarrow (G\cdot W \leq F \leq G+W)$$

$(L^E, \leq)$



$X \longrightarrow X\Delta W$

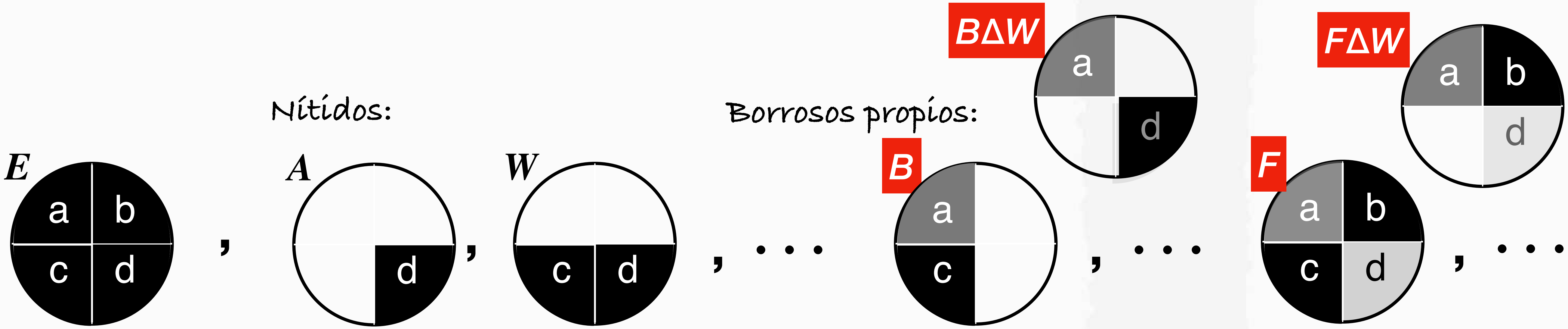
$(L^E, \sqsubseteq^W)$



W subconjunto nítido

$((L,\leq),')$ retículo distributivo completo con una negación fuerte $': L \to L$ tal que, si $x \in L$ es complementado, entonces $x'=x^c$.

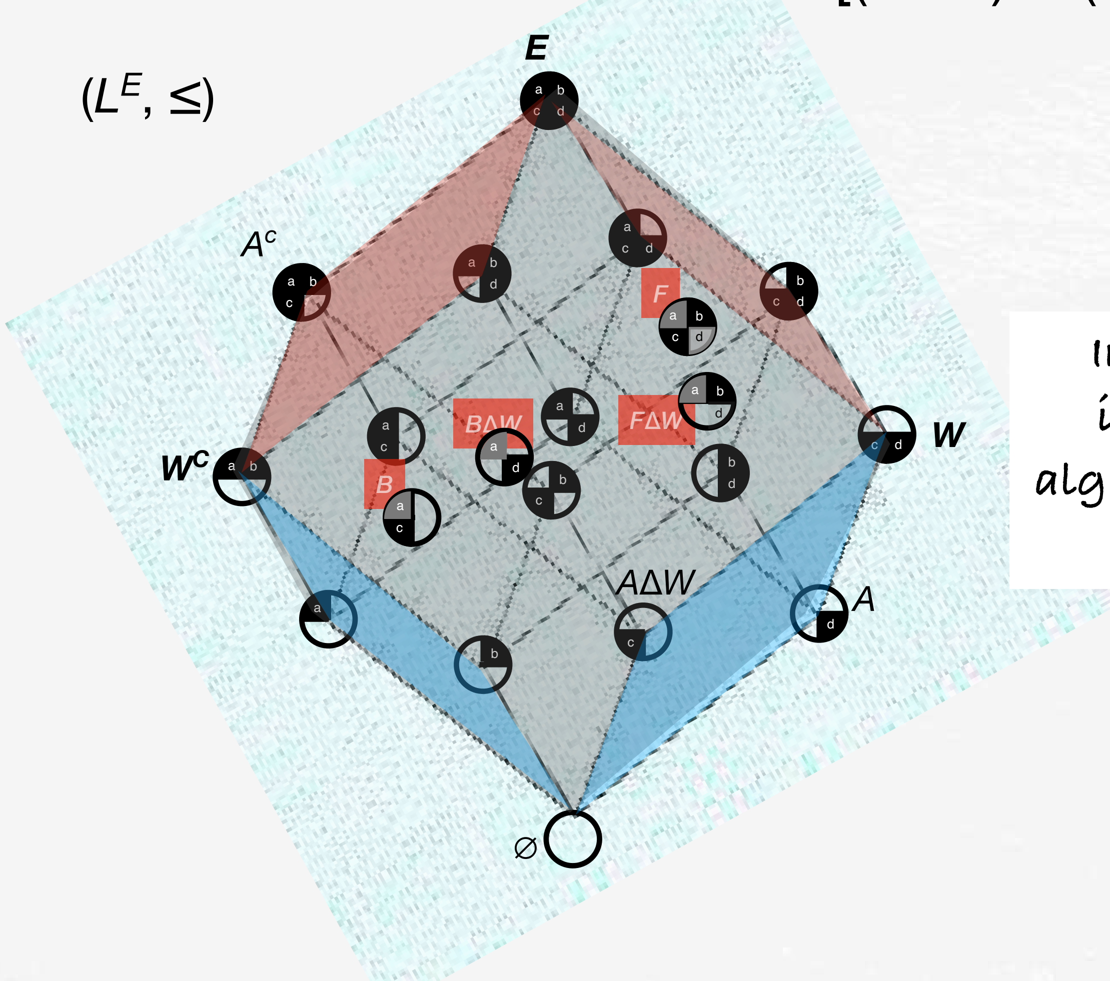
E un referencial no vacío y $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ el retículo distributivo de subconjuntos L-borrosos de E.



(Orden de actividad)

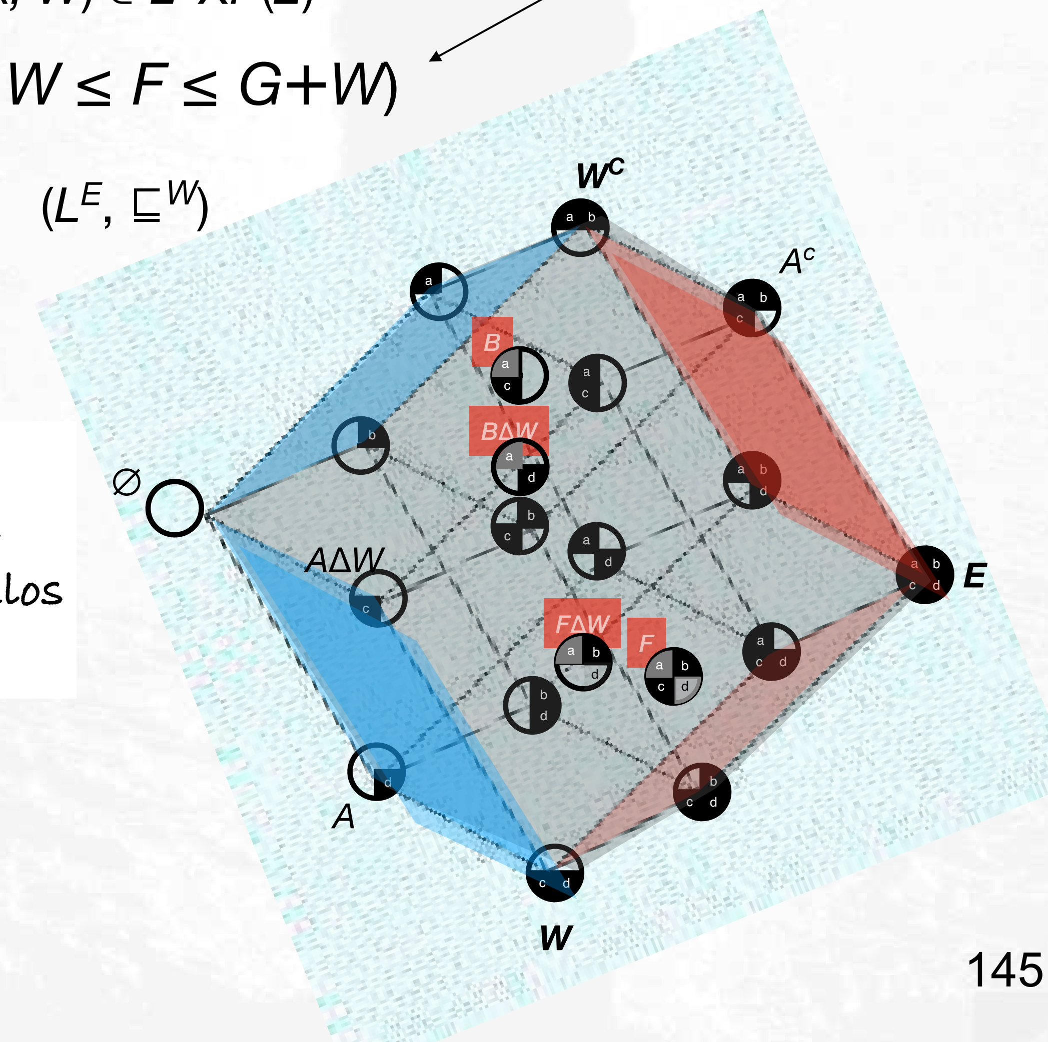
$$X\Delta W = (X\cdot W^c)+(X'\cdot W) \quad \forall (X, W) \in L^E X P(E)$$

$$F \sqsubseteq^W G \Leftrightarrow [(F\Delta W) \leq (G\Delta W)] \Leftrightarrow (G\cdot W \leq F \leq G+W)$$



$X \longrightarrow X\Delta W$

Imágenes por el isomorfismo de algunos subretículos distinguidos:



En resumen…

Imágenes (binarias y con tonos de grises).

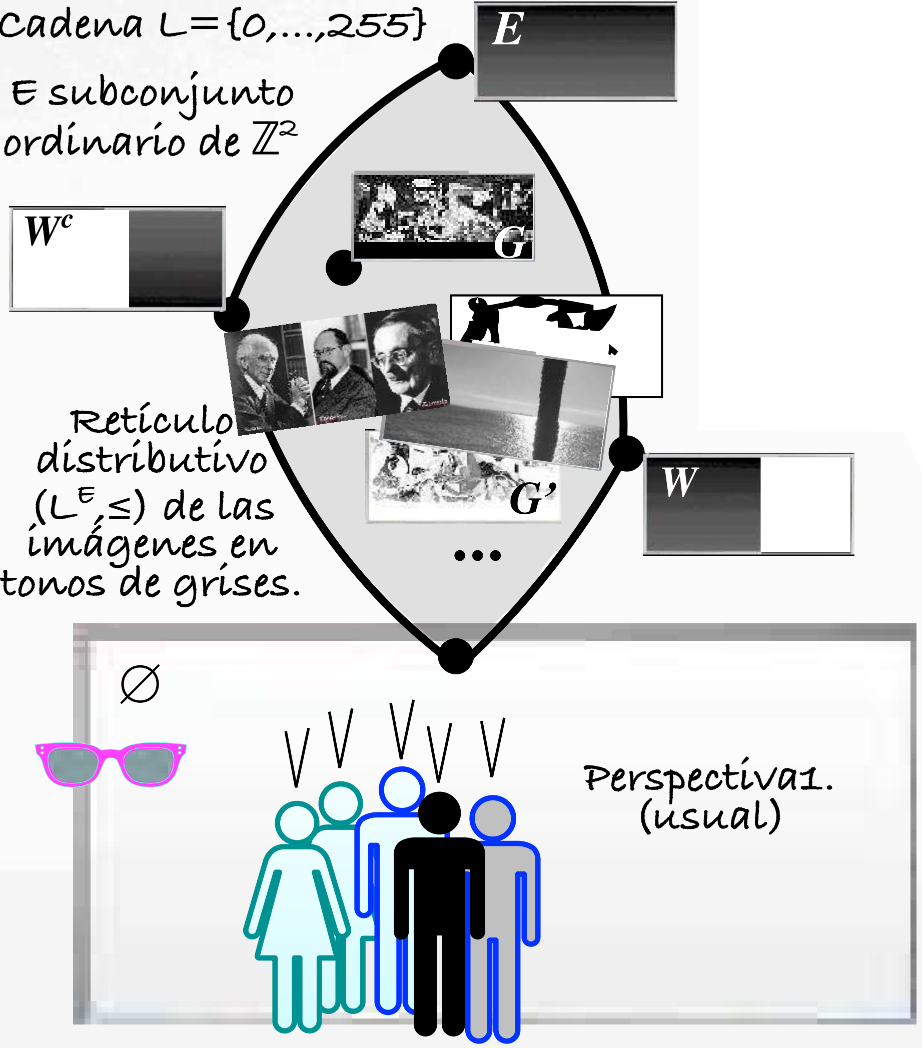
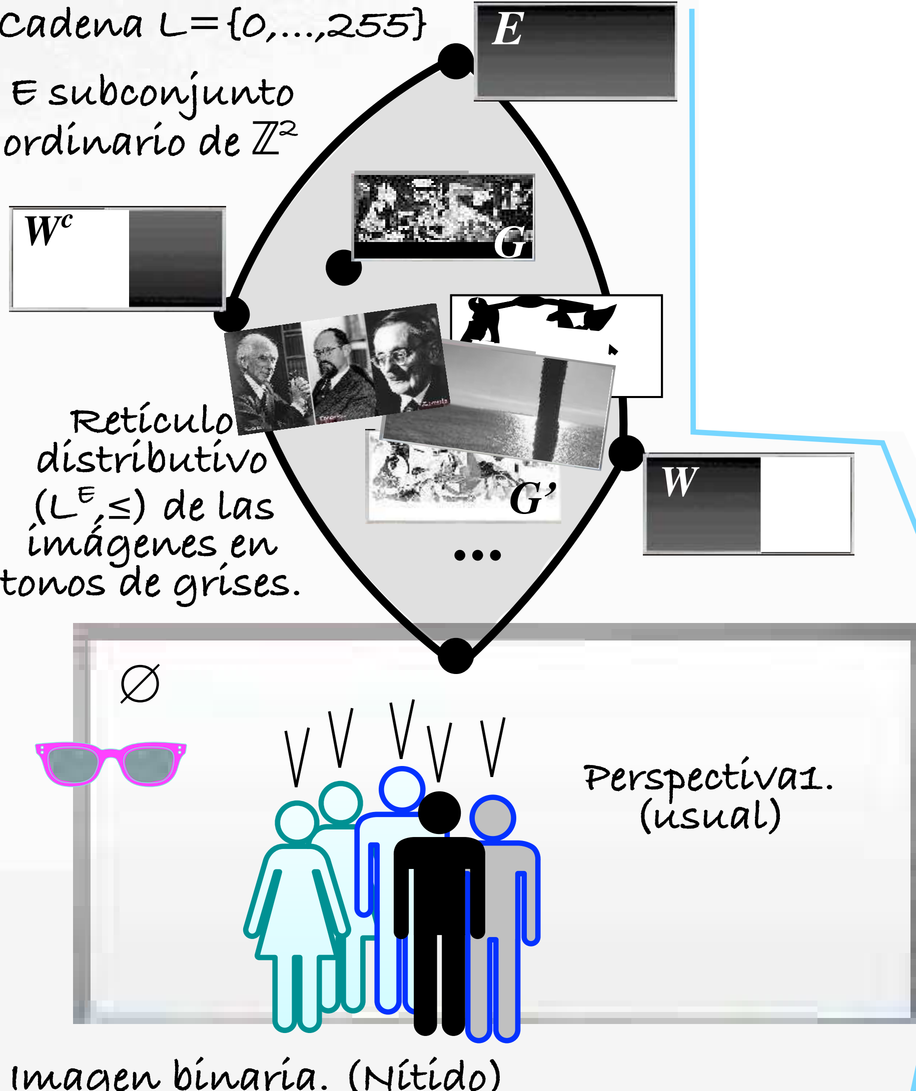
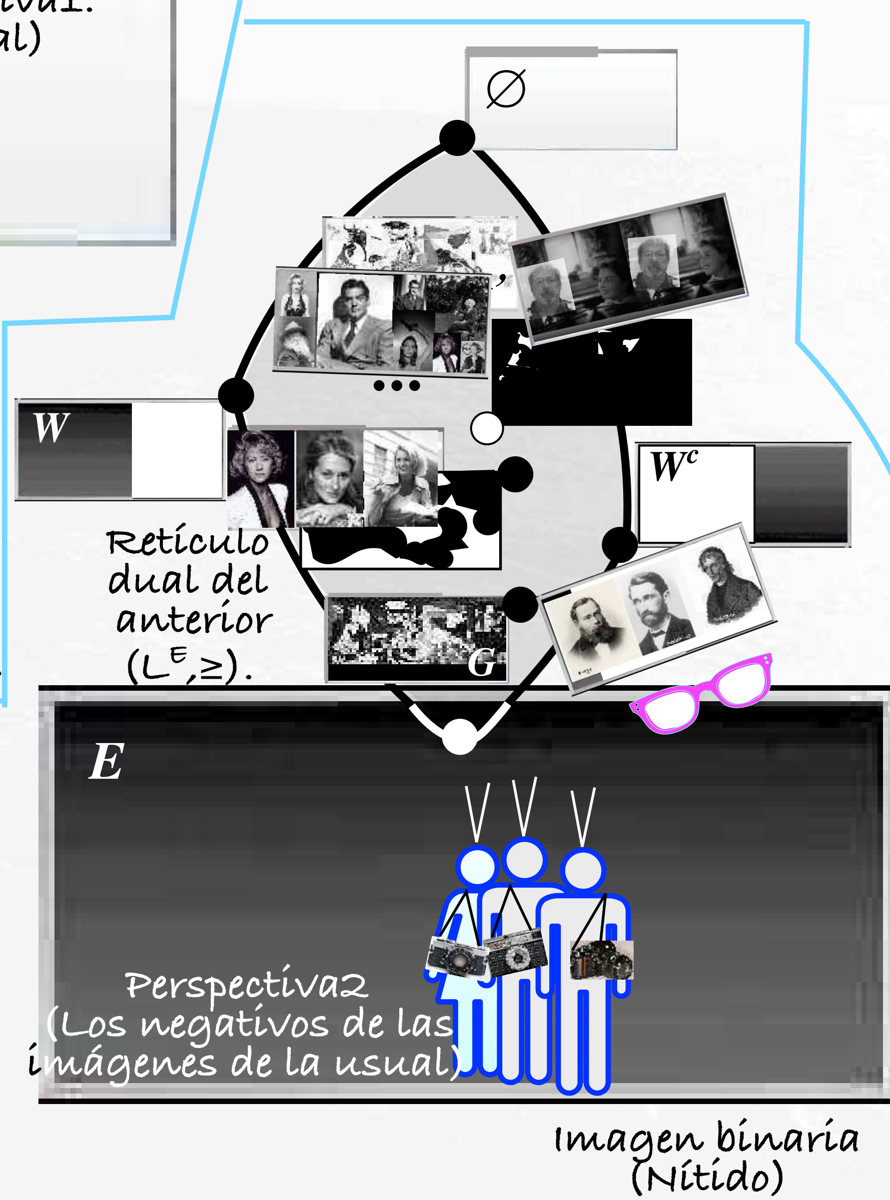


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.



Con la relación de orden ≤ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo ((L^E,≤, ·,+,∅, E),') con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.



Con la relación de orden ≥ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación ((L^E,≥, +,·, E, ∅),') es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

Hemos justificado aquí que, para el conjunto $N(L^E)$ de imágenes nítidas de L^E, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^W)_{W\in N(L^E)}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$:

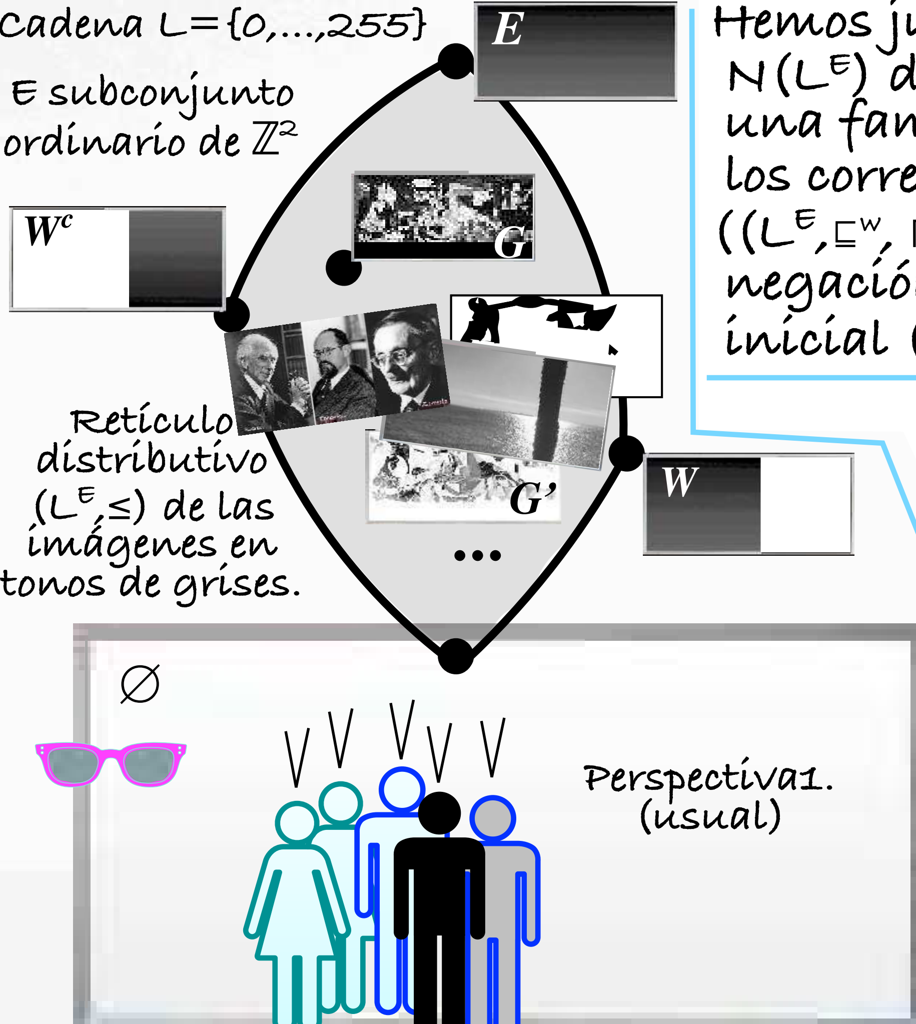


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden $\leq$ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

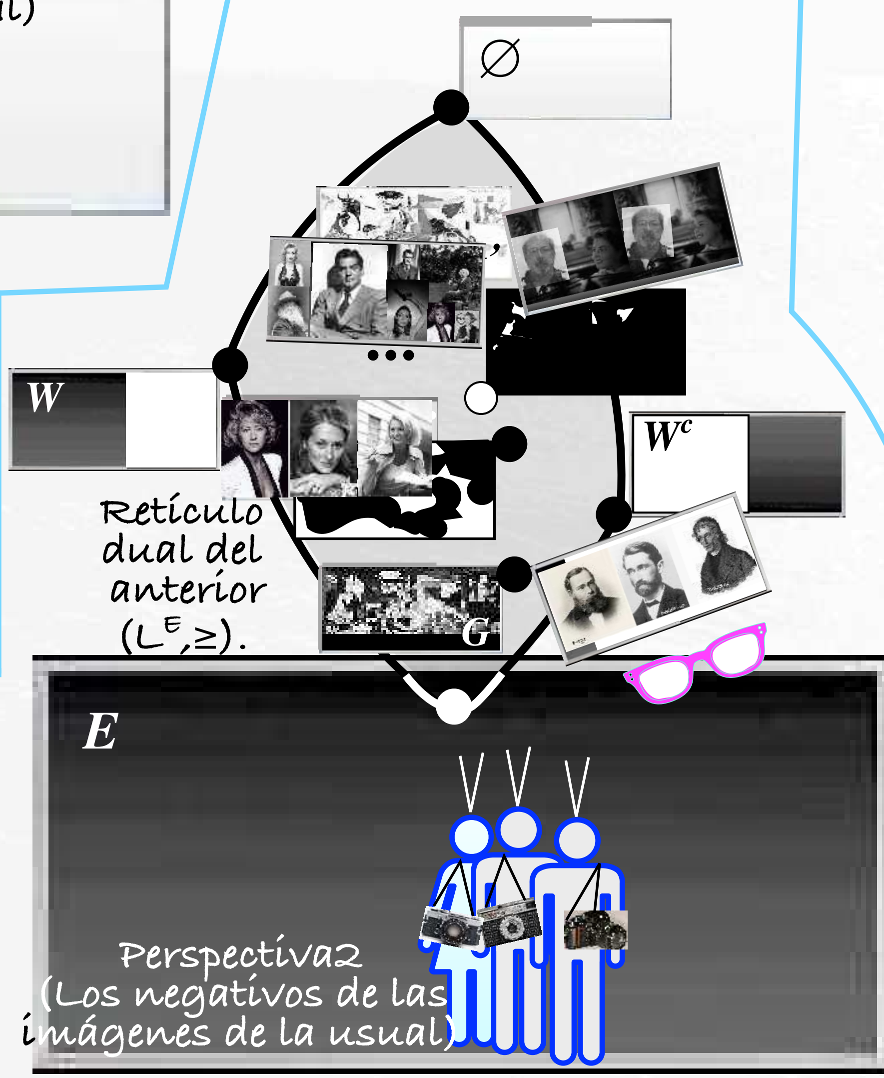


Imagen binaria (Nítido)

Con la relación de orden $\geq$ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((L^E,\geq,+,\cdot,E,\varnothing),')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde “los negativos” de las mismas imágenes.

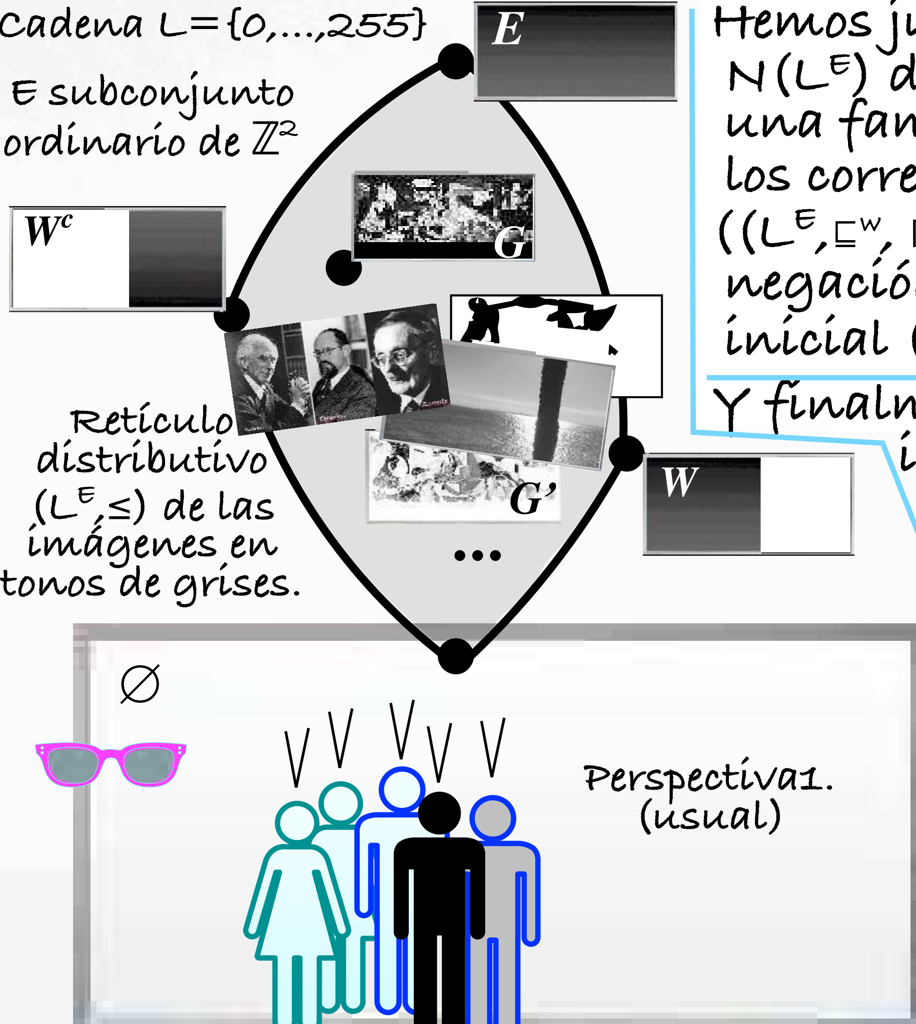
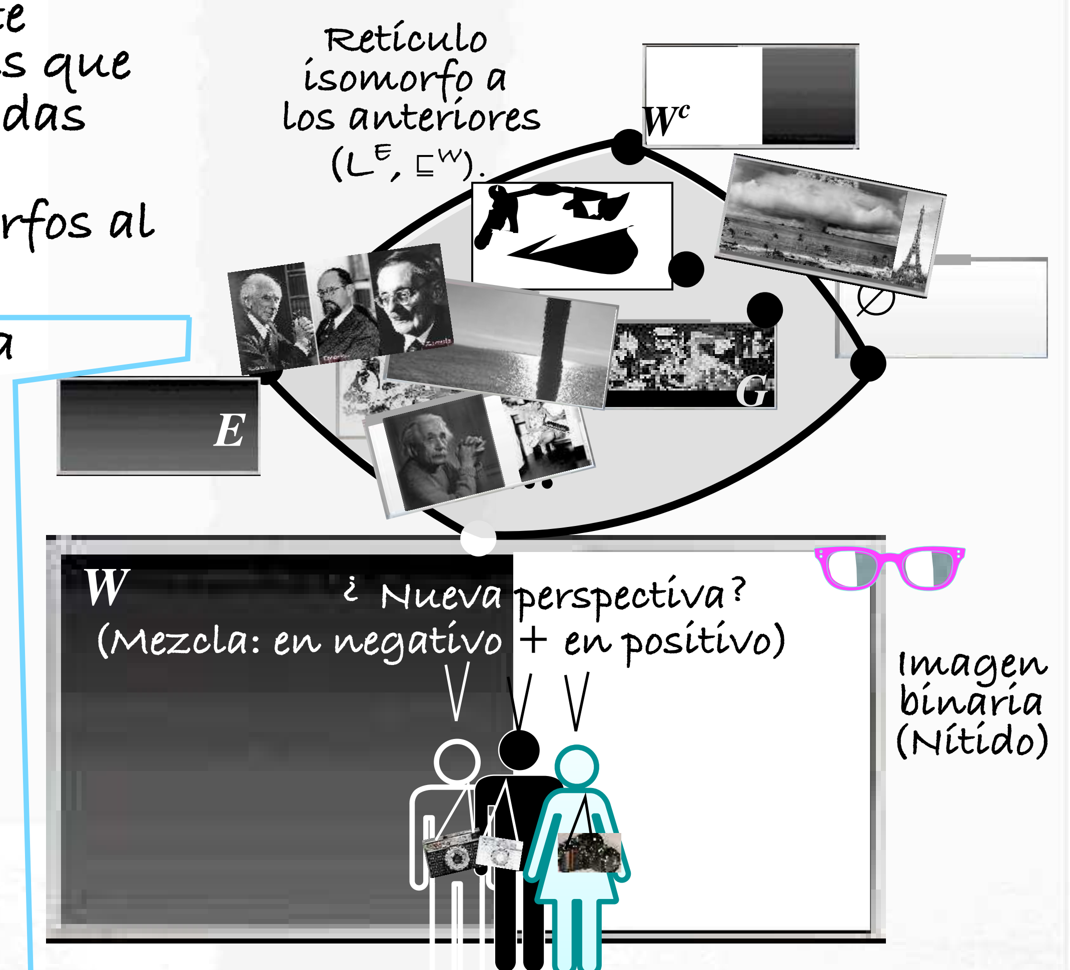


Imagen binaria. (Nítido)

Con la relación de orden $\leq$ usual entre imágenes, el conjunto de ellas es un retículo distributivo $((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),')$ con la negación que proporciona los negativos de las imágenes.

Hemos justificado aquí que, para el conjunto $N(L^E)$ de imágenes nítidas de L^E, existe una familia de órdenes $(\sqsubseteq^W)_{W\in N(L^E)}$ tales que los correspondientes estructuras asociadas $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$, con la misma negación, son también retículos isomorfos al inicial $((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),')$:



Y finalmente, cuando $G\in L^E$ no es una imagen nítida:
Hemos probado que también existe un orden $\sqsubseteq^G$ del mismo tipo, aunque ahora sólo obtenemos un inf-semiretículo acotado $(L^E,\sqsubseteq^G,\sqcap^G,G)$.

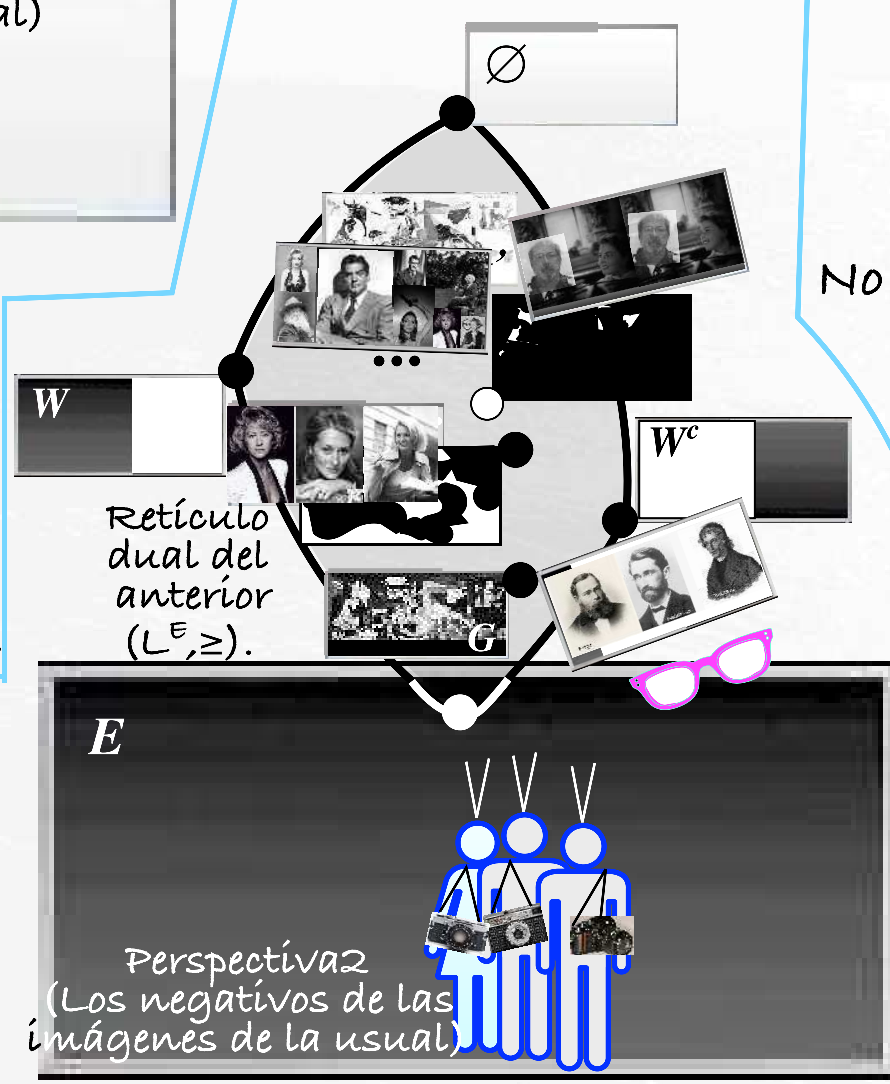
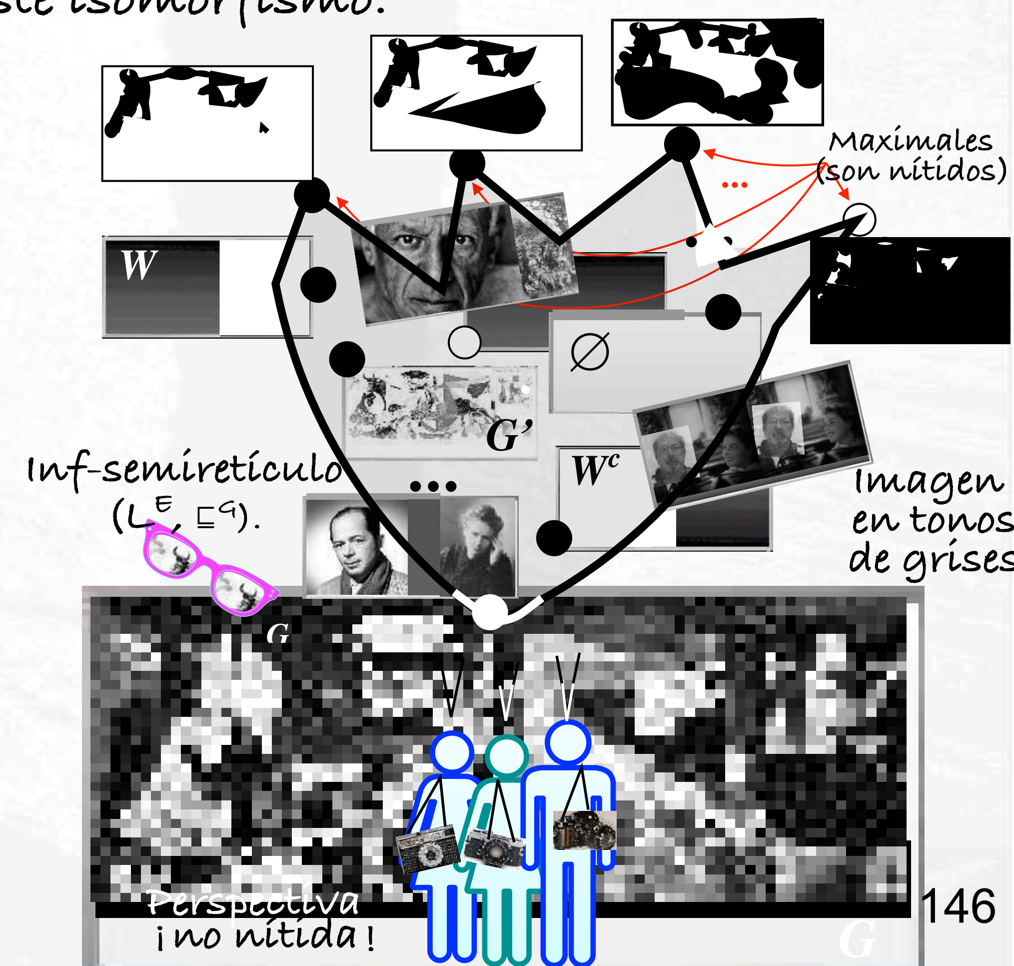


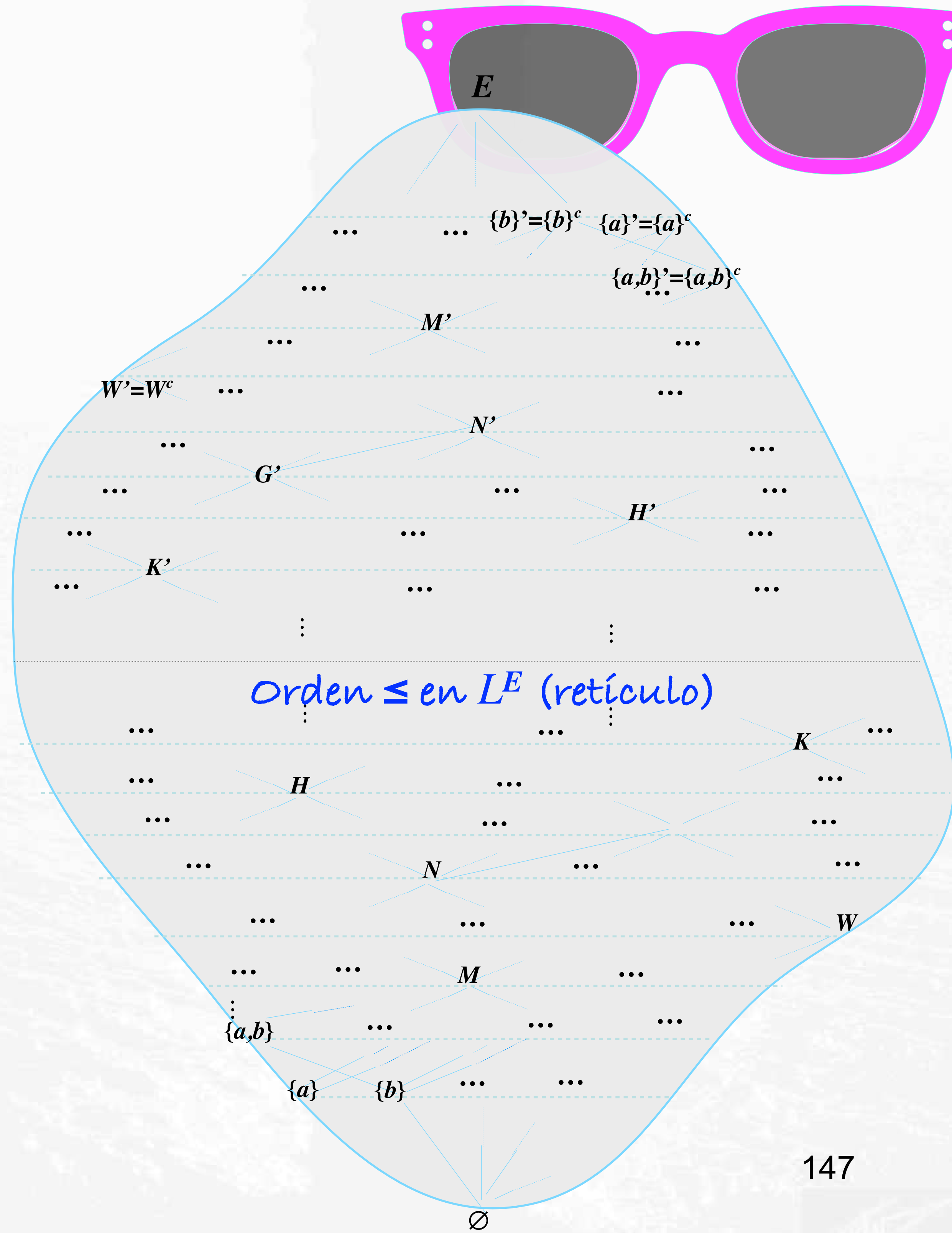
Imagen binaria (Nítido)

No existe isomorfismo.

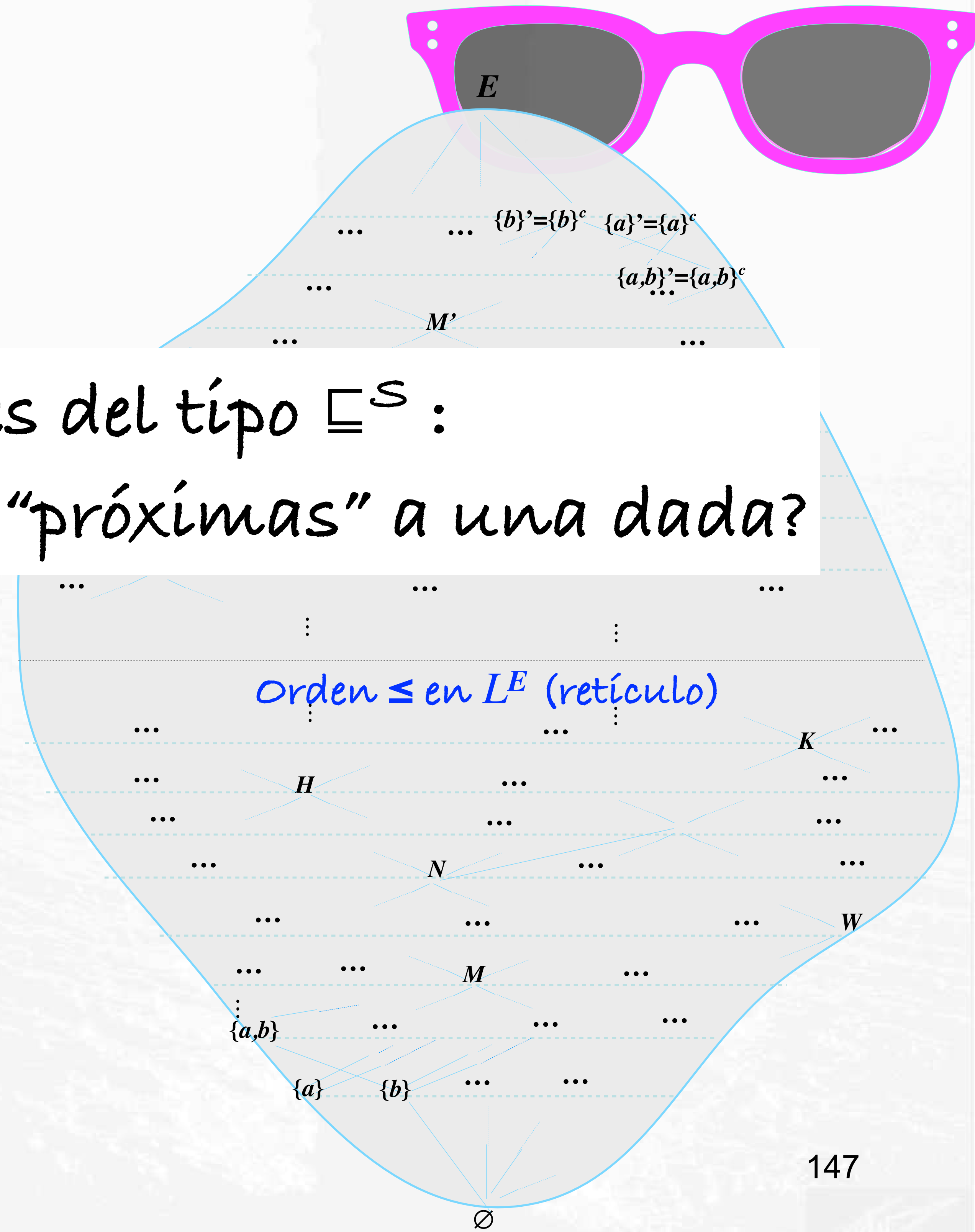


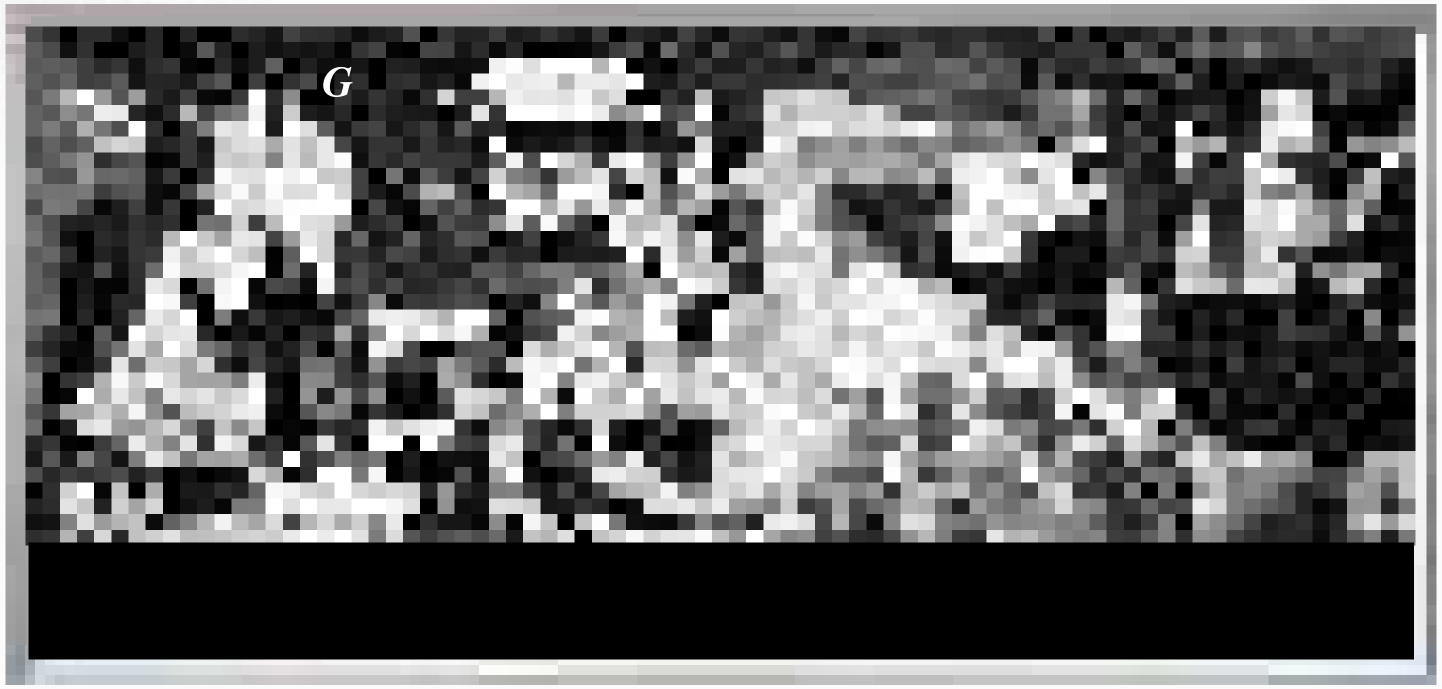
Con la relación de orden $\geq$ dual de la anterior, el Retículo distributivo con la misma negación $((L^E,\geq,+,\cdot,E,\emptyset),')$ es isomorfo, (y por tanto equivalente), a aquél. Representa la misma estructura, contemplada ahora desde "los negativos" de las mismas imágenes.

Imágenes “próximas” en L^E

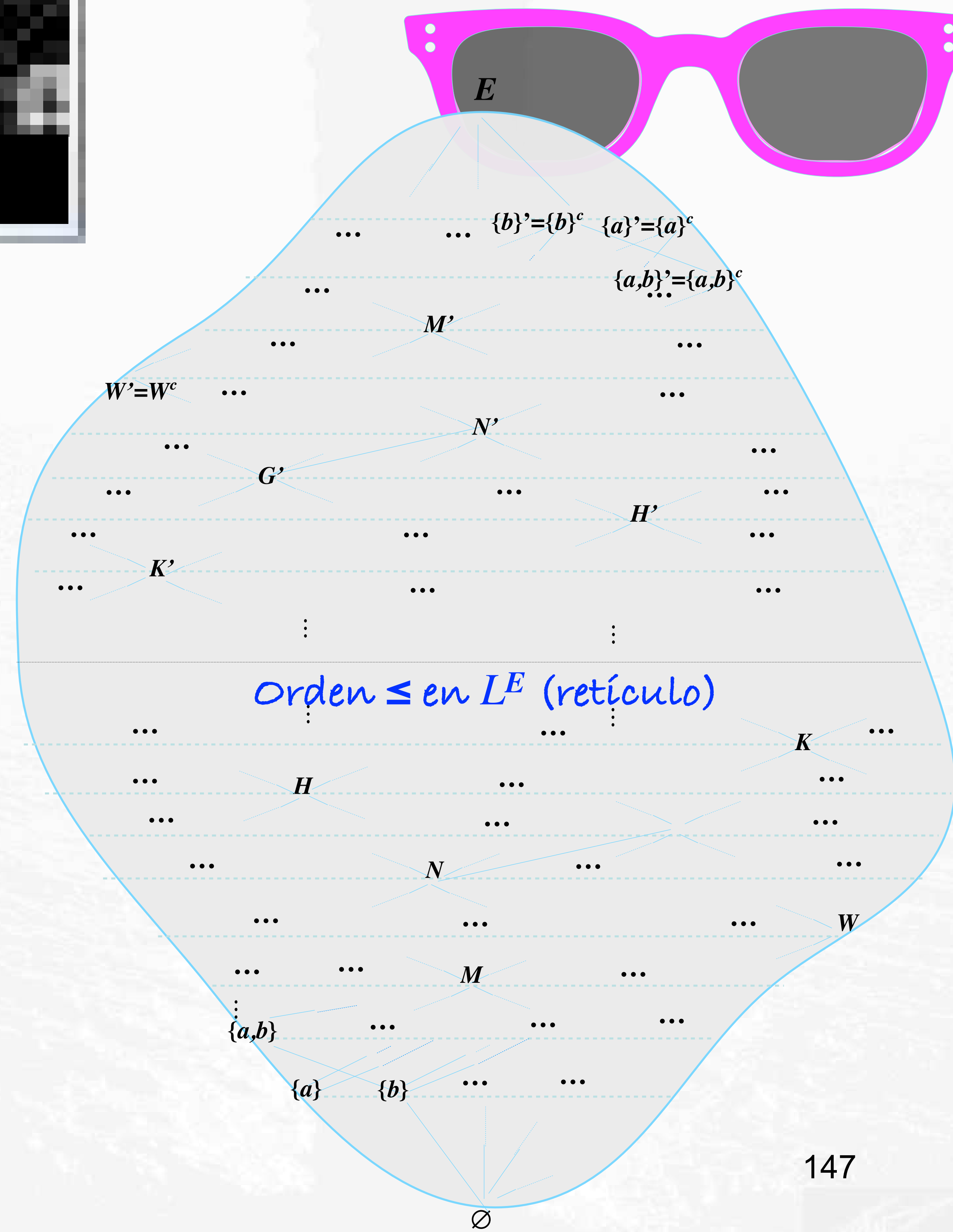


Una aplicación de los órdenes del tipo $\sqsubseteq^S$:
¿Acumulación de imágenes "próximas" a una dada?



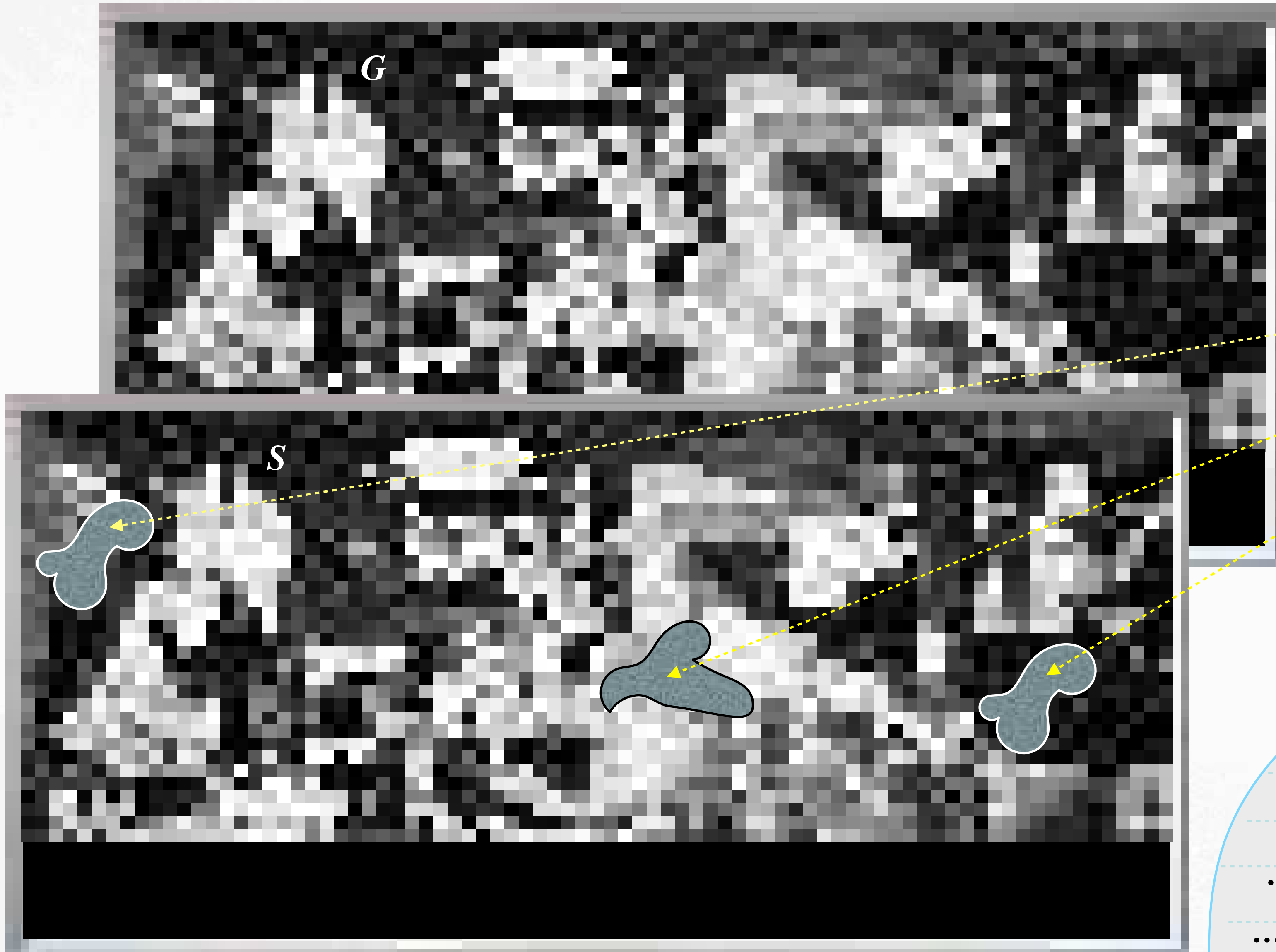


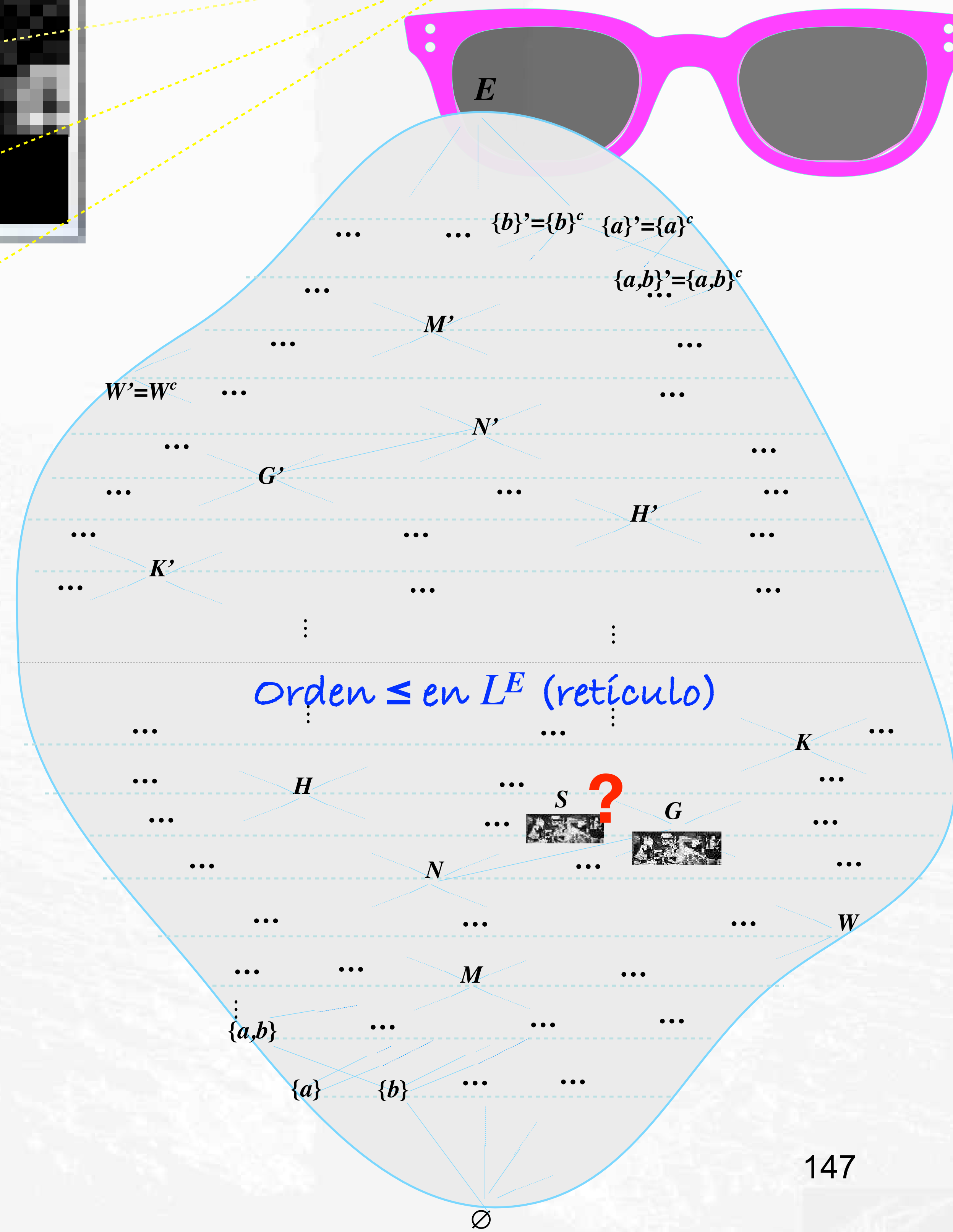
Imágenes "próximas" en L^E



Imágenes "próximas" en L^E

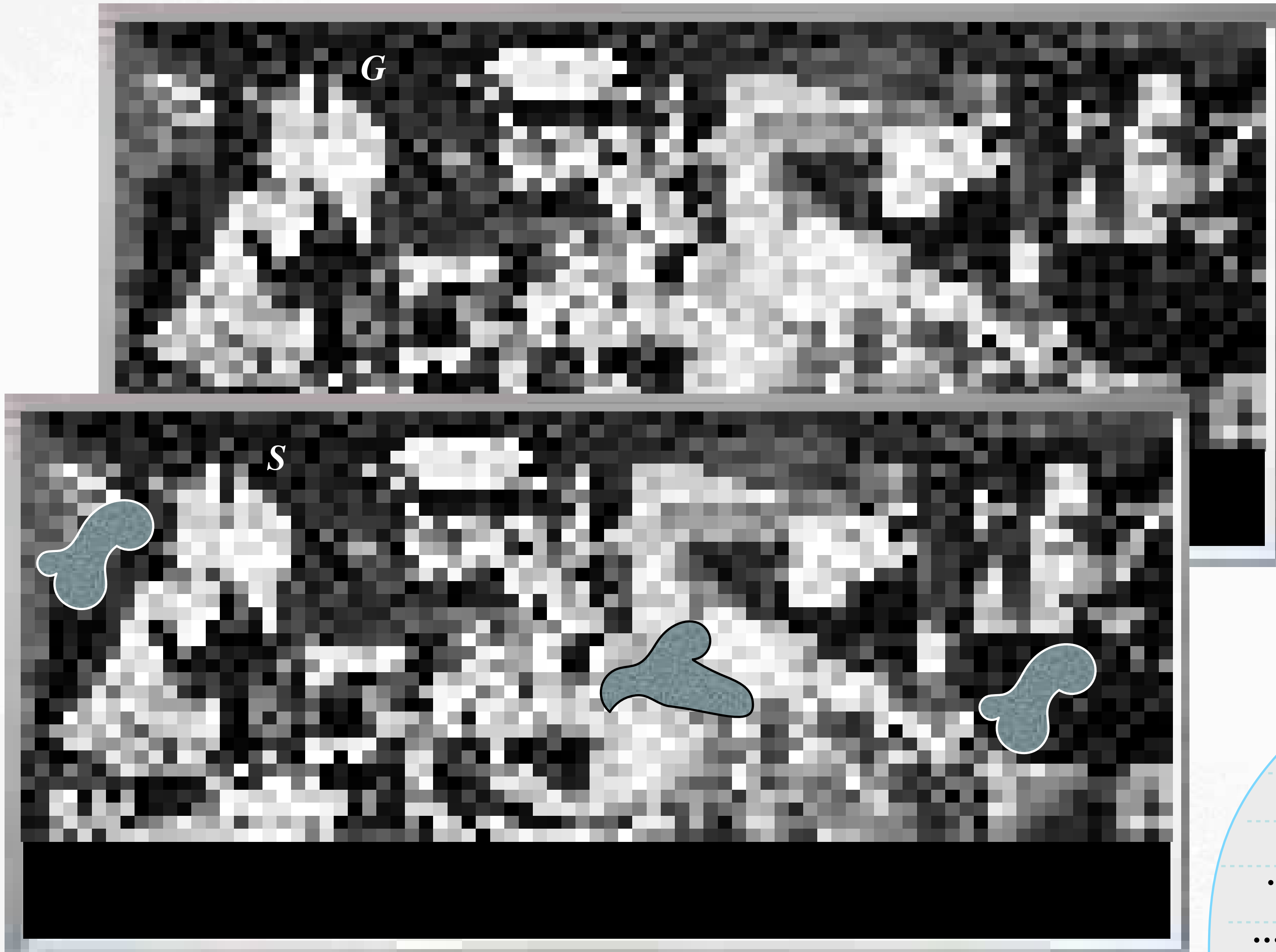
Las imágenes G y S difieren:

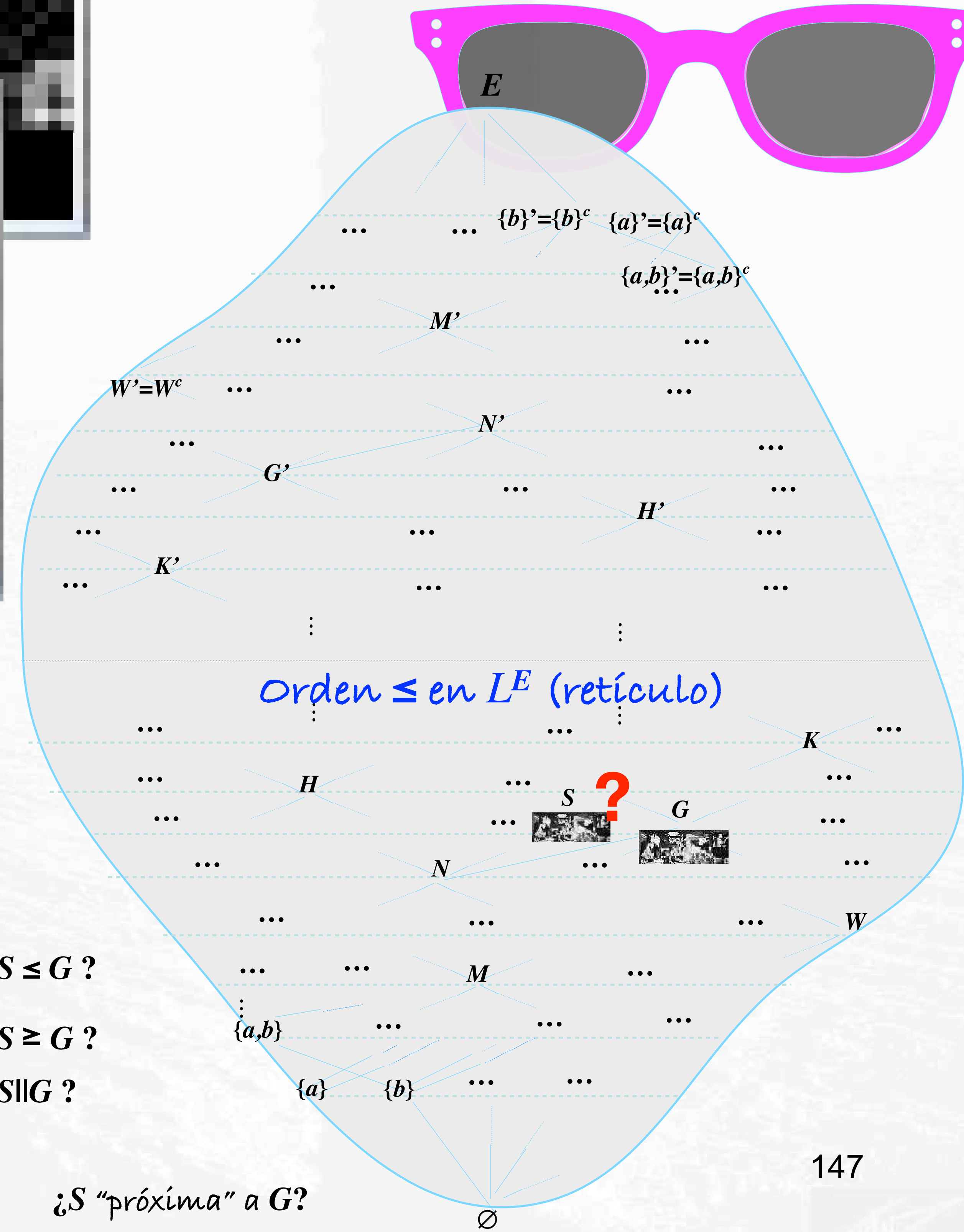




Imágenes "próximas" en L^E

¿Interesados en localizar imágenes próximas a una dada?





Orden de actividad $\sqsubseteq^S$ en L^E (inf-semiretículo)

$S \leq G$?

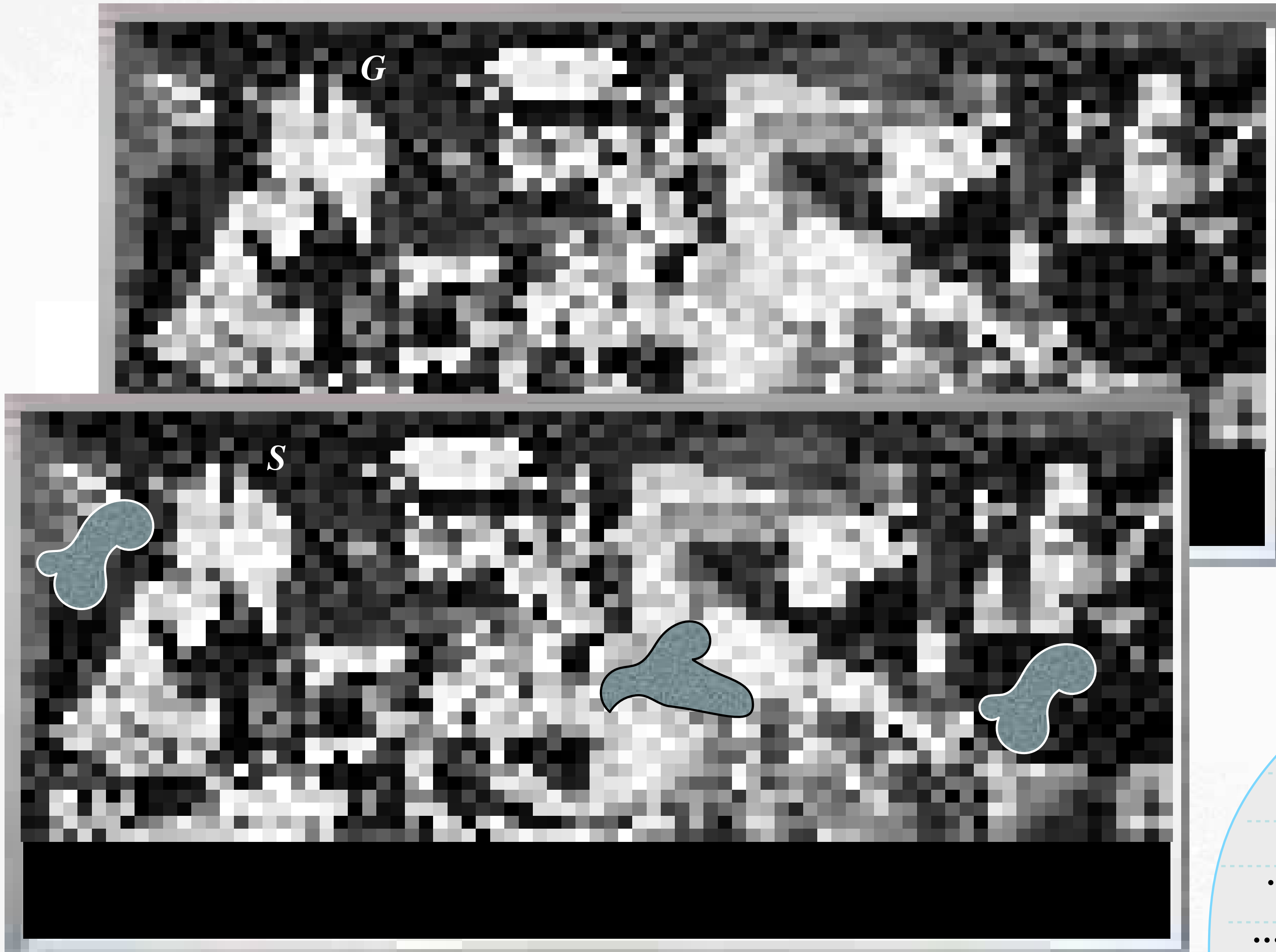
$S \geq G$?

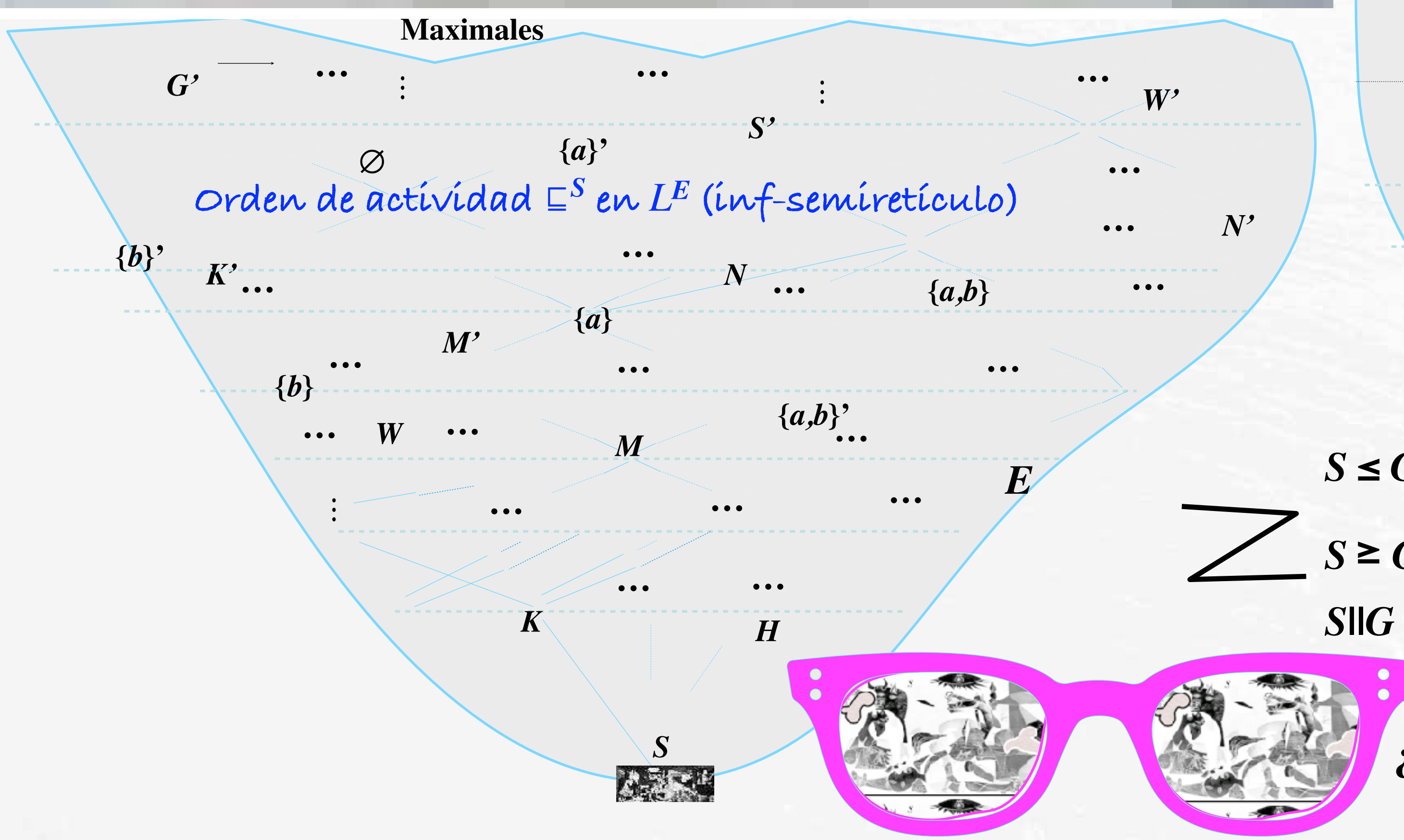
S||G ?

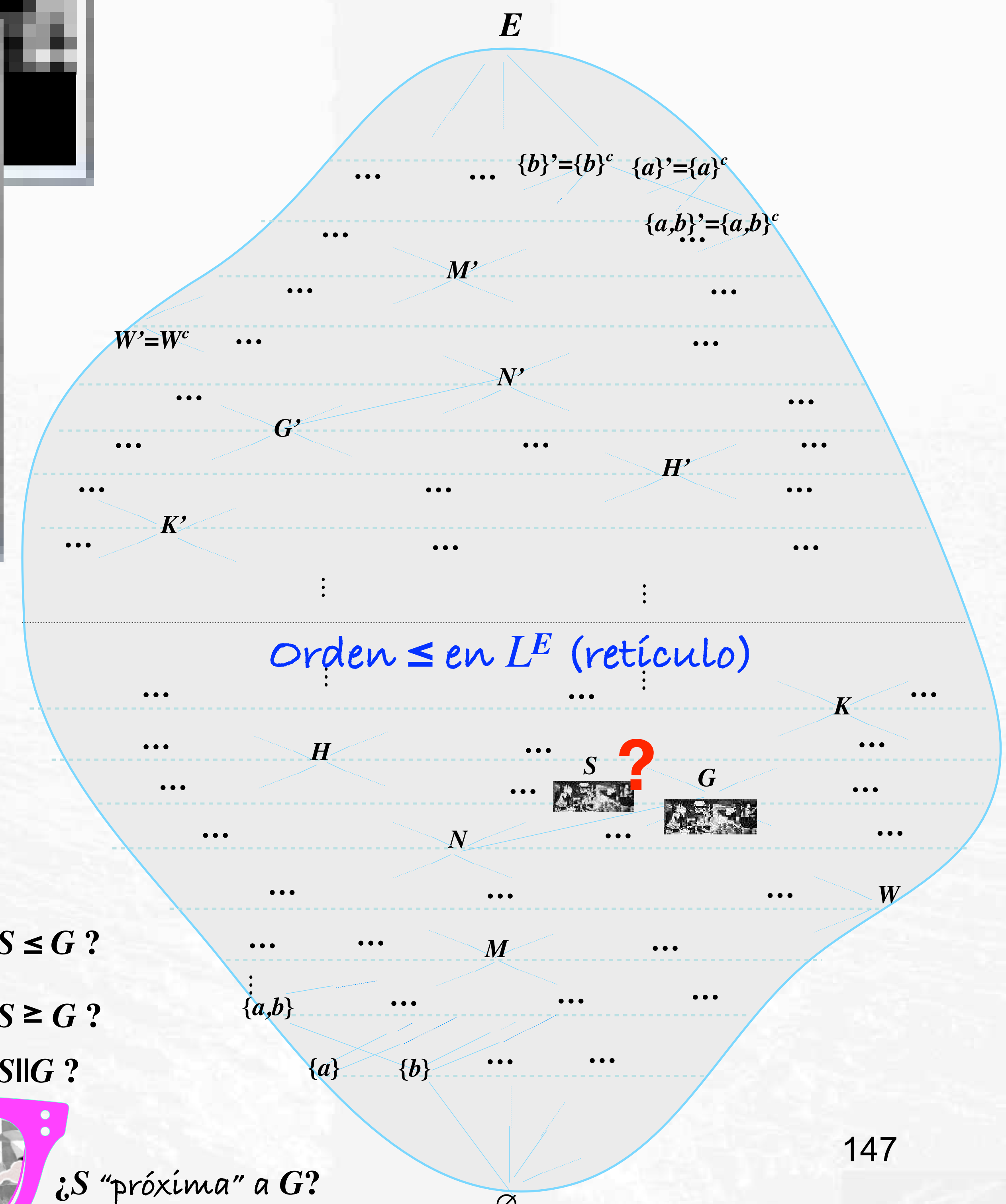
¿S "próxima" a G?

Imágenes "próximas" en L^E

¿Interesados en localizar imágenes próximas a una dada?







$S \leq G$?

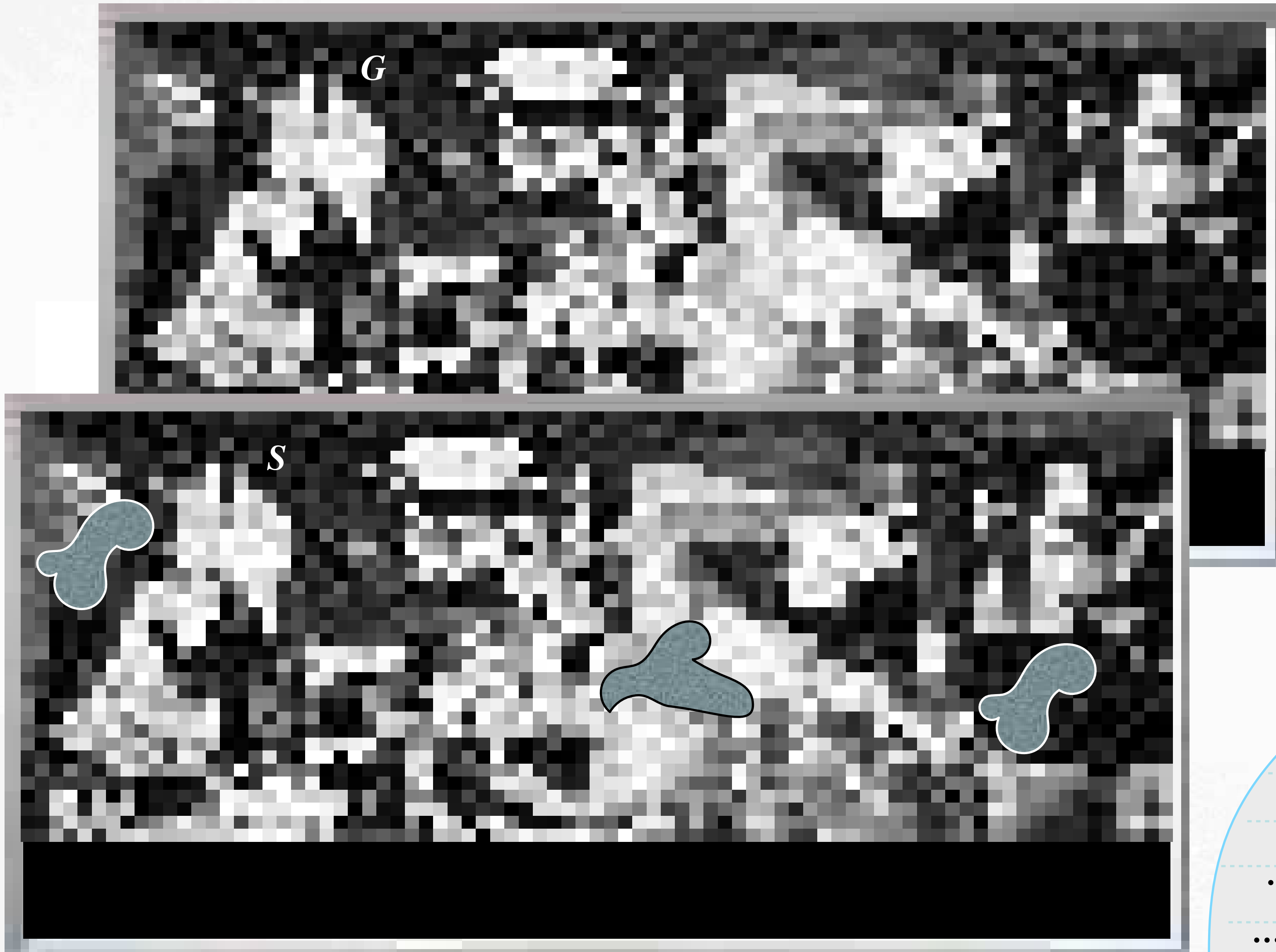
$S \geq G$?

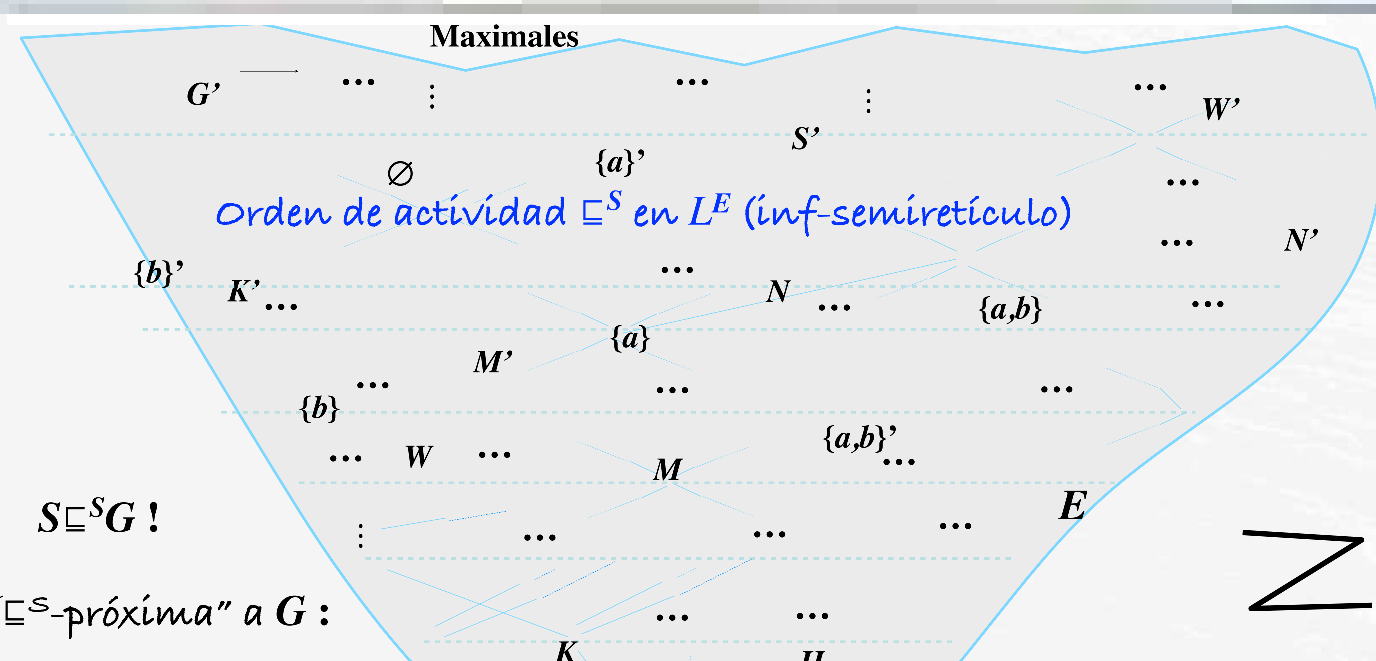
$S \| G$?

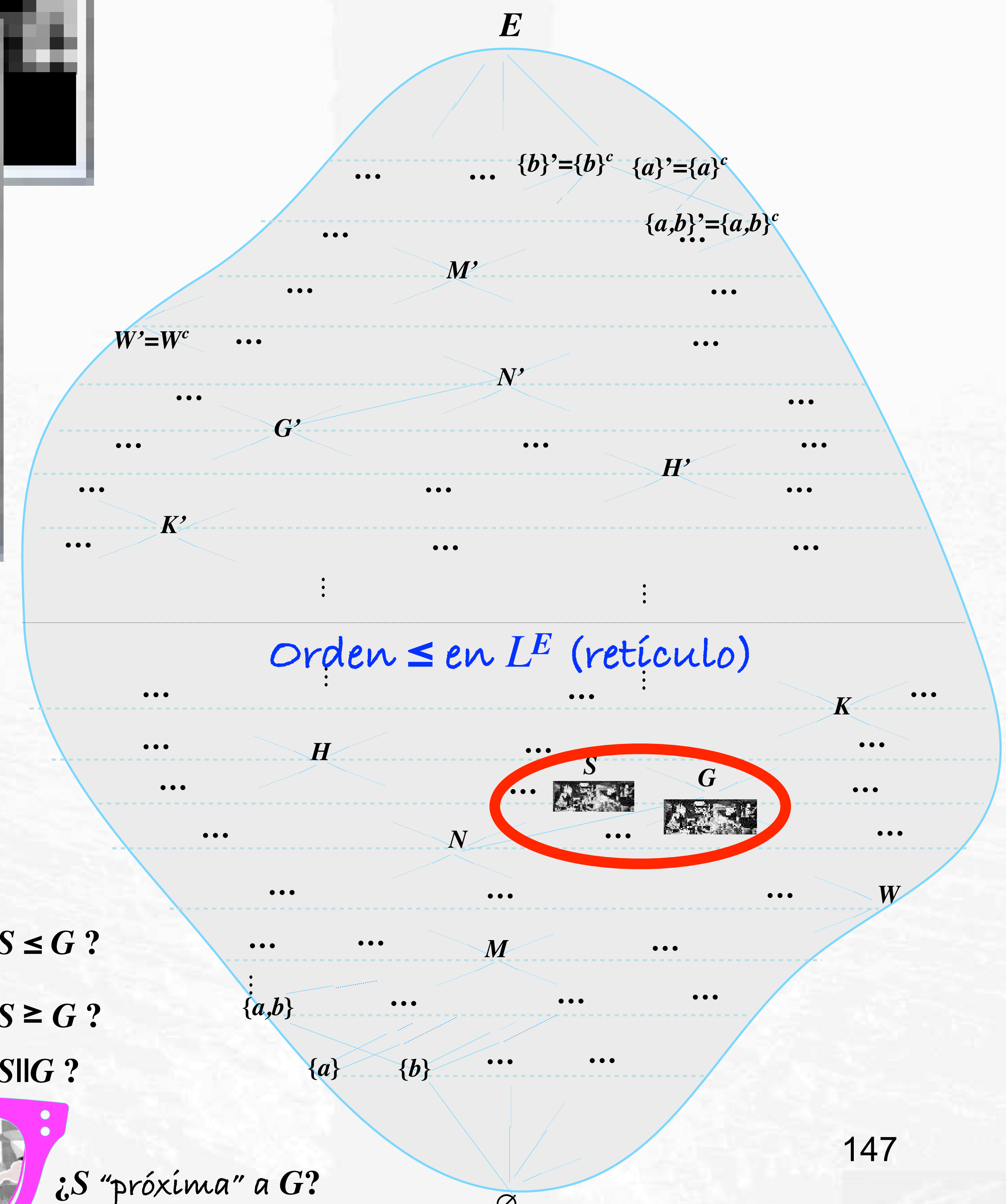
¿S "próxima" a G?

Imágenes "próximas" en L^E

¿Interesados en localizar imágenes próximas a una dada?







$S \sqsubseteq^S G$!

S "$\sqsubseteq^S$-próxima" a G :

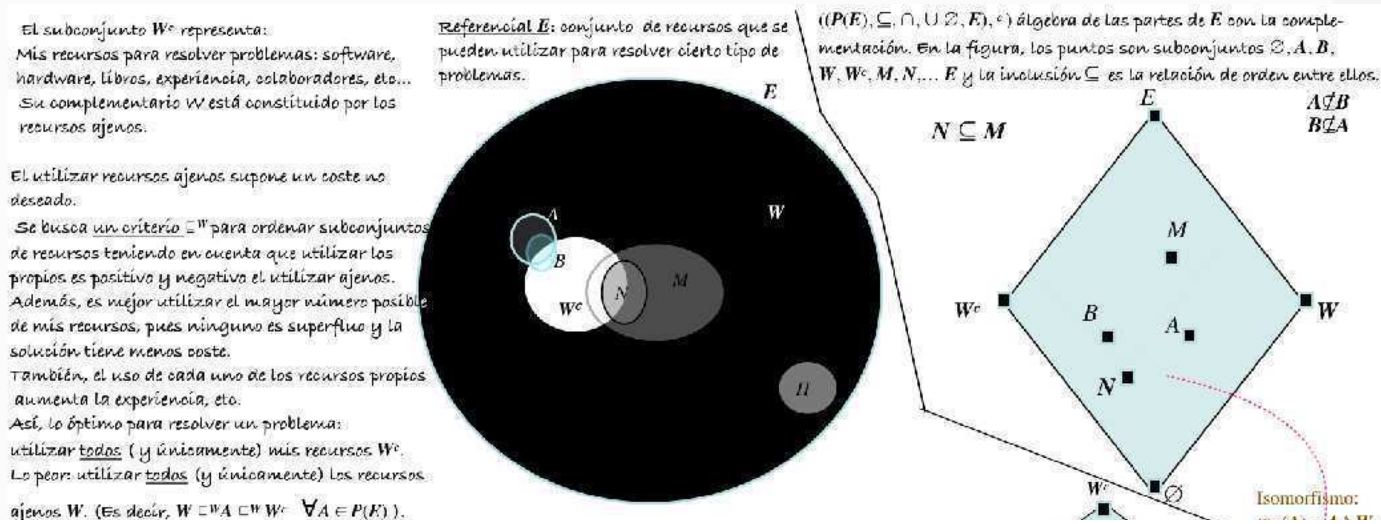
$d(S,G)$ =¿Una medida de la diferencia: $m(S \triangle G)$?

$S \leq G$?

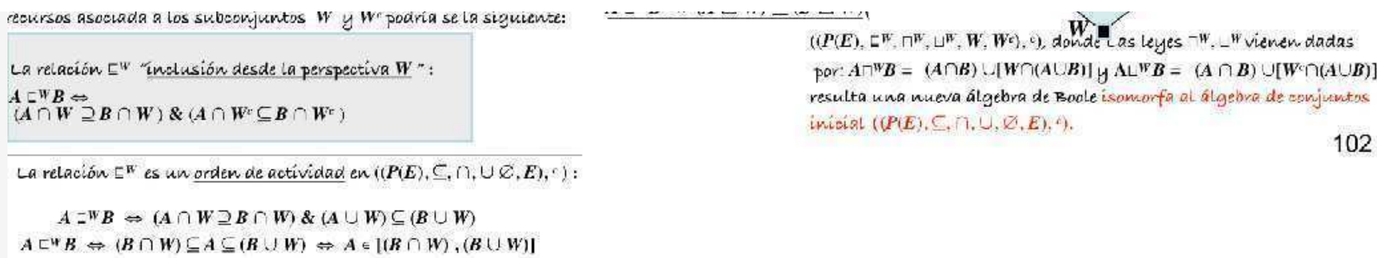
$S \geq G$?

$S \| G$?

¿S "próxima" a G?



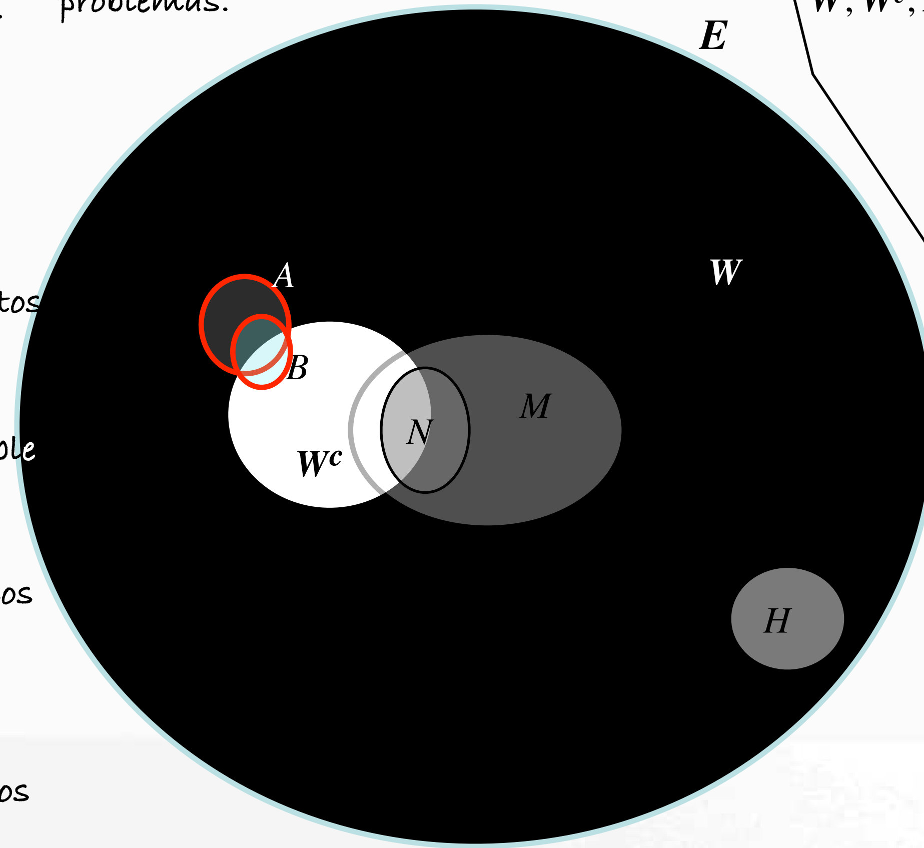
Ejemplo. Órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos cualesquiera. (No necesariamente relacionados con imágenes)

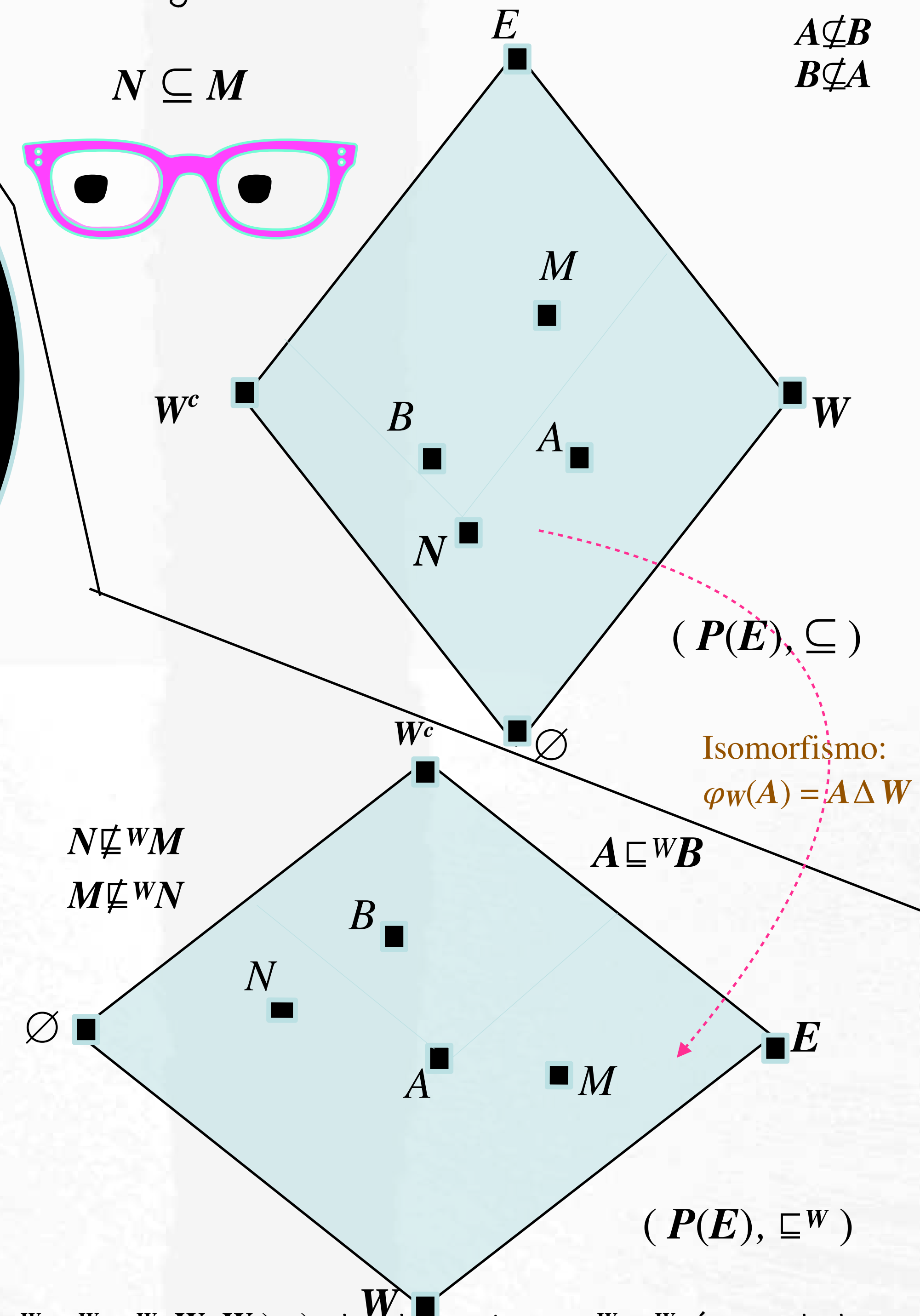


El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc... Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.





El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema: utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Si en la figura, A y B (no relacionados por la inclusión $\subseteq$) representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, $(A \sqsubseteq^W B)$, pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W) \;\&\; (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

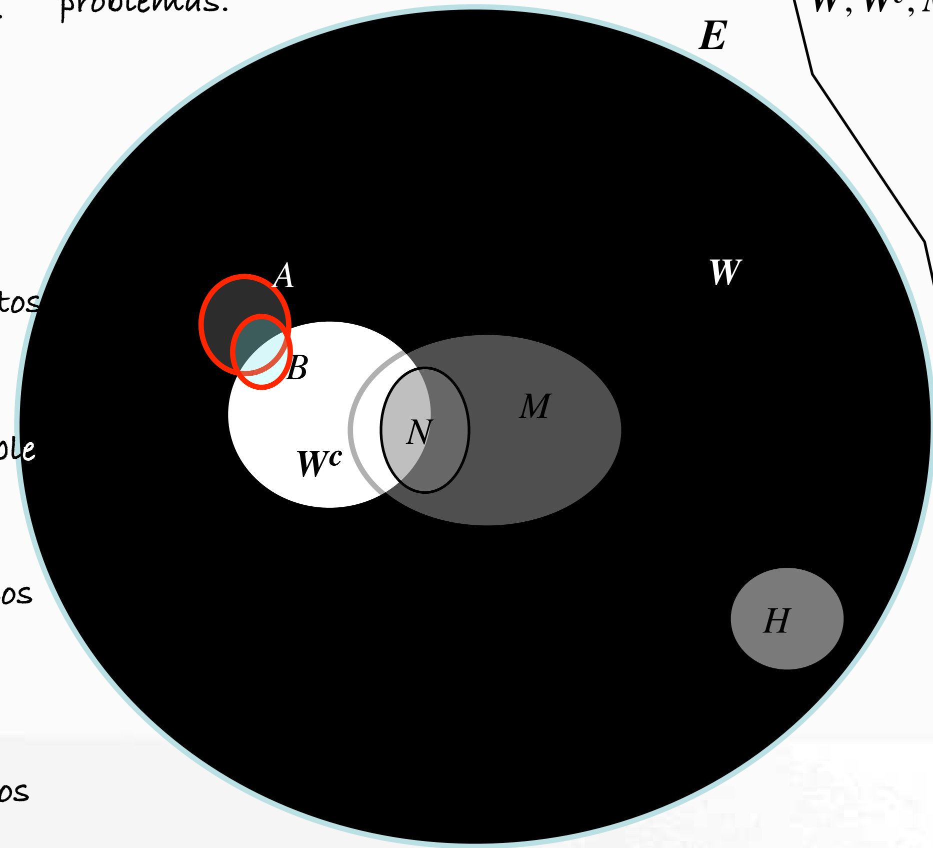
$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = \; (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y $A \sqcup^W B = \; (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$, resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$.

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$:

$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (A \cap W \supseteq B \cap W) \;\&\; (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \;\Leftrightarrow\; (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \;\Leftrightarrow\; A \in [(B \cap W), (B \cup W)]$$

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc…
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



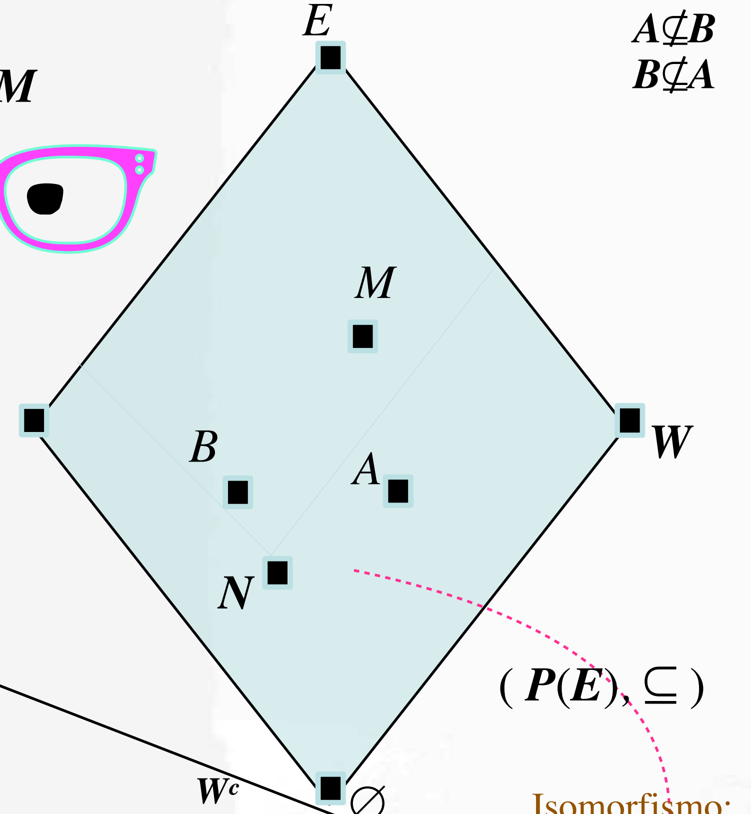
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

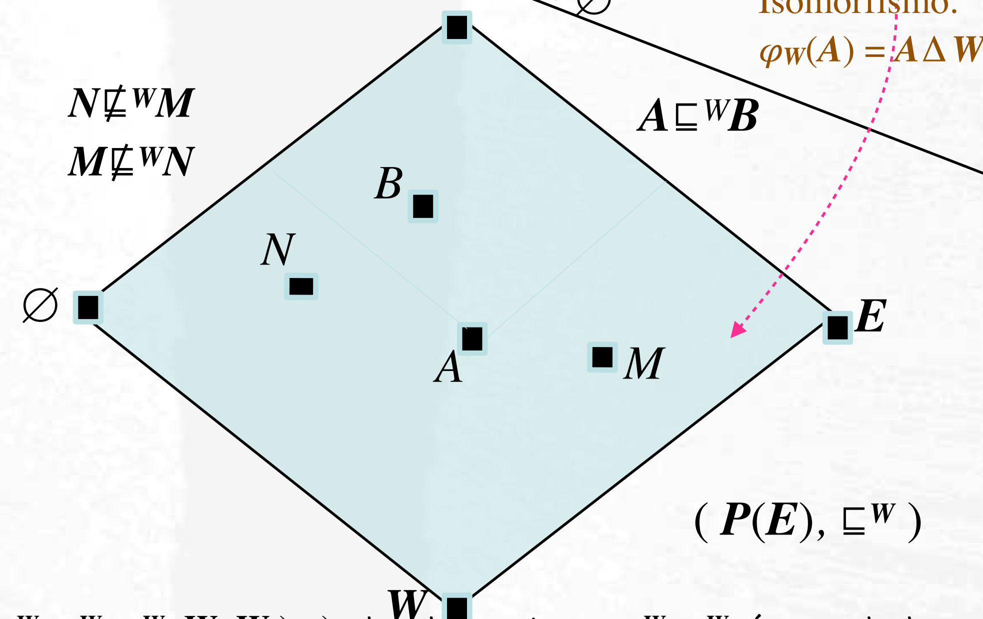
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema: utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$

$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$





Si en la figura, A y B (no relacionados por la inclusión $\subseteq$) representan subconjuntos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W":
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \ \Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = \ (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y $A \sqcup^W B = \ (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$, resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$.

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$:

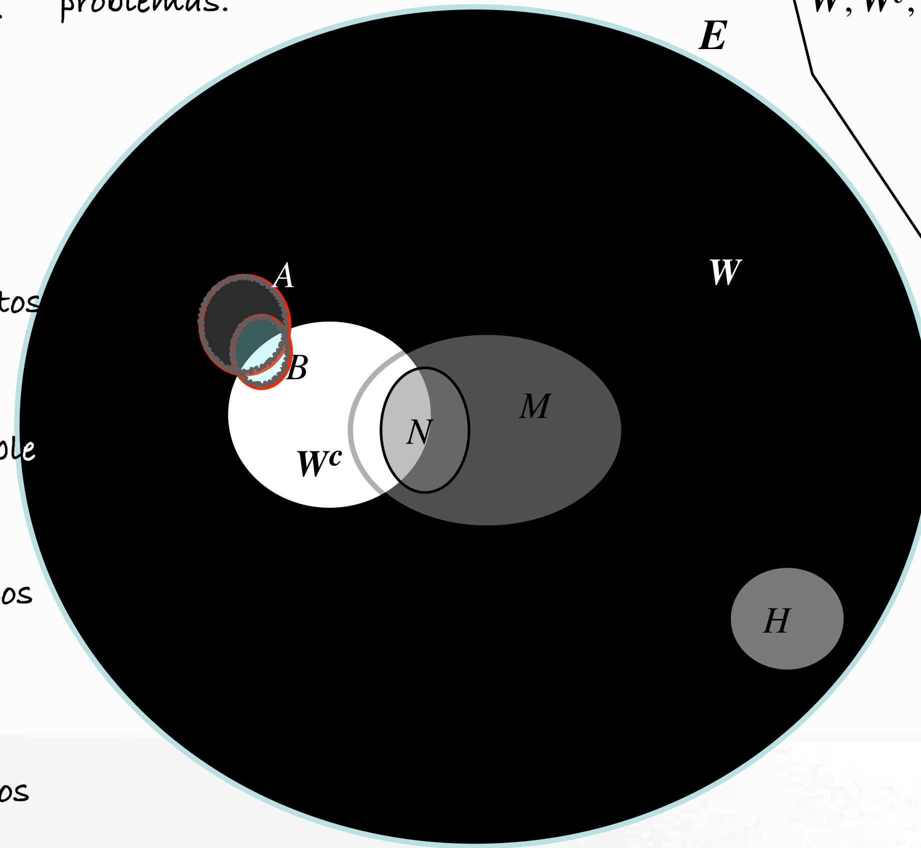
$$A \sqsubseteq^W B \ \Leftrightarrow\ (A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \ \Leftrightarrow\ (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \ \Leftrightarrow\ A \in [(B \cap W), (B \cup W)]$$

La relación $\sqsubseteq^W$ también se define en la Lógica Borrosa (Fuzzy Logic):
Si W es un crisp set y $A, B, \ldots$ son subconjuntos borrosos, los resultados anteriores siguen siendo válidos:

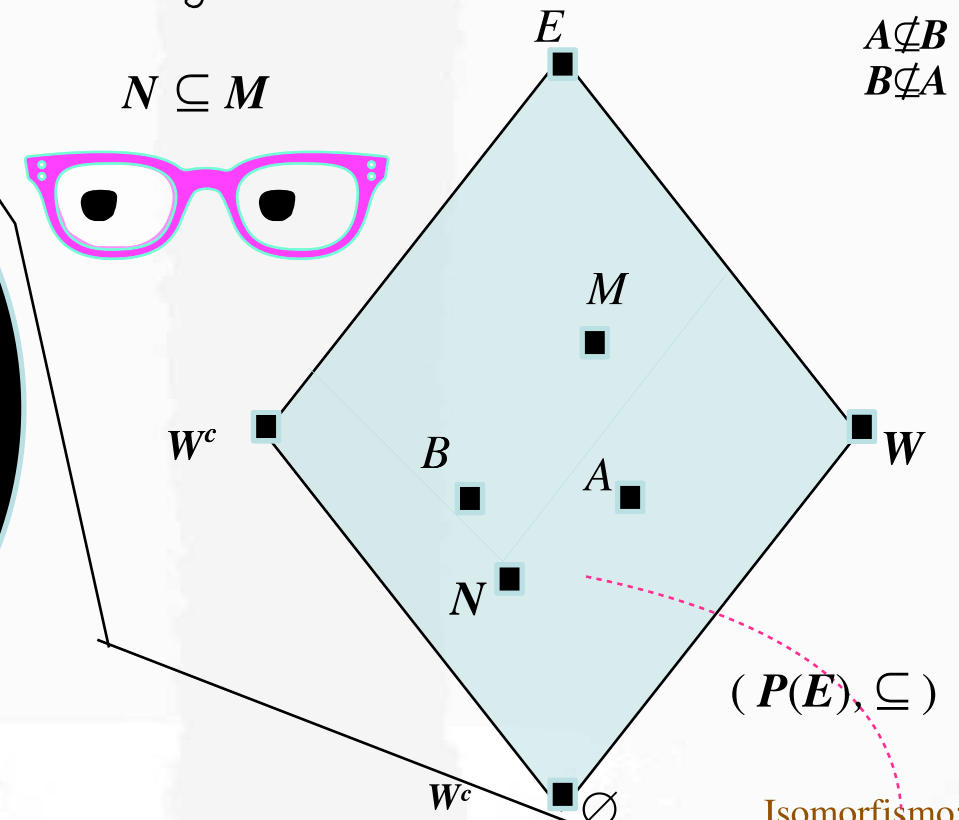
El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc...
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

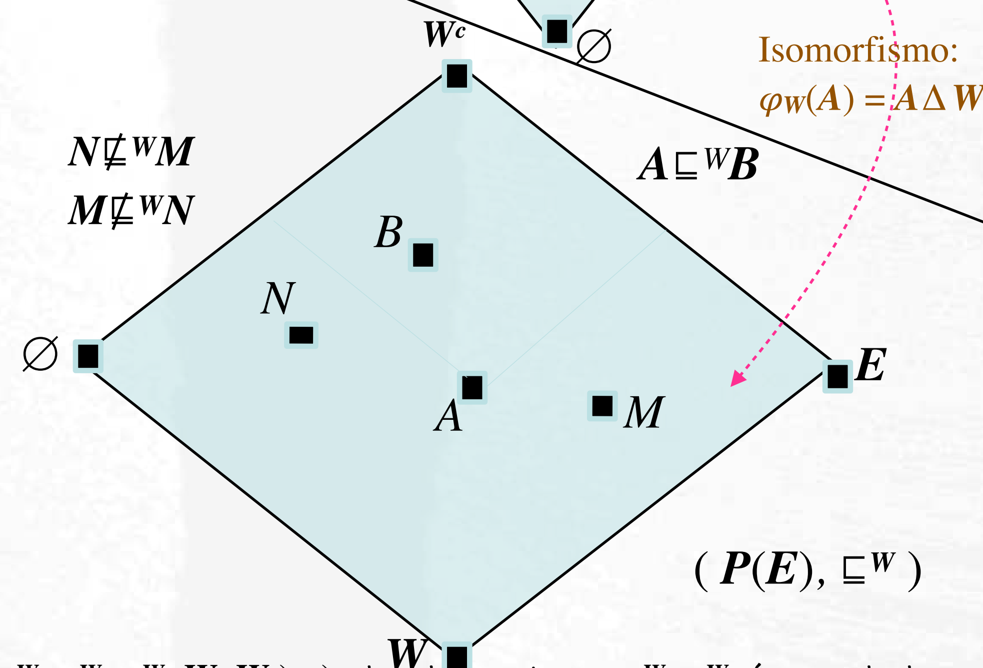
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c \quad \forall A \in P(E)$).

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.





Si en la figura, A y B (no relacionados por la inclusión $\subseteq$) representan subconjuntos borrosos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)$

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \subseteq (B \triangle W)$

$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$, donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$, resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$.

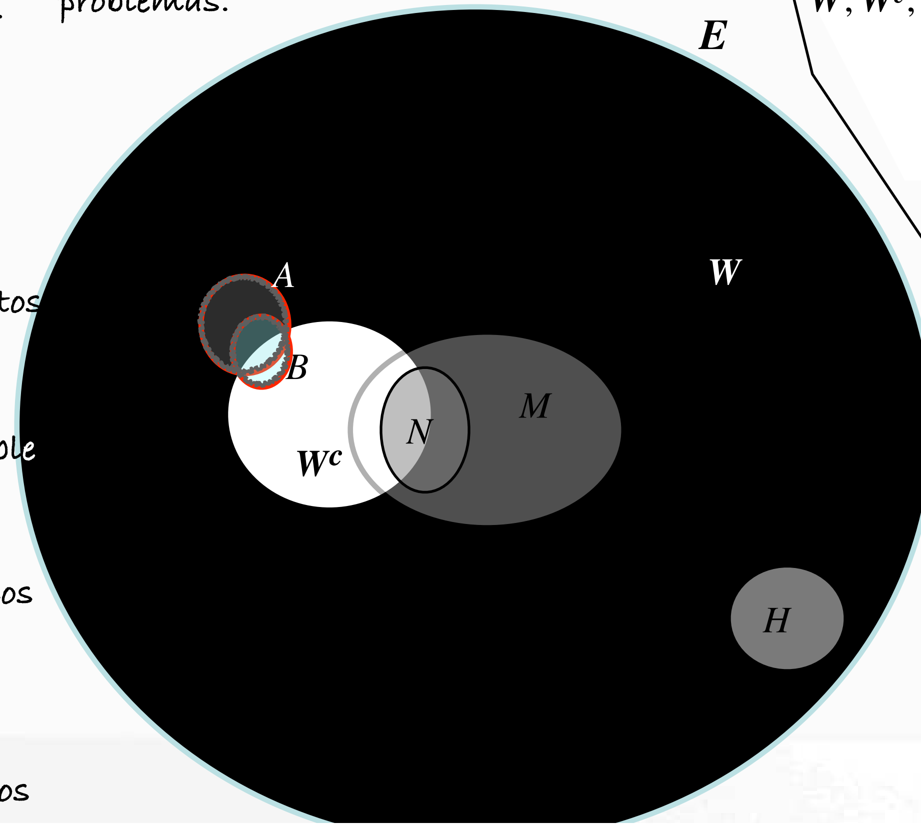
La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$:

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \cap W \supseteq B \cap W)\ \&\ (A \cup W) \subseteq (B \cup W)$$
$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W) \Leftrightarrow A \in [(B \cap W), (B \cup W)]$$

La relación $\sqsubseteq^W$ también se define en la Lógica Borrosa (Fuzzy Logic):
Si W es un crisp set y $A, B, \ldots$son subconjuntos borrosos, los resultados anteriores siguen siendo válidos:

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc…
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

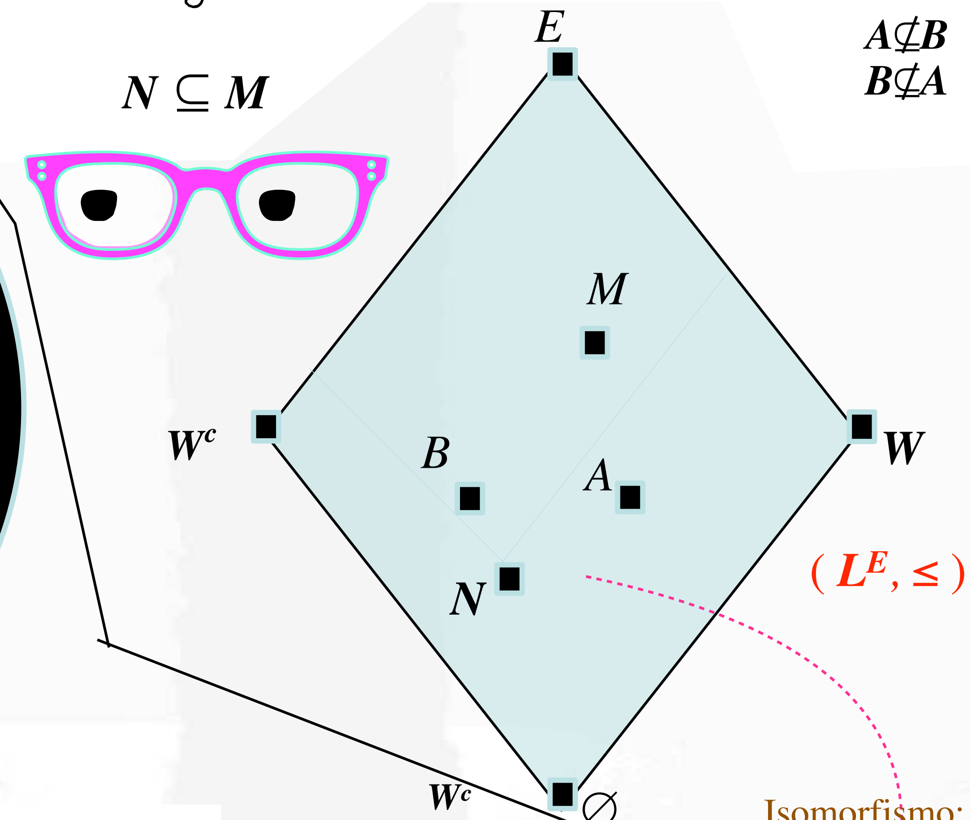
Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\ \emptyset, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\emptyset, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$

$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$



El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.

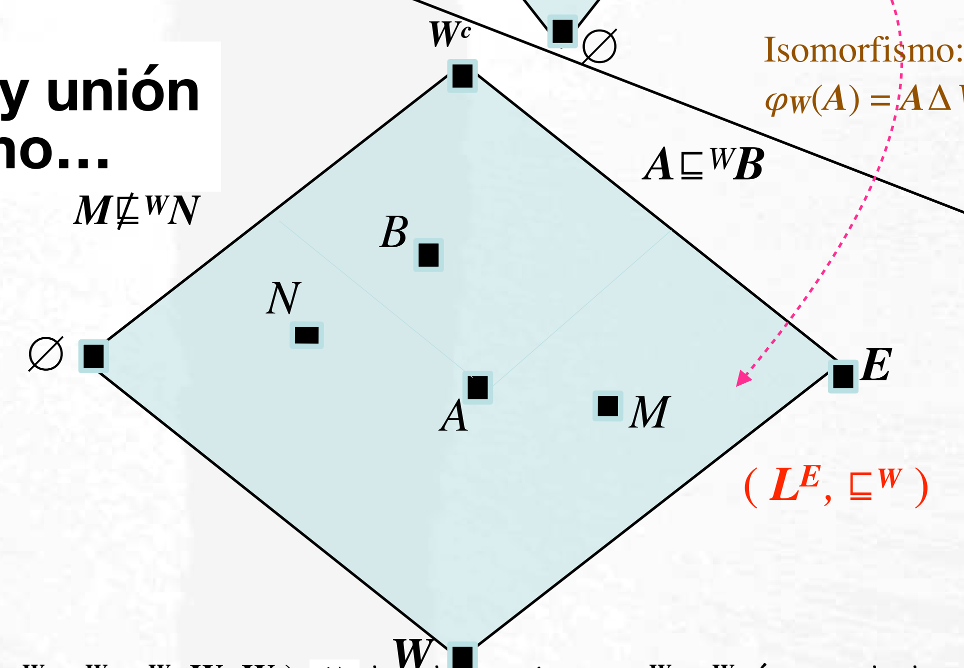
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema:
utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c$ $\forall A$

Sustituyendo inclusión , intersección y unión por menor o igual, ínfimo y supremo…

Si en la figura, A y B (no relacionado representan subconjuntos borrosos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Isomorfismo:
$\varphi_W(A) = A \Delta W$



Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cdot W \geq B \cdot W)$ & $(A \cdot W^c \leq B \cdot W^c)$

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \leq (B \triangle W)$

$A \Delta W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

Las leyes $\sqcap^W$ y $\sqcup^W$ son uninormas y nulnormas en $(L^E, \leq)$.

$((L(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A+B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cdot B) + [W^c \cdot (A+B)]$
resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial ($((L(E), \leq, \cdot, +, \emptyset, E), {}^c)$)

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((L(E), \cdot, +, \emptyset, E), ')$:

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \cdot W \geq B \cdot W) \ \&\ (A + W) \leq (B + W)$$

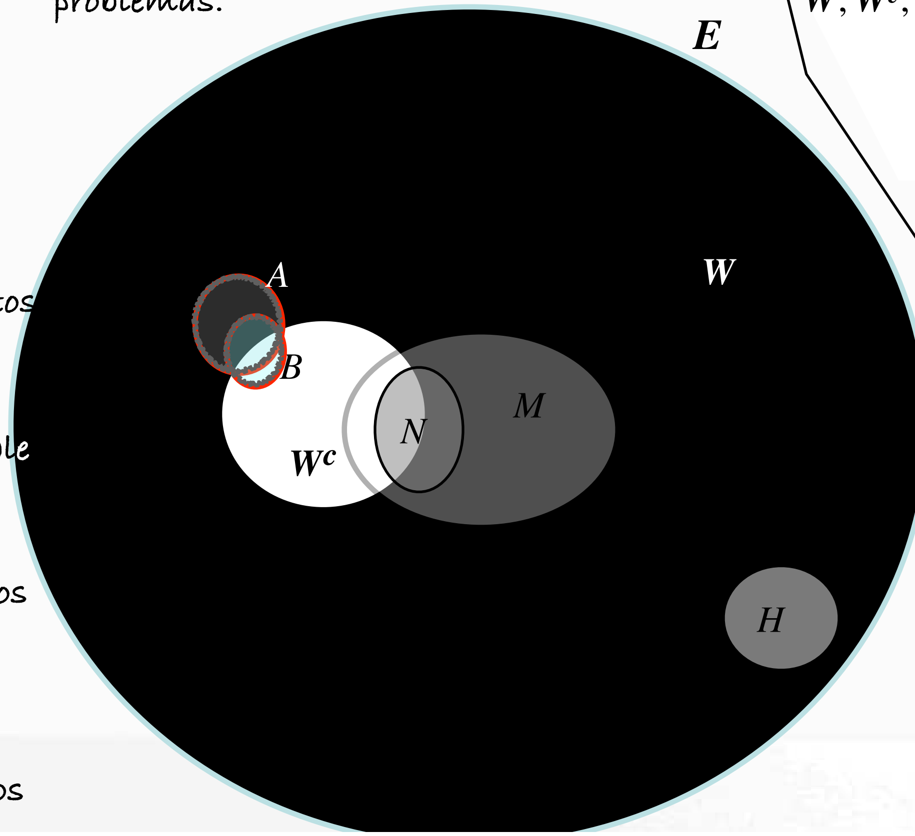
$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W) \Leftrightarrow A \in [(B \cdot W), (B + W)]$$

La relación $\sqsubseteq^W$ también se define en la Lógica Borrosa (Fuzzy Logic):
Si W es un crisp set y $A, B, \ldots$son subconjuntos borrosos, los resultados anteriores siguen siendo válidos:

El subconjunto W^c representa: borrosos
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc... Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

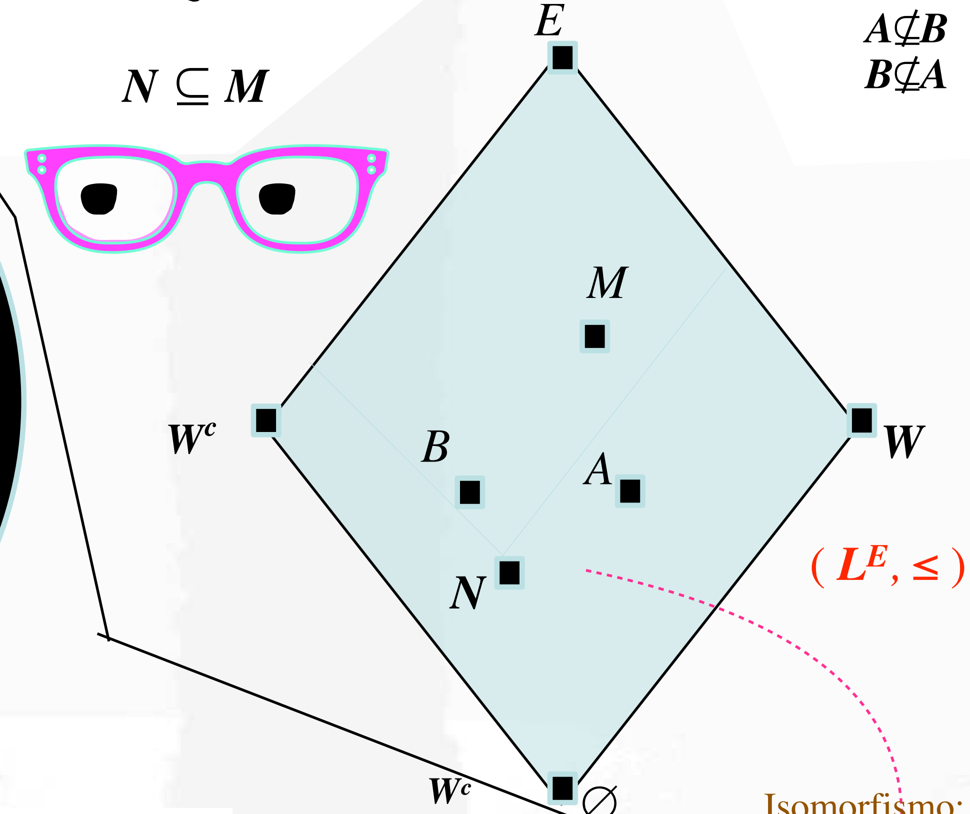
El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema: utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c$ $\forall A$ ...

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

$N \subseteq M$

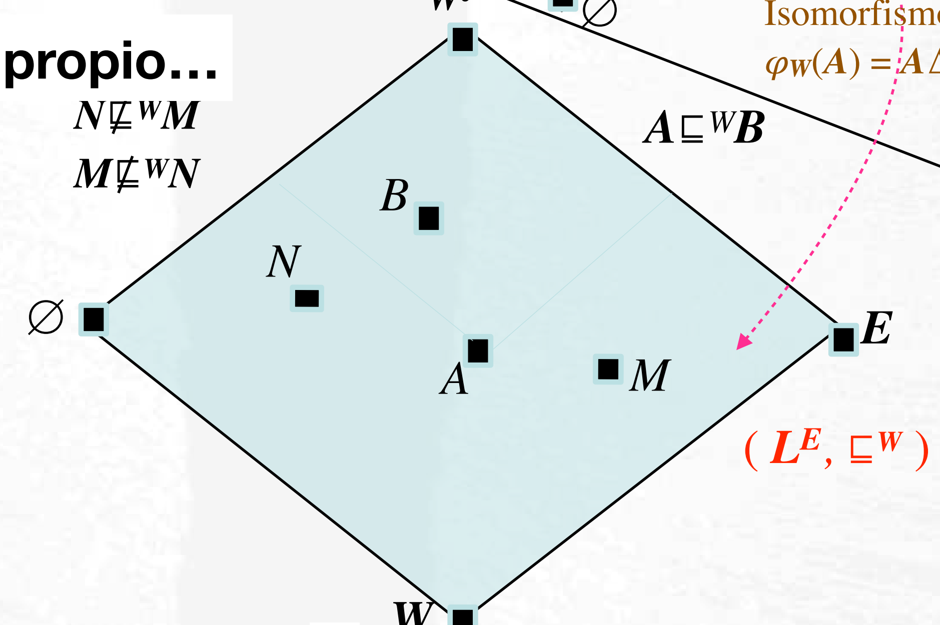


$A \not\subseteq B$
$B \not\subseteq A$

Isomorfismo: $\varphi_W(A) = A \Delta W$

Si W es ahora un subconjunto L-borroso propio…

$N \not\sqsubseteq^W M$
$M \not\sqsubseteq^W N$
$A \sqsubseteq^W B$



Si en la figura, A y B (no relacionados por la inclusión $\subseteq$) representan subconjuntos borrosos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, $(A \sqsubseteq^W B)$, pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!

Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \leq (B \triangle W)$

no

$A \Delta W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

Las leyes $\sqcap^W$ y $\sqcup^W$ son uninormas y nulnormas en $(L^E, \leq)$.

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cdot W \geq B \cdot W)$ & $(A \cdot W^c \leq B \cdot W^c)$ no

$((L(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}')$ donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A+B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cdot B) + [W^c \cdot (A+B)]$
resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial ($((L(E), \leq, \cdot, +, \varnothing, E), {}^c)$) si no

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((L(E), \cdot, +, \varnothing, E), {}')$:

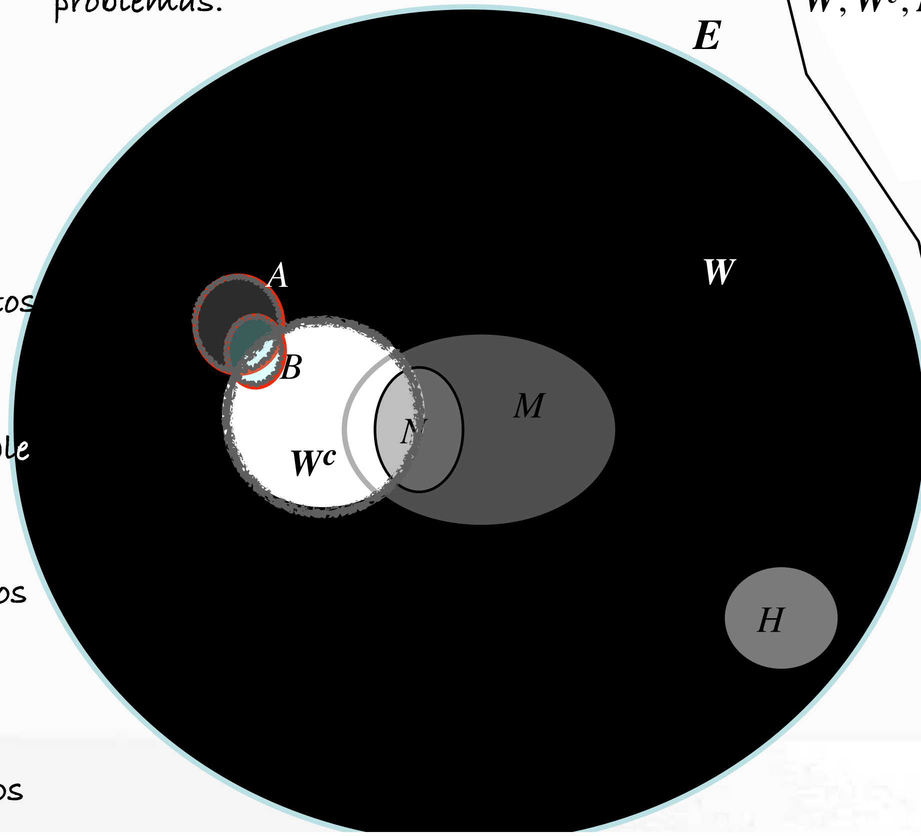
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \cdot W \geq B \cdot W)$ & $(A + W) \leq (B + W)$ si
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W) \Leftrightarrow A \in [(B \cdot W), (B + W)]$

Si W es borroso y no crisp set, entonces $(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$ es inf-semirretículo.
La ley $\sqcap^W$, considerada ahora como un operador en el retículo $(L^E, \leq)$, es una nulnorma.

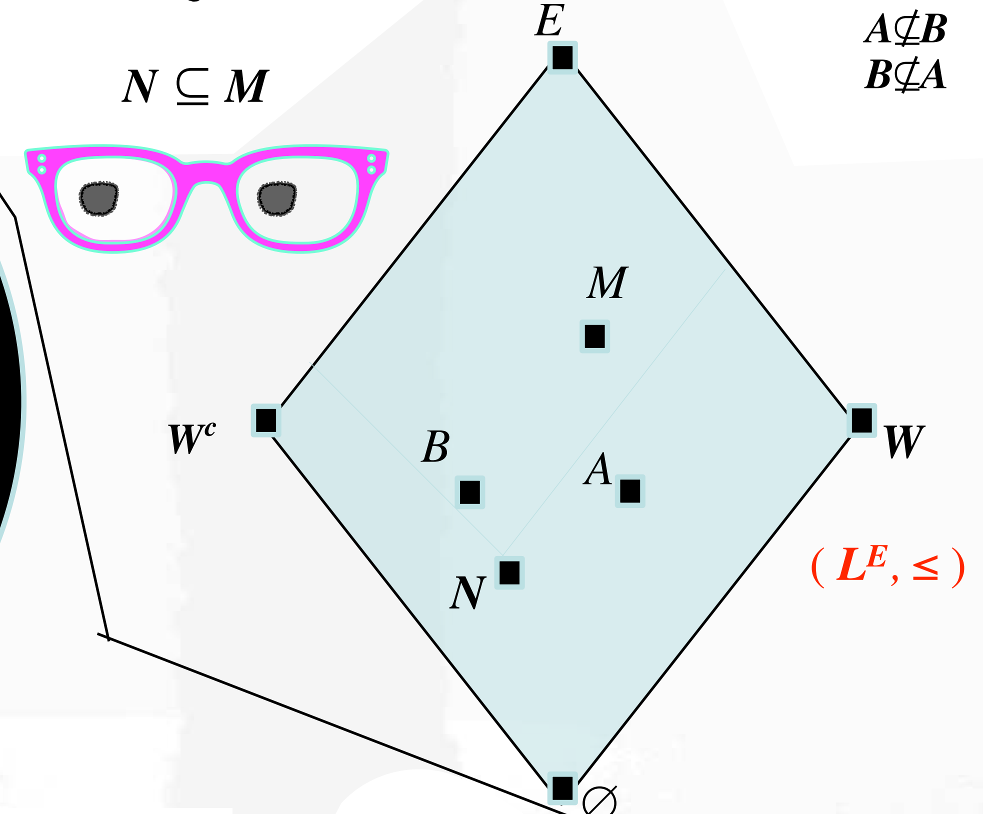
El subconjunto W^c representa:
borrosos
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc...
Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

El utilizar recursos ajenos supone un coste no deseado.
Se busca un criterio $\sqsubseteq^W$ para ordenar subconjuntos de recursos teniendo en cuenta que utilizar los propios es positivo y negativo el utilizar ajenos.
Además, es mejor utilizar el mayor número posible de mis recursos, pues ninguno es superfluo y la solución tiene menos coste.
También, el uso de cada uno de los recursos propios aumenta la experiencia, etc.
Así, lo óptimo para resolver un problema: utilizar todos (y únicamente) mis recursos W^c.
Lo peor: utilizar todos (y únicamente) los recursos ajenos W. (Es decir, $W \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W W^c$ $\forall A$ …

Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.



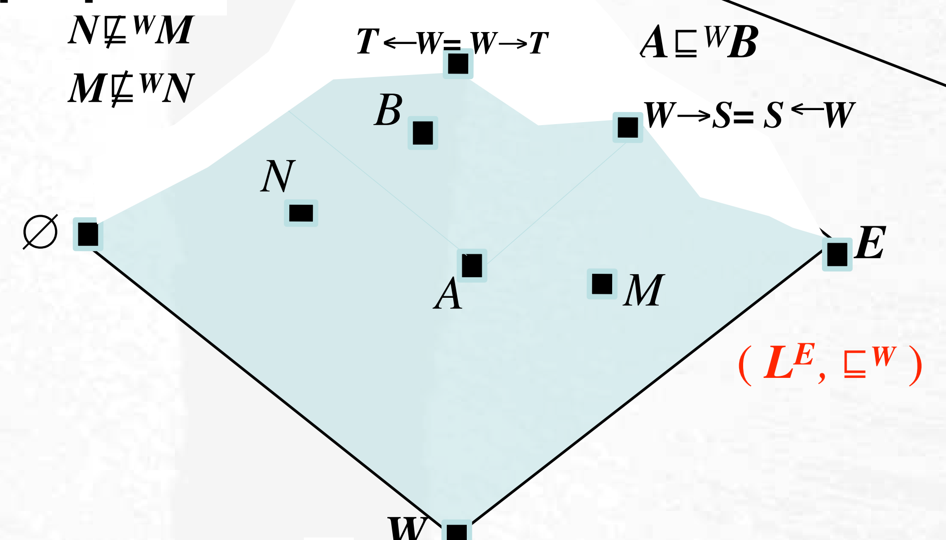
$((P(E), \subseteq, \cap, \cup\, \varnothing, E), ^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\varnothing, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.



Si W es ahora un subconjunto L-borroso propio…

Si en la figura, A y B (no relacionados por la inclusión $\subseteq$) representan subconjuntos borrosos de recursos para resolver de dos formas distintas un mismo problema, es evidente que B es "mejor" que A, ($A \sqsubseteq^W B$), pues con B se utilizan más recursos propios y menos ajenos que con A. (Sin embargo, si M y N tuviesen la misma interpretación, no podríamos relacionarlos con el mismo criterio).

Ejemplo: ¿Cuándo $H \sqsubseteq^W \varnothing$?
Solución:
Es equivalente a la inclusión $H \subseteq W$
¡Es mejor no hacer nada que utilizar sólo recursos ajenos!



Según esos criterios, una relación de orden $A \sqsubseteq^W B$ entre subconjuntos de recursos asociada a los subconjuntos W y W^c podría se la siguiente:

La relación $\sqsubseteq^W$ en función de la diferencia simétrica:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W) \leq (B \triangle W)$
no

La relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva W" :
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$
$(A \cdot W \geq B \cdot W) \,\&\, (A \cdot W^c \leq B \cdot W^c)$
no

$((L(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ') $ donde las leyes $\sqcap^W, \sqcup^W$ vienen dadas por: $A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A+B)]$ y $A \sqcup^W B = (A \cdot B) + [W^c \cdot (A+B)]$
resulta una nueva álgebra de Boole isomorfa al álgebra de conjuntos inicial ($((L(E), \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ^c)$)
si no

La relación $\sqsubseteq^W$ es un orden de actividad en $((L(E), \cdot, +, \varnothing, E), ')$:

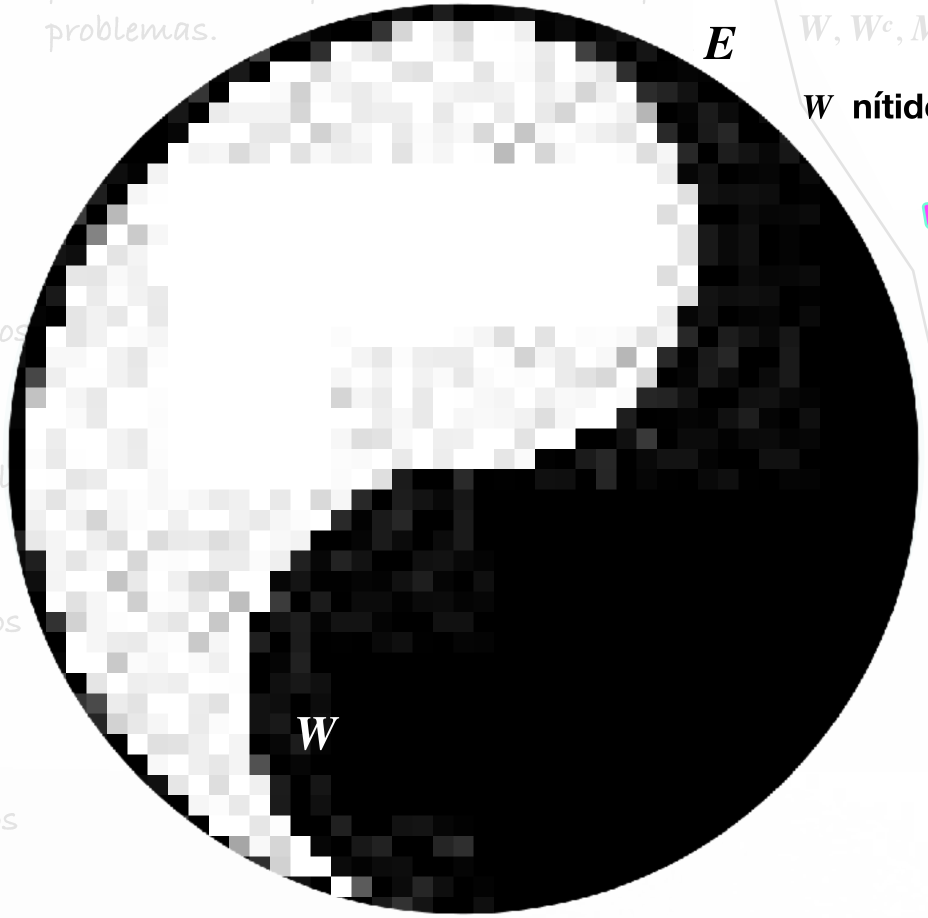
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \cdot W \geq B \cdot W) \,\&\, (A + W) \leq (B + W)$
si
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W) \Leftrightarrow A \in [(B \cdot W), (B + W)]$

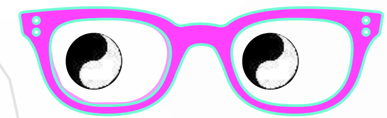
Si W es borroso y no crisp set, entonces ($L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W$) es inf-semirretículo.
La ley $\sqcap^W$, considerada ahora como un operador en el retículo ($L^E, \leq$), es una nulnorma.

El subconjunto W^c representa:
Mis recursos para resolver problemas: software, hardware, libros, experiencia, colaboradores, etc... Su complementario W está constituido por los recursos ajenos.

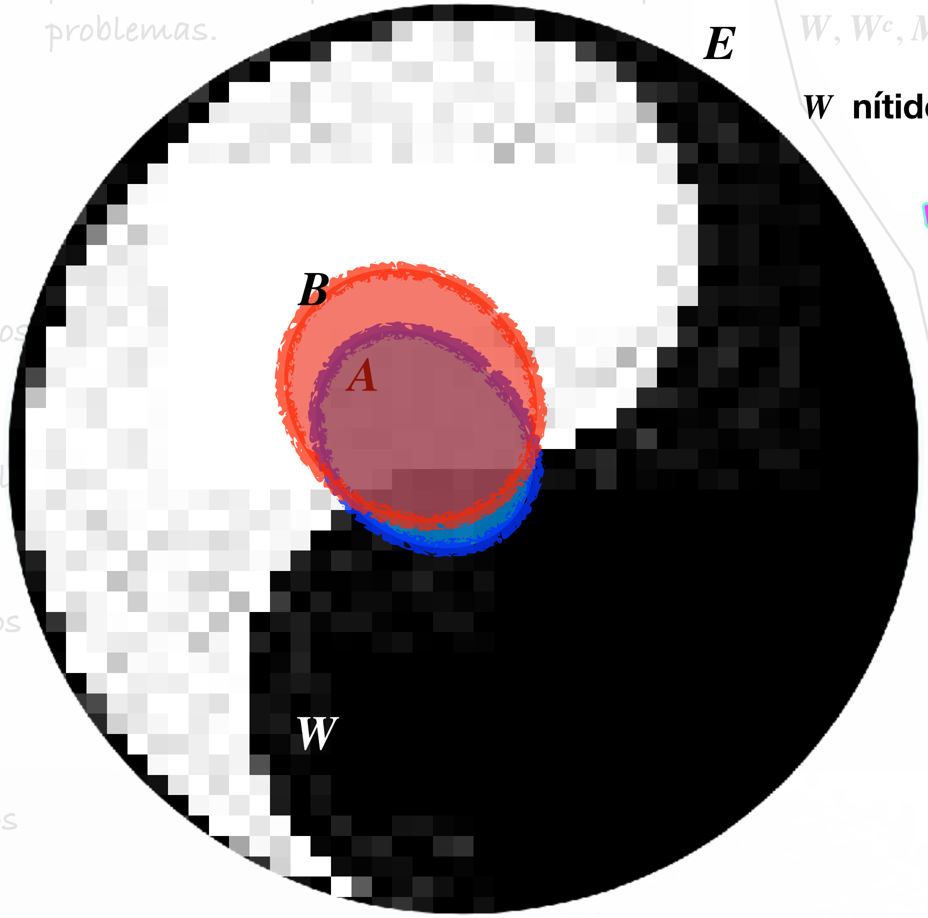
Referencial E: conjunto de recursos que se pueden utilizar para resolver cierto tipo de problemas.

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), ^c)$ álgebra de las partes de E con la complementación. En la figura, los puntos son subconjuntos $\emptyset, A, B, W, W^c, M, N, \ldots E$ y la inclusión $\subseteq$ es la relación de orden entre ellos.

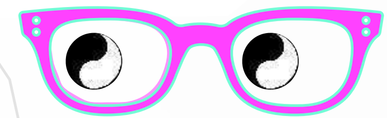




- **El yin y el yang son opuestos.** Todo tiene su opuesto, aunque este no es absoluto sino relativo, ya que nada es completamente yin ni completamente yang. Por ejemplo, el invierno se opone al verano, aunque en un día de verano puede hacer frío y viceversa.
- **El yin y el yang son interdependientes**. No pueden existir el uno sin el otro. Por ejemplo, el día no puede existir sin la noche.
- **El yin y el yang pueden subdividirse a su vez en yin y yang**. Todo aspecto yin o yang puede subdividirse a su vez en yin y yang indefinidamente. Por ejemplo, un objeto puede estar caliente o frío, pero a su vez lo caliente puede estar ardiente o templado y lo frío, fresco o helado.
- **El yin y el yang se consumen y generan mutuamente**. El yin y el yang forman un equilibrio dinámico: cuando uno aumenta, el otro disminuye. El desequilibrio no es sino algo circunstancial, ya que cuando uno crece en exceso fuerza al otro a concentrarse, lo que a la larga provoca una nueva transformación. Por ejemplo, el exceso de vapor en las nubes (yin) provoca la lluvia (yang).
- **El yin y el yang pueden transformarse en sus opuestos**. La noche se transforma en día, lo cálido en frío, la vida en muerte. Sin embargo, esta transformación es relativa también. Por ejemplo, la noche se transforma en día, pero a su vez coexisten en lados opuestos de la tierra.
- **En el yin hay yang y en el yang hay yin**. Siempre hay un resto de cada uno de ellos en el otro, lo que conlleva que el absoluto se transforme en su contrario. Por ejemplo, una semilla enterrada soporta el invierno y renace en primavera.



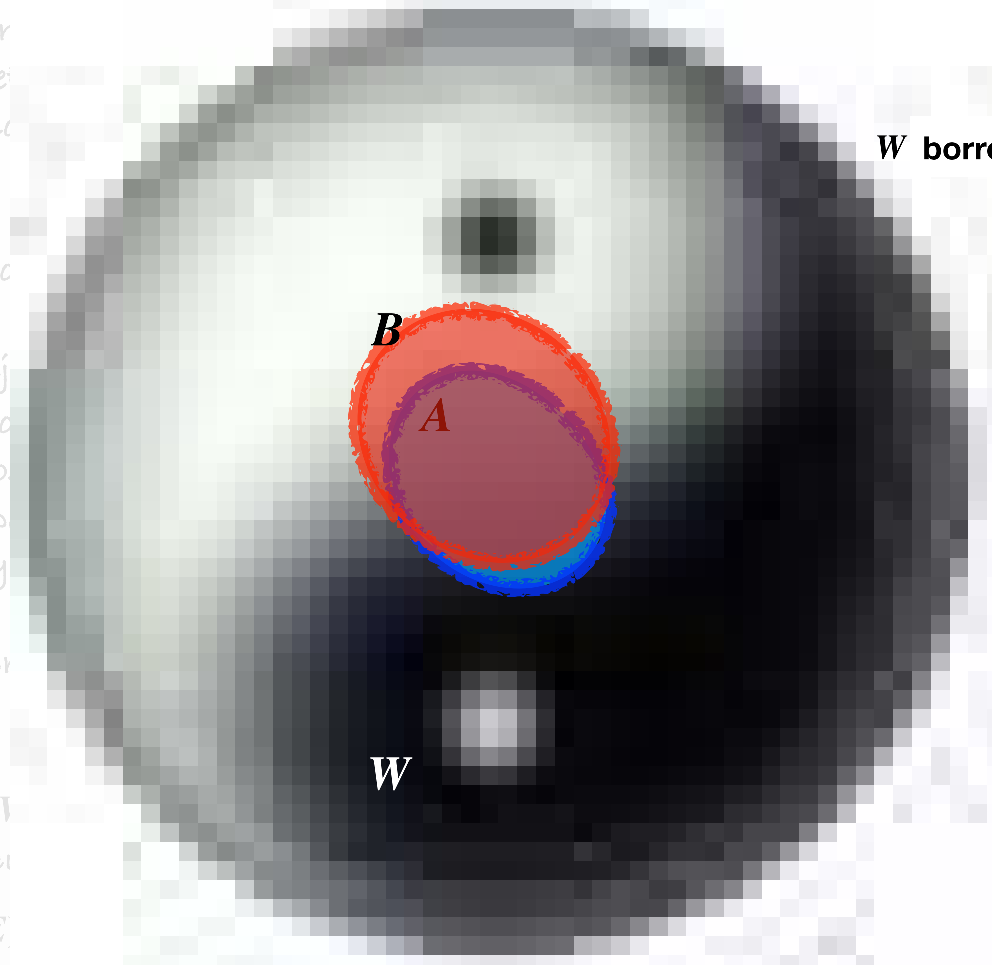
W nítido, A, B, L-borrosos propios. ($A \not\leq B$, $B \not\leq A$)



$A \sqsubseteq^W B$

- **El yin y el yang son opuestos.** Todo tiene su opuesto, aunque este no es absoluto sino relativo, ya que nada es completamente yin ni completamente yang. Por ejemplo, el invierno se opone al verano, aunque en un día de verano puede hacer frío y viceversa.
- **El yin y el yang son interdependientes**. No pueden existir el uno sin el otro. Por ejemplo, el día no puede existir sin la noche.
- **El yin y el yang pueden subdividirse a su vez en yin y yang**. Todo aspecto yin o yang puede subdividirse a su vez en yin y yang indefinidamente. Por ejemplo, un objeto puede estar caliente o frío, pero a su vez lo caliente puede estar ardiente o templado y lo frío, fresco o helado.
- **El yin y el yang se consumen y generan mutuamente**. El yin y el yang forman un equilibrio dinámico: cuando uno aumenta, el otro disminuye. El desequilibrio no es sino algo circunstancial, ya que cuando uno crece en exceso fuerza al otro a concentrarse, lo que a la larga provoca una nueva transformación. Por ejemplo, el exceso de vapor en las nubes (yin) provoca la lluvia (yang).
- **El yin y el yang pueden transformarse en sus opuestos**. La noche se transforma en día, lo cálido en frío, la vida en muerte. Sin embargo, esta transformación es relativa también. Por ejemplo, la noche se transforma en día, pero a su vez coexisten en lados opuestos de la tierra.
- **En el yin hay yang y en el yang hay yin**. Siempre hay un resto de cada uno de ellos en el otro, lo que conlleva que el absoluto se transforme en su contrario. Por ejemplo, una semilla enterrada soporta el invierno y renace en primavera.

W **borroso,** A, B, L**-borrosos propios.** ($A \not\leq B$, $B \not\leq A$)



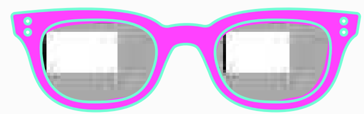
$A \sqsubseteq^W B$

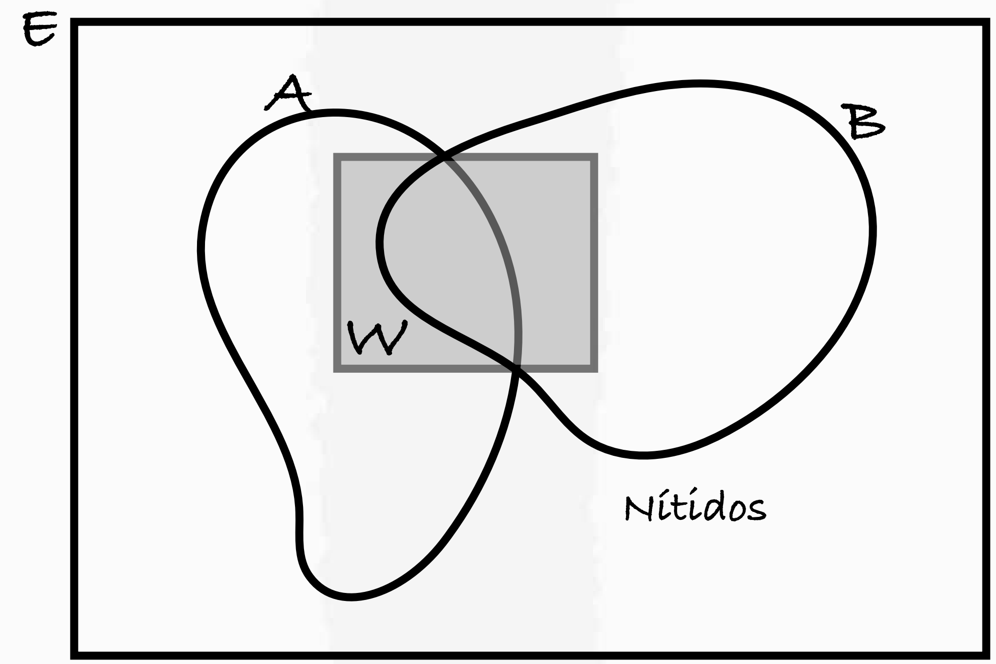
- **El yin y el yang son opuestos.** Todo tiene su opuesto, aunque este no es absoluto sino relativo, ya que nada es completamente yin ni completamente yang. Por ejemplo, el invierno se opone al verano, aunque en un día de verano puede hacer frío y viceversa.
- **El yin y el yang son interdependientes.** No pueden existir el uno sin el otro. Por ejemplo, el día no puede existir sin la noche.
- **El yin y el yang pueden subdividirse a su vez en yin y yang.** Todo aspecto yin o yang puede subdividirse a su vez en yin y yang indefinidamente. Por ejemplo, un objeto puede estar caliente o frío, pero a su vez lo caliente puede estar ardiente o templado y lo frío, fresco o helado.
- **El yin y el yang se consumen y generan mutuamente.** El yin y el yang forman un equilibrio dinámico: cuando uno aumenta, el otro disminuye. El desequilibrio no es sino algo circunstancial, ya que cuando uno crece en exceso fuerza al otro a concentrarse, lo que a la larga provoca una nueva transformación. Por ejemplo, el exceso de vapor en las nubes (yin) provoca la lluvia (yang).
- **El yin y el yang pueden transformarse en sus opuestos.** La noche se transforma en día, lo cálido en frío, la vida en muerte. Sin embargo, esta transformación es relativa también. Por ejemplo, la noche se transforma en día, pero a su vez coexisten en lados opuestos de la tierra.
- **En el yin hay yang y en el yang hay yin.** Siempre hay un resto de cada uno de ellos en el otro, lo que conlleva que el absoluto se transforme en su contrario. Por ejemplo, una semilla enterrada soporta el invierno y renace en primavera.

Caracterización de w-disjuntos en (L^E, $\leq$, $\cdot$, $+$, $\emptyset$, E)

<u>Definición</u>. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{w} B = W$$

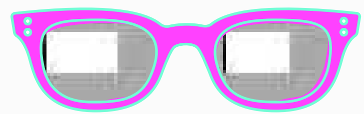


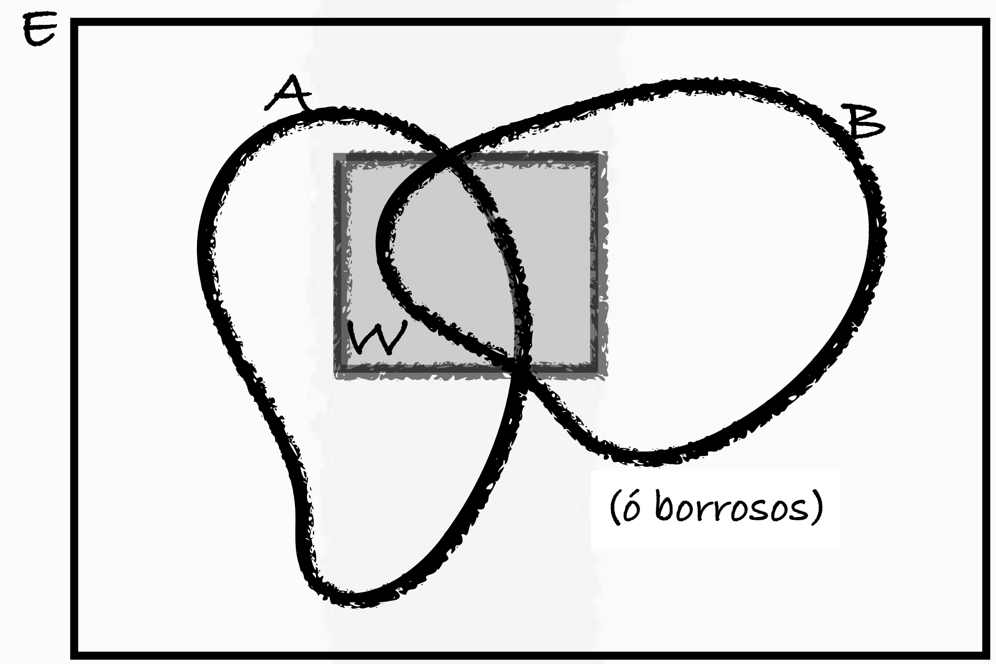


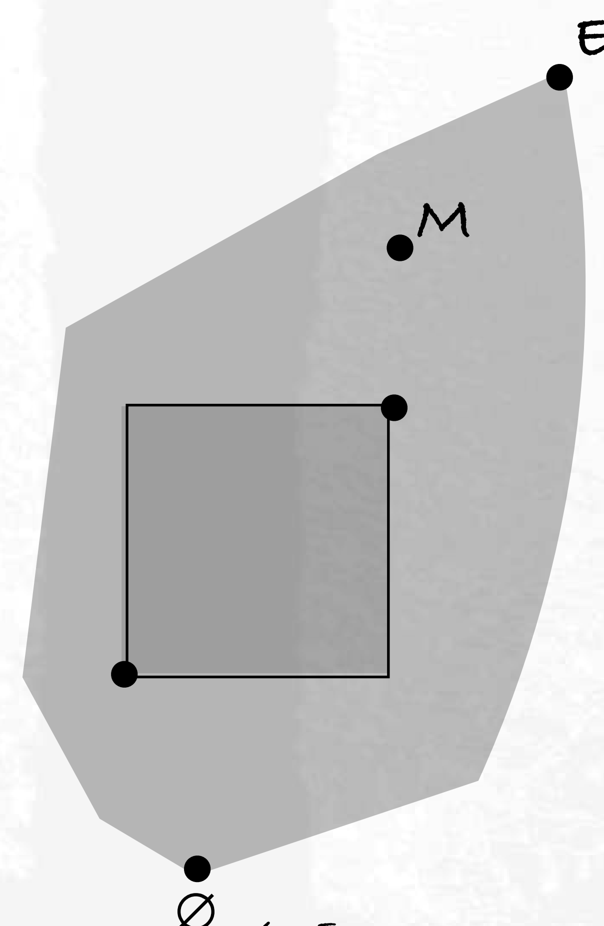
Definición. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{W} B = W$$

$$(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$$







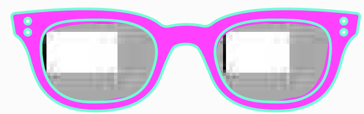
Situaciones para A y B:

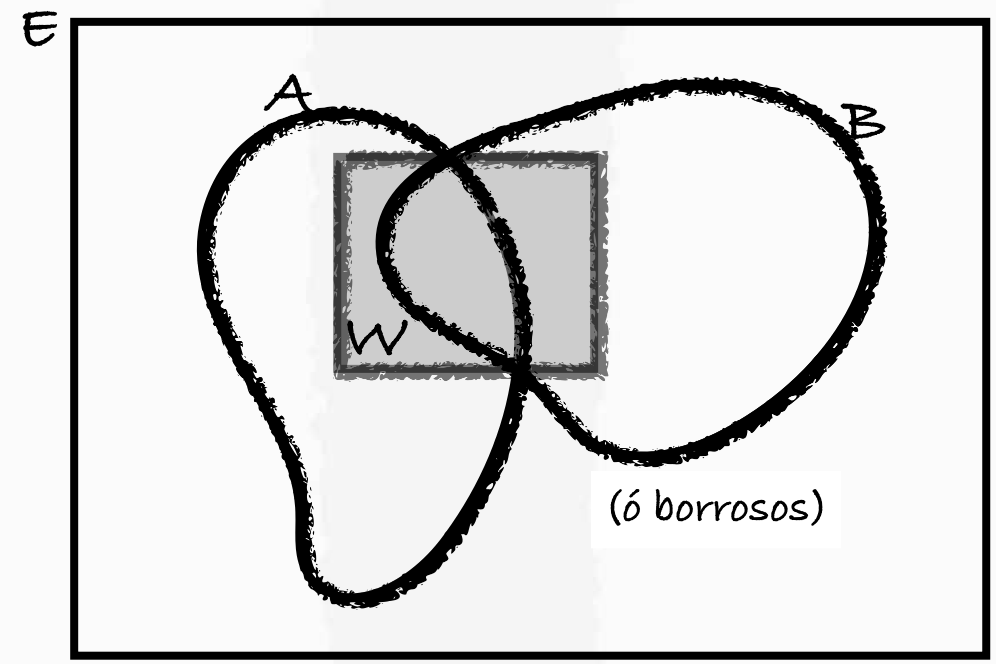
$(L^{E}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$

Definición. A y B son w-disjuntos si y solo si:

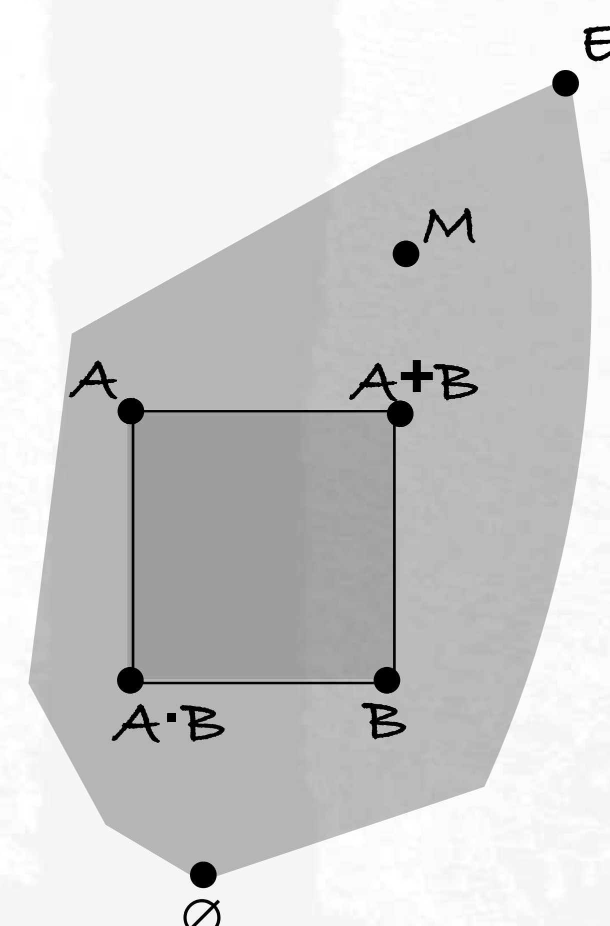
$$A \sqcap^{W} B = W$$

$$(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$$





Situaciones para A y B:

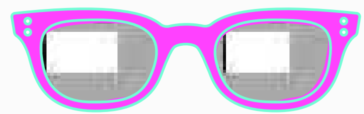


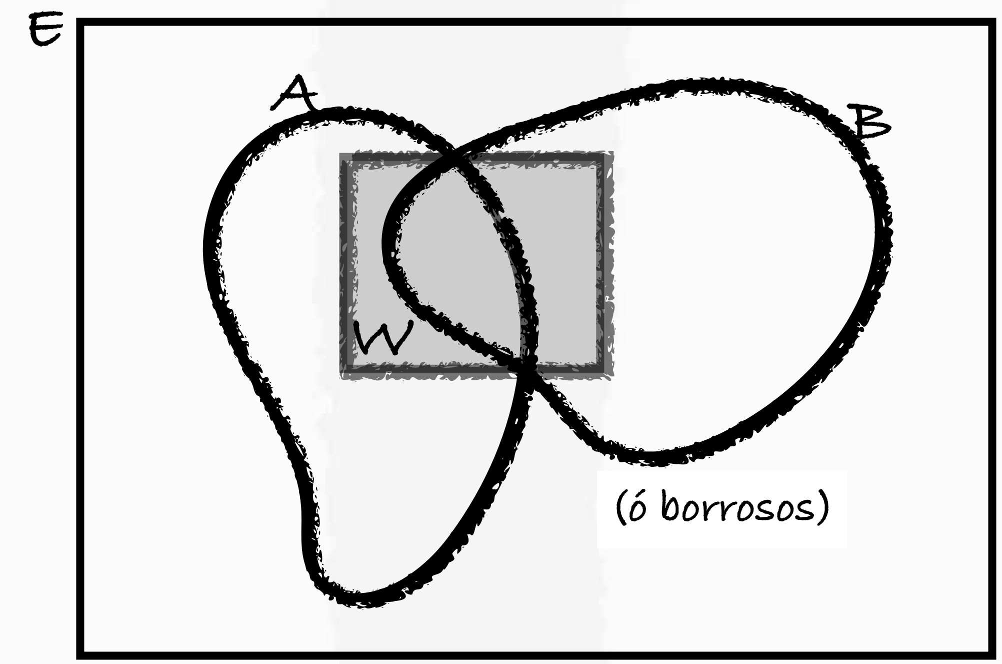
$(L^{E}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$

Definición. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{W} B = W$$

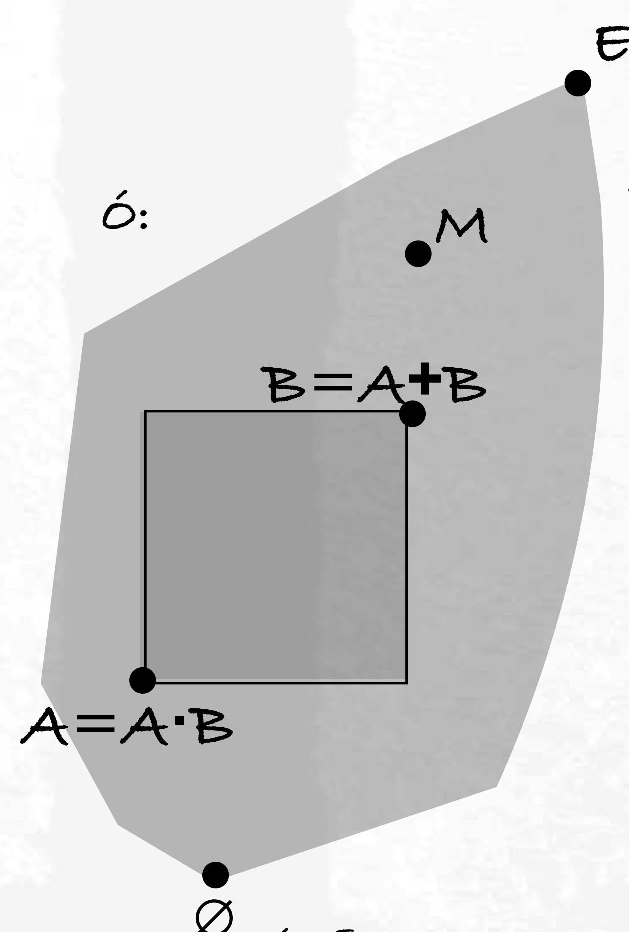
$$(A,B,W) \in (L^E)^3$$





ó:

Situaciones para A y B:

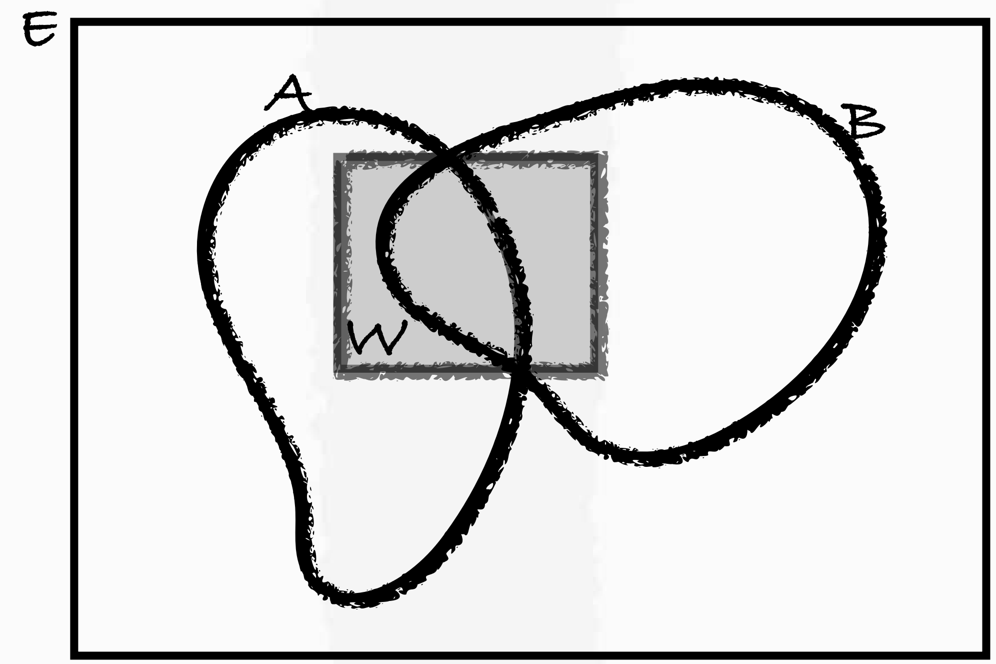


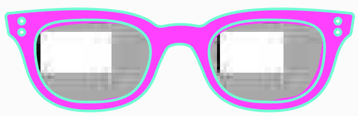
$(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$

<u>Definición</u>. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$A \sqcap^{w} B = W$

$(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$





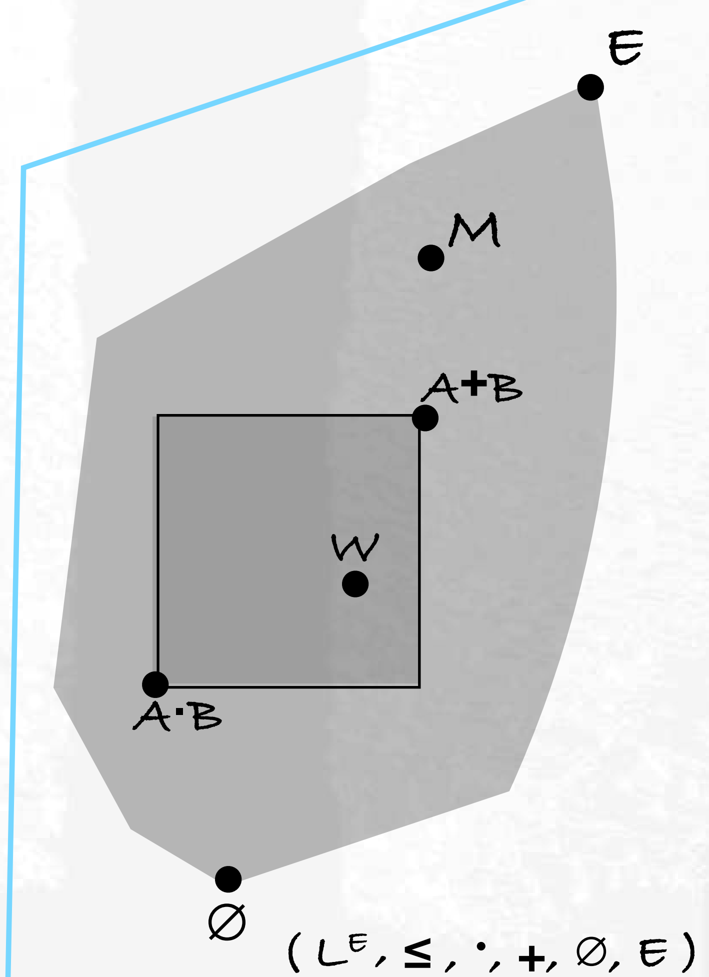
Se caracteriza los w-disjuntos en (L^{E}, ≤, ·, +, ∅, E):

<u>Proposición</u>. Sean L un retículo distributivo y acotado, E un referencial y sea $(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$. Entonces

(i) $(A \sqcap^{w} B = W) \Leftrightarrow (W \in [A \cdot B,\ A+B])$.

(ii) Si existe W^{c}, entonces $(A \sqcup^{w} B = W^{c}) \Leftrightarrow (W^{c} \in [A \cdot B,\ A+B])$.

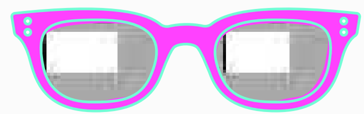
(iii) $[(A \sqcap^{w} B = W) \,\&\, (A \sqcup^{w} B = W^{c})] \Leftrightarrow [(A \text{ y } B \text{ nítidos}) \,\&\, (A^{c} = B)]$

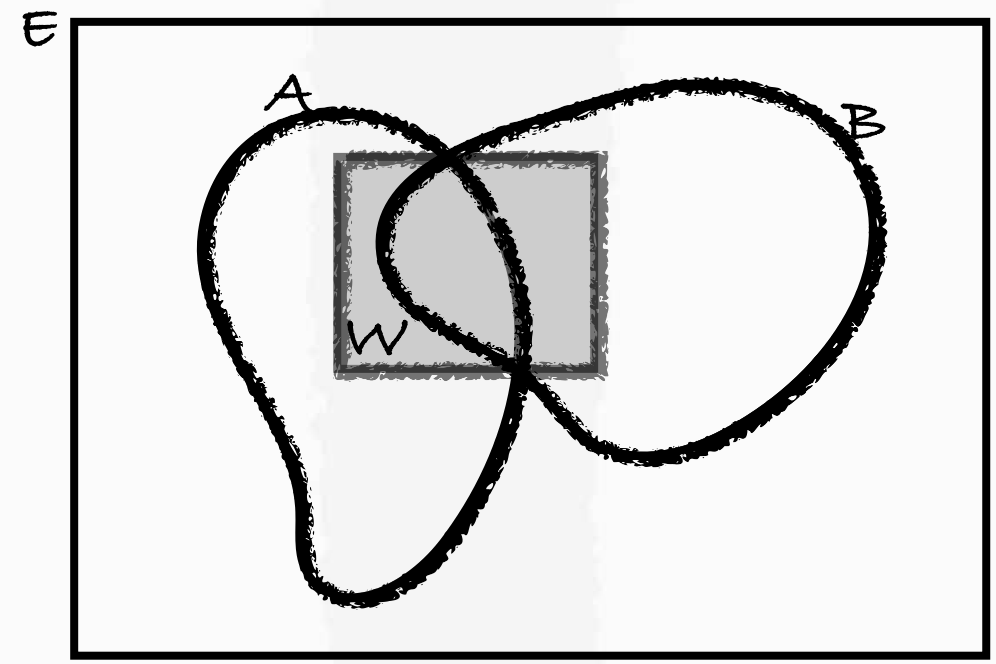


Definición. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$$A\sqcap^{w}B=W$$

$$(A,B,W)\in(L^{E})^{3}$$





Se caracteriza los w-disjuntos en $(L^{E}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$:

Proposición. Sean L un retículo distributivo y acotado, E un referencial y sea $(A,B,W)\in(L^{E})^{3}$.
Entonces

(i) $(A\sqcap^{w}B=W)\Leftrightarrow(W\in[A\cdot B,\ A+B])$.

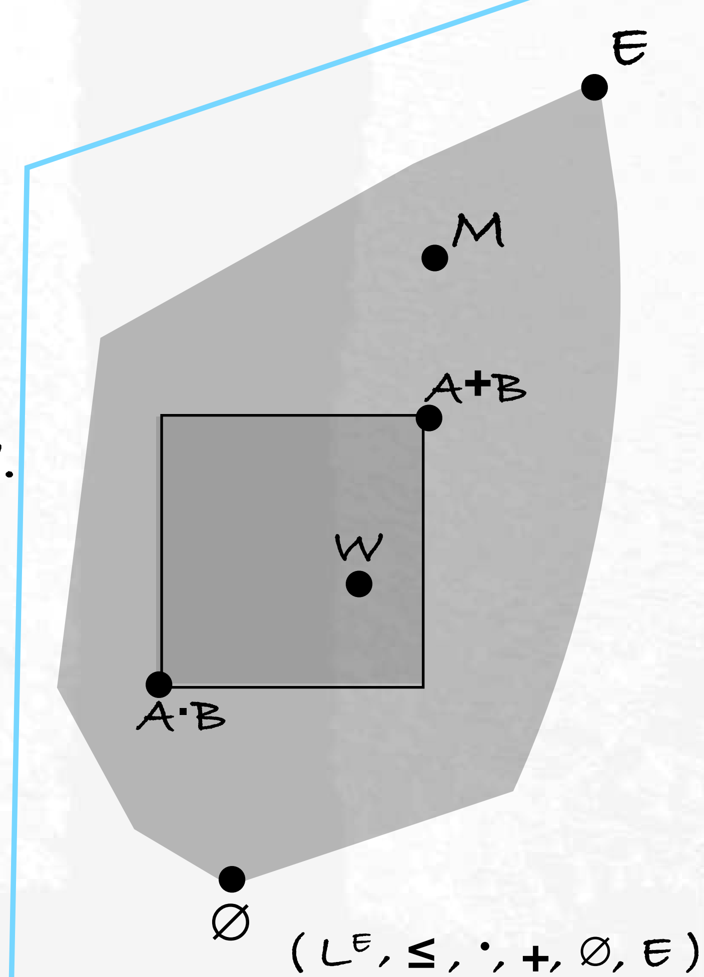
(ii) Si existe W^{c}, entonces $(A\sqcup^{w}B=W^{c})\Leftrightarrow(W^{c}\in[A\cdot B,\ A+B])$.

(iii) $[(A\sqcap^{w}B=W)\,\&\,(A\sqcup^{w}B=W^{c})]\Leftrightarrow[(A$ y B nítidos$)\,\&\,(A^{c}=B)]$

Demostración. (i) $\Rightarrow$) Se verifica: $W=A\sqcap^{w}B=A\cdot B+W(A+B)$,
luego $(A\cdot B)\cdot W=A\cdot B$ y $(A+B)\cdot W=A\cdot B+W(A+B)=W$, es decir
$A\cdot B\leq W\leq(A+B)$.
$\Leftarrow$) $[A\cdot B\leq W\leq(A+B)]\Rightarrow[A\sqcap^{w}B=A\cdot B+W(A+B)=W(A+B)=W$.

(ii) Se demuestra utilizando el resultado anterior para W^{c}:
$W^{c}=A\sqcup^{w}B=A\sqcap^{w^{c}}B$.

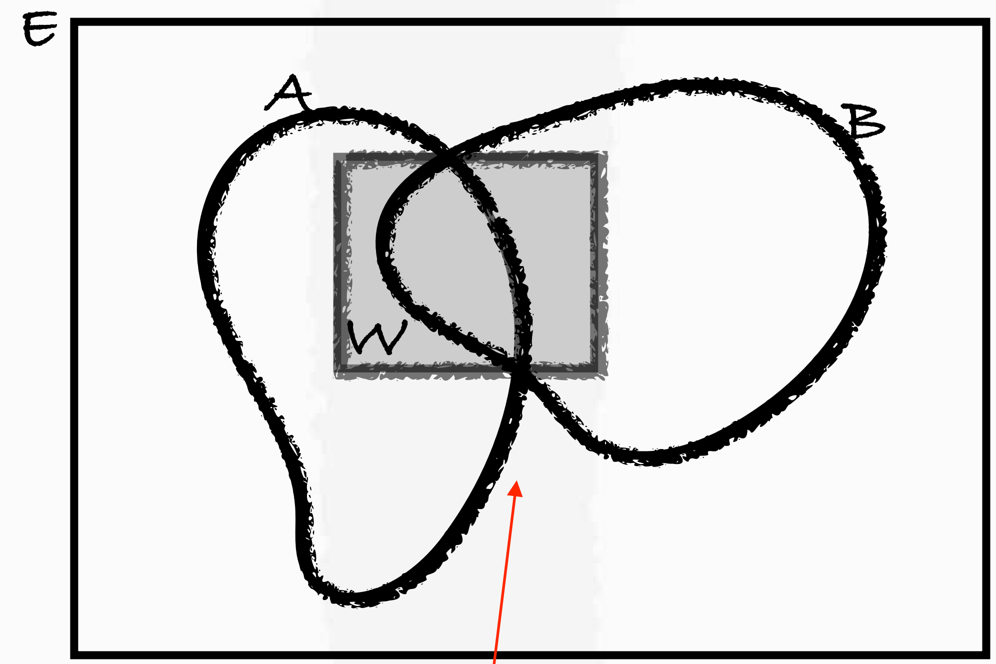
(iii) Bajo las hipótesis, se verifica $\{W,W^{c}\}\subseteq[A\cdot B,\ A+B]$ y
en consecuencia $A\cdot B\leq\varnothing=W\cdot W^{c}\leq W+W^{c}=E\leq(A+B)$, que
implica $(A\cdot B=\varnothing)\,\&\,(E=A+B)$ y que demuestra que A y B son
nítidos tales que $A^{c}=B$.∎



<u>Definición</u>. A y B son w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{w} B = W$$

$$(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$$



Se caracteriza los w-disjuntos en (L^{E}, ≤ , ·, +, ∅, E):

<u>Proposición</u>. Sean L un retículo distributivo y acotado, E un referencial y sea $(A,B,W) \in (L^{E})^{3}$. Entonces

(i) $(A \sqcap^{w} B = W) \Leftrightarrow (W \in [A \cdot B,\ A+B])$. (<u>Nota</u>. También equivalente a: $W \sqsubseteq^{A} B$).

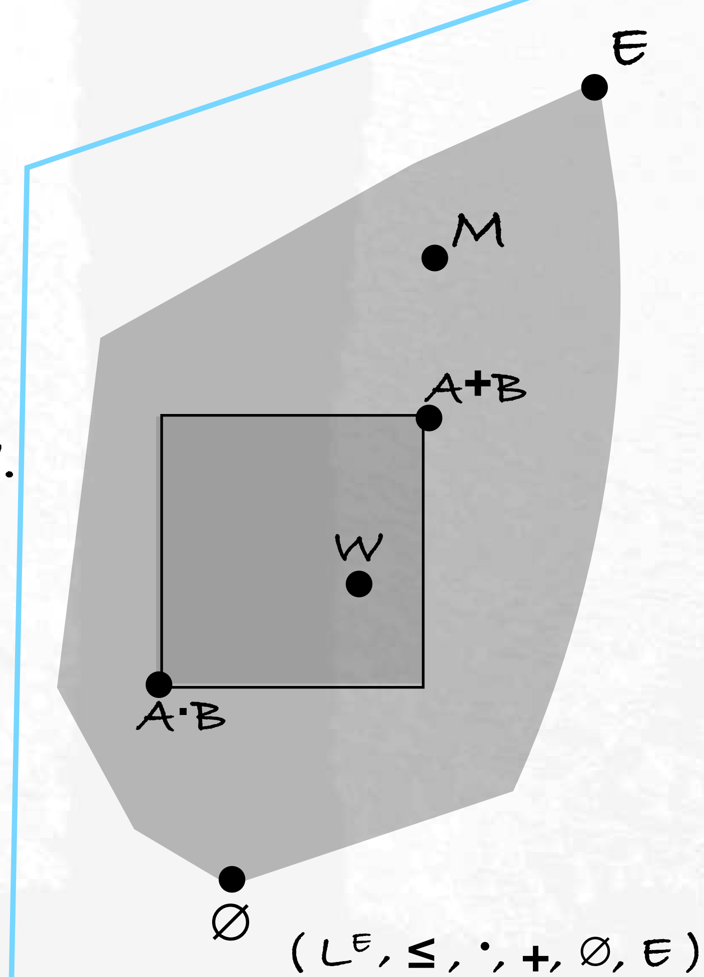
(ii) Si existe w^{c}, entonces $(A \sqcup^{w} B = W^{c}) \Leftrightarrow (W^{c} \in [A \cdot B,\ A+B])$.

(iii) $[(A \sqcap^{w} B = W) \,\&\, (A \sqcup^{w} B = W^{c})] \Leftrightarrow [(A \text{ y } B \text{ nítidos}) \,\&\, (A^{c} = B)]$

<u>Demostración</u>. (i) ⇒) Se verifica: $W = A \sqcap^{w} B = A \cdot B + W(A+B)$,
luego $(A \cdot B) \cdot W = A \cdot B$ y $(A+B) \cdot W = A \cdot B + W(A+B) = W$, es decir $A \cdot B \leq W \leq (A+B)$.
⇐) $[A \cdot B \leq W \leq (A+B)] \Rightarrow [A \sqcap^{w} B = A \cdot B + W(A+B) = W(A+B) = W$.

(ii) Se demuestra utilizando el resultado anterior para w^{c}:
$W^{c} = A \sqcup^{w} B = A \sqcap^{w^{c}} B$.

(iii) Bajo las hipótesis, se verifica $\{W, W^{c}\} \subseteq [A \cdot B,\ A+B]$ y en consecuencia $A \cdot B \leq \varnothing = W \cdot W^{c} \leq W + W^{c} = E \leq (A+B)$, que implica $(A \cdot B = \varnothing) \,\&\, (E = A+B)$ y que demuestra que A y B son nítidos tales que $A^{c} = B$.∎



W-inclusión, W-intersección, W-unión y W-pertenencia en Subconjuntos Borrosos de $\bar{\mathbb{R}}$ y valorados en una cadena finita $L=\{0, a, b, \ldots, 1\}$ o en la cadena $L=[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^{W}$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^{W}$ representa el operador ínfimo.

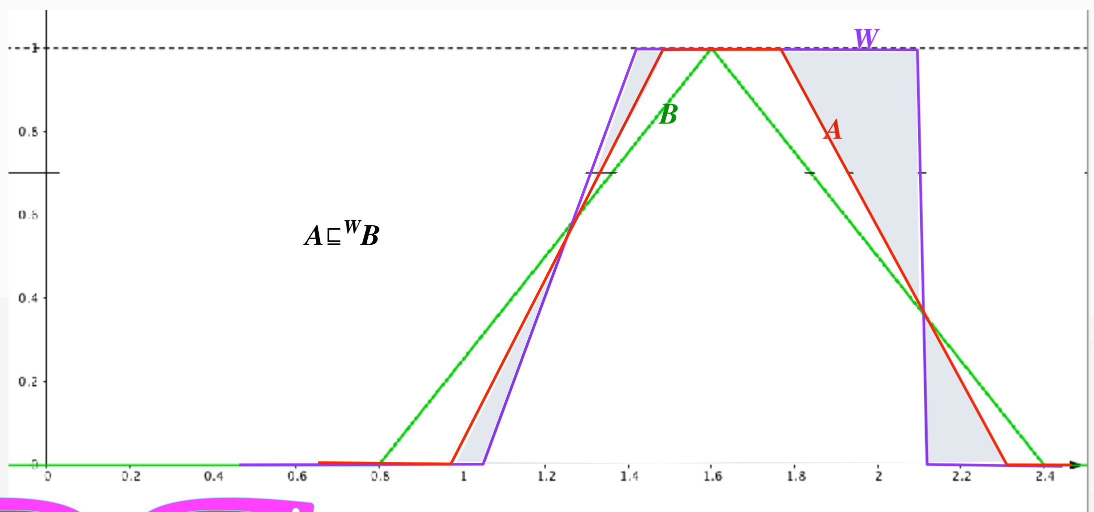
Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Ilustración de la w-inclusión $A \sqsubseteq^W B$:

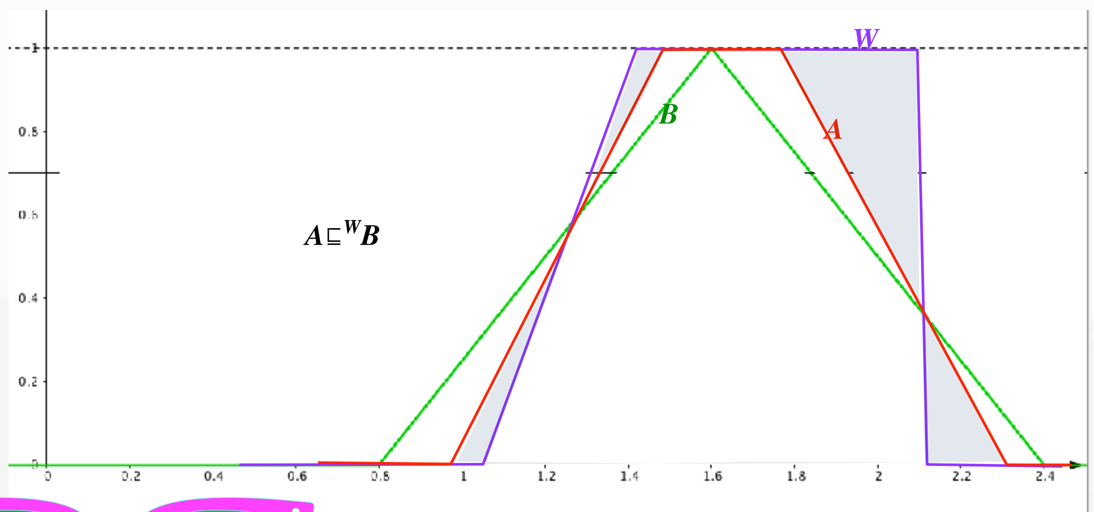


Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

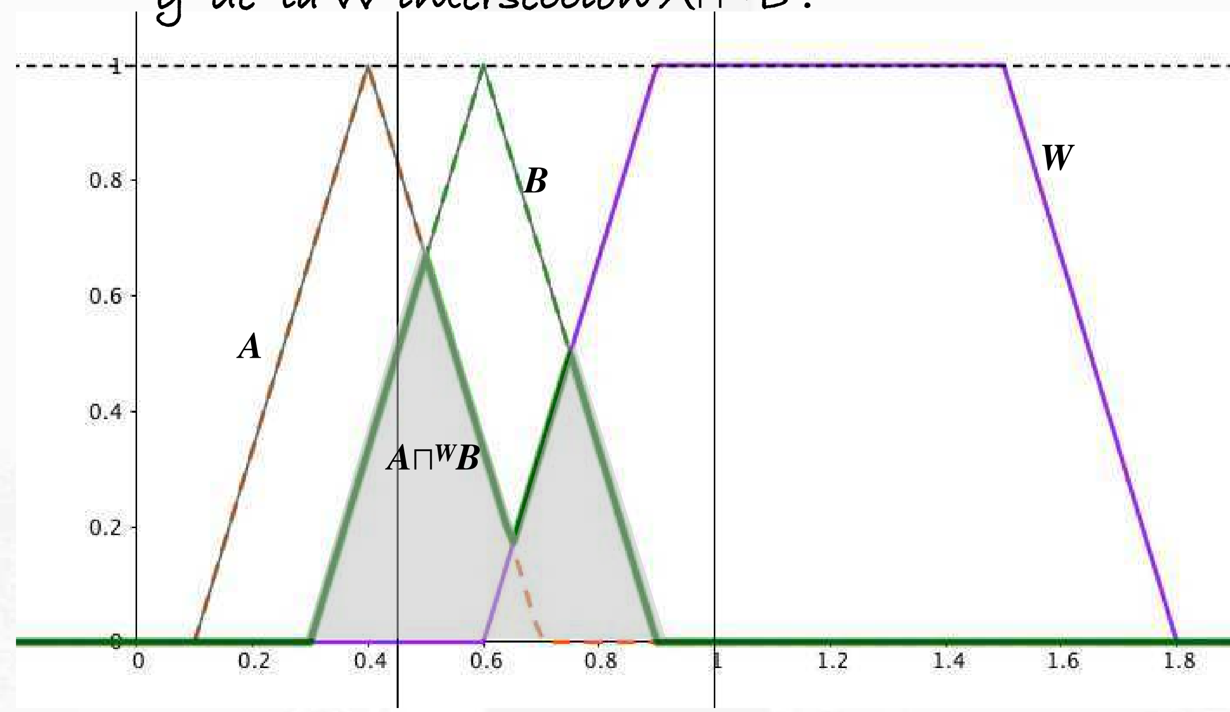
Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Ilustración de la w-inclusión $A\sqsubseteq^W B$:



y de la W-intersección $A\sqcap^W B$:

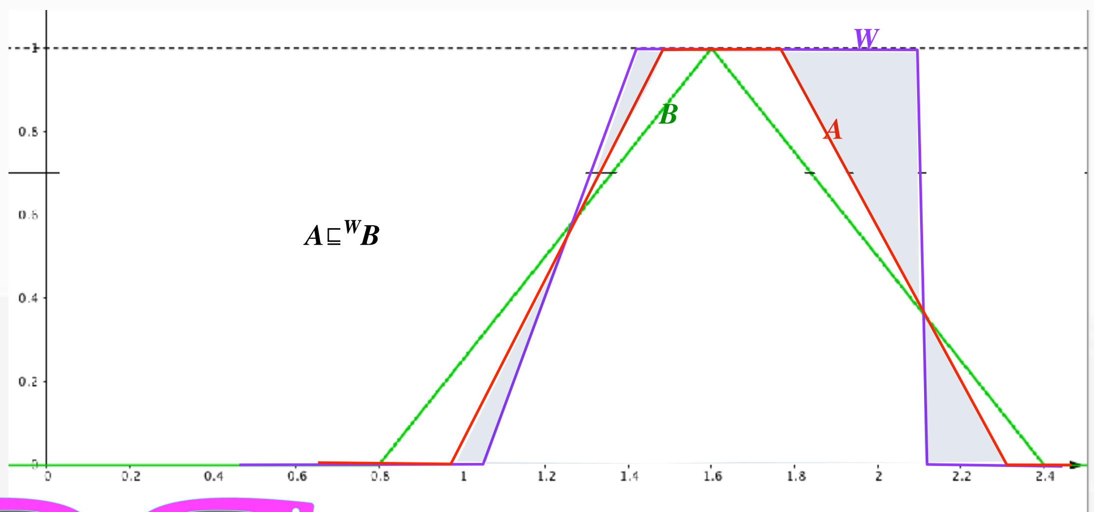


Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

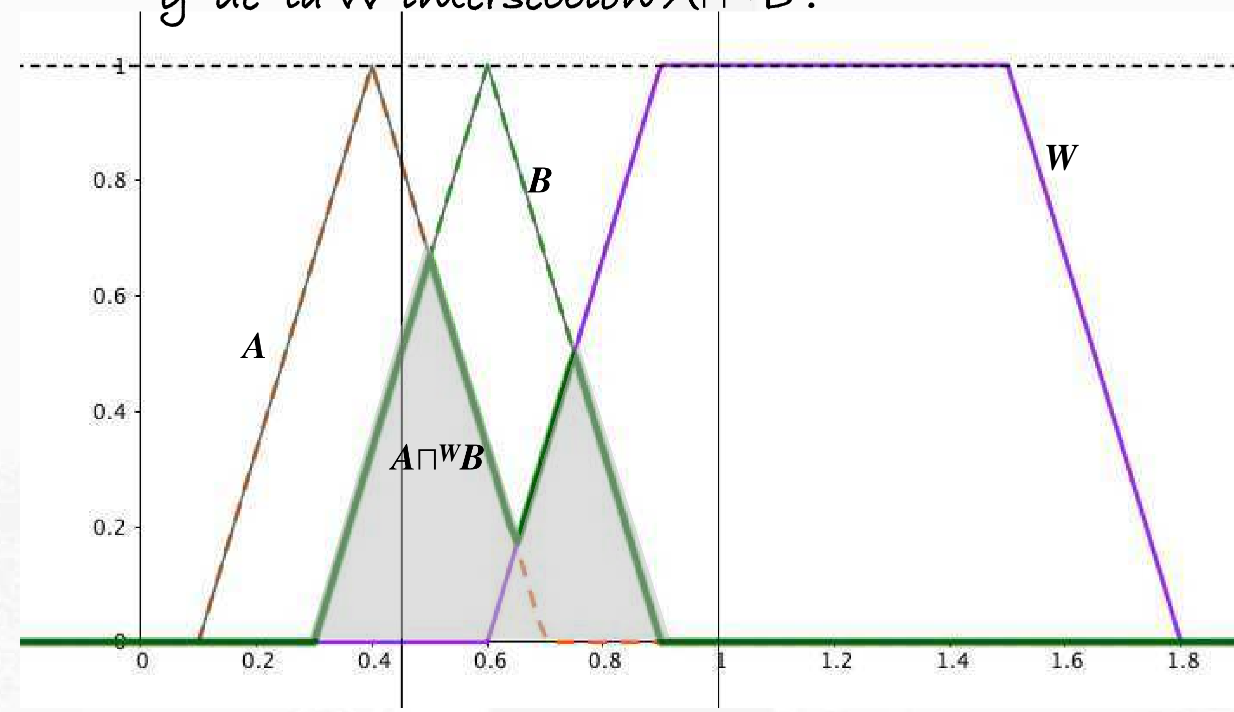
Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

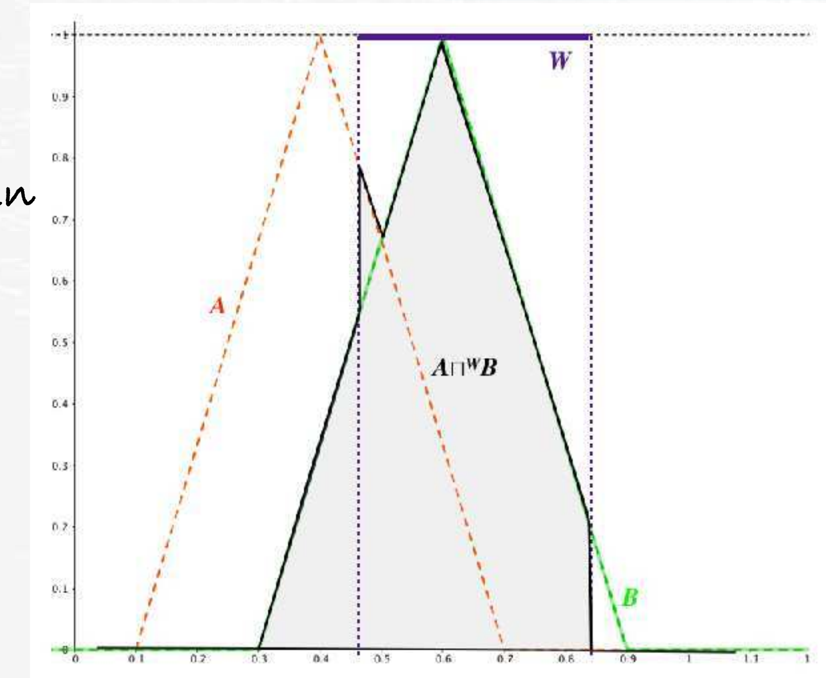
Ilustración de la w-inclusión $A \sqsubseteq^W B$:



y de la W-intersección $A \sqcap^W B$:



Si W es un "crisp set", entonces el inf-semiretículo asociado al orden $\sqsubseteq^W$ es un retículo isomorfo al inicial en el que la aplicación ´ también es negación fuerte: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$.



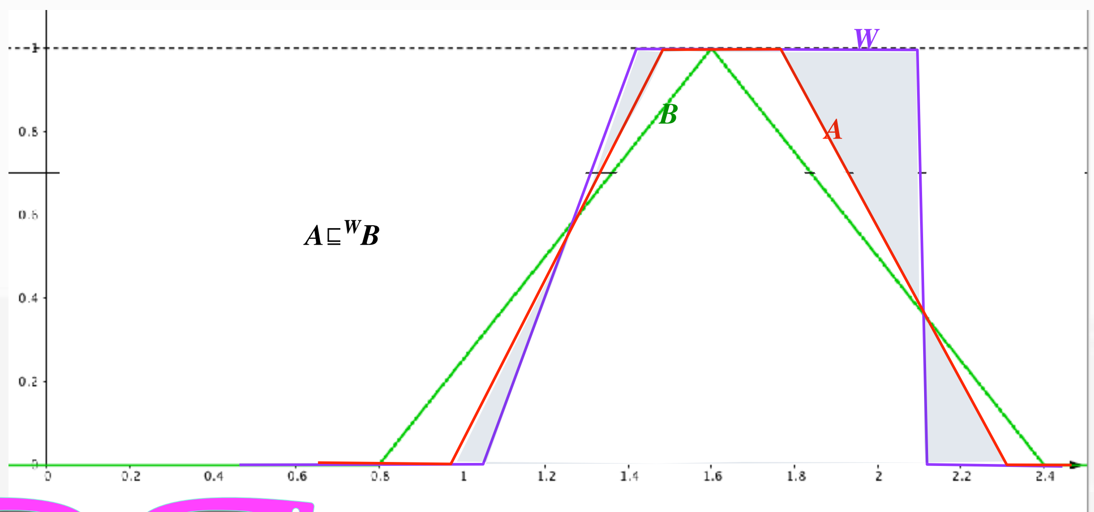
W crisp set, la W-intersección $A \sqcap^W B$:

Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

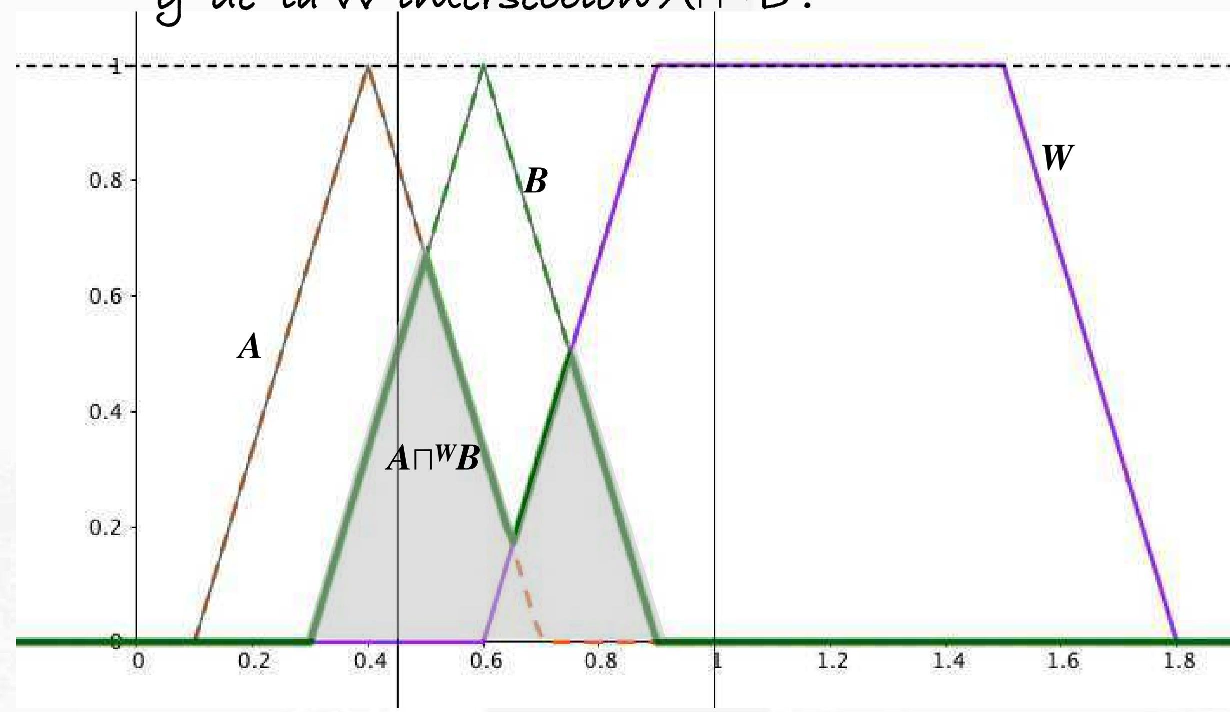
Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Ilustración de la w-inclusión $A\sqsubseteq^W B$:

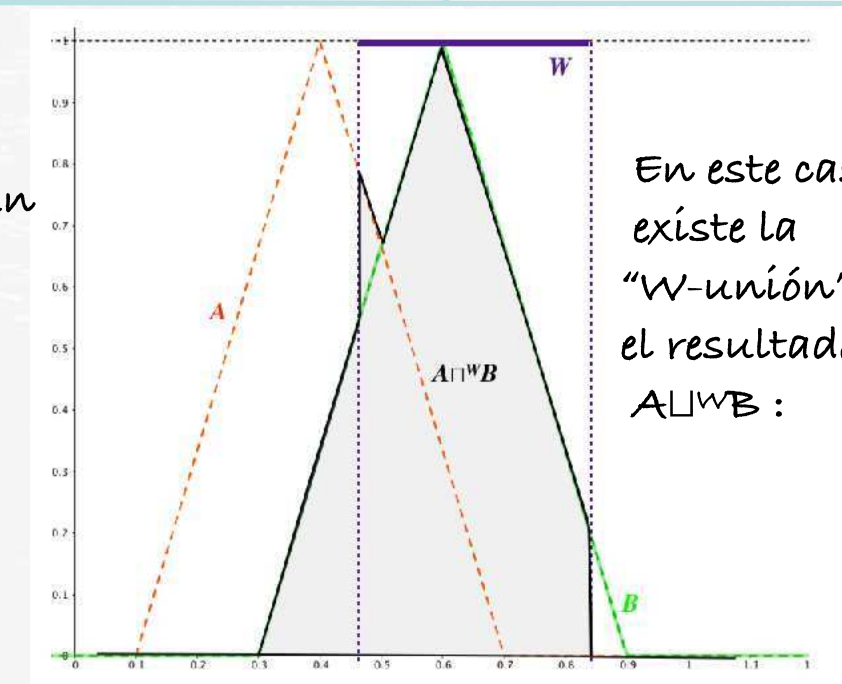


y de la W-intersección $A\sqcap^W B$:

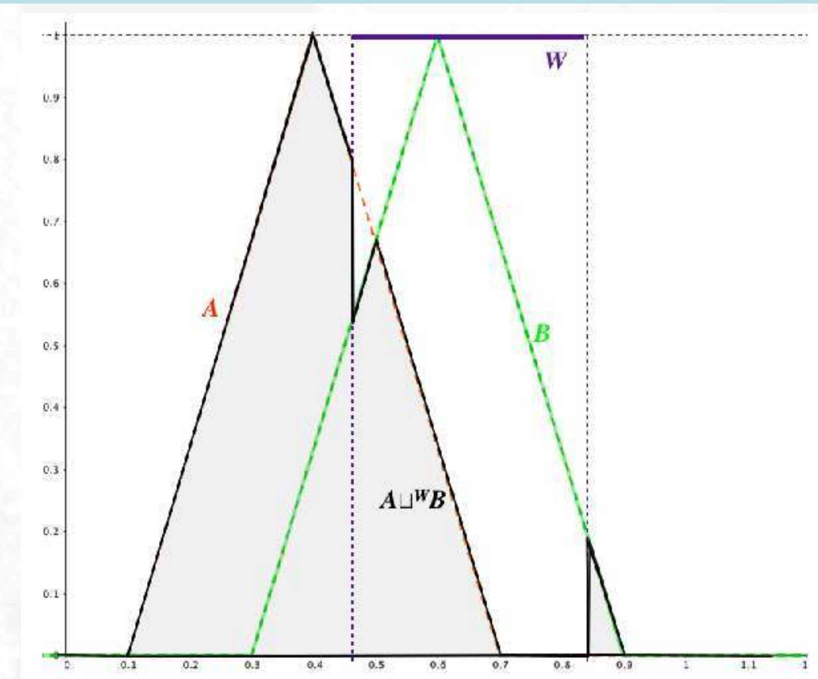


Si W es un "crisp set", entonces el inf-semiretículo asociado al orden $\sqsubseteq^W$ es un retículo isomorfo al inicial en el que la aplicación ´ también es negación fuerte: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$.

W crisp set, la W-intersección $A\sqcap^W B$:



En este caso, existe la "W-unión" y el resultado de $A\sqcup^W B$:

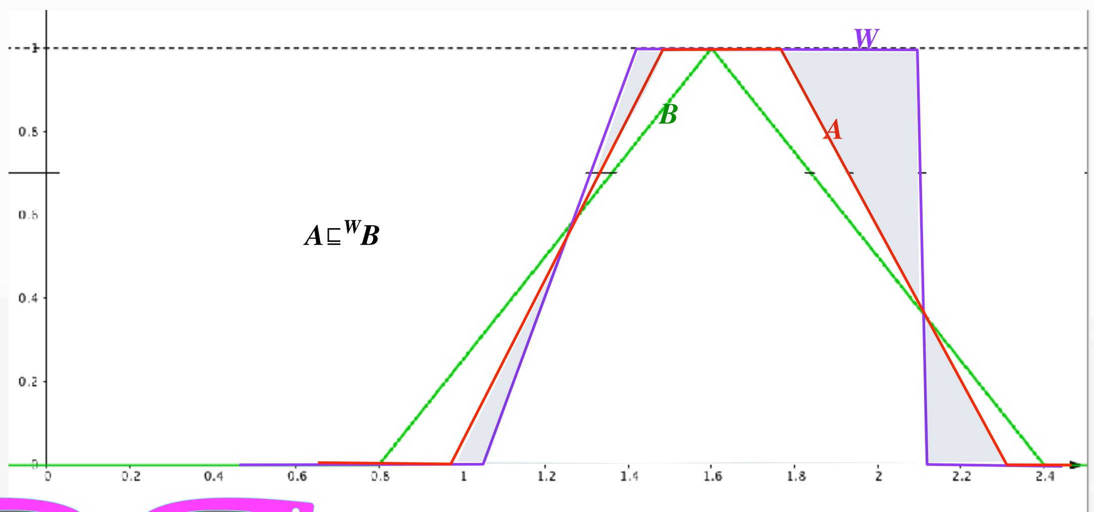


Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

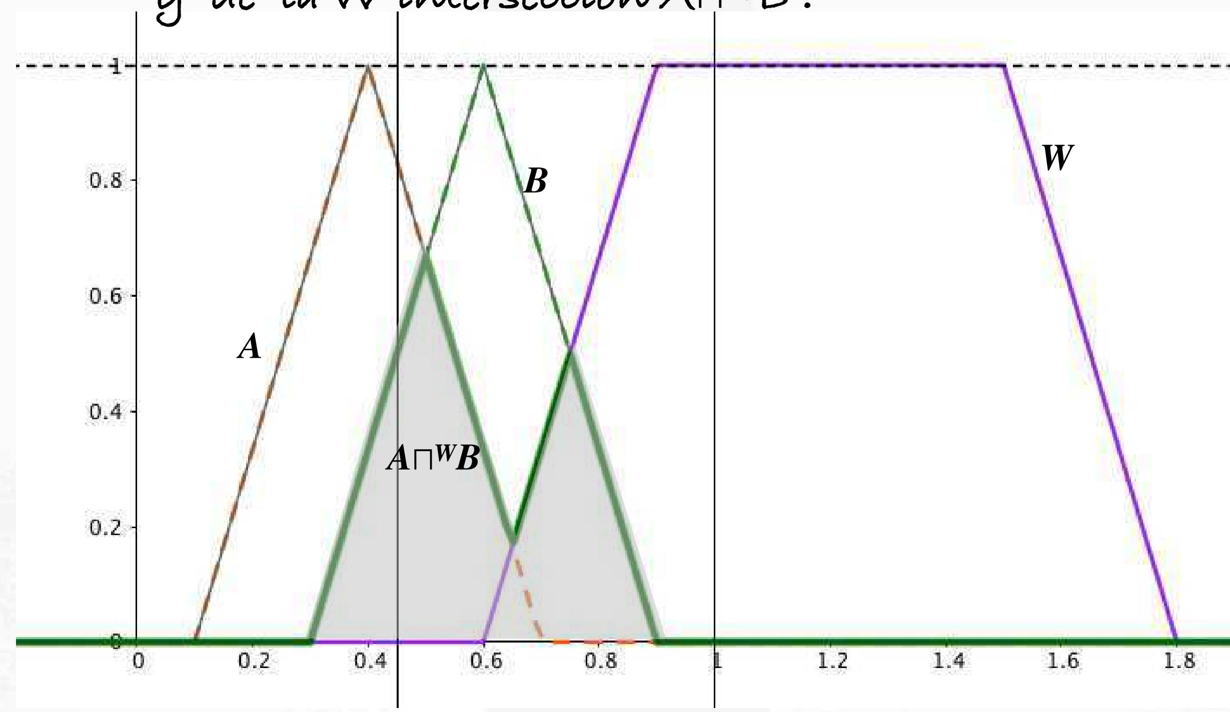
Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Ilustración de la w-inclusión $A \sqsubseteq^W B$:

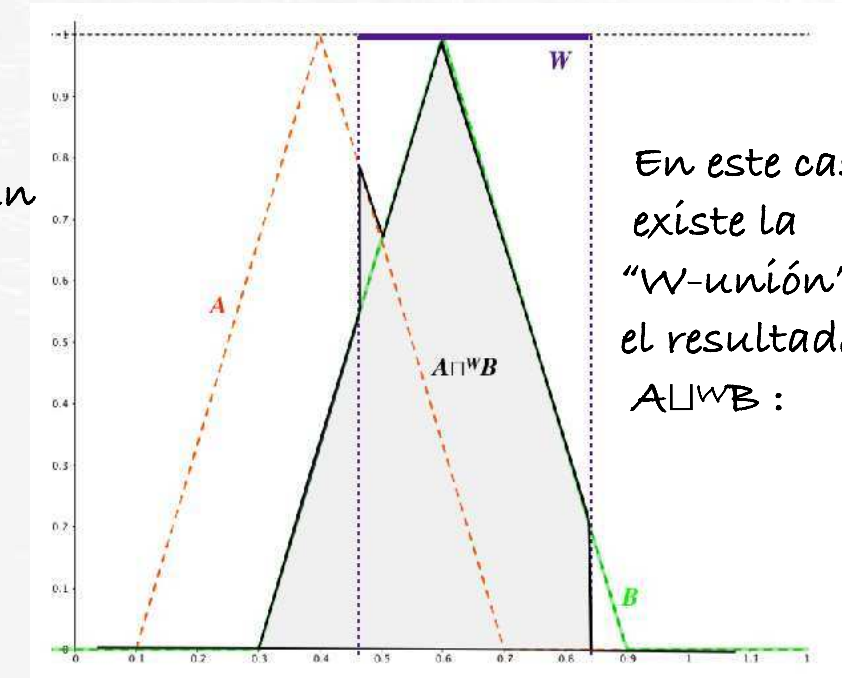


y de la W-intersección $A \sqcap^W B$:

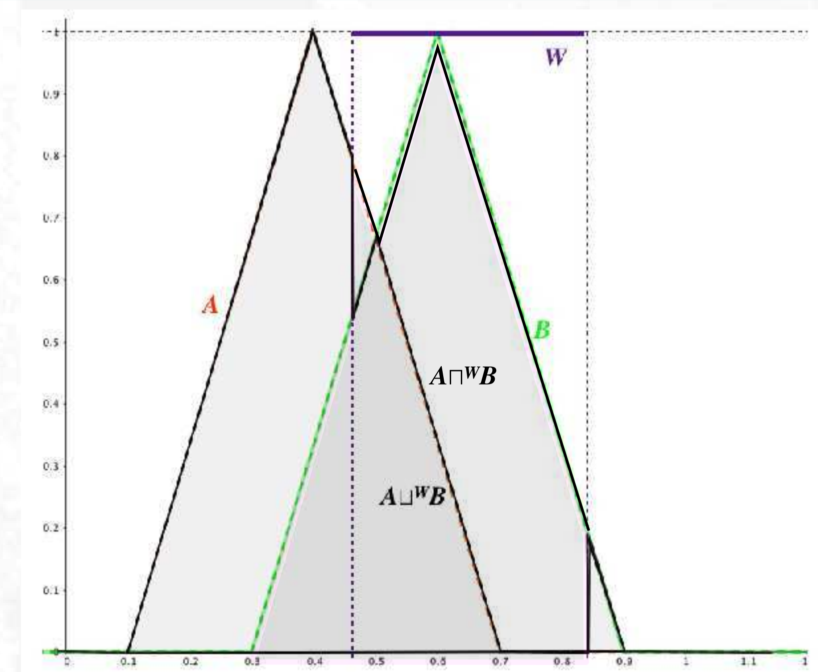


Si W es un "crisp set", entonces el inf-semiretículo asociado al orden $\sqsubseteq^W$ es un retículo isomorfo al inicial en el que la aplicación ´ también es negación fuerte: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$.

W crisp set, la W-intersección $A \sqcap^W B$:



En este caso, existe la "W-unión" y el resultado de $A \sqcup^W B$:



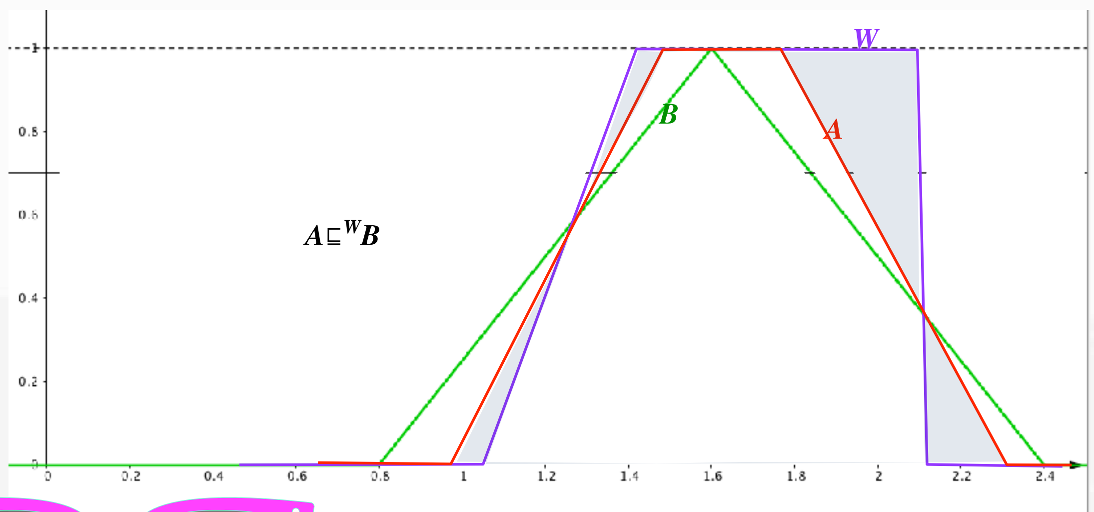
$(A \sqcap^W B) \cdot (A \sqcup^W B) = (A \cdot B), \quad (A \sqcap^W B) + (A \sqcup^W B) = (A + B)$

Retículo distributivo de los subconjuntos borrosos de la recta completa $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}}), ')$ con la negación extensiónpunto a punto de la negación de Zadeh $x' = 1-x$ en $[0,1]$.

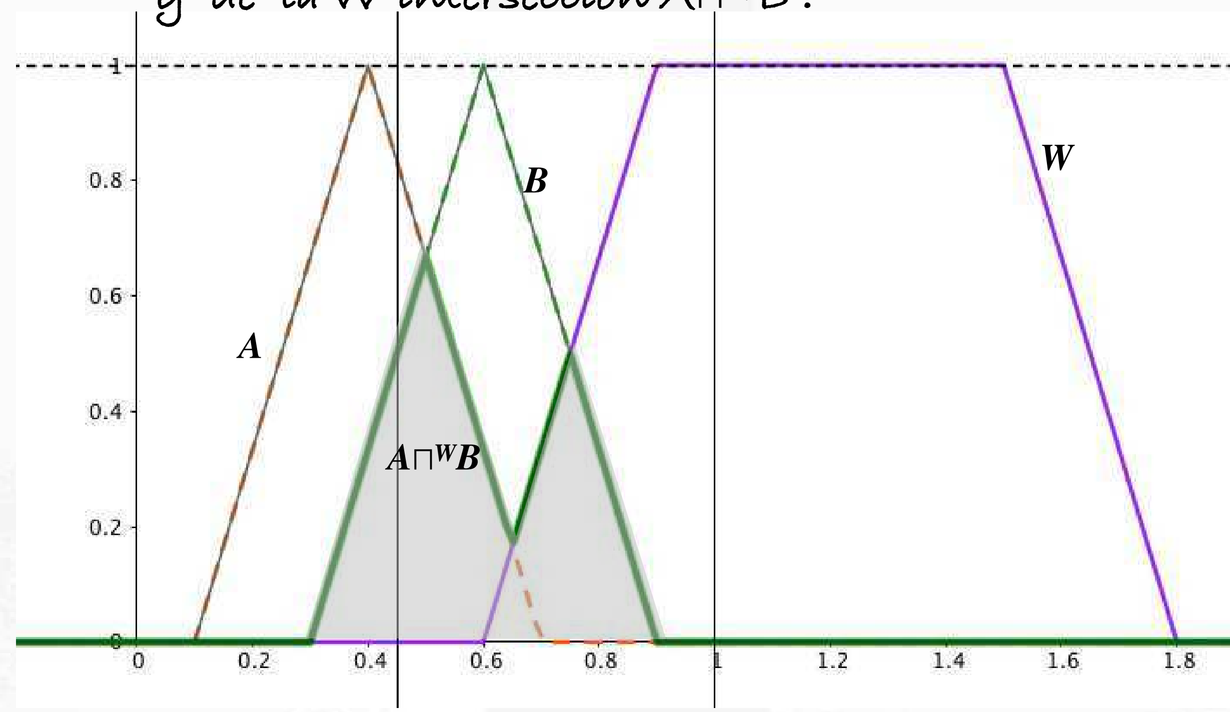
Sea W un subconjuntos borroso del retículo : $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \leq, \cdot, +, \emptyset, \bar{\mathbb{R}})$ y sea $([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo acotado asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ desde la perspectiva de W, en el que $\sqcap^W$ representa el operador ínfimo.

Por ejemplo, si A ,B y W son los correspondientes números triangulares o trapezoidales que aparecen en las figuras,

Ilustración de la w-inclusión $A \sqsubseteq^W B$:

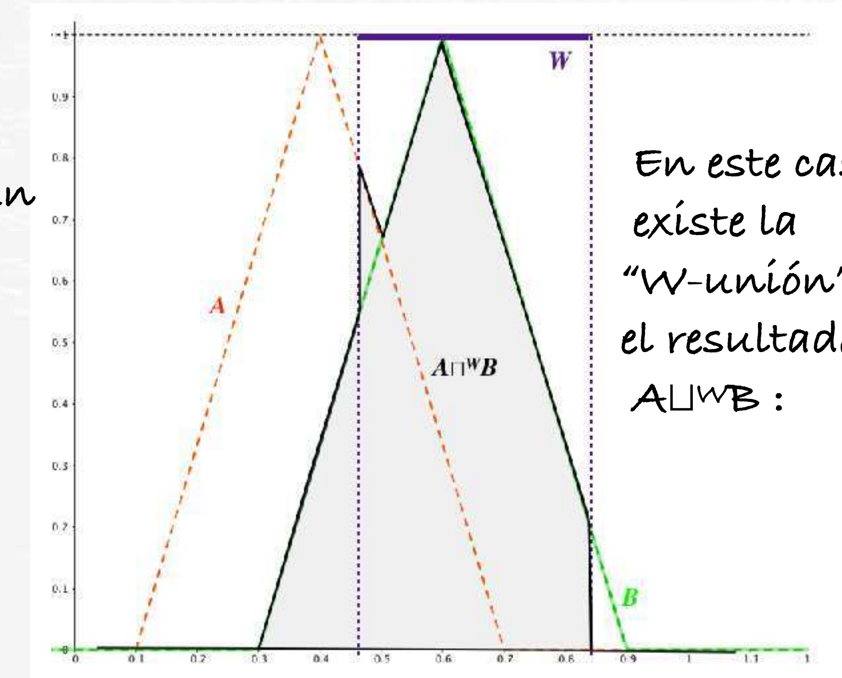


y de la W-intersección $A \sqcap^W B$:

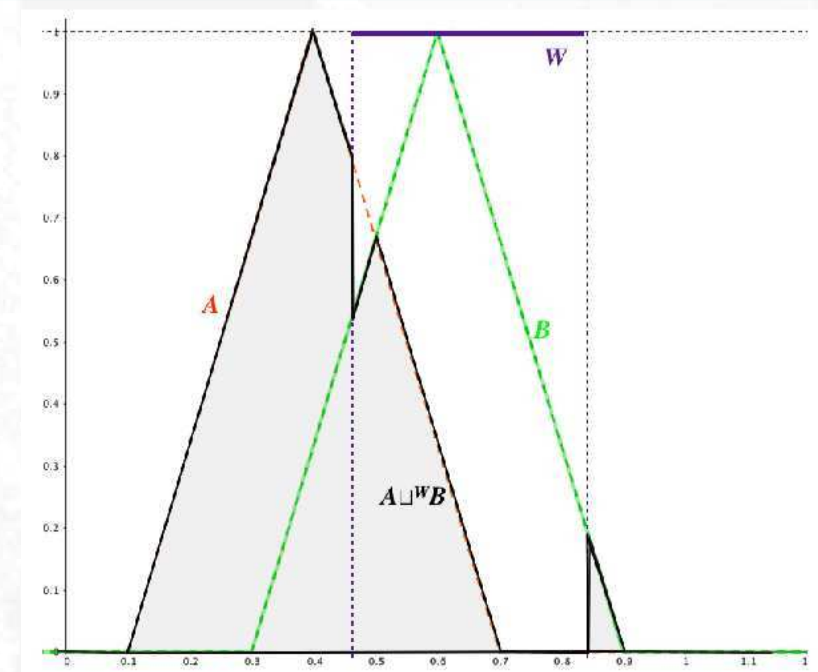


Si W es un "crisp set", entonces el inf-semiretículo asociado al orden $\sqsubseteq^W$ es un retículo isomorfo al inicial en el que la aplicación ´ también es negación fuerte: $(([0,1]^{\bar{\mathbb{R}}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$.

W crisp set, la W-intersección $A \sqcap^W B$:



En este caso, existe la "W-unión" y el resultado de $A \sqcup^W B$:



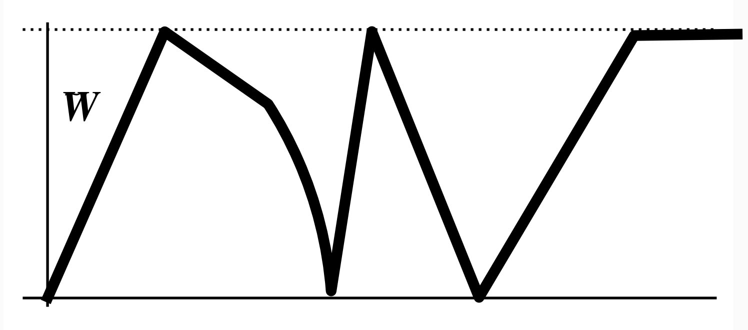
(*) $(A \sqcap^W B) \cdot (A \sqcup^W B) = (A \cdot B)$, $(A \sqcap^W B) + (A \sqcup^W B) = (A + B)$

(*) (Véase dos transparenciasmás adelante)

El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

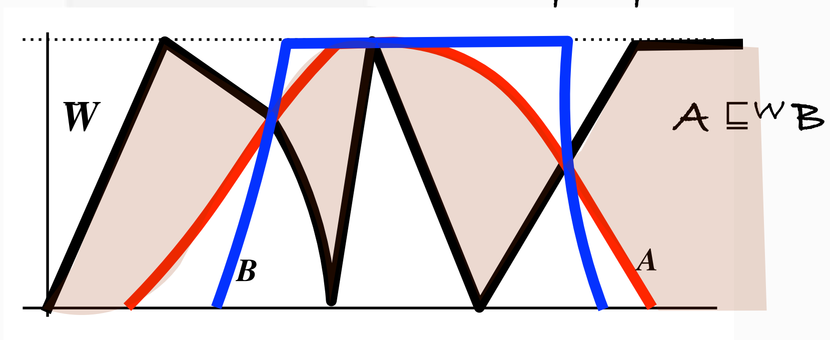
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de W:



El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de W:



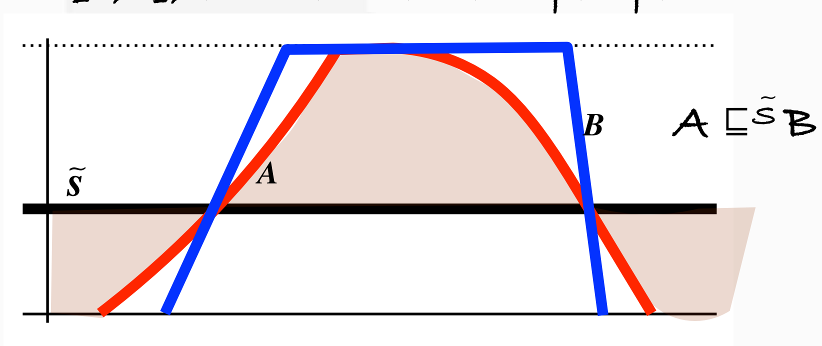
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



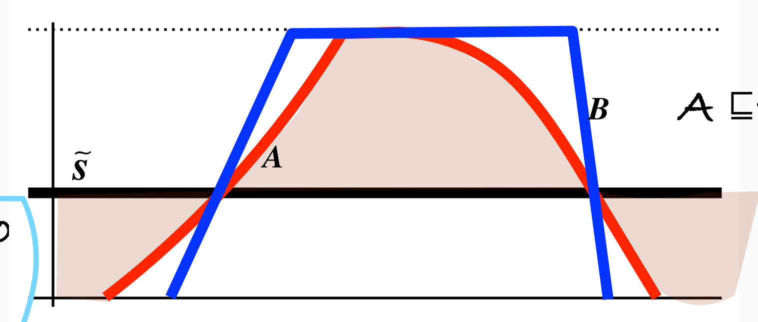
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

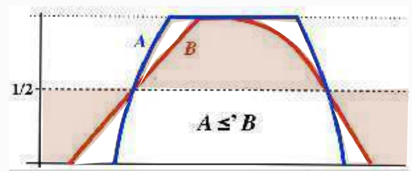
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

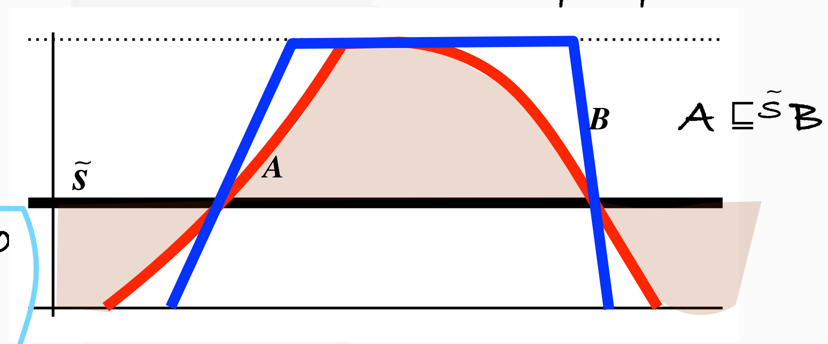
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

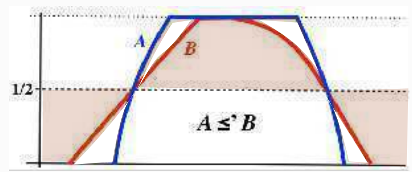
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

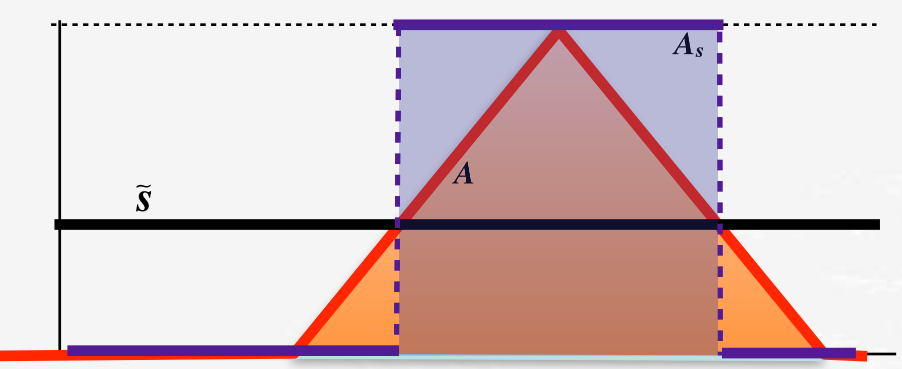
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory.* Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \not\leq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



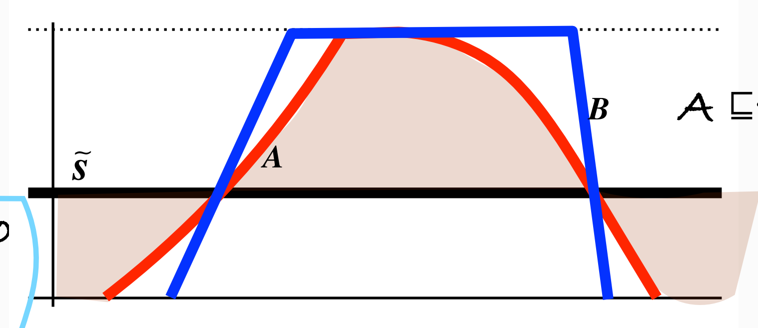
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s\in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s}\in L^E$ tal que:

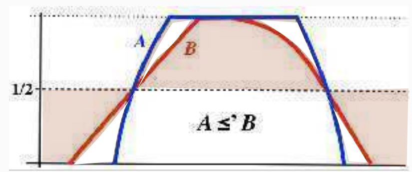
$$\tilde{s}(x)=s \quad \forall x\in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

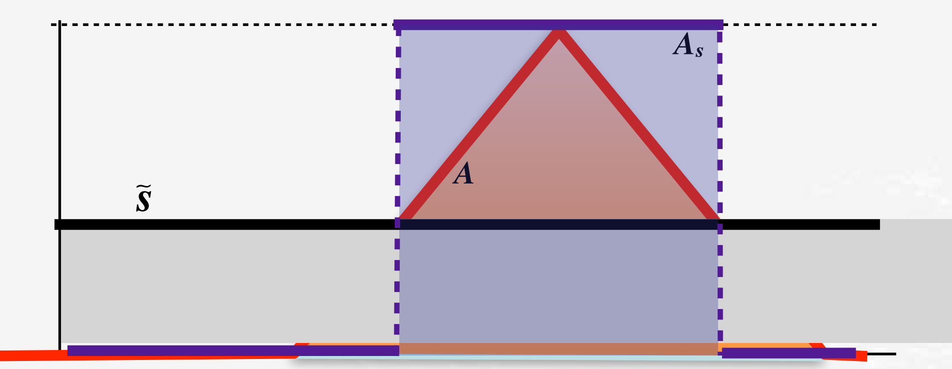
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A\in L^E$ y $s\in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s=\{x\in E/ \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s=\{x\in E/ \ A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s\in L, \forall A\in L^E$



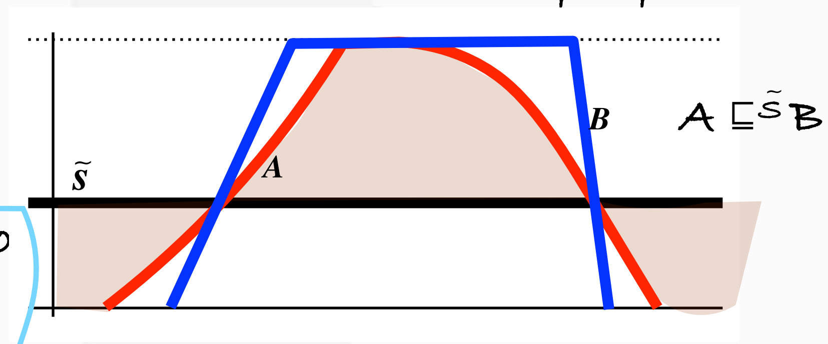
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

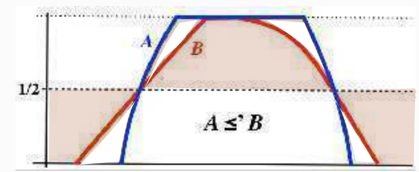
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

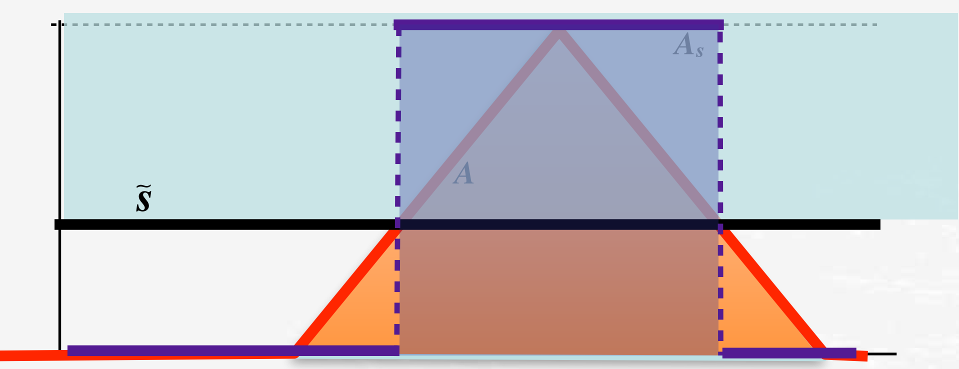
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s \ \ \forall s \in L, \forall A \in L^E$



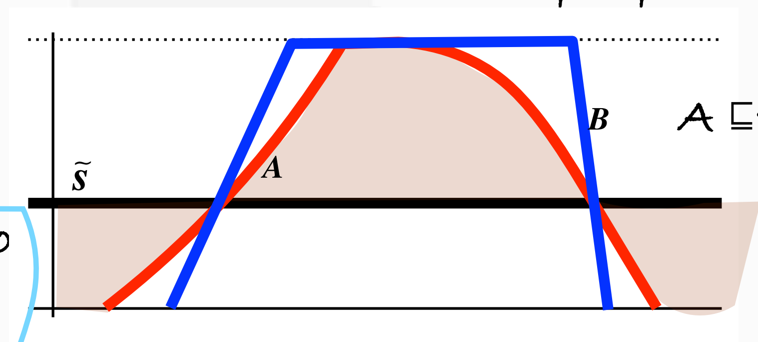
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

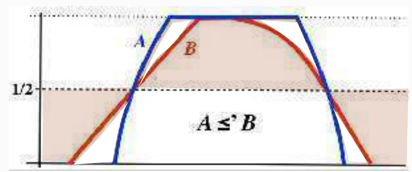
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

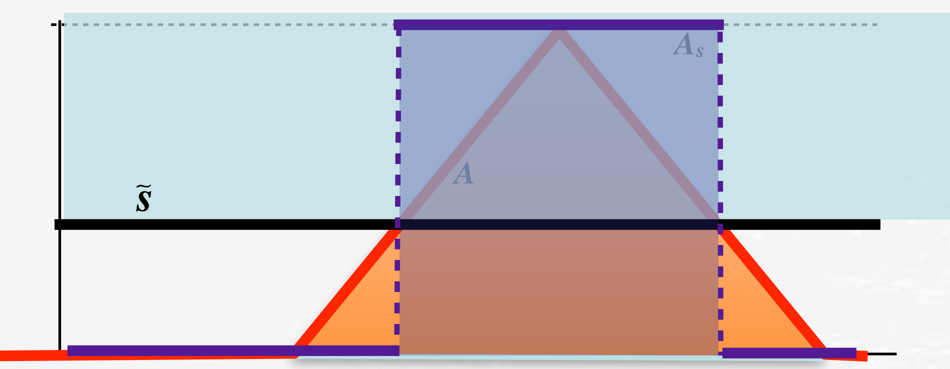
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$

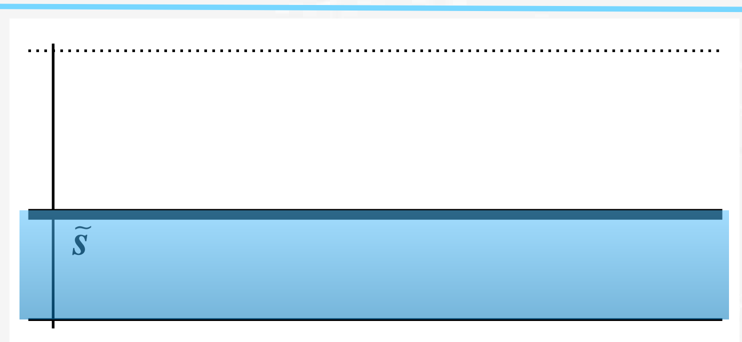


A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \not\leq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$





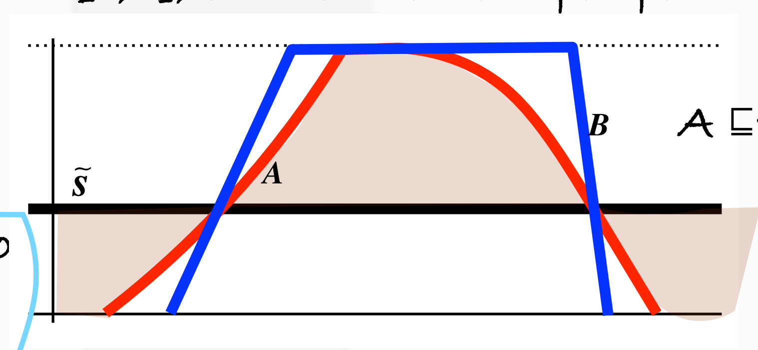
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

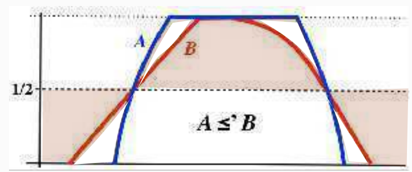
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



$A \sqsubseteq^{\tilde{s}} B$

Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

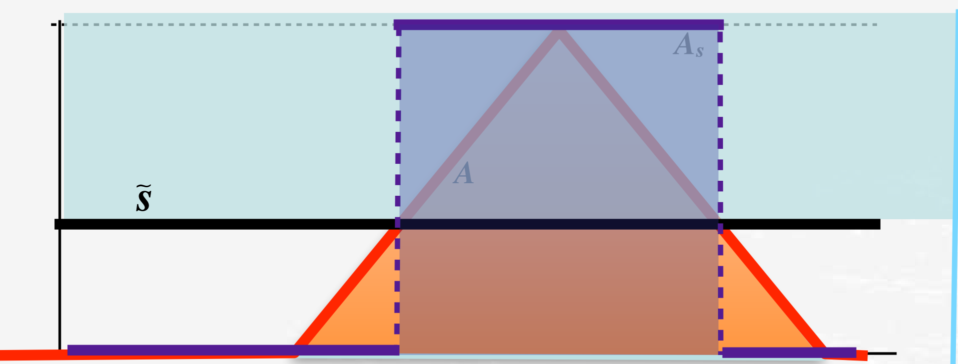
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$

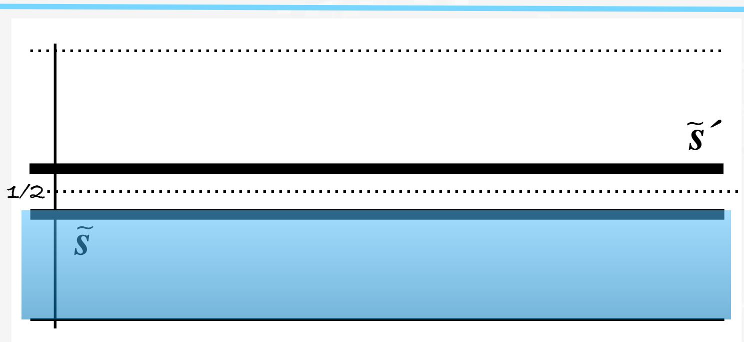


A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s \ \ \forall s \in L, \forall A \in L^E$





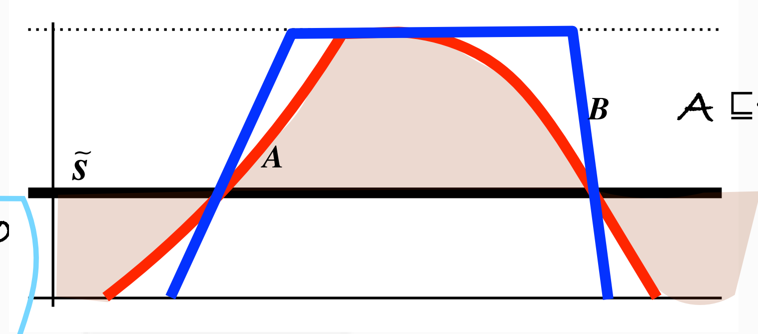
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

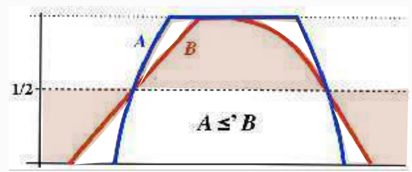
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

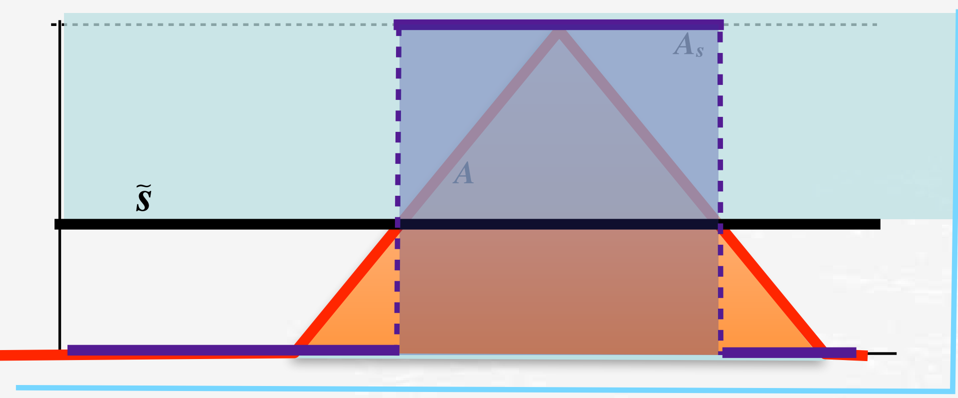
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$

A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

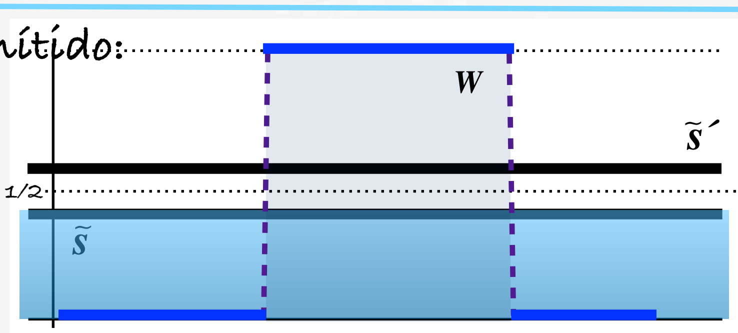


Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \not\leq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:



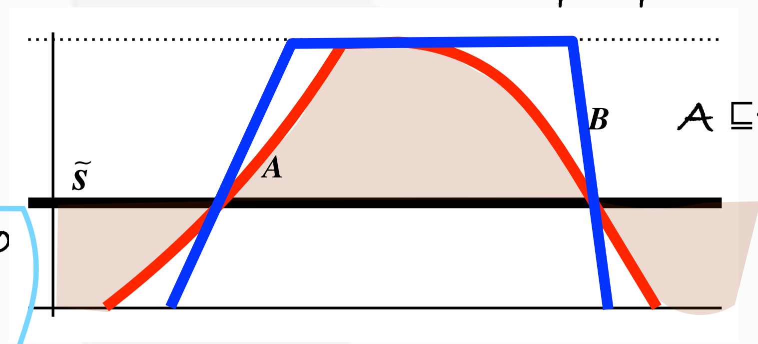
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

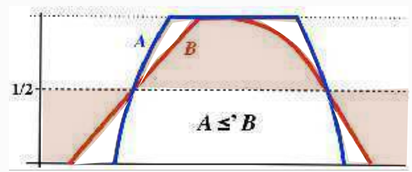
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



$A \sqsubseteq^{\tilde{s}} B$

Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

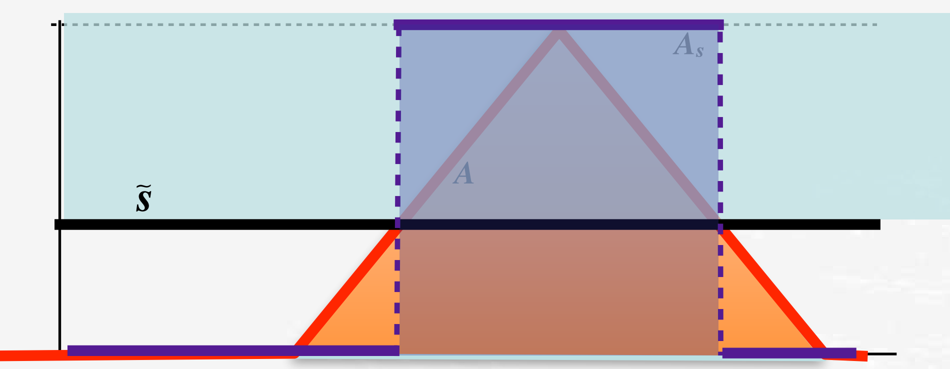
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



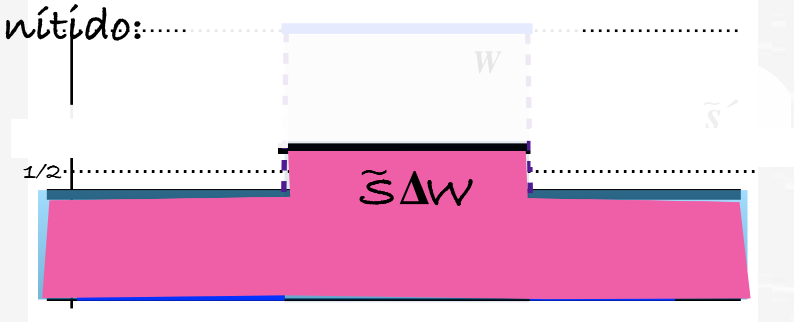
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \; A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \; A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:



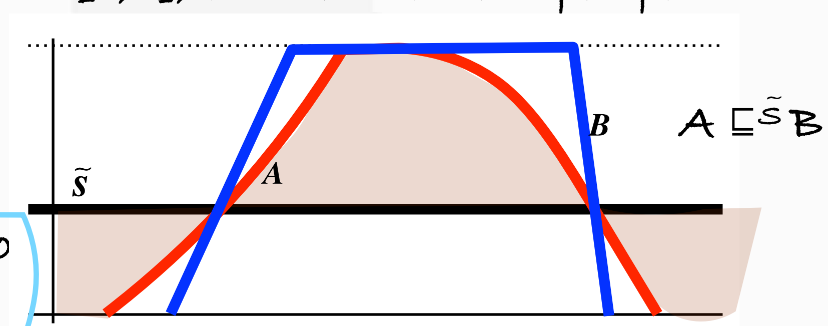
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s\in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s}\in L^E$ tal que:

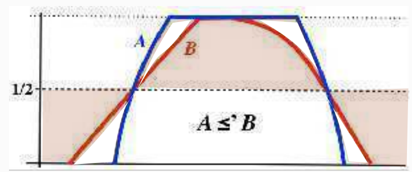
$$\tilde{s}(x)=s \quad \forall x\in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

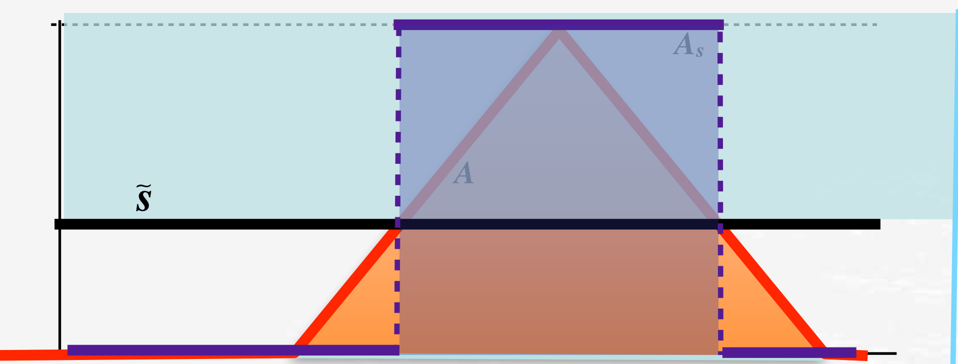
$$(A\leq' B)\Leftrightarrow (B\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



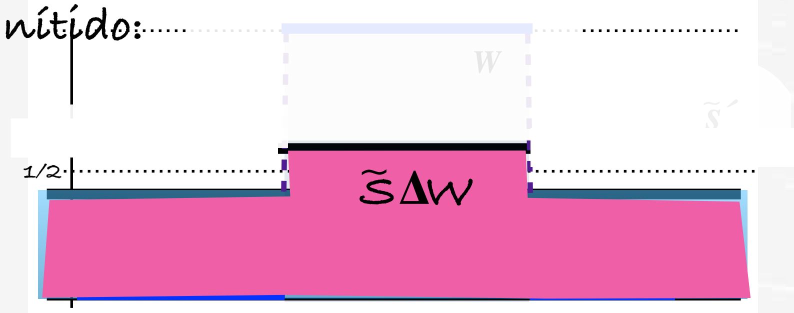
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory.* Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A\in L^E$ y $s\in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s=\{x\in E/\ A(x)\geq s\}$ y $A^*_s=\{x\in E/\ A(x)\nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A_s$, $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A^*_s$ $\forall s\in L,\forall A\in L^E$



W nítido:



Dados $s\in L$ tal que $s>0$ y $x\in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s\in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y)=\begin{cases} s & \text{si } y=x\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

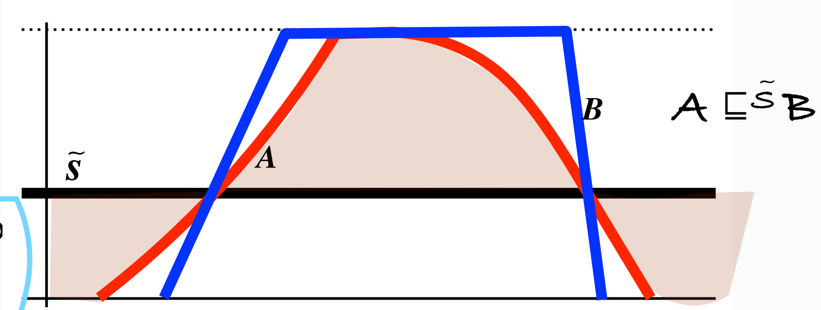
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s\in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s}\in L^E$ tal que:

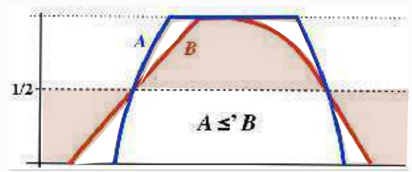
$$\tilde{s}(x)=s \quad \forall x\in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

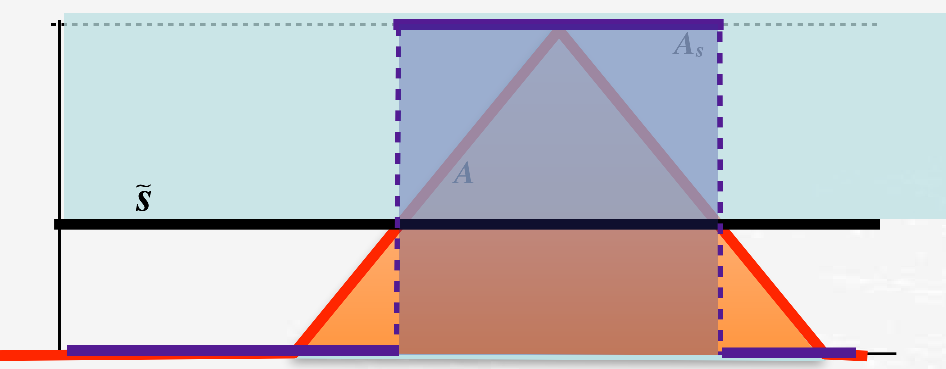
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



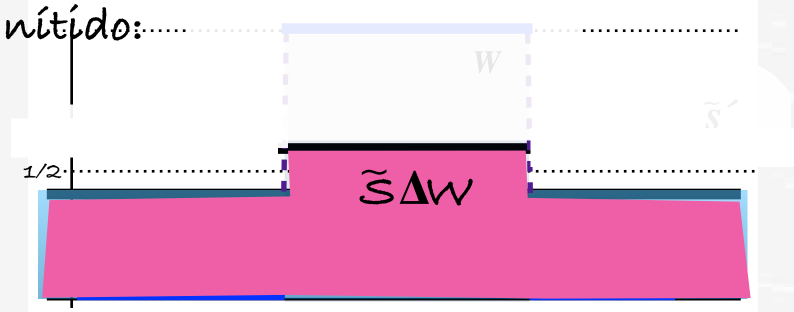
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A\in L^E$ y $s\in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s=\{x\in E/\ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s=\{x\in E/\ A(x) \not\leq s\}$

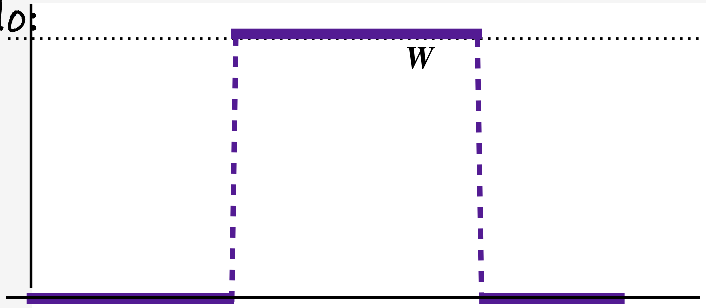
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s\in L, \forall A\in L^E$



W nítido:



W nítido:



Dados $s\in L$ tal que $s>0$ y $x\in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s\in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

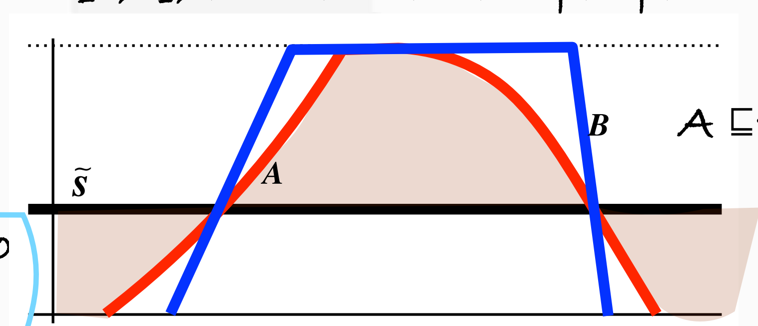
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

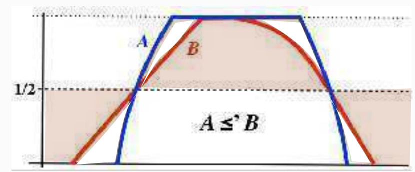
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



$A \sqsubseteq^{\tilde{s}} B$

Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

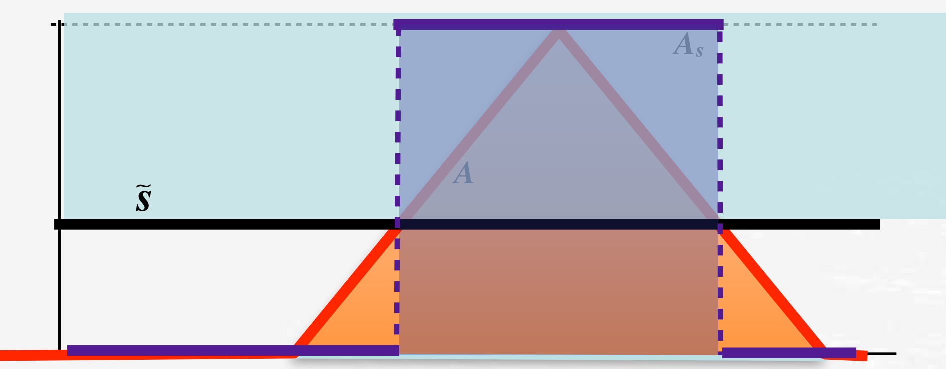
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



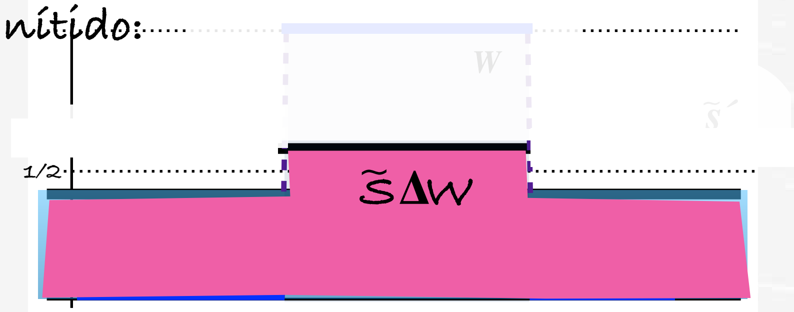
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

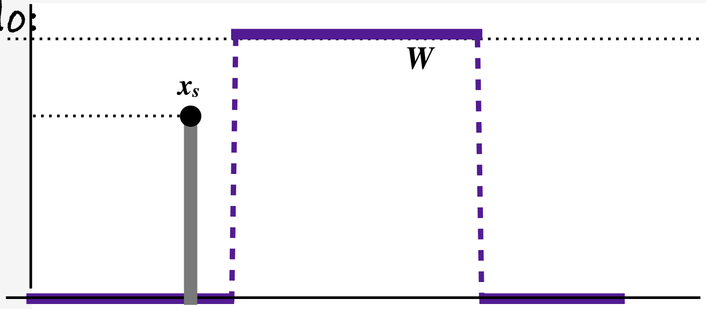
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:



W nítido:



Dados $s \in L$ tal que $s>0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

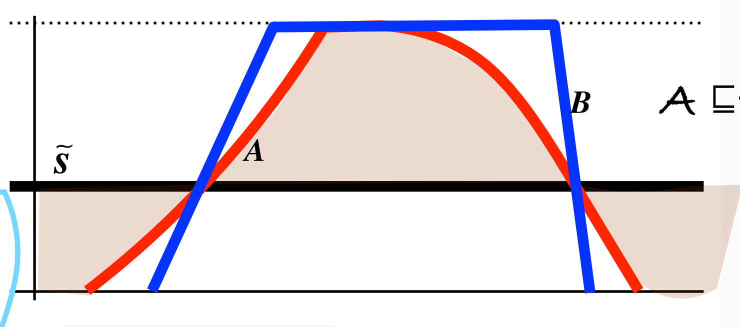
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

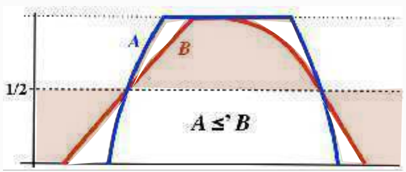
Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



$A \sqsubseteq^{\tilde{s}} B$

Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

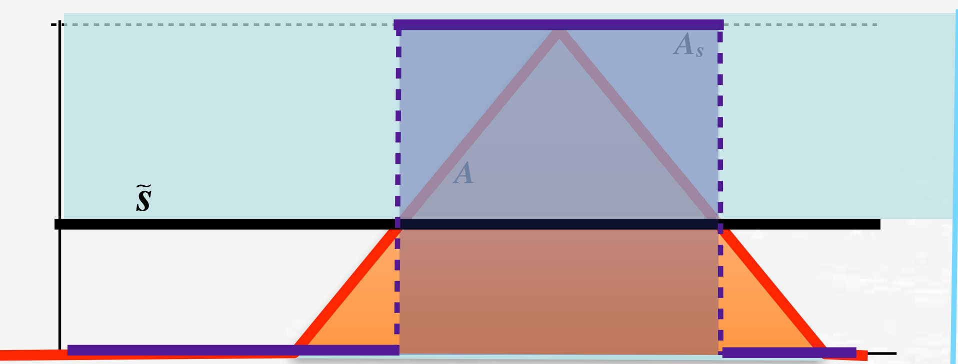
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



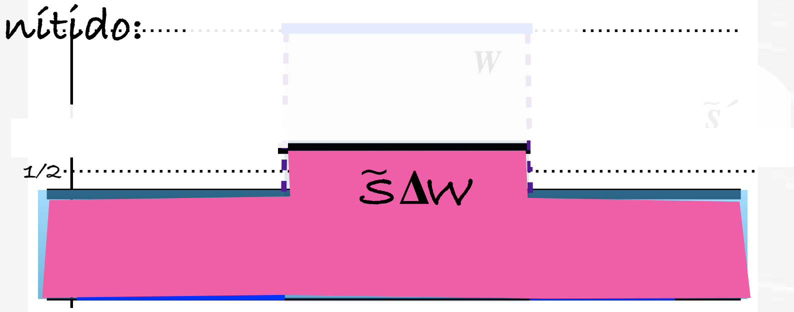
A. De Luca, S. Termini, *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$

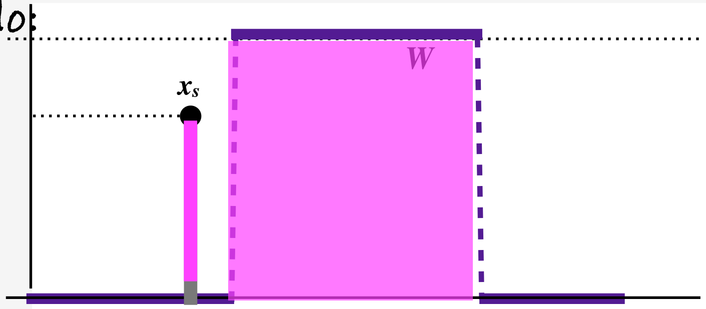


W nítido:



W nítido:

$x_r \Delta W$



Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

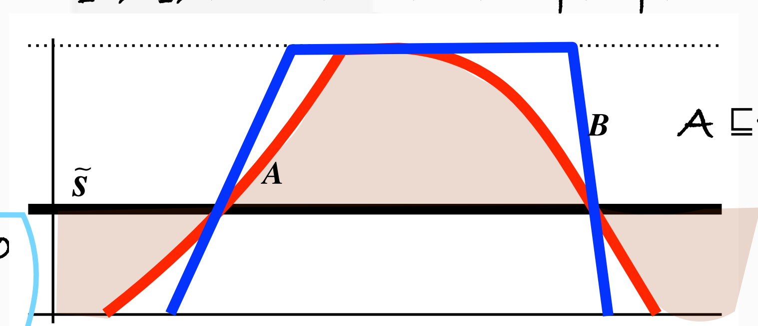
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

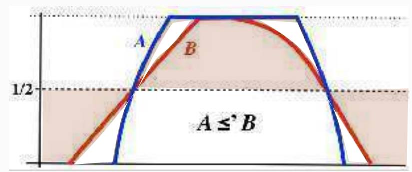
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para L=[0,1], el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para s=1/2, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

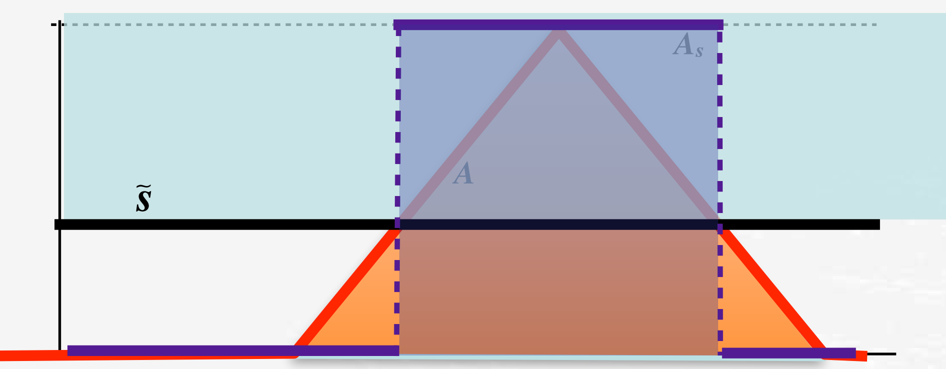
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E /\ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E /\ A(x) \nleq s\}$

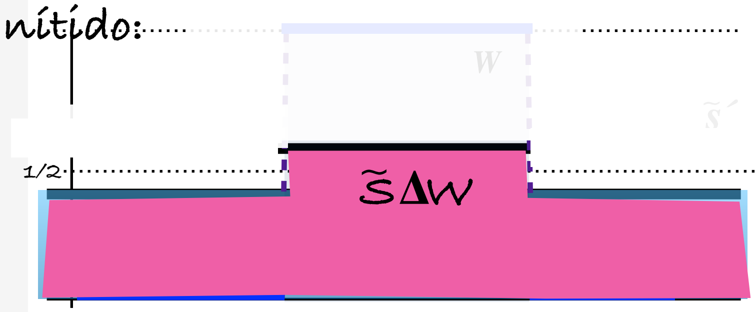
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



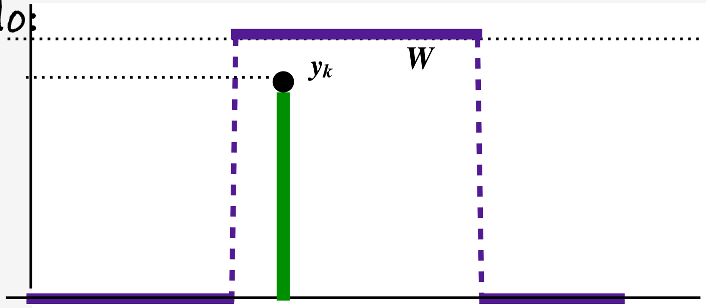
Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W nítido:



W nítido:



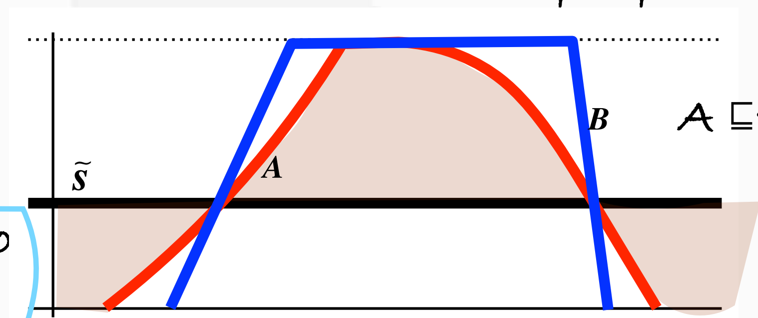
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

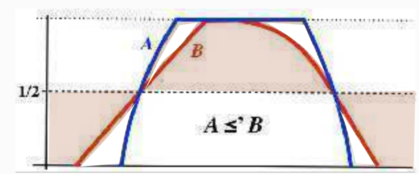
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

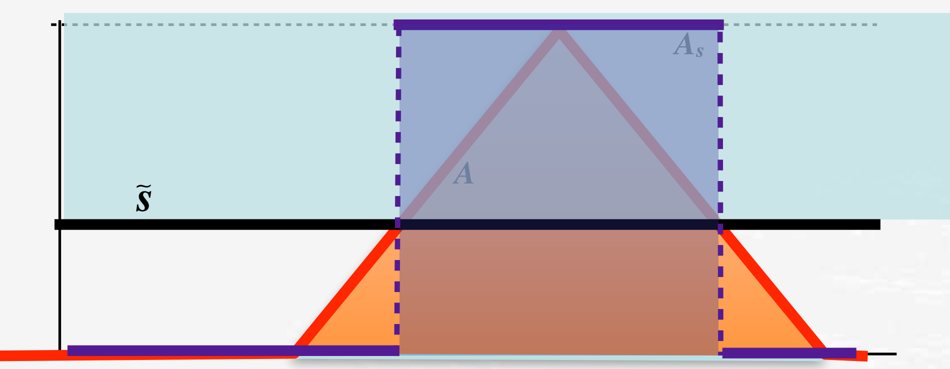
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



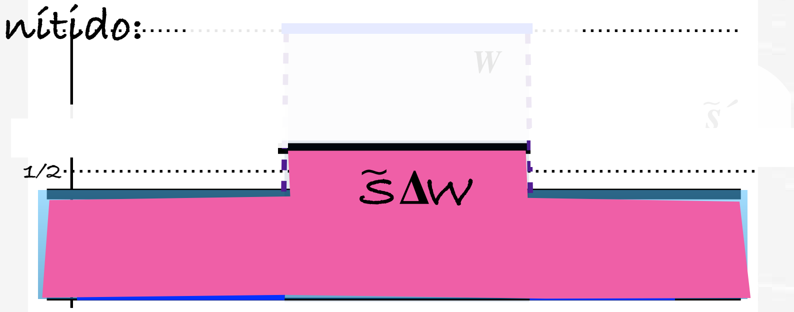
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \not\leq s\}$

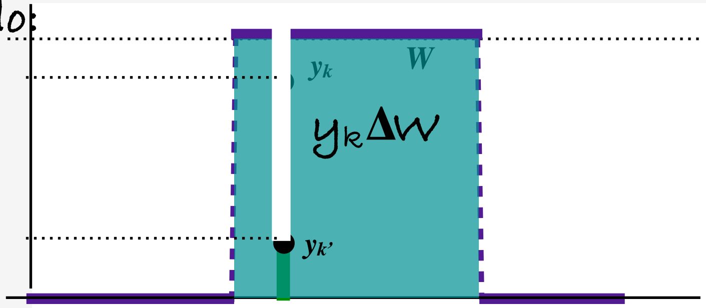
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s \quad \forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:



W nítido:



Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

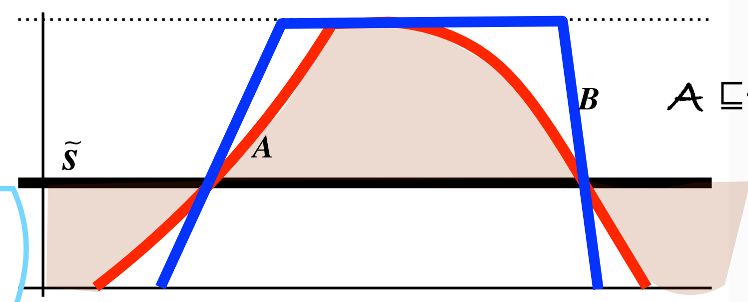
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

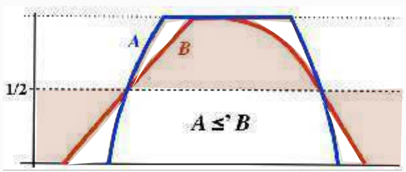
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para L=[0,1], el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para s=1/2, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

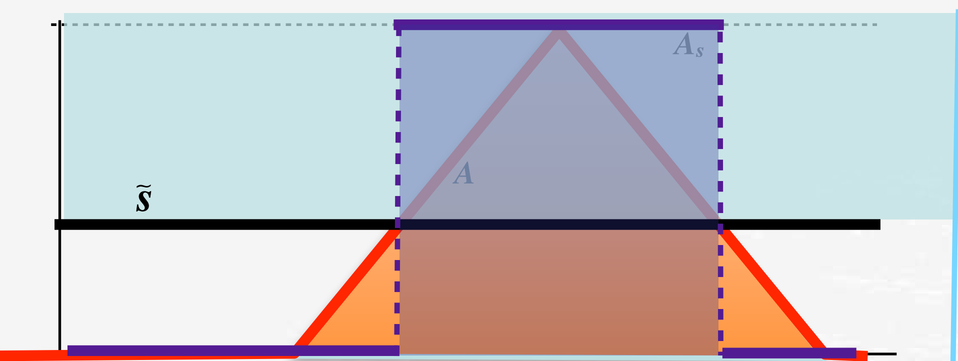
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



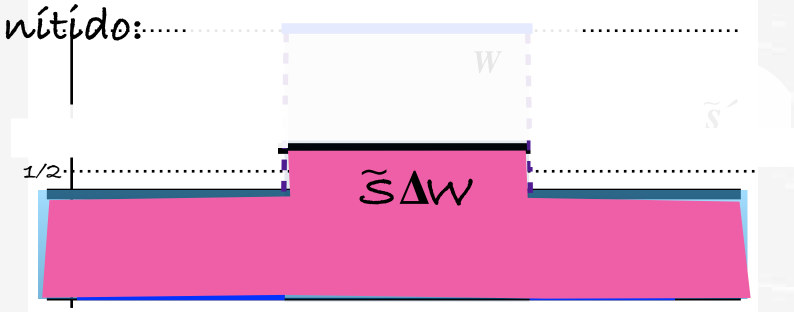
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \not\leq s\}$

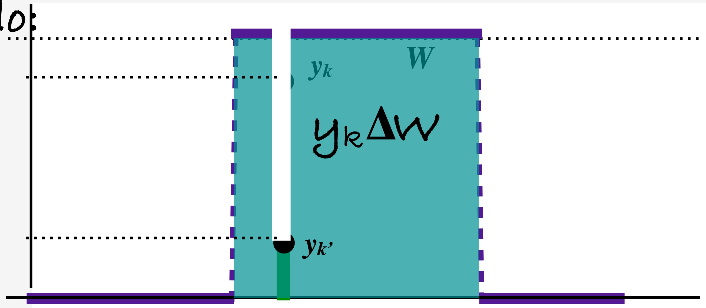
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s \ \ \forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:

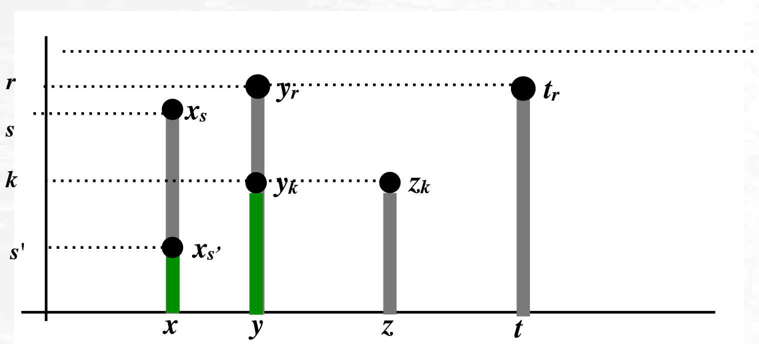


W nítido:



Dados $s \in L$ tal que $s>0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



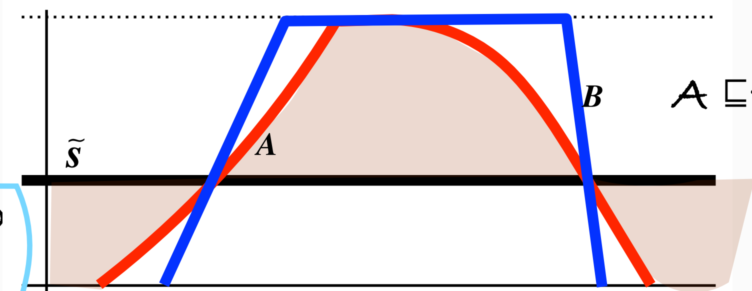
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

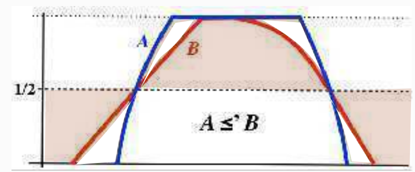
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

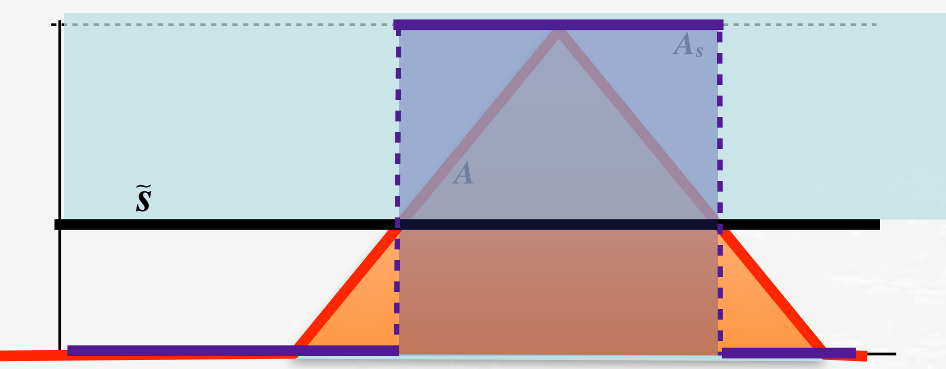
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E /\ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E /\ A(x) \not\leq s\}$

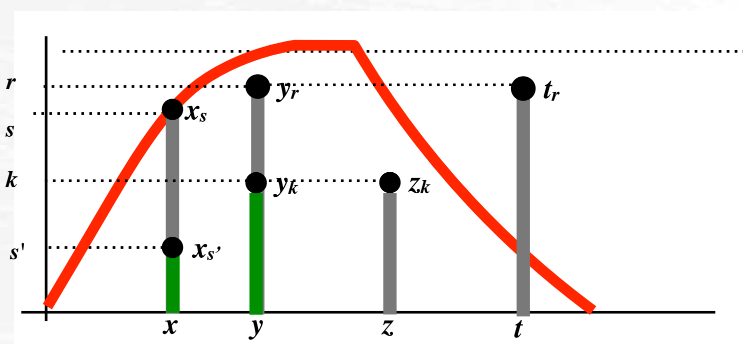
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



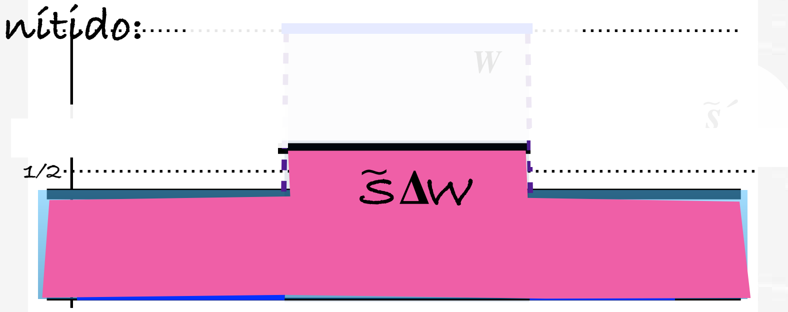
Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

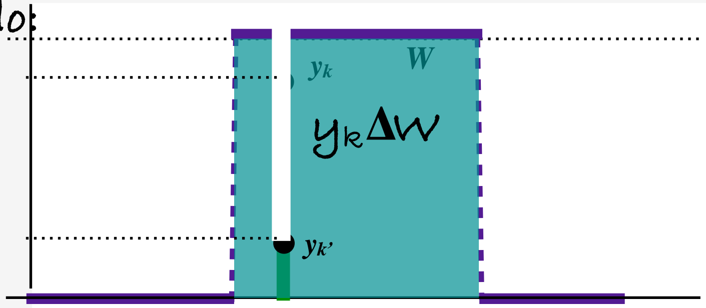
$A \in [0,1]^E$:



W nítido:



W nítido:



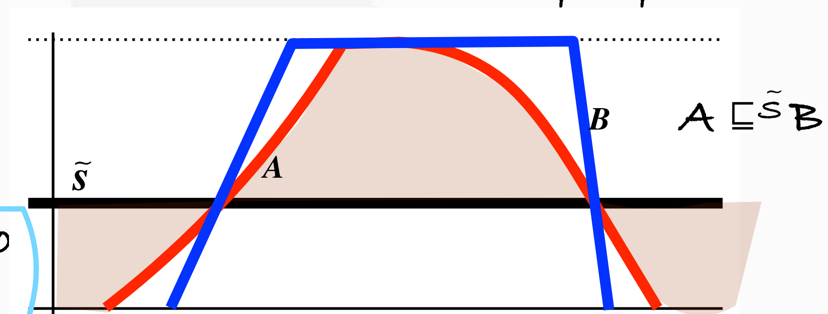
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

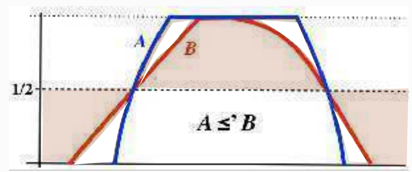
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

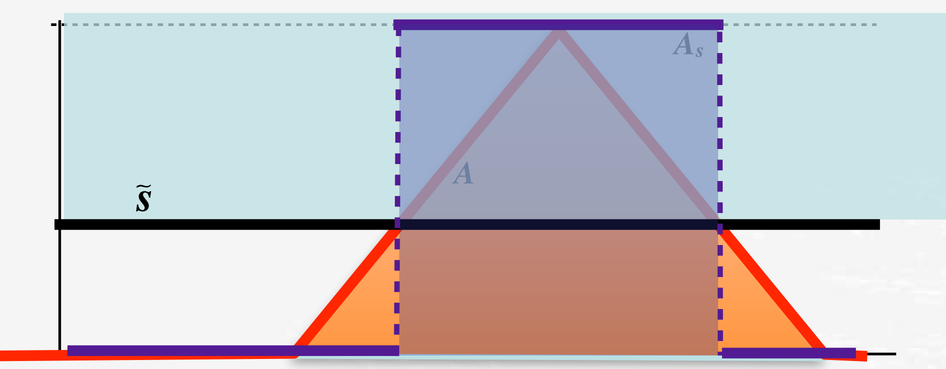
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$

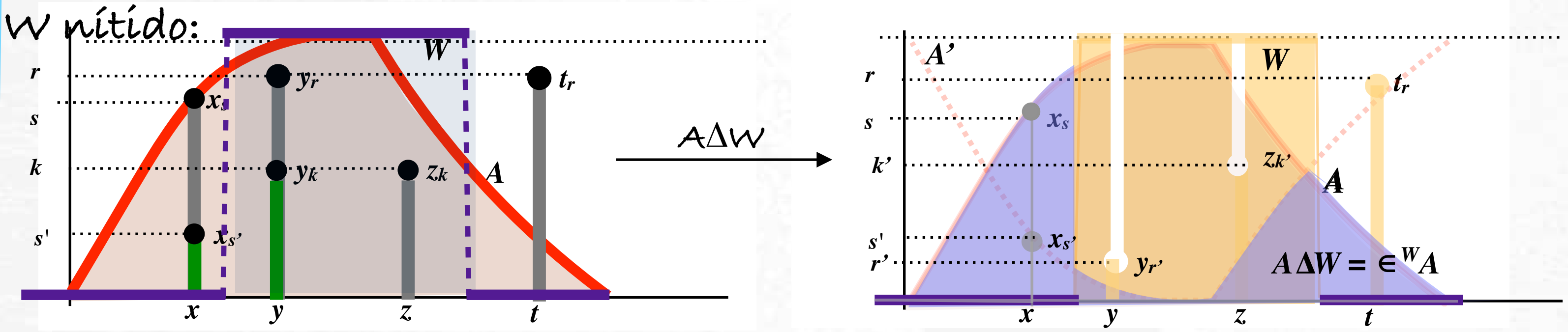


Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

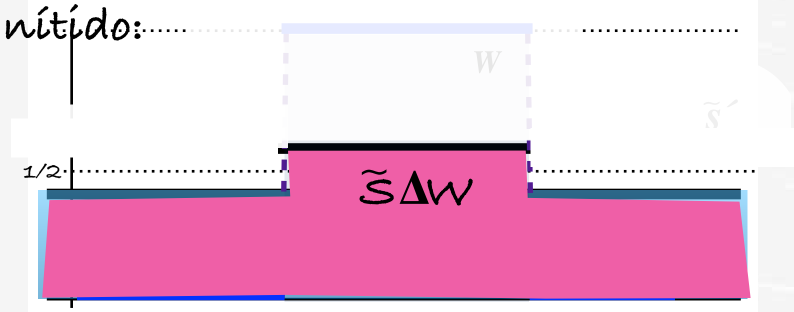
$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$A \in [0,1]^E$: $\quad \tilde{x}_p \tilde{\in} A \Leftrightarrow p < A(x)$, $\quad A = \sum_{x_p \tilde{\in} A} \tilde{x}_p$, $\quad$ (con $(\sum_{p \in K} B_p)(x) = \sup\{B_p(x) / p \in K\}$)

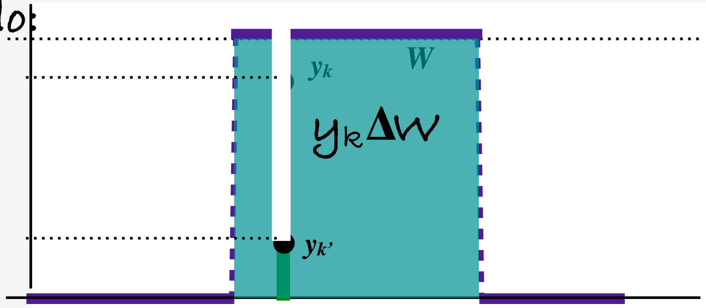
W nítido:



W nítido:



W nítido:



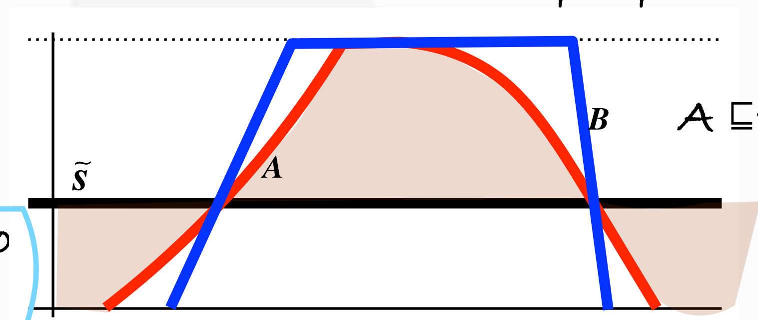
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s\in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s}\in L^E$ tal que:

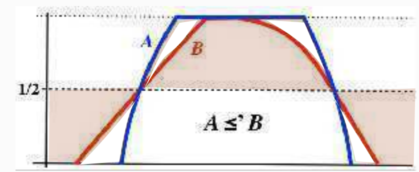
$$\tilde{s}(x)=s \quad \forall x\in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

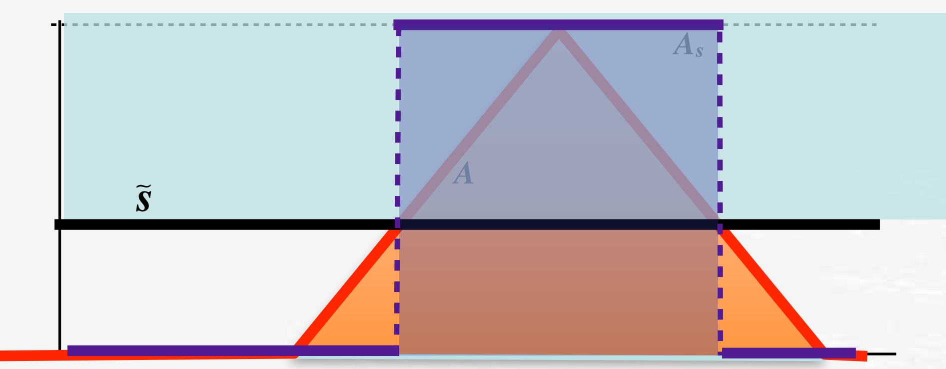
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



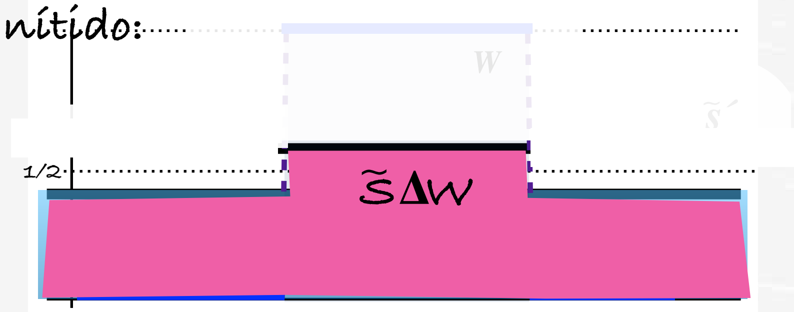
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A\in L^E$ y $s\in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s=\{x\in E/\ A(x)\geq s\}$ y $A^*_s=\{x\in E/\ A(x)\not\leq s\}$

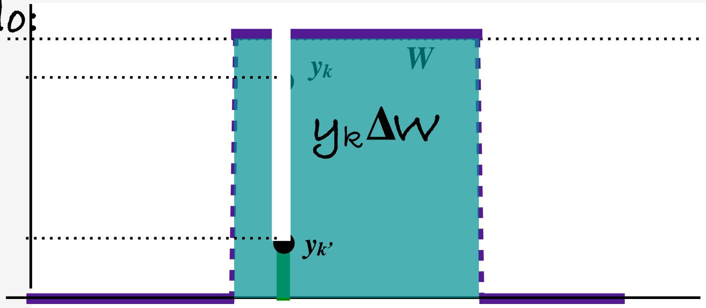
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s\in L, \forall A\in L^E$



W nítido:



W nítido:

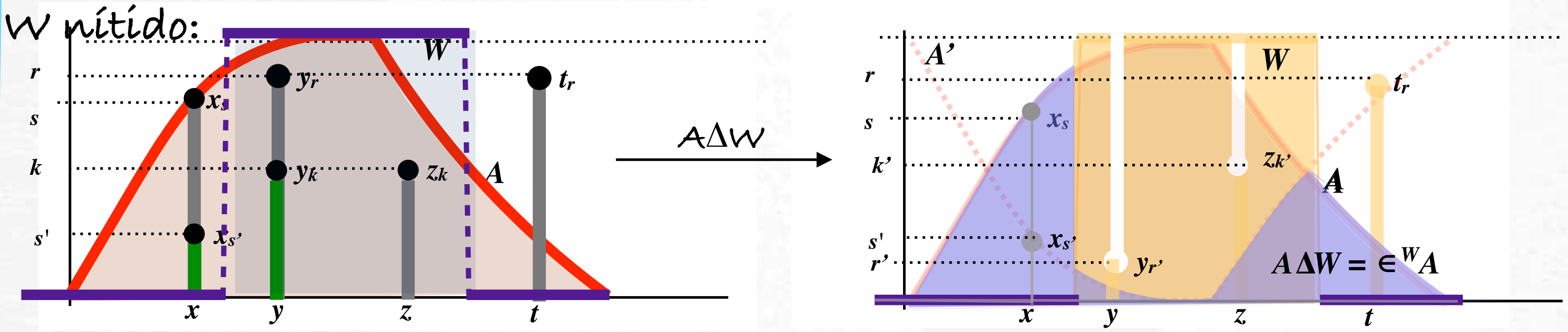


Dados $s\in L$ tal que $s>0$ y $x\in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s\in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$A\in[0,1]^E$: $\quad \tilde{x}_p \,\tilde{\in}\, A \Leftrightarrow p<A(x)$, $\quad A=\sum_{\tilde{x}_p \tilde{\in} A} \tilde{x}_p$, $\quad$ (con $(\sum_{p\in K} B_p)(x)=\sup\{B_p(x)/p\in K\}$)

W nítido:



$L=\{0, a , b,..., 1\}$ cadena finita y $A\in L^E$:

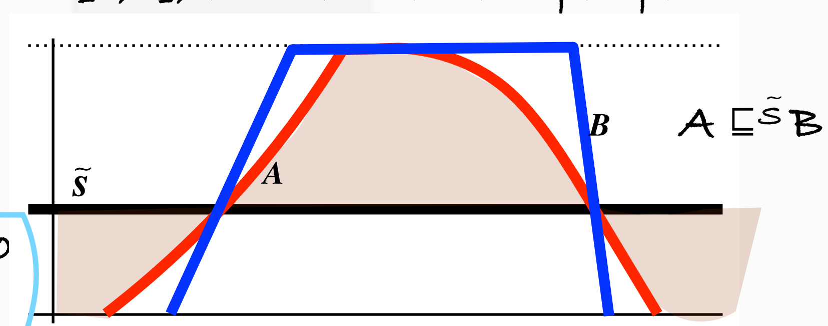
El orden de actividad y su relación con algunos elementos distinguidos de la teoría de subconjuntos L-borrosos:

Sea $((L,\leq),')$ una cadena completa con una negación fuerte y $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ el álgebra de subconjuntos L-borrosos de E.

Dado $s \in L$, consideramos el subconjunto L-borroso constante $\tilde{s} \in L^E$ tal que:

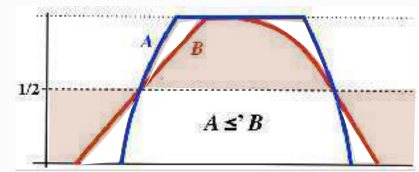
$$\tilde{s}(x) = s \quad \forall x \in E$$

Para $L=[0,1]$, el orden desde la perspectiva de $\tilde{s}$:



Para $s=1/2$, se recupera el orden de afinamiento (sharpened order) $\leq'$ en $[0,1]^E$ como el orden dual del orden $\sqsubseteq^{\widetilde{1/2}}$:

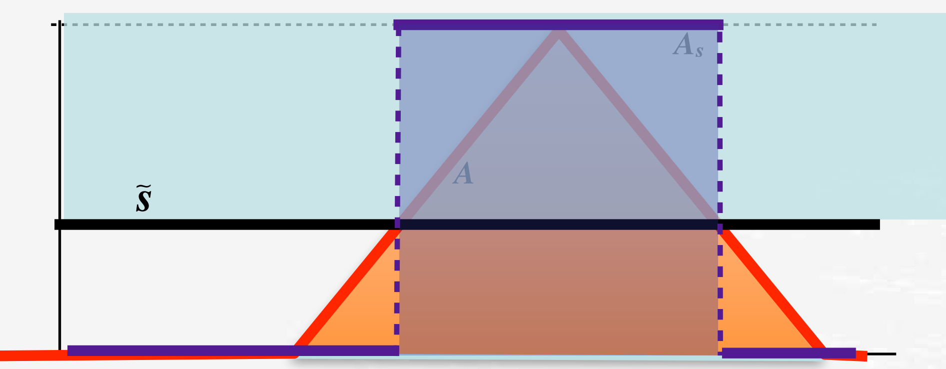
$$(A \leq' B) \Leftrightarrow (B \sqsubseteq^{\widetilde{1/2}} A)$$



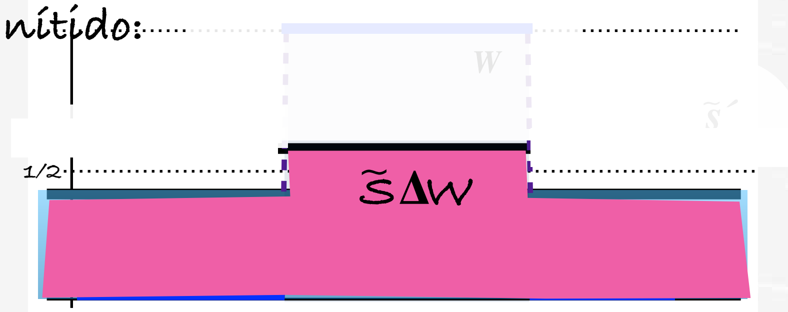
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory.* Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

Dado $A \in L^E$ y $s \in L$, los subconjuntos de nivel A_s (level set) y de nivel estricto A^*_s son respectivamente los subconjunto ordinarios de E (crisp sets) tales que $A_s = \{x \in E / \ A(x) \geq s\}$ y $A^*_s = \{x \in E / \ A(x) \nleq s\}$

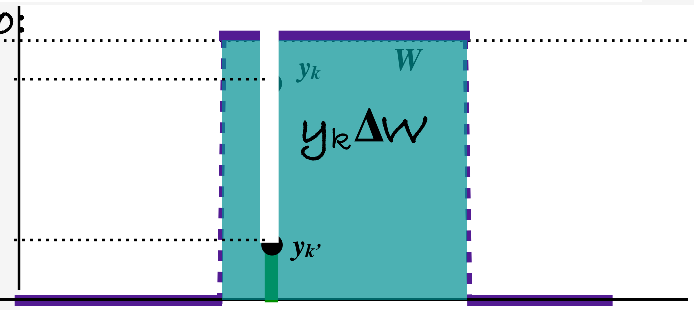
Si L es cadena, se verifica $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A_s$, $A \sqsubseteq^{\tilde{s}} A^*_s$ $\forall s \in L, \forall A \in L^E$



W nítido:



W nítido:

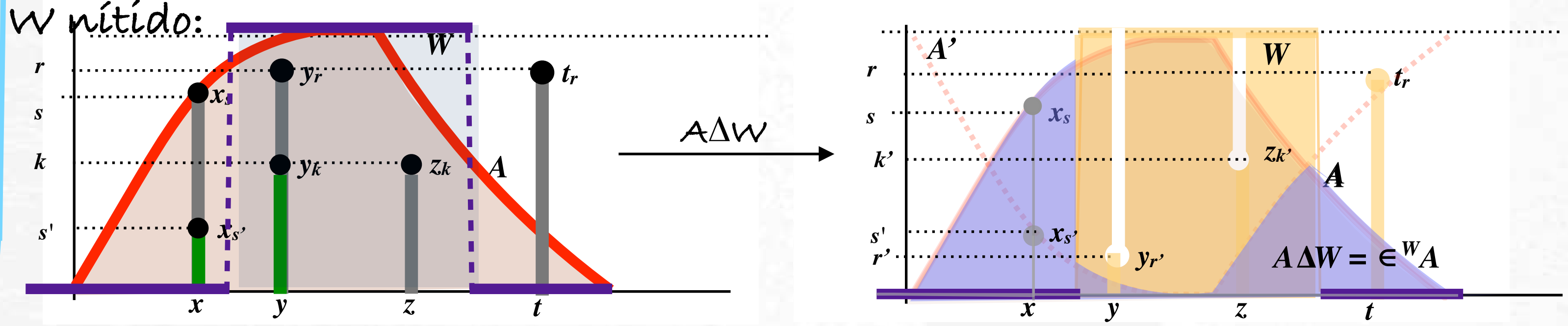


Dados $s \in L$ tal que $s > 0$ y $x \in E$, consideramos el punto L-borroso $\tilde{x}_s \in L^E$ (L-fuzzy point) tal que:

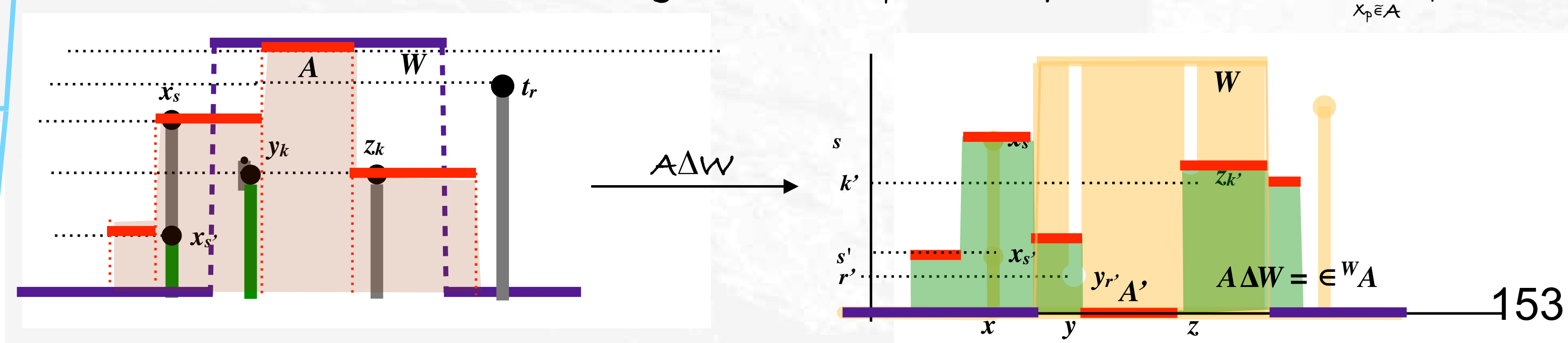
$$\tilde{x}_s(y) = \begin{cases} s & \text{si } y = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$A \in [0,1]^E$: $\tilde{x}_p \tilde{\in} A \Leftrightarrow p < A(x)$, $A = \sum_{\tilde{x}_p \tilde{\in} A} \tilde{x}_p$, (con $(\sum_{p \in K} B_p)(x) = \sup\{B_p(x) / p \in K\}$)

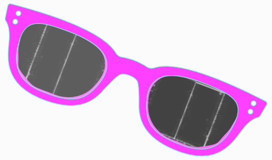
W nítido:



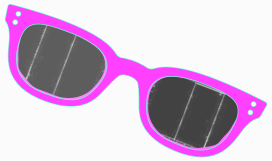
$L=\{0, a, b, \ldots, 1\}$ cadena finita y $A \in L^E$: $\tilde{x}_p \tilde{\in} A \Leftrightarrow p \leq A(x)$, $A = \sum_{\tilde{x}_p \tilde{\in} A} \tilde{x}_p$



Proposición. Se verifica: $(A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcup^W B) = (A \sqcap^S B)$ $\forall (A,B) \in L^E$, $\forall (S,W) \in P(E)^2$. En particular: $(A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcup^W B) = (A \sqcup^S B)$, $(A \sqcap^W B) \cdot (A \sqcup^W B) = (A \cdot B)$, $(A \sqcap^W B) + (A \sqcup^W B) = (A + B)$.



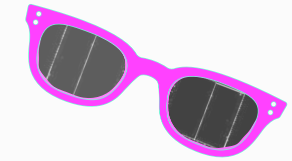
<u>Proposición</u>. Se verifica: $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^s B)\quad \forall(A,B)\in L^E,\ \forall(S,W)\in P(E)^2$. En particular: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcup^s B)$, $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.



<u>Demostración</u>. $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\sqcap^s(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))=$
$(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\cdot(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))+s\cdot(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B+A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B)=$
$A\cdot B+s(A+B)=(A\sqcap^s B)$.

Sustituyendo s por s^c: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^W B)\sqcap^{s^c}(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^{s^c}B)=(A\sqcup^s B)$.

Si $S=\varnothing$: $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.∎



<u>Proposición</u>. Se verifica: $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^s B)\quad \forall (A,B)\in L^E,\ \forall (S,W)\in P(E)^2$. En particular: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcup^s B)$, $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.

<u>Demostración</u>. $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\sqcap^s(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))=$
$(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\cdot(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))+s\cdot(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B+A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B)=$
$A\cdot B+s(A+B)=(A\sqcap^s B)$.

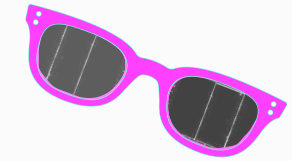
Sustituyendo s por s^c: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^W B)\sqcap^{s^c}(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^{s^c} B)=(A\sqcup^s B)$.

Si $S=\emptyset$: $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.∎

<u>Proposición</u>. Sean L una cadena acotada, E un referencial y A un L-borroso de L. Si $s\in L$ y A_s, A_s^* representan respectivamente el s-corte y el s-corte estricto asociados al par (A,s), entonces se verifica:

(1) $A \sqsubseteq^{A_s} \tilde{s}$, $A \sqsubseteq^{\tilde{S}} A_s$.

(2) $A \sqsubseteq^{A_s^*} \tilde{s}$, $A \sqsubseteq^{\tilde{S}} A_s^*$, siendo $\tilde{s}$ el L-borroso constante: $\tilde{s}(x)=s\ \forall x\in E$.



<u>Proposición</u>. Se verifica: $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^s B)\quad \forall(A,B)\in L^E,\ \ \forall(S,W)\in P(E)^2$. En particular: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcup^s B)$, $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.

<u>Demostración</u>. $(A\sqcap^W B)\sqcap^s(A\sqcup^W B)=(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\sqcap^s(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))=$
$(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B))\cdot(A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B))+s\cdot(A\cdot B+W\cdot A+W\cdot B+A\cdot B+W^c\cdot A+W^c\cdot B)=$
$A\cdot B+s(A+B)=(A\sqcap^s B)$.

Sustituyendo s por s^c: $(A\sqcap^W B)\sqcup^s(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^W B)\sqcap^{s^c}(A\sqcup^W B)=(A\sqcap^{s^c} B)=(A\sqcup^s B)$.

Si $S=\emptyset$: $(A\sqcap^W B)\cdot(A\sqcup^W B)=(A\cdot B)$, $(A\sqcap^W B)+(A\sqcup^W B)=(A+B)$.∎

<u>Proposición</u>. Sean L una cadena acotada, E un referencial y A un L-borroso de L. Si $s\in L$ y A_s, A_s^* representan respectivamente el s-corte y el s-corte estricto asociados al par (A,s), entonces se verifica:

(1) $A\sqsubseteq^{A_s}\tilde{s}$, $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A_s$.

(2) $A\sqsubseteq^{A_s^*}\tilde{s}$, $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A_s^*$, siendo $\tilde{s}$ el L-borroso constante: $\tilde{s}(x)=s\ \forall x\in E$.

<u>Demostración</u>. (1) Si $A(x)\geq s$ entonces $(A\Delta A_s)(x)=(A\cdot A_s{}^c+A'\cdot A_s)(x)=A(x)\cdot 0+A'(x)\cdot 1=A'(x)\leq$
$s'=s'\cdot 1=\tilde{s}'(x)\cdot A_s(x)=(\tilde{s}'\cdot A_s)(x)=0+(\tilde{s}'\cdot A_s)(x)=(\tilde{s}\cdot A_s{}^c+\tilde{s}'\cdot A_s)(x)=(\tilde{s}\Delta A_s)(x)$.

Si $A(x)\ngeq s$ entonces $A(x)<s$ y $(A\Delta A_s)(x)=(A\cdot A_s{}^c+A'\cdot A_s)(x)=A(x)\cdot 1+A'(x)\cdot 0=A(x)<$
$s=s\cdot 1=\tilde{s}(x)\cdot A_s{}^c(x)=(\tilde{s}\cdot A_s{}^c)(x)=(\tilde{s}\cdot A_s{}^c)(x)+0=(\tilde{s}\cdot A_s{}^c+\tilde{s}'\cdot A_s)(x)=(\tilde{s}\Delta A_s)(x)$.

Concluimos que $(A\Delta A_s)(x)\leq(\tilde{s}\Delta A_s)(x)\ \ \forall x\in E$, luego $(A\Delta A_s)\leq(\tilde{s}\Delta A_s)$ y en consecuencia $A\sqsubseteq^{A_s}\tilde{s}$.

De $A\sqsubseteq^{A_s}\tilde{s}$ se deduce que $\tilde{s}\cdot A_s\leq A\leq\tilde{s}+A_s$ y en consecuencia $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A_s$.

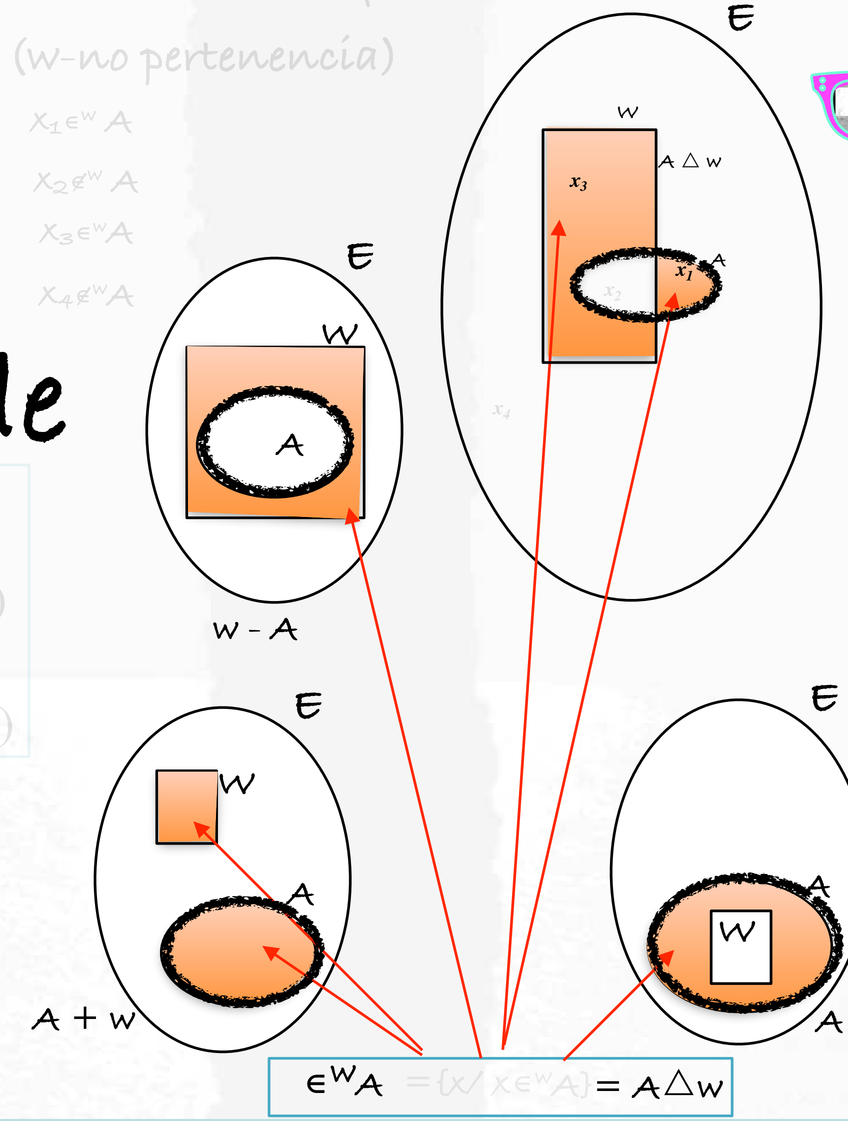
(2) Si $A(x)\nleq s$ entonces $A(x)>s$, luego $(A\Delta A_s^*)(x)=(A\cdot A_s^{*c}+A'\cdot A_s^*)(x)=A(x)\cdot 0+A'(x)\cdot 1=A'(x)<$
$s'=s'\cdot 1=\tilde{s}'(x)\cdot A_s^*(x)=(\tilde{s}'\cdot A_s^*)(x)=0+(\tilde{s}'\cdot A_s^*)(x)=(\tilde{s}\cdot A_s^{*c}+\tilde{s}'\cdot A_s^*)(x)=(\tilde{s}\Delta A_s^*)(x)$.

Si $A(x)\leq s$ entonces $(A\Delta A_s^*)(x)=(A\cdot A_s^{*c}+A'\cdot A_s^*)(x)=A(x)\cdot 1+A'(x)\cdot 0=A(x)\leq$
$s=s\cdot 1=\tilde{s}(x)\cdot A_s^{*c}(x)=(\tilde{s}\cdot A_s^{*c})(x)=(\tilde{s}\cdot A_s^{*c})(x)+0=(\tilde{s}\cdot A_s^{*c}+\tilde{s}'\cdot A_s^*)(x)=(\tilde{s}\Delta A_s^*)(x)$.

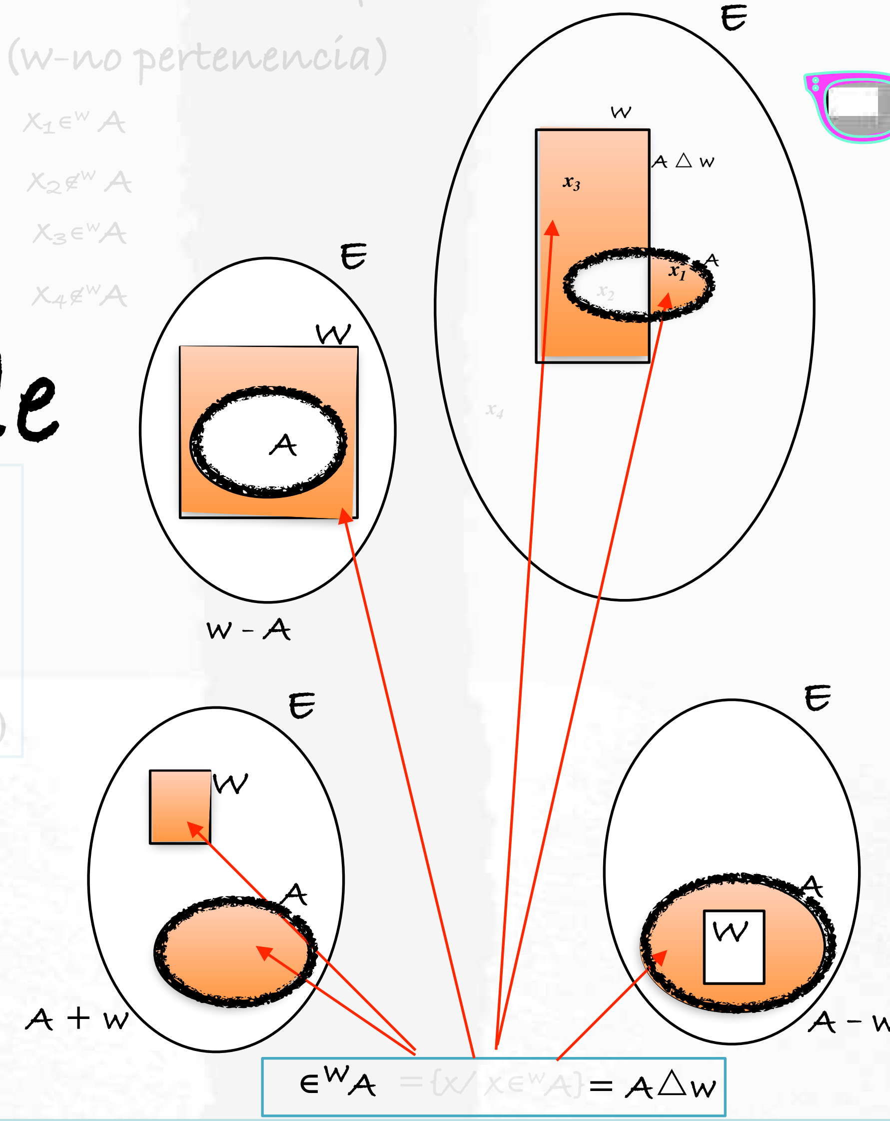
Concluimos que $(A\Delta A_s^*)(x)\leq(\tilde{s}\Delta A_s^*)(x)\ \ \forall x\in E$, luego $(A\Delta A_s^*)\leq(\tilde{s}\Delta A_s^*)$ y en consecuencia $A\sqsubseteq^{A_s^*}\tilde{s}$.

De $A\sqsubseteq^{A_s^*}\tilde{s}$ se deduce que $\tilde{s}\cdot A_s^*\leq A\leq\tilde{s}+A_s^*$ y en consecuencia $A\sqsubseteq^{\tilde{s}}A_s^*$.∎

Propiedades de la aplicación de w-pertenencia $\in^{w}: L^{E} \rightarrow L^{E}$



Propiedades de la aplicación de w-pertenencia $\in^W : L^E \to L^E$



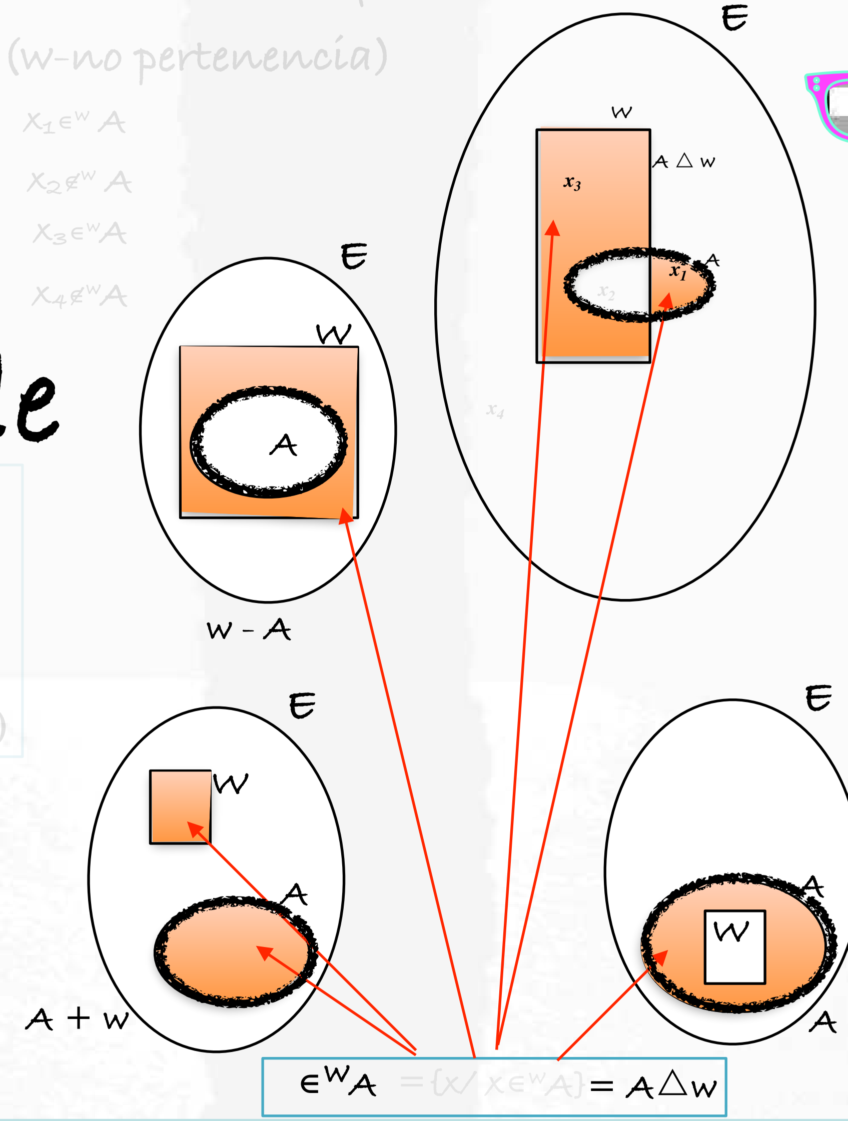
Relaciones de w-pertenencia $\in^W$ y $\notin^W$ en $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ asociadas a un subconjunto nítido W

Sea L un retículo distributivo acotado con una negación fuerte ' y sea E un referencial ordinario.
Si A y W son subconjuntos L-borrosos de E tales que W es complementado con complemento $W^c = W'$,
consideramos los subconjuntos L-borrosos asociados $\in^W A$ (w-pertenencia) y $\notin^W A$ (w-no pertenencia) definidos por:

$(\in^W A)(x) = (A \triangle w)(x) = (A \cdot w^c + A' \cdot w)(x) = (A'(x)$ si $x \in W$; $A(x)$ en otro caso$)$, $\quad (\notin^W A) = (\in^{W^c} A)$

Propiedades de la aplicación de w-pertenencia $\in^{w}: L^{E} \to L^{E}$

(*)



Relaciones de w-pertenencia $\in^{w}$ y $\notin^{w}$ en $((L^{E}, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ asociadas a un subconjunto nítido W

Sea L un retículo distributivo acotado con una negación fuerte ' y sea E un referencial ordinario.
Si A y W son subconjuntos L-borrosos de E tales que W es complementado con complemento $W^{c}=W'$,
consideramos los subconjuntos L-borrosos asociados $\in^{W}A$ (w-pertenencia) y $\notin^{W}A$ (w-no pertenencia) definidos por:

$(\in^{W}A)(x) = (A \triangle w)(x) = (A \cdot w^{c} + A' \cdot w)(x) = (A'(x)$ si $x \in W$; $A(x)$ en otro caso$)$, $\quad (\notin^{W}A) = (\in^{W^{c}}A)$

Proposición. se verifica:

$\in^{w}(A_1 \sqcup^{W} A_2) = (\in^{W}A_1) + (\in^{W}A_2)$, $\quad \in^{w}(A_1 \sqcap^{W} A_2) = (\in^{W}A_1) \cdot (\in^{W}A_2)$ $\quad \forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^{E} X L^{E}$

$\in^{w}(A_1 + A_2) = (\in^{W}A_1) \sqcup^{W} (\in^{W}A_2)$, $\quad \in^{w}(A_1 \cdot A_2) = (\in^{W}A_1) \sqcap^{W} (\in^{W}A_2)$ $\quad \forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^{E} X L^{E}$

$(A_1 \sqsubseteq^{W} A_2) \Leftrightarrow [(\in^{W}A_1) \sqsubseteq^{W} (\in^{W}A_2)]$ $\qquad \boxed{\in^{w}(\in^{w}A) = A.}$

(*) (véase la transparencia siguiente)

Proposición. Para todo $(A,W)\in P(E)^2$ se verifica:

$(x \in^W E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$

$(x \in^W \varnothing) \Leftrightarrow (x \in W)$

$\forall x \in E$: $(x \in^W W^c)$ (W^c juega el papel de "w-universal")

$\forall x \in E$: $(x \notin^W W)$ (W juega el de "w-vacío")

$(x \in^\varnothing A) \Leftrightarrow (x \in A)$

$(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(x \in^W A) \Rightarrow (x \in^W B)]$

$(x \in^W A \sqcap^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A) \,\&\, (x \in^W B)$

$(x \in^W A \sqcup^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$

$(x \in^W (\in^W A)) \Leftrightarrow (x \in A)$, $(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in^A W)$.

Proposición. Para todo $(A,W)\in P(E)^2$ Se verifica:

$(x \in^W E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$

$(x \in^W \varnothing) \Leftrightarrow (x \in W)$

$\forall x \in E$: $(x \in^W W^c)$ (W^c juega el papel de "w-universal")

$\forall x \in E$: $(x \notin^W W)$ (W juega el de "w-vacío")

$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A)$

$(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(x \in^W A) \Rightarrow (x \in^W B)]$

$(x \in^W A \sqcap^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A) \& (x \in^W B)$

$(x \in^W A \sqcup^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$

$(x \in^W (\in^W A)) \Leftrightarrow (x \in A)$, $(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$.

Demostración. Estos resultados son inmediatos teniendo en cuenta las definiciones: $\in^W A = A \triangle w$, $\notin^W A = \in^{W^c} A$ y las propiedades de la diferencia simétrica $\triangle$.∎

Proposición. Para todo $(A,W)\in P(E)^2$ Se verifica:

$(x \in^W E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$

$(x \in^W \emptyset) \Leftrightarrow (x \in W)$

$\forall x \in E$: $(x \in^W W^c)$ (W^c juega el papel de "w-universal")

$\forall x \in E$: $(x \notin^W W)$ (W juega el de "w-vacío")

$(x \in^{\emptyset} A) \Leftrightarrow (x \in A)$

$(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(x \in^W A) \Rightarrow (x \in^W B)]$

$(x \in^W A \sqcap^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A) \& (x \in^W B)$

$(x \in^W A \sqcup^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$

$(x \in^W (\in^W A)) \Leftrightarrow (x \in A)$, $(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in^A w)$.

Demostración. Estos resultados son inmediatos teniendo en cuenta las definiciones: $\in^W A = A \triangle w$, $\notin^W A = \in^{W^c} A$ y las propiedades de la diferencia simétrica $\triangle$.∎

Y en el caso de subconjuntos L-borrosos:

Proposición. Para todo $A \in L^E$ y para todo nítido $W \in N(L^E)$, se verifica:

$\in^W (A_1 \sqcup^W A_2) = (\in^W A_1) + (\in^W A_2)$, $\in^W (A_1 \sqcap^W A_2) = (\in^W A_1) \cdot (\in^W A_2)$ $\forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^E X L^E$

$\in^W (A_1 + A_2) = (\in^W A_1) \sqcup^W (\in^W A_2)$, $\in^W (A_1 \cdot A_2) = (\in^W A_1) \sqcap^W (\in^W A_2)$ $\forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^E X L^E$

$(A_1 \sqsubseteq^W A_2) \Leftrightarrow [(\in^W A_1) \sqsubseteq^W (\in^W A_2)]$, $\in^W (\in^W A) = A$.

Proposición. Para todo $(A,W)\in P(E)^2$ se verifica:

$(x \in^W E) \Leftrightarrow (x \in W^c)$

$(x \in^W \varnothing) \Leftrightarrow (x \in W)$

$\forall x\in E$: $(x \in^W W^c)$ (W^c juega el papel de "w-universal")

$\forall x\in E$: $(x \notin^W W)$ (W juega el de "w-vacío")

$(x \in^{\varnothing} A) \Leftrightarrow (x \in A)$

$(x \in^E A) \Leftrightarrow (x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(x \in^W A) \Rightarrow (x \in^W B)]$

$(x \in^W A \sqcap^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A) \& (x \in^W B)$

$(x \in^W A \sqcup^W B) \Leftrightarrow (x \in^W A)$ ó $(x \in^W B)$

$(x \in^W (\in^W A)) \Leftrightarrow (x \in A)$, $(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in^A W)$.

Demostración. Estos resultados son inmediatos teniendo en cuenta las definiciones: $\in^W A = A \triangle W$, $\notin^W A = \in^{W^c} A$ y las propiedades de la diferencia simétrica $\triangle$.■

Y en el caso de subconjuntos L-borrosos:

Proposición. Para todo $A \in L^E$ y para todo nítido $W \in N(L^E)$, se verifica:

$\in^W(A_1 \sqcup^W A_2) = (\in^W A_1) + (\in^W A_2)$, $\in^W(A_1 \sqcap^W A_2) = (\in^W A_1) \cdot (\in^W A_2)$ $\forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^E x L^E$

$\in^W(A_1 + A_2) = (\in^W A_1) \sqcup^W (\in^W A_2)$, $\in^W(A_1 \cdot A_2) = (\in^W A_1) \sqcap^W (\in^W A_2)$ $\forall W \in P(E)$, $\forall (A_1, A_2) \in L^E x L^E$

$(A_1 \sqsubseteq^W A_2) \Leftrightarrow [(\in^W A_1) \sqsubseteq^W (\in^W A_2)]$, $\in^W(\in^W A) = A$.

Demostración. Estos resultados son inmediatos teniendo en cuenta las definiciones: $(\in^W A)(x) = (A \triangle W)(x)$ $\forall x \in E$, $\notin^W A = \in^{W^c} A$ y las propiedades de la diferencia simétrica $\triangle$.■

Ilustración de alguna de las propiedades de las inclusiones $\sqsubseteq^{w}$ y de las intersecciones $\sqcap^{w}$

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

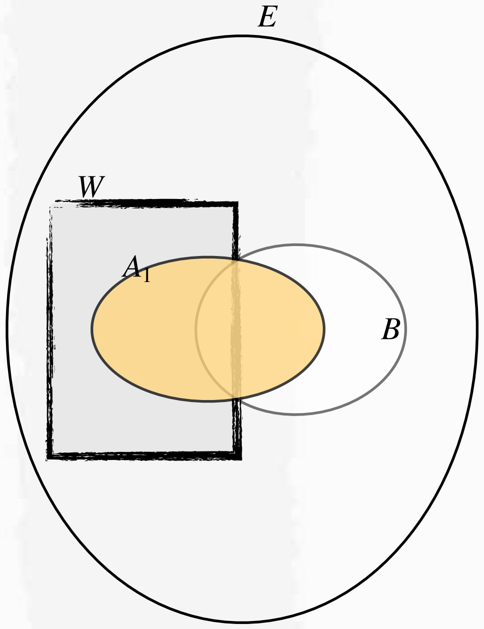
$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B) \;,$$

$$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E).$$

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

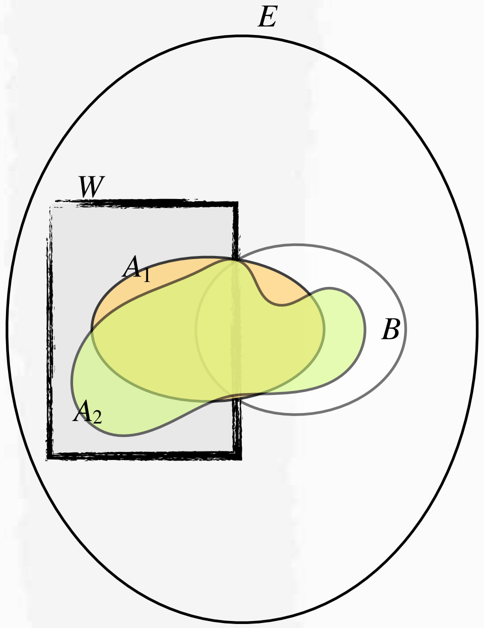
$(A_1 \subseteq B) \,\&\, (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \,\&\, ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall S \in P(E)$.

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

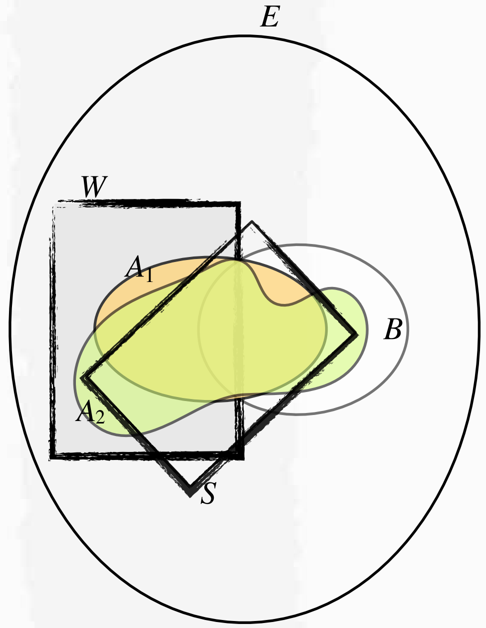
$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B),$$

$$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall S \in P(E).$$

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

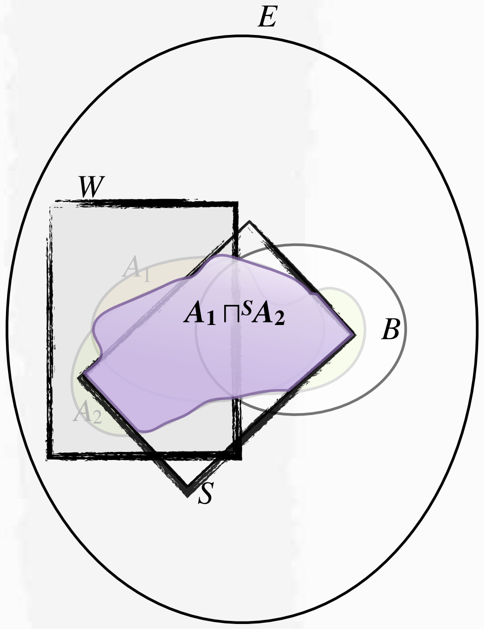
$(A_1 \subseteq B)$ & $(A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B)$ & $((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E*: RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \ \& \ (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \ \ \forall S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \ \& \ (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

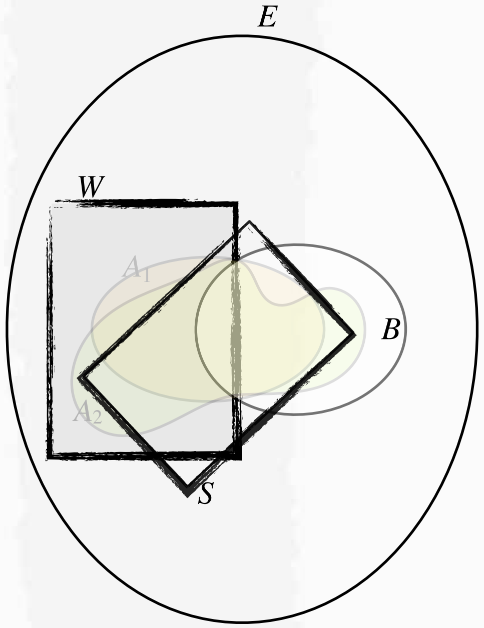
$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \ \& \ ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B) \ \& \ (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \ \& \ ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \ \ \forall S \in P(E)$.

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

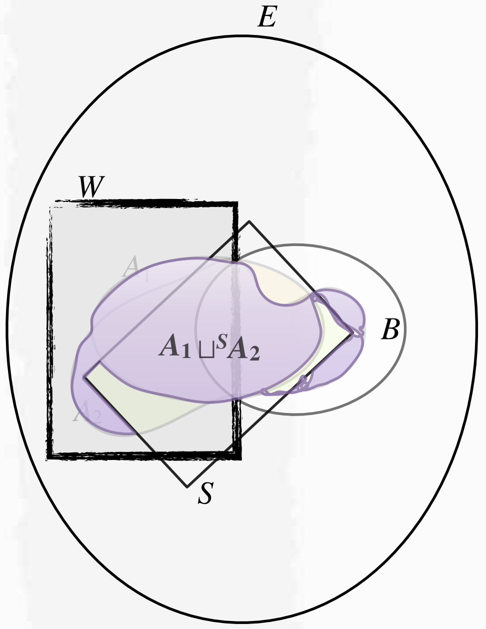
$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B)$ & $(A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B)$ & $((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



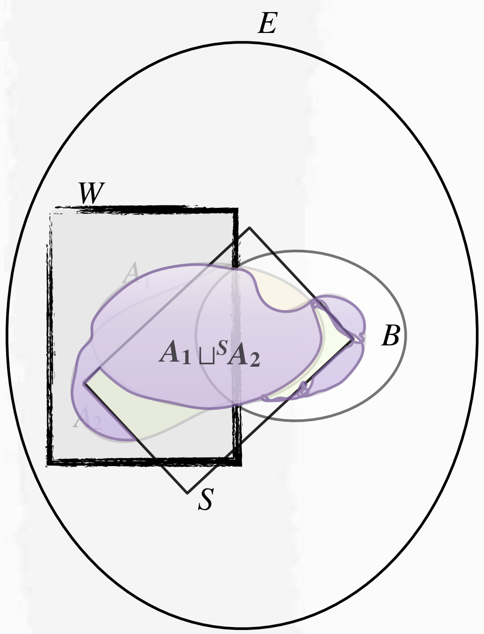
En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B),$$

$$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall S \in P(E).$$

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES



$(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow \ (\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow$

$(\,(A_1 \bigcap A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (\,(A_1 \bigcup A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)$,

$(A_1 \subseteq B\,)\ \&\ (A_2 \subseteq B\,) \Rightarrow$

$(\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \&\ (\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \ \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow \ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2\,) \Rightarrow$

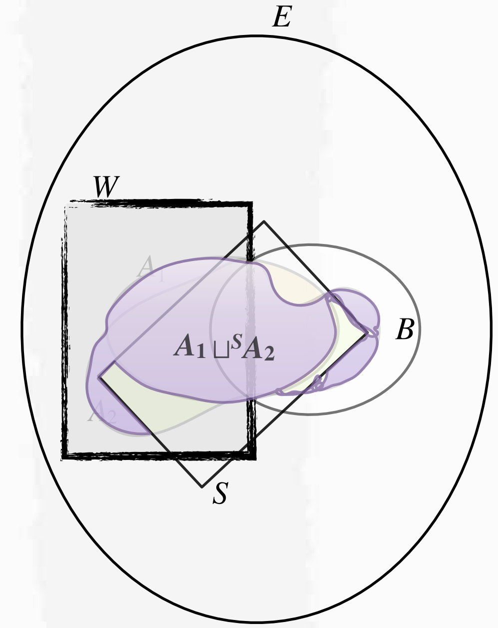
$(\,A \sqsubseteq^W (B_1 \bigcap B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \bigcup B_2\,)\,)$,

$(A \subseteq B_1)\ \&\ (A_2 \subseteq B_2\,) \Rightarrow$

$(\,A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in P(E)$.

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

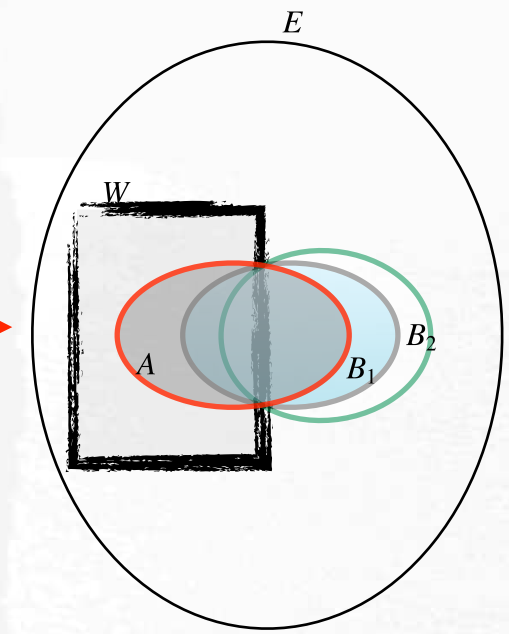
y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \;\&\; (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2))$,

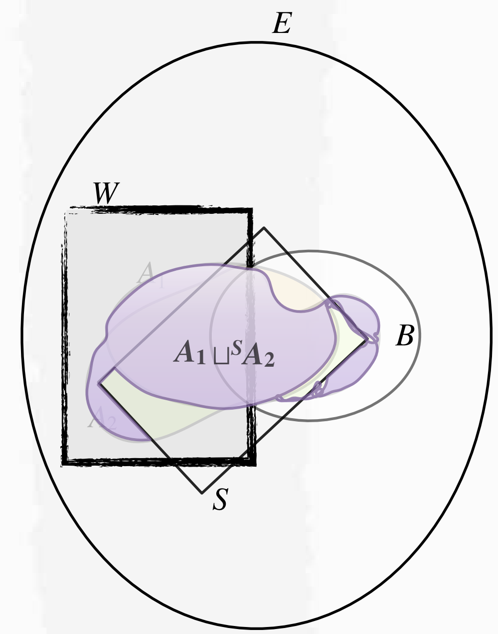
$(A \subseteq B_1) \;\&\; (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$

$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\&\; (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E)$.



$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

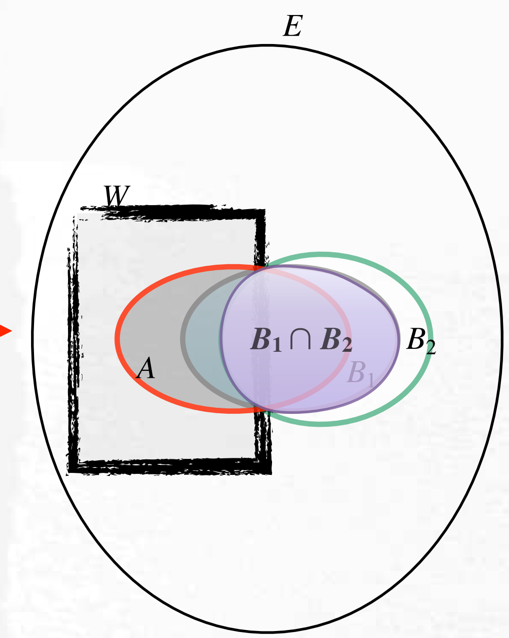
$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B) \;,$$

$$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$



En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \;\&\; (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2)) \;,$$

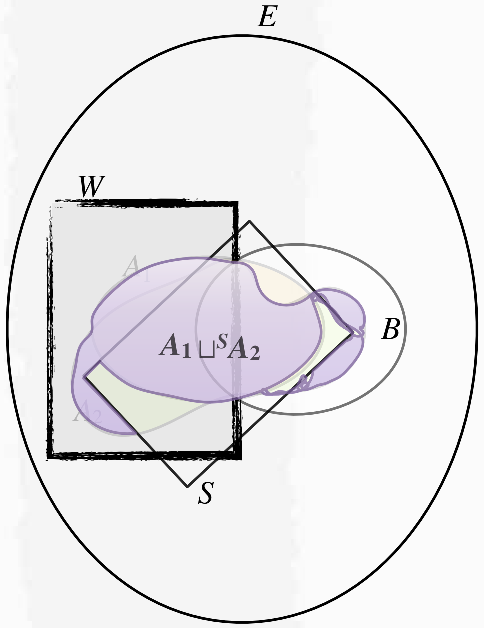
$$(A \subseteq B_1) \;\&\; (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$$

$$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\&\; (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E).$$

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

$(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow\ (\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow$

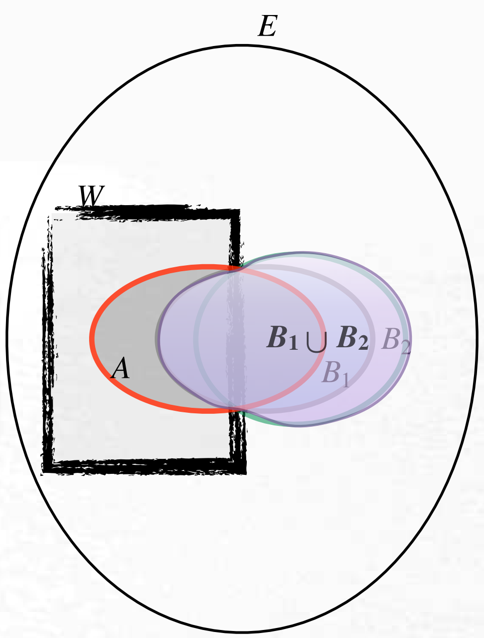
$$(\,(A_1 \cap A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (\,(A_1 \cup A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ ,$$

$$(A_1 \subseteq B\,)\ \&\ (A_2 \subseteq B\,) \Rightarrow$$

$$(\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \&\ (\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \ \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow\ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)$

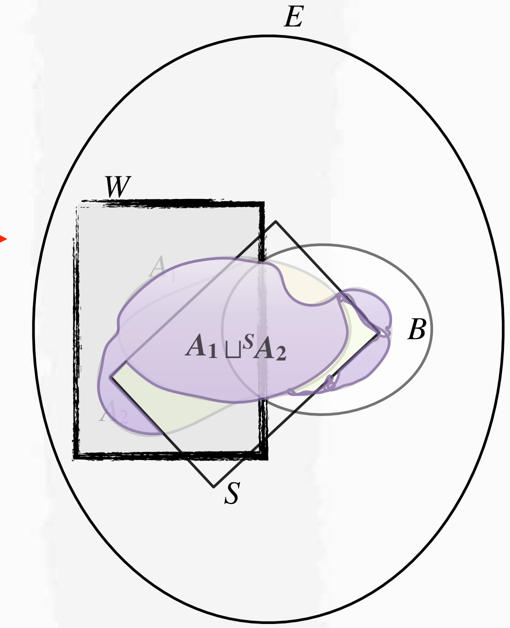


En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2\,) \Rightarrow$

$$(\,A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2\,)\,)\ ,$$

$$(A \subseteq B_1)\ \&\ (A_2 \subseteq B_2\,) \Rightarrow$$

$$(\,A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in P(E).$$



$(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

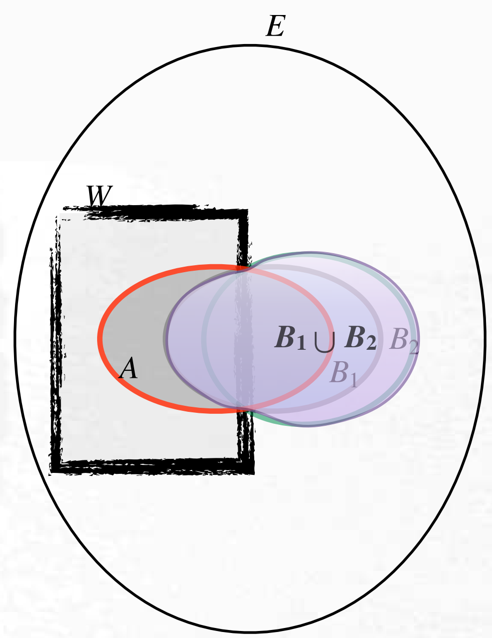
$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B),$$

$$(A_1 \subseteq B) \,\&\, (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \,\&\, ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$



En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2)),$$

$$(A \subseteq B_1) \,\&\, (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$$

$$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

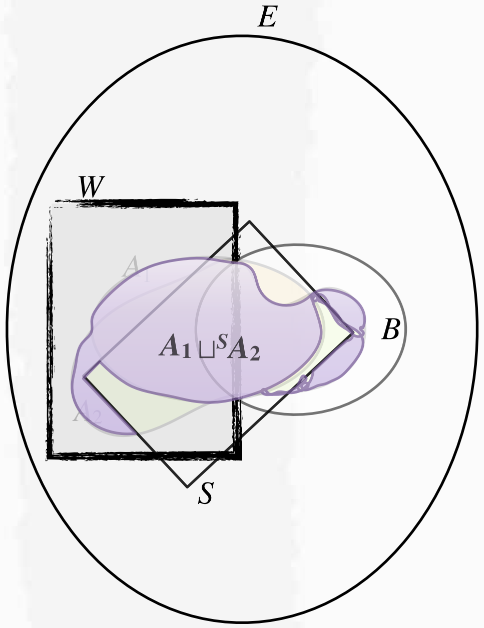
y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

$$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \;\; \forall\, W_1, W_2 \in P(E).$$

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B) \,\&\, (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

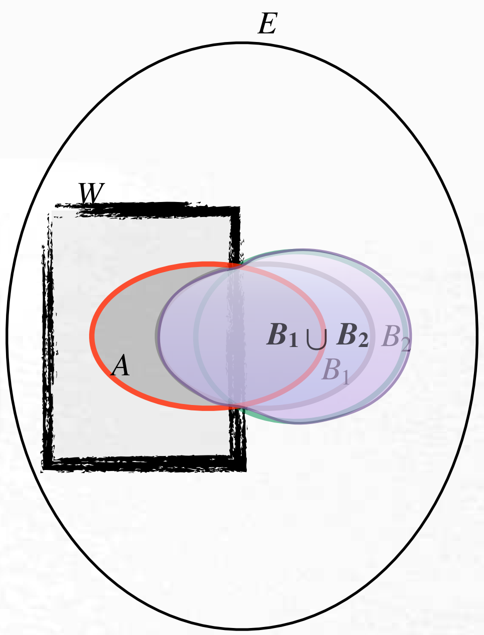
$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \,\&\, ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2))$,



$(A \subseteq B_1) \,\&\, (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$

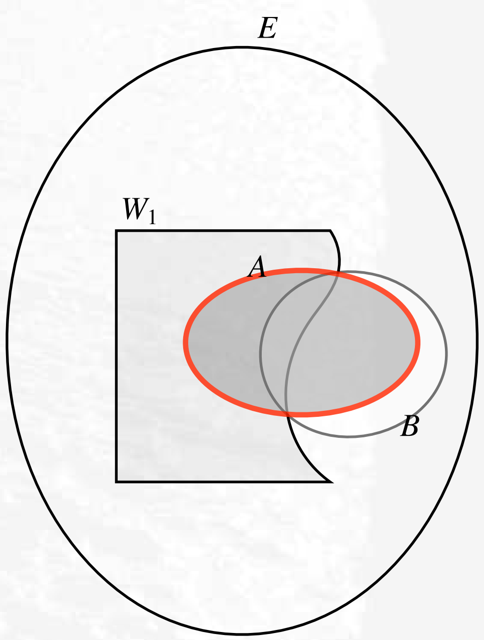
$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

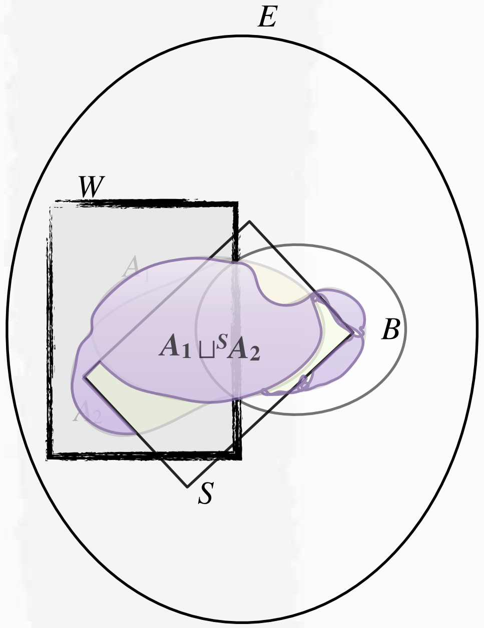
En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \;\; \forall\, W_1, W_2 \in P(E)$.



$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

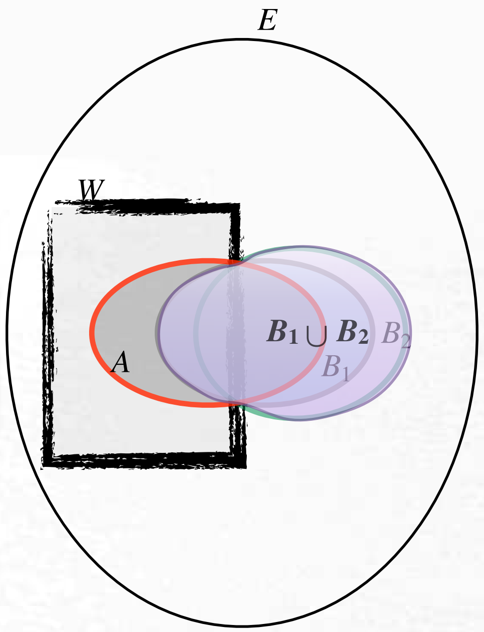
$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$



En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \;\&\; (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2))$,

$(A \subseteq B_1) \;\&\; (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$

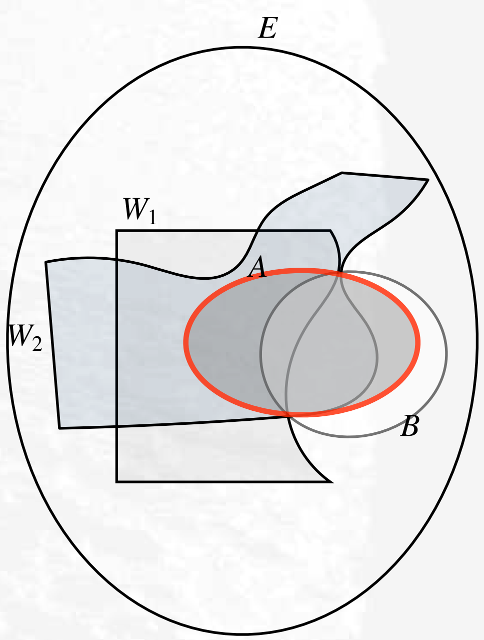
$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\&\; (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

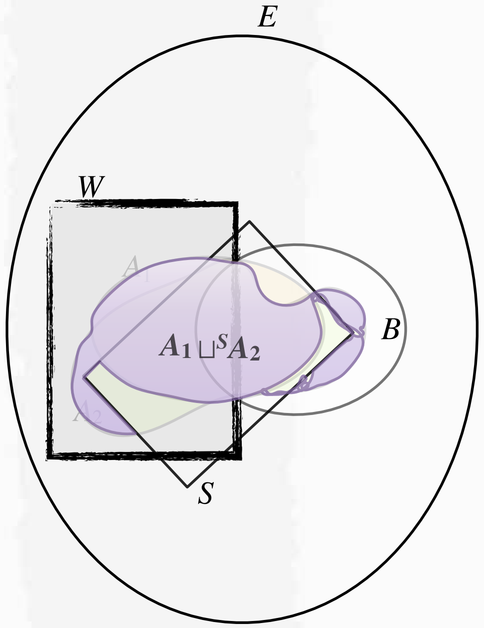
$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \;\; \forall\, W_1, W_2 \in P(E)$.



INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B) \;,$$

$$(A_1 \subseteq B) \;\&\; (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

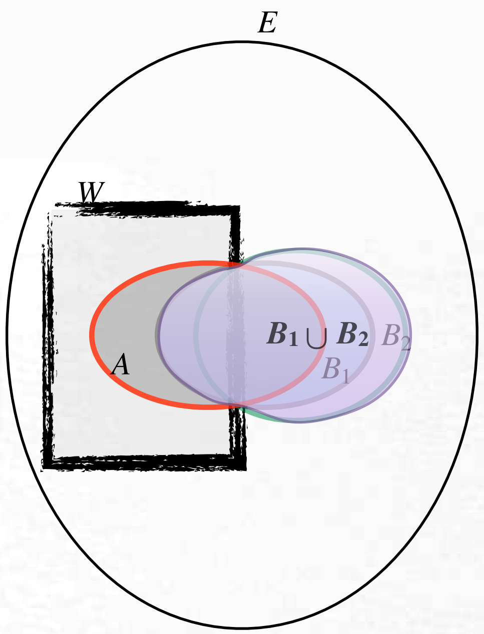
$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \;\&\; ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \quad \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \;\&\; (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2)) \;,$$



$$(A \subseteq B_1) \;\&\; (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$$

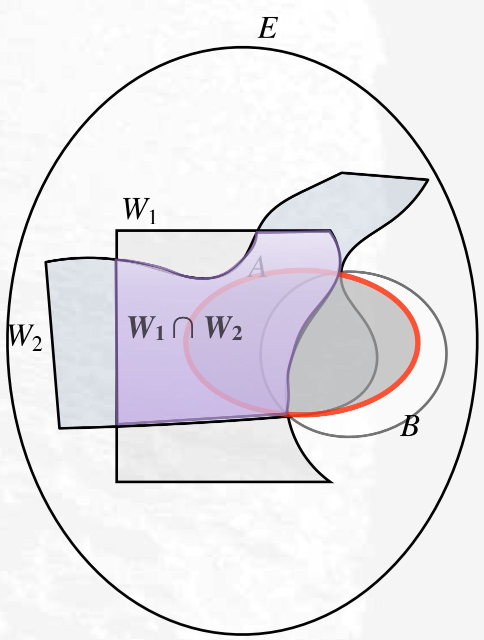
$$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\&\; (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \quad \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

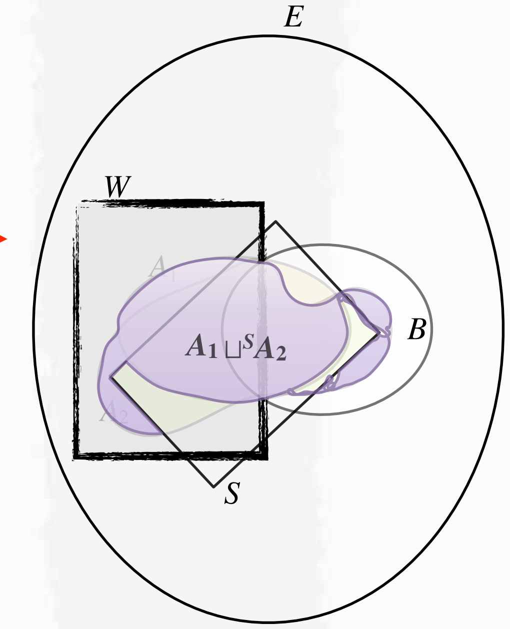
$$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \quad \forall\, W_1, W_2 \in P(E).$$



INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y sí S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \subseteq B)$ & $(A_2 \subseteq B) \Rightarrow$

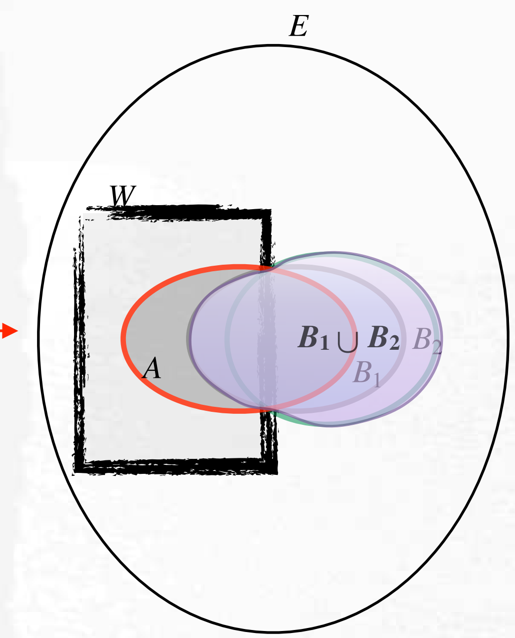
$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B)$ & $((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y sí S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2))$ & $(A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2))$,



$(A \subseteq B_1)$ & $(A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$

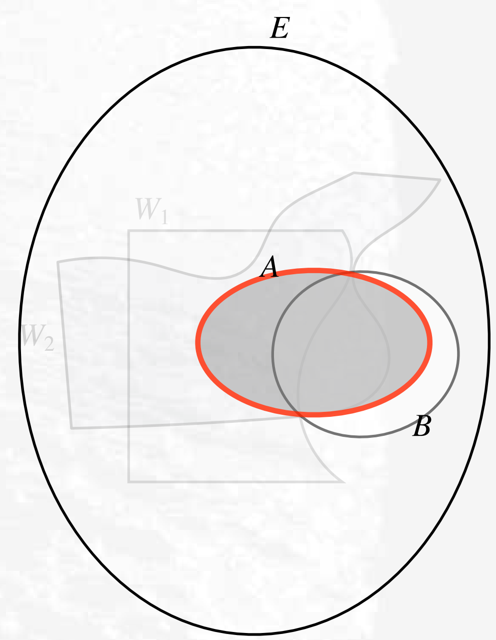
$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2))$ & $(A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \;\; \forall\, S \in P(E)$.

$(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \;\; \forall\, S \in L^E$,

y sí S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

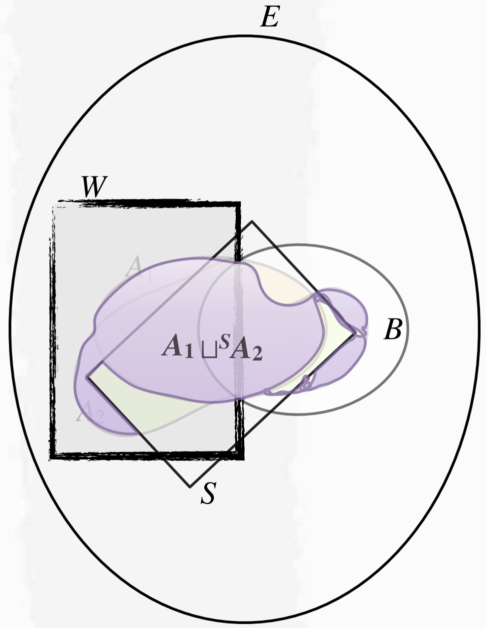
En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \;\; \forall\, W_1, W_2 \in P(E)$.



$(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B) \ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow$

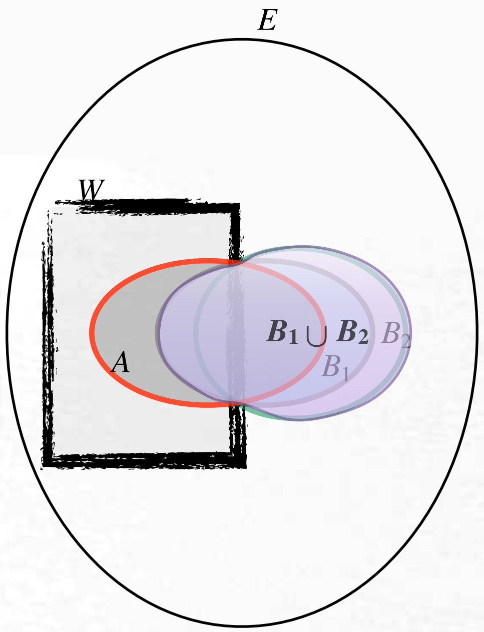
$$((A_1 \cap A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 \cup A_2) \sqsubseteq^W B),$$

$$(A_1 \subseteq B) \,\&\, (A_2 \subseteq B) \Rightarrow$$

$$((A_1 \sqcap^S A_2) \subseteq B) \,\&\, ((A_1 \sqcup^S A_2) \subseteq B) \ \ \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2)) \ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$



En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow$

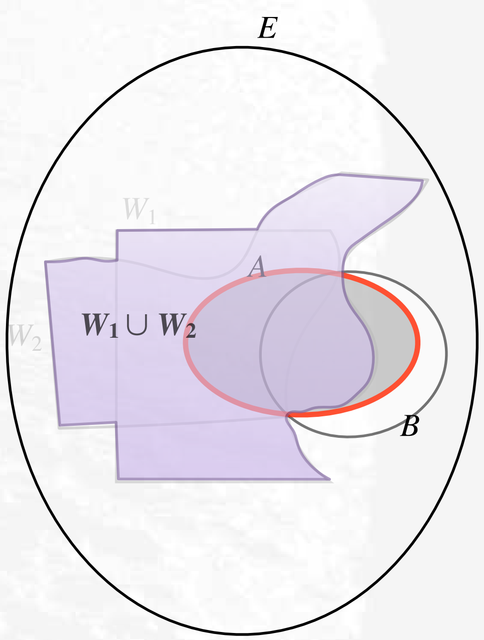
$$(A \sqsubseteq^W (B_1 \cap B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 \cup B_2)),$$

$$(A \subseteq B_1) \,\&\, (A_2 \subseteq B_2) \Rightarrow$$

$$(A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2)) \ \ \forall\, S \in P(E).$$

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B) \ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

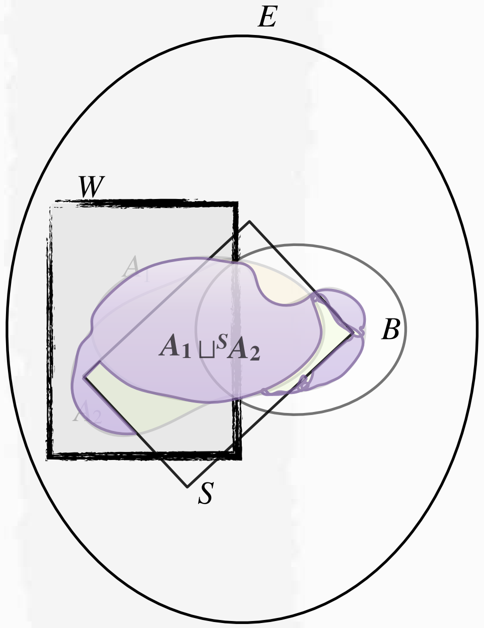


En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

$$(A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B) \ \ \forall\, W_1, W_2 \in P(E).$$

$(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow\ (\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)$



En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (A_2 \sqsubseteq^W B\,) \Rightarrow$

$(\,(A_1 \bigcap A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)\ \&\ (\,(A_1 \bigcup A_2\,) \sqsubseteq^W B\,)$,

$(A_1 \subseteq B\,)\ \&\ (A_2 \subseteq B\,) \Rightarrow$

$(\,(A_1 \sqcap^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \&\ (\,(A_1 \sqcup^S A_2\,) \subseteq B\,)\ \ \forall\, S \in P(E).$ (*)

$(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow\ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

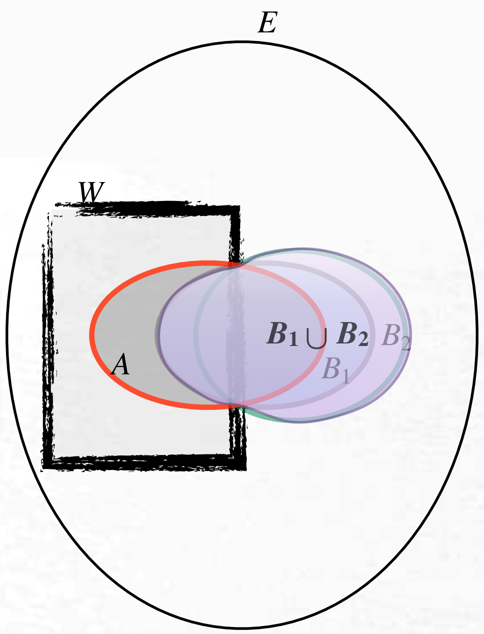
y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,(A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)\ \&\ (A \sqsubseteq^W B_2\,) \Rightarrow$

$(\,A \sqsubseteq^W (B_1 \bigcap B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \sqsubseteq^W (B_1 \bigcup B_2\,)\,)$,

$(A \subseteq B_1)\ \&\ (A_2 \subseteq B_2\,) \Rightarrow$

$(\,A \subseteq (B_1 \sqcap^S B_2\,)\,)\ \&\ (\,A \subseteq (B_1 \sqcup^S B_2\,)\,)\ \ \forall\, S \in P(E).$

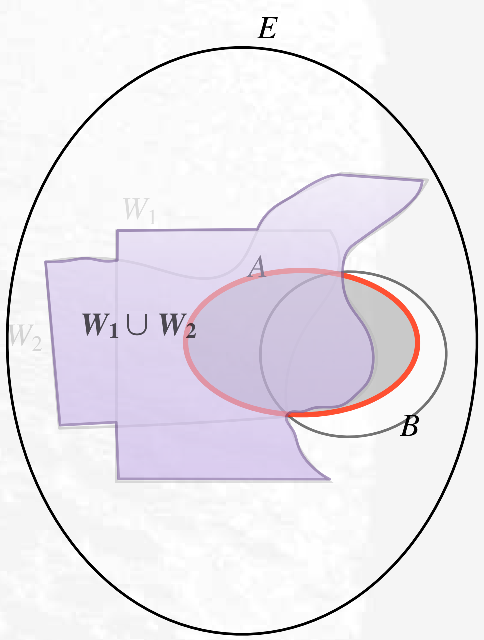


$(A \sqsubseteq^{W_1} B)\ \&\ (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow\ (\,A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B\,)\ \ \forall\, S \in L^E$,

y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(\,A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B\,)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B)\ \&\ (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow$

$(\,A \sqsubseteq^{W_1 \cap W_2} B\,)\ \&\ (\,A \sqsubseteq^{W_1 \cup W_2} B\,)\ \ \forall\, W_1, W_2 \in P(E).$



$(A_1 \sqcap^W A_2\,) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2\,)\ \ \forall (W, S, A, B) \in (L^E\,)^4$

(*) (Véase demostraciones en la transparencia siguiente)

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +, ∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B)$ & $(A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S)$ & (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +,∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B) \,\&\, (A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S) \,\&\,$ (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1) \,\&\, (A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +,∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B) \,\&\, (A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S) \,\&\,$ (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1) \,\&\, (A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)$ $\forall W_1, W_2$.

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +,∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \,\&\, (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B) \,\&\, ((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B) \,\&\, (A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S) \,\&\,$ (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \,\&\, (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2)) \,\&\, (A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1) \,\&\, (A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2)) \,\&\, (A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B) \,\&\, (A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)$ $\forall W_1, W_2$.

(4) $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)$ $\forall (W, S, A, B) \in (L^E)^4$

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E*: RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

Proposición. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +,∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)\ \ \forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B) \;\&\; ((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B) \;\&\; (A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B\ \ \forall S) \;\&\;$ (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))\ \ \forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1) \;\&\; (A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2)) \;\&\; (A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1) \;\&\; (A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2)) \;\&\; (A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))\ \ \forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)\ \ \forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)\ \ \forall W_1, W_2$.

(4) $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)\ \ \forall (W, S, A, B) \in (L^E)^4$

Demostración. (1) Teniendo en cuenta que $(A_1 \sqcap^S A_2) = A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2)$,

$(A_1 \sqsubseteq^W B) \;\&\; (A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \leq B + W) \& (B \cdot W \leq A_2 \leq B + W) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq A_1 + A_2 \leq B + W) \Rightarrow$

$[(B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq (A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2)) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2) \leq A_1 + A_2 \leq B + W] \Rightarrow [(B \cdot W \leq (A_1 \sqcap^S A_2) \leq B + W] \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

Proposición. En un álgebra de L-borrosos (L^E, $\leq$, $\cdot$, $+$, $\varnothing$, E), $'$) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B)$ & $(A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S)$ & (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2))$ & $(A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1)$ & $(A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2))$ & $(A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)$ $\forall W_1, W_2$.

(4) $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)$ $\forall (W, S, A, B) \in (L^E)^4$

Demostración. (1) Teniendo en cuenta que $(A_1 \sqcap^S A_2) = A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2)$,

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \leq B + W)$ & $(B \cdot W \leq A_2 \leq B + W) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq A_1 + A_2 \leq B + W) \Rightarrow$

$[(B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq (A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2)) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2) \leq A_1 + A_2 \leq B + W] \Rightarrow [(B \cdot W \leq (A_1 \sqcap^S A_2) \leq B + W] \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (B_1 \cdot W \leq A \leq B_1 + W)$ & $(B_2 \cdot W \leq A \leq B_2 + W) \Rightarrow ((B_1 \cdot W + B_2 \cdot W) \leq A \leq (B_1 + W) \cdot (B_2 + W)) \Rightarrow$

$((B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W)) \Rightarrow [(B_1 + B_2) \cdot (S + B_1 \cdot B_2) \cdot W \leq (B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W) \leq (B_1 \cdot B_2 + S \cdot (B_1 + B_2) + W))] \Rightarrow$

$[(B_1 \sqcap^S B_2) \cdot W \leq (B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W) \leq ((B_1 \sqcap^S B_2) + W))] \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E*: RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +, ∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \le B)$ & $(A_2 \le B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \le B \;\; \forall S)$ & (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \le B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2))$ & $(A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \le B_1)$ & $(A_2 \le B_2) \Rightarrow (A \le (B_1 \sqcap^S B_2))$ & $(A \le (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)$ $\forall W_1, W_2$.

(4) $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)$ $\forall (W, S, A, B) \in (L^E)^4$

<u>Demostración</u>. (1) Teniendo en cuenta que $(A_1 \sqcap^S A_2) = A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2)$,

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B \cdot W \le A_1 \le B + W)$ & $(B \cdot W \le A_2 \le B + W) \Rightarrow (B \cdot W \le A_1 \cdot A_2 \le A_1 + A_2 \le B + W) \Rightarrow$

$[(B \cdot W \le A_1 \cdot A_2 \le (A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2)) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2) \le A_1 + A_2 \le B + W] \Rightarrow [(B \cdot W \le (A_1 \sqcap^S A_2) \le B + W] \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (B_1 \cdot W \le A \le B_1 + W)$ & $(B_2 \cdot W \le A \le B_2 + W) \Rightarrow ((B_1 \cdot W + B_2 \cdot W) \le A \le (B_1 + W) \cdot (B_2 + W)) \Rightarrow$

$((B_1 + B_2) \cdot W \le A \le (B_1 \cdot B_2 + W)) \Rightarrow [(B_1 + B_2) \cdot (S + B_1 \cdot B_2) \cdot W \le (B_1 + B_2) \cdot W \le A \le (B_1 \cdot B_2 + W) \le (B_1 \cdot B_2 + S \cdot (B_1 + B_2) + W))] \Rightarrow$

$[(B_1 \sqcap^S B_2) \cdot W \le (B_1 + B_2) \cdot W \le A \le (B_1 \cdot B_2 + W) \le ((B_1 \sqcap^S B_2) + W))] \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

(3) Teniendo en cuenta que $(A \sqsubseteq^W B)$ es equivalente a $(A \sqsubseteq^B W)$, del apartado anterior se deduce para todo S:

$(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^B W_1)$ & $(A \sqsubseteq^B W_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^B (W_1 \sqcap^S W_2)) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$.

En particular, si $S^c = S'$, entonces , $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^{S^c} W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$.

INCLUSIÓN ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE UN REFERENCIAL *E:* RELACIÓN CON LAS *S*-INTERSECCIONES

<u>Proposición</u>. En un álgebra de L-borrosos (L^E, ≤ , ·, +,∅, E), ′) asociada a un retículo distributivo y acotado L, se verifica:

(1) $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A_1 \sqcup^S A_2) \sqsubseteq^W B)$

En particular, $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow ((A_1 \cdot A_2) \sqsubseteq^W B)$ & $((A_1 + A_2) \sqsubseteq^W B)$,

$(A_1 \leq B)$ & $(A_2 \leq B) \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \leq B \;\; \forall S)$ & (si S es complementado tal que $S^c = S'$: $(A_1 \sqcup^S A_2) \leq B$) .

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $((A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcup^S B_2))$

En particular, $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \cdot B_2))$ & $(A \sqsubseteq^W (B_1 + B_2))$,

$(A \leq B_1)$ & $(A_2 \leq B_2) \Rightarrow (A \leq (B_1 \sqcap^S B_2))$ & $(A \leq (B_1 \sqcup^S B_2))$ $\forall S$ complementado tal que $S^c = S'$.

(3) $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$ $\forall S \in L^E$, y si S es complementado tal que $S^c = S'$, también $(A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$

En particular, $(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 + W_2} B)$ $\forall W_1, W_2$.

(4) $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)$ $\forall (W, S, A, B) \in (L^E)^4$

<u>Demostración</u>. **(1)** Teniendo en cuenta que $(A_1 \sqcap^S A_2) = A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2)$,

$(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \leq B + W)$ & $(B \cdot W \leq A_2 \leq B + W) \Rightarrow (B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq A_1 + A_2 \leq B + W) \Rightarrow$

$[(B \cdot W \leq A_1 \cdot A_2 \leq (A_1 \cdot A_2 + S \cdot (A_1 + A_2)) = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2) \leq A_1 + A_2 \leq B + W] \Rightarrow [(B \cdot W \leq (A_1 \sqcap^S A_2) \leq B + W] \Rightarrow ((A_1 \sqcap^S A_2) \sqsubseteq^W B)$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

(2) $(A \sqsubseteq^W B_1)$ & $(A \sqsubseteq^W B_2) \Rightarrow (B_1 \cdot W \leq A \leq B_1 + W)$ & $(B_2 \cdot W \leq A \leq B_2 + W) \Rightarrow ((B_1 \cdot W + B_2 \cdot W) \leq A \leq (B_1 + W) \cdot (B_2 + W)) \Rightarrow$

$((B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W)) \Rightarrow [(B_1 + B_2) \cdot (S + B_1 \cdot B_2) \cdot W \leq (B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W) \leq (B_1 \cdot B_2 + S \cdot (B_1 + B_2) + W))] \Rightarrow$

$[(B_1 \sqcap^S B_2) \cdot W \leq (B_1 + B_2) \cdot W \leq A \leq (B_1 \cdot B_2 + W) \leq ((B_1 \sqcap^S B_2) + W))] \Rightarrow (A \sqsubseteq^W (B_1 \sqcap^S B_2))$.

Los casos particulares se obtienen, el primero para $S = \varnothing$ y el segundo para $W = \varnothing$.

(3) Teniendo en cuenta que $(A \sqsubseteq^W B)$ es equivalente a $(A \sqsubseteq^B W)$, del apartado anterior se deduce para todo S:

$(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^B W_1)$ & $(A \sqsubseteq^B W_2) \Rightarrow (A \sqsubseteq^B (W_1 \sqcap^S W_2)) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^S W_2} B)$.

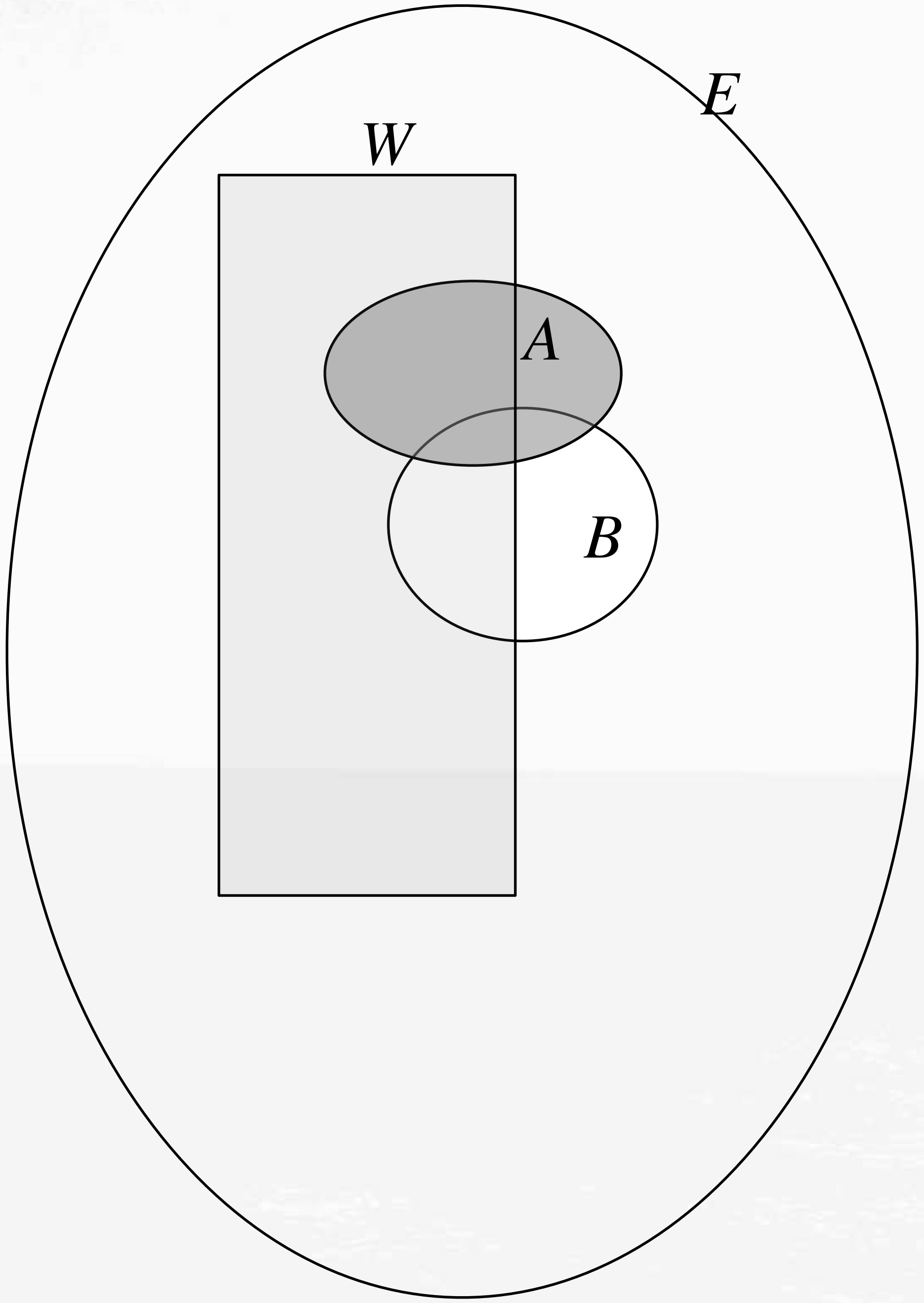
En particular, si $S^c = S'$, entonces , $(A_1 \sqsubseteq^W B)$ & $(A_2 \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcap^{S^c} W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1 \sqcup^S W_2} B)$.

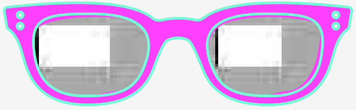
(4) Se verifica: $(A_1 \sqcap^S A_2) \cdot W = (A_1 + A_2) \cdot (S + A_1 \cdot A_2) \cdot W \leq (A_1 + A_2) \cdot W \leq (A_1 + A_2) \cdot (W + A_1 \cdot A_2) = (A_1 \sqcap^W A_2)$;

y $(A_1 \sqcap^W A_2) = (A_1 \cdot A_2 + W \cdot (A_1 + A_2)) \leq (A_1 \cdot A_2 + W \cdot (A_1 + A_2) + S \cdot (A_1 + A_2)) \leq (A_1 \cdot A_2 + W + S \cdot (A_1 + A_2)) = (A_1 \sqcap^S A_2) + W$.

Hemos demostrado que $(A_1 \sqcap^S A_2) \cdot W \leq (A_1 \sqcap^W A_2) \leq (A_1 \sqcap^S A_2) + W$, luego $(A_1 \sqcap^W A_2) \sqsubseteq^W (A_1 \sqcap^S A_2)$.∎

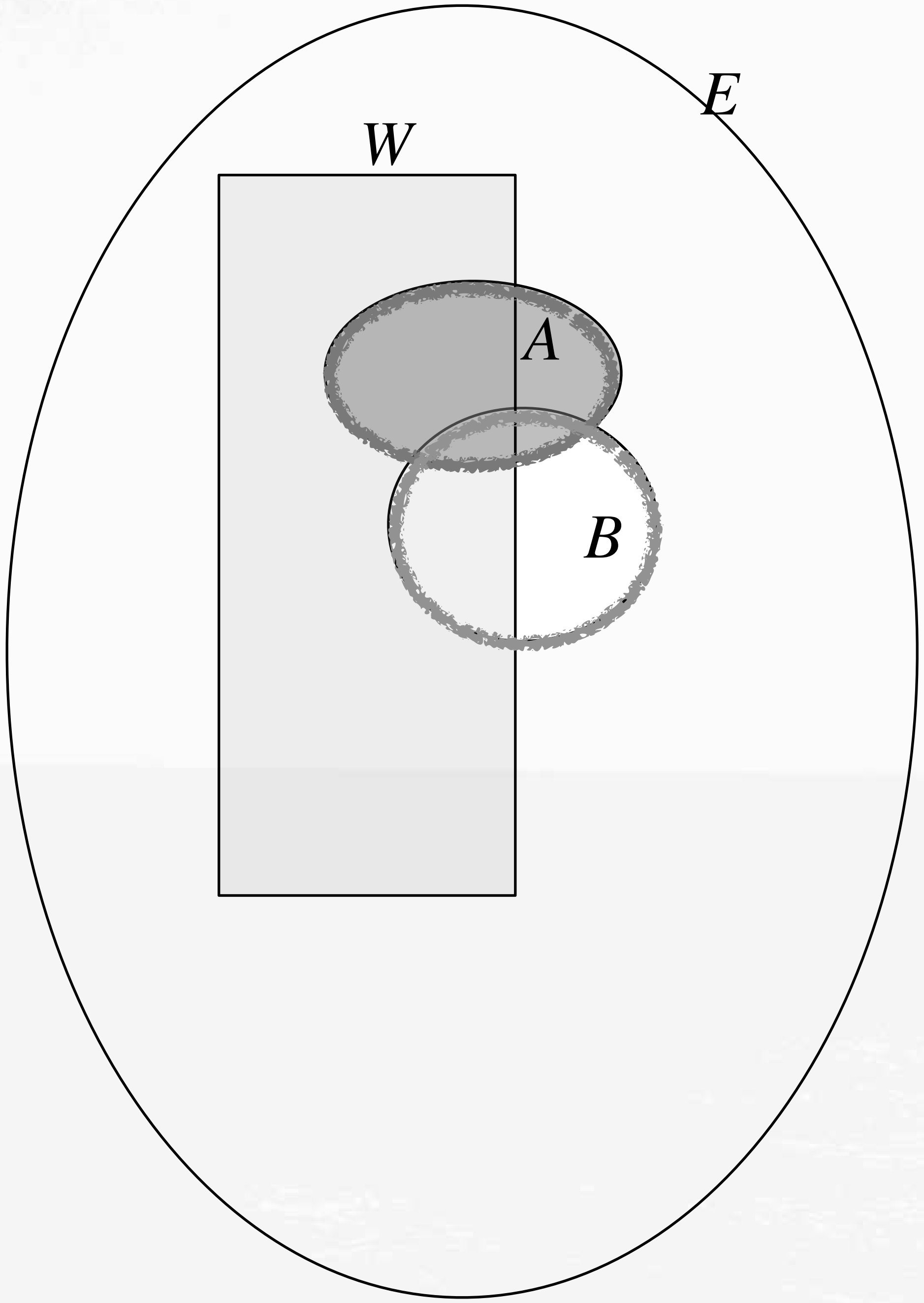
OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN L^E





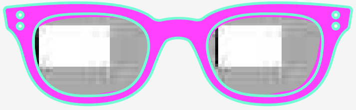
Proposición. se verifica:

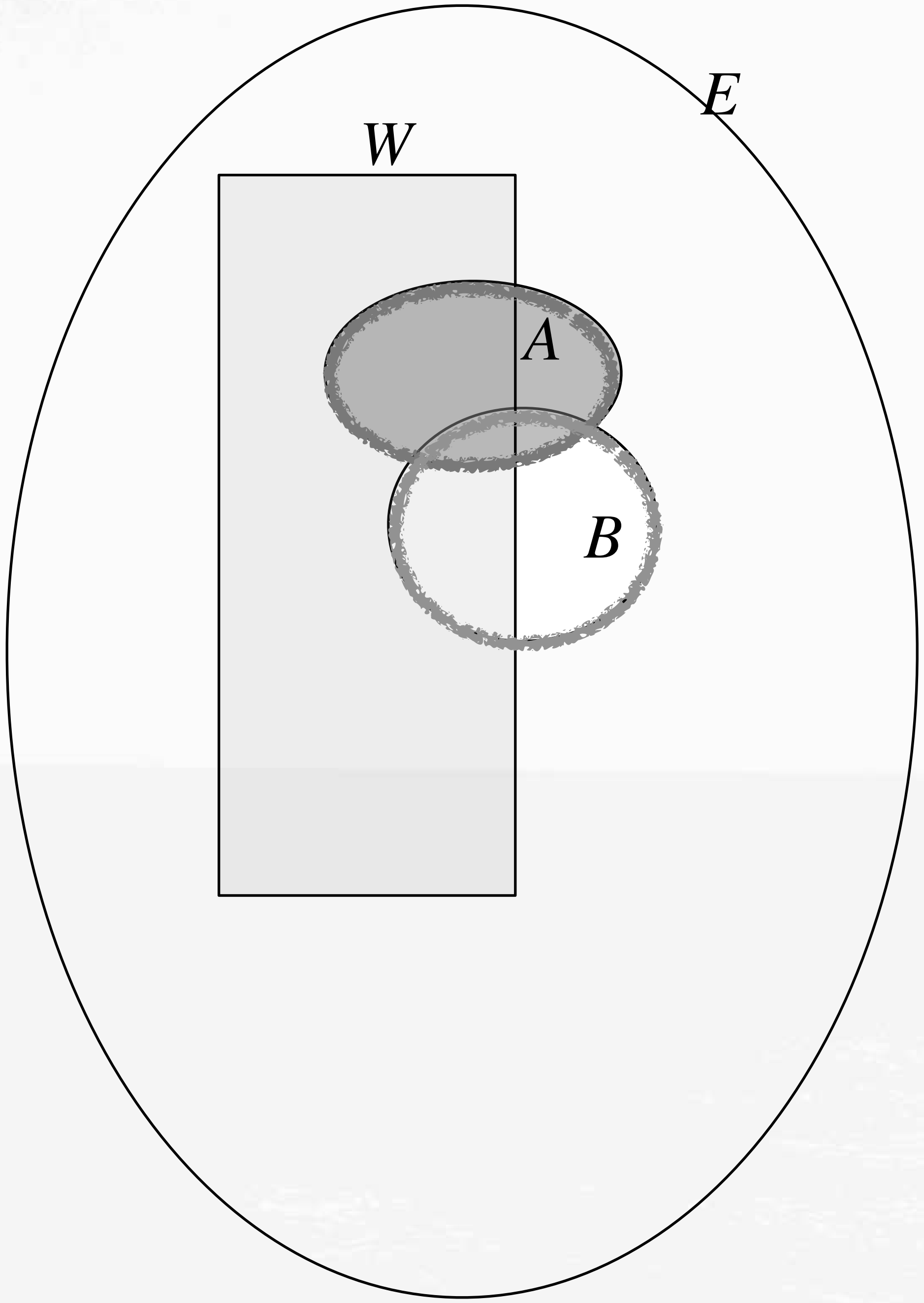
$(S^c=S')\ \&\ (W^c=W') \Rightarrow (A\triangle S)\triangle W = A\triangle(S\triangle W) = A\triangle(W\triangle S) = (A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.



Proposición. se verifica:

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W') \Rightarrow (A\triangle S)\triangle W = A\triangle(S\triangle W) = A\triangle(W\triangle S) = (A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.





Proposición. se verifica:

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.

Dem. $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=A\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)'\cdot+A'\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)=$

$(B\cdot W^c+B'\cdot W)\cdot A'+(B\cdot W+B'\cdot W^c)\cdot A+B\cdot B'\cdot A=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+B\cdot B'\cdot A$

$B\cdot B'\cdot A\cdot[(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W]=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W=A\cdot B\cdot B'.$∎

En consecuencia, $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W$

$(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle B)\triangle W=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B'+A'\cdot B)'\cdot W=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+(A\cdot A'+B\cdot B')\cdot W,$

y si $B'=B^c$, entonces $B\cdot B'=\varnothing$ y $A\cdot A'=A\cdot A'\cdot E=A\cdot A'\cdot(B+B')=(A\cdot A'\cdot B+A\cdot A'\cdot B')\leq A\cdot B+A'\cdot B'$,

luego en consecuencia,

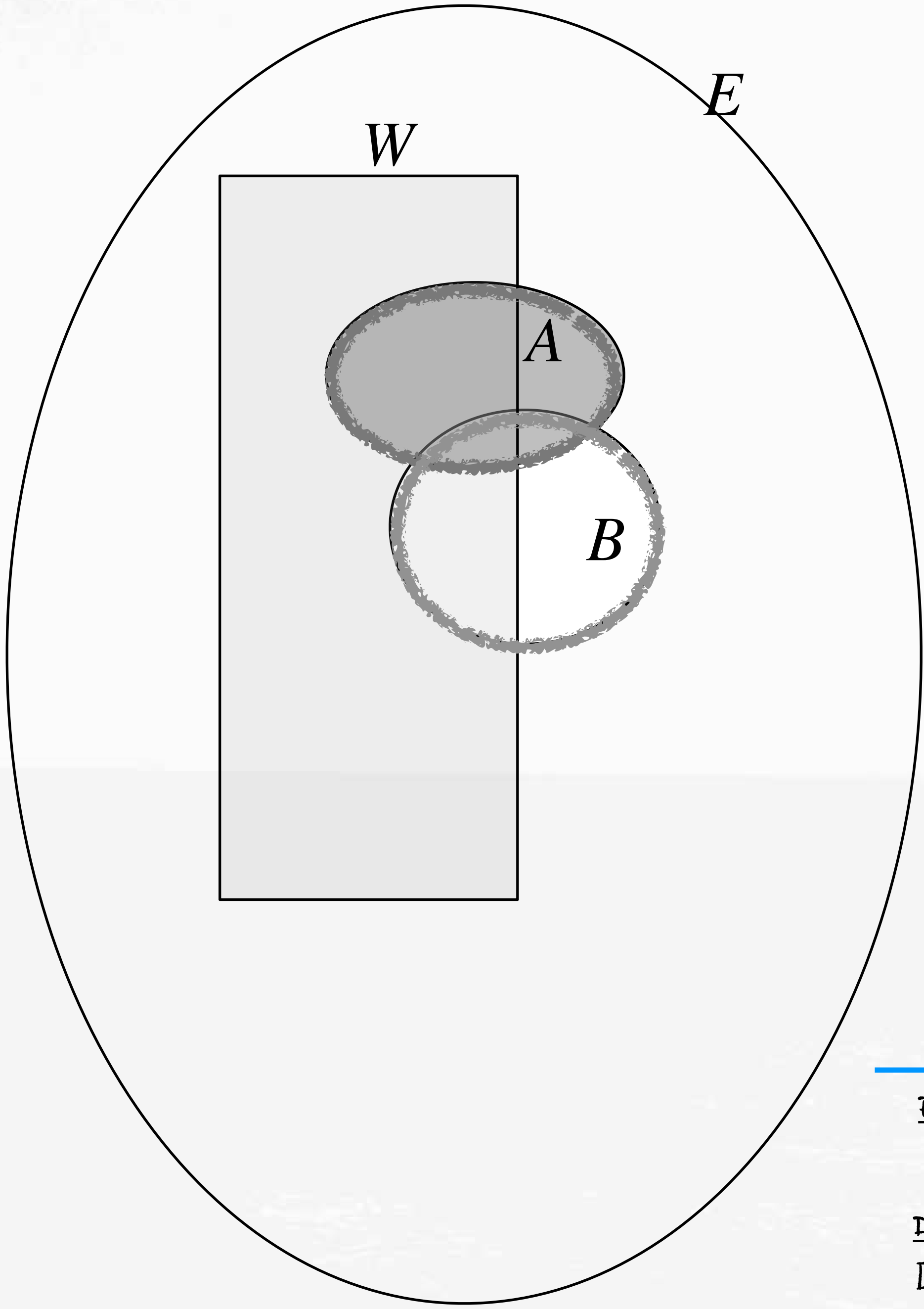
$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W\cdot[(A\cdot S'+A'\cdot S)\cdot W^c+(A\cdot S+A'\cdot S')\cdot W]=$

$(A\cdot A'S+A\cdot A'\cdot S'+A\cdot S\cdot S'+A'\cdot S\cdot S')\cdot W=$

$(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W$, es decir

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.∎

OTROS OPERADORES ASOCIADOS A UN ORDEN DE ACTIVIDAD EN L^E



<u>Proposición</u>. se verifica:

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.

<u>Dem</u>. $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=A\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)'\cdot+A'\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)=$

$(B\cdot W^c+B'\cdot W)\cdot A'+(B\cdot W+B'\cdot W^c)\cdot A+B\cdot B'\cdot A=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+B\cdot B'\cdot A$

$B\cdot B'\cdot A\cdot[(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W]=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W=A\cdot B\cdot B'.$∎

En consecuencia, $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W$

$(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle B)\triangle W=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B'+A'\cdot B)'\cdot W=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+(A\cdot A'+B\cdot B')\cdot W,$

y si $B'=B^c$, entonces $B\cdot B'=\varnothing$ y $A\cdot A'=A\cdot A'\cdot E=A\cdot A'\cdot(B+B')=(A\cdot A'\cdot B+A\cdot A'\cdot B')\leq A\cdot B+A'\cdot B'$,

luego en consecuencia,

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W\cdot[(A\cdot S'+A'\cdot S)\cdot W^c+(A\cdot S+A'\cdot S')\cdot W]=$

$(A\cdot A'S+A\cdot A'\cdot S'+A\cdot S\cdot S'+A'\cdot S\cdot S')\cdot W=$

$(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W$, es decir

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.∎

<u>Proposición</u>. se verifica:

$(W^c=W')\Rightarrow A\triangle^W B=(A\triangle B)\triangle W$

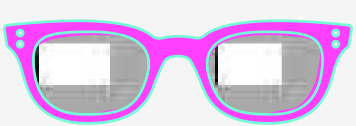
<u>Dem</u>. $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle^W B=(A\sqcap^W B')\sqcup^W(A'\sqcap^W B)=$

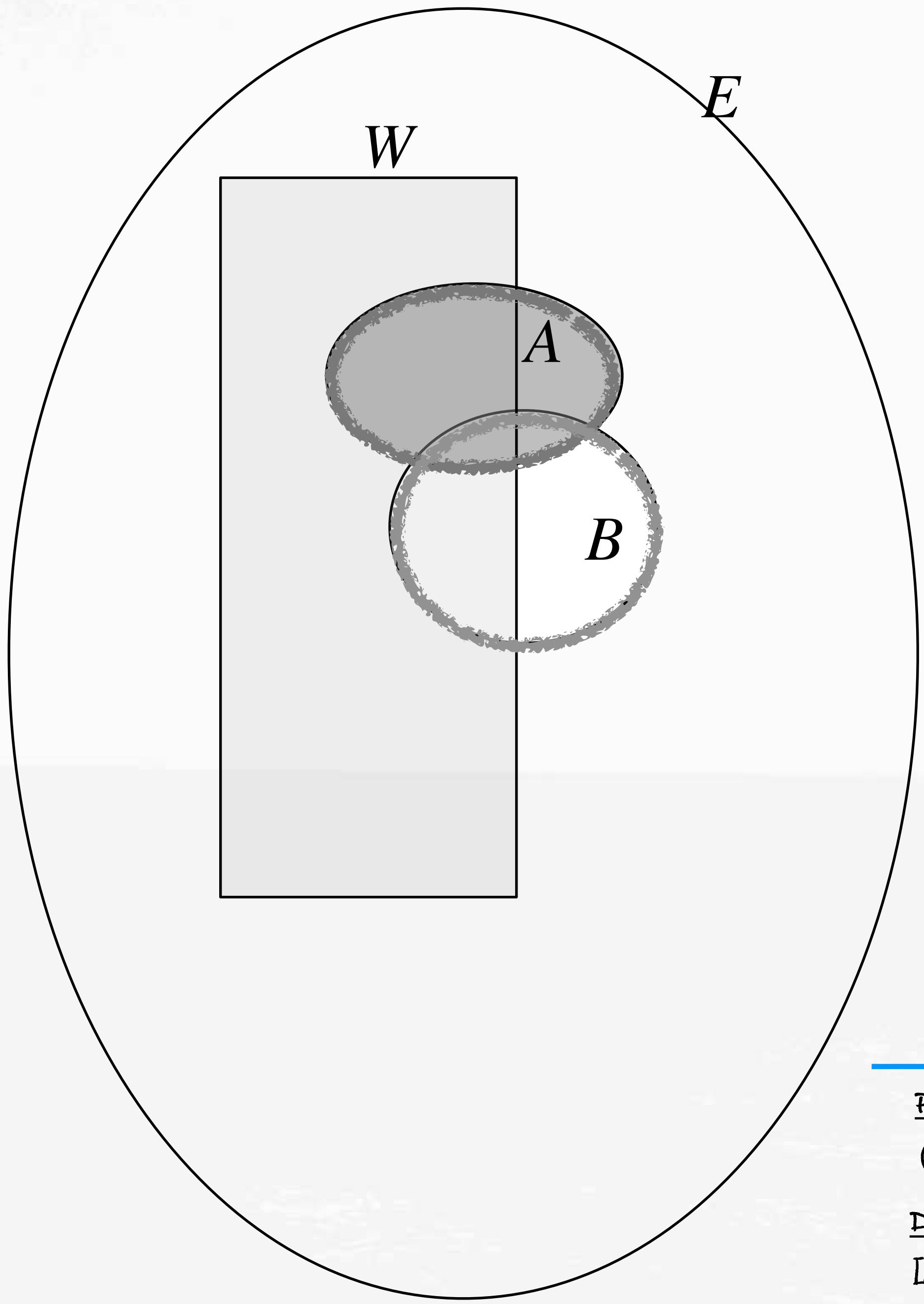
$[A\cdot B'+W\cdot(A+B')]\sqcup^W[A'\cdot B+W\cdot(A'+B)]=$

$A\cdot A'\cdot B\cdot B'+(A\cdot A'\cdot B'+A\cdot B\cdot B'+A\cdot A'\cdot B+A'\cdot B\cdot B'+A\cdot A'+A\cdot B+A'\cdot B'+B\cdot B')\cdot W+$

$[A\cdot B'+W\cdot(A+B')+A'\cdot B+W\cdot(A'+B)]\cdot W^c=$

$(A\cdot A'+A\cdot B+A'\cdot B'+B\cdot B')\cdot W+(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c=(A\triangle B)\triangle W.$∎





Proposición. se verifica:

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L.

Dem. $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=A\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)'\cdot+A'\cdot(B\cdot W^c+B'\cdot W)=$

$(B\cdot W^c+B'\cdot W)\cdot A'+(B\cdot W+B'\cdot W^c)\cdot A+B\cdot B'\cdot A=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+B\cdot B'\cdot A$

$B\cdot B'\cdot A\cdot[(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W]=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W+A\cdot A'\cdot B\cdot B'\cdot W=$

$A\cdot B\cdot B'\cdot W^c+A\cdot B\cdot B'\cdot W=A\cdot B\cdot B'.$ ∎

En consecuencia, $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle(B\triangle W)=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W$

$(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle B)\triangle W=(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B'+A'\cdot B)'\cdot W=$

$(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c+(A\cdot B+A'\cdot B')\cdot W+(A\cdot A'+B\cdot B')\cdot W,$

y si $B'=B^c$, entonces $B\cdot B'=\emptyset$ y $A\cdot A'=A\cdot A'\cdot E=A\cdot A'\cdot(B+B')=(A\cdot A'\cdot B+A\cdot A'\cdot B')\leq A\cdot B+A'\cdot B'$,

luego en consecuencia,

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W\cdot[(A\cdot S'+A'\cdot S)\cdot W^c+(A\cdot S+A'\cdot S')\cdot W]=$

$(A\cdot A'S+A\cdot A'\cdot S'+A\cdot S\cdot S'+A'\cdot S\cdot S')\cdot W=$

$(A\cdot A'+S\cdot S')\cdot W$, es decir

$(S^c=S')\,\&\,(W^c=W')\Rightarrow(A\triangle S)\triangle W=A\triangle(S\triangle W)=A\triangle(W\triangle S)=(A\triangle W)\triangle S$ para todo A de L. ∎

Proposición. se verifica:

$(W^c=W')\Rightarrow A\triangle^W B=(A\triangle B)\triangle W$

Dem. $(W^c=W')\Rightarrow A\triangle^W B=(A\sqcap^W B')\sqcup^W(A'\sqcap^W B)=$

$[A\cdot B'+W\cdot(A+B')]\sqcup^W[A'\cdot B+W\cdot(A'+B)]=$

$A\cdot A'\cdot B\cdot B'+(A\cdot A'\cdot B'+A\cdot B\cdot B'+A\cdot A'\cdot B+A'\cdot B\cdot B'+A\cdot A'+A\cdot B+A'\cdot B'+B\cdot B')\cdot W+$

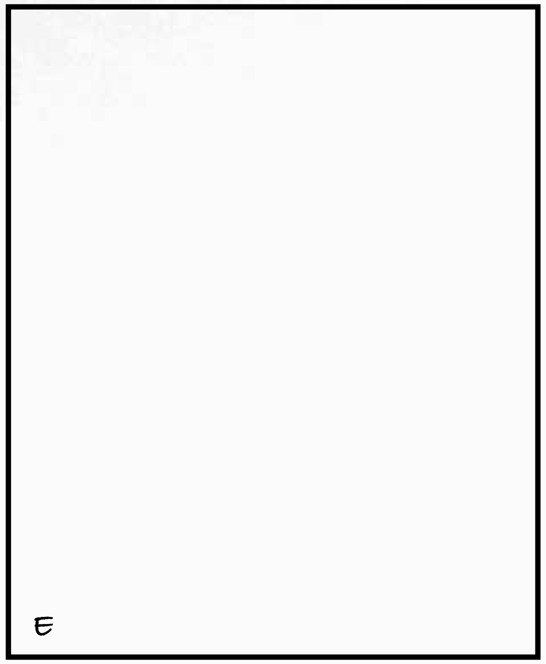
$[A\cdot B'+W\cdot(A+B')+A'\cdot B+W\cdot(A'+B)]\cdot W^c=$

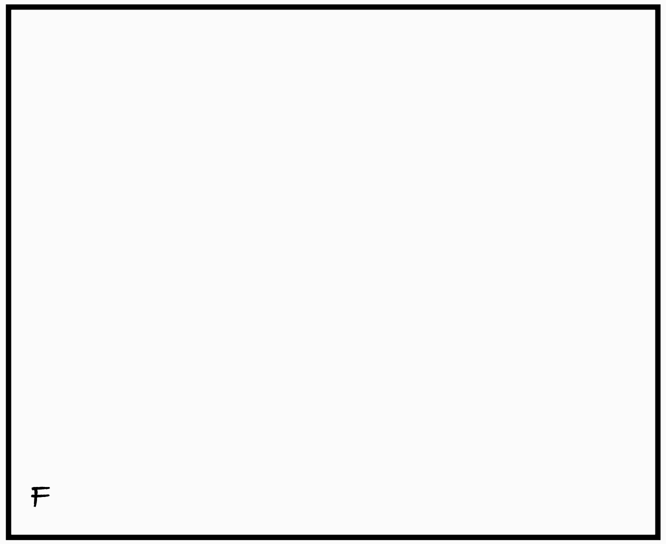
$(A\cdot A'+A\cdot B+A'\cdot B'+B\cdot B')\cdot W+(A\cdot B'+A'\cdot B)\cdot W^c=(A\triangle B)\triangle W.$ ∎

Proposición. se verifica: $A\sqsubseteq^S B\Leftrightarrow A'\sqsubseteq^{S'}B'$

Dem $B\cdot S\leq A\leq B+S\Leftrightarrow B'+S'\geq A'\geq B'\cdot S'.$ ∎

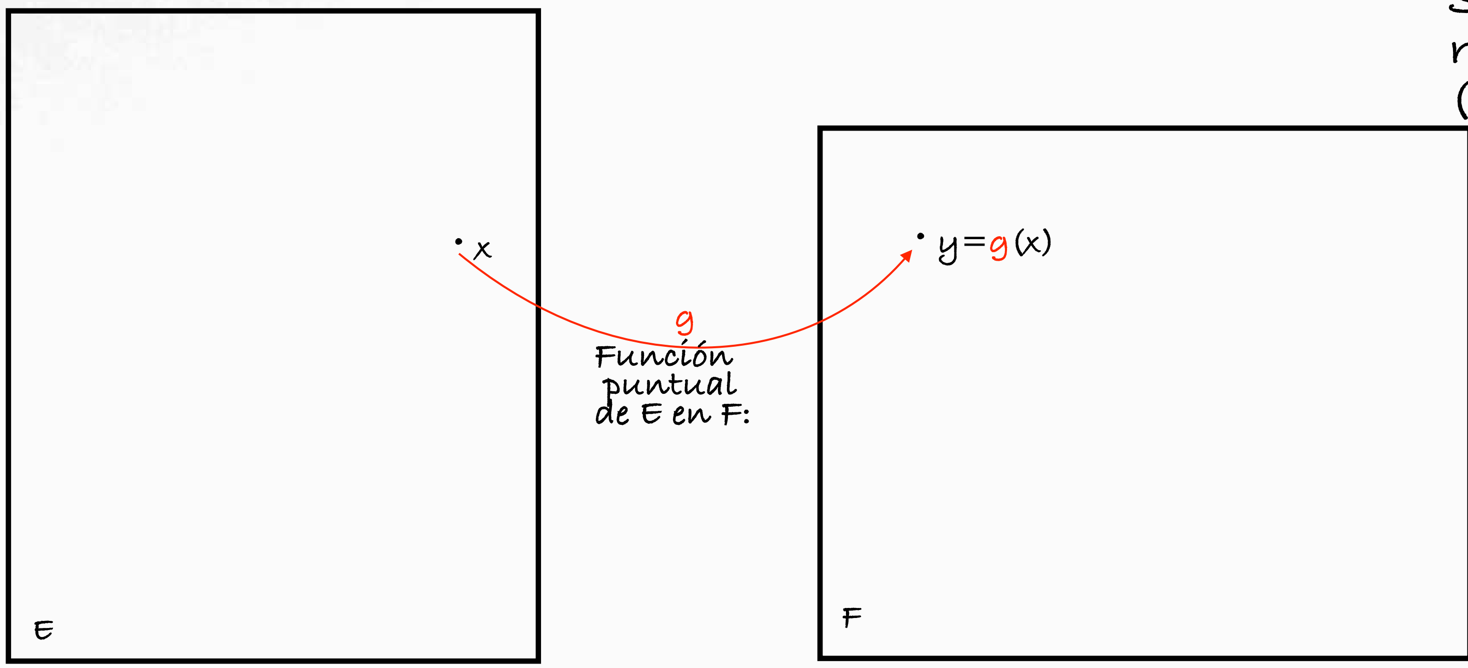
Extensiones $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}$ y $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}$, (asociadas a perspectivas W_1 en L^E y W_2 en L^F), de las correspondientes entre las partes borrosas $\mathbf{g}: L^E \rightarrow L^F$ y $\mathbf{g}^{-1}: L^F \rightarrow L^E$ de una función $g: E \rightarrow F$





Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado, E y F referenciales ordinarios no vacíos y $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$, $(L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F)$ los correspondientes retículos de L-borrosos.

(Cuestión abierta)



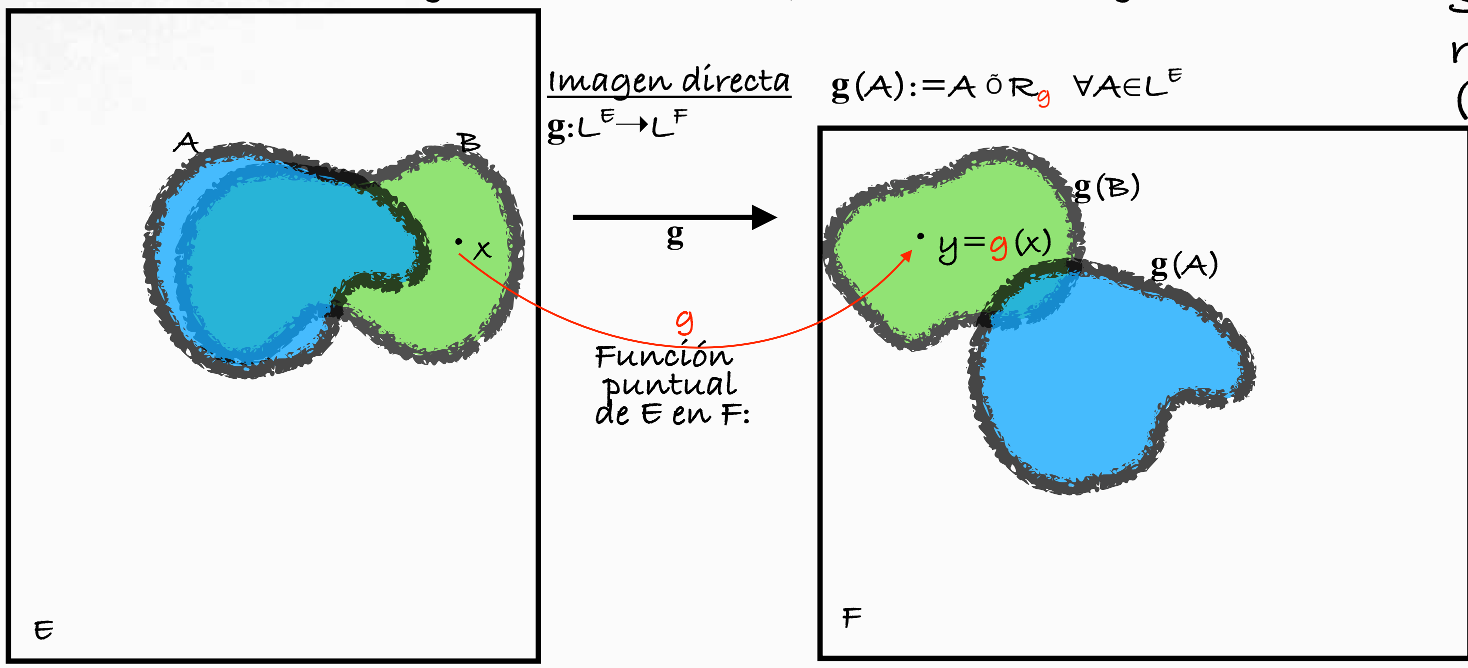
Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado, E y F referenciales ordinarios no vacíos y $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $(L^F, \leq, \cdot, +, \varnothing, F)$ los correspondientes retículos de L-borrosos.

<u>Nota</u>:
Utilizaremos la expresión, (en términos de la composición borrosa "$\bar{o}$" y de la relación característica "R_f" (nítida) de una función f:E→F), del "<u>Principio de extensión de Zadeh</u>" de una función f:
La función $\mathbf{f}$: $L^E \to L^F$ es tal que $\mathbf{f}(A) := A \,\bar{o}\, R_f \;\; \forall A \in L^E$, siendo R_f la relación nítida: $R_f(x,y) = (1$ si $y=f(x))\,\&\,(0$ en otro caso$)$
y $\mathbf{f}(A) \in L^F$ el L-borroso tal que, para $y \in F$:

$$\mathbf{f}(A)(y) = (A \,\bar{o}\, R_f)(y) = \sup\{A(x) \cdot R_f(x,y) / x \in E\} = \sup\{A(x) \,/\, y=f(x)\} = \sup A(f^{-1}(\{y\}))$$

Sea g una función puntual de E en F.

Extensiones g y g^{-1} de $g:E\rightarrow F$ a las partes borrosas de E y F (L^E,L^F):



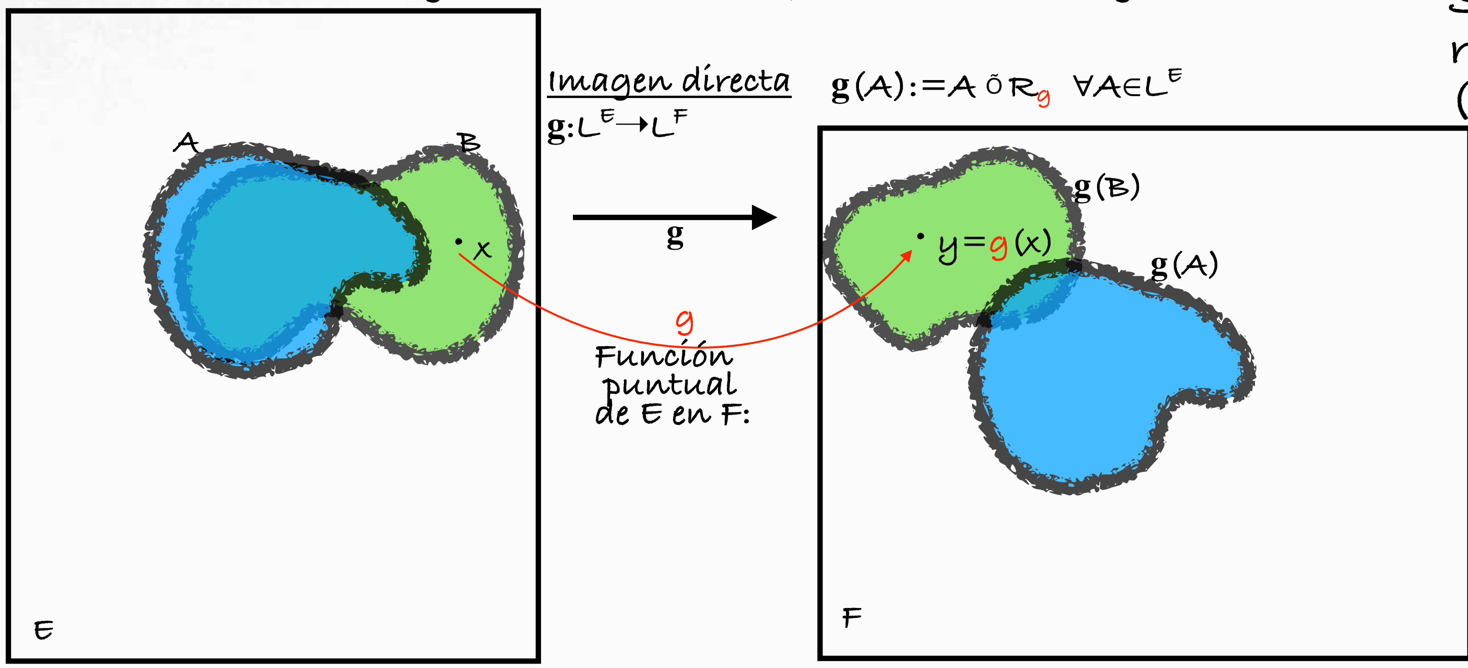
Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado, E y F referenciales ordinarios no vacíos y $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$, $(L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F)$ los correspondientes retículos de L-borrosos.

Nota:
Utilizaremos la expresión, (en términos de la composición borrosa "ō" y de la relación característica "R_f" (nítida) de una función $f:E\rightarrow F$), del "Principio de extensión de Zadeh" de una función f:
La función $\mathbf{f}: L^E\rightarrow L^F$ es tal que $\mathbf{f}(A):=A \,ō\, R_f \;\; \forall A\in L^E$, siendo R_f la relación nítida: $R_f(x,y)=(1$ si $y=f(x))\,\&\,(0$ en otro caso$)$
y $\mathbf{f}(A)\in L^F$ el L-borroso tal que, para $y\in F$:

$$\mathbf{f}(A)\,(y)=(A \,ō\, R_f)\,(y)=\sup\{A(x)\cdot R_f(x,y)/x\in E\}=\sup\{A(x)\;/\;y=f(x)\}=\sup A(f^{-1}(\{y\}))$$

Sea g una función puntual de E en F.

Extensiones $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}^{-1}$ de g:E→F a las partes borrosas de E y F (L^E,L^F):

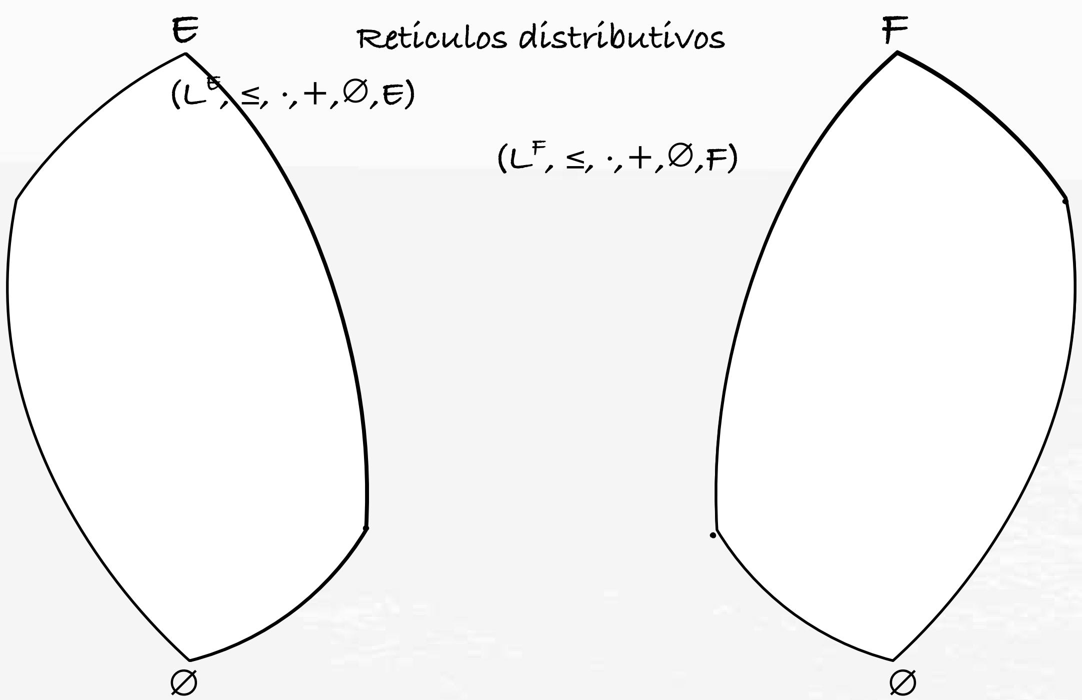


Sea (L, ≤, ·,+,0,1) un retículo distributivo y acotado, E y F referenciales ordinarios no vacíos y (L^E, ≤, ·,+,∅,E), (L^F, ≤, ·,+,∅,F) los correspondientes retículos de L-borrosos.

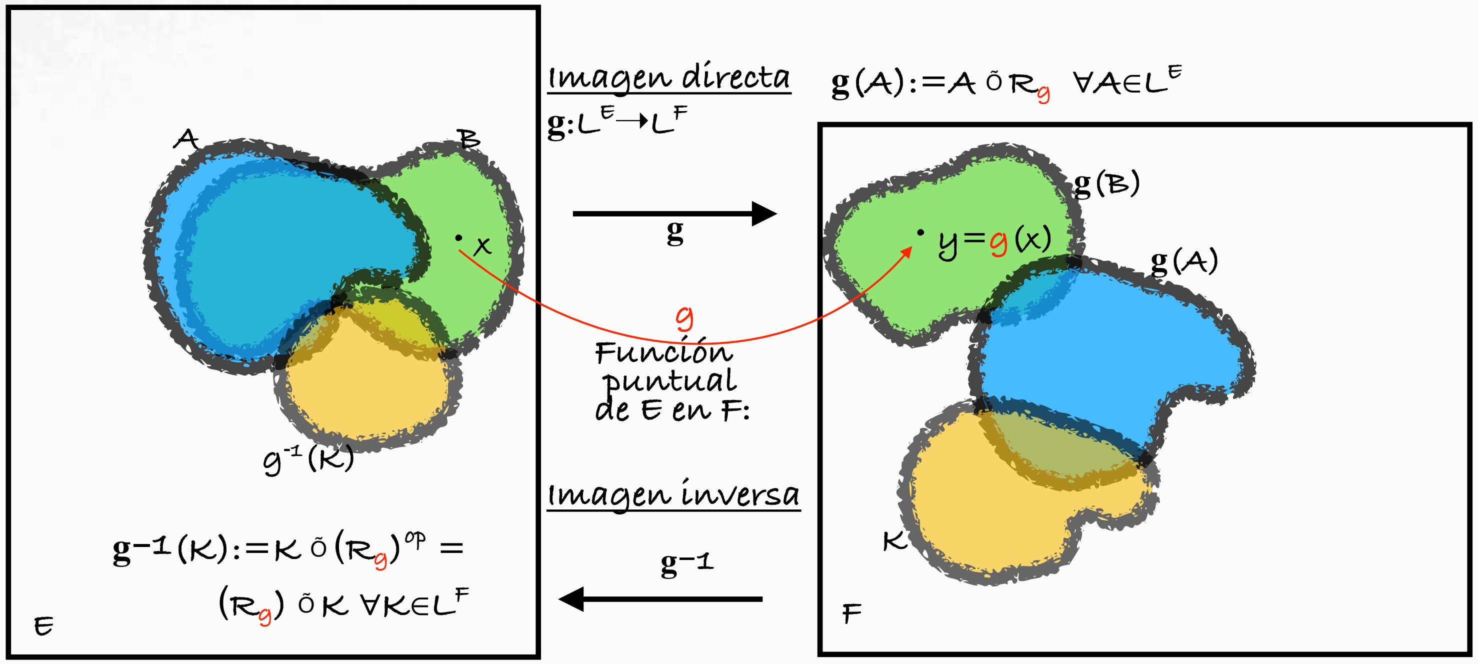
Nota:
Utilizaremos la expresión, (en términos de la composición borrosa "ō" y de la relación característica "R_f" (nítida) de una función f:E→F), del "Principio de extensión de Zadeh"de una función f:
La función $\mathbf{f}$: L^E→L^F es tal que $\mathbf{f}$(A):=A ō R_f ∀A∈L^E, siendo R_f la relación nítida: R_f(x,y) = (1 si y=f(x)) & (0 en otro caso)
y $\mathbf{f}$(A)∈L^F el L-borroso tal que, para y∈F:

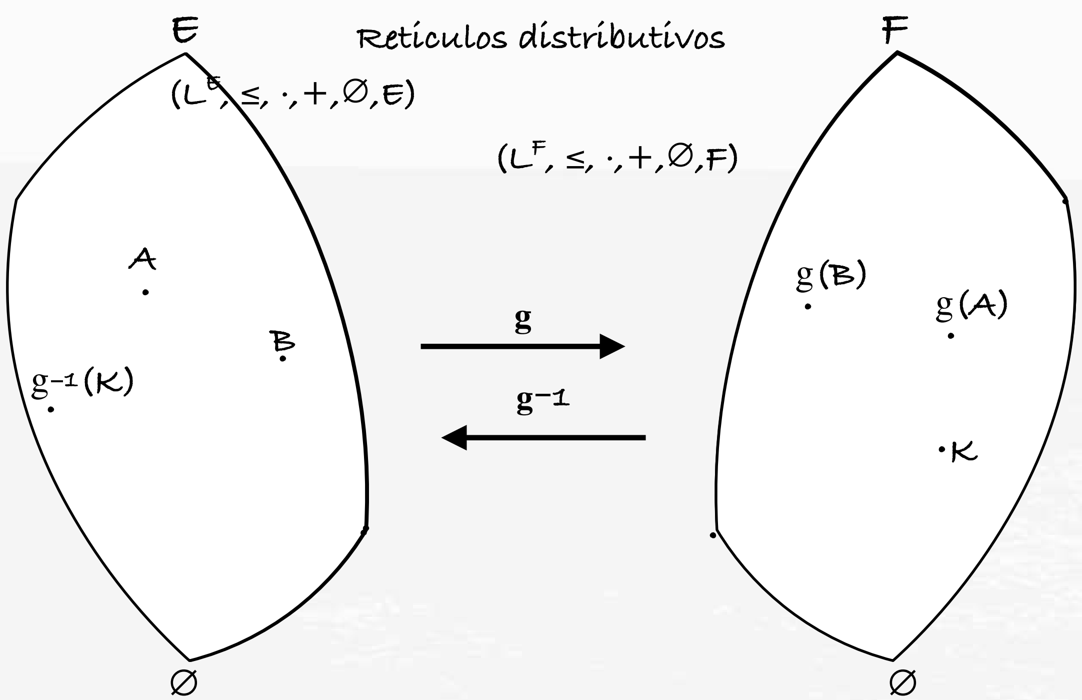
$$\mathbf{f}(A)(y) = (A \text{ ō } R_f)(y) = \sup\{A(x)\cdot R_f(x,y)/x\in E\} = \sup\{A(x) \,/\, y=f(x)\} = \sup A(f^{-1}(\{y\}))$$

Sea g una función puntual de E en F.



Extensiones g y g^{-1} de $g: E \to F$ a las partes borrosas de E y F (L^E, L^F):





¿?

Propiedades de las extensiones

$g(\sum_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} g(A_j)$, $g(\prod_{j\in J} A_j) \leq \prod_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

$(A \leq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$, $g(\emptyset) = \emptyset$.

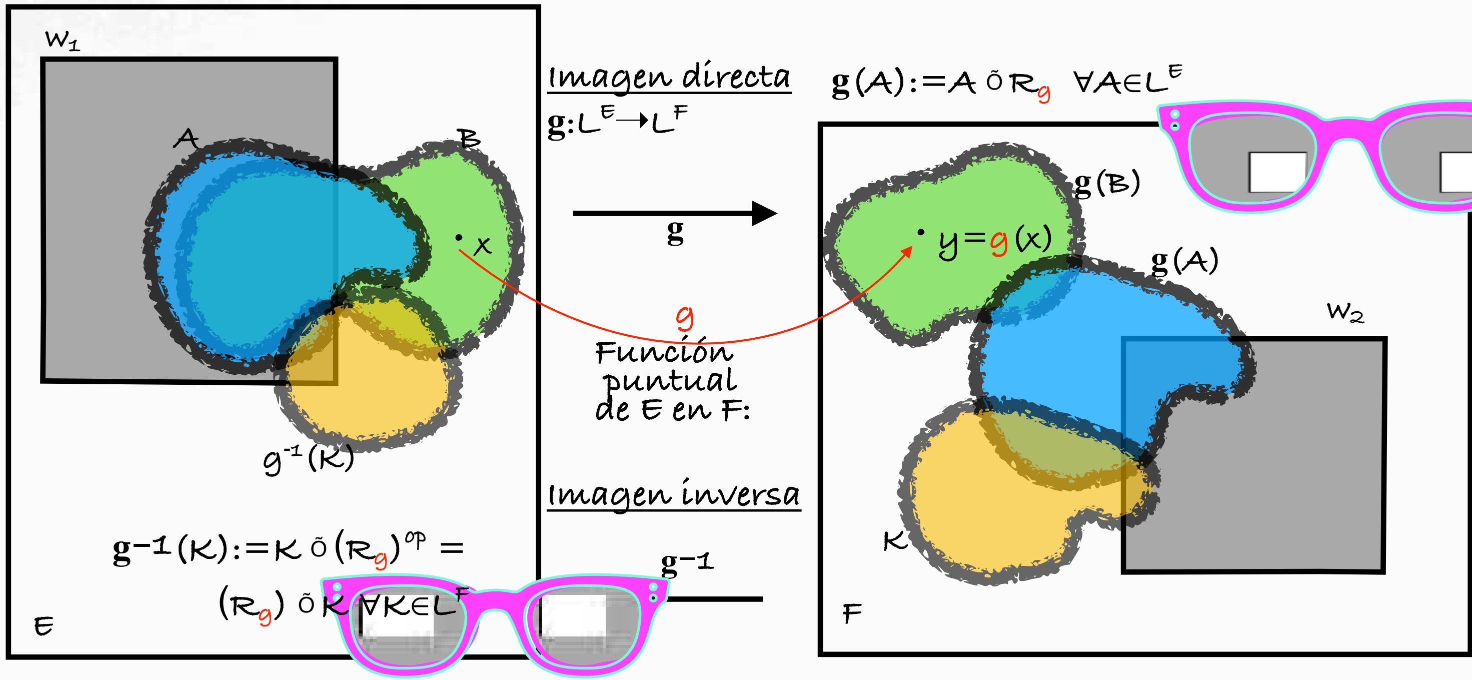
$g^{-1}(\sum_{j\in J} K_j) = \sum_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\prod_{j\in J} K_j) = \prod_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \leq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \leq g^{-1}(S))$

$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $g^{-1}(F) = E$.

$A \leq g^{-1}(g(A))$ $\forall A \in L^E$ $\quad$ $g(g^{-1}(K)) \leq K$ $\forall K \in L^F$

Extensiones $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g^{-1}}$ de $g:E\to F$ a las partes borrosas de E y F (L^E, L^F):



$\mathbf{g}(A):=A\,\tilde{o}\,R_g \quad \forall A\in L^E$

$\mathbf{g^{-1}}(K):=K\,\tilde{o}\,(R_g)^{op} = (R_g)\,\tilde{o}\,K \quad \forall K\in L^F$

¿?

Propiedades de las extensiones

$\mathbf{g}(\sum_{j\in J}A_j) = \sum_{j\in J}\mathbf{g}(A_j),\ \mathbf{g}(\prod_{j\in J}A_j) \leq \prod_{j\in J}\mathbf{g}(A_j) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

$(A\leq B)\Rightarrow(\mathbf{g}(A)\leq \mathbf{g}(B)), \quad \mathbf{g}(\emptyset)=\emptyset.$

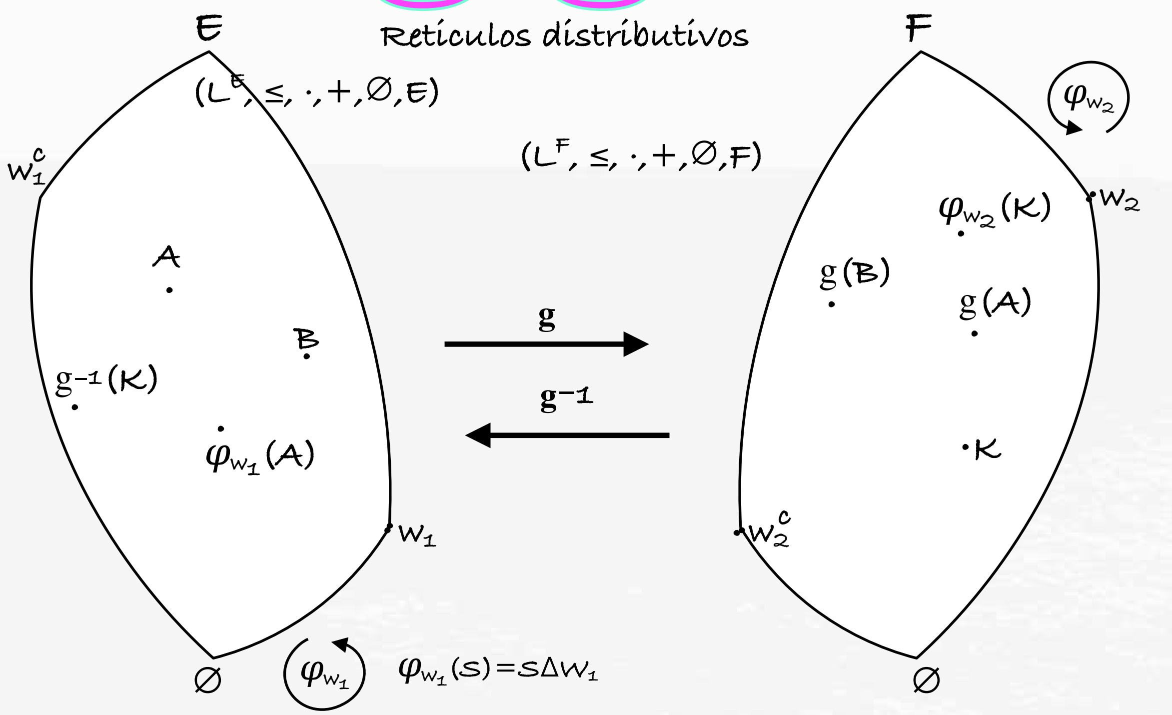
$\mathbf{g^{-1}}(\sum_{j\in J}K_j) = \sum_{j\in J}\mathbf{g^{-1}}(K_j),\ \mathbf{g^{-1}}(\prod_{j\in J}K_j) = \prod_{j\in J}\mathbf{g^{-1}}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\leq S)\Rightarrow(\mathbf{g^{-1}}(K)\leq \mathbf{g^{-1}}(S))$

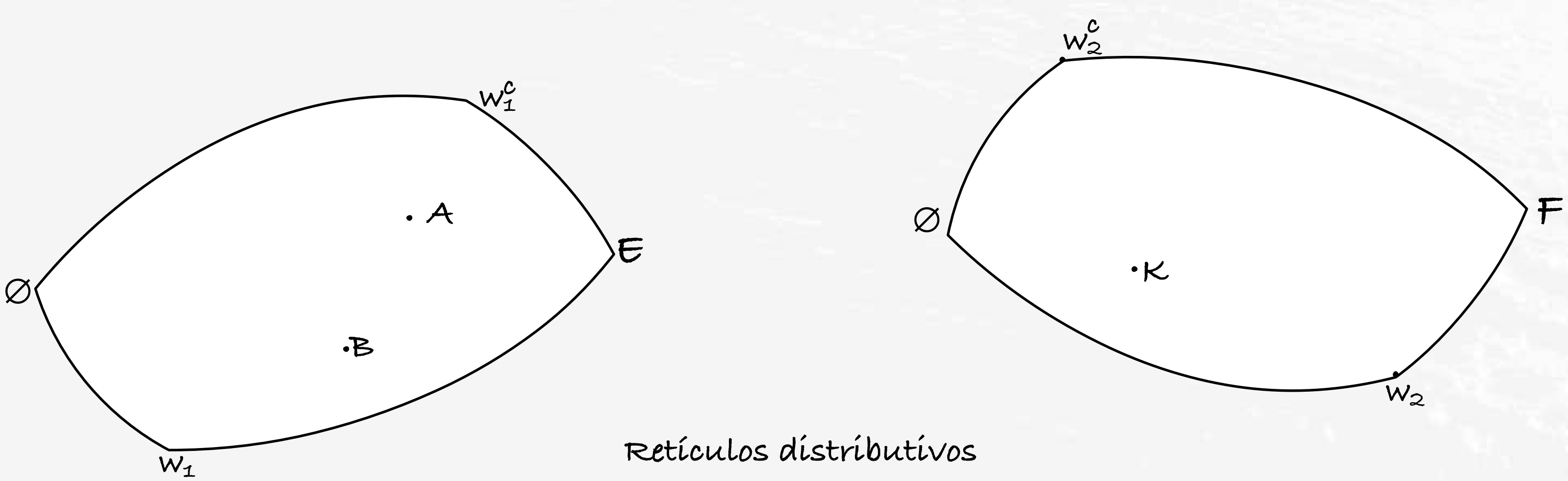
$\mathbf{g^{-1}}(\emptyset)=\emptyset,\ \mathbf{g^{-1}}(F)=E.$

$A\leq \mathbf{g^{-1}}(\mathbf{g}(A))\ \forall A\in L^E \qquad \mathbf{g}(\mathbf{g^{-1}}(K))\leq K\ \forall K\in L^F$

Retículos distributivos



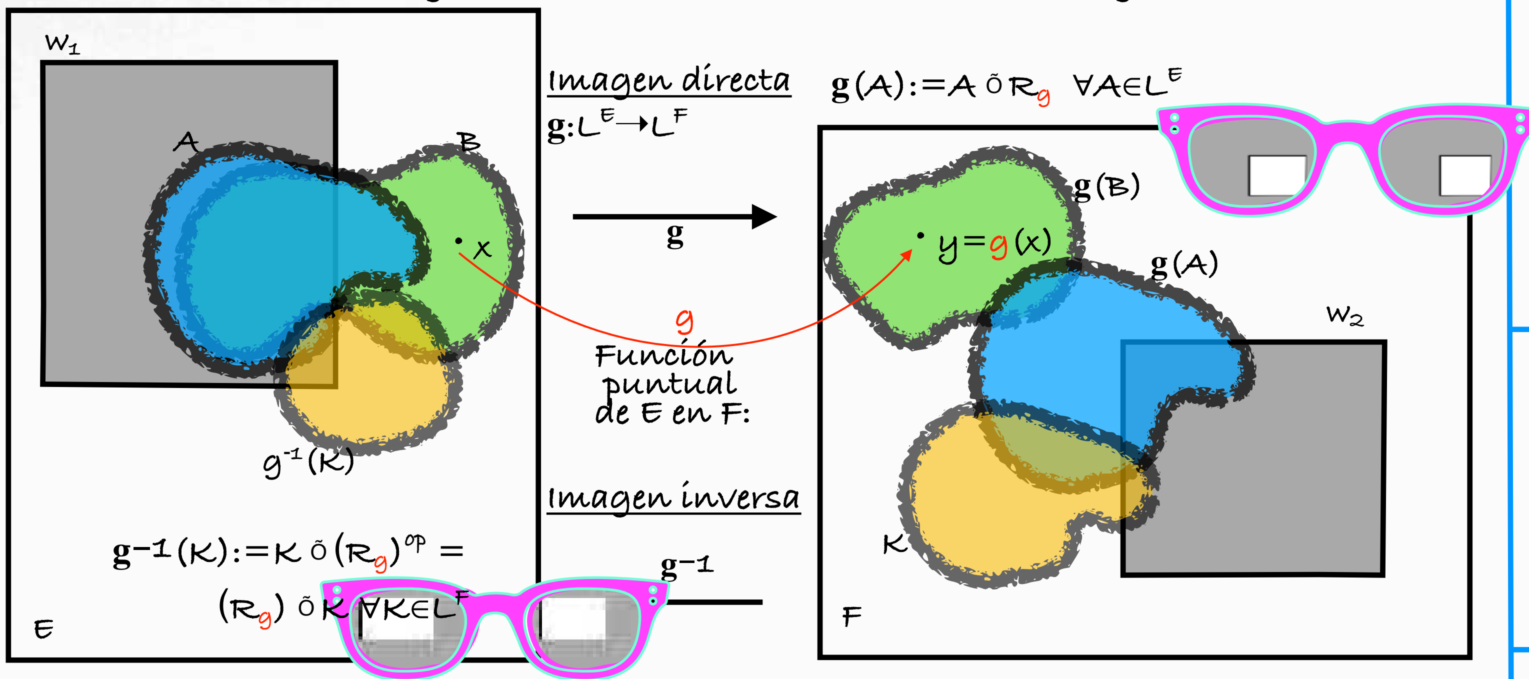
Introducción de perspectivas $\underline{\text{NÍTIDAS}}$ W_1 y W_2;



Retículos distributivos

$((L^E, \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), ^c)$ $\qquad$ $((L^F, \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), ^c)$

Extensiones $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g^{-1}}$ de $g:E \to F$ a las partes borrosas de E y F (L^E, L^F):



¿?

Propiedades de las extensiones

$\mathbf{g}(\sum_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J}\mathbf{g}(A_j)$, $\mathbf{g}(\prod_{j\in J} A_j) \le \prod_{j\in J}\mathbf{g}(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

$(A\le B) \Rightarrow (\mathbf{g}(A) \le \mathbf{g}(B))$, $\mathbf{g}(\emptyset)=\emptyset$.

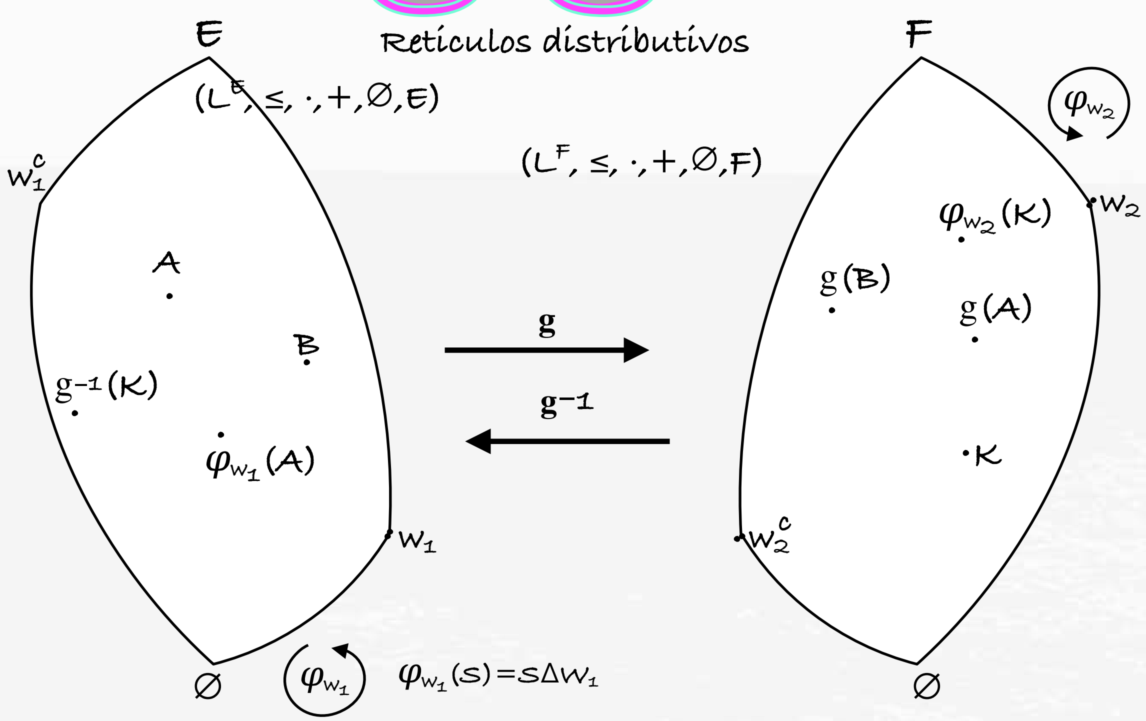
$\mathbf{g}^{-1}(\sum_{j\in J} K_j) = \sum_{j\in J}\mathbf{g}^{-1}(K_j)$, $\mathbf{g}^{-1}(\prod_{j\in J} K_j) = \prod_{j\in J}\mathbf{g}^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \le S) \Rightarrow (\mathbf{g}^{-1}(K) \le \mathbf{g}^{-1}(S))$

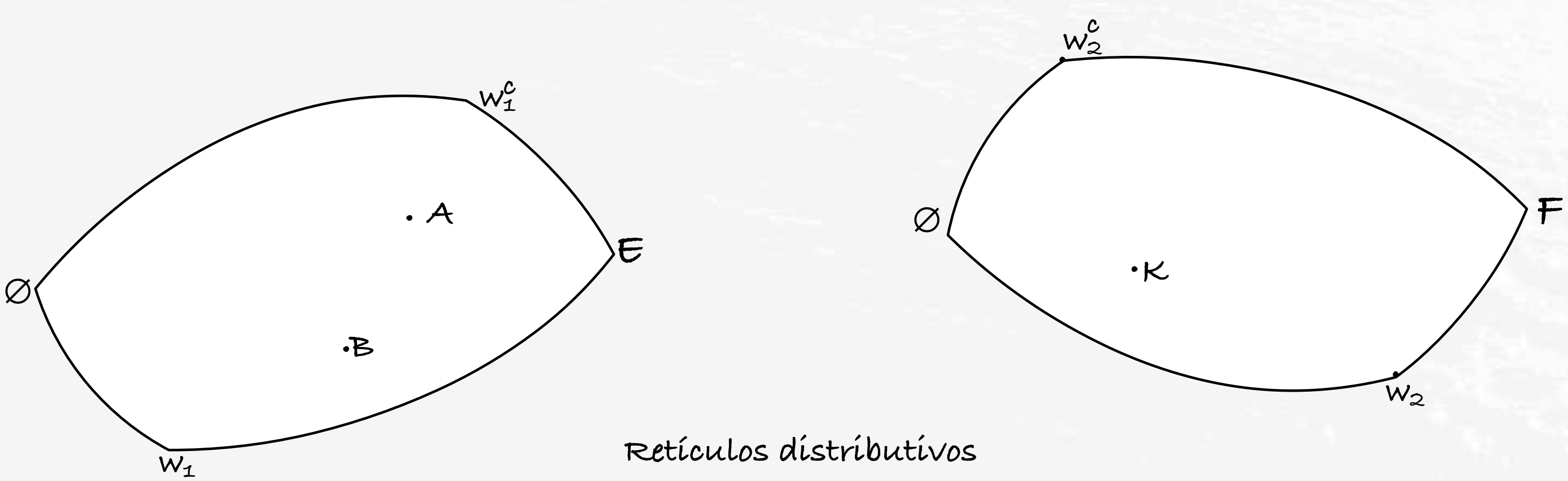
$\mathbf{g}^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $\mathbf{g}^{-1}(F)=E$.

$A \le \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{g}(A))$ $\forall A\in L^E$ $\quad \mathbf{g}(\mathbf{g}^{-1}(K)) \le K$ $\forall K\in L^F$

Retículos distributivos



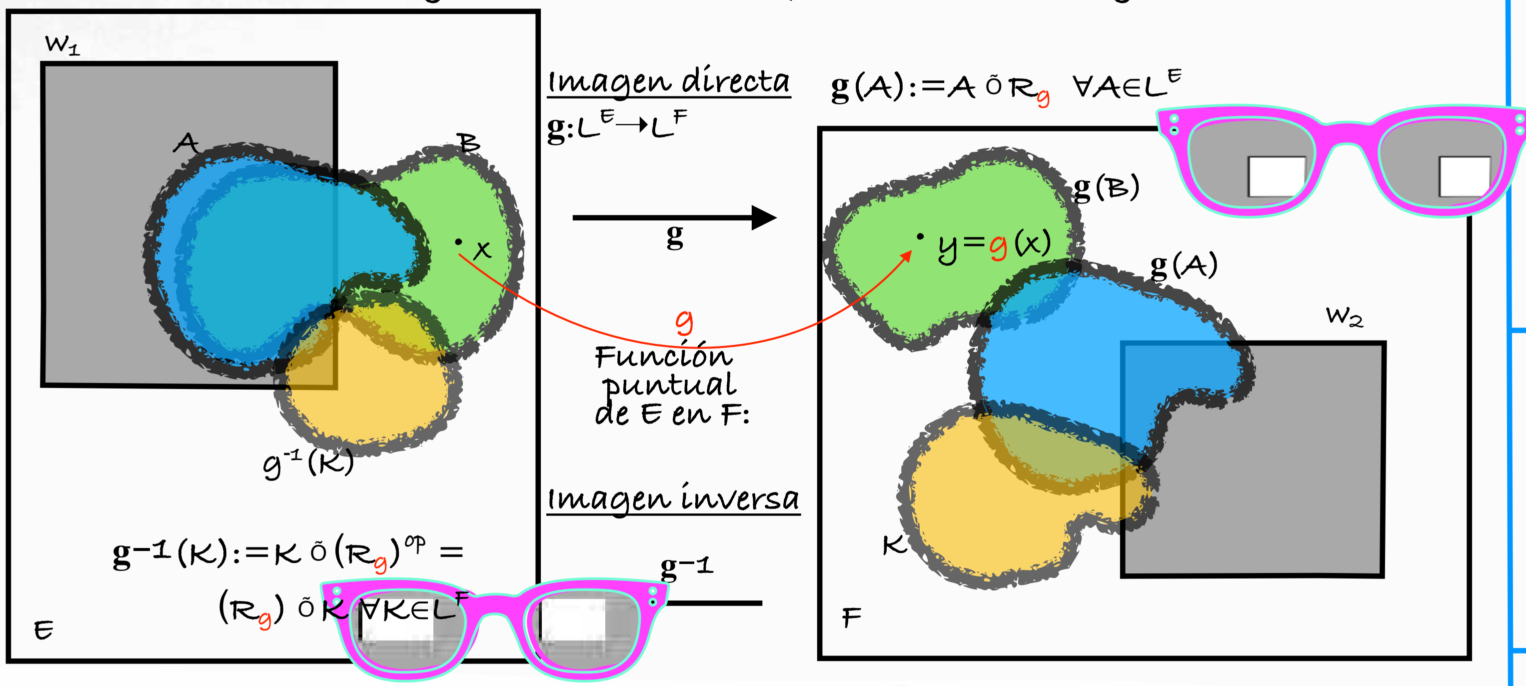
Introducción de perspectivas NÍTIDAS w_1 y w_2;



Retículos distributivos

$((L^E, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), ^c)$ $\quad \hat{W}=(w_2,w_1) \in P(E)\times P(F)$ $\quad ((L^F, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), ^c)$

Extensiones g y g^{-1} de $g:E \to F$ a las partes borrosas de E y F (L^E, L^F):



¿?

Propiedades de las extensiones

$g(\sum_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} g(A_j)$, $g(\prod_{j\in J} A_j) \leq \prod_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

$(A \leq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$, $g(\varnothing) = \varnothing$.

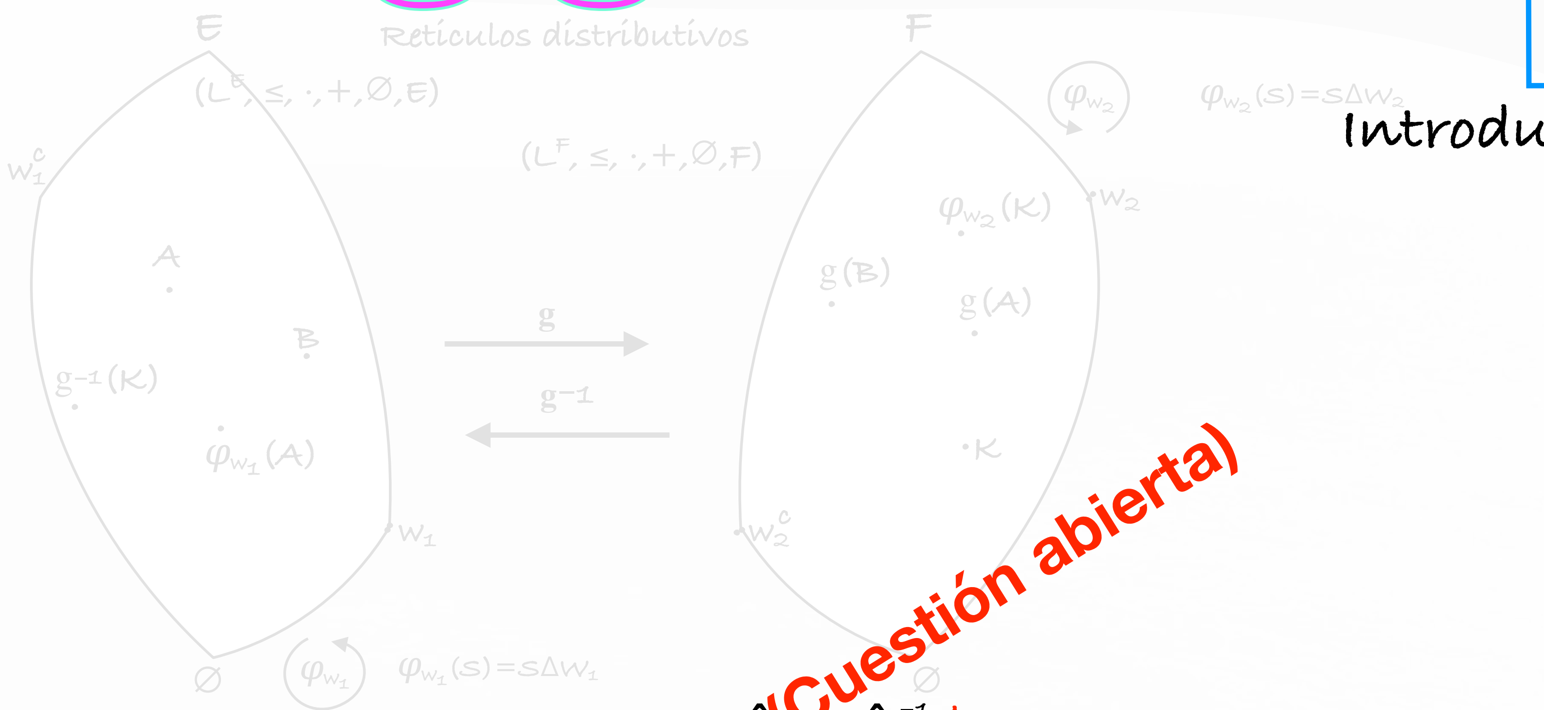
$g^{-1}(\sum_{j\in J} K_j) = \sum_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\prod_{j\in J} K_j) = \prod_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \leq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \leq g^{-1}(S))$

$g^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $g^{-1}(F) = E$.

$A \leq g^{-1}(g(A))$ $\forall A \in L^E$ $\quad g(g^{-1}(K)) \leq K$ $\forall K \in L^F$

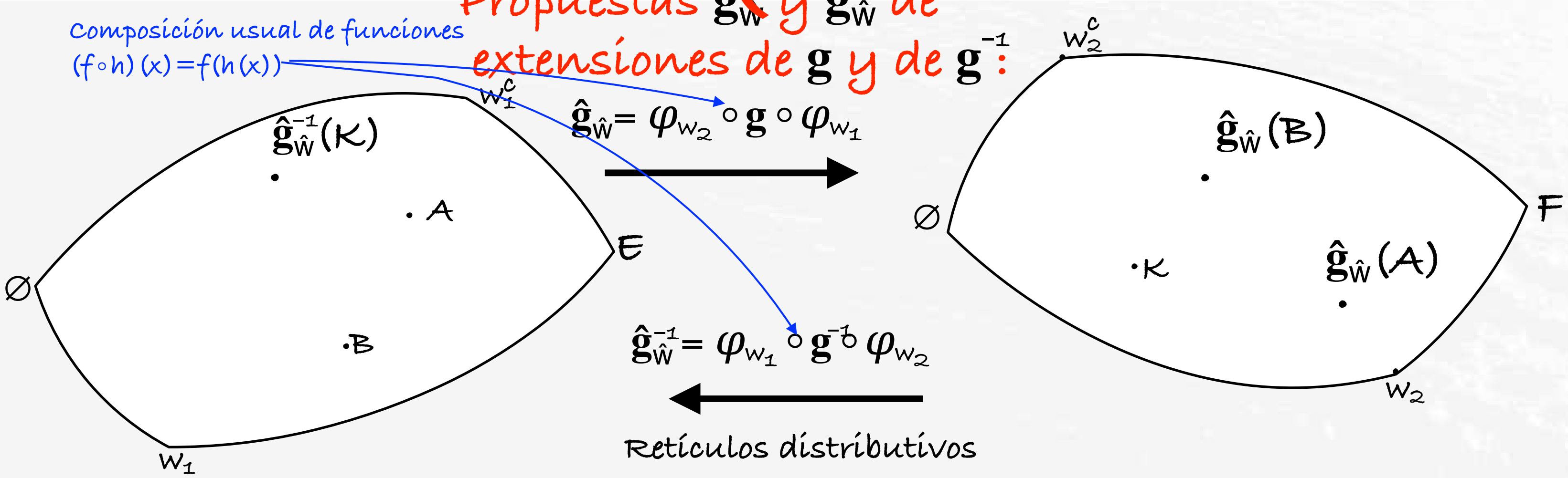
Introducción de perspectivas NÍTIDAS W_1 y W_2:



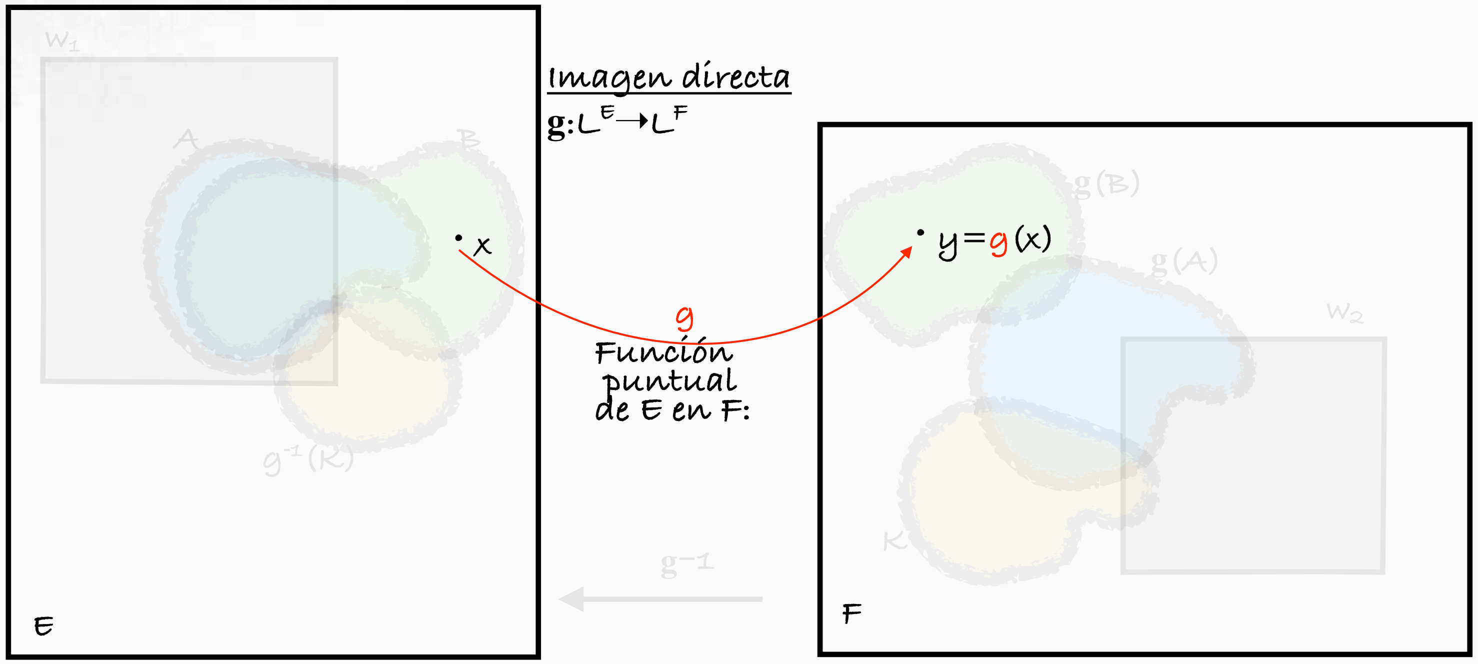
(Cuestión abierta)

Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1}:

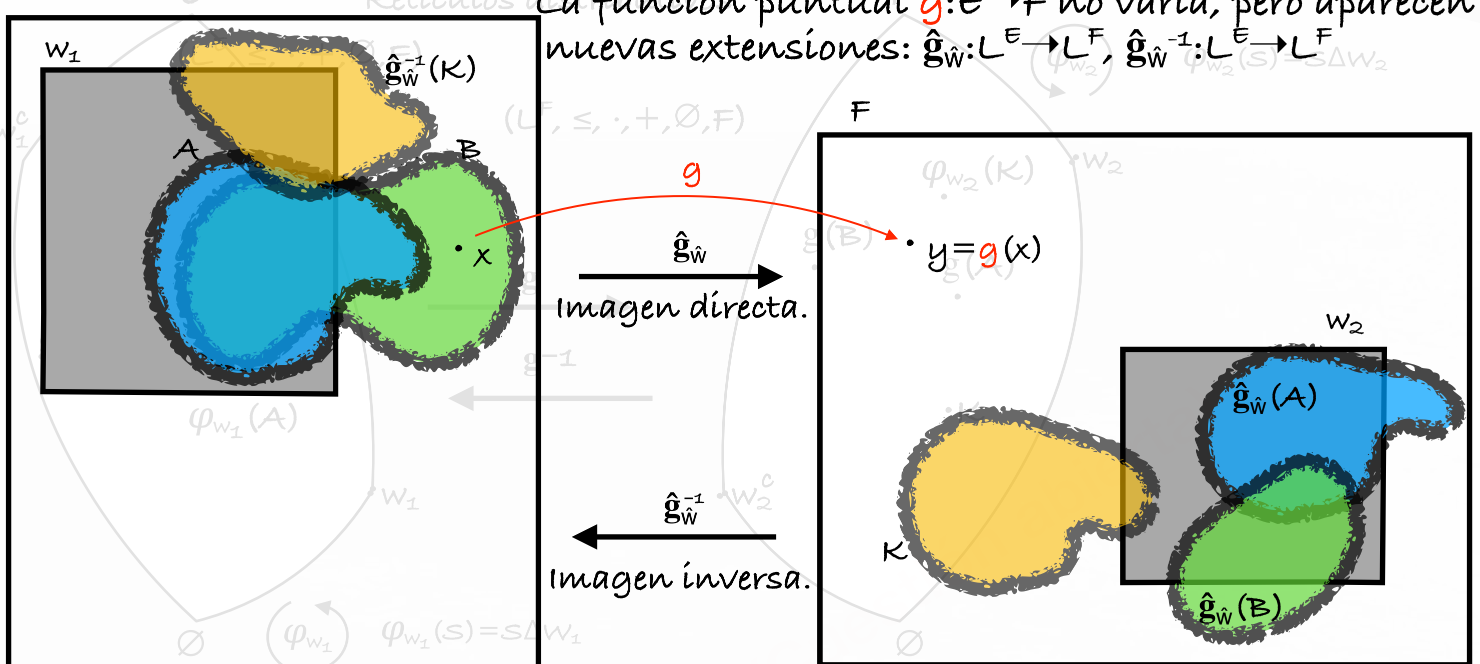
Composición usual de funciones $(f \circ h)(x) = f(h(x))$



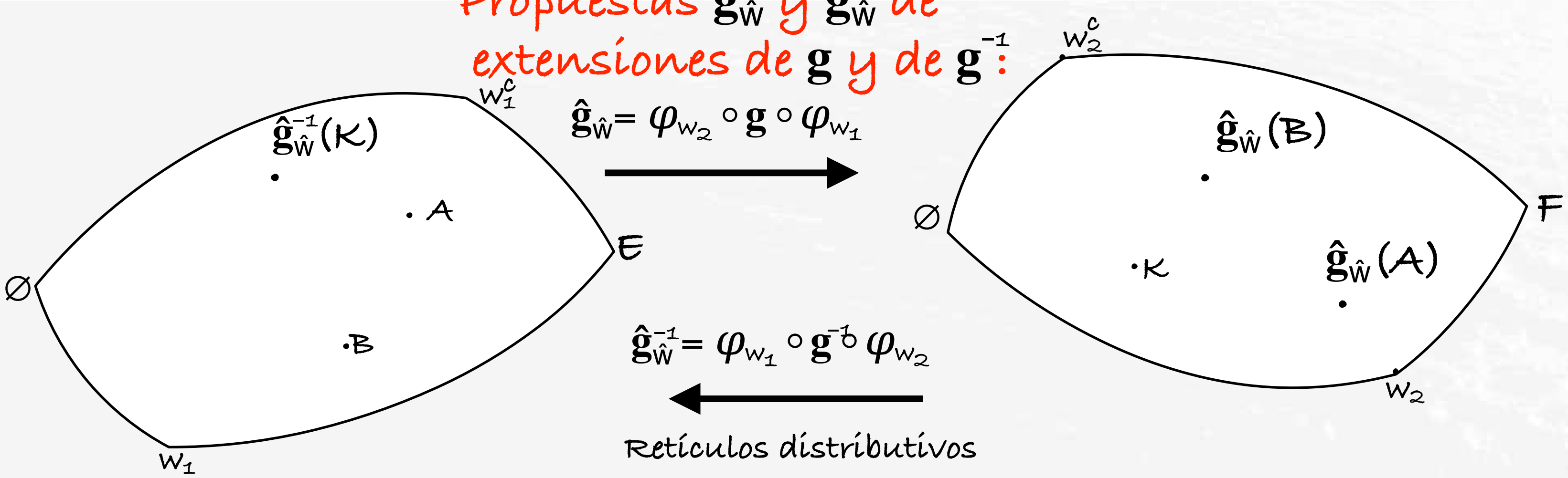
$((L^E, \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), ^c)$ $\quad \hat{W} = (W_2, W_1) \in P(E) \times P(F)$ $\quad ((L^F, \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), ^c)$



La función puntual $g: E \to F$ no varía, pero aparecen nuevas extensiones: $\hat{g}_{\hat{w}}: L^E \to L^F$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}: L^E \to L^F$



Propuestas $\hat{g}_{\hat{w}}$ y $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



$((L^E, \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), {}^c)$ $\quad \hat{W} = (W_2, W_1) \in P(E) \times P(F)$ $\quad ((L^F, \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), {}^c)$

¿?

Propiedades de las extensiones

$g(\sum_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} g(A_j)$, $g(\prod_{j\in J} A_j) \leq \prod_{j\in J} g(A_j)$ $\quad \forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

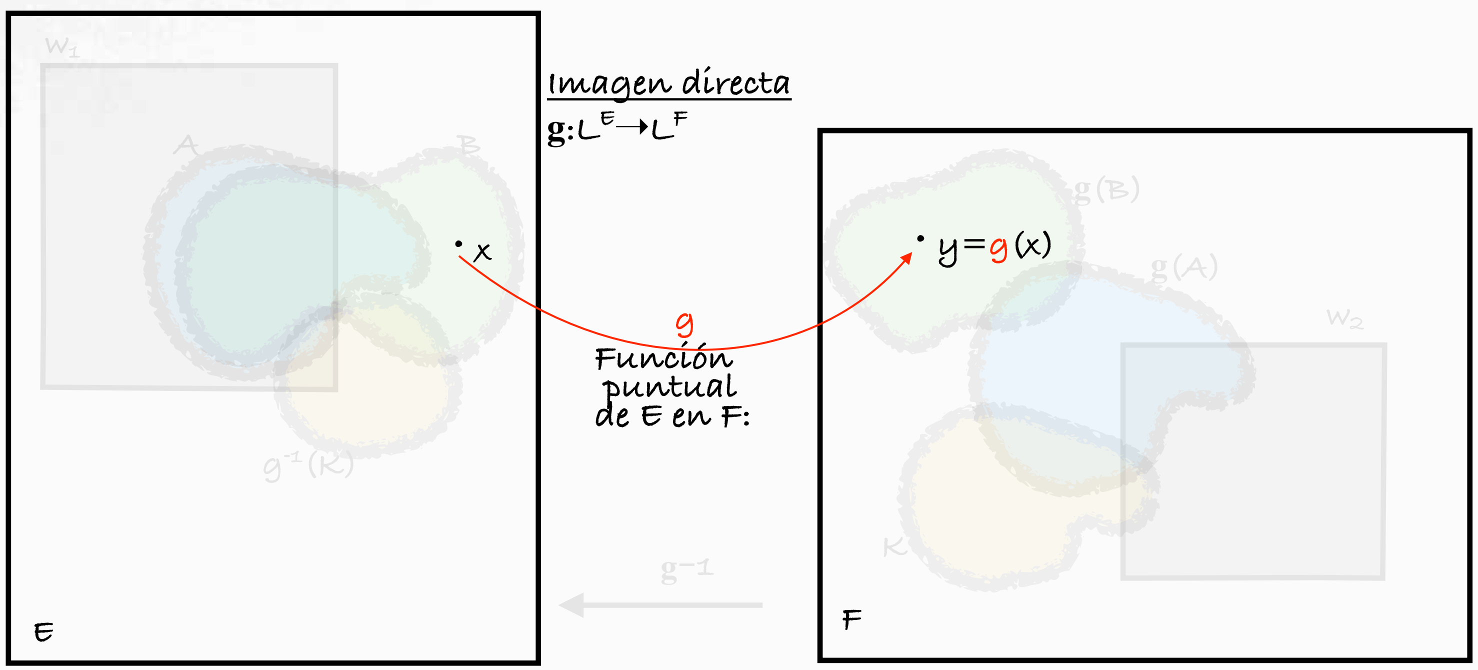
$(A \leq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$, $\quad g(\varnothing) = \varnothing$.

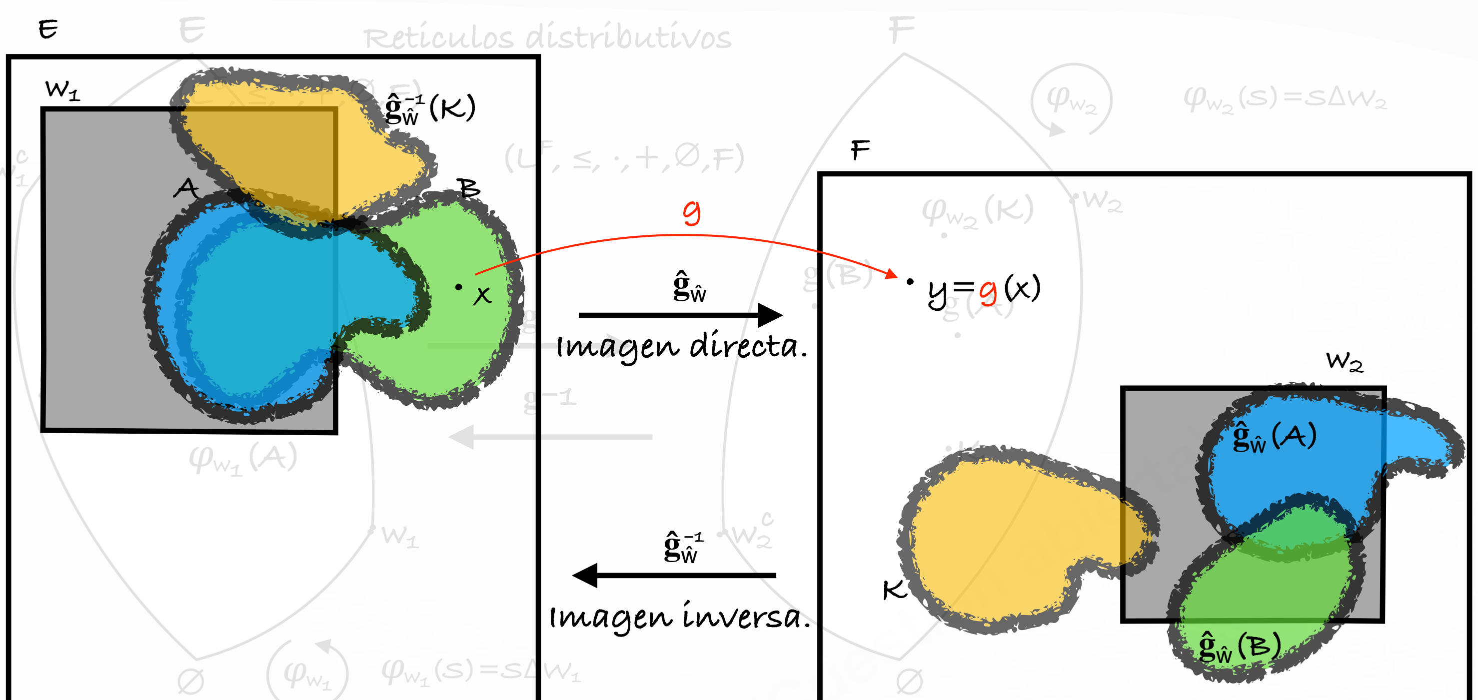
$g^{-1}(\sum_{j\in J} K_j) = \sum_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\prod_{j\in J} K_j) = \prod_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \leq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \leq g^{-1}(S))$

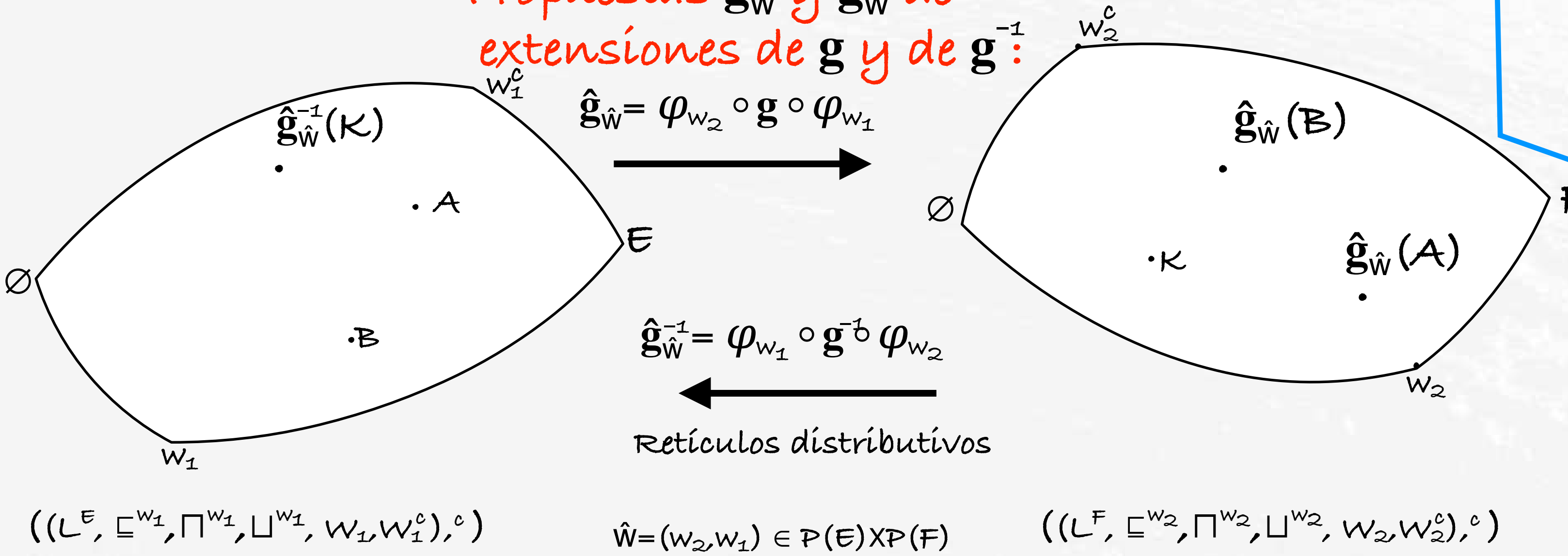
$g^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $g^{-1}(F) = E$.

$A \leq g^{-1}(g(A))$ $\forall A \in L^E$ $\quad g(g^{-1}(K)) \leq K$ $\forall K \in L^F$





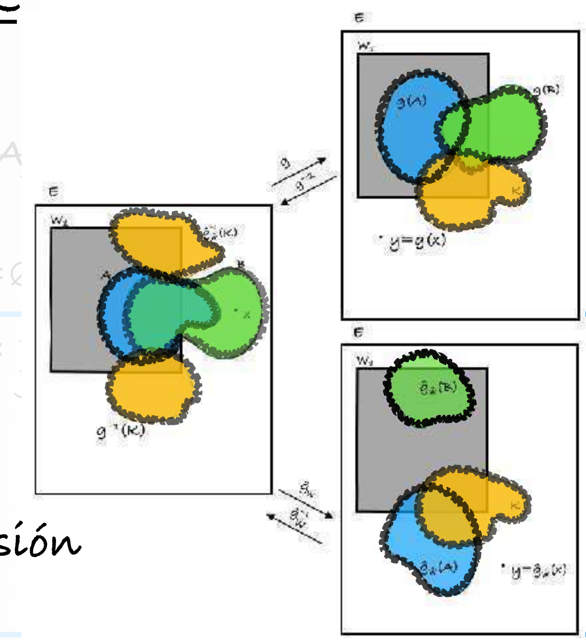
Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}_{\hat{W}}^{-1}$ de extensiones de g y de g^{-1}:



CASO PARTICULAR INTERESANTE:

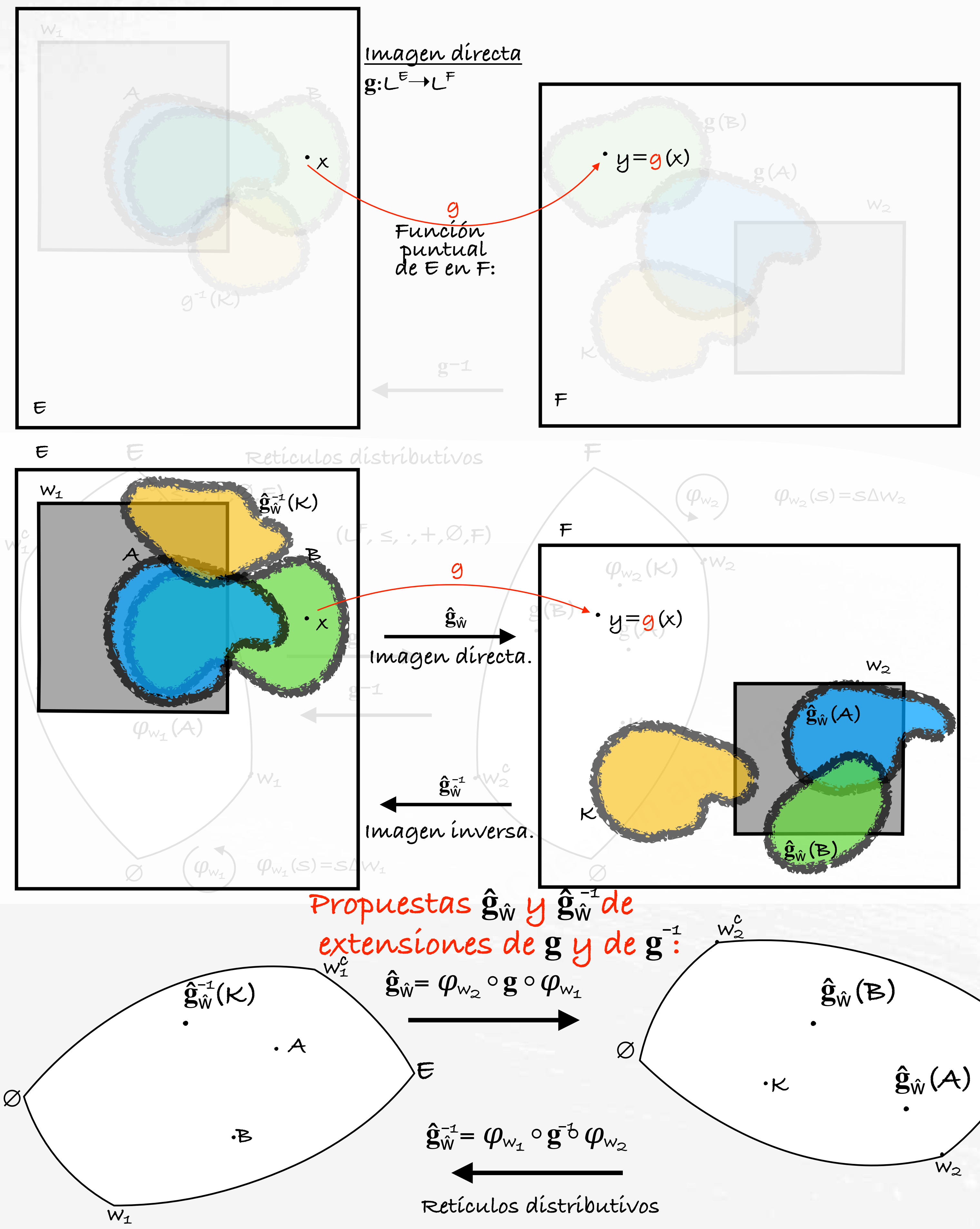
$E=F$, $g:E\rightarrow E$ y

$W_1 = W_2 = W \in P(E)$



En este caso, si "i" es la extensión a L^E de la identidad $i_E:E\rightarrow E$ en E, se verifica:

$\hat{i}_W = (\varphi_W \circ i \circ \varphi_W) = i \quad \forall W \in P(E).$



$((L^E, \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), {}^c)$ $\hat{W}=(W_2,W_1) \in P(E) \times P(F)$ $((L^F, \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), {}^c)$

<u>Propiedades de las extensiones</u>

$g(\sum_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} g(A_j)$, $g(\prod_{j\in J} A_j) \leq \prod_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de L^E,

$(A \leq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$, $g(\varnothing) = \varnothing$.

$g^{-1}(\sum_{j\in J} K_j) = \sum_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\prod_{j\in J} K_j) = \prod_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \leq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \leq g^{-1}(S))$

$g^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $g^{-1}(F) = E$.

$A \leq g^{-1}(g(A))\ \forall A \in L^E$ $g(g^{-1}(K)) \leq K\ \forall K \in L^F$

<u>Propiedades de las w-extensiones</u>

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_1} A_j) \sqsubseteq^{W_2} (\bigsqcap_{j\in J}^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j))$ $\forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(B))$,

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

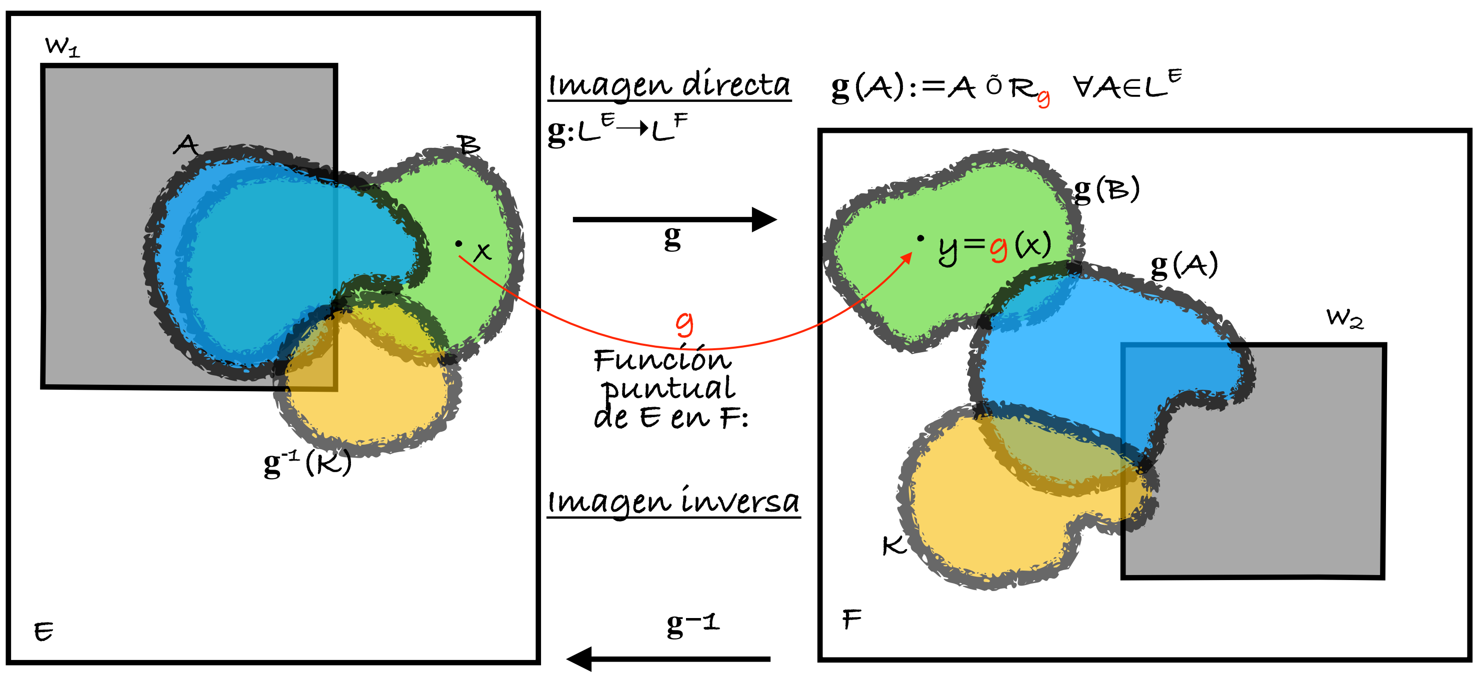
¿?

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{W_2} S) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K) \sqcap^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))$,

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2) = W_1$, $\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(F) = E$.

$A \sqsubseteq^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A \in L^E$ $\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \sqsubseteq^{W_2} K\ \forall K \in L^F$



¿Y si los elementos w_1, w_2, (o uno de ellos), no son nítidos?

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J} A_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j\in J} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A_j)$, $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\bigsqcap^{w_1}_{j\in J} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\bigsqcap^{w_2}_{j\in J} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A_j))$ $\forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(B))$,

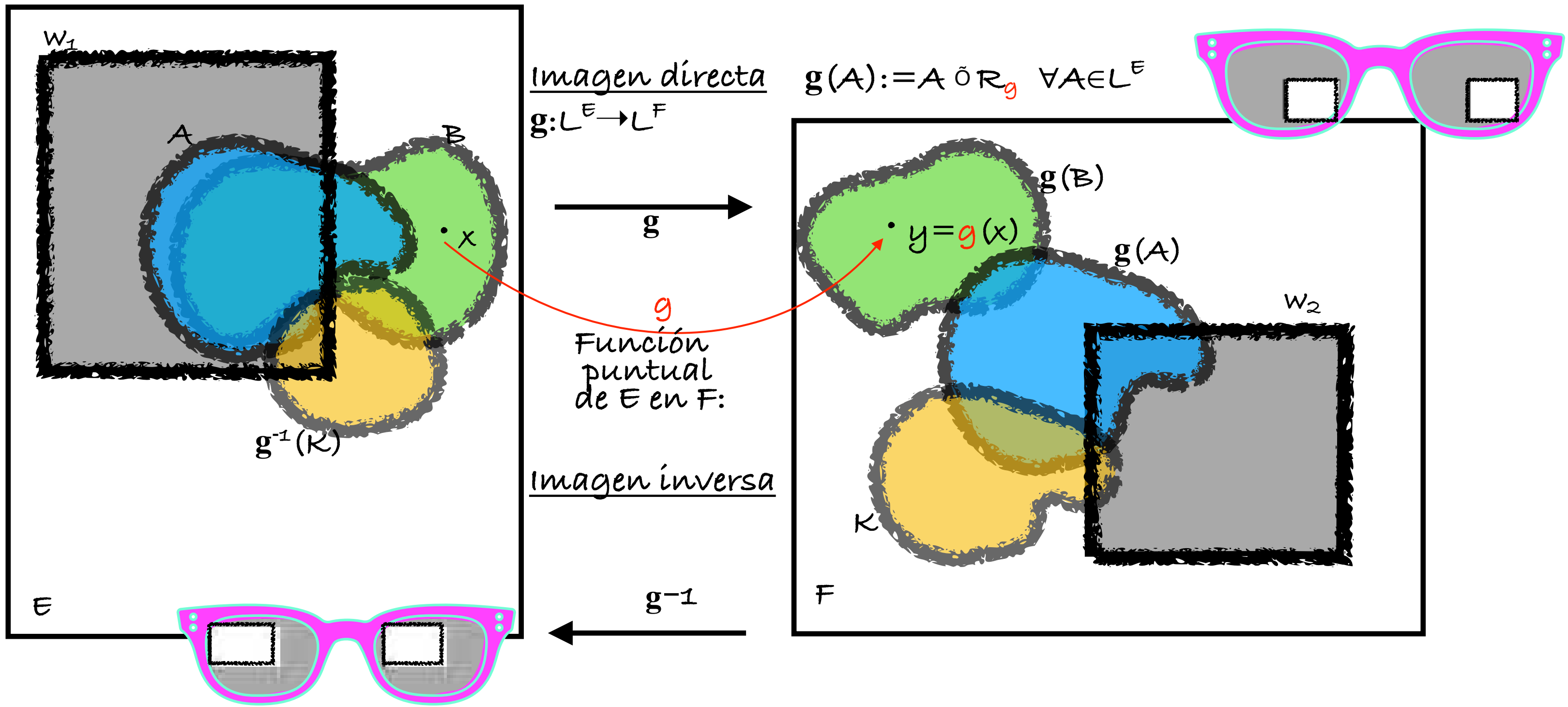
$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\bigsqcup^{w_2}_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^{w_1}_{j\in J} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K_j)$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\bigsqcap^{w_2}_{j\in J} K_j) = \bigsqcap^{w_1}_{j\in J} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K) \sqcap^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(S))$,

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(W_2) = W_1$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(F) = E$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A))\ \forall A \in L^E$ $\quad \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K\ \forall K \in L^F$



¿Y si los elementos w_1, w_2, (o uno de ellos), no son nítidos?

En estos casos,...

¿Propuestas $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}$ y $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}$ de extensiones de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{g}^{-1}$que sean coherentes?

(Cuestión abierta)

Nota. Una posibilidad:
Utilizando las familias de conjuntos de nivel $(A\alpha)_{\alpha\in L}$, $(W\alpha)_{\alpha\in L}$,...,(o las estrictas $(A^*\alpha)_{\alpha\in L}$,$(W^*\alpha)_{\alpha\in L}$,...) asociadas a los subconjuntos borrosos A,W,... ; ¿se podría entonces aplicar resultados de la extensión para subconjuntos ordinarios propuestos en transparencias anteriores de este trabajo?.

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A_j)$, $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_1} A_j) \sqsubseteq^{w_2} (\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A_j))$ $\forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \sqsubseteq^{w_1} B) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A) \sqsubseteq^{w_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(B))$,

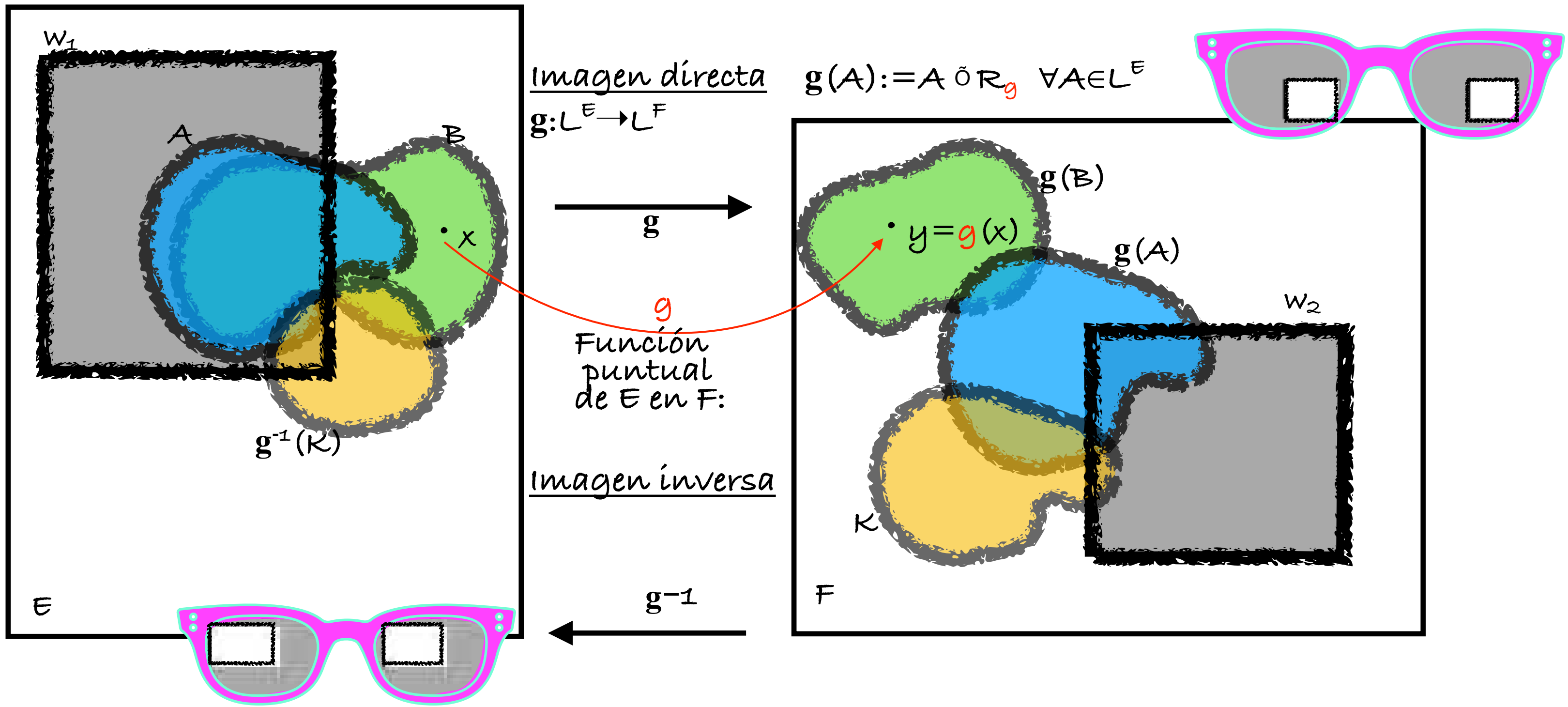
$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$.

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K_j)$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K \sqsubseteq^{w_2} S) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K) \sqcap^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(S))$,

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(W_2) = W_1$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(F) = E$.

$A \sqsubseteq^{w_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(A))$ $\forall A\in L^E$ $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{w}}(\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{w}}(K)) \sqsubseteq^{w_2} K$ $\forall K\in L^F$



¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1} que sean coherentes?

¿Y si los elementos W_1, W_2, (o uno de ellos), no son nítidos?

En estos casos,...

¿Propuestas $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}$ y $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{g}^{-1}$ que sean coherentes?

(Cuestión abierta)

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_1} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{W_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(A_j)$, $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_1} A_j) \sqsubseteq^{W_2} (\bigsqcap_{j\in J}^{W_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(A_j)) \quad \forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(A) \sqsubseteq^{W_2} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(B))$,

$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(W_1) = W_2$.

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_2} K_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{W_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(K_j)$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2} K_j) = \bigsqcap_{j\in J}^{W_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(K_j) \quad \forall (K_j)_{j\in J}$

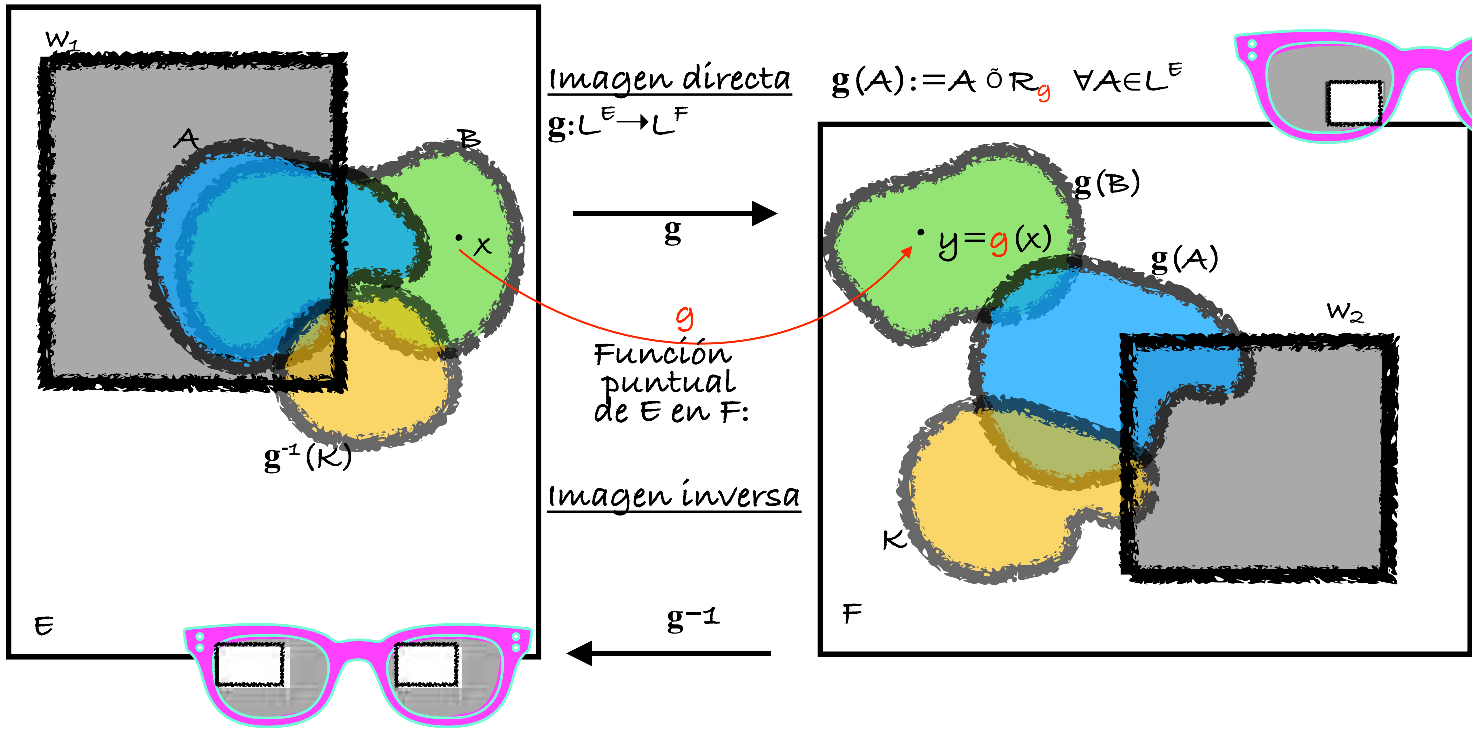
$(K \sqsubseteq^{W_2} S) \Rightarrow (\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(K) \sqcap^{W_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(S))$,

$\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(W_2) = W_1$, $\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(F) = E$.

$A \sqsubseteq^{W_1} \hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(A)) \ \forall A \in L^E \qquad \hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}(\hat{\mathbf{g}}^{-1}_{\hat{W}}(K)) \sqsubseteq^{W_2} K \ \ \forall K \in L^F$

Nota. Una posibilidad:
Utilizando las familias de conjuntos de nivel $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(W_\alpha)_{\alpha\in L}$,..., (o las estrictas $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(W^*_\alpha)_{\alpha\in L}$,...) asociadas a los subconjuntos borrosos A,W,... ; ¿se podría entonces aplicar resultados de la extensión para subconjuntos ordinarios propuestos en transparencias anteriores de este trabajo?.

Por ejemplo, para retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ y/o para funciones $g: E \to F$ (¿Quizá tales que su extensión $\mathbf{g}: L^E \to L^F$ vía Zadeh ($\mathbf{g}(A) = A \circ R_g \ \forall A \in L^E$) verifique, por ejemplo: $(\mathbf{g}(A))_\alpha = (g(A_\alpha)) \ \forall \alpha \in L$? (siendo $g(A_\alpha)$ la extensión ordinaria de A_α: $g(A_\alpha) = \{g(x) / x \in A_\alpha\}$).



¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1} que sean coherentes?

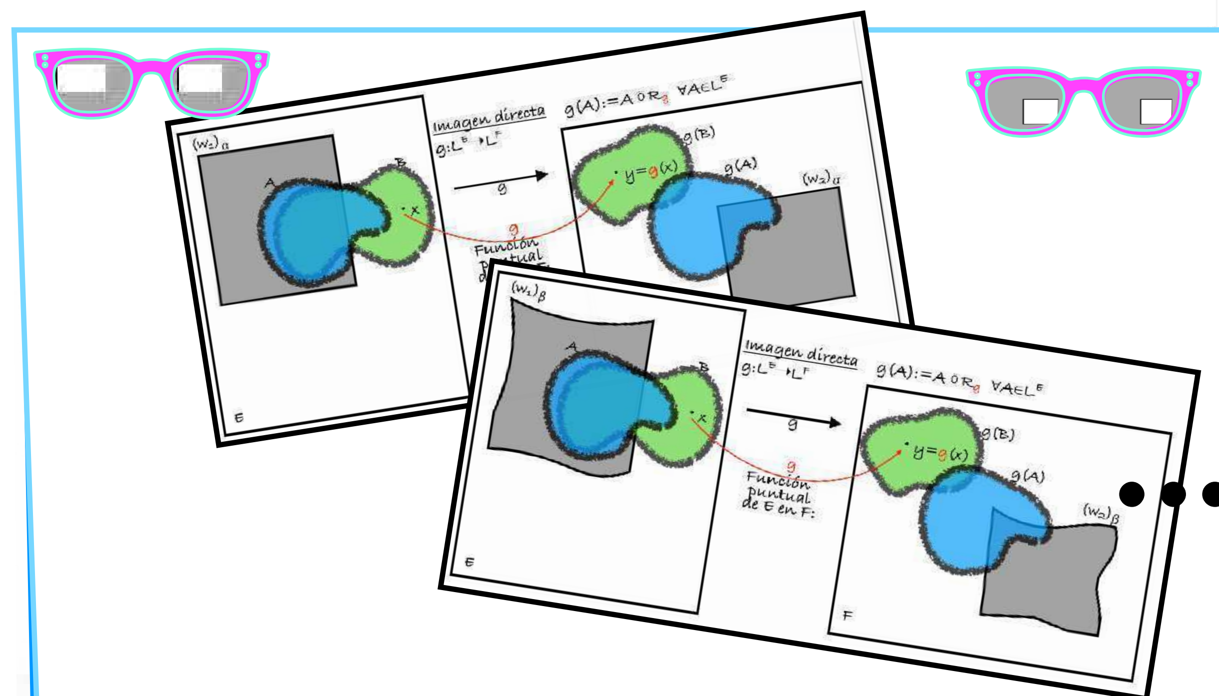
Sugerencias: 1. En esas condiciones, en el caso más general de "perspectivas": $\hat{W} = (w_1, w_2) \in L^E X L^F$, se podría buscar expresiones para extensiones $\hat{g}_{\hat{W}}: (L^E, \sqsubseteq^{W_1}) \to (L^F, \sqsubseteq^{W_2})$ utilizando por ejemplo familias de otras extensiones, (ya analizadas en transparencias anteriores), como $(\hat{g}_{\hat{W}_\alpha}(A))_{\alpha \in L}$, donde $\hat{W}_\alpha = ((w_1)_\alpha, (w_2)_\alpha) \in P(E) X P(F))$ y $A \in L^E$:

¿Y si los elementos w_1, w_2, (o uno de ellos), no son nítidos?

En estos casos,...

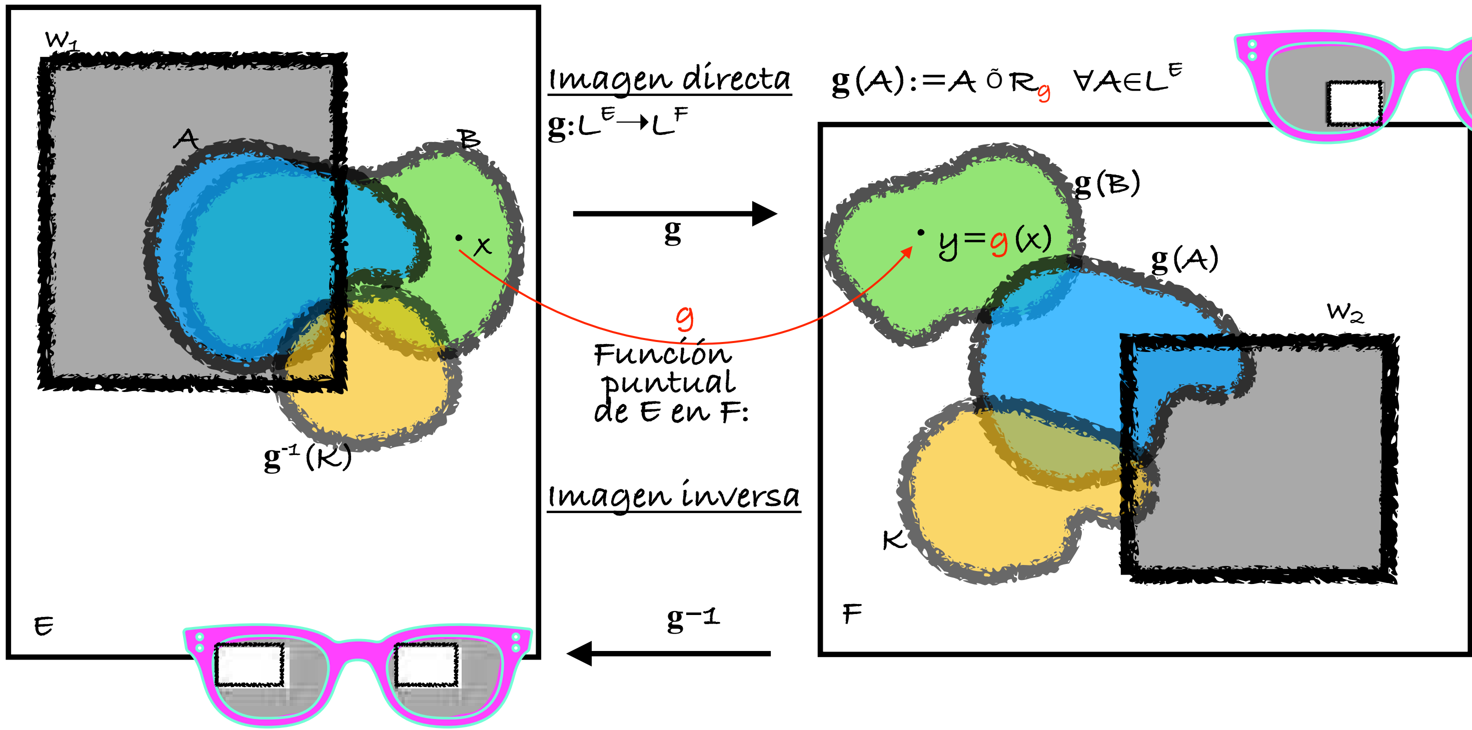
¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1} que sean coherentes?

(Cuestión abierta)



Nota. Una posibilidad:
Utilizando las familias de conjuntos de nivel $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(W_\alpha)_{\alpha \in L}, \ldots$, (o las estrictas $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}, (W^*_\alpha)_{\alpha \in L}, \ldots$) asociadas a los subconjuntos borrosos $A, W, \ldots$; ¿se podría entonces aplicar resultados de la extensión para subconjuntos ordinarios propuestos en transparencias anteriores de este trabajo?.

Por ejemplo, para retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ y/o para funciones $g: E \to F$ (¿Quizá tales que su extensión $g: L^E \to L^F$ vía Zadeh ($g(A) = A \circ R_g \ \forall A \in L^E$) verifique, por ejemplo: $(g(A))_\alpha = (g(A_\alpha)) \ \forall \alpha \in L$? (siendo $g(A_\alpha)$ la extensión ordinaria de A_α: $g(A_\alpha) = \{g(x) / x \in A_\alpha\}$).



¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1} que sean coherentes?

Sugerencias: 1. En esas condiciones, en el caso más general de "perspectivas": $\hat{W} = (w_1, w_2) \in L^E X L^F$, se podría buscar expresiones para extensiones $\hat{g}_{\hat{W}}: (L^E, \sqsubseteq^{W_1}) \to (L^F, \sqsubseteq^{W_2})$ utilizando por ejemplo familias de otras extensiones, (ya analizadas en transparencias anteriores), como $(\hat{g}_{\hat{W}_\alpha}(A))_{\alpha \in L}$, donde $\hat{W}_\alpha = ((w_1)_\alpha, (w_2)_\alpha) \in P(E) X P(F))$ y $A \in L^E$:

2. U otras en las que sólo aparecen subconjuntos ordinarios... etc

¿Y si los elementos w_1, w_2, (o uno de ellos), no son nítidos?

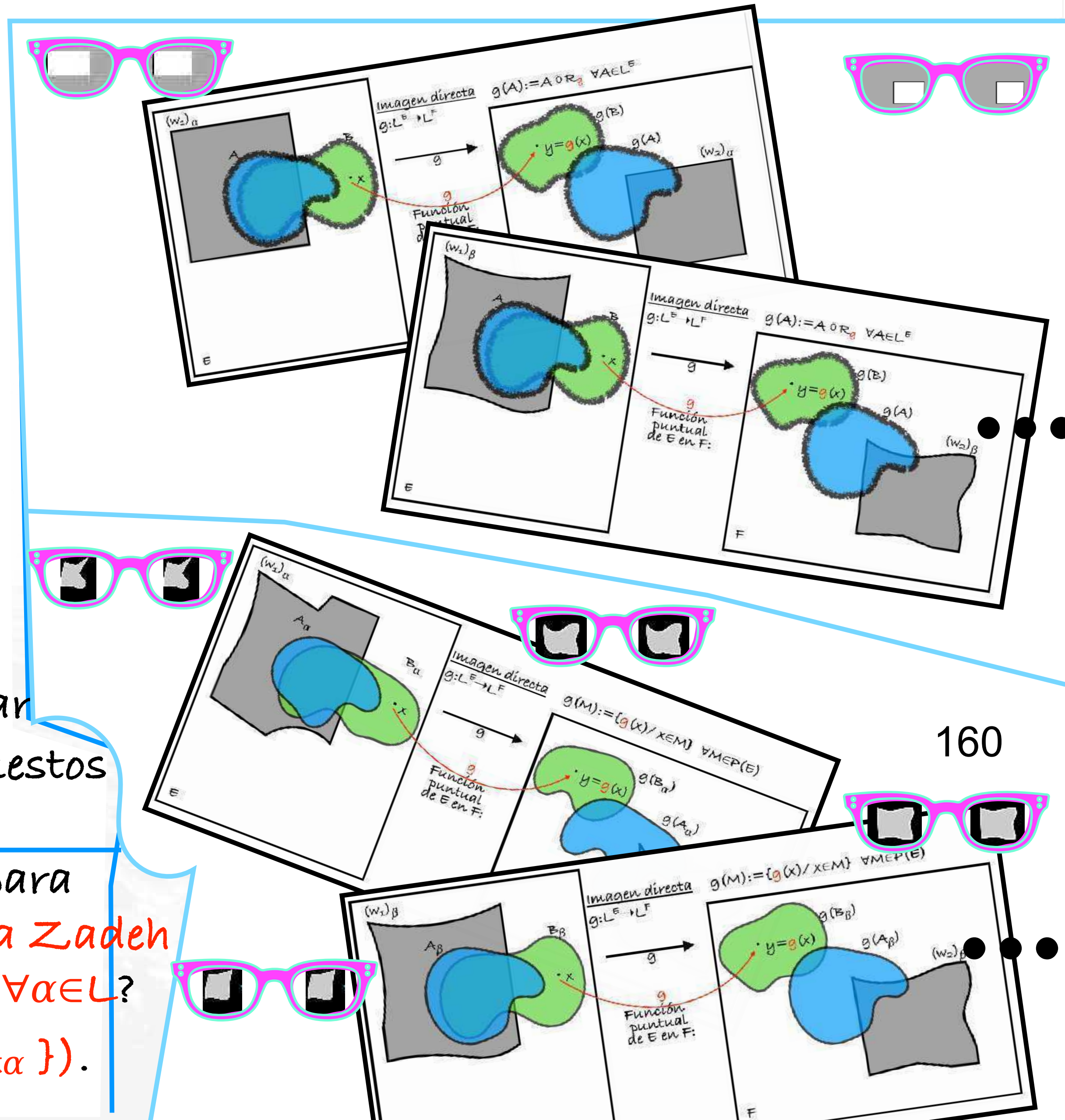
En estos casos,...

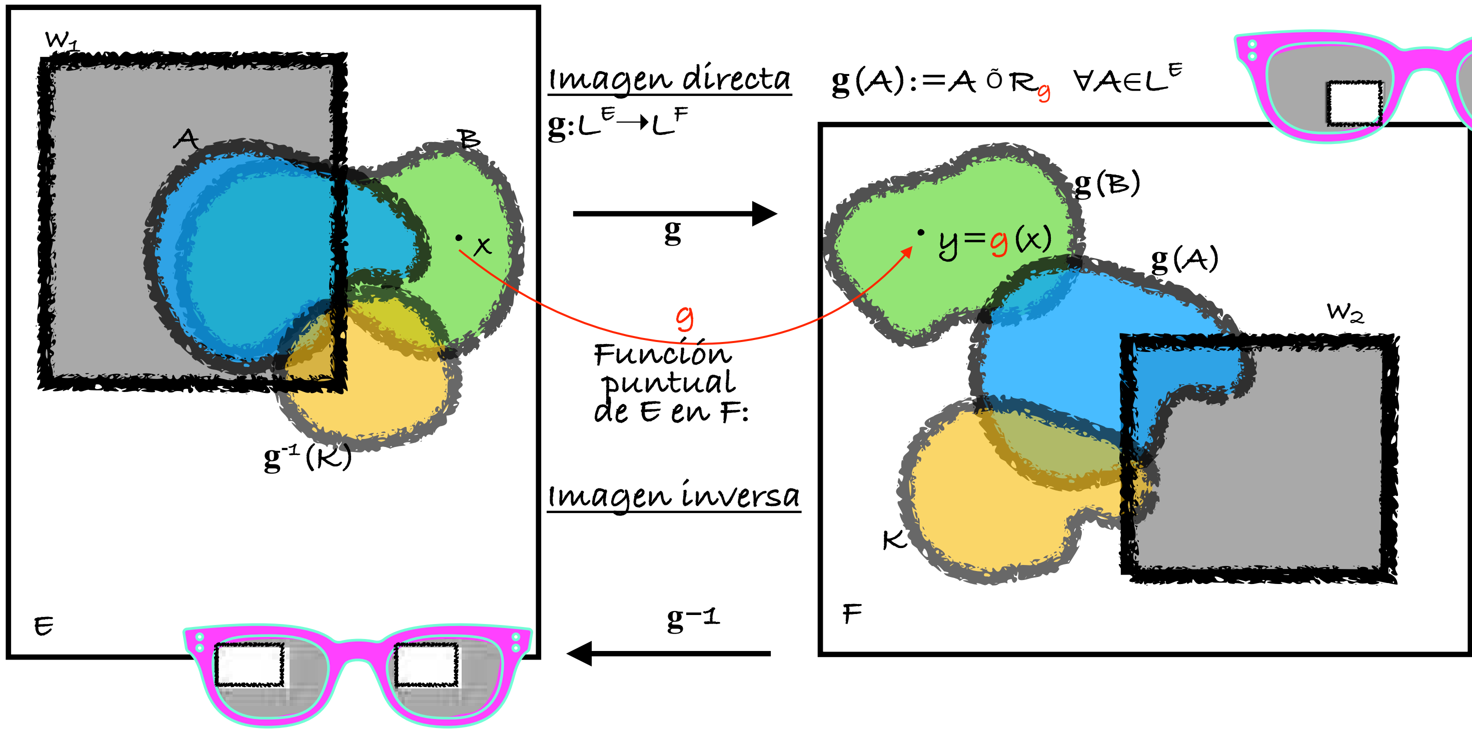
¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de **g** y de g^{-1} que sean coherentes?

(Cuestión abierta)

Nota. Una posibilidad:
Utilizando las familias de conjuntos de nivel $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(W_\alpha)_{\alpha \in L}$,..., (o las estrictas $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(W^*_\alpha)_{\alpha \in L}$,...) asociadas a los subconjuntos borrosos A, W,... ; ¿se podría entonces aplicar resultados de la extensión para subconjuntos ordinarios propuestos en transparencias anteriores de este trabajo?.

Por ejemplo, para retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ y/o para funciones $g: E \to F$ (¿Quizá tales que su extensión $\mathbf{g}: L^E \to L^F$ vía Zadeh ($\mathbf{g}(A) = A \circ R_g \ \forall A \in L^E$) verifique, por ejemplo: $(\mathbf{g}(A))_\alpha = (g(A_\alpha)) \ \forall \alpha \in L$? (siendo $g(A_\alpha)$ la extensión ordinaria de A_α: $g(A_\alpha) = \{g(x) / x \in A_\alpha\}$).





¿Propuestas $\hat{g}_{\hat{W}}$ y $\hat{g}^{-1}_{\hat{W}}$ de extensiones de g y de g^{-1} que sean coherentes?

Sugerencias: 1. En esas condiciones, en el caso más general de "perspectivas": $\hat{W} = (w_1, w_2) \in L^E X L^F$, se podría buscar expresiones para extensiones $\hat{g}_{\hat{W}}: (L^E, \sqsubseteq^{W_1}) \to (L^F, \sqsubseteq^{W_2})$ utilizando por ejemplo familias de otras extensiones, (ya analizadas en transparencias anteriores), como $(\hat{g}_{\hat{W}_\alpha}(A))_{\alpha \in L}$, donde $\hat{W}_\alpha = ((w_1)_\alpha, (w_2)_\alpha) \in P(E) X P(F))$ y $A \in L^E$:

2. U otras en las que sólo aparecen subconjuntos ordinarios... etc

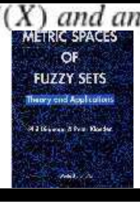
3. Hausdorff spaces and Zadeh's extension *D. Jardón et al. / Fuzzy Sets and Systems 379 (2020) 115–124*

The following proposition plays an important role in this paper. It is known for compact (locally compact) metric spaces (see [4,7]). Our result is a significant generalization of these previous outcomes.

Proposition 3.1. *Let X be a Hausdorff space. If $f : X \to X$ is a continuous function, then $[\widehat{f}(u)]_\alpha = f(u_\alpha)$ for each $u \in \mathcal{F}(X)$ and $\alpha \in I$.*

Lemma 5. *Let X be a Hausdorff space. If $f : X \to X$ is a continuous function, then for any $u \in \mathfrak{F}(X)$ and any $\alpha \in I$, one has*

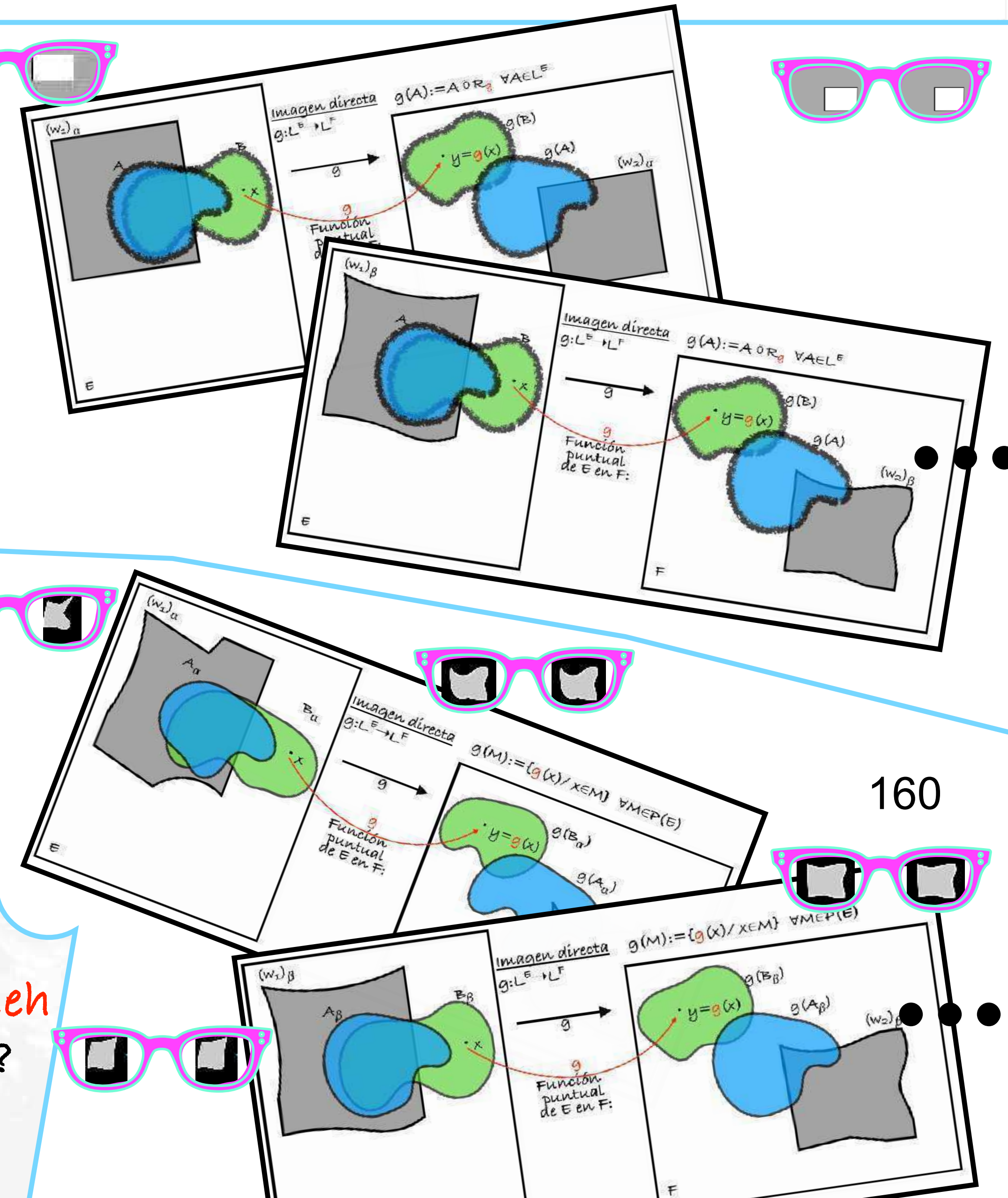
(1) $[\widetilde{f}(u)]_\alpha = f([u]_\alpha)$;
(2) $[tu]_\alpha = [u]_{t^{-1}(\alpha)}$ *for* $t \in \mathrm{Hom}(I)$.



(Cuestión abierta)

Nota. Una posibilidad:
Utilizando las familias de conjuntos de nivel $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(W_\alpha)_{\alpha \in L}, \ldots$, (o las estrictas $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}, (W^*_\alpha)_{\alpha \in L}, \ldots$) asociadas a los subconjuntos borrosos A, W, ... ; ¿se podría entonces aplicar resultados de la extensión para subconjuntos ordinarios propuestos en transparencias anteriores de este trabajo?.

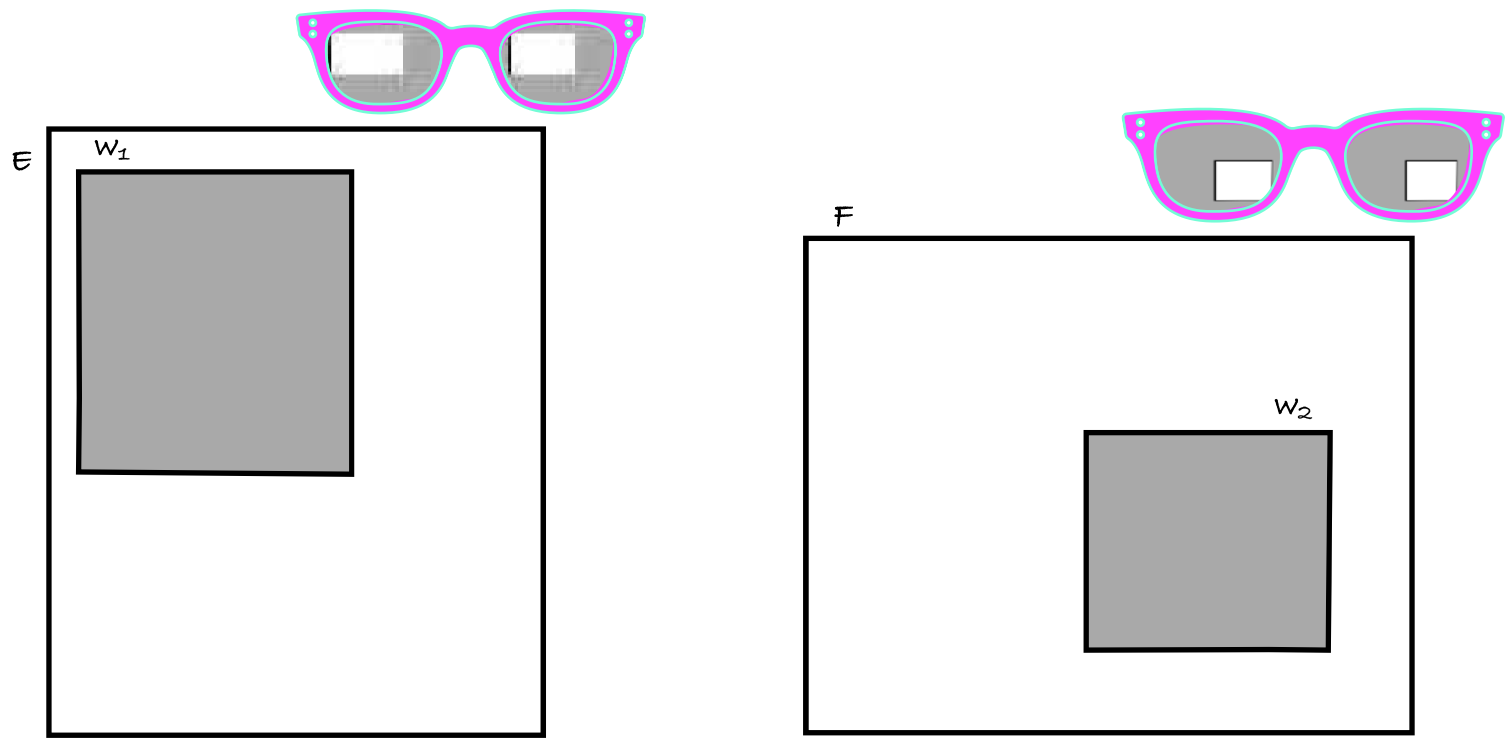
Por ejemplo, para retículos distributivos y acotados $(L, \leq)$ y/o para funciones $g: E \to F$ (¿Quizá tales que su extensión $\mathbf{g}: L^E \to L^F$ vía Zadeh ($\mathbf{g}(A) = A \circ R_g \ \forall A \in L^E$) verifique, por ejemplo: $(\mathbf{g}(A))_\alpha = (g(A_\alpha)) \ \forall \alpha \in L$? (siendo $g(A_\alpha)$ la extensión ordinaria de A_α: $g(A_\alpha) = \{g(x) / x \in A_\alpha\}$).



Extensiones $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^{w_1})\rightarrow(L^F,\sqsubseteq^{w_2})$ asociadas a "perspectivas" $\hat{W}=(w1,w2)\in L^E X L^F$ de cualquier función $g:(L^E,\leq)\rightarrow(L^F,\leq)$.

(Cuestión abierta)

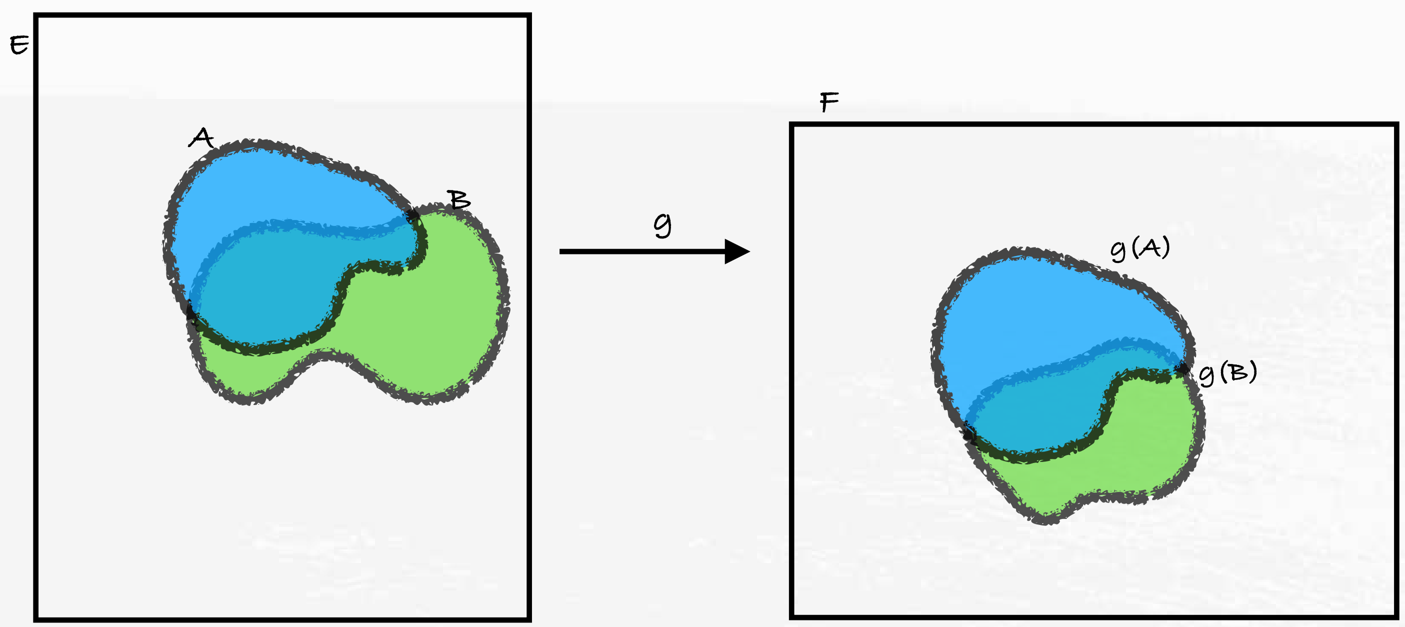
Extensiones $\hat{g}_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^{W_1})\rightarrow(L^F,\sqsubseteq^{W_2})$ asociadas a "perspectivas" $\hat{W}=(w1,w2)\in L^E X L^F$ de cualquier función $g:(L^E,\leq)\rightarrow(L^F,\leq)$.



1. Caso en el que los elementos W_1 y W_2 son nítidos.

$$g:(L^E,\leq)\rightarrow(L^F,\leq)$$

(g cualquier función entre L-borrosos)



$$g:(L^E,\leq)\longrightarrow(L^F,\leq)$$

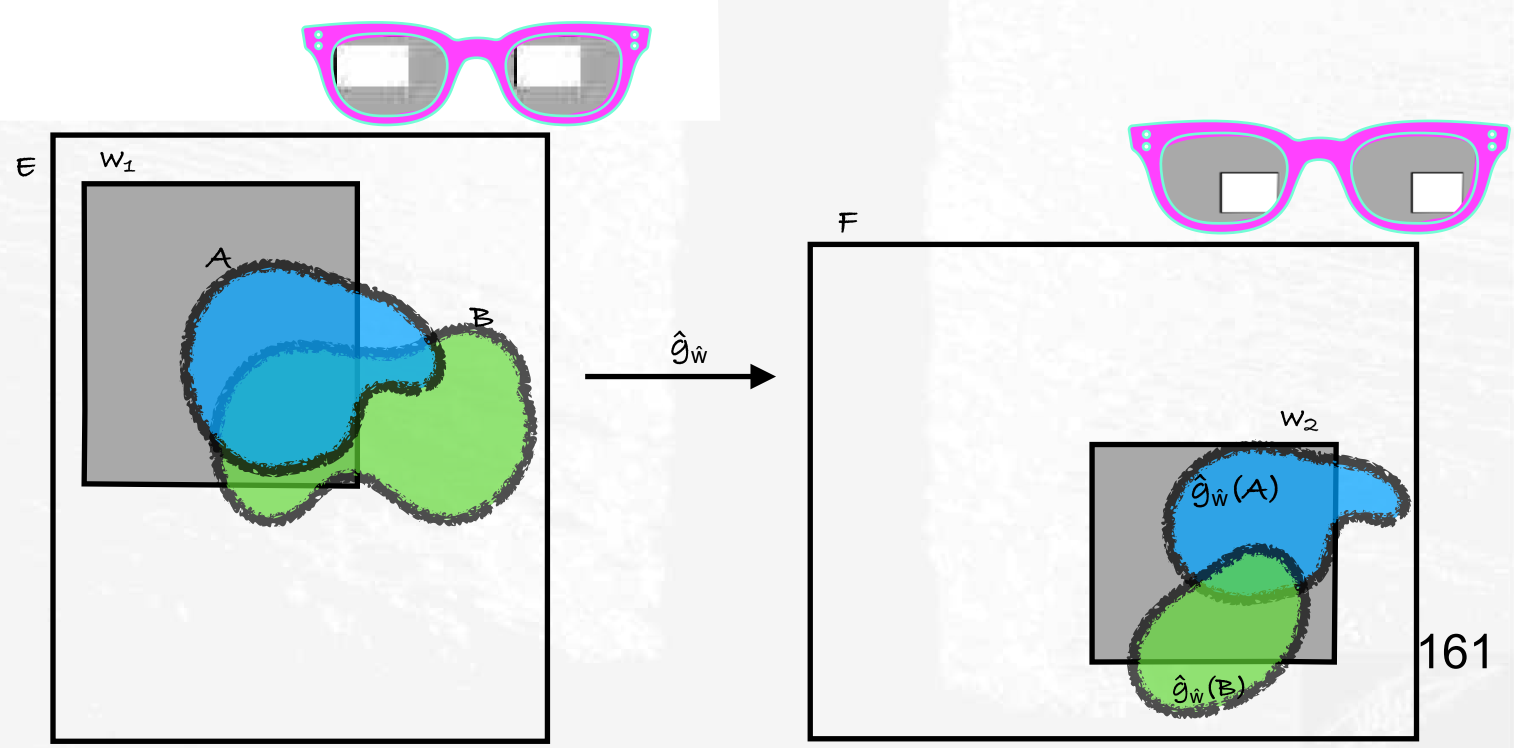
(g cualquier función entre L-borrosos)

Su extensión desde las "perspectivas" w_1 y w_2:

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(L^E,\sqsubseteq^{w_1})\longrightarrow(L^F,\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=(g(A\Delta w_1))\Delta w_2 \quad \forall A\in L^E$$



$$\varphi_{w_i}(A)=A\Delta w_i=A'\cdot w_i+A\cdot w_i^c \quad \forall A\in L^E$$

$$g:(L^E,\le)\longrightarrow(L^F,\le)$$

(g cualquier función entre L-borrosos)

$$\hat{g}_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^{W_1})\longrightarrow(L^F,\sqsubseteq^{W_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{W}}(A)=(g(A\Delta W_1))\Delta W_2 \quad \forall A\in L^E$$

<u>Casos particulares:</u>

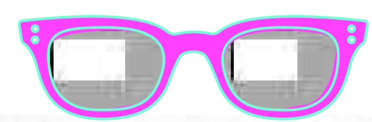
$W_2=\emptyset$

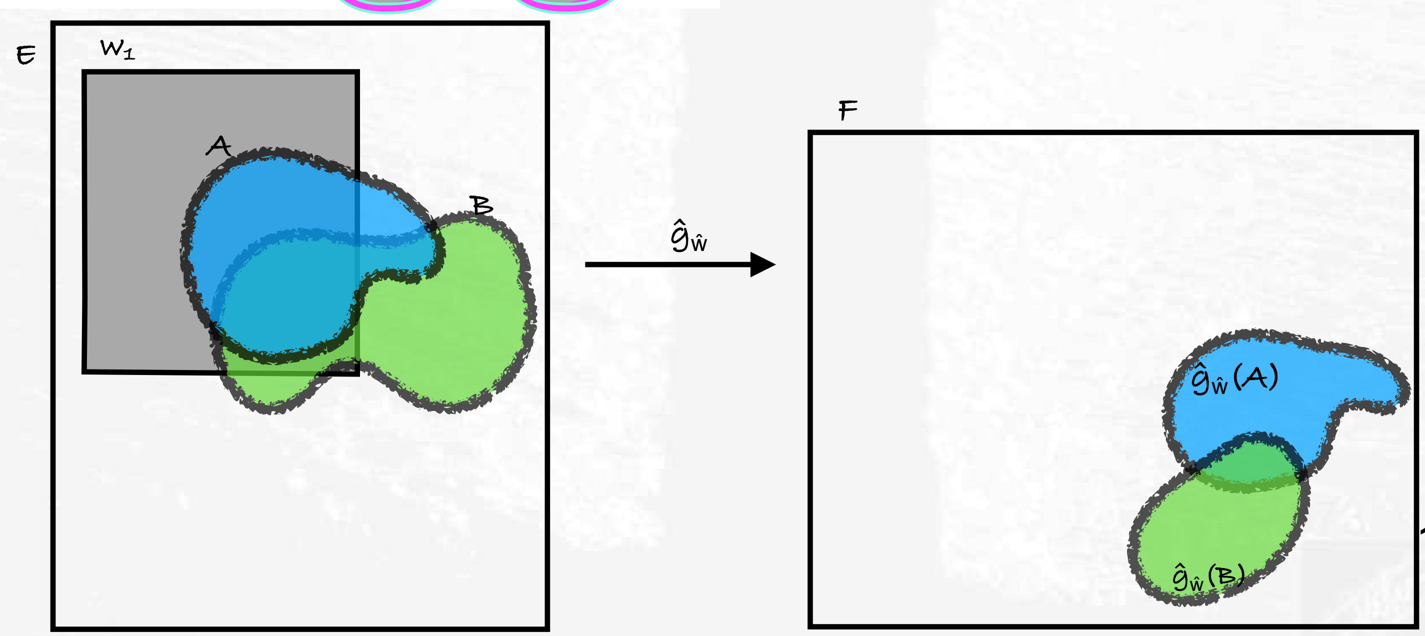
Puesto que $\varphi_{W_2}(K)=\varphi_{\emptyset}(K)=K \quad \forall K\in L^F$,

si i_F es la identidad en L^F, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{W_1}=g\circ\varphi_{W_1}$, es decir

$\hat{g}_{\hat{W}}(A)=g(A\Delta W_1) \ \forall A\in L^E$





$\varphi_{W_i}(A)=A\Delta W_i=A'\cdot W_i+A\cdot W_i^c \quad \forall A\in L^E$

$$\hat{g}_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^{W_1})\longrightarrow(L^F,\sqsubseteq^{W_2})$$

$$\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}$$

$$\hat{g}_{\hat{W}}(A)=(g(A\Delta W_1))\Delta W_2 \quad \forall A\in L^E$$

Casos particulares:

$W_2=\varnothing$

Puesto que $\varphi_{W_2}(K)=\varphi_{\varnothing}(K)=K \quad \forall K\in L^F$,

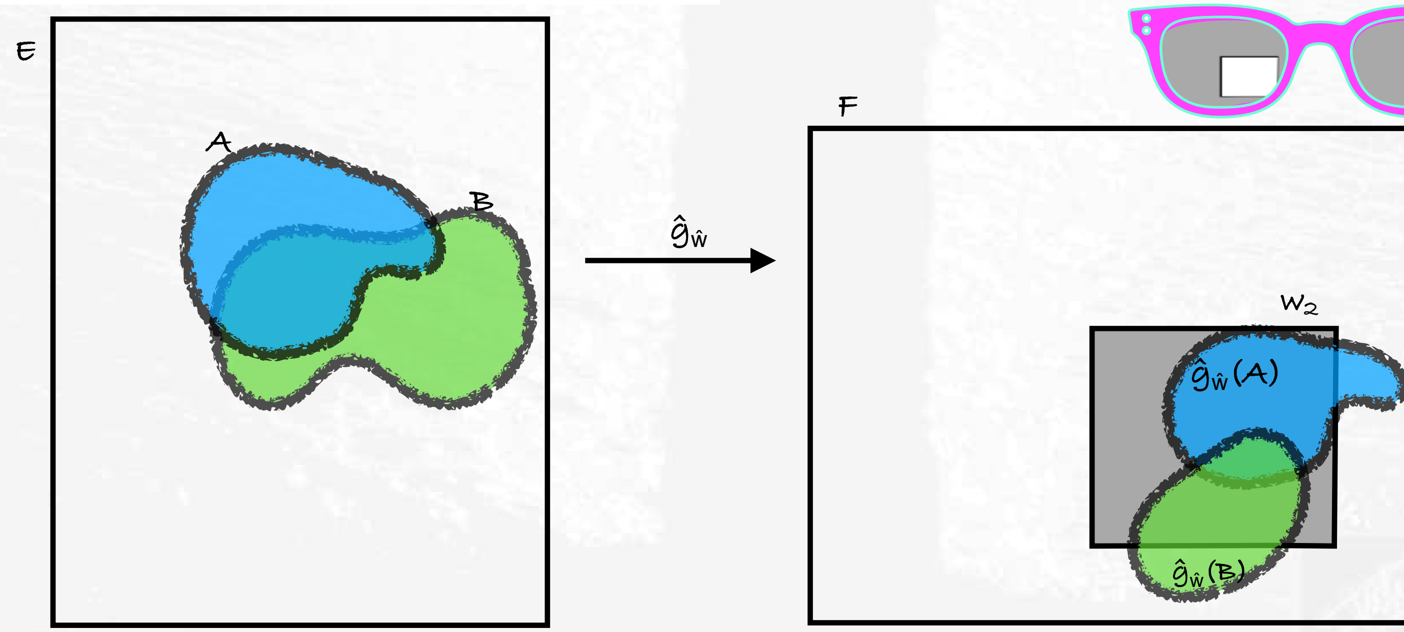
si i_F es la identidad en L^F, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{W_1}=g\circ\varphi_{W_1}$, es decir

$\hat{g}_{\hat{W}}(A)=g(A\Delta W_1) \ \forall A\in L^E$

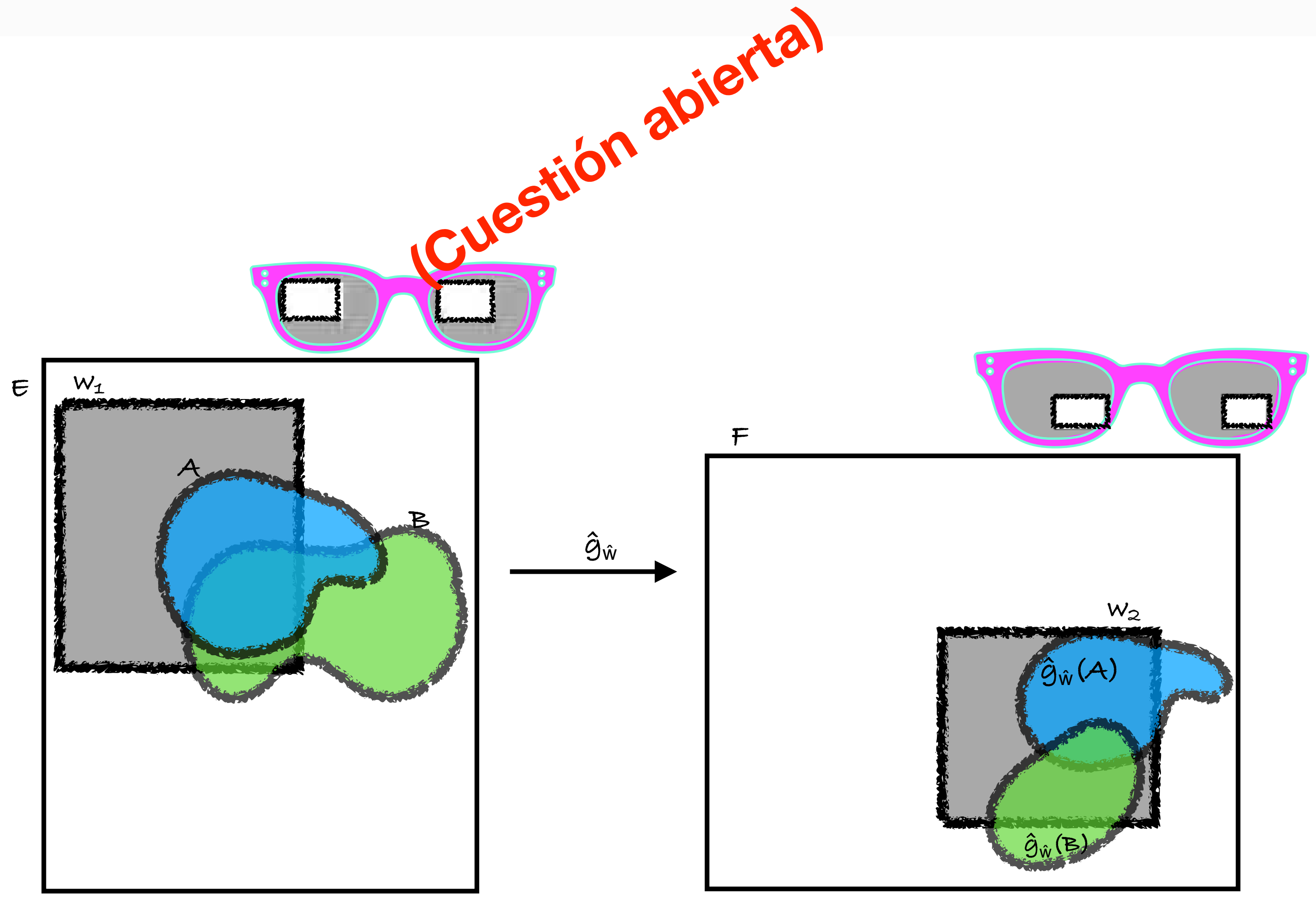
Análogamente, si $W_1=\varnothing$:

$\hat{g}_{\hat{W}}(A)=g(A)\Delta W_2 \ \forall A\in L^E$



2. ¿Y si alguno de los elementos W_1 o W_2 es un borroso propio?

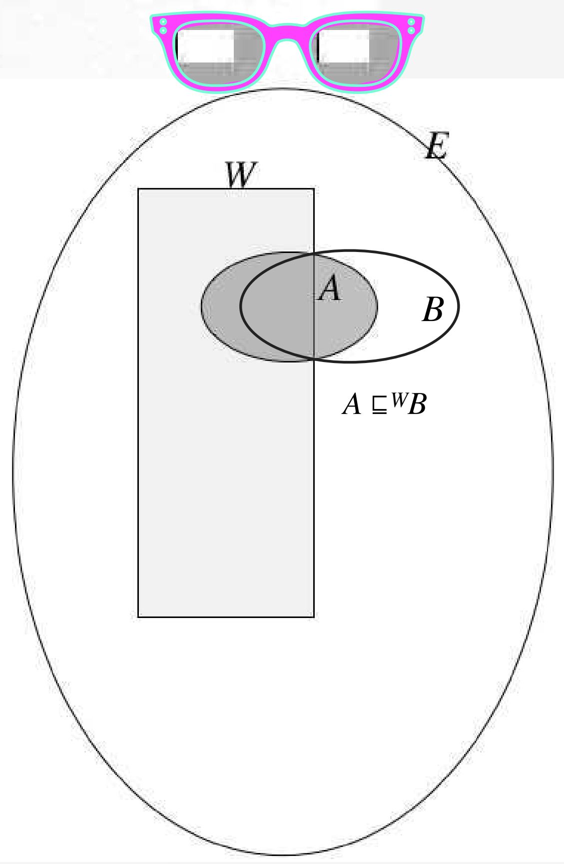
¿?



Una Ilustración del orden $\sqsubseteq^W$, los operadores $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ y la pertenencia $\in^W$ en $P(E)$ y L^E

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$



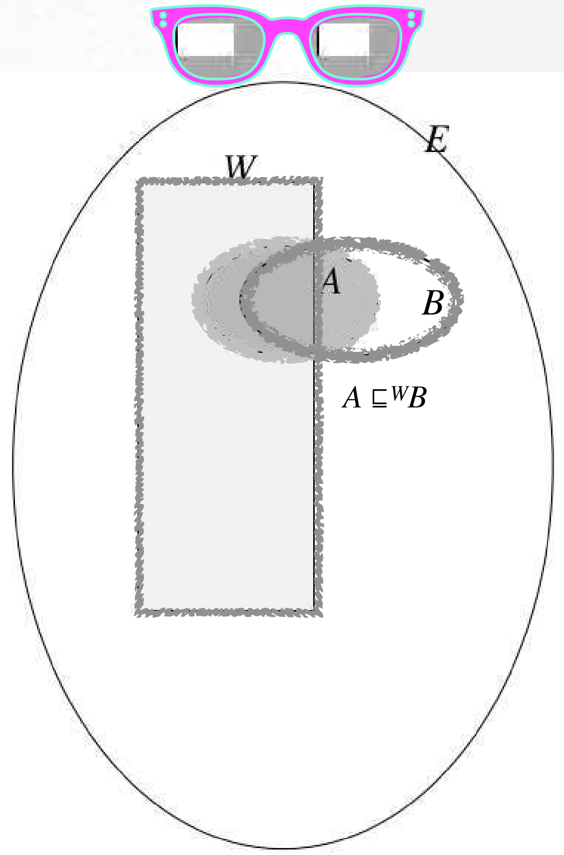
ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$((L^{E}, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}')$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$



ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$

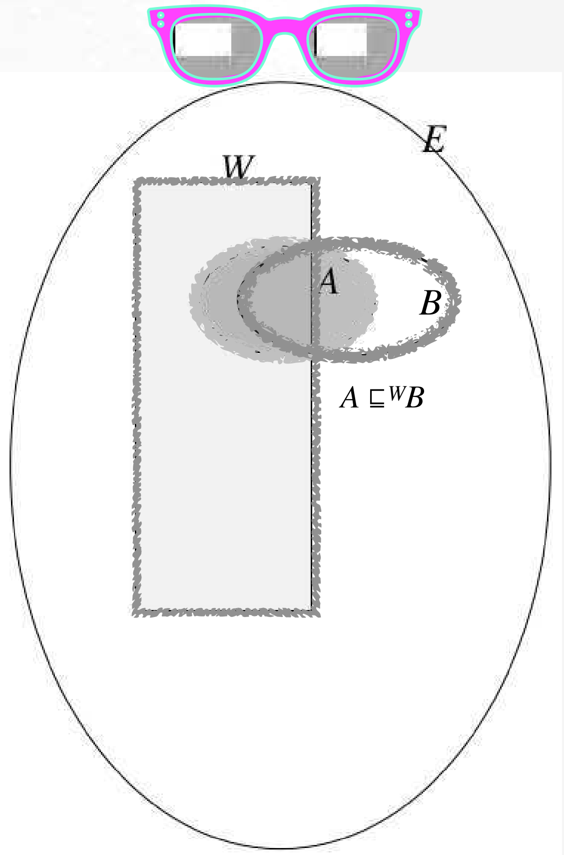
$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A^{c} \sqsubseteq^{W^{c}} B^{c} \Leftrightarrow B^{c} \sqsubseteq^{W} A^{c}$

$((L^{E}, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}')$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$



ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A^{c} \sqsubseteq^{W^{c}} B^{c} \Leftrightarrow B^{c} \sqsubseteq^{W} A^{c}$$

$$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$$

$$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$$

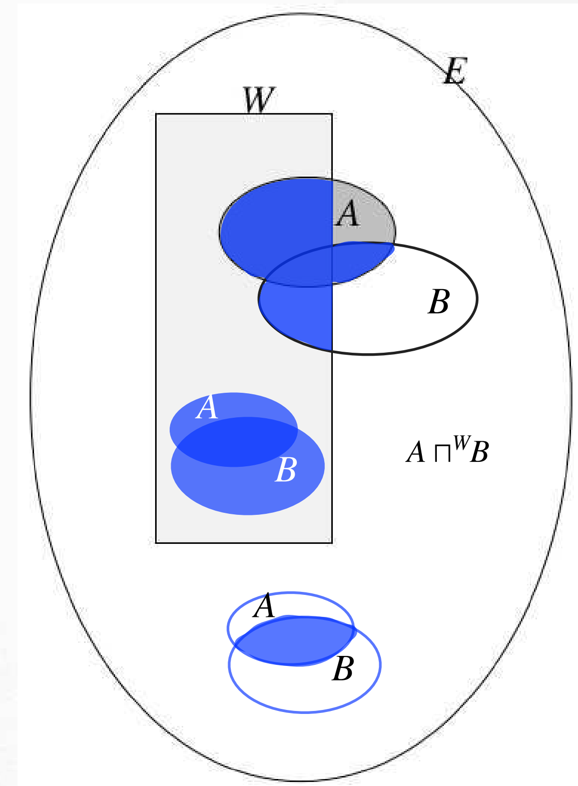
$$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$$

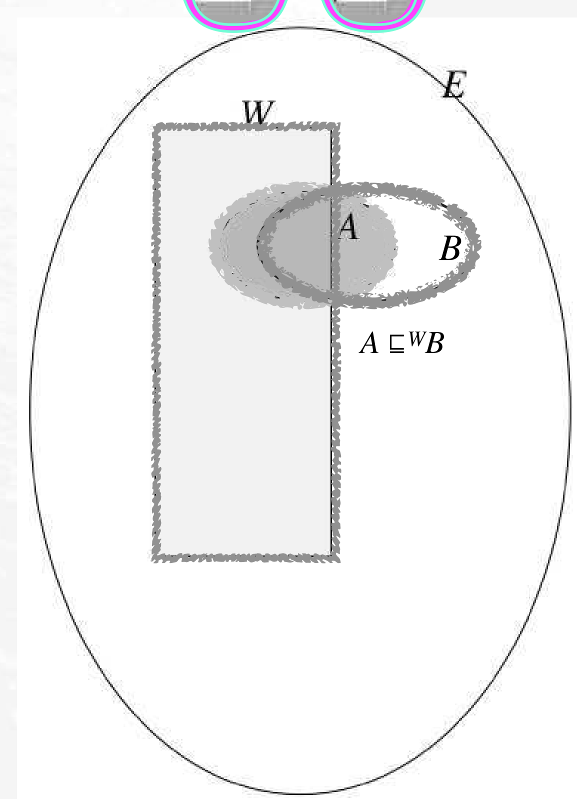
$$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$$

$$((L^{E}, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}')$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$$





ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A^{c} \sqsubseteq^{W^{c}} B^{c} \Leftrightarrow B^{c} \sqsubseteq^{W} A^{c}$

$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^{E}, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}')$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$

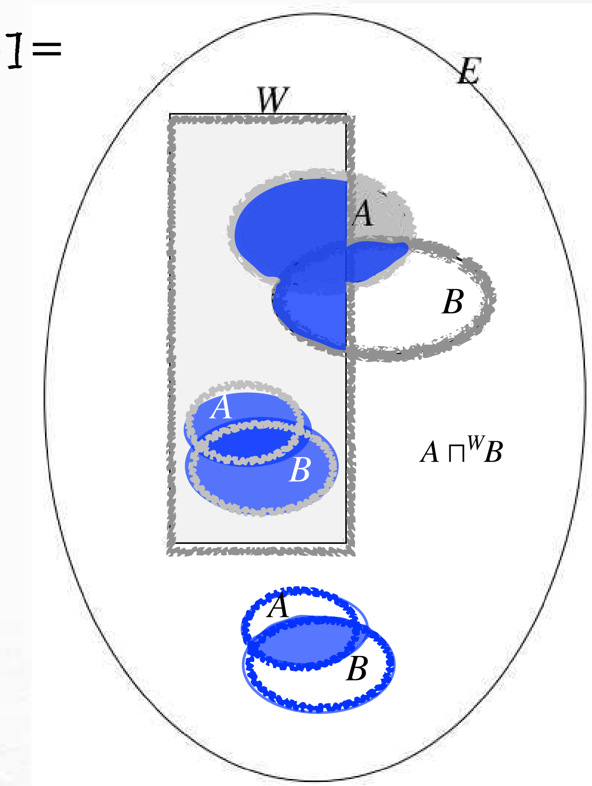
$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

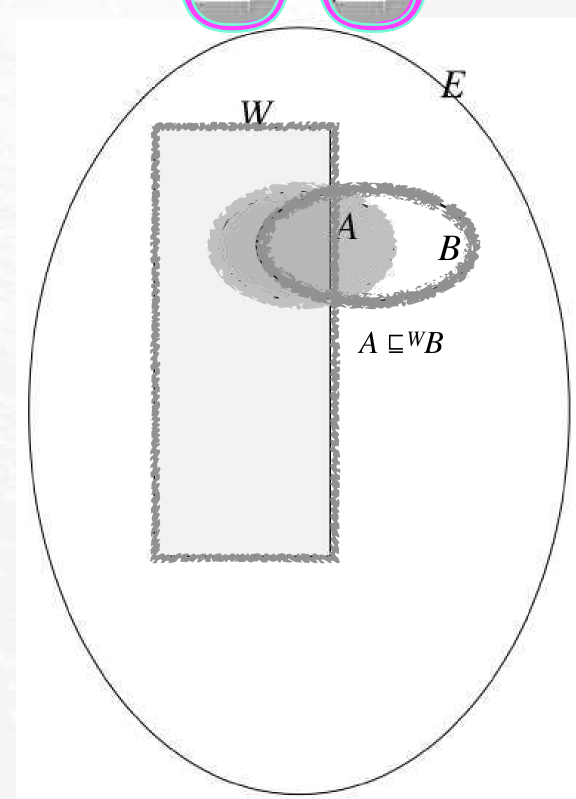
$A \sqcap^{W} B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$





$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \le A \le B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), ')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

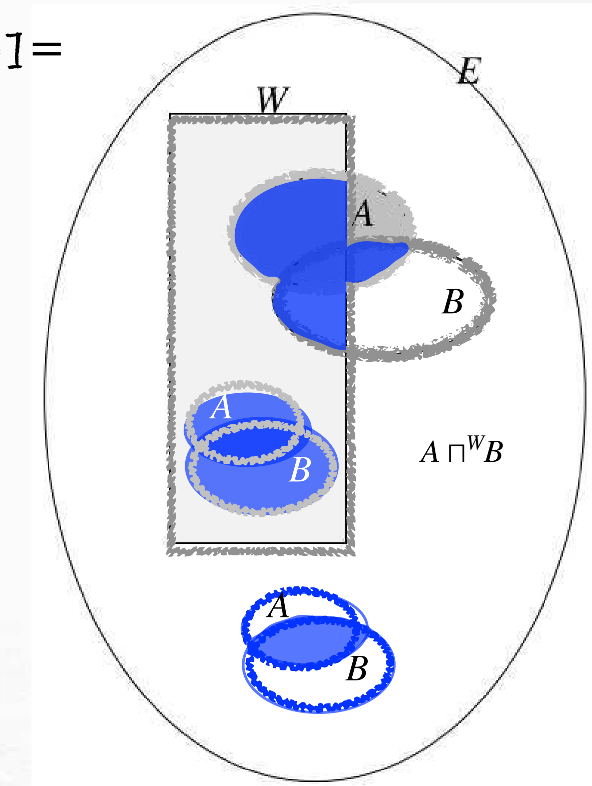
$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

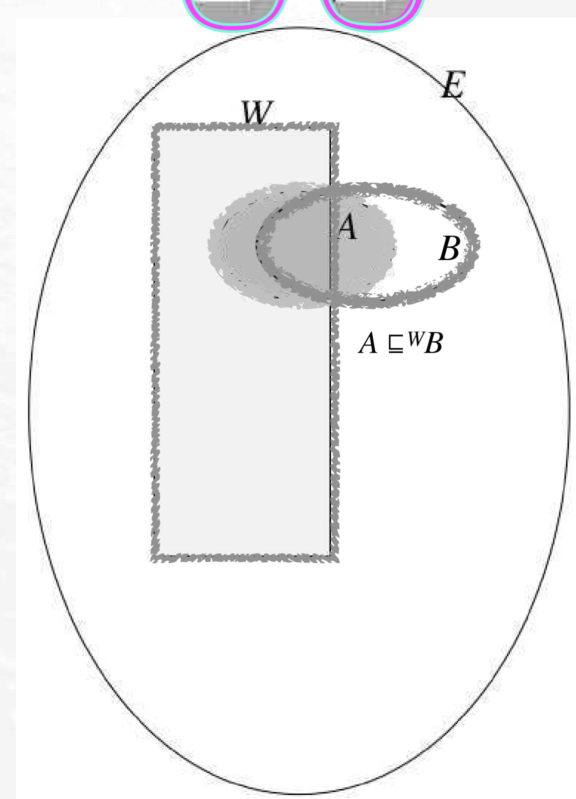
$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$

$$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$$





ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}^{c})$$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \le A \le B \cup W)$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A^{c} \sqsubseteq^{W^{c}} B^{c} \Leftrightarrow B^{c} \sqsubseteq^{W} A^{c}$

$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$$((L^{E}, \cdot, +, \varnothing, \boldsymbol{E}), {}')$$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W)$

$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

$A \sqcap^{W} B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$

$$A \sqcap^{W} B = A \sqcap^{B} W = B \sqcap^{A} W$$

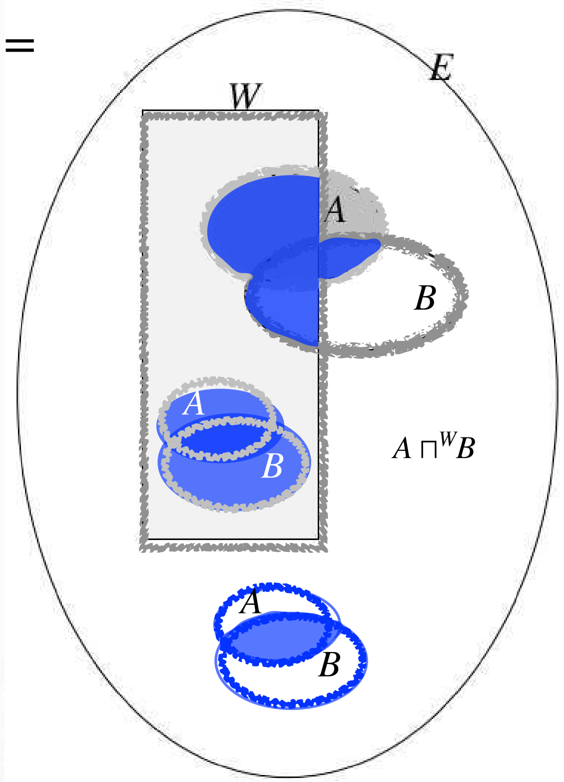
$A \sqcup^{W} B = A \sqcap^{W^{c}} B =$

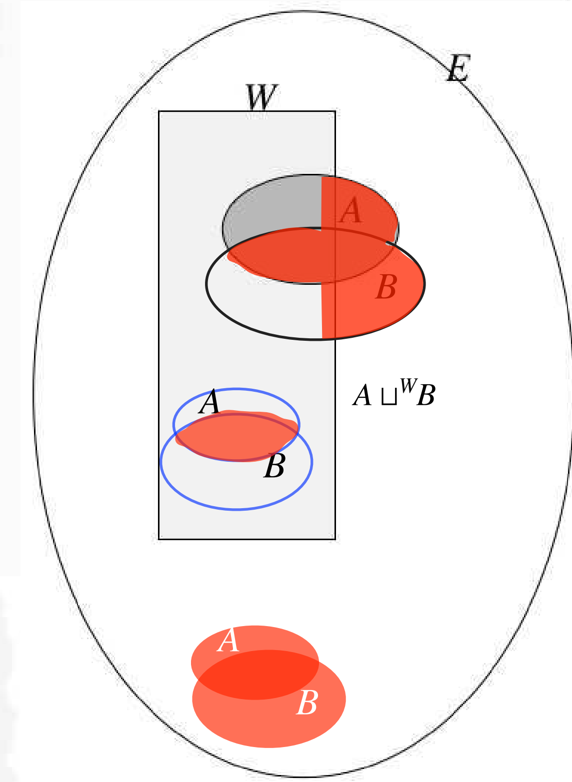
$(A \cap B) \cup [W^{c} \cap (A \cup B)] =$

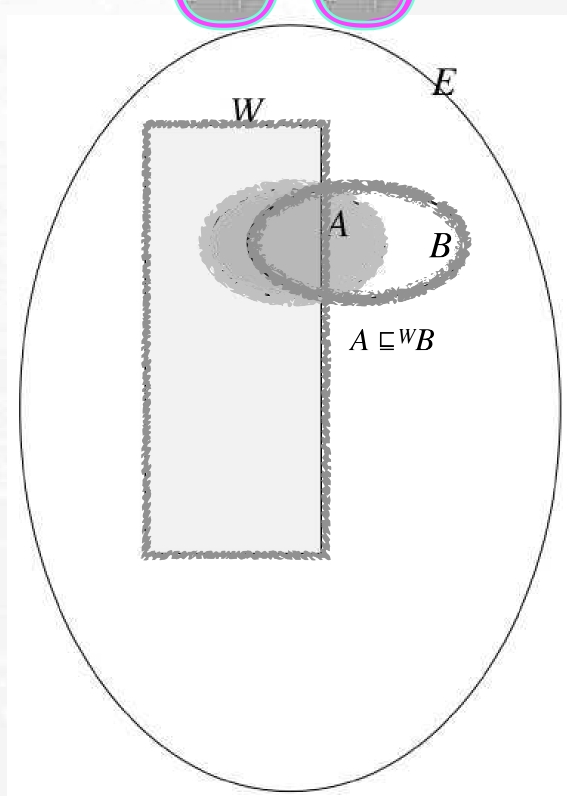
$(A \cup B) \cap [W^{c} \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^{c}) \cup (B \cap W^{c}) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^{c}) \cap (B \cup W^{c})$







ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \le A \le B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), ')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$

$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$

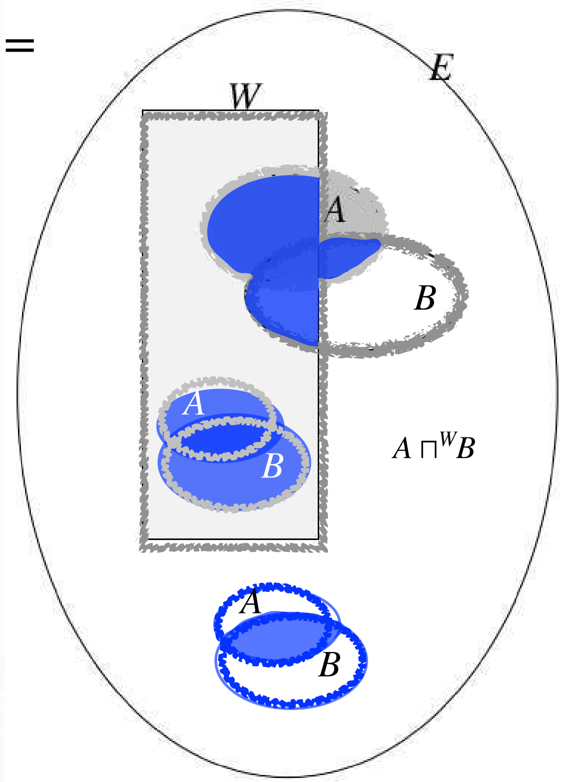
$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

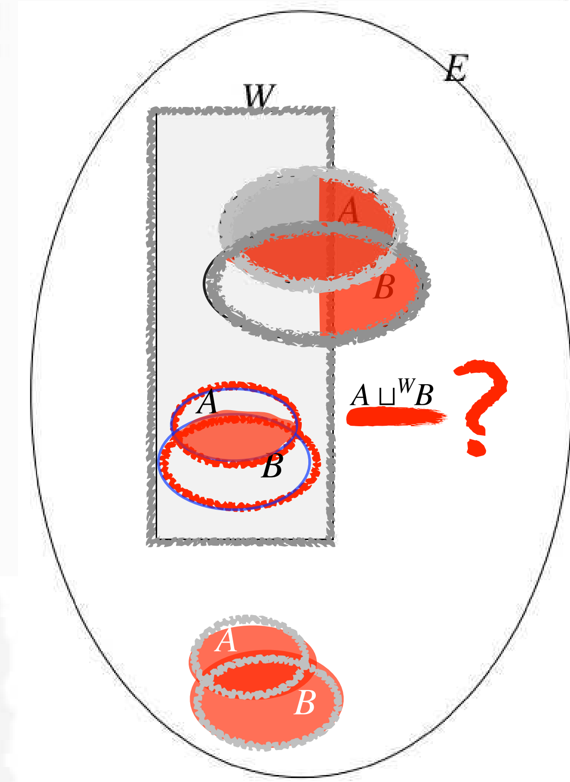
$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

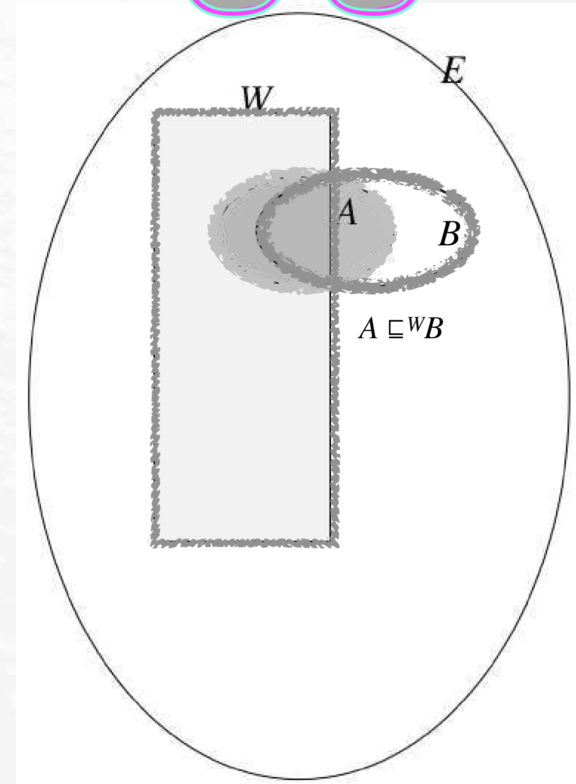
$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$







$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), {}')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$

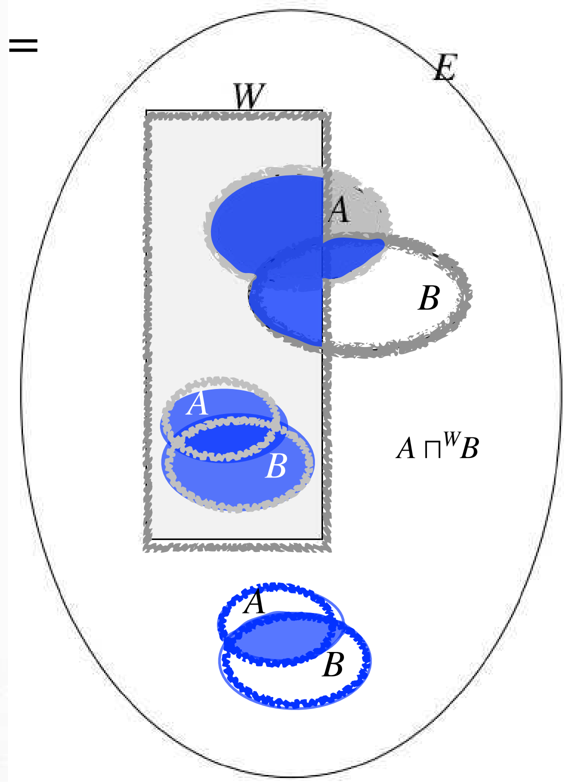
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

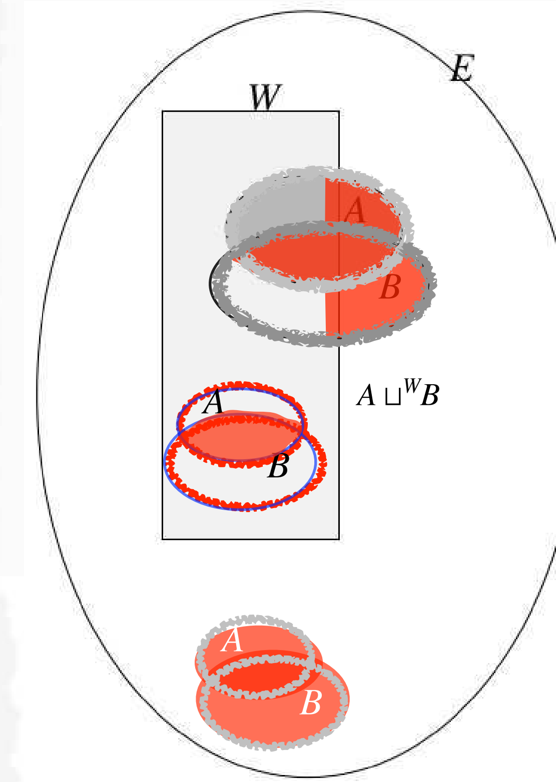
$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$





$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$

SI $W' = W^c$, entonces

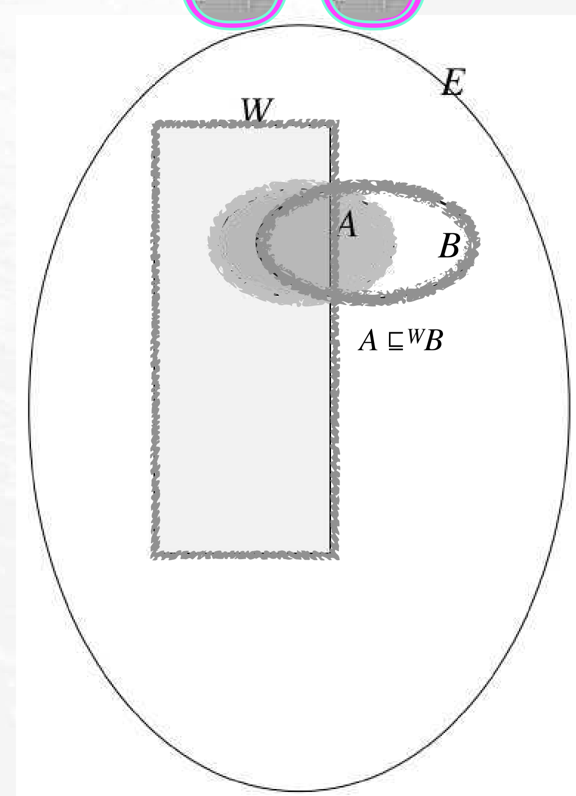
$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cdot B) + [W^c \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W^c + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W^c) + (B \cdot W^c) =$

$(A + B) \cdot (A + W^c) \cdot (B \cup W^c)$



$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), ')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

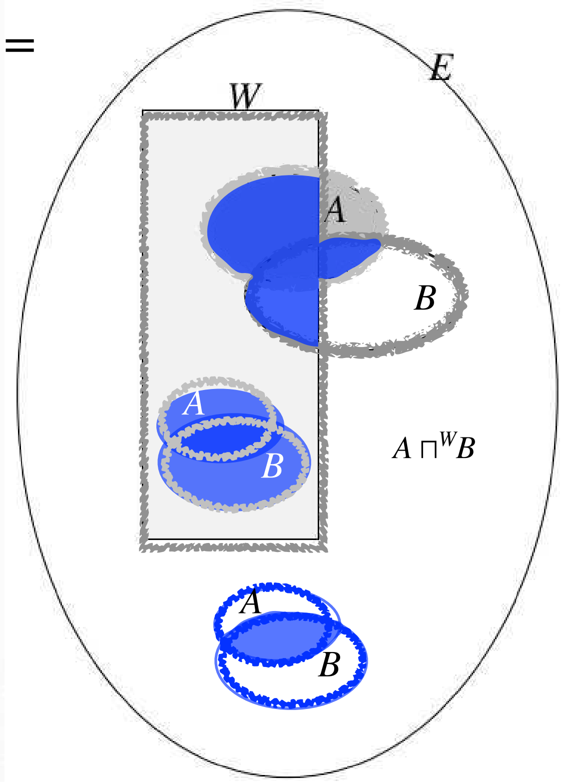
$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

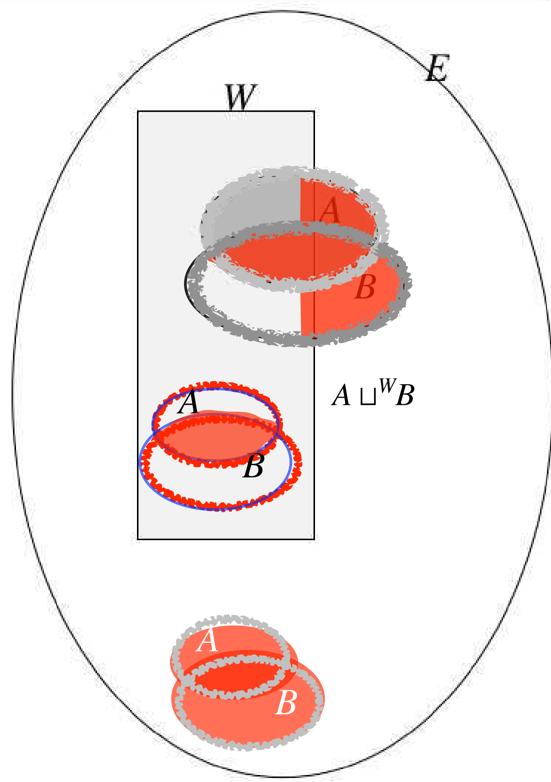
$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$

$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$





Si $W' = W^c$, entonces

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cdot B) + [W^c \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W^c + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W^c) + (B \cdot W^c) =$

$(A + B) \cdot (A + W^c) \cdot (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

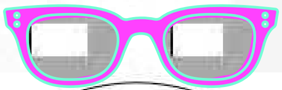
$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

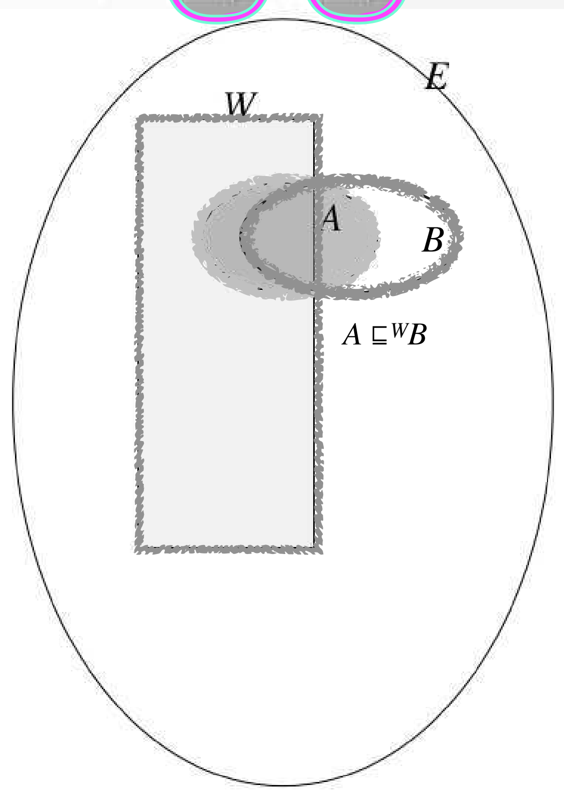
$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = A \sqcup^{B^c} W^c = B \sqcup^{A^c} W^c$





ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \leq A \leq B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), ')$$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$

$$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$$

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = A \sqcup^{B^c} W^c = B \sqcup^{A^c} W^c$

$A \sqcup^W B = (A^c \sqcap^W B^c)^c$,

$A \sqcap^W B = (A^c \sqcup^W B^c)^c$

SI $W' = W^c$, entonces

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cdot B) + [W^c \cdot (A + B)] =$

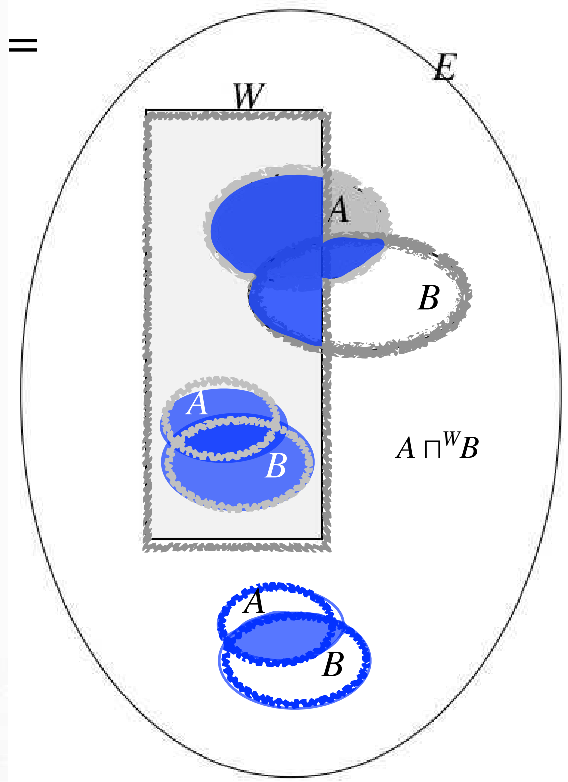
$(A + B) \cdot [W^c + (A \cdot B)] =$

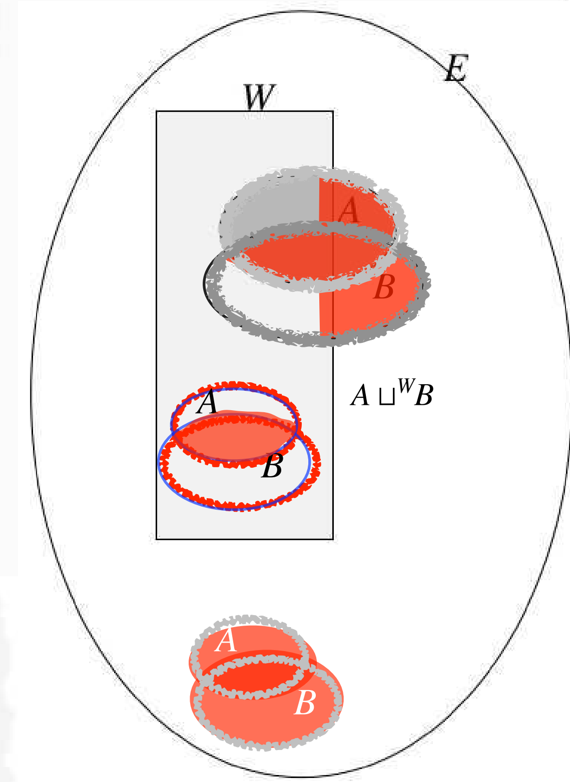
$(A \cdot B) + (A \cdot W^c) + (B \cdot W^c) =$

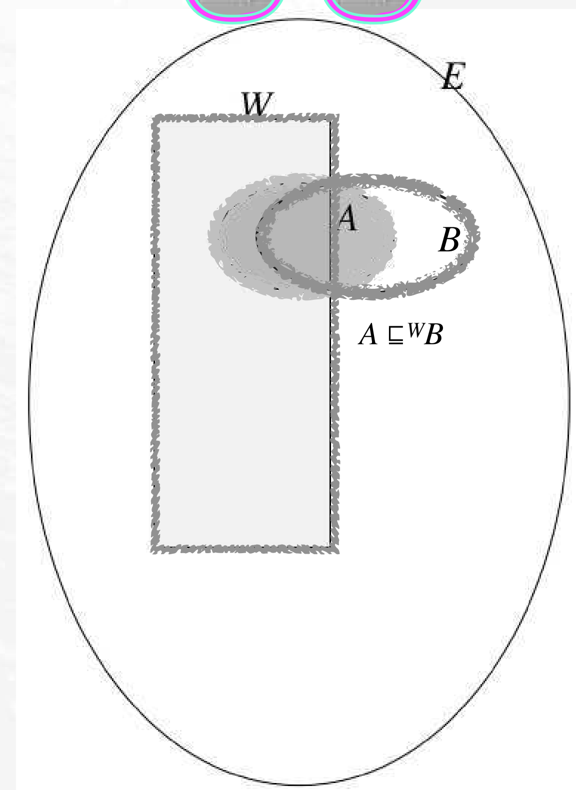
$(A + B) \cdot (A + W^c) \cdot (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = (A' \sqcap^W B')'$,

$A \sqcap^W B = (A' \sqcup^W B')'$







ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \le A \le B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), ')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W)$

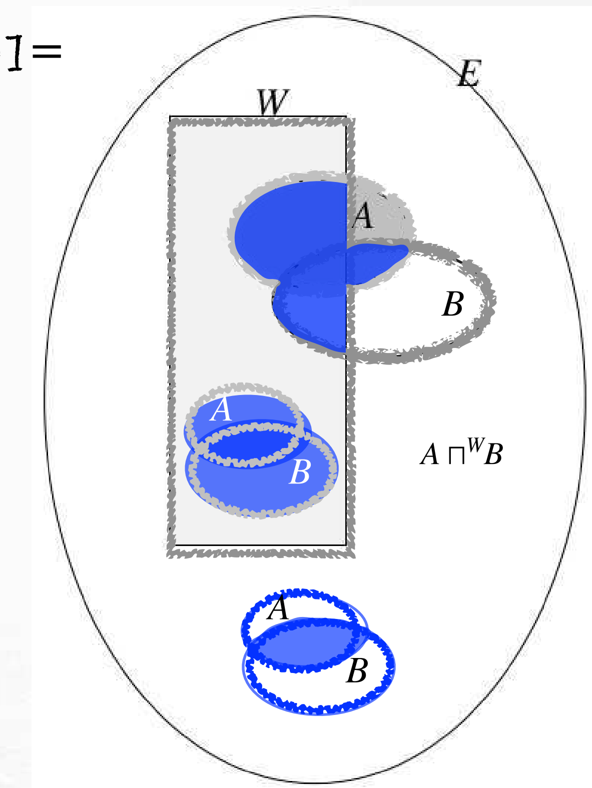
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

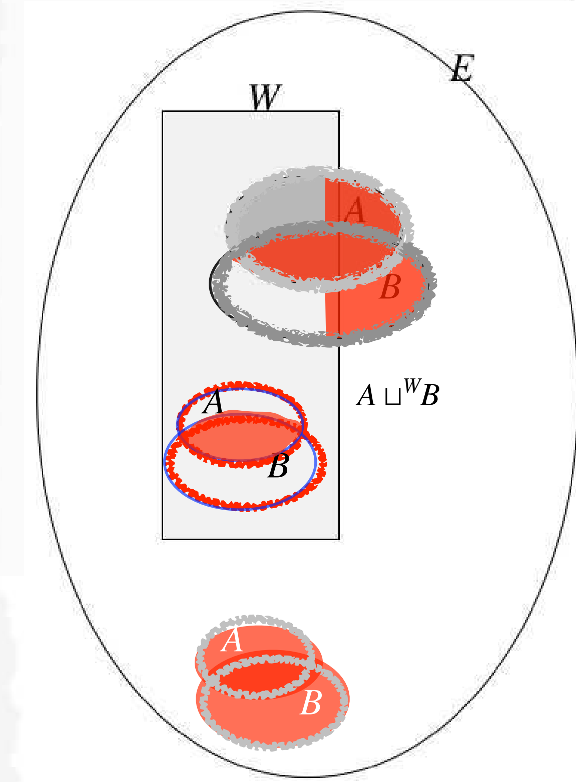
$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$





$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = A \sqcup^{B^c} W^c = B \sqcup^{A^c} W^c$

$A \sqcup^W B = (A^c \sqcap^W B^c)^c$,

$A \sqcap^W B = (A^c \sqcup^W B^c)^c$

SI $W' = W^c$, entonces

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cdot B) + [W^c \cdot (A + B)] =$

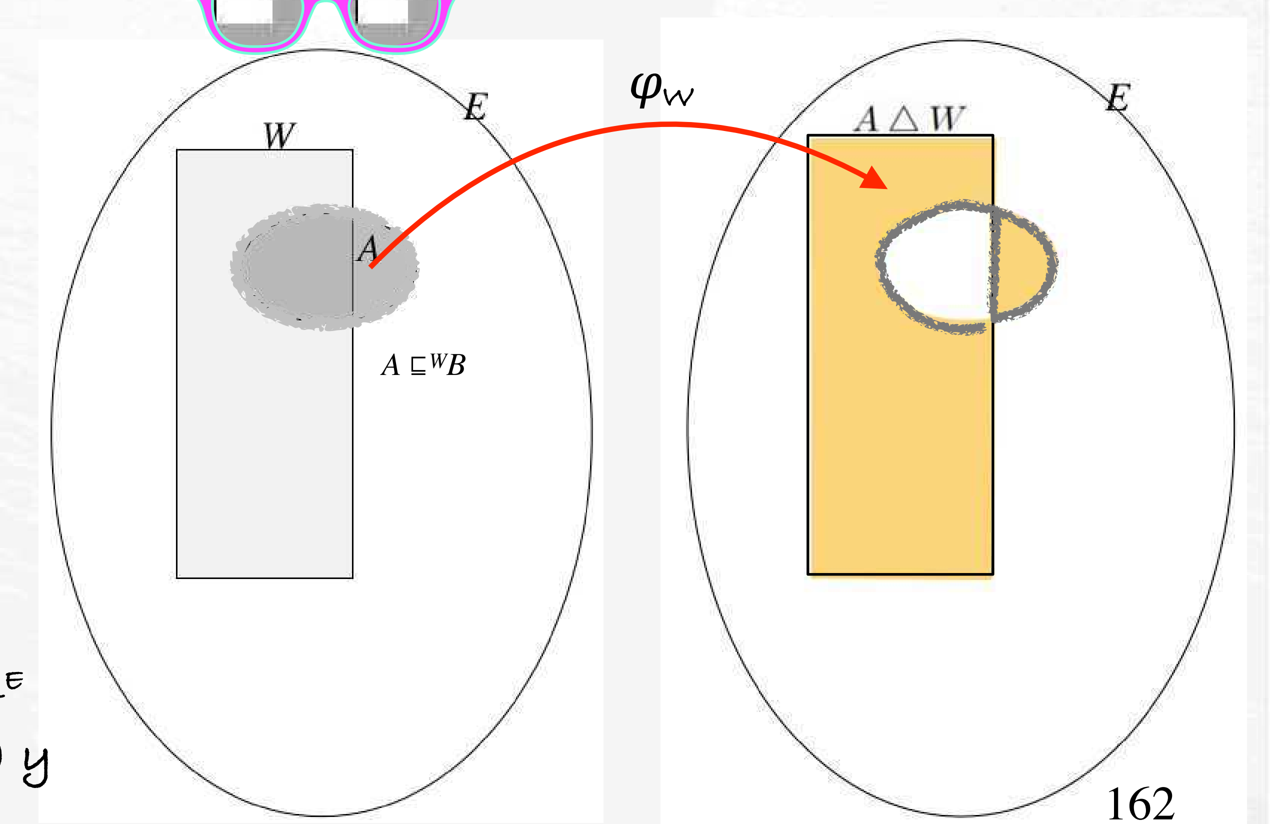
$(A + B) \cdot [W^c + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W^c) + (B \cdot W^c) =$

$(A + B) \cdot (A + W^c) \cdot (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = (A' \sqcap^W B')'$,

$A \sqcap^W B = (A' \sqcup^W B')'$



Para todo W tal que $W' = W^c$, la aplicación

$\varphi_W : L^E \to L^E$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

es involutiva: $\varphi^2_W(A) = \varphi_W(\varphi_W(A)) = A \quad \forall A \in L^E$

y es un isomorfismo entre $(L^E, \le, \cdot, +, ', \varnothing, E)$ y

$(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, ', W, W^c)$.

ISOMORFISMO ASOCIADO AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W* COMPLEMENTADO

$((P(E), \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cap W \le A \le B \cup W)$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A^c \sqsubseteq^{W^c} B^c \Leftrightarrow B^c \sqsubseteq^W A^c$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W) \cup (B \cap W) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W) \cap (B \cup W)$

$((L^E, \cdot, +, \varnothing, E), ')$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W)$

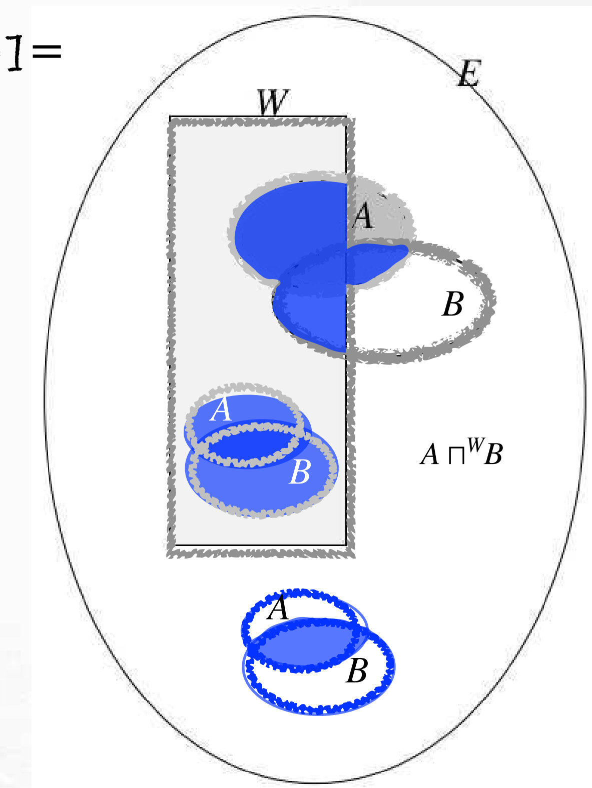
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$

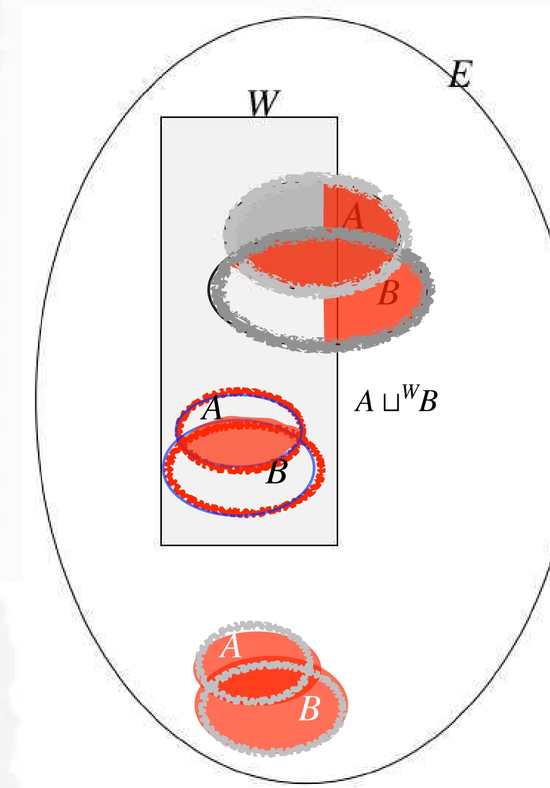
$A \sqcap^W B = (A \cdot B) + [W \cdot (A + B)] =$

$(A + B) \cdot [W + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W) =$

$(A + B) \cdot (A + W) \cdot (B + W)$





$A \sqcap^W B = A \sqcap^B W = B \sqcap^A W$

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)] =$

$(A \cup B) \cap [W^c \cup (A \cap B)] =$

$(A \cap B) \cup (A \cap W^c) \cup (B \cap W^c) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup W^c) \cap (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = A \sqcup^{B^c} W^c = B \sqcup^{A^c} W^c$

$A \sqcup^W B = (A^c \sqcap^W B^c)^c$,

$A \sqcap^W B = (A^c \sqcup^W B^c)^c$

Si $W' = W^c$, entonces

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cdot B) + [W^c \cdot (A + B)] =$

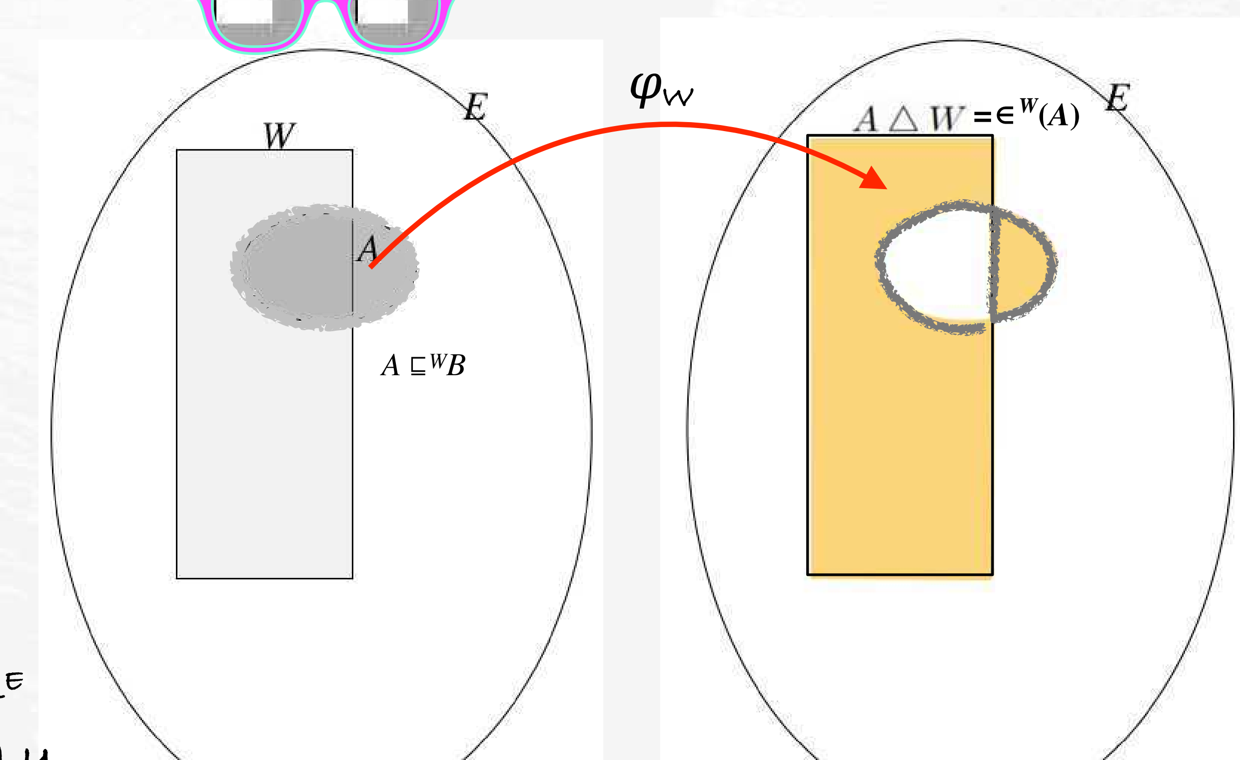
$(A + B) \cdot [W^c + (A \cdot B)] =$

$(A \cdot B) + (A \cdot W^c) + (B \cdot W^c) =$

$(A + B) \cdot (A + W^c) \cdot (B \cup W^c)$

$A \sqcup^W B = (A' \sqcap^W B')'$,

$A \sqcap^W B = (A' \sqcup^W B')'$



Para todo W tal que $W' = W^c$, la aplicación

$\varphi_W : L^E \rightarrow L^E$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

es involutiva: $\varphi^2_W(A) = \varphi_W(\varphi_W(A)) = A \quad \forall A \in L^E$

y es un isomorfismo entre $(L^E, \le, \cdot, +, ', \varnothing, E)$ y

$(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, ', W, W^c)$.

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^w$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^w g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^w \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^w$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^w \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^w \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^w$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^w B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^w$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^w B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^w A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^w B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^w$, $\sqcup^w$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^w$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^w$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^w$ y los operadores $\sqcap^w$, $\sqcap^w$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L X L$ es una relación en L no necesariamente de orden

Conclusiones y algunas cuestiones

163

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "W" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la 163
Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

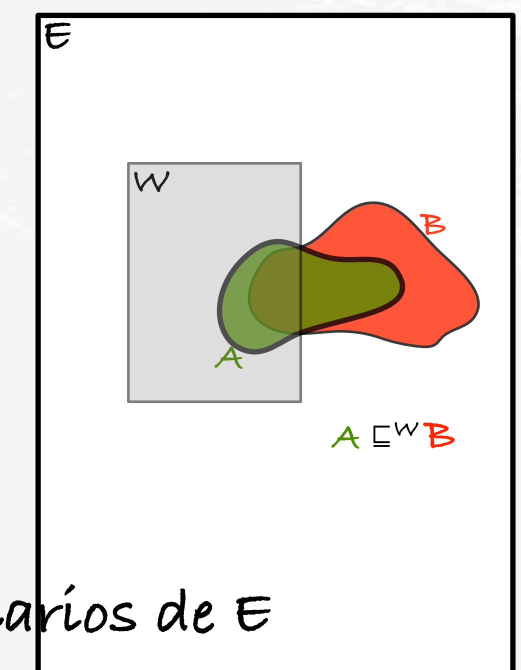
Conclusiones y algunas cuestiones

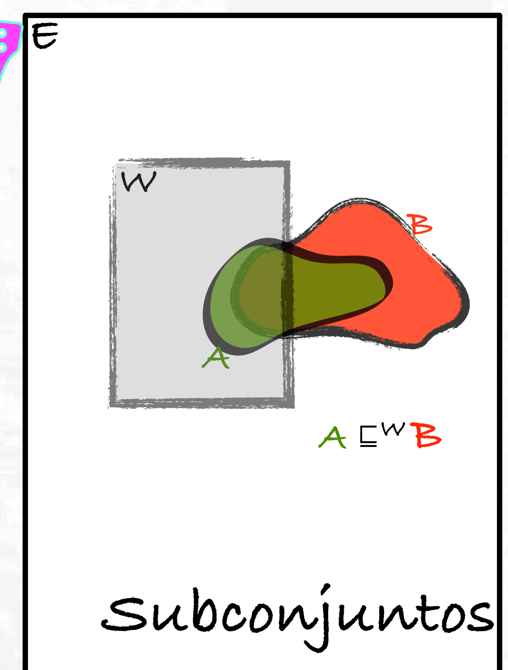
Hemos visto…

Relaciones de actividad $\sqsubseteq^W$ y conjuntos.

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$





Subconjuntos ordinarios de E

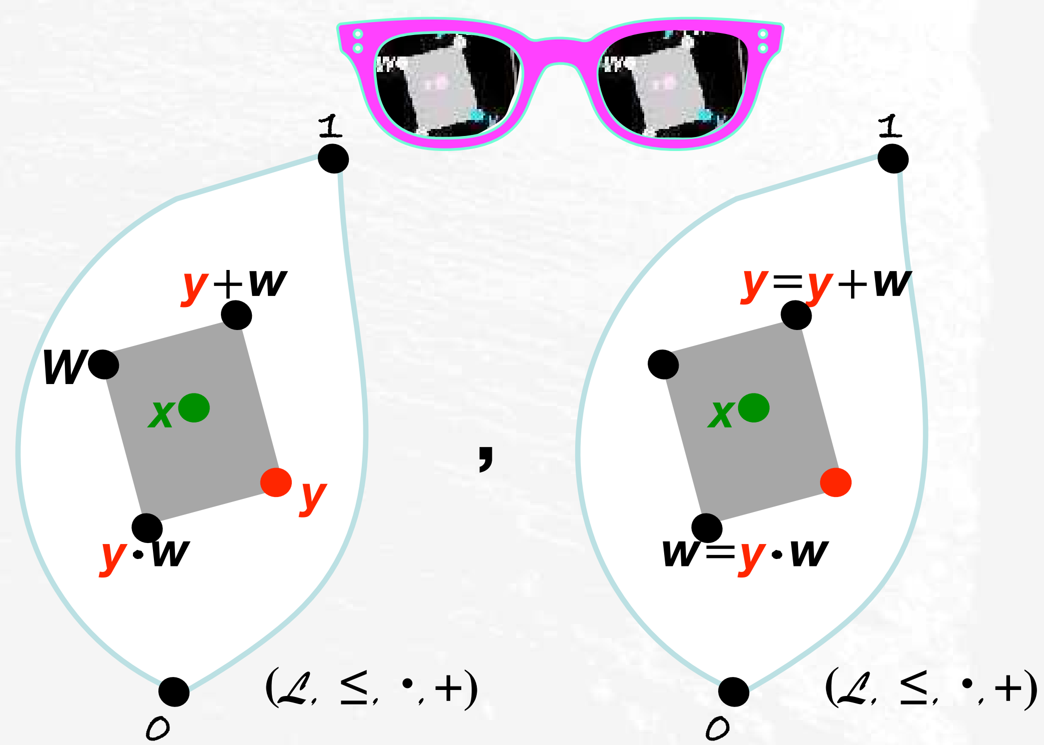
Subconjuntos borrosos de E

A continuación:

3. Relaciones de actividad $\sqsubseteq^{w}$ en retículos.

$$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow$$

$$(y \cdot w \leq x \leq y + w)$$

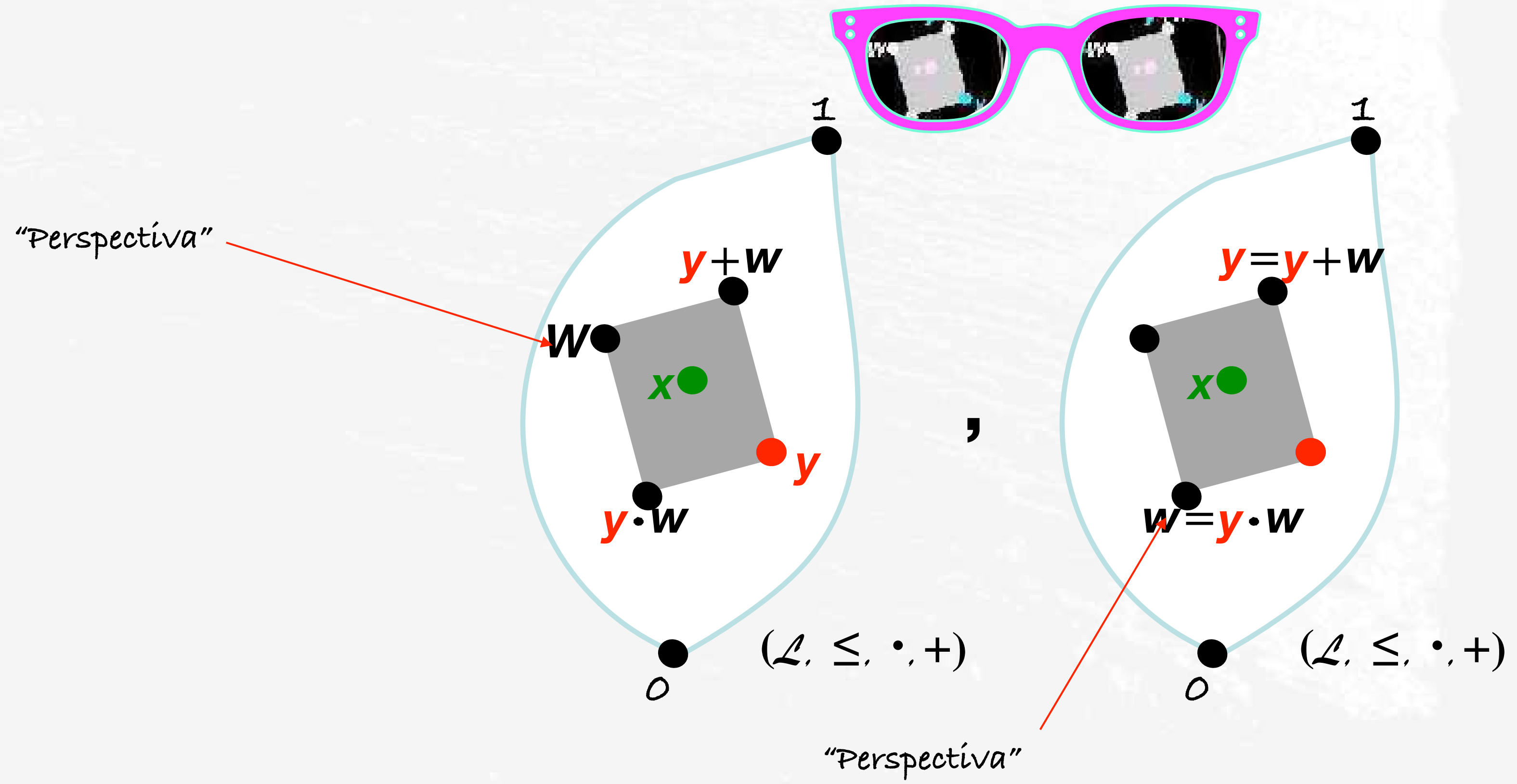


A continuación:

3. Relaciones de actividad $\sqsubseteq^w$ en retículos.

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow$$

$$(y \cdot w \leq x \leq y + w)$$



Una extensión de los conceptos de soporte, núcleo y -familia de α-cortes en retículos Browerianos y dual-Browerianos.

<u>Nota1</u>. Si $*: L \times L \rightarrow L$ es una ley interna en un referencial L, escribimos $x*M=\{x*m \ / \ m\in M\}\subseteq L$ $\forall x\in L$, $\forall M\subseteq L$, $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

Nota1. Si $*: L\times L \to L$ es una ley interna en un referencial L, escribimos $x*M=\{x*m \,/\, m\in M\}\subseteq L$ $\forall x\in L$, $\forall M\subseteq L$, $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

Nota2. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo y $M\subseteq L$; escribimos $\prod M$ y $\sum M$ para representar los elementos ínfimo y supremo en L de M respectivamente. En particular:

$$\prod\{x,y\}=x\cdot y,\ \sum\{x,y\}=x+y,\ \sum\{x\}=x,\ \prod\emptyset=1\ ,\ \sum\emptyset=0,\ \prod L=0\ ,\ \sum L=1.$$

Nota1. Si $*: L\times L \to L$ es una ley interna en un referencial L, escribimos $x*M=\{x*m \,/\, m\in M\}\subseteq L$ $\forall x\in L, \forall M\subseteq L, M\neq\varnothing$ y $x*\varnothing=\varnothing$.

Nota2. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo y $M\subseteq L$; escribimos $\prod M$ y $\sum M$ para representar los elementos ínfimo y supremo en L de M respectivamente. En particular:

$$\prod\{x,y\}=x\cdot y,\ \sum\{x,y\}=x+y,\ \sum\{x\}=x,\ \prod\varnothing=1\ ,\ \sum\varnothing=0,\ \prod L=0\ ,\ \sum L=1.$$

Nota3. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo distributivo y acotado. Entonces, si $w\in L$ es complementado, sólo tiene un complemento w^c en L. Sea $N(L)$ el subconjunto de los elementos complementados: $N(L)=\{w\in L \,/\, w^c \text{ existe}\}$. Es un $\{0,1\}$-subretículo completo $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, que es además, (con la complementación $^c:(N(L)\to(N(L))$, un Álgebra de Boole $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$.

Nota1. Si $*:L\times L\rightarrow L$ es una ley interna en un referencial L, escribimos $x*M=\{x*m\ /\ m\in M\}\subseteq L$ $\forall x\in L, \forall M\subseteq L$, $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

Nota2. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo y $M\subseteq L$; escribimos $\prod M$ y $\sum M$ para representar los elementos ínfimo y supremo en L de M respectivamente. En particular:

$$\prod\{x,y\}=x\cdot y,\ \sum\{x,y\}=x+y,\ \sum\{x\}=x,\ \prod\emptyset=1\ ,\ \sum\emptyset=0,\ \prod L=0\ ,\ \sum L=1.$$

Nota3. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo distributivo y acotado. Entonces, si $w\in L$ es complementado, sólo tiene un complemento w^c en L. Sea $N(L)$ el subconjunto de los elementos complementados: $N(L)=\{w\in L\ /\ w^c \text{ existe}\}$. Es un $\{0,1\}$-subretículo completo $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, que es además, (con la complementación $^c:(N(L)\rightarrow(N(L))$, un Álgebra de Boole $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$.

Nota4. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo broweriano y dual-broweriano, es decir, tal que:

$$a\cdot\sum M=\sum(a\cdot M)\ \text{ y }\ a+\prod M=\prod(a+M)\ \forall a\in L,\forall M\subseteq L.$$

Un tal retículo es evidentemente distributivo.

Nota1. Si $*:LXL \to L$ es una ley interna en un referencial L, escribimos $x*M=\{x*m \,/\, m\in M\}\subseteq L$ $\forall x\in L, \forall M\subseteq L$, $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

Nota2. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo y $M\subseteq L$; escribimos $\prod M$ y $\sum M$ para representar los elementos ínfimo y supremo en L de M respectivamente. En particular:

$$\prod\{x,y\}=x\cdot y,\ \sum\{x,y\}=x+y,\ \sum\{x\}=x,\ \prod\emptyset=1\ ,\ \sum\emptyset=0,\ \prod L=0\ ,\ \sum L=1.$$

Nota3. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo distributivo y acotado. Entonces, si $w\in L$ es complementado, sólo tiene un complemento w^c en L. Sea N(L) el subconjunto de los elementos complementados: $N(L)=\{w\in L \,/\, w^c \text{ existe}\}$. Es un $\{0,1\}$-subretículo completo $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, que es además, (con la complementación $^c:(N(L)\to(N(L))$, un Álgebra de Boole $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$.

Nota4. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ un retículo completo broweriano y dual-broweriano, es decir, tal que:

$$a\cdot\sum M=\sum(a\cdot M)\ \ y\ \ a+\prod M=\prod(a+M)\ \forall a\in L, \forall M\subseteq L.$$

Un tal retículo es evidentemente distributivo.

Consideremos en L el residuo "$\to.$" (o implicación residuada) asociado al ínfimo "$\cdot$" en $(L,\leq)$ y el co-residuo "$\div$" (o co-implicación residuada), asociado al supremo "$+$" en $(L,\leq)$:

$$\alpha\to.\beta=\sum\{s\in L \,/\, \alpha\cdot s\leq\beta\},\quad \beta\div\alpha=\prod\{t\in L \,/\, \beta\leq\alpha+t\}\ \ \forall(\alpha,\beta)\in LXL.$$

Se verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

(i) $[(\alpha\cdot s\leq\beta)\Leftrightarrow(s\leq(\alpha\to.\beta))]$; $[(\beta\leq(\alpha+t))\Leftrightarrow((\beta\div\alpha)\leq t)]$.

(ii) $\alpha\to.\beta=\max\{s\in L \,/\, \alpha\cdot s\leq\beta\},\quad \beta\div\alpha=\min\{t\in L \,/\, \beta\leq\alpha+t\}\ \ \forall(\alpha,\beta)\in LXL.$

(iii) $[\alpha\to.(\beta\to.\gamma)]=[(\alpha\cdot\beta)\to.\gamma]\ ;\quad [(\gamma\div\beta)\div\alpha)]=[\gamma\div(\beta+\alpha)]\ \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in LXLXL.$

(iv) $(\alpha_1\leq\alpha_2)\Rightarrow([(\alpha_1\to.\beta)\geq(\alpha_2\to.\beta)])\&([(\beta\div\alpha_1)\geq(\beta\div\alpha_2)])\ \forall\beta\in L$

(v) $(\beta_1\leq\beta_2)\Rightarrow([(\alpha\to.\beta_1)\leq(\alpha\to.\beta_2)])\&([(\beta_1\div\alpha)\leq(\beta_2\div\alpha)])\ \forall\alpha\in L$

(vi) $[(\sum M)\to.\beta]=(\prod M\to.\beta)$; $[\alpha\to.(\prod M)]=(\alpha\to.\prod M)$; $[\beta\div(\prod M)]=\sum(\beta\div M)$; $[(\sum M)\div\alpha]=\sum(M\div\alpha)$

(vii) $(\alpha\leq\beta)\Leftrightarrow[(\alpha\to.\beta)=1]$; $(\alpha\geq\beta)\Leftrightarrow[(\beta\div\alpha)=0]$. $\qquad\forall(\alpha,\beta,M)\in LXLXP(L)$.

(viii) $(0\to.\beta)=1=(\alpha\to.1)\ ;(\beta\div1)=0=(0\div\alpha);\ (1\to.\beta)=\beta=(\beta\div0)\ \forall(\alpha,\beta)\in LXL.$

(ix) $(\beta\div\alpha)\leq(\beta\div0)=\beta=(1\to.\beta)\leq(\alpha\to.\beta)\ \ \forall(\alpha,\beta)\in LXL.$

(x) $\alpha\cdot(\alpha\to.\beta)\leq\beta\leq\alpha+(\beta\div\alpha)\ \forall(\alpha,\beta)\in LXL.$

(Continúa)

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Si $w\in L$ es complementado, $(w\in N(L))$, entonces: $w\rightarrow.\beta=w^c+\beta$; $\beta\dot{-}w=w^c\cdot\beta$ $\forall\beta\in L$. En particular: $(w\rightarrow.0)=(1\dot{-}w)=w^c$

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Si $w\in L$ es complementado, $(w\in N(L))$, entonces: $w \rightarrow . \beta = w^c + \beta$; $\beta \dot{-} w = w^c \cdot \beta$ $\forall \beta \in L$. En particular: $(w \rightarrow . 0) = (1 \dot{-} w) = w^c$

<u>Demostración</u>. Las expresiones $w\cdot(w^c+\beta)=0+w\cdot\beta \leq \beta$ prueban que $(w^c+\beta)\in\{ s\in L / w\cdot s \leq \beta \}$. Sea s tal que $w\cdot s \leq \beta$. Entonces $(w^c+\beta)\cdot s = w^c\cdot s+\beta\cdot s \geq w^c\cdot s + w\cdot s\cdot s = w^c\cdot s+w\cdot s = (w^c+w)\cdot s = s$, que prueba que $(w^c+\beta) \geq s$ y en consecuencia que es el máximo de $\{ s\in L / w\cdot s \leq \beta \}$, luego coincide con $w \rightarrow . \beta$.

Por otra parte, de $w+(w^c\cdot\beta) \geq w\cdot\beta + w^c\cdot\beta = \beta$ se deduce que $(w^c\cdot\beta)\in\{ t\in L / \beta \leq w+t \}$. Además, $w^c\cdot\beta+t = (w^c+t)\cdot(\beta+t) \leq (w^c+t)\cdot(w+t+t) = (w^c+t)\cdot(w+t) = t$ prueba que $w^c\cdot\beta$ es el mínimo , es decir $w^c\cdot\beta = \beta \dot{-} w$.∎

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Si $w\in L$ es complementado, $(w\in N(L))$, entonces: $w\to.\beta=w^c+\beta$; $\beta\dot{-}w=w^c\cdot\beta$ $\forall\beta\in L$. En particular: $(w\to.0)=(1\dot{-}w)=w^c$

<u>Demostración</u>. Las expresiones $w\cdot(w^c+\beta)=0+w\cdot\beta\leq\beta$ prueban que $(w^c+\beta)\in\{s\in L\,/\,w\cdot s\leq\beta\}$. Sea s tal que $w\cdot s\leq\beta$. Entonces $(w^c+\beta)\cdot s=w^c\cdot s+\beta\cdot s\geq w^c\cdot s+w\cdot s\cdot s=w^c\cdot s+w\cdot s=(w^c+w)\cdot s=s$, que prueba que $(w^c+\beta)\geq s$ y en consecuencia que es el máximo de $\{s\in L\,/\,w\cdot s\leq\beta\}$, luego coincide con $w\to.\beta$.

Por otra parte, de $w+(w^c\cdot\beta)\geq w\cdot\beta+w^c\cdot\beta=\beta$ se deduce que $(w^c\cdot\beta)\in\{t\in L\,/\,\beta\leq w+t\}$. Además, $w^c\cdot\beta+t=(w^c+t)\cdot(\beta+t)\leq(w^c+t)\cdot(w+t+t)=(w^c+t)\cdot(w+t)=t$ prueba que $w^c\cdot\beta$ es el mínimo, es decir $w^c\cdot\beta=\beta\dot{-}w$.∎

<u>Proposición</u>. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ es una cadena, entonces

$$(1)\quad \alpha\to.\beta=\begin{cases}\beta & \text{si } \alpha>\beta\\ 1 & \text{si } \alpha\leq\beta\end{cases}\ ;\qquad (2)\quad \beta\dot{-}\alpha=\begin{cases}0 & \text{si } \alpha\geq\beta\\ \beta & \text{si } \alpha<\beta\end{cases}\ .$$

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Si $w\in L$ es complementado, $(w\in N(L))$, entonces: $w\rightarrow.\beta=w^c+\beta$; $\beta\div w=w^c\cdot\beta$ $\forall\beta\in L$. En particular: $(w\rightarrow.0)=(1\div w)=w^c$

<u>Demostración</u>. Las expresiones $w\cdot(w^c+\beta)=0+w\cdot\beta\leq\beta$ prueban que $(w^c+\beta)\in\{s\in L / w\cdot s\leq\beta\}$. Sea s tal que $w\cdot s\leq\beta$. Entonces $(w^c+\beta)\cdot s=w^c\cdot s+\beta\cdot s\geq w^c\cdot s+w\cdot s\cdot s= w^c\cdot s+w\cdot s=(w^c+w)\cdot s= s$, que prueba que $(w^c+\beta)\geq s$ y en consecuencia que es el máximo de $\{s\in L / w\cdot s\leq\beta\}$, luego coincide con $w\rightarrow.\beta$.

Por otra parte, de $w+(w^c\cdot\beta)\geq w\cdot\beta+w^c\cdot\beta=\beta$ se deduce que $(w^c\cdot\beta)\in\{t\in L / \beta\leq w+t\}$. Además, $w^c\cdot\beta+t=(w^c+t)\cdot(\beta+t)\leq(w^c+t)\cdot(w+t+t)=(w^c+t)\cdot(w+t)=t$ prueba que $w^c\cdot\beta$ es el mínimo , es decir $w^c\cdot\beta=\beta\div w$.∎

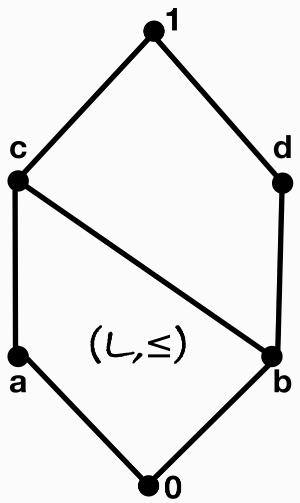
<u>Proposición</u>. Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ es una cadena, entonces

$$(1)\quad \alpha\rightarrow.\beta=\begin{cases}\beta & \text{si } \alpha>\beta\\ 1 & \text{si } \alpha\leq\beta\end{cases}\ ; \qquad (2)\ \beta\div\alpha=\begin{cases}0 & \text{si } \alpha\geq\beta\\ \beta & \text{si } \alpha<\beta\end{cases}\ .$$

<u>Demostración</u>. (1) Si $\alpha>\beta$ entonces $\{s\in L / \alpha\cdot s\leq\beta\}=\{s\in L / \min(\alpha,s)\leq\beta\}=[0,\beta]$, luego $\alpha\rightarrow.\beta=\max[0,\beta]=\beta$. Si $\alpha\leq\beta$ entonces $\{s\in L / \min(\alpha,s)\leq\beta\}=[0,1]$, luego $\alpha\rightarrow.\beta=1$.

(2) Si $\alpha\geq\beta$ entonces $\{t\in L / \beta\leq w+t\}=\{t\in L / \beta\leq\max(\alpha,t)\}=[0,1]$, luego $\beta\div\alpha=\min[0,1]=0$. Si $\alpha<\beta$ entonces $\{t\in L / \beta\leq\max(\alpha,t)\}=[\beta,1]$, luego $\beta\div\alpha=\min[\beta,1]=\beta$.∎

Ejemplos de los operadores "$\rightarrow$." y "$\div$" en retículos distributivos .



N(L) = {0,a,d,1}

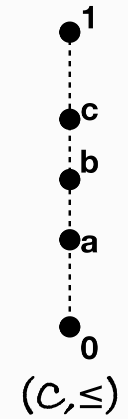
$\alpha \rightarrow . \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

N(C) = {0,1}

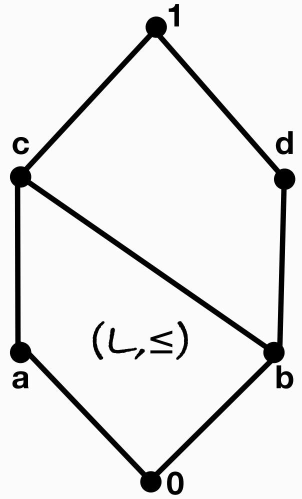


$\alpha \rightarrow . \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0



$N(L)=\{0,a,d,1\}$

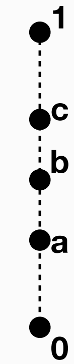
$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

$N(C)=\{0,1\}$



(C,≤)

$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

([0,1],≤)

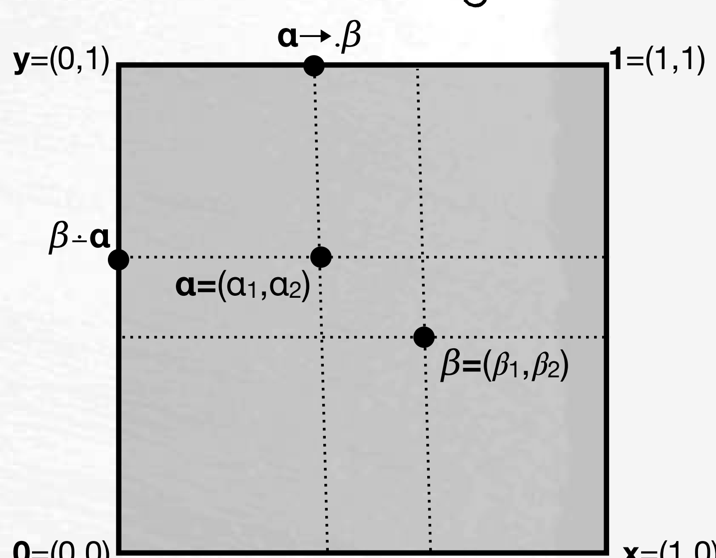
$$\alpha \to. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \le \beta \end{cases}$$

$$\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \ge \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$

$x \to. y = 1,\ y \to. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\le)$

Extensión de los conceptos de "soporte", de "núcleo" y de "a-cortes", a retículos browerianos y dual-browerianos cualesquiera mediante los residuos "$\rightarrow$." y "$\dot{-}$".

Definición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^{c}). Entonces, llamaremos soporte asociado a L, a la aplicación SUPP: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \rightarrow (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ definida por:

$$SUPP(a)=\prod\{w\in N(L) \ / \ a \leq w\} \quad \forall a\in L.$$

Definición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^{c}). Entonces, llamaremos soporte asociado a L, a la aplicación SUPP: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \to (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ definida por:

$$SUPP(a)=\prod\{w\in N(L) \;/\; a\leq w\} \quad \forall a\in L.$$

Y llamaremos núcleo asociado a L, a la aplicación KER: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \to (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ definida por:

$$KER(a)=\sum\{w\in N(L) \;/\; w\leq a\} \quad \forall a\in L.$$

Definición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^{c}). Entonces, llamaremos soporte asociado a L, a la aplicación SUPP: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \rightarrow (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ definida por:

$$SUPP(a)=\prod\{w\in N(L) \ / \ a \leq w\} \quad \forall a\in L.$$

Y llamaremos núcleo asociado a L, a la aplicación KER: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \rightarrow (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ definida por:

$$KER(a)=\sum\{w\in N(L) \ / \ w\leq a\} \quad \forall a\in L.$$

Nota. Como $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ es $\{0,1\}$-subretículo completo de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, entonces para todo $K\subseteq N(L)$ se verifica : $(\prod K \in N(L)) \& (\sum K \in N(L))$. En consecuencia podemos escribir:

$$SUPP(a)=\boldsymbol{Min}\{w\in N(L) \ / \ a \leq w\} \ ; KER(a)=\boldsymbol{Max}\{w\in N(L) \ / \ w\leq a\} \quad \forall a\in L,$$

$$\text{y } \forall a\in L: \ KER(a) \leq a \leq SUPP(a).$$

Definición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^c). Entonces, llamaremos soporte asociado a L, a la aplicación SUPP: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \to (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ definida por:

$$SUPP(a)=\prod\{w\in N(L) \ / \ a\leq w\} \quad \forall a\in L.$$

Y llamaremos núcleo asociado a L, a la aplicación KER: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \to (N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ definida por:

$$KER(a)=\sum\{w\in N(L) \ / \ w\leq a\} \quad \forall a\in L.$$

Nota. Como $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ es $\{0,1\}$-subretículo completo de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, entonces para todo $K\subseteq N(L)$ se verifica : $(\prod K \in N(L))\&(\sum K \in N(L))$. En consecuencia podemos escribir:

$$SUPP(a)=\boldsymbol{Min}\{w\in N(L) \ / \ a\leq w\} \ ; KER(a)=\boldsymbol{Max}\{w\in N(L) \ / \ w\leq a\} \quad \forall a\in L,$$
$$\text{y } \forall a\in L: \ KER(a)\leq a\leq SUPP(a).$$

Proposición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Se verifica:

(i) $KER(a)\leq a\leq SUPP(a) \quad \forall a\in L; \quad (a\in N(L))\Leftrightarrow(KER(a)=a)\Leftrightarrow(SUPP(a)=a)$.

(ii) $(a_1\leq a_2) \Rightarrow (KER(a_1)\leq KER(a_2))\&(SUPP(a_1)\leq SUPP(a_2))$.

(iii) $KER(KER(a))=KER(a); \quad SUPP(SUPP(a))=SUPP(a) \ \forall a\in L,$
$KER(SUPP(a))=SUPP(a); \quad SUPP(KER(a))=KER(a) \ \forall a\in L.$

(iv) $SUPP(a)= (KER(a\to .0))^c \ ; KER(a)= (SUPP(1\div a))^c \quad \forall a\in L.$

(v) $SUPP(\sum M)=\sum SUPP(M); \ KER(\prod M)=\prod KER(M) \ \forall M\subseteq L.$

Definición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^c). Entonces, llamaremos soporte asociado a L, a la aplicación SUPP: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \rightarrow ((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ definida por:

$$SUPP(a)=\prod\{w\in N(L) \;/\; a \leq w\} \quad \forall a\in L.$$

Y llamaremos núcleo asociado a L, a la aplicación KER: $(L,\leq,\cdot,+,0,1) \rightarrow ((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$ definida por:

$$KER(a)=\sum\{w\in N(L) \;/\; w\leq a\} \quad \forall a\in L.$$

Nota. Como $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ es $\{0,1\}$-subretículo completo de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, entonces para todo $K\subseteq N(L)$ se verifica : $(\prod K \in N(L))\&(\sum K \in N(L))$. En consecuencia podemos escribir:

$$SUPP(a)=\boldsymbol{Min}\{w\in N(L) \;/\; a \leq w\} \;;\; KER(a)=\boldsymbol{Max}\{w\in N(L) \;/\; w\leq a\} \quad \forall a\in L,$$

$$\text{y } \forall a\in L:\; KER(a) \leq a \leq SUPP(a).$$

Proposición. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano. Se verifica:

(i) $KER(a) \leq a \leq SUPP(a) \quad \forall a\in L; \quad (a\in N(L))\Leftrightarrow(KER(a)=a)\Leftrightarrow(SUPP(a)=a)$.

(ii) $(a_1\leq a_2) \Rightarrow (KER(a_1) \leq KER(a_2))\&(SUPP(a_1) \leq SUPP(a_2))$.

(iii) $KER(KER(a))=KER(a); \quad SUPP(SUPP(a))=SUPP(a) \;\forall a\in L,$

$KER(SUPP(a))=SUPP(a); \quad SUPP(KER(a))=KER(a) \;\forall a\in L.$

(iv) $SUPP(a)= (KER(a\rightarrow 0))^c \;;\; KER(a)= (SUPP(1\div a))^c \quad \forall a\in L.$

(v) $SUPP(\sum M)=\sum SUPP(M); \; KER(\prod M)=\prod KER(M) \quad \forall M\subseteq L.$

Demostración. (i) El elemento a es un minorante del subconjunto $\{w\in N(L) \;/\; a \leq w\}$ y un mayorante del subconjunto $\{w\in N(L) \;/\; w\leq a\}$, luego será menor o igual que el supremo del primero y mayor o igual que el ínfimo del segundo. Es decir: $KER(a) \leq a \leq SUPP(a)$.

Si $a\in N(L)$, es evidente que $a\in\{w\in N(L) \;/\; a \leq w\}$ y $a\in\{w\in N(L) \;/\; w \leq a\}$. Además, es elemento mínimo del primero y máximo del segundo, luego $(KER(a)=a)\&(SUPP(a)=a)$. Si $KER(a)=a$ o si $SUPP(a)=a$, es evidente que $a\in N(L)$.

(Continúa)

(Continuación)

Demostración. (ii) Si $(a_1 \leq a_2)$ entonces $(w \leq a_1) \Rightarrow (w \leq a_2)$, luego $\{w \in N(L) \ / \ w \leq a_1\} \subseteq \{w \in N(L) \ / \ w \leq a_2\}$ y en consecuencia sus supremos respectivos $KER(a_1)$ y $KER(a_2)$ verifican: $KER(a_1) \leq KER(a_2)$.

Por otra parte, para la misma hipótesis $(a_1 \leq a_2)$ se cumple $(a_2 \leq w) \Rightarrow (a_1 \leq w)$, luego $\{w \in N(L) \ / \ a_2 \leq w\} \subseteq \{w \in N(L) \ / \ a_1 \leq w\}$ y en consecuencia, los ínfimos respectivos $SUPP(a_2)$ y $SUPP(a_1)$ verifican $(SUPP(a_1) \leq SUPP(a_2))$.

(iii) Como $KER(a) \in N(L)$ y $SUPP(a) \in N(L)$, del resultado demostrado en (i) se deduce trivialmente las igualdades de este apartado.

(iv) Demostremos en primer lugar que, $\forall a \in L$: $[(w \in N(L)) \& (a \cdot w^c = 0)] \Leftrightarrow [(w \in N(L)) \& (w \leq a)]$ y $[(w \in N(L)) \& (1 = w^c + a)] \Leftrightarrow [(w \in N(L)) \& (a \leq w)]$. En efecto, supongamos que $w \in N(L)$.

Si $a \cdot w^c = 0$ entonces $a = a \cdot 1 = a \cdot (w + w^c) = a \cdot w + a \cdot w^c = a \cdot w + 0 = a \cdot w$, luego $a \leq w$. Si partimos de esta última desigualdad: $a \cdot w^c \leq w \cdot w^c = 0$, luego $a \cdot w^c = 0$.
Si $1 = w^c + a$, entonces $a = a + 0 = a + (w \cdot w^c) = (a + w) \cdot (a + w^c) = (a + w) \cdot 1 = a + w$, luego $w \leq a$. Si partimos de esta última desigualdad: $1 = w + w^c \leq a + w^c$, luego $a + w^c = 1$.

Se verifica: $(KER(a \rightarrow .0))^c = (\sum\{w \in N(L) \ / \ w \leq (a \rightarrow .0)\})^c = (\sum\{w \in N(L) \ / \ w \cdot a = 0)\})^c = \prod\{w^c \in N(L) \ / \ w \cdot a = 0)\} = \prod\{s \in N(L) \ / \ s^c \cdot a = 0)\} = \prod\{s \in N(L) \ / \ a \leq s)\} = SUPP(a)$.

Por otra parte: $(SUPP(1 \dot{-} a))^c = (\prod\{w \in N(L) \ / \ (1 \dot{-} a) \leq w\})^c = (\prod\{w \in N(L) \ / \ 1 = w + a\})^c = \sum\{w^c \in N(L) \ / \ 1 = w + a)\} = \sum\{s \in N(L) \ / \ 1 = s^c + a)\} = \sum\{s \in N(L) \ / \ s \leq a)\} = KER(a)$.

(Continúa)

(Continuación)

<u>Demostración</u>. (v) Sea $M \subseteq L$. Escribimos: $KER(M)=\{Ker(m) \ / \ m \in M\}$. Si $M=\varnothing$ entonces

$$KER(\prod\varnothing)=KER(1)=1=\prod\varnothing=\prod KER(\varnothing).$$

Sea $M \neq \varnothing$. Como $\prod M \leq m \ \forall m \in M$, se verifica: $KER(\prod M) \leq KER(m) \ \forall m \in M$, es decir, $KER(\prod M) \in N(L)$ es minorante de $KER(M)=\{KER(m) / \ m \in M\} \subseteq N(L)$. Sea y otro minorante de este último:

$y \leq KER(m)$ para todo $m \in M$. Como $KER(m)=\mathbf{Max}\{w \in N(L) \ / w \leq m\}$, obtenemos $y \leq KER(m) \leq m$ $\forall m \in M$, luego $y \leq \prod KER(M) \leq \prod M$, es decir $y \leq \prod KER(M) \in \{w \in N(L) \ / \ w \leq \prod M\}$, luego $y \leq KER(\prod M)$, que prueba que $KER(\prod M)$ es el mayor de los minorares de $KER(M)$ y concluimos que $KER(\prod M) = \prod KER(M)$.

Por otra parte, Si $M=\varnothing$ entonces $SUPP(\sum\varnothing)=SUPP(0)=0=\sum\varnothing=\sum SUPP(\varnothing)$.

Y si $M \neq \varnothing$: $SUPP(\sum M)=(KER((\sum M)\rightarrow .0))^c=(KER(\prod(M\rightarrow .0)))^c=(\prod KER(M\rightarrow .0))^c=$ $\sum(KER(M\rightarrow .0))^c=\sum SUPP(M)$.∎

(Continuación)

<u>Demostración</u>. (v) Sea $M \subseteq L$. Escribimos: $KER(M)=\{Ker(m) \,/\, m \in M\}$. Si $M=\varnothing$ entonces

$$KER(\prod\varnothing)=KER(1)=1=\prod\varnothing=\prod KER(\varnothing).$$

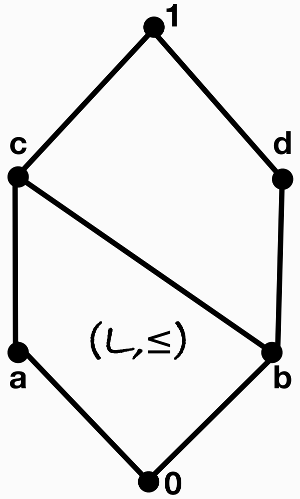
Sea $M \neq \varnothing$. Como $\prod M \leq m \ \forall m \in M$, se verifica: $KER(\prod M) \leq KER(m) \ \forall m \in M$, es decir, $KER(\prod M) \in N(L)$ es minorante de $KER(M)=\{KER(m)/ \, m \in M\} \subseteq N(L)$. Sea γ otro minorante de este último:

$\gamma \leq KER(m)$ para todo $m \in M$. Como $KER(m)=\mathbf{Max}\{w \in N(L) \,/ w \leq m\}$, obtenemos $\gamma \leq KER(m) \leq m$ $\forall m \in M$, luego $\gamma \leq \prod KER(M) \leq \prod M$, es decir $\gamma \leq \prod KER(M) \in \{w \in N(L) \,/\, w \leq \prod M\}$, luego $\gamma \leq KER(\prod M)$, que prueba que $KER(\prod M)$ es el mayor de los minorares de $KER(M)$ y concluimos que $KER(\prod M) = \prod KER(M)$.

Por otra parte, si $M=\varnothing$ entonces $SUPP(\sum\varnothing)=SUPP(0)=0=\sum\varnothing=\sum SUPP(\varnothing)$.

Y si $M \neq \varnothing$: $SUPP(\sum M)=(KER((\sum M)\to .0))^c=(KER(\prod(M\to .0)))^c=(\prod KER(M\to .0))^c=$ $\sum(KER(M\to .0))^c=\sum SUPP(M)$.∎

<u>Corolario</u>. (1) Como aplicaciones entre los retículos $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ y $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ el operador "KER" es una erosión morfológica y el operador "SUPP" una dilatación morfológica.
(2) Considerados ahora como aplicaciones de $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ en sí mismo, son filtros morfológicos: El operador "KER" una apertura morfológica y el operador "SUPP" un cierre morfológico.∎



N(L) = {0,a,d,1}

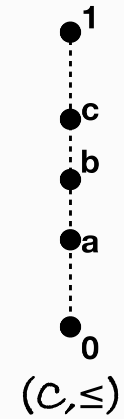
$\alpha \rightarrow . \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

N(C) = {0,1}



$\alpha \rightarrow . \beta$

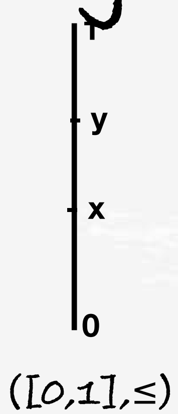
→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

El núcleo "KER" y el soporte "SUPP" en los ejemplos anteriores

N([0,1]) = {0,1}



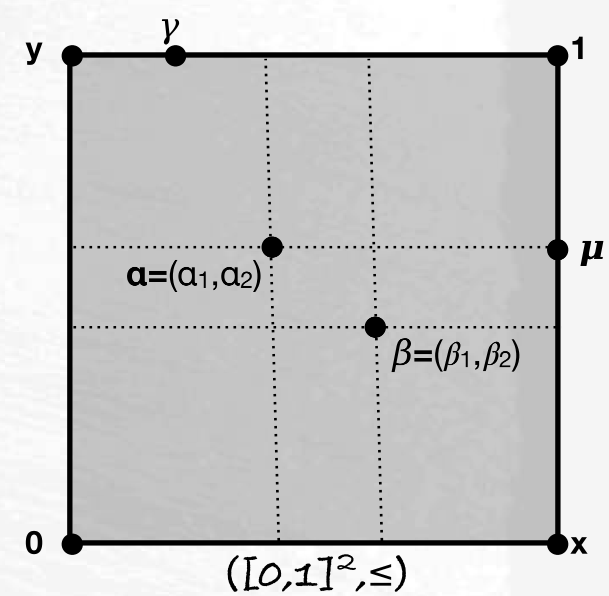
Implicación: $\alpha \rightarrow . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

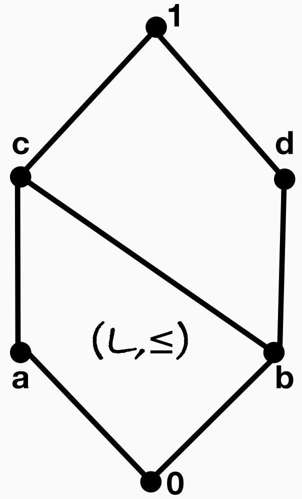
Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \rightarrow . y = 1$, $y \rightarrow . x = x$,...

$y \dot{-} x = y$, $x \dot{-} y = 0$,...

N([0,1]²) = {0,x,y,1}





$N(L)=\{0,a,d,1\}$

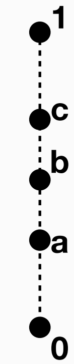
$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

$N(C)=\{0,1\}$



$(C,\leq)$

$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

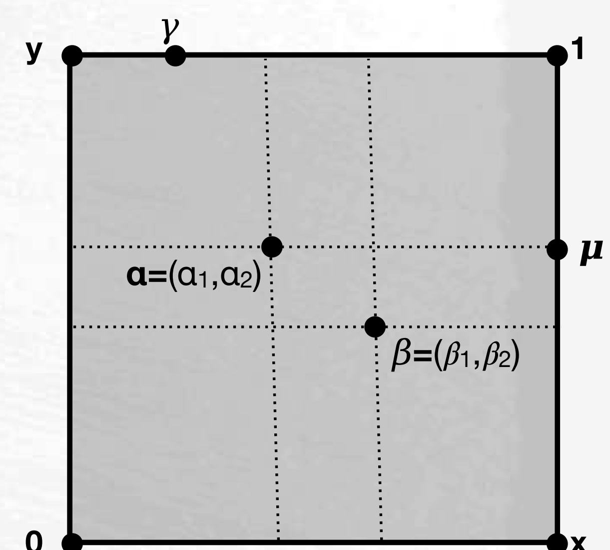
Implicación: $\alpha \rightarrow. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

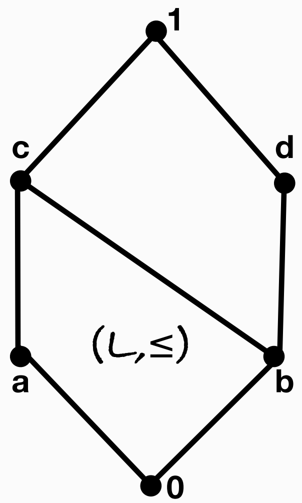
$x \rightarrow. y = 1,\ y \rightarrow. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$



$N(L)=\{0,a,d,1\}$

$\alpha \rightarrow . \beta$

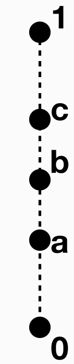
$\rightarrow.$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$(C,\leq)$

$\alpha \rightarrow . \beta$

$\rightarrow.$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

Implicación: $\alpha \rightarrow . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \rightarrow . y = 1,\ y \rightarrow . x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

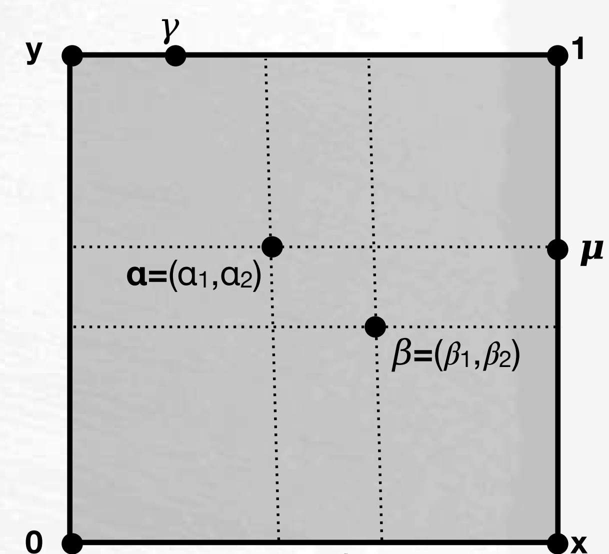
SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$

SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP($\boldsymbol{\mu}$) = 1

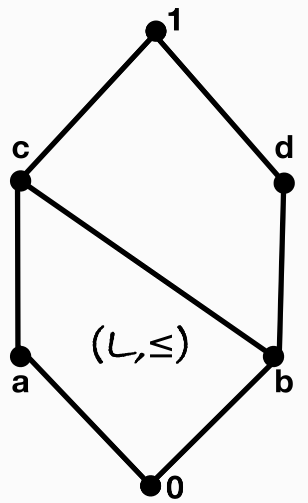
KER(γ) = y, KER($\boldsymbol{\mu}$) = x

SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1



$N(L)=\{0,a,d,1\}$

$\alpha \to . \beta$

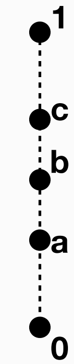
→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$(C,\leq)$

$\alpha \to . \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

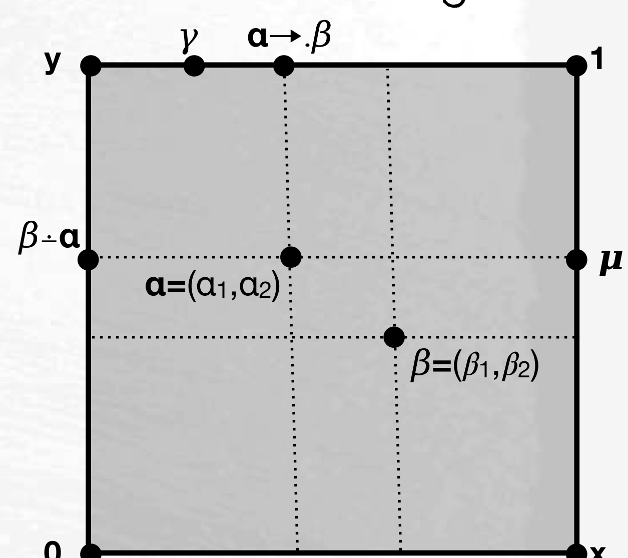
Implicación: $\alpha \to . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to . y = 1,\ y \to . x = x, \ldots$
$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

$SUPP(x)=SUPP(y)=1$
$KER(x)=KER(y)=0$
$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$
$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$

$SUPP(\alpha)=SUPP(\beta)=1$
$KER(\alpha)=KER(\beta)=0$
$SUPP(\gamma)=1,\ SUPP(\boldsymbol{\mu})=1$
$KER(\gamma)=y,\ KER(\boldsymbol{\mu})=x$
$SUPP(x)=x,\ SUPP(y)=y$
$KER(x)=x,\ KER(y)=y$
$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$
$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

Extensión de los conceptos de "α-corte" y de "α-corte estricto" a retículos browerianos y dual-browerianos $(L,\leq)$ cualesquiera mediante los residuos "$\rightarrow$." y "$\dot{-}$" y el soporte y el núcleo en $(L,\leq)$.

<u>Definiciones</u>. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^{c}). Entonces, para todo par $(x,a)\in L\times L$, llamaremos "<u>a-corte</u>" <u>de</u> <u>x</u> al elemento $x_a\in N(L)$ tal que:

$$x_a=KER(a\rightarrow x)=\sum\{w\in N(L)\ /\ w\leq(a\rightarrow x)\}=\sum\{w\in N(L)\ /\ w\cdot a\leq x)\}.$$

Lamaremos "<u>a-corte estrícto</u>" <u>de</u> <u>x</u> al elemento $x^*_a\in N(L)$ tal que:

$$x^*_a=SUPP(x\div a)=\prod\{w\in N(L)\ /(x\div a)\leq w\}=\prod\{w\in N(L)\ /\ x\leq(w+a)\}.$$

Definiciones. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^c). Entonces, para todo par $(x,\alpha)\in L\times L$, llamaremos "α-corte" de x al elemento $x_\alpha \in N(L)$ tal que:

$$x_\alpha = KER(\alpha \rightarrow .x) = \sum\{w\in N(L) \ / \ w \leq (\alpha\rightarrow .x)\} = \sum\{w\in N(L) \ / \ w\cdot\alpha \leq x)\}.$$

Lamaremos "α-corte estricto" de x al elemento $x^*_\alpha \in N(L)$ tal que:

$$x^*_\alpha = SUPP(x \dot{-} \alpha) = \prod\{w\in N(L) \ / (x\dot{-}\alpha) \leq w\} = \prod\{w\in N(L) \ / \ x \leq (w+\alpha)\}.$$

Proposición. Se verifica:

(i) $(\alpha \leq x) \Rightarrow (x_\alpha = 1)$; $(x \leq \alpha) \Rightarrow (x^*_\alpha = 0)$.

(ii) $(x \leq y) \Rightarrow [(x_\alpha \leq y_\alpha) \& (x^*_\alpha \leq y^*_\alpha)]$ $\forall \alpha \in L$.

(iii) $(\alpha \leq \beta) \Rightarrow [(x_\alpha \geq x_\beta) \& (x^*_\alpha \geq x^*_\beta)]$ $\forall x \in L$.

(iv) $x_0 = 1$; $x_x = 1$; $x_1 = KER(x)$; $x^*_0 = SUPP(x)$; $x^*_x = 0$; $x^*_1 = 0$ $\forall x \in L$.

(v) $x_{\Sigma M} = \prod\{x_m \ / \ m\in M\}$; $x^*_{\Pi M} = \sum\{x^*_m \ / \ m \in M\}$ $\forall M \subseteq L$

(vi) $x\in N(L) \Rightarrow (x_1 = x^*_0 = x)$.

Definiciones. Sea $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$ completo, broweriano y dual-broweriano y sea $(N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^{c})$ el álgebra de Boole de sus elementos complementados w (con complemento w^c). Entonces, para todo par $(x,a)\in L\times L$, llamaremos "a-corte" de x al elemento $x_a\in N(L)$ tal que:

$$x_a=KER(a\rightarrow.x)=\sum\{w\in N(L)\ /\ w\leq(a\rightarrow.x)\}=\sum\{w\in N(L)\ /\ w\cdot a\leq x)\}.$$

Lamaremos "a-corte estricto" de x al elemento $x^*_a\in N(L)$ tal que:

$$x^*_a=SUPP(x\div a)=\prod\{w\in N(L)\ /(x\div a)\leq w\}=\prod\{w\in N(L)\ /\ x\leq(w+a)\}.$$

Proposición. Se verifica:

(i) $(a\leq x)\Rightarrow(x_a=1)$; $(x\leq a)\Rightarrow(x^*_a=0)$.

(ii) $(x\leq y)\Rightarrow[(x_a\leq y_a)\&(x^*_a\leq y^*_a)]\ \ \forall a\in L$.

(iii) $(a\leq\beta)\Rightarrow[(x_a\geq x_\beta)\&(x^*_a\geq x^*_\beta)]\ \ \forall x\in L$.

(iv) $x_0=1$; $x_x=1$; $x_1=KER(x)$; $x^*_0=SUPP(x)$; $x^*_x=0$; $x^*_1=0\ \ \ \forall x\in L$.

(v) $x_{\sum M}=\prod\{x_m\ /\ m\in M\}$; $x^*_{\prod M}=\sum\{x^*_m\ /\ m\in M\}\ \forall M\subseteq L$

(vi) $x\in N(L)\Rightarrow(x_1=x^*_0=x)$.

Demostración. (i) Si $a\leq x$: $x_a=KER(a\rightarrow.x)=KER(1)=1$.

Si $x\leq a$: $x^*_a=SUPP(x\div a)=SUPP(0)=0$.

(ii) $(x\leq y)\Rightarrow[(a\rightarrow.x)\leq(a\rightarrow.y)]\Rightarrow[KER(a\rightarrow.x)\leq KER(a\rightarrow.y)]\Rightarrow[x_a\leq y_a]$.

$(x\leq y)\Rightarrow[(x\div a)\leq(y\div a)]\Rightarrow[SUPP(x\div a)\leq SUPP((y\div a))]\Rightarrow[x^*_a\leq y^*_a]$.

(iii) $(a\leq\beta)\Rightarrow[(a\rightarrow.x)\geq(\beta\rightarrow.x)]\Rightarrow[KER(a\rightarrow.x)\geq KER((\beta\rightarrow.x)]\Rightarrow[x_a\geq x_\beta]$.

$(a\leq\beta)\Rightarrow[(x\div a)\geq(x\div\beta)]\Rightarrow[SUPP(x\div a)\geq SUPP(x\div\beta)]\Rightarrow[x^*_a\geq x^*_\beta]$.

(iv) $x_0=KER(0\rightarrow.x)=1$; $x_x=KER(x\rightarrow.x)=1$; $x_1=KER(1\rightarrow.x)=KER(x)$;

$x^*_0=SUPP(x\div 0)=SUPP(x)$; $x^*_x=SUPP(x\div x)=SUPP(0)=0$; $x^*_1=SUPP(x\div 1)=SUPP(0)=0$.

(Continúa)

(Continuación)

<u>Demostración</u>. (v) Para $M=\varnothing$: $x_{\sum\varnothing}=x_0=1=\prod\varnothing=\prod\{x_m / m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:

$x_{\sum M}=KER(\sum M\rightarrow .x)=KER(\prod(M\rightarrow .x))=\prod KER(M\rightarrow .x)=\prod\{KER(m\rightarrow .x) / m\in M\}=\prod\{x_m / m\in M\}$.

Para $M=\varnothing$: $x^*_{\prod\varnothing}=x^*_1=0=\sum\varnothing=\sum\{x^*_m / m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:

$x^*_{\prod M}=SUPP(x\div\prod M)=SUPP(\sum(x\div M))=\sum SUPP(x\div M)=\sum\{SUPP(x\div m) / m\in M\}=\sum\{x^*_m / m\in M\}$.

(vi) Sea $x\in N(L)$. Se verifica: $x_1=KER(1\rightarrow .x)=KER(x)=x$. Además, $x^*_0=SUPP(x\div 0)=SUPP(x)=x$.∎

(Continuación)

Demostración. (v) Para $M=\varnothing$: $x_{\sum\varnothing}=x_0=1=\prod\varnothing=\prod\{x_m \,/\, m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:
$x_{\sum M}=KER(\sum M\to .x)=KER(\prod(M\to .x))=\prod KER(M\to .x)=\prod\{KER(m\to .x) \,/\, m\in M\}=\prod\{x_m \,/\, m\in M\}$.
Para $M=\varnothing$: $x^*_{\prod\varnothing}=x^*_1=0=\sum\varnothing=\sum\{x^*_m \,/\, m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:
$x^*_{\prod M}=SUPP(x\div\prod M)=SUPP(\sum(x\div M))=\sum SUPP(x\div M)=\sum\{SUPP(x\div m) \,/\, m\in M\}=\sum\{x^*_m \,/\, m\in M\}$.
(vi) Sea $x\in N(L)$. Se verifica: $x_1=KER(1\to .x)=KER(x)=x$. Además, $x^*_0= SUPP(x\div 0)= SUPP(x)=x$.∎

Nota. Como se verifica $\forall a\in L$ que: $a\cdot x_a=a\cdot KER(a\to .x)\leq a\cdot(a\to .x)\leq x$, entonces se cumple la desigualdad $\sum_{a\in S}a\cdot x_a\leq x$ $\forall S\subseteq L$, $\forall x\in L$. También, de $a+x^*_a= a+SUPP(x\div a)\geq a+(x\div a)\geq x$, se deduce que $\prod_{a\in S}(a+x^*_a)\geq x$ $\forall S\subseteq L$, $\forall x\in L$.

(Continuación)

Demostración. (v) Para $M=\emptyset$: $x_{\Sigma\emptyset}=x_0=1=\prod\emptyset=\prod\{x_m / m\in\emptyset\}$. Si $M\neq\emptyset$:
$x_{\Sigma M}=KER(\Sigma M\to.x)=KER(\prod(M\to.x))=\prod KER(M\to.x)=\prod\{KER(m\to.x) / m\in M\}=\prod\{x_m / m\in M\}$.
Para $M=\emptyset$: $x^*_{\prod\emptyset}=x^*_1=0=\sum\emptyset=\sum\{x^*_m / m\in\emptyset\}$. Si $M\neq\emptyset$:
$x^*_{\prod M}=SUPP(x\div\prod M)=SUPP(\sum(x\div M))=\sum SUPP(x\div M)=\sum\{SUPP(x\div m) / m\in M\}=\sum\{x^*_m / m\in M\}$.
(vi) Sea $x\in N(L)$. Se verifica: $x_1=KER(1\to.x)=KER(x)=x$. Además, $x^*_0= SUPP(x\div 0)= SUPP(x)=x$.∎

Nota. Como se verifica $\forall a\in L$ que: $a\cdot x_a=a\cdot KER(a\to.x)\leq a\cdot(a\to.x)\leq x$, entonces se cumple la desigualdad $\sum\limits_{a\in S}a\cdot x_a\leq x \ \ \forall S\subseteq L, \forall x\in L$. También, de $a+x^*_a= a+SUPP(x\div a)\geq a+(x\div a)\geq x$, se deduce que $\prod\limits_{a\in S}(a+x^*_a)\geq x \ \ \forall S\subseteq L, \forall x\in L$.

Una CUESTIÓN ABIERTA relacionada con la nota anterior:

Conocemos que, en el caso de retículos $(L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E)$ de subconjuntos L-borrosos asociado a un retículo distributivo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, existe una familia $S\subseteq L^E$, (la formada por los L-borrosos constantes $\tilde{a}$ tales que $\tilde{a}(x)=a \ \forall x\in E$), para la que se verifica:

$\sum\limits_{a\in L}\tilde{a}\cdot A_a = A = \prod\limits_{a\in L}(\tilde{a}+A^*_a) \ \forall A\in L^E$. (Teoremas de representación de L-borrosos mediante a-cortes) .

(Continuación)

Demostración. (v) Para $M=\emptyset$: $x_{\sum\emptyset}=x_0=1=\prod\emptyset=\prod\{x_m / m\in\emptyset\}$. Si $M\neq\emptyset$:
$x_{\sum M}=KER(\sum M\rightarrow.x)=KER(\prod(M\rightarrow.x))=\prod KER(M\rightarrow.x)=\prod\{KER(m\rightarrow.x) / m\in M\}=\prod\{x_m / m\in M\}$.
Para $M=\emptyset$: $x^*_{\prod\emptyset}=x^*_1=0=\sum\emptyset=\sum\{x^*_m / m\in\emptyset\}$. Si $M\neq\emptyset$:
$x^*_{\prod M}=SUPP(x\div\prod M)=SUPP(\sum(x\div M))=\sum SUPP(x\div M)=\sum\{SUPP(x\div m) / m\in M\}=\sum\{x^*_m / m\in M\}$.
(vi) Sea $x\in N(L)$. Se verifica: $x_1=KER(1\rightarrow.x)=KER(x)=x$. Además, $x^*_0=SUPP(x\div 0)=SUPP(x)=x$.∎

Nota. Como se verifica $\forall a\in L$ que: $a\cdot x_a=a\cdot KER(a\rightarrow.x)\leq a\cdot(a\rightarrow.x)\leq x$, entonces se cumple la desigualdad $\sum_{a\in S}a\cdot x_a\leq x$ $\forall S\subseteq L$, $\forall x\in L$. También, de $a+x^*_a=a+SUPP(x\div a)\geq a+(x\div a)\geq x$, se deduce que $\prod_{a\in S}(a+x^*_a)\geq x$ $\forall S\subseteq L$, $\forall x\in L$.

Una CUESTIÓN ABIERTA relacionada con la nota anterior:

Conocemos que, en el caso de retículos $(L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E)$ de subconjuntos L-borrosos asociado a un retículo distributivo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, existe una familia $S\subseteq L^E$, (la formada por los L-borrosos constantes $\tilde{a}$ tales que $\tilde{a}(x)=a$ $\forall x\in E$), para la que se verifica:
$\sum_{a\in L}\tilde{a}\cdot A_a=A=\prod_{a\in L}(\tilde{a}+A^*_a)$ $\forall A\in L^E$. (Teoremas de representación de L-borrosos mediante a-cortes) .

En esta línea, la cuestión es: Dado un retículo broweriano y dual-broweriano $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, ¿ existen subconjuntos propios S de L , (que sean por ejemplo minimales para la inclusión), tales que:

$$\sum_{a\in S}a\cdot x_a=x=\prod_{a\in S}(a+x^*_a)\quad\forall x\in L\ ?$$

(Continuación)

Demostración. (v) Para $M=\varnothing$: $x_{\Sigma\varnothing}=x_0=1=\prod\varnothing=\prod\{x_m / m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:
$x_{\Sigma M}=KER(\Sigma M\rightarrow .x)=KER(\prod(M\rightarrow .x))=\prod KER(M\rightarrow .x)=\prod\{KER(m\rightarrow .x) / m\in M\}=\prod\{x_m / m\in M\}$.
Para $M=\varnothing$: $x^*_{\prod\varnothing}=x^*_1=0=\sum\varnothing=\sum\{x^*_m / m\in\varnothing\}$. Si $M\neq\varnothing$:
$x^*_{\prod M}=SUPP(x\div\prod M)=SUPP(\sum(x\div M))=\sum SUPP(x\div M)=\sum\{SUPP(x\div m) / m\in M\}=\sum\{x^*_m / m\in M\}$.
(vi) Sea $x\in N(L)$. Se verifica: $x_1=KER(1\rightarrow .x)=KER(x)=x$. Además, $x^*_0=SUPP(x\div 0)=SUPP(x)=x$.■

Nota. Como se verifica $\forall a\in L$ que: $a\cdot x_a=a\cdot KER(a\rightarrow .x)\leq a\cdot(a\rightarrow .x)\leq x$, entonces se cumple la desigualdad $\sum_{a\in S}a\cdot x_a\leq x$ $\forall S\subseteq L, \forall x\in L$. También, de $a+x^*_a=a+SUPP(x\div a)\geq a+(x\div a)\geq x$, se deduce que $\prod_{a\in S}(a+x^*_a)\geq x$ $\forall S\subseteq L, \forall x\in L$.

Una CUESTIÓN ABIERTA relacionada con la nota anterior:

Conocemos que, en el caso de retículos $(L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E)$ de subconjuntos L-borrosos asociado a un retículo distributivo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, existe una familia $S\subseteq L^E$, (la formada por los L-borrosos constantes $\tilde{a}$ tales que $\tilde{a}(x)=a$ $\forall x\in E$), para la que se verifica:
$\sum_{a\in L}\tilde{a}\cdot A_a = A = \prod_{a\in L}(\tilde{a}+A^*_a)$ $\forall A\in L^E$. (Teoremas de representación de L-borrosos mediante a-cortes) .

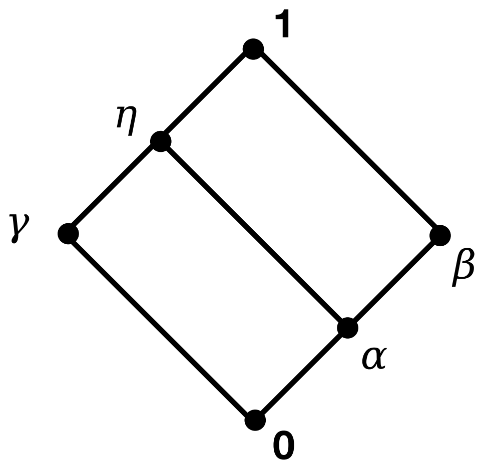
En esta línea, la cuestión es: Dado un retículo broweriano y dual-broweriano $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, ¿ existen subconjuntos propios S de L , (que sean por ejemplo minimales para la inclusión), tales que:
$$\sum_{a\in S}a\cdot x_a = x = \prod_{a\in S}(a+x^*_a) \quad \forall x\in L\ ?$$

Como veremos más adelante, la existencia de estas representaciones de elementos $x\in L$ mediante otros nítidos x_a , x^*_a (es decir, elementos en $N(L)$), ayudaría a la representación de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^x$ asociados a elementos cualesquiera $x\in L$ por otros órdenes $\sqsubseteq^{x_a},\sqsubseteq^{x^*_a}$, con más propiedades asociadas al carácter de elementos complementados que tienen tanto x_a como x^*_a.

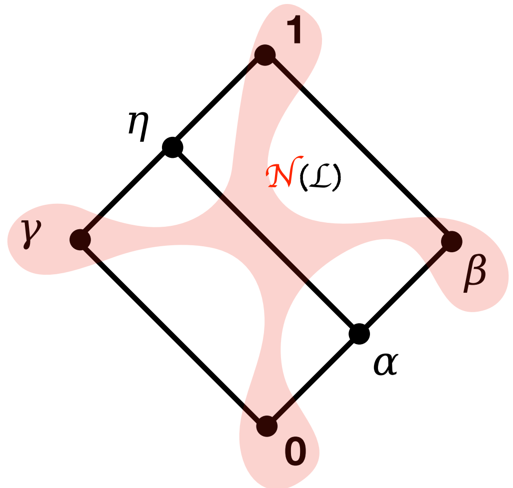
(Véase ejemplo en la transparencia siguiente)

Ejemplo de representación en retículos $(\mathcal{L},\leq)$ de un elemento $x\in\mathcal{L}$ mediante una familia de "α-cortes" $x_\alpha\in\mathcal{N}(\mathcal{L})$.

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



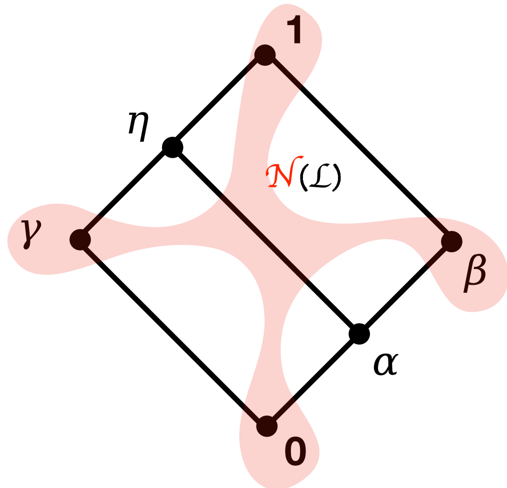
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\to$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

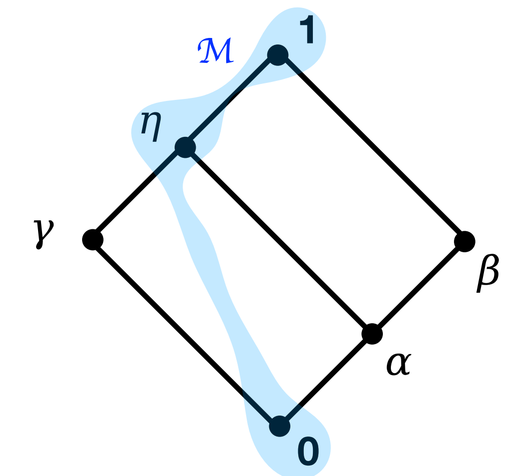
x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

$x_y \to$	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

→	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \rightarrow y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	Ker(x)
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

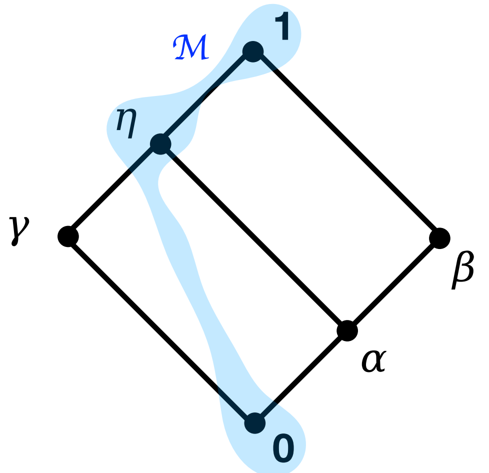
Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \rightarrow x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \mathsf{X} \mathcal{M}$.

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

→	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \rightarrow y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	Ker(x)
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y →	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

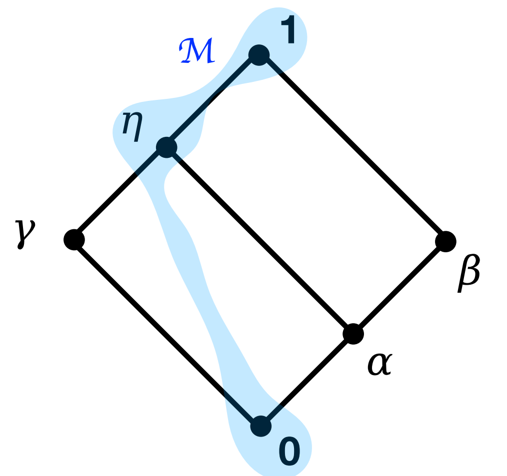
s-cortes:
$x_s = Ker(s \rightarrow x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \mathsf{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$$
$$\alpha = 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$$
$$\beta = 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$$
$$\gamma = 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$$
$$\eta = 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$$
$$1 = 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

$\to$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \times \mathcal{M}$.

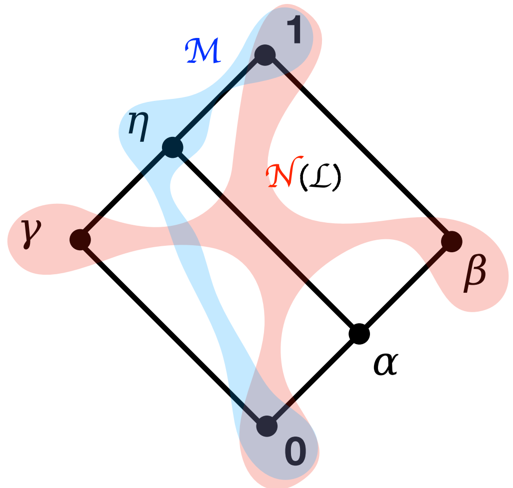
Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$$
$$\alpha = 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$$
$$\beta = 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$$
$$\gamma = 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$$
$$\eta = 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$$
$$1 = 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_0\cdot 0+x_\eta\cdot\eta+x_1\cdot 1 = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

→	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	Ker(x)
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y →	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})\text{-}\{\mathbf{0}\}) \mathsf{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

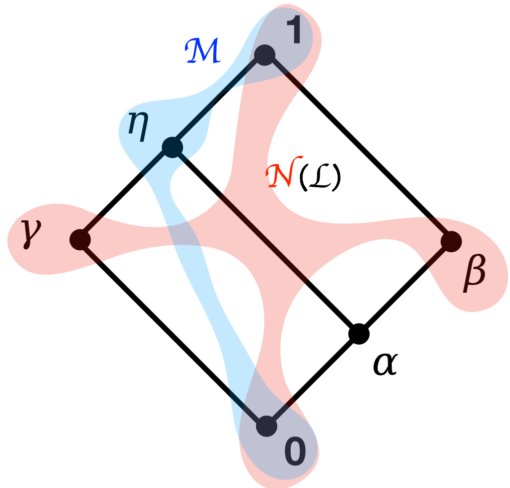
$0 =$	$0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 =$	$0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$
$\alpha =$	$0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 =$	$\alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$
$\beta =$	$0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 =$	$\beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$
$\gamma =$	$0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 =$	$\gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$
$\eta =$	$0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 =$	$\eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$
$1 =$	$0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 =$	$1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_0\cdot 0+x_\eta\cdot\eta+x_1\cdot 1=\sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

→	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \ / \ x \cdot k \leq y\}$

x	Ker(x)
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \ / \ w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \times \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 = 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$

$\alpha = 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$

$\beta = 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$

$\gamma = 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$

$\eta = 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$

$1 = 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

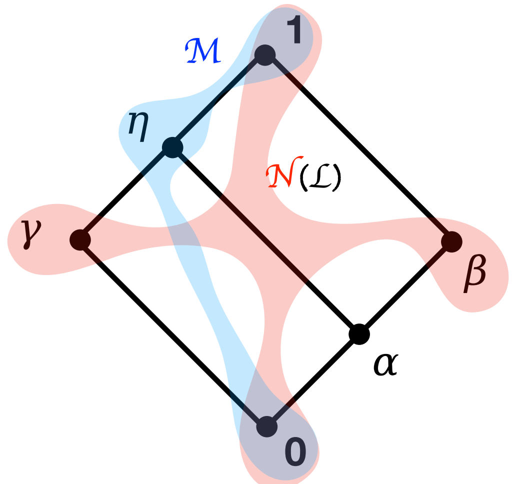
$$x = x_0\cdot 0 + x_\eta\cdot\eta + x_1\cdot 1 = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s\in\mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ y $z = \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\rightarrow$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo:
$x \rightarrow y = \sum\{k \in \mathcal{L} \ / \ x \cdot k \leq y\}$

x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo:
$Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \ / \ w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes:
$x_s = Ker(s \rightarrow x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \mathrm{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$\begin{aligned}
0 &= 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1\\
\alpha &= 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1\\
\beta &= 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1\\
\gamma &= 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1\\
\eta &= 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1\\
1 &= 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1
\end{aligned}$$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_0\cdot 0+x_\eta\cdot\eta+x_1\cdot 1 = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

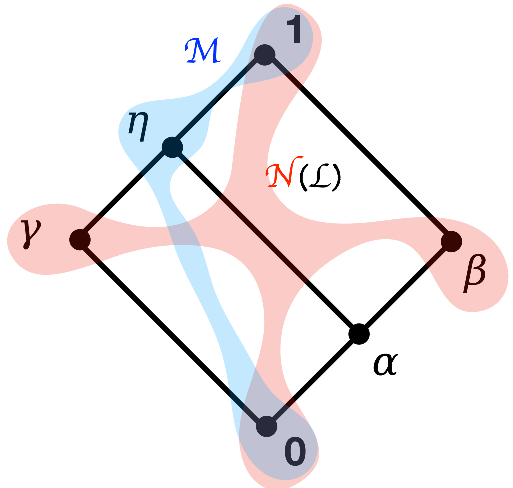
Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ y $z = \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \ \forall s \in \mathcal{M})$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(s \rightarrow x) \leq (s \rightarrow z) \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow [Ker(s \rightarrow x) \leq Ker(s \rightarrow z) \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow (x_s \leq z_s \ \forall s \in \mathcal{M})$.

$\Rightarrow$). $(x_s \leq z_s \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (x_s\cdot s \leq z_s\cdot s \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \leq \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\rightarrow$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo: $x \rightarrow y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo: $Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes: $x_s = Ker(s \rightarrow x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})\text{-}\{\mathbf{0}\}) \mathrm{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$$
$$\alpha = 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$$
$$\beta = 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$$
$$\gamma = 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$$
$$\eta = 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$$
$$1 = 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_0\cdot 0+x_\eta\cdot\eta+x_1\cdot 1 = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s\in\mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ y $z = \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

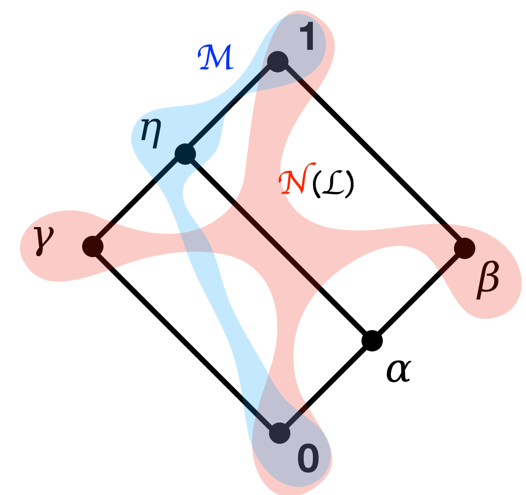
Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(s \rightarrow x) \leq (s \rightarrow z)\ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow [Ker(s \rightarrow x) \leq Ker(s \rightarrow z)\ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow (x_s \leq z_s\ \ \forall s \in \mathcal{M})$.

$\Rightarrow$). $(x_s \leq z_s\ \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (x_s\cdot s \leq z_s\cdot s\ \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \leq \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

Corolario. Fijado el subconjunto $\mathcal{M}$, la familia $(x_s)_{s\in\mathcal{M}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x_s = z_s\ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\rightarrow$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo: $x \rightarrow y = \sum\{k \in \mathcal{L} \;/\; x \cdot k \leq y\}$

x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo: $Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \;/\; w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes: $x_s = Ker(s \rightarrow x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{0}\}) \mathrm{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0+0+0 = 1\cdot 0+0\cdot\eta+0\cdot 1 = 0_0\cdot 0+0_\eta\cdot\eta+0_1\cdot 1$$
$$\alpha = 0+\alpha+0 = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+0\cdot 1 = \alpha_0\cdot 0+\alpha_\eta\cdot\eta+\alpha_1\cdot 1$$
$$\beta = 0+\alpha+\beta = 1\cdot 0+\beta\cdot\eta+\beta\cdot 1 = \beta_0\cdot 0+\beta_\eta\cdot\eta+\beta_1\cdot 1$$
$$\gamma = 0+\gamma+\gamma = 1\cdot 0+\gamma\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \gamma_0\cdot 0+\gamma_\eta\cdot\eta+\gamma_1\cdot 1$$
$$\eta = 0+\eta+\gamma = 1\cdot 0+1\cdot\eta+\gamma\cdot 1 = \eta_0\cdot 0+\eta_\eta\cdot\eta+\eta_1\cdot 1$$
$$1 = 0+\eta+1 = 1\cdot 0+1\cdot\eta+1\cdot 1 = 1_0\cdot 0+1_\eta\cdot\eta+1_1\cdot 1$$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_0\cdot 0+x_\eta\cdot\eta+x_1\cdot 1 = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \qquad (1)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s\in\mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ y $z = \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \;\; \forall s \in \mathcal{M})$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(s \rightarrow x) \leq (s \rightarrow z)\;\; \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow [Ker(s \rightarrow x) \leq Ker(s \rightarrow z)\;\; \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow (x_s \leq z_s\;\; \forall s \in \mathcal{M})$.

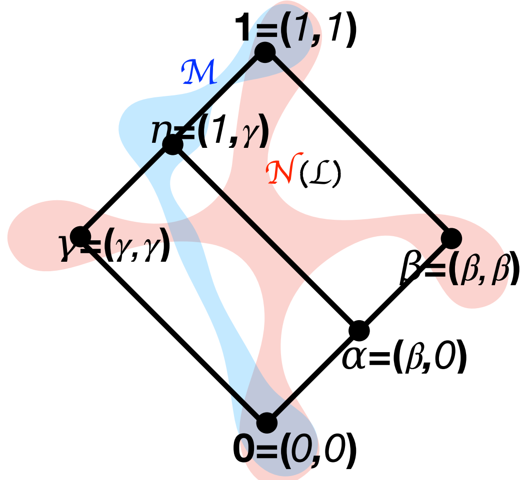
$\Leftarrow$). $(x_s \leq z_s\;\; \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (x_s\cdot s \leq z_s\cdot s\;\; \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s \leq \sum_{s\in\mathcal{M}} z_s\cdot s) \Rightarrow (x \leq z)$. ∎

Corolario. Fijado el subconjunto $\mathcal{M}$, la familia $(x_s)_{s\in\mathcal{M}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \sum_{s\in\mathcal{M}} x_s\cdot s$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x_s = z_s\;\; \forall s \in \mathcal{M})$$

Nota. Como para todo $x \in \mathcal{L}$ se verifica: $x_0 = Ker(0 \rightarrow x) = Ker(1) = 1$ y como además, el elemento $x_0\cdot 0 = 0$ en (1) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en $\mathcal{M}$, es decir: $x = \sum_{s\in\mathcal{M}-\{0\}} x_s\cdot s$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

→	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo: $x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	Ker(x)
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo: $Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y →	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes: $x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})\text{-}\{\mathbf{0}\}) \mathbf{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 = (0, 0) = 0_\eta \cdot \eta + 0_1 \cdot 1$

$\alpha = (\beta, 0) = \alpha_\eta \cdot \eta + \alpha_1 \cdot 1$

$\beta = (\beta, \beta) = \beta_\eta \cdot \eta + \beta_1 \cdot 1$

$\gamma = (\gamma, \gamma) = \gamma_\eta \cdot \eta + \gamma_1 \cdot 1$

$\eta = (1, \gamma) = \eta_\eta \cdot \eta + \eta_1 \cdot 1$

$1 = (1, 1) = 1_\eta \cdot \eta + 1_1 \cdot 1$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in L$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_\eta \cdot \eta + x_1 \cdot 1 = \sum_{s \in \mathcal{M}\text{-}\{0\}} x_s \cdot s \qquad (1)$$

Una interpretación (prescindiendo del 0): si $\{\eta, \mathbf{1}\} \subset \mathcal{L}$ juega el papel de una "base en $\mathcal{L}$", entonces $(x_\eta, x_1) \in \mathcal{N}(\mathcal{L})^2$ juega el de una "upla de coordenadas nítidas" de $x \in \mathcal{L}$ referidas a aquélla base.

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s$ y $z = \sum_{s \in \mathcal{M}} z_s \cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(s \to x) \leq (s \to z) \ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow [Ker(s \to x) \leq Ker(s \to z) \ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow (x_s \leq z_s \ \forall s \in \mathcal{M})$.

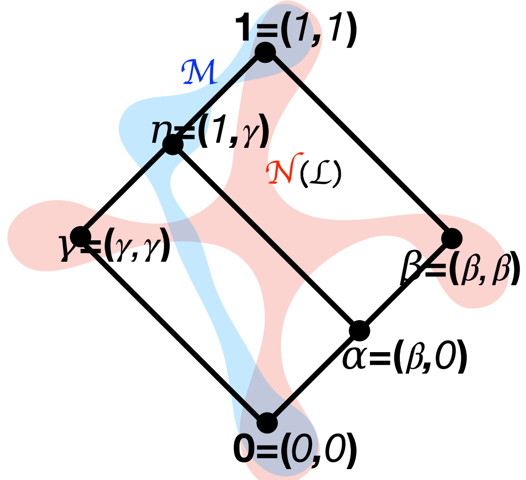
$\Rightarrow$). $(x_s \leq z_s \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (x_s \cdot s \leq z_s \cdot s \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s \leq \sum_{s \in \mathcal{M}} z_s \cdot s) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

Corolario. Fijado el subconjunto $\mathcal{M}$, la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x_s = z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

Nota. Como para todo $x \in L$ se verifica: $x_0 = Ker(0 \to x) = Ker(1) = 1$ y como además, el elemento $x_0 \cdot 0 = 0$ en (1) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en $\mathcal{M}$, es decir: $x = \sum_{s \in \mathcal{M}\text{-}\{0\}} x_s \cdot s$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\to$	0	α	β	γ	η	1
0	1	1	1	1	1	1
α	γ	1	1	γ	1	1
β	γ	η	1	γ	η	1
γ	β	β	β	1	1	1
η	0	β	β	γ	1	1
1	0	α	β	γ	η	1

Implicación residuo: $x \to y = \sum\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \cdot k \leq y\}$

x	$Ker(x)$
0	0
α	0
β	β
γ	γ
η	γ
1	1

Operador núcleo: $Ker(x) = \sum\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, w \leq x\}$

x_y	0	α	β	γ	η	1
0	1	γ	γ	β	0	0
α	1	1	γ	β	β	0
β	1	1	1	β	β	β
γ	1	γ	γ	1	γ	γ
η	1	1	γ	1	1	γ
1	1	1	1	1	1	1

s-cortes: $x_s = Ker(s \to x)$

$(\mathcal{M}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \eta, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})-\{\mathbf{0}\}) \mathrm{X} \mathcal{M}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{M}$ y los conjuntos de nivel $x_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 =$	$(0, 0)$	$0_\eta \cdot \eta + 0_1 \cdot 1$
$\alpha =$	$(\beta, 0)$	$\alpha_\eta \cdot \eta + \alpha_1 \cdot 1$
$\beta =$	(β, β)	$\beta_\eta \cdot \eta + \beta_1 \cdot 1$
$\gamma =$	(γ, γ)	$\gamma_\eta \cdot \eta + \gamma_1 \cdot 1$
$\eta =$	$(1, \gamma)$	$\eta_\eta \cdot \eta + \eta_1 \cdot 1$
$1 =$	$(1, 1)$	$1_\eta \cdot \eta + 1_1 \cdot 1$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes $x_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = x_\eta \cdot \eta + x_1 \cdot 1 = \sum_{s \in \mathcal{M}-\{0\}} x_s \cdot s \qquad (1)$$

Una interpretación (prescindiendo del 0): si $\{\eta, \mathbf{1}\} \subset \mathcal{L}$ juega el papel de una "base en $\mathcal{L}$", entonces $(x_\eta, x_1) \in \mathcal{N}(\mathcal{L})^2$ juega el de una "upla de coordenadas nítidas" de $x \in \mathcal{L}$ referidas a aquélla base.

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Cuestiones abiertas:
¿Existe siempre una familia $\mathcal{M}$? Si es así, ¿hay varias?
Y si es así, ¿Hay minimales $\mathcal{M}$ $((\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}) \Rightarrow (\mathcal{M} = \mathcal{M}))$?

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s$ y $z = \sum_{s \in \mathcal{M}} z_s \cdot s$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x_s \leq z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(s \to x) \leq (s \to z)\ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow [Ker(s \to x) \leq Ker(s \to z)\ \ \forall s \in \mathcal{M}] \Rightarrow (x_s \leq z_s\ \ \forall s \in \mathcal{M})$.

$\Rightarrow$). $(x_s \leq z_s\ \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (x_s \cdot s \leq z_s \cdot s\ \ \forall s \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s \leq \sum_{s \in \mathcal{M}} z_s \cdot s) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

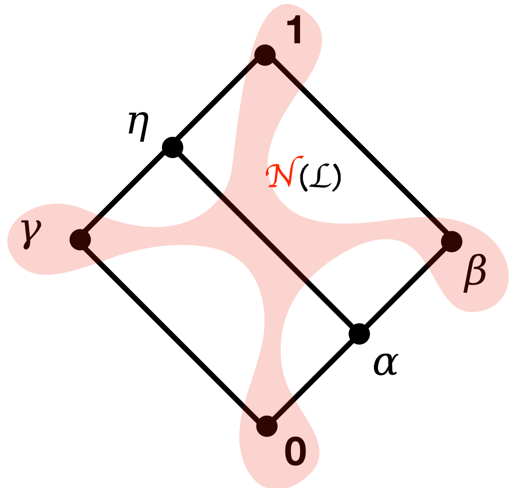
Corolario. Fijado el subconjunto $\mathcal{M}$, la familia $(x_s)_{s \in \mathcal{M}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \sum_{s \in \mathcal{M}} x_s \cdot s$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x_s = z_s \ \ \forall s \in \mathcal{M})$$

Nota. Como para todo $x \in \mathcal{L}$ se verifica: $x_0 = Ker(0 \to x) = Ker(1) = 1$ y como además, el elemento $x_0 \cdot 0 = 0$ en (1) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en $\mathcal{M}$, es decir: $x = \sum_{s \in \mathcal{M}-\{0\}} x_s \cdot s$

Ejemplo de representación en retículos $(\mathcal{L},\leq)$ de un elemento $x\in\mathcal{L}$ mediante una familia de "α-cortes estrictos" $x^*_s\in\mathcal{N}(\mathcal{L})$.

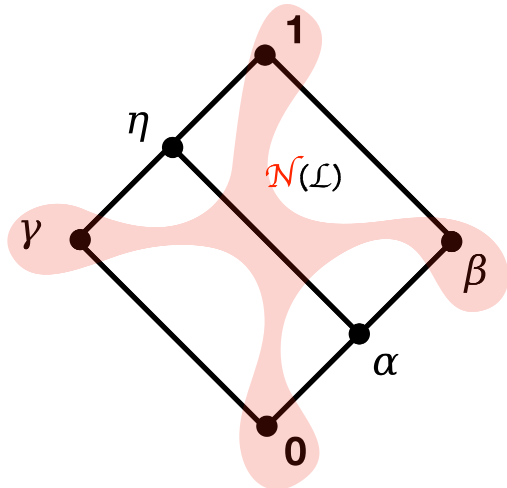
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

$\dot{-}$	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

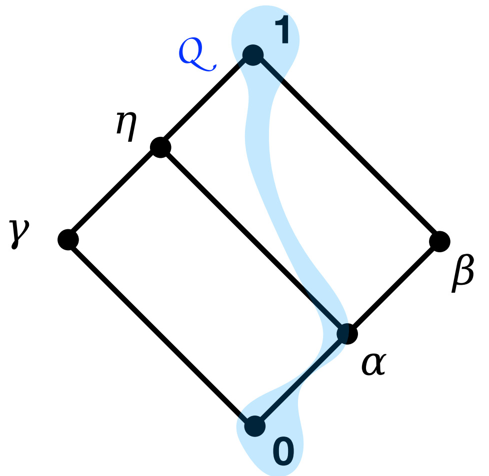
x	$Supp(x)$
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

÷	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	$Supp(x)$
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

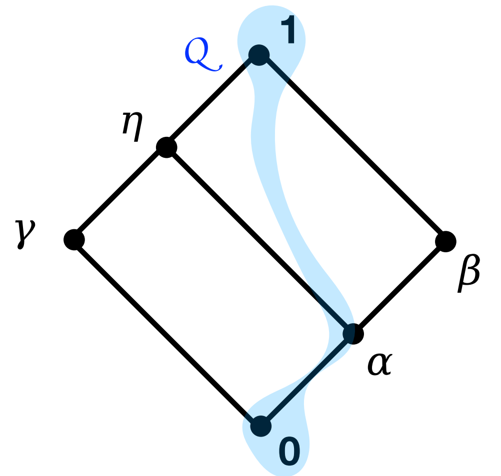
x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \times Q$.

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

÷	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \div y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $\mathrm{Supp}(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = \mathrm{Supp}(x \div s)$

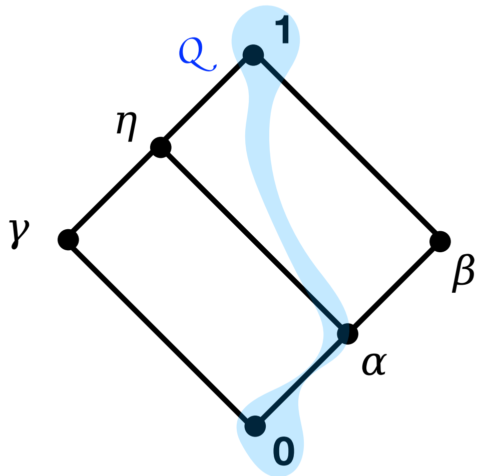
(En este caso no coincide con M en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

∸	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia":
$x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte:
$Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos:
$x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \times Q$.

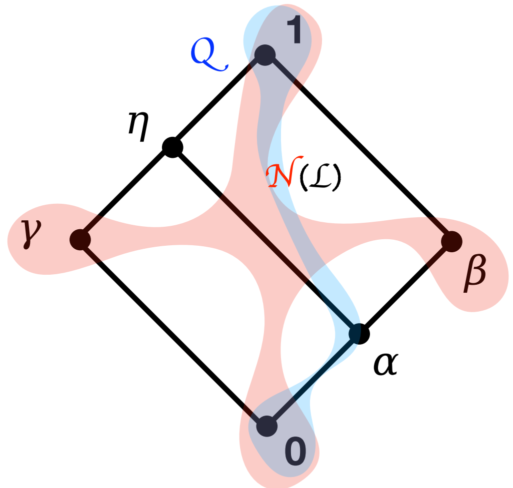
Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subseteq \mathcal{L}$ de cada $x \in L$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

∸	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $\mathrm{Supp}(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = \mathrm{Supp}(x \dot{-} s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \times Q$.

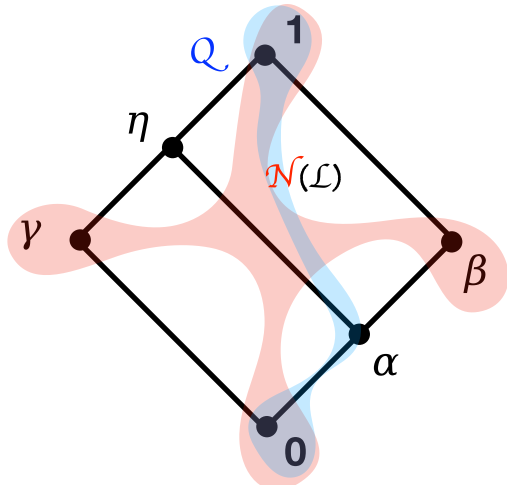
Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subseteq \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

÷	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \div y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \div s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(\mathcal{Q}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \times \mathcal{Q}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{Q}$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

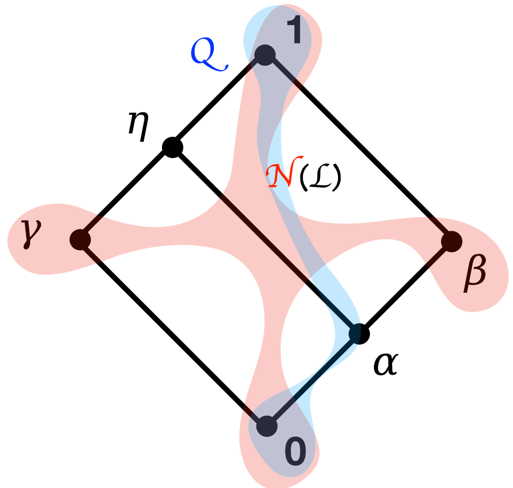
$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in \mathcal{Q}}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in \mathcal{Q}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

$\dot{-}$	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	$Supp(x)$
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una <u>representación</u> asociada a elementos $s \in Q \subseteq \mathcal{L}$ de <u>cada $x \in L$</u> mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

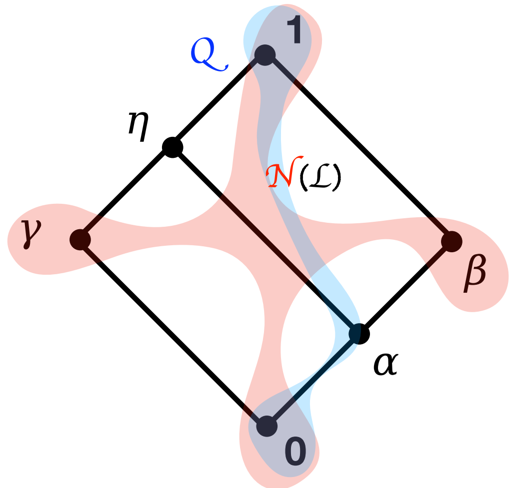
$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

<u>Proposición</u>. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in Q)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

∸	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0 \cdot \alpha \cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta \cdot \alpha \cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta \cdot \beta \cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma \cdot \gamma \cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1 \cdot \eta \cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

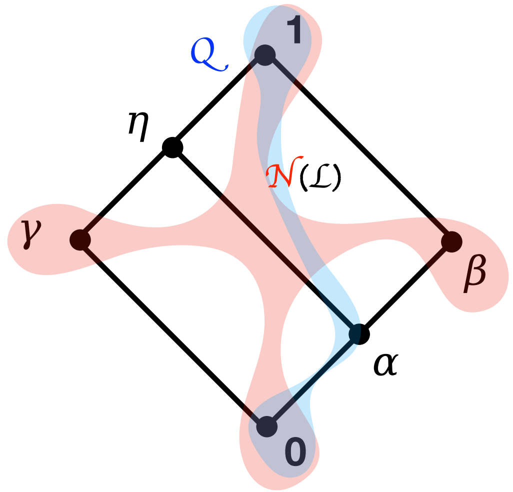
Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in Q)$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x \dot{-} s) \leq (z \dot{-} s) \ \ \forall s \in Q] \Rightarrow [Supp(x \dot{-} s) \leq Supp(z \dot{-} s) \ \ \forall s \in Q] \Rightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in Q)$.

$\Rightarrow$). $(x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in Q) \Rightarrow ((x^*_s+s) \leq (z^*_s+s) \ \ \forall s \in Q) \Rightarrow (\prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \leq \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

$\div$	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \div y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	$Supp(x)$
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \div s)$

(En este caso no coincide con M en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \mathrm{X} Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*{}_0+0)\cdot(0^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(0^*{}_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*{}_0+0)\cdot(\alpha^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*{}_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*{}_0+0)\cdot(\beta^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*{}_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*{}_0+0)\cdot(\gamma^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*{}_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*{}_0+0)\cdot(\eta^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*{}_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*{}_0+0)\cdot(1^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(1^*{}_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*{}_0+0)\cdot(x^*{}_\alpha+\alpha)\cdot(x^*{}_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*{}_s+s) \qquad (2)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*{}_s)_{s \in Q}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in Q}(x^*{}_s+s)$ y $z = \prod_{s \in Q}(z^*{}_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*{}_s \leq z^*{}_s \ \ \forall s \in Q)$$

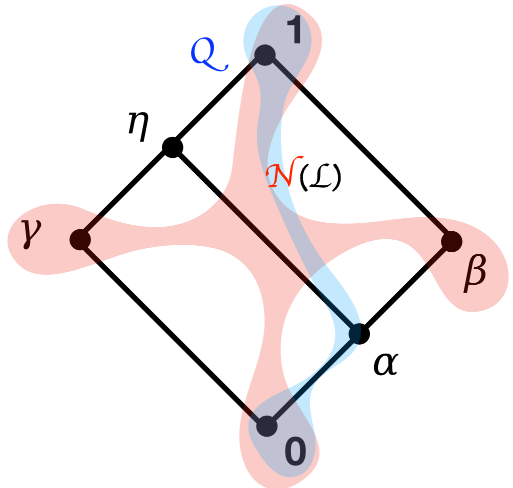
Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x \div s) \leq (z \div s)\ \ \forall s \in Q] \Rightarrow [Supp(x \div s) \leq Supp(z \div s)\ \ \forall s \in Q] \Rightarrow (x^*{}_s \leq z^*{}_s\ \ \forall s \in Q)$.

$\Rightarrow$). $(x^*{}_s \leq z^*{}_s\ \ \forall s \in Q) \Rightarrow ((x^*{}_s+s) \leq (z^*{}_s+s)\ \ \forall s \in Q) \Rightarrow (\prod_{s \in Q}(x^*{}_s+s) \leq \prod_{s \in Q}(z^*{}_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

Corolario. Fijado el subconjunto Q, la familia $(x^*{}_s)_{s \in Q}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \prod_{s \in Q}(x^*{}_s+s)$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x^*{}_s = z^*{}_s\ \ \forall s \in Q)$$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^{c})$

÷	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \div y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \div s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot(0^*_1+1)$$
$$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot(\alpha^*_1+1)$$
$$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\beta^*_1+1)$$
$$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma^*_1+1)$$
$$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot(\eta^*_1+1)$$
$$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot(1^*_1+1)$$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in L$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot(x^*_1+1) = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \;\; \forall s \in Q)$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x \div s) \leq (z \div s) \;\; \forall s \in Q] \Rightarrow [Supp(x \div s) \leq Supp(z \div s) \;\; \forall s \in Q] \Rightarrow (x^*_s \leq z^*_s \;\; \forall s \in Q)$.

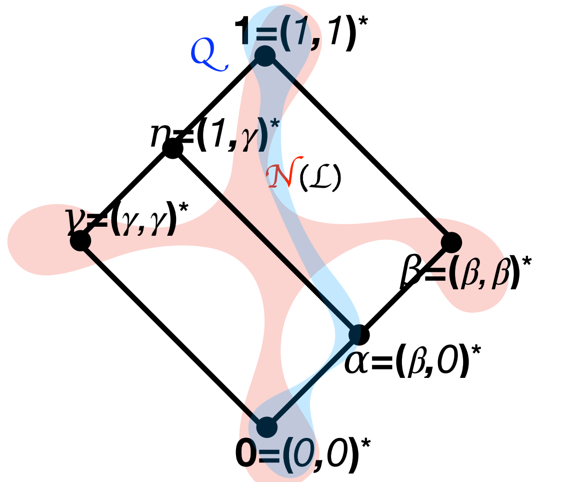
$\Rightarrow$). $(x^*_s \leq z^*_s \;\; \forall s \in Q) \Rightarrow ((x^*_s+s) \leq (z^*_s+s) \;\; \forall s \in Q) \Rightarrow (\prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \leq \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

Corolario. Fijado el subconjunto Q, la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x^*_s = z^*_s \;\; \forall s \in Q)$$

Nota. Como para todo $x \in L$ se verifica: $x^*_1 = Ker(x \div 1) = Ker(0) = 0$ y como además, el elemento $x^*_1 + 1 = 1$ en (2) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en Q, es decir: $x = \prod_{s \in Q - \{1\}}(x^*_s+s)$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

$\div$	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \div y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	$Supp(x)$
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \div s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(Q, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L}) - \{\mathbf{1}\}) \times Q$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in Q$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (0,0)^* = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(0+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta,0)^* = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\beta = \beta\cdot\beta\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta+\alpha)\cdot(0+1) = (\beta,\beta)^* = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$\gamma = \gamma\cdot\gamma\cdot 1 = (\gamma+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (\gamma,\gamma)^* = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(0+1) = (1,\gamma)^* = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1+\alpha)\cdot(0+1) = (1,1)^* = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot$

(Una representación asociada a elementos $s \in Q \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot \quad = \prod_{s \in Q-\{1\}} (x^*_s+s) \qquad (2)$$

Una interpretación (prescindiendo del 1): si $\{\mathbf{0}, \alpha\} \subset \mathcal{L}$ juega el papel de una "base en $\mathcal{L}$", entonces $(x^*_0, x^*_\alpha)^* \in \mathcal{N}(\mathcal{L})^2$ juega el de una "upla de coordenadas estrictas nítidas" de $x \in \mathcal{L}$ referidas a aquélla base.

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \forall s \in Q)$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x \div s) \leq (z \div s) \ \forall s \in Q] \Rightarrow [Supp(x \div s) \leq Supp(z \div s) \ \forall s \in Q] \Rightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \forall s \in Q)$.

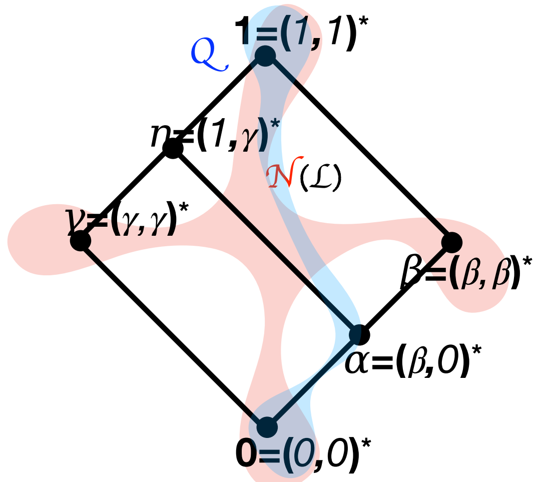
$\Rightarrow$). $(x^*_s \leq z^*_s \ \forall s \in Q) \Rightarrow ((x^*_s+s) \leq (z^*_s+s) \ \forall s \in Q) \Rightarrow (\prod_{s \in Q}(x^*_s+s) \leq \prod_{s \in Q}(z^*_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

Corolario. Fijado el subconjunto Q, la familia $(x^*_s)_{s \in Q}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \prod_{s \in Q}(x^*_s+s)$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x^*_s = z^*_s \ \forall s \in Q)$$

Nota. Como para todo $x \in \mathcal{L}$ se verifica: $x^*_1 = Ker(x \div 1) = Ker(0) = 0$ y como además, el elemento $x^*_1 + 1 = 1$ en (2) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en Q, es decir: $x = \prod_{s \in Q-\{1\}}(x^*_s+s)$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

∸	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x \dot{-} y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y+k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x \dot{-} s)$

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)

$(\mathcal{Q}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x$. $\forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})-\{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} \mathcal{Q}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{Q}$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot(0, 0)^* \ldots (0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot(\beta, 0)^* \ldots (0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\beta = (\beta, \beta)^* \ldots (0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$\gamma = (\gamma, \gamma)^* \ldots (0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot(1, \gamma)^* \ldots (0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot(1, 1)^* \ldots (0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot$

¡Representación que coincide con la anterior! ¿Casualidad, o debido a la "simetría dual" entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{Q}$?

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot \quad = \prod_{s \in \mathcal{Q}-\{1\}} (x^*_s+s) \qquad (2)$$

Una interpretación (prescindiendo del 1): si $\{\mathbf{0}, \alpha\} \subset \mathcal{L}$ juega el papel de una "base en $\mathcal{L}$", entonces $(x^*_0, x^*_\alpha)^* \in \mathcal{N}(\mathcal{L})^2$ juega el de una "upla de coordenadas estrictas nítidas" de $x \in \mathcal{L}$ referidas a aquélla base.

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s \in \mathcal{Q}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Proposición. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s \in \mathcal{Q}}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s \in \mathcal{Q}}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in \mathcal{Q})$$

Demostración. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x \dot{-} s) \leq (z \dot{-} s) \ \ \forall s \in \mathcal{Q}] \Rightarrow [Supp(x \dot{-} s) \leq Supp(z \dot{-} s) \ \ \forall s \in \mathcal{Q}] \Rightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in \mathcal{Q})$.

$\Rightarrow$). $(x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in \mathcal{Q}) \Rightarrow ((x^*_s+s) \leq (z^*_s+s) \ \ \forall s \in \mathcal{Q}) \Rightarrow (\prod_{s \in \mathcal{Q}}(x^*_s+s) \leq \prod_{s \in \mathcal{Q}}(z^*_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

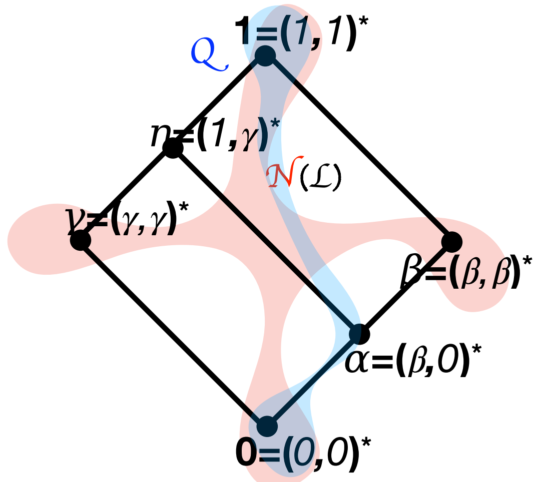
Corolario. Fijado el subconjunto $\mathcal{Q}$, la familia $(x^*_s)_{s \in \mathcal{Q}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \prod_{s \in \mathcal{Q}}(x^*_s+s)$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x^*_s = z^*_s \ \ \forall s \in \mathcal{Q})$$

Nota. Como para todo $x \in \mathcal{L}$ se verifica: $x^*_1 = Ker(x \dot{-} 1) = Ker(0) = 0$ y como además, el elemento $x^*_1 + 1 = 1$ en (2) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en $\mathcal{Q}$, es decir: $x = \prod_{s \in \mathcal{Q}-\{1\}}(x^*_s+s)$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ (Retículo broweriano)

(En este caso no coincide con $\mathcal{M}$ en la transparencia anterior)



Nítidos de $(\mathcal{L}, \leq)$: $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}$

Álgebra de Boole $((\{\mathbf{0}, \gamma, \beta, \mathbf{1}\}, \leq), {}^c)$

∸	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	η	γ	γ	α	0	0
1	1	1	γ	β	β	0

Corresiduo "diferencia": $x ∸ y = \prod\{k \in \mathcal{L} \,/\, x \leq y + k\}$

x	Supp(x)
0	0
α	β
β	β
γ	γ
η	1
1	1

Operador soporte: $Supp(x) = \prod\{w \in \mathcal{N}(\mathcal{L}) \,/\, x \leq w\}$

x^*_y	0	α	β	γ	η	1
0	0	0	0	0	0	0
α	β	0	0	β	0	0
β	β	β	0	β	β	0
γ	γ	γ	γ	0	0	0
η	1	γ	γ	β	1	0
1	1	1	γ	β	β	0

s-cortes estrictos: $x^*_s = Supp(x ∸ s)$

$(\mathcal{Q}, \leq) = (\{\mathbf{0}, \alpha, \mathbf{1}\}, \leq)$ es un $\{0,1\}$-subretículo de $(\mathcal{L}, \leq)$ tal que $x_y = x.\ \forall (x,y) \in (\mathcal{N}(\mathcal{L})-\{\mathbf{1}\}) \mathbf{X} \mathcal{Q}$.

Expresión de cada uno de los elementos $x \in \mathcal{L}$ mediante los elementos $y \in \mathcal{Q}$ y los conjuntos de nivel $x^*_y \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$:

$0 = 0\cdot\alpha\cdot 1 = (0+0)\cdot((0,0)^* 0+1) = (0^*_0+0)\cdot(0^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\alpha = \beta\cdot\alpha\cdot 1 = (\beta+0)\cdot((\beta,0)^* 0+1) = (\alpha^*_0+0)\cdot(\alpha^*_\alpha+\alpha)\cdot$

$\beta = (\beta,\beta)^* 0+1) = (\beta^*_0+0)\cdot(\beta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$\gamma = (\gamma,\gamma)^* 0+1) = (\gamma^*_0+0)\cdot(\gamma^*_\alpha+\alpha)\cdot(\gamma$

$\eta = 1\cdot\eta\cdot 1 = (1+0)\cdot((1,\gamma)^* 0+1) = (\eta^*_0+0)\cdot(\eta^*_\alpha+\alpha)\cdot($

$1 = 1\cdot 1\cdot 1 = (1+0)\cdot((1,1)^* 0+1) = (1^*_0+0)\cdot(1^*_\alpha+\alpha)\cdot$

¡Representación que coincide con la anterior!. ¿Casualidad, o debido a la "simetría dual" entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{Q}$?

(Una representación asociada a elementos $s \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ de cada $x \in \mathcal{L}$ mediante α-cortes estrictos $x^*_s \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$):

$$x = (x^*_0+0)\cdot(x^*_\alpha+\alpha)\cdot \qquad = \prod_{s\in\mathcal{Q}-\{1\}}(x^*_s+s) \qquad (2)$$

Una interpretación (prescindiendo del 1): si $\{\mathbf{0}, \alpha\} \subset \mathcal{L}$ juega el papel de una "base en $\mathcal{L}$", entonces $(x^*_0, x^*_\alpha)^* \in \mathcal{N}(\mathcal{L})^2$ juega el de una "upla de coordenadas estrictas nítidas" de $x \in \mathcal{L}$ referidas a aquélla base.

Es evidente que se caracteriza cualquier $x \in \mathcal{L}$ mediante la familia $(x^*_s)_{s\in\mathcal{Q}}$ de elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ pues:

Cuestión abierta: ¿Existe siempre una familia $\mathcal{Q}$?. Si es así, ¿hay varias? Y si es así, ¿Hay minimales $\mathcal{Q}((\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}) \Rightarrow (\mathcal{Q} = \mathcal{Q}))$?

<u>Proposición</u>. Sean x, z elementos de $\mathcal{L}$ tales que $x = \prod_{s\in\mathcal{Q}}(x^*_s+s)$ y $z = \prod_{s\in\mathcal{Q}}(z^*_s+s)$. Entonces se verifica:

$$(x \leq z) \Leftrightarrow (x^*_s \leq z^*_s \ \ \forall s \in \mathcal{Q})$$

<u>Demostración</u>. $\Rightarrow$). $(x \leq z) \Rightarrow [(x ∸ s) \leq (z ∸ s)\ \ \forall s\in\mathcal{Q}] \Rightarrow [Supp(x ∸ s) \leq Supp(z ∸ s)\ \ \forall s\in\mathcal{Q}] \Rightarrow (x^*_s \leq z^*_s\ \ \forall s\in\mathcal{Q})$.

$\Rightarrow$). $(x^*_s \leq z^*_s\ \ \forall s\in\mathcal{Q}) \Rightarrow ((x^*_s+s) \leq (z^*_s+s)\ \ \forall s\in\mathcal{Q}) \Rightarrow (\prod_{s\in\mathcal{Q}}(x^*_s+s) \leq \prod_{s\in\mathcal{Q}}(z^*_s+s)) \Rightarrow (x \leq z)$.∎

<u>Corolario</u>. Fijado el subconjunto $\mathcal{Q}$, la familia $(x^*_s)_{s\in\mathcal{Q}}$ de subconjuntos nítidos tal que $x = \prod_{s\in\mathcal{Q}}(x^*_s+s)$ caracteriza el elemento x:

$$(x = z) \Leftrightarrow (x^*_s = z^*_s\ \ \forall s\in\mathcal{Q})$$

<u>Nota</u>. Como para todo $x \in \mathcal{L}$ se verifica: $x^*_1 = Ker(x ∸ 1) = Ker(0) = 0$ y como además, el elemento $x^*_1 + 1 = 1$ en (2) no influye en el cálculo del supremo; se puede prescindir del mismo en $\mathcal{Q}$, es decir: $x = \prod_{s\in\mathcal{Q}-\{1\}}(x^*_s+s)$

Las definiciones usuales de α-cortes A_α y de α-cortes estrictos A^*_α asociados a subconjuntos L-borrosos, como casos particulares de los aquí presentados

Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos browerianos subindicada por E y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo distributivo y acotado tal que $\mathcal{L} = \underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x$ es el producto $\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x = \{A: E \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x) \in L_x \ \forall x \in E\}$; "$\leq$" es la relación de orden definida por $(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq_x B(x) \ \forall x \in E)$, con los operadores inf "$\cdot$" y sup "$+$":

$$((A\cdot B)(x) = (A(x) \cdot_x B(x)), \ (A+B)(x) = (A(x) +_x B(x)) \quad \forall x \in E)$$

y con los elementos mínimo y máximo $0(x) = 0_x$, $1(x) = 1_x$ $\forall x \in E$.

Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos browerianos subindicada por E y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo distributivo y acotado tal que $\mathcal{L}=\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$ es el producto $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x = \{A: E \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x)\in L_x \ \forall x\in E\}$; "$\leq$" es la relación de orden definida por $(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq_x B(x) \ \forall x\in E)$, con los operadores inf "$\cdot$" y sup "$+$":

$$((A\cdot B)(x) = (A(x)\cdot_x B(x)),\ (A+B)(x) = (A(x) +_x B(x)) \quad \forall x\in E)$$

y con los elementos mínimo y máximo $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x$ $\forall x\in E$.

El $\{0,1\}$-subretículo $(\mathcal{N}(\mathcal{L}), \leq, \cdot, +, 0, 1)$ del anterior formado por los elementos complementados $N\in\mathcal{L}$ tales que $N(x)\in\{0_x, 1_x\}$ $\forall x\in E$, es un Álgebra de Boole isomorfa a $(P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$, por lo que si identificamos $N\in\mathcal{N}(\mathcal{L})$ con el subconjunto $\{x\in E \,/\, N(x)=1_x\}$, se sumerge $P(E)$ en $\mathcal{L}$.

Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos browerianos subindicada por E y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo distributivo y acotado tal que $\mathcal{L}=\mathsf{X}_{x\in E} L_x$ es el producto $\mathsf{X}_{x\in E} L_x=\{A:E\to \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$; "$\leq$" es la relación de orden definida por $(A \leq B)\Leftrightarrow (A(x) \leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, con los operadores inf "$\cdot$" y sup "$+$":

$$((A\cdot B)(x)=(A(x)\cdot_x B(x)),\ (A+B)(x)=(A(x)+_x B(x))\quad \forall x\in E)$$

y con los elementos mínimo y máximo $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x$ $\forall x\in E$.

El $\{0,1\}$-subretículo $(\mathcal{N}(\mathcal{L}), \leq, \cdot, +, 0, 1)$ del anterior formado por los elementos complementados $N\in\mathcal{L}$ tales que $N(x)\in\{0_x, 1_x\}$ $\forall x\in E$, es un Álgebra de Boole isomorfa a $(P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$, por lo que si identificamos $N\in\mathcal{N}(\mathcal{L})$ con el subconjunto $\{x\in E \,/\, N(x)=1_x\}$, se sumerge $P(E)$ en $\mathcal{L}$.

Así, podemos escribir $\forall A\in\mathcal{L}$: $SUPP(A)=\bigcap\{M\in P(E) \,/\, A \leq M\}$, $KER(A)=\bigcup\{N\in P(E)/\ N\leq A\}$;

y si $B\to A=\prod\{S\in\mathcal{L} \,/\, B\cdot S\leq A\}$, $A\div B= \sum\{S\in\mathcal{L} \,/\, A\leq B+S\}$ $\forall (A,B)\in\mathcal{L}\mathsf{X}\mathcal{L}$ entonces :

$$A_B=KER(B\to A)=\bigcup\{N\in P(E)/\ N \leq(B\to A)\}=\bigcup\{N\in P(E)/\ (N\cdot B \leq A)\},$$

$$A_B^*=SUPP(A\div B)=\bigcap\{M\in P(E)/\ (A\div B)\leq M\}=\bigcap\{M\in P(E)/\ A \leq M+B\}.$$

Estas últimas tienen una expresión equivalente más simple:.

<u>Proposición</u>. Para todo par $(A,B)\in\mathcal{L}\mathsf{X}\mathcal{L}$, se verifica:

(1) $A_B=\{x\in E \,/\, A(x) \geq_x B(x)\}$. (2) $A_B^*=\{x\in E \,/\, A(x) \not\leq_x B(x)\}$.

Sea $((L_x,\leq_x,\cdot_x,+_x,0_x,1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos browerianos subindicada por E y sea $(\mathcal{L},\leq,\cdot,+,0,1)$ el retículo distributivo y acotado tal que $\mathcal{L}=\mathop{X}_{x\in E}L_x$ es el producto $\mathop{X}_{x\in E}L_x=\{A:E\to\bigcup_{x\in E}L_x \,/\, A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$; "$\leq$" es la relación de orden definida por $(A\leq B)\Leftrightarrow(A(x)\leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, con los operadores inf "$\cdot$" y sup "$+$":

$$((A\cdot B)(x)=(A(x)\cdot_x B(x)),\ (A+B)(x)=(A(x)+_x B(x))\quad \forall x\in E)$$

y con los elementos mínimo y máximo $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x$ $\forall x\in E$.

El $\{0,1\}$-subretículo $(\mathcal{N}(\mathcal{L}),\leq,\cdot,+,0,1)$ del anterior formado por los elementos complementados $N\in\mathcal{L}$ tales que $N(x)\in\{0_x,1_x\}$ $\forall x\in E$, es un Álgebra de Boole isomorfa a $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E),^c)$, por lo que si identificamos $N\in\mathcal{N}(\mathcal{L})$ con el subconjunto $\{x\in E\,/\,N(x)=1_x\}$, se sumerge $P(E)$ en $\mathcal{L}$.

Así, podemos escribir $\forall A\in\mathcal{L}$: $SUPP(A)=\bigcap\{M\in P(E)\,/\,A\leq M\}$, $KER(A)=\bigcup\{N\in P(E)/\,N\leq A\}$;

y si $B\to A=\prod\{S\in\mathcal{L}\,/\,B\cdot S\leq A\}$, $A\div B=\sum\{S\in\mathcal{L}\,/\,A\leq B+S\}$ $\forall(A,B)\in\mathcal{L}X\mathcal{L}$ entonces :

$$A_B=KER(B\to A)=\bigcup\{N\in P(E)/\,N\leq(B\to A)\}=\bigcup\{N\in P(E)/\,(N\cdot B\leq A)\},$$
$$A_B^{*}=SUPP(A\div B)=\bigcap\{M\in P(E)/\,(A\div B)\leq M\}=\bigcap\{M\in P(E)/\,A\leq M+B\}.$$

Estas últimas tienen una expresión equivalente más simple:.

<u>Proposición</u>. Para todo par $(A,B)\in\mathcal{L}X\mathcal{L}$, se verifica:

(1) $A_B=\{x\in E\,/\,A(x)\geq_x B(x)\}$. (2) $A^*_B=\{x\in E\,/\,A(x)\not\leq_x B(x)\}$.

<u>Demostración</u> (1) Sea el subconjunto de $P(E)$: $\mathcal{K}=\{N\in P(E)/\,(N\cdot B\leq A)\}\subseteq P(E)$. Demostremos que $\check{N}=\{x\in E\,/\,A(x)\geq_x B(x)\}$ es el máximo de $\mathcal{K}$ en $(P(E),\subseteq)$. Veamos en primer lugar que $\check{N}$ pertenece a $\mathcal{K}$. En efecto: $(\check{N}\cdot B)(y)=[B(y)$ si $A(y)\geq_y B(y)$, 0_y en otro caso$]\leq_y A(y)$ prueba que $\check{N}\cdot B\leq A$. Demostremos que es el máximo. Sea $N\in P(E)$ tal que $N\cdot B\leq A$. Demostremos que $N\subseteq\check{N}$. Si $x\in N$ entonces $B(x)=(1_x\cdot_x B(x))=(N(x)\cdot_x B(x))\leq_x A(x)$, luego $x\in\check{N}$, que prueba que este último es el máximo de $\mathcal{K}$ y en consecuencia $A_B=\check{N}$.

(continúa)

(Continuación)

(2) Sea el subconjunto de $P(E)$: $\mathcal{H}=\{M\in P(E) / A \leq M+B\} \subseteq P(E)$. Demostremos que $\mathcal{H}$, como subconjunto de $(P(E),\subseteq)$, tiene como mínimo el subconjunto $\underset{\cdot}{M}=\{x\in E / A(x) \not\leq_x B(x)\}$. En efecto, veamos en primer lugar que $\underset{\cdot}{M}$ pertenece a $\mathcal{H}$:

$$(B+\underset{\cdot}{M})(y)=[B(y) \text{ si } A(y) \leq_y B(y),\ 1_y \text{ en otro caso}] \geq_y A(y)$$

prueba que $(B+\underset{\cdot}{M}) \geq A$, es decir, que $\underset{\cdot}{M}\in\mathcal{H}$. Demostremos que es el mínimo de $\mathcal{H}$ para el orden $\subseteq$. Sea M tal que $A \leq M+B$. Como se verifica $A\leq M+B$, si $x\notin M$ entonces $A(x) \leq_x (M(x)+B(x))=0+B(x)$, es decir, $A(x) \leq_x B(x)$ y en consecuencia $x\notin\underset{\cdot}{M}$. Hemos demostrado que $M^c\subseteq\underset{\cdot}{M}^c$, que es equivalente a $\underset{\cdot}{M}\subseteq M$. En conclusión, $\underset{\cdot}{M}$ es el mínimo y por tanto $\underset{\cdot}{M}=A_B$.∎

(Continuación)

(2) Sea el subconjunto de $P(E)$: $\mathcal{H}=\{M\in P(E) / A \leq M+B\} \subseteq P(E)$. Demostremos que $\mathcal{H}$, como subconjunto de $(P(E),\subseteq)$, tiene como mínimo el subconjunto $\underset{\cdot}{M}=\{x\in E / A(x) \not\leq_x B(x)\}$. En efecto, veamos en primer lugar que $\underset{\cdot}{M}$ pertenece a $\mathcal{H}$:

$$(B+\underset{\cdot}{M})(y)=[B(y) \text{ si } A(y) \leq_y B(y),\ 1_y \text{ en otro caso}] \geq_y A(y)$$

prueba que $(B+\underset{\cdot}{M}) \geq A$, es decir, que $\underset{\cdot}{M}\in\mathcal{H}$. Demostremos que es el mínimo de $\mathcal{H}$ para el orden $\subseteq$. Sea M tal que $A \leq M+B$. Como se verifica $A\leq M+B$, si $x\notin M$ entonces $A(x) \leq_x (M(x)+B(x))=0+B(x)$, es decir, $A(x) \leq_x B(x)$ y en consecuencia $x\notin\underset{\cdot}{M}$. Hemos demostrado que $M^c\subseteq\underset{\cdot}{M}^c$, que es equivalente a $\underset{\cdot}{M}\subseteq M$. En conclusión, $\underset{\cdot}{M}$ es el mínimo y por tanto $\underset{\cdot}{M}=A_B$. ∎

De la proposición anterior se deduce el siguiente

<u>Corolario</u>. En un retículo de subconjuntos L-borrosos $(L^E, \leq)$ asociado a un retículo broweriano $(L,\leq)$), si para $\alpha\in L$, $\tilde{\alpha}\in L^E$ representa el L-borroso constante: $\tilde{\alpha}(x)=\alpha\ \ \forall x\in E$, entonces:
Dado $A\in L^E$, su α-corte A_α y su α-corte estricto A^*_α son tales que:

$$A_\alpha = KER(\tilde{\alpha}\rightarrow A),$$
$$A^*_\alpha = SUPP(A\div\tilde{\alpha}).$$

(Continuación)

(2) Sea el subconjunto de $P(E)$: $\mathcal{H}=\{M\in P(E)/\ A\leq M+B\}\subseteq P(E)$. Demostremos que $\mathcal{H}$, como subconjunto de $(P(E),\subseteq)$, tiene como mínimo el subconjunto $\underset{\cdot}{M}=\{x\in E\ /\ A(x)\not\leq_x B(x)\}$. En efecto, veamos en primer lugar que $\underset{\cdot}{M}$ pertenece a $\mathcal{H}$:

$$(B+\underset{\cdot}{M})(y)=[B(y) \text{ si } A(y)\leq_y B(y),\ 1_y \text{ en otro caso}]\geq_y A(y)$$

prueba que $(B+\underset{\cdot}{M})\geq A$, es decir, que $\underset{\cdot}{M}\in\mathcal{H}$. Demostremos que es el mínimo de $\mathcal{H}$ para el orden $\subseteq$. Sea M tal que $A\leq M+B$. Como se verifica $A\leq M+B$, si $x\notin M$ entonces $A(x)\leq_x (M(x)+B(x))=0+B(x)$, es decir, $A(x)\leq_x B(x)$ y en consecuencia $x\notin\underset{\cdot}{M}$. Hemos demostrado que $M^c\subseteq\underset{\cdot}{M}^c$, que es equivalente a $\underset{\cdot}{M}\subseteq M$. En conclusión, $\underset{\cdot}{M}$ es el mínimo y por tanto $\underset{\cdot}{M}=\cancel{A}_B$.∎

De la proposición anterior se deduce el siguiente

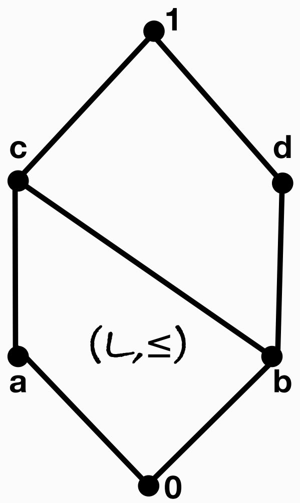
<u>Corolario</u>. En un retículo de subconjuntos L-borrosos $(L^E,\leq)$ asociado a un retículo broweriano $(L,\leq))$, si para $\alpha\in L$, $\tilde{\alpha}\in L^E$ representa el L-borroso constante: $\tilde{\alpha}(x)=\alpha\ \ \forall x\in E$, entonces:
Dado $A\in L^E$, su α-corte A_α y su α-corte estricto A^*_α son tales que:

$$A_\alpha=KER(\tilde{\alpha}\rightarrow A),$$
$$A^*_\alpha=SUPP(A\div\tilde{\alpha}).$$

<u>Demostración</u>. Son casos particulares de los contemplados en la proposición anterior, cuando $L_x=L\ \forall x\in E$.∎

Los “a-cortes” en ejemplos anteriores

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



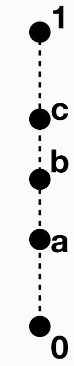
$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

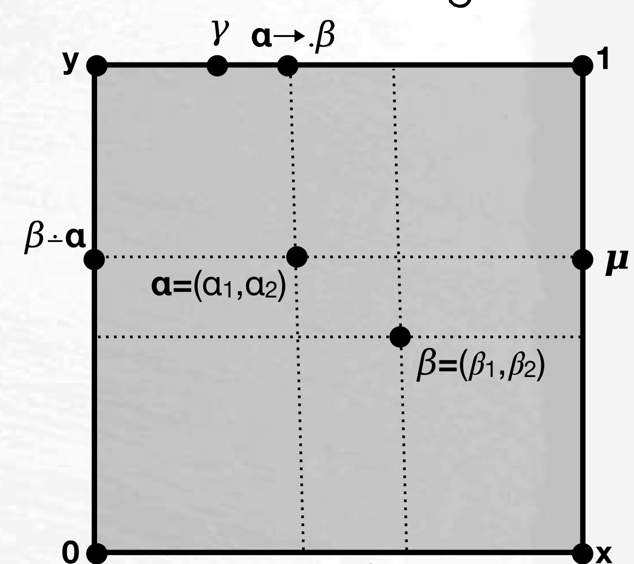
Implicación: $\alpha \rightarrow. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

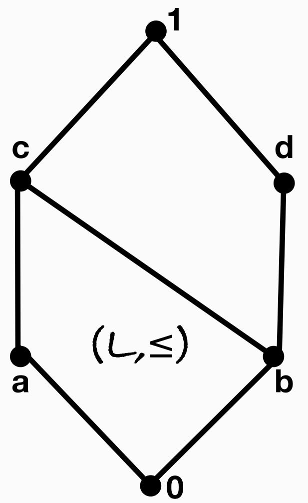
$x \rightarrow. y = 1,\ y \rightarrow. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \rightarrow . \beta$

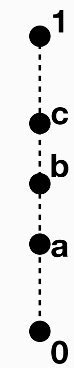
$\rightarrow.$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$(C,\leq)$

$\alpha \rightarrow . \beta$

$\rightarrow.$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

Implicación: $\alpha \rightarrow . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \rightarrow . y = 1,\ y \rightarrow . x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

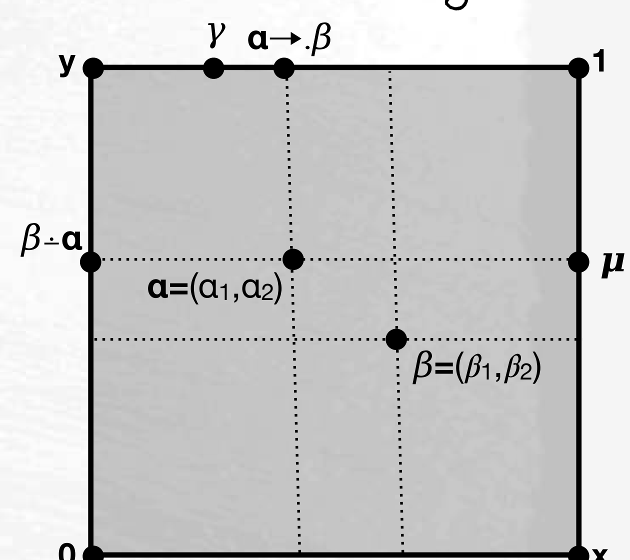
$SUPP(x)=SUPP(y)=1$

$KER(x)=KER(y)=0$

$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$

$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$

$SUPP(\alpha)=SUPP(\beta)=1$

$KER(\alpha)=KER(\beta)=0$

$SUPP(\gamma)=1,\ SUPP(\boldsymbol{\mu})=1$

$KER(\gamma)=y,\ KER(\boldsymbol{\mu})=x$

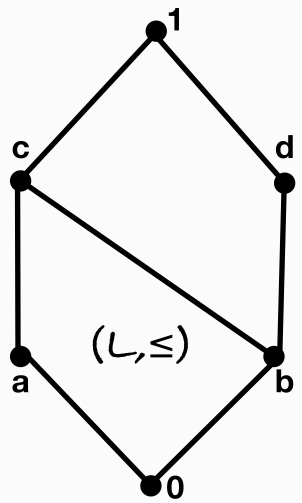
$SUPP(x)=x,\ SUPP(y)=y$

$KER(x)=x,\ KER(y)=y$

$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$

$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \rightarrow . \beta$

$\rightarrow.$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

x_α

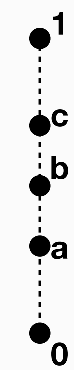
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

x^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



(C,≤)

$\alpha \rightarrow . \beta$

$\rightarrow.$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

x_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

x^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

Implicación: $\alpha \rightarrow . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \rightarrow . y = 1,\ y \rightarrow . x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

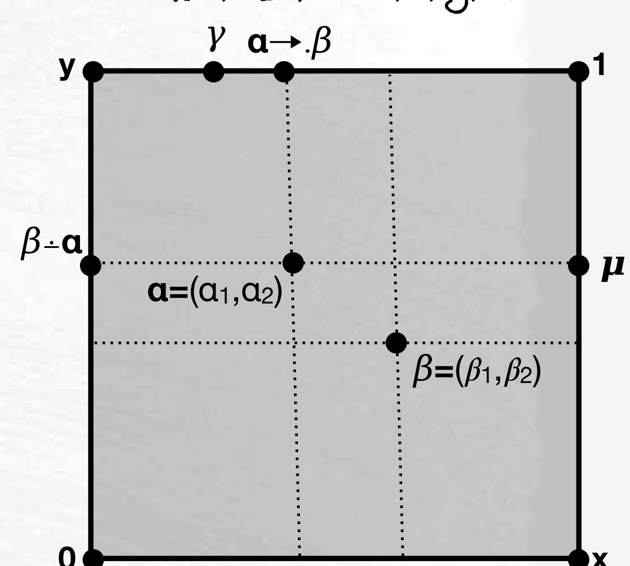
SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$

SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP(**μ**) = 1

KER(γ) = y, KER(**μ**) = x

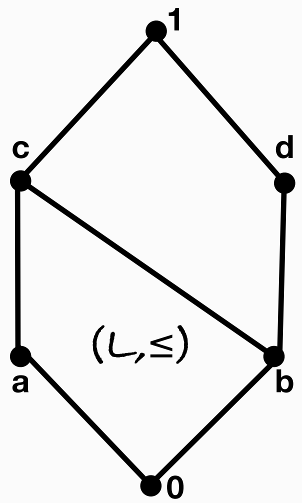
SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

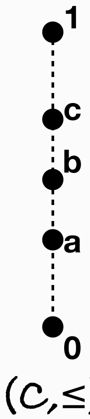
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \rightarrow. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

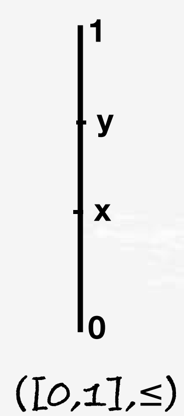
X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$



Implicación: $\alpha \rightarrow. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \rightarrow. y = 1,\ y \rightarrow. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

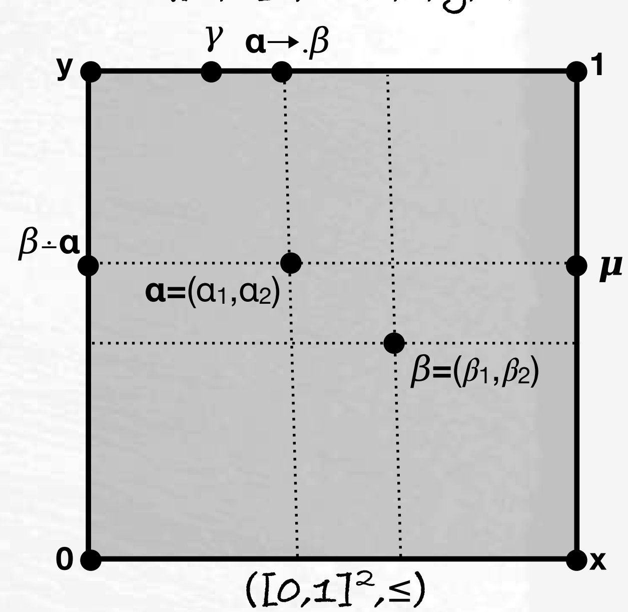
KER(0) = 0, KER(1) = 1

α-cortes:

$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \end{cases}$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP(**μ**) = 1

KER(γ) = y, KER(**μ**) = x

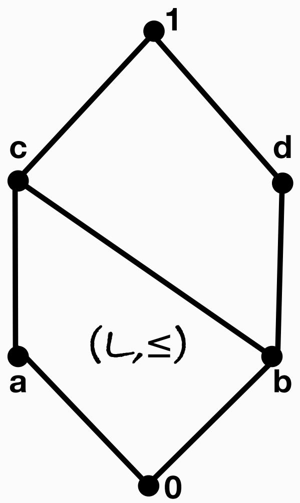
SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

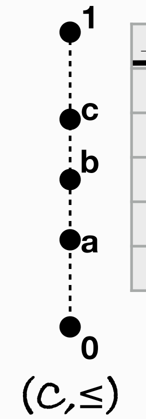
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

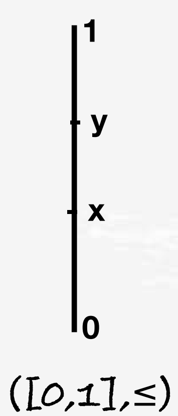
X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$



Implicación: $\alpha \to. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to. y = 1,\ y \to. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

SUPP(x)=SUPP(y)=1

KER(x)=KER(y)=0

SUPP(0)=0, SUPP(1)=1

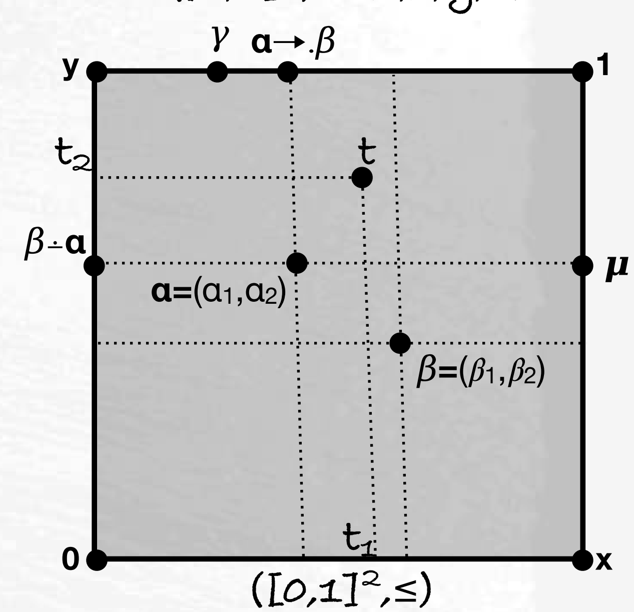
KER(0)=0, KER(1)=1

α-cortes:

$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \end{cases}$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



SUPP(α)=SUPP(β)=1

KER(α)=KER(β)=0

SUPP(γ)=1, SUPP(μ)=1

KER(γ)=y, KER(μ)=x

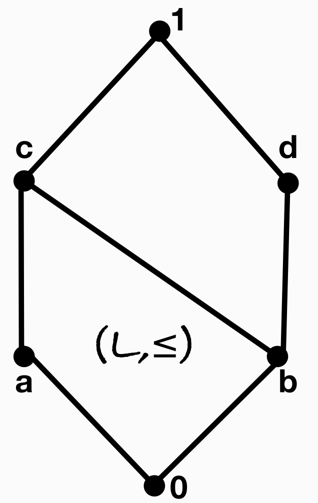
SUPP(x)=x, SUPP(y)=y

KER(x)=x, KER(y)=y

SUPP(0)=0, SUPP(1)=1

KER(0)=0, KER(1)=1

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \to. \beta$

$\to.$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

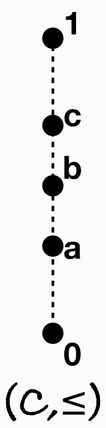
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \to. \beta$

$\to.$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

$\dot{-}$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

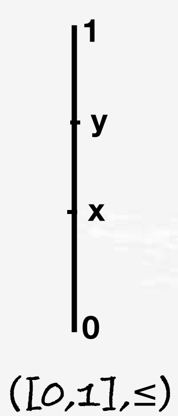
X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$



Implicación: $\alpha \to. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to. y = 1,\ y \to. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

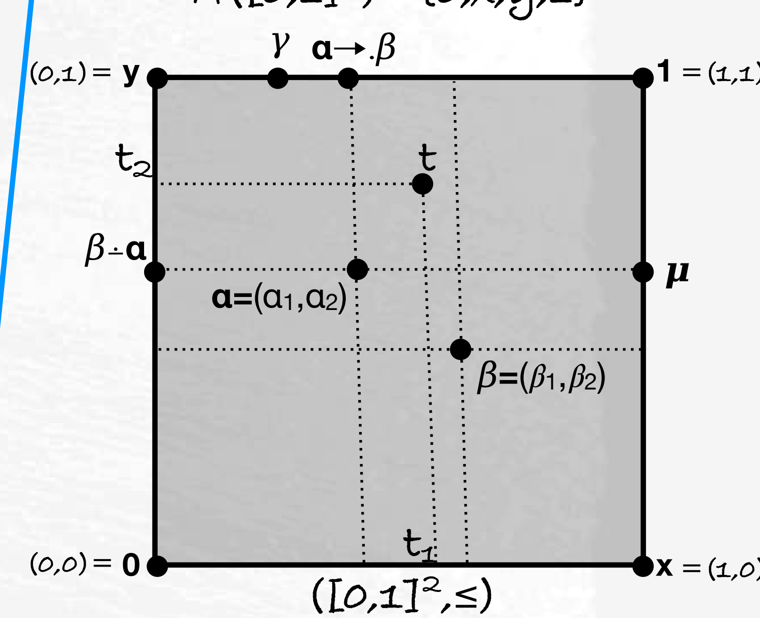
KER(0) = 0, KER(1) = 1

α-cortes:

$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \end{cases}$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP(μ) = 1

KER(γ) = y, KER(μ) = x

SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

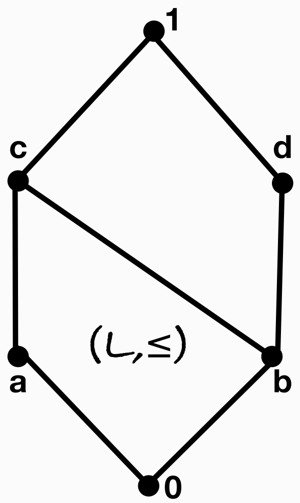
Implicación $\to.$

$$(\alpha_1,\alpha_2) \to. (t_1,t_2) = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ (t_1,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ (1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

Co-implicación $\dot{-}$

$$(t_1,t_2) \dot{-} (\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} (t_1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ (t_1,0) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 \geq t_2) \\ (0,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \geq t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 \geq t_1) \& (\alpha_2 \geq t_2) \end{cases}$$

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \to . \beta$

→	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

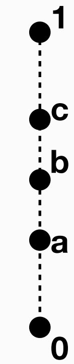
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \to . \beta$

→	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

x	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

Implicación: $\alpha \to . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to . y = 1,\ y \to . x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

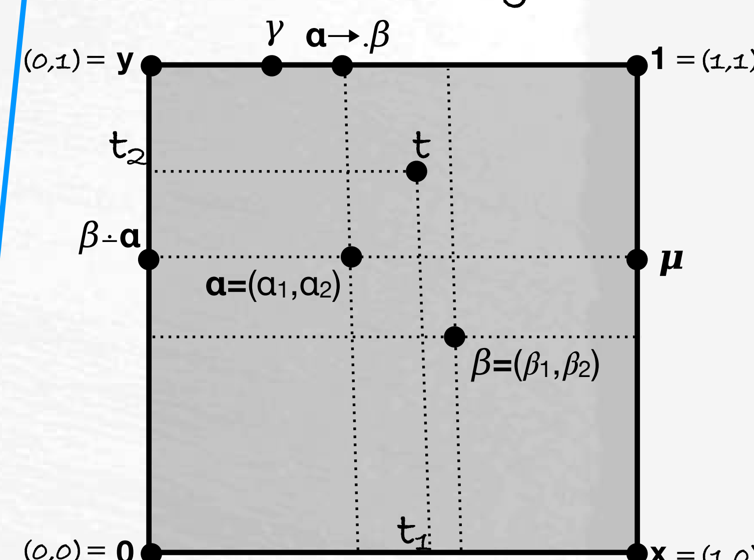
KER(0) = 0, KER(1) = 1

α-cortes:

$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \end{cases}$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP(**μ**) = 1

KER(γ) = y, KER(**μ**) = x

SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

Implicación →.

$$(\alpha_1,\alpha_2) \to . (t_1,t_2) = \begin{cases} 1=(1,1) & \text{si } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ (t_1,1) & \text{si } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ (1,t_2) & \text{si } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \\ 0=(0,0) & \text{si. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

Co-implicación ∸

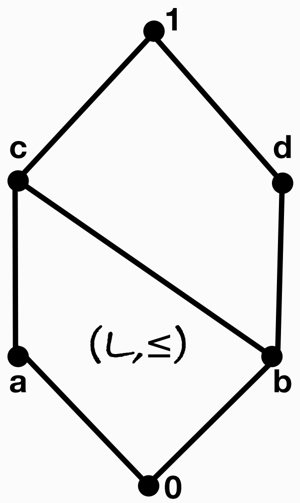
$$(t_1,t_2) \dot{-} (\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} (t_1,t_2) & \text{si } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ (t_1,0) & \text{si } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 \geq t_2) \\ (0,t_2) & \text{si } (\alpha_1 \geq t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ 0=(0,0) & \text{si. } (\alpha_1 \geq t_1) \& (\alpha_2 \geq t_2) \end{cases}$$

α-cortes:

$$(t_1,t_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} 1=(1,1) & \text{si } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ y=(0,1) & \text{si } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ x=(1,0) & \text{si } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \\ 0=(0,0) & \text{si. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

$$(t_1,t_2)^*_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} 1=(1,1) & \text{si } (\alpha_1 \leq t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ x=(1,0) & \text{si } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ y=0,1) & \text{si } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \leq t_2) \\ 0=0,0) & \text{si. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \to . \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

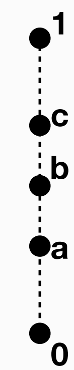
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



$\alpha \to . \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

$([0,1],\leq)$

Implicación: $\alpha \to . \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to . y = 1,\ y \to . x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

$SUPP(x)=SUPP(y)=1$

$KER(x)=KER(y)=0$

$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$

$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

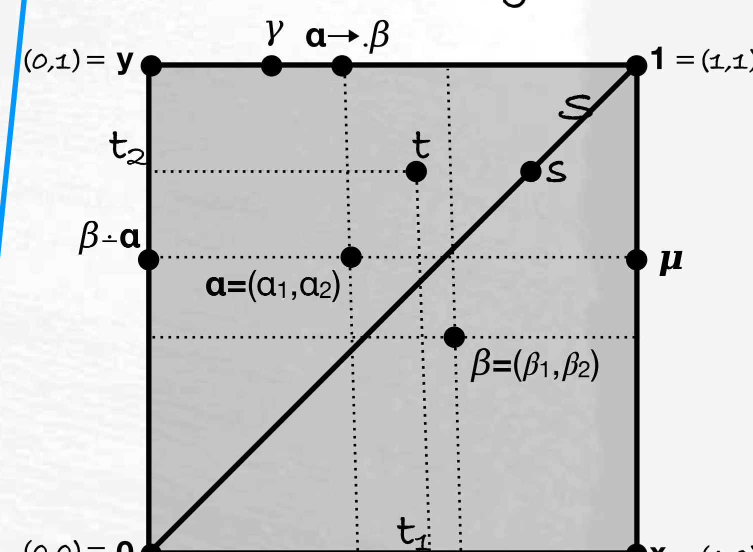
α-cortes:

$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \geq \beta \end{cases}$

$t = \sum_{s \in S} s \cdot t_s$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\leq)$

$SUPP(\alpha)=SUPP(\beta)=1$

$KER(\alpha)=KER(\beta)=0$

$SUPP(\gamma)=1,\ SUPP(\boldsymbol{\mu})=1$

$KER(\gamma)=y,\ KER(\boldsymbol{\mu})=x$

$SUPP(x)=x,\ SUPP(y)=y$

$KER(x)=x,\ KER(y)=y$

$SUPP(0)=0,\ SUPP(1)=1$

$KER(0)=0,\ KER(1)=1$

Implicación →.

$$(\alpha_1,\alpha_2) \to . (t_1,t_2) = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ (t_1,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ (1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1)\&(\alpha_2 > t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

Co-implicación ∸

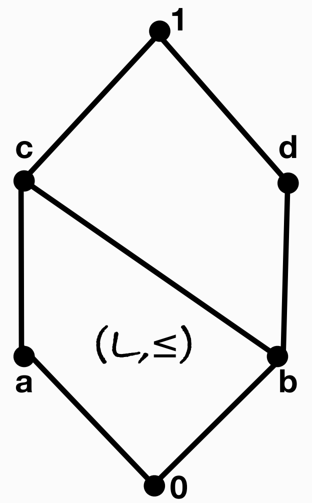
$$(t_1,t_2) \dot{-} (\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} (t_1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1)\&(\alpha_2 < t_2) \\ (t_1,0) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1)\&(\alpha_2 \geq t_2) \\ (0,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \geq t_1)\&(\alpha_2 < t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 \geq t_1)\&(\alpha_2 \geq t_2) \end{cases}$$

α-cortes:

$$(t_1,t_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ \mathbf{y}=(0,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ \mathbf{x}=(1,0) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1)\&(\alpha_2 > t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

$$(t_1,t_2)^*_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \leq t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ \mathbf{x}=(1,0) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ \mathbf{y}=0,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 \leq t_2) \\ \mathbf{0}=0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1)\&(\alpha_2 > t_2) \end{cases}$$

$N(L)=\{0,a,d,1\}$



$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	b	b	0	0	0	0
c	c	b	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

α-cortes:

X_α

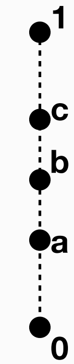
(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	1	d	a	0	a	0
a	1	1	a	a	a	a
b	1	d	1	d	a	0
c	1	1	1	1	a	a
d	1	d	1	d	1	d
1	1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a	0
b	d	d	0	0	0	0
c	1	d	a	0	a	0
d	d	d	d	d	0	0
1	1	d	1	d	a	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	a	a
b	0	d
c	a	1
d	d	d
1	1	1

$N(C)=\{0,1\}$



(C,≤)

$\alpha \to. \beta$

→.	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\beta \dot{-} \alpha$

∸	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	0
1	1	1	1	1	0

X	KER	SUPP
0	0	0
a	0	1
b	0	1
c	0	1
1	1	1

α-cortes:

X_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	0
a	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

X^*_α

(x,α)	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0

$N([0,1])=\{0,1\}$

([0,1],≤)

Implicación: $\alpha \to. \beta = \begin{cases} \beta & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha \le \beta \end{cases}$

Co-implicación: $\beta \dot{-} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \ge \beta \\ \beta & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$

$x \to. y = 1,\ y \to. x = x, \ldots$

$y \dot{-} x = y,\ x \dot{-} y = 0, \ldots$

SUPP(x) = SUPP(y) = 1

KER(x) = KER(y) = 0

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

α-cortes:

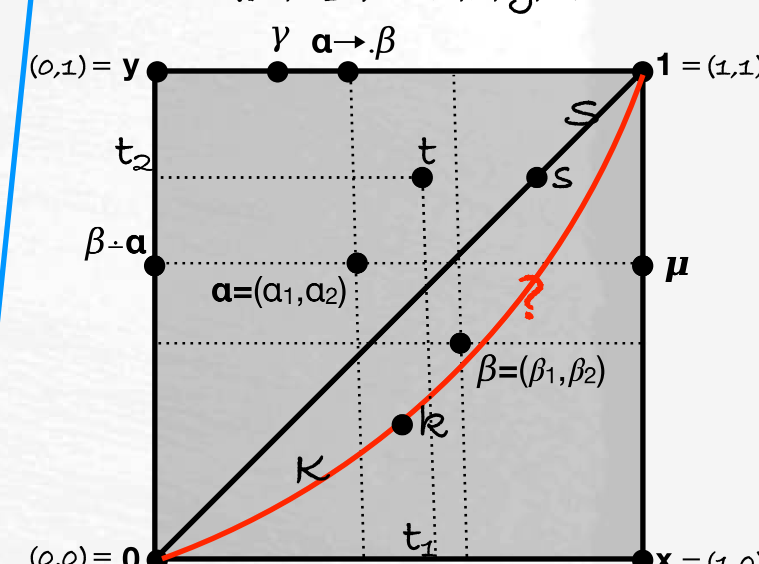
$X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \le \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$

$X^*_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \ge \beta \end{cases}$

$t = \sum_{k \in K} k \cdot t_k$?

$t = \sum_{s \in S} s \cdot t_s$

$N([0,1]^2)=\{0,x,y,1\}$



$([0,1]^2,\le)$

SUPP(α) = SUPP(β) = 1

KER(α) = KER(β) = 0

SUPP(γ) = 1, SUPP(**μ**) = 1

KER(γ) = y, KER(**μ**) = x

SUPP(x) = x, SUPP(y) = y

KER(x) = x, KER(y) = y

SUPP(0) = 0, SUPP(1) = 1

KER(0) = 0, KER(1) = 1

Implicación →.

$(\alpha_1,\alpha_2) \to. (t_1,t_2) = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \le t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ (t_1,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ (1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \le t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$

Co-implicación ∸

$(t_1,t_2) \dot{-} (\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} (t_1,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ (t_1,0) & \text{sí } (\alpha_1 < t_1) \& (\alpha_2 \ge t_2) \\ (0,t_2) & \text{sí } (\alpha_1 \ge t_1) \& (\alpha_2 < t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 \ge t_1) \& (\alpha_2 \ge t_2) \end{cases}$

α-cortes:

$(t_1,t_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \le t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ \mathbf{y}=(0,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ \mathbf{x}=(1,0) & \text{sí } (\alpha_1 \le t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \\ \mathbf{0}=(0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$

$(t_1,t_2)^*_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{cases} \mathbf{1}=(1,1) & \text{sí } (\alpha_1 \le t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ \mathbf{x}=(1,0) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ \mathbf{y}=0,1) & \text{sí } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 \le t_2) \\ \mathbf{0}=0,0) & \text{sí. } (\alpha_1 > t_1) \& (\alpha_2 > t_2) \end{cases}$

<u>Teorema</u>. (Base de este trabajo).

De nuevo la trasparencia 70 en la que se incluye la interpretación de los órdenes de actividad en retículos ...

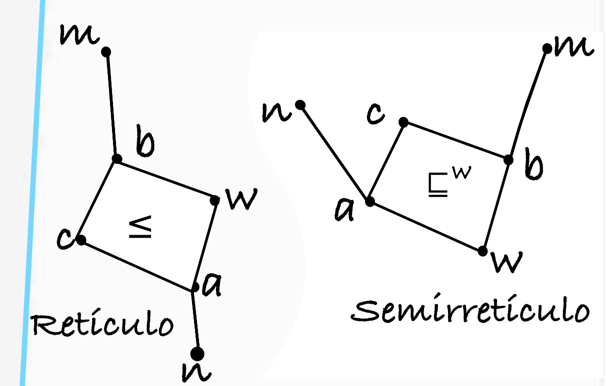
Teorema. (Base de este trabajo).

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)],$$

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo "$\sqcap^w$" viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.



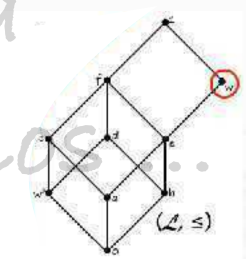
2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

De nuevo la trasparencia 72 en la que se incluye la interpretación de los órdenes de actividad en retículos...

3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una uninorma idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup "$\sqcup^w$" asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in L^2$.

En consecuencia, "$\sqcup^w$" es también una nulnorma y una uninorma en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

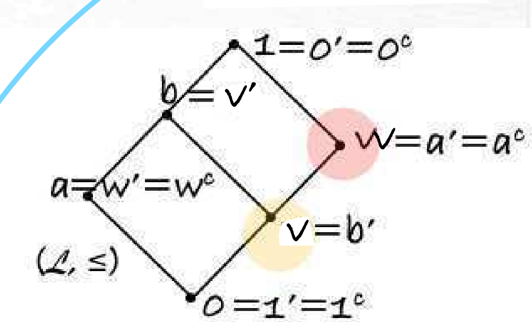


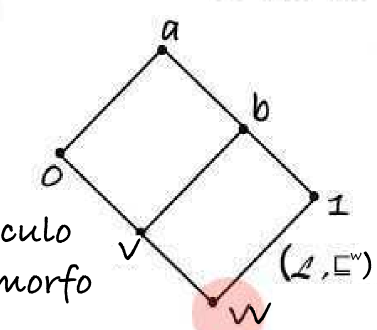
4. Si L es distributivo y acotado, si $':L \to L$ es una negación fuerte en L y si $w \in L$ es complementado tal que $w^c = w'$, entonces la relación de orden $\sqsubseteq^w$ puede expresarse mediante el operador diferencia simétrica Δ:

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (x \Delta w \leq y \Delta w).$$

dónde $x \Delta w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in L$.

En este caso, $':L \to L$ también es negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ y la aplicación $\varphi_w(x) = x \Delta w \ \forall x \in L$ es un isomorfismo entre las álgebras $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$





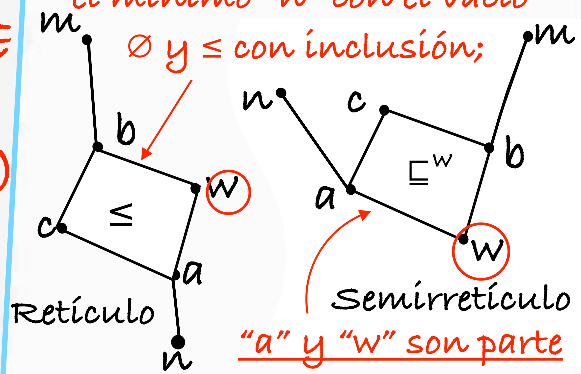
retículo isomorfo

Teorema. (Base de este trabajo).

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo y si $w \in L$, se verifica:

INTERPRETACIONES QUE HEMOS HECHO AQUÍ : (en el caso en el que L es distributivo)

Identificando en el retículo el mínimo "n" con el vacío $\varnothing$ y $\leq$ con inclusión;



"a" y "w" son parte del vacío "n" en el inf-semiretículo con la inclusión $\sqsubseteq^w$

1. la relación $\sqsubseteq^w$ tal que

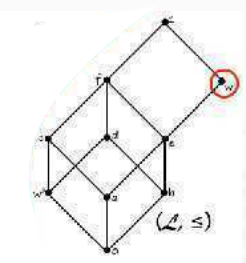
w-inclusión en *L* $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$,

es un preorden. Si L es distributivo es un orden (orden de actividad) y en este caso $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es un inf-semiretículo acotado en el que el operador ínfimo "$\sqcap^w$" **"contenido" de $\varnothing$** viene dado por $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y) \ \ \forall (x,y) \in L^2$, y en el que w es el elemento mínimo.

2. Si además de distributivo L es acotado, el operador ínfimo $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ es una nulnorma en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

w-intersección en *L*

3. Si L es distributivo y acotado y $w \in L$ es complementado con complemento w^c, entonces $\sqcap^w$ es también una uninorma idempotente en el retículo $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.



Además, el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, W)$ resulta ser un retículo distributivo y acotado $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con elemento máximo w^c en el que el operador sup "$\sqcup^w$" asociado al orden $\sqsubseteq^w$ está definida por. $x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in L^2$.

w-unión en *L*

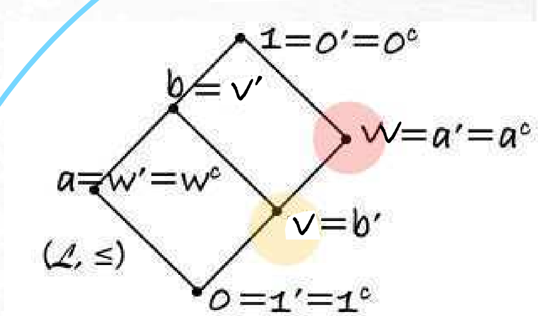
En consecuencia, "$\sqcup^w$" es también una nulnorma y una uninorma en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$.

4. Si L es distributivo y acotado, si $' : L \to L$ es una negación fuerte en L y si $w \in L$ es complementado tal que $w^c = w'$, entonces la relación de orden $\sqsubseteq^w$ puede expresarse mediante el operador diferencia simétrica Δ:

$$(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (x \Delta w \leq y \Delta w).$$

w-pertenencia de *x*

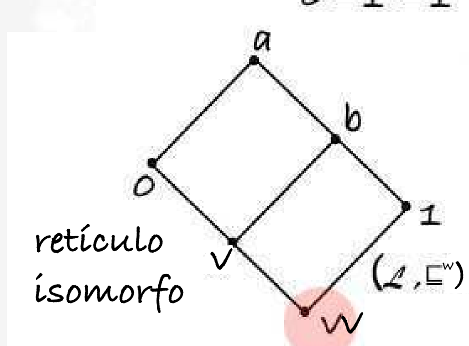
dónde $x \Delta w = x \cdot w^c + x' \cdot w \ \ \forall x \in L$.



En este caso, $' : L \to L$ también es negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ y la aplicación $\varphi_w(x) = x \Delta w \ \forall x \in L$ es un isomorfismo entre las álgebras

w-perspectiva en *L*

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c), ')$



La relación $\sqsubseteq^{W}$ en retículos

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$, con $\mathcal{L} = \{A, B, \ldots, W, \ldots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\cdot$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$ es decir, $A \in [B \cdot W\,,\; B + W]$

<u>Proposición</u>. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

<u>Dem</u>. Reflexiva: $(A \cdot W \leq A \leq A + W \;\; \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A \;\; \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \,\&\, (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

$[(B \cdot W \leq A \leq B + W) \,\&\, (C \cdot W \leq B \leq C + W)] \Rightarrow [(C \cdot W = C \cdot W \cdot W \leq B \cdot W \leq A) \,\&\, (A \leq B + W \leq C + W + W = C + W)] \Rightarrow (C \cdot W \leq A \leq C + W) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W C)$.∎

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$, con $\mathcal{L} = \{A,B,\dots,W,\dots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\cdot$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$ es decir, $A \in [B\cdot W\ ,\ B+W]$

<u>Proposición</u>. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

<u>Dem</u>. Reflexiva: $(A\cdot W \leq A \leq A+W\ \ \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A\ \ \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \,\&\, (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

$[(B\cdot W \leq A \leq B+W) \,\&\, (C\cdot W \leq B \leq C+W)] \Rightarrow [(C\cdot W = C\cdot W\cdot W \leq B\cdot W \leq A) \,\&\, (A \leq B+W \leq C+W+W = C+W)] \Rightarrow (C\cdot W \leq A \leq C+W) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W C)$.∎

Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0) \equiv (\mathcal{L}, \leq)$. Si tiene elemento máximo 1, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) \equiv (\mathcal{L}, \geq)$.

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +)$, con $\mathcal{L} = \{A, B, \ldots, W, \ldots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\bullet$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$ es decir, $A \in [B \cdot W\, ,\ B + W]$

<u>Proposición</u>. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

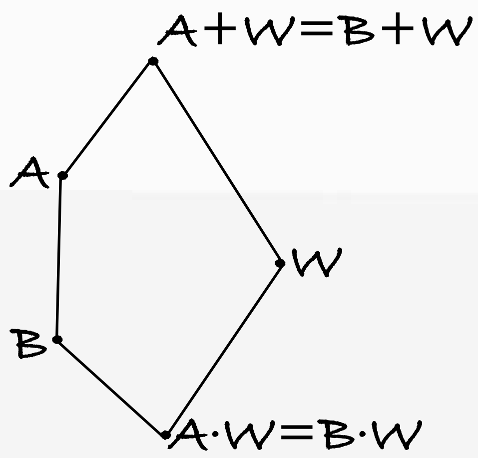
<u>Dem</u>. Reflexiva: $(A \cdot W \leq A \leq A + W \ \ \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A \ \ \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \,\&\, (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

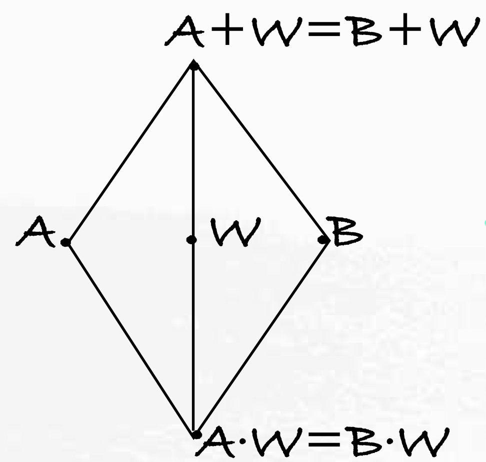
$[(B \cdot W \leq A \leq B + W) \,\&\, (C \cdot W \leq B \leq C + W)] \Rightarrow [(C \cdot W = C \cdot W \cdot W \leq B \cdot W \leq A) \,\&\, (A \leq B + W \leq C + W + W = C + W)] \Rightarrow (C \cdot W \leq A \leq C + W) \Rightarrow$

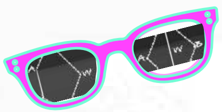
$(A \sqsubseteq^W C)$.∎

Si $(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0) \equiv (\mathcal{L}, \leq)$. Si tiene elemento máximo 1, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) \equiv (\mathcal{L}, \geq)$.

<u>Nota</u>. La relación no es necesariamente antisimétrica, como se comprueba con los siguientes ejemplos:







En ambos casos se verifica:
$A \neq B$, $A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A$.

En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ no es en general un conjunto ordenado.

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$, con $\mathcal{L} = \{A, B, \ldots, W, \ldots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\cdot$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$ es decir, $A \in [B \cdot W, B + W]$

<u>Proposición</u>. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

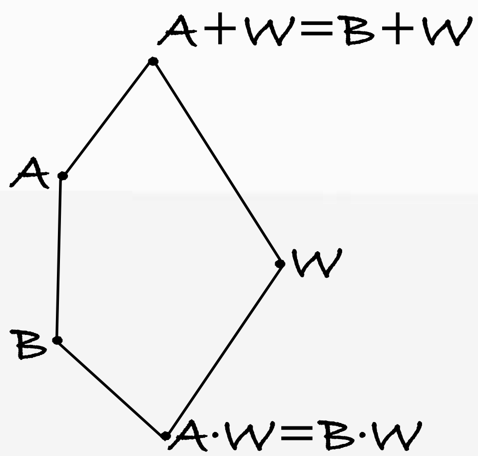
<u>Dem</u>. Reflexiva: $(A \cdot W \leq A \leq A + W \ \ \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A \ \ \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \& (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

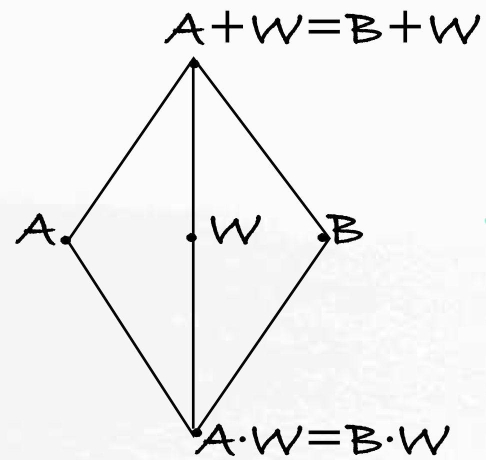
$[(B \cdot W \leq A \leq B + W) \& (C \cdot W \leq B \leq C + W)] \Rightarrow [(C \cdot W = C \cdot W \cdot W \leq B \cdot W \leq A) \& (A \leq B + W \leq C + W + W = C + W)] \Rightarrow (C \cdot W \leq A \leq C + W) \Rightarrow$

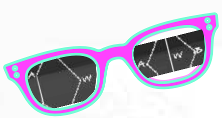
$(A \sqsubseteq^W C)$. ∎

Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0) \equiv (\mathcal{L}, \leq)$. Si tiene elemento máximo 1, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) \equiv (\mathcal{L}, \geq)$.

<u>Nota</u>. La relación no es necesariamente antisimétrica, como se comprueba con los siguientes ejemplos:







En ambos casos se verifica: $A \neq B$, $A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A$.

En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ no es en general un conjunto ordenado.

Como es habitual, con la equivalencia $(A \equiv_W B) \Leftrightarrow [(A \sqsubseteq^W B) \& (B \sqsubseteq^W A)]$ se obtiene el conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^{[W]})$ de las clases

$[\mathcal{L}]_W = \{[A]_W, [B]_W, \ldots\}$ con el orden $([A]_W \sqsubseteq^{[W]} [B]_W) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^W B)$.

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$, con $\mathcal{L} = \{A, B, \ldots, W, \ldots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\cdot$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$ es decir, $A \in [B \cdot W, B + W]$

<u>Proposición</u>. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

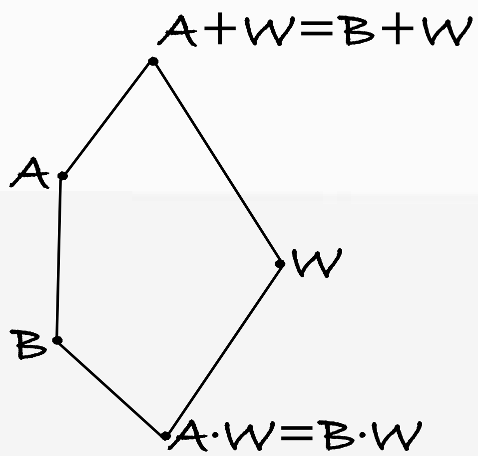
<u>Dem</u>. Reflexiva: $(A \cdot W \leq A \leq A + W \;\; \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A \;\; \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \,\&\, (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

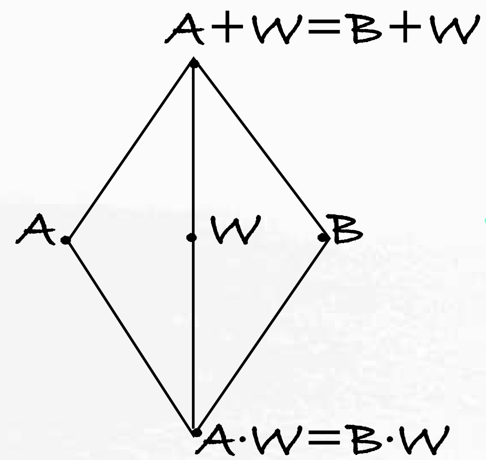
$[(B \cdot W \leq A \leq B + W) \,\&\, (C \cdot W \leq B \leq C + W)] \Rightarrow [(C \cdot W = C \cdot W \cdot W \leq B \cdot W \leq A) \,\&\, (A \leq B + W \leq C + W + W = C + W)] \Rightarrow (C \cdot W \leq A \leq C + W) \Rightarrow$

$(A \sqsubseteq^W C)$.∎

Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0) \equiv (\mathcal{L}, \leq)$. Si tiene elemento máximo 1, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) \equiv (\mathcal{L}, \geq)$.

<u>Nota</u>. La relación no es necesariamente antisimétrica, como se comprueba con los siguientes ejemplos:





En ambos casos se verifica:
$A \neq B$, $A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A$.

En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ no es en general un conjunto ordenado.

Como es habitual, con la equivalencia $(A \equiv_W B) \Leftrightarrow [(A \sqsubseteq^W B) \,\&\, (B \sqsubseteq^W A)]$ se obtiene el conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^{[W]})$ de las clases

$[\mathcal{L}]_W = \{[A]_W, [B]_W, \ldots\}$ con el orden $([A]_W \sqsubseteq^{[W]} [B]_W) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^W B)$. Aunque si $\mathcal{L}$ es distributivo, no es necesario:

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$, con $\mathcal{L}=\{A,B,\dots,W,\dots\}$ y $\leq$ un orden parcial. Aquí, $\cdot$ es el operador ínfimo y $+$ el operador supremo.

Sea $W \in \mathcal{L}$. Se define la nueva relación binaria $\sqsubseteq^W$ en $\mathcal{L}$: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$ es decir, $A \in [B\cdot W\,,\ B+W]$

Proposición. La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

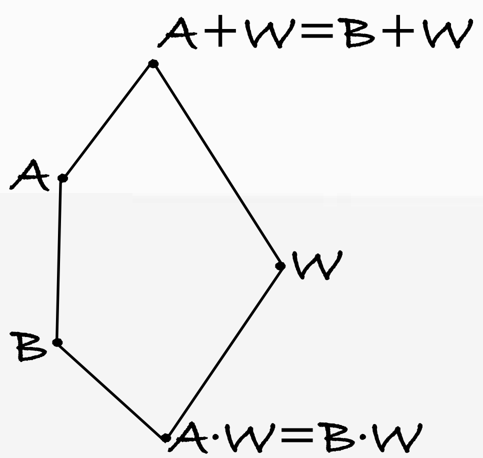
Dem. Reflexiva: $(A\cdot W \leq A \leq A+W \ \ \forall A \in \mathcal{L}) \Rightarrow (A \sqsubseteq^W A \ \ \forall A \in \mathcal{L})$. Transitiva: $[(A \sqsubseteq^W B) \& (B \sqsubseteq^W C)] \Rightarrow$

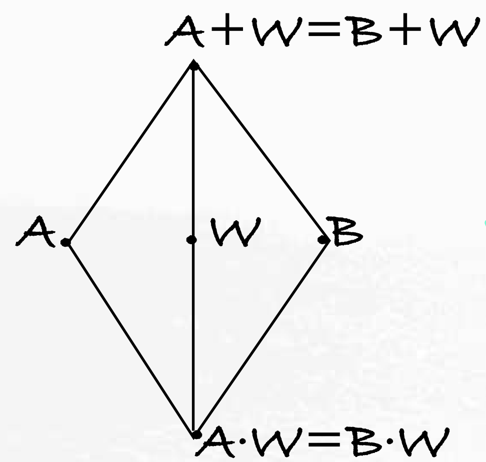
$[(B\cdot W \leq A \leq B+W) \& (C\cdot W \leq B \leq C+W)] \Rightarrow [(C\cdot W = C\cdot W\cdot W \leq B\cdot W \leq A) \& (A \leq B+W \leq C+W+W = C+W)] \Rightarrow (C\cdot W \leq A \leq C+W) \Rightarrow$

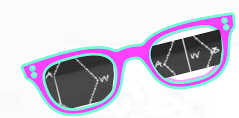
$(A \sqsubseteq^W C)$.∎

Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0) \equiv (\mathcal{L}, \leq)$. Si tiene elemento máximo 1, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) \equiv (\mathcal{L}, \geq)$.

Nota. La relación no es necesariamente antisimétrica, como se comprueba con los siguientes ejemplos:







En ambos casos se verifica:
$A \neq B$, $A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A$.

En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ no es en general un conjunto ordenado.

Como es habitual, con la equivalencia $(A \equiv_W B) \Leftrightarrow [(A \sqsubseteq^W B) \& (B \sqsubseteq^W A)]$ se obtiene el conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^{[W]})$ de las clases

$[\mathcal{L}]_W = \{[A]_W, [B]_W, \dots\}$ con el orden $([A]_W \sqsubseteq^{[W]} [B]_W) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^W B)$. Aunque si $\mathcal{L}$ es distributivo, no es necesario:

Proposición. Si $\mathcal{L}$ es un retículo distributivo, entonces la relación $\sqsubseteq^W$ es antisimétrica y en consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ es un conjunto ordenado. Además, ese conjunto ordenado es un inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$ con elemento mínimo W y con operación w-ínfimo $\sqcap^W$ tal que: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = (A+B)\cdot(W + A\cdot B) = A\cdot B + A\cdot W + B\cdot W \ \ \forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

Dem. $[(A \sqsubseteq^W B) \& (B \sqsubseteq^W A)] \Leftrightarrow [(A\cdot W = B\cdot W) \& (A+W = B+W)]$, luego $A = A\cdot(A+W) = A\cdot(B+W) = A\cdot B + A\cdot W = A\cdot B + B\cdot W =$

$B\cdot(A+W) = B\cdot(B+W) = B$, que prueba que $\sqsubseteq^W$ es antisimétrica. Por tanto el pre-orden $\sqsubseteq^W$ es un orden en $\mathcal{L}$.

Se verifica: $A\cdot W \leq W \leq A+W \ \ \forall A \in \mathcal{L}$, que prueba que $W \sqsubseteq^W A \ \ \forall A \in \mathcal{L}$ y por tanto es elemento mínimo de $\mathcal{L}$. 180

De $A\cdot W \leq (A+B)\cdot(W + A\cdot B) = [A\cdot B + W\cdot(A+B)] \leq A+W$ se deduce que $(A \sqcap^W B) \sqsubseteq^W A$ y por simetría, que $(A \sqcap^W B) \sqsubseteq^W B$.

Si S es tal que $S \sqsubseteq^W A$ y $S \sqsubseteq^W A$, entonces $(A \sqcap^W B)\cdot W = [A\cdot B + W\cdot(A+B)]\cdot W = (A+B)\cdot W \leq S \leq (A+W)\cdot(B+W) =$

$= (A \sqcap^W B) + W$, es decir: $S \sqsubseteq^W (A \sqcap^W B)$, que demuestra que $(A \sqcap^W B)$ es la mayor cota inferior para el orden $\sqsubseteq^W$.∎

COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0) \;\&\; (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0)\ \&\ (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \&$ $(1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$. ∎

COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0) \;\&\; (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

<u>Proposición</u>. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

<u>Dem</u>. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \;\; \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \;\; \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \&$ $(1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$.∎

<u>Corolario</u>. Si $COMP_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo.∎

COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0)\ \&\ (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

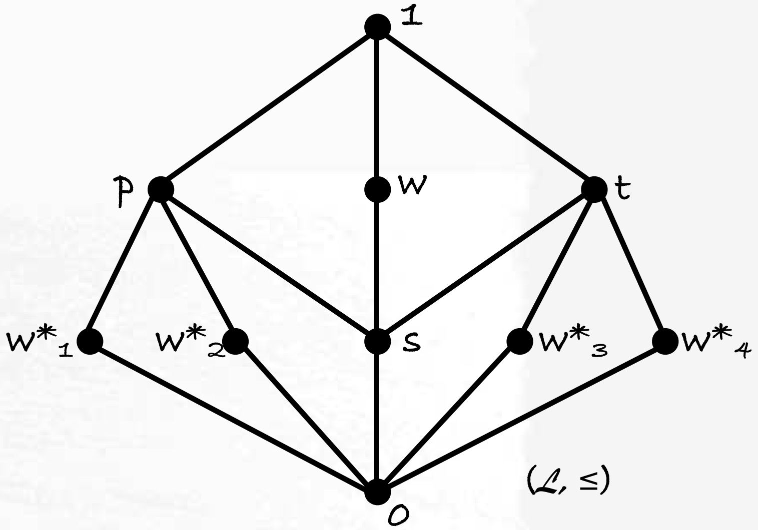
(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \& (1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$. ∎

Corolario. Si $COMP_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo. ∎



COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^{W}$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0)\ \&\ (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

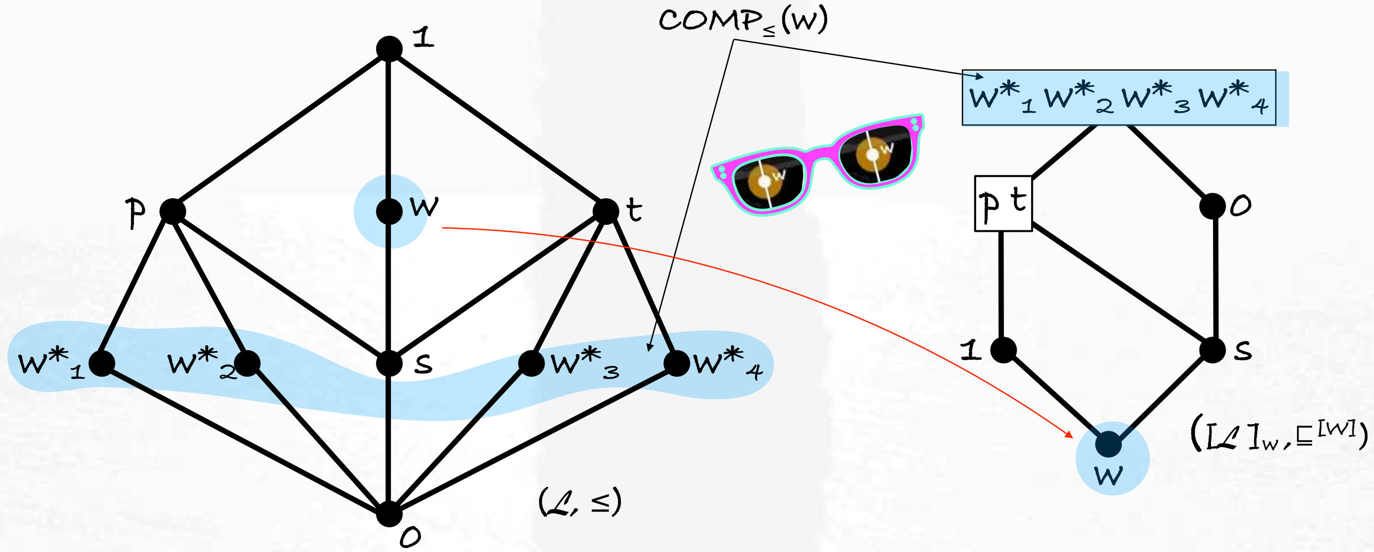
(1). $A \sqsubseteq^{W} W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^{W} S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^{W} W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^{W} S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \& (1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$.∎

Corolario. Si $COMP_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^{W})$), precisamente el máximo del mismo.∎



COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0)\ \&\ (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

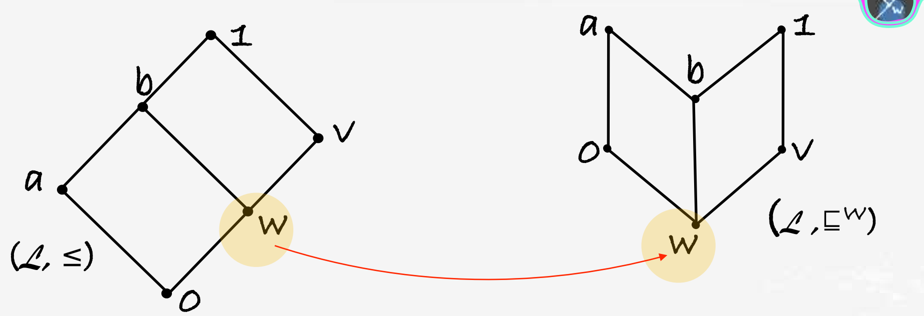
(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

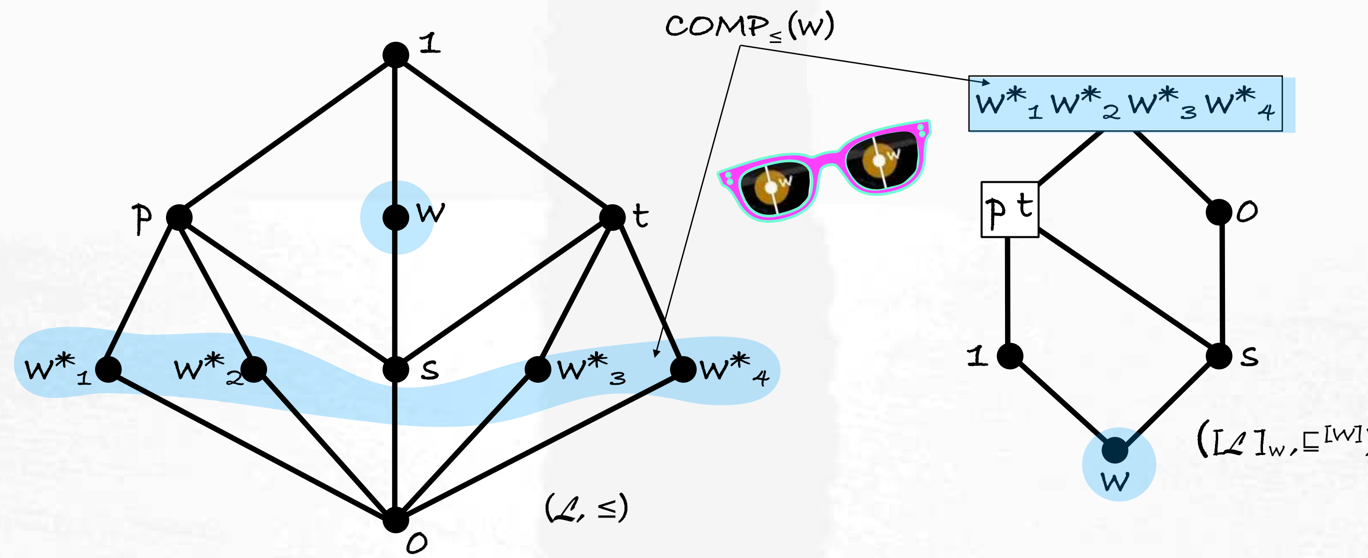
(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \& (1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$.∎

Corolario. Si $COMP_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo.∎





COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W)=\{S \,/\, (W \cdot S=0) \;\&\; (W+S=1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

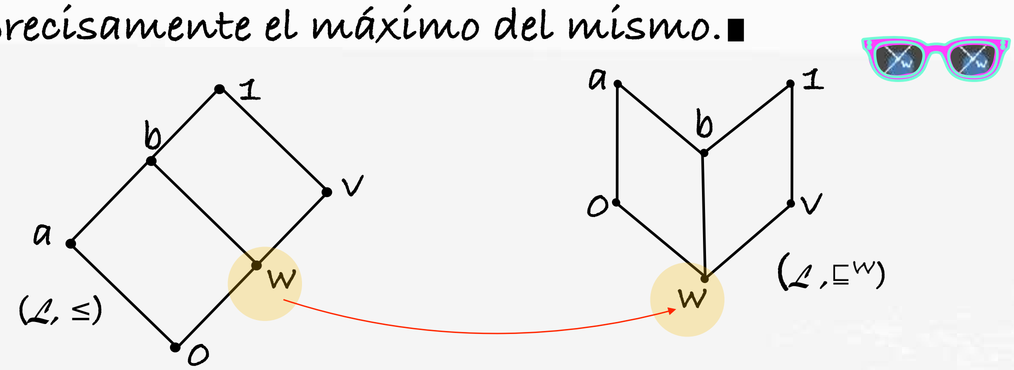
(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

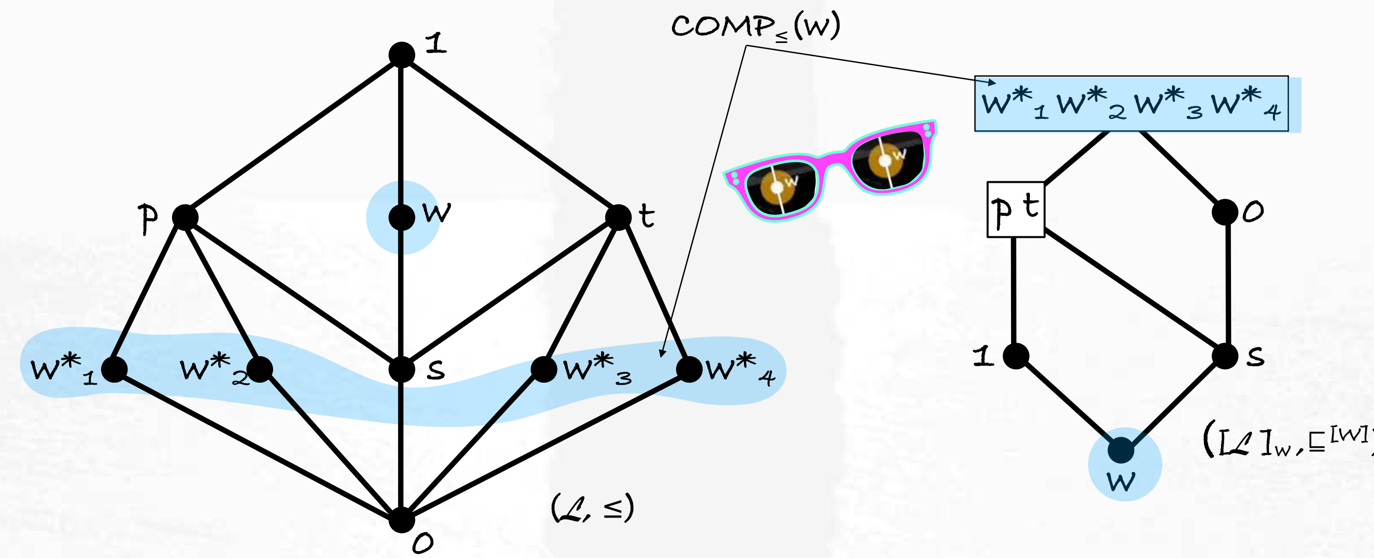
(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S+W) \& (W \cdot W^* = 0) \& (W+W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0) \&$ $(1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S+W=1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$.∎

Corolario. Si $COMP_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo.∎





Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c$.

COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W \in \mathcal{L}$ y sea $\mathrm{COMP}_{\leq}(W) = \{S \,/\, (W \cdot S = 0)\ \&\ (W + S = 1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

<u>Proposición</u>. Sea $W^* \in \mathrm{COMP}_{\leq}(W)$. Se verifica:

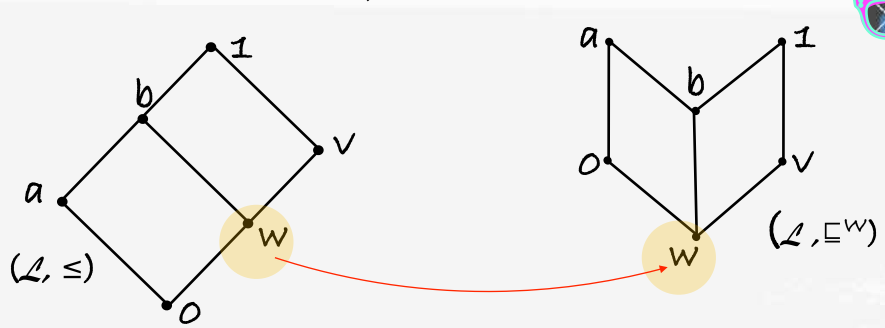
(1). $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

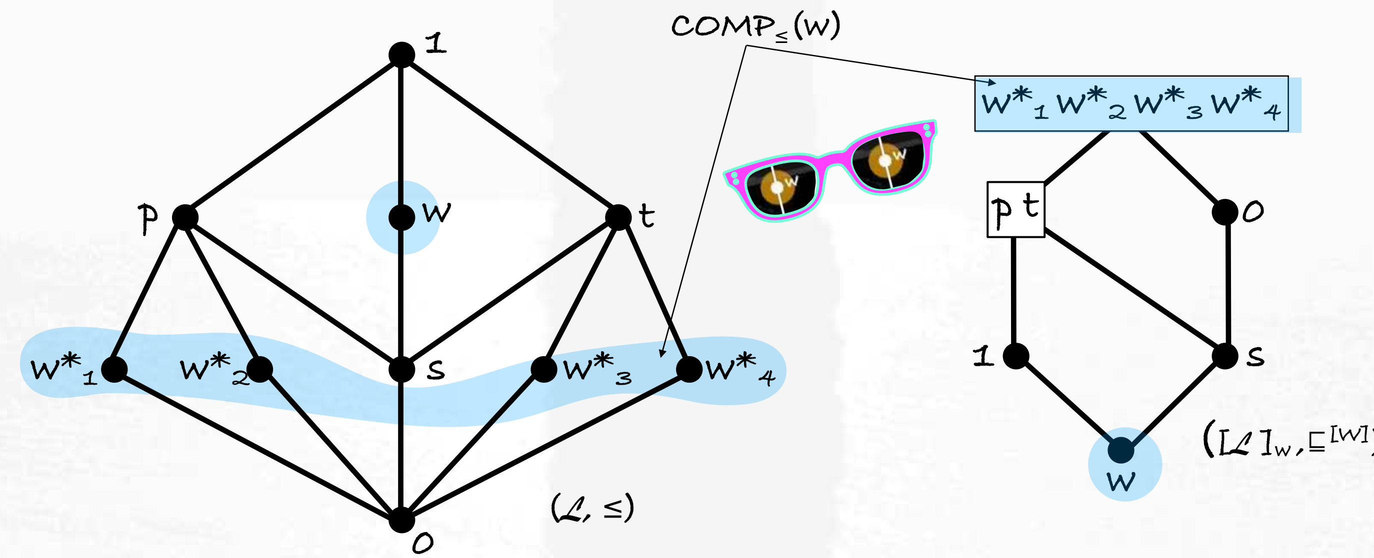
(2). Si se verifica $(W^* \sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in \mathrm{COMP}_{\leq}(W)$.

<u>Dem</u>. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W \cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W + W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

(2). Sea S tal que $W^* \sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S \cdot W \leq W^* \leq S + W)\ \&\ (W \cdot W^* = 0)\ \&\ (W + W^* = 1)] \Rightarrow [(S \cdot W = S \cdot W \cdot W \leq W^* \cdot W = 0)\ \&$ $(1 = W + W^* \leq S + W + W = S + W)]$; es decir, $S \cdot W = 0$ y $S + W = 1$ que prueba que $S \in \mathrm{COMP}_{\leq}(W)$.∎

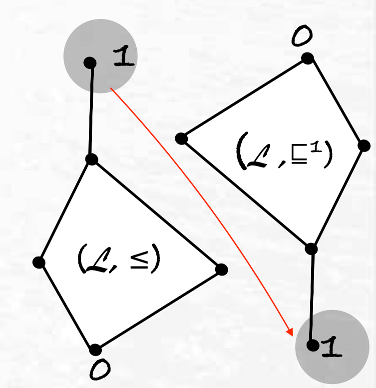
<u>Corolario</u>. Si $\mathrm{COMP}_{\leq}(W) \neq \emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W, \sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo.∎





<u>Teorema</u>. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A + B) = (A + B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c$.



COMPLEMENTACIÓN, NEGACIONES FUERTES Y LA RELACIÓN $\sqsubseteq^W$.

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, sea $W\in\mathcal{L}$ y sea $COMP_{\leq}(W)=\{S \,/\, (W\cdot S=0)\ \&\ (W+S=1)\}$ el subconjunto de sus complementos en $(\mathcal{L}, \leq)$.

Proposición. Sea $W^* \in COMP_{\leq}(W)$. Se verifica:

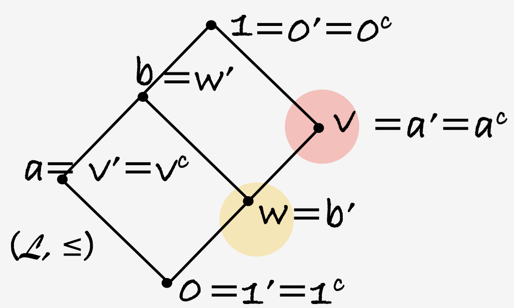
(1). $A\sqsubseteq^W W^* \quad \forall A\in\mathcal{L}$.

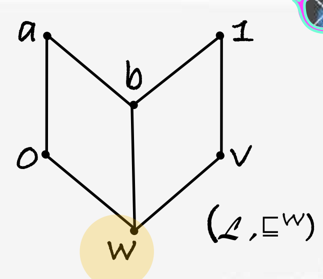
(2). Si se verifica $(W^*\sqsubseteq^W S)$, entonces también $S \in COMP_{\leq}(W)$.

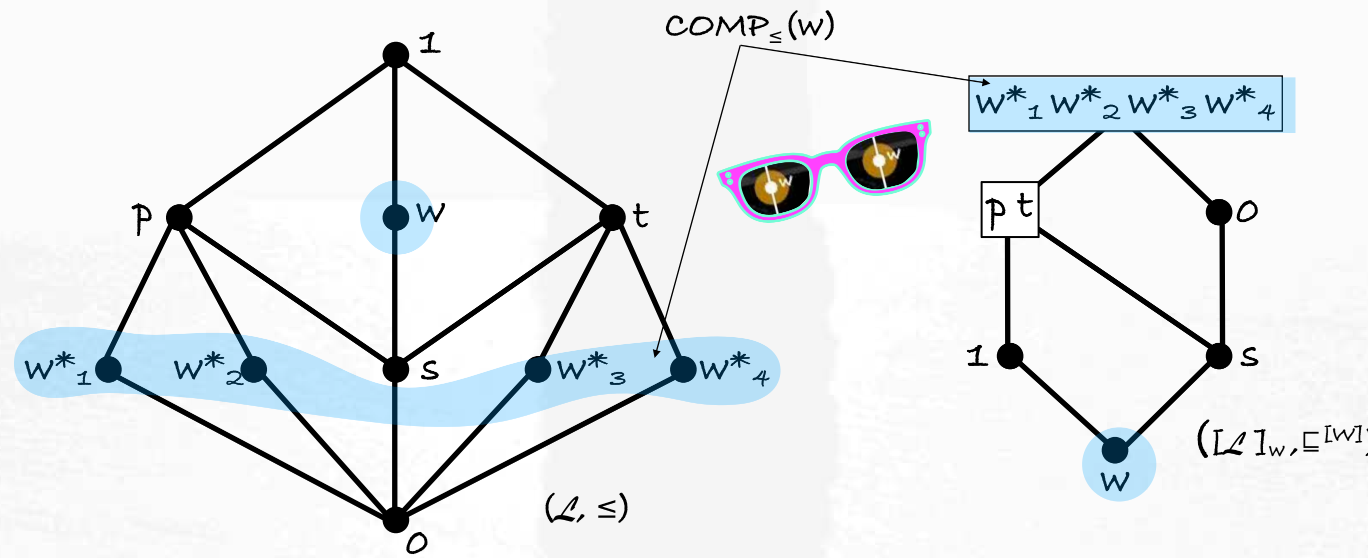
Dem. (1). Si W^* es un complemento de W entonces: $(W\cdot W^* = 0 \leq A \leq 1 = W+W^* \quad \forall A \in \mathcal{L})$, que prueba que $A \sqsubseteq^W W^* \quad \forall A\in \mathcal{L}$.

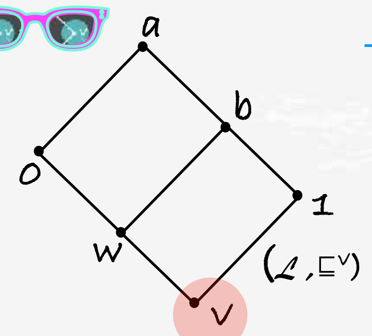
(2). Sea S tal que $W^*\sqsubseteq^W S$. Se verifica $[(S\cdot W\leq W^* \leq S+W)\&(W\cdot W^* =0)\&(W+W^* =1)]\Rightarrow[(S\cdot W=S\cdot W\cdot W\leq W^*\cdot W =0)\&$ $(1=W+W^* \leq S+W +W=S+W)]$; es decir, $S\cdot W=0$ y $S+W=1$ que prueba que $S \in COMP_{\leq}(W)$.∎

Corolario. Si $COMP_{\leq}(W)\neq\emptyset$, entonces es una clase de equivalencia, (elemento del conjunto ordenado $([\mathcal{L}]_W,\sqsubseteq^W)$), precisamente el máximo del mismo.∎





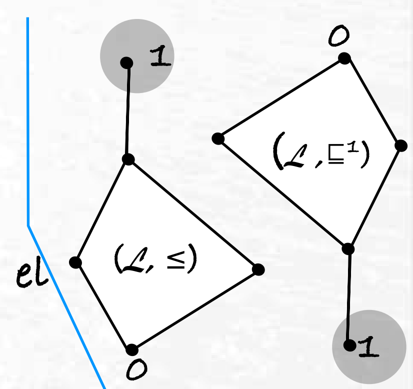




Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L}\times\mathcal{L}$:

$$A\sqcup^W B=A\sqcap^{W^c}B=A\cdot B+W^c\cdot(A+B)=(A+B)\cdot(W^c+A\cdot B)=A\cdot B+A\cdot W^c+B\cdot W^c .$$

(2) Si existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X''=X \ \forall X\in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A\leq B\Rightarrow A'\geq B'$), y si W es complementado tal que $W'=W^c$, entonces $(')$ también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A\sqsubseteq^W B\Rightarrow B'\sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \rightarrow (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.



(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A\triangle W \leq B\triangle W)$, con $X\triangle W=(X\cdot W^c+X'\cdot W) \ \forall X\in\mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X)=X\triangle W \quad \forall X\in\mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X')=[\varphi_W(X)]' \quad \forall X\in \mathcal{L}$.

La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo w^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B) = (A+B)\cdot(W^c + A\cdot B) = A\cdot B + A\cdot W^c + B\cdot W^c .$$

(2) Si existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X'' = X\ \forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces $(')$ también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \rightarrow (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X\cdot W^c + X'\cdot W)\ \forall X \in \mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W\ \ \forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]'\ \ \forall X \in \mathcal{L}$.

La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

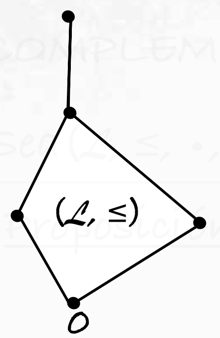
<u>Teorema</u>. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c .$$

(2) Si existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X'' = X$ $\forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces $(')$ también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \rightarrow (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X \cdot W^c + X' \cdot W)$ $\forall X \in \mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W$ $\forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]'$ $\forall X \in \mathcal{L}$.



La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

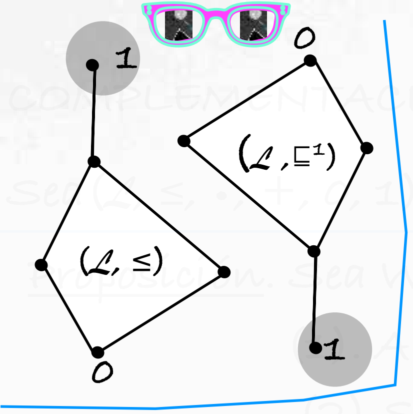
Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c .$$

(2) Si existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X'' = X\ \forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces $(')$ también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X \cdot W^c + X' \cdot W)\ \forall X \in \mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W\ \ \forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]'\ \ \forall X \in \mathcal{L}$.



La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

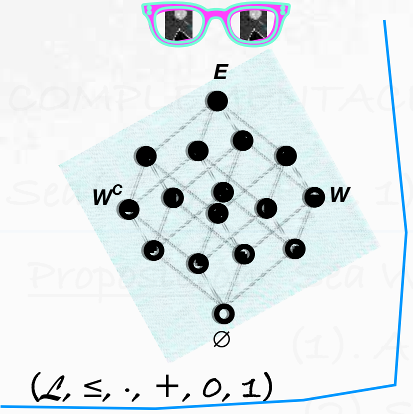
Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c$.

(2) Si existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X'' = X \ \forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces $(')$ también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X \cdot W^c + X' \cdot W) \ \forall X \in \mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W \ \forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]' \ \forall X \in \mathcal{L}$.



La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

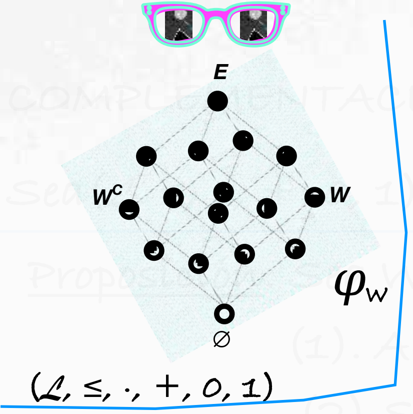
Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c .$$

(2) Si existe una negación fuerte ‘: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X'' = X \ \forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces (‘) también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte ‘ : $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X \cdot W^c + X' \cdot W) \ \forall X \in \mathcal{L}$.

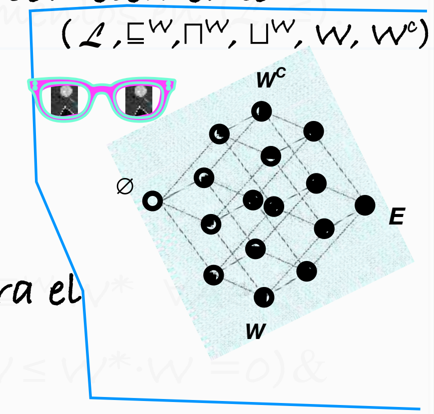
Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W \ \forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]' \ \forall X \in \mathcal{L}$.



La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo

Teorema. (1) Si $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es distributivo y W es complementado con complemento W^c, (único por la distributividad), entonces el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es un retículo distributivo con elemento máximo W^c, en el que el operador supremo $\sqcup^W$ es tal que, $\forall (A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$:

$$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B) = (A+B) \cdot (W^c + A \cdot B) = A \cdot B + A \cdot W^c + B \cdot W^c .$$



(2) Si existe una negación fuerte ': $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$, (involutiva: $X''=X$ $\forall X \in \mathcal{L}$ y antítona para el orden $\leq$: $A \leq B \Rightarrow A' \geq B'$), y si W es complementado tal que $W' = W^c$, entonces (') también es antítona para el orden $\sqsubseteq^W$, $(A \sqsubseteq^W B \Rightarrow B' \sqsubseteq^W A')$, y consecuentemente negación fuerte ': $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

(3) Bajo las hipótesis de (2), se verifica: $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, con $X \triangle W = (X \cdot W^c + X' \cdot W)$ $\forall X \in \mathcal{L}$.

Además, la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W$ $\forall X \in \mathcal{L}$, es un isomorfismo entre los retículos $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ que verifica: $\varphi_W(X') = [\varphi_W(X)]'$ $\forall X \in \mathcal{L}$.

(Demostración: transparencias siguientes)

<u>Demostración</u>. (1) Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A \sqcup^W B$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ y que $A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es ese supremo.

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$ y $B \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

$(A \sqcap^{W^c} B) \cdot W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot W = A \cdot B \cdot W \leq A.$

$(A \sqcap^{W^c} B) + W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W] \geq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W \cdot (A+B)] = [A \cdot B + (W^c + W) \cdot (A+B)] =$

$[A \cdot B + (A+B)] = (A+B) \geq A$, que demuestran que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Demostremos ahora que $A \sqcap^{W^c} B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A \sqsubseteq^W K$ y $B \sqsubseteq^W K$.

Entonces $K \cdot W \leq A \leq k + W$ y $K \cdot W \leq B \leq k + W$, luego $K \cdot W \leq A \cdot B \leq A + B \leq k + W$ y por lo tanto

$K \cdot W \leq A \cdot B \leq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \leq [A \cdot B + (A+B)] = A + B \leq k + W$, que demuestra que $(A \sqcap^{W^c} B) \sqsubseteq^W K$

y en consecuencia que $(A \sqcap^{W^c} B)$ es el supremo $A \sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

y que este último es un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A \sqcup^W W^c = A \cdot W^c + W^c \cdot (A + W^c) = A \cdot W^c + W^c = W^c \quad \forall A \in \mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Demostración. (1) Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A \sqcup^W B$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ y que $A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B)$ es ese supremo.

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$ y $B \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

$(A \sqcap^{W^c} B)\cdot W = [A\cdot B + W^c\cdot(A+B)]\cdot W = A\cdot B\cdot W \leq A.$

$(A \sqcap^{W^c} B) + W = [A\cdot B + W^c\cdot(A+B) + W] \geq [A\cdot B + W^c\cdot(A+B) + W\cdot(A+B)] = [A\cdot B + (W^c+W)\cdot(A+B)] =$

$[A\cdot B + (A+B)] = (A+B) \geq A$, que demuestran que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Demostremos ahora que $A \sqcap^{W^c} B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A \sqsubseteq^W K$ y $B \sqsubseteq^W K$.

Entonces $K\cdot W \leq A \leq k+W$ y $K\cdot W \leq B \leq k+W$, luego $K\cdot W \leq A\cdot B \leq A+B \leq k+W$ y por lo tanto

$K\cdot W \leq A\cdot B \leq [A\cdot B + W^c\cdot(A+B)] \leq [A\cdot B + (A+B)] = A+B \leq k+W$, que demuestra que $(A \sqcap^{W^c} B) \sqsubseteq^W K$

y en consecuencia que $(A \sqcap^{W^c} B)$ es el supremo $A \sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

y que este último es un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A \sqcup^W W^c = A\cdot W^c + W^c\cdot(A+W^c) = A\cdot W^c + W^c = W^c$ $\forall A \in \mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Demostremos que $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo. Sea $(A,B,C) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

$A \sqcup^W (B \sqcap^W C) = [A\cdot(B \sqcap^W C) + W^c\cdot(A + (B \sqcap^W C))] = [A\cdot(B\cdot C + W\cdot(B+C)) + W^c\cdot(A + B\cdot C + W\cdot(B+C)] =$

$[A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot W + A\cdot C\cdot W + A\cdot W^c + B\cdot C\cdot W^c].$

$(A \sqcup^W B) \sqcap^W (A \sqcup^W C) = [A\cdot B + W^c\cdot(A+B)] \sqcap^W [A\cdot C + W^c\cdot(A+C)] = [A\cdot B + W^c\cdot(A+B)]\cdot[A\cdot C + W^c\cdot(A+C)] +$

$+ W\cdot[A\cdot B + W^c\cdot(A+B) + A\cdot C + W^c\cdot(A+C)] =$

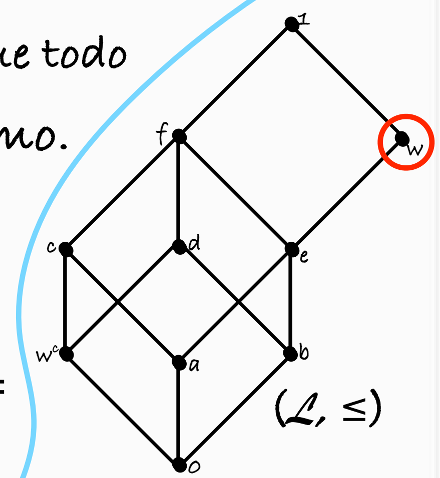
$[A\cdot B\cdot C + \cancel{A\cdot B\cdot W^c} + \cancel{A\cdot B\cdot C\cdot W^c} + \cancel{A\cdot C\cdot W^c} + \cancel{A\cdot B\cdot C\cdot W^c} + A\cdot W^c + \cancel{A\cdot C\cdot W^c} + \cancel{A\cdot B\cdot W^c} + B\cdot C\cdot W^c + A\cdot B\cdot W + A\cdot C\cdot W] =$

$[A\cdot B\cdot C + A\cdot W^c + B\cdot C\cdot W^c + A\cdot B\cdot W + A\cdot C\cdot W]$,

expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego se verifica la propiedad distributiva y en consecuencia $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

<u>Demostración</u>. (1) Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A \sqcup^W B$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ y que $A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es ese supremo.



$(\mathcal{L}, \leq)$

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$ y $B \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

$(A \sqcap^{W^c} B) \cdot W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot W = A \cdot B \cdot W \leq A.$

$(A \sqcap^{W^c} B) + W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W] \geq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W \cdot (A+B)] = [A \cdot B + (W^c + W) \cdot (A+B)] =$
$[A \cdot B + (A+B)] = (A+B) \geq A$, que demuestran que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Demostremos ahora que $A \sqcap^{W^c} B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A \sqsubseteq^W K$ y $B \sqsubseteq^W K$.

Entonces $K \cdot W \leq A \leq k + W$ y $K \cdot W \leq B \leq k + W$, luego $K \cdot W \leq A \cdot B \leq A + B \leq k + W$ y por lo tanto
$K \cdot W \leq A \cdot B \leq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \leq [A \cdot B + (A+B)] = A + B \leq k + W$, que demuestra que $(A \sqcap^{W^c} B) \sqsubseteq^W K$
y en consecuencia que $(A \sqcap^{W^c} B)$ es el supremo $A \sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$
y que este último es un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A \sqcup^W W^c = A \cdot W^c + W^c \cdot (A + W^c) = A \cdot W^c + W^c = W^c \quad \forall A \in \mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Demostremos que $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo. Sea $(A,B,C) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

$$A \sqcup^W (B \sqcap^W C) = [A \cdot (B \sqcap^W C) + W^c \cdot (A + (B \sqcap^W C))] = [A \cdot (B \cdot C + W \cdot (B+C)) + W^c \cdot (A + B \cdot C + W \cdot (B+C)] =$$
$$[A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c].$$

$$(A \sqcup^W B) \sqcap^W (A \sqcup^W C) = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \sqcap^W [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] +$$
$$+ W \cdot [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] =$$
$$[A \cdot B \cdot C + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + A \cdot W^c + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W] =$$
$$[A \cdot B \cdot C + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W],$$

expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego se verifica la propiedad distributiva y en consecuencia $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

<u>Demostración</u>. (1) Sea $(\mathcal{L}, \le, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B)\in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A\sqcup^W B$ en $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W)$ y que $A\sqcap^{W^c}B=A\cdot B+W^c\cdot(A+B)$ es ese supremo.

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A\sqsubseteq^W(A\sqcap^{W^c}B)$ y $B\sqsubseteq^W(A\sqcap^{W^c}B)$.

$(A\sqcap^{W^c}B)\cdot W=[A\cdot B+W^c\cdot(A+B)]\cdot W=A\cdot B\cdot W \le A.$

$(A\sqcap^{W^c}B)+W=[A\cdot B+W^c\cdot(A+B)+W] \ge [A\cdot B+W^c\cdot(A+B)+W\cdot(A+B)]=[A\cdot B+(W^c+W)\cdot(A+B)]=$

$[A\cdot B+(A+B)]=(A+B)\ge A$, que demuestran que $A\sqsubseteq^W(A\sqcap^{W^c}B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A\sqsubseteq^W(A\sqcap^{W^c}B)$.

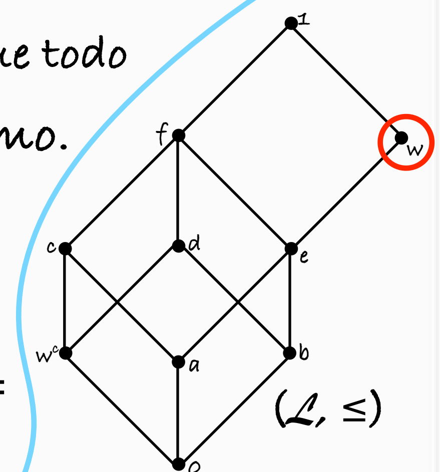
Demostremos ahora que $A\sqcap^{W^c}B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A\sqsubseteq^W K$ y $B\sqsubseteq^W K$.

Entonces $K\cdot W\le A\le k+W$ y $K\cdot W\le B\le k+W$, luego $K\cdot W\le A\cdot B\le A+B\le k+W$ y por lo tanto

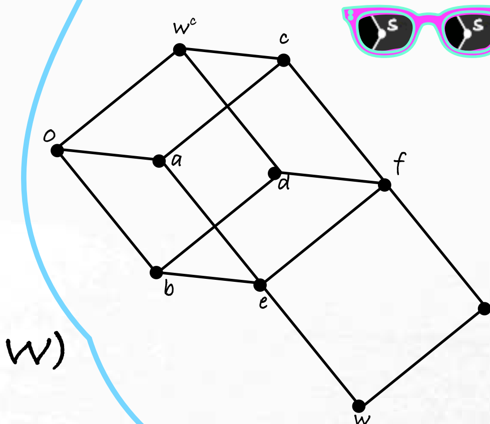
$K\cdot W\le A\cdot B\le [A\cdot B+W^c\cdot(A+B)]\le[A\cdot B+(A+B)]=A+B\le k+W$, que demuestra que $(A\sqcap^{W^c}B)\sqsubseteq^W K$

y en consecuencia que $(A\sqcap^{W^c}B)$ es el supremo $A\sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W)$ y que este último es un retículo $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A\sqcup^W W^c=A\cdot W^c+W^c\cdot(A+W^c)=A\cdot W^c+W^c=W^c\ \ \forall A\in\mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W)$.



$(\mathcal{L}, \le)$



$(\mathcal{L},\sqsubseteq^W)$

Demostremos que $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W,W^c)$ es distributivo. Sea $(A,B,C)\in\mathcal{L}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}$.

$A\sqcup^W(B\sqcap^W C)=[A\cdot(B\sqcap^W C)+W^c\cdot(A+(B\sqcap^W C))]=[A\cdot(B\cdot C+W\cdot(B+C))+W^c\cdot(A+B\cdot C+W\cdot(B+C)]=$

$[A\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot W+A\cdot C\cdot W+A\cdot W^c+B\cdot C\cdot W^c].$

$$(A\sqcup^W B)\sqcap^W(A\sqcup^W C)=[A\cdot B+W^c\cdot(A+B)]\sqcap^W[A\cdot C+W^c\cdot(A+C)]=[A\cdot B+W^c\cdot(A+B)]\cdot[A\cdot C+W^c\cdot(A+C)]+$$

$$+W\cdot[A\cdot B+W^c\cdot(A+B)+A\cdot C+W^c\cdot(A+C)]=$$

$[A\cdot B\cdot C+\cancel{A\cdot B\cdot W^c}+\cancel{A\cdot B\cdot C\cdot W^c}+\cancel{A\cdot C\cdot W^c}+\cancel{A\cdot B\cdot C\cdot W^c}+A\cdot W^c+\cancel{A\cdot C\cdot W^c}+\cancel{A\cdot B\cdot W^c}+B\cdot C\cdot W^c+A\cdot B\cdot W+A\cdot C\cdot W]=$

$[A\cdot B\cdot C+A\cdot W^c+B\cdot C\cdot W^c+A\cdot B\cdot W+A\cdot C\cdot W]$,

expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego se verifica la propiedad distributiva y en consecuencia $(\mathcal{L},\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W,W^c)$ es distributivo.

Demostración. (1) Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A \sqcup^W B$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ y que $A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es ese supremo.

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$ y $B \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

$(A \sqcap^{W^c} B) \cdot W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot W = A \cdot B \cdot W \leq A.$

$(A \sqcap^{W^c} B) + W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W] \geq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W \cdot (A+B)] = [A \cdot B + (W^c + W) \cdot (A+B)] =$

$[A \cdot B + (A+B)] = (A+B) \geq A$, que demuestran que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Demostremos ahora que $A \sqcap^{W^c} B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A \sqsubseteq^W K$ y $B \sqsubseteq^W K$.

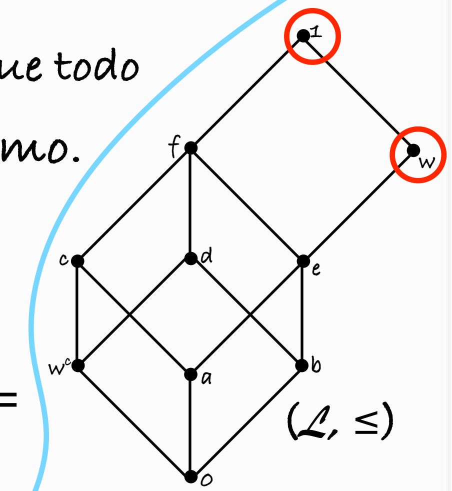
Entonces $K \cdot W \leq A \leq k + W$ y $K \cdot W \leq B \leq k + W$, luego $K \cdot W \leq A \cdot B \leq A + B \leq k + W$ y por lo tanto

$K \cdot W \leq A \cdot B \leq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \leq [A \cdot B + (A+B)] = A + B \leq k + W$, que demuestra que $(A \sqcap^{W^c} B) \sqsubseteq^W K$

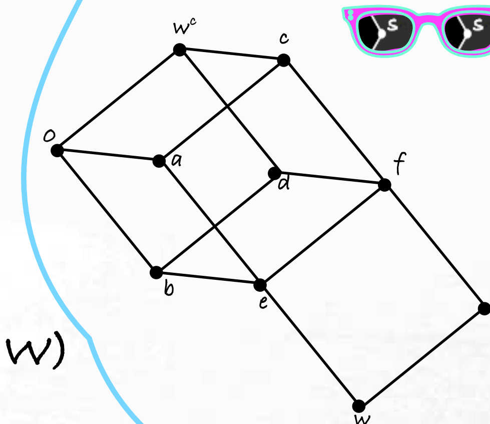
y en consecuencia que $(A \sqcap^{W^c} B)$ es el supremo $A \sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

y que este último es un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A \sqcup^W W^c = A \cdot W^c + W^c \cdot (A + W^c) = A \cdot W^c + W^c = W^c \quad \forall A \in \mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.



$(\mathcal{L}, \leq)$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

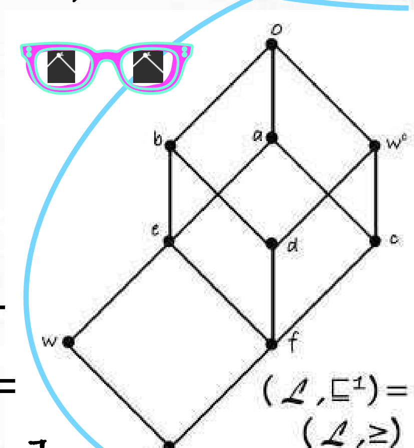
Demostremos que $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo. Sea $(A,B,C) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

$A \sqcup^W (B \sqcap^W C) = [A \cdot (B \sqcap^W C) + W^c \cdot (A + (B \sqcap^W C))] = [A \cdot (B \cdot C + W \cdot (B+C)) + W^c \cdot (A + B \cdot C + W \cdot (B+C)] =$

$[A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c].$

$(A \sqcup^W B) \sqcap^W (A \sqcup^W C) = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \sqcap^W [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] +$

$+ W \cdot [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] =$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) = (\mathcal{L}, \geq)$

$[A \cdot B \cdot C + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + A \cdot W^c + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W] =$

$[A \cdot B \cdot C + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W],$

expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego se verifica la propiedad distributiva y en consecuencia $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

Demostración. (1) Sea $(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y sea $w \in \mathcal{L}$ complementado con complemento w^c.

Sea $\sqsubseteq^W$ el orden de actividad asociado a w y sea $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ el inf-semiretículo asociado. demostremos que todo par $(A,B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tiene elemento supremo $A \sqcup^W B$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ y que $A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es ese supremo.

Para ello demostremos primero que es un mayorante: $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$ y $B \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

$(A \sqcap^{W^c} B) \cdot W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot W = A \cdot B \cdot W \leq A.$

$(A \sqcap^{W^c} B) + W = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W] \geq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + W \cdot (A+B)] = [A \cdot B + (W^c + W) \cdot (A+B)] =$

$[A \cdot B + (A+B)] = (A+B) \geq A$, que demuestran que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Por simetría y por la conmutabilidad del operador $\sqcap^{W^c}$, también se verifica que $A \sqsubseteq^W (A \sqcap^{W^c} B)$.

Demostremos ahora que $A \sqcap^{W^c} B$ es el menor de los mayorantes. Sea K otro: $A \sqsubseteq^W K$ y $B \sqsubseteq^W K$.

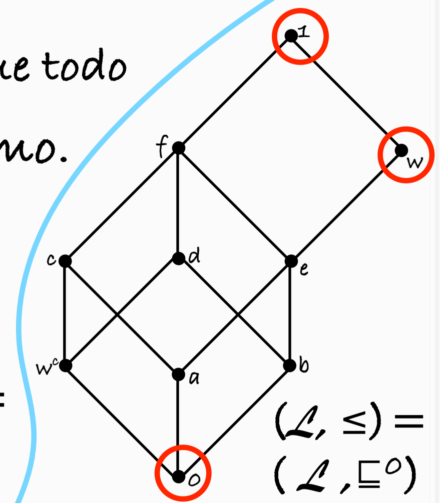
Entonces $K \cdot W \leq A \leq k + W$ y $K \cdot W \leq B \leq k + W$, luego $K \cdot W \leq A \cdot B \leq A + B \leq k + W$ y por lo tanto

$K \cdot W \leq A \cdot B \leq [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \leq [A \cdot B + (A+B)] = A + B \leq k + W$, que demuestra que $(A \sqcap^{W^c} B) \sqsubseteq^W K$

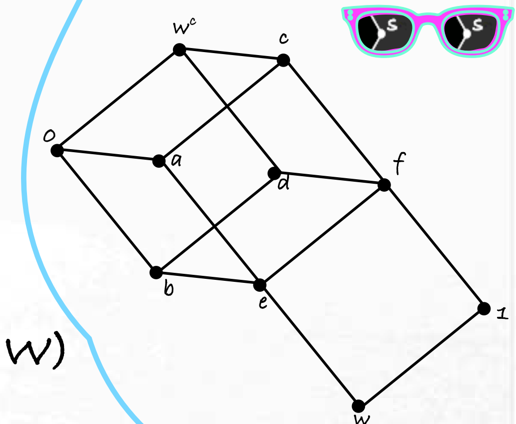
y en consecuencia que $(A \sqcap^{W^c} B)$ es el supremo $A \sqcup^W B$ del par (A,B) en el inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

y que este último es un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W)$ con elemento mínimo W.

De $A \sqcup^W W^c = A \cdot W^c + W^c \cdot (A + W^c) = A \cdot W^c + W^c = W^c \quad \forall A \in \mathcal{L}$ se deduce que W^c es el elemento máximo en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.



$(\mathcal{L}, \leq) = (\mathcal{L}, \sqsubseteq^0)$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

Demostremos que $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo. Sea $(A,B,C) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

$A \sqcup^W (B \sqcap^W C) = [A \cdot (B \sqcap^W C) + W^c \cdot (A + (B \sqcap^W C))] = [A \cdot (B \cdot C + W \cdot (B + C)) + W^c \cdot (A + B \cdot C + W \cdot (B+C)] =$

$[A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c].$

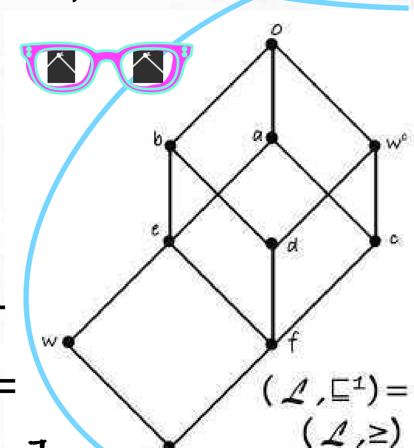
$(A \sqcup^W B) \sqcap^W (A \sqcup^W C) = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \sqcap^W [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] = [A \cdot B + W^c \cdot (A+B)] \cdot [A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] +$

$+ W \cdot [A \cdot B + W^c \cdot (A+B) + A \cdot C + W^c \cdot (A+C)] =$

$[A \cdot B \cdot C + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot C \cdot W^c} + A \cdot W^c + \cancel{A \cdot C \cdot W^c} + \cancel{A \cdot B \cdot W^c} + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W] =$

$[A \cdot B \cdot C + A \cdot W^c + B \cdot C \cdot W^c + A \cdot B \cdot W + A \cdot C \cdot W],$

expresión que coincide con la del párrafo anterior, luego se verifica la propiedad distributiva y en consecuencia $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1) = (\mathcal{L}, \geq)$

(Continúa)

<u>Demostración</u>. (continuación)

(2) Supongamos que existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$ y que W es complementado tal que $W' = W^c$.
Para demostrar que también es negación fuerte en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$, basta probar que $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

En efecto;

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A) \Leftrightarrow [A \cdot B + W \cdot (A+B) = A] \Leftrightarrow [(A'+B') \cdot (W' + A' \cdot B') = A'] \Leftrightarrow [(A'+B') \cdot (W^c + A' \cdot B') = A'] \Leftrightarrow (A' \sqcup^W B' = A') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

(3) Sea la aplicación $\varphi_w : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(X) = X \triangle W = X \cdot W^c + X' \cdot W \quad \forall X \in \mathcal{L}$.

La aplicación φ_w es una involución: $\varphi_w(\varphi_w(X)) = (X \triangle W) \triangle W = X \quad \forall X \in \mathcal{L}$, luego es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Supongamos que $A \leq B$, que es equivalente a $B' \leq A'$. Entonces:

$\varphi_w(B) \cdot W = (B \triangle W) \cdot W = (B \cdot W^c + B' \cdot W) \cdot W = B' \cdot W \leq A' \cdot W \leq A \cdot W^c + A' \cdot W = \varphi_w(A)$.

$\varphi_w(B) + W = (B \cdot W^c + B' \cdot W) + W \geq (A \cdot W^c + B' \cdot W) + W \geq A \cdot W^c + W \geq A \cdot W^c + A' \cdot W = \varphi_w(A)$.

En conclusión: $\varphi_w(B) \cdot W \leq \varphi_w(A) \leq \varphi_w(B) + W$, que demuestra que $\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)$.

Supongamos ahora que $\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)$. Entonces $(B \cdot W^c + B' \cdot W) \cdot W \leq (A \cdot W^c + A' \cdot W) \leq (B \cdot W^c + B' \cdot W) + W$,
y simplificando: $B' \cdot W \leq (A \cdot W^c + A' \cdot W) \leq B \cdot W^c + W$, luego $B' \cdot W \cdot W \leq (A \cdot W^c + A' \cdot W) \cdot W$ y
$(A \cdot W^c + A' \cdot W) + W \leq B \cdot W^c + W + W$, es decir $B' \cdot W \leq A' \cdot W$ y
$A \cdot W^c + W \leq B \cdot W^c + W$. De esta última desigualdad obtenemos $(A \cdot W^c + W) \cdot W^c \leq (B \cdot W^c + W) \cdot W^c$, que se reduce a
$A \cdot W^c \leq B \cdot W^c$ y su equivalencia $B' + W \leq A' + W$, luego $(B' + W) \cdot W^c \leq (A' + W) \cdot W^c$, es decir $B' \cdot W^c \leq A' \cdot W^c$.
luego $B' \cdot W + B' \cdot W^c \leq A' \cdot W + A' \cdot W^c$, equivalente $B' \cdot (W + W^c) \leq A' \cdot (W + W^c)$, que prueba que $B' \leq A'$ y finalmente que $A \leq B$.

Hemos demostrado que $(A \leq B) \Leftrightarrow [\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)]$, es decir, que $\varphi_w : (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ es un isomorfismo.

Sea $X \in \mathcal{L}$, entonces $\varphi_w(X') = X' \triangle W = X' \cdot W^c + X'' \cdot W = X' \cdot W^c + X \cdot W = (X+W)' + (X'+W^c)' = [(X+W) \cdot (X'+W^c)]'$
$= (X \cdot X' + X \cdot W^c + X' \cdot W + \cancel{W \cdot W^c})' = [(X \cdot X' \cdot (W + W^c) + X \cdot W^c + X' \cdot W]' = [\cancel{X \cdot X' \cdot W} + \cancel{X \cdot X' \cdot W^c} + X \cdot W^c + X' \cdot W]' = (X \cdot W^c + X' \cdot W)' =$
$(X \triangle W)' = [\varphi_w(X)]'$. ∎

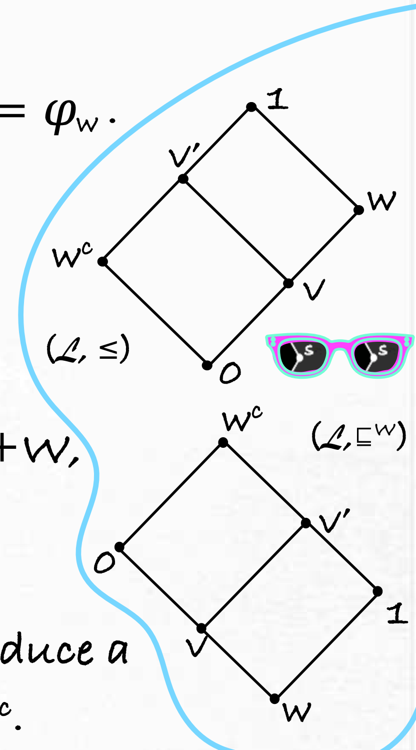
Demostración. (continuación)

(2) Supongamos que existe una negación fuerte ′: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$ y que W es complementado tal que $W' = W^c$.
Para demostrar que también es negación fuerte en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$, basta probar que $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

En efecto;
$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A) \Leftrightarrow [A\cdot B + W\cdot(A+B) = A] \Leftrightarrow [(A'+B')\cdot(W'+A'\cdot B') = A'] \Leftrightarrow [(A'+B')\cdot(W^c+A'\cdot B') = A'] \Leftrightarrow (A' \sqcup^W B' = A') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

(3) Sea la aplicación $\varphi_W : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_W(X) = X \triangle W = X\cdot W^c + X'\cdot W \quad \forall X \in \mathcal{L}$.
La aplicación φ_W es una involución: $\varphi_W(\varphi_W(X)) = (X \triangle W) \triangle W = X \quad \forall X \in \mathcal{L}$, luego es biyectiva tal que $\varphi_W^{-1} = \varphi_W$.
Supongamos que $A \leq B$, que es equivalente a $B' \leq A'$. Entonces:
$\varphi_W(B)\cdot W = (B \triangle W)\cdot W = (B\cdot W^c + B'\cdot W)\cdot W = B'\cdot W \leq A'\cdot W \leq A\cdot W^c + A'\cdot W = \varphi_W(A)$.
$\varphi_W(B) + W = (B\cdot W^c + B'\cdot W) + W \geq (A\cdot W^c + B'\cdot W) + W \geq A\cdot W^c + W \geq A\cdot W^c + A'\cdot W = \varphi_W(A)$.
En conclusión: $\varphi_W(B)\cdot W \leq \varphi_W(A) \leq \varphi_W(B) + W$, que demuestra que $\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B)$.
Supongamos ahora que $\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B)$. Entonces $(B\cdot W^c + B'\cdot W)\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W) \leq (B\cdot W^c + B'\cdot W) + W$,
y simplificando: $B'\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W) \leq B\cdot W^c + W$, luego $B'\cdot W\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W)\cdot W$ y
$(A\cdot W^c + A'\cdot W) + W \leq B\cdot W^c + W + W$, es decir $B'\cdot W \leq A'\cdot W$ y
$A\cdot W^c + W \leq B\cdot W^c + W$. De esta última desigualdad obtenemos $(A\cdot W^c + W)\cdot W^c \leq (B\cdot W^c + W)\cdot W^c$, que se reduce a
$A\cdot W^c \leq B\cdot W^c$ y su equivalencia $B' + W \leq A' + W$, luego $(B'+W)\cdot W^c \leq (A'+W)\cdot W^c$, es decir $B'\cdot W^c \leq A'\cdot W^c$.
luego $B'\cdot W + B'\cdot W^c \leq A'\cdot W + A'\cdot W^c$, equivalente $B'\cdot(W + W^c) \leq A'\cdot(W + W^c)$, que prueba que $B' \leq A'$ y finalmente que $A \leq B$.
Hemos demostrado que $(A \leq B) \Leftrightarrow [\varphi_W(A) \sqsubseteq^W \varphi_W(B)]$, es decir, que $\varphi_W : (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ es un isomorfismo.
Sea $X \in \mathcal{L}$, entonces $\varphi_W(X') = X' \triangle W = X'\cdot W^c + X''\cdot W = X'\cdot W^c + X\cdot W = (X+W)' + (X'+W^c)' = [(X+W)\cdot(X'+W^c)]'$
$= (X\cdot X' + X\cdot W^c + X'\cdot W + \cancel{W\cdot W^c})' = [(X\cdot X'\cdot(W+W^c) + X\cdot W^c + X'\cdot W]' = [\cancel{X\cdot X'\cdot W} + \cancel{X\cdot X'\cdot W^c} + X\cdot W^c + X'\cdot W]' = (X\cdot W^c + X'\cdot W)' =$
$(X \triangle W)' = [\varphi_W(X)]'$. ∎



Demostración. (continuación)

(2) Supongamos que existe una negación fuerte $'$: $(\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \leq)$ y que W es complementado tal que $W' = W^c$. Para demostrar que también es negación fuerte en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$, basta probar que $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

En efecto;

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A) \Leftrightarrow [A\cdot B + W\cdot(A+B) = A] \Leftrightarrow [(A'+B')\cdot(W'+A'\cdot B') = A'] \Leftrightarrow [(A'+B')\cdot(W^c+A'\cdot B') = A'] \Leftrightarrow (A' \sqcup^W B' = A') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (B' \sqsubseteq^W A')$.

(3) Sea la aplicación $\varphi_w : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(X) = X \triangle W = X\cdot W^c + X'\cdot W \quad \forall X \in \mathcal{L}$.

La aplicación φ_w es una involución: $\varphi_w(\varphi_w(X)) = (X \triangle W) \triangle W = X \quad \forall X \in \mathcal{L}$, luego es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Supongamos que $A \leq B$, que es equivalente a $B' \leq A'$. Entonces:

$\varphi_w(B)\cdot W = (B \triangle W)\cdot W = (B\cdot W^c + B'\cdot W)\cdot W = B'\cdot W \leq A'\cdot W \leq A\cdot W^c + A'\cdot W = \varphi_w(A)$.

$\varphi_w(B) + W = (B\cdot W^c + B'\cdot W) + W \geq (A\cdot W^c + B'\cdot W) + W \geq A\cdot W^c + W \geq A\cdot W^c + A'\cdot W = \varphi_w(A)$.

En conclusión: $\varphi_w(B)\cdot W \leq \varphi_w(A) \leq \varphi_w(B) + W$, que demuestra que $\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)$.

Supongamos ahora que $\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)$. Entonces $(B\cdot W^c + B'\cdot W)\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W) \leq (B\cdot W^c + B'\cdot W) + W$,

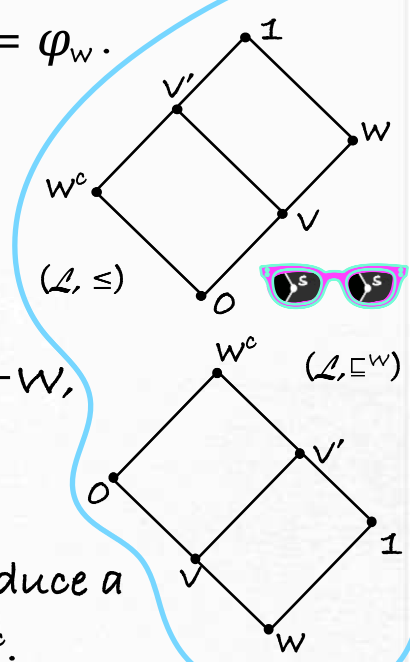
y simplificando: $B'\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W) \leq B\cdot W^c + W$, luego $B'\cdot W\cdot W \leq (A\cdot W^c + A'\cdot W)\cdot W$ y

$(A\cdot W^c + A'\cdot W) + W \leq B\cdot W^c + W + W$, es decir $B'\cdot W \leq A'\cdot W$ y

$A\cdot W^c + W \leq B\cdot W^c + W$. De esta última desigualdad obtenemos $(A\cdot W^c + W)\cdot W^c \leq (B\cdot W^c + W)\cdot W^c$, que se reduce a

$A\cdot W^c \leq B\cdot W^c$ y su equivalencia $B' + W \leq A' + W$, luego $(B'+W)\cdot W^c \leq (A'+W)\cdot W^c$, es decir $B'\cdot W^c \leq A'\cdot W^c$.

luego $B'\cdot W + B'\cdot W^c \leq A'\cdot W + A'\cdot W^c$, equivalente $B'\cdot(W + W^c) \leq A'\cdot(W + W^c)$, que prueba que $B' \leq A'$ y finalmente que $A \leq B$.



Hemos demostrado que $(A \leq B) \Leftrightarrow [\varphi_w(A) \sqsubseteq^W \varphi_w(B)]$, es decir, que $\varphi_w : (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ es un isomorfismo.

Sea $X \in \mathcal{L}$, entonces $\varphi_w(X') = X' \triangle W = X'\cdot W^c + X''\cdot W = X'\cdot W^c + X\cdot W = (X+W)' + (X'+W^c)' = [\,(X+W)\cdot(X'+W^c)\,]'$

$= (X\cdot X' + X\cdot W^c + X'\cdot W + \cancel{W\cdot W^c})' = [(X\cdot X'\cdot(W+W^c) + X\cdot W^c + X'\cdot W]' = [\cancel{X\cdot X'\cdot W} + \cancel{X\cdot X'\cdot W^c} + X\cdot W^c + X'\cdot W]' = (X\cdot W^c + X'\cdot W)' =$

$(X \triangle W)' = [\varphi_w(X)]'$. ∎

Nota. Por ser $\varphi_w : (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ un isomorfismo, se verifica $\varphi_w(X\cdot Y) = \varphi_w(X) \sqcap^W \varphi_w(Y)$ y $\varphi_w(X+Y) = \varphi_w(X) \sqcup^W \varphi_w(Y)$ para todo par $(X,Y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

Además, como $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$, también se verifica: $\varphi_w(X \sqcap^W Y) = \varphi_w(X)\cdot\varphi_w(Y)$ y $\varphi_w(X \sqcup^W Y) = \varphi_w(X) + \varphi_w(Y)$.

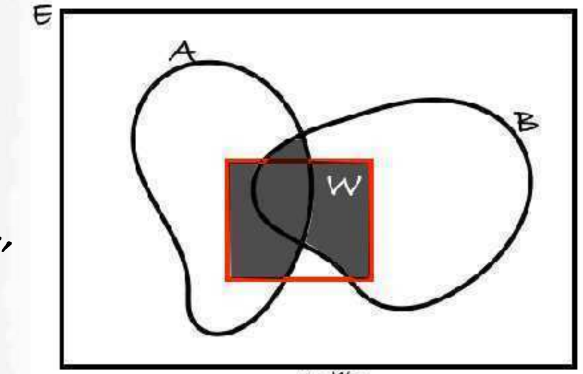
Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$

Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c + B) + (A^c + A)\cdot B = A + B$, luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$. ∎

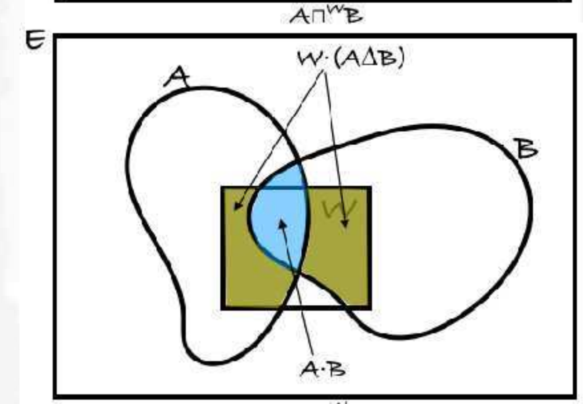
Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$



$A \sqcap^W B$

Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c+B) + (A^c+A)\cdot B = A+B$, luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$. ∎



$A \sqcap^W B$

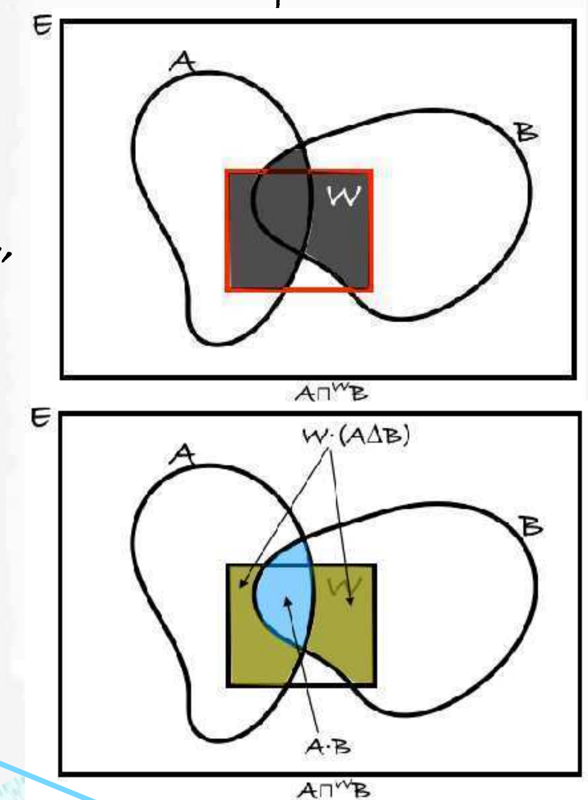
Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

$$A \sqcap^W B = A\cdot B + (W\cdot A)\Delta(W\cdot B)$$
$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A\cdot B + W^c\cdot(A\Delta B) = A\cdot B + (W^c\cdot A)\Delta(W^c\cdot B). \quad (2)$$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$. ∎

Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$



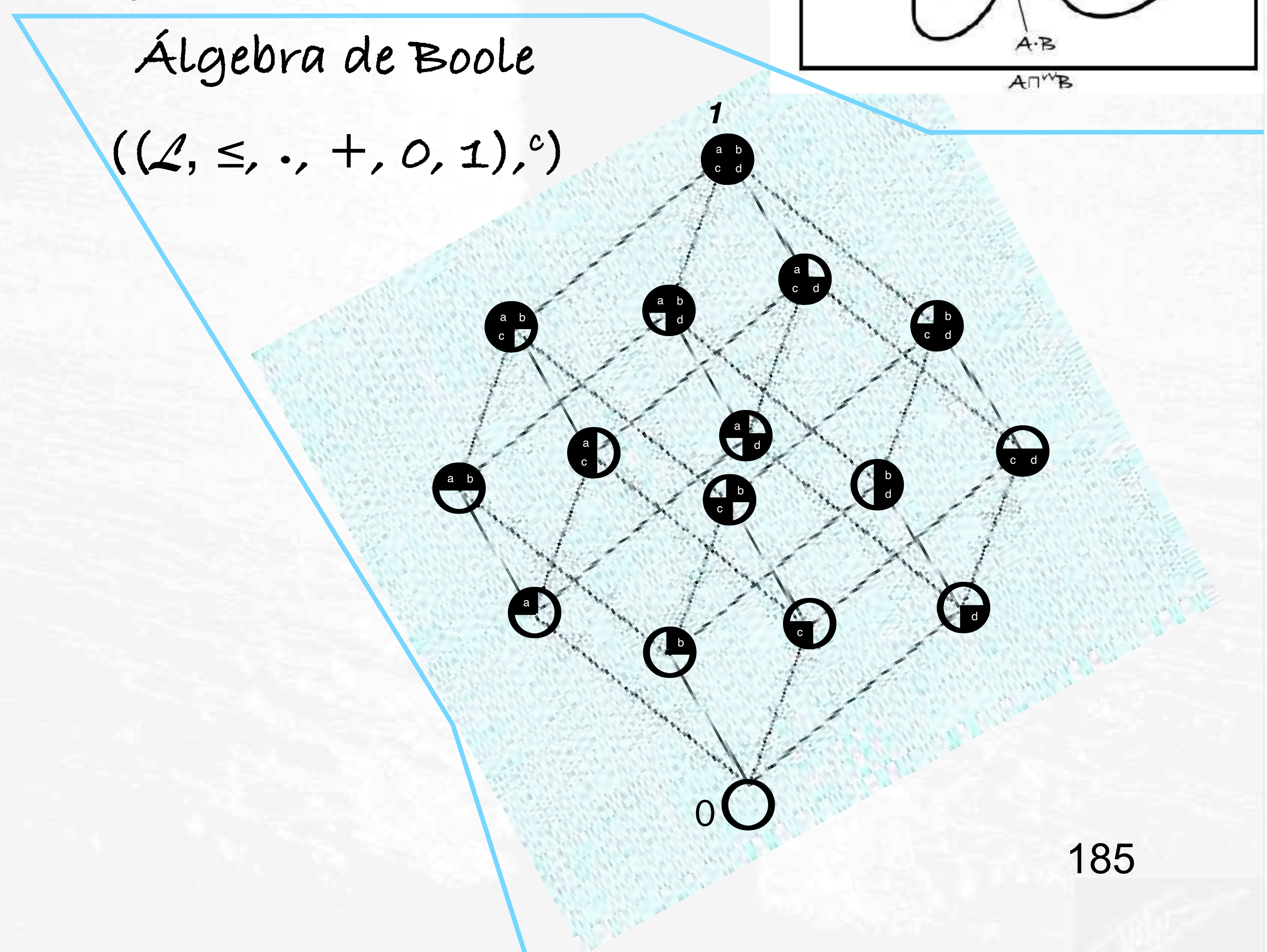
Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c + B) + (A^c + A)\cdot B = A + B$, luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$. ∎

Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

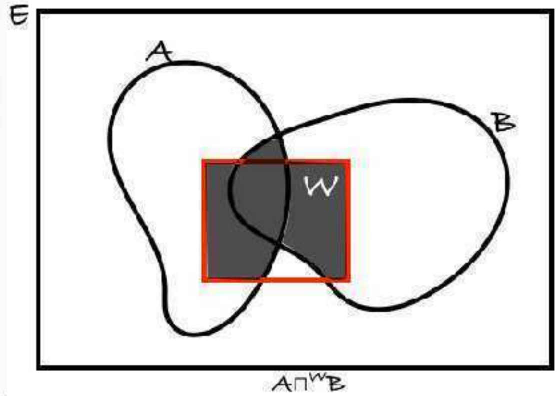
$$A \sqcap^W B = A\cdot B + (W\cdot A)\Delta(W\cdot B)$$

$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A\cdot B + W^c\cdot(A\Delta B) = A\cdot B + (W^c\cdot A)\Delta(W^c\cdot B). \quad (2)$$

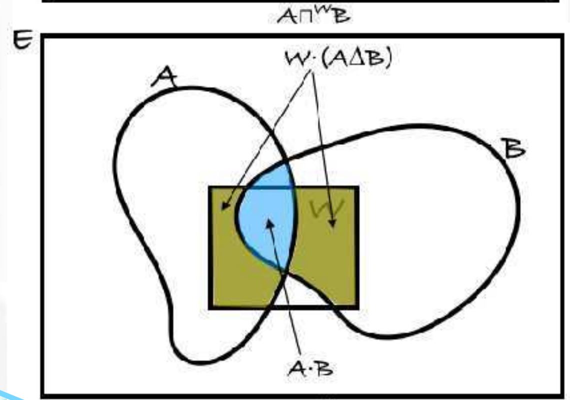
En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$. ∎



Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:



$A \sqcap^W B$



$A \sqcap^W B$

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$

Demostración. $(A\Delta B)+A\cdot B=(A\Delta B)+A\cdot B+A\cdot B=A\cdot B^c+A^c\cdot B+A\cdot B+A\cdot B=A\cdot(B^c+B)+(A^c+A)\cdot B=A+B$, luego $A\sqcap^W B=A\cdot B+W\cdot(A+B)=A\cdot B+W\cdot((A\Delta B)+A\cdot B)=A\cdot B+W\cdot(A\Delta B)+W\cdot(A\cdot B)= A\cdot B+W\cdot(A\Delta B)$.∎

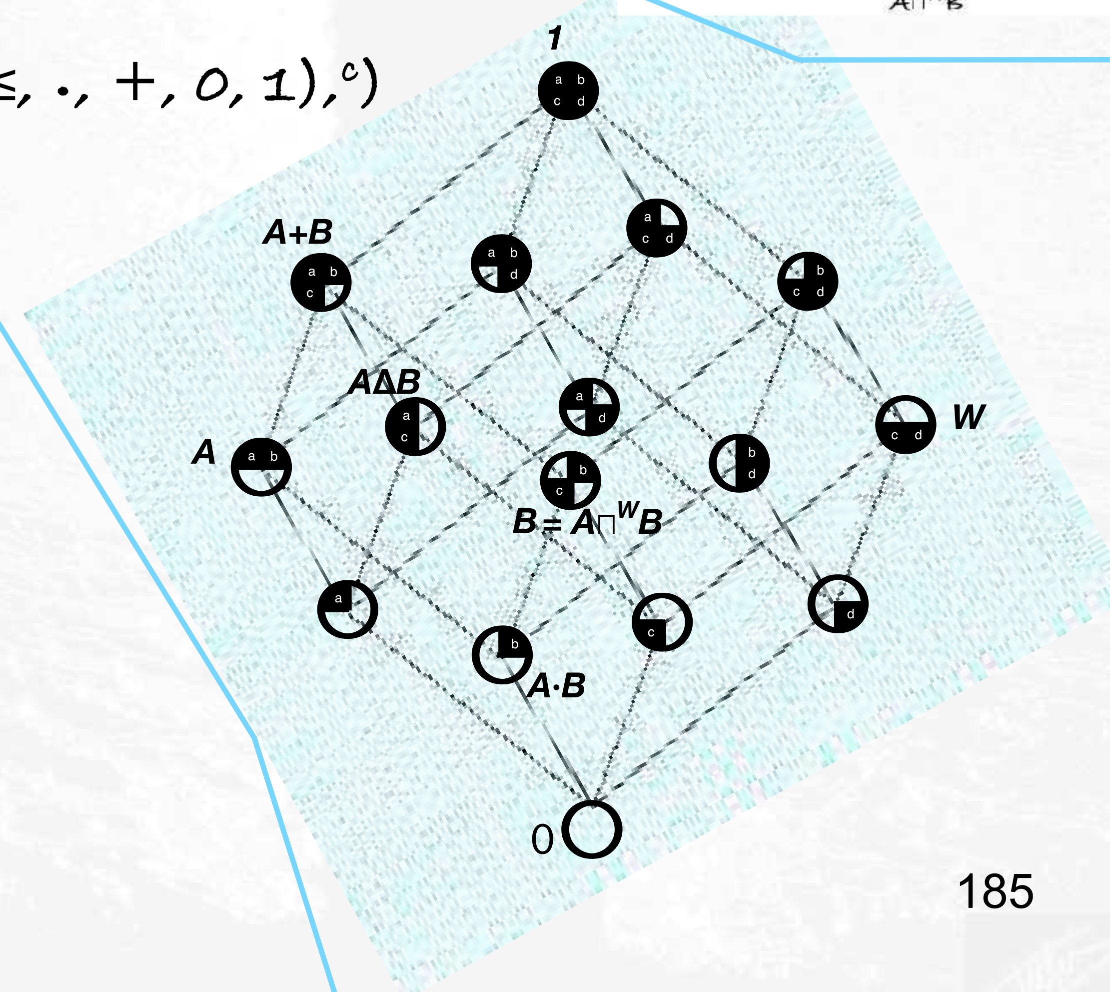
Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + (W \cdot A) \Delta (W \cdot B)$$
$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A \cdot B + W^c \cdot (A \Delta B) = A \cdot B + (W^c \cdot A) \Delta (W^c \cdot B). \quad (2)$$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$.∎

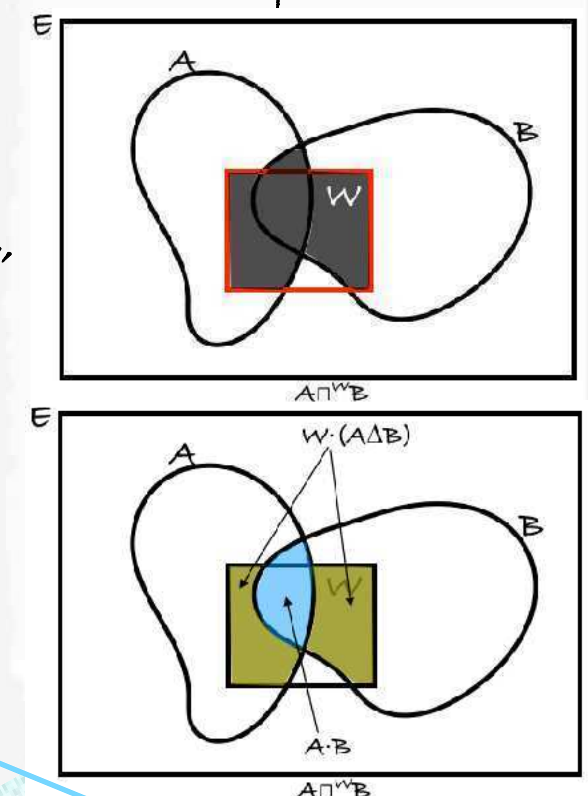
Álgebra de Boole

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$



Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$



Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c + B) + (A^c + A)\cdot B = A + B$, luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$.∎

Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

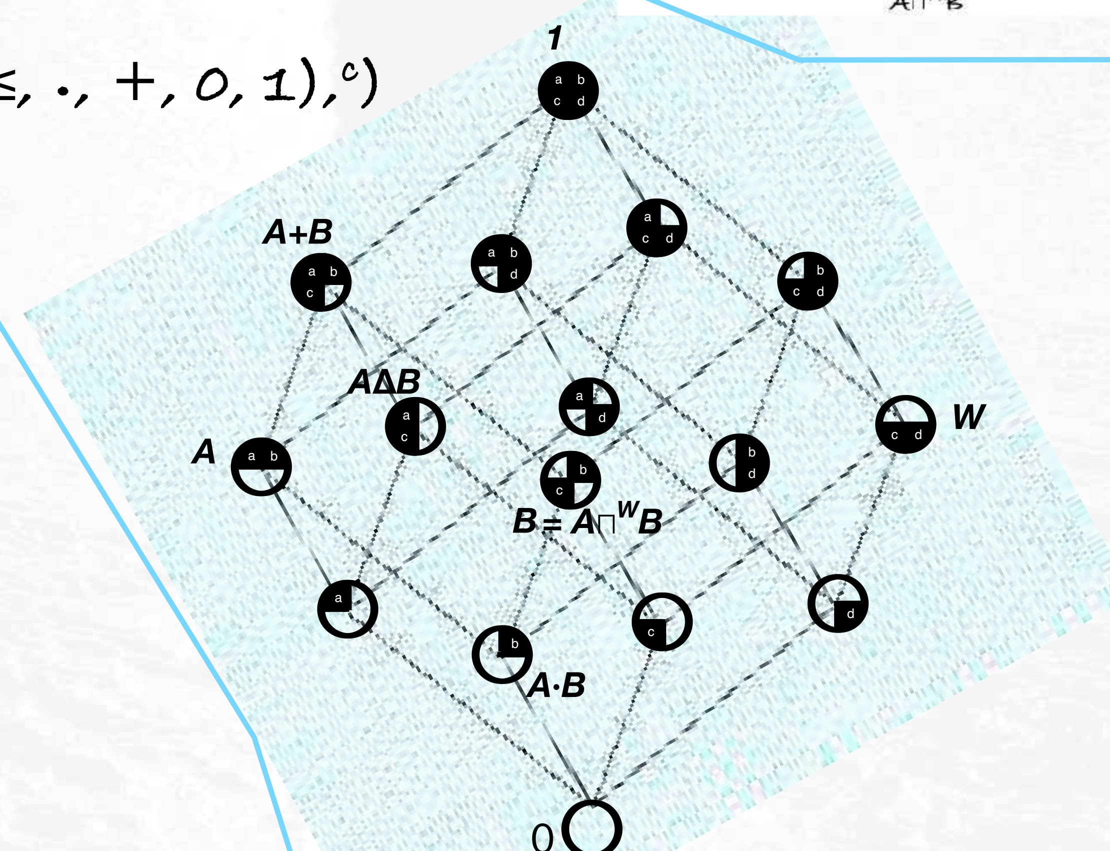
$$A \sqcap^W B = A\cdot B + (W\cdot A)\Delta(W\cdot B)$$

$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A\cdot B + W^c\cdot(A\Delta B) = A\cdot B + (W^c\cdot A)\Delta(W^c\cdot B). \quad (2)$$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$.∎

Álgebra de Boole

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$



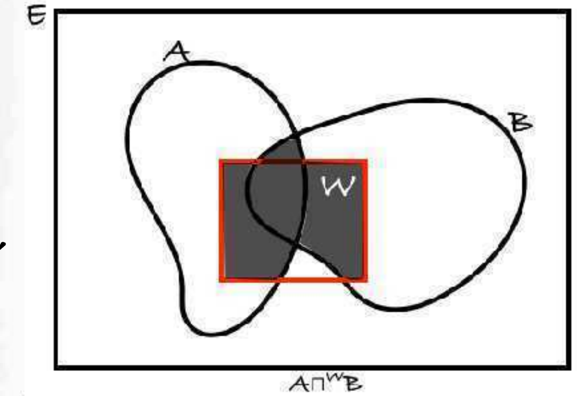
Nota En un retículo distributivo $((\mathcal{L} \leq), ')$ con una negación fuerte $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, si $N(\mathcal{L})$ representa el conjunto de elementos complementados K,S,... de $\mathcal{L}$ tales que $K' = K^c$, $S' = S^c$,...; podemos asociar a todo $A \in L$, los elementos de $N(\mathcal{L})$:

$$SUPP(A) = \inf\{K \in N(\mathcal{L}) \ / \ A \leq K\}$$

$$KER(A) = \sup\{S \in N(\mathcal{L}) \ / \ S \leq A\}.$$

Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$

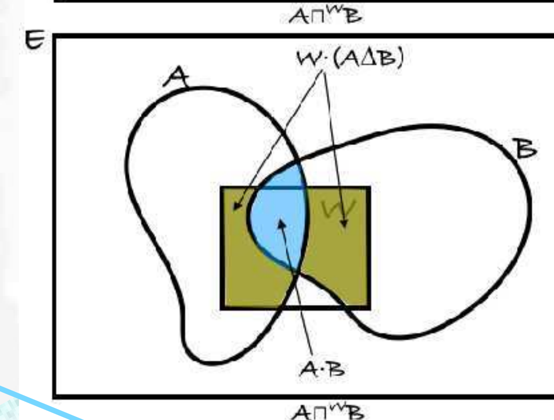


Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c + B) + (A^c + A)\cdot B = A + B$, luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$.∎

Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

$$A \sqcap^W B = A\cdot B + (W\cdot A)\Delta(W\cdot B)$$
$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A\cdot B + W^c\cdot(A\Delta B) = A\cdot B + (W^c\cdot A)\Delta(W^c\cdot B). \quad (2)$$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$.∎



Nota En un retículo distributivo $((\mathcal{L} \leq), ')$ con una negación fuerte $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, si $N(\mathcal{L})$ representa el conjunto de elementos complementados K,S,... de $\mathcal{L}$ tales que $K' = K^c$, $S' = S^c$,...; podemos asociar a todo $A \in L$, los elementos de $N(\mathcal{L})$:

$$SUPP(A) = \inf\{K \in N(\mathcal{L}) \,/\, A \leq K\}$$
$$KER(A) = \sup\{S \in N(\mathcal{L}) \,/\, S \leq A\}.$$

Se verifica:

$KER(A) \leq A \leq SUPP(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

$(A \in N(\mathcal{L})) \Leftrightarrow (A = SUPP(A)) \Leftrightarrow (A = KER(A))$

$SUPP(A \cap B) = SUPP(A) \cap SUPP(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

$KER(A \cup B) = KER(A) \cup KER(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

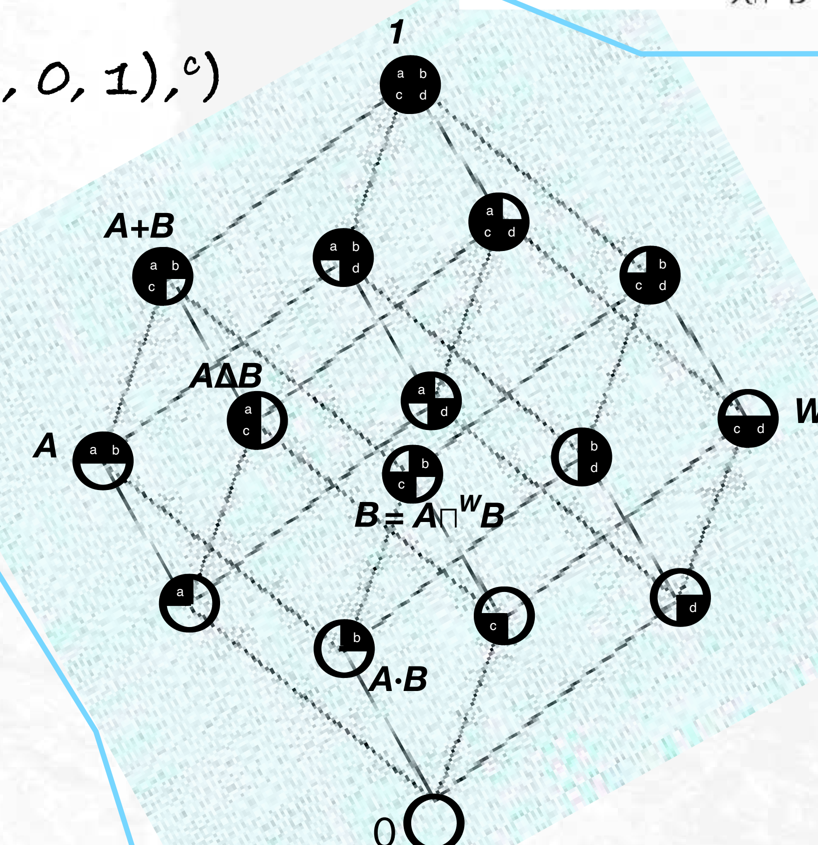
$(A \leq B) \Rightarrow (SUPP(A) \leq SUPP(B)) \,\&\, (KER(A) \leq KER(B))$

$SUPP(SUPP(A)) = SUPP(A)$,

$KER(KER(A)) = KER(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

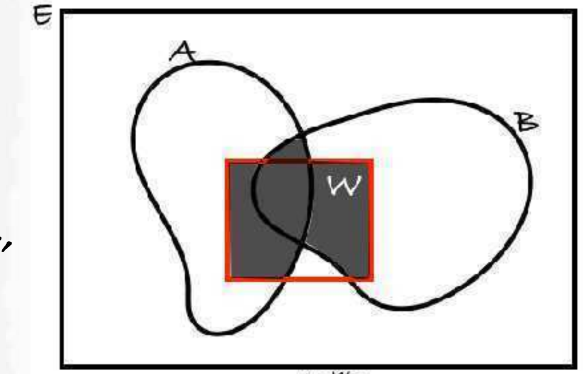
Álgebra de Boole

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$



Proposición. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$



$A \sqcap^W B$

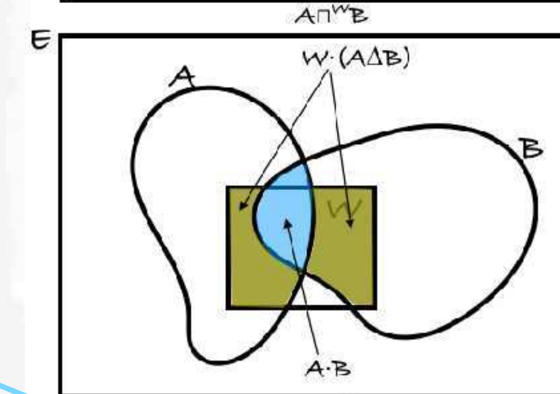
Demostración. $(A\Delta B) + A\cdot B = (A\Delta B) + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot B^c + A^c\cdot B + A\cdot B + A\cdot B = A\cdot(B^c + B) + (A^c + A)\cdot B = A + B$,

luego $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) = A\cdot B + W\cdot((A\Delta B) + A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B) + W\cdot(A\cdot B) = A\cdot B + W\cdot(A\Delta B)$.∎

Corolario. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

$$A \sqcap^W B = A\cdot B + (W\cdot A)\Delta(W\cdot B)$$

$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A\cdot B + W^c\cdot(A\Delta B) = A\cdot B + (W^c\cdot A)\Delta(W^c\cdot B). \quad (2)$$



$A \sqcap^W B$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$.∎

Nota En un retículo distributivo $((\mathcal{L} \leq), ')$ con una negación fuerte $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, si $N(\mathcal{L})$ representa el conjunto de elementos complementados $K, S, \ldots$ de $\mathcal{L}$ tales que $K' = K^c$, $S' = S^c, \ldots$; podemos asociar a todo $A \in L$, los elementos de $N(\mathcal{L})$:

$$SUPP(A) = \inf\{K \in N(\mathcal{L}) \ / \ A \leq K\}$$

$$KER(A) = \sup\{S \in N(\mathcal{L}) \ / \ S \leq A\}.$$

Se verifica:

$KER(A) \leq A \leq SUPP(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

$(A \in N(\mathcal{L})) \Leftrightarrow (A = SUPP(A)) \Leftrightarrow (A = KER(A))$

$SUPP(A \cap B) = SUPP(A) \cap SUPP(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

$KER(A \cup B) = KER(A) \cup KER(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

$(A \leq B) \Rightarrow (SUPP(A) \leq SUPP(B)) \,\&\, (KER(A) \leq KER(B))$

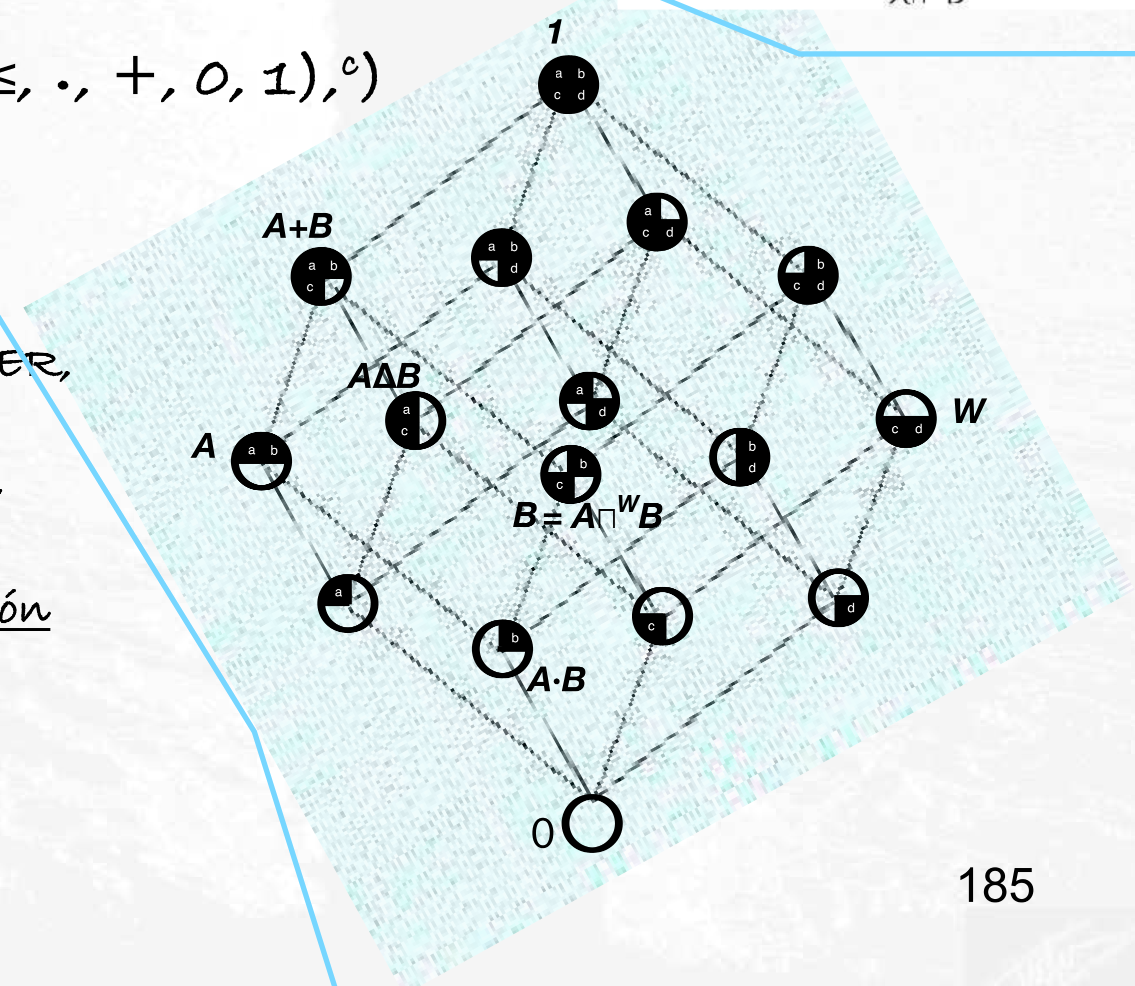
$SUPP(SUPP(A)) = SUPP(A)$,

$KER(KER(A)) = KER(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

De estos resultados se deduce que $SUPP$ y KER, como aplicaciones de $(\mathcal{L} \leq)$ en $(N(\mathcal{L}), \leq)$, son respectivamente una erosión y una dilatación morfológicas.

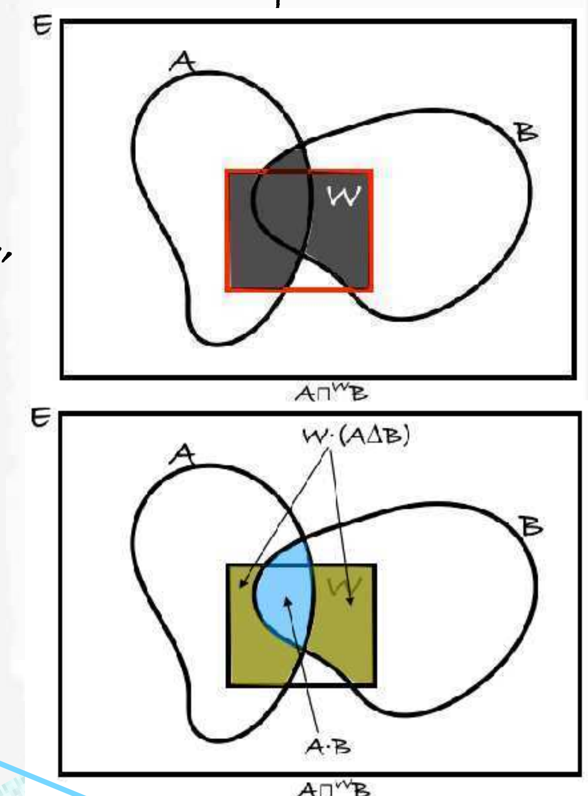
Álgebra de Boole

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ^c)$



<u>Proposición</u>. En un retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, si A y B son elementos de $\mathcal{L}$ complementados con complementos A^c y B^c respectivamente, entonces para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica:

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B), \text{ con } A \Delta B = A \cdot B^c + A^c \cdot B. \quad (1)$$



<u>Demostración</u>. $(A\Delta B) + A \cdot B = (A \Delta B) + A \cdot B + A \cdot B = A \cdot B^c + A^c \cdot B + A \cdot B + A \cdot B = A \cdot (B^c + B) + (A^c + A) \cdot B = A + B$, luego $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A + B) = A \cdot B + W \cdot ((A \Delta B) + A \cdot B) = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B) + W \cdot (A \cdot B) = A \cdot B + W \cdot (A \Delta B)$.∎

<u>Corolario</u>. Si W también es complementado con complemento W^c, entonces

$$A \sqcap^W B = A \cdot B + (W \cdot A) \Delta (W \cdot B)$$

$$\text{y} \quad A \sqcup^W B = A \cdot B + W^c \cdot (A \Delta B) = A \cdot B + (W^c \cdot A) \Delta (W^c \cdot B). \quad (2)$$

En particular, en un Álgebra de Boole $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}^c)$, (1) y (2) son válidas $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$.∎

<u>Nota</u> En un retículo distributivo $((\mathcal{L} \leq), ')$ con una negación fuerte $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, si $N(\mathcal{L})$ representa el conjunto de elementos complementados $K, S, \ldots$ de $\mathcal{L}$ tales que $K' = K^c$, $S' = S^c, \ldots$; podemos asociar a todo $A \in L$, los elementos de $N(\mathcal{L})$:

$$SUPP(A) = \inf\{K \in N(\mathcal{L}) \ / \ A \leq K\}$$

$$KER(A) = \sup\{S \in N(\mathcal{L}) \ / \ S \leq A\}.$$

Se verifica:

$KER(A) \leq A \leq SUPP(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

$(A \in N(\mathcal{L})) \Leftrightarrow (A = SUPP(A)) \Leftrightarrow (A = KER(A))$

$SUPP(A \cap B) = SUPP(A) \cap SUPP(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

$KER(A \cup B) = KER(A) \cup KER(B), \ \forall (A,B) \in \mathcal{L}^2$

$(A \leq B) \Rightarrow (SUPP(A) \leq SUPP(B)) \,\&\, (KER(A) \leq KER(B))$

$SUPP(SUPP(A)) = SUPP(A)$,

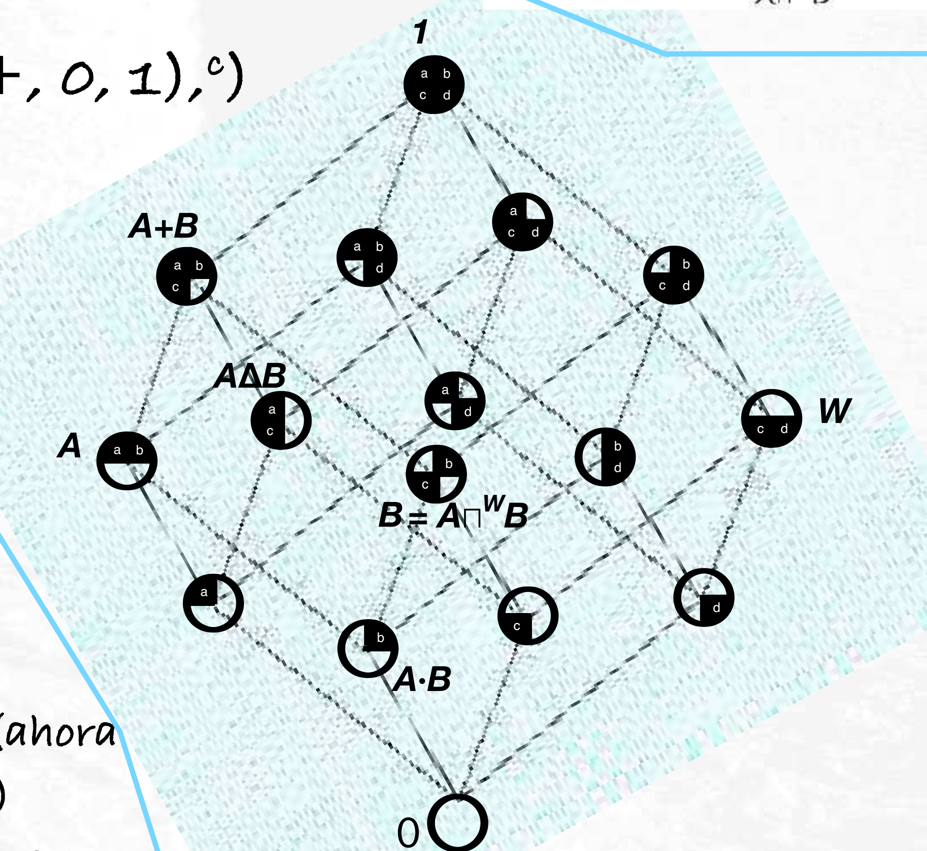
$KER(KER(A)) = KER(A) \ \forall A \in \mathcal{L}$

De estos resultados se deduce que SUPP y KER, como aplicaciones de $(\mathcal{L} \leq)$ en $(N(\mathcal{L}), \leq)$, son respectivamente una <u>erosión</u> y una <u>dilatación</u> <u>morfológicas</u>.

También, SUPP y KER, (ahora como aplicaciones de $(\mathcal{L} \leq)$ en $(\mathcal{L}, \leq)$), son una <u>apertura</u> y un <u>cierre</u> <u>morfológico</u> respectivamente.

Álgebra de Boole

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}^c)$



Otras propiedades asociadas a los operadores w-intersección $\sqcap^w$ y w-unión $\sqcup^w$

(Nota. En lo que sigue se prueba, en un caso más general, los resultados mencionados en las transparencias 111-112).

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado. Para $w \in L$ sea el orden de actividad asociado tal que $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$ y sea $\sqcap^{w}$ el ínfimo para ese orden tal que $x \sqcap^{w} y = x \cdot y + w \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $x \sqcup^{s} y = x \sqcap^{s^c} y = x \cdot y + s^c \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$ es el operador sup asociado al orden $\sqsubseteq^{s}$, por lo que $(L, \sqsubseteq^{s}, \sqcap^{s}, \sqcup^{s}, s, s^c)$ es un retículo acotado con mínimo s y máximo s^c, que resulta ser distributivo.

(Nota. En lo que sigue se prueba, en un caso más general, los resultados mencionados en las transparencias 111-112).

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado. Para $w \in L$ sea el orden de actividad asociado tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$ y sea $\sqcap^w$ el ínfimo para ese orden tal que $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $x \sqcup^s y = x \sqcap^{s^c} y = x \cdot y + s^c \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$ es el operador sup asociado al orden $\sqsubseteq^s$, por lo que $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ es un retículo acotado con mínimo s y máximo s^c, que resulta ser distributivo.

Proposición. Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica:

(1) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

(2) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s [w \sqcup^s (x \sqcap^s y)]$.

(3) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s (x \sqcap^s w) \sqcup^s (y \sqcap^s w)$.

(4) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s (x \sqcup^s w) \sqcap^s (y \sqcup^s w)$.

(5) Si además w es complementado:

$x \sqcup^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w^c \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

(Nota. En lo que sigue se prueba, en un caso más general, los resultados mencionados en las transparencias 111-112).

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado. Para $w \in L$ sea el orden de actividad asociado tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$ y sea $\sqcap^w$ el ínfimo para ese orden tal que $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $x \sqcup^s y = x \sqcap^{s^c} y = x \cdot y + s^c \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$ es el operador sup asociado al orden $\sqsubseteq^s$, por lo que $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ es un retículo acotado con mínimo s y máximo s^c, que resulta ser distributivo.

Proposición. Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica:

(1) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

(2) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s [w \sqcup^s (x \sqcap^s y)]$.

(3) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s (x \sqcap^s w) \sqcup^s (y \sqcap^s w)$.

(4) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s (x \sqcup^s w) \sqcap^s (y \sqcup^s w)$.

(5) Si además w es complementado:

$x \sqcup^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w^c \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

Demostración. (1) $(x \sqcap^s y) = x \cdot y + s \cdot (x+y) = x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y$,

$[w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = [w \cdot (x \cdot y + s^c \cdot (x+y))] + s \cdot [w + x \cdot y + s^c \cdot (x+y)] = x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s + 0$,

luego $(x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \sqcup^s (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$(x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \cdot (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) + s^c \cdot (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y + x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$x \cdot y \cdot w + x \cdot y \cdot s^c \cdot w + x \cdot y \cdot s^c \cdot w + x \cdot y \cdot s \cdot w + x \cdot y \cdot s + x \cdot y \cdot s \cdot w + 0 + 0 + x \cdot s \cdot w + x \cdot y \cdot s + x \cdot y \cdot s \cdot w + 0 + 0 + y \cdot s \cdot w + x \cdot y \cdot s +$

$x \cdot y \cdot s^c + 0 + 0 + x \cdot y \cdot s^c \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + 0 + 0 = x \cdot y \cdot w + x \cdot y \cdot (s + s^c) + (x+y) \cdot s \cdot w + (x+y) \cdot s^c \cdot w =$

$x \cdot y \cdot w + x \cdot y + (x+y) \cdot (s + s^c) \cdot w = x \cdot y + (x+y) \cdot w = (x \sqcap^s y)$.

(2) Por la propiedad distributiva: $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = [(x \sqcap^s y) \sqcup^s w] \sqcap^s [(x \sqcap^s y) \sqcup^s (x \sqcup^s y)] =$

$[(x \sqcap^s y) \sqcup^s w] \sqcap^s (x \sqcup^s y)$.

(3) y (4) Evidentes a partir de las anteriores y teniendo en cuenta la distributividad.

(5) Si existe w^c entonces:

$x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w^c \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$. ∎

(Nota. En lo que sigue se prueba, en un caso más general, los resultados mencionados en las transparencias 111-112).

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado. Para $w \in L$ sea el orden de actividad asociado tal que $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$ y sea $\sqcap^{w}$ el ínfimo para ese orden tal que $x \sqcap^{w} y = x \cdot y + w \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $x \sqcup^{s} y = x \sqcap^{s^c} y = x \cdot y + s^c \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$ es el operador sup asociado al orden $\sqsubseteq^{s}$, por lo que $(L, \sqsubseteq^{s}, \sqcap^{s}, \sqcup^{s}, s, s^c)$ es un retículo acotado con mínimo s y máximo s^c, que resulta ser distributivo.

Proposición. Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica:

(1) $x \sqcap^{w} y = (x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} [w \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)]$.

(2) $x \sqcap^{w} y = (x \sqcup^{s} y) \sqcap^{s} [w \sqcup^{s} (x \sqcap^{s} y)]$.

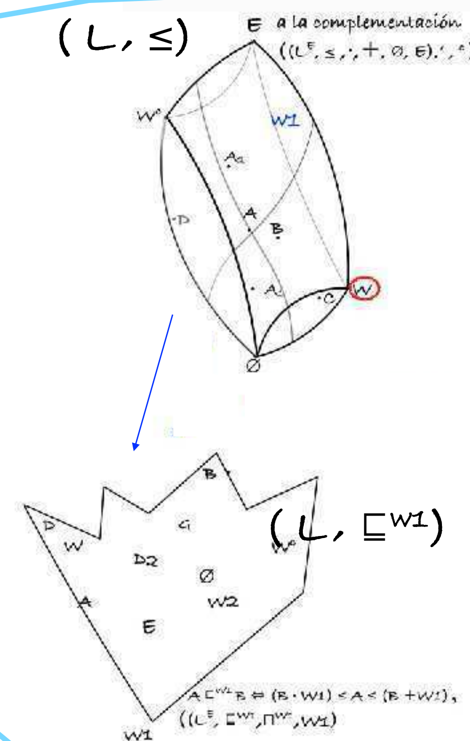
(3) $x \sqcap^{w} y = (x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} (x \sqcap^{s} w) \sqcup^{s} (y \sqcap^{s} w)$.

(4) $x \sqcap^{w} y = (x \sqcup^{s} y) \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} w) \sqcap^{s} (y \sqcup^{s} w)$.

(5) Si además w es complementado:

$x \sqcup^{w} y = (x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} [w^c \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)]$.

Nota. El apartado (1) concuerda con la propiedad de que cualquier "perspectiva" w1 es independiente de las asociadas a elementos w con complemento w^c.



Demostración. (1) $(x \sqcap^{s} y) = x \cdot y + s \cdot (x+y) = x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y$,

$[w \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)] = [w \cdot (x \cdot y + s^c \cdot (x+y))] + s \cdot [w + x \cdot y + s^c \cdot (x+y)] = x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s + 0$,

luego $(x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} [w \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)] = (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \sqcup^{s} (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$(x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \cdot (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) + s^c \cdot (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y + x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$x \cdot y \cdot w + x \cdot \cancel{y \cdot s^c} \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s^c \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + x \cdot y \cdot s + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + 0 + 0 + x \cdot s \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + 0 + 0 + y \cdot s \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s +$

$x \cdot y \cdot s^c + \cancel{0} + 0 + x \cdot y \cdot \cancel{s^c} \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + 0 + 0 = x \cdot y \cdot w + x \cdot y \cdot (s + s^c) + (x+y) \cdot s \cdot w + (x+y) \cdot s^c \cdot w =$

$x \cdot \cancel{y \cdot w} + x \cdot y + (x+y) \cdot (s + s^c) \cdot w = x \cdot y + (x+y) \cdot w = (x \sqcap^{s} y)$.

(2) Por la propiedad distributiva: $x \sqcap^{w} y = (x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} [w \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)] = [(x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} w] \sqcap^{s} [(x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} (x \sqcup^{s} y)] =$

$[(x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} w] \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)$.

(3) y (4) Evidentes a partir de las anteriores y teniendo en cuenta la distributividad.

(5) Si existe w^c entonces:

$x \sqcup^{w} y = x \sqcap^{w^c} y = (x \sqcap^{s} y) \sqcup^{s} [w^c \sqcap^{s} (x \sqcup^{s} y)]$. ∎

(Nota. En lo que sigue se prueba, en un caso más general, los resultados mencionados en las transparencias 111-112).

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo distributivo y acotado. Para $w \in L$ sea el orden de actividad asociado tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [(y \cdot w) \leq x \leq (y+w)]$ y sea $\sqcap^w$ el ínfimo para ese orden tal que $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $x \sqcup^s y = x \sqcap^{s^c} y = x \cdot y + s^c \cdot (x+y)\ \forall (x,y) \in L^2$ es el operador sup asociado al orden $\sqsubseteq^s$, por lo que $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ es un retículo acotado con mínimo s y máximo s^c, que resulta ser distributivo.

Proposición. Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica:

(1) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

(2) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s [w \sqcup^s (x \sqcap^s y)]$.

(3) $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s (x \sqcap^s w) \sqcup^s (y \sqcap^s w)$.

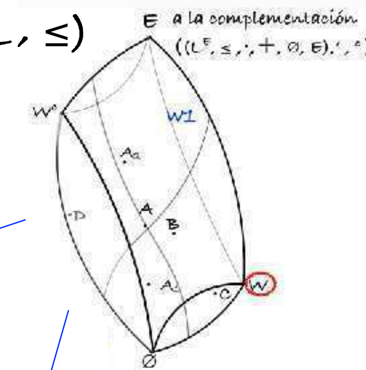
(4) $x \sqcap^w y = (x \sqcup^s y) \sqcap^s (x \sqcup^s w) \sqcap^s (y \sqcup^s w)$.

(5) Si además w es complementado:

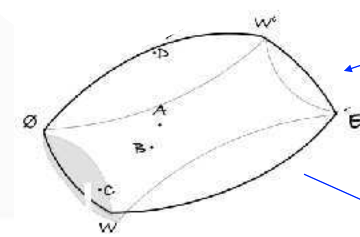
$x \sqcup^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w^c \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$.

Nota. El apartado (1) concuerda con la propiedad de que cualquier "perspectiva" w1 es independiente de las asociadas a elementos w con complemento w^c.

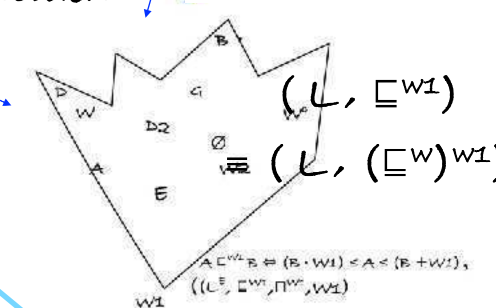
$(L, \leq)$



$(L, \sqsubseteq^w)$



Coinciden



Demostración. (1) $(x \sqcap^s y) = x \cdot y + s \cdot (x+y) = x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y$,

$[w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = [w \cdot (x \cdot y + s^c \cdot (x+y))] + s \cdot [w + x \cdot y + s^c \cdot (x+y)] = x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s + 0$,

luego $(x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \sqcup^s (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$(x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y) \cdot (x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) + s^c \cdot (x \cdot y + s \cdot x + s \cdot y + x \cdot y \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + s \cdot w + x \cdot y \cdot s) =$

$x \cdot y \cdot w + x \cdot \cancel{y \cdot s^c} \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s^c \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + x \cdot y \cdot s + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + 0 + 0 + x \cdot s \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s + x \cdot \cancel{y} \cdot s \cdot w + 0 + 0 + y \cdot s \cdot w + x \cdot \cancel{y} \cdot s +$

$x \cdot y \cdot s^c + 0 + 0 + x \cdot y \cdot \cancel{s^c} \cdot w + x \cdot s^c \cdot w + y \cdot s^c \cdot w + 0 + 0 = x \cdot y \cdot w + x \cdot y \cdot (s + s^c) + (x+y) \cdot s \cdot w + (x+y) \cdot s^c \cdot w =$

$\cancel{x \cdot y \cdot w} + x \cdot y + (x+y) \cdot (s + s^c) \cdot w = x \cdot y + (x+y) \cdot w = (x \sqcap^s y)$.

(2) Por la propiedad distributiva: $x \sqcap^w y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w \sqcap^s (x \sqcup^s y)] = [(x \sqcap^s y) \sqcup^s w] \sqcap^s [(x \sqcap^s y) \sqcup^s (x \sqcup^s y)] =$
$[(x \sqcap^s y) \sqcup^s w] \sqcap^s (x \sqcup^s y)$.

(3) y (4) Evidentes a partir de las anteriores y teniendo en cuenta la distributividad.

(5) Si existe w^c entonces:

$x \sqcup^w y = x \sqcap^{w^c} y = (x \sqcap^s y) \sqcup^s [w^c \sqcap^s (x \sqcup^s y)]$. ∎

(Continúa)

(Continuación)

<u>Proposición</u>. (1). Distributividad entre leyes $\sqcap^w, \sqcap^s$: $\forall (x, y, z, s, w) \in L^5$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z)$

(2). En particular, si w^c existe: $\forall (x, y, z, s) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcup^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcup^w (y \sqcap^s z)$.

Si s^c existe: $\forall (x, y, z, w) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcup^s z = (x \sqcup^s z) \sqcap^w (y \sqcup^s z)$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica

(3) $(x \sqcap^s y) \sqcap^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^w y)$.

(4) Si además existe w^c también $(x \sqcap^s y) \sqcup^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcup^w y)$.

En particular, para $w \in \{0, 1\}$:

(5) $(x \sqcap^s y) \cdot (x \sqcup^s y) = (x \cdot y)$. (6) $(x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x+y)$.

Y para $s = 0$:

(7) $(x \cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^w y)$. (8) $(x \cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcup^w y)$.

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$: $x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = (x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w \cdot v)} y = (x \sqcap^w y) \cdot (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s \cdot v)} y = (x \cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v) \cdot y = (w \cdot y) \sqcap^s (v \cdot y)$; $(w \sqcap^s v) + y = (w + y) \sqcap^s (v + y)$.

(Continuación)

Proposición. (1). Distributividad entre leyes $\sqcap^w, \sqcap^s$: $\forall (x, y, z, s, w) \in L^5$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z)$

(2). En particular, si w^c existe: $\forall (x, y, z, s) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcup^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcup^w (y \sqcap^s z)$.

Si s^c existe: $\forall (x, y, z, w) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcup^s z = (x \sqcup^s z) \sqcap^w (y \sqcup^s z)$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica

(3) $(x \sqcap^s y) \sqcap^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^w y)$.

(4) Si además existe w^c también
$(x \sqcap^s y) \sqcup^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcup^w y)$.

En particular, para $w \in \{0, 1\}$:

(5) $(x \sqcap^s y) \cdot (x \sqcup^s y) = (x \cdot y)$. (6) $(x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x + y)$.

Y para $s = 0$:

(7) $(x \cdot y) \sqcap^w (x + y) = (x \sqcap^w y)$. (8) $(x \cdot y) \sqcup^w (x + y) = (x \sqcup^w y)$.

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$: $x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = (x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w \cdot v)} y = (x \sqcap^w y) \cdot (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w + v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s \cdot v)} y = (x \cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x + y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v) \cdot y = (w \cdot y) \sqcap^s (v \cdot y)$; $(w \sqcap^s v) + y = (w + y) \sqcap^s (v + y)$.

Demostración. (1)

$$(x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x + y) = x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y,$$

$$(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = [x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y] \cdot z + s \cdot [x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y + z] = x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot z + w \cdot y \cdot z + s \cdot x \cdot y + s \cdot x \cdot w + s W \cdot y + s \cdot z.$$

Por otra parte, $(x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z) = (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z) \sqcap^w (y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) = (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z) \cdot (y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) +$
$w \cdot (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z + y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) = x \cdot y \cdot z + s \cdot \cancel{x} \cdot y \cdot z + s \cdot \cancel{x} \cdot z + s \cdot \cancel{x} \cdot y \cdot z + s \cdot x \cdot y + s \cdot \cancel{x} \cdot z + s \cdot \cancel{y} \cdot z + s \cdot \cancel{y} \cdot z + s \cdot z +$
$w \cdot x \cdot z + w \cdot s \cdot x + w \cdot \cancel{s} \cdot z + w \cdot y \cdot z + w \cdot s \cdot y + w \cdot \cancel{s} \cdot z = x \cdot y \cdot z + s \cdot x \cdot y + s \cdot z + w \cdot x \cdot z + w \cdot s \cdot x + w \cdot y \cdot z + w \cdot s \cdot y$.

(Continuación)

Proposición. (1). Distributividad entre leyes $\sqcap^w, \sqcap^s$: $\forall (x, y, z, s, w) \in L^5$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z)$

(2). En particular, si w^c existe: $\forall (x, y, z, s) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcup^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcup^w (y \sqcap^s z)$.

Si s^c existe: $\forall (x, y, z, w) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcup^s z = (x \sqcup^s z) \sqcap^w (y \sqcup^s z)$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica

(3) $(x \sqcap^s y) \sqcap^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^w y)$.

(4) Si además existe w^c también
$(x \sqcap^s y) \sqcup^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcup^w y)$.

En particular, para $w \in \{0, 1\}$:

(5) $(x \sqcap^s y) \cdot (x \sqcup^s y) = (x \cdot y)$. (6) $(x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x+y)$.

Y para $s = 0$:

(7) $(x \cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^w y)$. (8) $(x \cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcup^w y)$.

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$: $x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = (x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w \cdot v)} y = (x \sqcap^w y) \cdot (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s \cdot v)} y = (x \cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v) \cdot y = (w \cdot y) \sqcap^s (v \cdot y)$; $(w \sqcap^s v) + y = (w + y) \sqcap^s (v + y)$.

Demostración. (1)

$$(x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x+y) = x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y\,,$$

$$(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = [x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y] \cdot z + s \cdot [x \cdot y + w \cdot x + w \cdot y + z] = \underline{x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot z + w \cdot y \cdot z + s \cdot x \cdot y + s \cdot x \cdot w + s w \cdot y + s \cdot z}.$$

Por otra parte, $(x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z) = (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z) \sqcap^w (y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) = (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z) \cdot (y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) +$
$w \cdot (x \cdot z + s \cdot x + s \cdot z + y \cdot z + s \cdot y + s \cdot z) = x \cdot y \cdot z + \cancel{s \cdot x \cdot y \cdot z} + \cancel{s \cdot x \cdot z} + \cancel{s \cdot x \cdot y \cdot z} + s \cdot x \cdot y + \cancel{s \cdot x \cdot z} + \cancel{s \cdot y \cdot z} + \cancel{s \cdot y \cdot z} + s \cdot z +$
$w \cdot x \cdot z + w \cdot s \cdot x + \cancel{w \cdot s \cdot z} + w \cdot y \cdot z + w \cdot s \cdot y + \cancel{w \cdot s \cdot z} = \underline{x \cdot y \cdot z + s \cdot x \cdot y + s \cdot z + w \cdot x \cdot z + w \cdot s \cdot x + w \cdot y \cdot z + w \cdot s \cdot y}$.

(Continuación)

<u>Proposición</u>. (1). Distributividad entre leyes $\sqcap^{w}, \sqcap^{s}$: $\forall (x, y, z, s, w) \in L^5$ se verifica : $(x \sqcap^{w} y) \sqcap^{s} z = (x \sqcap^{s} z) \sqcap^{w} (y \sqcap^{s} z)$

(2). En particular, si w^c existe: $\forall (x, y, z, s) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcup^{w} y) \sqcap^{s} z = (x \sqcap^{s} z) \sqcup^{w} (y \sqcap^{s} z)$.

Si s^c existe: $\forall (x, y, z, w) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcap^{w} y) \sqcup^{s} z = (x \sqcup^{s} z) \sqcap^{w} (y \sqcup^{s} z)$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica

(3) $(x \sqcap^{s} y) \sqcap^{w} (x \sqcup^{s} y) = (x \sqcap^{w} y)$.

(4) Si además existe w^c también
$(x \sqcap^{s} y) \sqcup^{w} (x \sqcup^{s} y) = (x \sqcup^{w} y)$.

En particular, para $w \in \{0, 1\}$:

(5) $(x \sqcap^{s} y) \cdot (x \sqcup^{s} y) = (x \cdot y)$. (6) $(x \sqcap^{s} y) + (x \sqcup^{s} y) = (x + y)$.

Y para $s = 0$:

(7) $(x \cdot y) \sqcap^{w} (x + y) = (x \sqcap^{w} y)$. (8) $(x \cdot y) \sqcup^{w} (x + y) = (x \sqcup^{w} y)$.

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$: $x \sqcap^{(w \sqcap^{s} v)} y = (x \sqcap^{w} y) \sqcap^{s} (x \sqcap^{v} y)$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w \cdot v)} y = (x \sqcap^{w} y) \cdot (x \sqcap^{v} y)$; $x \sqcap^{(w + v)} y = (x \sqcap^{w} y) + (x \sqcap^{v} y)$

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s \cdot v)} y = (x \cdot y) \sqcap^{s} (x \sqcap^{v} y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x + y) \sqcap^{s} (x \sqcap^{v} y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^{s} v) \cdot y = (w \cdot y) \sqcap^{s} (v \cdot y)$; $(w \sqcap^{s} v) + y = (w + y) \sqcap^{s} (v + y)$.

<u>Demostración</u>. (1)

$$(x \sqcap^{w} y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) = x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y\,,$$

$$(x \sqcap^{w} y) \sqcap^{s} z = [x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y]\cdot z + s\cdot[x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + z] = \underline{x\cdot y\cdot z + w\cdot x\cdot z + w\cdot y\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot x\cdot w + sW\cdot y + s\cdot z}.$$

Por otra parte, $(x \sqcap^{s} z) \sqcap^{w} (y \sqcap^{s} z) = (x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z) \sqcap^{w} (y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) = (x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z)\cdot(y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) +$
$w\cdot(x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z + y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) = x\cdot y\cdot z + s\cdot \cancel{x\cdot y}\cdot z + s\cdot \cancel{x}\cdot z + s\cdot \cancel{x\cdot y}\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot \cancel{x}\cdot z + s\cdot \cancel{y}\cdot z + s\cdot \cancel{y}\cdot z + s\cdot z +$
$w\cdot x\cdot z + w\cdot s\cdot x + w\cdot s\cdot \cancel{z} + w\cdot y\cdot z + w\cdot s\cdot y + w\cdot \cancel{s}\cdot z = \underline{x\cdot y\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot z + w\cdot x\cdot z + w\cdot s\cdot x + w\cdot y\cdot z + w\cdot s\cdot y}$.

(2) si existe w^c entonces $(x \sqcup^{w} y) \sqcap^{s} z = (x \sqcap^{w^c} y) \sqcap^{s} z = (x \sqcap^{s} z) \sqcap^{w^c} (y \sqcap^{s} z) = (x \sqcap^{s} z) \sqcup^{w} (y \sqcap^{s} z)$.

Si existe s^c entonces $(x \sqcap^{w} y) \sqcup^{s} z = (x \sqcap^{w} y) \sqcap^{s^c} z = (x \sqcap^{s^c} z) \sqcap^{w} (y \sqcap^{s^c} z) = (x \sqcup^{s} z) \sqcap^{w} (y \sqcup^{s} z)$.

(3) Sea s con complemento s^c. Entonces $(x \sqcap^{s} y) \sqcap^{w} (x \sqcup^{s} y) = (x\cdot y + s\cdot x + s\cdot y) \sqcap^{w} (x\cdot y + s^c\cdot x + s^c\cdot y) =$
$(x\cdot y + s^c\cdot x\cdot y + s^c\cdot x\cdot y + s\cdot x\cdot y + 0 + 0 + s\cdot x\cdot y + 0 + 0) + w\cdot(x\cdot y + s\cdot x + s\cdot y + x\cdot y + s^c\cdot x + s^c\cdot y) = x\cdot y + w\cdot(x\cdot y + x + y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) = (x \sqcap^{w} y)$.

(Continuación)

Proposición. (1). Distributividad entre leyes $\sqcap^w$, $\sqcap^s$: $\forall (x, y, z, s, w) \in L^5$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z)$

(2). En particular, si w^c existe: $\forall (x, y, z, s) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcup^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcup^w (y \sqcap^s z)$.

Si s^c existe: $\forall (x, y, z, w) \in L^4$ se verifica : $(x \sqcap^w y) \sqcup^s z = (x \sqcup^s z) \sqcap^w (y \sqcup^s z)$

Si s es complementado con complemento s^c, entonces $\forall (x, y, w) \in L^3$ se verifica

(3) $(x \sqcap^s y) \sqcap^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^w y)$.

(4) Si además existe w^c también
$(x \sqcap^s y) \sqcup^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcup^w y)$.

En particular, para $w \in \{0, 1\}$:

(5) $(x \sqcap^s y) \cdot (x \sqcup^s y) = (x \cdot y)$. (6) $(x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x+y)$.

Y para $s = 0$:

(7) $(x \cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^w y)$. (8) $(x \cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcup^w y)$.

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$: $x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = (x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w \cdot v)} y = (x \sqcap^w y) \cdot (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s \cdot v)} y = (x \cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v) \cdot y = (w \cdot y) \sqcap^s (v \cdot y)$; $(w \sqcap^s v) + y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$.

Demostración. (1)
$$(x \sqcap^w y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) = x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y\,,$$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s z = [x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y]\cdot z + s\cdot[x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + z] = \underline{x\cdot y\cdot z + w\cdot x\cdot z + w\cdot y\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot x\cdot w + sW\cdot y + s\cdot z}$.

Por otra parte, $(x \sqcap^s z) \sqcap^w (y \sqcap^s z) = (x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z) \sqcap^w (y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) = (x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z)\cdot(y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) +$
$w\cdot(x\cdot z + s\cdot x + s\cdot z + y\cdot z + s\cdot y + s\cdot z) = x\cdot y\cdot z + s\cdot \cancel{x}\cdot y\cdot z + s\cdot \cancel{x}\cdot z + s\cdot \cancel{x}\cdot y\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot \cancel{x}\cdot z + s\cdot \cancel{y}\cdot z + s\cdot \cancel{y}\cdot z + s\cdot z +$
$w\cdot x\cdot z + w\cdot s\cdot x + w\cdot \cancel{s}\cdot z + w\cdot y\cdot z + w\cdot s\cdot y + w\cdot \cancel{s}\cdot z = \underline{x\cdot y\cdot z + s\cdot x\cdot y + s\cdot z + w\cdot x\cdot z + w\cdot s\cdot x + w\cdot y\cdot z + w\cdot s\cdot y}$.

(2) si existe w^c entonces $(x \sqcup^w y) \sqcap^s z = (x \sqcap^{w^c} y) \sqcap^s z = (x \sqcap^s z) \sqcap^{w^c} (y \sqcap^s z) = (x \sqcap^s z) \sqcup^w (y \sqcap^s z)$.

Si existe s^c entonces $(x \sqcap^w y) \sqcup^s z = (x \sqcap^w y) \sqcap^{s^c} z = (x \sqcap^{s^c} z) \sqcap^w (y \sqcap^{s^c} z) = (x \sqcup^s z) \sqcap^w (y \sqcup^s z)$.

(3) Sea s con complemento s^c. Entonces $(x \sqcap^s y) \sqcap^w (x \sqcup^s y) = (x\cdot y + s\cdot x + s\cdot y) \sqcap^w (x\cdot y + s^c\cdot x + s^c\cdot y) =$
$(x\cdot y + s^c\cdot x\cdot y + s^c\cdot x\cdot y + s\cdot x\cdot y + 0 + 0 + s\cdot x\cdot y + 0 + 0) + w\cdot(x\cdot y + s\cdot x + s\cdot y + x\cdot y + s^c\cdot x + s^c\cdot y) = x\cdot y + w\cdot(x\cdot y + x + y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) = (x \sqcap^w y)$.

(4) Si existen s^c y w^c entonces $(x \sqcap^s y) \sqcup^w (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^{w^c} (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^{w^c} y) = (x \sqcup^w y)$.

(Continúa)

Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$

Y para $s=0$: $(7)\ (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

$(9)\ \forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y + (w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y + [w\cdot v + s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y + x\cdot w\cdot v + x\cdot s\cdot v + x\cdot s\cdot w + y\cdot w\cdot v + y\cdot s\cdot v + y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y)\cdot(x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) +$

$s\cdot(x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = \underline{x\cdot y} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{w\cdot x\cdot y} \underline{+ v\cdot w\cdot x + v\cdot w\cdot y} + \cancel{w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot y} +$

$\cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot w\cdot x + s\cdot w\cdot y} + \cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot v\cdot x + s\cdot v\cdot y}$

Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y)+(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$

Y para $s=0$: $(7)\quad (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y+(w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y+[w\cdot v+s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y+x\cdot w\cdot v+x\cdot s\cdot v+x\cdot s\cdot w+y\cdot w\cdot v+y\cdot s\cdot v+y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y)\cdot(x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y)+$

$s\cdot(x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = \underline{x\cdot y}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{w\cdot x\cdot y}\underline{+v\cdot w\cdot x+v\cdot w\cdot y}+\cancel{w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot y}+$

$\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot w\cdot x+s\cdot w\cdot y}+\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot v\cdot x+s\cdot v\cdot y}$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y)+(x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v)+y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$. ∎

Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y) + (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y)$.

Y para $s=0$: $(7)\ (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y)$.

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y + (w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y + [w\cdot v + s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y + x\cdot w\cdot v + x\cdot s\cdot v + x\cdot s\cdot w + y\cdot w\cdot v + y\cdot s\cdot v + y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y)\cdot(x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) +$
$s\cdot(x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = \underline{x\cdot y} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{w\cdot x\cdot y} \underline{+ v\cdot w\cdot x + v\cdot w\cdot y} + \cancel{w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot y} +$
$\cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot w\cdot x + s\cdot w\cdot y} + \cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot v\cdot x + s\cdot v\cdot y}$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v) + y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$.■

Nota. Sea $':L\to L$ una negación fuerte en un retículo distributivo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$. Hemos visto que la diferencia simétrica $\Delta: L\times L \to L$ es el operador tal que $x\,\Delta\, y = x\cdot y' + x'\cdot y\ \forall (x,y)\in L\times L$.

En lo que nos concierne, en este trabajo el resultado $x\,\Delta\, y$ tiene un interés especial: cuando al menos uno de los dos elementos x ó y es complementado y su complemento coincide con su negación. (Es decir, $x^c=x'$ ó $y^c=y'$ ó ambas). En estos casos, $x\,\Delta\, y = x\cdot y' + x^c\cdot y$, ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c + x'\cdot y$ ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c + x^c\cdot y$.

En esta línea, sean w, s complementados con complementos $w^c=w'$, $s^c=s'$. Sabemos que tanto $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ como $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ son retículos isomorfos a $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, (y son por tanto distributivos). Los isomorfismos correspondientes $\varphi_w: (L,\leq)\to(L, \sqsubseteq^w)$ y $\varphi_s: (L,\leq)\to(L, \sqsubseteq^s)$ son tales que $\varphi_w(x) = x\Delta w$, $\varphi_s(x) = x\Delta s\ \forall x\in L$; y que son involuciones: $\varphi_w = (\varphi_w)^{-1}$, $\varphi_s = (\varphi_s)^{-1}$ y conmutan con la composición: $\varphi_w\circ\varphi_s = \varphi_s\circ\varphi_w$.

Además, la negación $':L\to L$ en $(L,\leq)$ también lo es en $(L, \sqsubseteq^w)$ y en $(L, \sqsubseteq^s)$. El subconjunto de L: $N(L) = \{v\in L \,/\, v^c \text{ existe y } v^c=v'\} = \{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}$ forma distintas Álgebras de Boole isomorfas $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),{}^c)$, $((N(L), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),{}^c)$, $((N(L), \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c),{}^c)$,...
e incluidas respectivamente en $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$, $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$,... etc.

Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $$(6)\ (x \sqcap^s y)+(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$$

Y para $s=0$: $$(7)\quad (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y + (w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y + [w\cdot v + s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = x\cdot y + x\cdot w\cdot v + x\cdot s\cdot v + x\cdot s\cdot w + y\cdot w\cdot v + y\cdot s\cdot v + y\cdot s\cdot w,$$

$$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y)\cdot(x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) +$$
$$s\cdot(x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = x\cdot y + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{w\cdot x\cdot y} + v\cdot w\cdot x + v\cdot w\cdot y + \cancel{w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot y} +$$
$$\cancel{s\cdot x\cdot y} + s\cdot w\cdot x + s\cdot w\cdot y + \cancel{s\cdot x\cdot y} + s\cdot v\cdot x + s\cdot v\cdot y$$

(10) En particular, para $s \in \{0,1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y) + (x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0,1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0,1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v)+y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$. ∎

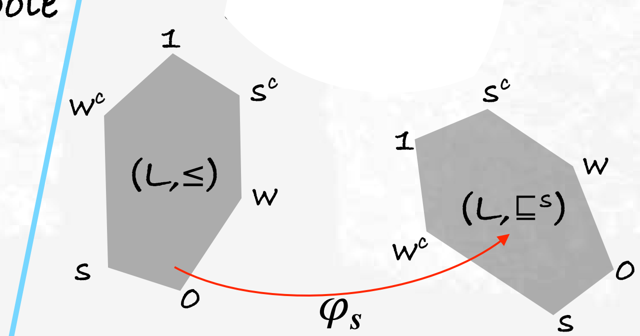
Nota. Sea $':L\to L$ una negación fuerte en un retículo distributivo $(L,\le,\cdot,+,0,1)$. Hemos visto que la diferencia simétrica $\Delta : L\times L \to L$ es el operador tal que $x\,\Delta\, y = x\cdot y' + x'\cdot y\ \forall (x,y)\in L\times L$.

En lo que nos concierne, en este trabajo el resultado $x\,\Delta\, y$ tiene un interés especial: cuando al menos uno de los dos elementos x ó y es complementado y su complemento coincide con su negación. (Es decir, $x^c=x'$ ó $y^c=y'$ ó ambas). En estos casos, $x\,\Delta\, y = x\cdot y' + x^c\cdot y$, ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c + x'\cdot y$ ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c + x^c\cdot y$.

En esta línea, sean w, s complementados con complementos $w^c=w'$, $s^c=s'$. Sabemos que tanto $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ como $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ son retículos isomorfos a $(L,\le,\cdot,+,0,1)$, (y son por tanto distributivos). Los isomorfismos correspondientes $\varphi_w:(L,\le)\to(L,\sqsubseteq^w)$ y $\varphi_s:(L,\le)\to(L,\sqsubseteq^s)$ son tales que $\varphi_w(x)=x\Delta w$, $\varphi_s(x)=x\Delta s\ \forall x\in L$; y que son involuciones: $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$, $\varphi_s=(\varphi_s)^{-1}$ y conmutan con la composición: $\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_w$.

Además, la negación $':L\to L$ en $(L,\le)$ también lo es en $(L,\sqsubseteq^w)$ y en $(L,\sqsubseteq^s)$. El subconjunto de L: $N(L)=\{v\in L\ /\ v^c \text{ existe y } v^c=v'\}=\{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}$ forma distintas Álgebras de Boole isomorfas $((N(L),\le,\cdot,+,0,1),{}^c)$, $((N(L), \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),{}^c)$, $((N(L), \sqsubseteq^s, \sqcap^s,\sqcup^s, s,s^c),{}^c)$,... e incluidas respectivamente en $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$, $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),')$,... etc.

$N(L)=\{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}\subseteq L$



Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y)+(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$

Y para $s=0$: $(7)\ (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

(9) $\forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y + (w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y + [w\cdot v + s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y + x\cdot w\cdot v + x\cdot s\cdot v + x\cdot s\cdot w + y\cdot w\cdot v + y\cdot s\cdot v + y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = (x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y)\cdot(x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) +$
$s\cdot(x\cdot y + w\cdot x + w\cdot y + x\cdot y + v\cdot x + v\cdot y) = \underline{x\cdot y} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{x\cdot y\cdot v} + \cancel{w\cdot x\cdot y} \underline{+ v\cdot w\cdot x + v\cdot w\cdot y} + \cancel{w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y} + \cancel{v\cdot w\cdot y} +$
$\cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot w\cdot x + s\cdot w\cdot y} + \cancel{s\cdot x\cdot y} + \underline{s\cdot v\cdot x + s\cdot v\cdot y}$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y)+(x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

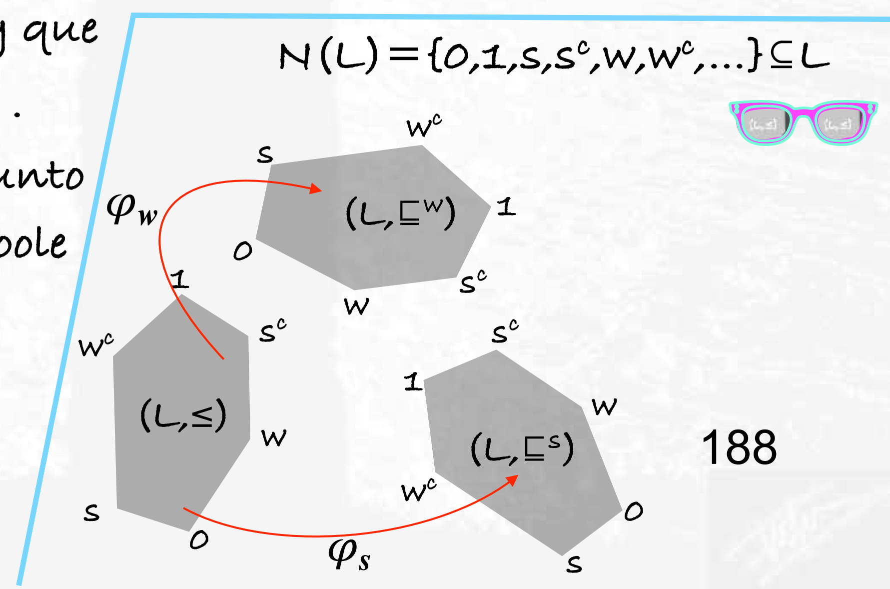
(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v)+y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$. ∎

Nota. Sea $':L\to L$ una negación fuerte en un retículo distributivo $(L,\le,\cdot,+,0,1)$. Hemos visto que la diferencia simétrica $\Delta : L\times L\to L$ es el operador tal que $x \,\Delta\, y = x\cdot y' + x'\cdot y$ $\forall (x,y)\in L\times L$.

En lo que nos concierne, en este trabajo el resultado $x \,\Delta\, y$ tiene un interés especial: cuando al menos uno de los dos elementos x ó y es complementado y su complemento coincide con su negación. (Es decir, $x^c=x'$ ó $y^c=y'$ ó ambas). En estos casos, $x \,\Delta\, y = x\cdot y' + x^c\cdot y$, ó $x \,\Delta\, y = x\cdot y^c + x'\cdot y$ ó $x \,\Delta\, y = x\cdot y^c + x^c\cdot y$.

En esta línea, sean w, s complementados con complementos $w^c=w'$, $s^c=s'$. Sabemos que tanto $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ como $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ son retículos isomorfos a $(L,\le,\cdot,+,0,1)$, (y son por tanto distributivos). Los isomorfismos correspondientes $\varphi_w:(L,\le)\to(L, \sqsubseteq^w)$ y $\varphi_s:(L,\le)\to(L, \sqsubseteq^s)$ son tales que $\varphi_w(x)=x\Delta w$, $\varphi_s(x)=x\Delta s$ $\forall x\in L$; y que son involuciones: $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$, $\varphi_s=(\varphi_s)^{-1}$ y conmutan con la composición: $\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_w$.

Además, la negación $':L\to L$ en $(L,\le)$ también lo es en $(L, \sqsubseteq^w)$ y en $(L, \sqsubseteq^s)$. El subconjunto de L: $N(L)=\{v\in L \,/\, v^c \text{ existe y } v^c=v'\}=\{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}$ forma distintas Álgebras de Boole isomorfas $((N(L),\le,\cdot,+,0,1),{}^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),{}^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^s, \sqcap^s,\sqcup^s, s,s^c),{}^c),\ldots$ e incluidas respectivamente en $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$, $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),'),\ldots$ etc.



Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y)+(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$

Y para $s=0$: $(7)\ (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

$(9)\ \forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y+(w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y+[w\cdot v+s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y+x\cdot w\cdot v+x\cdot s\cdot v+x\cdot s\cdot w+y\cdot w\cdot v+y\cdot s\cdot v+y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y)\cdot(x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y)+$
$s\cdot(x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = \underline{x\cdot y}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{w\cdot x\cdot y}+\underline{v\cdot w\cdot x+v\cdot w\cdot y}+\cancel{w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot y}+$
$\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot w\cdot x+s\cdot w\cdot y}+\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot v\cdot x+s\cdot v\cdot y}$

(10) En particular, para $s \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y)+(x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0, 1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

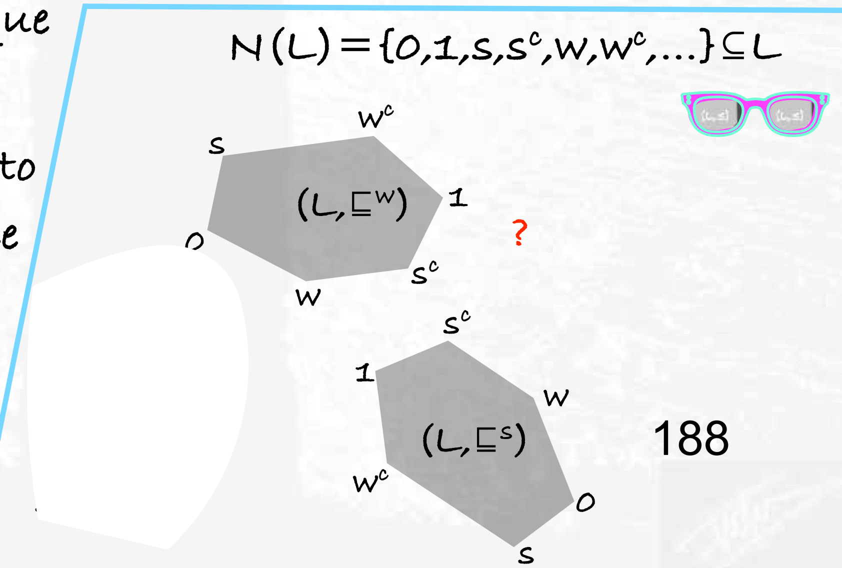
(12) En particular, para $x \in \{0, 1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v)+y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$.■

Nota. Sea $'\colon L\to L$ una negación fuerte en un retículo distributivo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$. Hemos visto que la diferencia simétrica $\Delta\colon L\times L\to L$ es el operador tal que $x\,\Delta\, y = x\cdot y'+x'\cdot y\ \forall (x,y)\in L\times L$.

En lo que nos concierne, en este trabajo el resultado $x\,\Delta\, y$ tiene un interés especial: cuando al menos uno de los dos elementos x ó y es complementado y su complemento coincide con su negación. (Es decir, $x^c=x'$ ó $y^c=y'$ ó ambas). En estos casos, $x\,\Delta\, y = x\cdot y'+x^c\cdot y$, ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c+x'\cdot y$ ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c+x^c\cdot y$.

En esta línea, sean w, s complementados con complementos $w^c=w'$, $s^c=s'$. Sabemos que tanto $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ como $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ son retículos isomorfos a $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, (y son por tanto distributivos). Los isomorfismos correspondientes $\varphi_w\colon (L,\leq)\to(L, \sqsubseteq^w)$ y $\varphi_s\colon (L,\leq)\to(L, \sqsubseteq^s)$ son tales que $\varphi_w(x)=x\Delta w$, $\varphi_s(x)=x\Delta s\ \forall x\in L$; y que son involuciones: $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$, $\varphi_s=(\varphi_s)^{-1}$ y conmutan con la composición: $\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_w$.

Además, la negación $'\colon L\to L$ en $(L,\leq)$ también lo es en $(L, \sqsubseteq^w)$ y en $(L, \sqsubseteq^s)$. El subconjunto de L: $N(L)=\{v\in L \,/\, v^c \text{ existe y } v^c=v'\}=\{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}$ forma distintas Álgebras de Boole isomorfas $((N(L),\leq,\cdot,+,0,1),^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^s, \sqcap^s,\sqcup^s, s,s^c),^c)$,... e incluidas respectivamente en $((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$, $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),')$,... etc.



Demostración. (Continuación)

En particular, para $w=0$:

$$(5)\quad (x \sqcap^s y)\cdot(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^0 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^0 y) = (x\cdot y).$$

Y para $w=1$: $(6)\ (x \sqcap^s y)+(x \sqcup^s y) = (x \sqcap^s y) \sqcap^1 (x \sqcup^s y) = (x \sqcap^1 y) = (x+y).$

Y para $s=0$: $(7)\ (x\cdot y) \sqcap^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcap^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcap^w y).$

$$(8)\quad (x\cdot y) \sqcup^w (x+y) = (x \sqcap^0 y) \sqcup^w (x \sqcup^0 y) = (x \sqcup^w y).$$

$(9)\ \forall (x,y,w,v,s) \in L^5$:

$x \sqcap^{(w \sqcap^s v)} y = x\cdot y+(w \sqcap^s v)\cdot(x+y) = x\cdot y+[w\cdot v+s\cdot(v+w)]\cdot(x+y) = \underline{x\cdot y+x\cdot w\cdot v+x\cdot s\cdot v+x\cdot s\cdot w+y\cdot w\cdot v+y\cdot s\cdot v+y\cdot s\cdot w},$

$(x \sqcap^w y) \sqcap^s (x \sqcap^v y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y) \sqcap^s (x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = (x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y)\cdot(x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y)+$
$s\cdot(x\cdot y+w\cdot x+w\cdot y+x\cdot y+v\cdot x+v\cdot y) = \underline{x\cdot y}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{x\cdot y\cdot v}+\cancel{w\cdot x\cdot y}+\underline{v\cdot w\cdot x+v\cdot w\cdot y}+\cancel{w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot x\cdot y}+\cancel{v\cdot w\cdot y}+$
$\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot w\cdot x+s\cdot w\cdot y}+\cancel{s\cdot x\cdot y}+\underline{s\cdot v\cdot x+s\cdot v\cdot y}$

(10) En particular, para $s \in \{0,1\}$: $\forall (x,y,w,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(w\cdot v)} y = (x \sqcap^w y)\cdot(x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(w+v)} y = (x \sqcap^w y)+(x \sqcap^v y)$.

(11) En particular, para $w \in \{0,1\}$: $\forall (x,y,s,v) \in L^4$: $x \sqcap^{(s\cdot v)} y = (x\cdot y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$; $x \sqcap^{(s+v)} y = (x+y) \sqcap^s (x \sqcap^v y)$.

(12) En particular, para $x \in \{0,1\}$: $\forall (y,s,w,v) \in L^4$: $(w \sqcap^s v)\cdot y = (w\cdot y) \sqcap^s (v\cdot y)$; $(w \sqcap^s v)+y = (w+y) \sqcap^s (v+y)$.∎

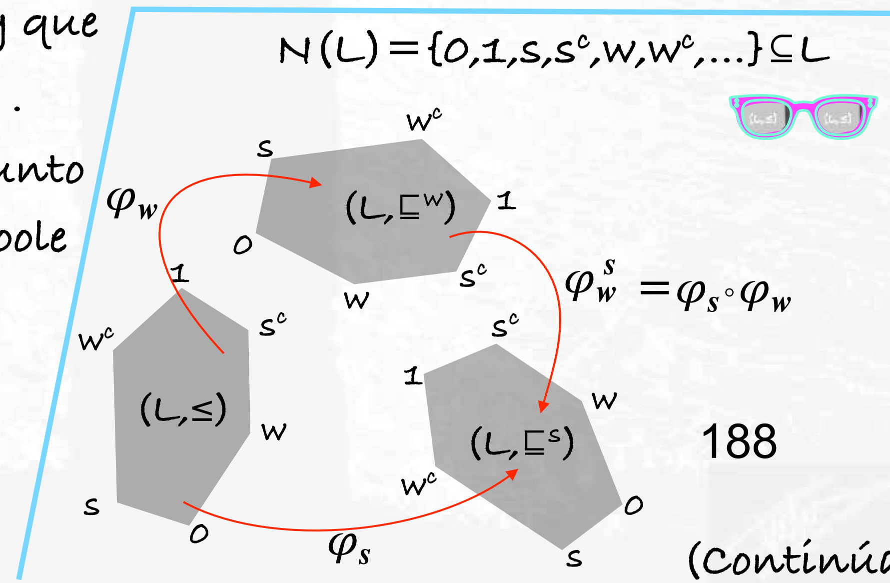
Nota. Sea $':L\to L$ una negación fuerte en un retículo distributivo $(L,\le,\cdot,+,0,1)$. Hemos visto que la diferencia simétrica $\Delta: L\times L\to L$ es el operador tal que $x\,\Delta\, y = x\cdot y'+x'\cdot y\ \forall (x,y)\in L\times L$.

En lo que nos concierne, en este trabajo el resultado $x\,\Delta\, y$ tiene un interés especial: cuando al menos uno de los dos elementos x ó y es complementado y su complemento coincide con su negación. (Es decir, $x^c=x'$ ó $y^c=y'$ ó ambas). En estos casos, $x\,\Delta\, y = x\cdot y'+x^c\cdot y$, ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c+x'\cdot y$ ó $x\,\Delta\, y = x\cdot y^c+x^c\cdot y$.

En esta línea, sean w, s complementados con complementos $w^c=w'$, $s^c=s'$. Sabemos que tanto $(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ como $(L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c)$ son retículos isomorfos a $(L,\le,\cdot,+,0,1)$, (y son por tanto distributivos). Los isomorfismos correspondientes $\varphi_w:(L,\le)\to(L,\sqsubseteq^w)$ y $\varphi_s:(L,\le)\to(L,\sqsubseteq^s)$ son tales que $\varphi_w(x)=x\Delta w$, $\varphi_s(x)=x\Delta s$ $\forall x\in L$; y que son involuciones: $\varphi_w=(\varphi_w)^{-1}$, $\varphi_s=(\varphi_s)^{-1}$ y conmutan con la composición: $\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_w$.

Además, la negación $':L\to L$ en $(L,\le)$ también lo es en $(L,\sqsubseteq^w)$ y en $(L,\sqsubseteq^s)$. El subconjunto de L: $N(L)=\{v\in L\ /\ v^c$ existe y $v^c=v'\}=\{0,1,s,s^c,w,w^c,\ldots\}$ forma distintas Álgebras de Boole isomorfas $((N(L),\le,\cdot,+,0,1),^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),^c)$, $(N(L), \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, s, s^c),^c)$,... e incluidas respectivamente en $((L,\le,\cdot,+,0,1),')$, $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$,... etc.

Es evidente que las estructuras $((L,\sqsubseteq^w),')$ y $((L,\sqsubseteq^s),')$ son isomorfas con el isomorfismo $\varphi_w^s=\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_w=\varphi_s^w$.



(Continúa)

Operadores w-diferencia, w-diferencia simétrica y w-implicación

Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1),'$) es un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte $':L\rightarrow L$. la diferencia $x\text{-}y$ es el elemento: $x\cdot y'$. Si y es complementado tal que $y'=y^c$ entonces $x\text{-}y=x\cdot y^c$. Si w es complementado tal que $w^c=w'$, entonces $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),')$ es una estructura isomorfa a la inicial $(L,\leq,\cdot,+,0,1),'$).

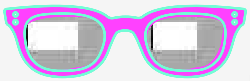
Sea y complementado con complemento y^c. Llamaremos "w-diferencia"

$x \overset{W}{-} y$ a la diferencia del elemento x menos el elemento y en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$:

$x \overset{W}{-} y = (x \sqcap^W y')$ $\forall (x,y)\in LXL$. En particular, si y^c existe e $y^c=y'$: $x \overset{W}{-} y = x \sqcap^W y^c = (x\cdot y^c)+[w\cdot(x+y^c)]=$
$(x\text{-}y)+[w\cdot(y\text{-}x)']=(x\text{-}y)+[w\cdot(y\rightarrow x)]= (x+y^c)\cdot[w+(x\cdot y^c)]$. (Siendo $(y\rightarrow x)=(y^c+x)$).

Si x también es complementado entonces $x \overset{W}{-} y=(y\text{-}x^c)\cdot[w+(x\text{-}y)]=(y\rightarrow x)\cdot[w+(x\text{-}y)]$

Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ es un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte $':L\to L$. la diferencia $x-y$ es el elemento: $x\cdot y'$. Si y es complementado tal que $y'=y^c$ entonces $x-y=x\cdot y^c$. Si w es complementado tal que $w^c=w'$, entonces $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w,w^c),')$ es una estructura isomorfa a la inicial $(L,\leq,\cdot,+,0,1),')$.



Sea y complementado con complemento y^c. Llamaremos "w-diferencia" $x\overset{w}{-}y$ a la diferencia del elemento x menos el elemento y en el álgebra $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w,w^c),')$:

$x\overset{w}{-}y=(x\sqcap^w y')\quad\forall(x,y)\in LXL$. En particular, si y^c existe e $y^c=y'$: $x\overset{w}{-}y=x\sqcap^w y^c=(x\cdot y^c)+[w\cdot(x+y^c)]=(x-y)+[w\cdot(y-x)']=(x-y)+[w\cdot(y\to x)]=(x+y^c)\cdot[w+(x\cdot y^c)]$. (Siendo $(y\to x)=(y^c+x)$).

Si x también es complementado entonces $x\overset{w}{-}y=(y-x^c)\cdot[w+(x-y)]=(y\to x)\cdot[w+(x-y)]$

Sea w complementado con complemento $w^c=w'$. Llamaremos "w-diferencia simétrica" $x\,\Delta^w y$ en el álgebra $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w,w^c),')$ a la operación:

$$x\,\Delta^w y=[x\sqcap^w y']\sqcup^w[x'\sqcap^w y]\quad\forall(x,y)\in LXL\,.$$

Casos distinguidos en este trabajo: los que, además, al menos uno de los elementos es complementado. Si s^c es el complemento de s:

$$x\,\Delta^w s=[x\sqcap^w s^c]\sqcup^w[x'\sqcap^w s]\quad\forall x\in L.$$

Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ es un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte $':L\to L$. la diferencia $x-y$ es el elemento: $x\cdot y'$. Si y es complementado tal que $y'=y^c$ entonces $x-y=x\cdot y^c$. Si w es complementado tal que $w^c=w'$, entonces $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$ es una estructura isomorfa a la inicial $(L,\leq,\cdot,+,0,1),')$.

Sea y complementado con complemento y^c. Llamaremos "w-diferencia" $x \overset{w}{-} y$ a la diferencia del elemento x menos el elemento y en el álgebra $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$:

$x \overset{w}{-} y = (x \sqcap^w y')$ $\forall (x,y)\in LXL$. En particular, si y^c existe e $y^c=y'$: $x \overset{w}{-} y = x \sqcap^w y^c = (x \cdot y^c)+[w\cdot(x+y^c)]=$ $(x-y)+[w\cdot(y-x)']=(x-y)+[w\cdot(y\to x)]= (x+y^c)\cdot[w+(x\cdot y^c)]$. (Siendo $(y\to x)=(y^c+x)$).

Si x también es complementado entonces $x \overset{w}{-} y=(y-x^c)\cdot[w+(x-y)]=(y\to x)\cdot[w+(x-y)]$

Sea w complementado con complemento $w^c=w'$. Llamaremos "w-diferencia simétrica" $x\,\Delta^w\,y$ en el álgebra $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$ a la operación:

$$x\,\Delta^w\,y = [x \sqcap^w y']\sqcup^w[x' \sqcap^w y] \quad \forall (x,y)\in LXL .$$

Casos distinguidos en este trabajo: los que, además, al menos uno de los elementos es complementado. Si s^c es el complemento de s:

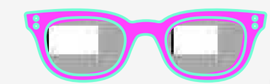
$$x\,\Delta^w\,s = [x \sqcap^w s^c]\sqcup^w[x' \sqcap^w s] \quad \forall x\in L.$$

Llamaremos "w-implicación" $\to^w$ en el álgebra $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w,\sqcup^w, w, w^c),')$ al operador tal que $\forall (x,y)\in LXL$:

$x \to^w y = x'\sqcup^w y = (x'\cdot y)+[w^c\cdot(x'+y)]$. Si x es complementado:

$x \to^w y = (y-x)'+[w^c\cdot(x\to y)]=(x^c+y)\cdot[w^c+(x^c\cdot y)]=$ $((x\to y)\cdot[(y-x)+w^c)]$.

Si $(L,\leq,\cdot,+,0,1),'\,)$ es un retículo acotado y distributivo con una negación fuerte $':L\rightarrow L$. la diferencia $x\text{-}y$ es el elemento: $x\cdot y'$. Si y es complementado tal que $y'=y^c$ entonces $x\text{-}y=x\cdot y^c$. Si w es complementado tal que $w^c=w'$, entonces $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),')$ es una estructura isomorfa a la inicial $(L,\leq,\cdot,+,0,1),'\,)$.



Sea y complementado con complemento y^c. Llamaremos "w-diferencia" $x \overset{w}{-} y$ a la diferencia del elemento x menos el elemento y en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),'\,)$:

$x \overset{w}{-} y = (x \sqcap^w y')\ \ \forall(x,y)\in LXL$. En particular, si y^c existe e $y^c=y'$: $x \overset{w}{-} y = x \sqcap^w y^c = (x\cdot y^c)+[w\cdot(x+y^c)]= (x\text{-}y)+[w\cdot(y\text{-}x)']=(x\text{-}y)+[w\cdot(y\rightarrow x)]= (x+y^c)\cdot[w+(x\cdot y^c)]$. (Siendo $(y\rightarrow x)=(y^c+x)$).

Si x también es complementado entonces $x \overset{w}{-} y=(y\text{-}x^c)\cdot[w+(x\text{-}y)]=(y\rightarrow x)\cdot[w+(x\text{-}y)]$

Sea w complementado con complemento $w^c=w'$. Llamaremos "w-diferencia simétrica" $x\,\Delta^w y$ en el álgebra $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),'\,)$ a la operación:

$$x\,\Delta^w y = [x \sqcap^w y']\sqcup^w[x' \sqcap^w y]\ \ \forall(x,y)\in LXL\,.$$

Casos distinguidos en este trabajo: los que, además, al menos uno de los elementos es complementado. Si s^c es el complemento de s:

$$x\,\Delta^w s = [x \sqcap^w s^c]\sqcup^w[x' \sqcap^w s]\ \ \forall x\in L.$$

Llamaremos "w-implicación" $\rightarrow^w$ en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),'\,)$ al operador tal que $\forall(x,y)\in LXL$:

$x \rightarrow^w y = x'\sqcup^w y= (x'\cdot y)+[w^c\cdot(x'+y)]$. Si x es complementado:

$x \rightarrow^w y = (y\text{-}x)'+[w^c\cdot(x\rightarrow y)]=(x^c+y)\cdot[w^c+(x^c\cdot y)]= ((x\rightarrow y)\cdot[(y\text{-}x)+w^c)]$.

Llamaremos "w-equivalencia" $\longleftrightarrow^w$ en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),'\,)$ al operador tal que $\forall(x,y)\in LXL$:

$x \longleftrightarrow^w y = (x \rightarrow^w y) \sqcap^w (y \rightarrow^w x)= (x'\sqcup^w y)\sqcap^w[y'\sqcup^w x)]= (x\,\Delta\ y\,\Delta\, w)'= (x\,\Delta^w y)'$.

Si $s \in N(L)$, en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ determinada por el retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ y la negación fuerte $':L \rightarrow L$, existe una "diferencia simétrica" que representamos mediante Δ^w y que viene dada por:

$$x \Delta^w y = (x \sqcap^W y') \sqcup^W (x' \sqcap^W y) \quad \forall (x,y) \in L X L.$$

Si $s\in N(L)$, en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ determinada por el retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ y la negación fuerte $':L\to L$, existe una "diferencia simétrica" que representamos mediante Δ^w y que viene dada por:

$$x\Delta^w y=(x\sqcap^W y')\sqcup^W(x'\sqcap^W y) \ \ \forall(x,y)\in LXL.$$

<u>Proposición</u>. Si $(L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$ es distributivo con negación fuerte y $x\Delta y=x\cdot y'+x'\cdot y$, se verifica:

(i) $x\Delta^w y=(x\Delta y)\Delta w \quad \forall w\in N(L), \forall(x,y)\in LXL$

(ii) $x\Delta^w y=(x\Delta^s y)\Delta^s w \quad \forall(w,s)\in N(L)XN(L), \forall(x,y)\in LXL$, es decir la diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^W)$ puede calcularse desde cualquier álgebra $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$ isomorfa a la inicial $((L,\le,\cdot,+,0,1), ')$.

(iii) Si $s\in N(L)$ y $\varphi^s_w=\varphi_w\circ\varphi_s$, entonces $x\Delta^s w = \varphi^s_w(x) \ \forall x\in L$, es decir $\varphi_w\circ\varphi_s$ es el isomorfismo φ^s_w entre las álgebras $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ y $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) Si L es cadena $L=C$ o un producto de cadenas $L=\mathop{X}_{x\in E} C_x$ (en particular si $L=C^E$), entonces

$\varphi^s_w(x\,\Delta^s y) = (x\,\Delta^w y) = [\varphi^s_w(x)\Delta^w\varphi^s_w(y)]$; $\varphi_w(x\,\Delta\,y) = [\varphi_w(x)\Delta^w\varphi_w(y)] \ \ \forall(x,y)\in LXL.$

(v) Propiedades: $w\Delta^w x = x$, $w^c\Delta^w x=x'$, $0\Delta^w x= w\Delta x$, $1\Delta^w x= (0\Delta^w x)'=w\Delta x'= w^c\Delta x \quad \forall(w,x)\in N(L)XL$,

$s\Delta^w s = w$, $s^c\Delta^w s=w^c \ \ \forall(w,s)\in N(L)XN(L)$.

Si $s \in N(L)$, en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ determinada por el retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ y la negación fuerte $' : L \to L$, existe una "diferencia simétrica" que representamos mediante Δ^w y que viene dada por:

$$x\Delta^w y = (x \sqcap^W y') \sqcup^W (x' \sqcap^W y) \ \forall (x,y) \in L X L.$$

<u>Proposición</u>. Si $(L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$ es distributivo con negación fuerte y $x\Delta y = x\cdot y' + x'\cdot y$, se verifica:

(i) $x\Delta^w y = (x\Delta y)\Delta w \quad \forall w \in N(L), \forall (x,y) \in L X L$

(ii) $x\Delta^w y = (x\Delta^s y)\Delta^s w \quad \forall (w,s) \in N(L) X N(L), \forall (x,y) \in L X L$, es decir la diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^W)$ puede calcularse desde cualquier álgebra $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$ isomorfa a la inicial $((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$.

(iii) Si $s \in N(L)$ y $\varphi^s_w = \varphi_w \circ \varphi_s$, entonces $x\Delta^s w = \varphi^s_w(x) \ \forall x \in L$, es decir $\varphi_w \circ \varphi_s$ es el isomorfismo φ^s_w entre las álgebras $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ y $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) Si L es cadena $L = C$ o un producto de cadenas $L = \underset{x \in E}{X} C_x$ (en particular si $L = C^E$), entonces
$\varphi^s_w(x\,\Delta^s y) = (x\,\Delta^w y) = [\varphi^s_w(x)\Delta^w \varphi^s_w(y)]$; $\varphi_w(x\,\Delta\,y) = [\varphi_w(x)\Delta^w \varphi_w(y)] \ \forall (x,y) \in L X L$.

(v) Propiedades: $w\Delta^w x = x$, $w^c\Delta^w x = x'$, $0\Delta^w x = w\Delta x$, $1\Delta^w x = (0\Delta^w x)' = w\Delta x' = w^c\Delta x \quad \forall (w,x) \in N(L) X L$,
$s\Delta^w s = w$, $s^c\Delta^w s = w^c \ \forall (w,s) \in N(L) X N(L)$.

<u>Demostración</u>.

(i) $x\Delta^w y = (x \sqcap^W y') \sqcup^W (x' \sqcap^W y) = (x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y') \sqcup^W (x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) = (x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y')\cdot(x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) +$
$w^c\cdot(x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y' + x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) = x\cdot x'\cdot y\cdot y' + x\cdot x'\cdot \cancel{y'}\cdot w + x\cdot \cancel{y}\cdot y'\cdot w + x\cdot \cancel{x'}\cdot y\cdot w + x\cdot x'\cdot w + x\cdot y\cdot w + \cancel{x'}\cdot y\cdot y'\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + y\cdot y'\cdot w +$
$x\cdot y'\cdot w^c + 0 + 0 + x'\cdot y\cdot w^c + 0 + 0 = x\cdot x'\cdot y\cdot y'\cdot(w + w^c) + x\cdot x'\cdot w + y\cdot y'\cdot w + x\cdot y\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + x\cdot y'\cdot w^c + x'\cdot y\cdot w^c =$
$x\cdot x'\cdot \cancel{y}\cdot y'\cdot w + x\cdot x'\cdot \cancel{y}\cdot y'\cdot w^c + x\cdot x'\cdot w + y\cdot y'\cdot w + x\cdot y\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + x\cdot y'\cdot w^c + x'\cdot y\cdot w^c = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y')\cdot w + (x\cdot y' + x'\cdot y)\cdot w^c =$
$(x\cdot y' + x'\cdot y)'\cdot w + (x\cdot y' + x'\cdot y)\cdot w^c = (x\Delta y)'\cdot w + (x\Delta y)\cdot w^c = (x\Delta y)\Delta w$.

(ii) $(x\Delta^s y)\Delta^s w = ((x\Delta^s y)\Delta w)\Delta s = (((x\Delta y)\Delta s)\Delta w)\Delta s = (((x\Delta y)\Delta w)\Delta s)\Delta s = ((x\Delta y)\Delta w) = x\Delta^w y$.

(iii) Para todo $x \in L$: $x\Delta^s w = (x\Delta w)\Delta s = \varphi_w(x)\Delta s = \varphi_s(\varphi_w(x)) = (\varphi_s \circ \varphi_w)(x) = (\varphi_w \circ \varphi_s)(x) = \varphi^s_w(x)$, luego φ^s_w es el isomorfismo
$\varphi^s_w : ((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ') \to ((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) $\varphi^s_w(x\,\Delta^s y) = (x\,\Delta^s y)\Delta^s w = x\Delta^w y$. Por otra parte, $\varphi^s_w(x)\Delta^w \varphi^s_w(y) = [\varphi^s_w(x)\Delta\varphi^s_w(y)]\Delta w = [((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta s)]\Delta w =$
$[((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta w)]\Delta s = (((x\Delta w)\Delta s)\Delta y)\Delta s = (((x\Delta w)\Delta s)\Delta s)\Delta y = (x\Delta w)\Delta y = (w\Delta x)\Delta y = w\Delta(x\Delta y) = (x\Delta y)\Delta w = x\Delta^w y$.
Para $s=0$, $x\,\Delta^s y = \varphi_w(x\,\Delta y) = \varphi^o_w(x\,\Delta^o y) = \varphi^o_w(x)\Delta^w \varphi^o_w(y) = \varphi_w(x)\Delta^w \varphi_w(y)$.

(v) Todas estas igualdades se deducen de la siguiente: $x\Delta^w y = (x\Delta y)\Delta w \quad \forall w \in N(L), \forall (x,y) \in L X L$.∎

Si $s\in N(L)$, en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ determinada por el retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ y la negación fuerte $':L\to L$, existe una "diferencia simétrica" que representamos mediante Δ^w y que viene dada por:

$$x\Delta^w y=(x\sqcap^W y')\sqcup^W(x'\sqcap^W y) \quad \forall(x,y)\in L\text{X}L.$$

<u>Proposición</u>. Si $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es distributivo con negación fuerte y $x\Delta y=x\cdot y'+x'\cdot y$, se verifica:

(i) $x\Delta^w y=(x\Delta y)\Delta w \quad \forall w\in N(L), \forall(x,y)\in L\text{X}L$

(ii) $x\Delta^w y=(x\Delta^s y)\Delta^s w \quad \forall(w,s)\in N(L)\text{X}N(L), \forall(x,y)\in L\text{X}L$, es decir la diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^W)$ puede calcularse desde cualquier álgebra $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$ isomorfa a la inicial $((L,\leq,\cdot,+,0,1), ')$.

(iii) Si $s\in N(L)$ y $\varphi^s{}_w=\varphi_w\circ\varphi_s$, entonces $x\Delta^s w = \varphi^s{}_w(x) \ \forall x\in L$, es decir $\varphi_w\circ\varphi_s$ es el isomorfismo $\varphi^s{}_w$ entre las álgebras $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ y $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) Si L es cadena $L=C$ o un producto de cadenas $L=\text{X}_{x\in E}C_x$ (en particular si $L=C^E$), entonces
$\varphi^s{}_w(x\,\Delta^s y) =(x\,\Delta^w y)= [\varphi^s{}_w(x)\Delta^w\varphi^s{}_w(y)]$; $\varphi_w(x\,\Delta\, y) = [\varphi_w(x)\Delta^w\varphi_w(y)] \quad \forall(x,y)\in L\text{X}L$.

(v) Propiedades: $w\Delta^w x =x$, $w^c\Delta^w x=x'$, $0\Delta^w x= w\Delta x$, $1\Delta^w x= (0\Delta^w x)'=w\Delta x'= w^c\Delta x \quad \forall(w,x)\in N(L)\text{X}L$,
$s\Delta^w s =w$, $s^c\Delta^w s=w^c \quad \forall(w,s)\in N(L)\text{X}N(L)$.

<u>Demostración</u>.

(i) $x\Delta^w y=(x\sqcap^W y')\sqcup^W(x'\sqcap^W y)=(x\cdot y'+w\cdot x+w\cdot y')\sqcup^W(x'\cdot y+w\cdot x'+w\cdot y)=(x\cdot y'+w\cdot x+w\cdot y')\cdot(x'\cdot y+w\cdot x'+w\cdot y)+$
$w^c\cdot(x\cdot y'+w\cdot x+w\cdot y'+x'\cdot y+w\cdot x'+w\cdot y)=x\cdot x'\cdot y\cdot y'+x\cdot \cancel{x'\cdot y'}\cdot w+x\cdot\cancel{y\cdot y'}\cdot w+\cancel{x\cdot x'}\cdot y\cdot w+x\cdot x'\cdot w+x\cdot y\cdot w+\cancel{x'}\cdot y\cdot y'\cdot w+x'\cdot y'\cdot w+y\cdot y'\cdot w+$
$x\cdot y'\cdot w^c+0+0+x'\cdot y\cdot w^c+0+0=x\cdot x'\cdot y\cdot y'\cdot(w+w^c)+x\cdot x'\cdot w+y\cdot y'\cdot w+x\cdot y\cdot w+x'\cdot y'\cdot w+x\cdot y'\cdot w^c+x'\cdot y\cdot w^c=$
$x\cdot x'\cdot\cancel{y}\cdot y'\cdot w+x\cdot x'\cdot\cancel{y}\cdot y'\cdot w^c+x\cdot x'\cdot w+y\cdot y'\cdot w+x\cdot y\cdot w+x'\cdot y'\cdot w+x\cdot y'\cdot w^c+x'\cdot y\cdot w^c=(x\cdot x'+y\cdot y'+x\cdot y+x'\cdot y')\cdot w+(x\cdot y'+x'\cdot y)\cdot w^c=$
$(x\cdot y'+x'\cdot y)'\cdot w+(x\cdot y'+x'\cdot y)\cdot w^c =(x\Delta y)'\cdot w+(x\Delta y)\cdot w^c=(x\Delta y)\Delta w.$

(ii) $(x\Delta^s y)\Delta^s w=((x\Delta^s y)\Delta w)\Delta s=(((x\Delta y)\Delta s)\Delta w)\Delta s=(((x\Delta y)\Delta w)\Delta s)\Delta s=((x\Delta y)\Delta w)=x\Delta^w y.$

(iii) Para todo $x\in L$: $x\Delta^s w=(x\Delta w)\Delta s=\varphi_w(x)\Delta s=\varphi_s(\varphi_w(x))=(\varphi_s\circ\varphi_w)(x)=(\varphi_w\circ\varphi_s)(x)=\varphi^s{}_w(x)$, luego $\varphi^s{}_w$ es el isomorfismo
$\varphi^s{}_w : ((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),')\to((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c),')$.

(iv) $\varphi^s{}_w(x\,\Delta^s y) =(x\,\Delta^s y)\Delta^s w=x\Delta^w y$. Por otra parte, $\varphi^s{}_w(x)\Delta^w\varphi^s{}_w(y)= [\varphi^s{}_w(x)\Delta\varphi^s{}_w(y)]\Delta w=[((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta s)]\Delta w=$
$[((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta w)]\Delta s=(((x\Delta w)\Delta s)\Delta y)\Delta s=(((x\Delta w)\Delta s)\Delta s)\Delta y=(x\Delta w)\Delta y=(w\Delta x)\Delta y=w\Delta(x\Delta y)=(x\Delta y)\Delta w=x\Delta^w y.$
Para $s=0$, $x\,\Delta^s y=\varphi_w(x\,\Delta y)= \varphi^0{}_w(x\,\Delta^0 y) =\varphi^0{}_w(x)\Delta^w\varphi^0{}_w(y)=\varphi_w(x)\Delta^w\varphi_w(y)$.

(v) Todas estas igualdades se deducen de la siguiente: $x\Delta^w y=(x\Delta y)\Delta w \quad \forall w\in N(L), \forall(x,y)\in L\text{X}L.$ ∎

<u>Nota1</u>. Si L es producto de cadenas: $\varphi^s{}_w=\varphi_w\circ\varphi_s=\varphi_{w\Delta s}$

(Continuación)

Si $s \in N(L)$, en el álgebra $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ determinada por el retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ y la negación fuerte $':L \to L$, existe una "diferencia simétrica" que representamos mediante Δ^w y que viene dada por:

$$x\Delta^w y = (x \sqcap^W y') \sqcup^W (x' \sqcap^W y) \quad \forall (x,y) \in L X L.$$

<u>Proposición</u>. Si $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es distributivo con negación fuerte y $x\Delta y = x\cdot y' + x'\cdot y$, se verifica:

(i) $x\Delta^w y = (x\Delta y)\Delta w \quad \forall w \in N(L), \forall (x,y) \in LXL$

(ii) $x\Delta^w y = (x\Delta^s y)\Delta^s w \quad \forall (w,s) \in N(L)XN(L), \forall (x,y) \in LXL$, es decir la diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^W)$ puede calcularse desde cualquier álgebra $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$ isomorfa a la inicial $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$.

(iii) Si $s \in N(L)$ y $\varphi^s{}_w = \varphi_w \circ \varphi_s$, entonces $x\Delta^s w = \varphi^s{}_w(x) \ \forall x \in L$, es decir $\varphi_w \circ \varphi_s$ es el isomorfismo $\varphi^s{}_w$ entre las álgebras $((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ y $((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) Si L es cadena $L = C$ o un producto de cadenas $L = \underset{x \in E}{X} C_x$ (en particular si $L = C^E$), entonces
$\varphi^s{}_w(x\,\Delta^s y) = (x\,\Delta^w y) = [\varphi^s{}_w(x)\Delta^w \varphi^s{}_w(y)]$; $\varphi_w(x\,\Delta\,y) = [\varphi_w(x)\Delta^w \varphi_w(y)] \quad \forall (x,y) \in LXL$.

(v) Propiedades: $w\Delta^w x = x$, $w^c\Delta^w x = x'$, $0\Delta^w x = w\Delta x$, $1\Delta^w x = (0\Delta^w x)' = w\Delta x' = w^c\Delta x \quad \forall (w,x) \in N(L)XL$,
$s\Delta^w s = w$, $s^c\Delta^w s = w^c \quad \forall (w,s) \in N(L)XN(L)$.

<u>Demostración</u>.

(i) $x\Delta^w y = (x\sqcap^W y')\sqcup^W(x'\sqcap^W y) = (x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y')\sqcup^W(x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) = (x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y')\cdot(x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) +$
$w^c\cdot(x\cdot y' + w\cdot x + w\cdot y' + x'\cdot y + w\cdot x' + w\cdot y) = x\cdot x'\cdot y\cdot y' + x\cdot \cancel{x'\cdot y'}\cdot w + x\cdot \cancel{y}\cdot y'\cdot w + \cancel{x\cdot x'}\cdot y\cdot w + x\cdot x'\cdot w + x\cdot y\cdot w + \cancel{x'\cdot y}\cdot y'\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + y\cdot y'\cdot w +$
$x\cdot y'\cdot w^c + 0 + 0 + x'\cdot y\cdot w^c + 0 + 0 = x\cdot x'\cdot y\cdot y'\cdot(w + w^c) + x\cdot x'\cdot w + y\cdot y'\cdot w + x\cdot y\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + x\cdot y'\cdot w^c + x'\cdot y\cdot w^c =$
$x\cdot x'\cdot \cancel{y\cdot y'}\cdot w + x\cdot x'\cdot \cancel{y\cdot y'}\cdot w^c + x\cdot x'\cdot w + y\cdot y'\cdot w + x\cdot y\cdot w + x'\cdot y'\cdot w + x\cdot y'\cdot w^c + x'\cdot y\cdot w^c = (x\cdot x' + y\cdot y' + x\cdot y + x'\cdot y')\cdot w + (x\cdot y' + x'\cdot y)\cdot w^c =$
$(x\cdot y' + x'\cdot y)'\cdot w + (x\cdot y' + x'\cdot y)\cdot w^c = (x\Delta y)'\cdot w + (x\Delta y)\cdot w^c = (x\Delta y)\Delta w$.

(ii) $(x\Delta^s y)\Delta^s w = ((x\Delta^s y)\Delta w)\Delta s = (((x\Delta y)\Delta s)\Delta w)\Delta s = (((x\Delta y)\Delta w)\Delta s)\Delta s = ((x\Delta y)\Delta w) = x\Delta^w y$.

(iii) Para todo $x \in L$: $x\Delta^s w = (x\Delta w)\Delta s = \varphi_w(x)\Delta s = \varphi_s(\varphi_w(x)) = (\varphi_s \circ \varphi_w)(x) = (\varphi_w \circ \varphi_s)(x) = \varphi^s{}_w(x)$, luego $\varphi^s{}_w$ es el isomorfismo
$\varphi^s{}_w : ((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ') \to ((L, \sqsubseteq^s, \sqcap^s, \sqcup^s, S, S^c), ')$.

(iv) $\varphi^s{}_w(x\,\Delta^s y) = (x\,\Delta^s y)\Delta^s w = x\Delta^w y$. Por otra parte, $\varphi^s{}_w(x)\Delta^w \varphi^s{}_w(y) = [\varphi^s{}_w(x)\Delta \varphi^s{}_w(y)]\Delta w = [((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta s)]\Delta w =$
$[((x\Delta w)\Delta s)\Delta(y\Delta w)\Delta w)]\Delta s = (((x\Delta w)\Delta s)\Delta y)\Delta s = (((x\Delta w)\Delta s)\Delta s)\Delta y = (x\Delta w)\Delta y = (w\Delta x)\Delta y = w\Delta(x\Delta y) = (x\Delta y)\Delta w = x\Delta^w y$.
Para $s = 0$, $x\,\Delta^s y = \varphi_w(x\,\Delta y) = \varphi^o{}_w(x\,\Delta^o y) = \varphi^o{}_w(x)\Delta^w \varphi^o{}_w(y) = \varphi_w(x)\Delta^w \varphi_w(y)$.

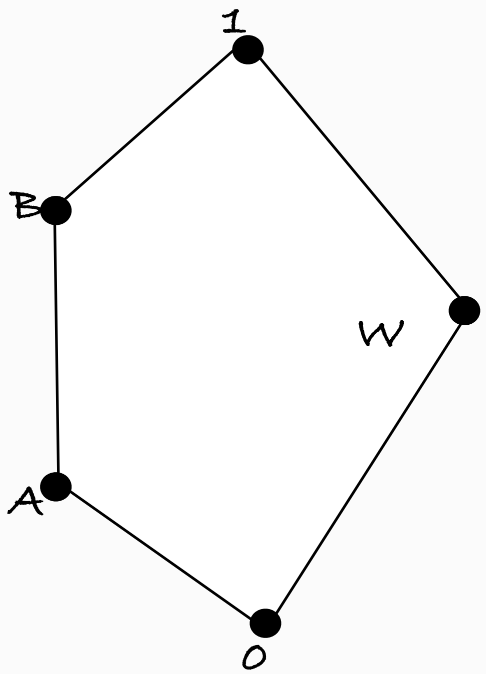
(v) Todas estas igualdades se deducen de la siguiente: $x\Delta^w y = (x\Delta y)\Delta w \quad \forall w \in N(L), \forall (x,y) \in LXL$.∎

<u>Nota1</u>. Si L es producto de cadenas: $\varphi^s{}_w = \varphi_w \circ \varphi_s = \varphi_{w\Delta s}$

<u>Nota2</u>. Se verifica: $x\Delta^o y = x\Delta y$, $x\Delta^1 y = (x\Delta y)' = (x\Delta^o y)' \quad \forall (x,y) \in LXL$.

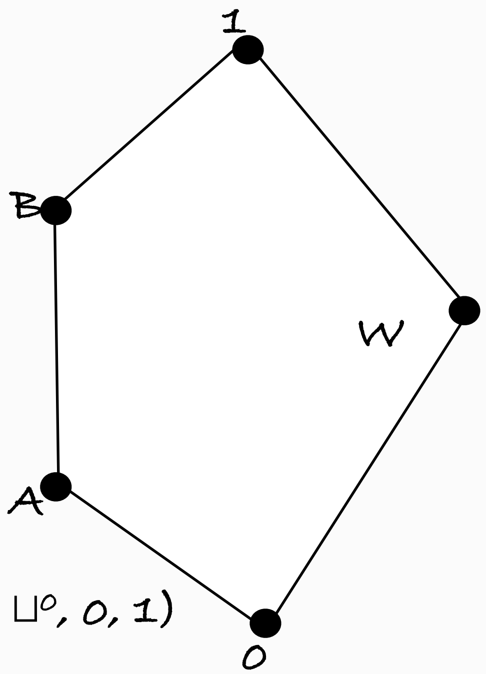
Ejemplos: relaciones de actividad en retículos no distributivos.

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo

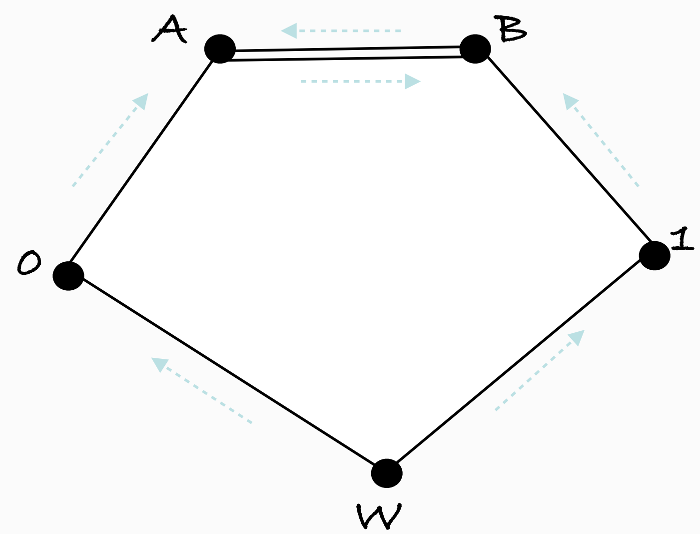


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$
Retículo acotado
no distributivo.

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0, \sqcap^0, \sqcup^0, 0, 1)$

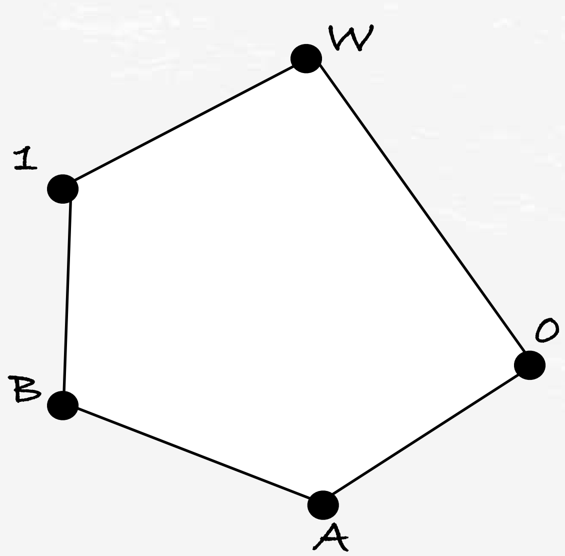


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

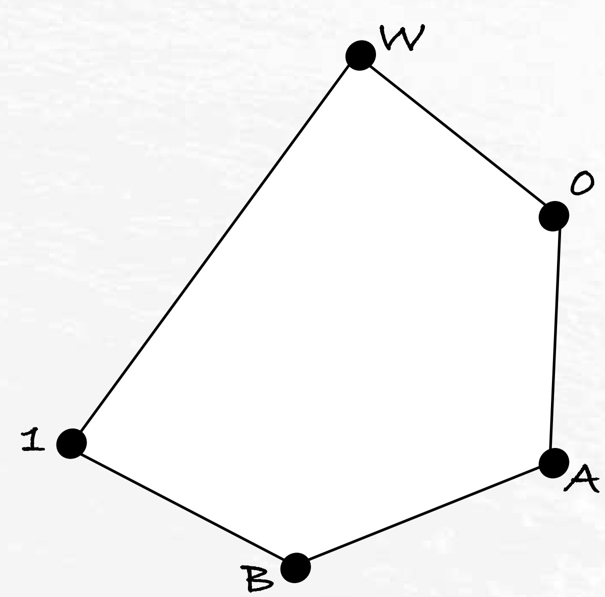
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$
Retículo acotado
no distributivo.

No es conjunto ordenado
$(A \neq B,\ A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A)$
La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

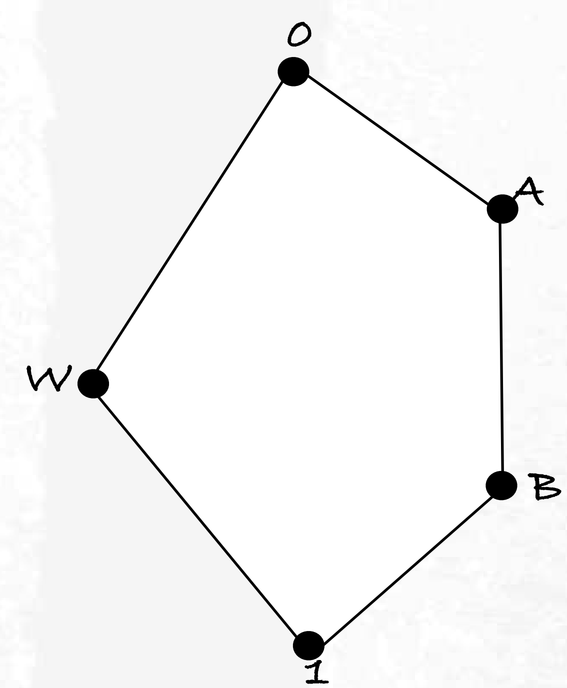
Sí son conjuntos ordenados:



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^A, \sqcap^A, \sqcup^A, A, W)$

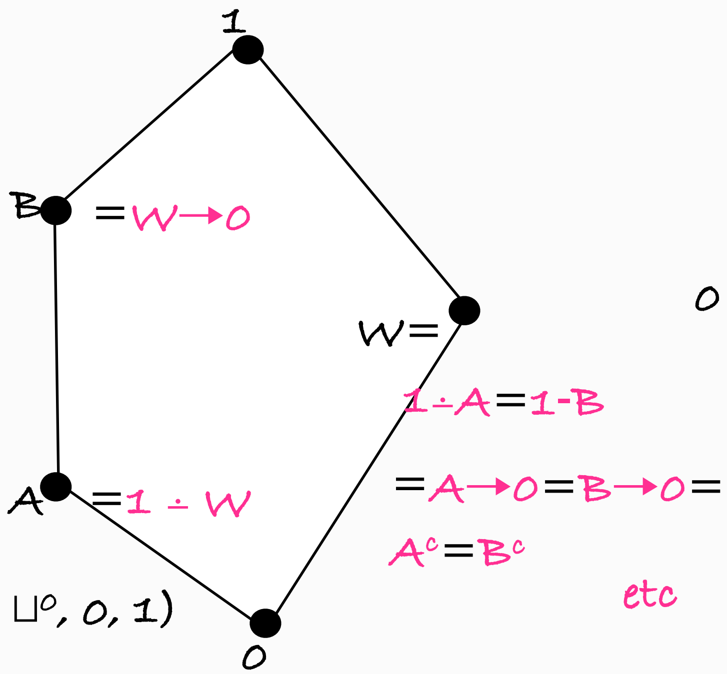


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^B, \sqcap^B, \sqcup^B, B, W)$

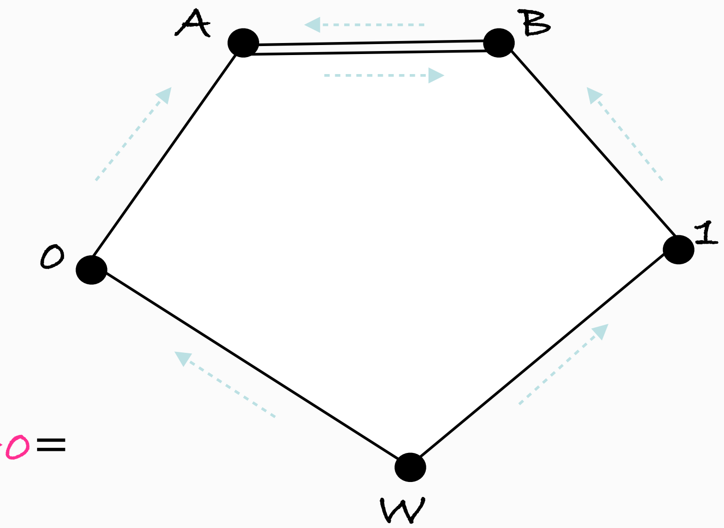


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1, \sqcap^1, \sqcup^1, 1, 0)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0, \sqcap^0, \sqcup^0, 0, 1)$

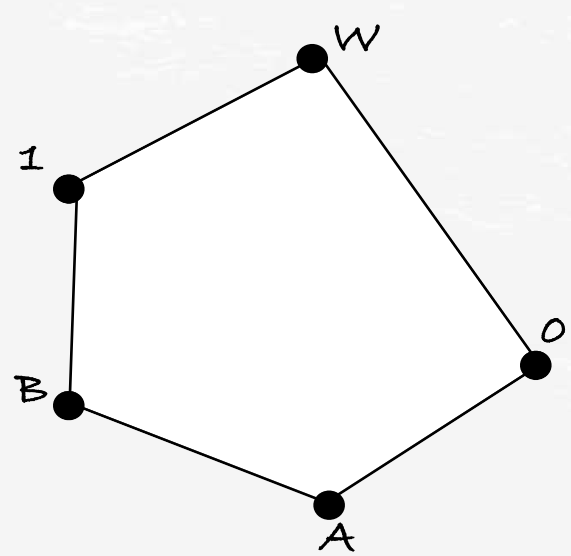


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

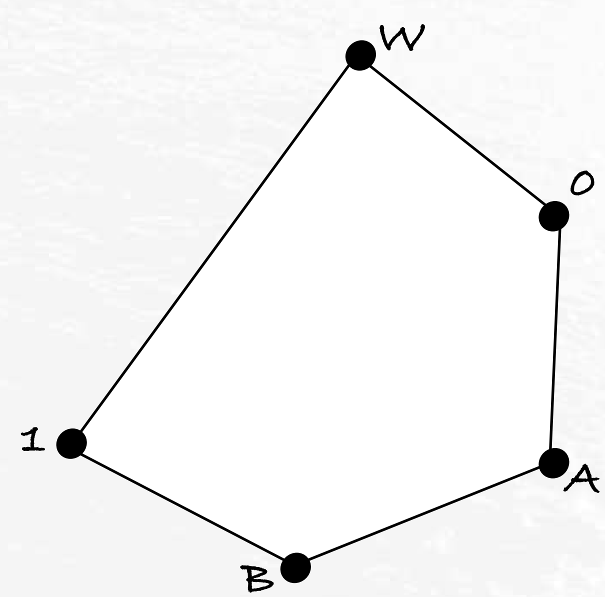
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$
Retículo acotado
no distributivo.

No es conjunto ordenado
($A \neq B$, $A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A$)
La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.

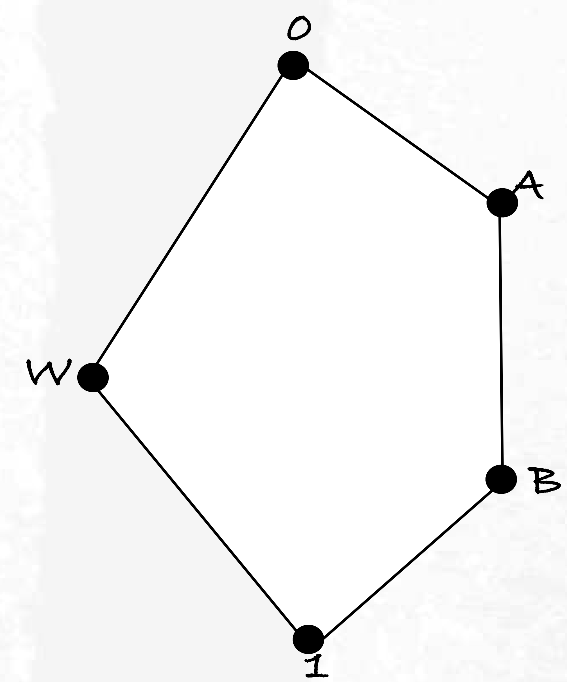
Sí son conjuntos ordenados:



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^A, \sqcap^A, \sqcup^A, A, W)$

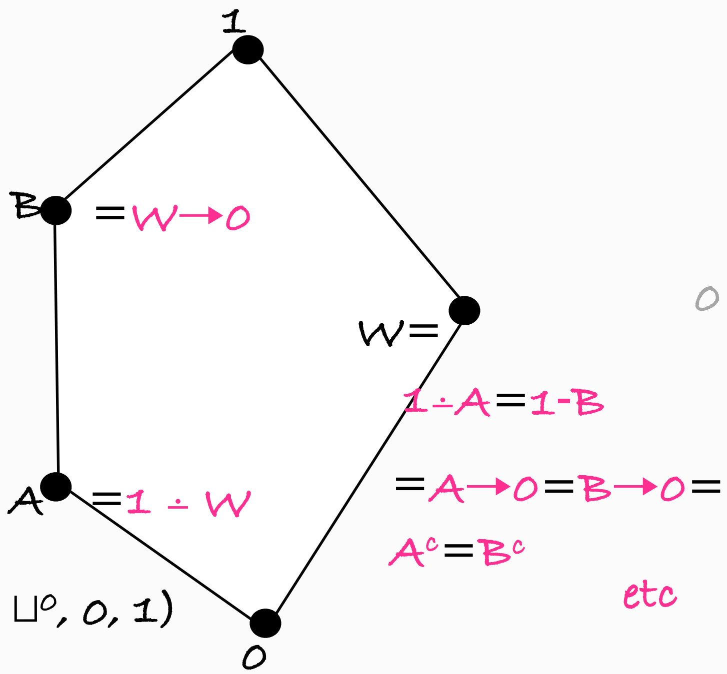


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^B, \sqcap^B, \sqcup^B, B, W)$

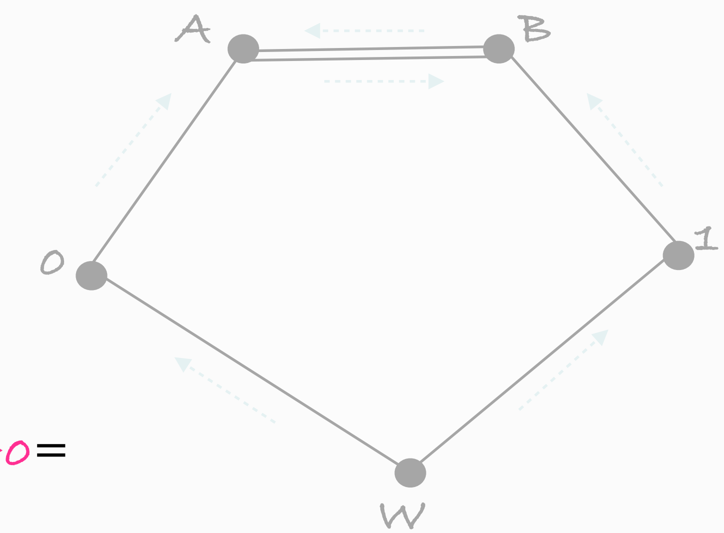


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1, \sqcap^1, \sqcup^1, 1, 0)$

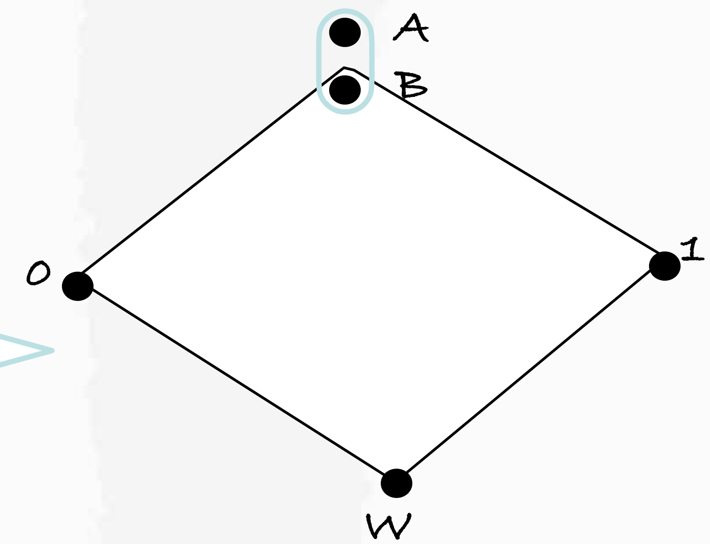
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0, \sqcap^0, \sqcup^0, 0, 1)$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$



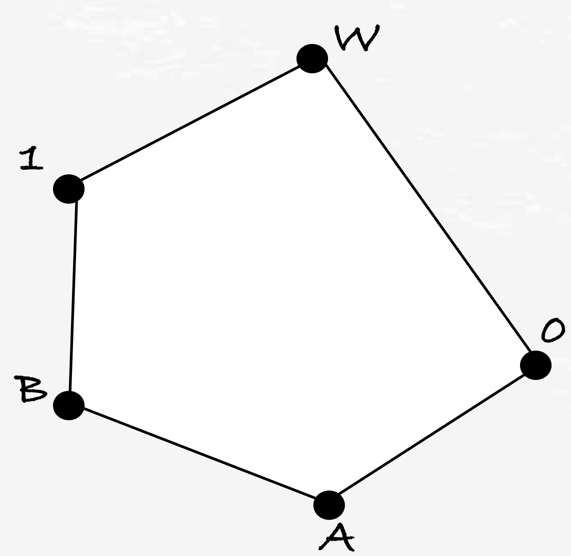
$([\mathcal{L}], \sqsubseteq^{[W]})$

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$
Retículo acotado
<u>no</u> distributivo.

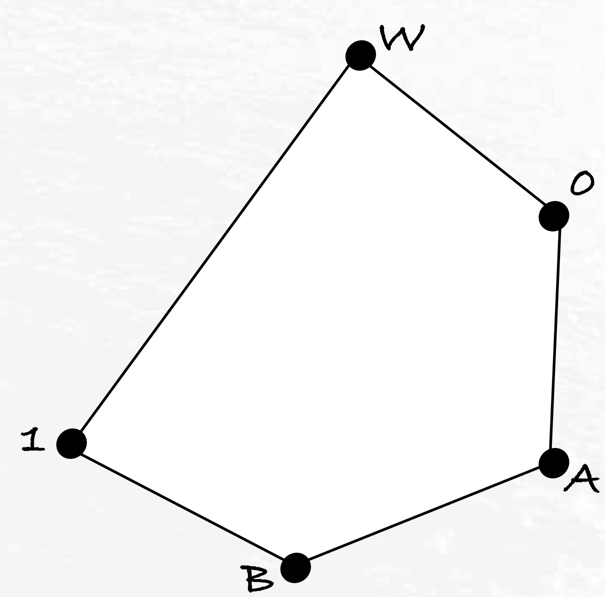
<u>No</u> es conjunto ordenado
$(A \neq B,\ A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A)$
La relación $\sqsubseteq^W$ es un <u>pre</u>-<u>orden</u> en $\mathcal{L}$.

Conjunto $[\mathcal{L}]$ de clases de equivalencia.
$([\mathcal{L}], \sqsubseteq^{[W]})$ es un conjunto ordenado.

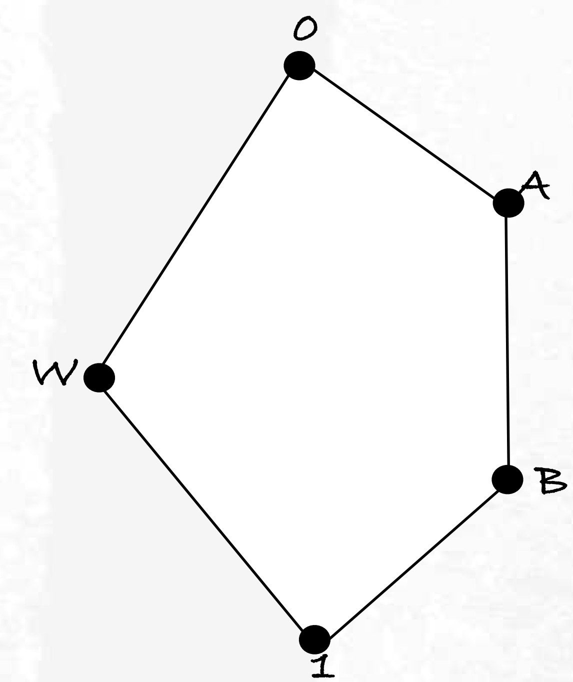
Sí son conjuntos ordenados:



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^A, \sqcap^A, \sqcup^A, A, W)$

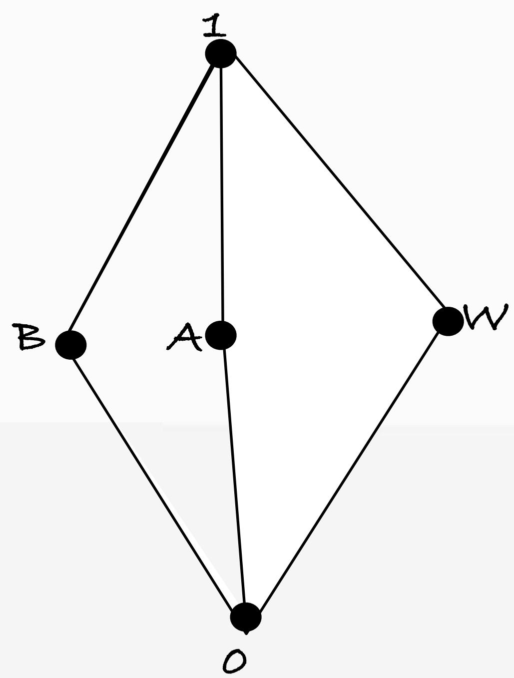


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^B, \sqcap^B, \sqcup^B, B, W)$



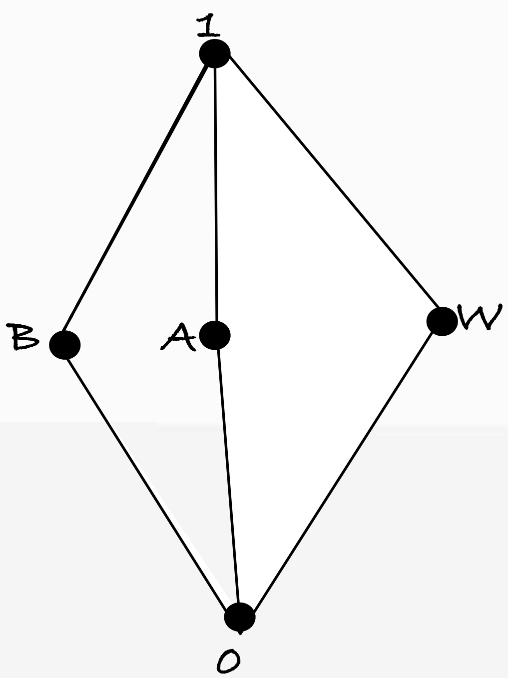
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1, \sqcap^1, \sqcup^1, 1, 0)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

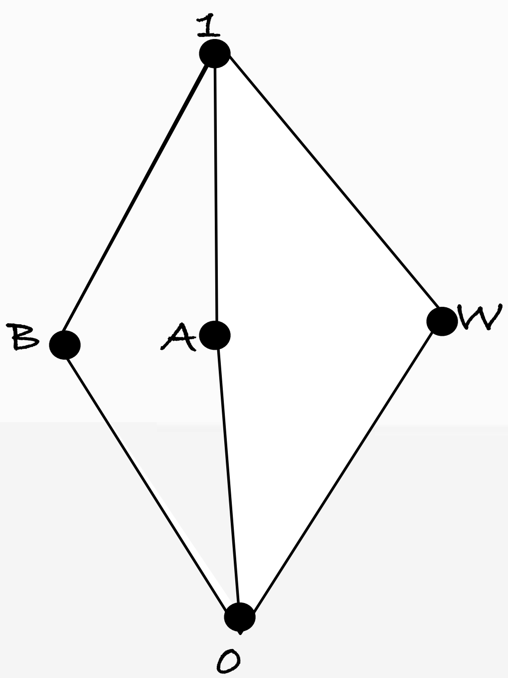
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Retículo acotado
<u>no</u> distributivo.

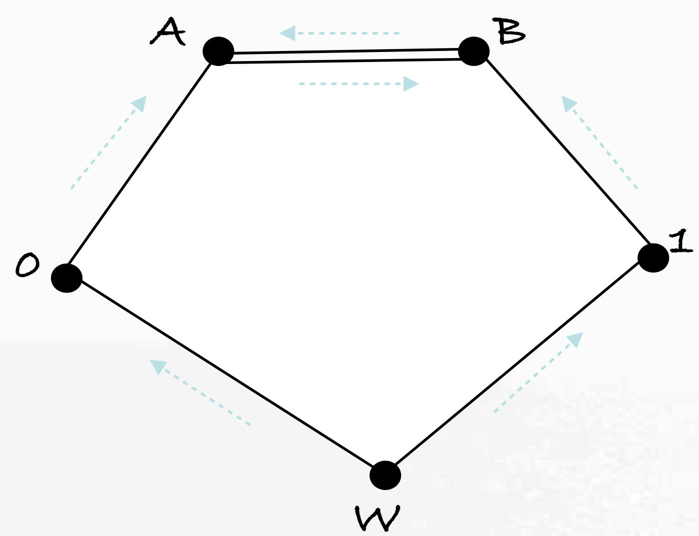
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo no distributivo



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

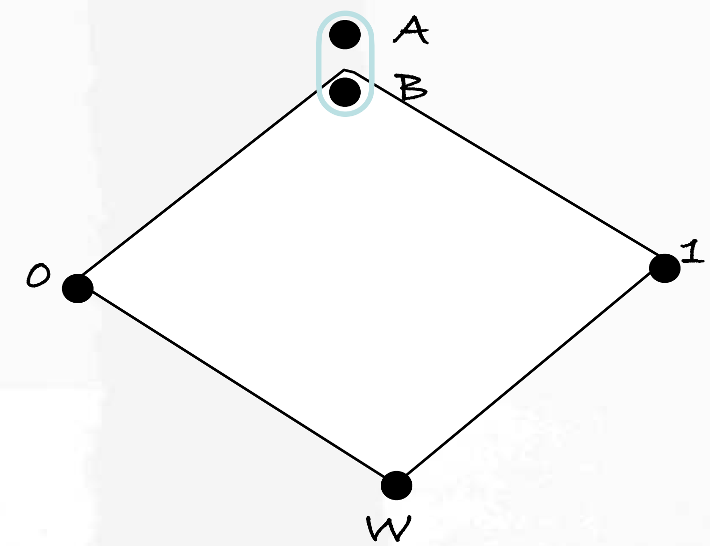
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0, \sqcap^0, \sqcup^0, 0, 1)$

Retículo acotado
no distributivo.



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

No es conjunto ordenado
$(A \neq B,\ A \sqsubseteq^W B$ y $B \sqsubseteq^W A)$
La relación $\sqsubseteq^W$ es un pre-orden en $\mathcal{L}$.



$([\mathcal{L}], \sqsubseteq^W)$

Conjunto $[\mathcal{L}]$ de clases de equivalencia.
$([\mathcal{L}], \sqsubseteq^{[W]})$ es un conjunto ordenado.

El orden $\sqsubseteq^{w}$ y las operaciones $\sqcap^{w}, \sqcup^{w}$ en retículos distributivos completos

Proposición. Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y sea $w \in \mathcal{L}$.

(1) El inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $\mathcal{L}$ tiene elemento w-ínfimo $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ que viene dado por

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w + (\inf_{s\in S} M_s)],$$

(2) Si en $(\mathcal{L}, \leq)$ existe una negación fuerte $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y w es complementado tal que $w^c = w'$, entonces $(M_s)_{s\in S}$ tiene w-supremo $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

$$\sqcup^w_{s\in S} M_s = \sqcap^{w^c}_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w^c \cdot \inf_{s\in S}(\sup M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w^c + (\inf_{s\in S} M_s)].$$

Proposición. Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y sea $w\in\mathcal{L}$.

(1) El inf-semiretículo $(\mathcal{L},\sqsubseteq^w,\sqcap^w,w)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $\mathcal{L}$ tiene elemento w-ínfimo $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ que viene dado por

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s)\cdot[w + (\inf_{s\in S} M_s)],$$

(2) Si en $(\mathcal{L}, \leq)$ existe una negación fuerte $': \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ y w es complementado tal que $w^c=w'$, entonces $(M_s)_{s\in S}$ tiene w-supremo $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ en el retículo $(\mathcal{L},\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w, w^c), ')$:

$$\sqcup^w_{s\in S} M_s = \sqcap^{w^c}_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w^c\cdot \inf_{s\in S}(\sup M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s)\cdot[w^c + (\inf_{s\in S} M_s)].$$

Demostración. (1) Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}$.

Demostremos primero que $(\sqcap^w_{s\in S} M_s) \sqsubseteq^w M_k\ \forall k\in S$:

$$(M_k\cdot w) \leq [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)] \leq [\ (\inf_{s\in S} M_s) + [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]\ ] = \sqcap^w_{s\in S} M_s$$

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = [\ (\inf_{s\in S} M_s) + [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]\ ] \leq [\ M_k + [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]\ ] \leq (M_k + w).$$

luego $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(\mathcal{L},\sqsubseteq^w)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H\sqsubseteq^w M_s\ \forall s\in S$. Entonces $(M_s\cdot w) \leq H \leq (M_s+w)\ \forall s\in S$, luego $(\sqcap^w_{s\in S} M_s)\cdot w =$
$[(\inf_{s\in S} M_s) + [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]\ ]\cdot w = [w\cdot(\sup_{s\in S} M_s)] = \sup_{s\in S}(M_s\cdot w) \leq H$, y
$H \leq \inf_{s\in S}(M_s+w) = [w + (\inf_{s\in S} M_s)] = [w + (\sup_{s\in S} M_s)]\cap[w + (\bigcap_{s\in S} M_s)] = [(\sup_{s\in S} M_s)\cdot[w + (\inf_{s\in S} M_s)]$
$+w = (\sqcap^w_{s\in S} M_s)\cup w$,
que demuestra que $H\sqsubseteq^w (\sqcap^w_{s\in S} M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

Un razonamiento análogo prueba que $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ es el w-supremo en $(P(X),\sqsubseteq^w)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

Proposición. Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y sea $w \in \mathcal{L}$.

(1) El inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $\mathcal{L}$ tiene elemento w-ínfimo $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ que viene dado por

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w + (\inf_{s\in S} M_s)],$$

(2) Si en $(\mathcal{L}, \leq)$ existe una negación fuerte $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y w es complementado tal que $w^c = w'$, entonces $(M_s)_{s\in S}$ tiene w-supremo $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), '\,)$:

$$\sqcup^w_{s\in S} M_s = \sqcap^{w^c}_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w^c \cdot \inf_{s\in S}(\sup M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w^c + (\inf_{s\in S} M_s)].$$

Demostración. (1) Sea $S \neq \emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}$.

Demostremos primero que $(\sqcap^w_{s\in S} M_s) \sqsubseteq^w M_k \ \forall k \in S$:

$$(M_k \cdot w) \leq [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] \leq [\,(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] = \sqcap^w_{s\in S} M_s$$

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = [\,(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \leq [\,M_k + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \leq (M_k + w).$$

luego $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H \sqsubseteq^w M_s \ \forall s \in S$. Entonces $(M_s \cdot w) \leq H \leq (M_s + w) \ \forall s \in S$, luego $(\sqcap^w_{s\in S} M_s) \cdot w =$
$[(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \cdot w = [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = \sup_{s\in S}(M_s \cdot w) \leq H$, y
$H \leq \inf_{s\in S}(M_s + w) = [w + (\inf_{s\in S} M_s)] = [w + (\sup_{s\in S} M_s)] \cap [w + (\bigcap_{s\in S} M_s)] = [(\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w + (\inf_{s\in S} M_s)]$
$+ w = (\sqcap^w_{s\in S} M_s) \cup w,$

que demuestra que $H \sqsubseteq^w (\sqcap^w_{s\in S} M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

Un razonamiento análogo prueba que $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ es el w-supremo en $(P(X), \sqsubseteq^w)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

Corolario. Si definimos $\sqcap^w \emptyset = w^c$ y $\sqcup^w \emptyset = w$, entonces $(P(X), \sqsubseteq^w)$ es un retículo completo.

(Con la complementación, es Álgebra de Boole completa). ∎

Proposición. Sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y sea $w \in \mathcal{L}$.

(1) El inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$ es tal que toda familia no vacía $(M_s)_{s\in S}$ de $\mathcal{L}$ tiene elemento w-ínfimo $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ que viene dado por

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w + (\inf_{s\in S} M_s)],$$

(2) Si en $(\mathcal{L}, \leq)$ existe una negación fuerte $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y w es complementado tal que $w^c = w'$, entonces $(M_s)_{s\in S}$ tiene w-supremo $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

$$\sqcup^w_{s\in S} M_s = \sqcap^{w^c}_{s\in S} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [w^c \cdot \inf_{s\in S}(\sup M_s)] = (\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w^c + (\inf_{s\in S} M_s)].$$

Demostración. (1) Sea $S \neq \emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}$.

Demostremos primero que $(\sqcap^w_{s\in S} M_s) \sqsubseteq^w M_k \ \forall k \in S$:

$$(M_k \cdot w) \leq [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] \leq [\,(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] = \sqcap^w_{s\in S} M_s$$

$$\sqcap^w_{s\in S} M_s = [\,(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \leq [\,M_k + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \leq (M_k + w).$$

luego $\sqcap^w_{s\in S} M_s$ es un minorante de la familia $(M_s)_{s\in S}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$. Demostremos ahora que es el mayor de esos minorantes:

Sea H otro minorante: $H \sqsubseteq^w M_s \ \forall s \in S$. Entonces $(M_s \cdot w) \leq H \leq (M_s + w) \ \forall s \in S$, luego $(\sqcap^w_{s\in S} M_s) \cdot w =$
$[(\inf_{s\in S} M_s) + [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]\,] \cdot w = [w \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = \sup_{s\in S}(M_s \cdot w) \leq H$, y
$H \leq \inf_{s\in S}(M_s + w) = [w + (\inf_{s\in S} M_s)] = [w + (\sup_{s\in S} M_s)] \cap [w + (\bigcap_{s\in S} M_s)] = [(\sup_{s\in S} M_s) \cdot [w + (\inf_{s\in S} M_s)]$
$+ w = (\sqcap^w_{s\in S} M_s) \cup w,$

que demuestra que $H \sqsubseteq^w (\sqcap^w_{s\in S} M_s)$, es decir, esta última es la mayor de los minorantes y por tanto el ínfimo (w-ínfimo) de la familia $(M_s)_{s\in S}$.

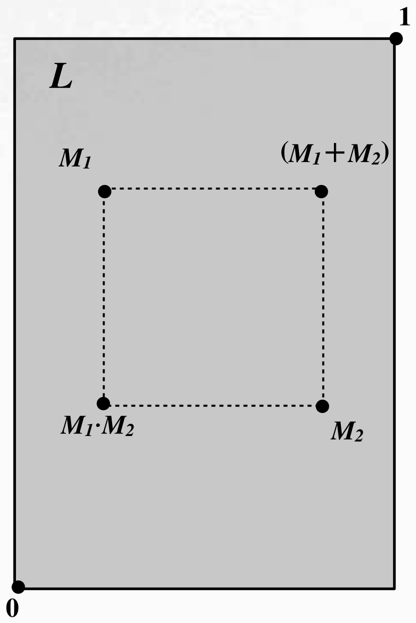
Un razonamiento análogo prueba que $\sqcup^w_{s\in S} M_s$ es el w-supremo en $(P(X), \sqsubseteq^w)$ de la familia $(M_s)_{s\in S}$. ∎

Corolario. Si definimos $\sqcap^w \emptyset = w^c$ y $\sqcup^w \emptyset = w$, entonces $(P(X), \sqsubseteq^w)$ es un retículo completo.

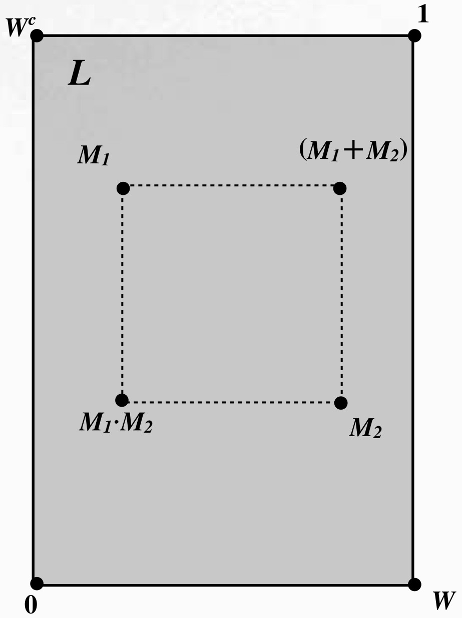
(Con la complementación, es Álgebra de Boole completa). ∎

Nota. Es inmediato comprobar que se cumplen las leyes de Morgan: $(\sqcap^w_{s\in S} M_s)^c = (\sqcup^w_{s\in S} M_s^c)$,... etc

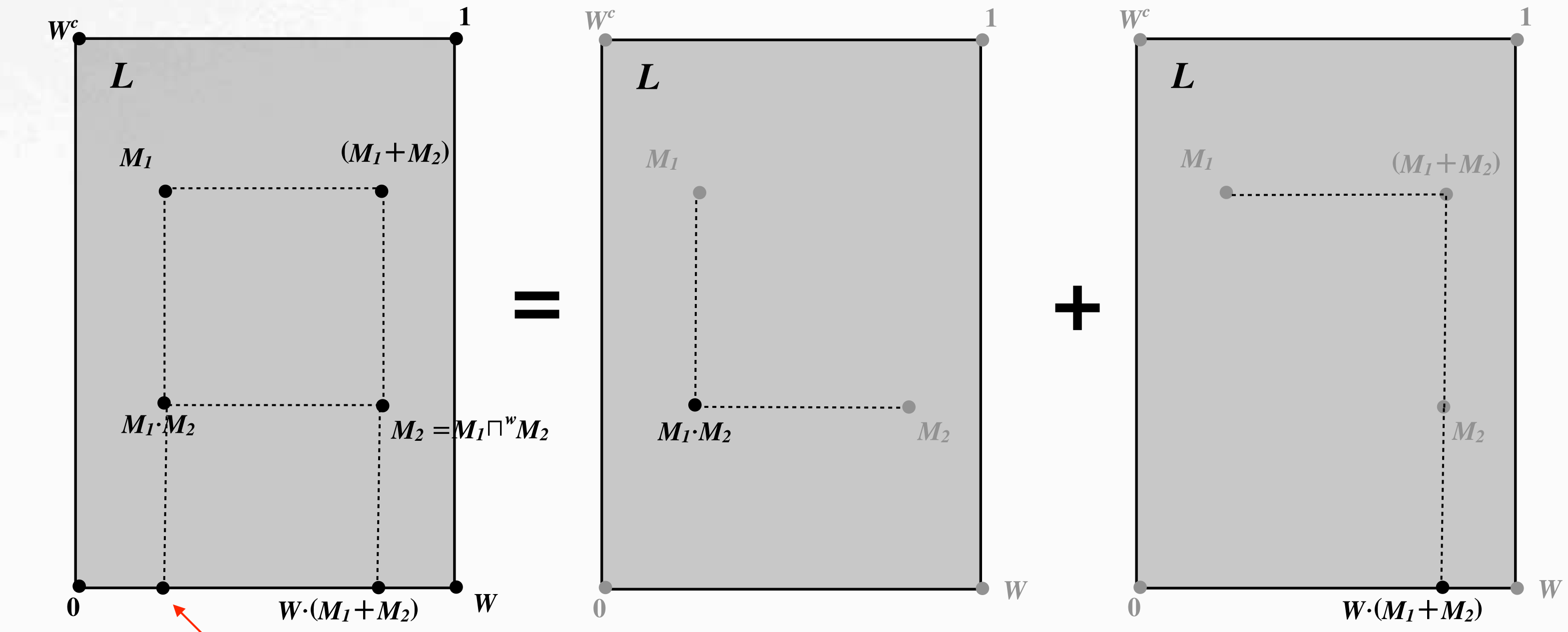
Expresión de $A \sqcap^{w} B$ y $A \sqcup^{w} B$ como supremo (usual) de elementos disjuntos



Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano



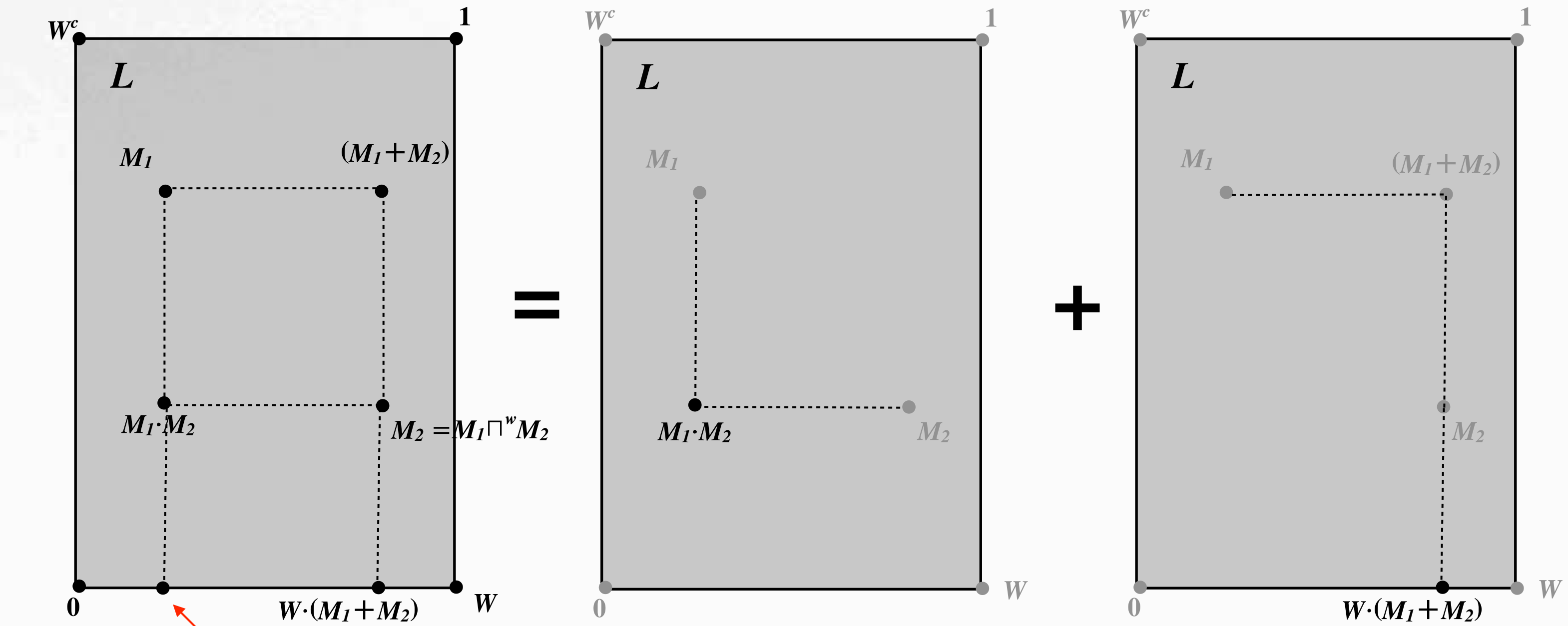
Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si w tiene complemento w^c:



$M_1 \sqcap^w M_2 = (M_1 \cdot M_2) + [W \cdot (M_1 + M_2)]$

$(M_1 \cdot M_2) \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] \neq 0.$

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si w tiene complemento w^c:



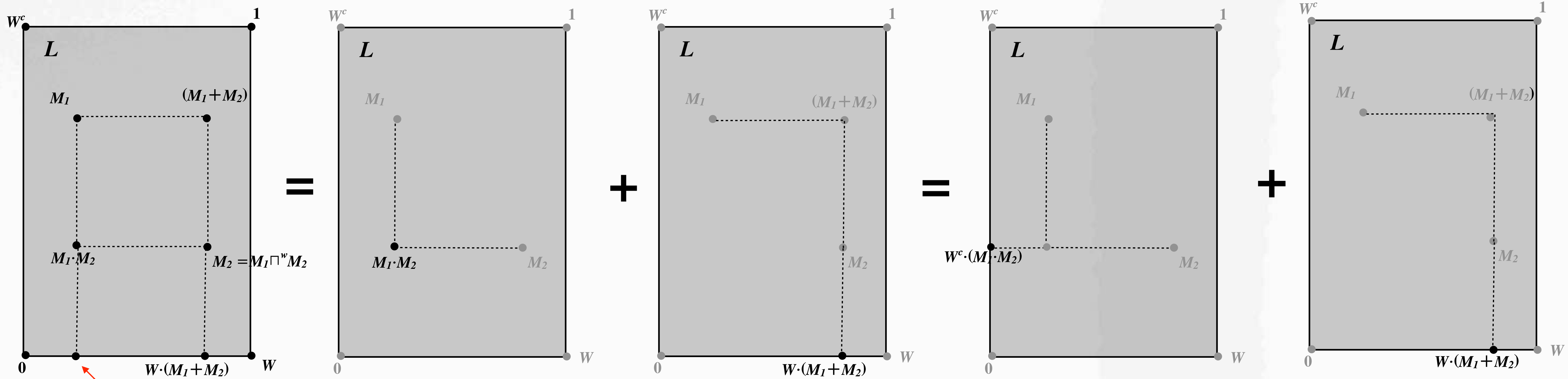
$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1 \cdot M_2) + [W \cdot (M_1 + M_2)]$

$(M_1 \cdot M_2) \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] \neq 0.$

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si W tiene complemento W^c:

Proposición. Sea $S \neq \varnothing$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de L. Demostremos que $(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)$ y $(\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s)$ pueden representarse mediante el supremo de dos elementos disjuntos (con ínfimo igual a 0):

$$\underset{s\in S}{(\sqcap^W M_s)} = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)], \text{ y } \underset{s\in S}{(\sqcup^W M_s)} = [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c \cdot (\sup_{s\in S} M_s)].$$



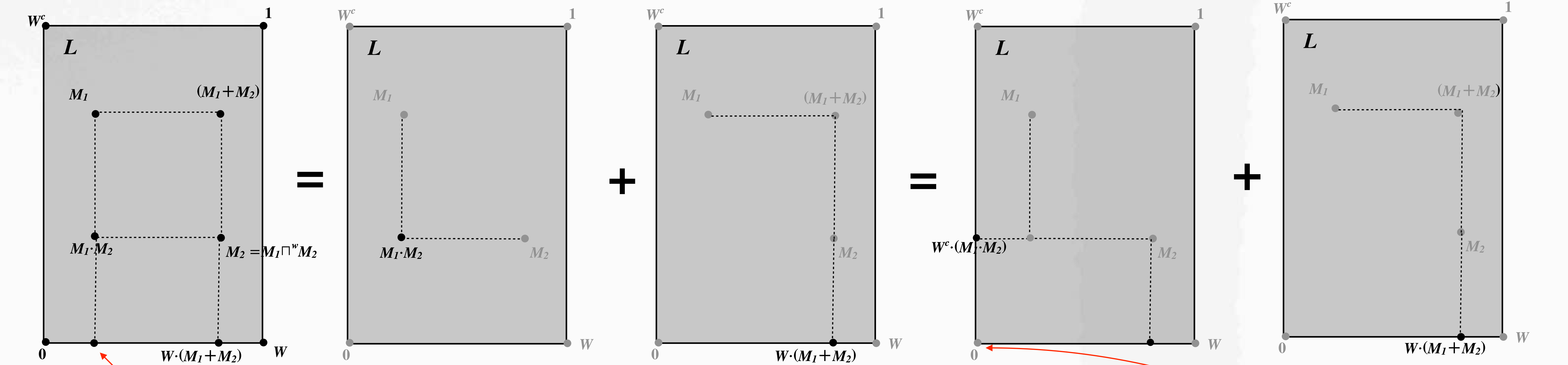
$$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1\cdot M_2) + [W\cdot(M_1+M_2)] = [W^c\cdot(M_1\cdot M_2)] + [W\cdot(M_1+M_2)],$$

$$(M_1\cdot M_2)\cdot[W\cdot(M_1+M_2)] \neq 0.$$

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si W tiene complemento W^c:

<u>Proposición</u>. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de L. Demostremos que $(\underset{s\in S}{\sqcap}^W M_s)$ y $(\underset{s\in S}{\sqcup}^W M_s)$ pueden representarse mediante el supremo de dos elementos disjuntos (con ínfimo igual a 0):

$$\underset{s\in S}{(\sqcap^W M_s)} = [W^c\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)], \text{ y } \underset{s\in S}{(\sqcup^W M_s)} = [W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c\cdot(\sup_{s\in S} M_s)].$$



$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1 \cdot M_2) + [W \cdot (M_1 + M_2)] = [W^c \cdot (M_1 \cdot M_2)] + [W \cdot (M_1 + M_2)]$,

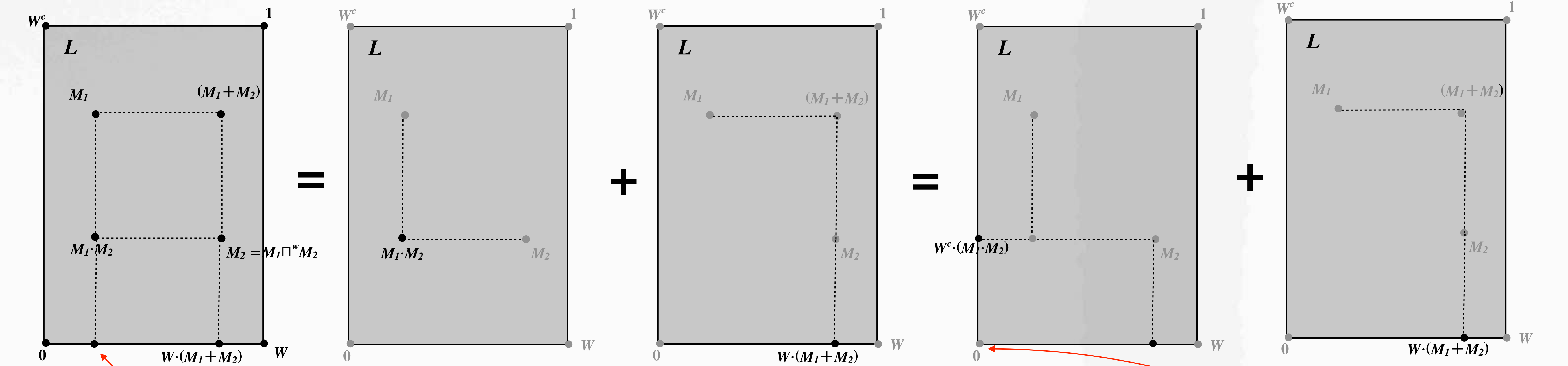
$(M_1 \cdot M_2) \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] \neq 0.$

$[W^c \cdot (M_1 \cdot M_2)] \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] = 0.$

Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si w tiene complemento w^c:

Proposición. Sea $S \neq \emptyset$ y sea $(M_s)_{s \in S}$ una familia de elementos de L. Demostremos que $(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)$ y $(\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s)$ pueden representarse mediante el supremo de dos elementos disjuntos (con ínfimo igual a 0):

$$\underset{s\in S}{(\sqcap^W} M_s) = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)], \text{ y } \underset{s\in S}{(\sqcup^W} M_s) = [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c \cdot (\sup_{s\in S} M_s)].$$



$M_1 \sqcap^W M_2 = (M_1 \cdot M_2) + [W \cdot (M_1 + M_2)] = [W^c \cdot (M_1 \cdot M_2)] + [W \cdot (M_1 + M_2)]$,

$(M_1 \cdot M_2) \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] \neq 0$. $[W^c \cdot (M_1 \cdot M_2)] \cdot [W \cdot (M_1 + M_2)] = 0$.

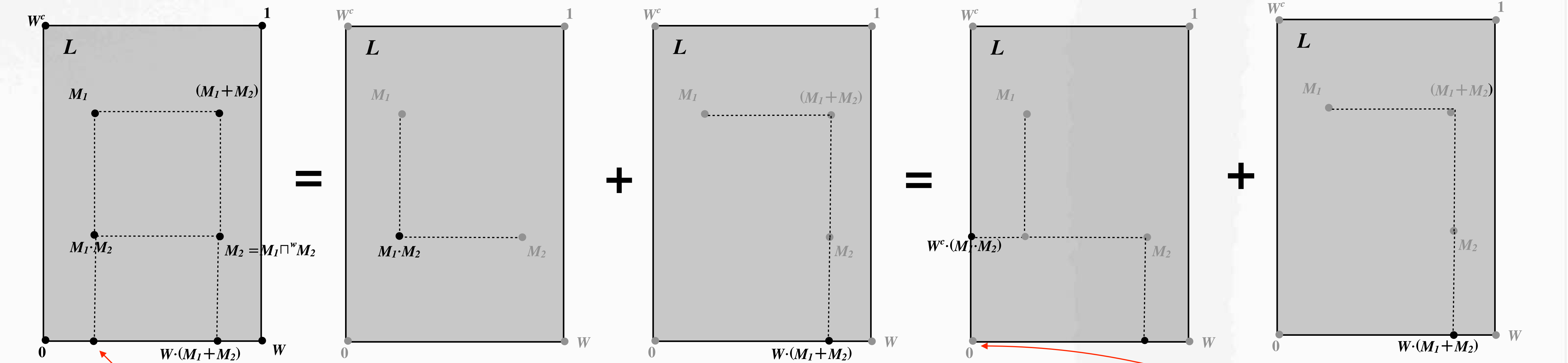
Si $(L, \leq, \cdot, +)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si w tiene complemento w^c:

Proposición. Sea $S \neq \emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de L. Demostremos que $(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s)$ y $(\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s)$ pueden representarse mediante el supremo de dos elementos disjuntos (con ínfimo igual a 0):

$$(\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s) = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)], \text{ y } (\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s) = [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c \cdot (\sup_{s\in S} M_s)].$$

Demostración En efecto, $\inf_{s\in S} M_s = 1 \cdot (\inf_{s\in S} M_s) = (W^c + W) \cdot (\inf_{s\in S} M_s) = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)]$, luego $\underset{s\in S}{\sqcap^W} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)] = [W^c \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]$, pues $[W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] \leq [W \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]$.

Como $(\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s) = (\underset{s\in S}{\sqcap^{W^c}} M_s)$ y de $(W^c)^c = W$, se deduce $(\underset{s\in S}{\sqcup^W} M_s) = [W \cdot (\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c \cdot (\sup_{s\in S} M_s)]$. ∎



$M_1\sqcap^w M_2 = (M_1\cdot M_2) + [W\cdot(M_1+M_2)] = [W^c\cdot(M_1\cdot M_2)] + [W\cdot(M_1+M_2)]$,

$(M_1\cdot M_2)\cdot[W\cdot(M_1+M_2)]\neq 0.$ $\qquad$ $[W^c\cdot(M_1\cdot M_2)]\cdot[W\cdot(M_1+M_2)]=0.$

Si $(L,\leq,\cdot,+)$ es un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano y si w tiene complemento w^c:

Proposición. Sea $S\neq\emptyset$ y sea $(M_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de L. Demostremos que $(\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s)$ y $(\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s)$ pueden representarse mediante el supremo de dos elementos disjuntos (con ínfimo igual a 0):

$$\underset{s\in S}{(\sqcap^w} M_s) = [W^c\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)],\ \text{y}\ \underset{s\in S}{(\sqcup^w} M_s) = [W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c\cdot(\sup_{s\in S} M_s)].$$

Demostración En efecto, $\inf_{s\in S} M_s = 1\cdot(\inf_{s\in S} M_s) = (W^c+W)\cdot(\inf_{s\in S} M_s) = [W^c\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)]$, luego $\underset{s\in S}{\sqcap^w} M_s = (\inf_{s\in S} M_s) + [W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)] = [W^c\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)] =$ $[W^c\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]$, pues $[W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)]\leq[W\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]$.

Como $(\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s) = (\underset{s\in S}{\sqcap^{w^c}} M_s)$ y de $(W^c)^c = W$, se deduce $(\underset{s\in S}{\sqcup^w} M_s) = [W\cdot(\inf_{s\in S} M_s)] + [W^c\cdot(\sup_{s\in S} M_s)]$.∎

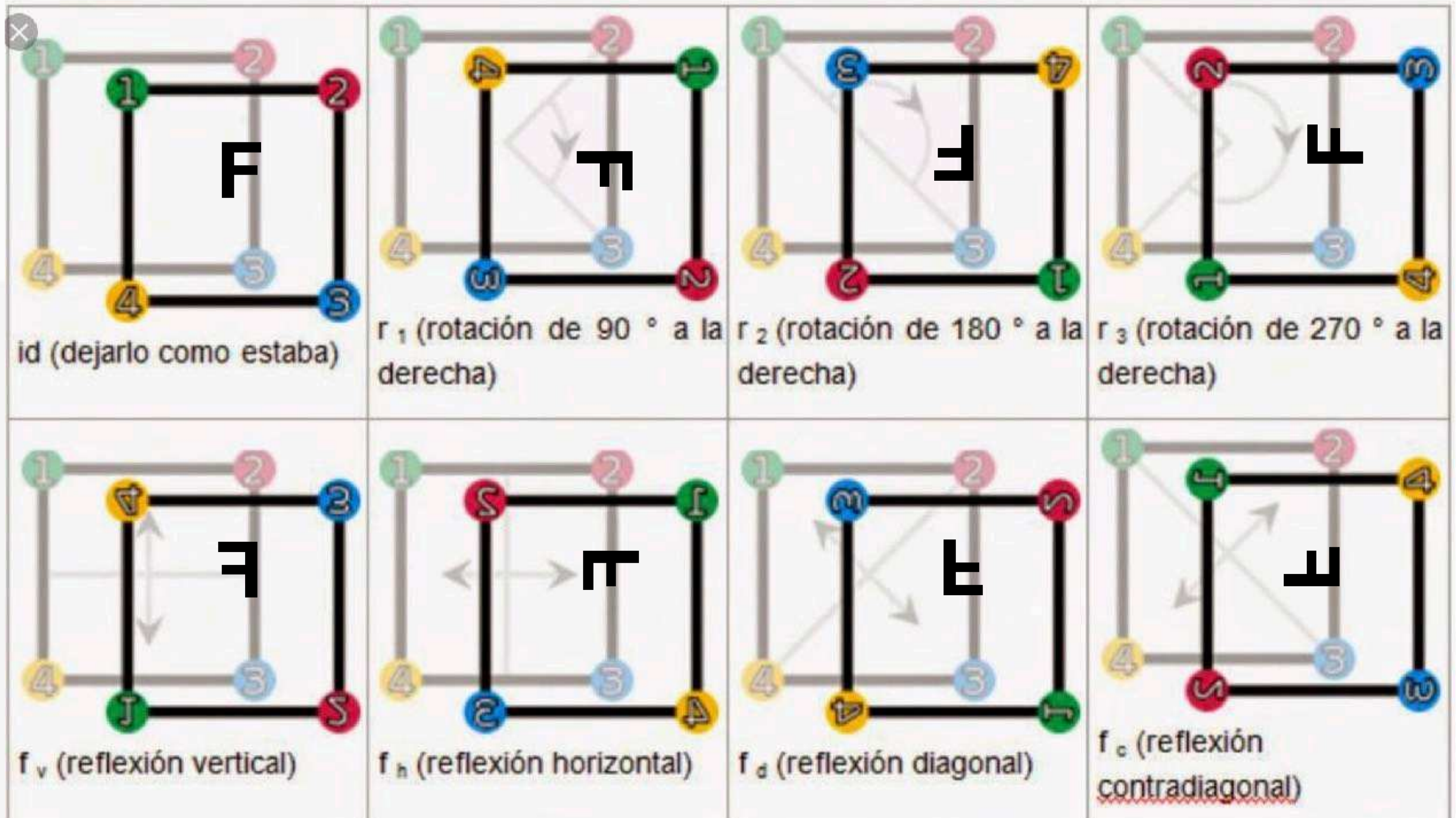
Nota. Esta representación es compatible con las definiciones: $\sqcap^w\emptyset = W^c$ y $\sqcup^w\emptyset = W$, pues

$$\sqcap^w\emptyset = W^c\cdot(\inf\emptyset)] + [W\cdot(\sup\emptyset)] = (W^c\cdot 1) + (W\cdot 0) = W^c,$$

$$\sqcup^w\emptyset = \sqcap^{w^c}\emptyset = W\cdot(\inf\emptyset)] + [W^c\cdot(\sup\emptyset)] = (W\cdot 1) + (W^c\cdot 0) = W.$$

Ejemplo en álgebra: relaciones de actividad en retículos de subgrupos.

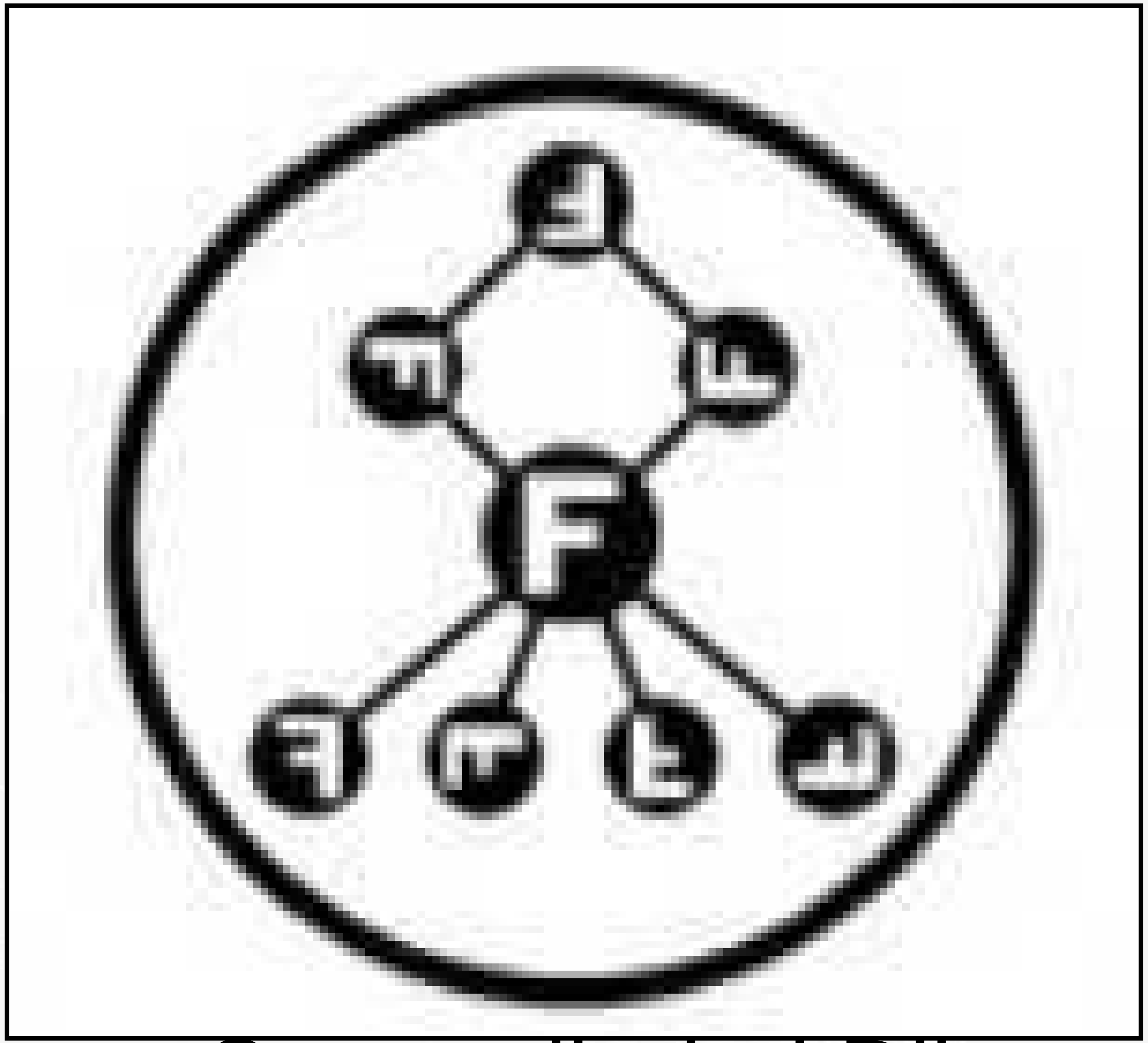
Ejemplo: grupos diédricos.



Los elementos del grupo de simetría del cuadrado (D_4). Los vértices se pintan y se numeran sólo para visualizar las operaciones.

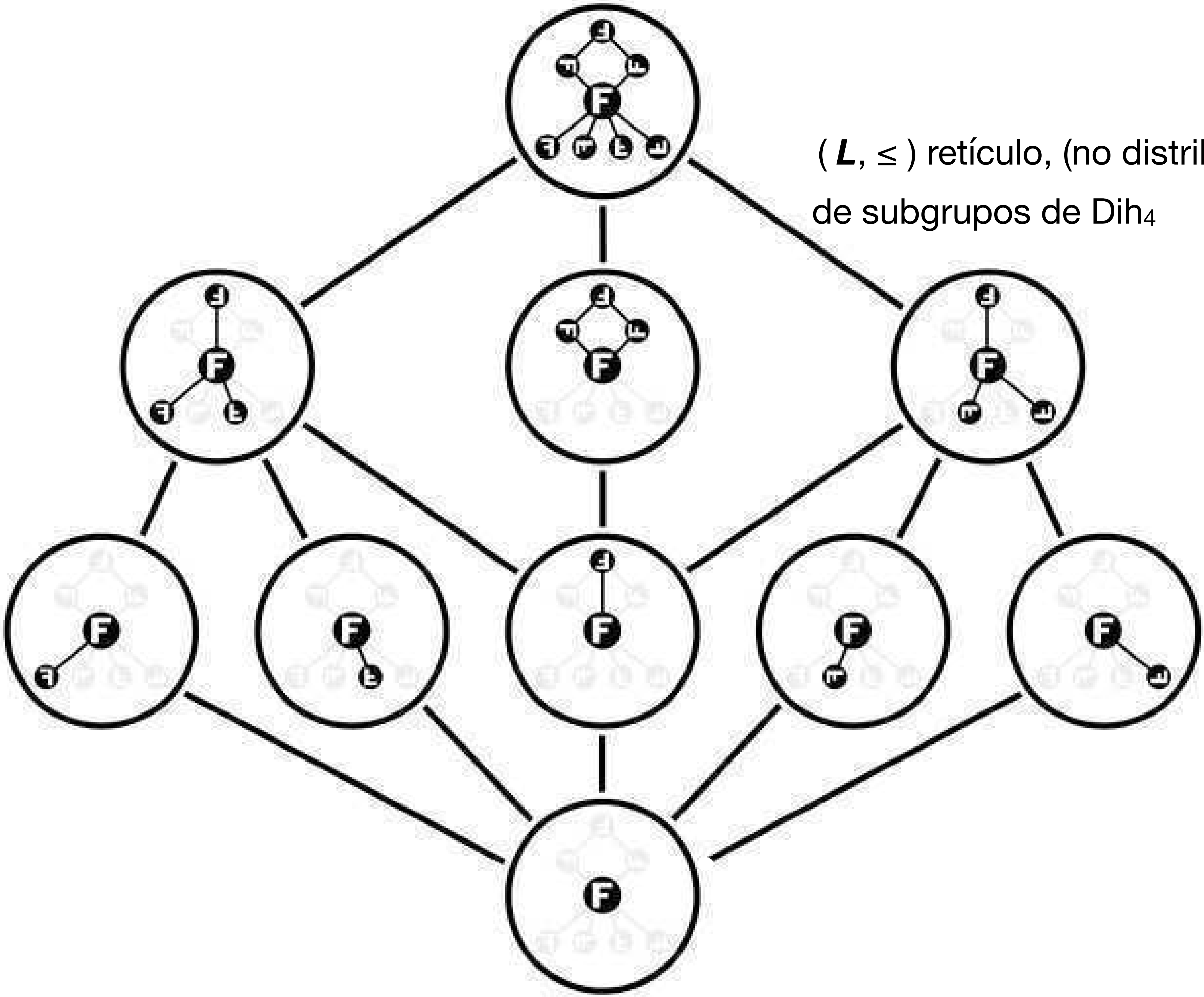
Dummit, David S.; Foote, Richard M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd edición). John Wiley & Sons

Ejemplo: grupos diédricos.



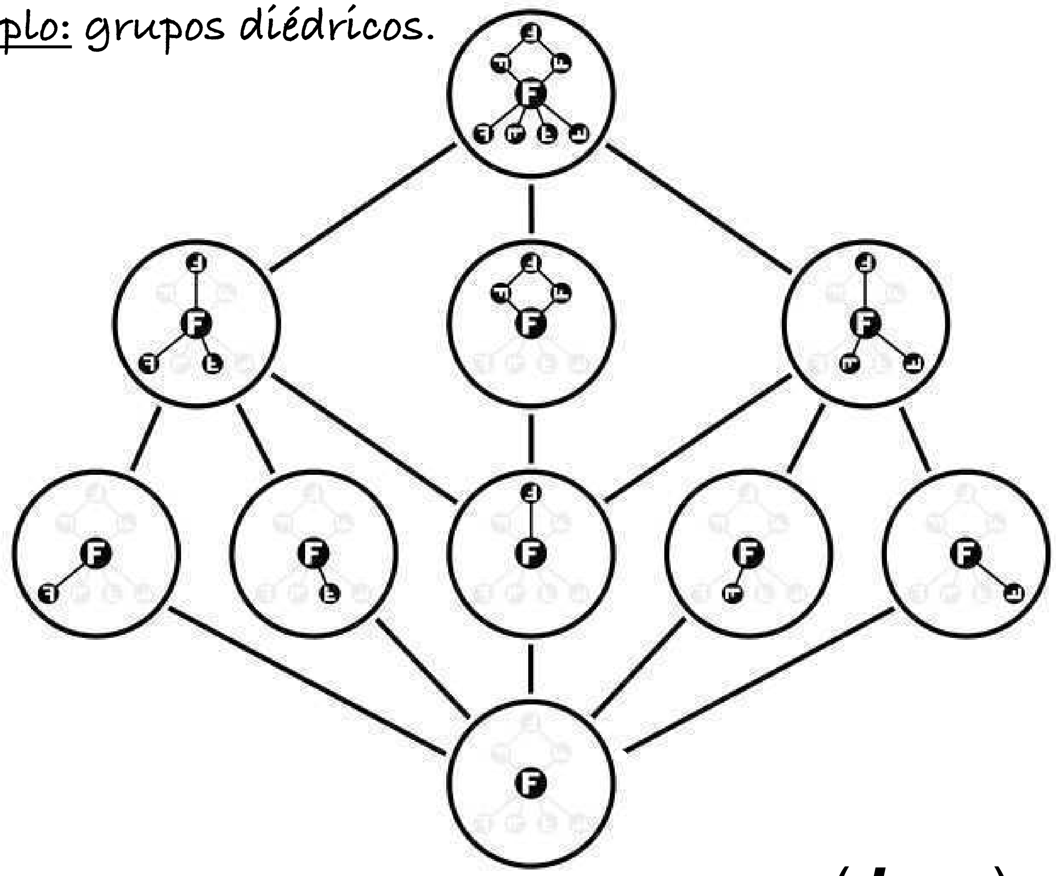
Grupo diedral Dih_4

Ejemplo: grupos diédricos.



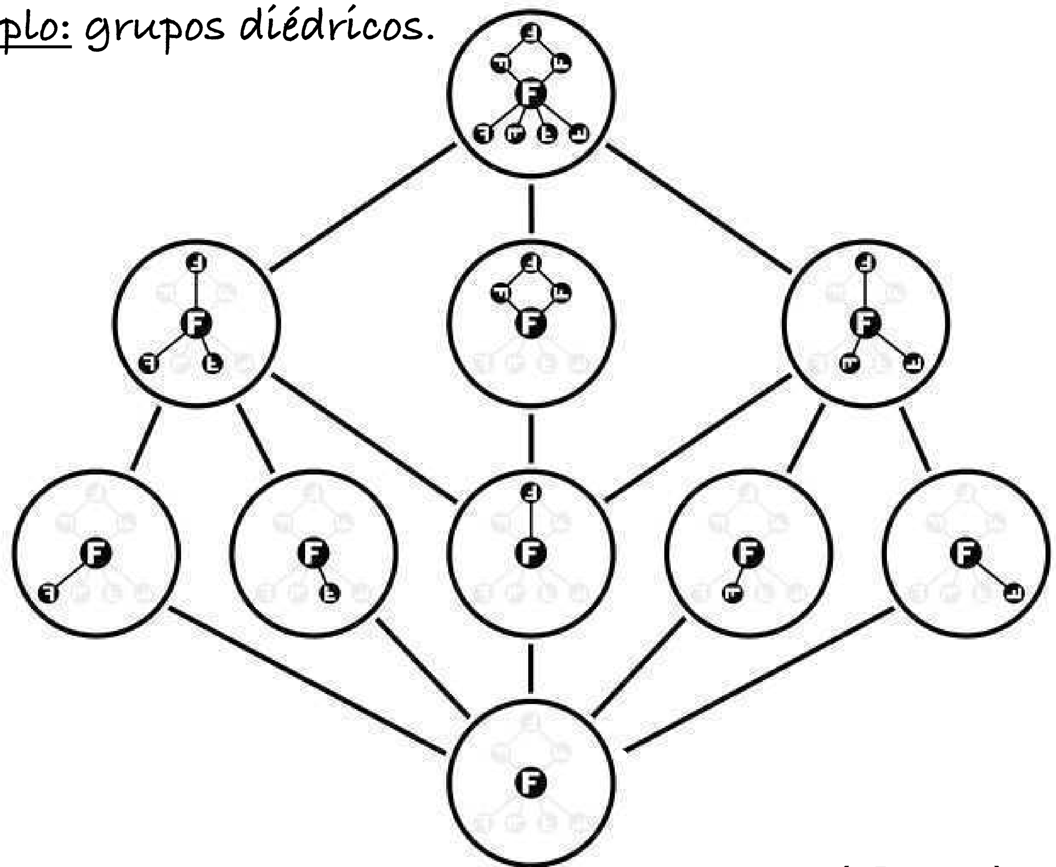
($\boldsymbol{L}$, ≤) retículo, (no distributivo), de subgrupos de Dih_4

Ejemplo: grupos diédricos.

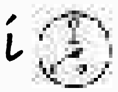


$(\boldsymbol{L}, \leq)$

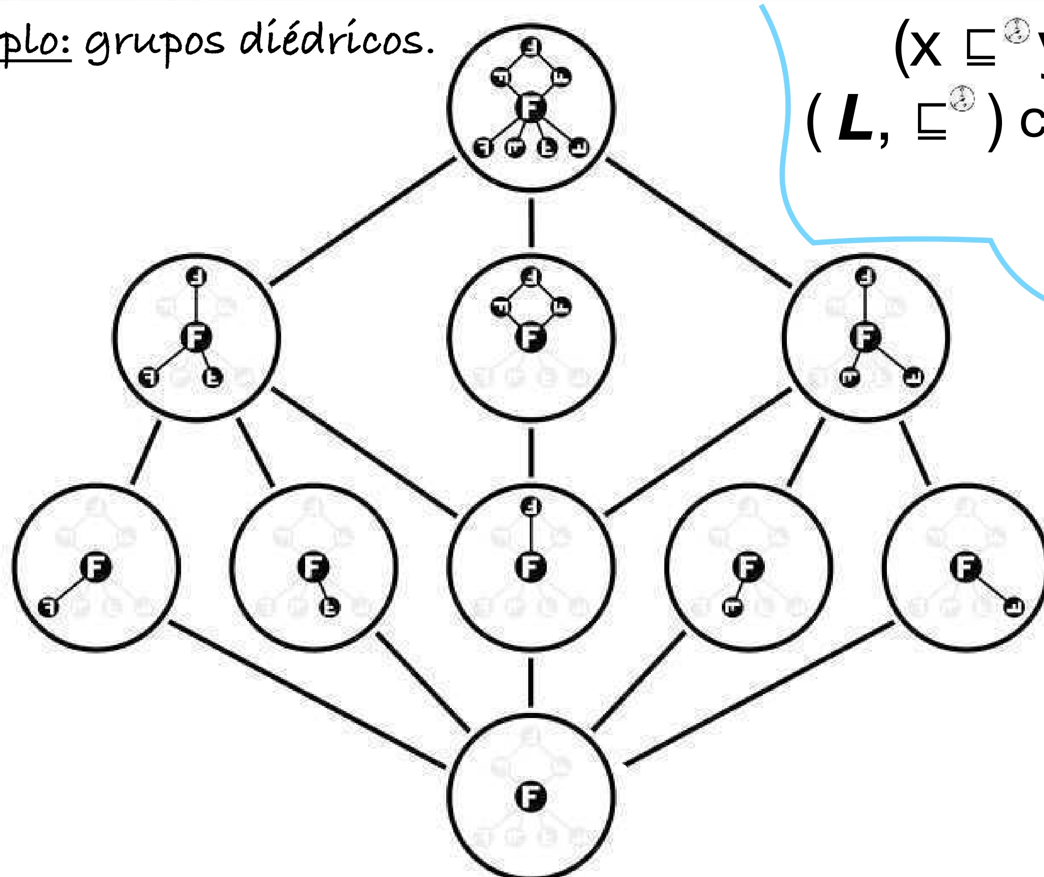
Ejemplo: grupos diédricos.



$(\boldsymbol{L}, \leq)$

Si  es un grupo diédrico:

Ejemplo: grupos diédricos.



$(x \sqsubseteq y) \Leftrightarrow (y \cdot \le x \le y +)$

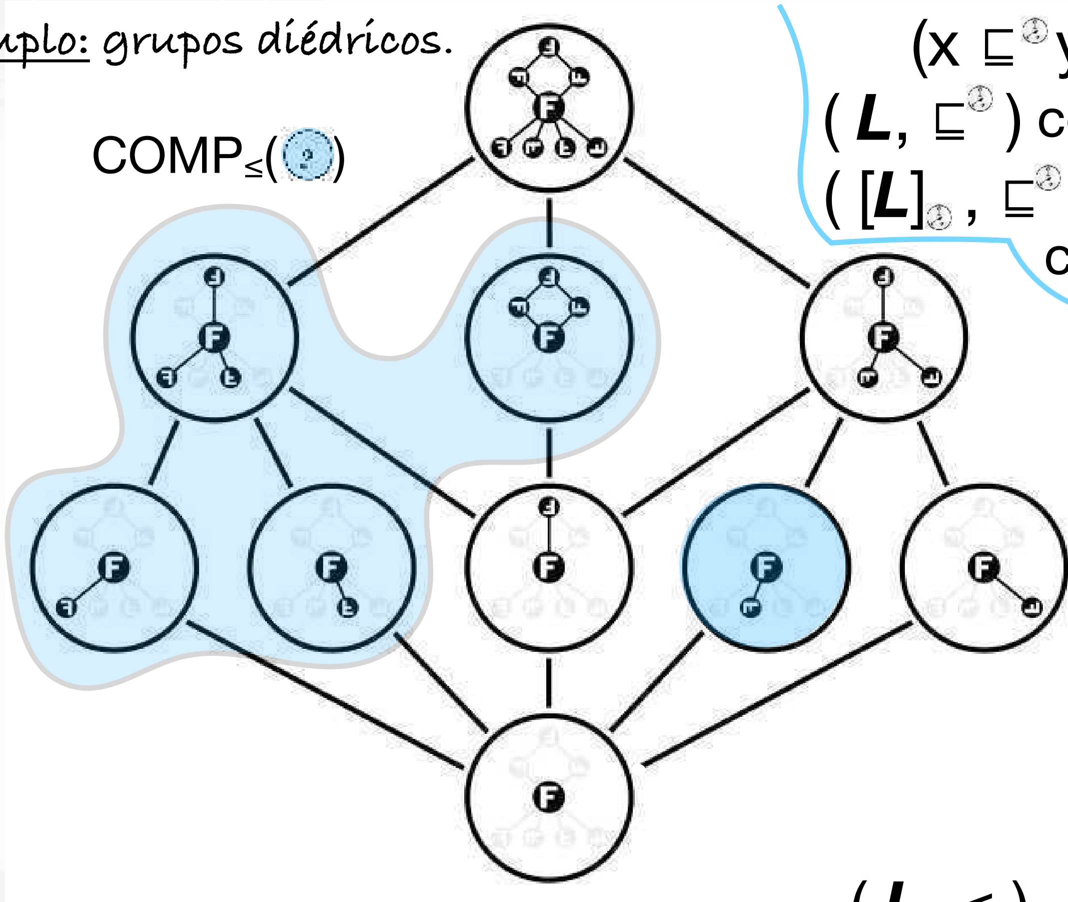
$(\boldsymbol{L}, \sqsubseteq)$ conjunto pre-ordenado.

$(\boldsymbol{L}, \le)$

Si es un grupo diédrico:

Ejemplo: grupos diédricos.

COMP≤( )

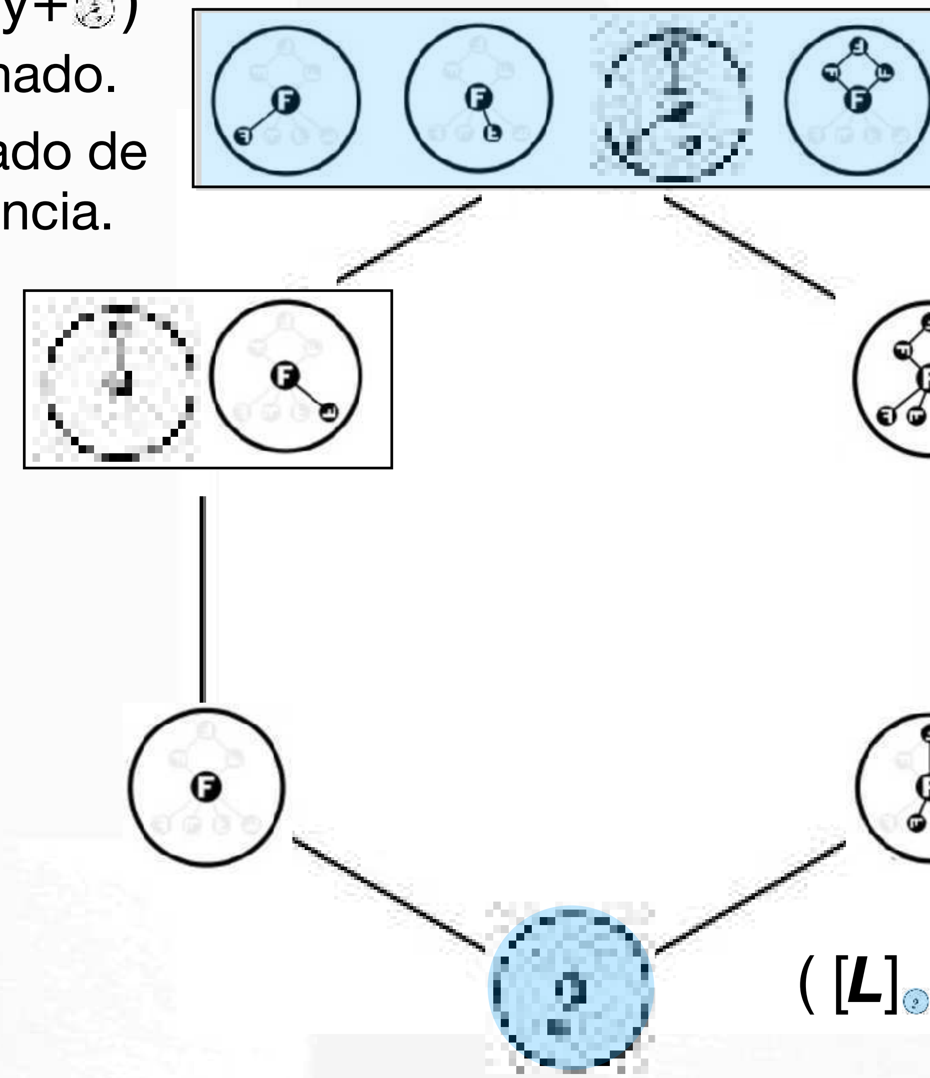


$(\boldsymbol{L}, \le)$

$(x \sqsubseteq y) \Leftrightarrow (y\cdot \le x \le y+)$

$(\boldsymbol{L}, \sqsubseteq)$ conjunto pre-ordenado.

$([\boldsymbol{L}] , \sqsubseteq)$ conjunto ordenado de clases de equivalencia.



Máximo

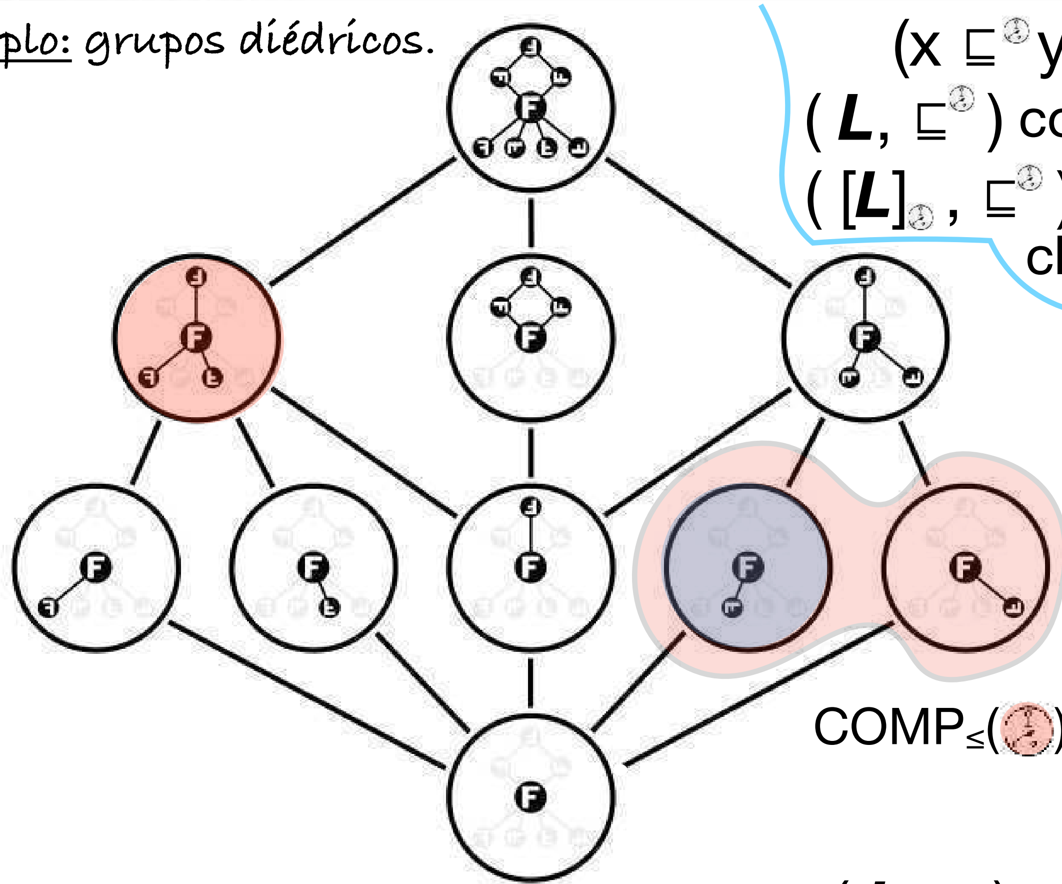
$([\boldsymbol{L}] , \sqsubseteq)$

Ejemplo: grupos diédricos.

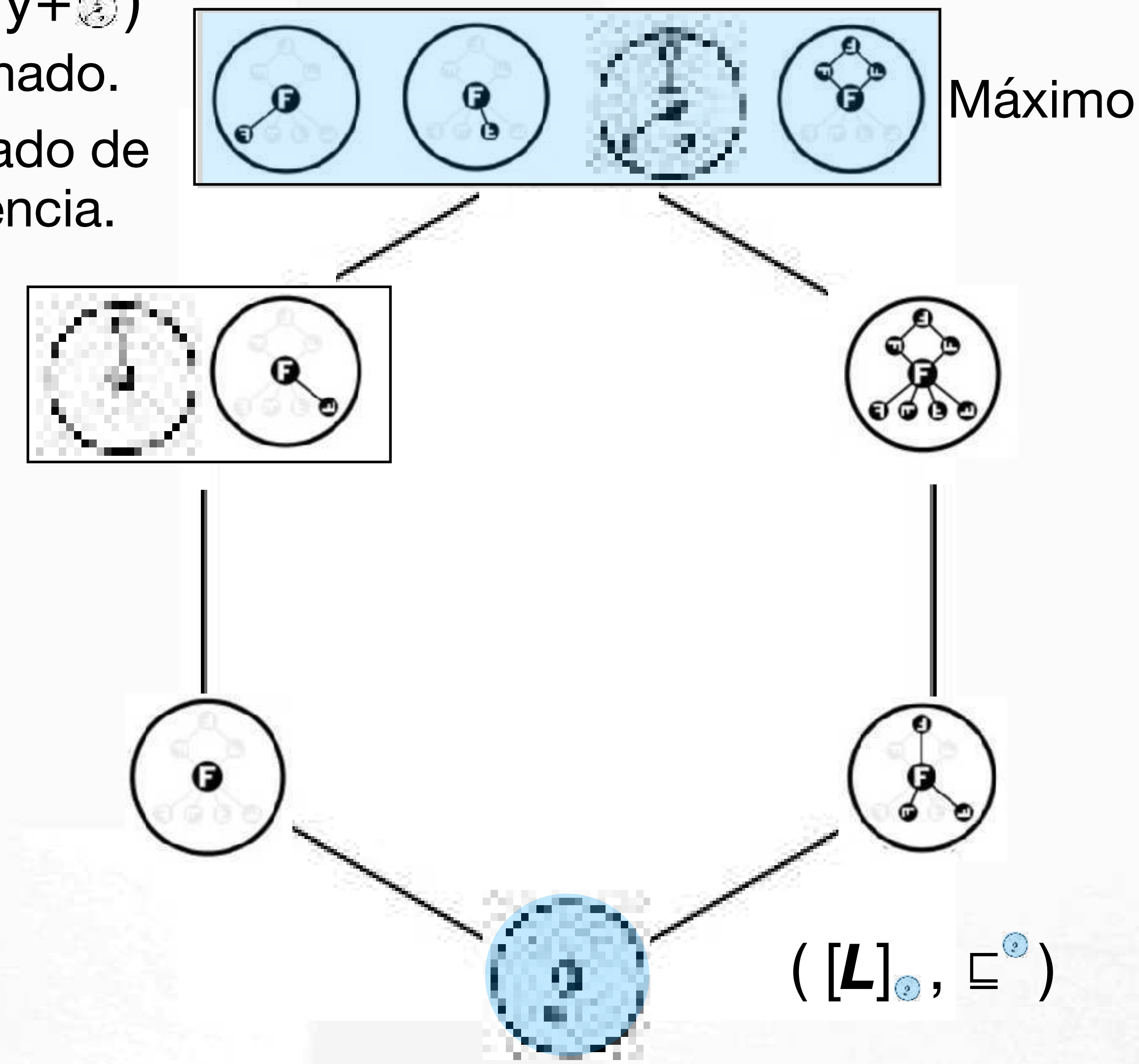
$(x \sqsubseteq y) \Leftrightarrow (y \cdot \leq x \leq y+)$

$(\boldsymbol{L}, \sqsubseteq)$ conjunto pre-ordenado.

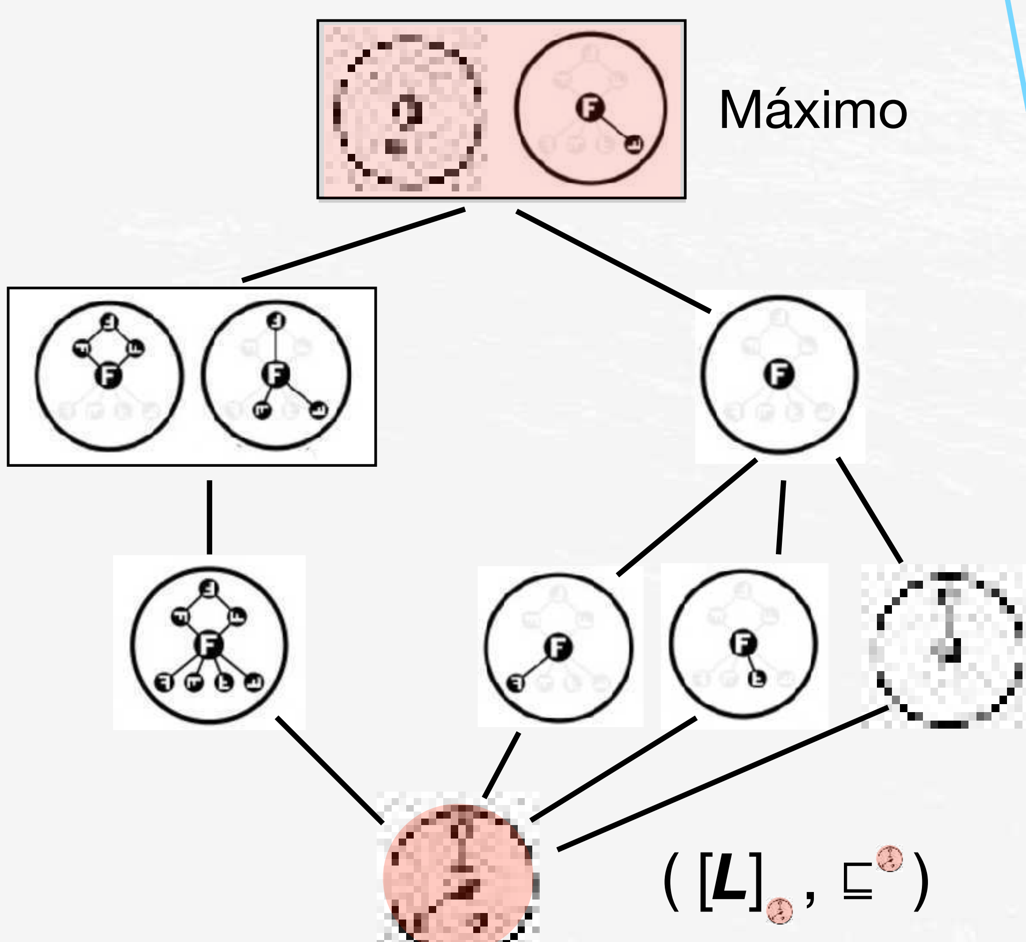
$([\boldsymbol{L}], \sqsubseteq)$ conjunto ordenado de clases de equivalencia.



$(\boldsymbol{L}, \leq)$

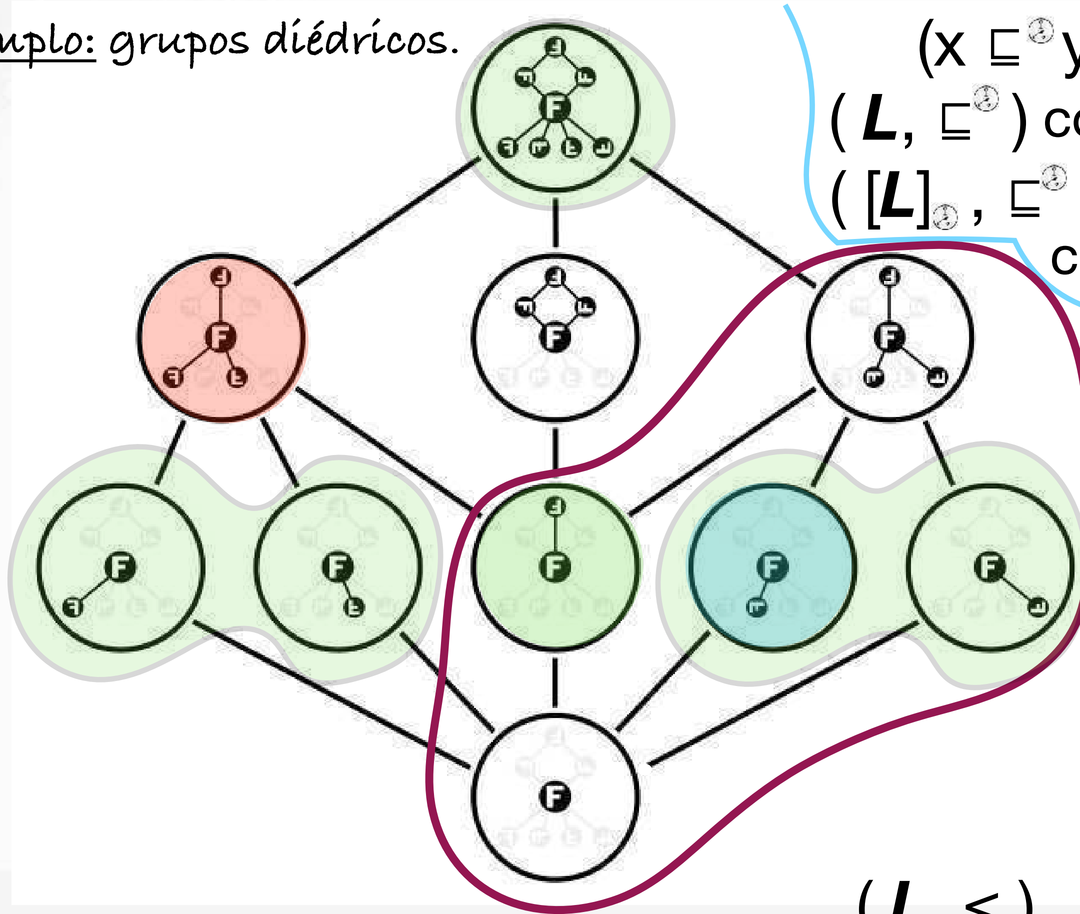


$([\boldsymbol{L}], \sqsubseteq)$



$([\boldsymbol{L}], \sqsubseteq)$

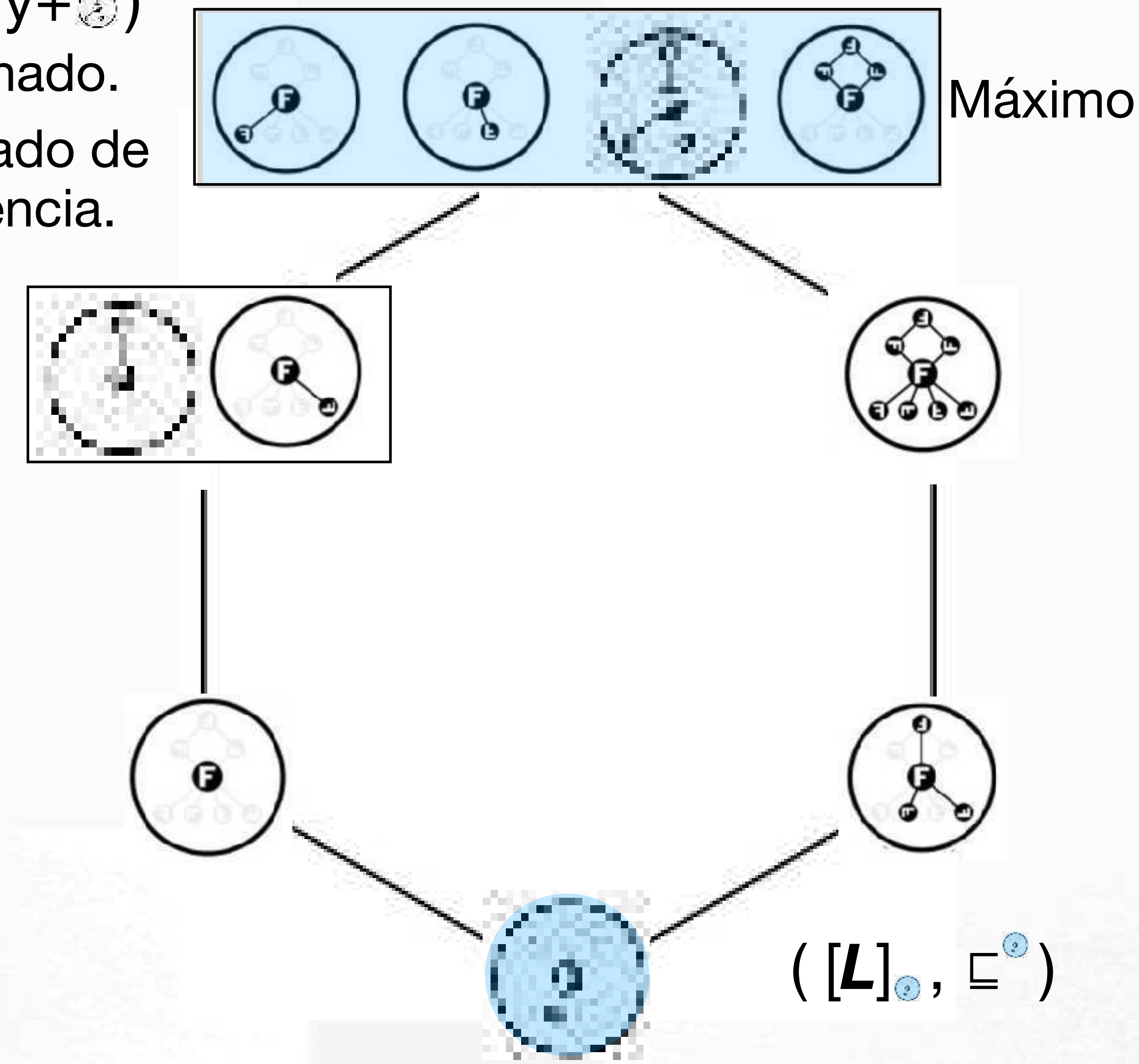
Ejemplo: grupos diédricos.

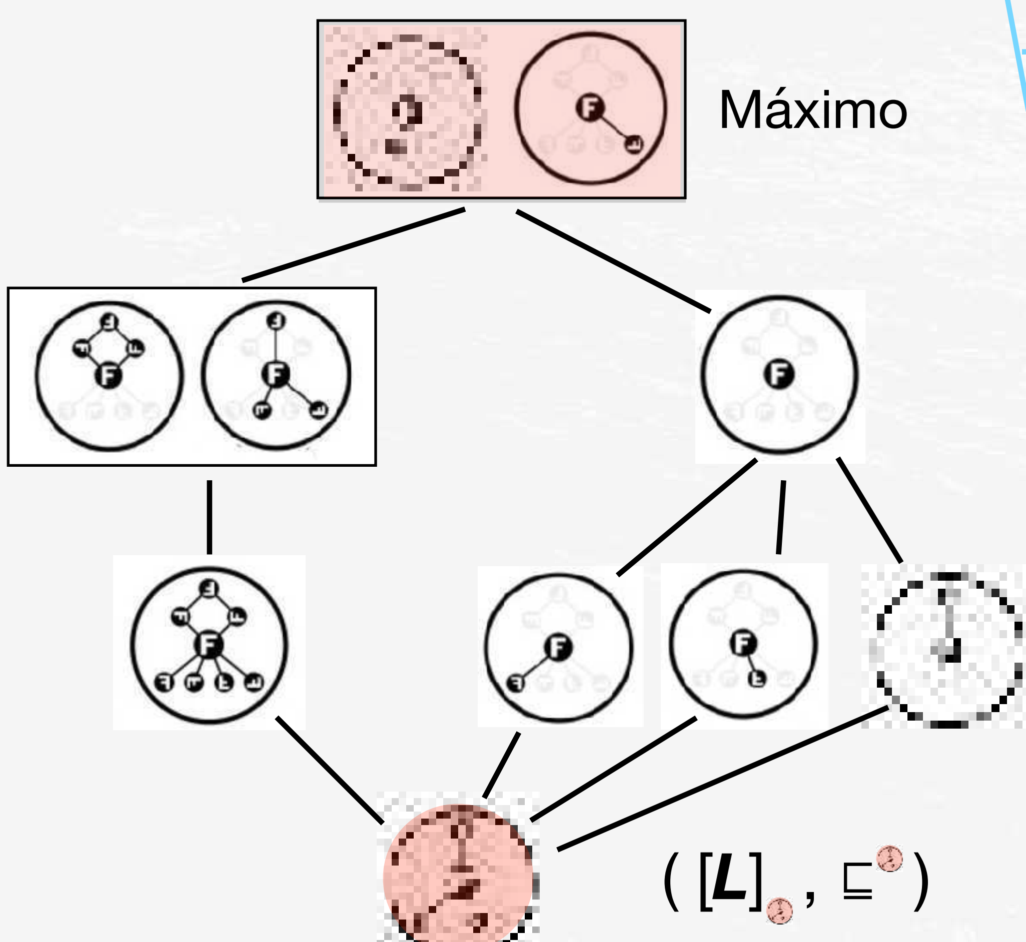


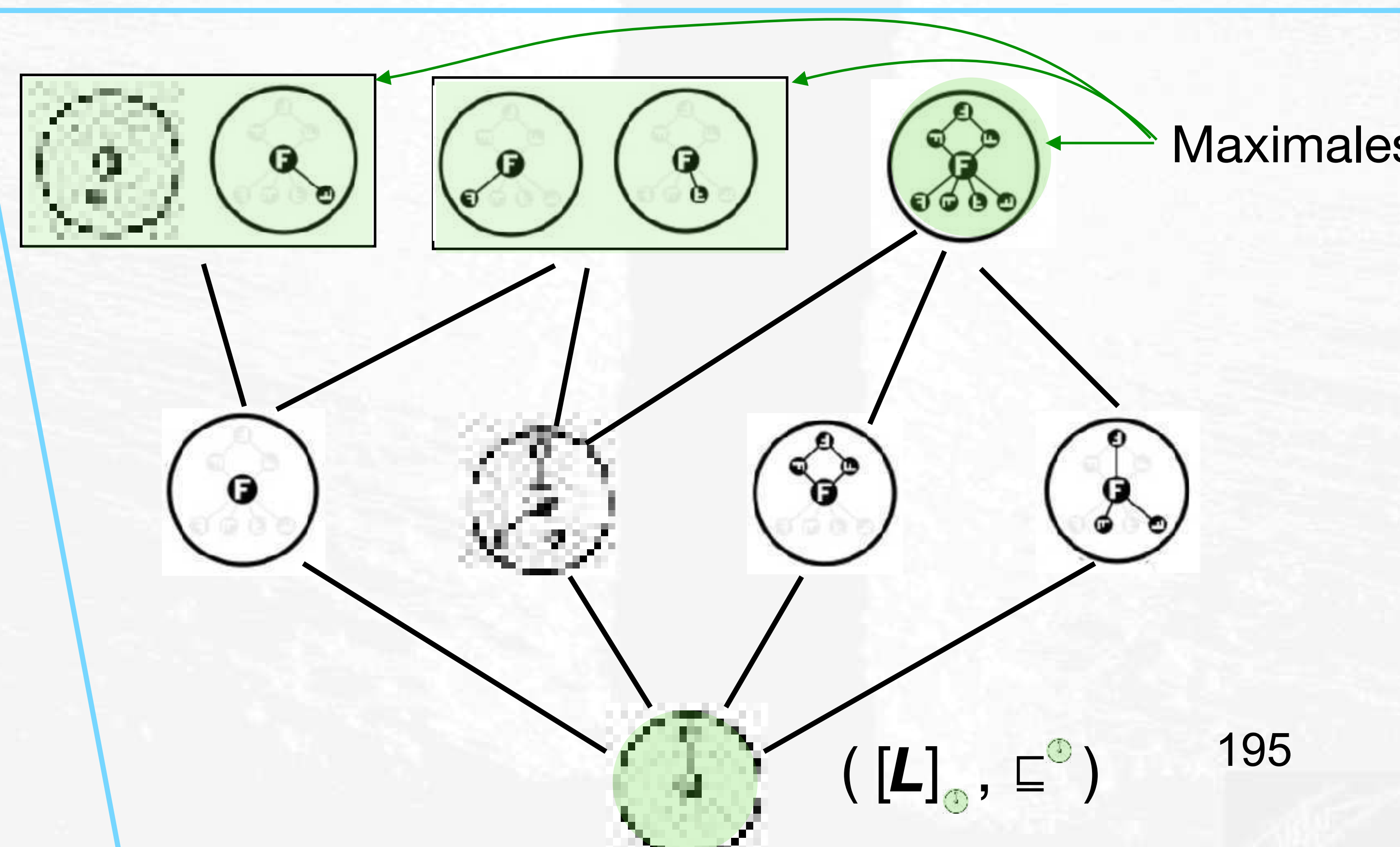
$(x \sqsubseteq y) \Leftrightarrow (y\cdot \;\leq x \leq y+\;)$

(*L*, $\sqsubseteq$) conjunto pre-ordenado.

([*L*], $\sqsubseteq$) conjunto ordenado de clases de equivalencia.





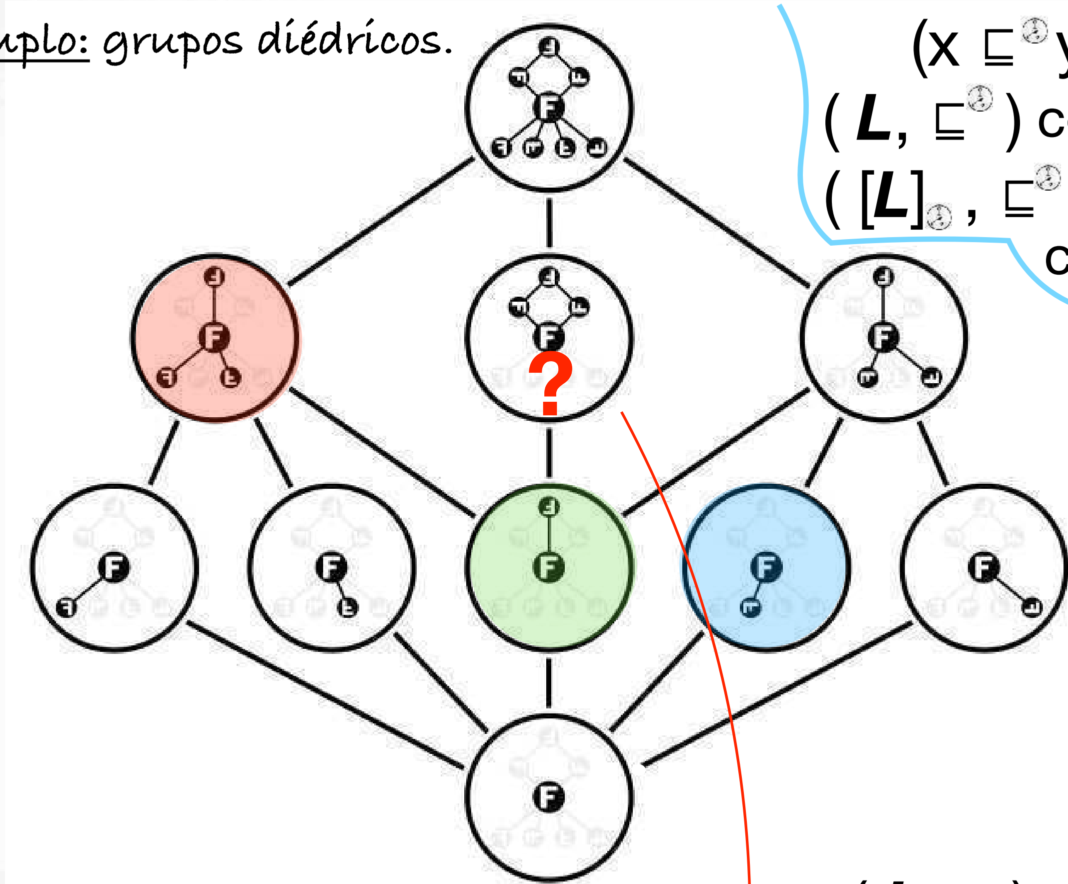


Ejemplo: grupos diédricos.

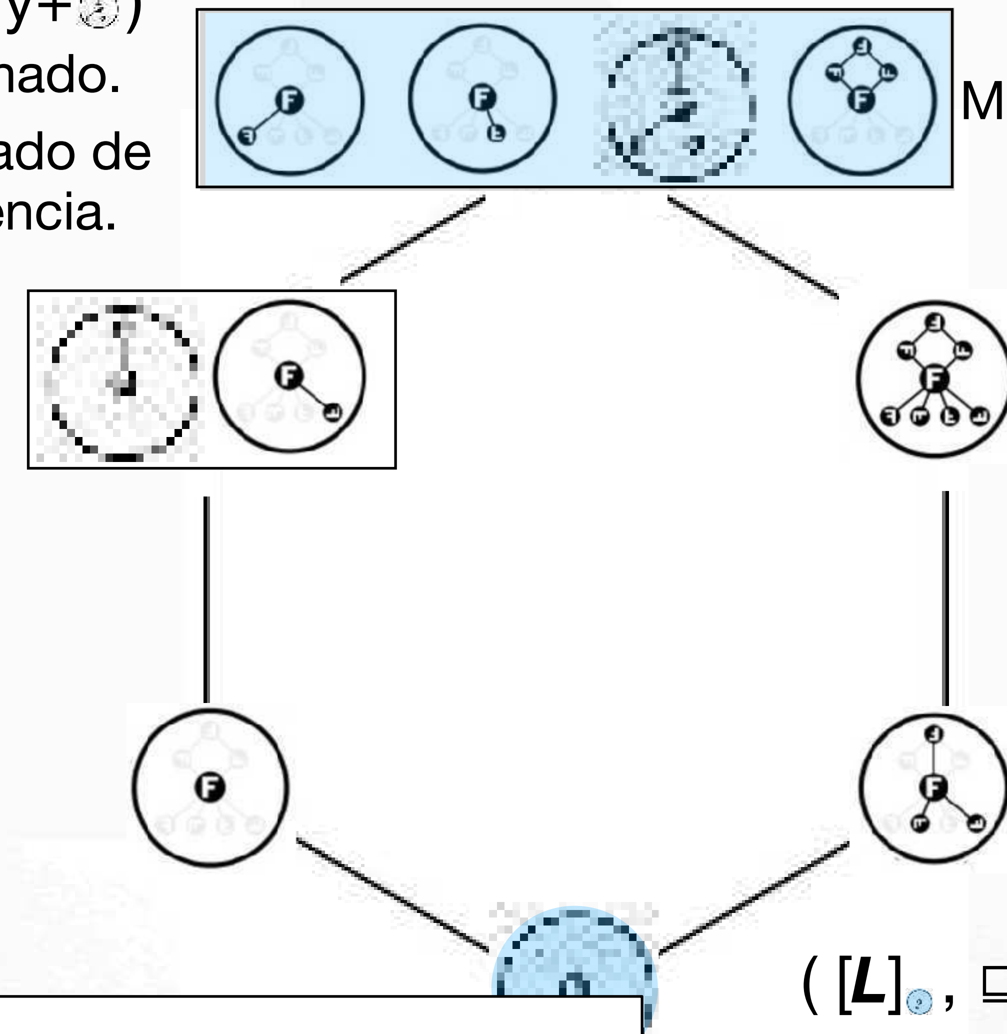
$(x \sqsubseteq y) \Leftrightarrow (y \cdot \le x \le y +)$

$(L, \sqsubseteq)$ conjunto pre-ordenado.

$([L], \sqsubseteq)$ conjunto ordenado de clases de equivalencia.

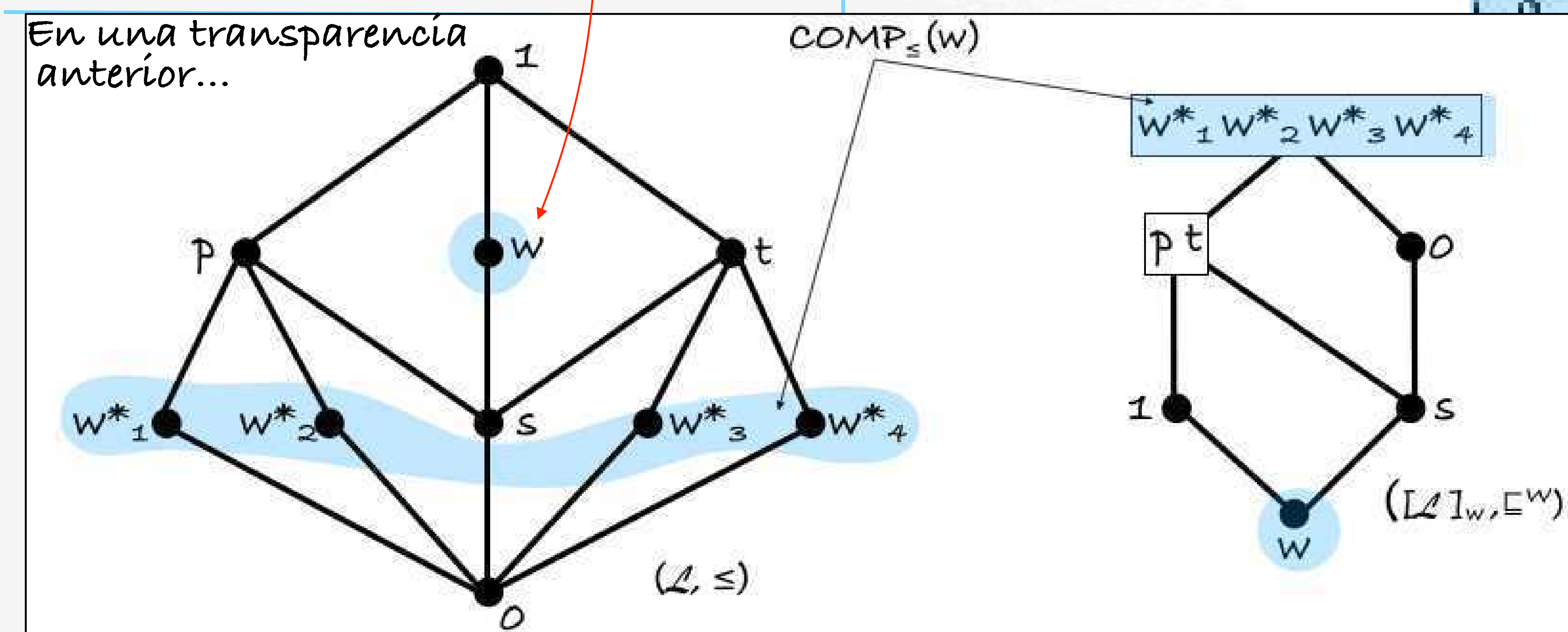


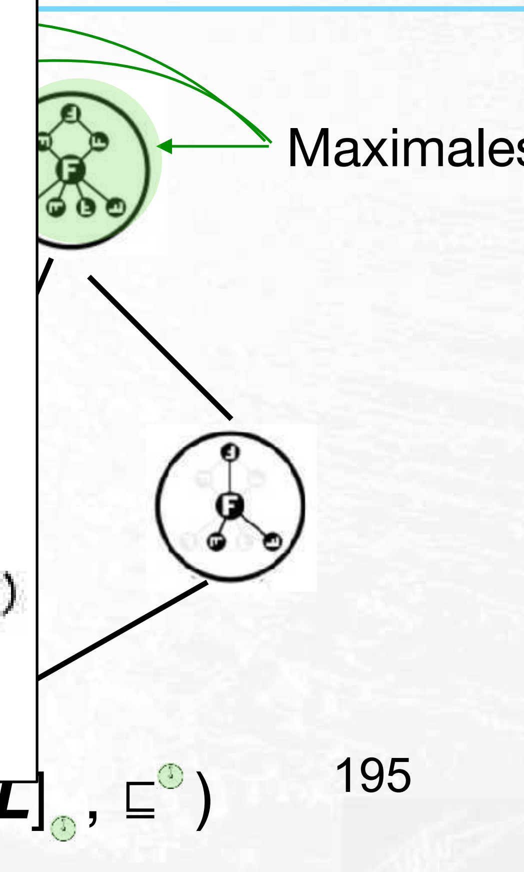
$(L, \le)$



$([L], \sqsubseteq)$

En una transparencia anterior...





$([L], \sqsubseteq)$

$([L], \sqsubseteq)$

Una interpretación de las relaciones de actividad en Retículos de Conceptos.

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} X \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

Ejemplo

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): k\mathcal{R}x \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): y\mathcal{R}n \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)		
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): kRx \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): yRn \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): k\mathcal{R}x \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): y\mathcal{R}n \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=[(ss),(dn),(wm)\}$

$B=[(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$\langle A, B\rangle$ concepto del contexto del ejemplo

<u>Def</u>. $\langle A,B\rangle \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un <u>concepto</u> del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la <u>extensión</u> del concepto $\langle A,B\rangle$ y B su <u>intensión</u> o <u>comprensión</u>.

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): kRx \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): yRn \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)		
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=[(ss),(dn),(wm)\}$

$B=[(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$<A, B>$ concepto del contexto del ejemplo

<u>Def</u>. $<A,B> \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un <u>concepto</u> del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la <u>extensión</u> del concepto $<A,B>$ y B su <u>intensión</u> o <u>comprensión</u>.

$\mathcal{L} = \{<A,B> \,/\, (A_1 = B) \,\&\, (B_2 = A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): kRx \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): yRn \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=[(ss),(dn),(wm)\}$

$B=[(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$<A, B>$ concepto del contexto del ejemplo

Def. $<A,B> \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un concepto del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la extensión del concepto $<A,B>$ y B su intensión o comprensión.

$\mathcal{L} = \{<A,B> \,/\, (A_1 = B) \,\&\, (B_2 = A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

Retículo de conceptos

Def. $<A,B>$ y $<C,D>$ conceptos:

$$(<A,B> \leqslant <C,D>) \Leftrightarrow (A \subseteq C)$$

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} X \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{\, x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): kRx \,\}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{\, y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): yRn \,\}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=[(ss),(dn),(wm)\}$

$B=[(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$\langle A, B\rangle$ concepto del contexto del ejemplo

<u>Def</u>. $\langle A,B\rangle \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un <u>concepto</u> del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la <u>extensión</u> del concepto $\langle A,B\rangle$ y B su <u>intensión</u> o <u>comprensión</u>.

$\mathcal{L} = \{\langle A,B\rangle \,/\, (A_1=B)\,\&\,(B_2=A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

<u>Retículo de conceptos</u>

<u>Def</u>. $\langle A,B\rangle$ y $\langle C,D\rangle$ conceptos:

$$(\langle A,B\rangle \leqslant \langle C,D\rangle) \Leftrightarrow (A \subseteq C) \Leftrightarrow (B \supseteq D)$$

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se
le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): k\mathcal{R}x \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se
le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): y\mathcal{R}n \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K = \{(J),(S),(U)\}$ $K_1 = [(df),(wm)\}$

$N = [(df),(wm)\}$ $N_2 = \{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A = \{(Ea),(Ma)\}$ $A_1 = [(ss),(dn),(wm)\}$

$B = [(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2 = \{(Ea),(Ma)\}$

$<A, B>$ concepto del contexto del ejemplo

<u>Def</u>. $<A,B> \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un <u>concepto</u> del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la <u>extensión</u> del concepto $<A,B>$ y B su <u>intensión</u> o <u>comprensión</u>.

$\mathcal{L} = \{<A,B> \,/\, (A_1 = B) \& (B_2 = A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

<u>Retículo de conceptos</u>

<u>Def</u>. $<A,B>$ y $<C,D>$ conceptos:

$$(<A,B> \leqslant <C,D>) \Leftrightarrow (A \subseteq C) \Leftrightarrow (B \supseteq D)$$

<u>Prop</u>. $(\mathcal{L}, \leqslant)$ es un retículo $(\mathcal{L}, \wedge, \vee, \leqslant)$:

$$<A,B> \wedge <C,D> = <A \cap C, (B \cup D)_{21}>$$

$$<A,B> \vee <C,D> = <(A \cup C)_{12}, B \cap D>.$$

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$\mathcal{G}$ referencial de objetos, $\mathcal{M}$ de atributos y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{M}$, relación de incidencia. $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$, contexto.

A cada $K \subseteq \mathcal{G}$, (subconjunto de objetos), se le asocia el subconjunto de atributos $K_1 \subseteq \mathcal{M}$, (su derivado):

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{M} \,/\, (\forall k \in K): kRx \}$$

A cada $N \subseteq \mathcal{M}$, (subconjunto de atributos), se le asocia el subconjunto de objetos $N_2 \subseteq \mathcal{G}$, (su derivado):

$$N_2 = \{ y \in \mathcal{G} \,/\, (\forall n \in N): yRn \}$$

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K = \{(J),(S),(U)\}$ $K_1 = [(df),(wm)\}$

$N = [(df),(wm)\}$ $N_2 = \{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A = \{(Ea),(Ma)\}$ $A_1 = [(ss),(dn),(wm)\}$

$B = [(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2 = \{(Ea),(Ma)\}$

$\langle A, B \rangle$ concepto del contexto del ejemplo

Def. $\langle A,B \rangle \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un concepto del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1 = B \text{ y } B_2 = A$$

A es la extensión del concepto $\langle A,B \rangle$ y B su intensión o comprensión.

$\mathcal{L} = \{\langle A,B \rangle \,/\, (A_1 = B) \,\&\, (B_2 = A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

Retículo de conceptos

Def. $\langle A,B \rangle$ y $\langle C,D \rangle$ conceptos:

$$(\langle A,B \rangle \leqslant \langle C,D \rangle) \Leftrightarrow (A \subseteq C) \Leftrightarrow (B \supseteq D)$$

Prop. $(\mathcal{L}, \leqslant)$ es un retículo $(\mathcal{L}, \wedge, \vee, \leqslant)$:

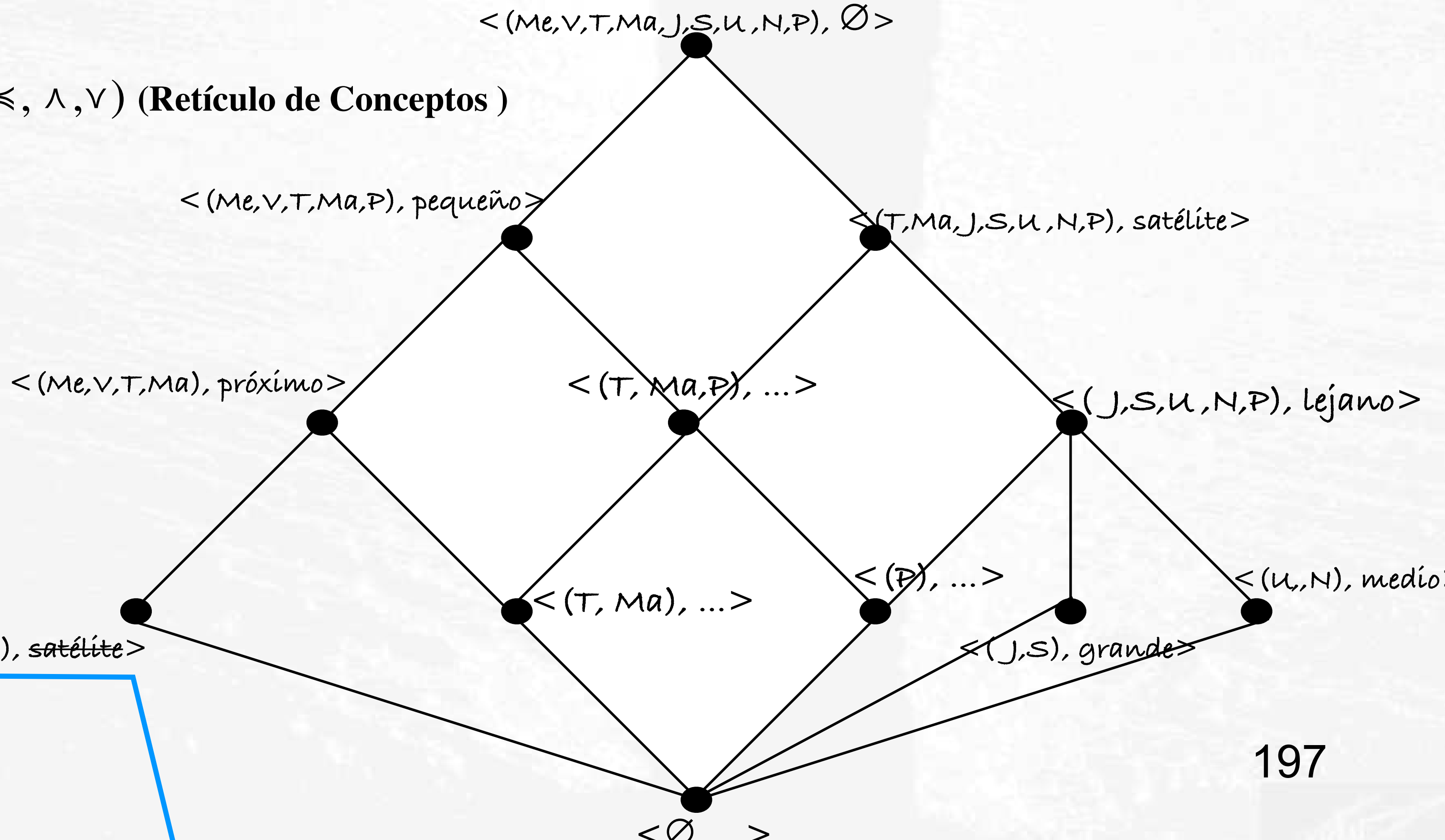
$$\langle A,B \rangle \wedge \langle C,D \rangle = \langle A \cap C, (B \cup D)_{21} \rangle$$

$$\langle A,B \rangle \vee \langle C,D \rangle = \langle (A \cup C)_{12}, B \cap D \rangle.$$

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$(\mathcal{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Aplicaciones

Una herramienta para la Inteligencia Artificial:
Análisis de datos cualitativos,
representación y descubrimiento de conocimiento,
gestión de la información,
Sistemas inteligentes,
aprendizaje asistido por computador,
...

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=[(df),(wm)\}$

$N=[(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=[(ss),(dn),(wm)\}$

$B=[(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$\langle A, B\rangle$ concepto del contexto del ejemplo

Def. $\langle A,B\rangle \in P(\mathcal{G}) \times P(\mathcal{M})$ es un concepto del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1=B \text{ y } B_2=A$$

A es la extensión del concepto $\langle A,B\rangle$ y B su intensión o comprensión.

$\mathcal{L}=\{\langle A,B\rangle \;/\; (A_1=B)\,\&\,(B_2=A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

Retículo de conceptos

Def. $\langle A,B\rangle$ y $\langle C,D\rangle$ conceptos:

$$(\langle A,B\rangle \preccurlyeq \langle C,D\rangle) \Leftrightarrow (A\subseteq C) \Leftrightarrow (B\supseteq D)$$

Prop. $(\mathcal{L}, \preccurlyeq)$ es un retículo $(\mathcal{L},\wedge,\vee,\preccurlyeq)$:

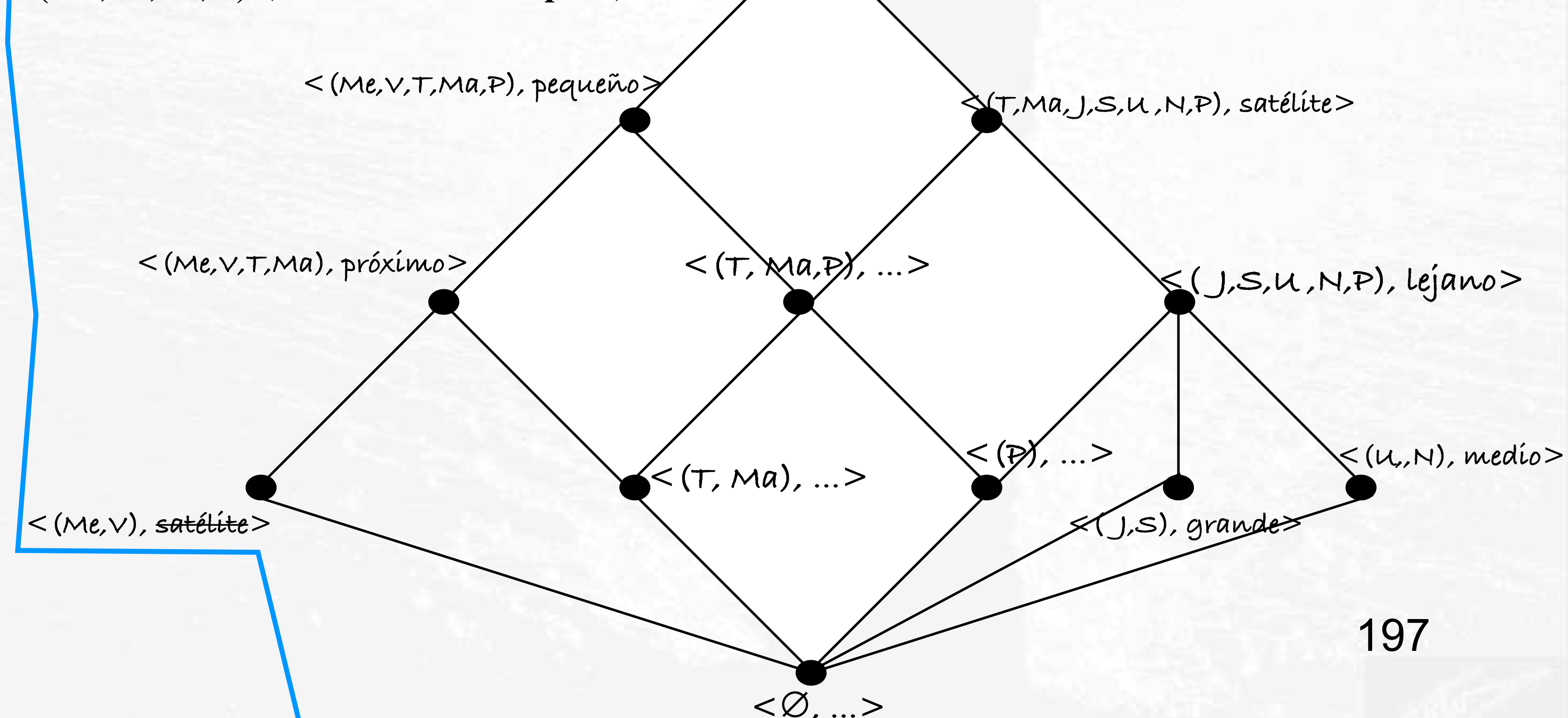
$$\langle A,B\rangle \wedge \langle C,D\rangle = \langle A\cap C,\ (B\cup D)_{21}\rangle$$

$$\langle A,B\rangle \vee \langle C,D\rangle = \langle (A\cup C)_{12}, B\cap D\rangle.$$

R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

$(\mathcal{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Aplicaciones

Una herramienta para la Inteligencia Artificial:
Análisis de datos cualitativos,
representación y descubrimiento de conocimiento,
gestión de la información,
Sistemas inteligentes,
aprendizaje asistido por computador,
...

Ejemplo

PLANETS	SIZE small (ss)	SIZE medium (sm)	SIZE big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	DISTANCE FROM SUN far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

$K=\{(J),(S),(U)\}$ $K_1=\{(df),(wm)\}$

$N=\{(df),(wm)\}$ $N_2=\{(J),(S),(U),(Ne),(P)\}$

$A=\{(Ea),(Ma)\}$ $A_1=\{(ss),(dn),(wm)\}$

$B=\{(ss),(dn),(wm)\}$ $B_2=\{(Ea),(Ma)\}$

$\langle A, B\rangle$ concepto del contexto del ejemplo

<u>Def</u>. $\langle A,B\rangle \in P(\mathcal{G})\times P(\mathcal{M})$ es un <u>concepto</u> del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$ si

$$A_1=B \text{ y } B_2=A$$

A es la <u>extensión</u> del concepto $\langle A,B\rangle$ y B su <u>intensión</u> o <u>comprensión</u>.

$\mathcal{L}=\{\langle A,B\rangle \,/\, (A_1=B)\,\&\,(B_2=A)\}$ conjunto de conceptos del contexto $(\mathcal{G},\mathcal{M},\mathcal{R})$.

<u>Retículo de conceptos</u>

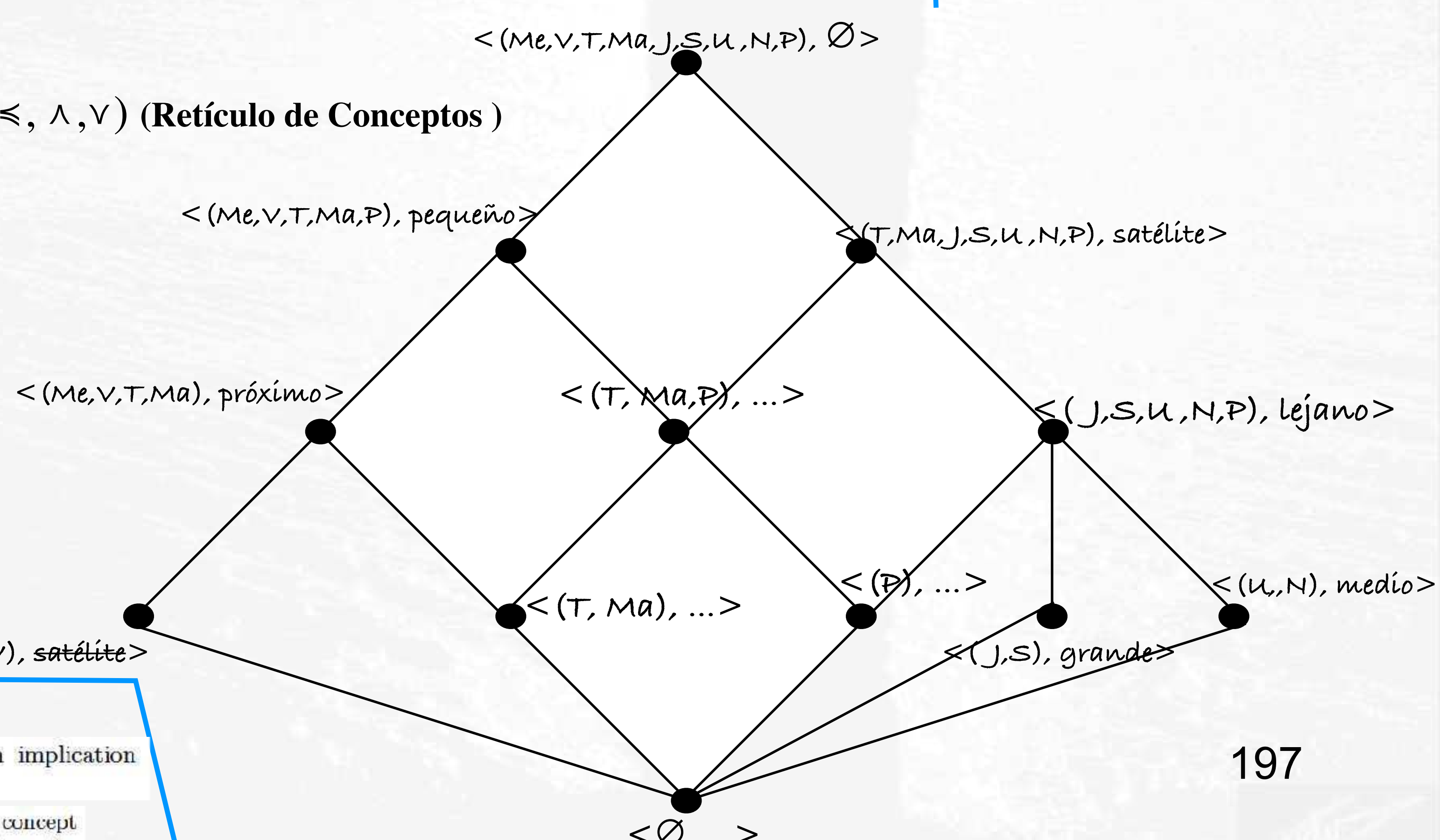
<u>Def</u>. $\langle A,B\rangle$ y $\langle C,D\rangle$ conceptos:

$$(\langle A,B\rangle \leqslant \langle C,D\rangle) \Leftrightarrow (A\subseteq C) \Leftrightarrow (B\supseteq D)$$

<u>Prop</u>. $(\mathcal{L},\leqslant)$ es un retículo $(\mathcal{L},\wedge,\vee,\leqslant)$:

$$\langle A,B\rangle \wedge \langle C,D\rangle = \langle A\cap C,\ (B\cup D)_{21}\rangle$$

$$\langle A,B\rangle \vee \langle C,D\rangle = \langle (A\cup C)_{12}, B\cap D\rangle.$$



R. Wille, Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets*, Vol. 83, ed. I. Rival, *NATO Advanced Study Institutes Series* (Springer Netherlands, 1982), pp. 445–470.

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* (Springer, Berlin, New York, 1999).

A. Burusco and R. Fuentes-González, The study of the *L*-fuzzy concept lattice, *Mathware & Soft Computing* **I**(3) (1994) 209–218.

<u>Retículo de Conceptos y Lógica Borrosa:</u>

S. Pollandt, *Fuzzy Begriffe* (Springer, 1997).

A. Burusco and R. Fuentes-González, Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **114** (2000) 431–436.

C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González, Application of the *L*-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **72**(1–2) (2014) 115–128.

RETÍCULOS DE CONCEPTOS BORROSOS

Sea un retículo completo $((L, \leq, +, 0, 1), ')$, (posiblemente con una negación fuerte '), sea $(\rightsquigarrow, *)$ un par formado por una implicación y una t-norma en L (posiblemente constituyendo un par residuado) y sean X un referencial de objetos, Y un referencial de atributos.

Sean $(L^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X)$ y $(L^Y, \leq, \cdot, +, \emptyset, Y)$ los retículos de subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots$ de X e Y en los que $\leq, \cdot, +$ son el orden y las leyes inf y sup en L^X:

$$A \leq B \Leftrightarrow A(z) \leq B(z), \qquad (A \cdot B)(z) = A(z) \cdot B(z),$$

$$(A+B)(z) = A(z) + B(z) \qquad \forall z \in X \text{ ó a } Y.$$

Sea R una relación de incidencia L-borrosa $R \in L^{X \times Y}$.

A. Burusco and R. Fuentes-González, The study of the L-fuzzy concept lattice, *Mathware & Soft Computing* **I**(3) (1994) 209–218.

S. Pollandt, *Fuzzy Begriffe* (Springer, 1997).

A. Burusco and R. Fuentes-González, Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **114** (2000) 431–436.

C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González, Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **72**(1–2) (2014) 115–128.

Bˇelohlavek, R.—Vychodil, V.
What Is a Fuzzy Concept Lattice?
In: Concept Lattices and their Applications
(CLA 2005), Olomouc, Czech Republic, 2005, pp. 34–45.

Medina, J.—Ojeda-Aciego, M.—Ruiz-Calvino, J. ˜ :
On Multi-Adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem.
In: Proceedings of the 5th International Conference Formal Concept Analysis
(ICFCA 2007), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2007, pp. 97–209.

RETÍCULOS DE CONCEPTOS BORROSOS

Sea un retículo completo $((L, \leq, +, 0, 1),')$, (posiblemente con una negación fuerte '), sea $(\rightsquigarrow, *)$ un par formado por una implicación y una t-norma en L (posiblemente constituyendo un par residuado) y sean X un referencial de objetos, Y un referencial de atributos.

Sean $(L^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X)$ y $(L^Y, \leq, \cdot, +, \emptyset, Y)$ los retículos de subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots$ de X e Y en los que $\leq, \cdot, +$ son el orden y las leyes inf y sup en L^X:

$$A \leq B \Leftrightarrow A(z) \leq B(z), \qquad (A \cdot B)(z) = A(z) \cdot B(z),$$

$$(A+B)(z) = A(z) + B(z) \qquad \forall z \in X \text{ ó a } Y.$$

Sea R una relación de incidencia L-borrosa $R \in L^{X \times Y}$.

Consideremos el L-contexto (L, X, Y, R).

A. Burusco and R. Fuentes-González, The study of the *L*-fuzzy concept lattice, *Mathware & Soft Computing* **I**(3) (1994) 209–218.

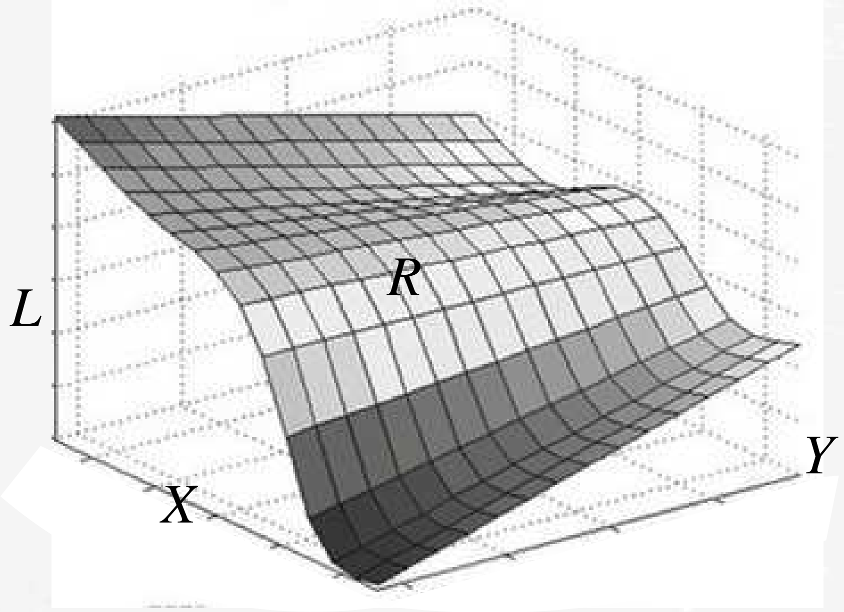
S. Pollandt, *Fuzzy Begriffe* (Springer, 1997).

A. Burusco and R. Fuentes-González, Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **114** (2000) 431–436.

C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González, Application of the *L*-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **72**(1–2) (2014) 115–128.

Bˇelohlavek, R.—Vychodil, V.
What Is a Fuzzy Concept Lattice?
In: Concept Lattices and their Applications
(CLA 2005), Olomouc, Czech Republic, 2005, pp. 34–45.

Medina, J.—Ojeda-Aciego, M.—Ruiz-Calvino, J. ˜ :
On Multi-Adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem.
In: Proceedings of the 5th International Conference Formal Concept Analysis
(ICFCA 2007), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2007, pp. 97–209.



RETÍCULOS DE CONCEPTOS BORROSOS

Sea un retículo completo $((L, \leq, +, 0, 1), ')$, (posiblemente con una negación fuerte '), sea $(\rightsquigarrow, *)$ un par formado por una implicación y una t-norma en L (posiblemente constituyendo un par residuado) y sean X un referencial de objetos, Y un referencial de atributos.

Sean $(L^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X)$ y $(L^Y, \leq, \cdot, +, \emptyset, Y)$ los retículos de subconjuntos L-borrosos A,B,... de X e Y en los que $\leq, \cdot, +$ son el orden y las leyes inf y sup en L^X:

$A \leq B \Leftrightarrow A(z) \leq B(z)$, $(A \cdot B)(z) = A(z) \cdot B(z)$,
$(A+B)(z) = A(z) + B(z)$ $\forall z \in X$ ó a Y.

A. Burusco and R. Fuentes-González, The study of the L-fuzzy concept lattice, *Mathware & Soft Computing* **I**(3) (1994) 209–218.

S. Pollandt, *Fuzzy Begriffe* (Springer, 1997).

A. Burusco and R. Fuentes-González, Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **114** (2000) 431–436.

C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González, Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **72**(1–2) (2014) 115–128.

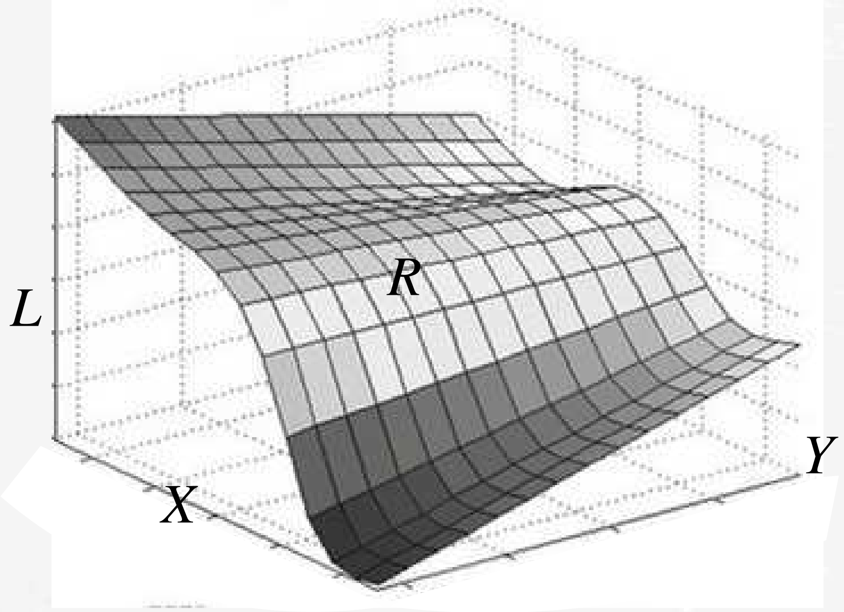
B˘elohlavek, R.—Vychodil, V.
What Is a Fuzzy Concept Lattice?
In: Concept Lattices and their Applications
(CLA 2005), Olomouc, Czech Republic, 2005, pp. 34–45.

Medina, J.—Ojeda-Aciego, M.—Ruiz-Calvino, J. ˜ :
On Multi-Adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem.
In: Proceedings of the 5th International Conference Formal Concept Analysis
(ICFCA 2007), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2007, pp. 97–209.

Sea R una relación de incidencia L-borrosa $R \in L^{X \times Y}$.

Consideremos el L-contexto (L, X, Y, R).

Si $A, B \in L^X$, si $(A \triangleleft R)(y) = inf\{A(x) \rightsquigarrow R(x, y) / x \in X\}$ $\forall y \in Y$ y si $A_1 = A \triangleleft R$ y $B_2 = B \triangleleft R^{op}$, entonces el par $< A, B > \in L^X$xL^X es un <u>concepto L-borroso</u> del L-contexto, si y solo si: $(B = A_1)$ & $(A = B_2)$



RETÍCULOS DE CONCEPTOS BORROSOS

Sea un retículo completo $((L, \leq, +, 0, 1), ')$, (posiblemente con una negación fuerte '), sea $(\rightsquigarrow, *)$ un par formado por una implicación y una t-norma en L (posiblemente constituyendo un par residuado) y sean X un referencial de objetos, Y un referencial de atributos.

Sean $(L^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X)$ y $(L^Y, \leq, \cdot, +, \emptyset, Y)$ los retículos de subconjuntos L-borrosos $A, B, \ldots$ de X e Y en los que $\leq, \cdot, +$ son el orden y las leyes inf y sup en L^X:

$A \leq B \Leftrightarrow A(z) \leq B(z), \quad (A \cdot B)(z) = A(z) \cdot B(z),$

$(A+B)(z) = A(z) + B(z) \quad \forall z \in X$ ó a Y.

A. Burusco and R. Fuentes-González, The study of the L-fuzzy concept lattice, *Mathware & Soft Computing* **I**(3) (1994) 209–218.

S. Pollandt, *Fuzzy Begriffe* (Springer, 1997).

A. Burusco and R. Fuentes-González, Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **114** (2000) 431–436.

C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González, Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **72**(1–2) (2014) 115–128.

B˘elohlavek, R.—Vychodil, V.
What Is a Fuzzy Concept Lattice?
In: Concept Lattices and their Applications
(CLA 2005), Olomouc, Czech Republic, 2005, pp. 34–45.

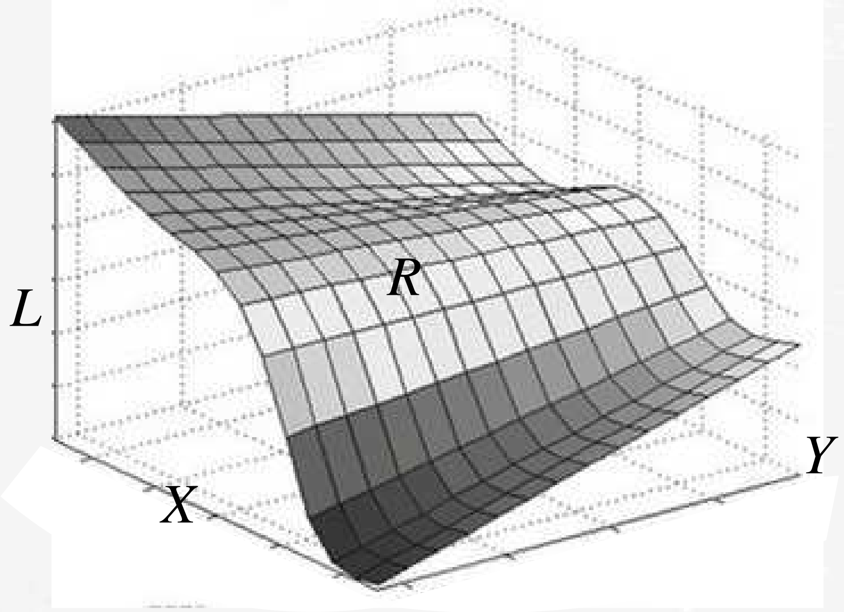
Medina, J.—Ojeda-Aciego, M.—Ruiz-Calvino, J.˜ :
On Multi-Adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem.
In: Proceedings of the 5th International Conference Formal Concept Analysis
(ICFCA 2007), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2007, pp. 97–209.

Sea R una relación de incidencia L-borrosa $R \in L^{X \times Y}$.

Consideremos el L-contexto (L, X, Y, R).

Si $A, B \in L^X$, si $(A \lhd R)(y) = inf\,\{A(x) \rightsquigarrow R(x, y) \,/ x \in X\}$ $\forall y \in Y$ y si $A_1 = A \lhd R$ y $B_2 = B \lhd R^{op}$, entonces el par $< A, B > \in L^X x L^X$ es un <u>concepto L-borroso</u> del L-contexto, si y solo si: $(B = A_1)$ & $(A = B_2)$

El subconjunto $\mathscr{L}$ de $L^X x L^X$ cuyos elementos son los conceptos L-borrosos $< A, B >, < C, D >, \ldots$, es un retículo $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ en el que el orden $\preccurlyeq$ y los operadores inf ($\wedge$) y sup ($\vee$) son tales que:



$$(< A, B > \preccurlyeq < C, D >) \Leftrightarrow (A \leq C) \Leftrightarrow (D \leq B),$$

$$< A, B > \wedge < C, D > = < A \cdot C\ ,\ (B + D)_{21} > ,$$

$$< A, B > \vee < C, D > = < (A + C)_{12}\ ,\ B \cdot D > .$$

EJEMPLO. RETÍCULO DE CONCEPTOS BORROSOS

L cadena con par residuado

(0, 0.1, …, 0.9, 1}, ≤, $\top_2$**,** $\rightsquigarrow_L$**)**

$$\alpha \top_2 \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$$

$$\alpha \rightsquigarrow_L \beta = \min(1, (1 - \alpha + \beta))$$

EJEMPLO. RETÍCULO DE CONCEPTOS BORROSOS

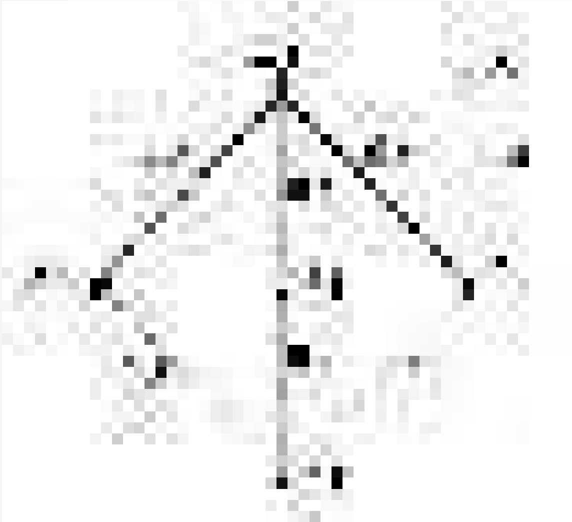
L cadena con par residuado
$(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, \leq, \top_2, \rightsquigarrow_L)$

$$\alpha \top_2 \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$$
$$\alpha \rightsquigarrow_L \beta = \min(1, (1 - \alpha + \beta))$$

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$$

Referencial con orden borroso (X, R)

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.8	0.2	0.6	0.6	0.4
x_2	0	1	0	0	0.6	0
x_3	0	0	1	0	0.5	0
x_4	0	0	0	1	0.6	0.4
x_5	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1



EJEMPLO. RETÍCULO DE CONCEPTOS BORROSOS

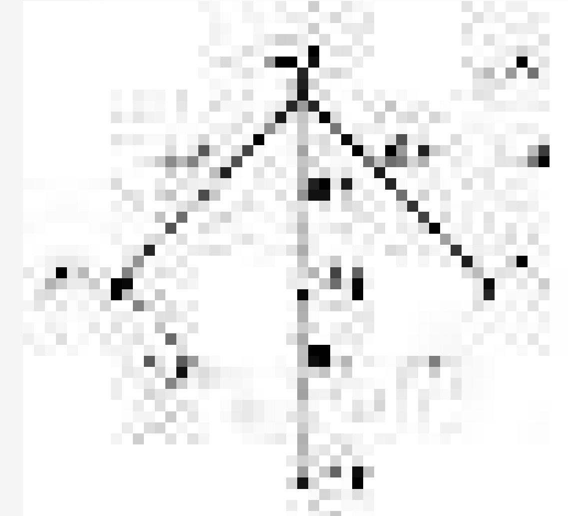
L cadena con par residuado
$(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, \leq, \top_2, \rightsquigarrow_L)$

$\alpha \top_2 \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$
$\alpha \rightsquigarrow_L \beta = \min(1, (1 - \alpha + \beta))$

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$

Referencial con orden borroso (X, R)

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.8	0.2	0.6	0.6	0.4
x_2	0	1	0	0	0.6	0
x_3	0	0	1	0	0.5	0
x_4	0	0	0	1	0.6	0.4
x_5	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1



L-contexto $(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, X, Y, R)$ con $Y = X$ con la negación $x' = 1 - x$.

$((L^X, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ retículo de L-borrosos de X junto con la negación fuerte extensión de la anterior

EJEMPLO. RETÍCULO DE CONCEPTOS BORROSOS

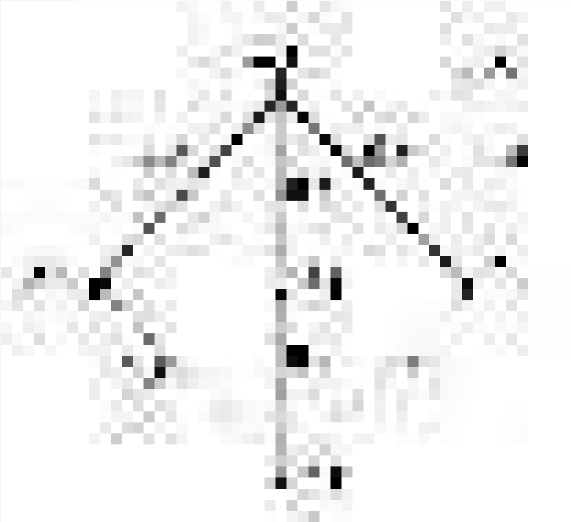
L cadena con par residuado
$(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, \leq, \top_2, \rightsquigarrow_L)$

$\alpha \top_2 \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$
$\alpha \rightsquigarrow_L \beta = \min(1, (1 - \alpha + \beta))$

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$

Referencial con orden borroso (X, R)

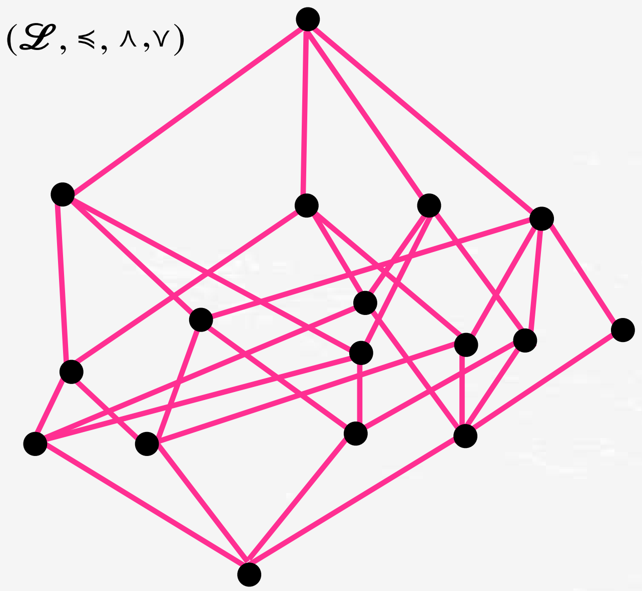
R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.8	0.2	0.6	0.6	0.4
x_2	0	1	0	0	0.6	0
x_3	0	0	1	0	0.5	0
x_4	0	0	0	1	0.6	0.4
x_5	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1



L-contexto $(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, X, Y, R)$ con $Y = X$ con la negación $x' = 1 - x$.

$((L^X, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ retículo de L-borrosos de X junto con la negación fuerte extensión de la anterior

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ el retículo de conceptos L-borrosos asociado al L-contexto.



EJEMPLO. RETÍCULO DE CONCEPTOS BORROSOS

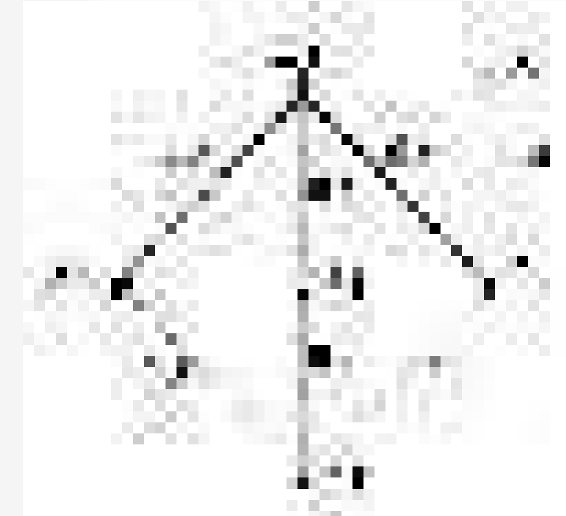
L cadena con par residuado
$(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, \leq, \top_2, \rightsquigarrow_L)$

$\alpha \top_2 \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$
$\alpha \rightsquigarrow_L \beta = \min(1, (1 - \alpha + \beta))$

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$

Referencial con orden borroso (X, R)

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.8	0.2	0.6	0.6	0.4
x_2	0	1	0	0	0.6	0
x_3	0	0	1	0	0.5	0
x_4	0	0	0	1	0.6	0.4
x_5	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1

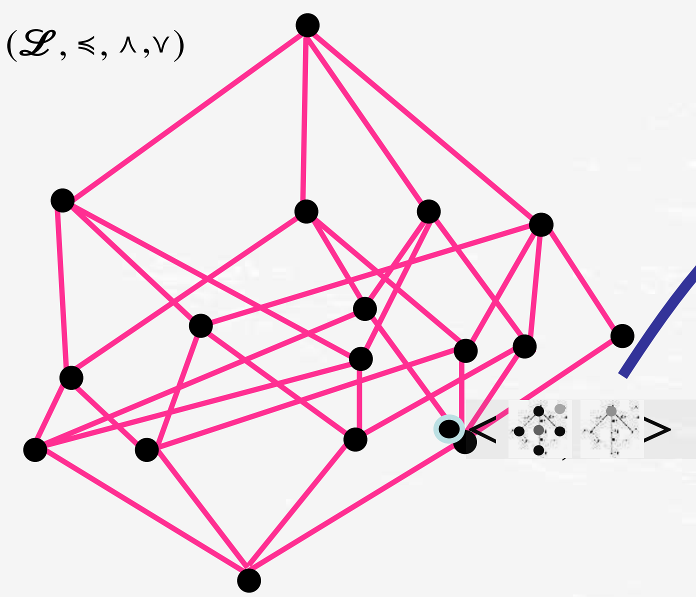


L-contexto $(\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}, X, Y, R)$ con $Y = X$ con la negación $x' = 1 - x$.

$((L^X, \cdot, +, \varnothing, X), ')$ retículo de L-borrosos de X junto con la negación fuerte extensión de la anterior

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ el retículo de conceptos L-borrosos asociado al L-contexto.

Por ejemplo:



Concepto L-borroso

$< A_1, B_1 > = < 1/x_1 + 1/x_2 + 0.9/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5 + 0.4/x_6 \; , \; 0.6/x_5 >$

es un concepto L-borroso del retículo $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$.

RELACIONES DE ACTIVIDAD $\sqsubseteq^{<W,V>}$ EN RETÍCULOS $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ DE CONCEPTOS NÍTIDOS O BORROSOS

Relación de actividad en $\mathscr{L}$:

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow [<C,D>) \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>]$$

Es decir:

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cap W) \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos ordinarios o nítidos)	$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cdot W) \leq A \leq (C + W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos borrosos)

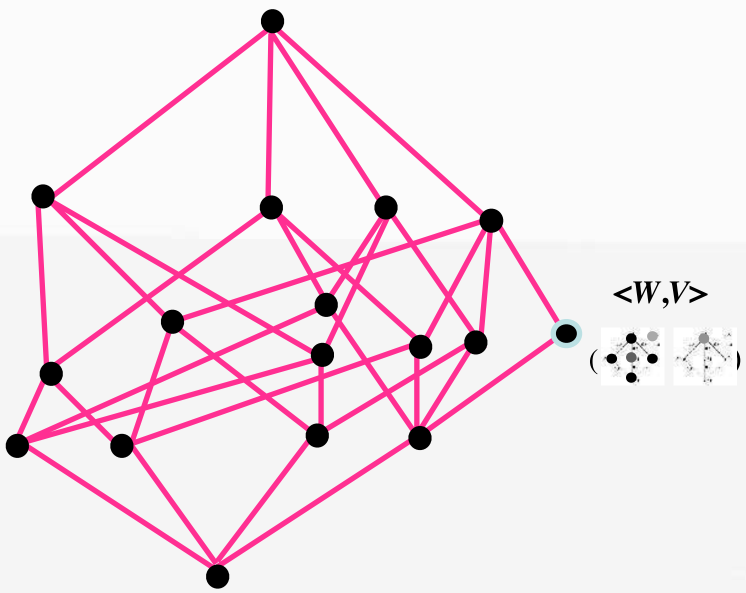
RELACIONES DE ACTIVIDAD $\sqsubseteq^{<W,V>}$ EN RETÍCULOS $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ DE CONCEPTOS NÍTIDOS O BORROSOS

Relación de actividad en $\mathscr{L}$:

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow [<C,D>) \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>]$$

Es decir:

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cap W) \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos ordinarios o nítidos)	$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cdot W) \leq A \leq (C + W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos borrosos)



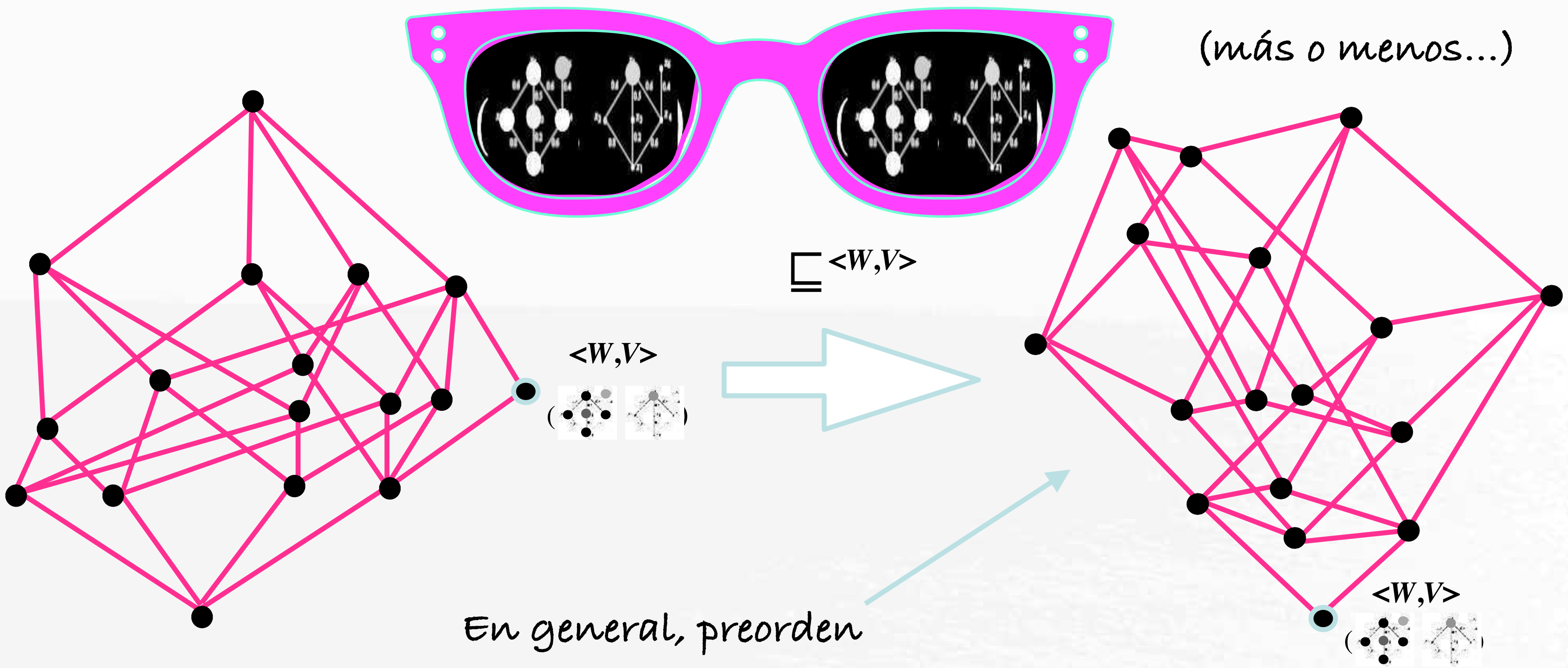
RELACIONES DE ACTIVIDAD $\sqsubseteq^{<W,V>}$ EN RETÍCULOS $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ DE CONCEPTOS NÍTIDOS O BORROSOS

Relación de actividad en $\mathscr{L}$:

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow [<C,D>) \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>]$$

Es decir:

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cap W) \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos ordinarios o nítidos)	$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cdot W) \leq A \leq (C + W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos borrosos)



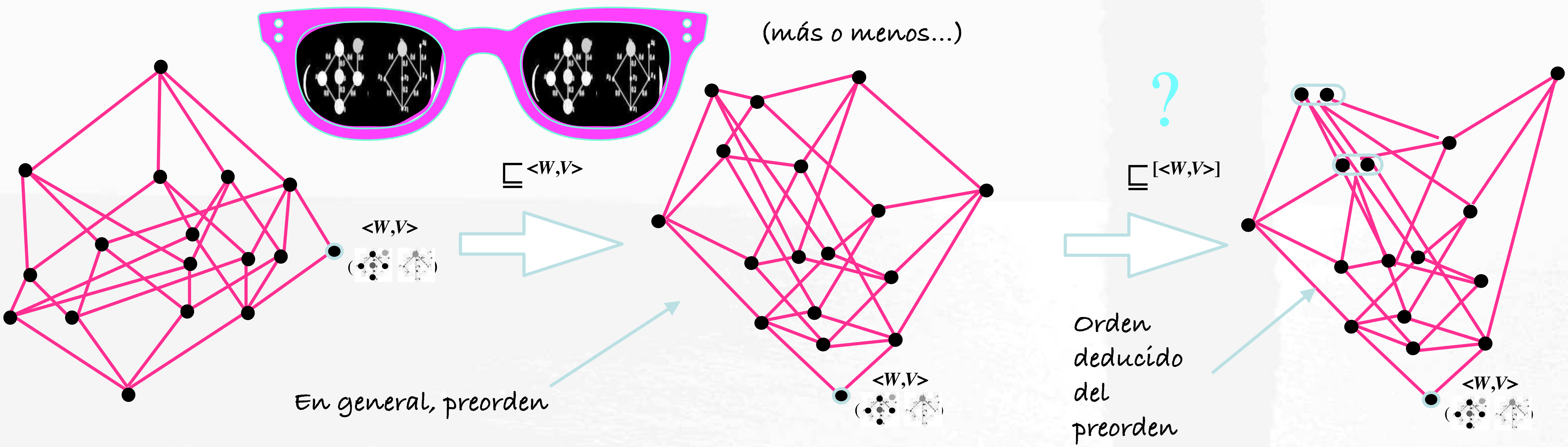
RELACIONES DE ACTIVIDAD $\sqsubseteq^{<W,V>}$ EN RETÍCULOS $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ DE CONCEPTOS NÍTIDOS O BORROSOS

Relación de actividad en $\mathscr{L}$:

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow [<C,D>) \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>]$$

Es decir:

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cap W) \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos ordinarios o nítidos)	$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cdot W) \leq A \leq (C + W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos borrosos)



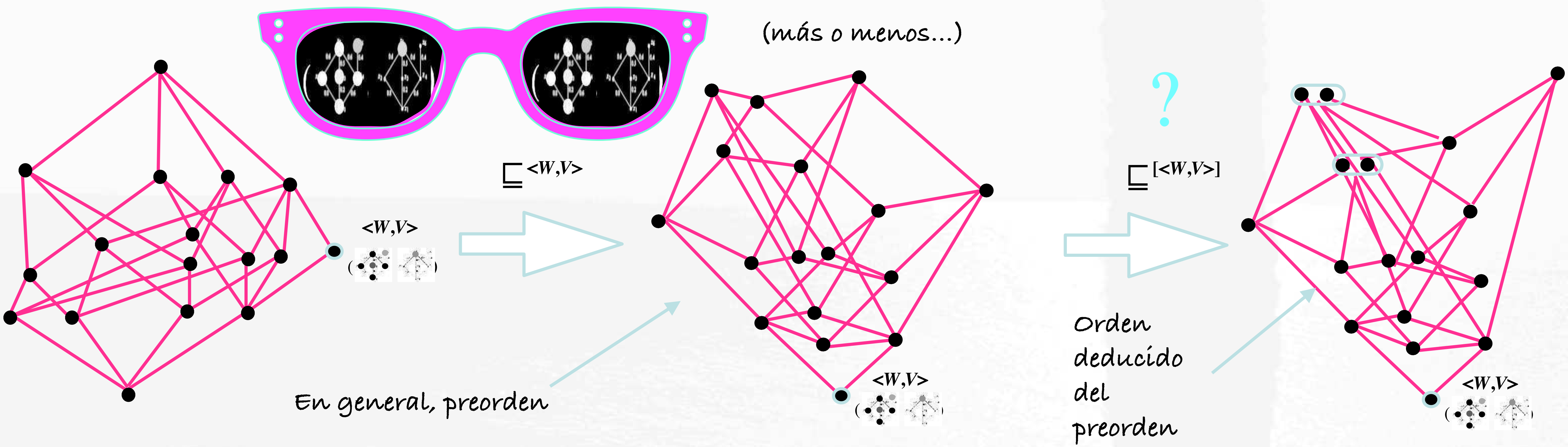
RELACIONES DE ACTIVIDAD $\sqsubseteq^{<W,V>}$ EN RETÍCULOS $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ DE CONCEPTOS NÍTIDOS O BORROSOS

Relación de actividad en $\mathscr{L}$:

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow [<C,D>) \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>]$$

Es decir:

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cap W) \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos ordinarios o nítidos)	$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow (C \cdot W) \leq A \leq (C + W)_{12}$ (Para contextos con subconjuntos borrosos)



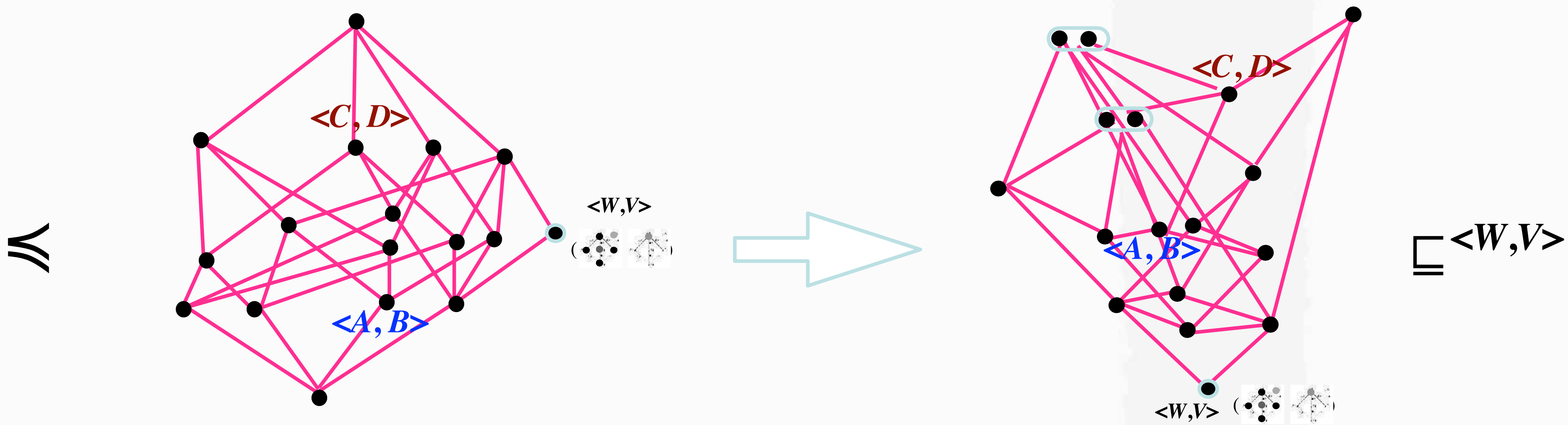
En general, $\sqsubseteq^{<W,V>}$ es una relación de preorden. Si el retículo de conceptos $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ es distributivo, entonces $(\mathscr{L}, \sqsubseteq^{<W,V>})$ es un conjunto ordenado, concretamente un inf-semirretículo con elemento mínimo **<W,V>** y con la ley $\sqcap^{<W,V>}$ definida por:

$$<A,B> \sqcap^{<W,V>} <C,D> = (<A,B> \wedge <C,D>) \vee [<W,V> \wedge (<A,B> \vee <C,D>)] = \left< [(A \cap C) \cup (W \cap (A \cup C)_{12})]_{12}, (B \cup D)_{21} \cap (V \cup (B \cap D)_{21}) \right> \text{ (nítidos)}$$

$$<A,B> \sqcap^{<W,V>} <C,D> = (<A,B> \wedge <C,D>) \vee [<W,V> \wedge (<A,B> \vee <C,D>)] = \left< [A \cdot C + W \cdot (A + C)_{12}]_{12}, (B + D)_{21} \cdot (V + (B \cdot D)_{21}) \right> \text{ (borrosos)}$$

Si además, **<W,V>** es complementado en $(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ con complemento $<W,V>^*$, el inf-semirretículo $(\mathscr{L}, \sqsubseteq^{<W,V>}, \sqcap^{<W,V>})$ es retículo $(\mathscr{L}, \sqsubseteq^{<W,V>}, \sqcap^{<W,V>}, \sqcup^{<W,V>})$. En este caso, el supremo $\sqcup^{<W,V>}$ viene dado por

$$<A,B> \sqcup^{<W,V>} <C,D> = (<A,B> \wedge <C,D>) \vee [<W,V>^* \wedge (<A,B> \vee <C,D>)] \text{ (nítidos o borrosos)}$$



Interpretación de $<A, B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C, D>$:

"$<A, B>$ es un concepto intermedio entre los conceptos $<W,V>$ y $<C, D>$".

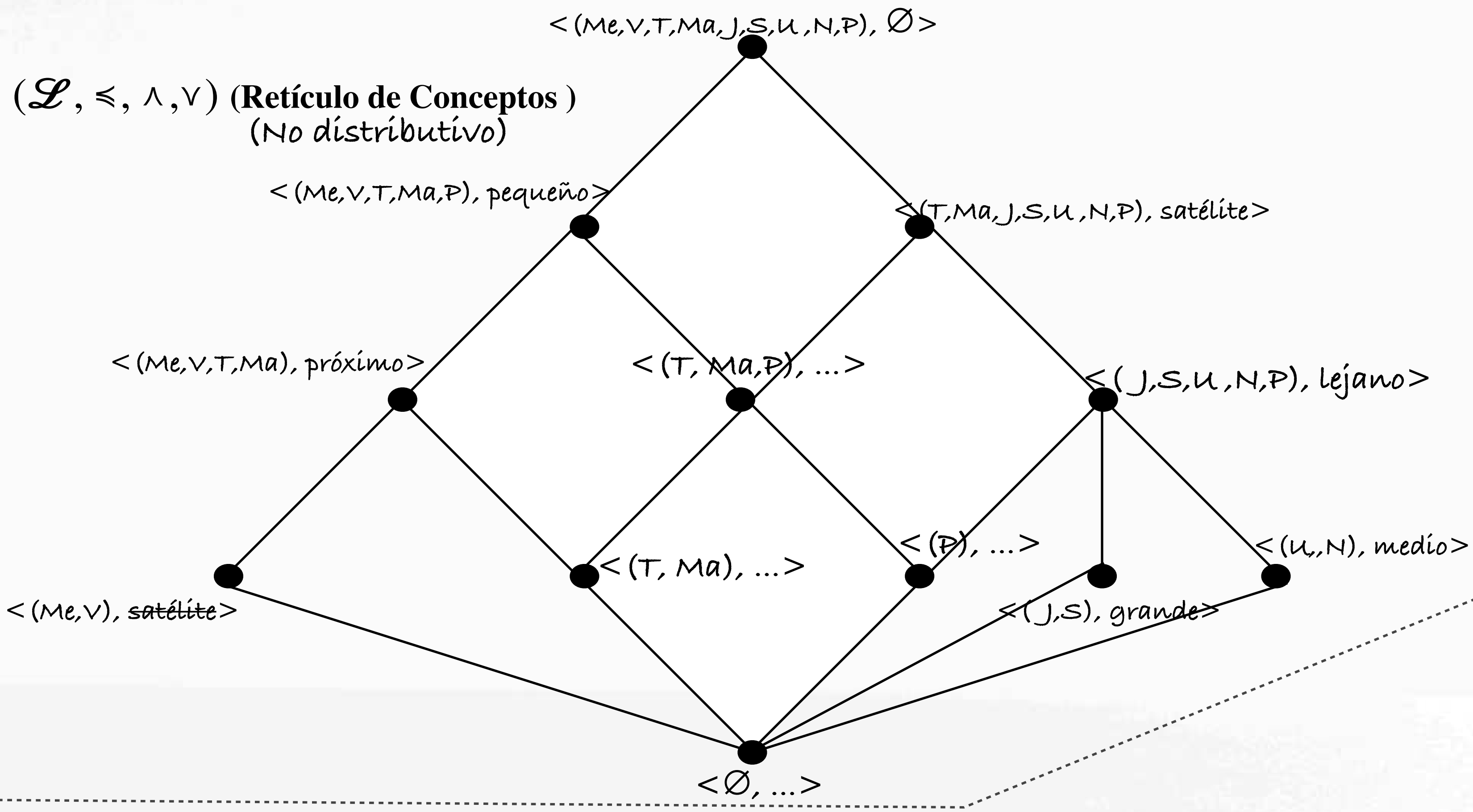
"El concepto $<A, B>$ difiere menos de $<W,V>$ que el concepto $<C, D>$".

Ejemplos de relaciones de actividad en Retículos de Conceptos

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas
R. Wille (1982)

$(\mathscr{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**
(No distributivo)

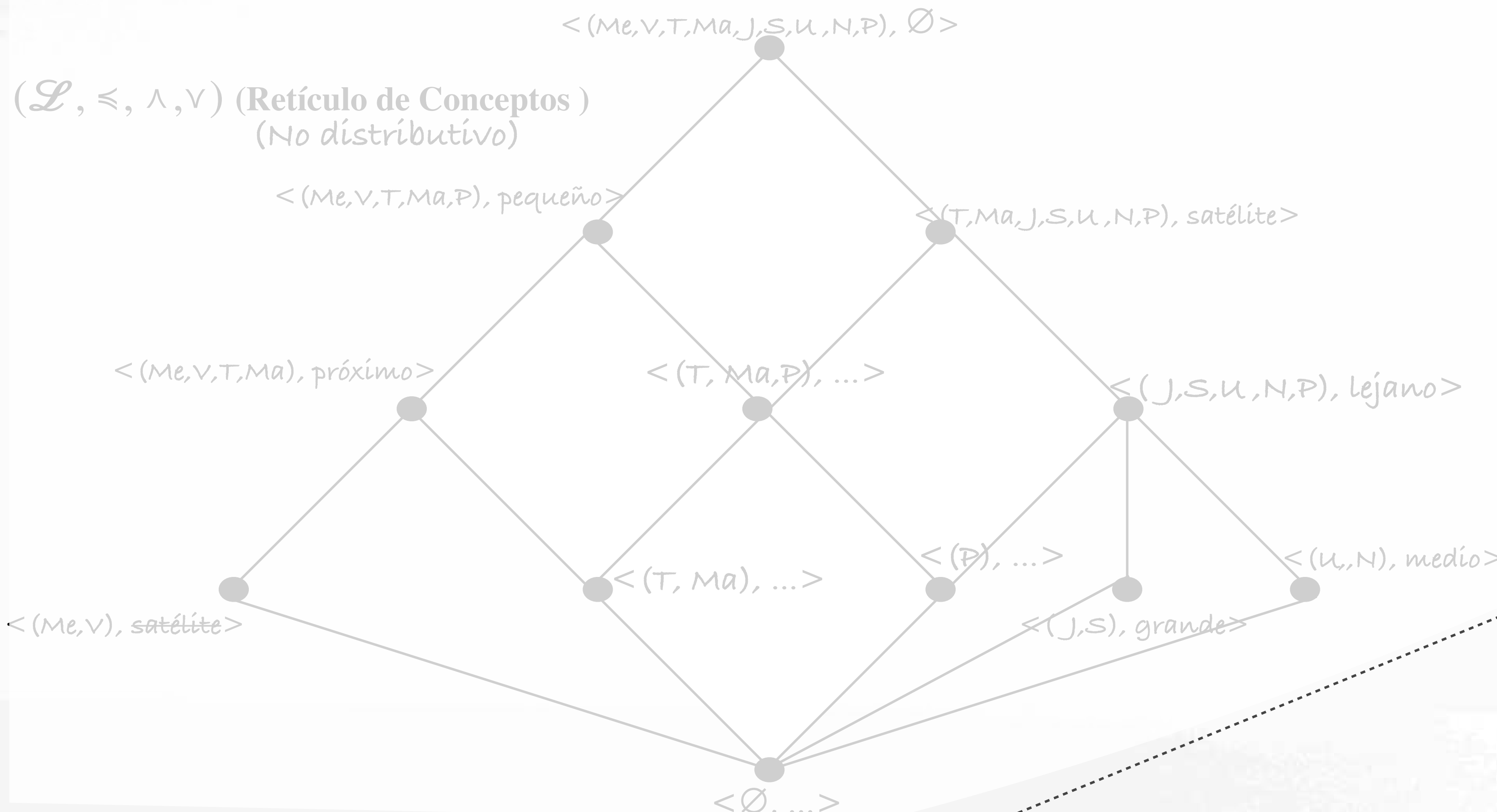


PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas
R. Wille (1982)

(válido hasta 2006)
(Fecha en la que Plutón dejó de ser planeta)

$(\mathscr{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**
(No distributivo)



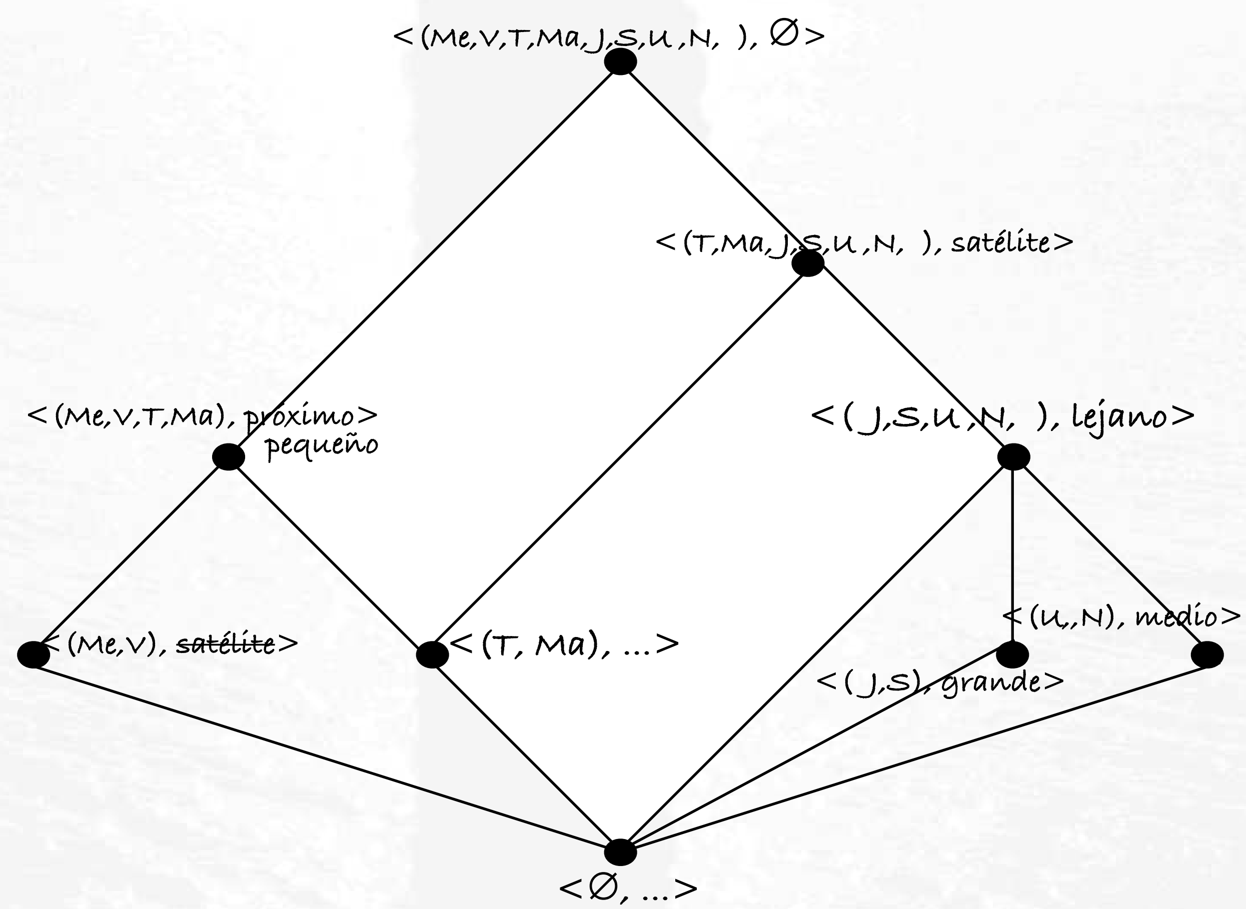
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)		
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
~~Pluto (P)~~	~~x~~				~~x~~	~~x~~	

Contexto de los Planetas
R. Wille (1982)

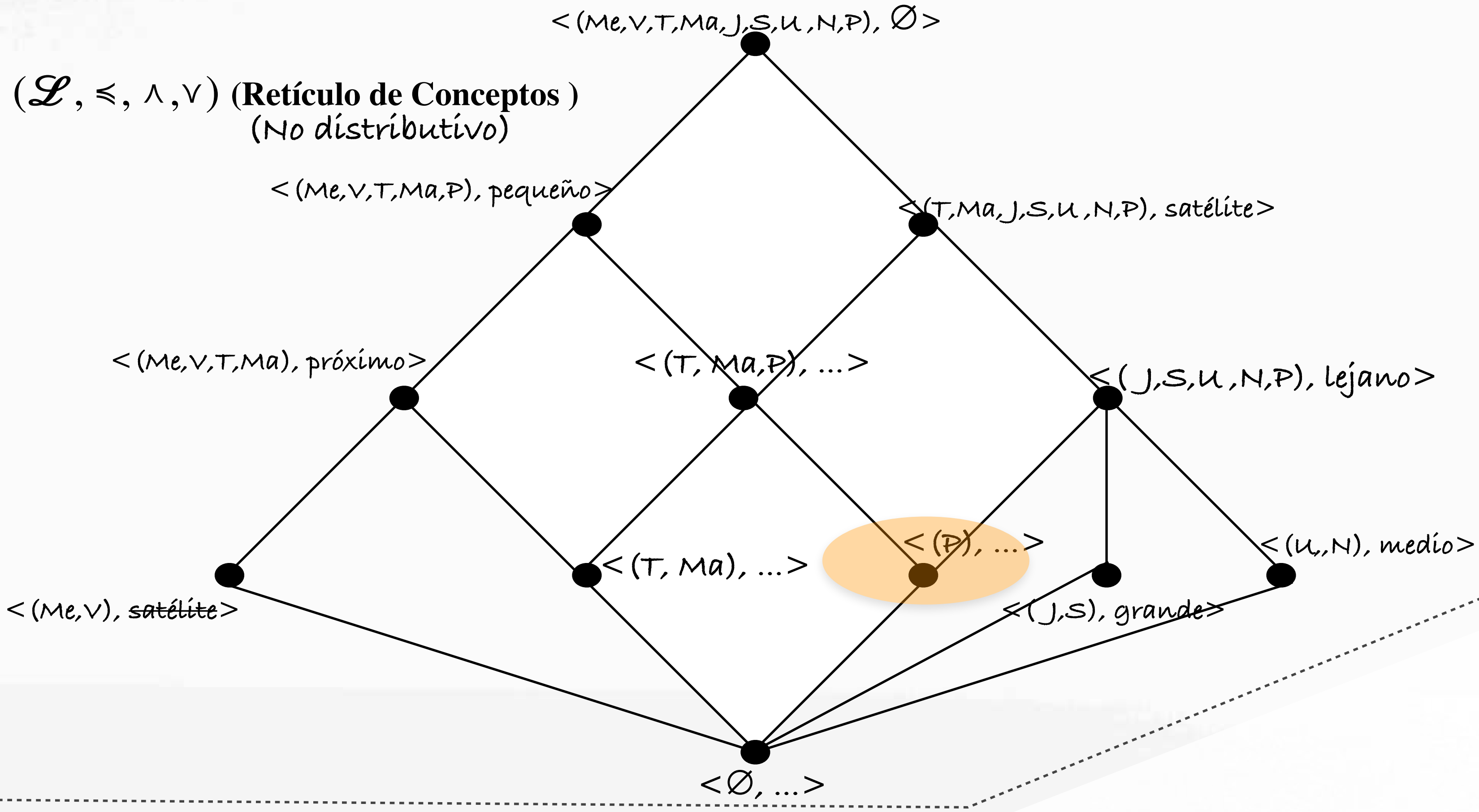
(válido hasta 2006)
(Fecha en la que Plutón dejó de ser planeta)

En la actualidad:

$(\mathscr{L}_{(P)}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$



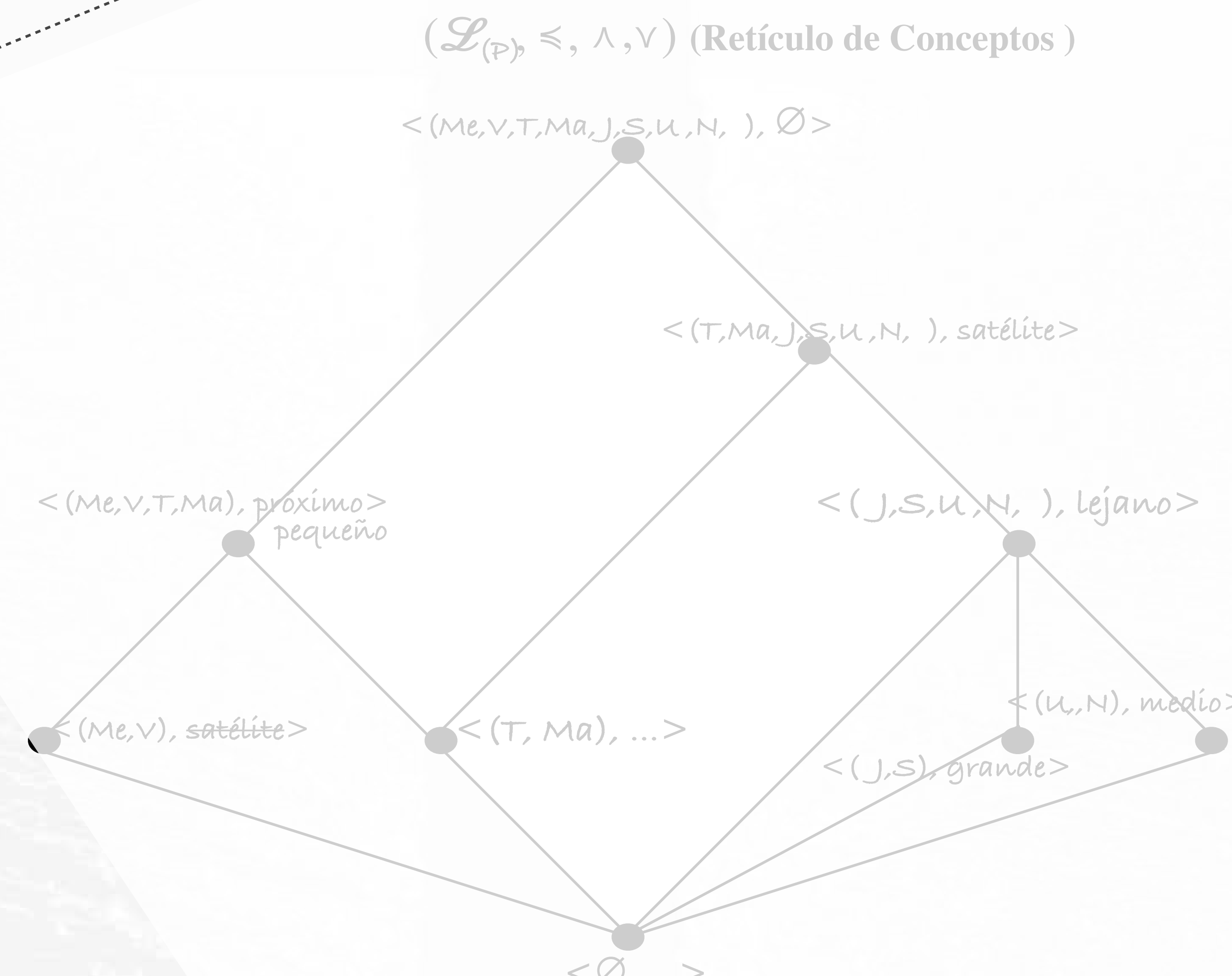
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas (válido hasta 2006)

Perspectiva: Objeto Plutón

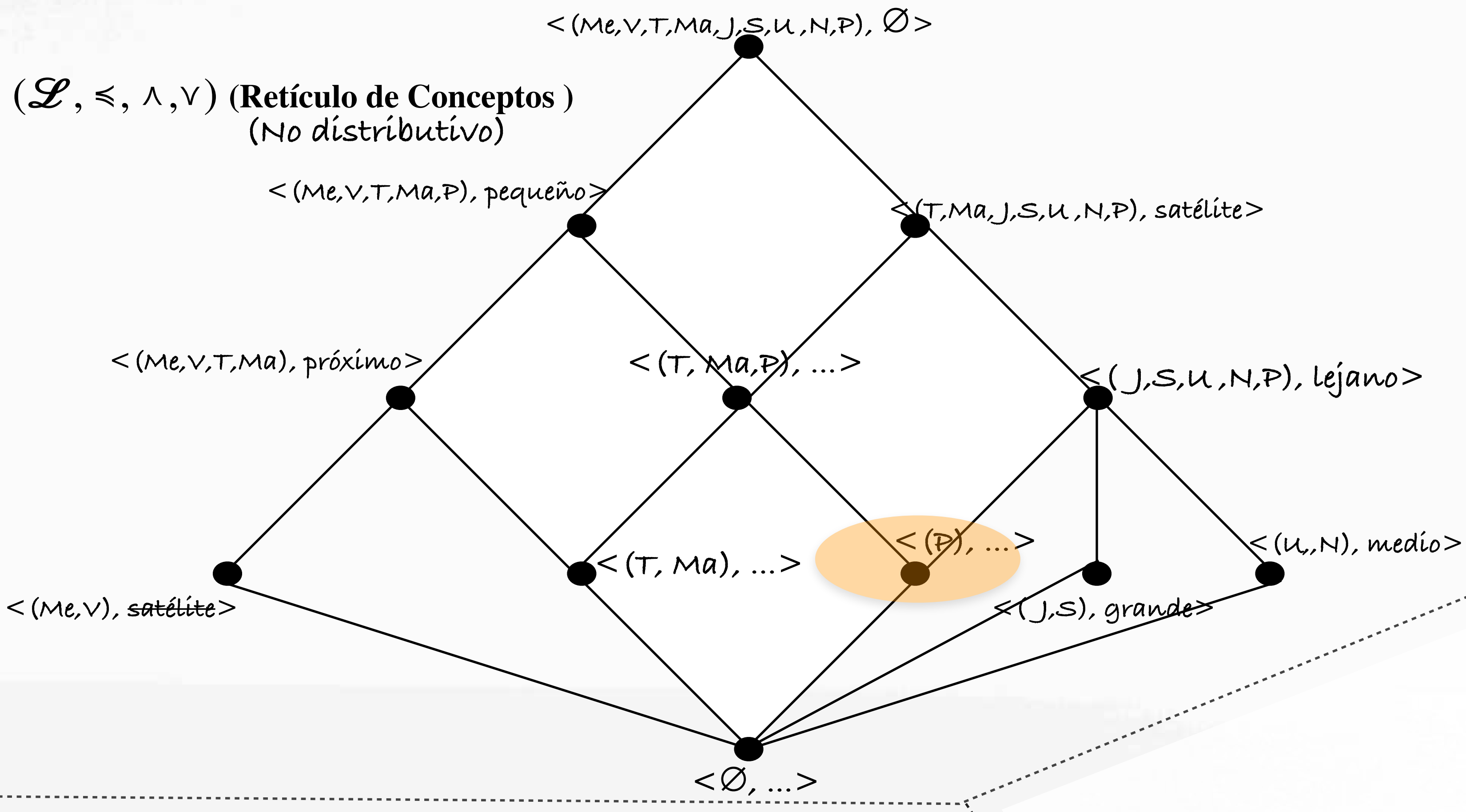
...cha en la que Plutón ... de ser planeta)

En la actualidad:



Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**
(No distributivo)



PLANETS	SIZE small (ss)	SIZE medium (sm)	SIZE big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	DISTANCE FROM SUN far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

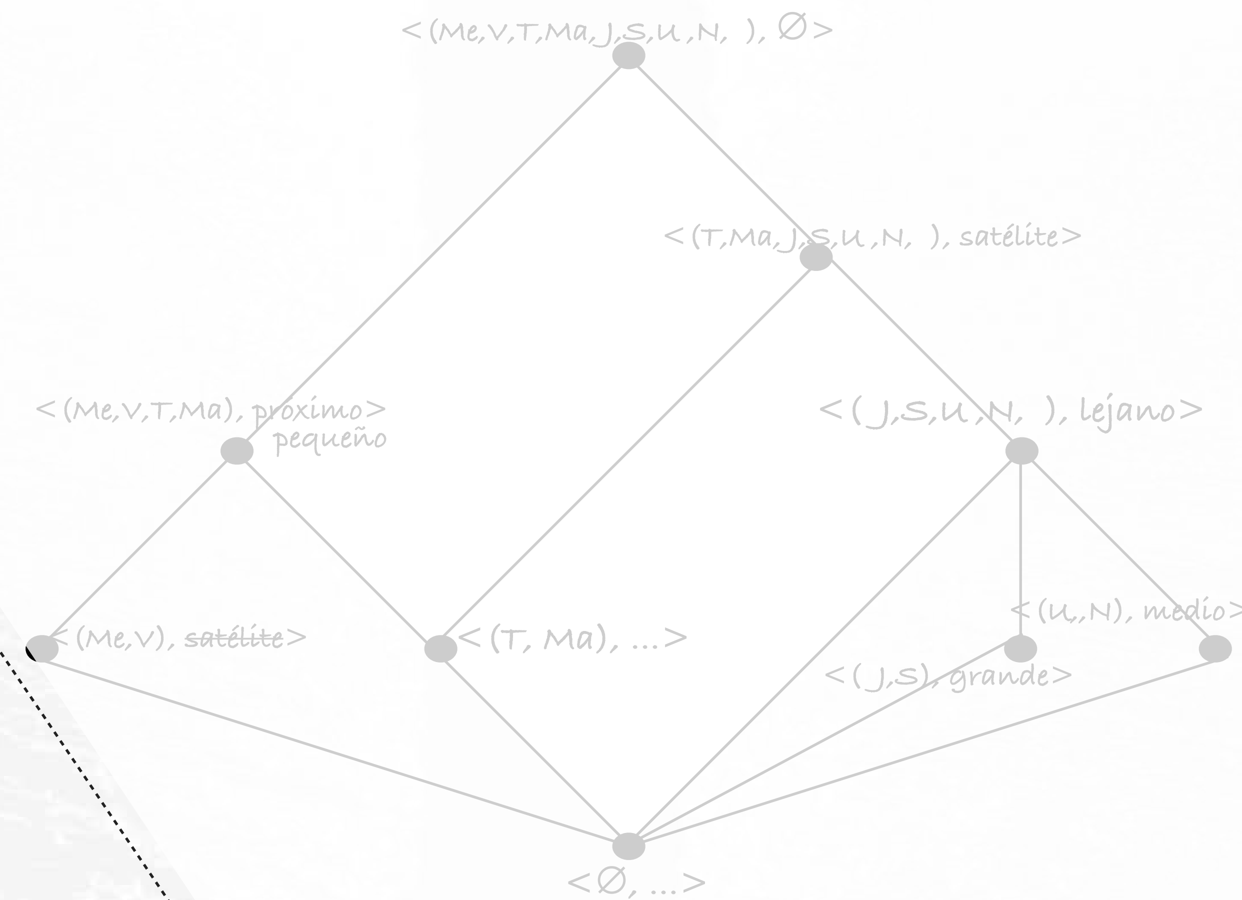
Contexto de los Planetas (válido hasta 2006)

Perspectiva: Objeto Plutón

...cha en la que Plutón
... de ser planeta)

En la actualidad:

$(\mathscr{L}_{(P)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

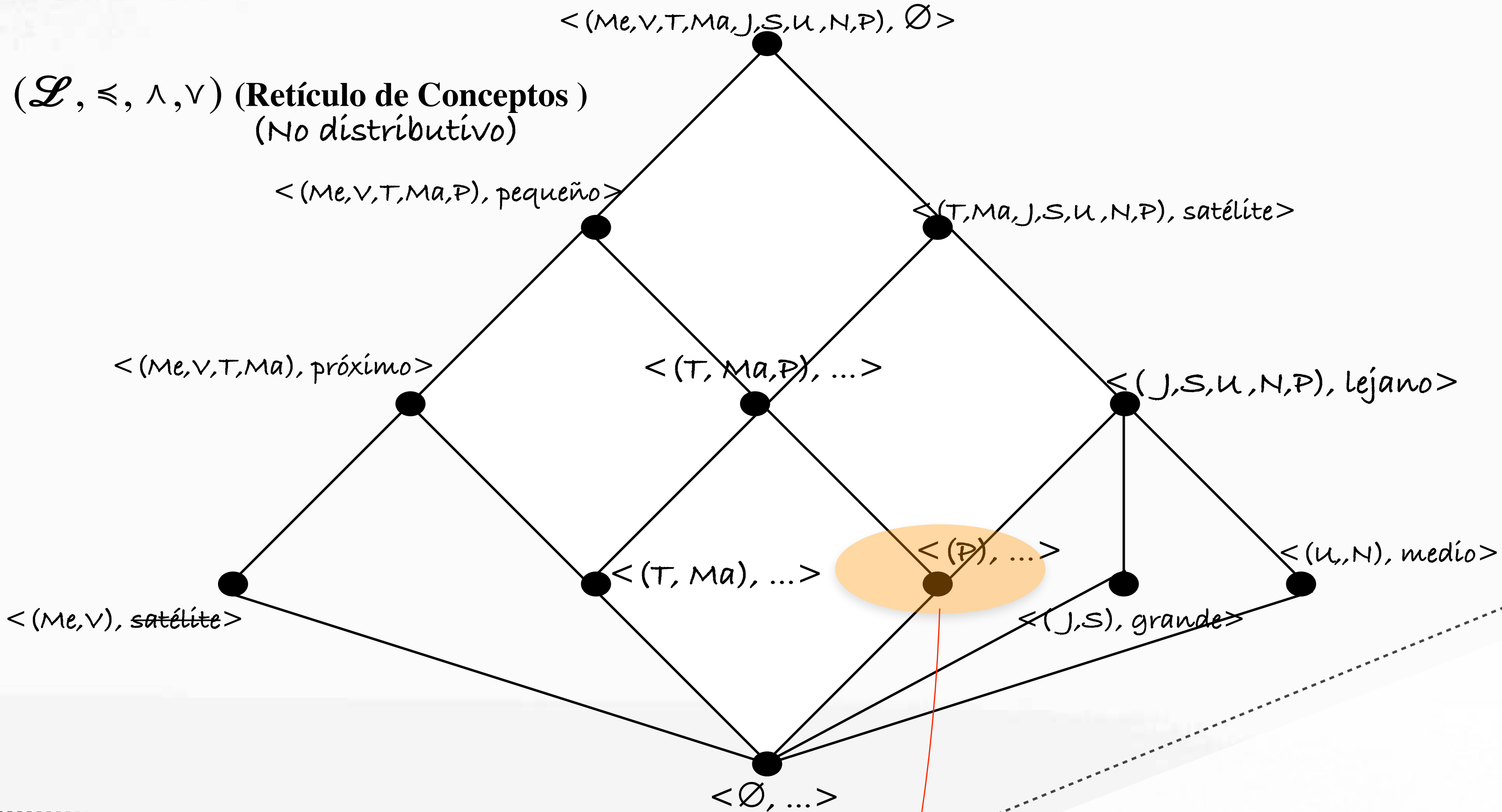


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A, B> \sqsubseteq^{<(P),...>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**
(No distributivo)



PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

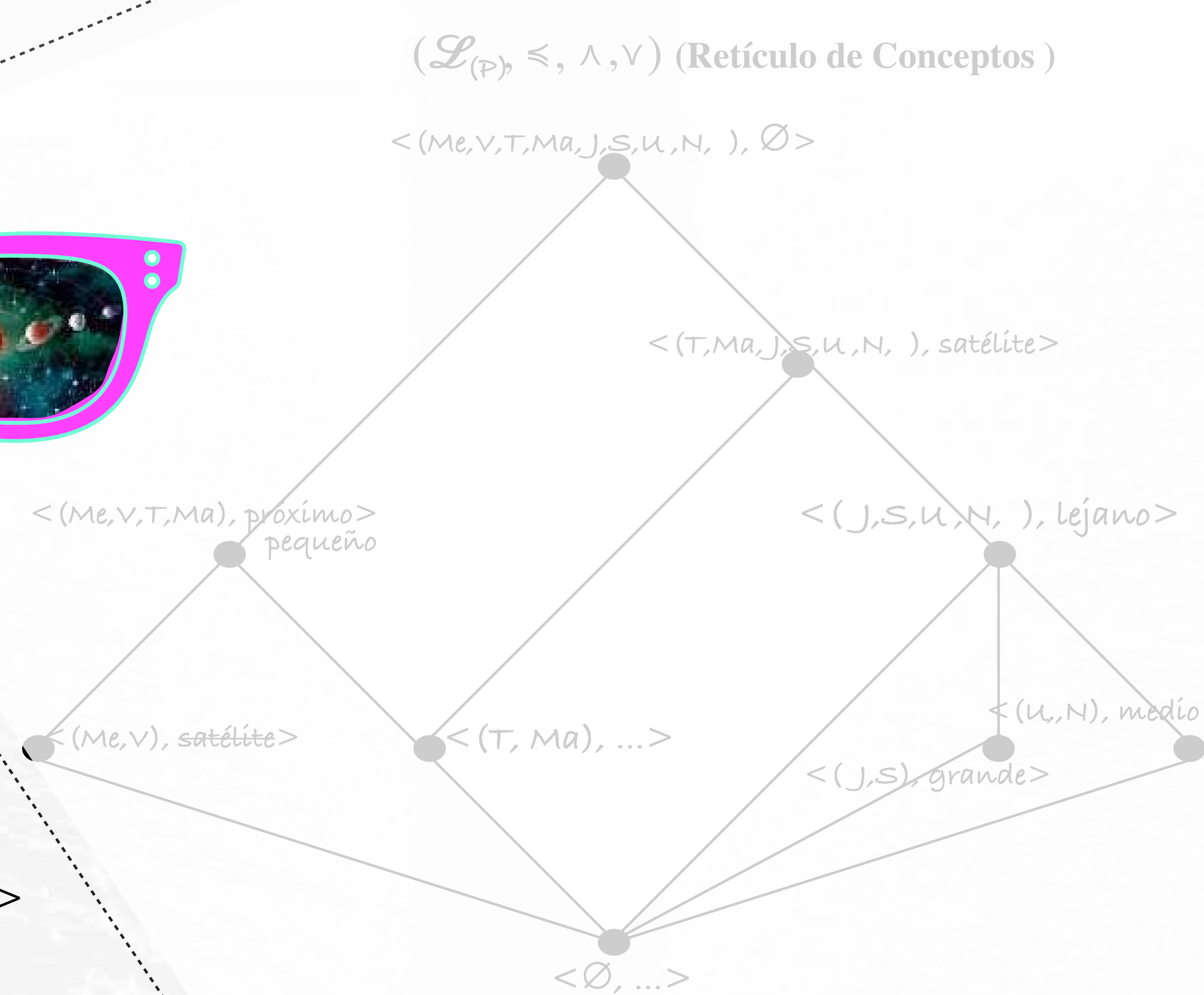
Contexto de los Planetas (válido hasta 2006)

Perspectiva: Objeto Plutón

...cha en la que Plutón ... de ser planeta)

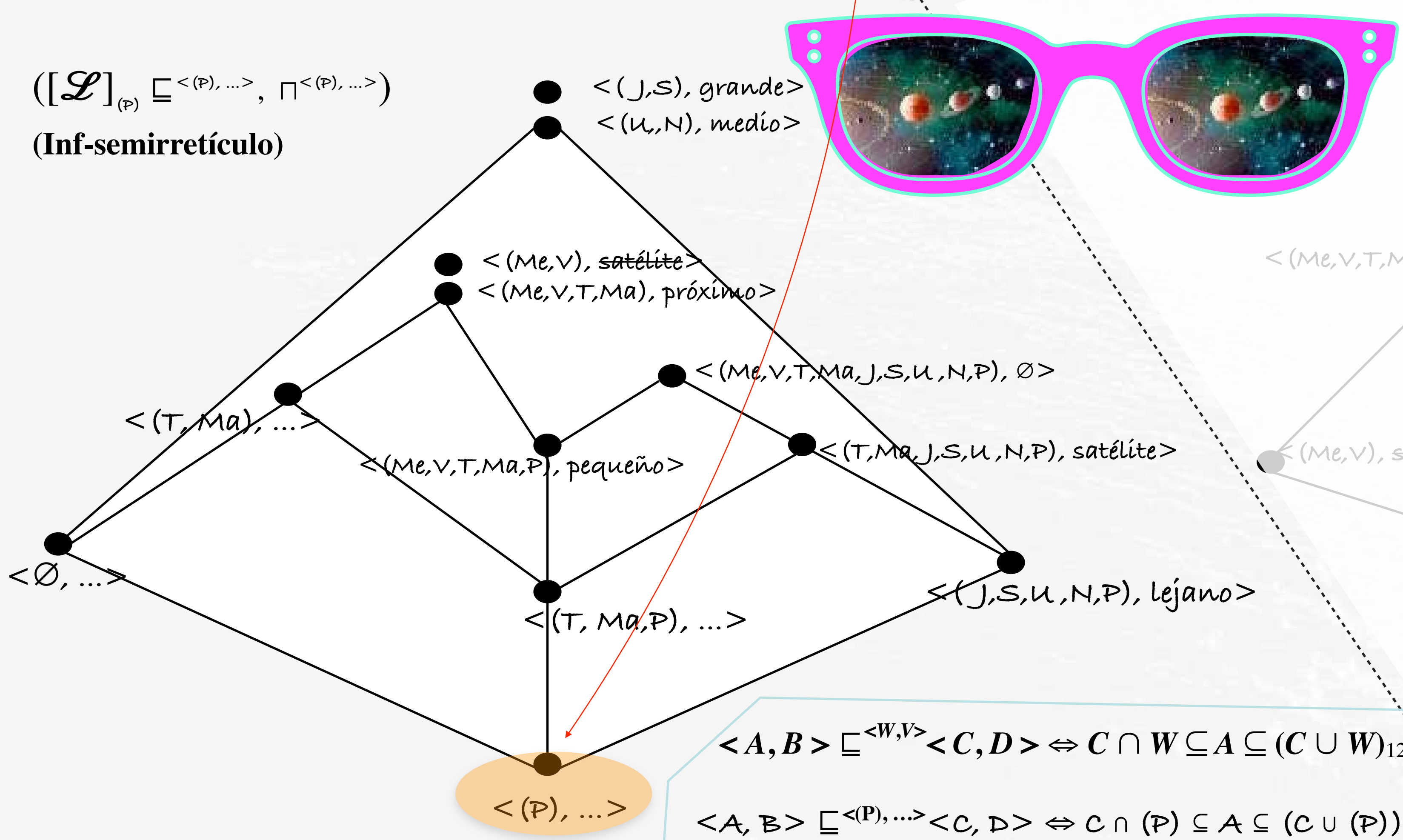
En la actualidad:

$(\mathscr{L}_{(P)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



$([\mathscr{L}]_{(P)}, \sqsubseteq^{<(P),\ldots>}, \sqcap^{<(P),\ldots>})$

(Inf-semirretículo)

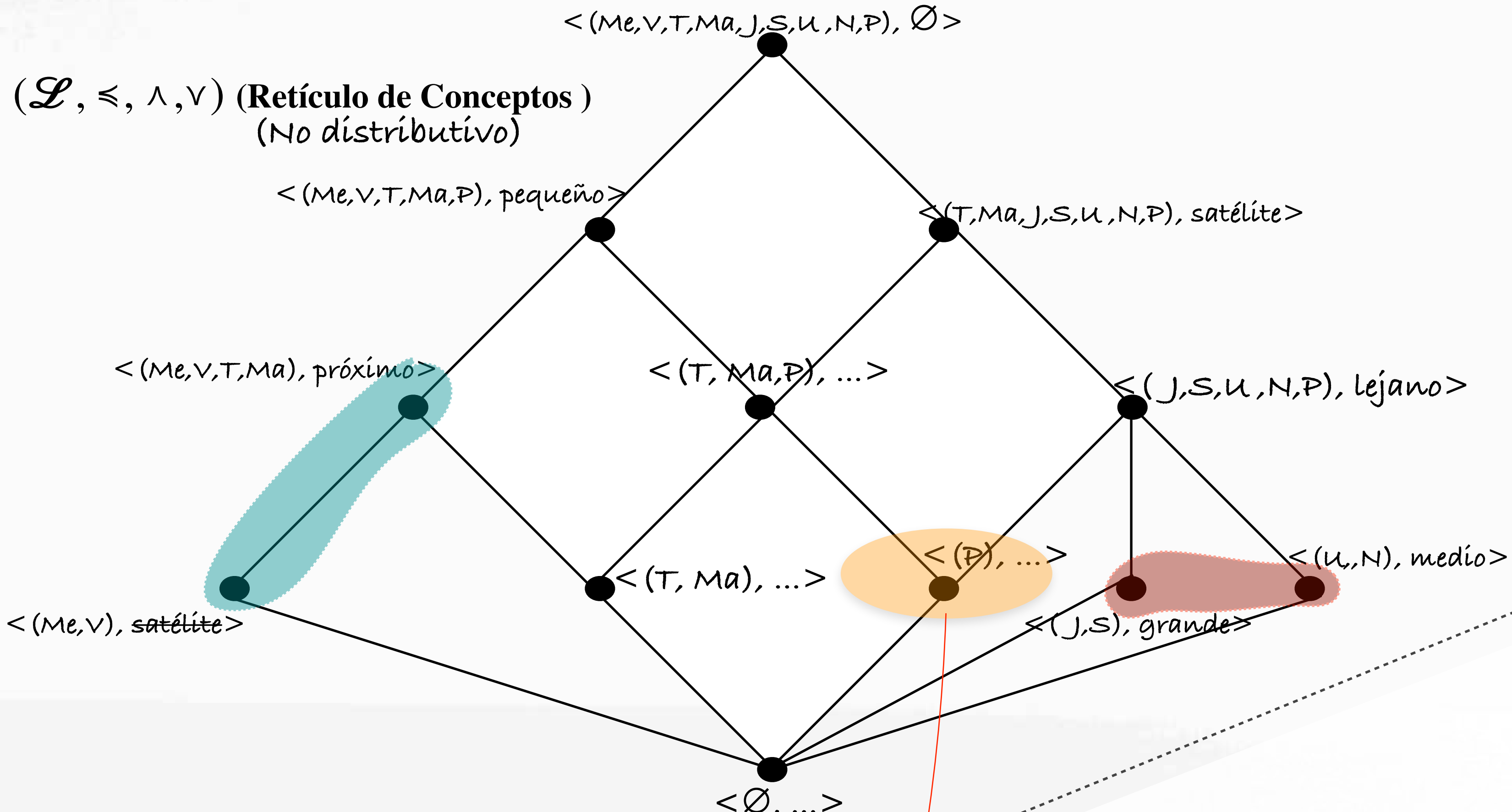


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A,B> \sqsubseteq^{<(P),\ldots>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**
(No distributivo)



PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

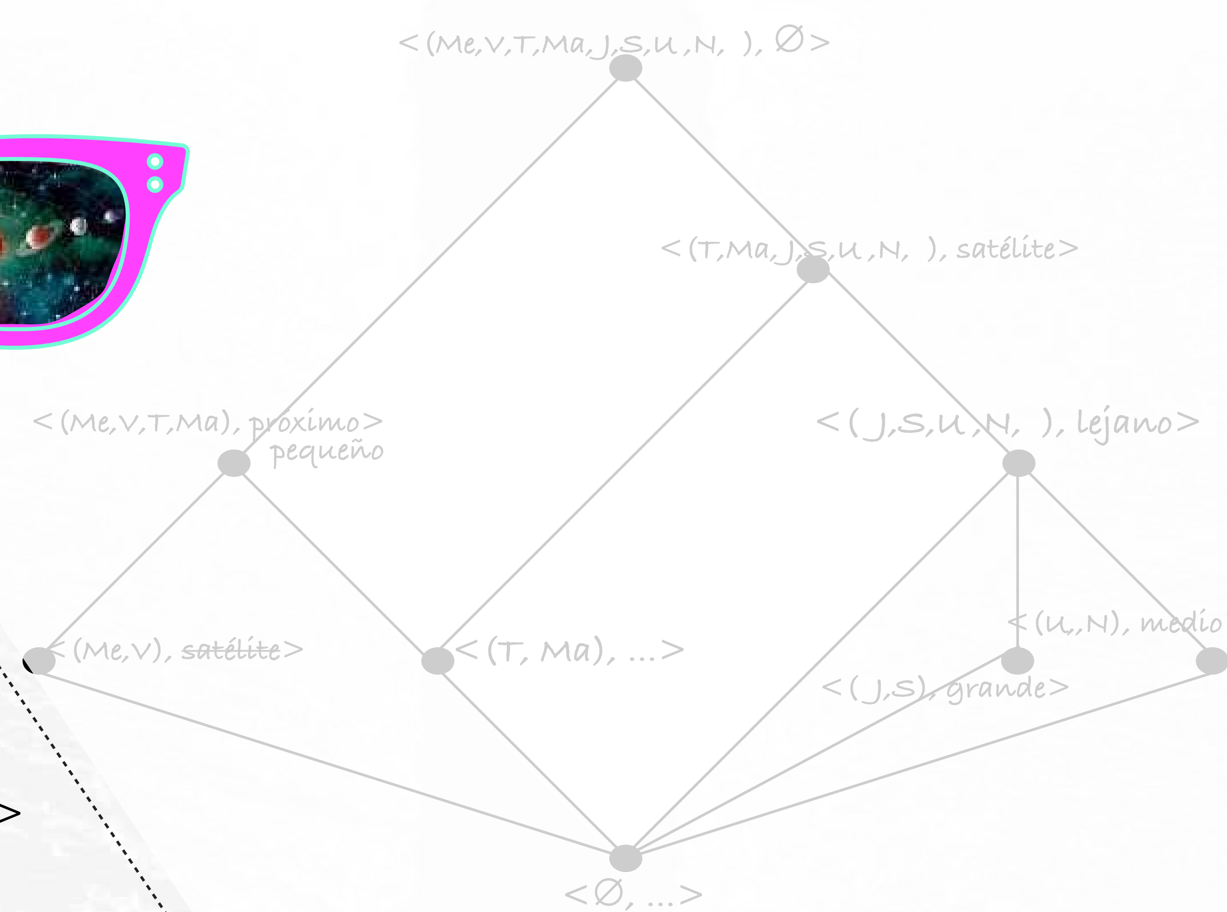
Contexto de los Planetas (válido hasta 2006)

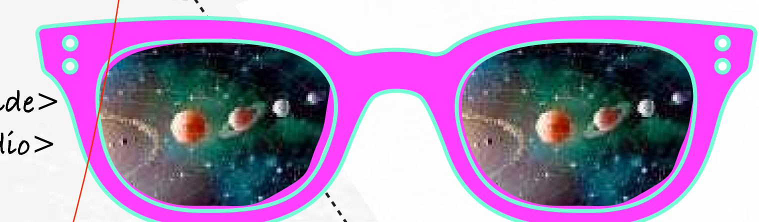
Perspectiva: Objeto Plutón

...cha en la que Plutón
... de ser planeta)

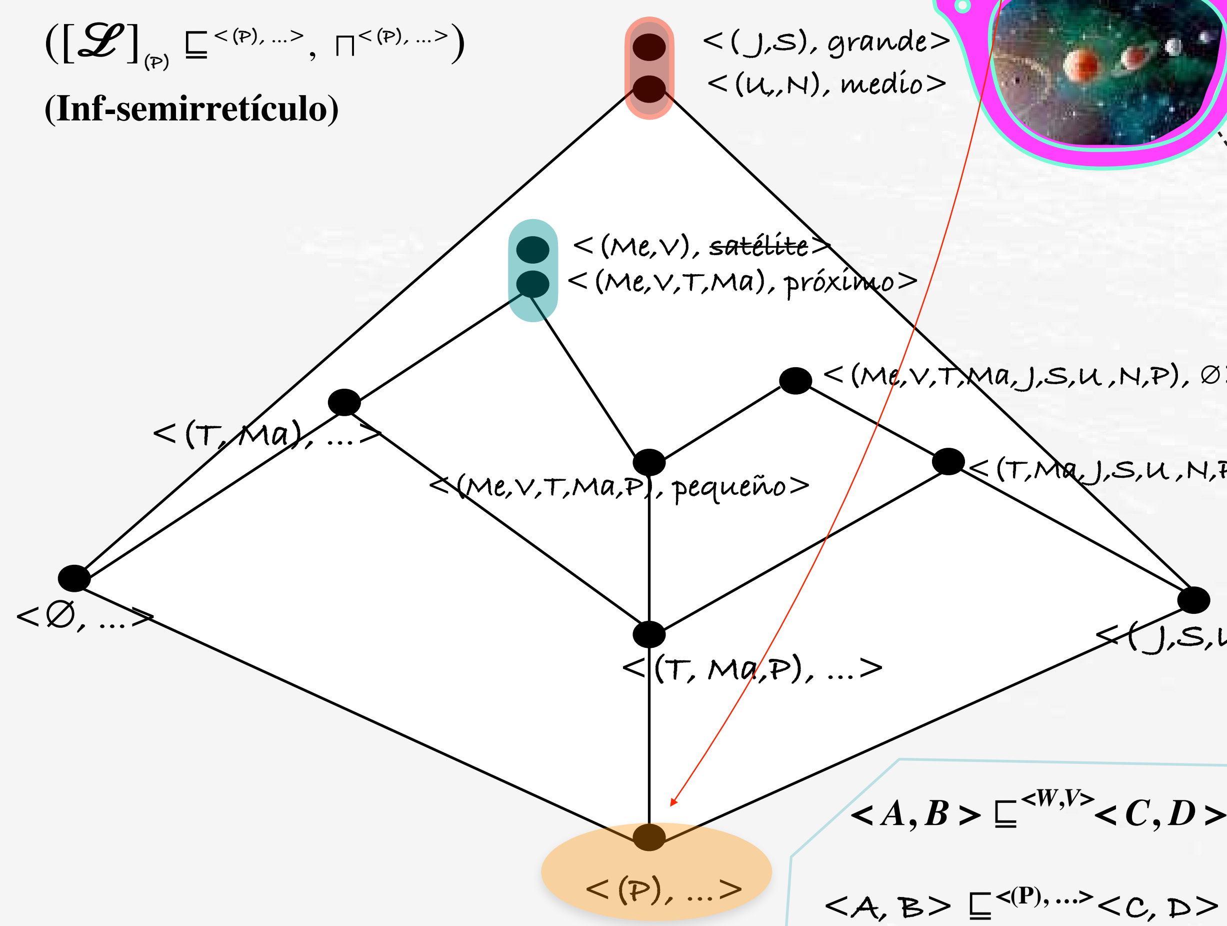
En la actualidad:

$(\mathscr{L}_{(P)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**





$([\mathscr{L}]_{(P)} \sqsubseteq^{<(P),\ldots>}, \sqcap^{<(P),\ldots>})$
(Inf-semirretículo)

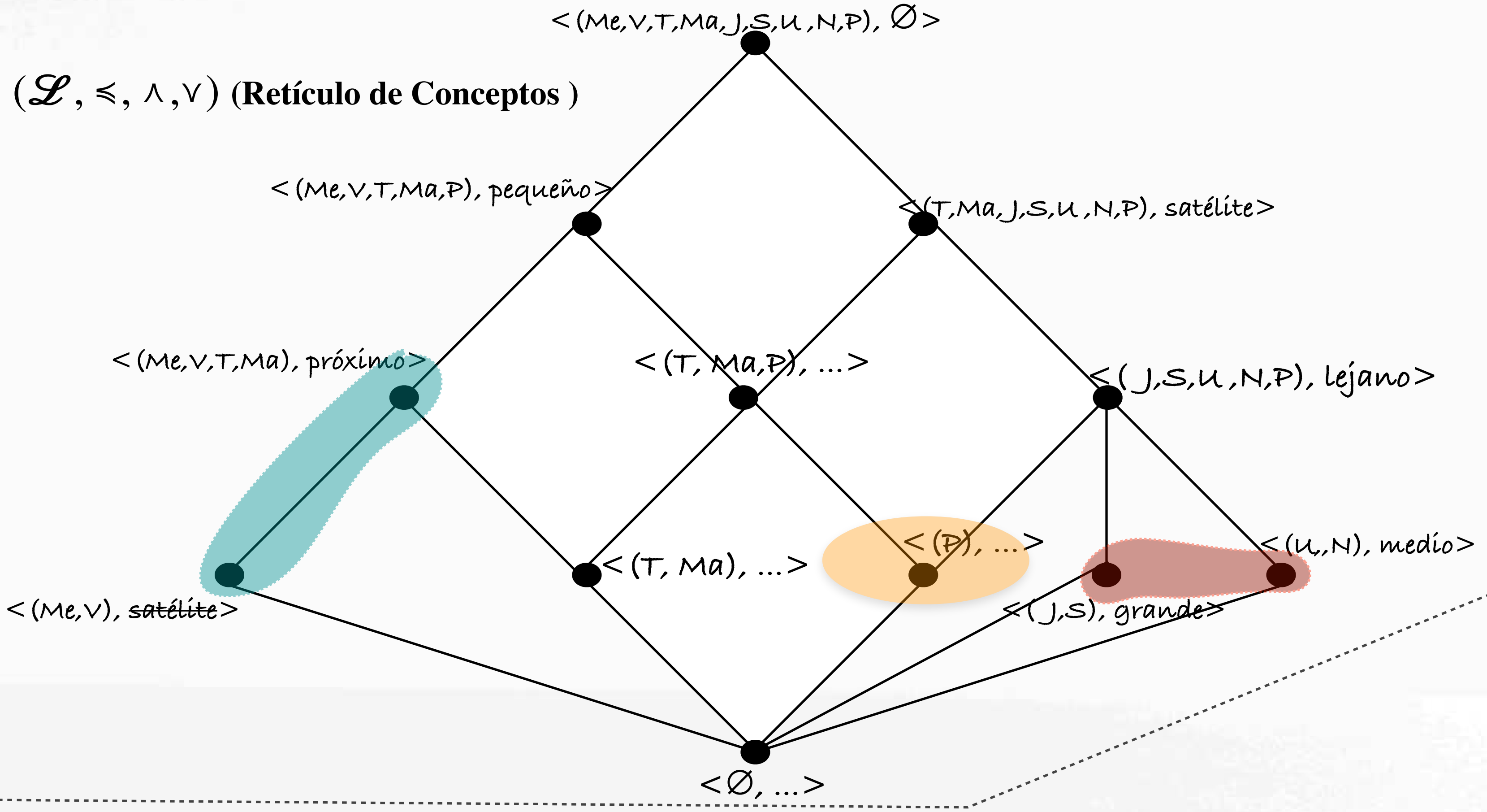


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A,B> \sqsubseteq^{<(P),\ldots>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



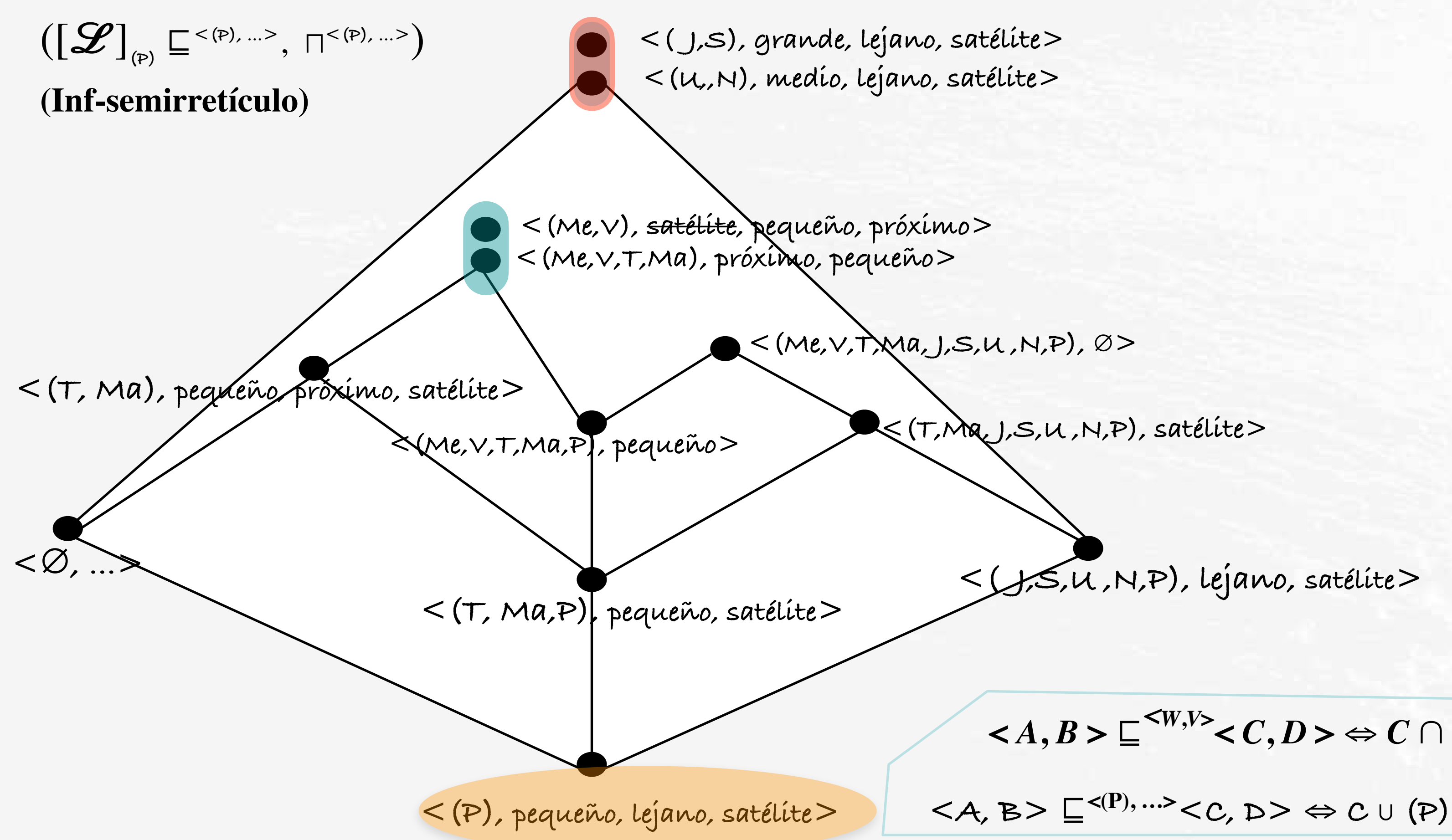
PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objeto Plutón

$([\mathscr{L}]_{(P)} \sqsubseteq^{<(P),\ldots>}, \sqcap^{<(P),\ldots>})$

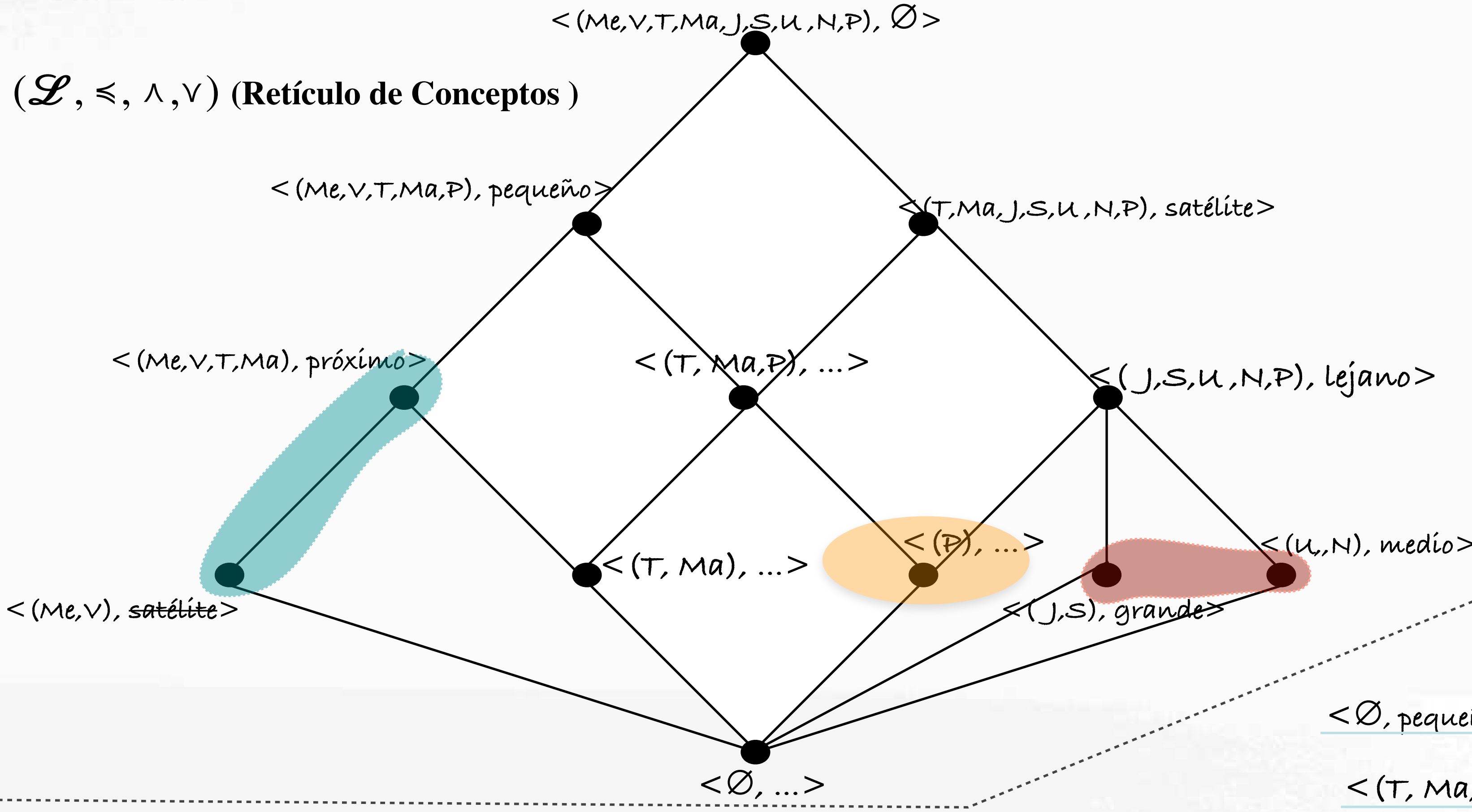
(Inf-semirretículo)



$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$$

$$<A, B> \sqsubseteq^{<(P),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cup (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$



PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objeto Plutón

<(P), pequeño, lejano, satélite>

<∅, pequeño, medio, grande, próximo, lejano, satélite, ~~satélite~~ >

<(T, Ma,P), pequeño, satélite>

<(J,S,U,N,P), lejano> (satélite)

<(T, Ma), pequeño, próximo, satélite>

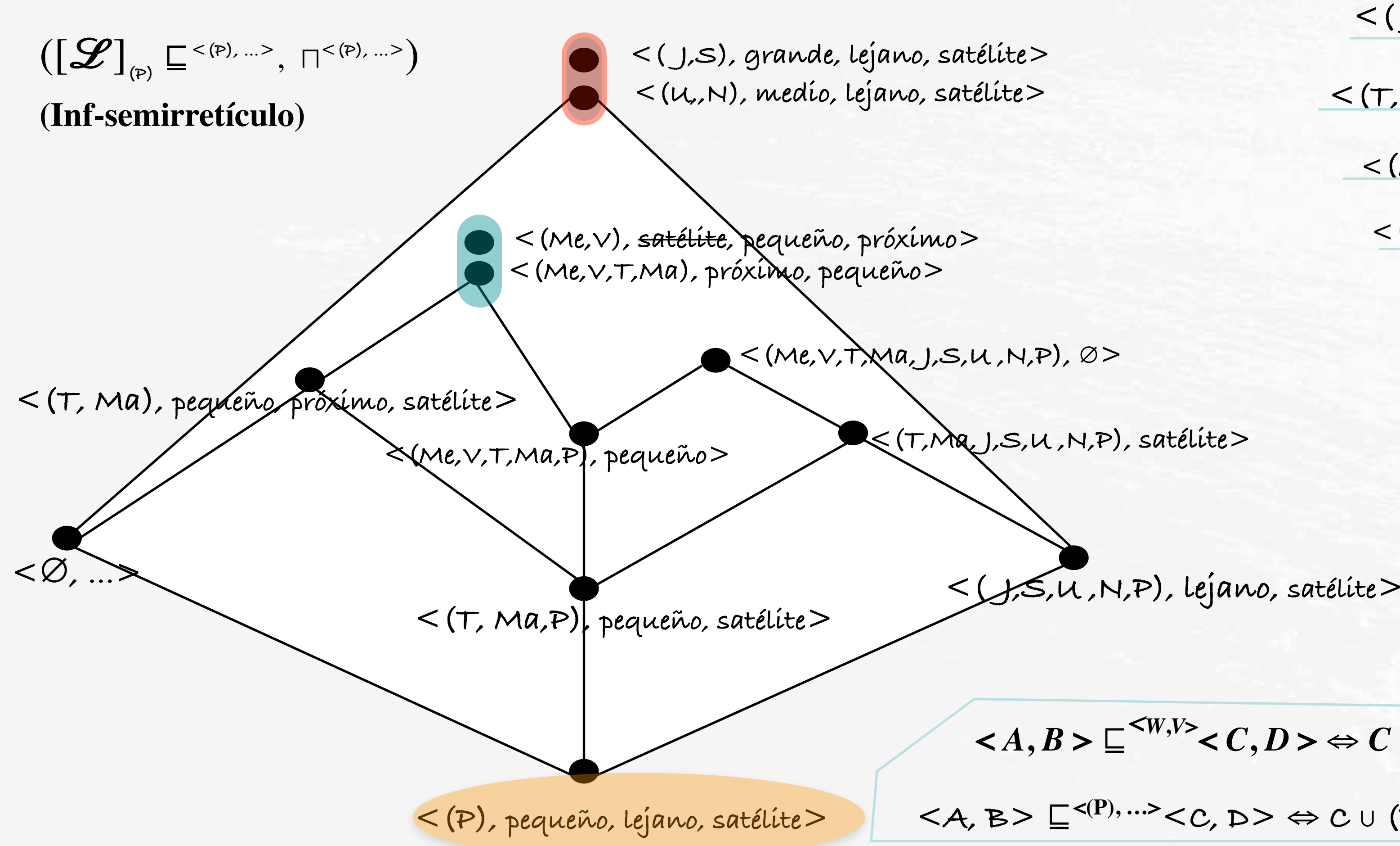
<(Me,V,T,Ma,P), pequeño>

<(T,Ma,J,S,U,N,P), satélite>

<(Me,V), ~~satélite~~> (pequeño, próximo)
<(Me,V,T,Ma), próximo> (pequeño)

<(Me,V,T,Ma,J,S,U,N,P), ∅>

<(J,S), grande> (lejano, satélite)
<(U,N), medio> (lejano, satélite)

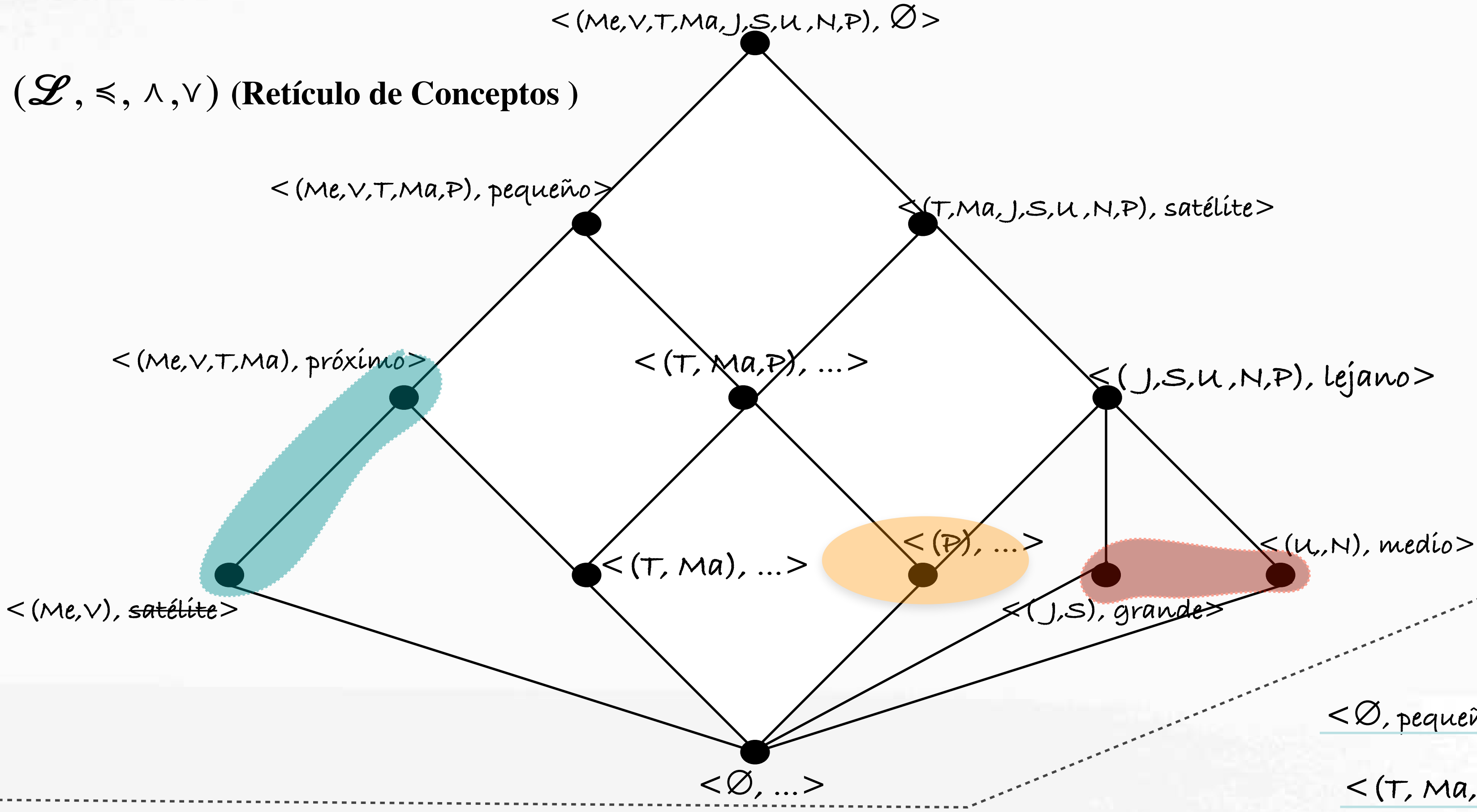


$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$$

$$<A, B> \sqsubseteq^{<(P),...>} <C, D> \Leftrightarrow C \cup (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objeto Plutón

<(P), pequeño, lejano, satélite>

<∅, pequeño, medio, grande, próximo, lejano, satélite, ~~satélite~~ >

<(T, Ma,P), pequeño, satélite>

<(J,S,U,N,P), lejano> (satélite)

<(T, Ma), pequeño, próximo, satélite>

<(Me,V,T,Ma,P), pequeño>

<(T,Ma,J,S,U,N,P), satélite>

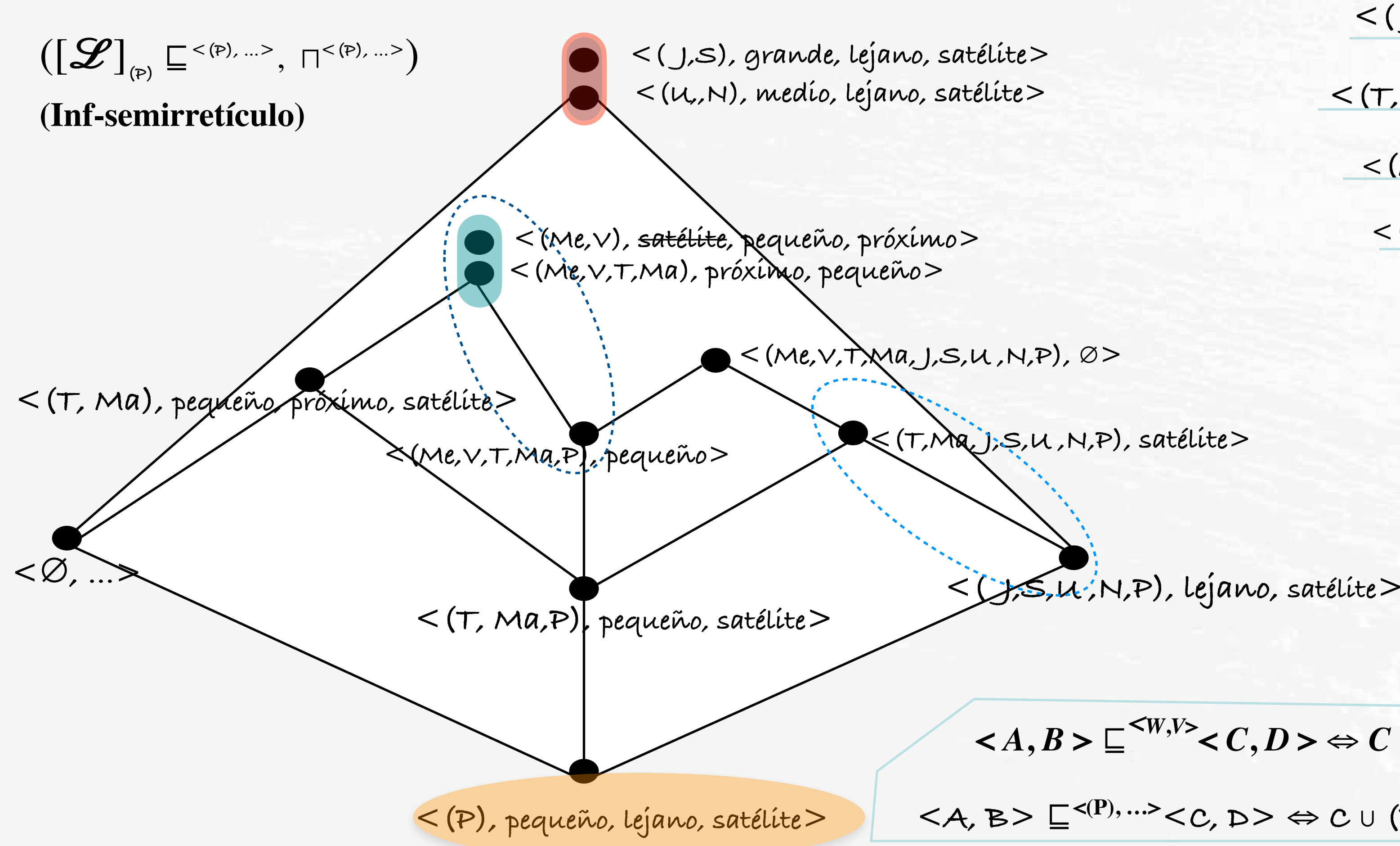
<(Me,V), ~~satélite~~> (pequeño, próximo)
<(Me,V,T,Ma), próximo> (pequeño)

<(Me,V,T,Ma,J,S,U,N,P), ∅>

<(J,S), grande> (lejano, satélite)
<(U,N), medio> (lejano, satélite)

Una posible interpretación: Comparación de monografías sobre planetas atendiendo a sus diferencias con (P).

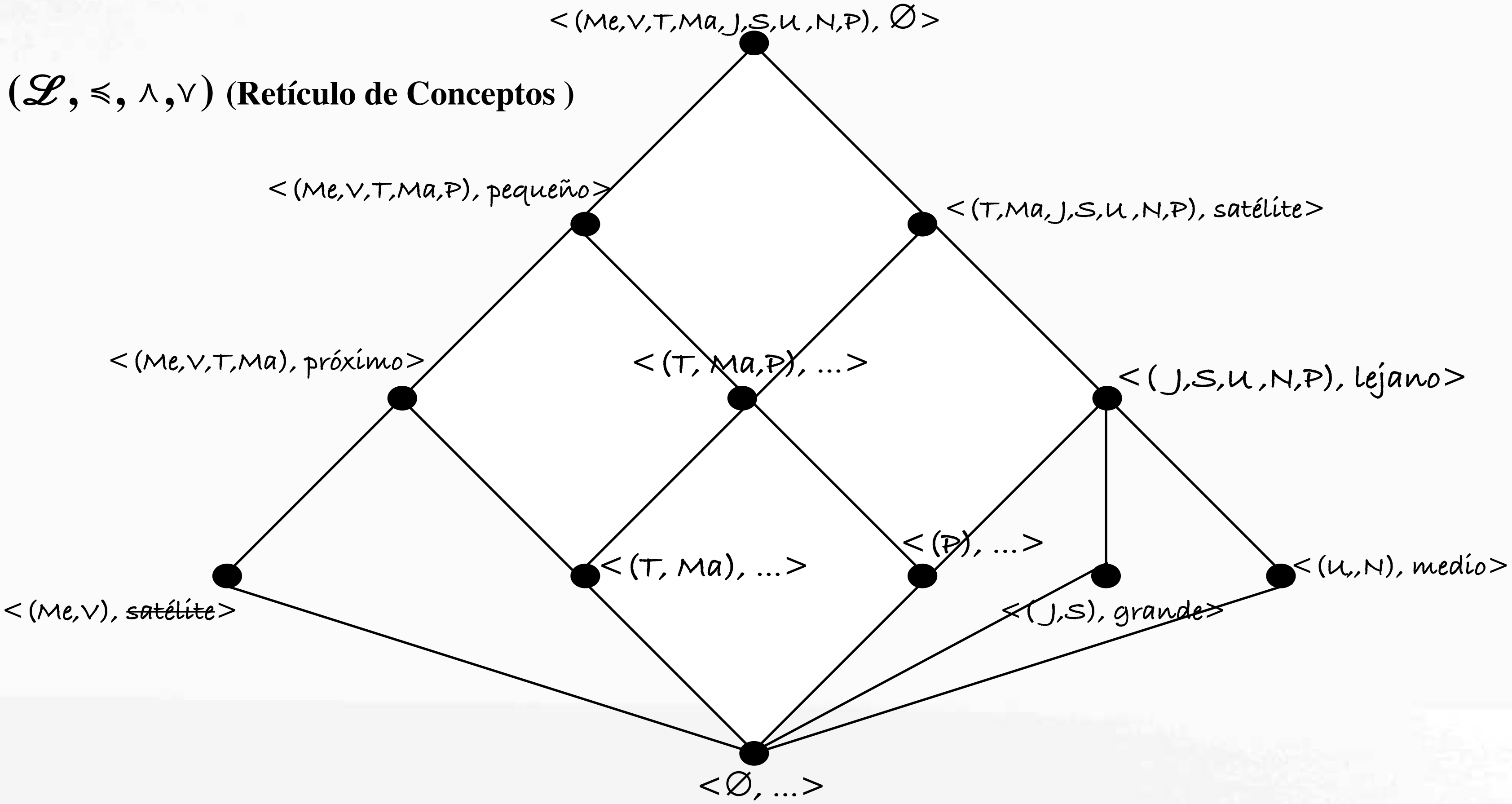
$([\mathscr{L}]_{(P)} \sqsubseteq^{<(P),\ldots>}, \sqcap^{<(P),\ldots>})$
(Inf-semirretículo)



$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$$

$$<A, B> \sqsubseteq^{<(P),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cup (P) \subseteq A \subseteq (C \cup (P))_{12}$$

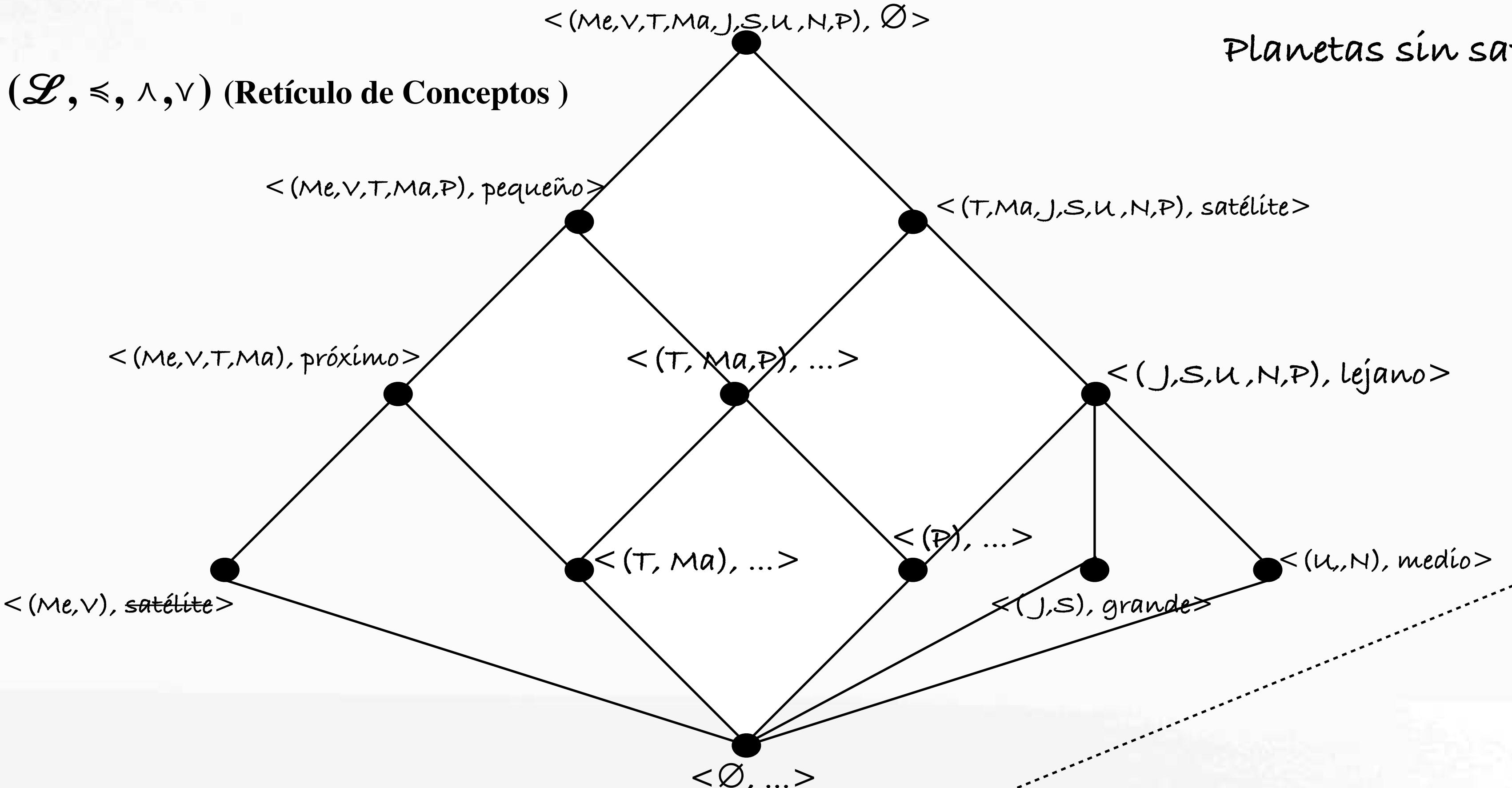
$(\mathscr{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ (Retículo de Conceptos)



PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

$(\mathscr{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

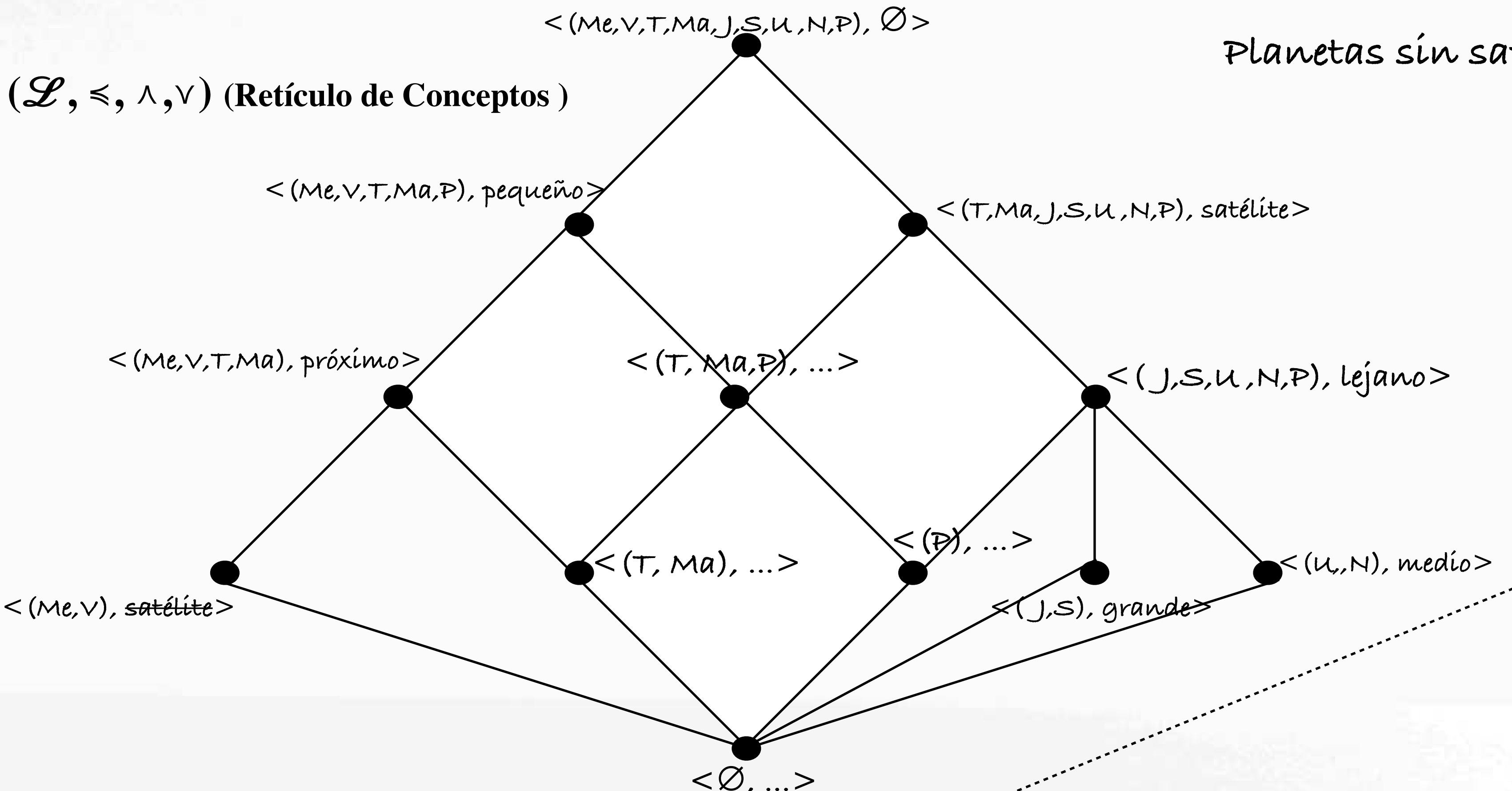


Planetas sin satélite:

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

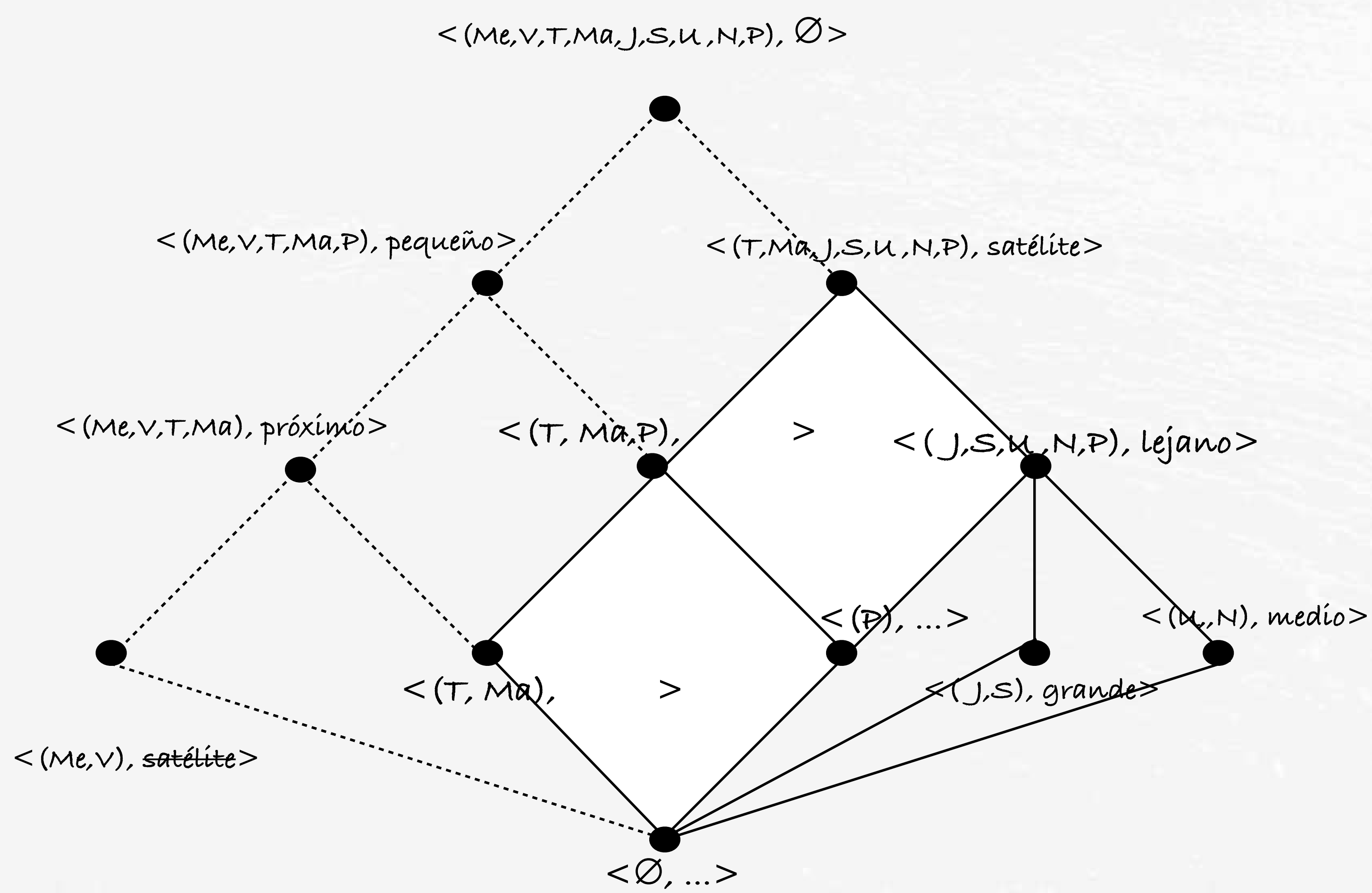


Planetas sin satélite:

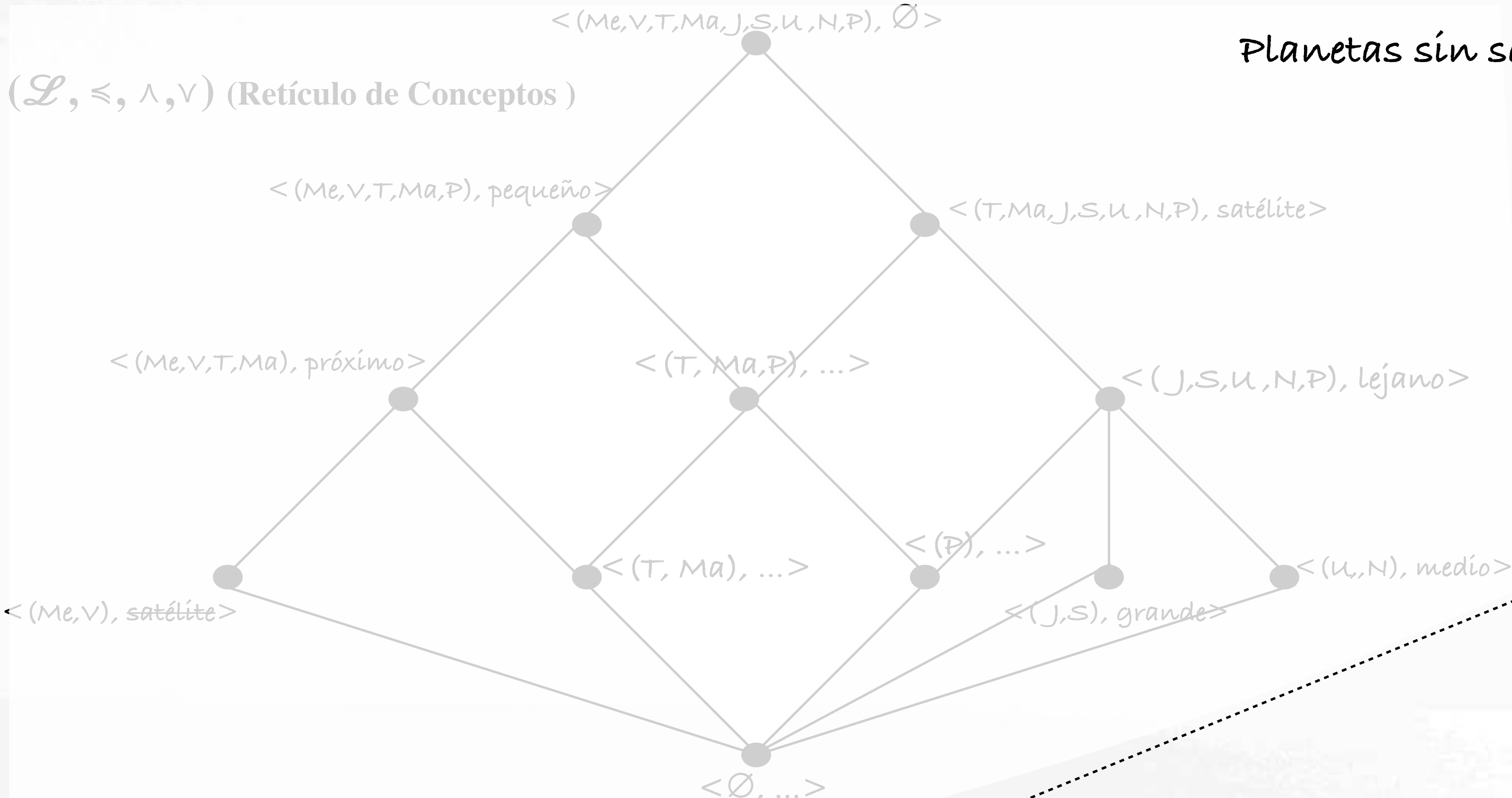
PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

$(\mathscr{L}\quad, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



$(\mathscr{L}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

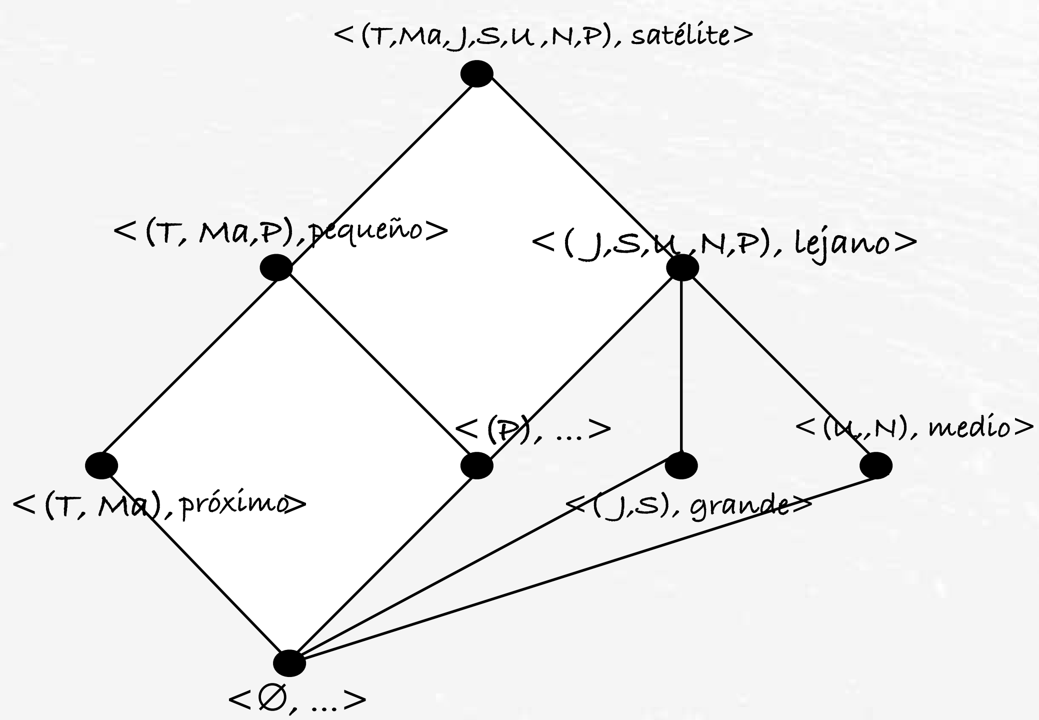


Planetas sin satélite:

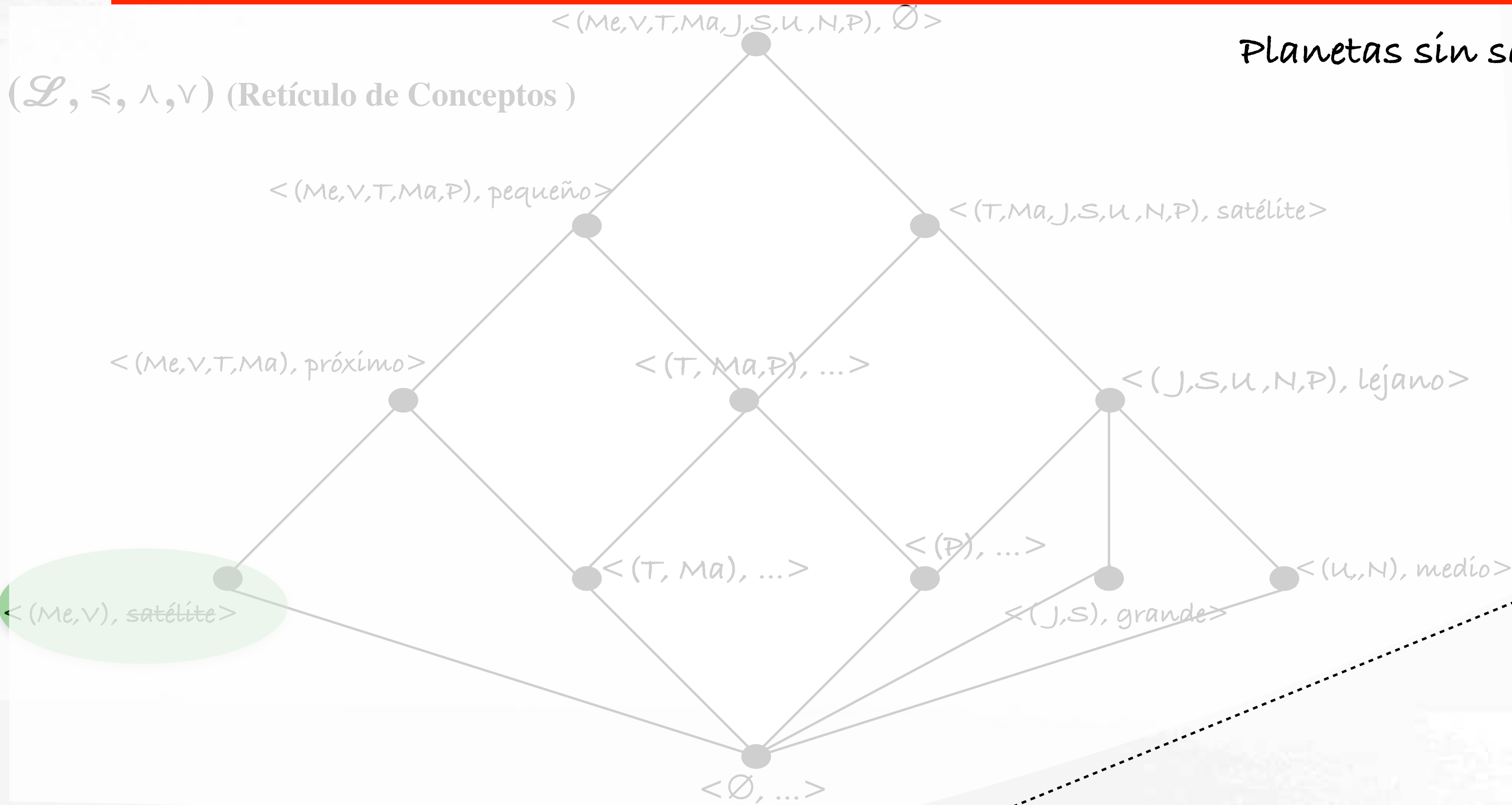
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \leqslant, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$



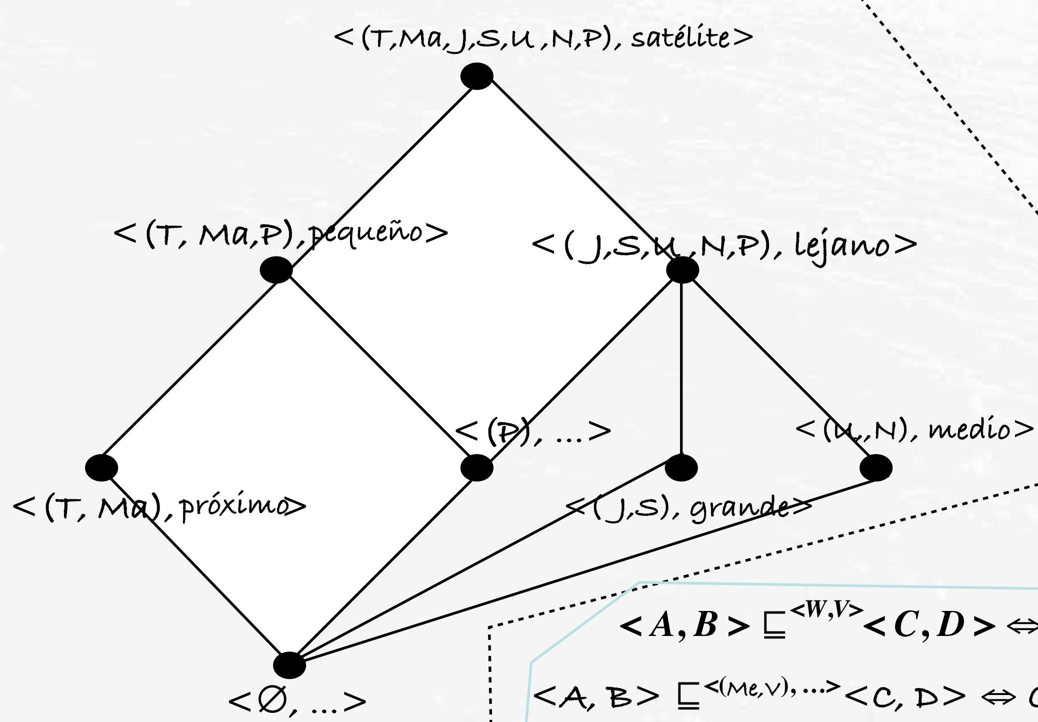
Planetas sin satélite:

PLANETS	SIZE small (ss)	SIZE medium (sm)	SIZE big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	DISTANCE FROM SUN far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objetos sin satélite

$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

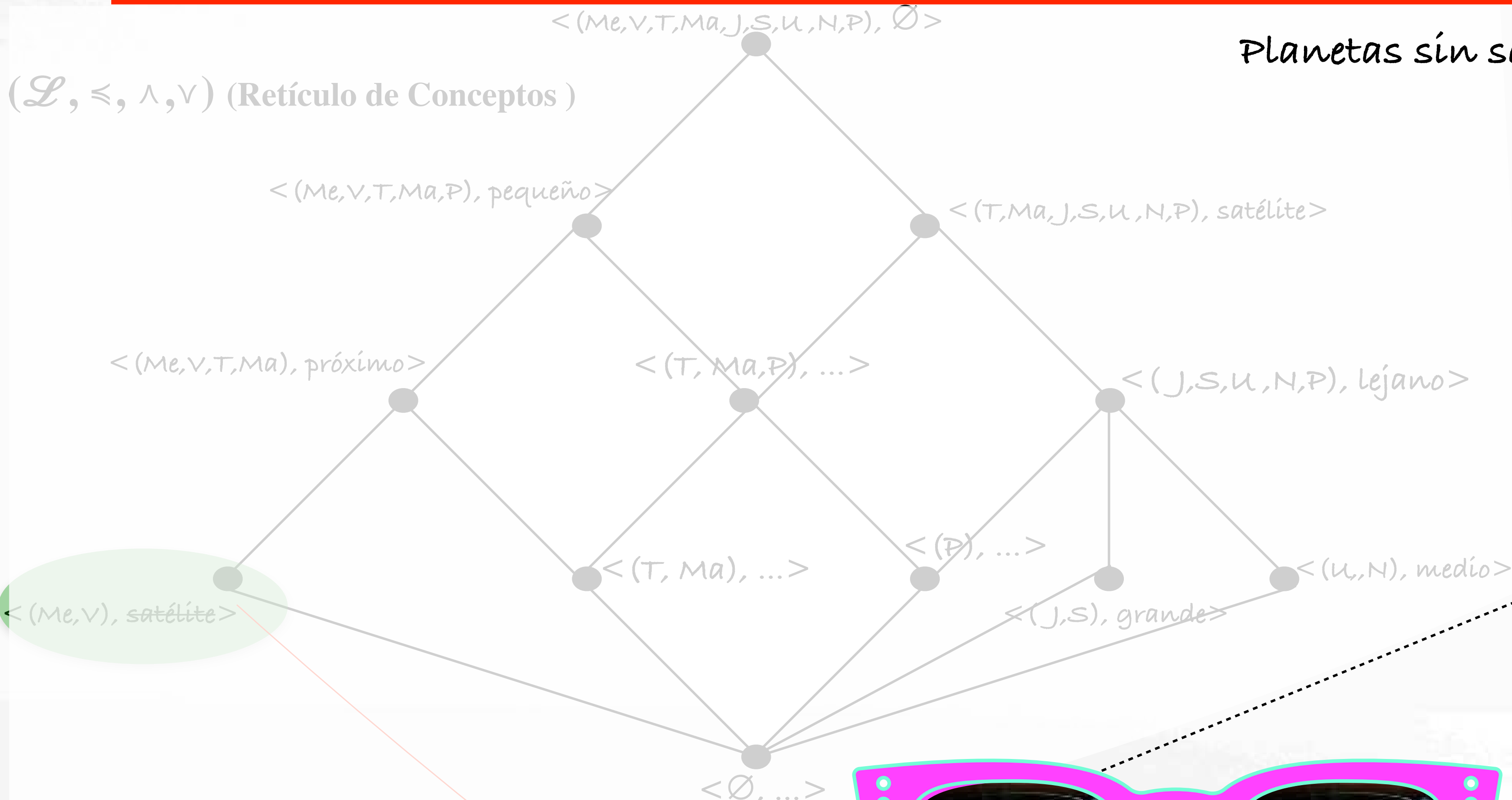


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A, B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ (Retículo de Conceptos)



Planetas sin satélite:

PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

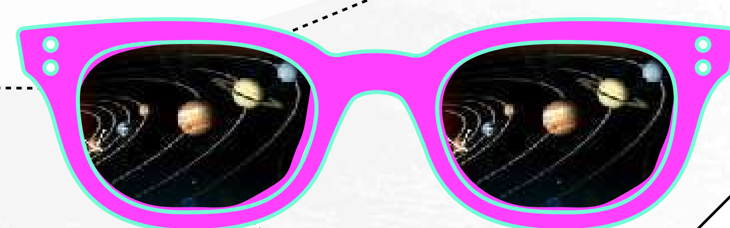
Contexto de los Planetas válido hasta 2006

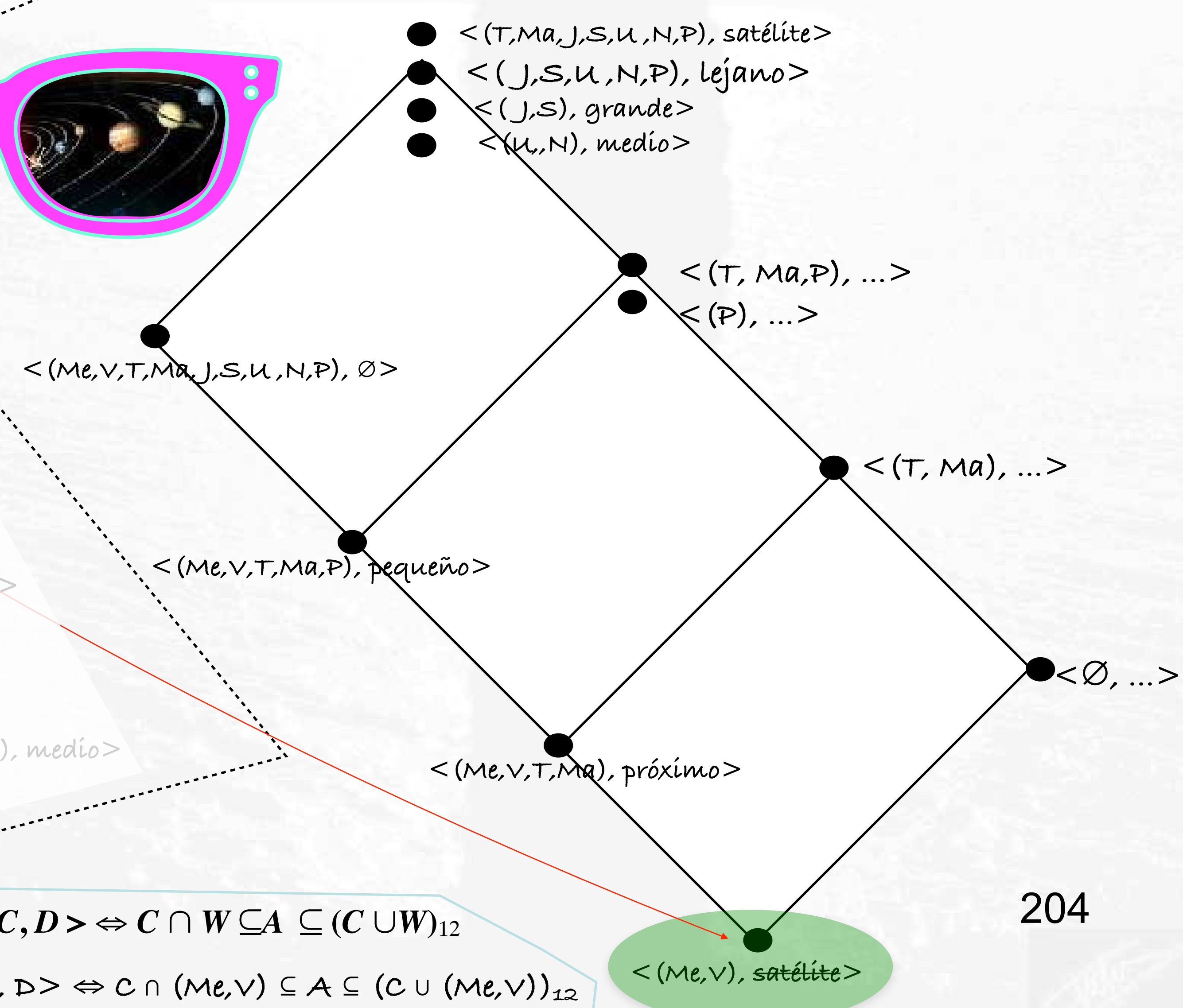
Perspectiva: Objetos sin satélite

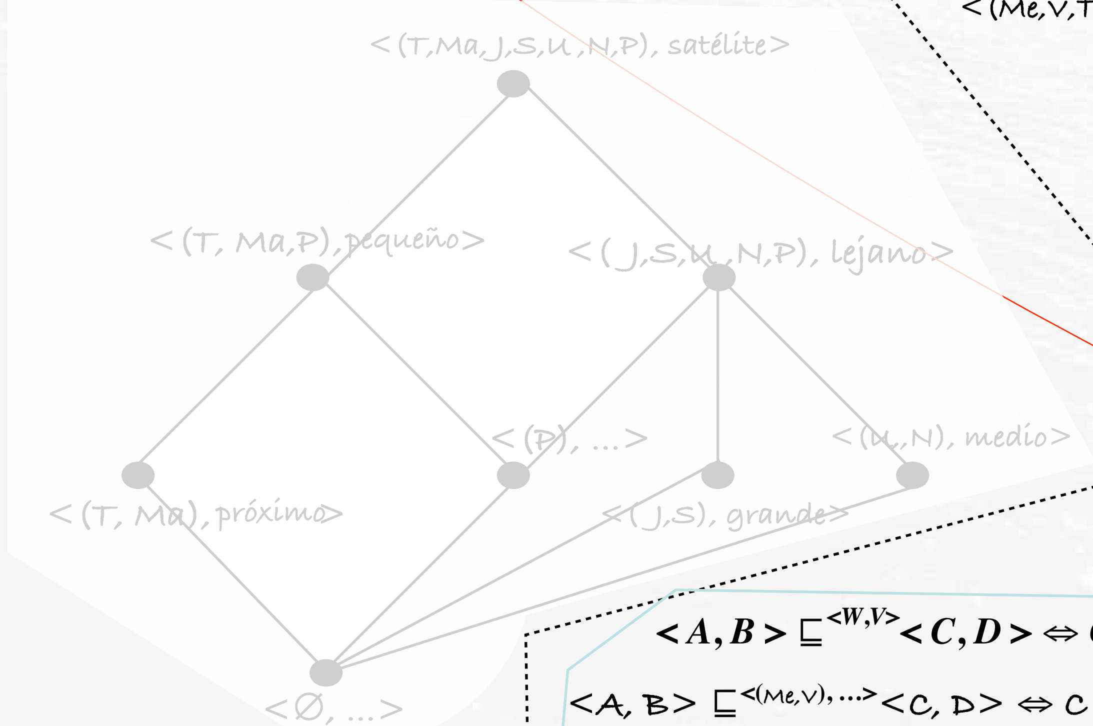
$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\,\cancel{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\,\cancel{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\,\cancel{satélite}>})$

(Retículo distributivo)

$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ (Retículo de Conceptos)





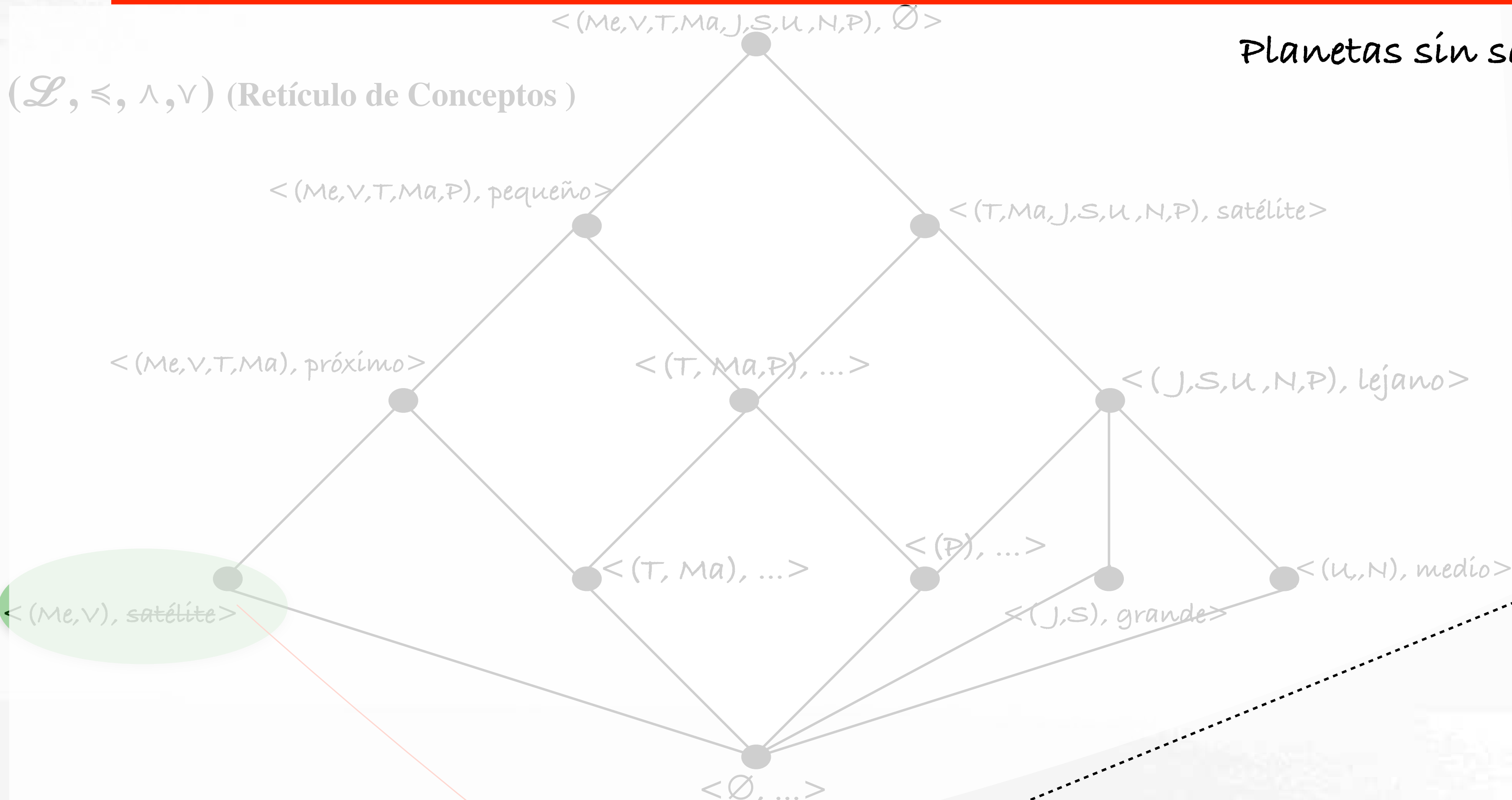


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A, B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ (Retículo de Conceptos)



Planetas sin satélite:

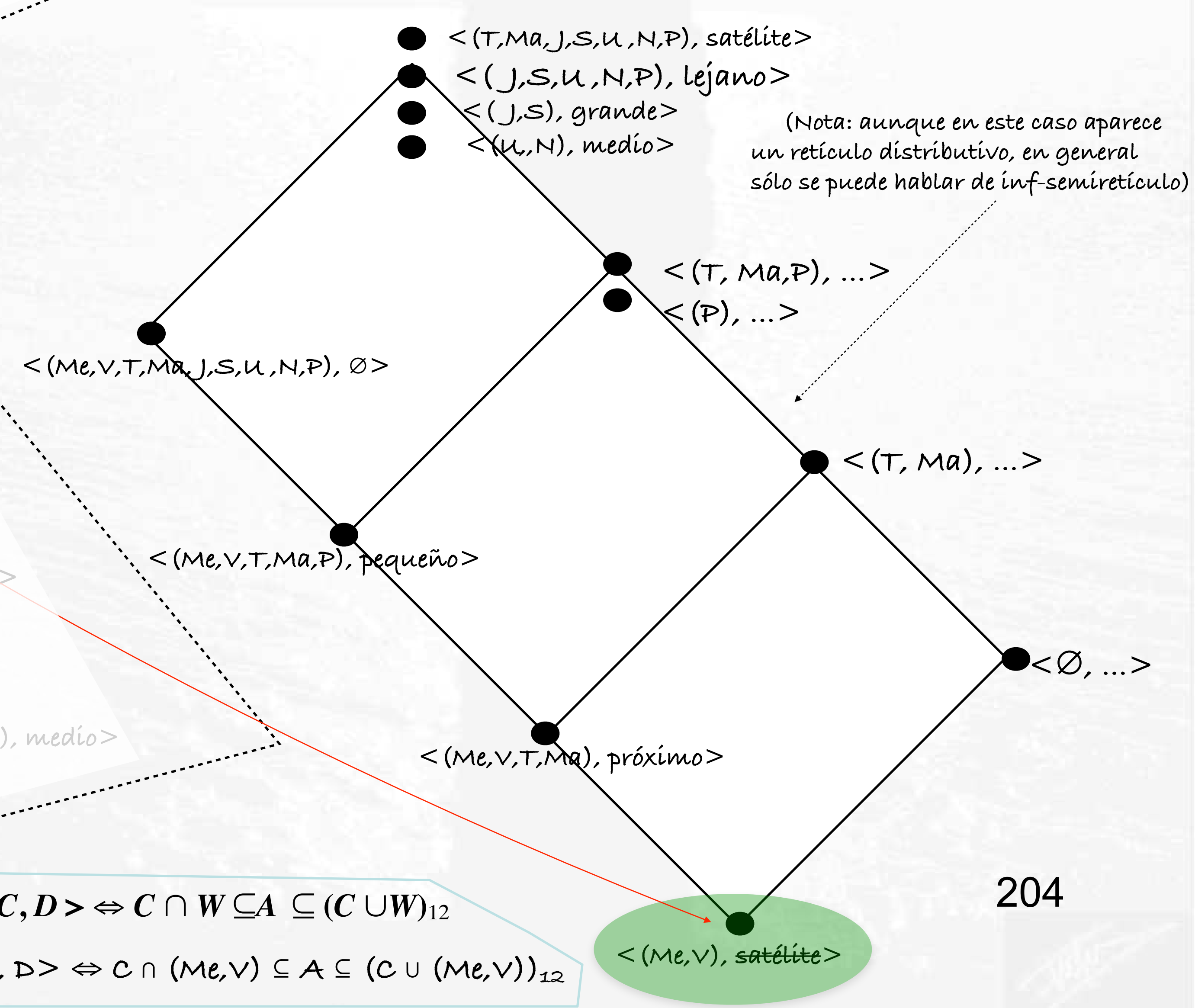
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objetos sin satélite

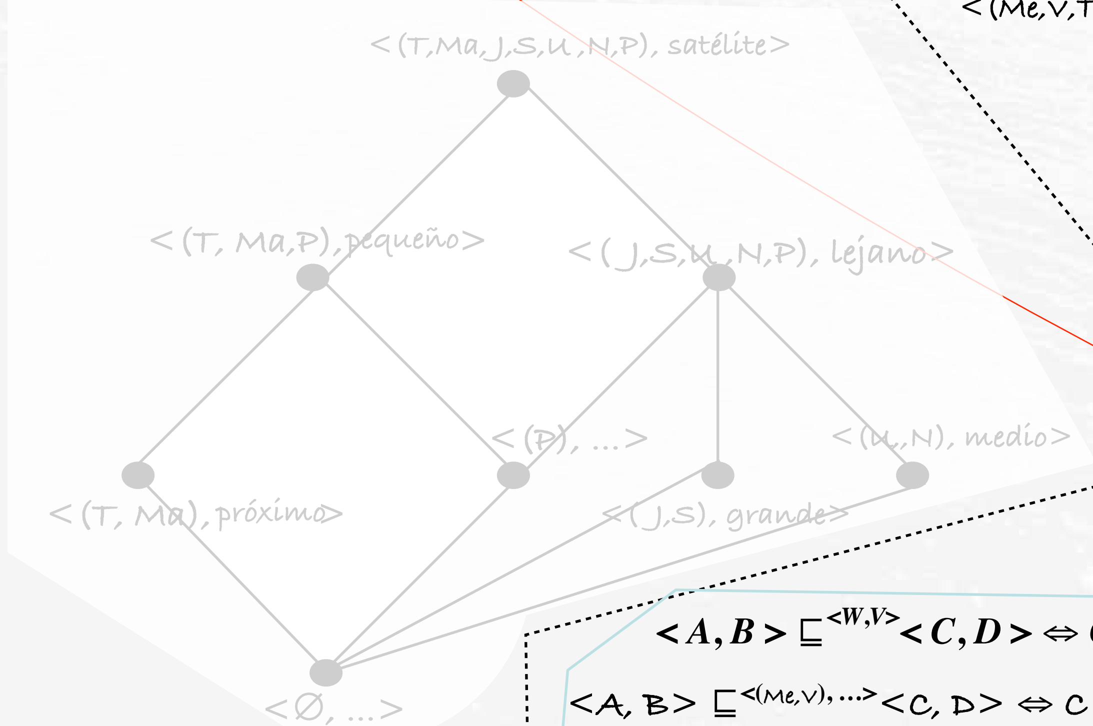
$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\ \text{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\ \text{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\ \text{satélite}>})$

(Retículo distributivo)



(Nota: aunque en este caso aparece un retículo distributivo, en general sólo se puede hablar de inf-semiretículo)

$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ (Retículo de Conceptos)

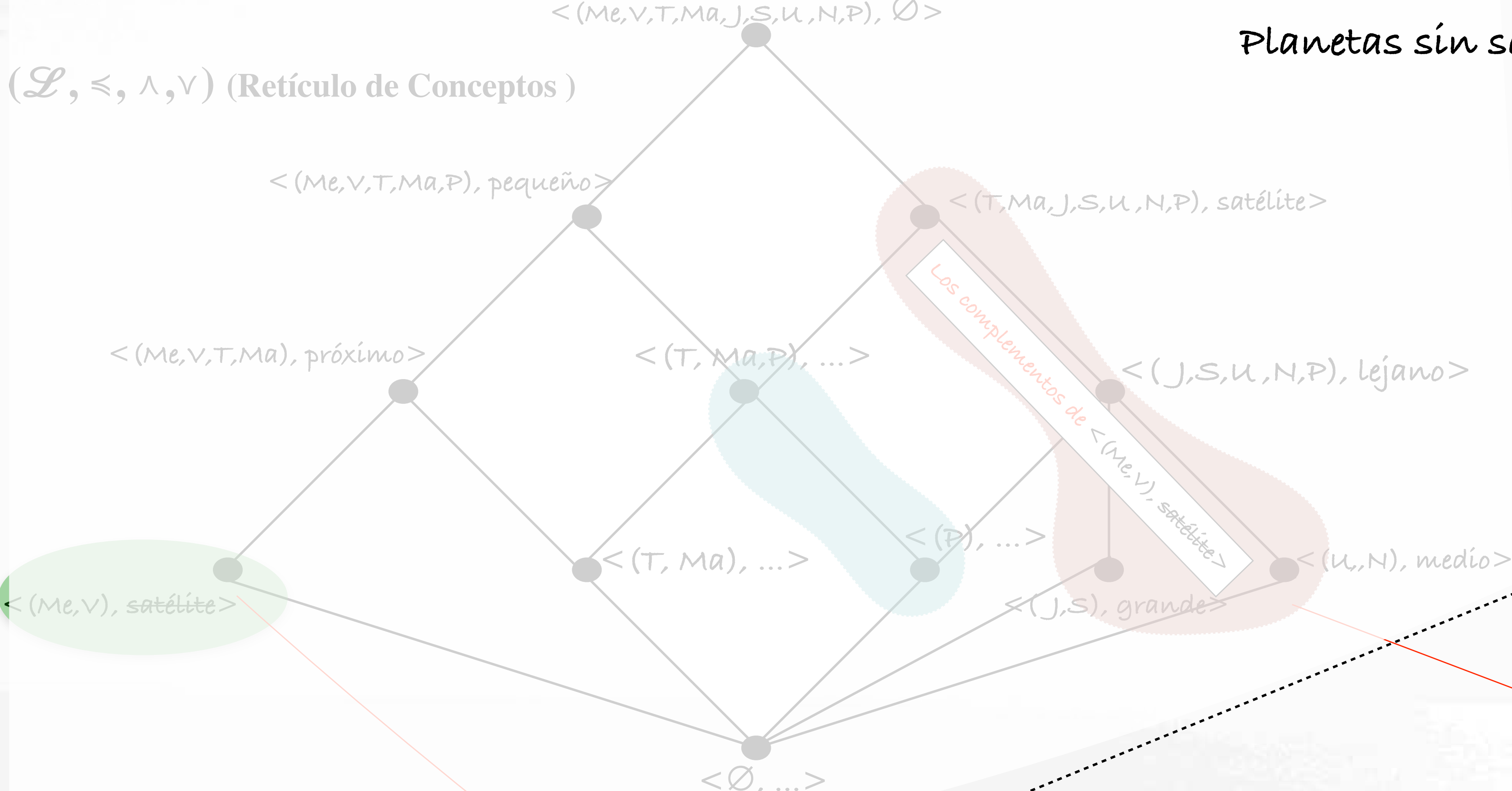


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A,B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Planetas sin satélite:

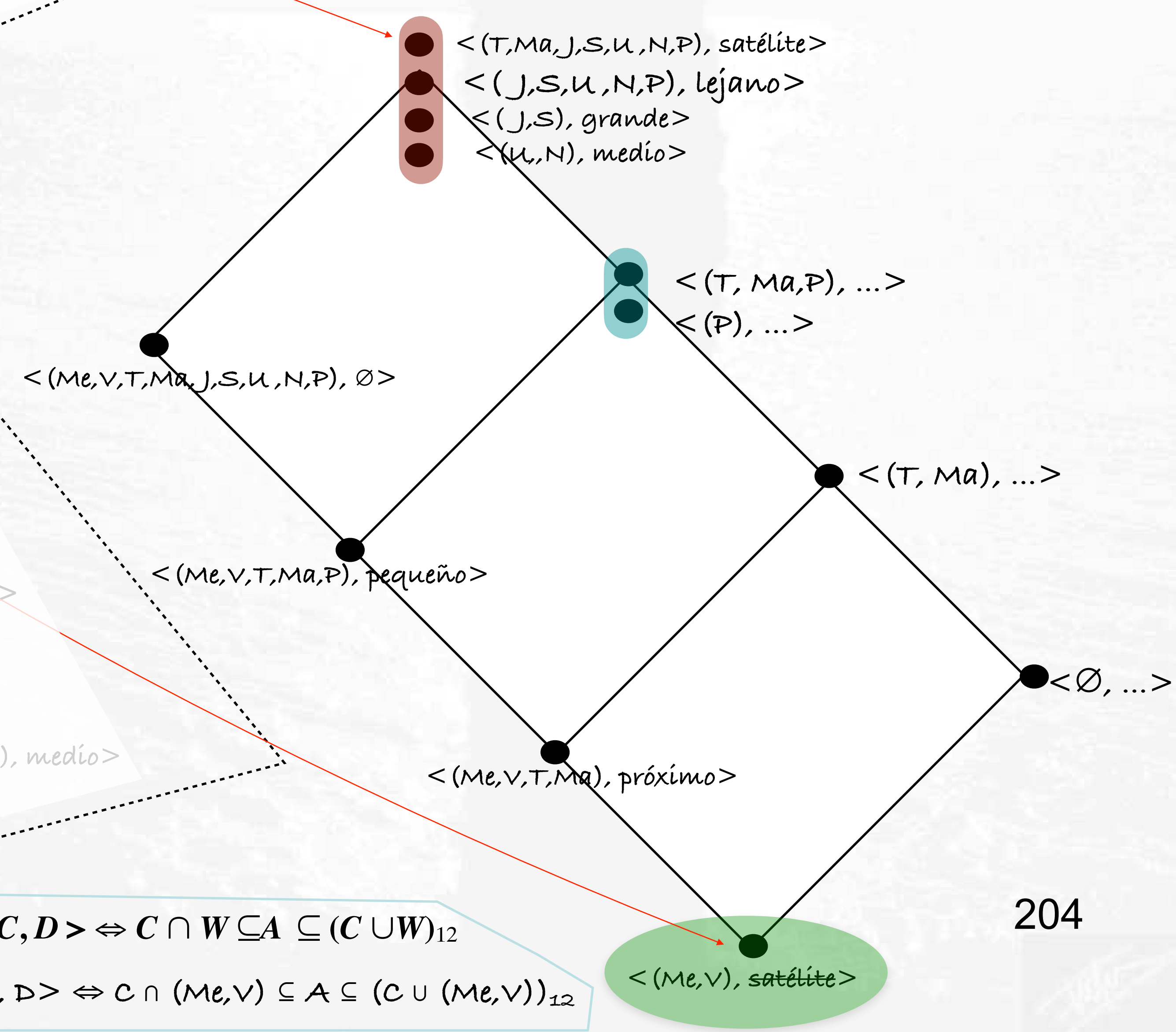
PLANETS	SIZE small (ss)	medium (sm)	big (sb)	DISTANCE FROM SUN near (dn)	far (df)	WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

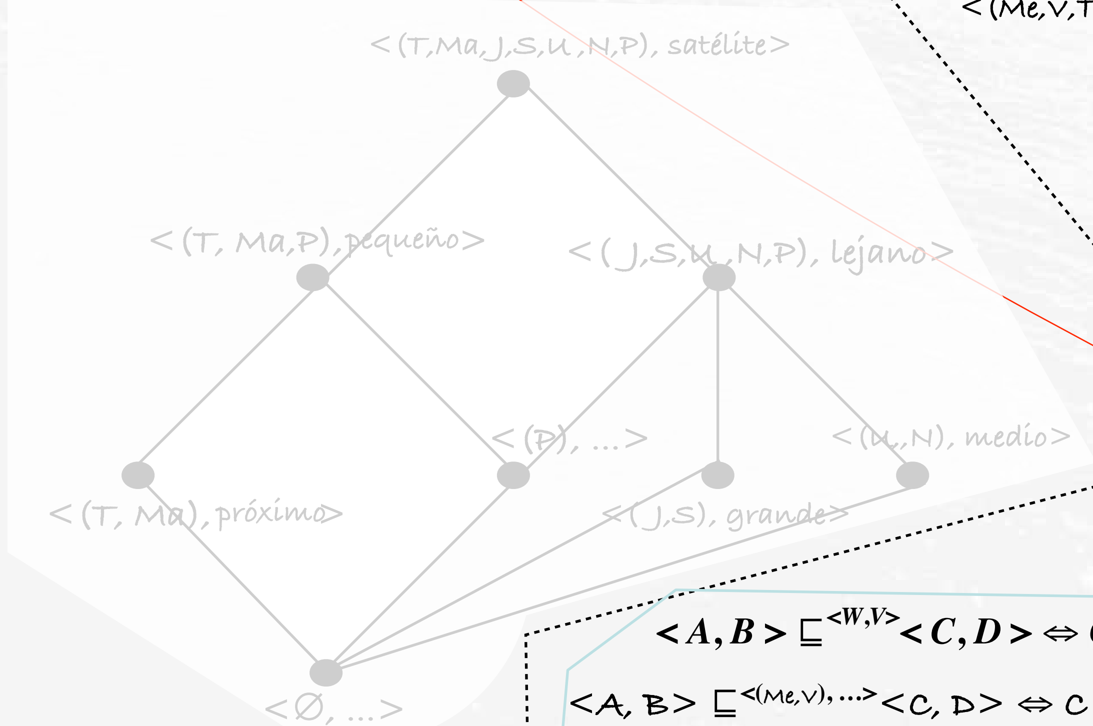
Perspectiva: Objetos sin satélite

$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\, \text{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\, \text{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\, \text{satélite}>})$

(Retículo distributivo)



$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**

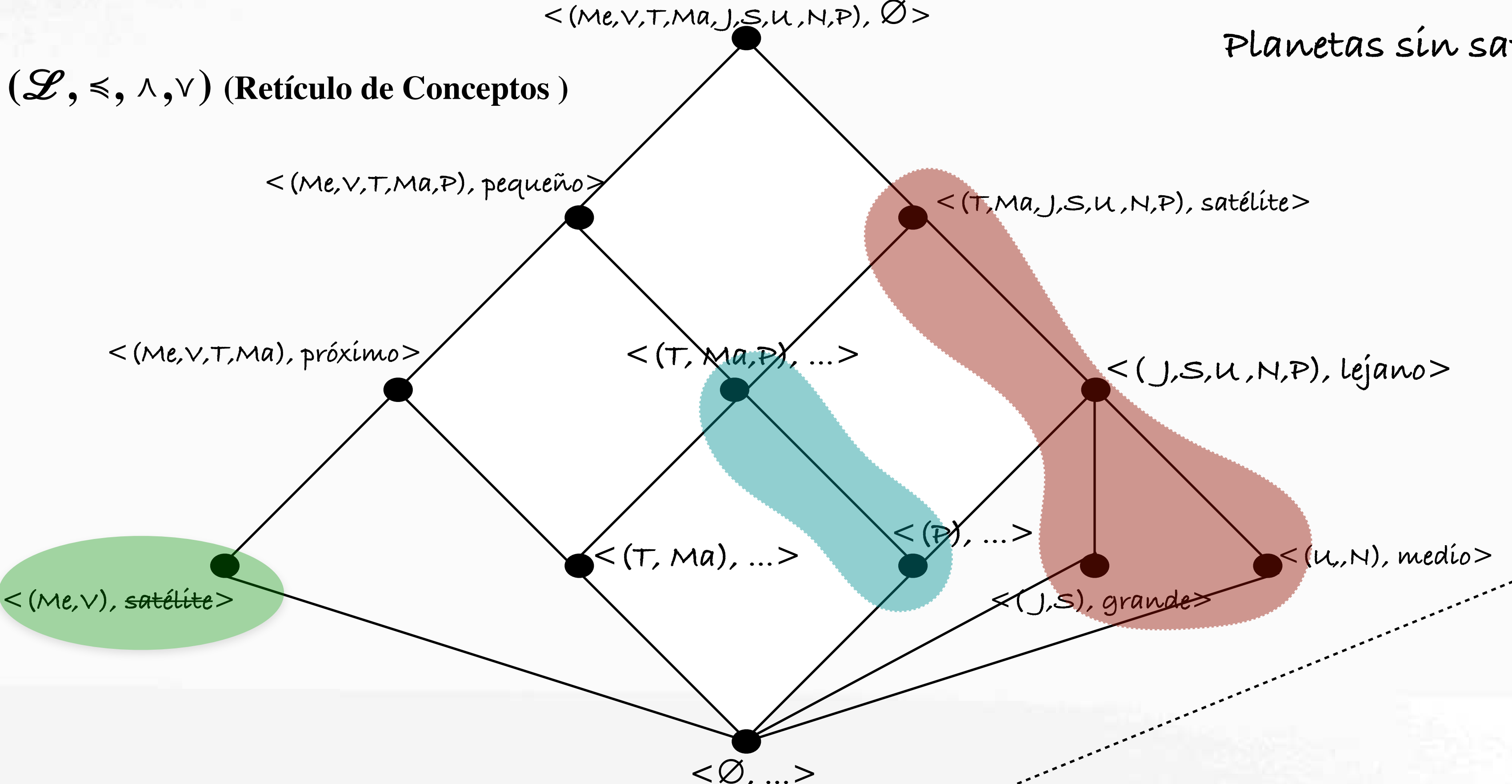


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A,B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



Planetas sin satélite:

PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
~~Mercur(Me)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
~~Venus (VE)~~	~~x~~			~~x~~			~~x~~
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

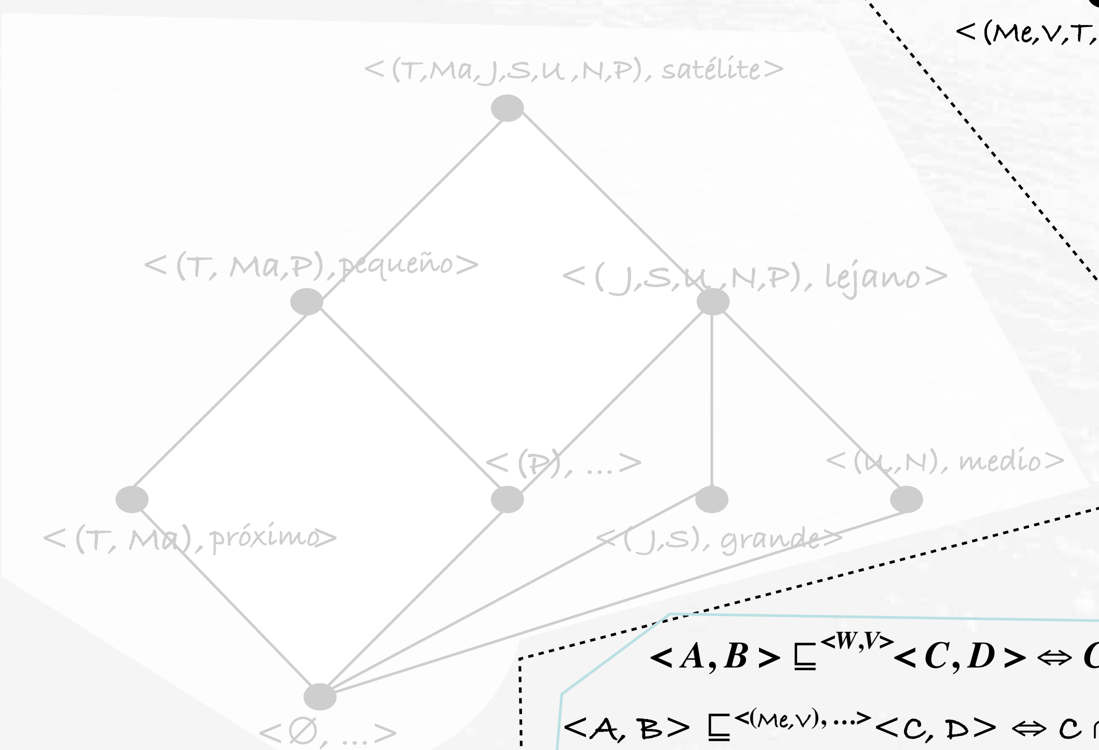
Contexto de los Planetas válido hasta 2006

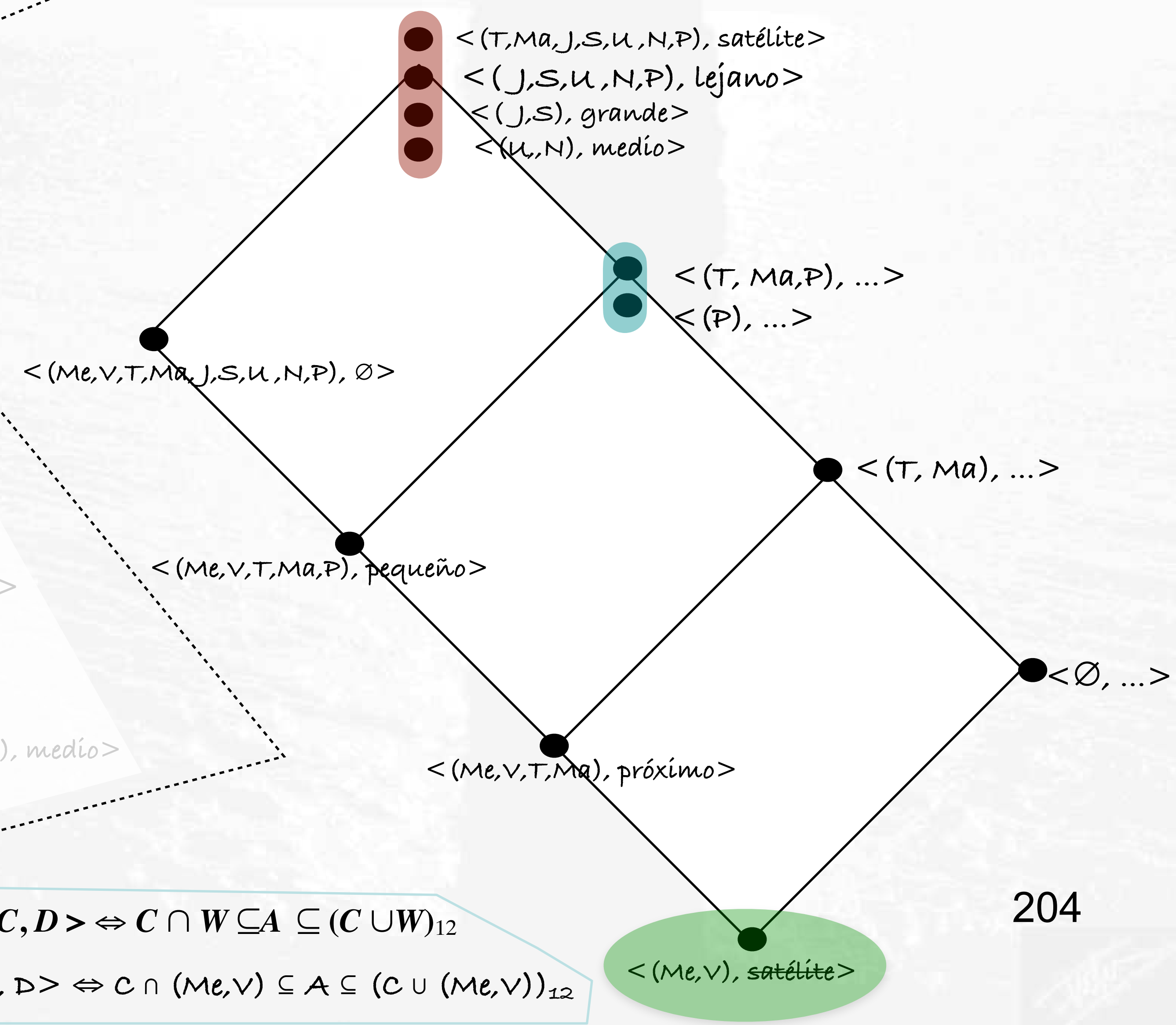
Perspectiva: Objetos sin satélite

$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\ \cancel{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\ \cancel{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\ \cancel{satélite}>})$

(Retículo distributivo)

$(\mathscr{L}_{(Me,V)}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



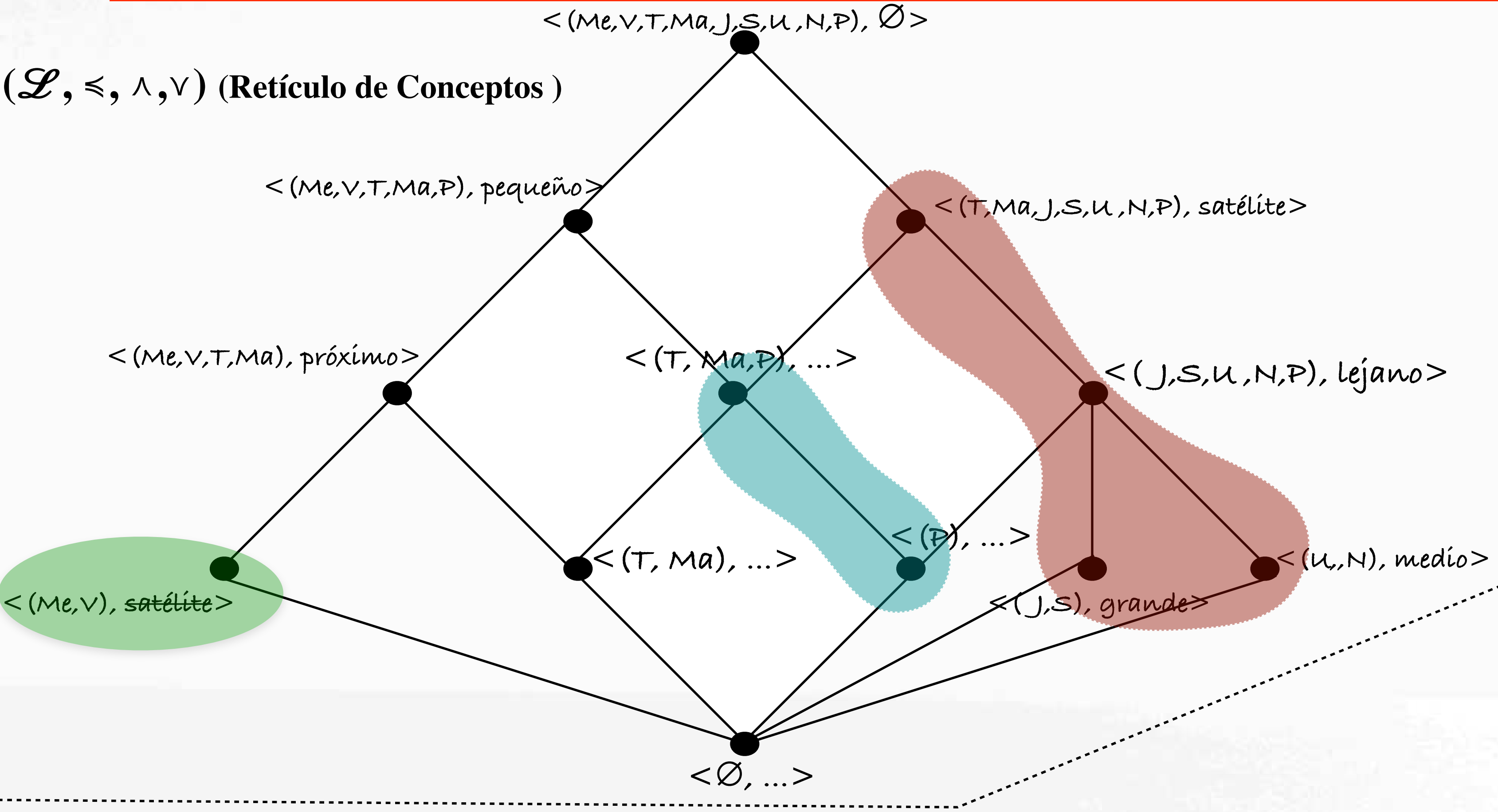


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A,B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



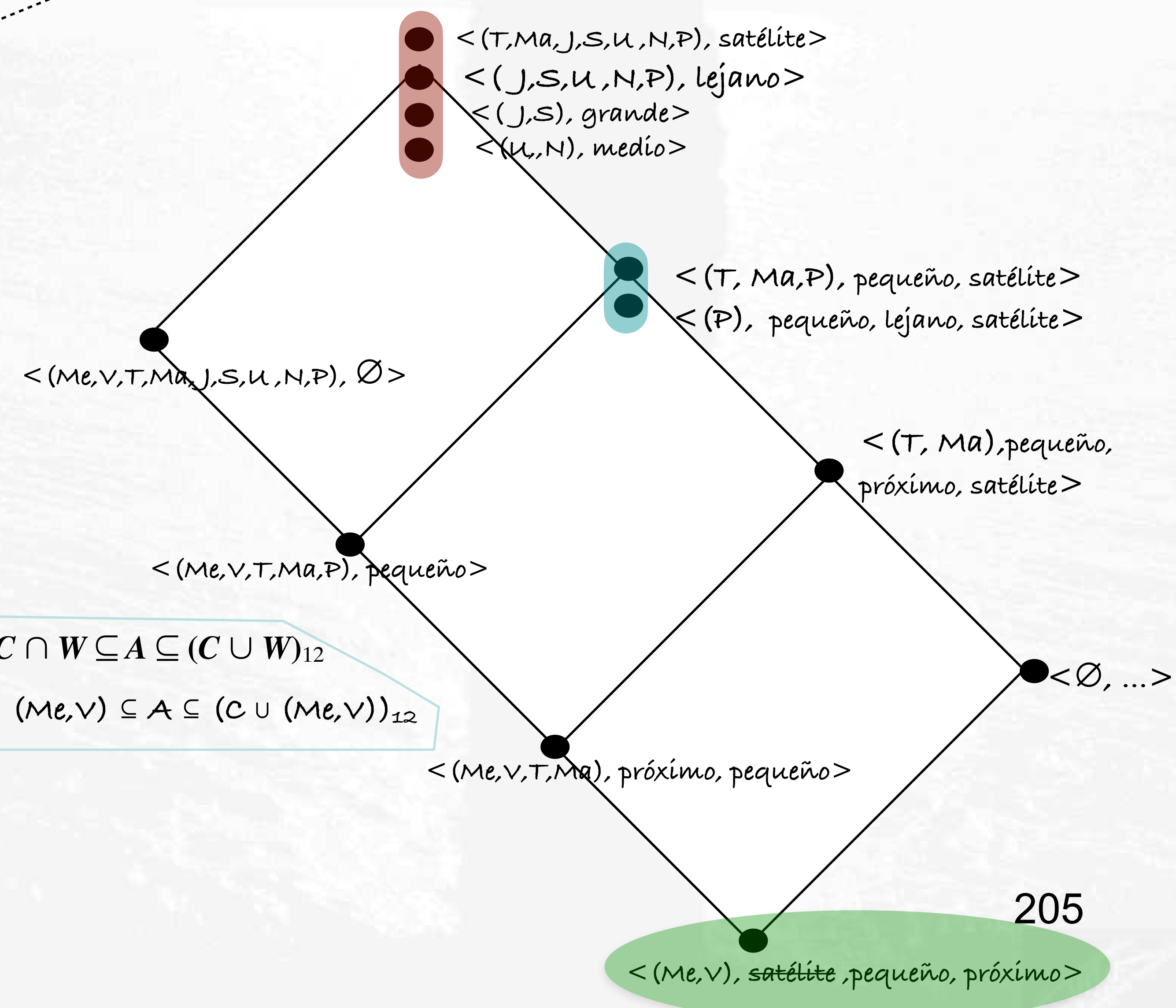
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	MOON (wm)	MOON (nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objetos sin satélite

$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>})$

(Retículo distributivo)

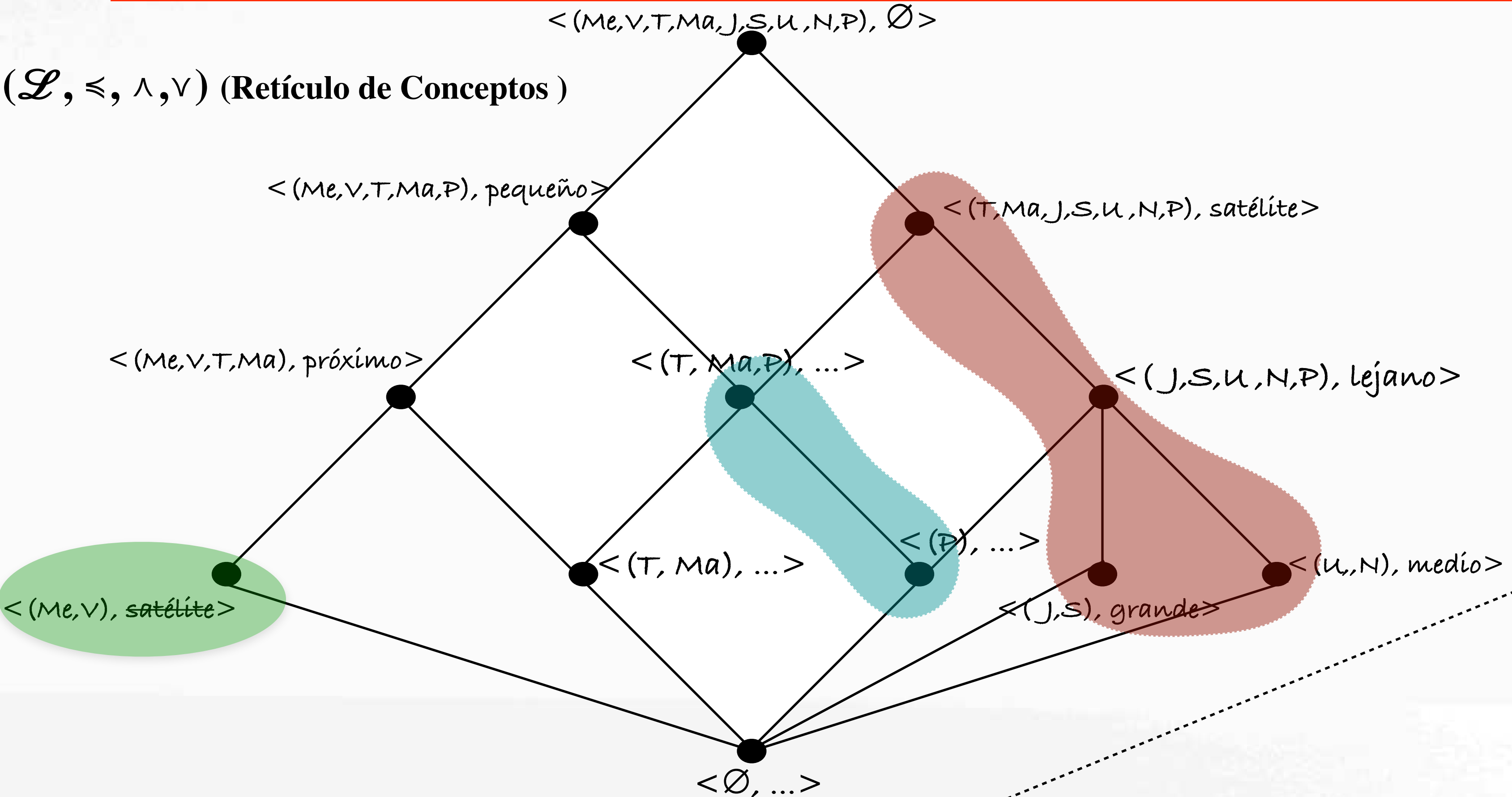


$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A, B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



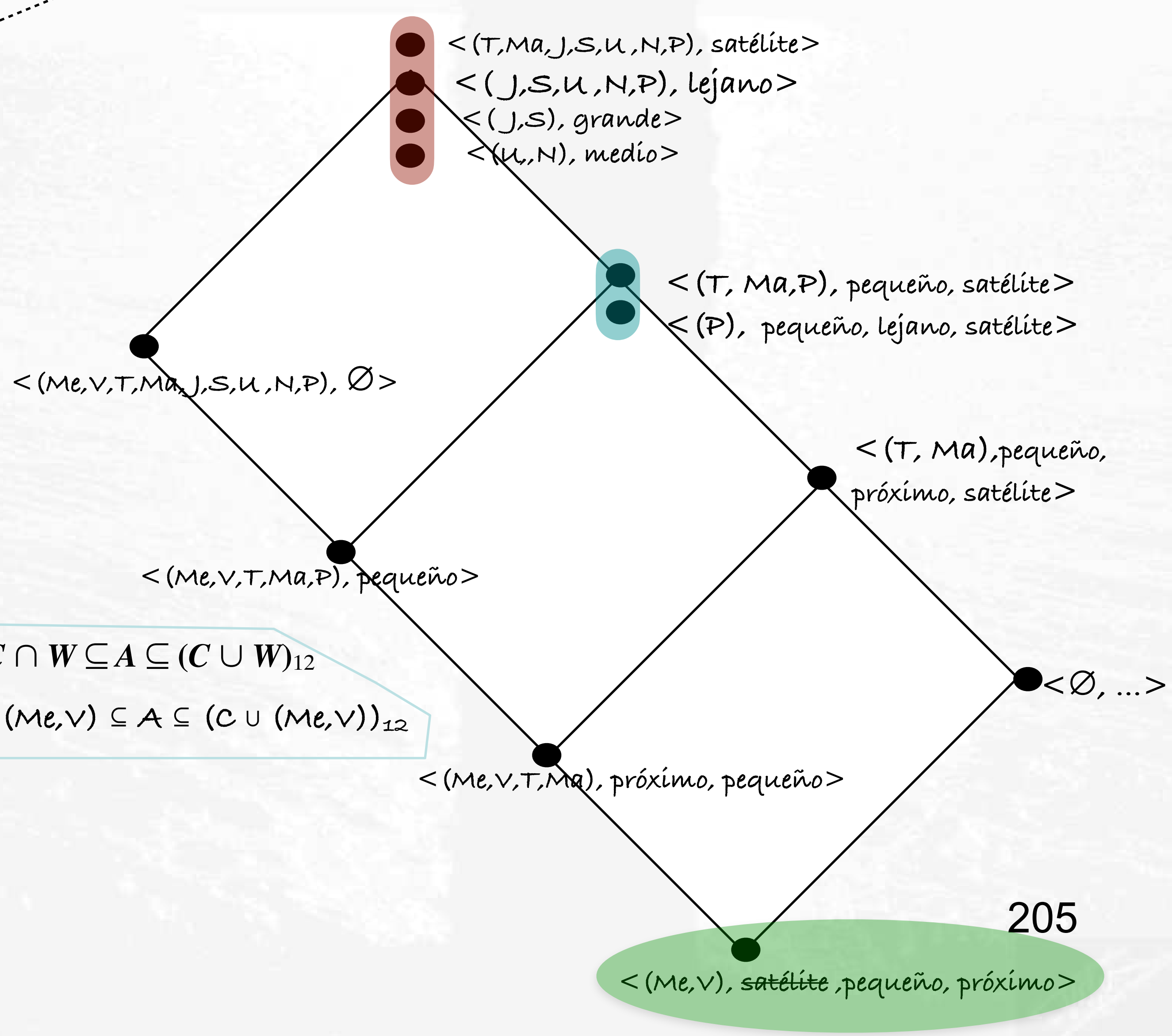
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON	NO MOON
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)	(wm)	(nm)
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objetos sin satélite

$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\ \text{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\ \text{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\ \text{satélite}>})$

(Retículo distributivo)



<(Me,V), ~~satélite~~> (pequeño, próximo)

<∅, pequeño, medio, grande, próximo, lejano, satélite, ~~satélite~~ >

<(Me,V,T,Ma), próximo> (pequeño)

<(Me,V,T,Ma,P), pequeño>

<(T, Ma), pequeño, próximo, satélite>

<(Me,V,T,Ma,J,S,U,N,P), ∅>

<(T, Ma,P), pequeño, satélite>

<(P), pequeño, lejano, satélite>

$$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$$

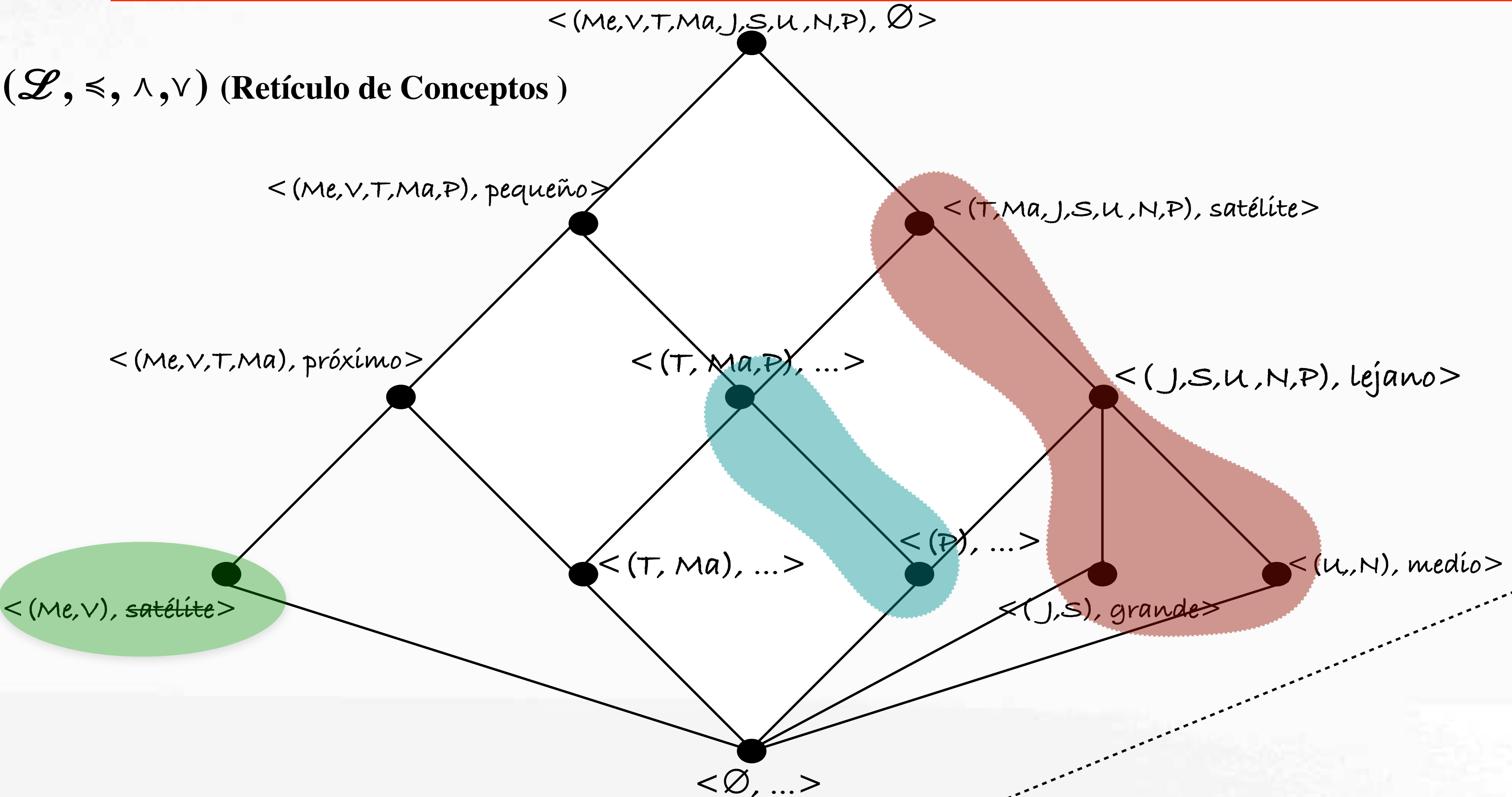
$$<A, B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\dots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$$

<(T,Ma,J,S,U,N,P), satélite> <(J,S,U,N,P), lejano> (satélite)

<(J,S), grande> (lejano, satélite) <(U,N), medio> (lejano, satélite)

Pre-orden de actividad: $(<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D>) \Leftrightarrow ([<C,D> \wedge <W,V>] \preccurlyeq <A,B> \preccurlyeq [<C,D> \vee <W,V>])$

$(\mathscr{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ **(Retículo de Conceptos)**



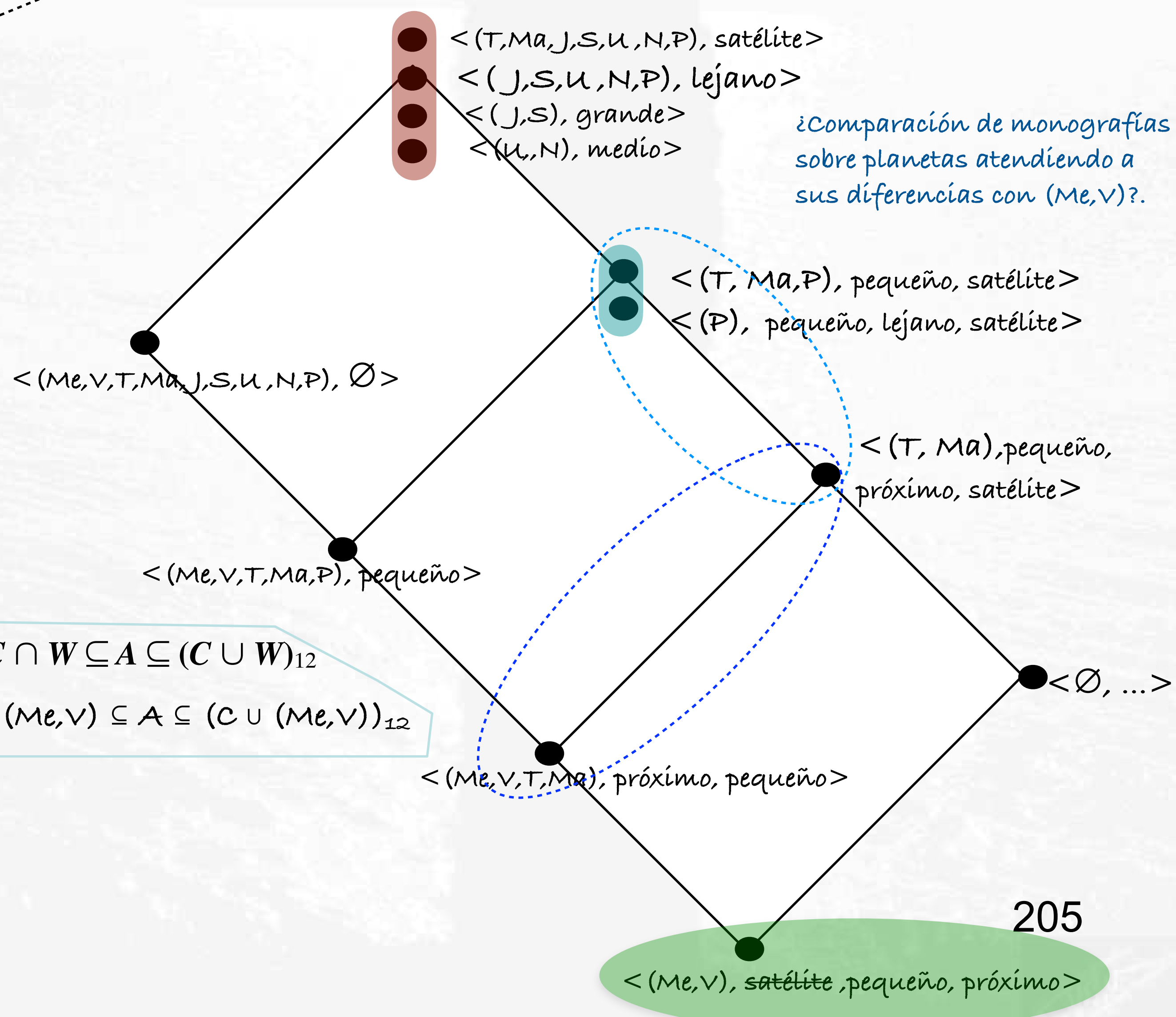
PLANETS	SIZE			DISTANCE FROM SUN		WITH MOON (wm)	NO MOON (nm)
	small (ss)	medium (sm)	big (sb)	near (dn)	far (df)		
Mercur(Me)	x			x			x
Venus (VE)	x			x			x
Earth (Ea)	x			x		x	
Marte (Ma)	x			x		x	
Jupiter (J)			x		x	x	
Saturn (S)			x		x	x	
Uran (U)		x			x	x	
Neptun(Ne)		x			x	x	
Pluto (P)	x				x	x	

Contexto de los Planetas válido hasta 2006

Perspectiva: Objetos sin satélite

$([\mathscr{L}]_{(Me,V)}, \sqsubseteq^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>}, \sqcap^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>}, \sqcup^{<(Me,V),\, \cancel{satélite}>})$

(Retículo distributivo)



<(Me,V), ~~satélite~~> (pequeño, próximo)

<∅, pequeño, medio, grande, próximo, lejano, satélite, ~~satélite~~ >

<(Me,V,T,Ma), próximo> (pequeño)

<(Me,V,T,Ma,P), pequeño>

<(T, Ma), pequeño, próximo, satélite>

<(Me,V,T,Ma,J,S,U,N,P), ∅>

<(T, Ma,P), pequeño, satélite>

<(P), pequeño, lejano, satélite>

$<A,B> \sqsubseteq^{<W,V>} <C,D> \Leftrightarrow C \cap W \subseteq A \subseteq (C \cup W)_{12}$

$<A, B> \sqsubseteq^{<(Me,V),\ldots>} <C, D> \Leftrightarrow C \cap (Me,V) \subseteq A \subseteq (C \cup (Me,V))_{12}$

<(T,Ma,J,S,U,N,P), satélite> <(J,S,U,N,P), lejano> (satélite)

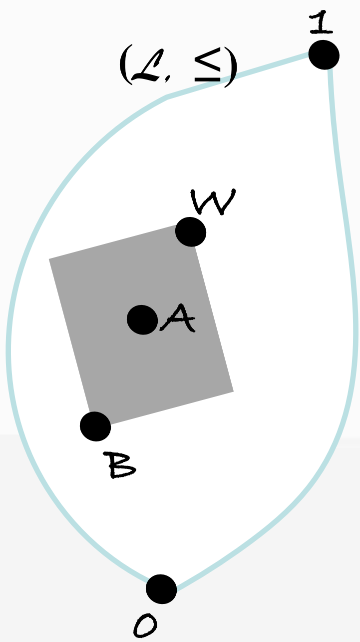
<(J,S), grande> (lejano, satélite) <(U,N), medio> (lejano, satélite)

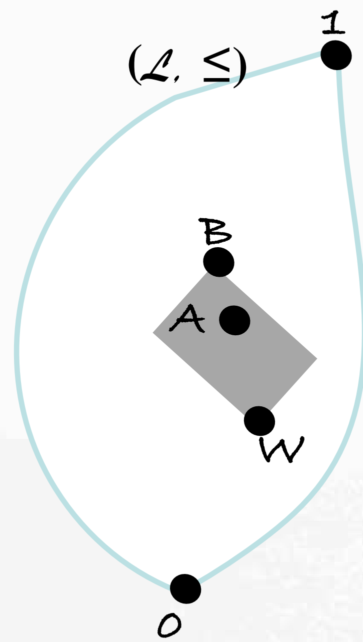
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en retículos distributivos

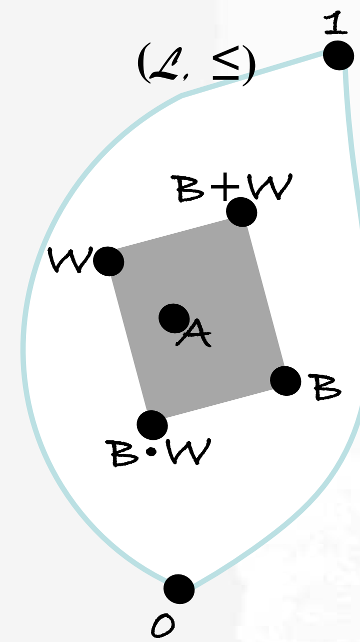
La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B+W)$$

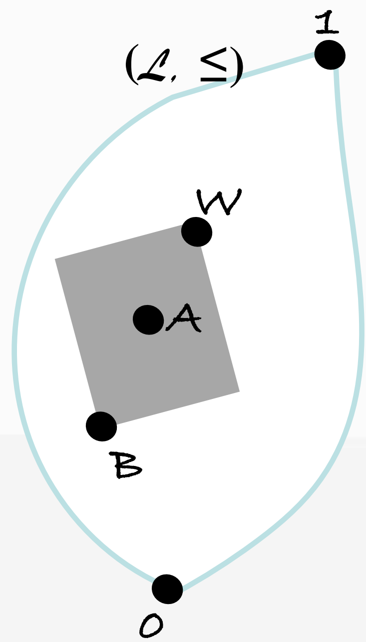
$$A \in [\, B{\cdot}W \,,\; B+W \,]$$

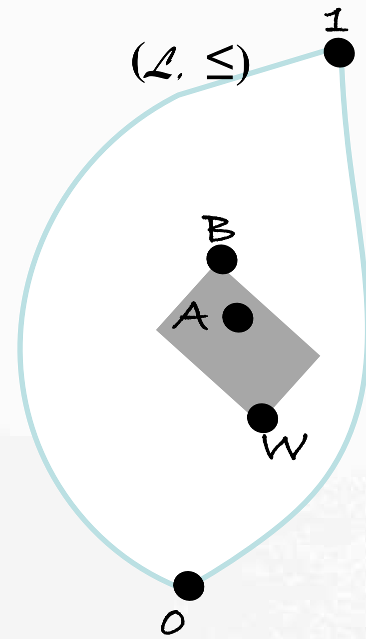


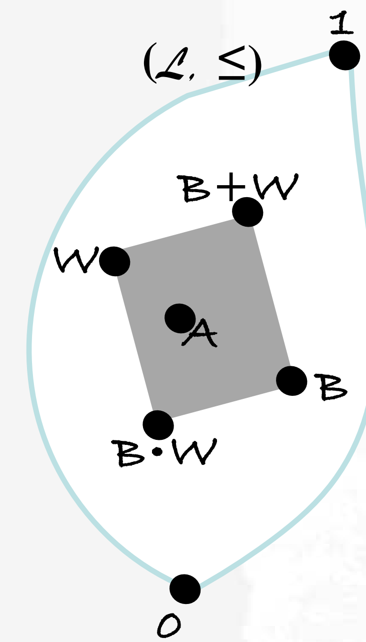


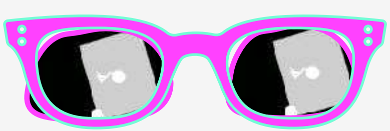


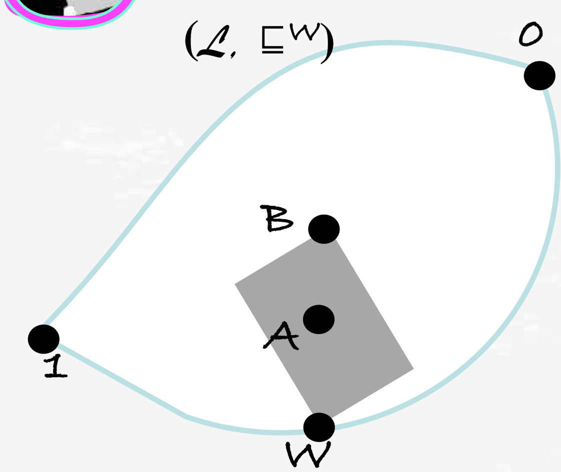
$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W) \qquad A \in [\, B{\cdot}W \,,\; B{+}W \,]$$

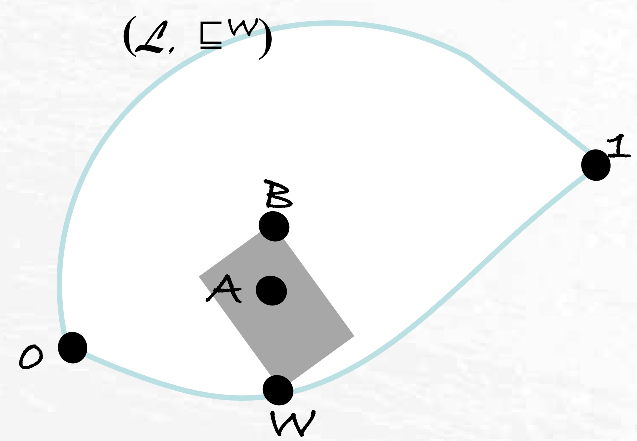


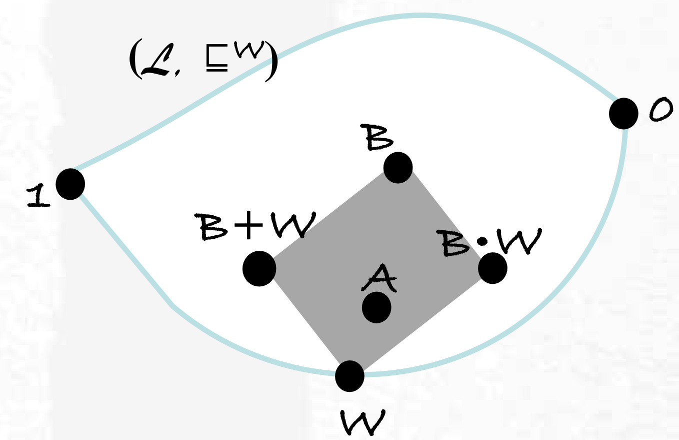




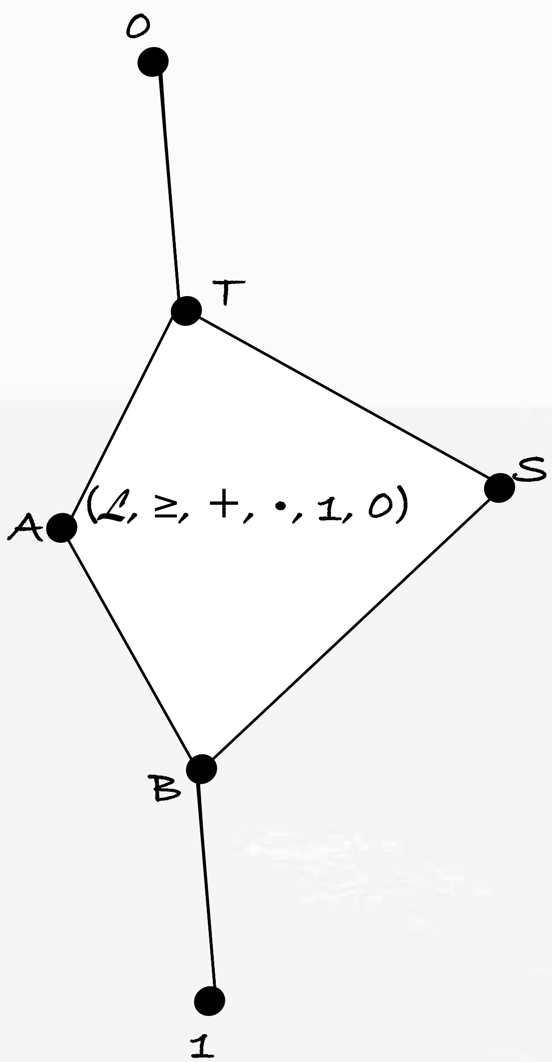






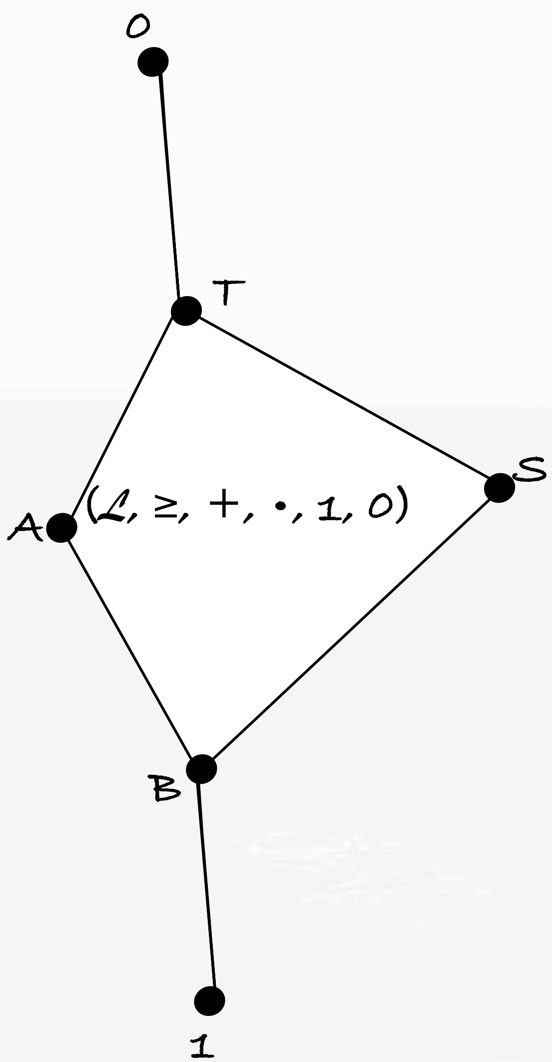


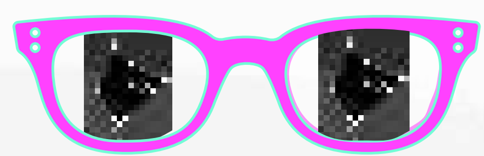
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^{W}$ en un retículo distributivo acotado



Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

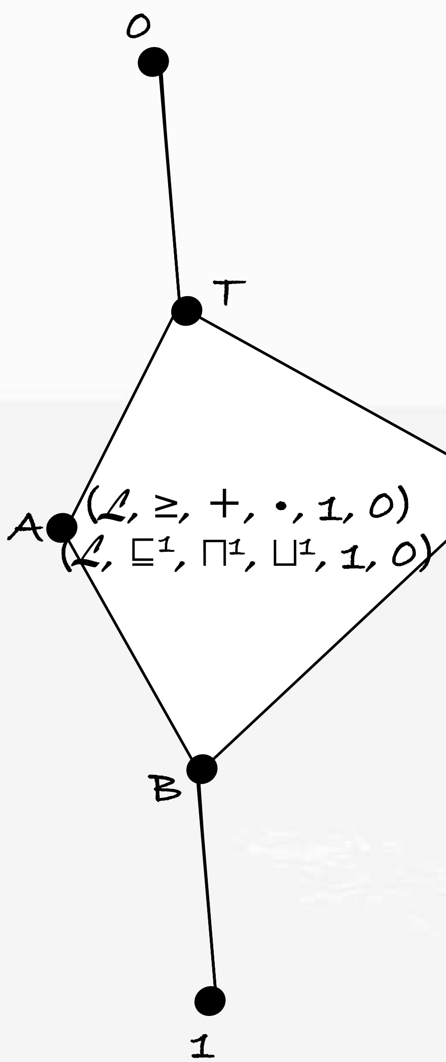
$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B+W)$$

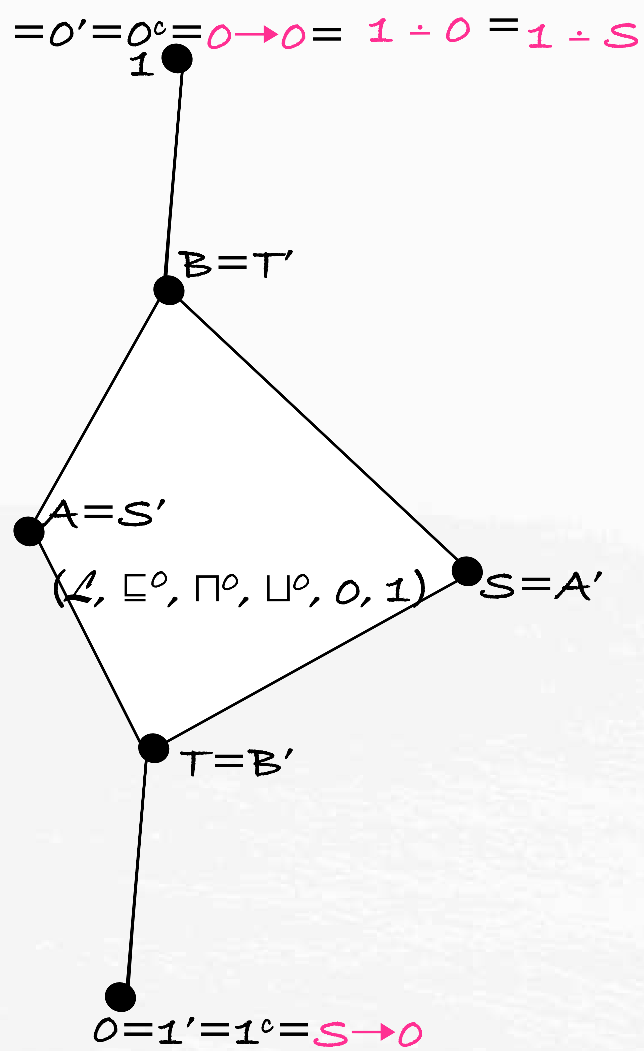




<u>*Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado*</u>

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W)$$

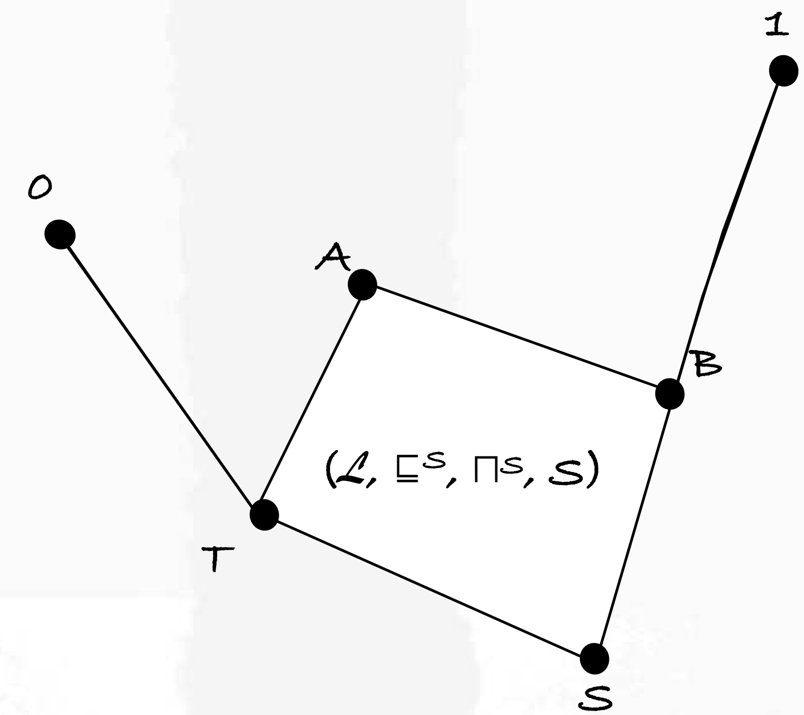


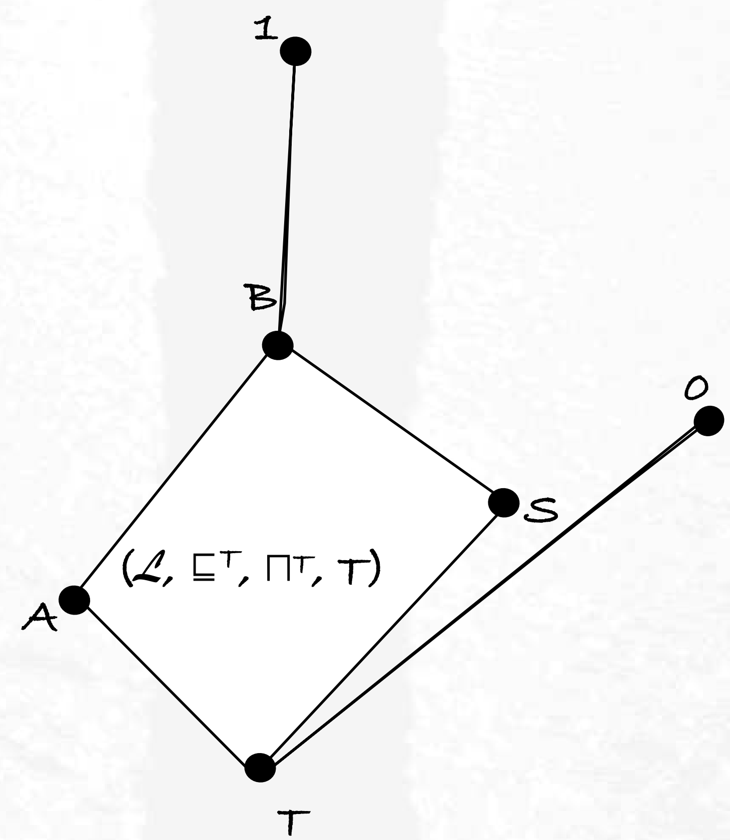


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Retículo acotado distributivo.

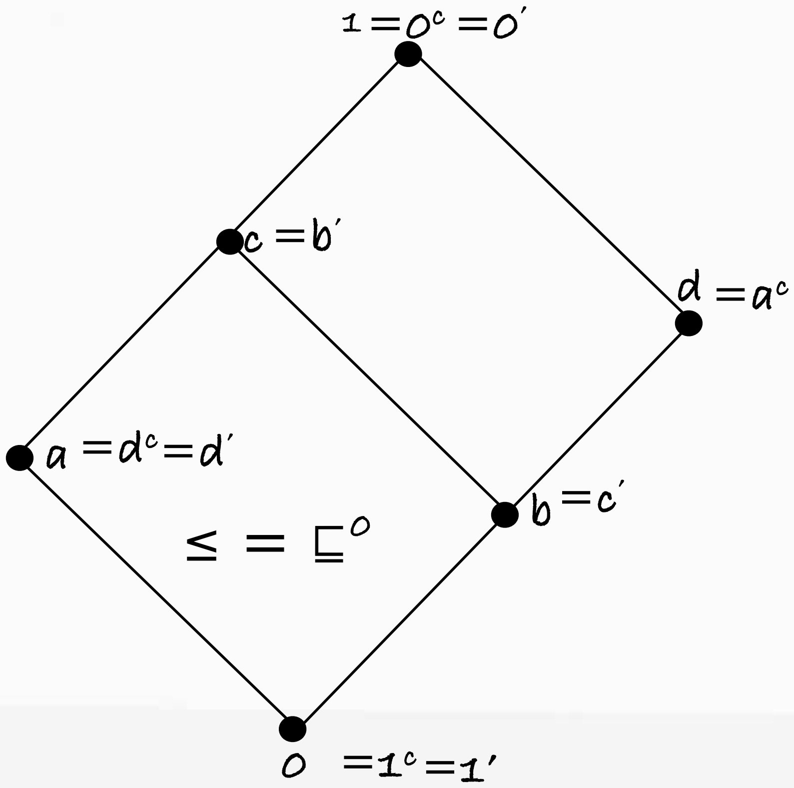
etc





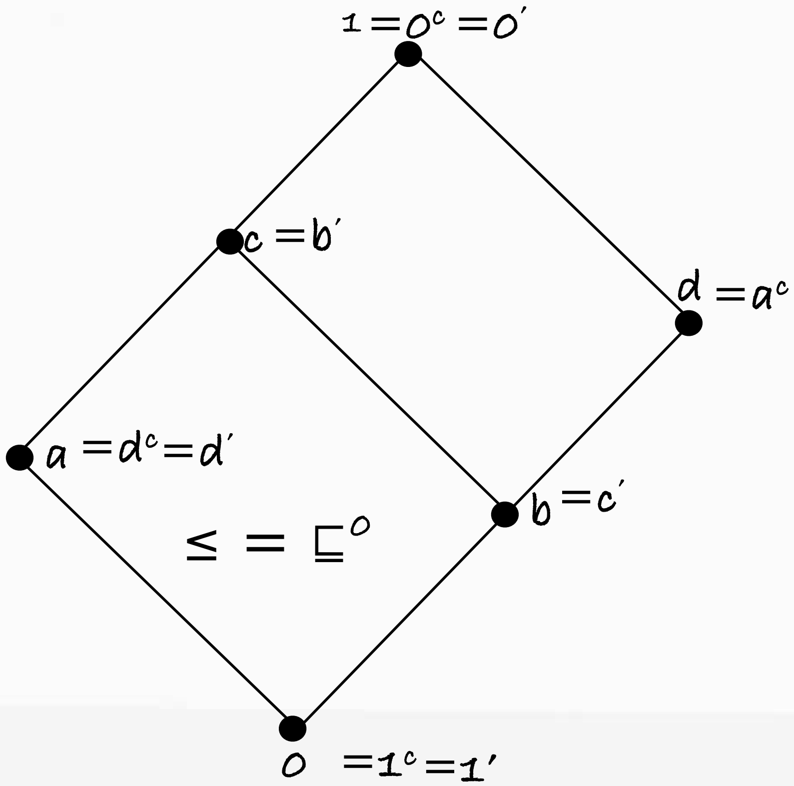
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

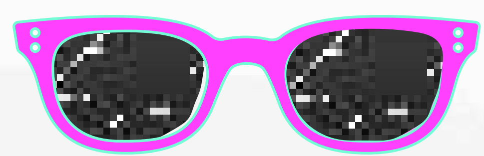
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

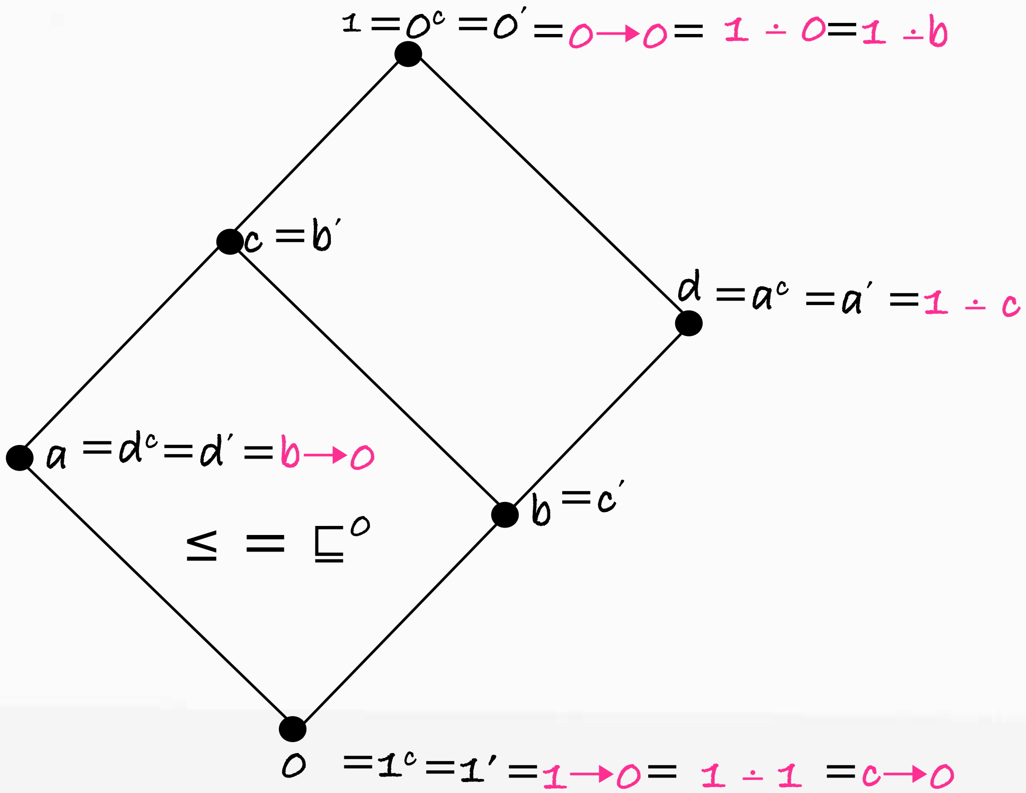




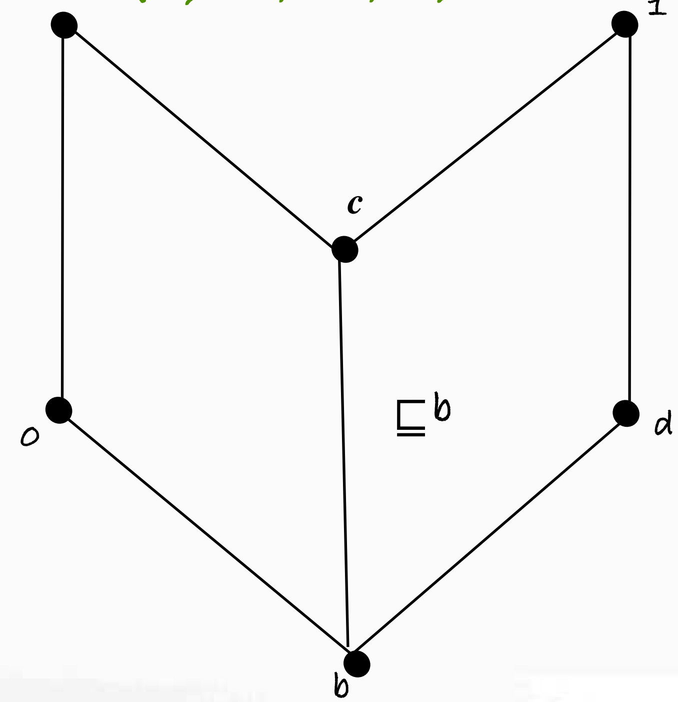
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

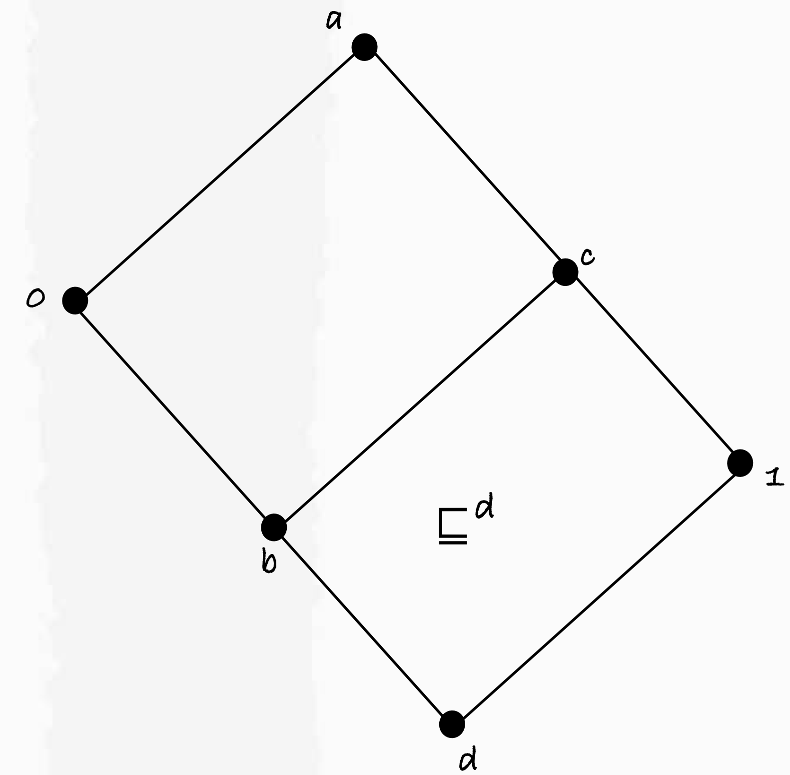
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^0, \sqcap^0, \sqcup^0, 0, 1)$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^b, \sqcap^b, b)$

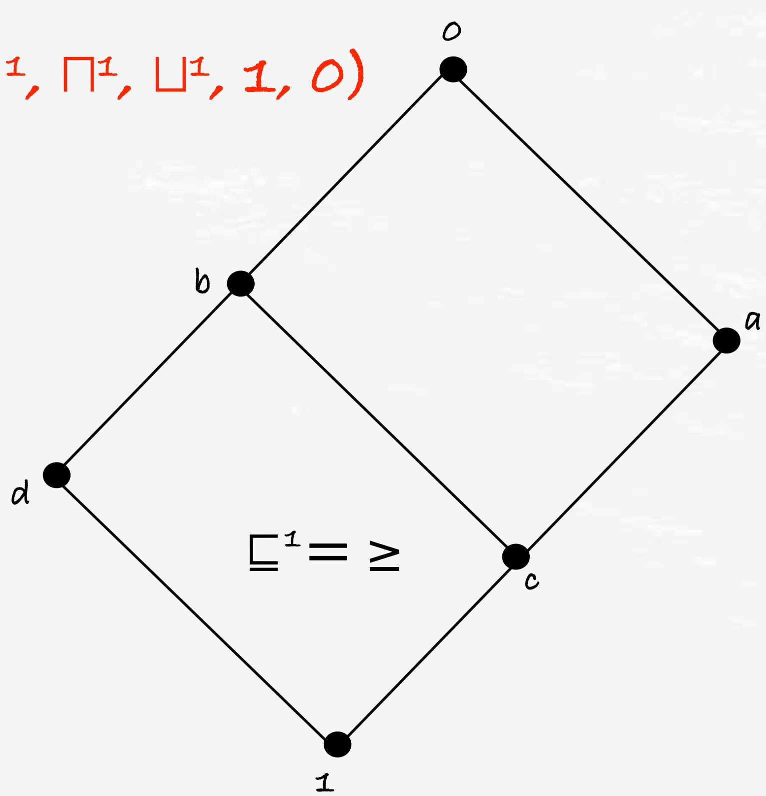


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^d, \sqcap^d, \sqcup^d, d, a)$

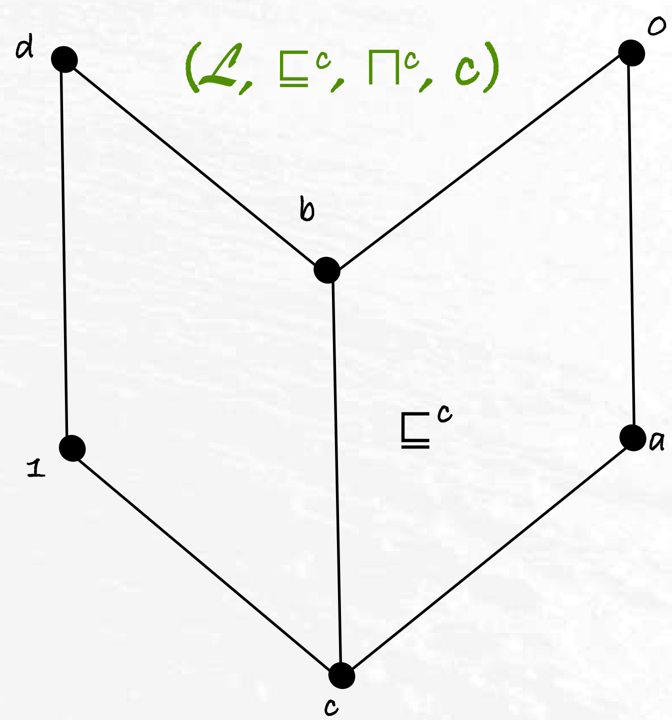


$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$$

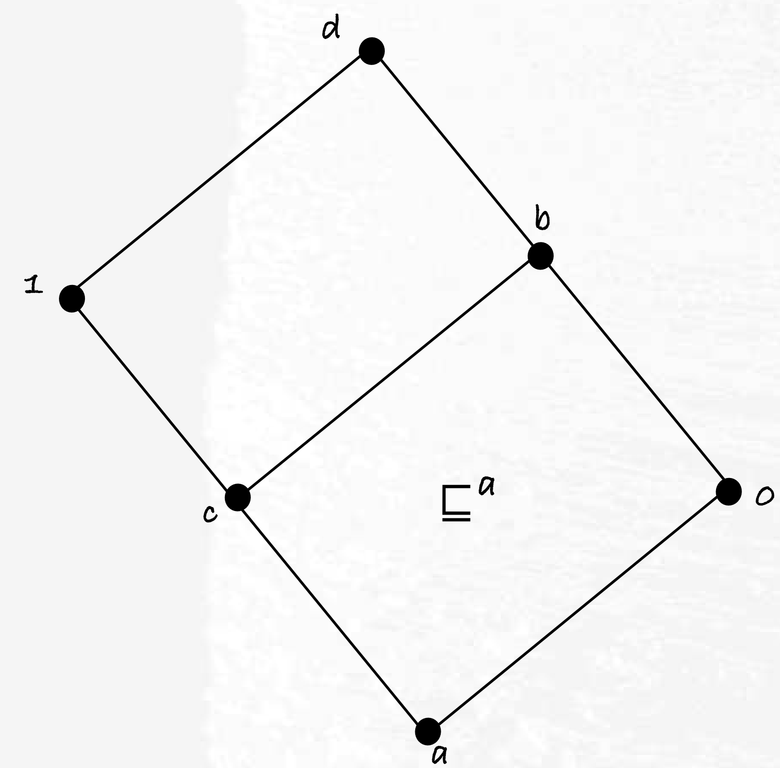
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^1, \sqcap^1, \sqcup^1, 1, 0)$



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^c, \sqcap^c, c)$

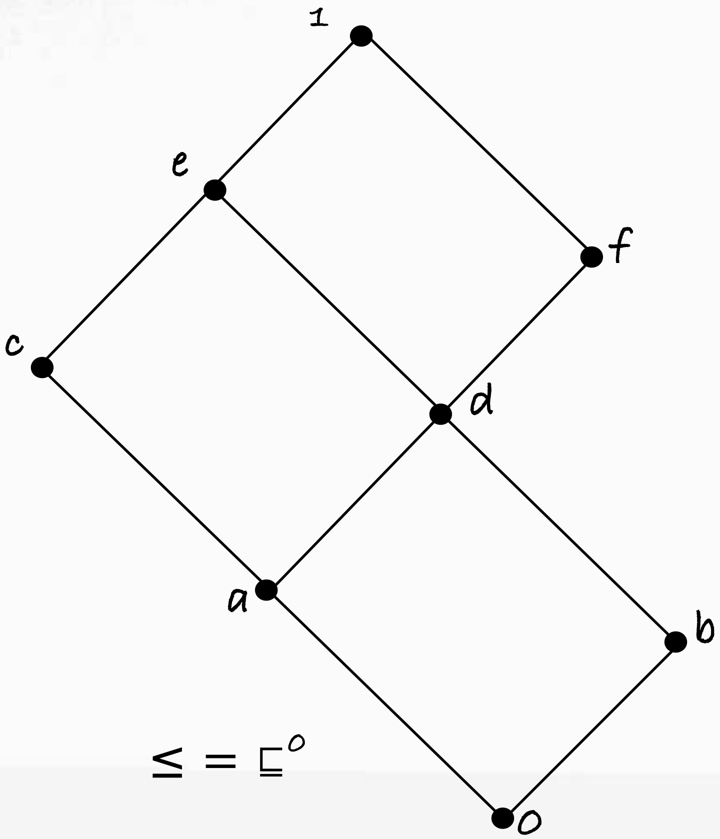


$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^a, \sqcap^a, \sqcup^a, a, d)$

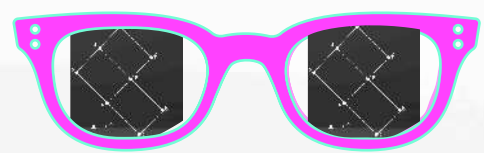


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

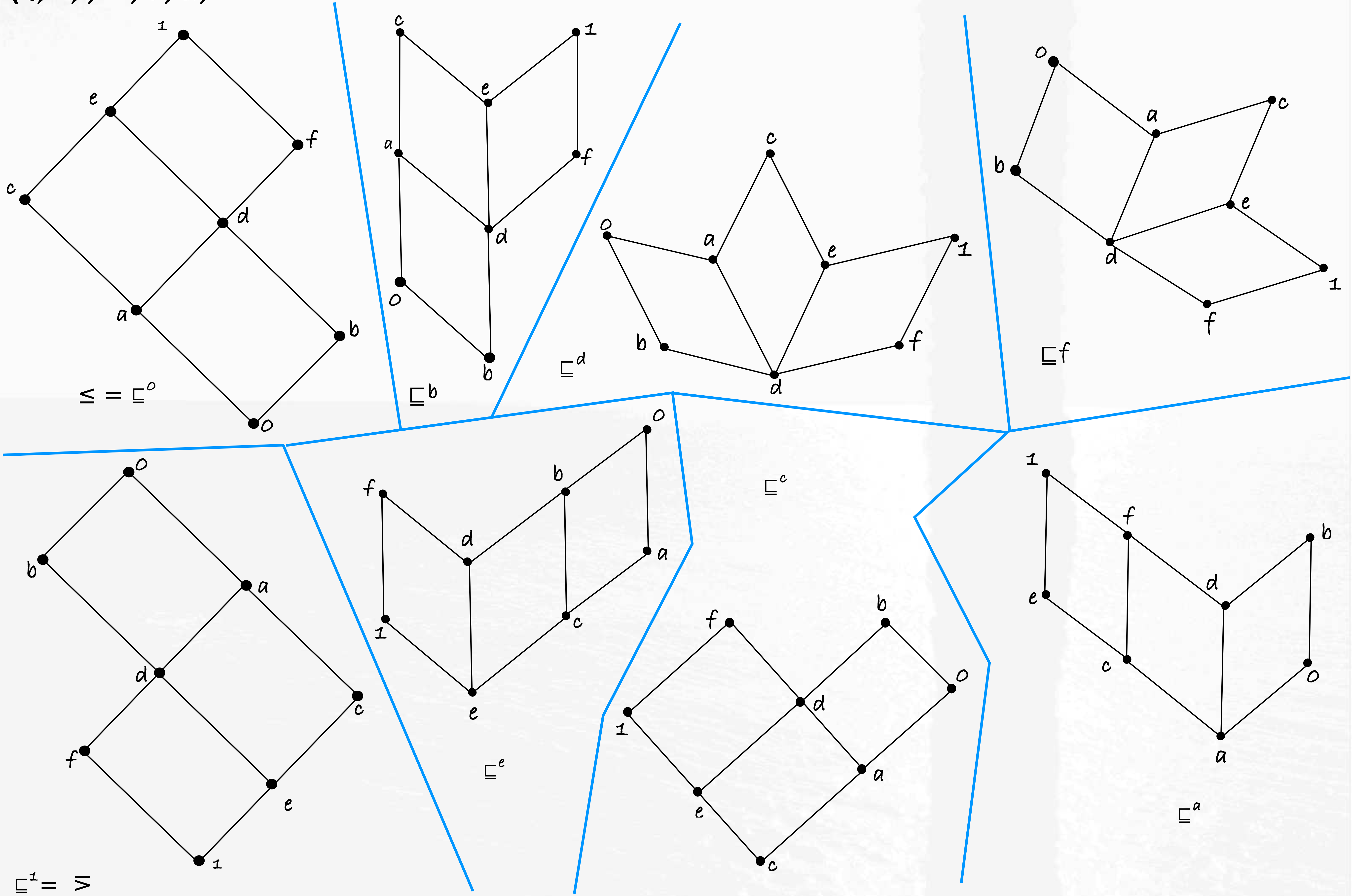


$\leq \; = \; \sqsubseteq^O$



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

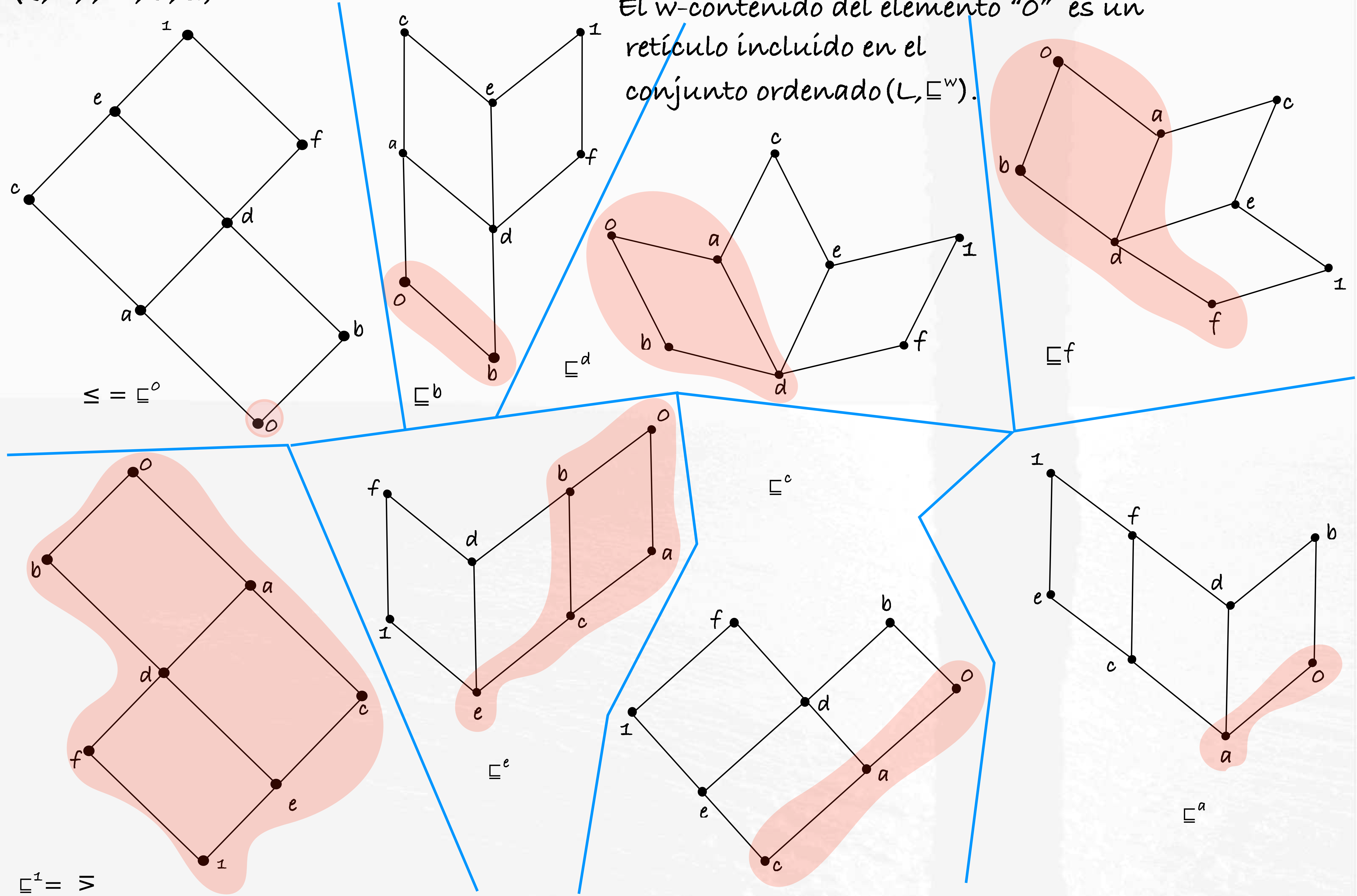
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

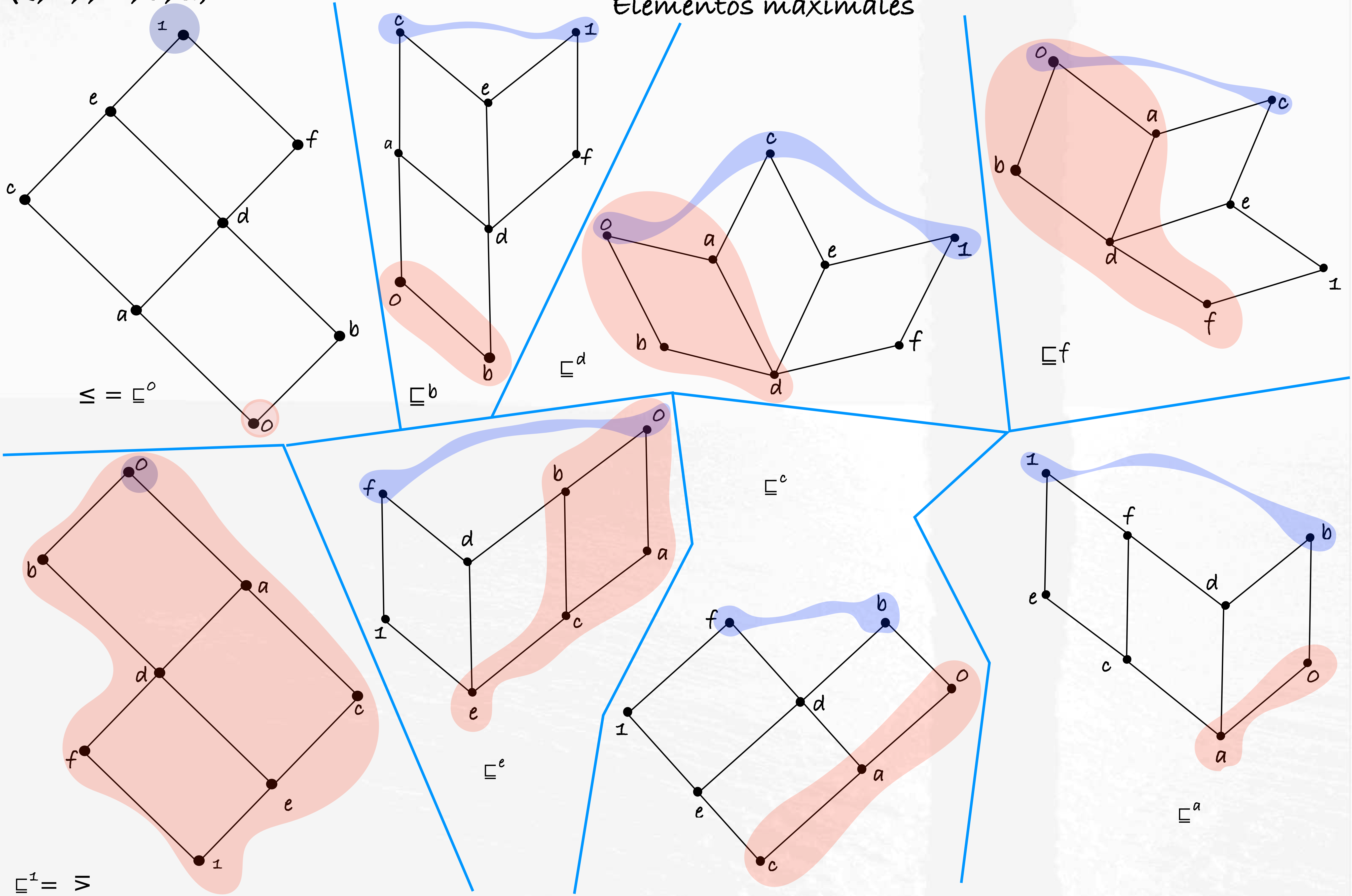
El w-contenido del elemento "0" es un retículo incluido en el conjunto ordenado $(L, \sqsubseteq^w)$.



($\mathcal{L}$, ≤, ·, +, 0, 1)

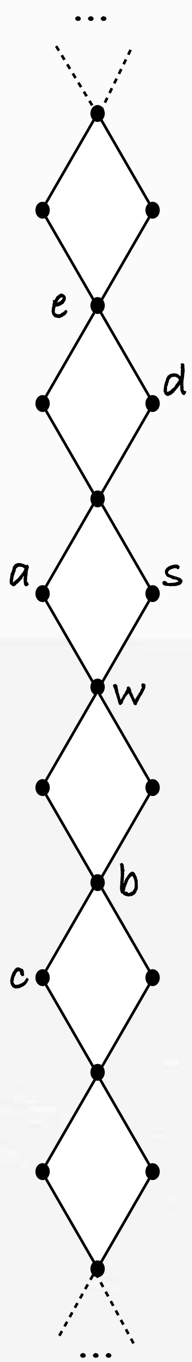
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

Elementos maximales



Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo no acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

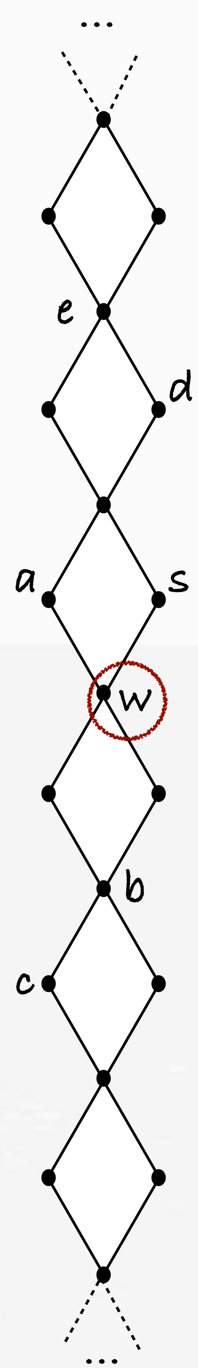


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$

Retículo distributivo no finito y no acotado.

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo no acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W)$$

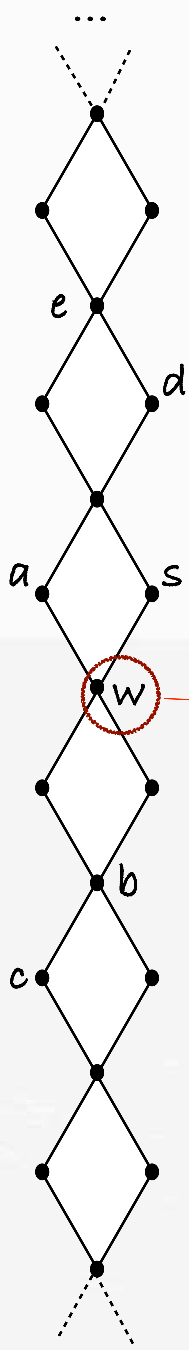


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$

Retículo distributivo no finito y no acotado.

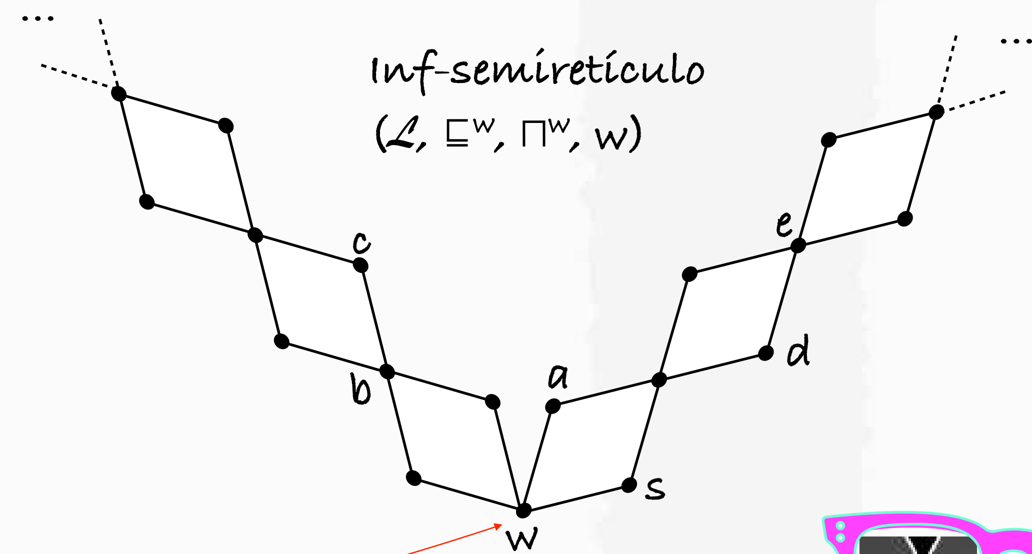
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo no acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B+W)$$



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$

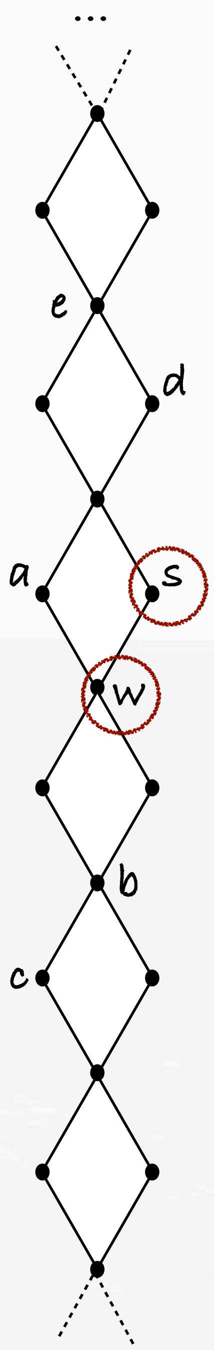
Retículo distributivo no finito y no acotado.



Inf-semiretículo
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo no acotado

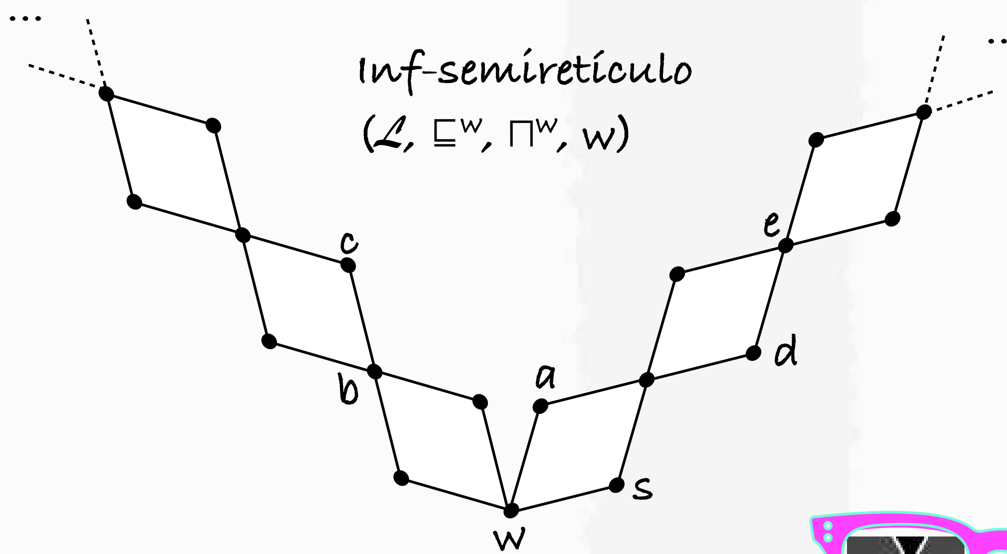
$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W)$$

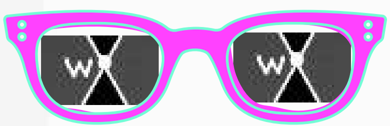


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$

Retículo distributivo no finito y no acotado.

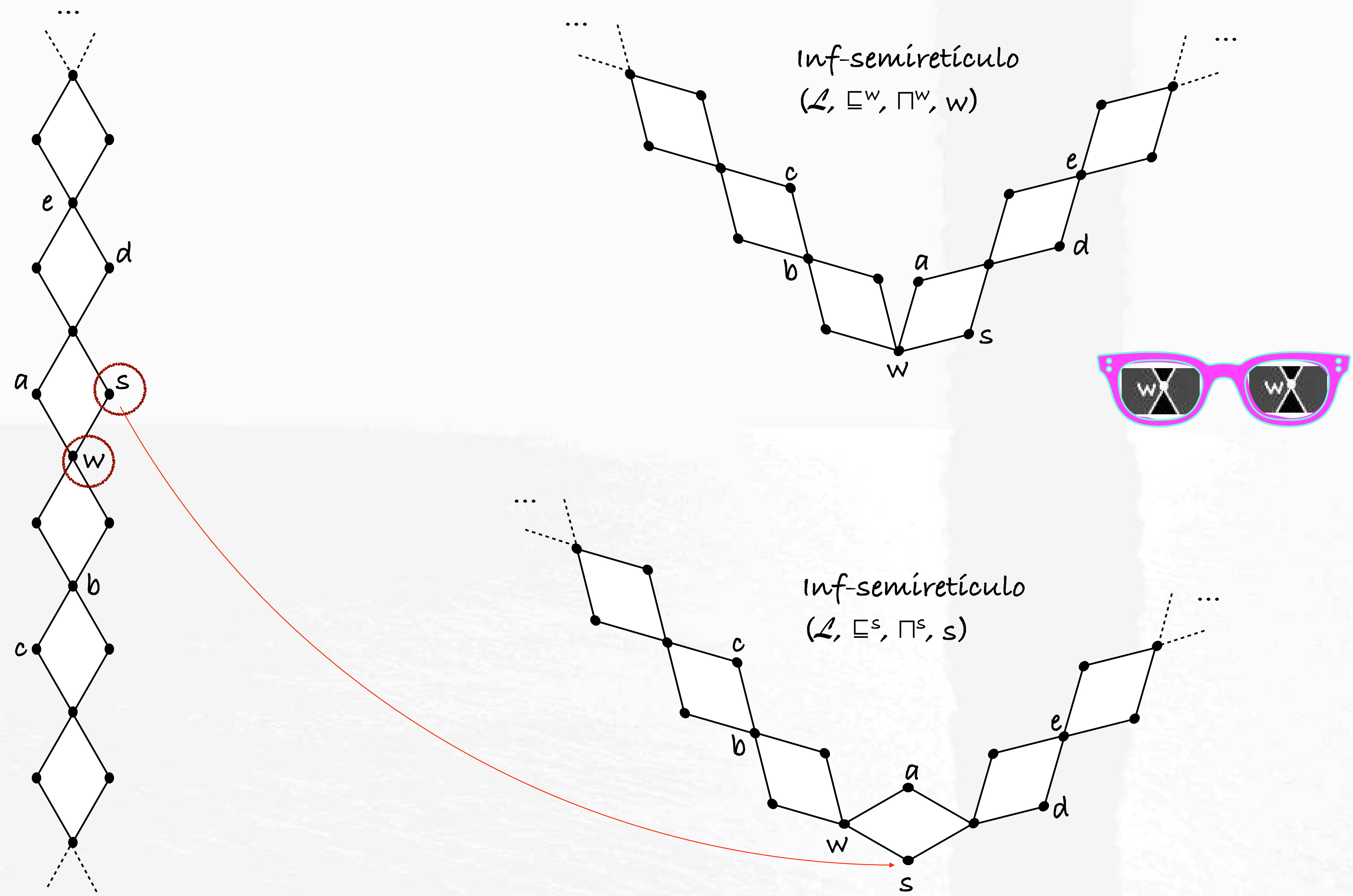
Inf-semiretículo
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, w)$





Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo no acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B+W)$$

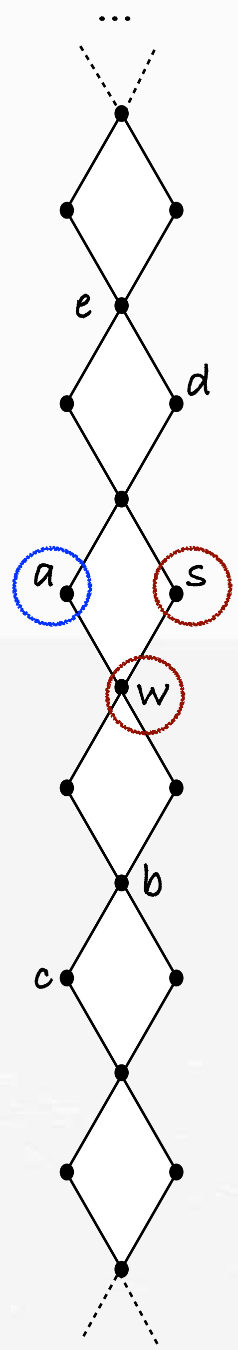


($\mathcal{L}$, $\leq$, $\cdot$, $+$)

Retículo distributivo no finito y no acotado.

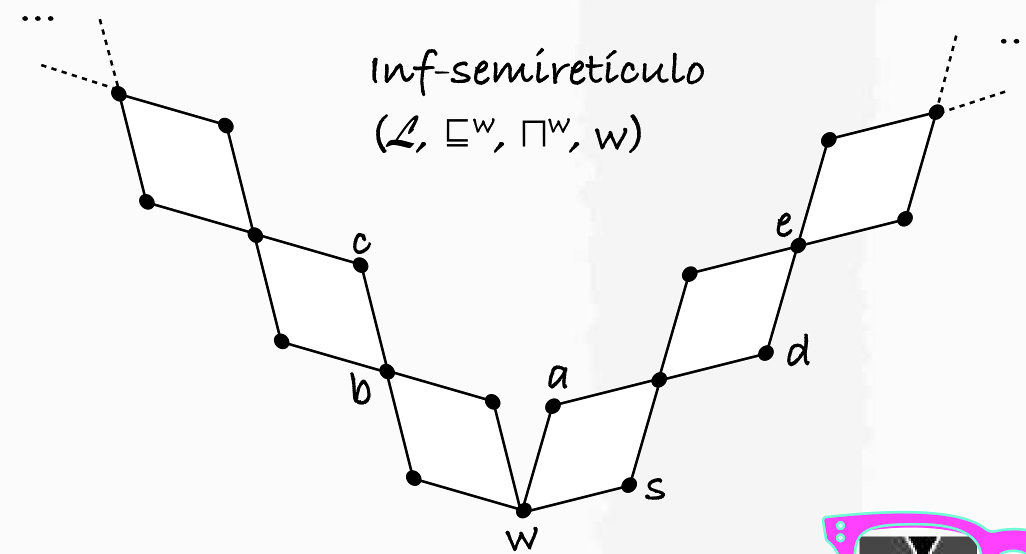
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^{W}$ en un retículo distributivo no acotado

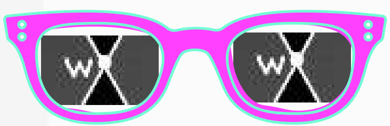
$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W)$$

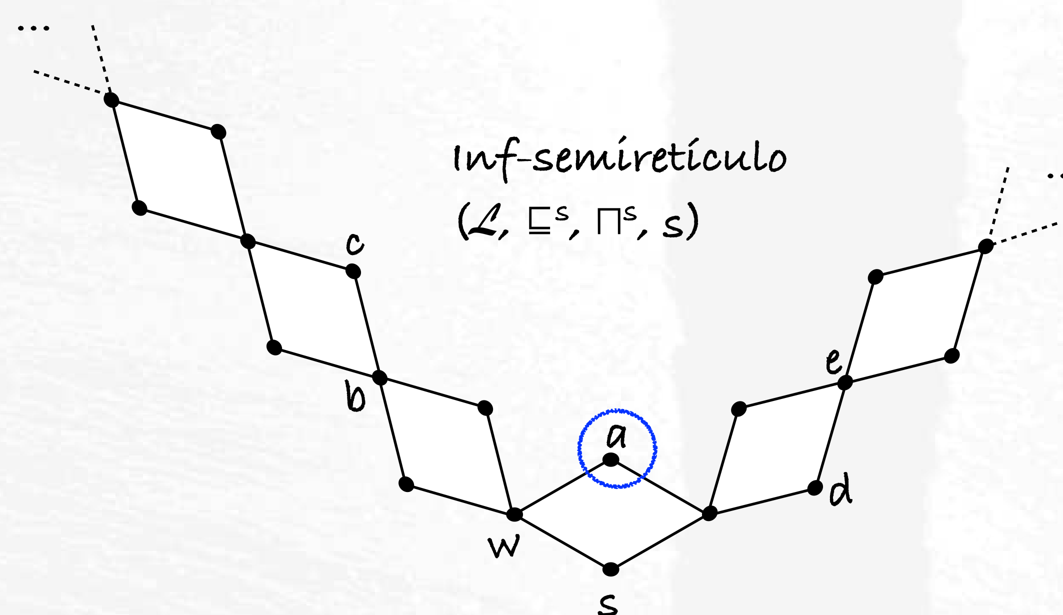


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$

Retículo distributivo no finito y no acotado.



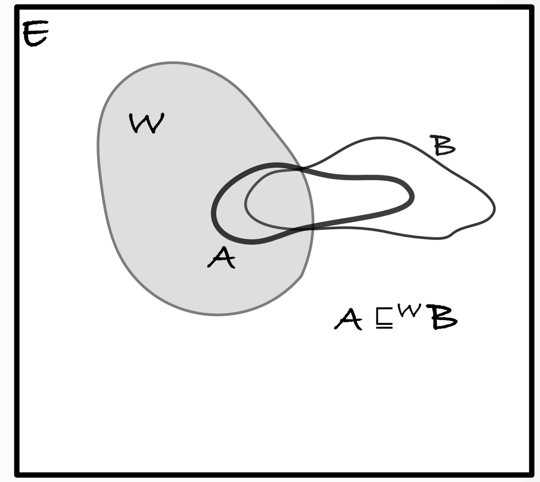


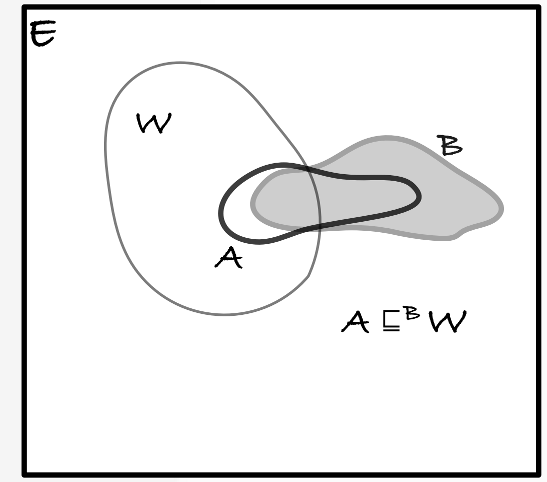


$s \rightarrow a = a \div s = a$ ($\sqsubseteq^{s}$-maximal)

Otras propiedades de los órdenes de actividad

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE





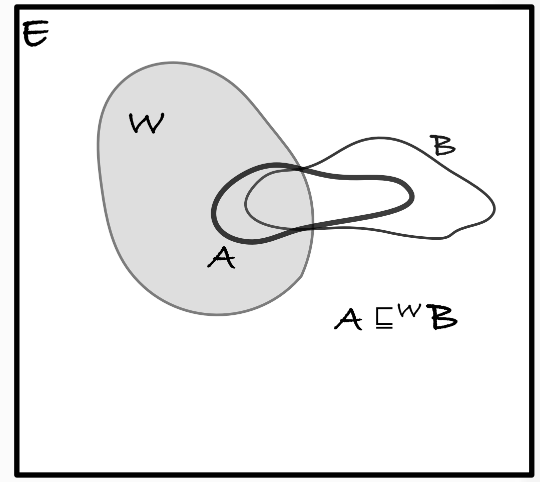
Proposición. Se verifica: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$.

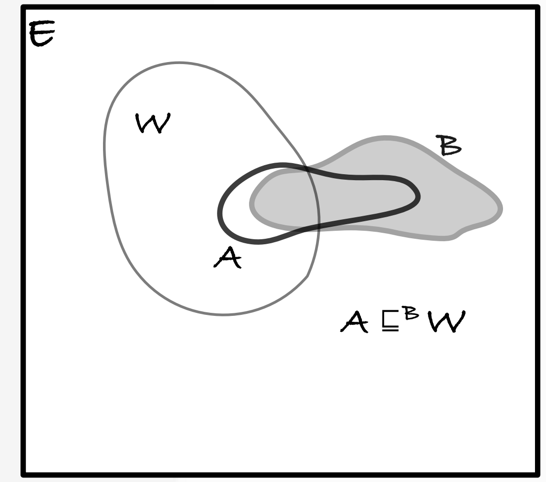
Demostración. De la definición

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$. ∎

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE





Proposición. Se verifica: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$.

Demostración. De la definición

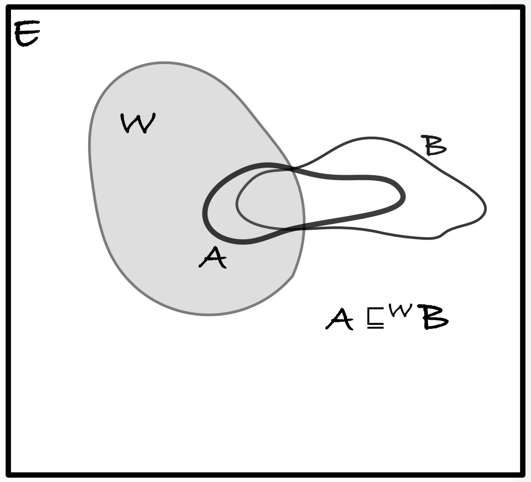
$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

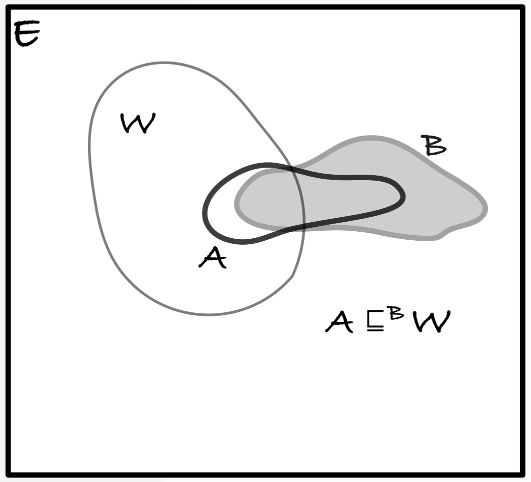
Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$. ∎

Nota.

Si ' es una negación fuerte en L, y B es complementado tal que $B^c = B'$ entonces, para todo A y para todo W:

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)].$$ ∎





Proposición. Se verifica: $A\sqsubseteq^{\omega}B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^{B}\omega$.

Demostración. De la definición

$$A\sqsubseteq^{\omega}B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

Se deduce la equivalencia: $A\sqsubseteq^{\omega}B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^{B}\omega$. ∎

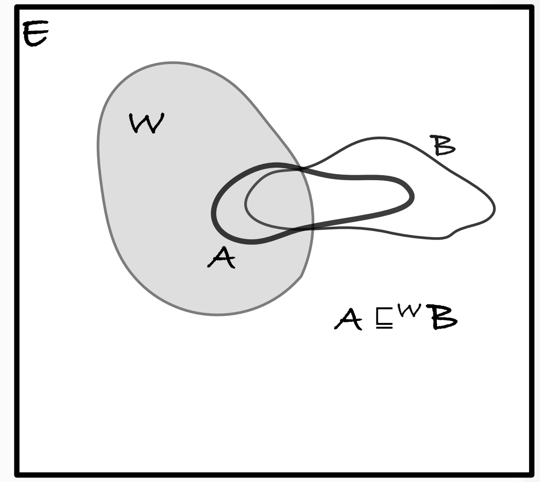
Nota.

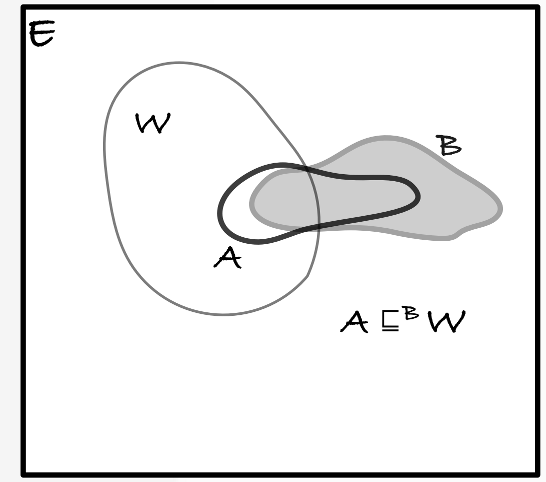
Si ' es una negación fuerte en L, y B es complementado tal que $B^c=B'$ entonces, para todo A y para todo W:

$$A\sqsubseteq^{\omega}B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow A\sqsubseteq^{B}\omega \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)].$$∎

Proposición.

Si ' es una negación fuerte en L, las proposiciones siguientes (i) y (ii) son equivalentes: (i) $A\sqsubseteq^{\omega}B$, (ii) $A'\sqsubseteq^{\omega'}B'$. Y si además, $\omega' = \omega^c$ entonces ambas son equivalentes a (iii) $B'\sqsubseteq^{\omega}A'$. (En consecuencia, la aplicación ' también es una negación fuerte en $(L,\sqsubseteq^{\omega})$).





Proposición. Se verifica: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$.

Demostración. De la definición

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega$. ∎

Nota.

Si ′ es una negación fuerte en L, y B es complementado tal que $B^c = B'$ entonces, para todo A y para todo W:

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} \omega \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)].∎$$

Proposición.

Si ′ es una negación fuerte en L, las proposiciones siguientes (i) y (ii) son equivalentes: (i) $A \sqsubseteq^{\omega} B$, (ii) $A' \sqsubseteq^{\omega'} B'$. Y si además, $\omega' = \omega^c$ entonces ambas son equivalentes a (iii) $B' \sqsubseteq^{\omega} A'$. (En consecuencia, la aplicación ′ también es una negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^{\omega})$).

Distintas expresiones para $\sqcap^{\omega}$ y para $\sqcup^{\omega}$:

$$\begin{aligned} \alpha \sqcap^{\omega} \beta &= (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \omega) + (\beta \cdot \omega) = \\ &(\alpha \cdot \beta) + [(\alpha + \beta) \cdot \omega] = \\ &(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \omega) \cdot (\beta + \omega) = \\ &(\alpha + \beta) \cdot [(\alpha \cdot \beta) + \omega] \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{P}^2.∎ \end{aligned}$$

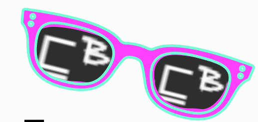
$$\begin{aligned} \alpha \sqcup^{\omega} \beta &= (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \omega^c) + (\beta \cdot \omega^c) = \\ &(\alpha \cdot \beta) + [(\alpha + \beta) \cdot \omega^c] = \\ &(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \omega^c) \cdot (\beta + \omega^c) = \\ &(\alpha + \beta) \cdot [(\alpha \cdot \beta) + \omega^c] \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{P}^2.∎ \end{aligned}$$

(Demostraciones en la transparencia siguiente)

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE

<u>Proposición</u>. De la definición

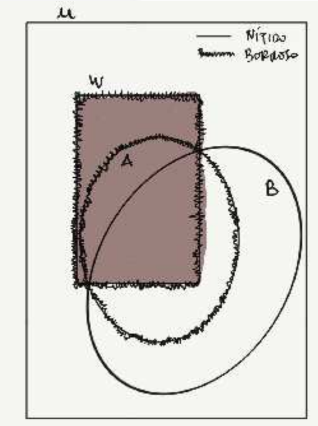
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$



Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^B W$. ∎

(Continuación)

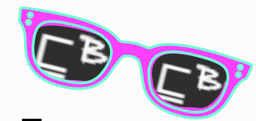
ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE



Proposición.

De la definición

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$



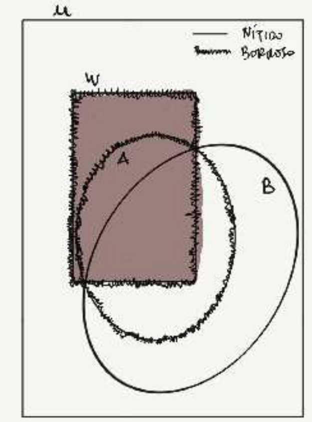
Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} W$. ∎

Proposición.

Si ' es una negación fuerte en L, y B es complementado tal que $B^c = B'$ entonces, para todo A y para todo W:

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} W \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)].\blacksquare$$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE



Proposición. De la definición

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

Se deduce la equivalencia: $A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} W$. ∎

Proposición.

Si ' es una negación fuerte en L, y B es complementado tal que $B^{c}=B'$ entonces, para todo A y para todo W:

$$A \sqsubseteq^{\omega} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow A \sqsubseteq^{B} W \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)].\blacksquare$$

Proposición.

Si " ' " es una negación fuerte en L, las proposiciones siguientes (i) y (ii) son equivalentes:

(i) $A \sqsubseteq^{W} B$, (ii) $A' \sqsubseteq^{W'} B'$. Y si además, $W' = W^{c}$ entonces ambas son equivalentes a

(iii) $B' \sqsubseteq^{W} A'$. (En consecuencia, la aplicación ' también es una negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^{W})$).

Demostración. (i) $A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow ((B + W)' \leq A' \leq (B \cdot W)') \Leftrightarrow$

$(B' \cdot W' \leq A' \leq B' + W') \Leftrightarrow A' \sqsubseteq^{W'} B'$.

(ii) Si entonces $A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow [(A \triangle B) \leq (B \triangle W)] \Leftrightarrow [(B \triangle W)' \leq (A \triangle W)'] \Leftrightarrow [(B' \triangle W) \leq (A' \triangle W)] \Leftrightarrow$

$B' \sqsubseteq^{W} A'$. ∎

Nota. Si $W' = W^{c}$, $(L, \sqsubseteq^{W}, W, w^{c})$ es un retículo acotado. La aplicación ':L L es involutiva y según la proposición anterior verifica $A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow B' \sqsubseteq^{W} A'$, luego es negación fuerte en $(L, \sqsubseteq^{W}, W, w^{c})$.

Sea $((L,\cdot,+,0,1),{}')$ un retículo distributivo con una negación fuerte ' y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W,W^c),{}')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W(B\sqcup^W S)$, entonces

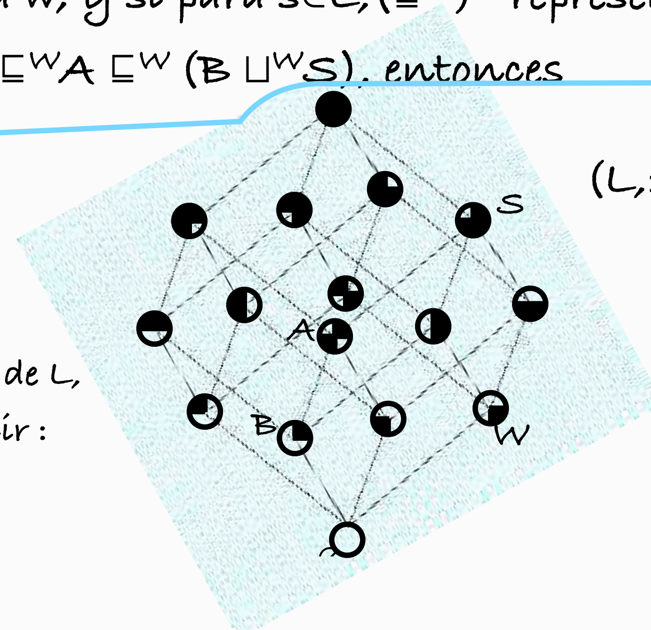
Sea $((L,\cdot,+,0,1),\,')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W, W^c),\,')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B \sqcap^W S) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W (B \sqcup^W S)$, entonces

<u>Proposición</u>. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L, \sqsubseteq^S)$, es decir :

$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A \sqsubseteq^S B$$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),{}')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W,W^c),{}')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W (B\sqcup^W S)$, entonces

Por ejemplo, si s también es complementado tal que $s'=s^c$:



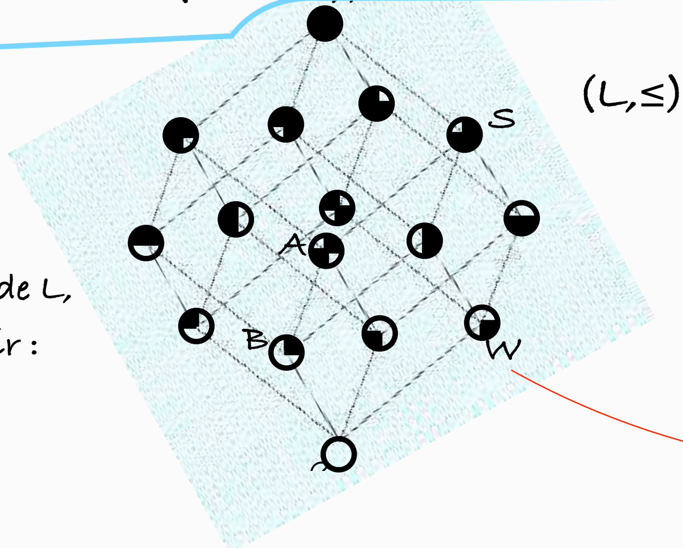
$(L,\leq)$

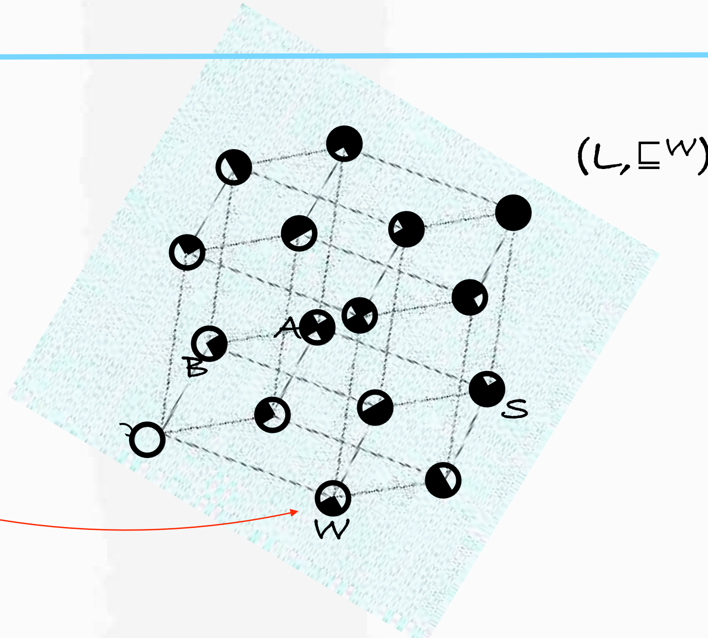
<u>Proposición</u>. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L,(\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L,\sqsubseteq^S)$, es decir:

$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^S B$$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),{}')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea w tal que $w'=w^c$. Si $((L,\sqsubseteq^w,\sqcap^w,w,w^c),{}')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^w)^s$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de s tal que $A(\sqsubseteq^w)^s B \Leftrightarrow (B \sqcap^w s) \sqsubseteq^w A \sqsubseteq^w (B \sqcup^w s)$, entonces

Por ejemplo, si s también es complementado tal que $s'=s^c$:



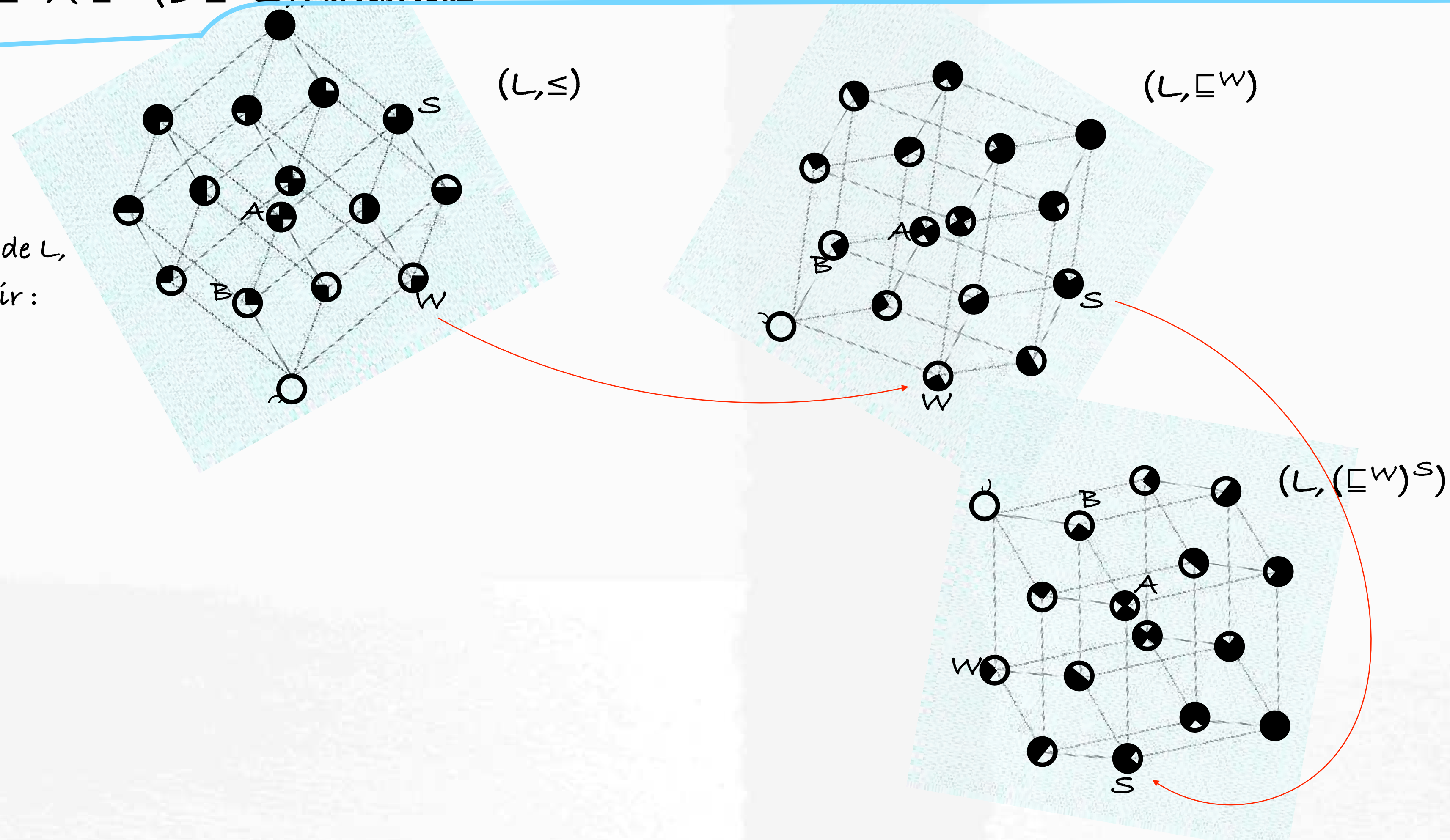


<u>Proposición</u>. Para todo w de L tal que $w'=w^c$ y para todo s de L, el inf-semirretículo $(L,(\sqsubseteq^w)^s)$ coincide con $(L,\sqsubseteq^s)$, es decir:

$$A(\sqsubseteq^w)^s B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^s B$$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),{}')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,W,W^c),{}')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva W; y si para $S\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W (B\sqcup^W S)$, entonces

Por ejemplo, si S también es complementado tal que $S'=S^c$:

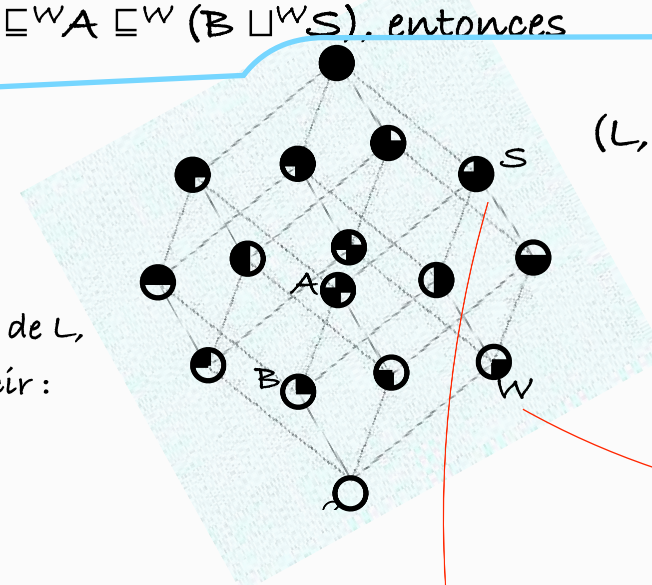


Proposición. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L,(\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L,\sqsubseteq^S)$, es decir :

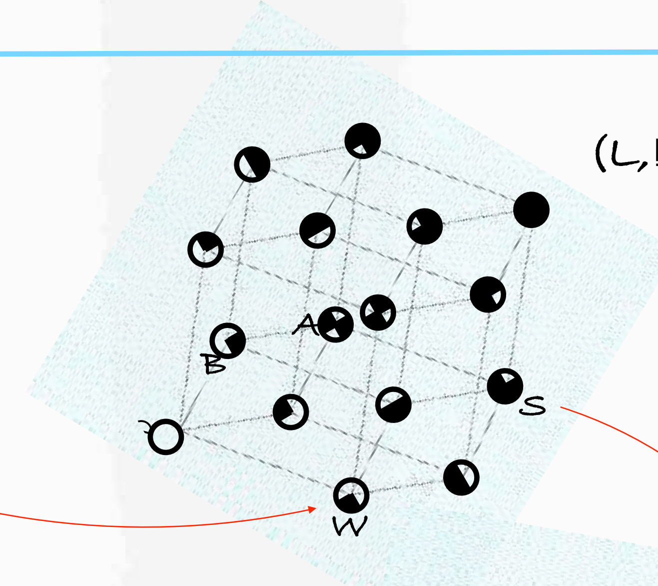
$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^S B$$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),{}')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W, W^c),{}')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B \sqcap^W S) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W (B \sqcup^W S)$, entonces

Por ejemplo, si s también es complementado tal que $s'=s^c$:



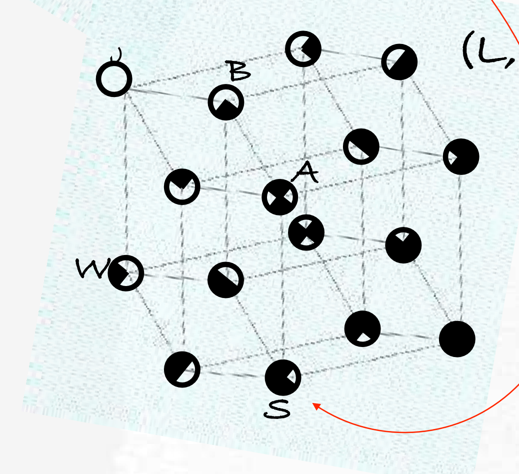
$(L,\leq)$



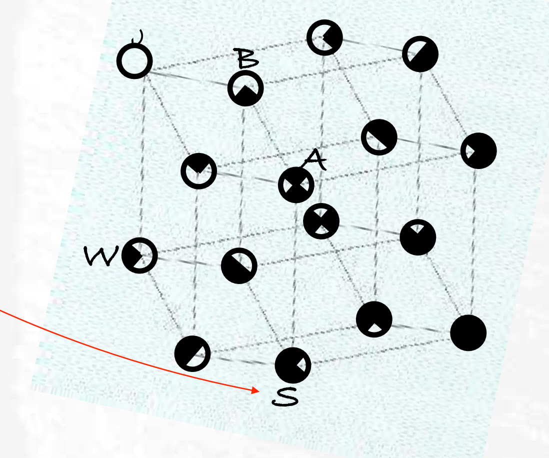
$(L,\sqsubseteq^W)$

<u>Proposición</u>. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L, \sqsubseteq^S)$, es decir :

$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^S B$$



$(L,(\sqsubseteq^W)^S)$



$(L,\sqsubseteq^S)$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W, W^c),')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva w; y si para $s\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B \sqcap^W S)\sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W (B \sqcup^W S)$, entonces

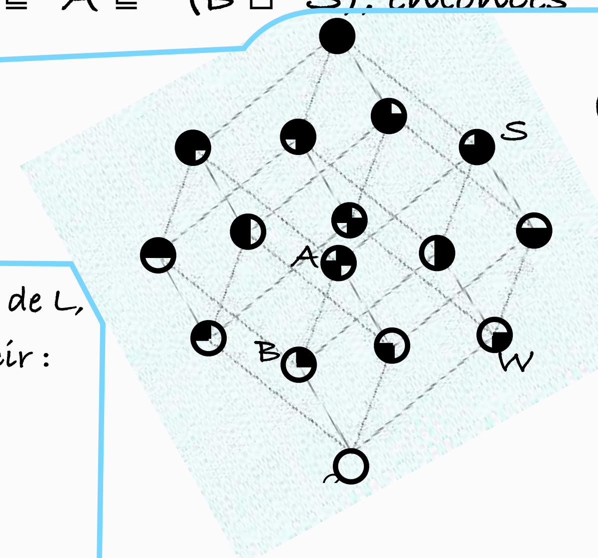
Por ejemplo, si s también es complementado tal que $s'=s^c$:

<u>Proposición</u>. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L, \sqsubseteq^S)$, es decir:

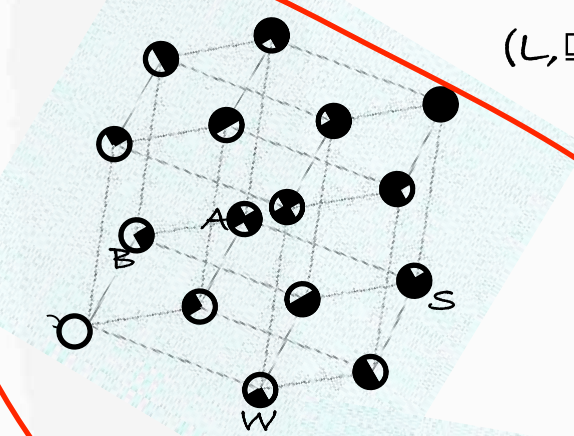
$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^S B$$

Sea $((L,\cdot,+,0,1),\,')$ un retículo distributivo con una negación fuerte $'$ y sea W tal que $W'=W^c$. Si $((L,\sqsubseteq^W,\sqcap^W, W, W^c),\,')$ es el retículo isomorfo al inicial desde la perspectiva W; y si para $S\in L$, $(\sqsubseteq^W)^S$ representa en este último retículo el orden desde la perspectiva de S tal que $A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow (B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W (B\sqcup^W S)$, entonces

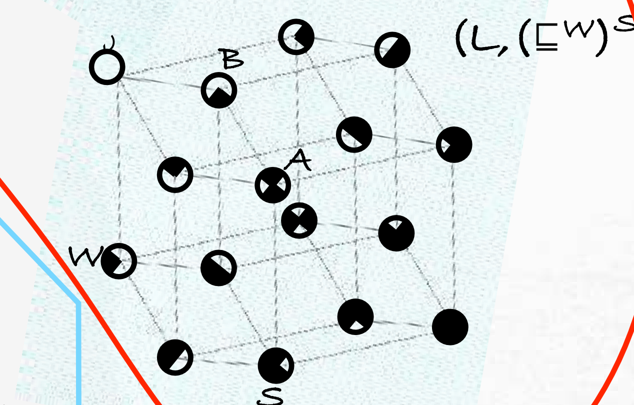
Por ejemplo, si S también es complementado tal que $S'=S^c$:



$(L,\leq)$

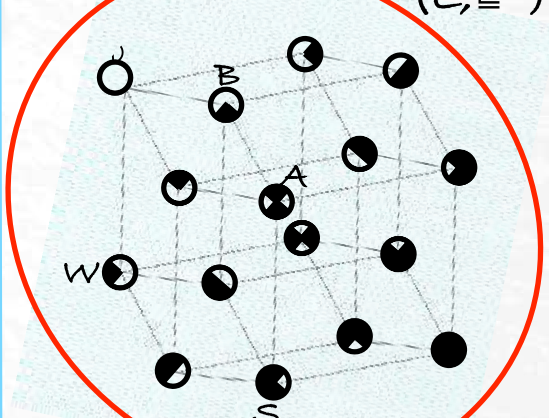


$(L,\sqsubseteq^W)$



$(L,(\sqsubseteq^W)^S)$

$\Leftrightarrow$



$(L,\sqsubseteq^S)$

Proposición. Para todo W de L tal que $W'=W^c$ y para todo S de L, el inf-semirretículo $(L,(\sqsubseteq^W)^S)$ coincide con $(L,\sqsubseteq^S)$, es decir:

$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow A\sqsubseteq^S B$$

Demostración

$$A(\sqsubseteq^W)^S B \Leftrightarrow$$

$$(B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W (B\sqcup^W S)\Leftrightarrow$$

$$(B\sqcap^W S)\triangle W\leq A\triangle W\leq (B\sqcup^W S)\triangle W\Leftrightarrow$$

$$[B\cdot S+W\cdot(B+S)]\triangle W\leq A\triangle W\leq [B\cdot S+W^c\cdot(B+S)]\triangle W\Leftrightarrow$$

$$\{[B\cdot S+W\cdot(B+S)]\cdot W^c+[(B'+S')\cdot(W^c+B'\cdot S')\cdot W\}\leq$$
$$(A\cdot W^c+A'\cdot W)\leq$$
$$\{[B\cdot S+W^c\cdot(B+S)]\cdot W^c+[(B'+S')\cdot(W+B'\cdot S')\cdot W\},$$

Simplificando estas últimas desigualdades, se obtiene:

$$(B\cdot S\cdot W^c+B'\cdot S'\cdot W)\leq(A\cdot W^c+A'\cdot W)\leq[(B+S)\cdot W^c+(B'+S')\cdot W].$$

Componiendo las desigualdades anteriores con W^c y con W, utilizando el operador isótono "ínfimo" $\cdot$ en L y simplificando:

(*) $B\cdot S\cdot W^c\leq A\cdot W^c\leq(B+S)\cdot W^c$ & (**) $B'\cdot S'\cdot W\leq A'\cdot W\leq(B'+S')\cdot W$.

Y por la "negación fuerte" $'$, (operador antítono en L que cumple las leyes de Morgan), obtenemos a partir de la primera (*):

$$B'+S'+W\geq A'+W\geq B'\cdot S'+W,$$

y de éstas, con el operador "ínfimo" $\cdot$ con W^c:

(***) $(B'+S')\cdot W^c\geq A'\cdot W^c\geq B'\cdot S'\cdot W^c$.

De las desigualdades (***) y de las que aparecen en (**), utilizando el operador isótono "supremo" $+$ en L, se obtiene

$$B'\cdot S'\cdot(W+W^c)\leq A'\cdot(W+W^c)\leq(B'+S')\cdot(W+W^c),$$

es decir: $B'\cdot S'\leq A'\leq(B'+S')$,

y finalmente, de nuevo por la "negación fuerte" $'$:

$B\cdot S\leq A\leq B+S$, que demuestra que $A\sqsubseteq^S B$.

$$A\sqsubseteq^S B\Leftrightarrow[B\cdot S\leq A\leq(B+S)]\Leftrightarrow[B'\cdot S'\leq A'\leq(B'+S')]$$

y en consecuencia

$$[B\cdot S\cdot W^c\leq A\cdot W^c\leq(B+S)\cdot W^c]\ \&\ [B'\cdot S'\cdot W\leq A'\cdot W\leq(B'+S')\cdot W]$$

de lo que se deduce

(*) $B\cdot S\cdot W^c+B'\cdot S'\cdot W\leq A\cdot W^c+A'\cdot W\leq(B+S)\cdot W^c+(B'+S')\cdot W$,

y teniendo en cuenta que $W\cdot W^c=0$ y que $(P+Q)\cdot P\cdot Q=P\cdot Q$, $(P+Q)+P\cdot Q=(P+Q)$,

de las desigualdades (*) se deducen estas otras:

$$\{[B\cdot S+W\cdot(B+S)]\cdot W^c+[(B'+S')\cdot(W^c+B'\cdot S')\cdot W\}\leq$$
$$(A\cdot W^c+A'\cdot W)\leq$$
$$\{[B\cdot S+W^c\cdot(B+S)]\cdot W^c+[(B'+S')\cdot(W+B'\cdot S')\cdot W\},$$

que son equivalentes a

$$[B\cdot S+W\cdot(B+S)]\triangle W\leq A\triangle W\leq[B\cdot S+W^c\cdot(B+S)]\triangle W,$$

es decir

$$(B\sqcap^W S)\triangle W\leq A\triangle W\leq(B\sqcup^W S)\triangle W$$

que equivalen a

$(B\sqcap^W S)\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W(B\sqcup^W S)$ y que demuestran que

$A(\sqsubseteq^W)^S B$. ∎

Corolario. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B, \quad A(\sqcup^W)^S B = A\sqcup^S B.$$

Corolario. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B,\quad A(\sqcup^W)^S B = A\sqcup^S B.$$

Proposición

Se verifica:

$$(A \sqsubseteq^{W_1} B)\ \&\ (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1+W_2} B)\ \&\ (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$$

Corolario. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B,\quad A(\sqcup^W)^S B = A \sqcup^S B.$$

Proposición

Se verifica:

$$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \ \& \ (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1+W_2} B) \ \& \ (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$$

(*) Es un caso particular de un resultado cuya demostración aparece en una transparencia anterior.

<u>Corolario</u>. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B, \quad A(\sqcup^W)^S B = A \sqcup^S B.$$

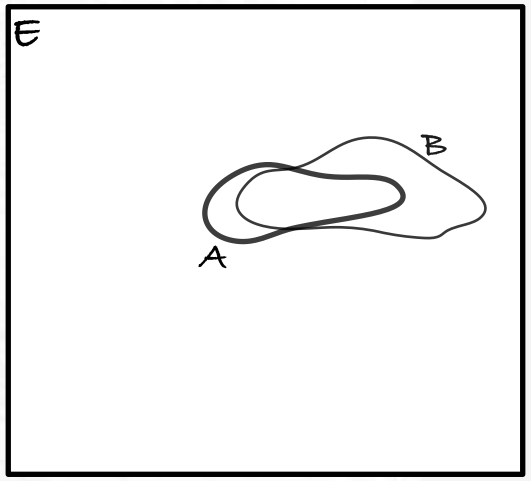
<u>Proposición</u>

Se verifica:

$(A \sqsubseteq^{W_1} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1+W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$

(*) Es un caso particular de un resultado cuya demostración aparece en una transparencia anterior.

Por ejemplo, en el caso $L=P(E)$



Corolario. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

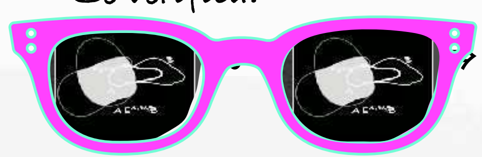
$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A\sqcap^S B, \quad A(\sqcup^W)^S B = A\sqcup^S B.$$

Proposición

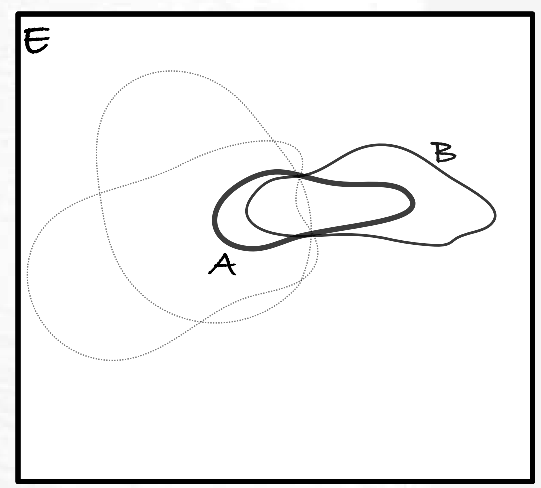
Se verifica:



$(A \sqsubseteq^{W_1+W_2} B)$ & $(A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$

(*) Es un caso particular de un resultado cuya demostración aparece en una transparencia anterior.

Por ejemplo, en el caso $L=P(E)$



<u>Corolario</u>. Para W tal que $W'=W^c$ y para todo S, el operador ínfimo $(\sqcap^W)^S$ en el inf-semirretículo $(L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S)$ coincide con $\sqcap^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B$$

Y si además $S'=S^c$ los operadores ínfimo $(\sqcap^W)^S$ y supremo $(\sqcup^W)^S$ en el ahora retículo $((L, (\sqsubseteq^W)^S, (\sqcap^W)^S, (\sqcup^W)^S)$ coinciden con $\sqcap^S$ y $\sqcup^S$:

$$A(\sqcap^W)^S B = A \sqcap^S B, \quad A(\sqcup^W)^S B = A \sqcup^S B.$$

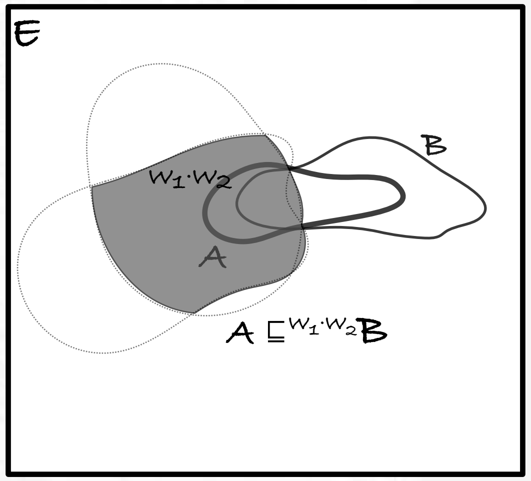
<u>Proposición</u>

Se verifica:

$$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{W_1+W_2} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_1 \cdot W_2} B)$$

(*) Es un caso particular de un resultado cuya demostración aparece en una transparencia anterior.

Por ejemplo, en el caso L=P(E)



Un resultado más general:

Si S es tal que $S^c=S'$, entonces

$$(A \sqsubseteq^{W_1} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{W_2} B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{(W_1 \sqcup^S W_2)} B) \;\&\; (A \sqsubseteq^{(W_1 \sqcap^S W_2)} B)$$

El orden de actividad desde distintas perspectivas

El orden $\sqsubseteq^{w}$ y el ínfimo $\sqcap^{w}$ en función de otros elementos complementados v, s,… :

El orden $\sqsubseteq^w$ y el ínfimo $\sqcap^w$ en función de otros elementos complementados v, s,… :

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

$C(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ subretículo de los elementos v de $\mathcal{L}$ con complemento v^c.

Sea $w \in \mathcal{L}$ y sea $v \in C(\mathcal{L})$ tal que $v' = v^c$ y $N(\mathcal{L}) \subseteq C(\mathcal{L})$ el subconjunto de tales elementos. Entonces:

$$\boxed{[x \sqsubseteq^w y] \Leftrightarrow [x (\sqsubseteq^v)^w y], \quad \sqsubseteq^w = (\sqsubseteq^v)^w = ((\sqsubseteq^v)^s)^w = \ldots}$$

El orden $\sqsubseteq^w$ y el ínfimo $\sqcap^w$ en función de otros elementos complementados v, s,... :

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

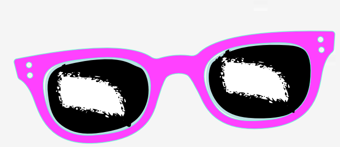
$C(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ subretículo de los elementos v de $\mathcal{L}$ con complemento v^c.

Sea $w \in \mathcal{L}$ y sea $v \in C(\mathcal{L})$ tal que $v' = v^c$ y $N(\mathcal{L}) \subseteq C(\mathcal{L})$ el subconjunto de tales elementos. Entonces:

$$[x \sqsubseteq^w y] \Leftrightarrow [x (\sqsubseteq^v)^w y], \qquad \sqsubseteq^w = (\sqsubseteq^v)^w = ((\sqsubseteq^v)^s)^w = \ldots$$

$$x \sqcap^w y = (x \cdot y) + [w \cdot (x+y)] = (x+y) \cdot [w + (x \cdot y)] \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$$

Sea $w \in \mathcal{L}$ y sea $v \in C(\mathcal{L})$ tal que $v' = v^c$. Entonces, $\forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$:



$$x \sqcap^w y = (x \sqcap^v y) \sqcup^v [w \sqcap^v (x \sqcup^v y)] = (x \sqcup^v y) \sqcap^v [w \sqcup^v (x \sqcap^v y)]$$

El orden $\sqsubseteq^w$ y el ínfimo $\sqcap^w$ en función de otros elementos complementados v, s,... :

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo distributivo acotado con una negación fuerte.

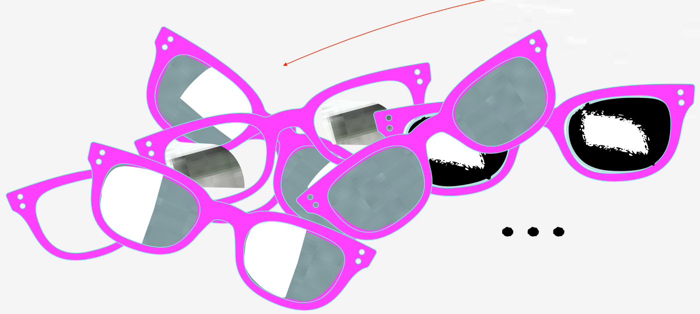
$C(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ subretículo de los elementos v de $\mathcal{L}$ con complemento v^c.

Sea $w \in \mathcal{L}$ y sea $v \in C(\mathcal{L})$ tal que $v' = v^c$ y $N(\mathcal{L}) \subseteq C(\mathcal{L})$ el subconjunto de tales elementos. Entonces:

$$[x \sqsubseteq^w y] \Leftrightarrow [x (\sqsubseteq^v)^w y], \qquad \sqsubseteq^w = (\sqsubseteq^v)^w = ((\sqsubseteq^v)^s)^w = \ldots$$

(*) Resultado cuya demostraciones aparecen en transparencias anteriores.

Sea $w \in \mathcal{L}$ y sea $v \in C(\mathcal{L})$ tal que $v' = v^c$. Entonces, $\forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$:



$$x \sqcap^w y = (x \sqcap^v y) \sqcup^v [w \sqcap^v (x \sqcup^v y)] = (x \sqcup^v y) \sqcap^v [w \sqcup^v (x \sqcap^v y)]$$

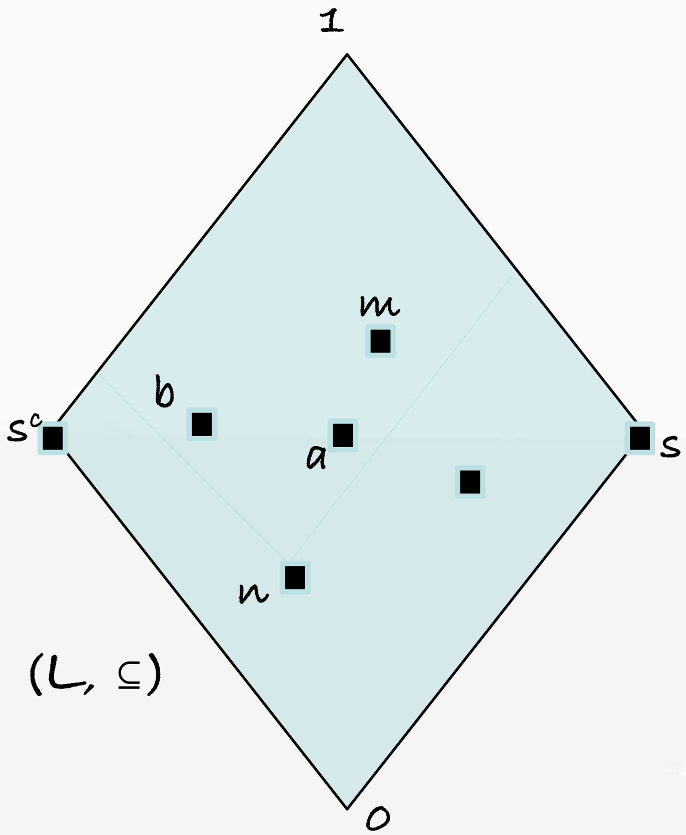
Maximales en el inf-semireticulo (L^{E}, $\sqsubseteq^{W}$, $\sqcap^{W}$, W)

$(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$ retículo tal que

$\forall (w,q) \in \mathcal{L}$ existen:

$\max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} \in \mathcal{L}$

$\min\{y \in L \,/\, q \leq w + y\} \in \mathcal{L}$

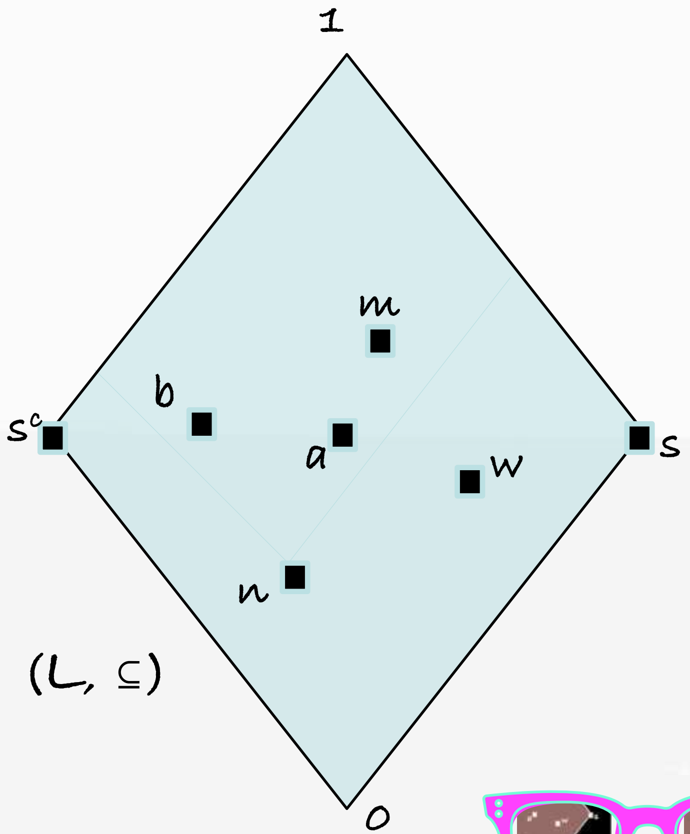


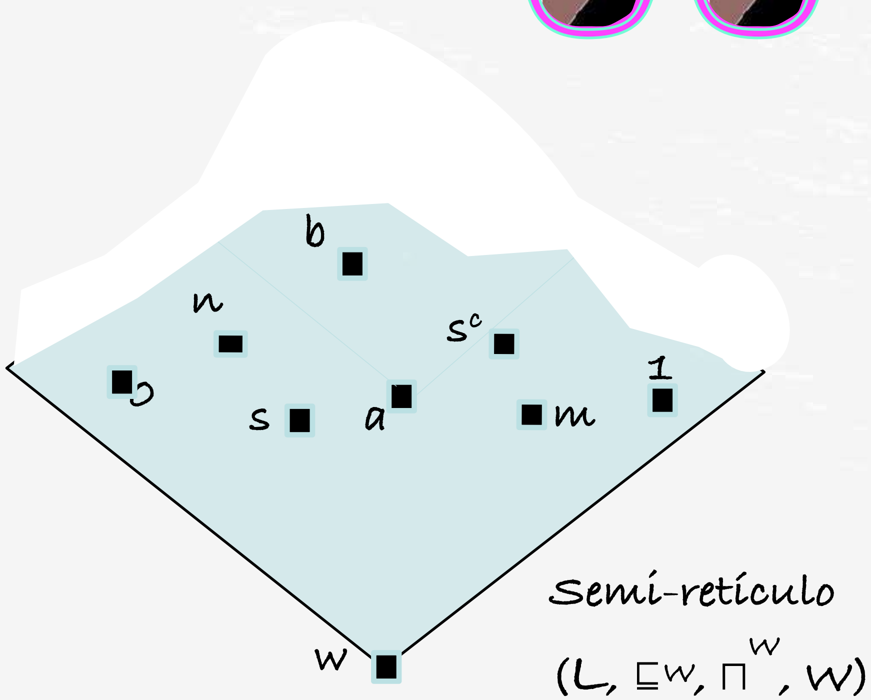
$(L, \subseteq)$

$(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$ retículo tal que

$\forall (w,q) \in \mathcal{L}$ existen:

$\max\{x \in L \,/\, w\bullet x \leq q\} \in \mathcal{L}$
$\min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} \in \mathcal{L}$





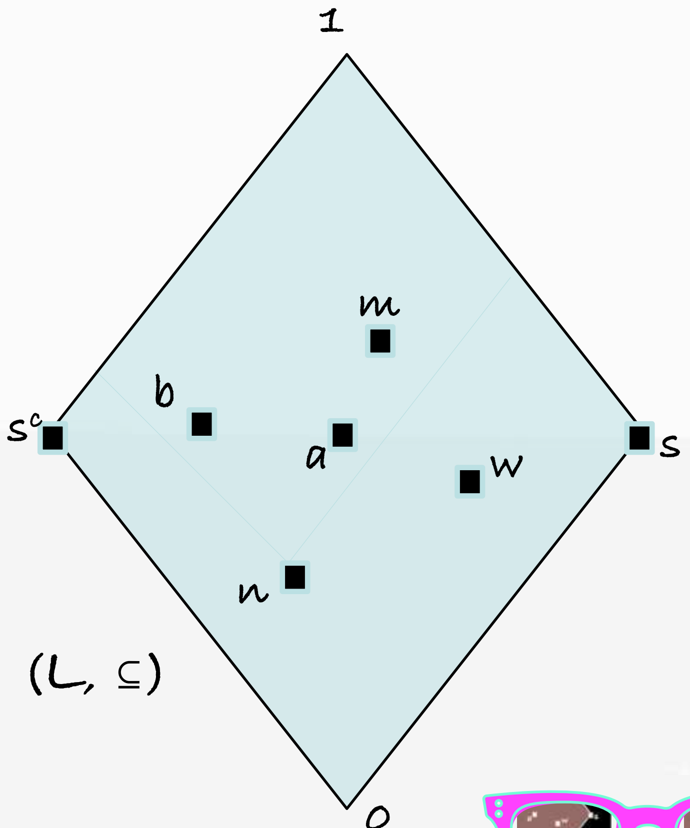
<u>Nota</u>. Si $(w\rightarrow 0) = (1 \div w)$ entonces $w\rightarrow 0$ es el complemento w^c de w y también el máximo de $(L, \sqsubseteq^w)$ (único $\sqsubseteq^w$-maximal).

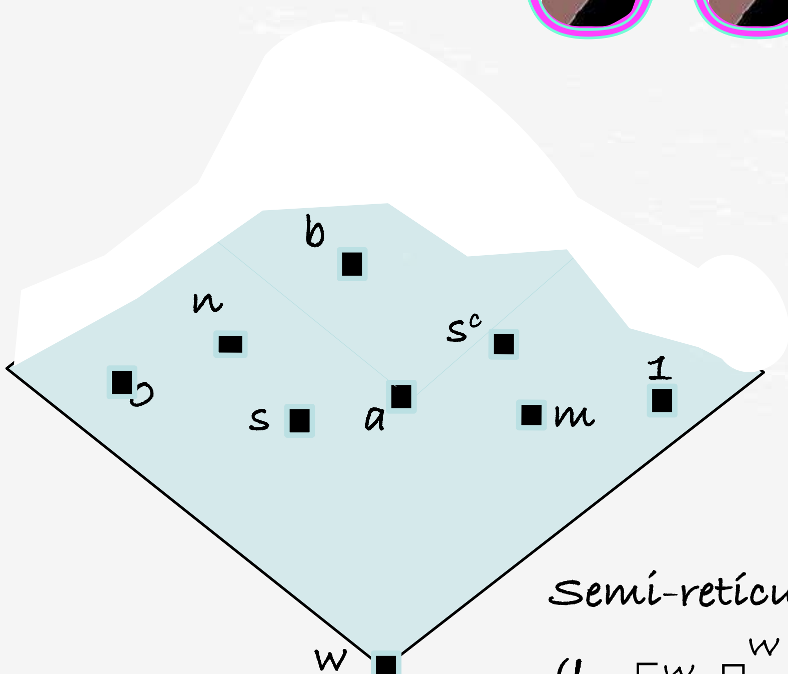
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo tal que

$\forall (w,q) \in \mathcal{L}$ existen:

$\max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} \in \mathcal{L}$

$\min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} \in \mathcal{L}$





Semi-retículo

$(L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

Sean los operadores $\rightarrow$, (implicación), y $\dot{-}$, (co-implicación o diferencia), definidos por :

<u>Implicación</u>:

$$w \rightarrow q = \sup\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\}$$

<u>Co-implicación</u> o <u>diferencia</u>:

$$q \dot{-} w = \inf\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\}$$

<u>Nota</u>. Si $(w \rightarrow 0) = (1 \dot{-} w)$ entonces $w \rightarrow 0$ es el complemento w^c de w y también el máximo de $(L, \sqsubseteq^W)$ (único $\sqsubseteq^W$-maximal).

$(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$ retículo tal que

$\forall (w,q) \in \mathcal{L}$ existen:

$\max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} \in \mathcal{L}$

$\min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} \in \mathcal{L}$

Sean los operadores $\rightarrow$, (implicación), y

$\dot{-}$, (co-implicación o diferencia), definidos por :

Implicación:

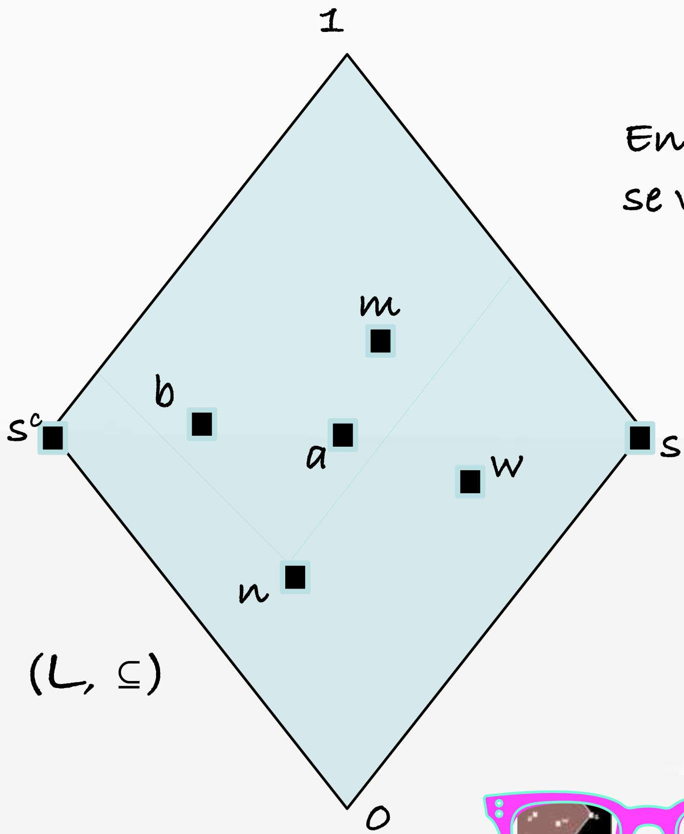
$$w \rightarrow q = \sup\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\}$$

Co-implicación o diferencia:

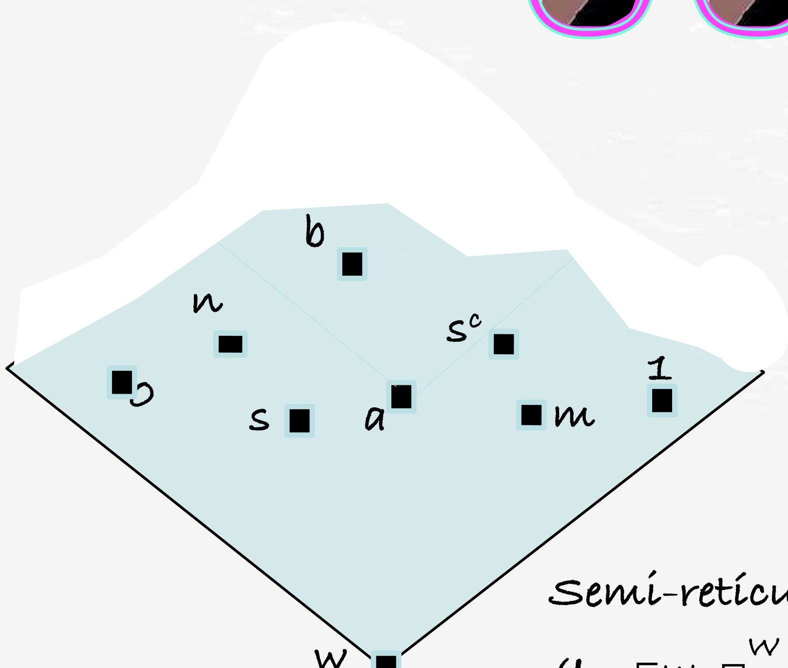
$$q \dot{-} w = \inf\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\}$$

En un retículo broweriano y dual broweriano (y en particular en uno finito y distributivo), se verifica: $[(p \bullet w \leq q) \Leftrightarrow (w \leq p \rightarrow q)]$ & $[(q \leq p+w) \Leftrightarrow (p \dot{-} q \leq w)]$

Es evidente que se verifica: $(q \dot{-} w) \leq q \leq (w \rightarrow q) \quad \forall (q, w) \in L^2$.



$(L, \subseteq)$



Semi-retículo

$(L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

Nota. Si $(w \rightarrow 0) = (1 \dot{-} w)$ entonces $w \rightarrow 0$ es el complemento w^c de w y también el máximo de $(L, \sqsubseteq^W)$ (único $\sqsubseteq^W$-maximal).

$(\mathcal{L}, \leq, \bullet, +, 0, 1)$ retículo tal que

$\forall (w,q) \in \mathcal{L}$ existen:

$\max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} \in \mathcal{L}$

$\min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} \in \mathcal{L}$

Sean los operadores $\rightarrow$, (implicación), y

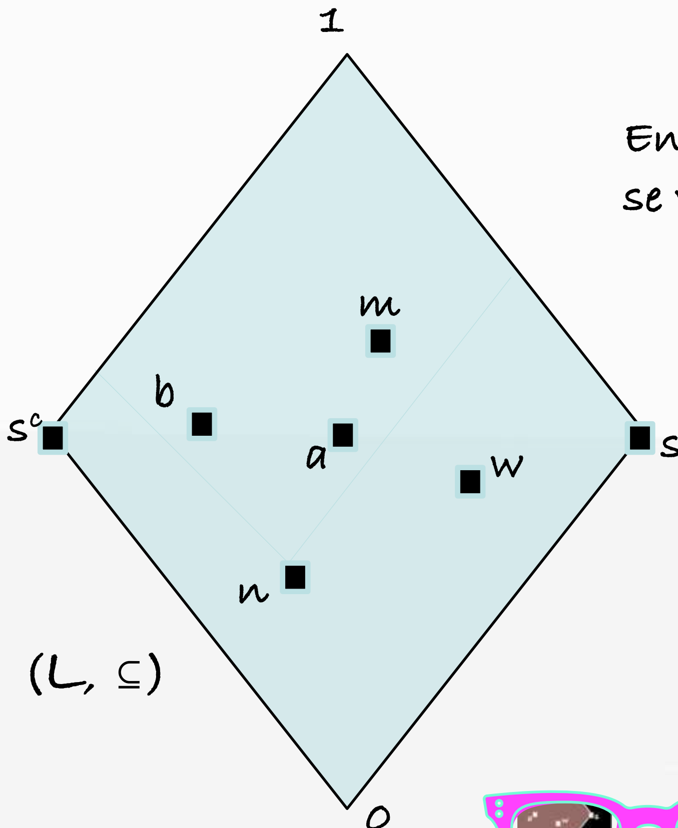
$\dot{-}$, (co-implicación o diferencia), definidos por :

Implicación:

$$w \rightarrow q = \sup\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, w \bullet x \leq q\}$$

Co-implicación o diferencia:

$$q \dot{-} w = \inf\{y \in L \,/\, q \leq w+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\}$$



$(L, \subseteq)$

En un retículo broweriano y dual broweriano (y en particular en uno finito y distributivo), se verifica: $[(p \bullet w \leq q) \Leftrightarrow (w \leq p \rightarrow q)]$ & $[(q \leq p+w) \Leftrightarrow (p \dot{-} q \leq w)]$

Es evidente que se verifica: $(q \dot{-} w) \leq q \leq (w \rightarrow q) \quad \forall (q, w) \in L^2$.

Proposición. Se verifica la equivalencia:

$[(w \rightarrow q) = (q \dot{-} w)] \Leftrightarrow$ [q es un maximal en $(L, \sqsubseteq^W)$ ($\sqsubseteq^W$-maximal)].

Demostración.

Sea $x \in \mathcal{L}$ tal que $q \sqsubseteq^W x$.
Entonces $w \bullet x \leq q \leq w+x$ que es equivalente a $(q \dot{-} w) \leq x \leq (w \rightarrow q)$.
Supongamos que además, $(w \rightarrow q) = (q \dot{-} w)$, luego $x = (w \rightarrow q) = (q \dot{-} w) = q$,
es decir q es maximal en $(L, \sqsubseteq^W)$.

Recíprocamente, sea q maximal en $(L, \sqsubseteq^W)$. Entonces

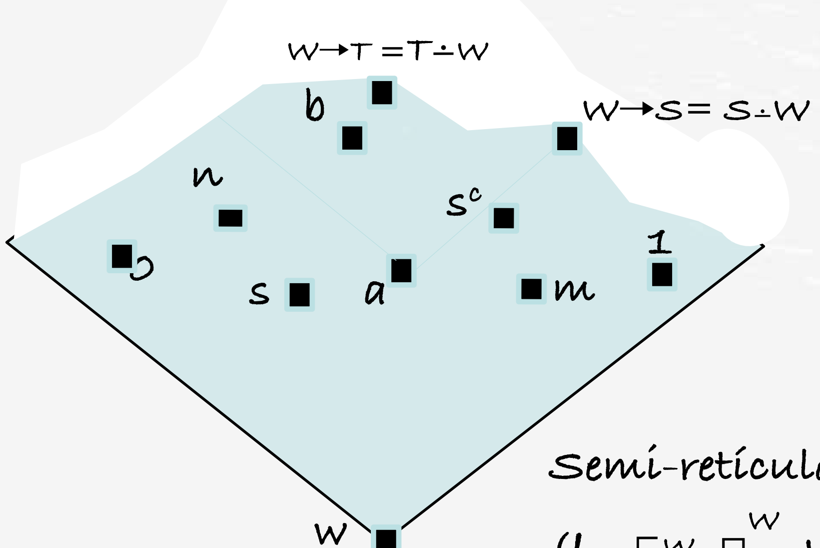
$[(q \dot{-} w) \leq x \leq (w \rightarrow q)] \Leftrightarrow (q \sqsubseteq^W x) \Longrightarrow (q = x)$, luego

$[(q \dot{-} w) \leq (q \dot{-} w) \leq (w \rightarrow q)] \Leftrightarrow [q \sqsubseteq^W (q \dot{-} w)] \Longrightarrow [q = (q \dot{-} w)]$, y

$[(q \dot{-} w) \leq (w \rightarrow q) \leq (w \rightarrow q)] \Leftrightarrow [q \sqsubseteq^W (w \rightarrow q)] \Longrightarrow [q = (w \rightarrow q)]$,

lo que demuestra las igualdades $q = (q \dot{-} w) = ((w \rightarrow q)$.■

Maximales en $(L, \sqsubseteq^W)$



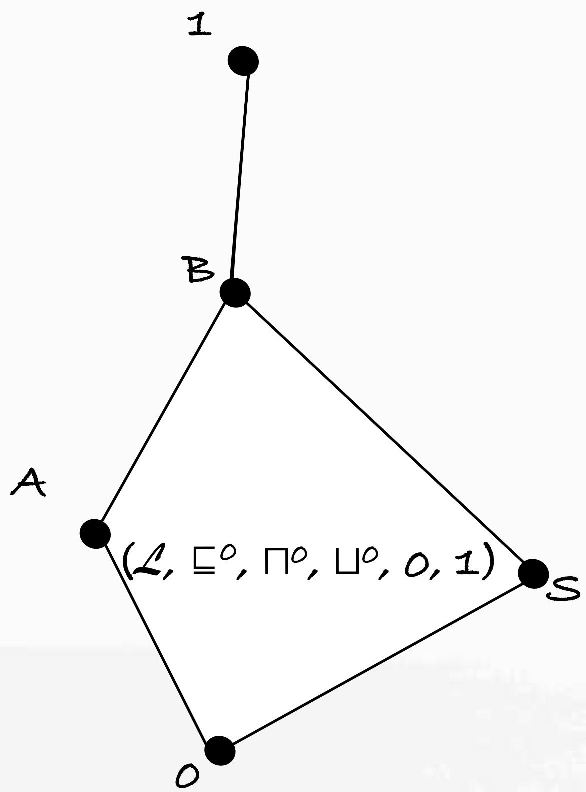
Semi-retículo

$(L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$

Nota. Si $(w \rightarrow 0) = (1 \dot{-} w)$ entonces $w \rightarrow 0$ es el complemento w^c de w y también el máximo de $(L, \sqsubseteq^W)$ (único $\sqsubseteq^W$-maximal).

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$$

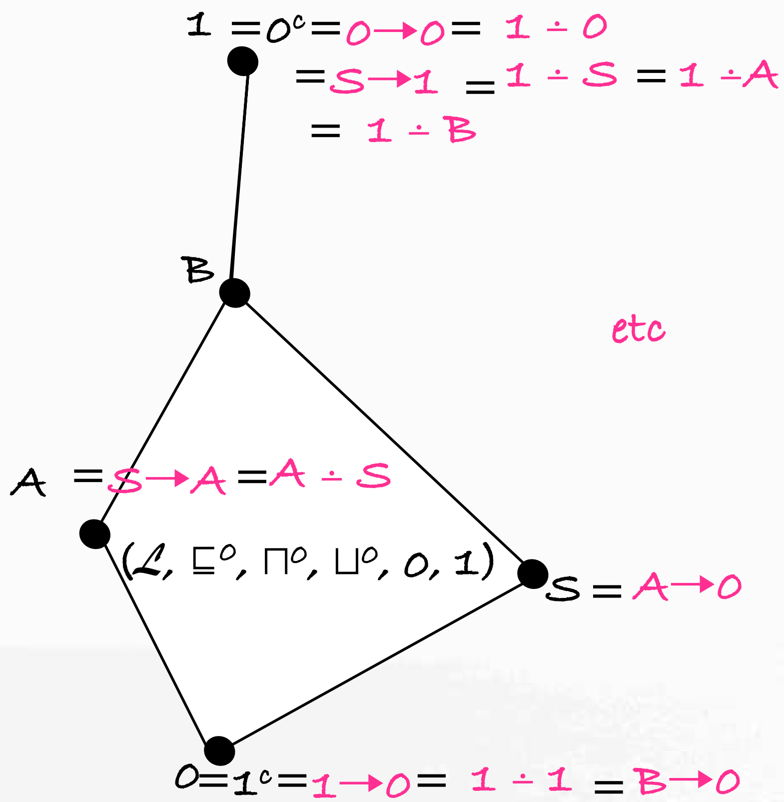


$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Retículo acotado
distributivo.

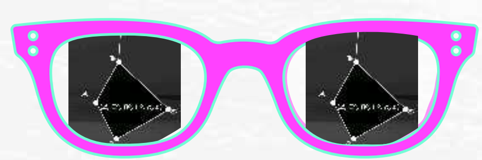
Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$$



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Retículo acotado distributivo.



Operador implicación $\to$ en L:

$w\to q = \sup\{x \in L \,/\, w\cdot x \leq q\}$

Operador diferencia o co-implicación $\div$ en L:

$q \div w = \inf\{y \in L \,/\, q \leq w+y\}$

En un retículo distributivo, si w no es complementado, los elementos $w\to q$ tales que $(w\to q) = (q \div w)$ (y por tanto iguales a q), son los elementos maximales del inf-semirretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Además, $w\to 0$ es maximal de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ si se verifica $(w\to 0) = (1 \div w)$.

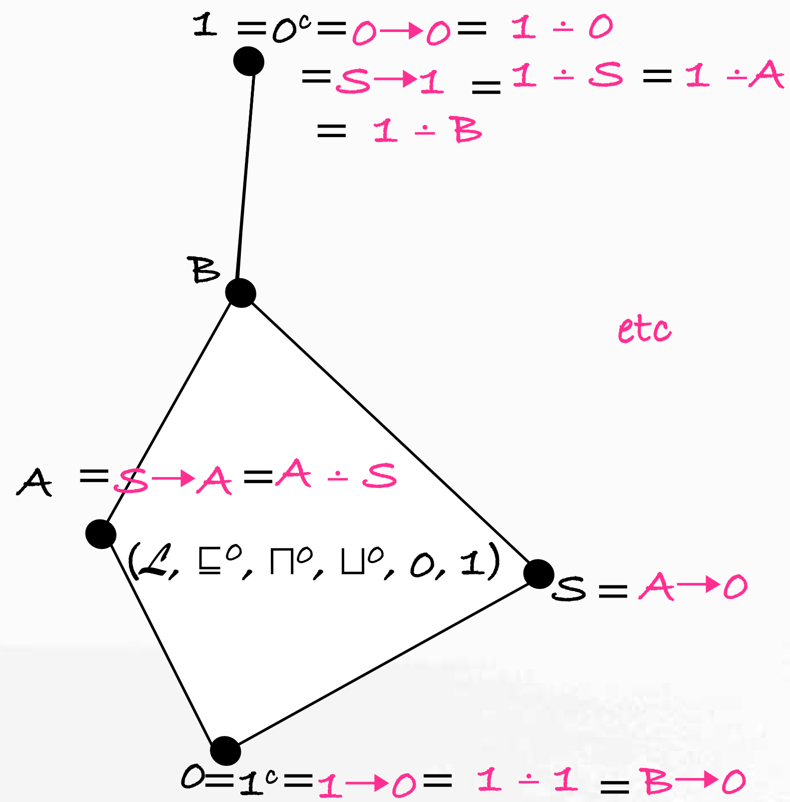
Si w es complementado con complemento w^c, entonces,

$\forall p\in L: (w\to p) = (w^c + p)$ y $\forall q \in L: (q \div w) = q\cdot w^c$

En particular, el elemento máximo w^c del retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$, (y por tanto el único maximal del mismo), es tal que $w^c = (w\to 0) = (1 \div w)$.

Ejemplo: La relación $\sqsubseteq^W$ en un retículo distributivo acotado

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$$



$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$

Retículo acotado distributivo.

Operador implicación $\to$ en L:

$w \to q = \sup\{x \in L \,/\, w \cdot x \leq q\}$

Operador diferencia o co-implicación $\div$ en L :

$q \div w = \inf\{y \in L \,/\, q \leq w + y\}$

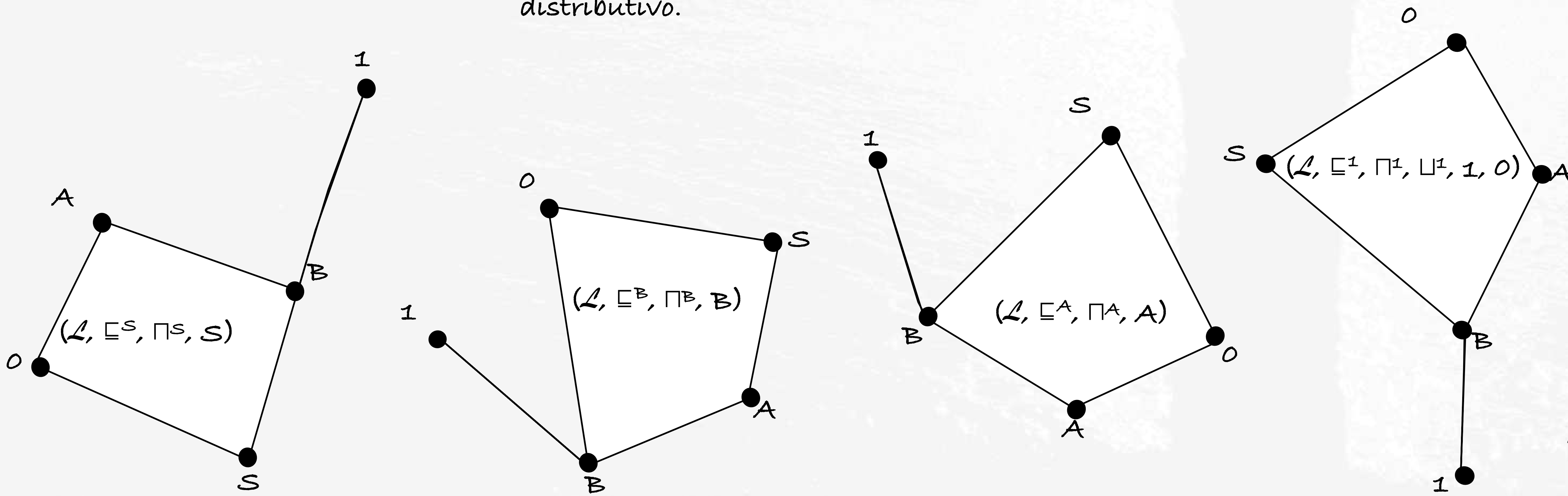
En un retículo distributivo, si w no es complementado, los elementos $w \to q$ tales que $(w \to q) = (q \div w)$ (y por tanto iguales a q), son los elementos maximales del inf-semirretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$.

Además, $w \to 0$ es maximal de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ si se verifica $(w \to 0) = (1 \div w)$.

Si w es complementado con complemento w^c, entonces,

$\forall p \in L : (w \to p) = (w^c + p)$ y $\forall q \in L : (q \div w) = q \cdot w^c$

En particular, el elemento máximo w^c del retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$, (y por tanto el único maximal del mismo), es tal que $w^c = (w \to 0) = (1 \div w)$.



Distintas expresiones de los órdenes de actividad en retículos distributivos

1. En general: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

1. En general: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \,\&\, (\alpha + \omega \leq \beta + \omega)] \Leftrightarrow (\beta \cdot \omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>

2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \,\&\, (\alpha \cdot \omega^c \leq \beta \cdot \omega^c)].$$

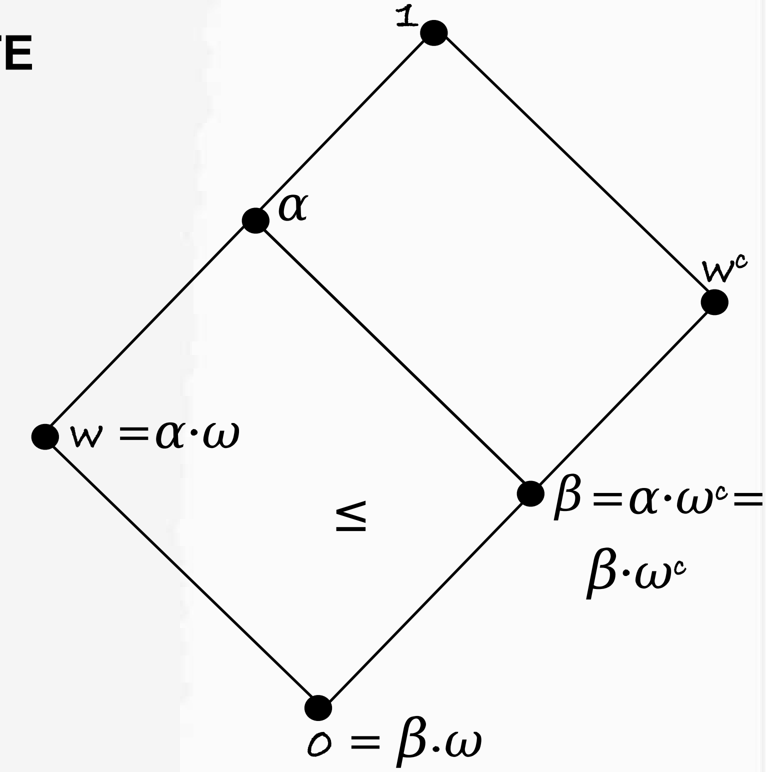
3. Y si, además, $'$ es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha \Delta \omega = \alpha \cdot \omega^c + \alpha' \cdot \omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \,\Delta\, \omega) \leq (\beta \,\Delta\, \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE



1. En general: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \& (\alpha + \omega \leq \beta + \omega)] \Leftrightarrow (\beta . \omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

Proposición

2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

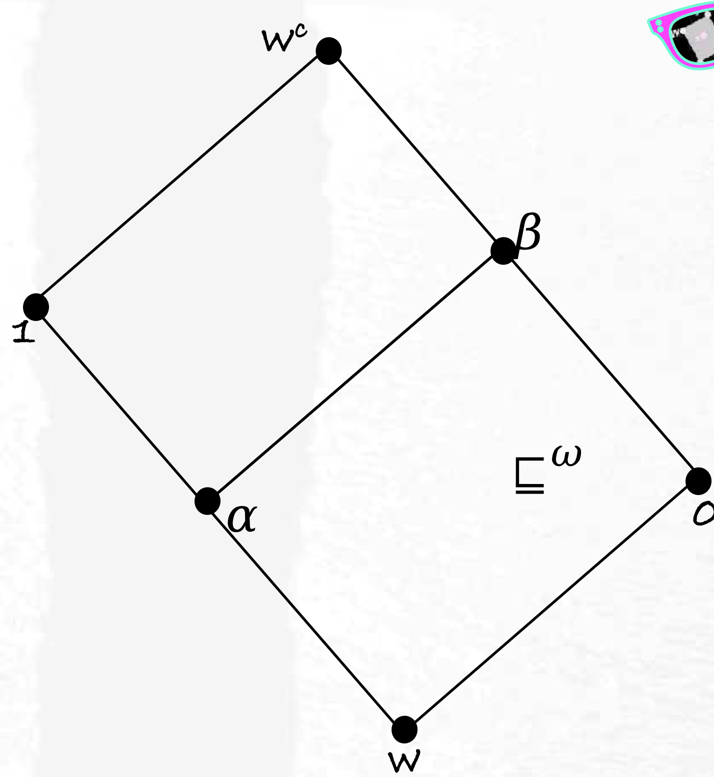
$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \& (\alpha \cdot \omega^c \leq \beta \cdot \omega^c)].$$

3. Y si, además, ' es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha \Delta \omega = \alpha \cdot \omega^c + \alpha' \cdot \omega$:

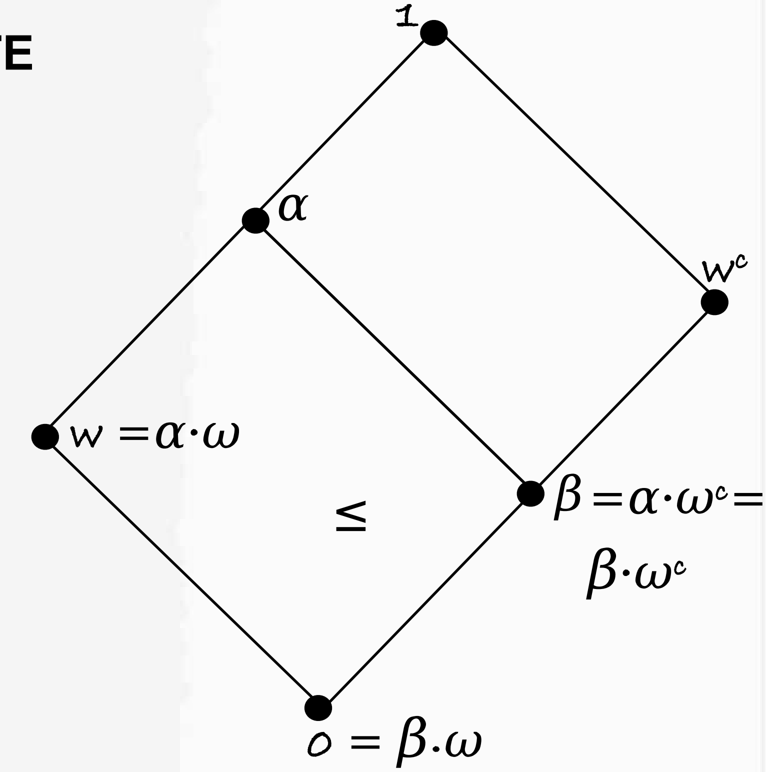
$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \Delta \omega) \leq (\beta \Delta \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$



ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE



1. En general: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

Proposición (*)

2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

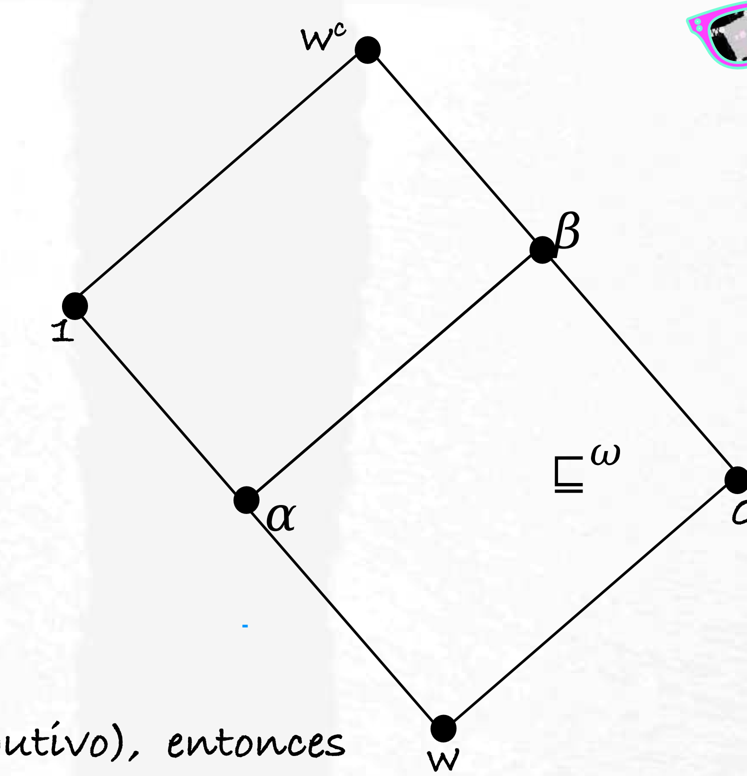
$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)].$$

3. Y si, además, $'$ es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha \Delta \omega = \alpha\cdot\omega^c + \alpha'\cdot\omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \,\Delta\, \omega) \leq (\beta \,\Delta\, \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega)\bullet(\alpha\bullet\omega)^c \leq (\beta + \omega)\bullet(\beta\bullet\omega)^c]$$



Proposición

5. Si L es completo broweriano y dual broweriano, (en particular si es finito y distributivo), entonces

$$\boxed{\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \beta) \leq \omega \leq (\beta \rightarrow \alpha)] \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \omega) \leq \beta \leq (\omega \rightarrow \alpha)]}$$

$w \rightarrow q = \max\{x \in L \,/\, w\bullet x \leq q\}$

$q \dot{-} w = \min\{y \in L \,/\, q \leq w+y\}$

(*) (Véase la transparencia siguiente)

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \,\&\, (\alpha + \omega \leq \beta + \omega)] \Leftrightarrow (\beta \cdot \omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \,\&\, (\alpha + \omega \leq \beta + \omega)] \Leftrightarrow (\beta \cdot \omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>. 2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega) \,\&\, (\alpha \cdot \omega^c \leq \beta \cdot \omega^c)].$$

3. Y si, además, ʻ es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha \Delta \omega = \alpha \cdot \omega^c + \alpha' \cdot \omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \,\Delta\, \omega) \leq (\beta \,\Delta\, \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>. 2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)].$$

3. Y si, además, $'$ es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha \Delta \omega = \alpha\cdot\omega^c + \alpha'\cdot\omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \,\Delta\, \omega) \leq (\beta \,\Delta\, \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$

<u>Demostración</u>. 2. $(\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega) \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, ((\alpha+\omega)\cdot\omega^c \leq (\beta+\omega)\cdot\omega^c)] \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)]$. Supongamos ahora que $(\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)$. Entonces $(\alpha + \omega) = (\alpha\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\alpha\cdot\omega^c+\alpha\cdot\omega+\omega) = (\alpha\cdot\omega^c+\omega) \leq (\beta\cdot\omega^c+\omega) = (\beta\cdot\omega^c+\beta\cdot\omega+\omega)) = (\beta\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\beta + \omega)$. Luego $[(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)] \Rightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta+\omega)$.

3. (Demostración en una transparencia anterior).

4. $(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c = (\alpha + \omega) \bullet (\alpha^c + \omega^c) = \alpha \bullet \omega^c + \alpha^c \bullet \omega = \alpha \,\Delta\, \omega$. Análogamente, $(\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c = \beta \,\Delta\, \omega$, y por el apartado anterior, se verifica $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$.∎

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>. 2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)].$$

3. Y si, además, ' es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha\Delta\,\omega = \alpha\cdot\omega^c + \alpha'\cdot\omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \,\Delta\, \omega) \leq (\beta \,\Delta\, \omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$

<u>Demostración</u>. 2. $(\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega) \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, ((\alpha+\omega)\cdot\omega^c \leq (\beta+\omega)\cdot\omega^c)] \Rightarrow$ $[(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)]$. Supongamos ahora que $(\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)$. Entonces $(\alpha + \omega) = (\alpha\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\alpha\cdot\omega^c+\alpha\cdot\omega+\omega) =$ $(\alpha\cdot\omega^c+\omega) \leq (\beta\cdot\omega^c+\omega) = (\beta\cdot\omega^c+\beta\cdot\omega+\omega)) = (\beta\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\beta + \omega)$. Luego $[(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)] \Rightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta+\omega)$.

3. (Demostración en una transparencia anterior).

4. $(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c = (\alpha + \omega) \bullet (\alpha^c + \omega^c) = \alpha \bullet \omega^c + \alpha^c \bullet \omega = \alpha \,\Delta\, \omega$. Análogamente, $(\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c = \beta \,\Delta\, \omega$, y por el apartado anterior, se verifica $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$.∎

$p \to q = \sup\{x \in L \,/\, p \bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, p \bullet x \leq q\}$

$q \div p = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\}$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>. 2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)].$$

3. Y si, además, $'$ es una negación fuerte en L tal que el complemento de ω es tal que $\omega^c = \omega'$ y si $\alpha\Delta\,\omega = \alpha\cdot\omega^c + \alpha'\cdot\omega$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\,\Delta\,\omega) \leq (\beta\,\Delta\,\omega)].$$

4. Y si α y β también son complementados tales que $\alpha^c = \alpha'$ y $\beta^c = \beta'$:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$$

<u>Demostración</u>. 2. $(\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega) \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Rightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, ((\alpha+\omega)\cdot\omega^c \leq (\beta+\omega)\cdot\omega^c)] \Rightarrow$ $[(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)]$. Supongamos ahora que $(\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)$. Entonces $(\alpha + \omega) = (\alpha\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\alpha\cdot\omega^c+\alpha\cdot\omega+\omega) =$ $(\alpha\cdot\omega^c+\omega) \leq (\beta\cdot\omega^c+\omega) = (\beta\cdot\omega^c+\beta\cdot\omega+\omega)) = (\beta\cdot(\omega^c+\omega)+\omega) = (\beta + \omega)$. Luego $[(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)] \Rightarrow (\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta+\omega)$.

3. (Demostración en una transparencia anterior).

4. $(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c = (\alpha + \omega) \bullet (\alpha^c + \omega^c) = \alpha \bullet \omega^c + \alpha^c \bullet \omega = \alpha\,\Delta\,\omega$. Análogamente, $(\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c = \beta\,\Delta\,\omega$, y por el apartado anterior, se verifica $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha + \omega) \bullet (\alpha \bullet \omega)^c \leq (\beta + \omega) \bullet (\beta \bullet \omega)^c]$.∎

<u>Proposición</u> 5. Si L es completo broweriano y dual broweriano, (en particular si es finito y distributivo), entonces

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \beta) \leq \omega \leq (\beta \rightarrow \alpha)] \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \omega) \leq \beta \leq (\omega \rightarrow \alpha)]$$

<u>Demostración</u>. 5. $(\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega) \Leftrightarrow [(\omega \leq (\beta \rightarrow \alpha))) \,\&\, (\omega \geq (\alpha \dot{-} \beta))] \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \beta) \leq \omega \leq (\beta \rightarrow \alpha)]$.

$(\beta\cdot\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega) \Leftrightarrow [(\beta \leq (\omega \rightarrow \alpha))) \,\&\, (\beta \geq (\alpha \dot{-} \omega))] \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \omega) \leq \beta \leq (\omega \rightarrow \alpha)]$.∎

$p \rightarrow q = \sup\{x \in L \,/\, p \bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, p \bullet x \leq q\}$

$q \dot{-} p = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\}$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS CON UNA NEGACIÓN FUERTE

1. En general, en un retículo distributivo y acotado: $\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha+\omega \leq \beta+\omega)] \Leftrightarrow (\beta.\omega \leq \alpha \leq \beta + \omega)$

<u>Proposición</u>. 2. Si ω es complementado con complemento ω^c, entonces:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha\cdot\omega \geq \beta\cdot\omega) \,\&\, (\alpha\cdot\omega^c \leq \beta\cdot\omega^c)].$$

Si L es completo broweriano y dual broweriano, (en particular si es finito y distributivo), entonces

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \beta) \leq \omega \leq (\beta \rightarrow \alpha)] \Leftrightarrow [(\alpha \dot{-} \omega) \leq \beta \leq (\omega \rightarrow \alpha)]$$

$p \rightarrow q = \sup\{x \in L \,/\, p\bullet x \leq q\} = \max\{x \in L \,/\, p\bullet x \leq q\}$

$q \dot{-} p = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\} = \min\{y \in L \,/\, q \leq p+y\}$

Órdenes de actividad en retículos producto

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

<u>Relación de actividad en producto de retículos</u>. Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

$$\mathcal{L} = \mathop{\mathsf{X}}_{x\in E} L_x = \{\, \mu : x \to \bigcup_{x\in E} L_x \;/\; \mu(x)\in L_x \ \ \forall x\in E \,\}$$

con el orden $\leq$, los operadores $\cdot$, $+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu \leq \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \leq_x \psi(x)],\ (\mu \cdot \psi)(x) = [\mu(x) \cdot_x \psi(x)]\ ,\ (\mu + \psi)(x) = [\mu(x) +_x \psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x\ ,\ 1(x) = 1_x\,.$$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Relación de actividad en producto de retículos. Sea $((L_x, \le_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L}, \le, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

$$\mathcal{L} = \mathop{X}_{x\in E} L_x = \{\mu: X \to \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, \mu(x)\in L_x \ \ \forall x\in E\}$$

con el orden $\le$, los operadores $\cdot$, $+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu \le \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \le_x \psi(x)],\ (\mu\cdot\psi)(x) = [\mu(x)\cdot_x \psi(x)]\ ,\ (\mu+\psi)(x) = [\mu(x)+_x\psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x\,,\ 1(x) = 1_x\,.$$

Proposición. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \le, \wedge, \vee, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^{\omega} \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \le_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^{\omega} B) \Leftrightarrow [A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x)\ \ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu \sqcap^{\omega} \psi)(x) = [\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x)\cdot_x \psi(x)] +_x \omega(x)\cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu \sqcup^{\omega} \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x)\cdot_x \psi(x)] +_x \omega^c(x)\cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Relación de actividad en producto de retículos. Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

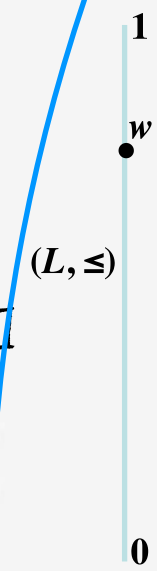
$$\mathcal{L} = \mathop{\mathsf{X}}_{x\in E} L_x = \{\, \mu : X \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, \mu(x)\in L_x \;\; \forall x\in E \,\}$$

con el orden $\leq$, los operadores $\cdot$, $+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu \leq \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \leq_x \psi(x)],\; (\mu \cdot \psi)(x) = [\mu(x) \cdot_x \psi(x)] \;,\; (\mu + \psi)(x) = [\mu(x) +_x \psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x \,,\; 1(x) = 1_x \,.$$

Ejemplo (producto $L_1 \times L_2$ de dos cadenas).



Proposición. (1) Sea $(\omega, \mu, \psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^\omega \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x) \;\; \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^\omega B) \Leftrightarrow [A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x) \;\; \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^\omega$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^\omega)$ viene dada por $(\mu \sqcap^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x\in E,$$

siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^\omega$ es tal que $(\mu \sqcup^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega^c(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Relación de actividad en producto de retículos. Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x \in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E \neq \varnothing$ y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

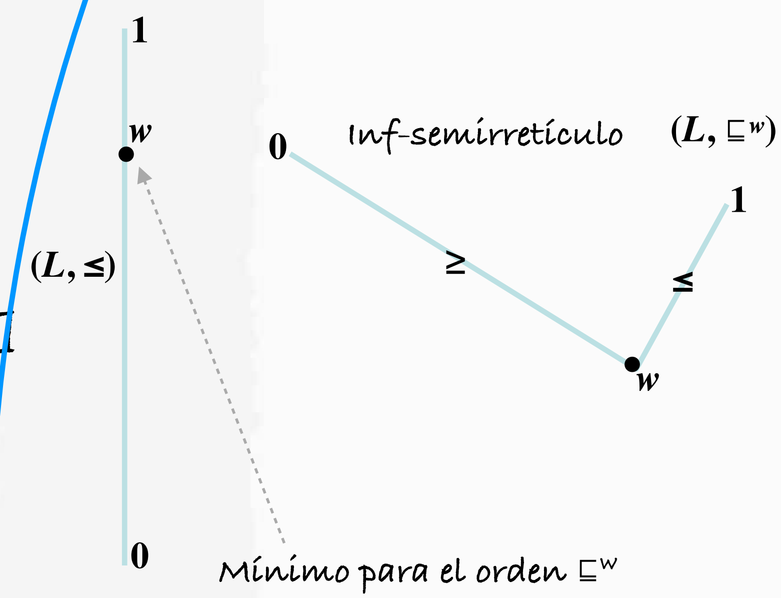
$$\mathcal{L} = \mathop{\mathsf{X}}_{x \in E} L_x = \{\mu : X \to \bigcup_{x \in E} L_x \,/\, \mu(x) \in L_x \;\; \forall x \in E\}$$

con el orden $\leq$, los operadores $\cdot, +$ y las cotas $0, 1$ tales que, $\forall x \in E$:

$$(\mu \leq \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \leq_x \psi(x)],\; (\mu \cdot \psi)(x) = [\mu(x) \cdot_x \psi(x)] \;,\; (\mu + \psi)(x) = [\mu(x) +_x \psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x,\; 1(x) = 1_x.$$

Ejemplo (producto $L_1 \times L_2$ de dos cadenas).



Proposición. (1) Sea $(\omega, \mu, \psi) \in \mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^\omega \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x) \;\; \forall x \in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x) \in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^\omega B) \Leftrightarrow [A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x) \;\; \forall x \in E].$$

(3) La ley $\sqcap^\omega$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^\omega)$ viene dada por $(\mu \sqcap^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x \in E,$$

siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^\omega$ es tal que $(\mu \sqcup^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega^c(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x \in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

<u>Relación de actividad en producto de retículos</u>. Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

$$\mathcal{L} = \mathop{\mathsf{X}}_{x\in E} L_x = \{\, \mu : X \to \bigcup_{x\in E} L_x \;/\; \mu(x)\in L_x \;\; \forall x\in E \,\}$$

con el orden $\leq$, los operadores $\cdot$, $+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu \leq \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \leq_x \psi(x)],\; (\mu\cdot\psi)(x) = [\mu(x)\cdot_x \psi(x)] \;,\; (\mu+\psi)(x) = [\mu(x) +_x \psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x ,\; 1(x) = 1_x .$$

<u>Proposición</u>. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^\omega \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x) \;\; \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^\omega$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^\omega B) \Leftrightarrow [A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x) \;\; \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^\omega$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^\omega)$ viene dada por $(\mu \sqcap^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x\in E,$$

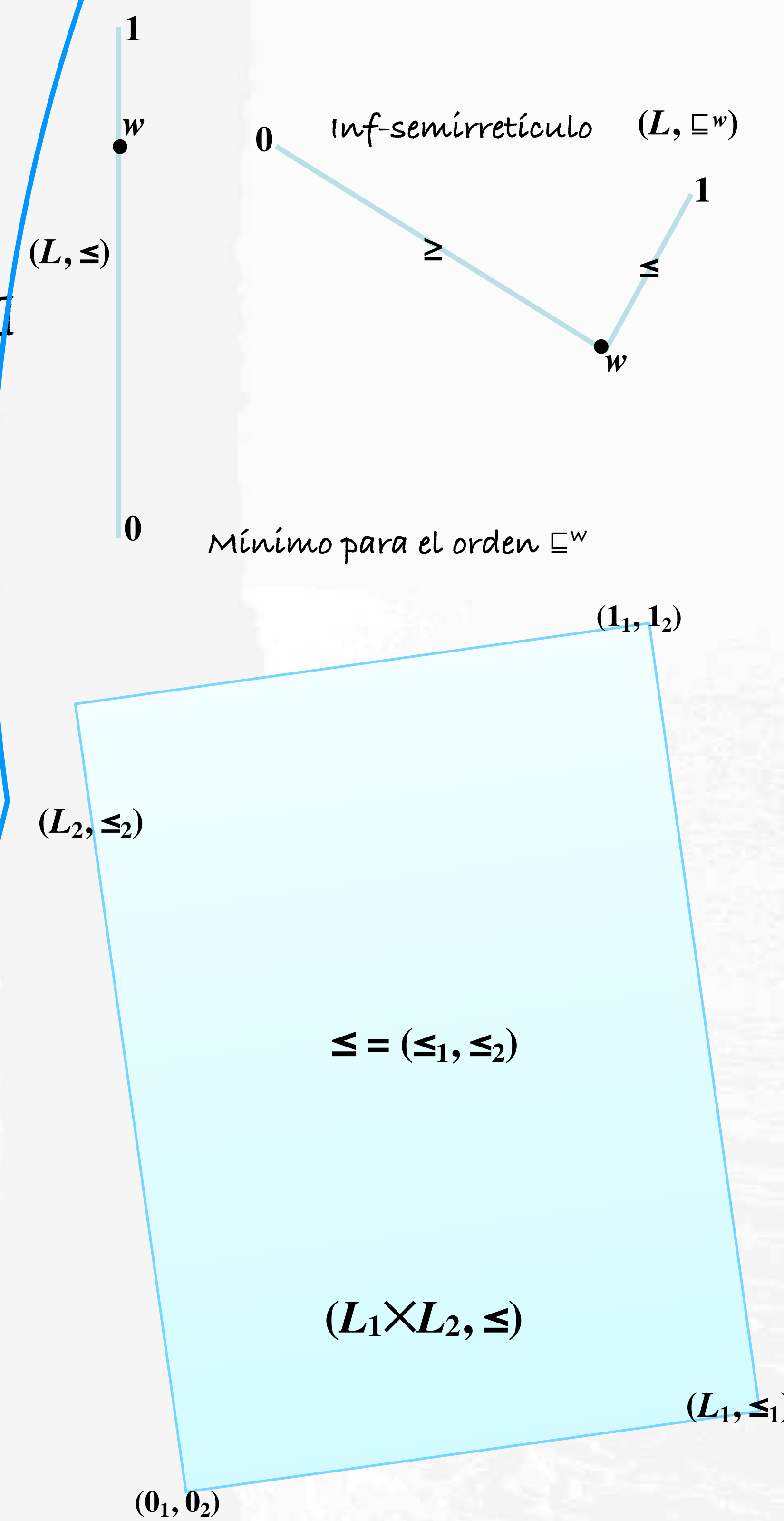
siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador “inf“ en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^\omega$ es tal que $(\mu \sqcup^\omega \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega^c(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)] \;\; \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador “sup” en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

Ejemplo (producto $L_1 \times L_2$ de dos cadenas).



ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

<u>Relación de actividad en producto de retículos</u>. Sea $((L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

$$\mathcal{L} = \underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x = \{\ \mu : X \to \bigcup_{x\in E} L_x \ /\ \mu(x)\in L_x \ \ \forall x\in E\ \}$$

con el orden $\leq$, los operadores $\cdot$, $+$ y las cotas 0 , 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu \leq \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \leq_x \psi(x)],\ (\mu \cdot \psi)(x) = [\mu(x) \cdot_x \psi(x)]\ ,\ (\mu + \psi)(x) = [\mu(x) +_x \psi(x)]$$

$$0(x) = 0_x\ ,\ 1(x) = 1_x\ .$$

Ejemplo (producto $L_1 \times L_2$ de dos cadenas).

<u>Proposición</u>. (1) Sea $(\omega, \mu, \psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^{\omega} \psi) \Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^{\omega} B) \Leftrightarrow [A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x)\ \ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu \sqcap^{\omega} \psi)(x) = [\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu \sqcup^{\omega} \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)] =$

$$[\mu(x) \cdot_x \psi(x)] +_x \omega^c(x) \cdot_x [\mu(x) +_x \psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x, \sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Relación de actividad en producto de retículos. Sea $((L_x,\leq_x,\cdot_x,+_x,0_x,1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L},\leq,\cdot,+,0,1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

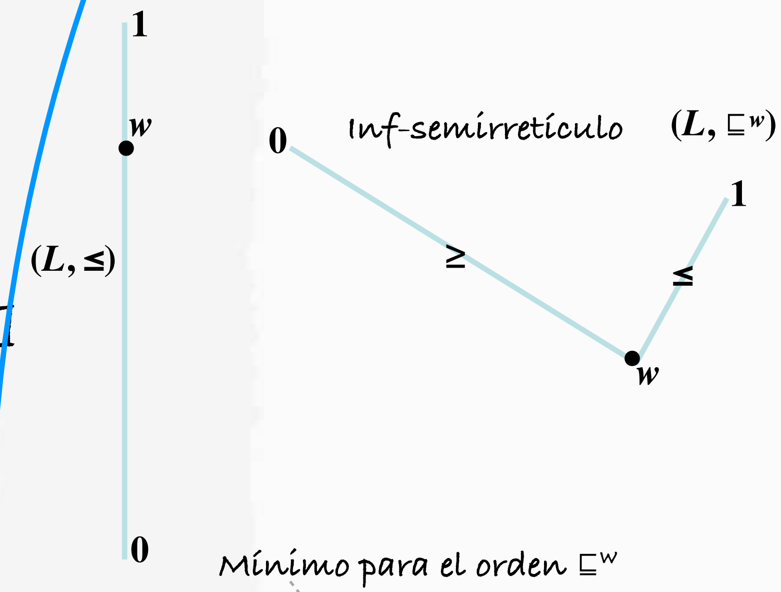
$$\mathcal{L}=\mathop{X}_{x\in E}L_x=\{\mu: X\to\bigcup_{x\in E}L_x\ /\ \mu(x)\in L_x\ \ \forall x\in E\}$$

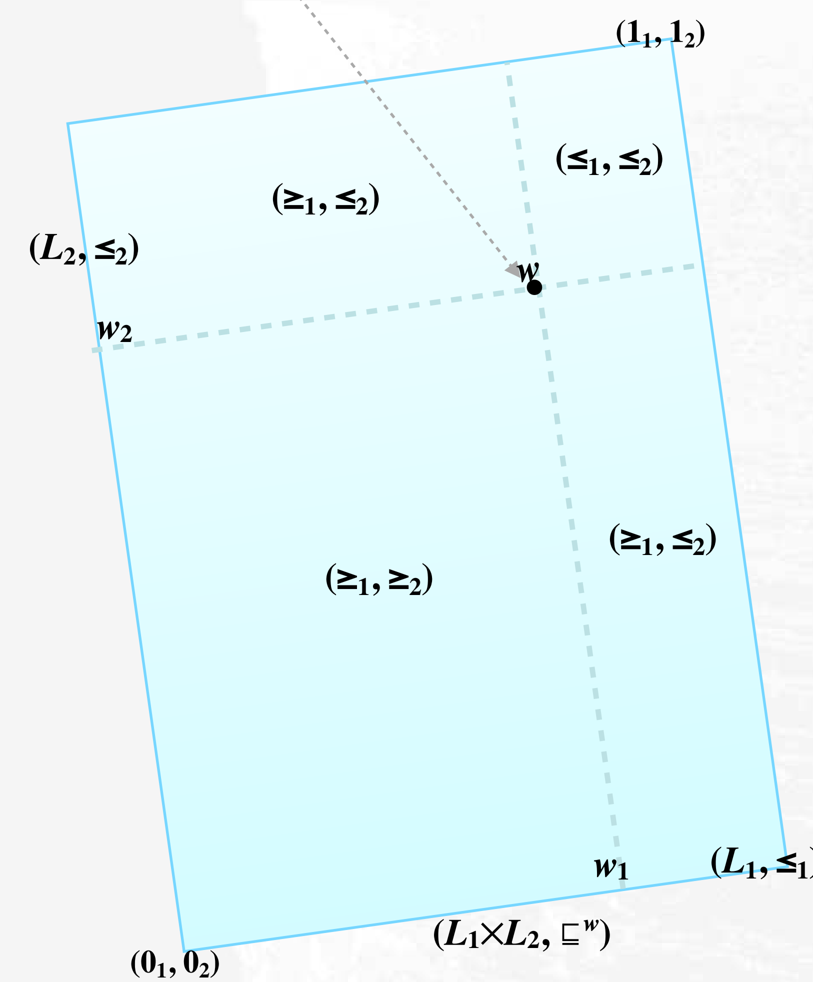
con el orden $\leq$, los operadores $\cdot,+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu\leq\psi)\Leftrightarrow[\mu(x)\leq_x\psi(x)],\ (\mu\cdot\psi)(x)=[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]\ ,\ (\mu+\psi)(x)=[\mu(x)+_x\psi(x)]$$

$$0(x)=0_x\ ,\ 1(x)=1_x\ .$$

Ejemplo (producto $L_1\times L_2$ de dos cadenas).





Proposición. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en el retículo producto $(\mathcal{L},\leq,\wedge,\vee,0,1)$ es tal que:

$$(\mu\sqsubseteq^{\omega}\psi)\Leftrightarrow[\mu(x)\sqsubseteq_x^{\omega(x)}\psi(x)\ \ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x,\leq_x,\cdot_x,+_x,0_x,1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A\sqsubseteq^{\omega}B)\Leftrightarrow[A(x)\sqsubseteq^{\omega(x)}B(x)\ \ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L},\sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu\sqcap^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x)\sqcap_x^{\omega(x)}\psi(x)]=$

$$[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]+_x\omega(x)\cdot_x[\mu(x)+_x\psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x,\sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu\sqcup^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x)\sqcup_x^{\omega(x)}\psi(x)]=$

$$[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]+_x\omega^c(x)\cdot_x[\mu(x)+_x\psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x,\sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO PRODUCTO DE RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

<u>Relación de actividad en producto de retículos</u>. Sea $((L_x,\leq_x,\cdot_x,+_x,0_x,1_x))_{x\in E}$ una familia de retículos distributivos y acotados subindicada por $E\neq\emptyset$ y sea $(\mathcal{L},\leq,\cdot,+,0,1)$ el retículo producto distributivo y acotado tal que:

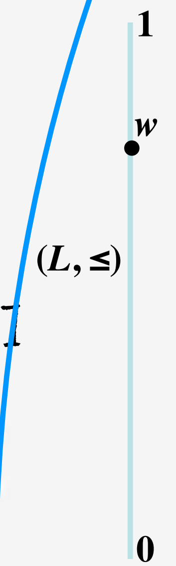
$$\mathcal{L}=\underset{x\in E}{\times} L_x=\{\,\mu: X\to\bigcup_{x\in E} L_x \,/\, \mu(x)\in L_x\ \ \forall x\in E\,\}$$

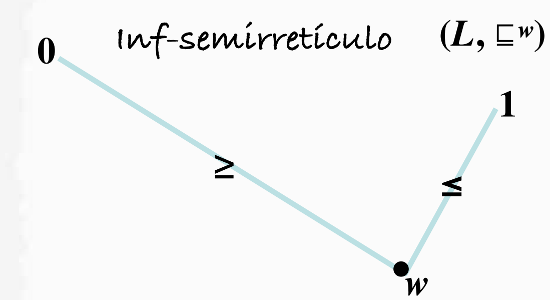
con el orden $\leq$, los operadores $\cdot\,,+$ y las cotas 0, 1 tales que, $\forall x\in E$:

$$(\mu\leq\psi)\Leftrightarrow[\mu(x)\leq_x\psi(x)],\ (\mu\cdot\psi)(x)=[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]\ ,\ (\mu+\psi)(x)=[\mu(x)+_x\psi(x)]$$

$$0(x)=0_x\,,\ 1(x)=1_x\,.$$

Ejemplo (producto $L_1\times L_2$ de dos cadenas).





<u>Proposición</u>. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$

(*) en el retículo producto $(\mathcal{L},\leq,\wedge,\vee,0,1)$ es tal que:

$$(\mu\sqsubseteq^{\omega}\psi)\Leftrightarrow[\mu(x)\sqsubseteq_x^{\omega(x)}\psi(x)\ \ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x,\leq_x,\cdot_x,+_x,0_x,1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A\sqsubseteq^{\omega}B)\Leftrightarrow[A(x)\sqsubseteq^{\omega(x)}B(x)\ \ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L},\sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu\sqcap^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x)\sqcap_x^{\omega(x)}\psi(x)]=$

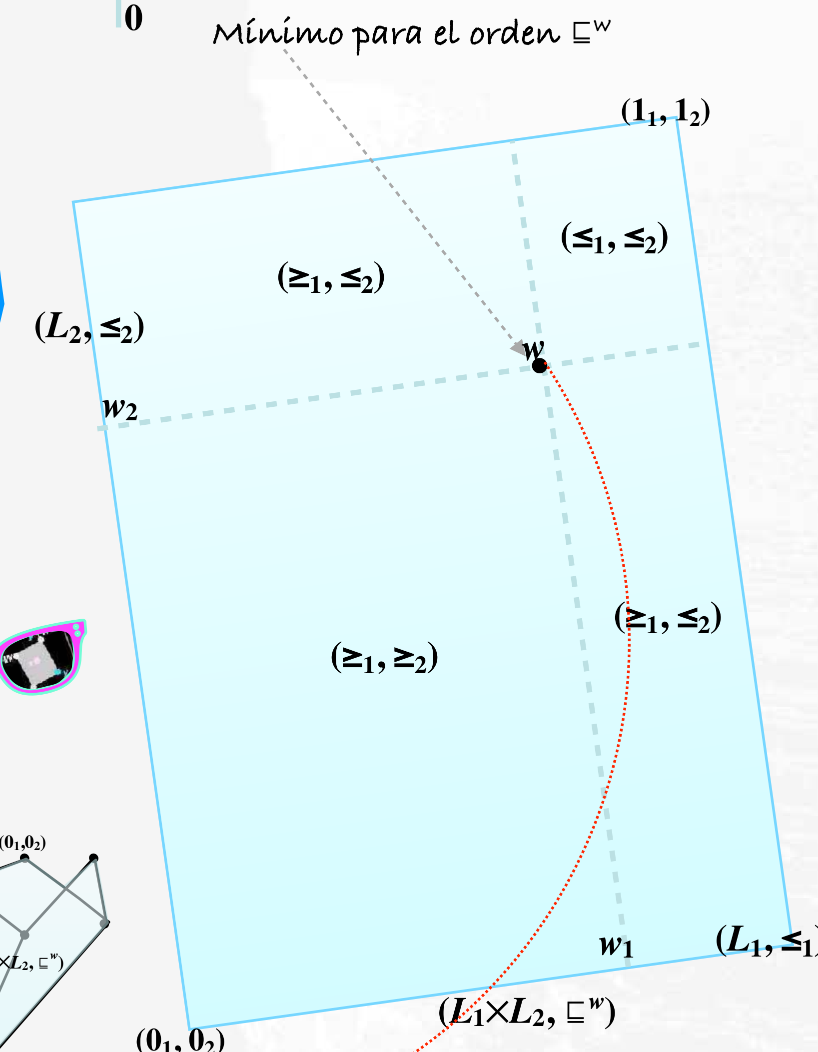
$$[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]+_x\omega(x)\cdot_x[\mu(x)+_x\psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

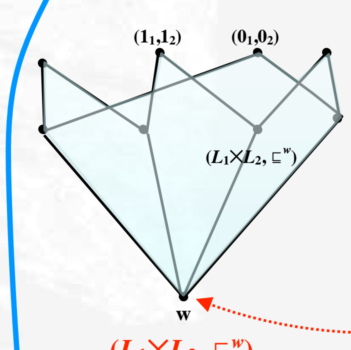
siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "inf" en $(L_x,\sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu\sqcup^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x)\sqcup_x^{\omega(x)}\psi(x)]=$

$$[\mu(x)\cdot_x\psi(x)]+_x\omega^c(x)\cdot_x[\mu(x)+_x\psi(x)]\ \ \forall x\in E,$$

siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "sup" en $(L_x,\sqsubseteq_x^{\omega(x)})$.





(*) (Véase las transparencias siguientes)

<u>Proposición</u>. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^{\omega} \psi)\Leftrightarrow[\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^{\omega} B)\Leftrightarrow[A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x)\ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu \sqcap^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)}\psi(x)\ \forall x\in E]$.
siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "$\omega(x)$-inf" en el inf-semirretículo $(L_x, \sqsubseteq^{\omega(x)})$.
(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu \sqcup^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)}\psi(x)\ \forall x\in E]$.
siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "$\omega(x)$-sup" en el retículo $(L_x, \sqsubseteq^{\omega(x)})$.

<u>Proposición</u>. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. El orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en el retículo producto $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ es tal que:

$$(\mu \sqsubseteq^{\omega} \psi)\Leftrightarrow[\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x\in E],$$

siendo $\sqsubseteq_x^{\omega(x)}$ el orden de actividad en $(L_x, \leq_x, \cdot_x, +_x, 0_x, 1_x)$ asociado a $\omega(x)\in L_x$.

(2) En particular, el orden de actividad $\sqsubseteq^{\omega}$ en L^E asociado al subconjunto L-borroso ω de E, es tal que

$$(A \sqsubseteq^{\omega} B)\Leftrightarrow[A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x)\ \forall x\in E].$$

(3) La ley $\sqcap^{\omega}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$ viene dada por $(\mu \sqcap^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x\in E]$. siendo $\sqcap_x^{\omega(x)}$ el operador "$\omega(x)$-inf" en el inf-semirretículo $(L_x, \sqsubseteq^{\omega(x)})$.

(4) Y si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ es tal que $(\mu \sqcup^{\omega}\psi)(x)=[\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x\in E]$. siendo $\sqcup_x^{\omega(x)}$ el operador "$\omega(x)$-sup" en el retículo $(L_x, \sqsubseteq^{\omega(x)})$.

<u>Demostración</u>. (1) Sea $(\omega,\mu,\psi)\in\mathcal{L}^3$. Se verifica la siguiente cadena de equivalencias:

$$(\mu \sqsubseteq^{\omega} \psi)\Leftrightarrow (\psi\cdot\omega \leq \mu \leq \psi+\omega)\Leftrightarrow [(\psi\cdot\omega)(x) \leq_x \mu(x) \leq_x (\psi+\omega)(x)\ \forall x\in E]\Leftrightarrow$$
$$[(\psi(x)\cdot_x \omega(x)) \leq_x \mu(x) \leq_x (\psi(x)+_x \omega(x))\ \forall x\in E]\Leftrightarrow [\mu(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x\in E].$$

(2) $\mathcal{L}=L^E$ es un caso particular de retículo producto que se obtiene cuando $L_x=L\ \forall x\in E$, luego $(A \sqsubseteq^{\omega} B)\Leftrightarrow[A(x) \sqsubseteq^{\omega(x)} B(x)\ \forall x\in E]$, siendo $\sqsubseteq^{\omega(x)}$ el orden de actividad asociado a $\omega(x)\in L$.

(Continúa)

(Continuación)

(3) Sea $S_{(\omega\mu\psi)} \in \mathcal{L}$ tal que $S_{(\omega\mu\psi)}(x) = \mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x) = [\mu(x) \cdot_x \psi(x) +_x (\omega(x) \cdot_x (\mu(x) +_x \psi(x)))\,]\ \forall x \in E$.

Demostremos que es un minorante del subconjunto $\{\mu, \psi\}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$:

Para cada $x \in E$: $\mu(x) \cdot_x \omega(x) \leq_x (\mu(x) \cdot_x \omega(x)) +_x (\psi(x) \cdot_x \omega(x)) +_x (\mu(x) \cdot_x \psi(x)) = S_{(\omega\mu\psi)}(x)$;

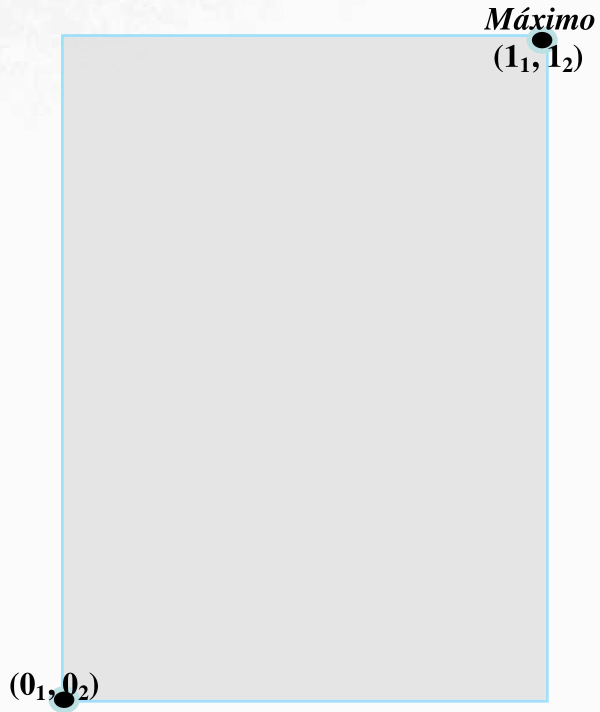
$S_{(\omega\mu\psi)}(x) = [(\mu(x) +_x \psi(x)) \cdot_x (\omega(x) +_x (\mu(x)) \cdot_x (\omega(x) +_x (\mu(x))\,] \leq_x (\omega(x) +_x (\mu(x))$,

es decir $[\mu(x) \cdot_x \omega(x) \leq_x S_{(\omega\mu\psi)}(x) \leq_x \mu(x) +_x \omega(x)\ \forall x \in E]$, equivalente a

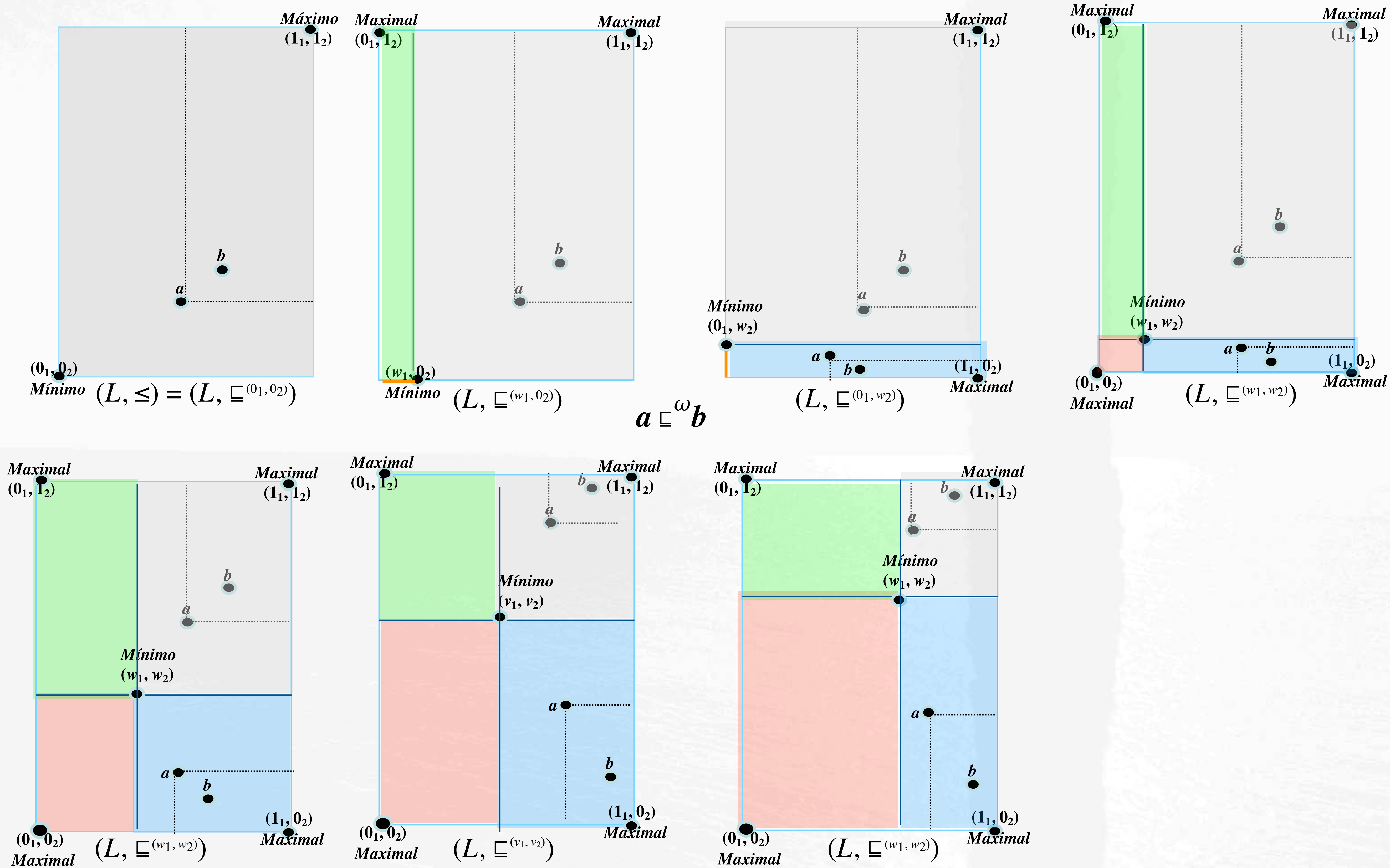
$[\mu(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} S_{(\omega\mu\psi)}(x)\ \forall x \in E]$, lo que demuestra que $[S_{(\omega\mu\psi)} \sqsubseteq^{\omega} \mu]$. Por simetría, intercambiando en la demostración anterior μ y ψ, se obtiene $[S_{(\omega\mu\psi)} \sqsubseteq^{\omega} \psi]$. Concluimos que $S_{(\omega\mu\psi)}$ es un minorante de ambos en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$. Demostremos que es el mínimo.

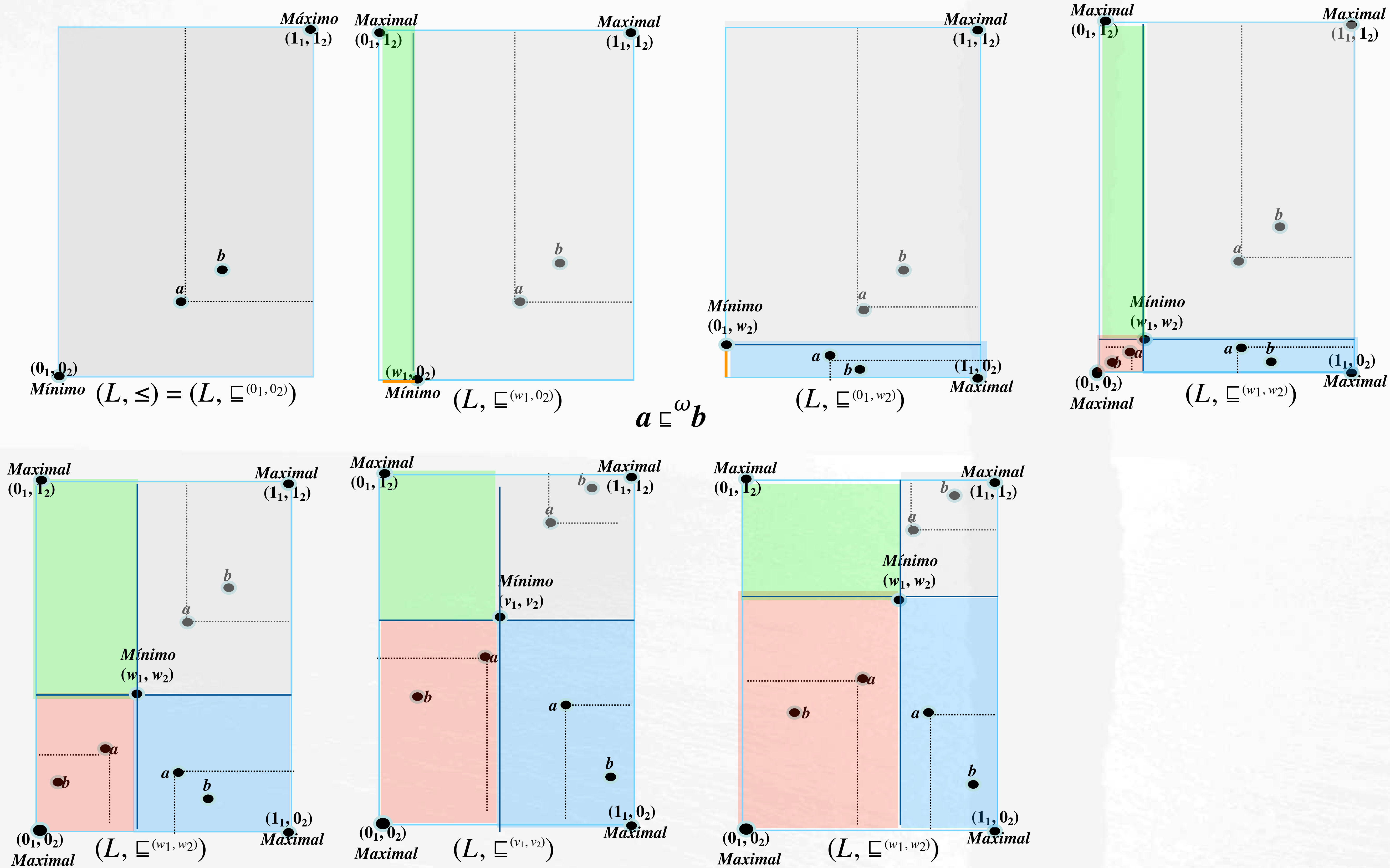
Sea G otro minorante: $[G \sqsubseteq^{\omega} \mu] \& [G \sqsubseteq^{\omega} \psi]$. Entonces $[(G(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \mu(x)) \& (G(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} \psi(x))\ \forall x \in E]$, luego para cada x, $G(x)$ es un minorante de $\{\mu(x), \psi(x)\}$ en $(L_x, \leq_x)$ y en consecuencia $[\,G(x) \sqsubseteq_x^{\omega(x)} (\mu(x) \sqcap_x^{\omega(x)} \psi(x)) = S_{(\omega\mu\psi)}(x)\ \forall x \in E\,]$, que demuestra que $[G \sqsubseteq^{\omega} S_{(\omega\mu\psi)}]$ y que por tanto, $S_{(\omega\mu\psi)}$ es el supremo de $\{\mu, \psi\}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$: $S_{(\omega\mu\psi)} = (\mu \sqcap^{\omega} \psi)$.

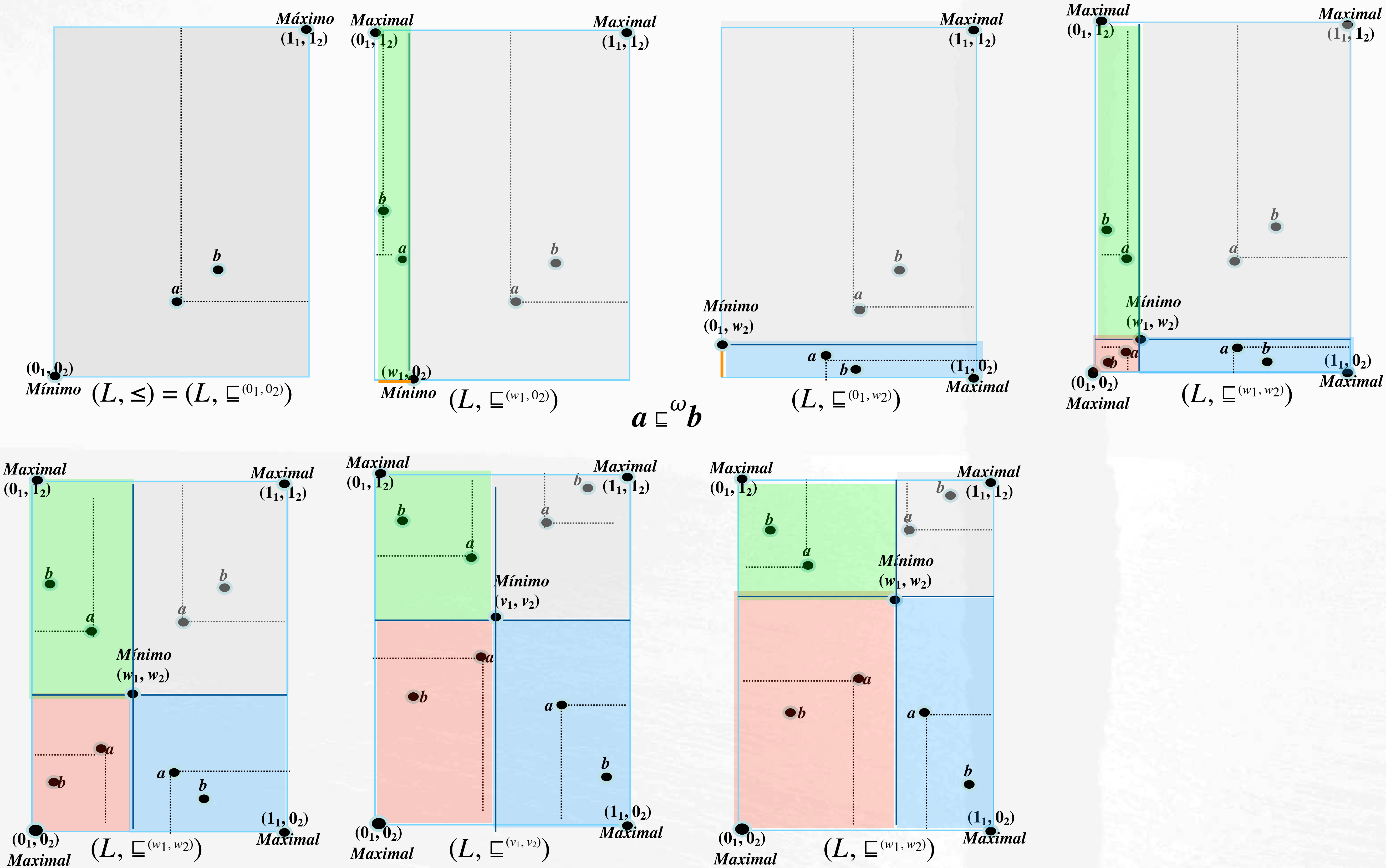
(4) Un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior, demuestra que si ω es complementado con complemento ω^c, el operador $\sqcup^{\omega}$ tal que $(\mu \sqcup^{\omega} \psi)(x) = [\mu(x) \sqcup_x^{\omega(x)} \psi(x)\ \forall x \in E\,]$ es el supremo del subconjunto $\{\mu, \psi\}$ en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{\omega})$.∎

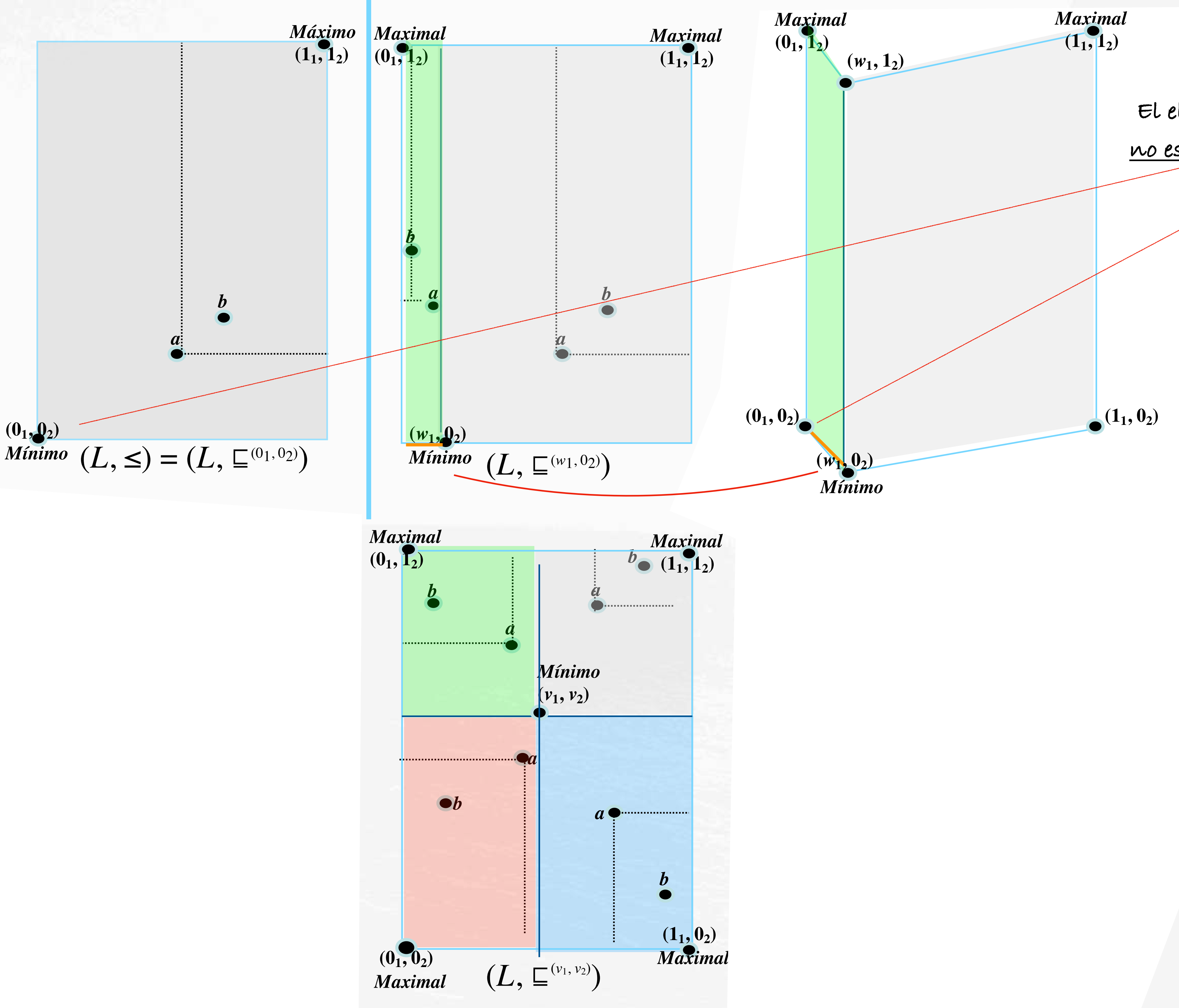


$$(L, \leq) = (L, \sqsubseteq^{(0_1, 0_2)})$$

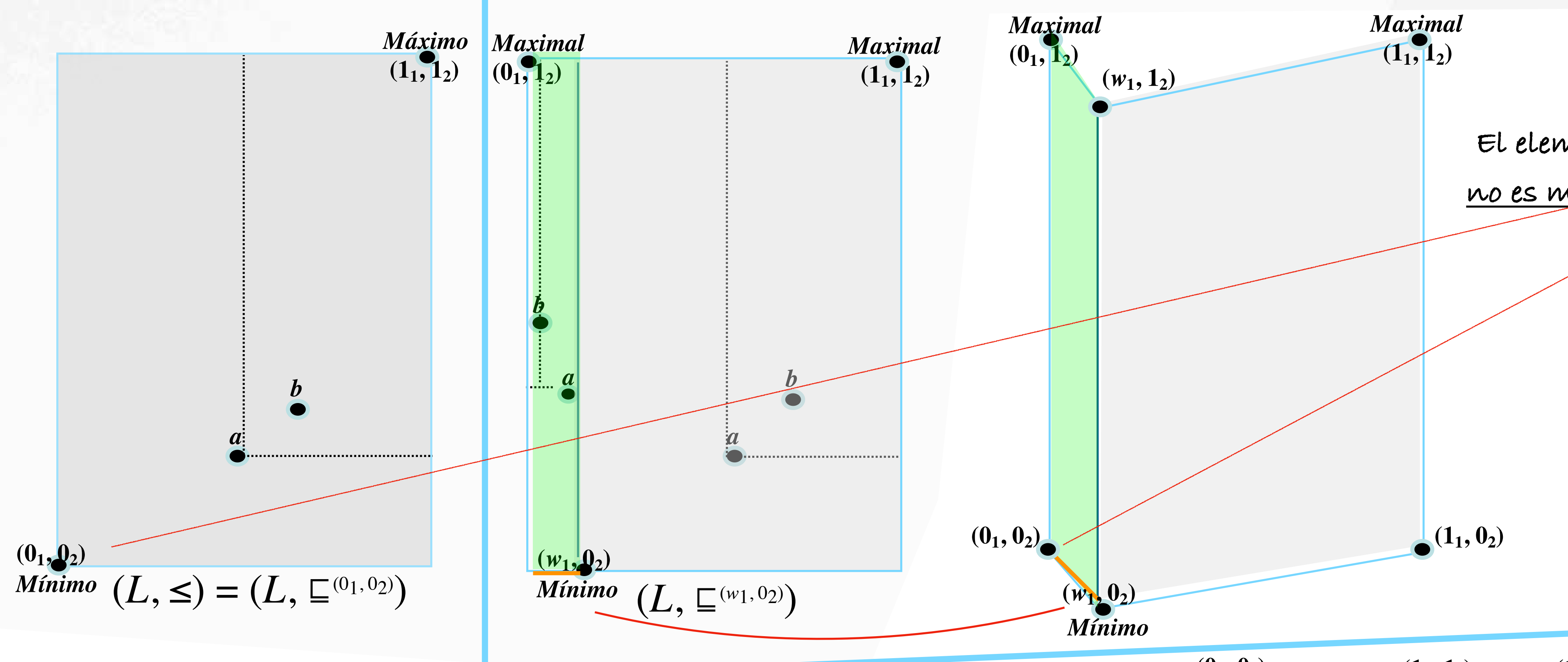

Máximo
$(1_1, 1_2)$
$(0_1, 0_2)$
Mínimo
$(L, \leq) = (L, \sqsubseteq^{(0_1, 0_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
$(w_1, 0_2)$
Mínimo
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
Mínimo
$(0_1, w_2)$
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(0_1, w_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
Mínimo
(w_1, w_2)
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(0_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$
$a \sqsubseteq^{\omega} b$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
Mínimo
(w_1, w_2)
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(0_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
Mínimo
(v_1, v_2)
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(0_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(v_1, v_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
Mínimo
(w_1, w_2)
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(0_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$


Máximo
$(1_1, 1_2)$
b
a
$(0_1, 0_2)$
Mínimo
$(L, \leq) = (L, \sqsubseteq^{(0_1, 0_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
b
a
$(w_1, 0_2)$
Mínimo
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
b
a
Mínimo
$(0_1, w_2)$
a
b
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(0_1, w_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
b
a
Mínimo
(w_1, w_2)
a
b
a
b
$(1_1, 0_2)$
Maximal
$(0_1, 0_2)$
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$
$a \sqsubseteq^{\omega} b$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
$(1_1, 1_2)$
b
a
Mínimo
(w_1, w_2)
a
b
a
b
$(1_1, 0_2)$
$(0_1, 0_2)$
Maximal
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
b
$(1_1, 1_2)$
a
Mínimo
(v_1, v_2)
a
b
a
b
$(1_1, 0_2)$
$(0_1, 0_2)$
Maximal
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(v_1, v_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
Maximal
b
$(1_1, 1_2)$
a
Mínimo
(w_1, w_2)
a
b
a
b
$(1_1, 0_2)$
$(0_1, 0_2)$
Maximal
Maximal
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$

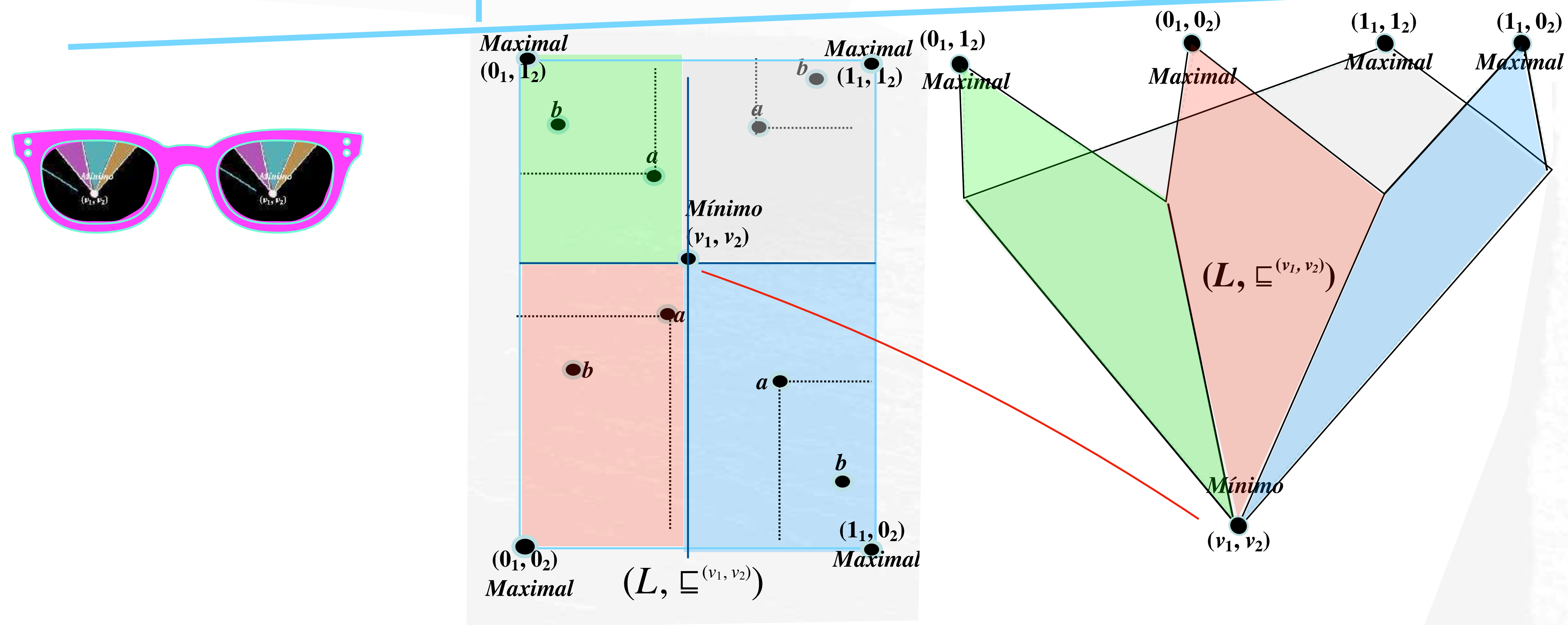

Máximo
$(1_1, 1_2)$
$(0_1, 0_2)$
Mínimo
$(L, \leq) = (L, \sqsubseteq^{(0_1, 0_2)})$
Maximal
$(0_1, 1_2)$
$(w_1, 0_2)$
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$
Mínimo
$(0_1, w_2)$
$(1_1, 0_2)$
$(L, \sqsubseteq^{(0_1, w_2)})$
(w_1, w_2)
$(L, \sqsubseteq^{(w_1, w_2)})$
$a \sqsubseteq^{\omega} b$
(v_1, v_2)
$(L, \sqsubseteq^{(v_1, v_2)})$
a
b

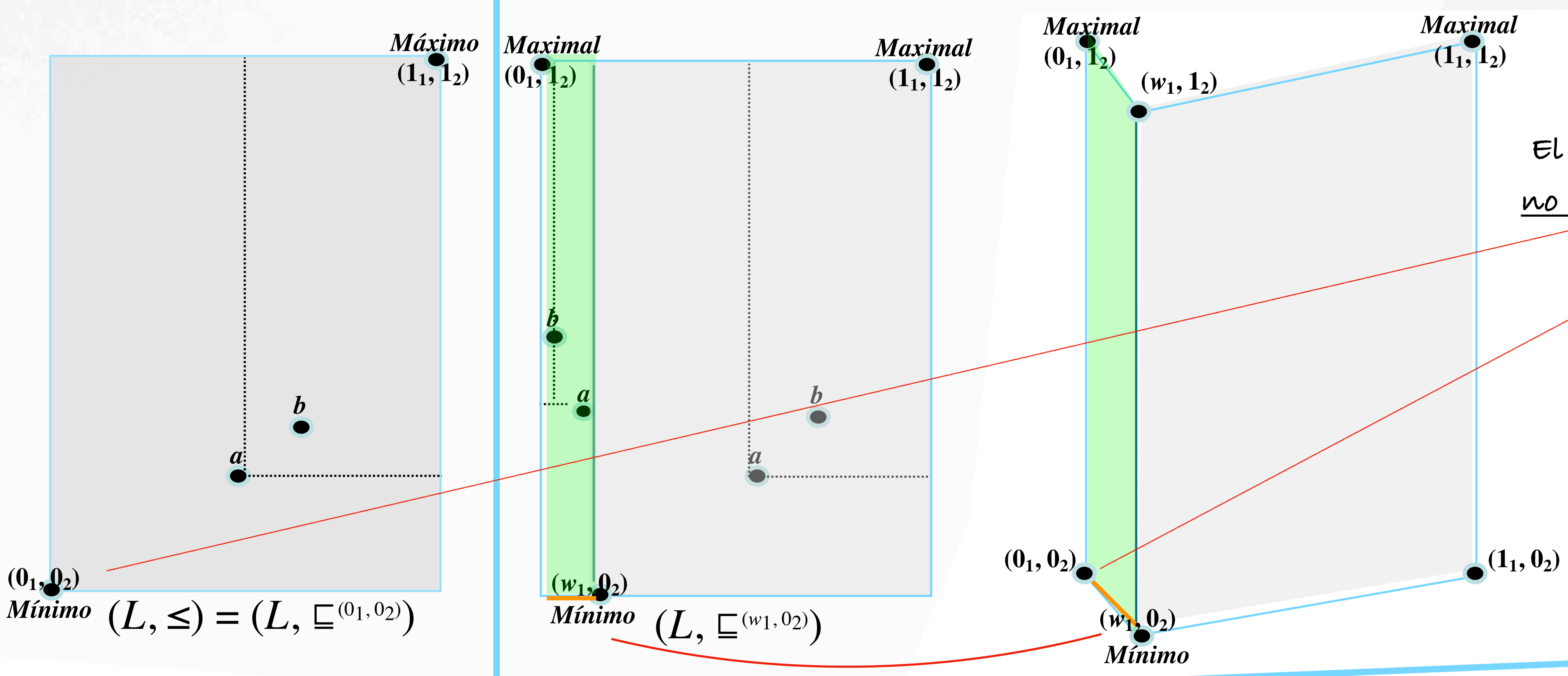


El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$
no es maximal en $(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$.



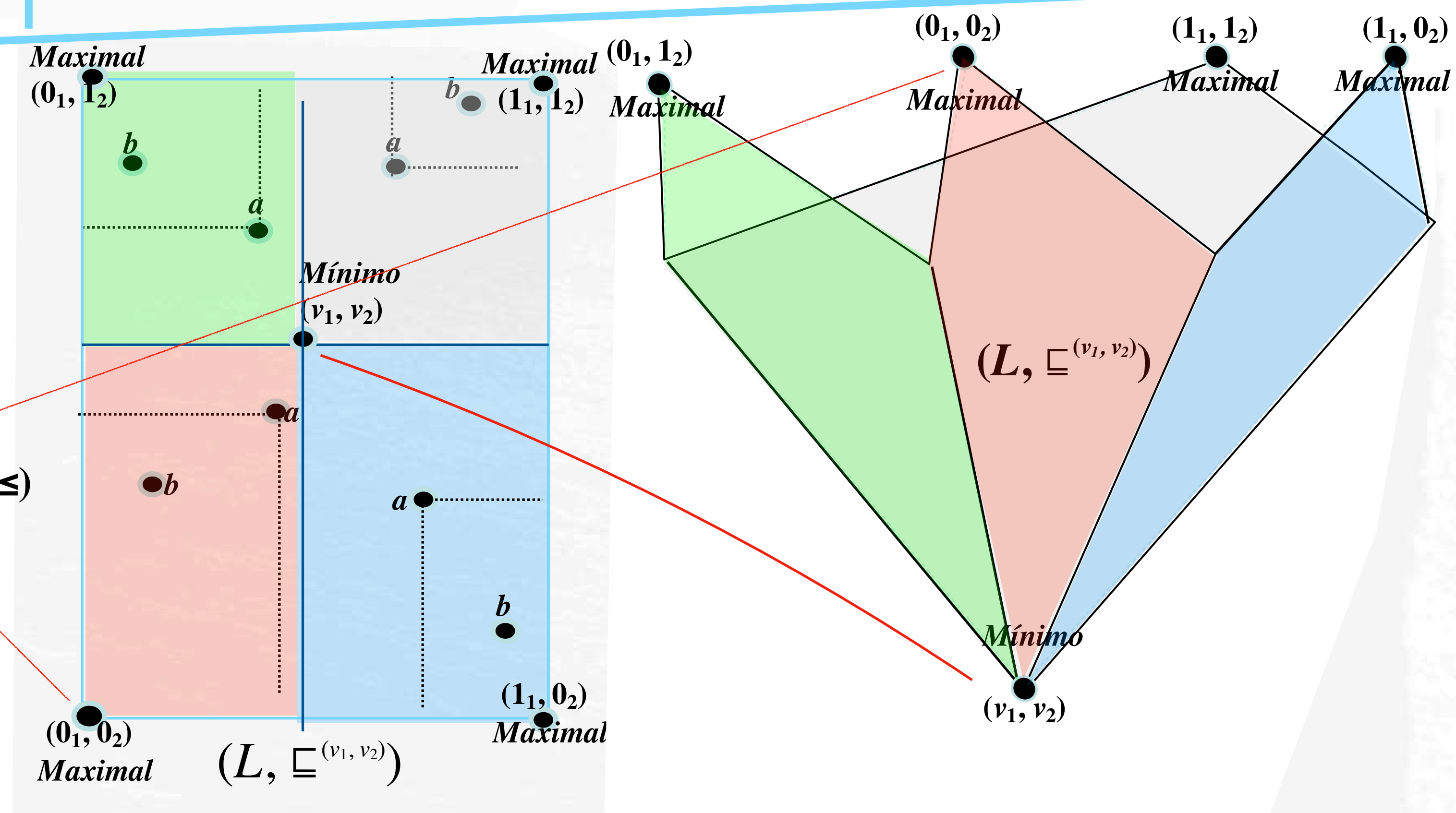
El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$ no es maximal en $(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$.





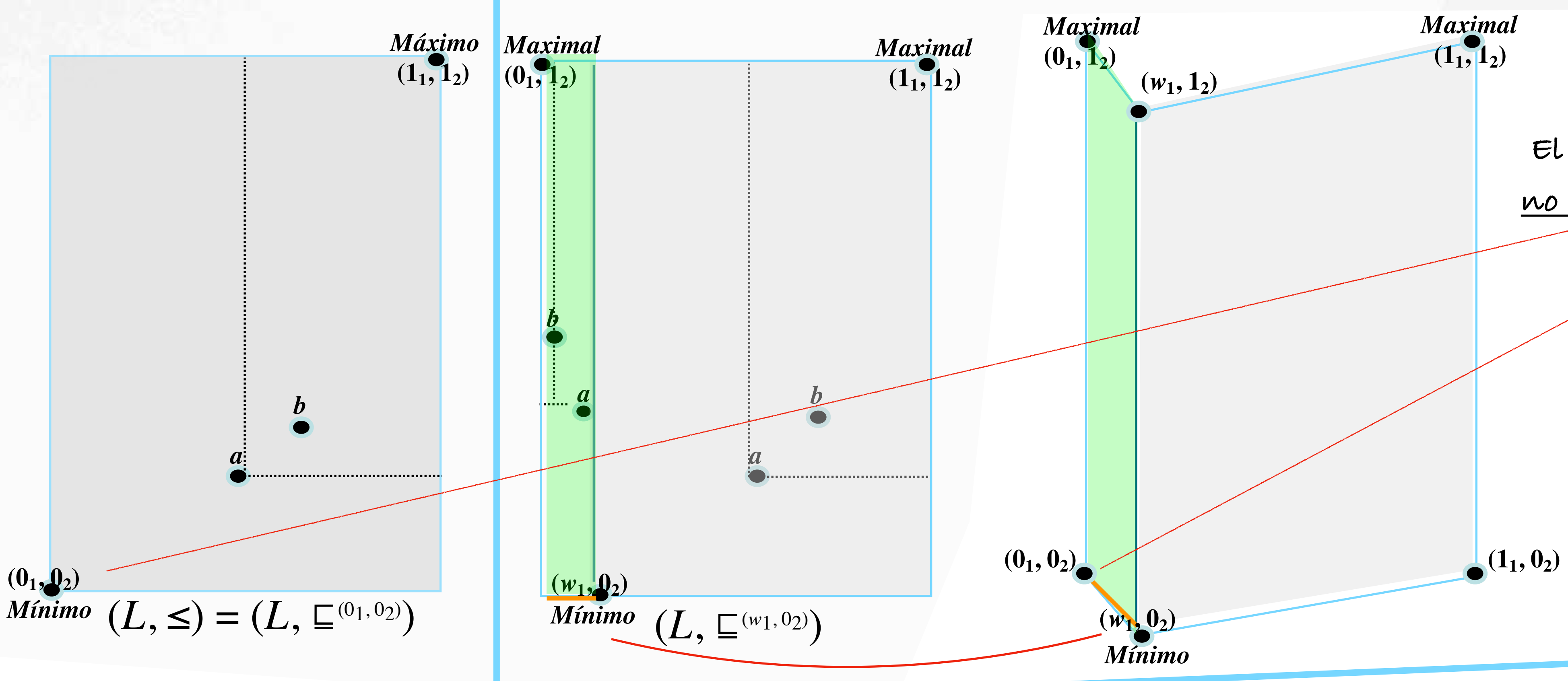
El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$

no es maximal en $(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$.

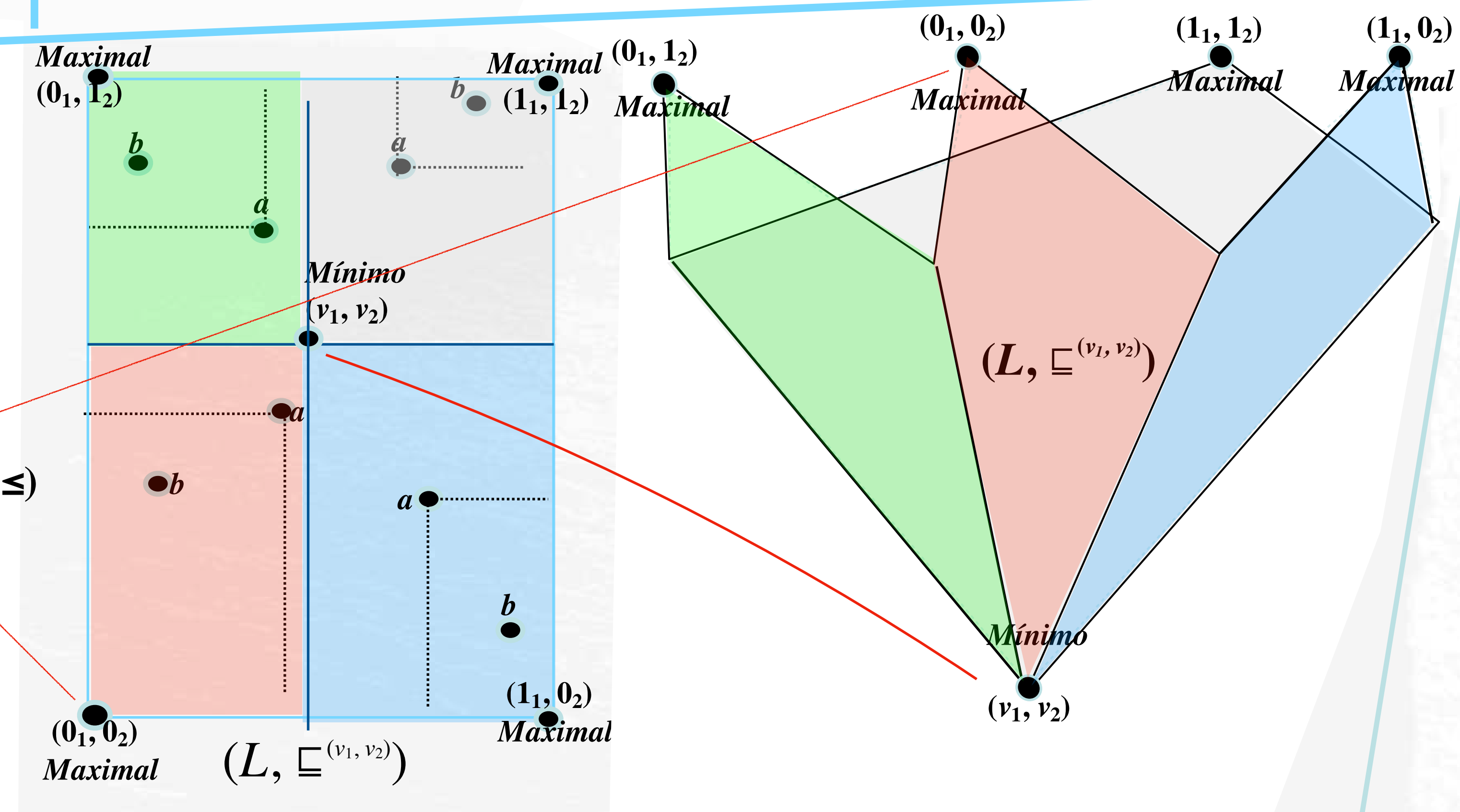


El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$

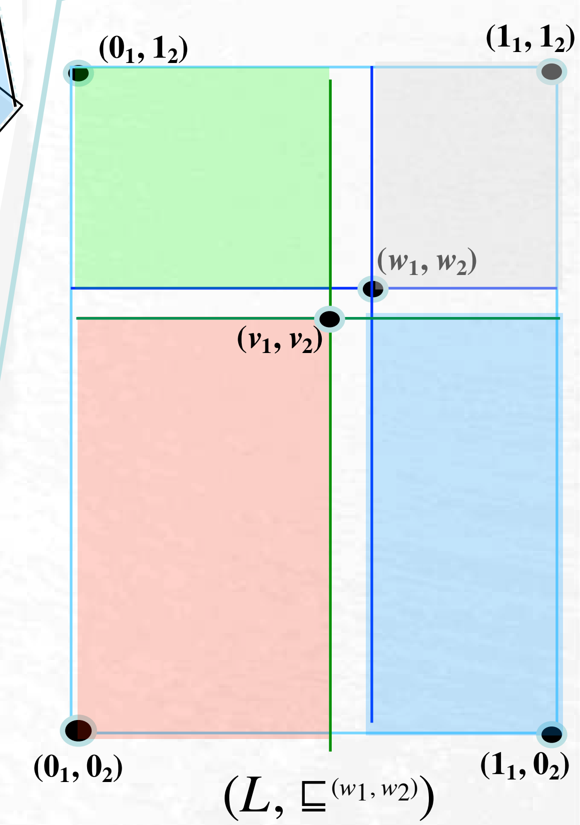
sí es maximal en $(L, \sqsubseteq^{(v_1, v_2)})$.



El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$
<u>no es maximal</u> en $(L, \sqsubseteq^{(w_1, 0_2)})$.



El elemento mínimo $(0_1, 0_2)$ en $(L, \leq)$
<u>sí es maximal</u> en $(L, \sqsubseteq^{(v_1, v_2)})$.



Una ordenación de la familia $\left(\sqsubseteq^{(w_1, w_2)}\right)_{(w_1, w_2) \in L}$:

$$\left(\sqsubseteq^{(v_1, v_2)} \preccurlyeq \sqsubseteq^{(v_1, v_2)}\right) \Leftrightarrow \left((v_1, v_2) \leq (w_1, w_2)\right)$$

Comparación de órdenes de actividad.

Tema abierto: “Perspectivas” y Multisets.

El orden $\sqsubseteq^{w}$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U} .$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\emptyset$ tal que $\emptyset(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

El orden $\sqsubseteq^{w}$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

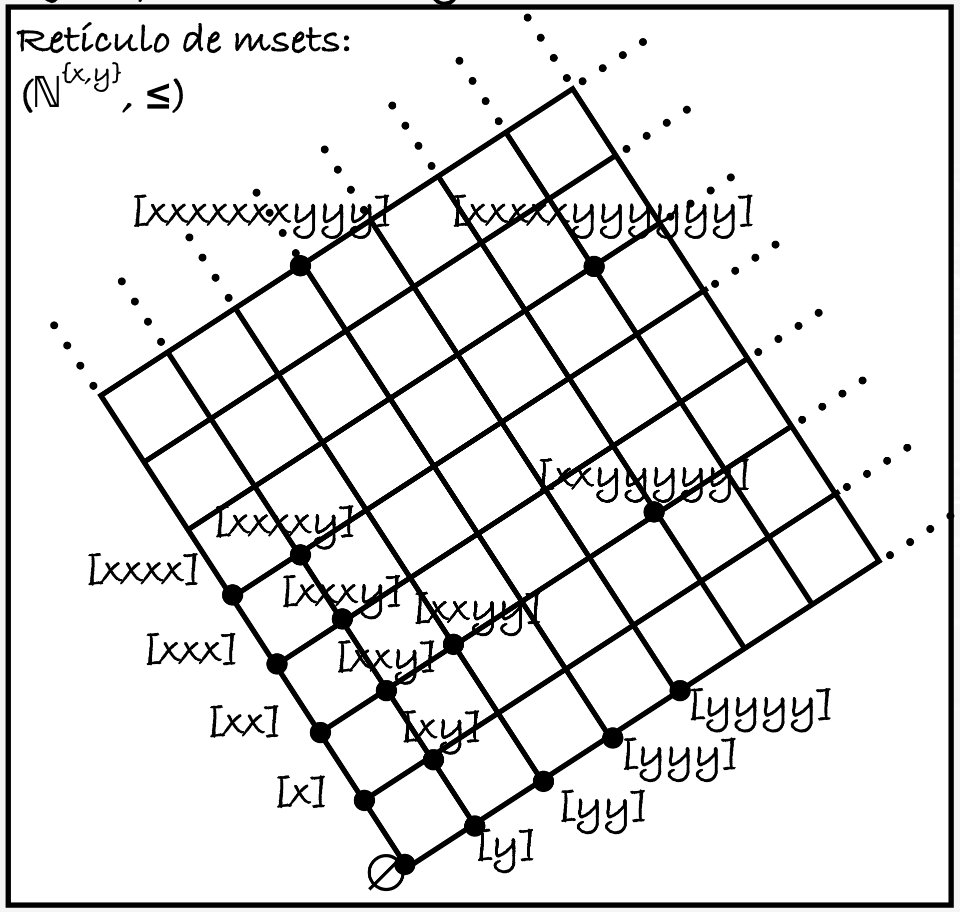
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\varnothing$ tal que $\varnothing(x)=0\in\mathbb{N} \ \ \forall x\in\mathcal{U}$.

Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv$[xxzttt...] etc.

Ejemplo Si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



El orden $\sqsubseteq^W$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

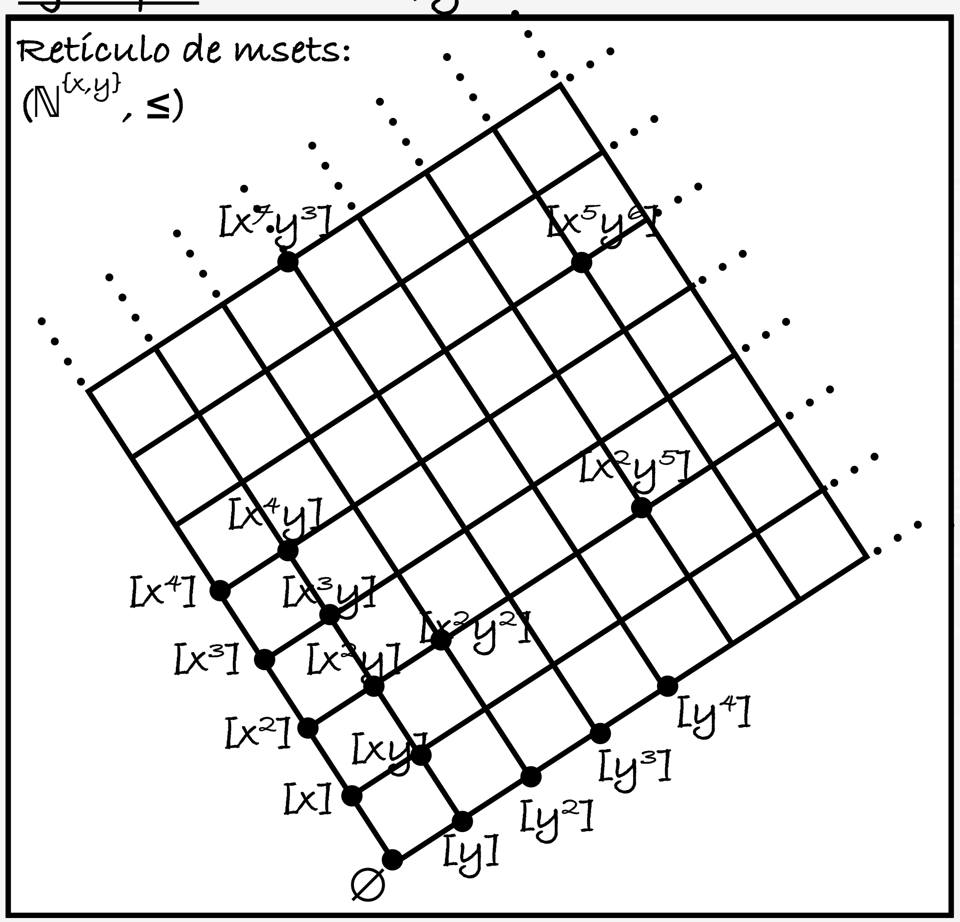
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\emptyset$ tal que $\emptyset(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\ldots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\ldots]$ etc.

<u>Ejemplo</u> Si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



El orden $\sqsubseteq^w$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

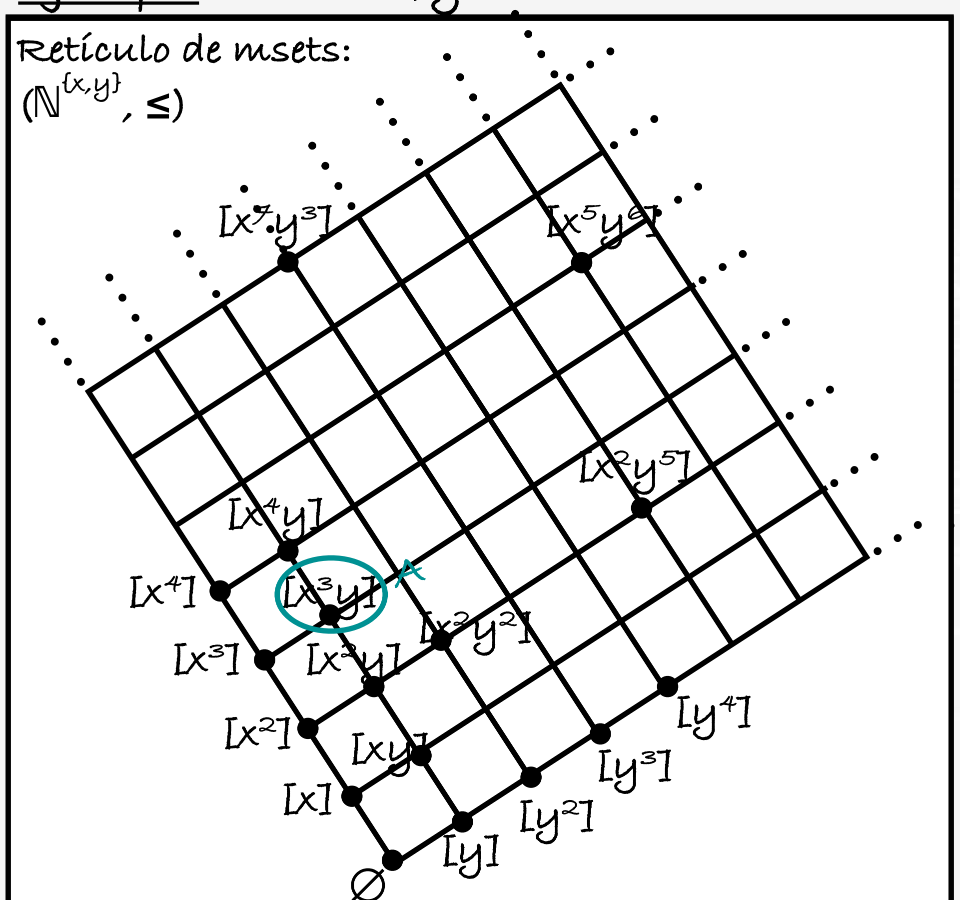
$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\varnothing$ tal que $\varnothing(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\ldots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\ldots]$ etc.

Todo mset A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ tiene asociada la familia de n-cortes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lo caracteriza:

$$A_n=\{x\in\mathcal{U} \,/\, A(x)\geq n\} \;\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad A(x)=\max\{k\in\mathbb{N} \,/\, x\in A_k\} \;\; \forall x\in\mathcal{U}.$$

Ejemplo Si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



Ejemplo. Si $A=[x^3y]$:

$A=(A_0, A_1, A_2,\ldots)=$
$(\mathcal{U}, \{x,y\}, \{x\}, \{x\}, \varnothing, \varnothing, \cdots)$

El orden $\sqsubseteq^W$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\varnothing$ tal que $\varnothing(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

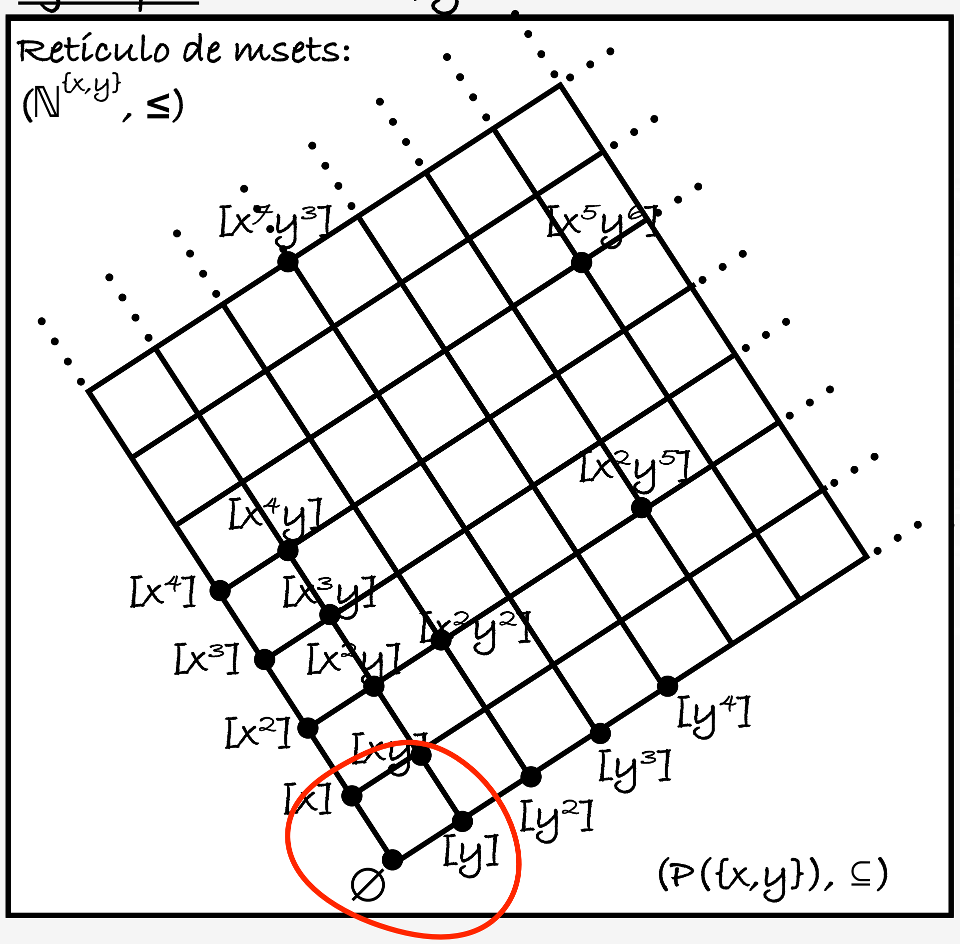
Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\ldots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\ldots]$ etc.

Todo mset A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ tiene asociada la familia de n-cortes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lo caracteriza:

$$A_n=\{x\in\mathcal{U} \,/\, A(x)\geq n\} \;\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad A(x)=\max\{k\in\mathbb{N} \,/\, x\in A_k\} \;\forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es isomorfo a un subretículo acotado de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: identificamos $\{x,y,z\}$ con $[xyz]$ etc.

Ejemplo si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



Ejemplo. Si $A=[x^3y]$:
$A=(A_0, A_1, A_2,\ldots)=$
$(\mathcal{U}, \{x,y\},\{x\},\{x\},\varnothing,\varnothing,\cdots)$

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\dots,n,\dots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\varnothing$ tal que $\varnothing(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

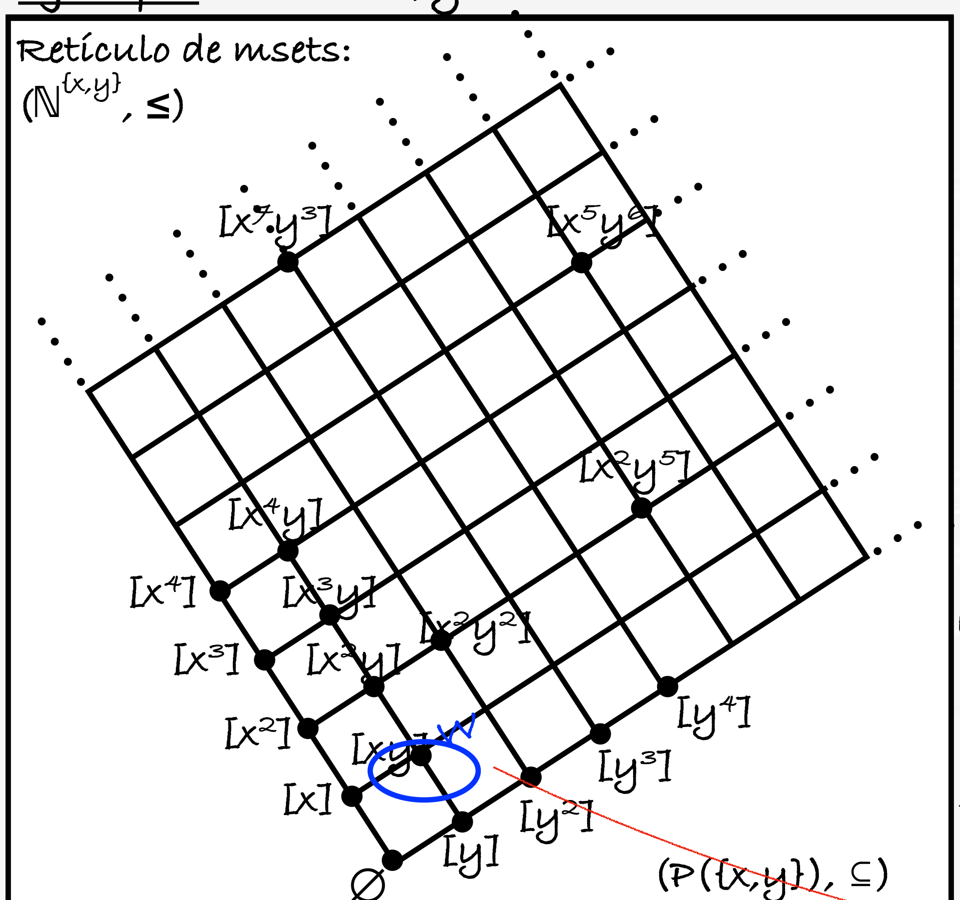
Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\dots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\dots]$ etc.

Todo mset A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ tiene asociada la familia de n-cortes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lo caracteriza:

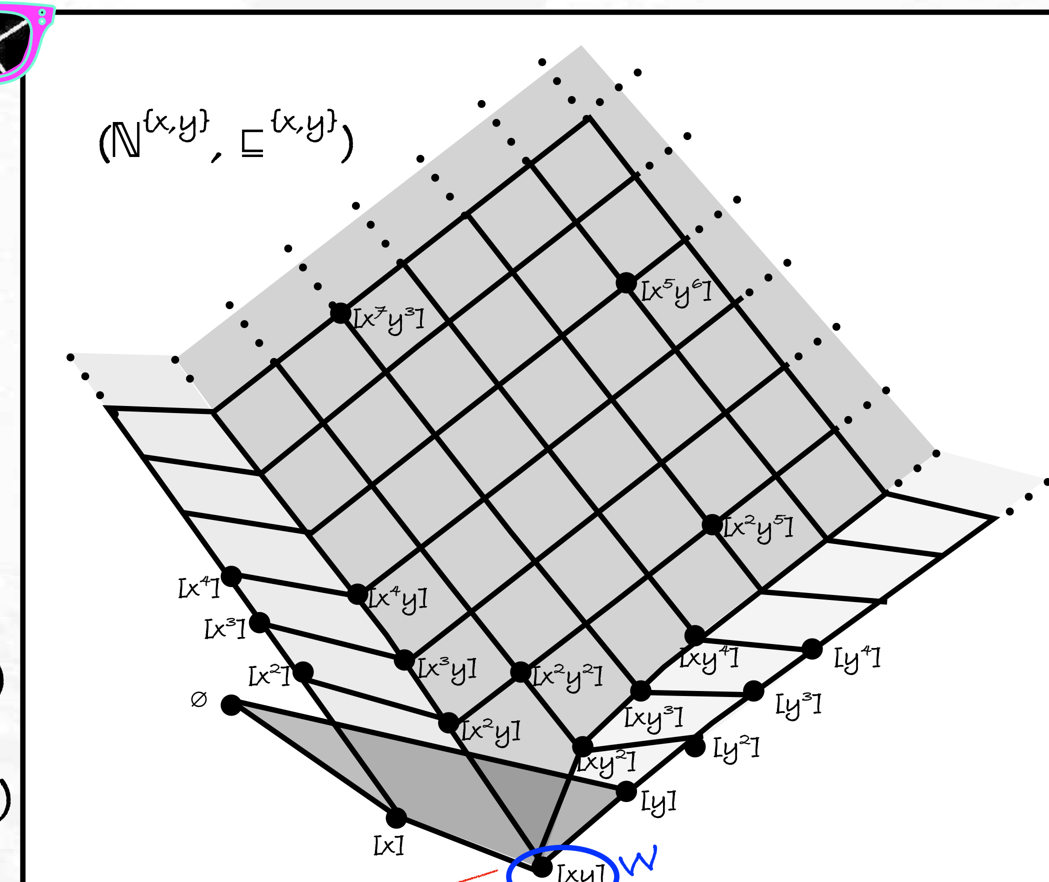
$$A_n=\{x\in\mathcal{U} \,/\, A(x)\geq n\} \;\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad A(x)=\max\{k\in\mathbb{N} \,/\, x\in A_k\} \;\forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es isomorfo a un subretículo acotado de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: identificamos $\{x,y,z\}$ con $[xyz]$ etc.

Ejemplo si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



Ejemplo. Si $A=[x^3y]$:
$A=(A_0, A_1, A_2,\dots)=$
$(\mathcal{U}, \{x,y\}, \{x\}, \{x\}, \varnothing, \varnothing, \cdots)$



Inf-semirretículo acotado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^W)$ con el orden $\sqsubseteq^W$ de la "perspectiva" $W\in\mathbb{N}^{\mathcal{U}}$:

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B\wedge W \leq A \leq B\vee W)$
$\Leftrightarrow (A_n \sqsubseteq^{W_n} B_n \quad \forall n\in\mathbb{N})$
$\Leftrightarrow (A_n \,\Delta\, W_n \subseteq B_n \,\Delta\, W_n \;\forall n\in\mathbb{N})$

El orden $\sqsubseteq^W$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq, \wedge, \vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\varnothing$ tal que $\varnothing(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

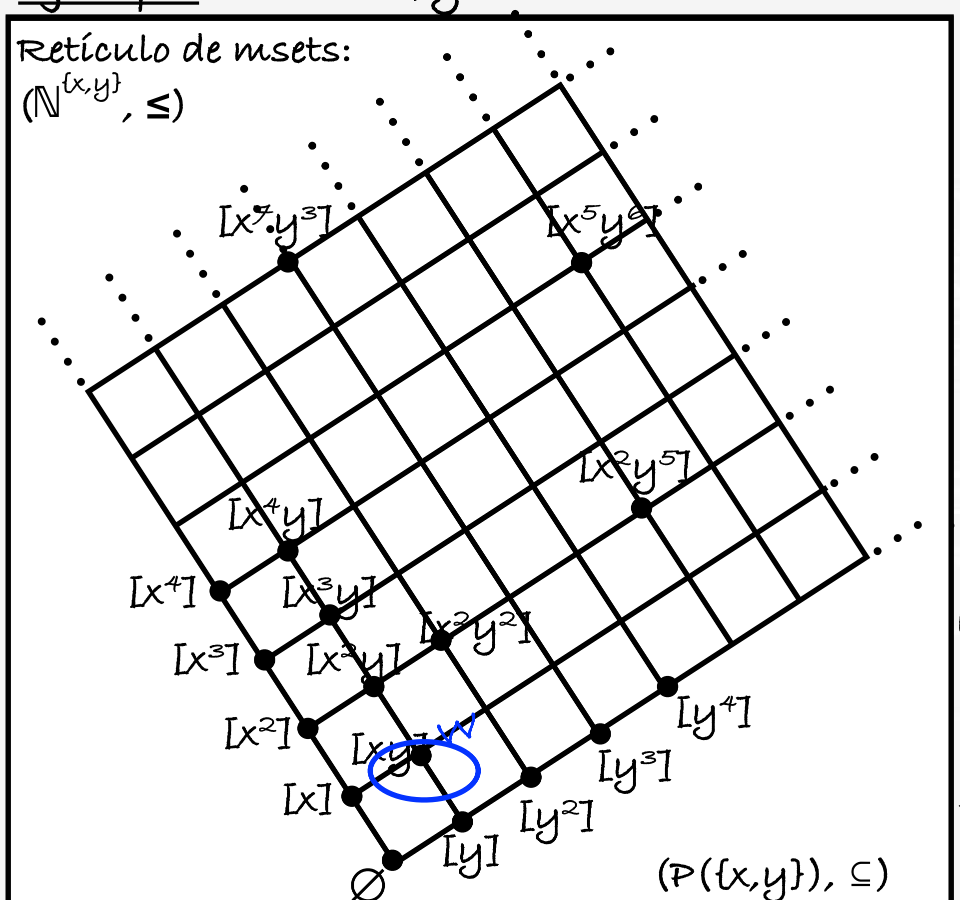
Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\ldots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\ldots]$ etc.

Todo mset A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ tiene asociada la familia de n-cortes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lo caracteriza:

$$A_n=\{x\in\mathcal{U} \,/\, A(x)\geq n\} \;\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad A(x)=\max\{k\in\mathbb{N} \,/\, x\in A_n\} \;\forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es isomorfo a un subretículo acotado de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: identificamos $\{x,y,z\}$ con $[xyz]$ etc.

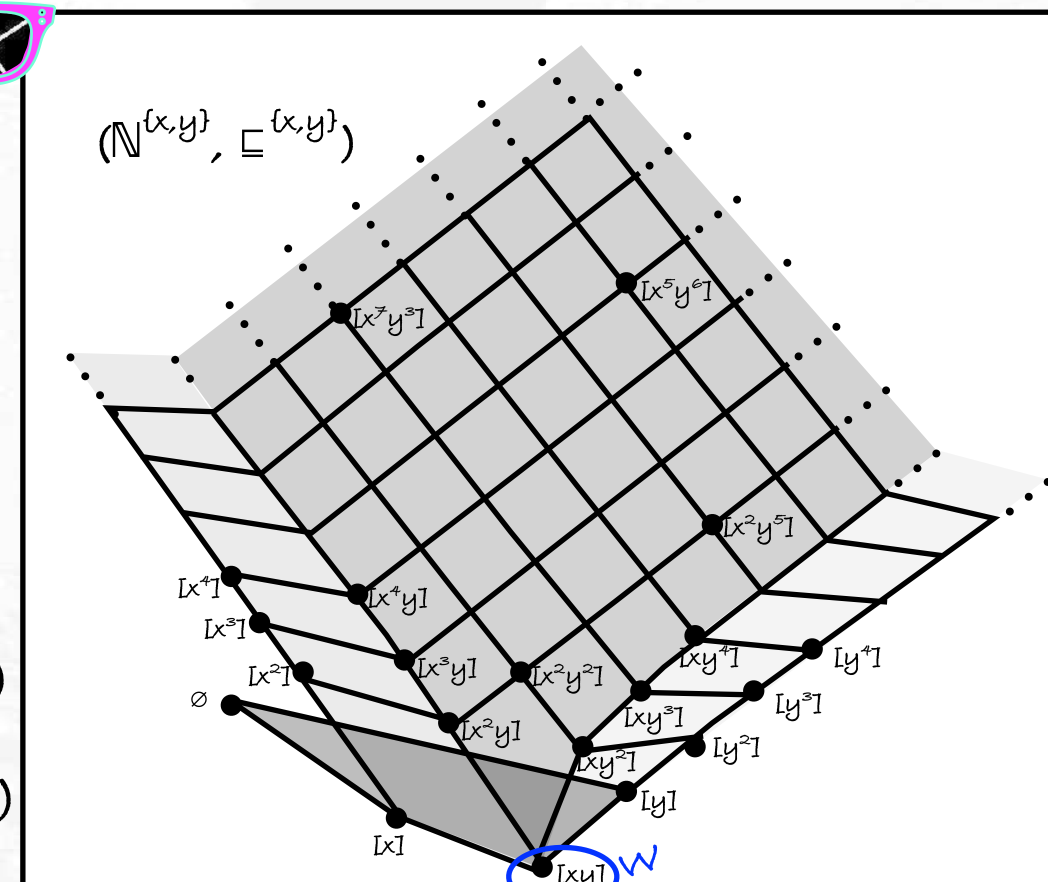
Ejemplo si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



Ejemplo. Si $A=[x^3y]$:
$A=(A_0, A_1, A_2,\ldots)=$
$(\mathcal{U}, \{x,y\}, \{x\}, \{x\}, \varnothing, \varnothing, \cdots)$

Inf-semirretículo acotado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^W)$ con el orden $\sqsubseteq^W$ de la "perspectiva" $W\in\mathbb{N}^{\mathcal{U}}$:

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B\wedge W \leq A \leq B\vee W)$
$\Leftrightarrow (A_n \sqsubseteq^{W_n} B_n \quad \forall n\in\mathbb{N})$
$\Leftrightarrow (A_n \,\Delta\, W_n \subseteq B_n \,\Delta\, W_n \;\forall n\in\mathbb{N})$



En $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ se define una operación "suma" utilizando la usual adición en $\mathbb{N}$:
$(A+B)(x)=A(x)+B(x) \;\forall x\in\mathcal{U}$.

El orden $\sqsubseteq^W$ en retículos de "Multisets"

Sea $\mathcal{U}$ un referencial tal que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $(\mathbb{N}, \leq)$ la cadena de números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$ con el orden usual. Consideremos el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ determinado por las aplicaciones $A:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, $B:\mathcal{U}\to\mathbb{N}$, ..., (los multisets o msets de $\mathcal{U}$), con el orden extensión puntual del anterior:

$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ es retículo distributivo, en el que el ínfimo $A\wedge B$ y el supremo $A\vee B$ de los multisets A y B vienen dados por $(A\wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$; $(A\vee B)(x) = \max(A(x),B(x)) \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

$(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq,\wedge,\vee)$ está acotado inferiormente por el multiset $\emptyset$ tal que $\emptyset(x)=0\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathcal{U}$.

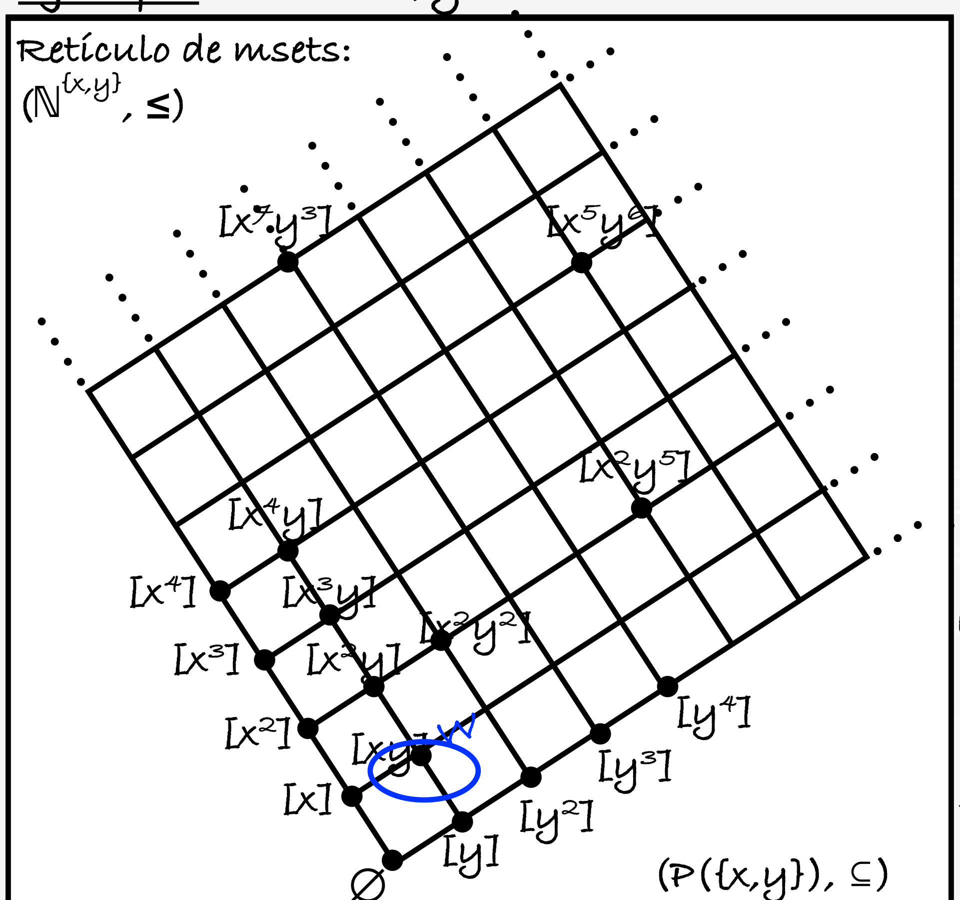
Una representación de los elementos A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: si $A(x)=2$, $A(y)=0$, $A(z)=1$, $A(t)=3$, ... ; escribimos $A\equiv[xxzttt\ldots]$ etc. ó $A\equiv[x^2zt^3\ldots]$ etc.

Todo mset A de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ tiene asociada la familia de n-cortes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lo caracteriza:

$$A_n=\{x\in\mathcal{U} \,/\, A(x)\geq n\} \;\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad A(x)=\max\{k\in\mathbb{N} \,/\, x\in A_n\} \;\forall x\in\mathcal{U}.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es isomorfo a un subretículo acotado de $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$: identificamos $\{x,y,z\}$ con $[xyz]$ etc.

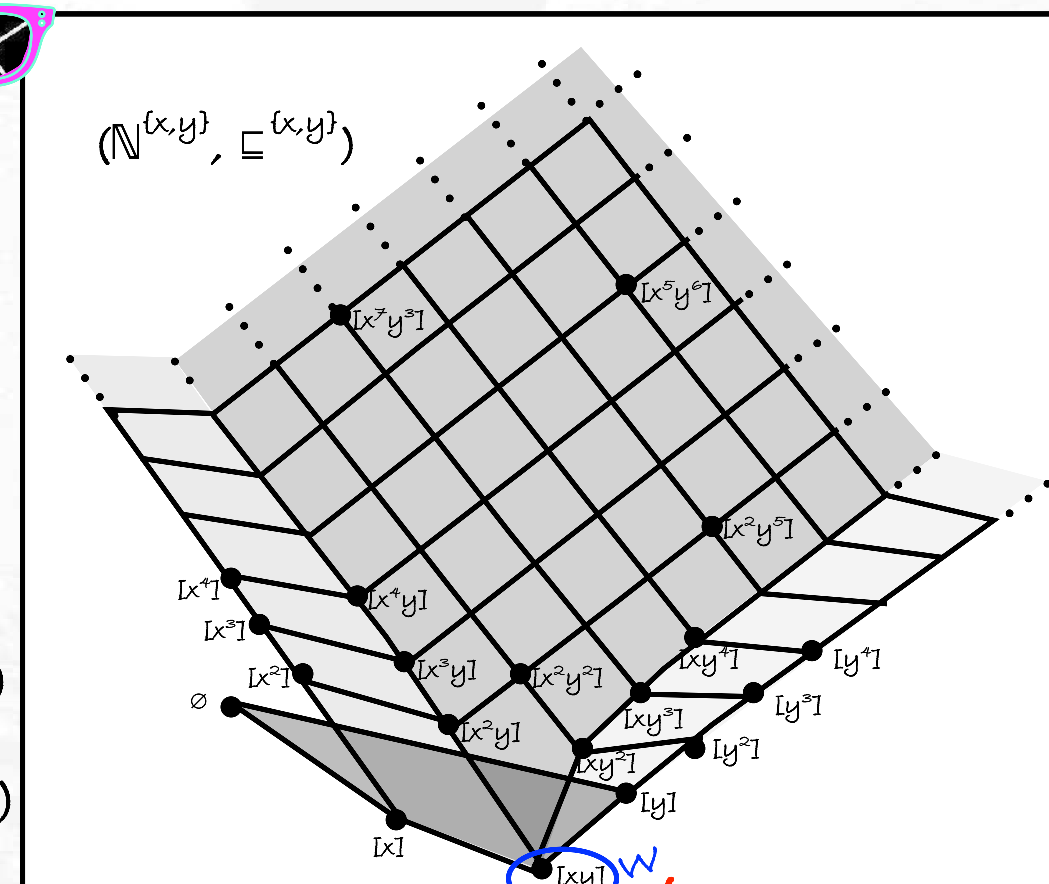
Ejemplo si $\mathcal{U}=\{x,y\}$:



Ejemplo. Si $A=[x^3y]$:
$A=(A_0, A_1, A_2,\ldots)=$
$(\mathcal{U}, \{x,y\}, \{x\}, \{x\}, \emptyset, \emptyset, \cdots)$

Inf-semirretículo acotado $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^W)$ con el orden $\sqsubseteq^W$ de la "perspectiva" $W\in\mathbb{N}^{\mathcal{U}}$:

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (B\wedge W \leq A \leq B\vee W)$
$\Leftrightarrow (A_n \sqsubseteq^{W_n} B_n \quad \forall n\in\mathbb{N})$
$\Leftrightarrow (A_n \,\Delta\, W_n \subseteq B_n \,\Delta\, W_n \;\forall n\in\mathbb{N})$



(Cuestión abierta)

En $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}}, \leq)$ se define una operación "suma" utilizando la usual adición en $\mathbb{N}$:
$(A+B)(x)=A(x)+B(x) \;\forall x\in\mathcal{U}$. (¿Su extensión a $(\mathbb{N}^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^W)$?)

Tema abierto: “Perspectivas” y Rough sets.

“Perspectivas” en Rough Sets asociadas a un subconjunto w

“Rough sets” asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par $(\mathcal{U},R)$ determinado por un referencial finito $\mathcal{U}$ y una relación de tolerancia R en $\mathcal{U}$. (es decir $R \subseteq \mathcal{U}X\mathcal{U}$ reflexiva y simétrica).

Si $x\in\mathcal{U}$,, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y\in\mathcal{U} / xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(\mathcal{U})$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)=\{x\in\mathcal{U} / R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x\in\mathcal{U} / R(x)\cap A\neq\emptyset\}\quad \forall A\in P(\mathcal{U}).$$

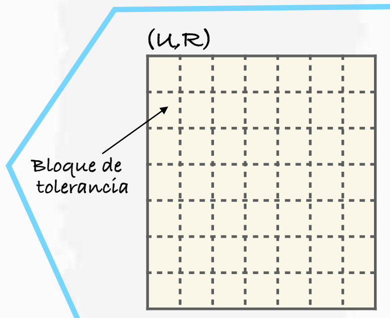
$(R\downarrow)(A)$ es la “R-aproximación inferior de A” y $(R\uparrow)(A)$ la “R-aproximación superior de A”.

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)]\subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)]\quad \forall A\in P(\mathcal{U})$.

Un par $(A_1, A_2)\in P(\mathcal{U})XP(\mathcal{U})$ es un “Rough set” (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en $(\mathcal{U},R)$, si existe $A\in P(\mathcal{U})$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

"Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia R en U. (es decir $R \subseteq U\times U$ reflexiva y simétrica).



Si $x\in U$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y\in U \,/\, xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(U)$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)=\{x\in U \,/\, R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x\in U \,/\, R(x)\cap A\neq\emptyset\} \quad \forall A\in P(U).$$

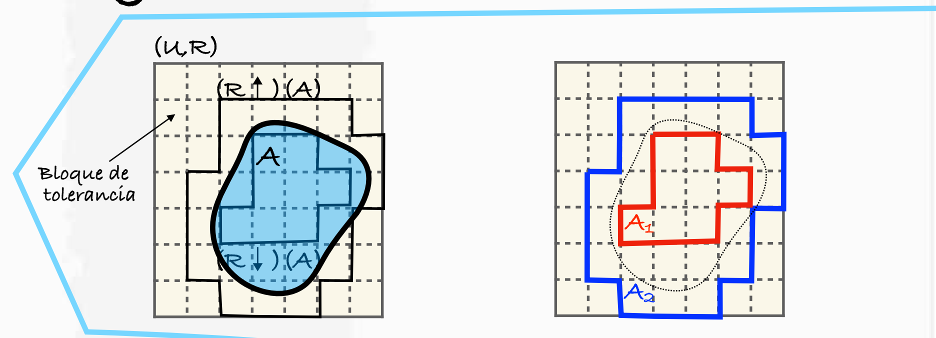
$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)]\subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in P(U)$.

Un par $(A_1, A_2)\in P(U)\times P(U)$ es un "Rough set" (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en (U,R), si existe $A\in P(U)$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\,\&\,[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

"Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia R en U. (es decir $R \subseteq U X U$ reflexiva y simétrica).



Rough set: (A_1, A_2)

Si $x \in U$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y \in U \,/\, xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(U)$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)=\{x \in U \,/\, R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x \in U \,/\, R(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \forall A \in P(U).$$

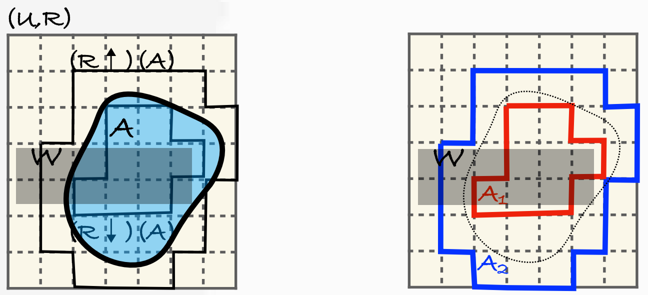
$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A \in P(U)$.

Un par $(A_1, A_2) \in P(U) X P(U)$ es un "Rough set" (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en (U,R), si existe $A \in P(U)$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)] \& [A_2=(R\uparrow)(A)]$.

<u>"Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$</u>

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia R en U. (es decir $R \subseteq U X U$ reflexiva y simétrica).



Rough set: (A_1, A_2)

Si $x \in U$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y \in U \,/\, xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(U)$ tales que: 

$$(R\downarrow)(A)=\{x \in U \,/\, R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x \in U \,/\, R(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \forall A \in P(U).$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A \in P(U)$.

Un par $(A_1, A_2) \in P(U) X P(U)$ es un "Rough set" (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en (U,R), si existe $A \in P(U)$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)] \& [A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Si consideramos ahora una "perspectiva" W en U...

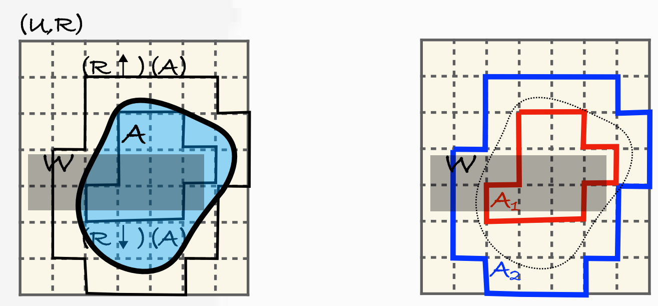
<u>"R-aproximaciones" y "Rough sets" en el álgebra $(((P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c), R)$</u>

“Rough sets” asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia R en U. (es decir $R \subseteq U \times U$ reflexiva y simétrica).

Si $x \in U$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y \in U / xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(U)$ tales que:



Rough set: (A_1, A_2)

$$(R\downarrow)(A)=\{x\in U / R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x\in U / R(x)\cap A\neq\emptyset\} \quad \forall A\in P(U).$$

$(R\downarrow)(A)$ es la “R-aproximación inferior de A” y $(R\uparrow)(A)$ la “R-aproximación superior de A”.

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in P(U)$.

Un par $(A_1, A_2)\in P(U)\times P(U)$ es un “Rough set” (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en (U,R), si existe $A\in P(U)$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)] \,\&\, [A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Si consideramos ahora una “perspectiva” W en U...

“R-aproximaciones” y “Rough sets” en el álgebra $(((P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c), R)$

La “RW-aproximación inferior” $(\hat{R}\downarrow)_W: P(U) \to P(U)$ en $((P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$ es tal que

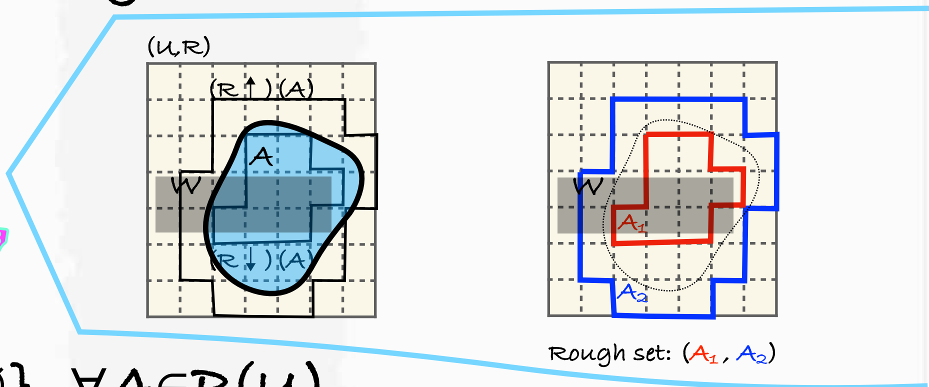
$$(\hat{R}\downarrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in U / R(x) \subseteq \varphi_W(A)\}=\varphi_W(\{x\in U / \varphi_W(R(x)) \sqsubseteq^W A\})=$$
$$=(\{x\in U / R(x) \subseteq (A\Delta W)\})\Delta W = (\{x\in U / [(R(x))\Delta W] \sqsubseteq^W A\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

Análogamente, para la “RW-aproximación superior” $(\hat{R}\uparrow)_W$:, si $(R\uparrow): P(U) \to P(U)$ es la “R-aproximación superior”, entonces:

$$(\hat{R}\uparrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in U / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})=\varphi_W(\{x\in U / \varphi_W(R(x))\sqcap^W A\neq W\})=$$
$$=(\{x\in U / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})\Delta W=(\{x\in U / \varphi_W((R(x)))\sqcap^W A\neq W\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

"Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par $(\mathcal{U},R)$ determinado por un referencial finito $\mathcal{U}$ y una relación de tolerancia R en $\mathcal{U}$. (es decir $R \subseteq \mathcal{U}X\mathcal{U}$ reflexiva y simétrica).



Si $x\in\mathcal{U}$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y\in\mathcal{U} / xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(\mathcal{U})$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)=\{x\in\mathcal{U} / R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x\in\mathcal{U} / R(x)\cap A\neq\emptyset\} \quad \forall A\in P(\mathcal{U}).$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)]\subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in P(\mathcal{U})$.

Un par $(A_1, A_2)\in P(\mathcal{U})XP(\mathcal{U})$ es un "Rough set" (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en $(\mathcal{U},R)$, si existe $A\in P(\mathcal{U})$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Si consideramos ahora una "perspectiva" W en $\mathcal{U}$...

(Cuestión abierta)

"R-aproximaciones" y "Rough sets" en el álgebra $(((P(\mathcal{U}), \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),^c), R)$

La "RW-aproximación inferior" $(\hat{R}\downarrow)_W$: $P(\mathcal{U}) \rightarrow P(\mathcal{U})$ en $((P(\mathcal{U}), \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),^c)$ es tal que

$$(\hat{R}\downarrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in\mathcal{U} / R(x) \subseteq \varphi_W(A)\}=\varphi_W(\{x\in\mathcal{U} / \varphi_W(R(x)) \sqsubseteq^W A\})=$$
$$= (\{x\in\mathcal{U} / R(x) \subseteq (A\Delta W)\})\Delta W = (\{x\in\mathcal{U} / [(R(x))\Delta W] \sqsubseteq^W A\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

Análogamente, para la "RW-aproximación superior" $(\hat{R}\uparrow)_W$:, si $(R\uparrow)$: $P(\mathcal{U}) \rightarrow P(\mathcal{U})$ es la "R-aproximación superior", entonces:

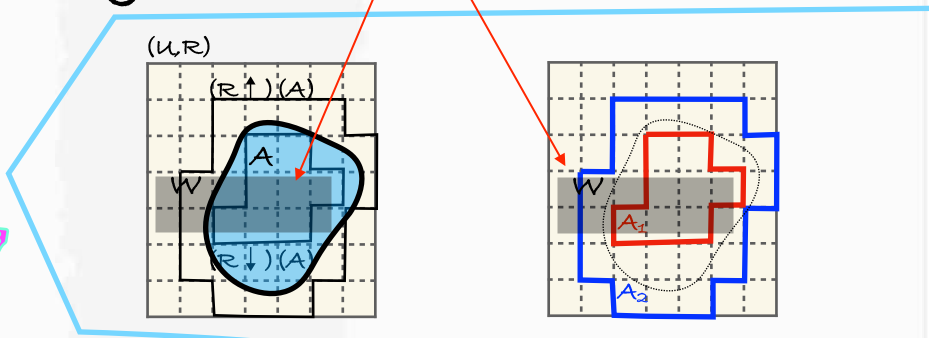
$$(\hat{R}\uparrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in\mathcal{U} / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})=\varphi_W(\{x\in\mathcal{U} /\varphi_W(R(x))\sqcap^W A\neq W\})=$$
$$= (\{x\in\mathcal{U} / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})\Delta W=(\{x\in\mathcal{U} / \varphi_W((R(x)))\sqcap^W A\neq W\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

$$\boxed{[(\hat{R}\downarrow)_W(A)] \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W [(\hat{R}\uparrow)_W(A)] \quad \forall A\in P(\mathcal{U})}$$

"Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

¿Imperfección, ruido,...?

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia R en U. (es decir $R \subseteq U \times U$ reflexiva y simétrica).



Rough set: (A_1, A_2)

Si $x \in U$, $R(x)$ representará el subconjunto: $R(x)=\{y \in U / xRy\}$.

Sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en $P(U)$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)=\{x\in U / R(x) \subseteq A\},\ (R\uparrow)(A)=\{x\in U / R(x)\cap A\neq\emptyset\} \quad \forall A\in P(U).$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \subseteq A \subseteq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in P(U)$.

Un par $(A_1, A_2)\in P(U)\times P(U)$ es un "Rough set" (conjunto rugoso, conjunto aproximado) en (U,R), si existe $A\in P(U)$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\,\&\,[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Si consideramos ahora una "perspectiva" W en U...

(Cuestión abierta)

"R-aproximaciones" y "Rough sets" en el álgebra $(((P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c), R)$

La "RW-aproximación inferior" $(\widehat{R\downarrow})_W: P(U) \to P(U)$ en $((P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$ es tal que

$$(\widehat{R\downarrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in U / R(x) \subseteq \varphi_W(A)\})=\varphi_W(\{x\in U / \varphi_W(R(x)) \sqsubseteq^W A\})=$$
$$=(\{x\in U / R(x) \subseteq (A\Delta W)\})\Delta W = (\{x\in U / [(R(x))\Delta W] \sqsubseteq^W A\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

Análogamente, para la "RW-aproximación superior" $(\widehat{R\uparrow})_W$:, si $(R\uparrow): P(U) \to P(U)$ es la "R-aproximación superior", entonces:

$$(\widehat{R\uparrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(\{x\in U / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})=\varphi_W(\{x\in U / \varphi_W(R(x))\sqcap^W A\neq W\})=$$
$$=(\{x\in U / (R(x))\cap\varphi_W(A)\neq\emptyset\})\Delta W=(\{x\in U / \varphi_W((R(x)))\sqcap^W A\neq W\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

$$\boxed{[(\widehat{R\downarrow})_W(A)] \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W [(\widehat{R\uparrow})_W(A)] \quad \forall A\in P(U)}$$

“Perspectivas” nítidas en Fuzzy Rough Sets

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^{W}$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia L-borrosa R en U. (es decir $R \in L^{U \times U}$ reflexiva y simétrica).

Si $(x,y) \in U \times U$, $R(x,y) \in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow.$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$

y $(R\uparrow)$ operadores en L^{U} tales que:

$(R\downarrow)(A)(y) = \inf\{R(x,y) \rightarrow. A(x) \,/\, x \in U\}$, $(R\uparrow)(A) = \sup\{R(x,y) \cdot A(x) \,/\, x \in U\}$ $\forall A \in L^{U}$.

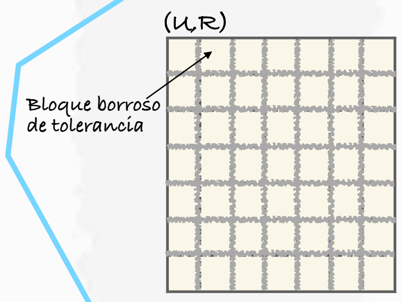
$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \leq A \leq [(R\uparrow)(A)]$ $\forall A \in L^{U}$.

Un par $(A_1, A_2) \in L^{U} \times L^{U}$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en (U,R), si existe $A \in L^{U}$ tal que: $[A_1 = (R\downarrow)(A)] \& [A_2 = (R\uparrow)(A)]$.

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia L-borrosa R en U. (es decir $R \in L^{U\times U}$ reflexiva y simétrica).



Si $(x,y)\in U\times U$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow.$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en L^{U} tales que:

$$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\rightarrow. A(x) \,/\, x\in U\},\quad (R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x) \,/\, x\in U\} \quad \forall A\in L^{U}.$$

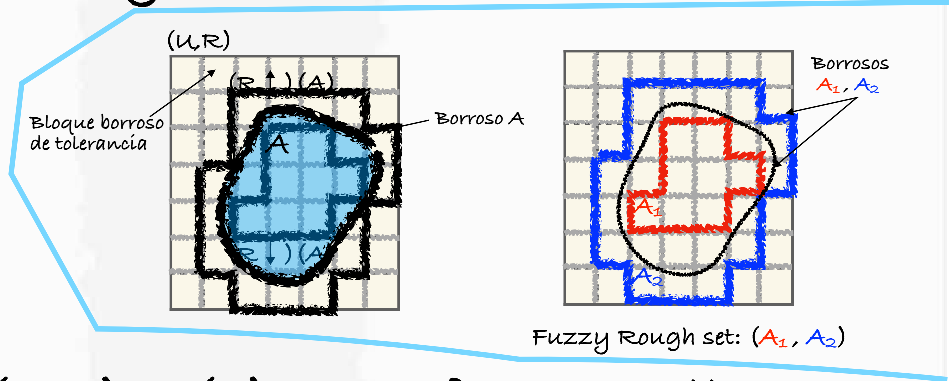
$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \leq A \leq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in L^{U}$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^{U}\times L^{U}$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en (U,R), si existe $A\in L^{U}$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia L-borrosa R en U. (es decir $R \in L^{U\times U}$ reflexiva y simétrica).



Si $(x,y)\in U\times U$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow.$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en L^U tales que:

$$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\rightarrow. A(x)\ /\ x\in U\},\ (R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x)\ /\ x\in U\}\quad \forall A\in L^U.$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \leq A \leq [(R\uparrow)(A)] \quad \forall A\in L^U$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^U\times L^U$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en (U,R), si existe $A\in L^U$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

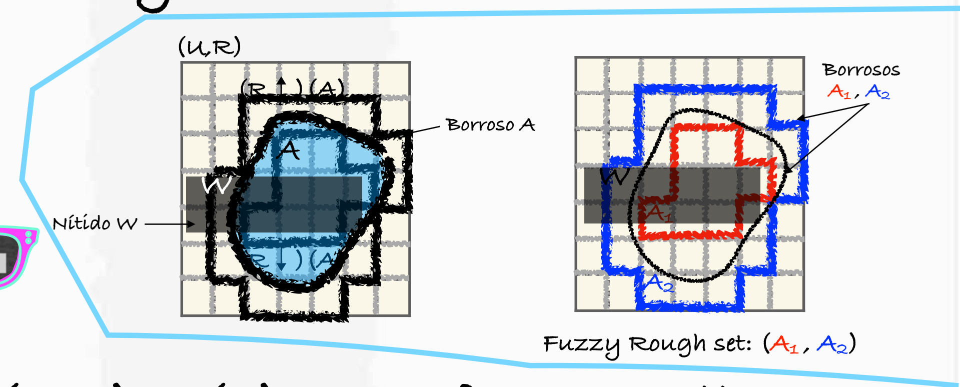
Se verifica: $(R\downarrow)(A)=R^{op}\triangleright A$, $\quad (R\uparrow)(A)=R^{op}\circ A$, $\forall A\in L^U$.

“Fuzzy Rough sets” asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par $(\mathcal{U},R)$ determinado por un referencial finito $\mathcal{U}$ y una relación de tolerancia L-borrosa R en $\mathcal{U}$. (es decir $R \in L^{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ reflexiva y simétrica).

Si $(x,y)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow.$ es la implicación residuo de “$\cdot$” en L, sean $(R\downarrow)$ 



y $(R\uparrow)$ operadores en $L^{\mathcal{U}}$ tales que:

$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\rightarrow. A(x)\ /\ x\in\mathcal{U}\}$, $(R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x)\ /\ x\in\mathcal{U}\}$ $\forall A\in L^{\mathcal{U}}$.

$(R\downarrow)(A)$ es la “R-aproximación inferior de A” y $(R\uparrow)(A)$ la “R-aproximación superior de A”.

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \leq A \leq [(R\uparrow)(A)]$ $\forall A\in L^{\mathcal{U}}$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^{\mathcal{U}}\times L^{\mathcal{U}}$ es un “Fuzzy Rough set” (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en $(\mathcal{U},R)$, si existe $A\in L^{\mathcal{U}}$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Se verifica: $(R\downarrow)(A)=R^{op}\triangleright A$, $(R\uparrow)(A)=R^{op}\circ A$, $\forall A\in L^{\mathcal{U}}$.

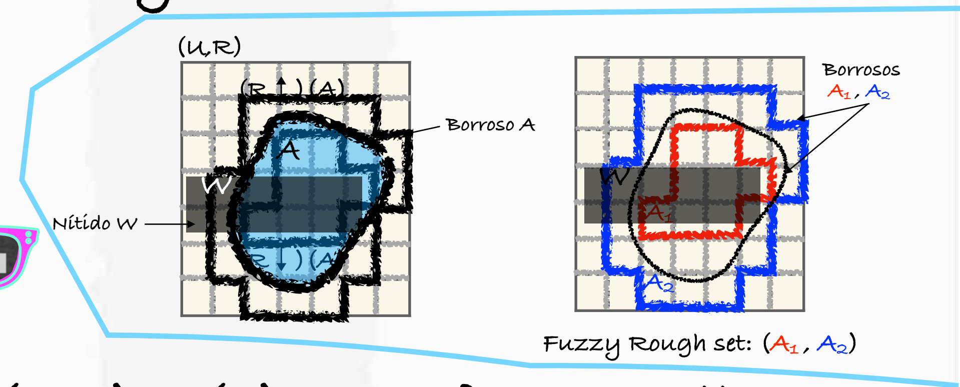
Si consideramos ahora una “perspectiva” nítida W en $\mathcal{U}$...

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia L-borrosa R en U. (es decir $R \in L^{U\times U}$ reflexiva y simétrica).

Si $(x,y)\in U\times U$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow.$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$ 



y $(R\uparrow)$ operadores en L^U tales que:

$$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\rightarrow. A(x)\ /\ x\in U\},\ (R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x)\ /\ x\in U\}\quad \forall A\in L^U.$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)] \leq A \leq [(R\uparrow)(A)]\quad \forall A\in L^U$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^U\times L^U$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en (U,R), si existe $A\in L^U$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Se verifica: $(R\downarrow)(A)=R^{op}\rhd A,\quad (R\uparrow)(A)=R^{op}\circ A,\ \forall A\in L^U$.

Si consideramos ahora una "perspectiva" <u>nítida</u> W en U...

"R-aproximaciones" y "Fuzzy Rough sets" en el álgebra $(((L^U, \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),^c), R)$

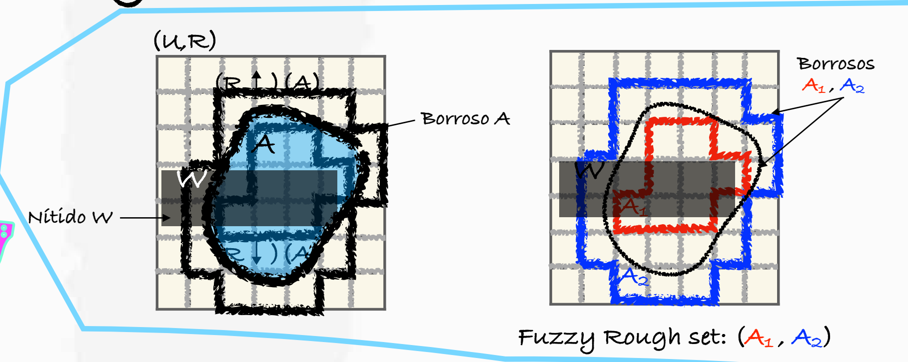
La "RW-aproximación inferior" $(R\downarrow)_W: L^U\rightarrow L^U$ en $((L^U, \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c),^c)$ es tal que $\forall A\in L^U$:

$$(\widehat{R\downarrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\rhd\varphi_W(A))=[R^{op}\rhd(A\triangle W)]\triangle W,$$

$$(\widehat{R\uparrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\circ\varphi_W(A))=[R^{op}\circ(A\triangle W)]\triangle W\ .$$

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^{W}$

Consideremos el par $(\mathcal{U},R)$ determinado por un referencial finito $\mathcal{U}$ y una relación de tolerancia L-borrosa R en $\mathcal{U}$. (es decir $R \in L^{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ reflexiva y simétrica).



Si $(x,y)\in\mathcal{U}X\mathcal{U}$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\rightarrow\!.$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$

y $(R\uparrow)$ operadores en $L^{\mathcal{U}}$ tales que:

$$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\rightarrow\!.\,A(x)\ /\ x\in\mathcal{U}\},\ (R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x)\ /\ x\in\mathcal{U}\}\quad \forall A\in L^{\mathcal{U}}.$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)]\leq A\leq[(R\uparrow)(A)]\quad \forall A\in L^{\mathcal{U}}$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^{\mathcal{U}}X\,L^{\mathcal{U}}$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en $(\mathcal{U},R)$, si existe $A\in L^{\mathcal{U}}$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Se verifica: $(R\downarrow)(A)=R^{op}\rhd A,\quad (R\uparrow)(A)=R^{op}\circ A,\ \forall A\in L^{\mathcal{U}}$.

Si consideramos ahora una "perspectiva" <u>nítida</u> W en $\mathcal{U}$...

<u>"R-aproximaciones" y "Fuzzy Rough sets" en el álgebra $(((L^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W},W,W^{c}),^{c}),R)$</u>

La "RW-aproximación inferior" $(R\downarrow)_W: L^{\mathcal{U}}\rightarrow L^{\mathcal{U}}$ en $((L^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W},W,W^{c}),^{c})$ es tal que $\forall A\in L^{\mathcal{U}}$:

$$(\widehat{R}\downarrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\rhd\varphi_W(A))=[R^{op}\rhd(A\triangle W)]\triangle W,$$

$$(\widehat{R}\uparrow)_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\circ\varphi_W(A))=[R^{op}\circ(A\triangle W)]\triangle W.$$

Se verifica: $\boxed{[(\widehat{R}\downarrow)_W(A)]\sqsubseteq^{W}A\sqsubseteq^{W}[(\widehat{R}\uparrow)_W(A)]\quad \forall A\in L^{\mathcal{U}}}$

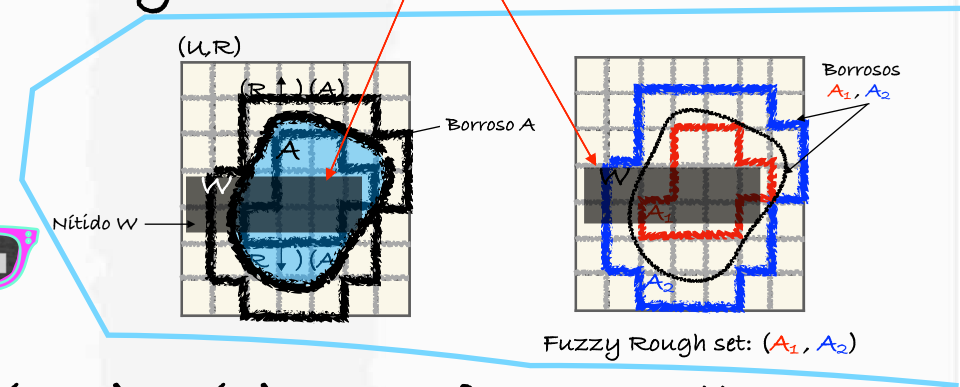
Si (A_1, A_2) es un Fuzzy Rough set, entonces $(\varphi_W(A_1), \varphi_W(A_2))$ también lo es.

"Fuzzy Rough sets" asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Consideremos el par (U,R) determinado por un referencial finito U y una relación de tolerancia L-borrosa R en U. (es decir $R\in L^{U\times U}$ reflexiva y simétrica).

Si $(x,y)\in U\times U$, $R(x,y)\in L$ es el grado de tolerancia entre x e y.

Si $\to_\cdot$ es la implicación residuo de "$\cdot$" en L, sean $(R\downarrow)$ y $(R\uparrow)$ operadores en L^U tales que:



Fuzzy Rough set: (A_1, A_2)

$$(R\downarrow)(A)(y)=\inf\{R(x,y)\to_\cdot A(x)\ /\ x\in U\},\quad (R\uparrow)(A)=\sup\{R(x,y)\cdot A(x)\ /\ x\in U\}\quad \forall A\in L^U.$$

$(R\downarrow)(A)$ es la "R-aproximación inferior de A" y $(R\uparrow)(A)$ la "R-aproximación superior de A".

Se verifica: $[(R\downarrow)(A)]\leq A\leq[(R\uparrow)(A)]\quad\forall A\in L^U$.

Un par $(A_1, A_2)\in L^U\times L^U$ es un "Fuzzy Rough set" (conjunto rugoso borroso, conjunto aproximado borroso) en (U,R), si existe $A\in L^U$ tal que: $[A_1=(R\downarrow)(A)]\&[A_2=(R\uparrow)(A)]$.

Se verifica: $(R\downarrow)(A)=R^{op}\rhd A,\quad (R\uparrow)(A)=R^{op}\circ A,\ \forall A\in L^U$.

(Cuestión abierta)

Si consideramos ahora una "perspectiva" nítida W en U...

"R-aproximaciones" y "Fuzzy Rough sets" en el álgebra $(((L^U,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c),R)$

La "RW-aproximación inferior" $(R\downarrow)_W: L^U\to L^U$ en $((L^U,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),^c)$ es tal que $\forall A\in L^U$:

$$(\widehat{R\downarrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\downarrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\rhd\varphi_W(A))=[R^{op}\rhd(A\triangle W)]\triangle W,$$

$$(\widehat{R\uparrow})_W(A)=(\varphi_W\circ(R\uparrow)\circ\varphi_W)(A)=\varphi_W(R^{op}\circ\varphi_W(A))=[R^{op}\circ(A\triangle W)]\triangle W.$$

Se verifica: $\boxed{[(\widehat{R\downarrow})_W(A)]\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W[(\widehat{R\uparrow})_W(A)]\quad\forall A\in L^U}$

Si (A_1, A_2) es un Fuzzy Rough set, entonces $(\varphi_W(A_1), \varphi_W(A_2))$ también lo es.

“Perspectivas” asociadas a un Rough Set $(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$

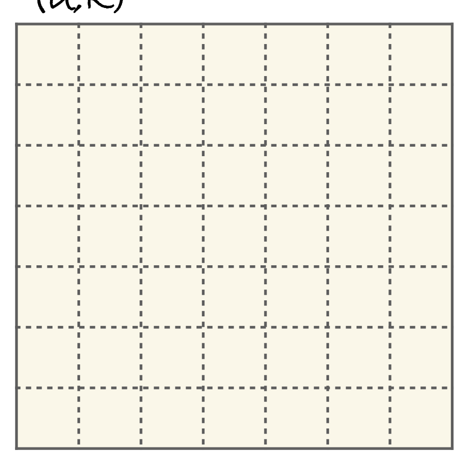
“($W^{\blacktriangledown}$, $W^{\blacktriangle}$)-aproximaciones” en Rough sets . Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

(U, R) Un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U\mathrm{x}U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U\mathrm{x}U}$).

“R-aproximaciones inferior y superior” de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^{U}$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \triangleright A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(U)$ (ó $\forall A \in L^{U}$).

(U,R)



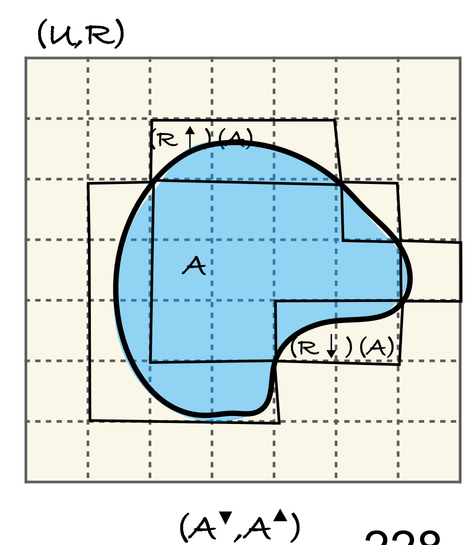
"$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$-aproximaciones" en Rough sets . Álgebras del tipo: $(\mathcal{RS}, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

$(\mathcal{U}, R)$ Un referencial finito $\mathcal{U}$ con una relación reflexiva $R \subseteq \mathcal{U} X \mathcal{U}$ (ó L-borrosa $R \in L^{\mathcal{U}X\mathcal{U}}$).

"R-aproximaciones inferior y superior" de subconjuntos $A \in P(\mathcal{U})$ (ó L-borrosos $A \in L^{\mathcal{U}}$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \triangleright A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(\mathcal{U})$ (ó $\forall A \in L^{\mathcal{U}}$).

$\mathcal{RS} = \{ (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \,/\, \exists A : [A^{\blacktriangledown} = (R\downarrow)(A)] \& [A^{\blacktriangle} = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(\mathcal{U}) X P(\mathcal{U})$ (ó de $L^{\mathcal{U}} X L^{\mathcal{U}}$).



"$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$-aproximaciones" en Rough sets . Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

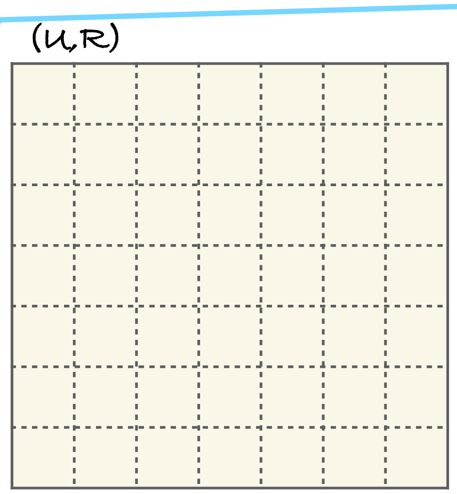
(U, R) Un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U X U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U X U}$).

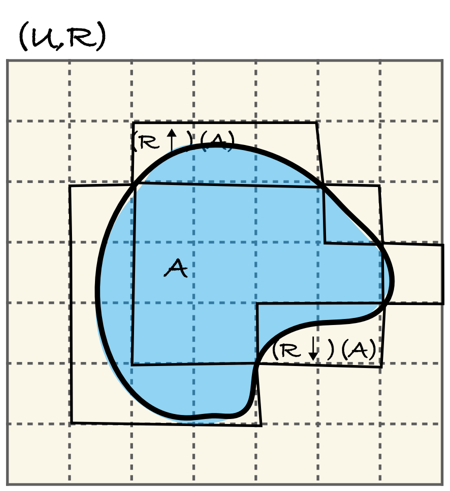
"R-aproximaciones inferior y superior" de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^{U}$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \rhd A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(U)$ (ó $\forall A \in L^{U}$).

$\boldsymbol{RS} = \{ (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \,/\, \exists A : [A^{\blacktriangledown} = (R\downarrow)(A)] \& [A^{\blacktriangle} = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(U) X P(U)$ (ó de $L^{U} X L^{U}$).

Orden en $\boldsymbol{RS}$: $[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \leq (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \Leftrightarrow [(A^{\blacktriangledown} \subseteq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \subseteq B^{\blacktriangle})]$ (ó $[(A^{\blacktriangledown} \leq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \leq B^{\blacktriangle})]$).





$(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle})$

"$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$-aproximaciones" en Rough sets . Álgebras del tipo: $(\mathcal{RS}, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

$(\mathcal{U}, R)$ un referencial finito $\mathcal{U}$ con una relación reflexiva $R \subseteq \mathcal{U}X\mathcal{U}$ (ó L-borrosa $R \in L^{\mathcal{U}X\mathcal{U}}$).

"R-aproximaciones inferior y superior" de subconjuntos $A \in P(\mathcal{U})$ (ó L-borrosos $A \in L^{\mathcal{U}}$).

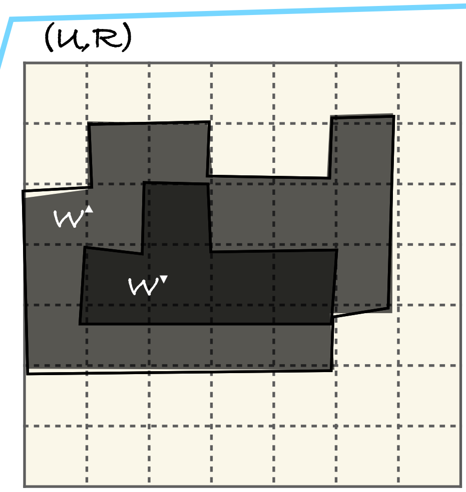
$(R\downarrow)(A) = R^{op} \triangleright A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(\mathcal{U})$ (ó $\forall A \in L^{\mathcal{U}}$).

$\mathcal{RS} = \{ (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \,/\, \exists A : [A^{\blacktriangledown} = (R\downarrow)(A)] \& [A^{\blacktriangle} = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(\mathcal{U})XP(\mathcal{U})$ (ó de $L^{\mathcal{U}} X L^{\mathcal{U}}$).

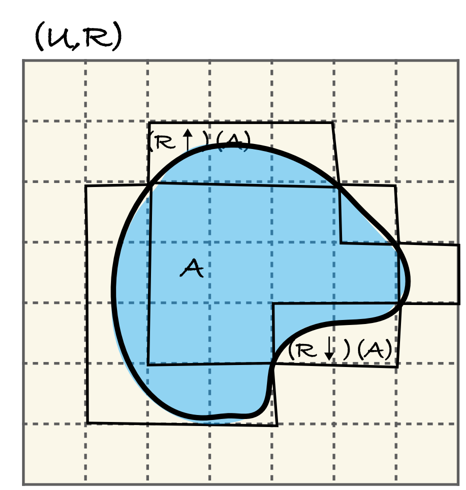
Orden en $\mathcal{RS}$: $[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \leq (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \Leftrightarrow [(A^{\blacktriangledown} \subseteq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \subseteq B^{\blacktriangle})]$ (ó $[(A^{\blacktriangledown} \leq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \leq B^{\blacktriangle})]$).

Si el conjunto ordenado $(\mathcal{RS}, \leq)$ es un retículo distributivo $(\mathcal{RS}, \leq, \wedge, \vee)$, se puede definir "perspectivas" asociadas a órdenes de actividad $\sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}$:

Perspectiva:
$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \in \mathcal{RS}$



$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$



$(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle})$

"$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$-aproximaciones" en Rough sets . Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

(U, R) un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U \times U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U \times U}$).

"R-aproximaciones inferior y superior" de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^{U}$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \triangleright A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(U)$ (ó $\forall A \in L^{U}$).

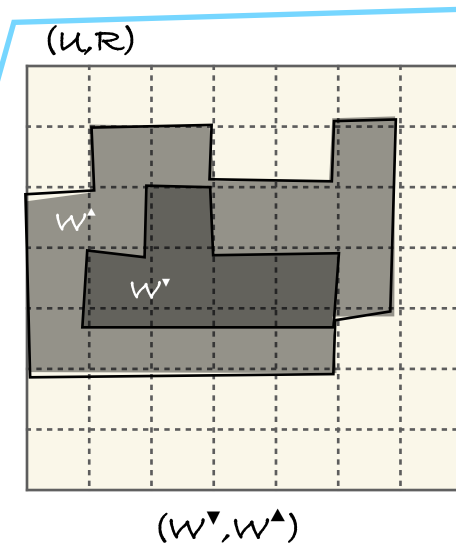
$RS = \{ (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \,/\, \exists A : [A^{\blacktriangledown} = (R\downarrow)(A)] \& [A^{\blacktriangle} = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(U) \times P(U)$ (ó de $L^{U} \times L^{U}$).

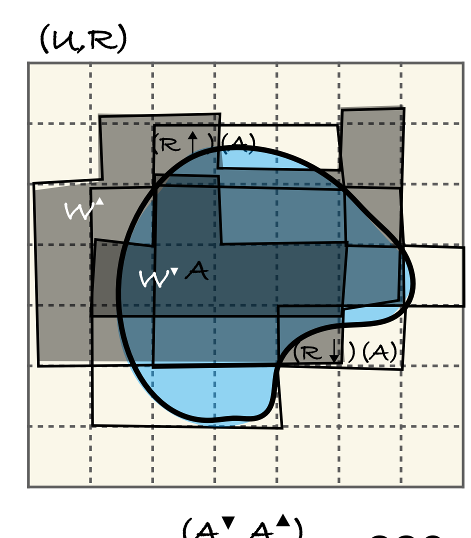
Orden en RS: $[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \leq (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \Leftrightarrow [(A^{\blacktriangledown} \subseteq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \subseteq B^{\blacktriangle})]$ (ó $[(A^{\blacktriangledown} \leq B^{\blacktriangledown}) \& (A^{\blacktriangle} \leq B^{\blacktriangle})]$).

Si el conjunto ordenado (RS, $\leq$) es un retículo distributivo (RS, $\leq$, $\wedge$, $\vee$), se puede definir "perspectivas" asociadas a órdenes de actividad $\sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}$:

Perspectiva:

$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \in RS$





"$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)$-aproximaciones" en Rough sets. Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}, \sqcap^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}, (W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle))$

(U, R) un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U \times U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U\times U}$).

"R-aproximaciones inferior y superior" de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^U$).

$$(R\downarrow)(A) = R^{op} \rhd A, \quad (R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A,\ \forall A \in P(U)\ (\text{ó } \forall A \in L^U).$$

$\mathcal{RS} = \{ (A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \,/\, \exists A : [A^\blacktriangledown = (R\downarrow)(A)] \& [A^\blacktriangle = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(U) \times P(U)$ (ó de $L^U \times L^U$).

Orden en $\mathcal{RS}$: $[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \leq (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \Leftrightarrow [(A^\blacktriangledown \subseteq B^\blacktriangledown) \& (A^\blacktriangle \subseteq B^\blacktriangle)]$ (ó $[(A^\blacktriangledown \leq B^\blacktriangledown) \& (A^\blacktriangle \leq B^\blacktriangle)]$).

Si el conjunto ordenado $(\mathcal{RS}, \leq)$ es un retículo distributivo $(\mathcal{RS}, \leq, \wedge, \vee)$, se puede definir "perspectivas" asociadas a órdenes de actividad $\sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}$:

$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \Leftrightarrow$

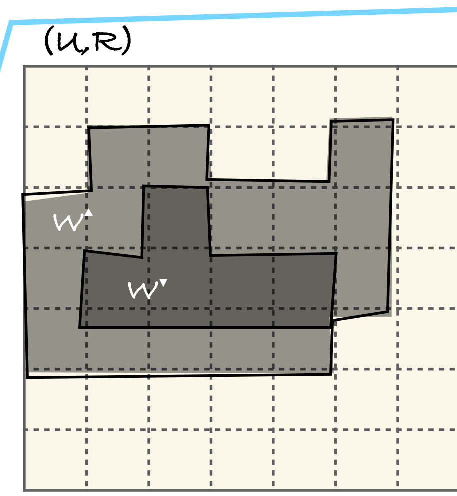
$$[(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \wedge (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \leq (A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \leq [(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \vee (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)]$$

Y con el operador ínfimo: $[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqcap^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] =$

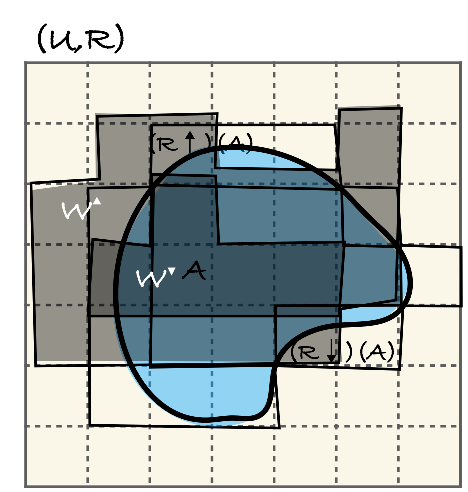
$$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \wedge (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \vee [(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \wedge [(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \vee (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)]]$$

Perspectiva:

$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \in \mathcal{RS}$



$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)$



$(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle)$

“$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)$-aproximaciones” en Rough sets. Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}, \sqcap^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}, (W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle))$

(U, R) un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U \times U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U \times U}$).

“R-aproximaciones inferior y superior” de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^U$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \rhd A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(U)$ (ó $\forall A \in L^U$).

$RS = \{ (A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \,/\, \exists A : [A^\blacktriangledown = (R\downarrow)(A)] \& [A^\blacktriangle = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(U) \times P(U)$ (ó de $L^U \times L^U$).

Orden en RS: $[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \leq (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \Leftrightarrow [(A^\blacktriangledown \subseteq B^\blacktriangledown) \& (A^\blacktriangle \subseteq B^\blacktriangle)]$ (ó $[(A^\blacktriangledown \leq B^\blacktriangledown) \& (A^\blacktriangle \leq B^\blacktriangle)]$).

Si el conjunto ordenado $(RS, \leq)$ es un retículo distributivo $(RS, \leq, \wedge, \vee)$, se puede definir “perspectivas” asociadas a órdenes de actividad $\sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)}$:

$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqsubseteq^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \Leftrightarrow$

(Cuestión abierta)

$$[(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \wedge (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \leq (A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \leq [(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \vee (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)]$$

Perspectiva:
$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \in RS$

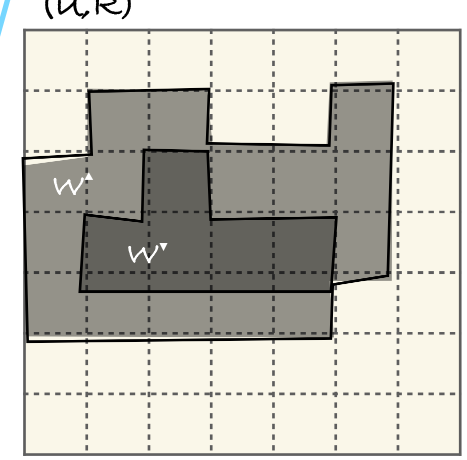
Y con el operador ínfimo: $[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqcap^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] =$

$$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \wedge (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] \vee [(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle) \wedge [(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \vee (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)]]$$

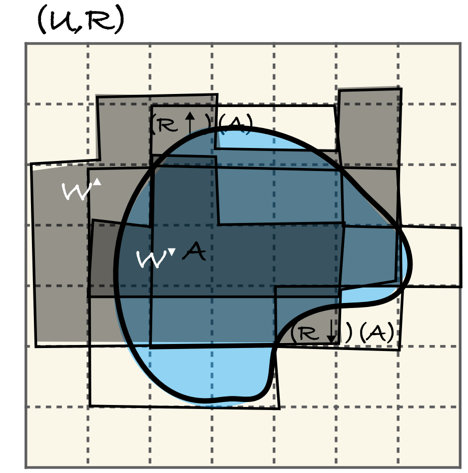
Y si es complementado:
$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)$ con complemento
$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)^c$:

$$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqcup^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)] =$$

$$[(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle) \sqcap^{(W^\blacktriangledown,W^\blacktriangle)^c} (B^\blacktriangledown, B^\blacktriangle)]$$



$(W^\blacktriangledown, W^\blacktriangle)$



$(A^\blacktriangledown, A^\blacktriangle)$

“$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$-aproximaciones” en Rough sets . Álgebras del tipo: $(RS, \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}, (W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}))$

(U, R) un referencial finito U con una relación reflexiva $R \subseteq U \times U$ (ó L-borrosa $R \in L^{U \times U}$).

“R-aproximaciones inferior y superior” de subconjuntos $A \in P(U)$ (ó L-borrosos $A \in L^{U}$).

$(R\downarrow)(A) = R^{op} \rhd A$, $(R\uparrow)(A) = R^{op} \circ A$, $\forall A \in P(U)$ (ó $\forall A \in L^{U}$).

$RS = \{ (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \,/\, \exists A : [A^{\blacktriangledown} = (R\downarrow)(A)] \,\&\, [A^{\blacktriangle} = (R\downarrow)(A)] \}$, subconjunto de $P(U) \times P(U)$ (ó de $L^{U} \times L^{U}$).

Orden en RS: $[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \leq (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \Leftrightarrow [(A^{\blacktriangledown} \subseteq B^{\blacktriangledown}) \,\&\, (A^{\blacktriangle} \subseteq B^{\blacktriangle})]$ (ó $[(A^{\blacktriangledown} \leq B^{\blacktriangledown}) \,\&\, (A^{\blacktriangle} \leq B^{\blacktriangle})]$).

Si el conjunto ordenado $(RS, \leq)$ es un retículo distributivo $(RS, \leq, \wedge, \vee)$, se puede definir “perspectivas” asociadas a órdenes de actividad $\sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})}$:

$[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \sqsubseteq^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})} (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \Leftrightarrow$

(cuestión abierta)

$$[(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \wedge (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \leq (A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \leq [(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \vee (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})]$$

Y con el operador ínfimo: $[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})} (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] =$

$$[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \wedge (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] \vee [(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \wedge [(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \vee (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})]]$$

Perspectiva:

$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle}) \in RS$

Y si es complementado:

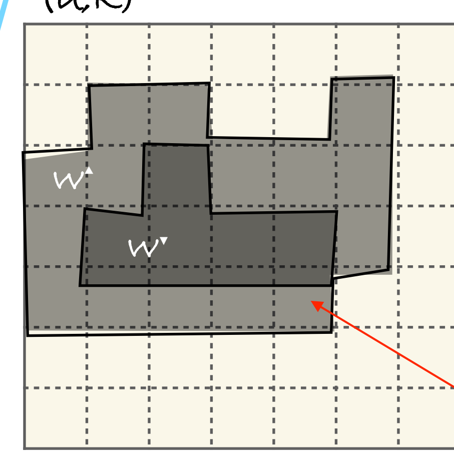
$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$ con complemento

$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})^{c}$:

$$[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \sqcup^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})} (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})] =$$

$$[(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle}) \sqcap^{(W^{\blacktriangledown},W^{\blacktriangle})^{c}} (B^{\blacktriangledown}, B^{\blacktriangle})]$$

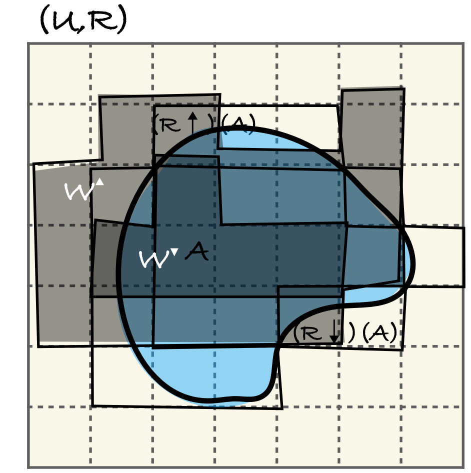
(U,R)



$(W^{\blacktriangledown}, W^{\blacktriangle})$

¿Imperfección o ruido que no se puede determinar nítidamente?

(U,R)

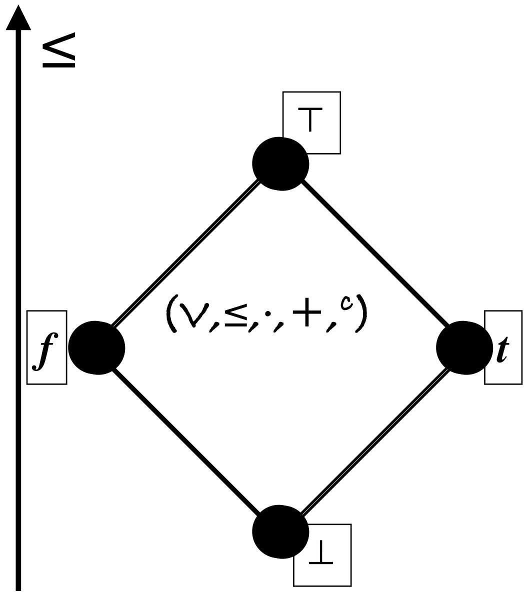


$(A^{\blacktriangledown}, A^{\blacktriangle})$

Tema abierto: **“Perspectivas”, Birretículos y Trirretículos.**

Una relación entre órdenes de actividad y ciertos birretículos asociados a retículos distributivos

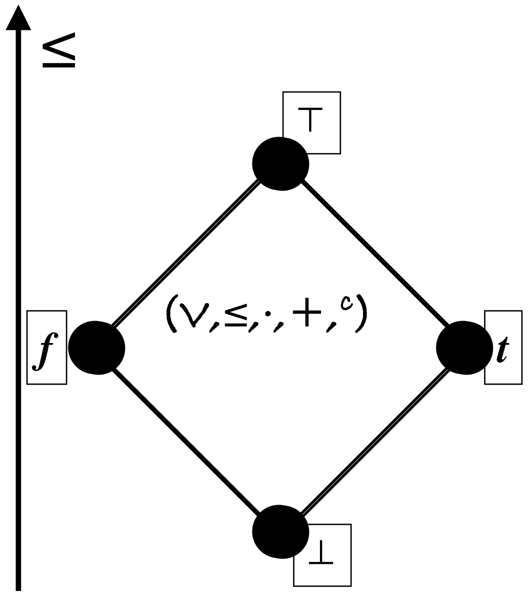
1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)$



1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)$

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^{f} y) \Leftrightarrow y \cdot \boxed{f} \leq x \leq y + \boxed{f}$



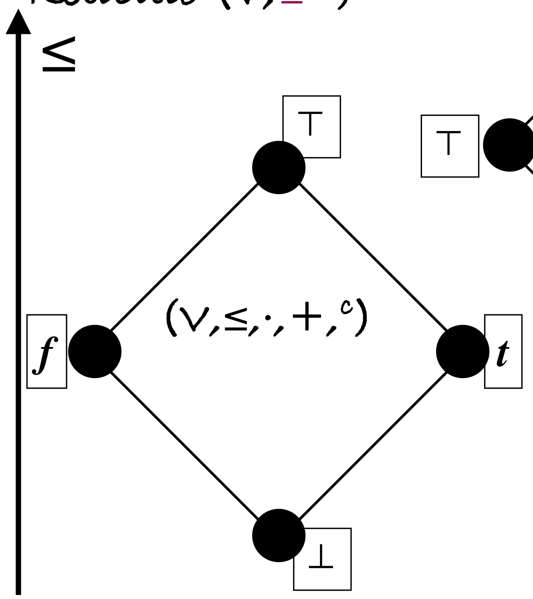
1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)$

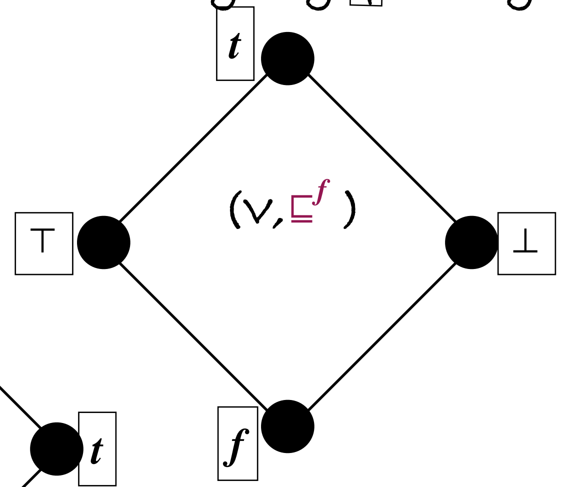
Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)$

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$





1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)$

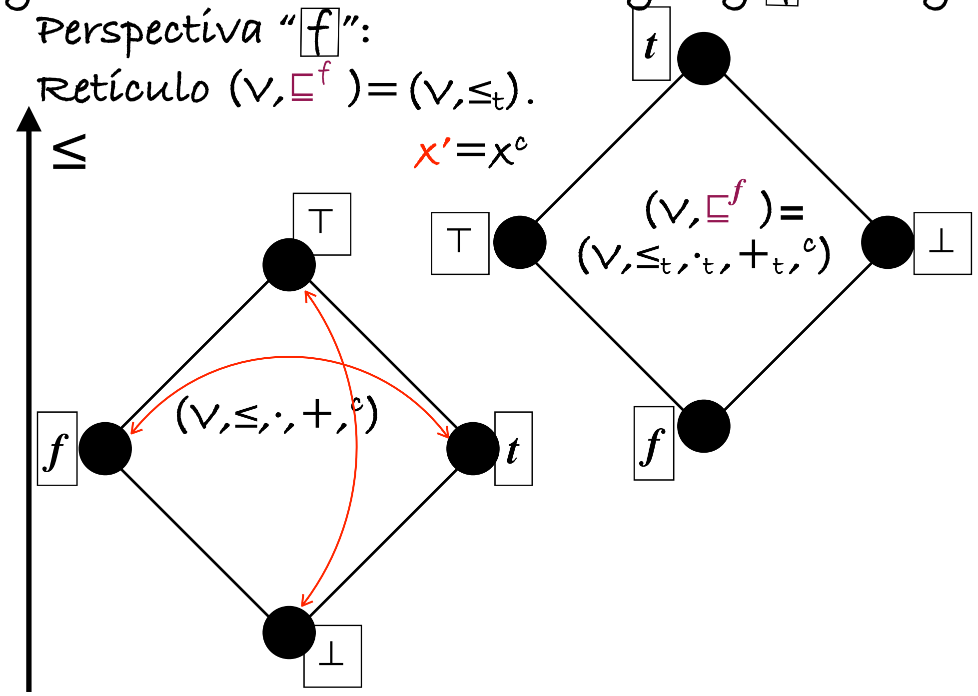
Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^{f})=(V,\leq_t)$.

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^{f} y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

$x'=x^c$



1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

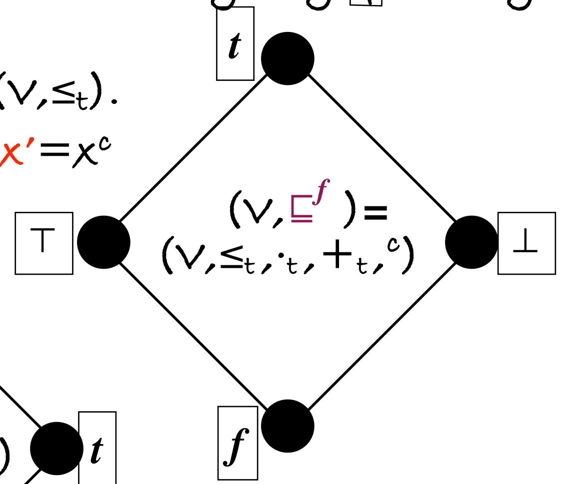
Perspectiva "$\boxed{f}$":

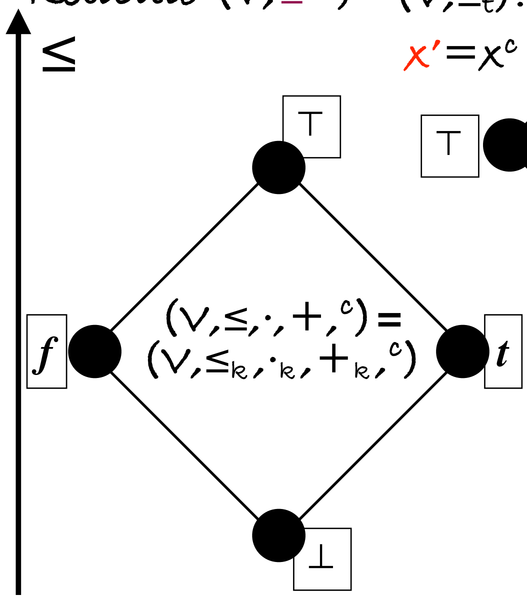
Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

$x' = x^c$





1. Retículo distributivo y acotado $(V,\le)=(V,\le_k)$.

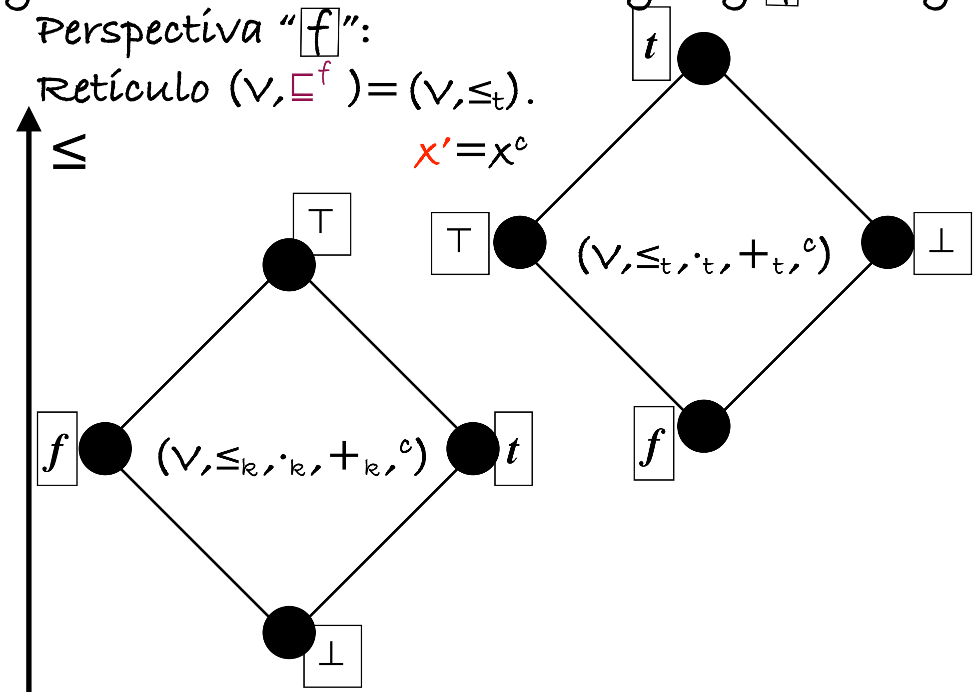
Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\le_t)$.

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \le x \le y+\boxed{f}$

$x' = x^c$

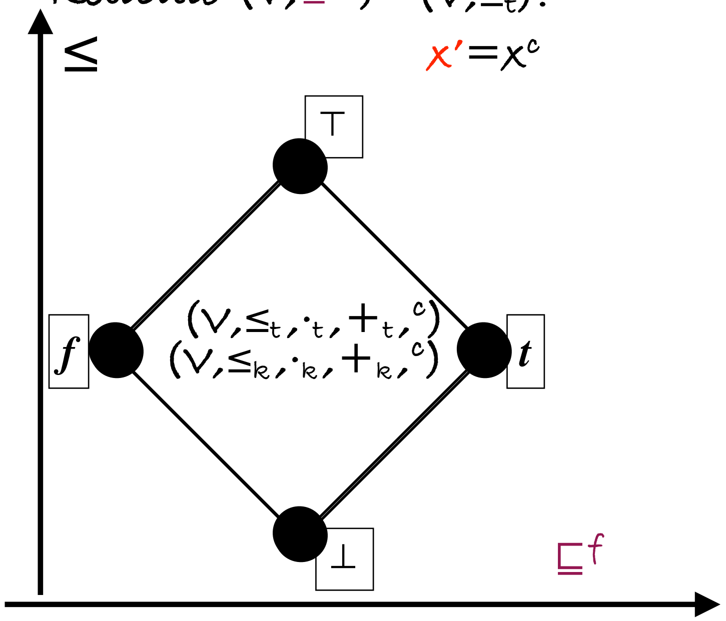


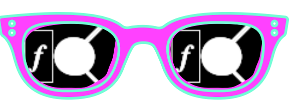
1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.





1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

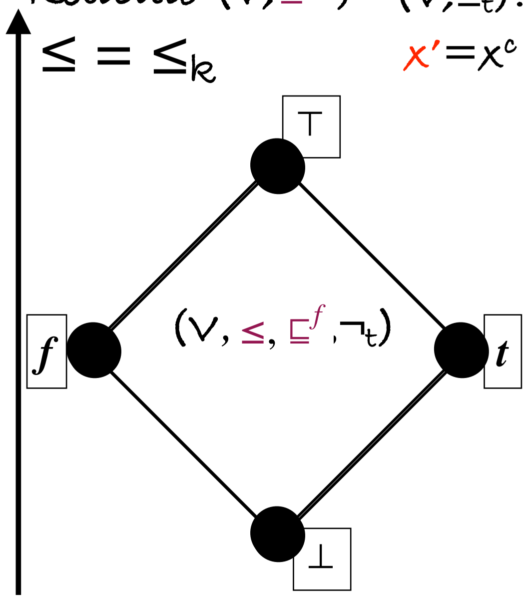
Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$. Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

$x'=x^c$



Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

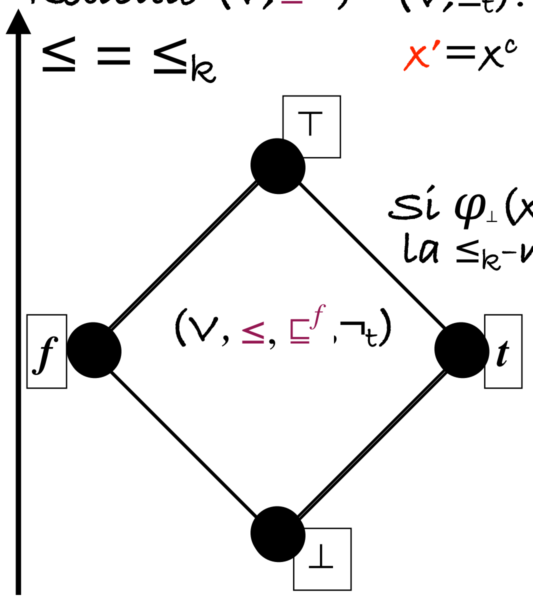
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\le)=(V,\le_k)$.

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\le_t)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \le x \le y+\boxed{f}$



Con la $\le_t$-negación $\neg_t$:

$x'=x^c$

$$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}\ ,\quad \neg_t\boxed{\perp}=\boxed{\perp}\ ,$$
$$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}\ ,\quad \neg_t\boxed{t}=\boxed{f}.$$

Si $\varphi_\perp(x)=x\Delta_t\boxed{\perp}=x'\cdot_t\boxed{\perp}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\le_k$-negación $\neg_k=\varphi_\perp\circ\neg_t\circ\varphi_\perp$:

$$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\perp}\ ,\quad \neg_k\boxed{\perp}=\boxed{\top}\ ,$$
$$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}\ ,\quad \neg_k\boxed{t}=\boxed{t}.$$

$\sqsubseteq^f\ =\ \le_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \le, \sqsubseteq^f\ , \neg_t)$

(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

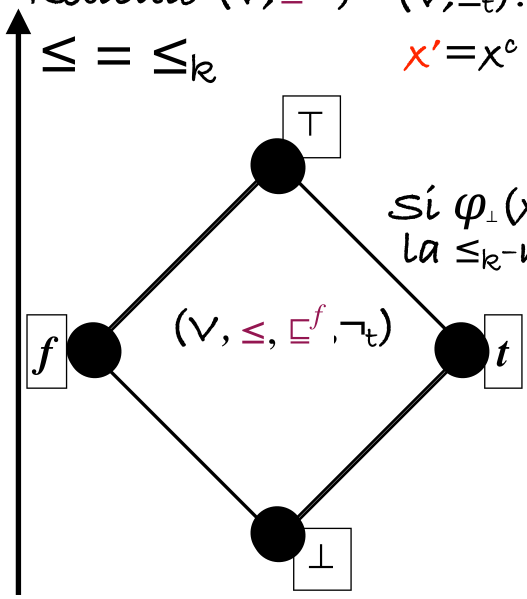
Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$x' = x^c$

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\perp}=\boxed{\perp}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.



Si $\varphi_\perp(x)=x\Delta_t\boxed{\perp}=x'\cdot_t\boxed{\perp}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$

la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\perp\circ\neg_t\circ\varphi_\perp$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\perp}$, $\neg_k\boxed{\perp}=\boxed{\top}$,

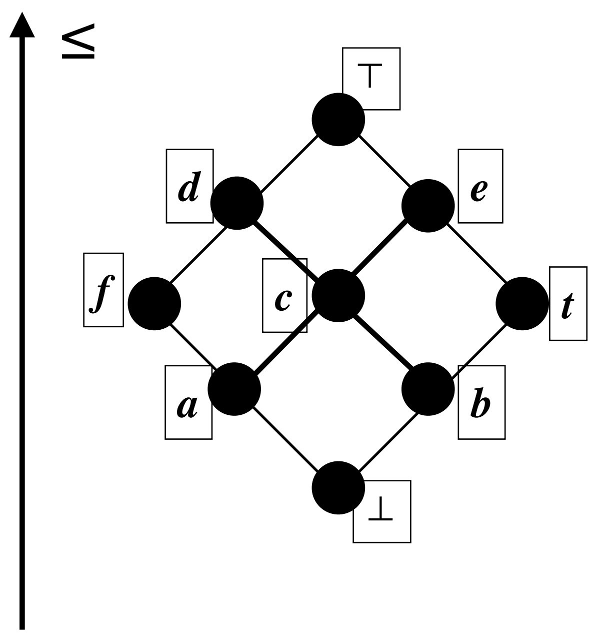
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f \ = \ \leq_t$

Birretículo(*) ***four*** **=**

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$



(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

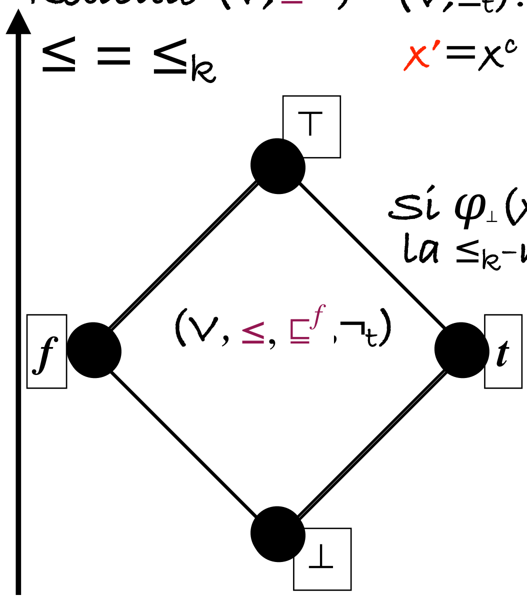
Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$x' = x^c$

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.



Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f\ =\ \leq_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

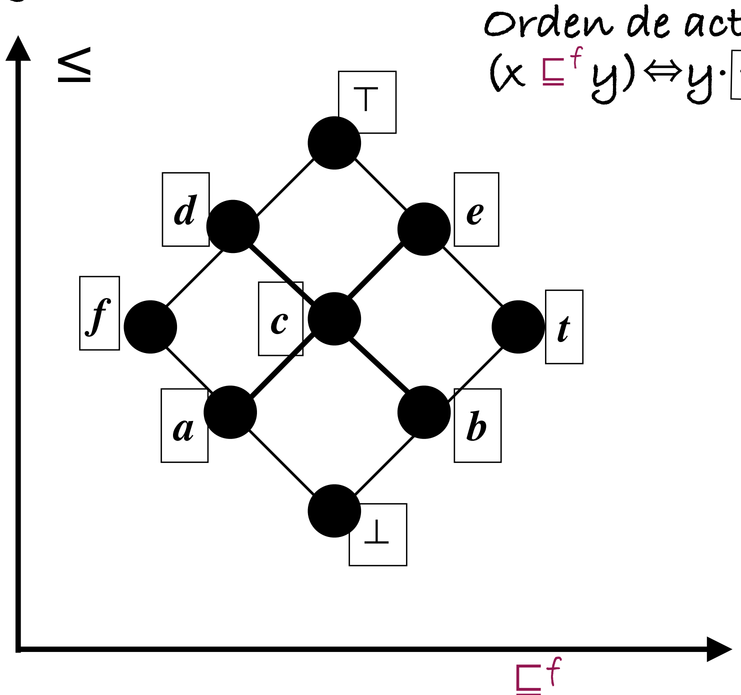
2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V_1,\sqsubseteq^f)$

Orden de actividad:

$(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$



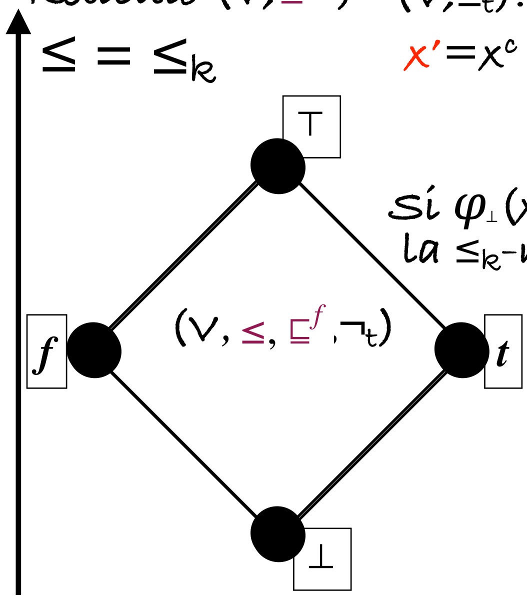
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\le)=(V,\le_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \le x \le y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\le_t)$.



$x' = x^c$

Con la $\le_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$

la $\le_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

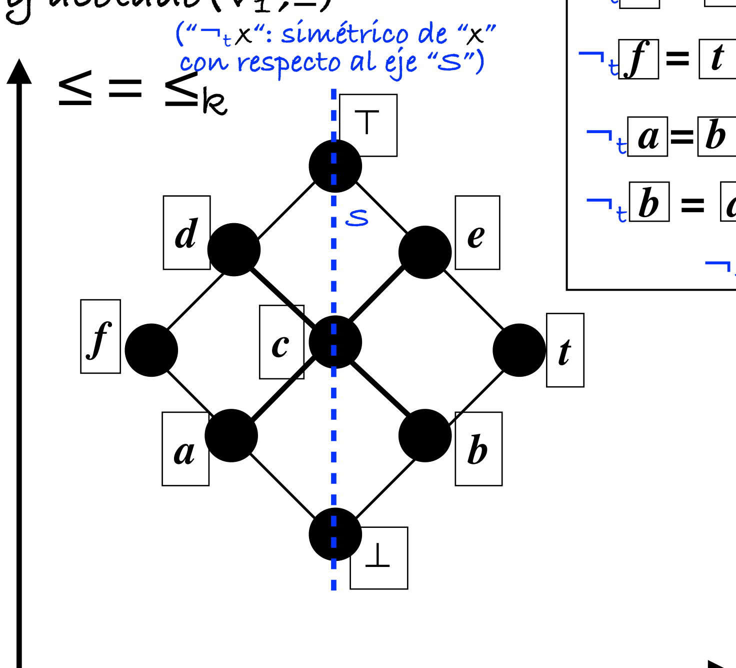
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f = \le_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \le, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\le)$



Con la $\le_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,
$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,
$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,
$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \le_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \le, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

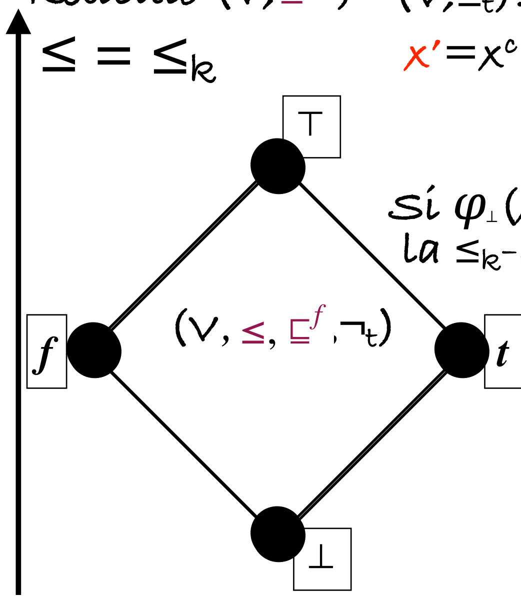
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.



$x' = x^c$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\perp}=\boxed{\perp}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\perp(x)=x\Delta_t\boxed{\perp}= x'\cdot_t\boxed{\perp}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$

la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\perp\circ\neg_t\circ\varphi_\perp$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\perp}$, $\neg_k\boxed{\perp}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f \; = \; \leq_t$

Birretículo(*) ***four*** **=**

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

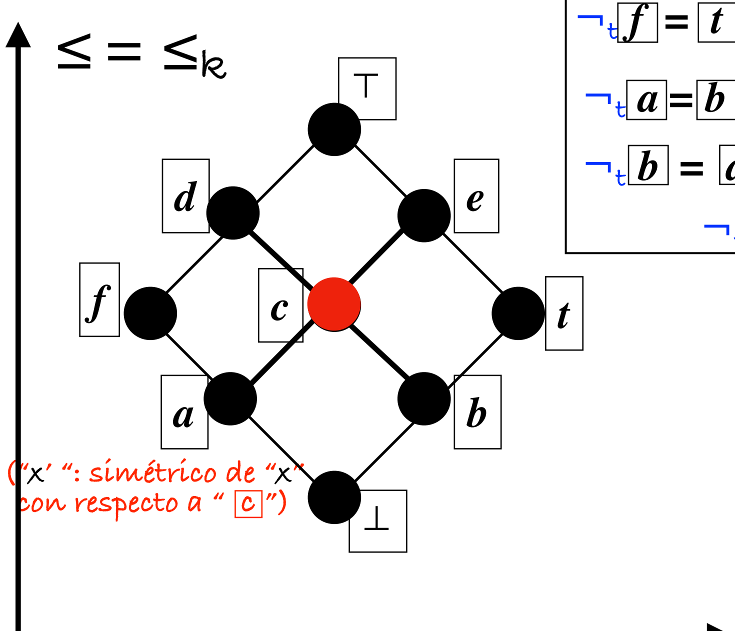
$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\perp}=\boxed{\perp}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,

$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,

$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,

$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.



$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo ***nine*** **=**

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

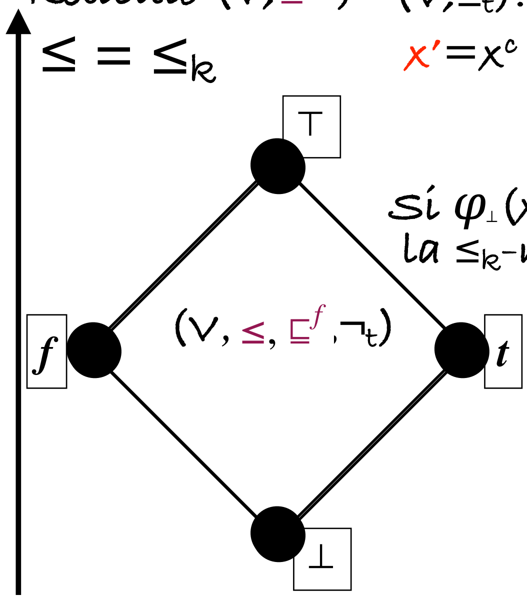
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.



$x' = x^c$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

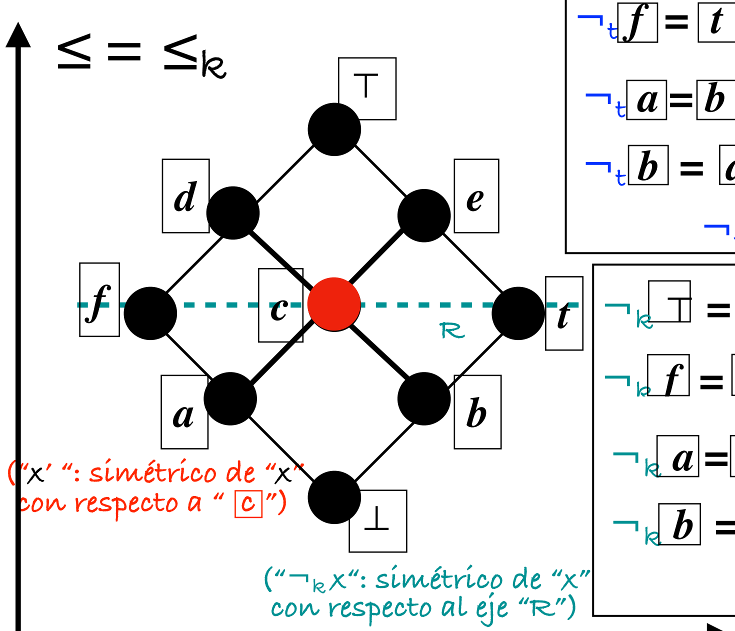
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f \;=\; \leq_t$

Birretículo[(*)] ***four*** **=**

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$



Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,

$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,

$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,

$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$. $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,

$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,

$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo ***nine*** **=**

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

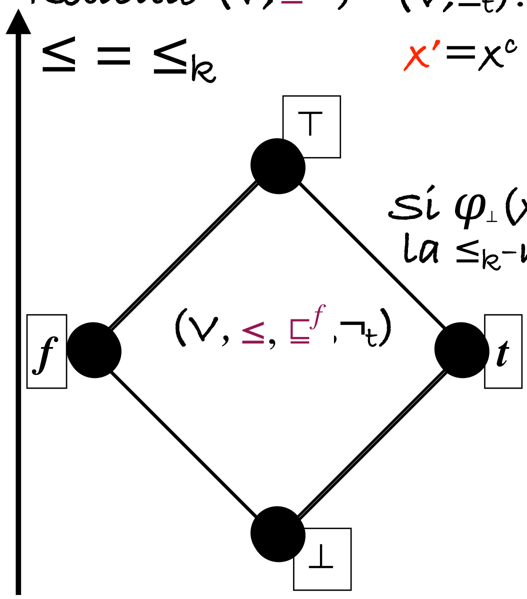
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.



$x' = x^c$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$

la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

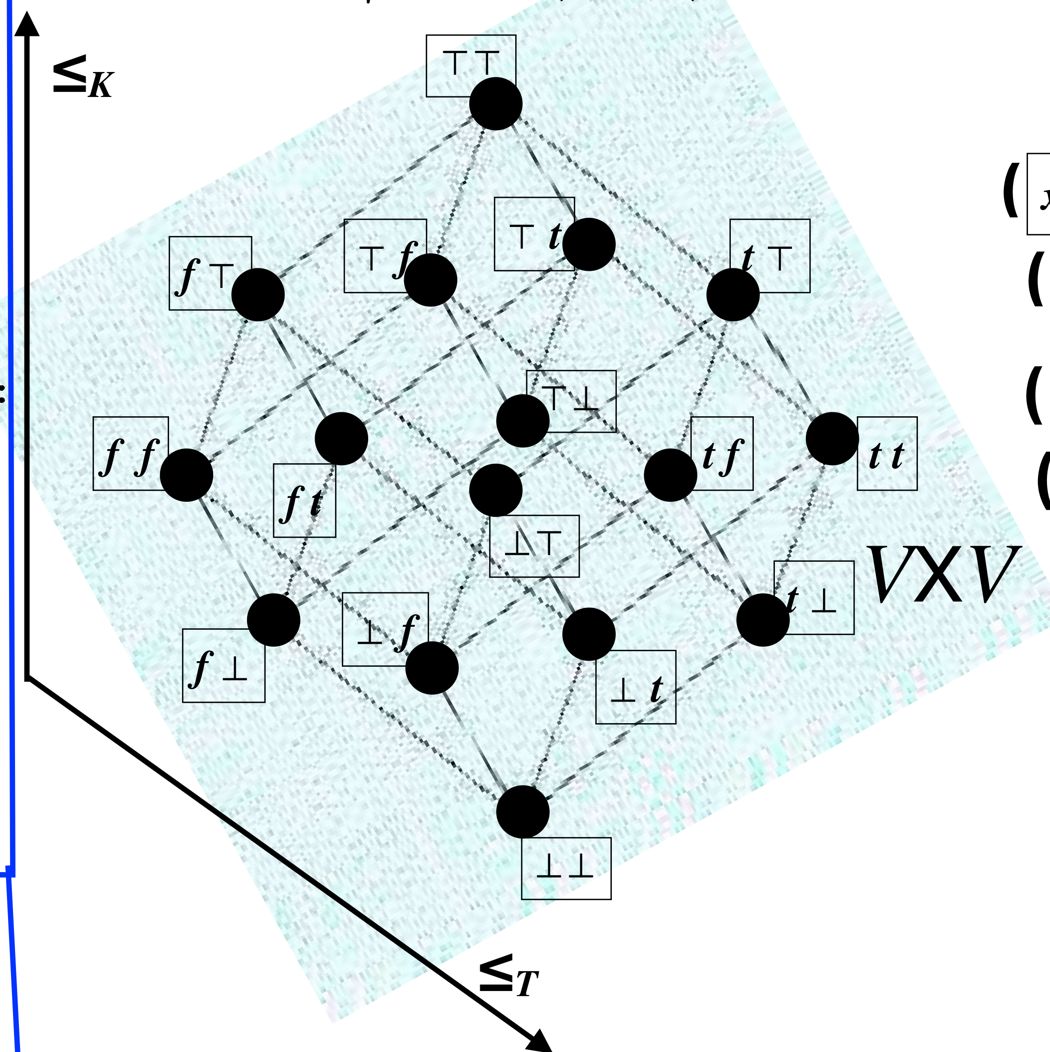
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f \; = \leq_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

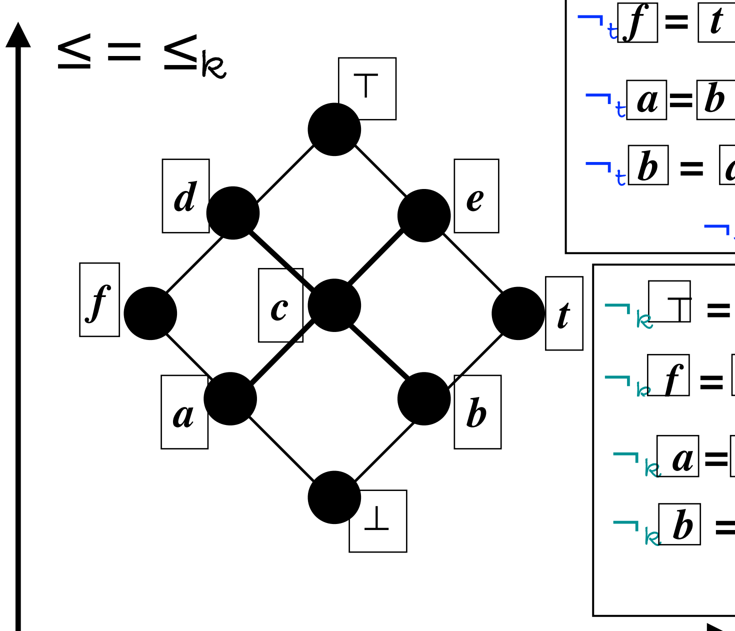
3. Birreetículo producto four⊙four



$(\boxed{x\;y} \leq_T \boxed{z\;s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \leq_k \boxed{v}))$

$(\boxed{x\;y} \leq_K \boxed{z\;s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{y} \leq_k \boxed{s}))$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$



Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,
$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,
$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,
$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.
$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,
$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,
$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

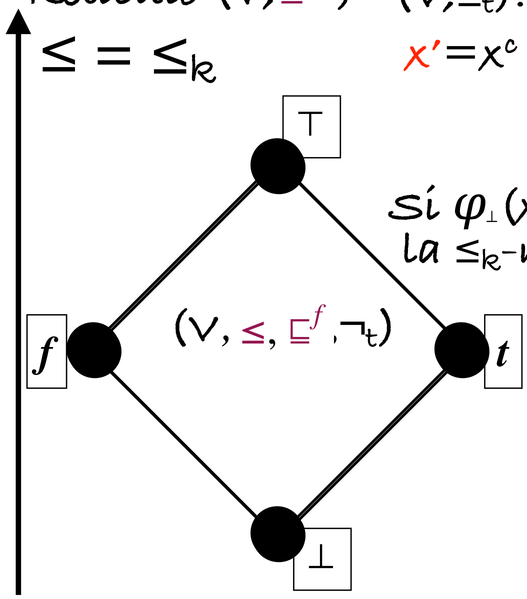
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.



$x'=x^c$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$

la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

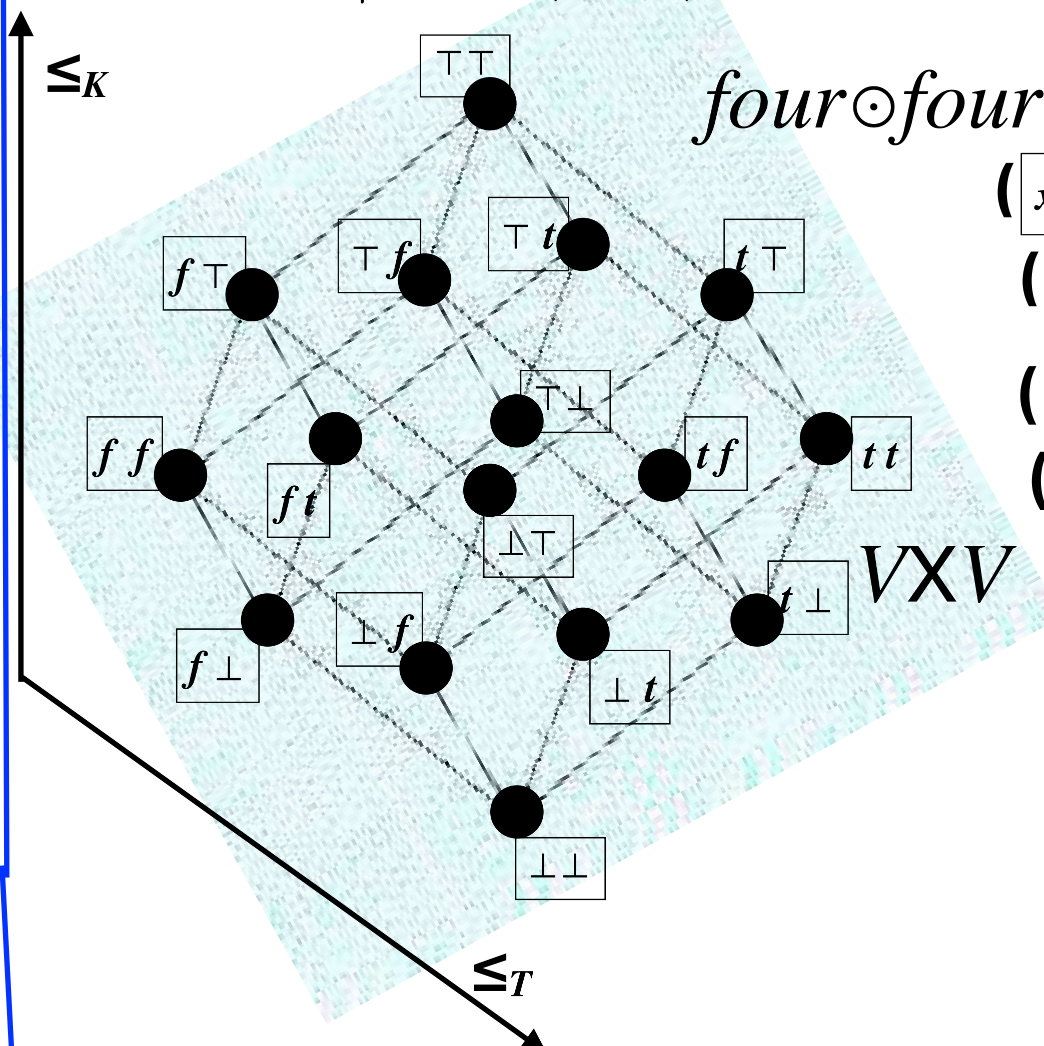
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

3. Birreetículo producto four⊙four



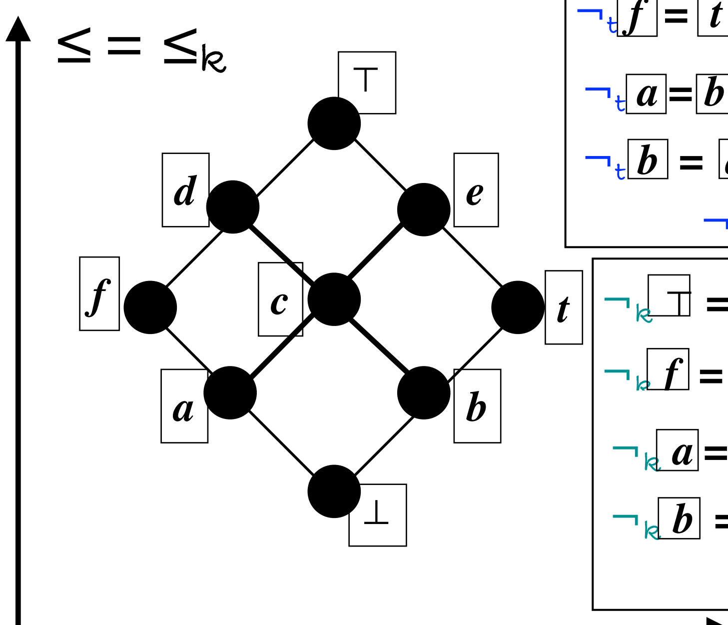
$four\odot four = (V\mathrm{X}V, \leq_T, \leq_K, \neg_T)$

$(\boxed{x\ y} \leq_T \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \leq_k \boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y} \leq_K \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{y} \leq_k \boxed{s}))$

$\neg_T \boxed{x\ y} = \boxed{y\ x}$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$



Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,

$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,

$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,

$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$. $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,

$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,

$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

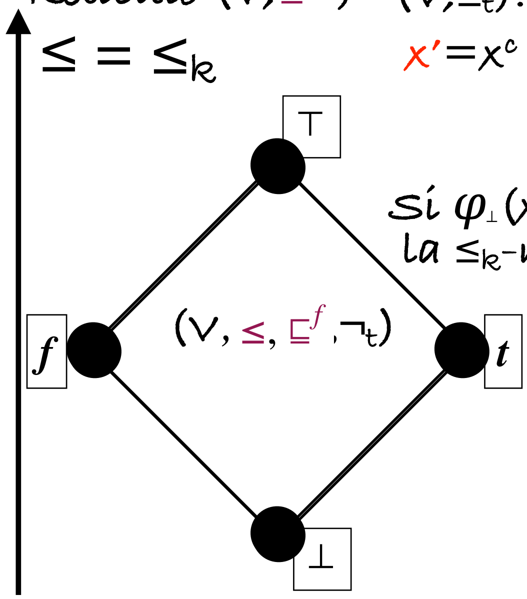
(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$



$x' = x^c$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

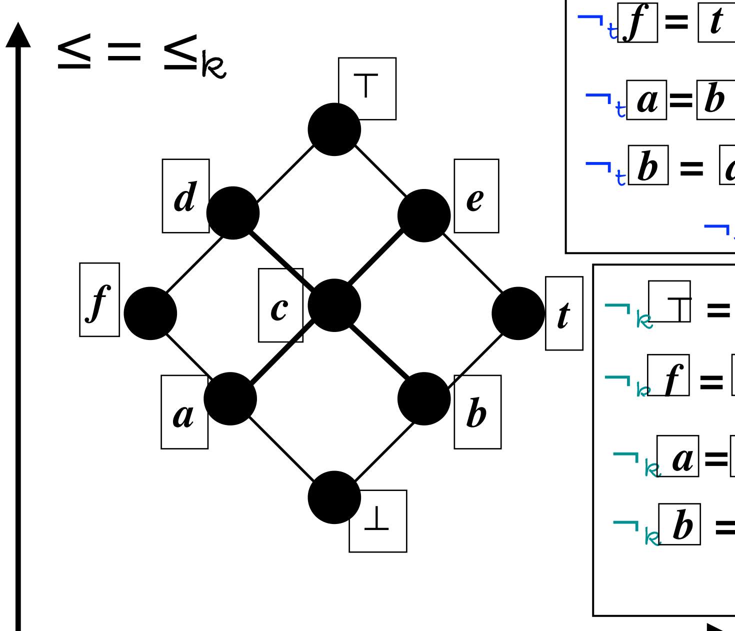
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f\ =\ \leq_t$

Birretículo[(*)] *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$



Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,
$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,
$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,
$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

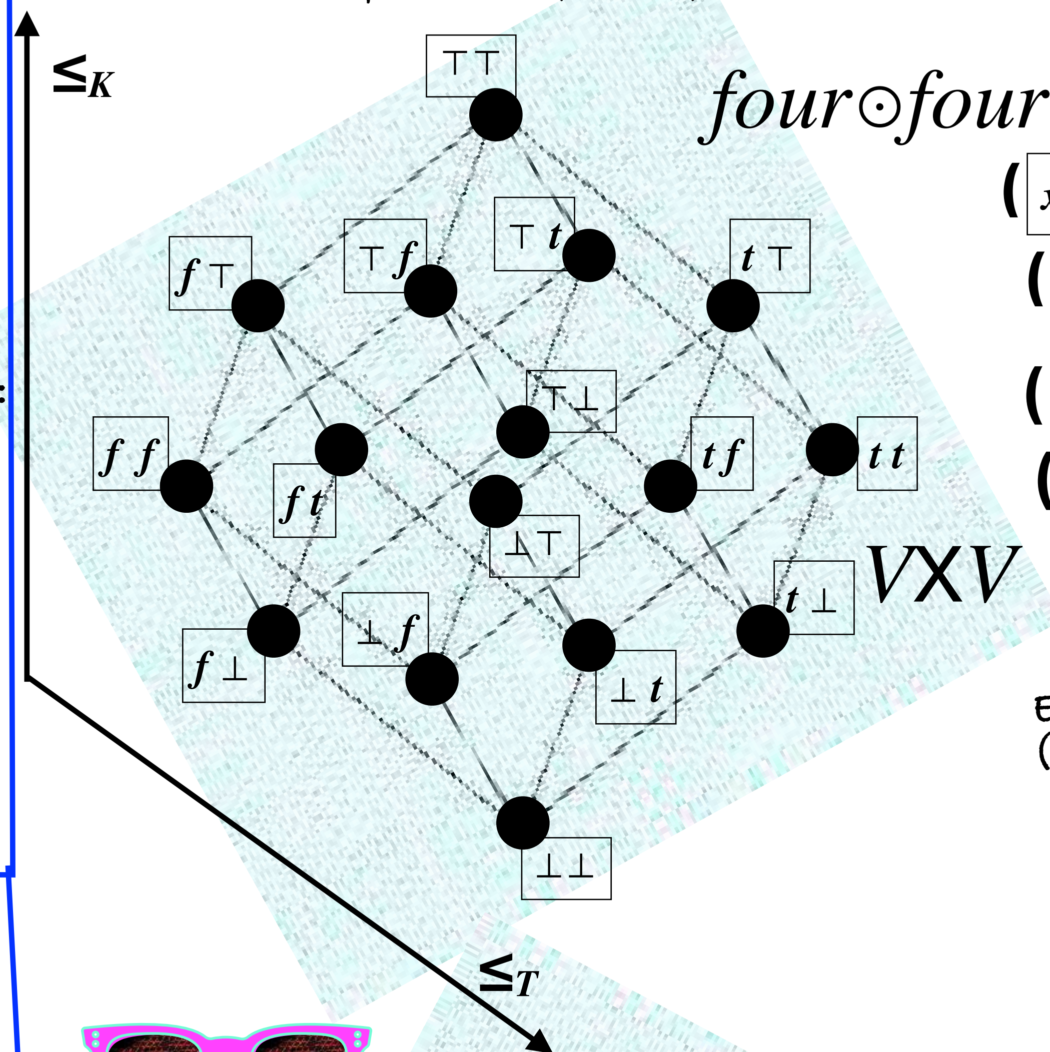
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.
$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,
$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,
$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

3. Birreetículo producto four$\odot$four



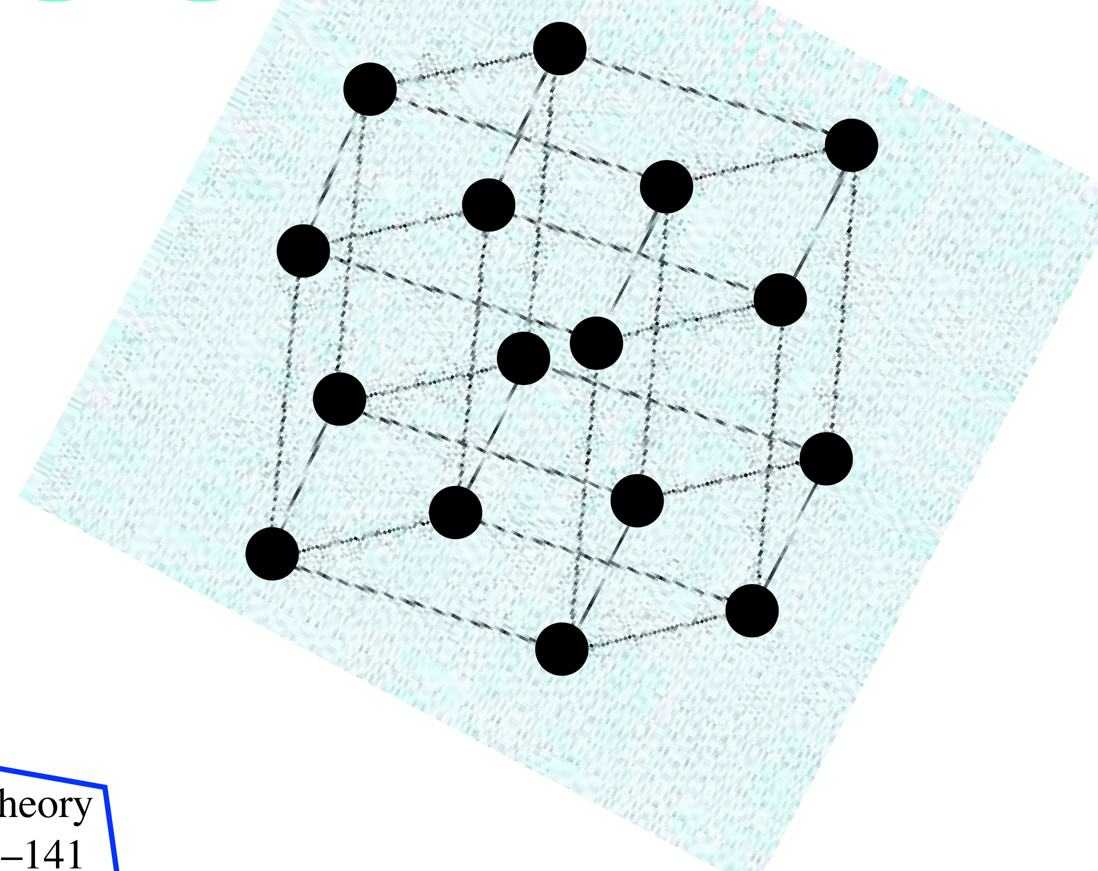
$$four\odot four = (VXV, \leq_T, \leq_K, \neg_T)$$

$(\boxed{x\ y} \leq_T \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \leq_k \boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y} \leq_K \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{y} \leq_k \boxed{s}))$

$\neg_T \boxed{x\ y} = \boxed{y\ x}$

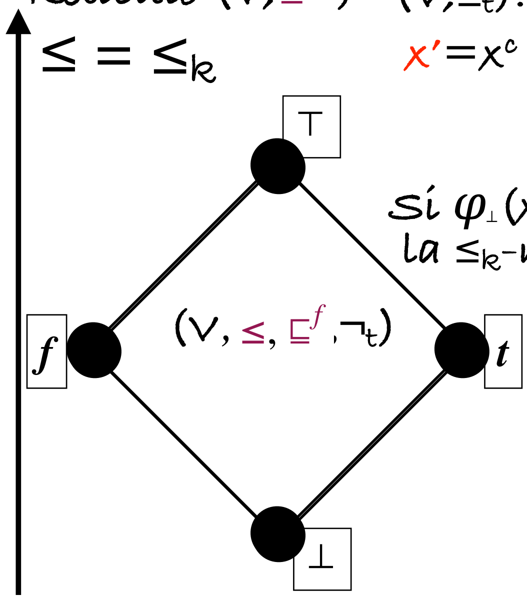
El orden como "perspectiva" en $(VXV, \leq_K)$:



[(*)] Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\le)=(V,\le_k)$.
Perspectiva "$\boxed{f}$":
Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\le_t)$.

Orden de actividad:
$(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \le x \le y+\boxed{f}$



$x' = x^c$

Con la $\le_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$
la $\le_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

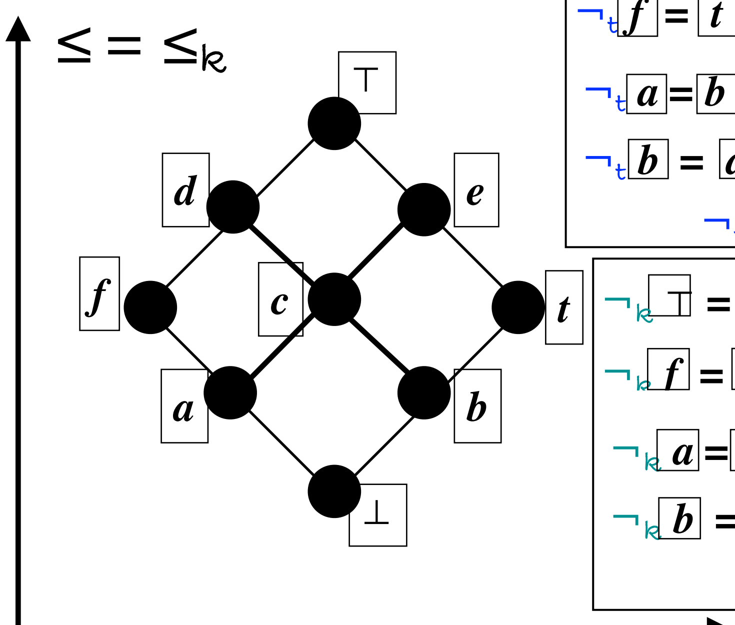
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f = \le_t$

Birretículo(*) *four* =

(Distributivo) $(V, \le, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\le)$



Con la $\le_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,
$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,
$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,
$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

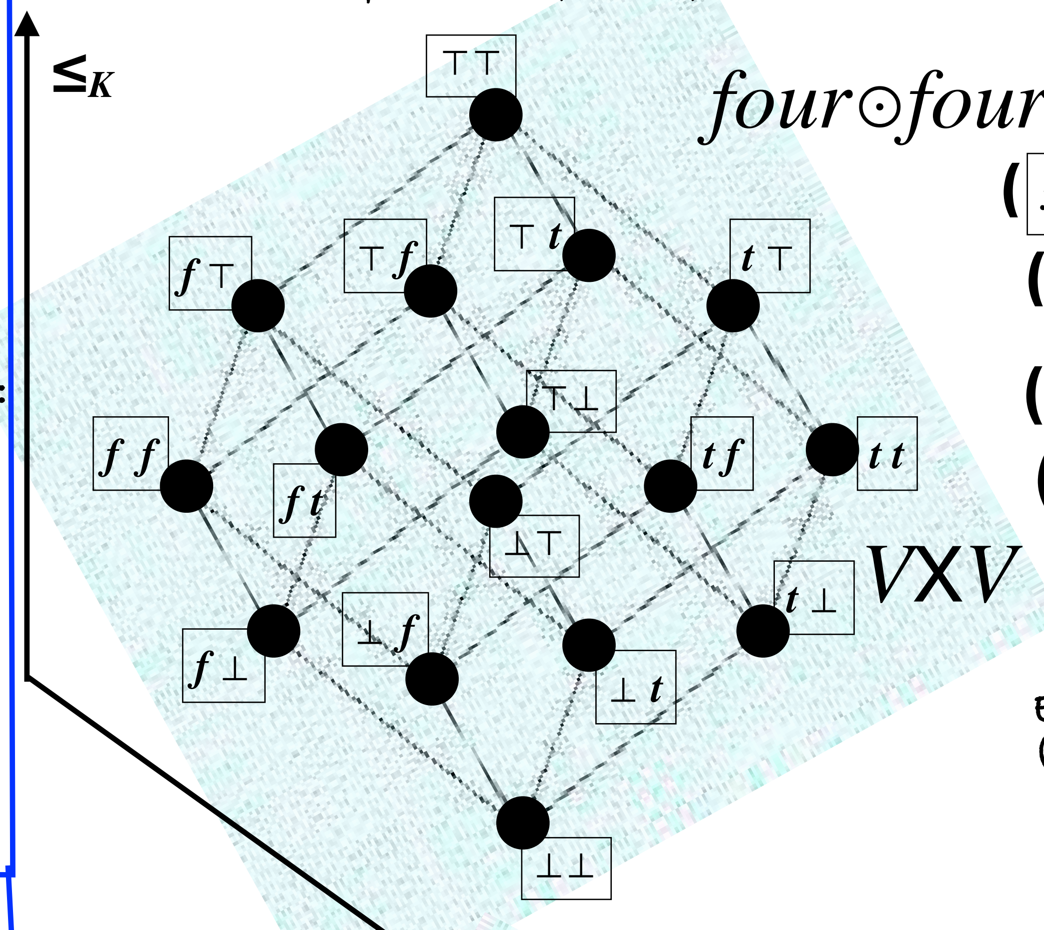
$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.
$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,
$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,
$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f = \le_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \le, \sqsubseteq^f, \neg_t)$

3. Birreticulo producto four⊙four



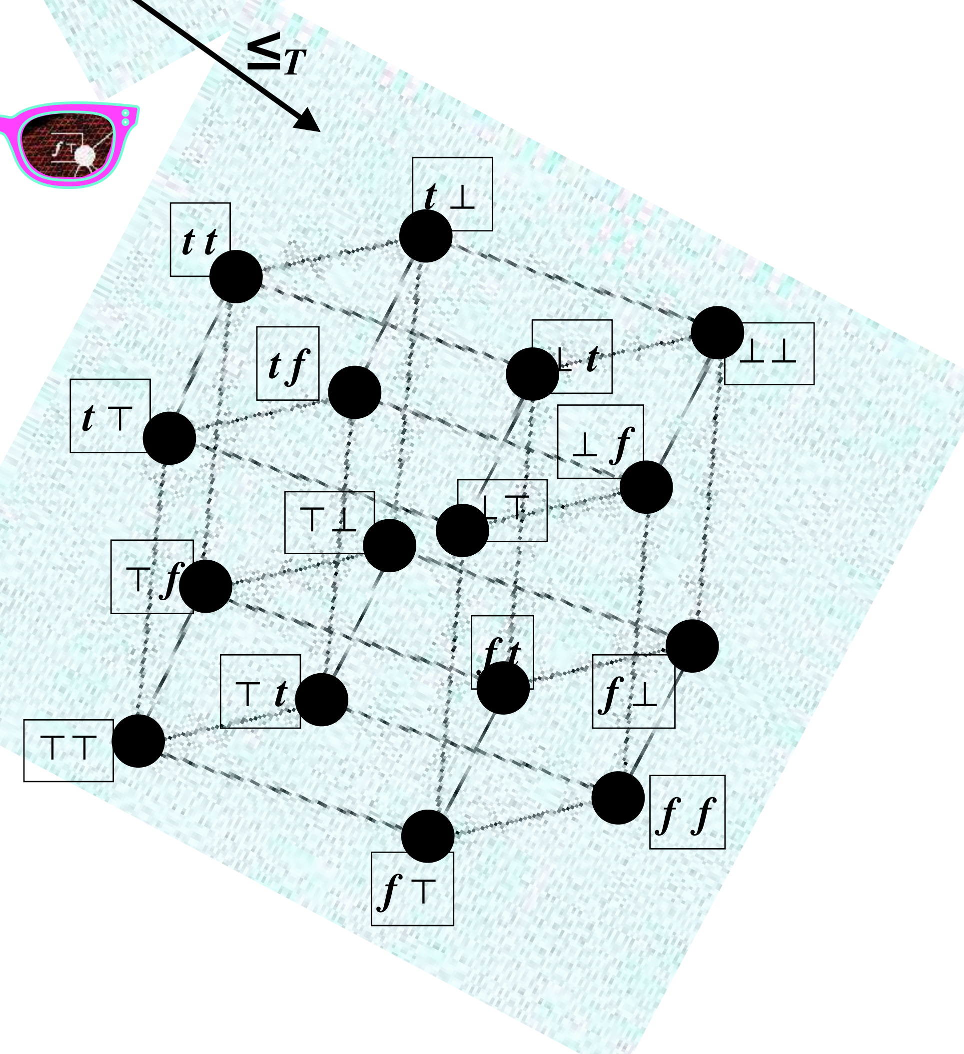
four⊙*four* = $(VXV, \le_T, \le_K, \neg_T)$

$(\boxed{x\ y} \le_T \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow$
$((\boxed{x} \le_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \le_k \boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y} \le_K \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow$
$((\boxed{x} \le_t \boxed{z})\&(\boxed{y} \le_k \boxed{s}))$

$\neg_T \boxed{x\ y} = \boxed{y\ x}$

El orden como "perspectiva" en $(VXV, \le_K)$:



(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

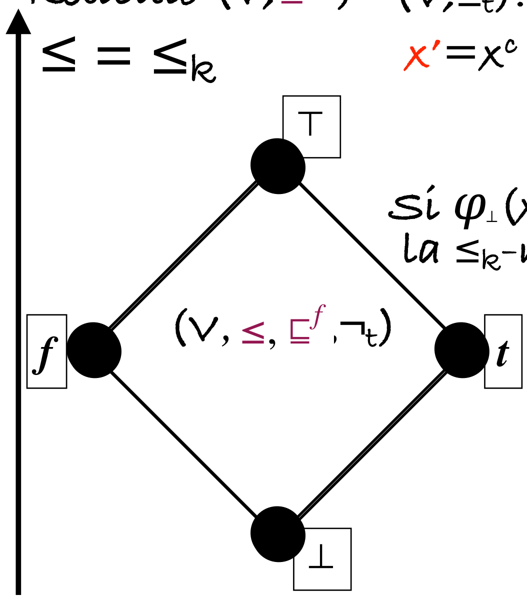
1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$. Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^{f})=(V,\leq_t)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^{f} y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$, $\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.



$x'=x^{c}$

Si $\varphi_{\bot}(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_{\bot}\circ\neg_t\circ\varphi_{\bot}$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$, $\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^{f}\ =\ \leq_t$

Birretículo[(*)] *four* =

(Distributivo) $(V, \leq, \sqsubseteq^{f}, \neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

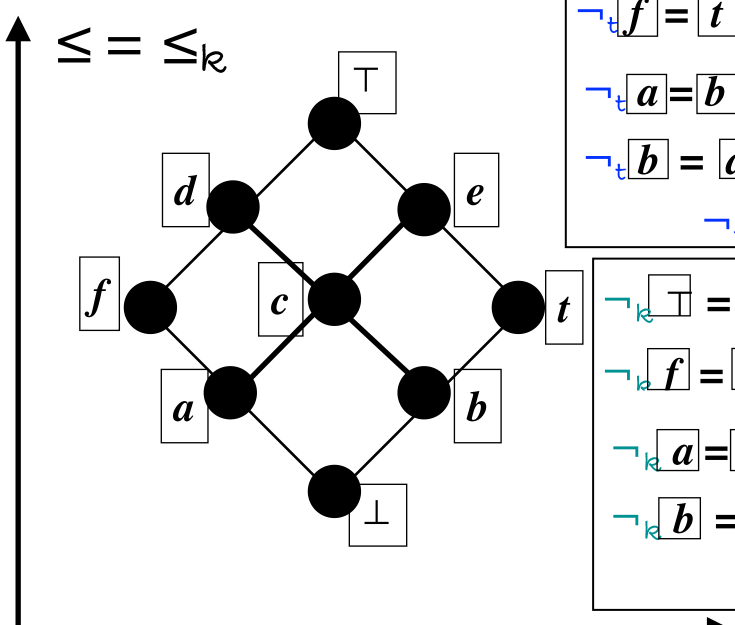
$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,

$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,

$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,

$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.



$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,

$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,

$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^{f}=\leq_t$

Birretículo *nine* =

(Distributivo) $(V_1, \leq, \sqsubseteq^{f}, \neg_t)$

[(*)] Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

3. Birreticulo producto four⊙four

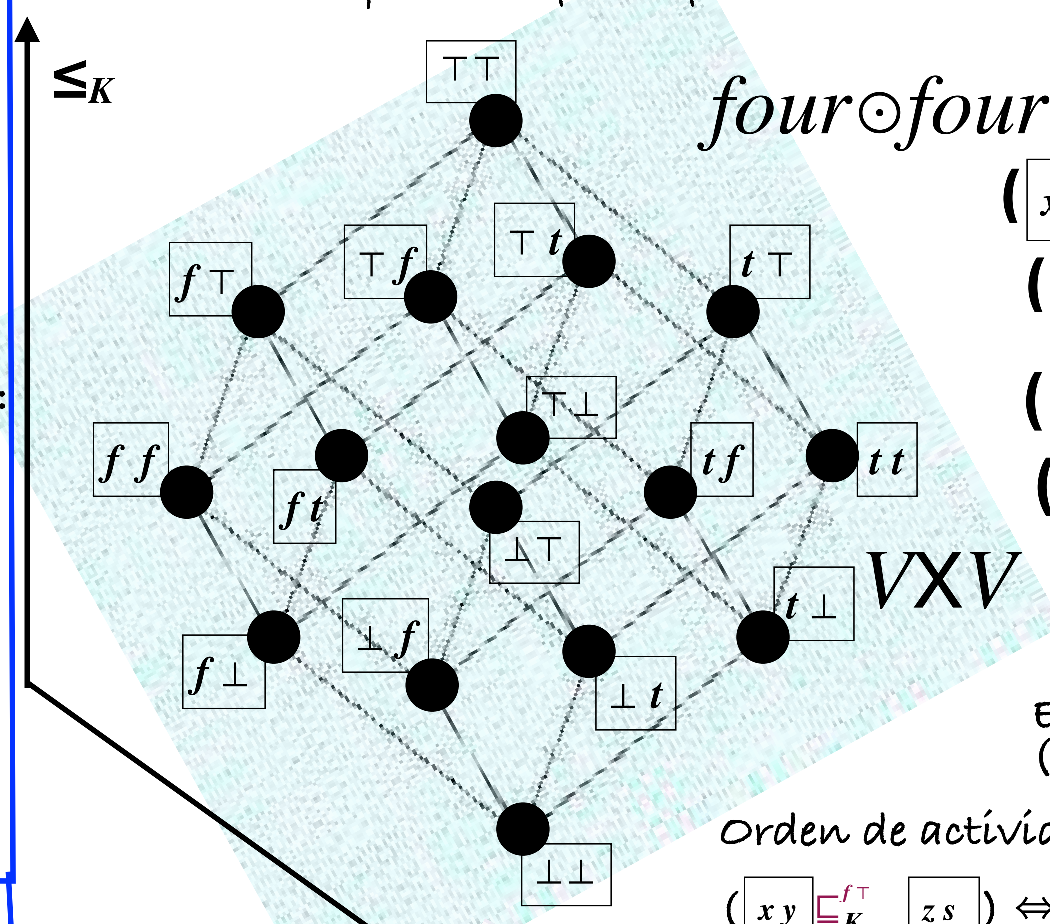
$(V\mathrm{X}V,\ \sqsubseteq_K^{f\top},\ \leq_K,\ \neg_T)$

four⊙four =

$(\boxed{x\ y} \leq_T \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \leq_k \boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y} \leq_K \boxed{z\ s}) \Leftrightarrow ((\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{y} \leq_k \boxed{s}))$

$\neg_T\boxed{x\ y}=\boxed{y\ x}$



El orden como "perspectiva" en $(VXV, \leq_K)$:

Orden de actividad desde la perspectiva $\boxed{f\top}$:

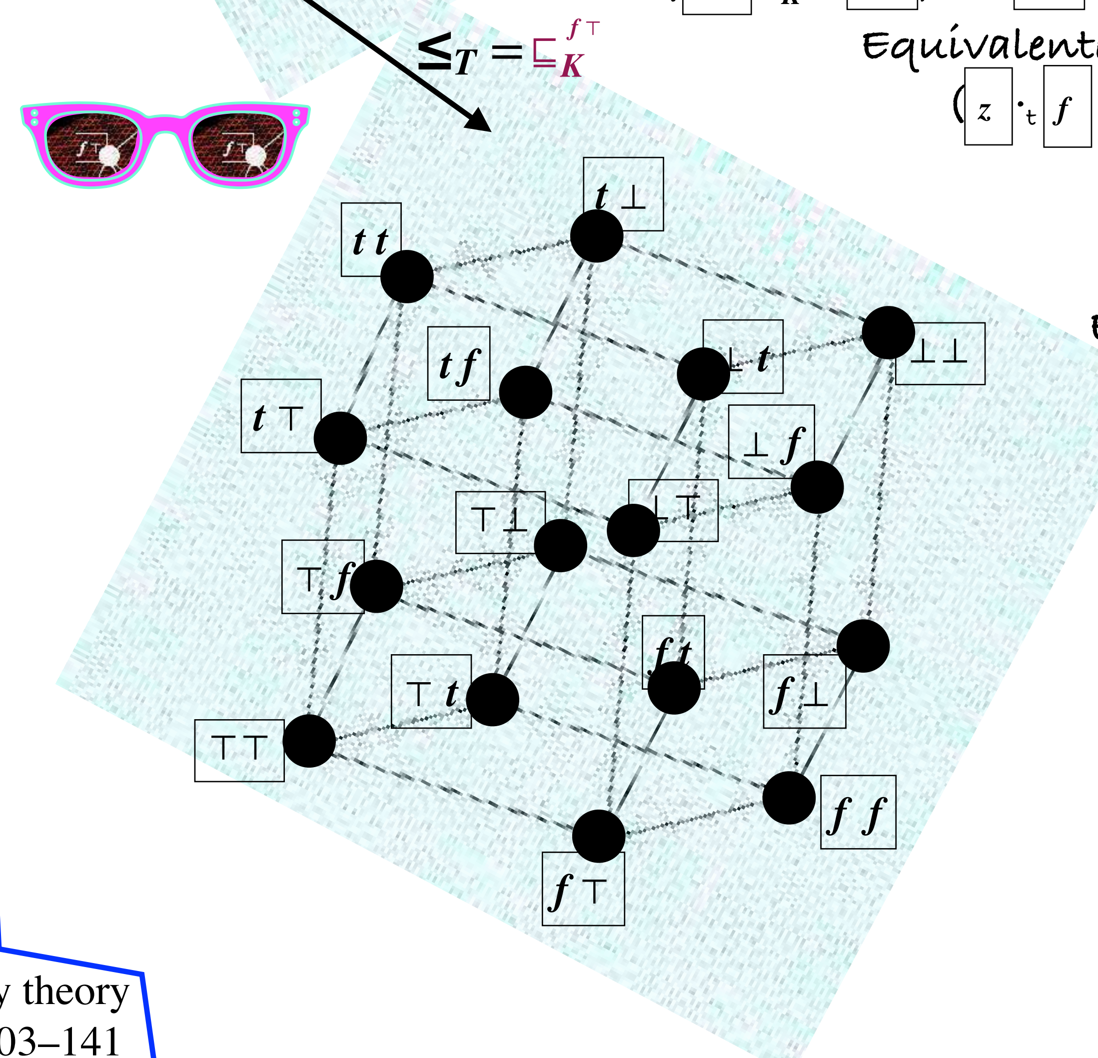
$(\boxed{x\,y} \sqsubseteq_K^{f\top} \boxed{z\,s}) \Leftrightarrow \boxed{z\,s}\cdot_K\boxed{f\top} \leq_K \boxed{x\,y} \leq_K \boxed{z\,s} +_K \boxed{f\top}$

Equivalente a:

$(\boxed{z}\cdot_t\boxed{f} \leq_t \boxed{x} \leq_t \boxed{z} +_t \boxed{f})\ \&$

$(\boxed{s}\cdot_k\boxed{\top} \leq_k \boxed{y} \leq_k \boxed{s} +_k \boxed{\top})$

$\leq_T=\sqsubseteq_K^{f\top}$



Equivalente a su vez a:

$(\boxed{x} \leq_t \boxed{z})\&(\boxed{s} \leq_k \boxed{y})$,

es decir: $\leq_T=\sqsubseteq_K^{f\top}$

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$. Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y) \Leftrightarrow y\cdot\boxed{f} \leq x \leq y+\boxed{f}$

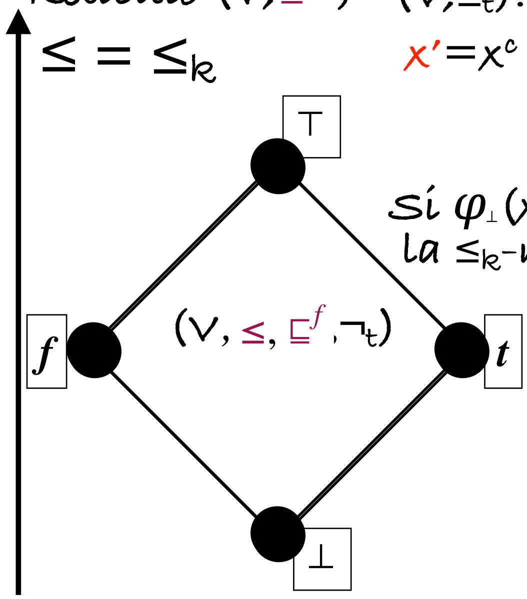
Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.



Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$ la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\sqsubseteq^f\ =\ \leq_t$

Birretículo(*) *four* $=$

(Distributivo) $(V,\leq,\sqsubseteq^f,\neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

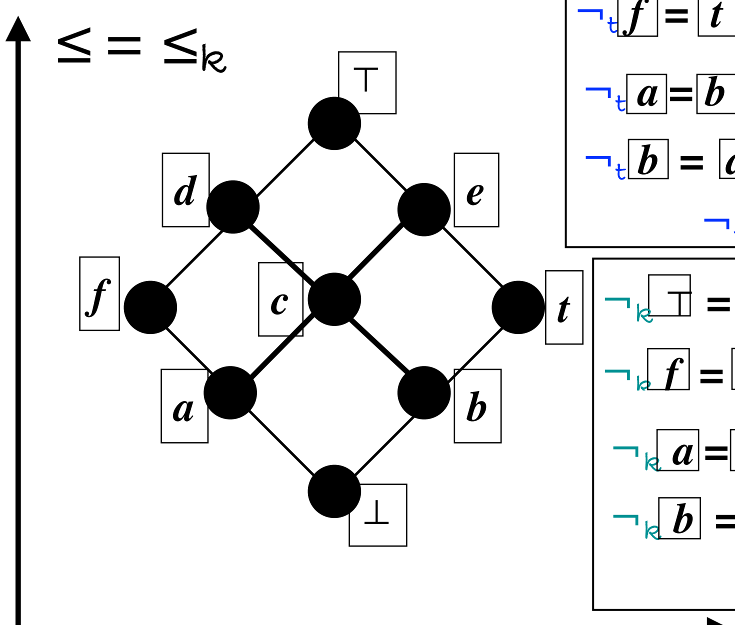
$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,

$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,

$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,

$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,

$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.



$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,

$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.

$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,

$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,

$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\sqsubseteq^f=\ \leq_t$

Birretículo *nine* $=$

(Distributivo) $(V_1,\leq,\sqsubseteq^f,\neg_t)$

(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

3. Birreetículo producto four⊙four

$(V\text{X}V,\ \sqsubseteq_K^{f\top},\ \leq_K,\ \neg_T)$

four⊙four $=$

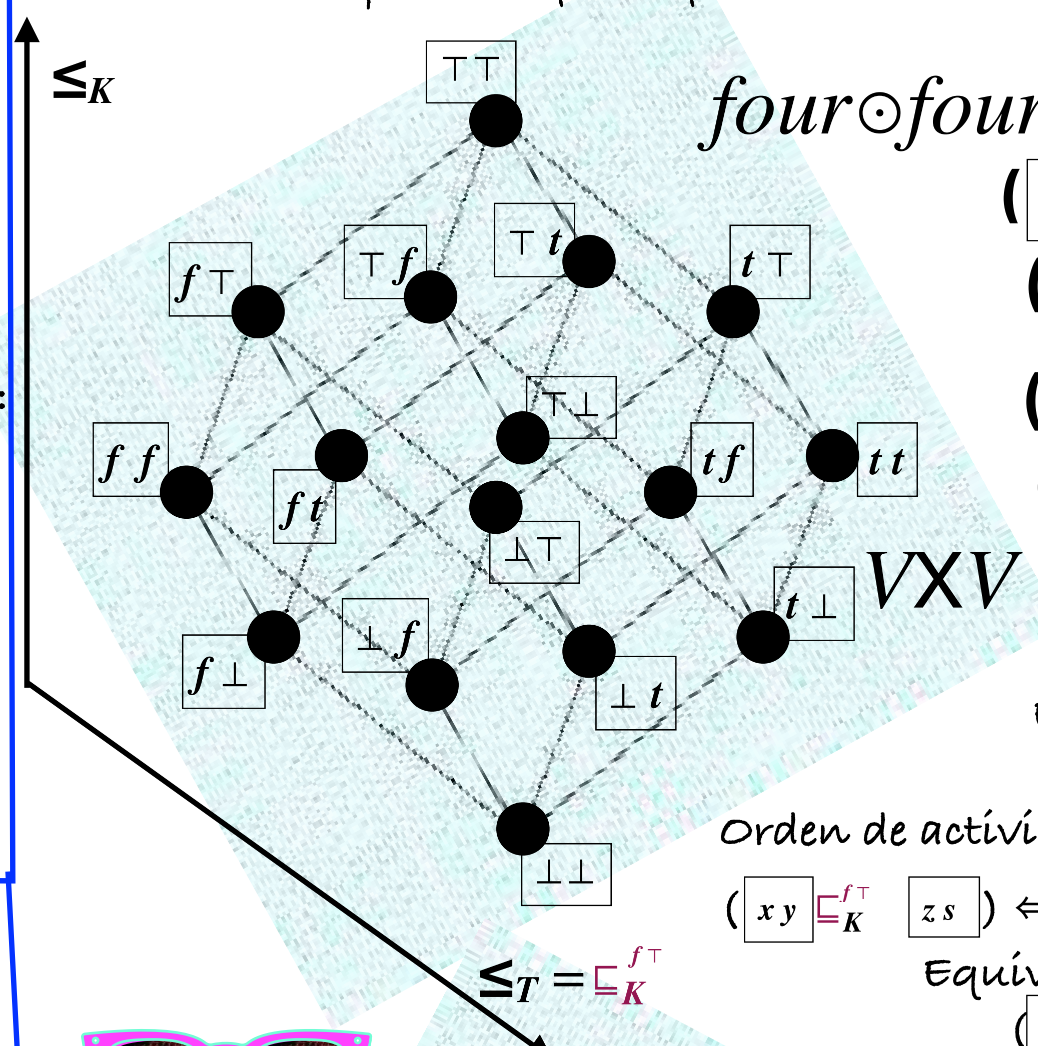
$(\boxed{x\ y}\leq_T\boxed{z\ s})\Leftrightarrow$

$((\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{s}\leq_k\boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y}\leq_K\boxed{z\ s})\Leftrightarrow$

$((\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{y}\leq_k\boxed{s}))$

$\neg_T\boxed{x\ y}=\boxed{y\ x}$



El orden como "perspectiva" en $(V\text{X}V,\leq_K)$:

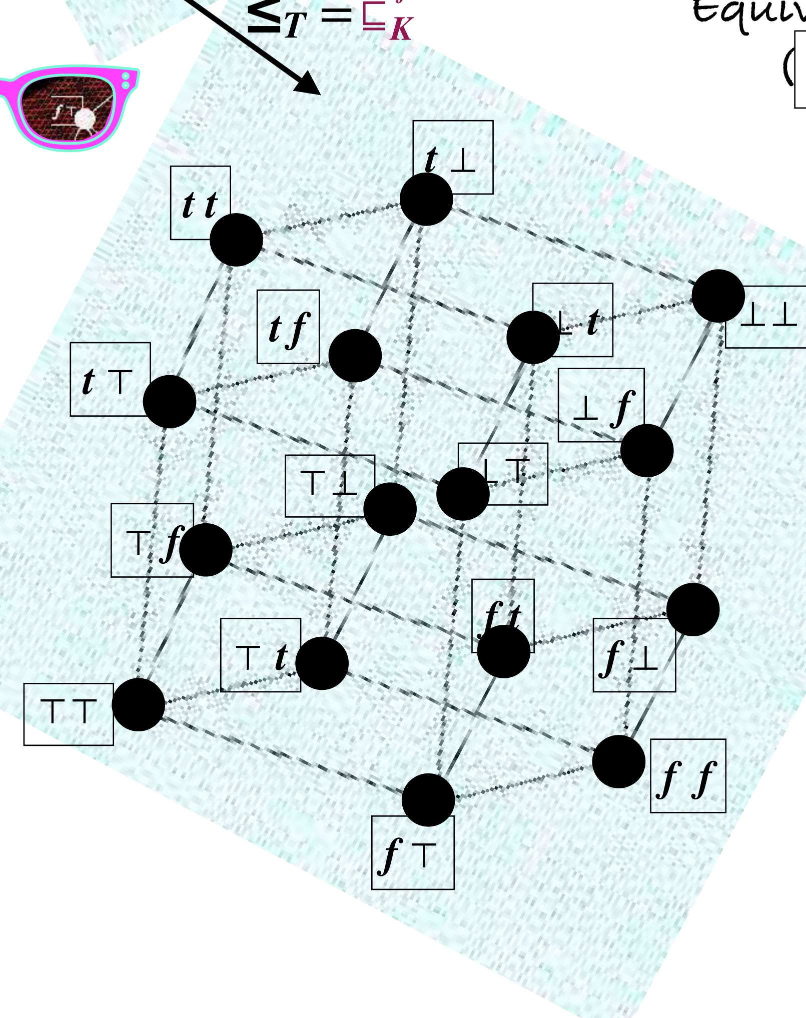
Orden de actividad desde la perspectiva $\boxed{f\top}$:

$(\boxed{x\,y}\sqsubseteq_K^{f\top}\boxed{z\,s})\Leftrightarrow\boxed{z\,s}\cdot_K\boxed{f\top}\leq_K\boxed{x\,y}\leq_K\boxed{z\,s}+_K\boxed{f\top}$

Equivalente a:

$(\boxed{z}\cdot_t\boxed{f}\leq_t\boxed{x}\leq_t\boxed{z}+_t\boxed{f})\ \&$

$(\boxed{s}\cdot_k\boxed{\top}\leq_k\boxed{y}\leq_k\boxed{s}+_k\boxed{\top})$



Equivalente a su vez a:

$(\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{s}\leq_k\boxed{y})$,

es decir: $\leq_T=\sqsubseteq_K^{f\top}$

(Cuestión abierta)

1. Retículo distributivo y acotado $(V,\leq)=(V,\leq_k)$.

Orden de actividad: $(x \sqsubseteq^f y)\Leftrightarrow y\cdot\boxed{f}\leq x\leq y+\boxed{f}$

Perspectiva "$\boxed{f}$":

Retículo $(V,\sqsubseteq^f)=(V,\leq_t)$.

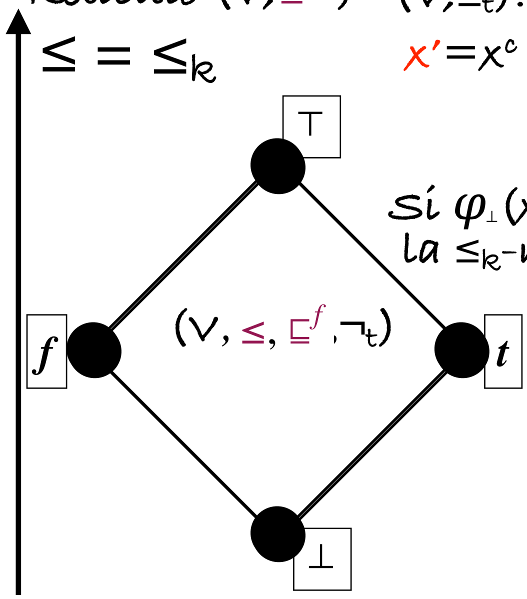
Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$.

$x'=x^c$

Si $\varphi_\bot(x)=x\Delta_t\boxed{\bot}=x'\cdot_t\boxed{\bot}+_t x\cdot_t\boxed{\top}$
la $\leq_k$-negación $\neg_k=\varphi_\bot\circ\neg_t\circ\varphi_\bot$:

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.



$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo(*) *four* =

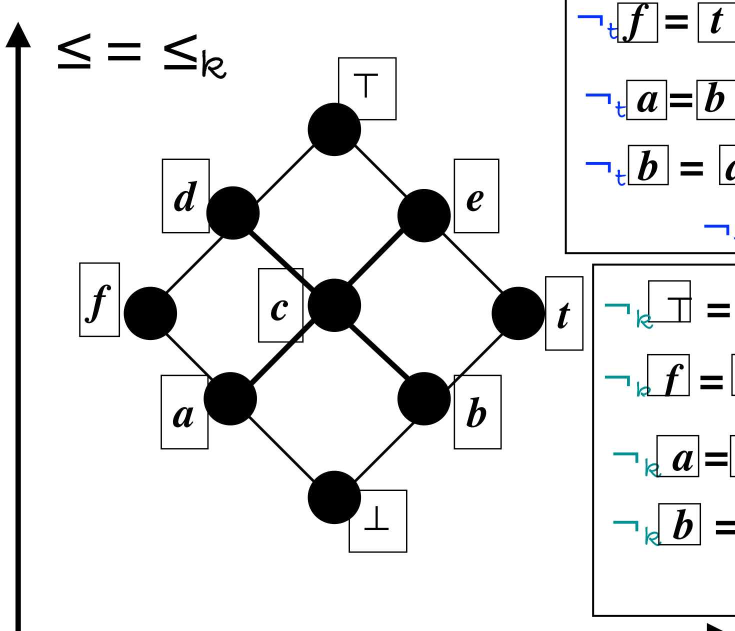
(Distributivo) $(V,\leq,\sqsubseteq^f,\neg_t)$

2. Retículo distributivo y acotado $(V_1,\leq)$

Con la $\leq_t$-negación $\neg_t$:

$\neg_t\boxed{\top}=\boxed{\top}$, $\neg_t\boxed{\bot}=\boxed{\bot}$,
$\neg_t\boxed{f}=\boxed{t}$, $\neg_t\boxed{t}=\boxed{f}$,
$\neg_t\boxed{a}=\boxed{b}$, $\neg_t\boxed{d}=\boxed{e}$,
$\neg_t\boxed{b}=\boxed{a}$, $\neg_t\boxed{e}=\boxed{d}$,
$\neg_t\boxed{c}=\boxed{c}$.

$\neg_k\boxed{\top}=\boxed{\bot}$, $\neg_k\boxed{\bot}=\boxed{\top}$,
$\neg_k\boxed{f}=\boxed{f}$, $\neg_k\boxed{t}=\boxed{t}$.
$\neg_k\boxed{a}=\boxed{d}$, $\neg_k\boxed{d}=\boxed{a}$,
$\neg_k\boxed{b}=\boxed{e}$, $\neg_k\boxed{e}=\boxed{b}$,
$\neg_k\boxed{c}=\boxed{c}$.



$\sqsubseteq^f = \leq_t$

Birretículo *nine* = $(V_1,\leq,\sqsubseteq^f,\neg_t)$

(Distributivo)

(*) Distributive bilattices from the perspective of natural duality theory
L. M. Cabrer and H. A. Priestley Algebra Univers. 73 (2015) 103–141

3. Birretículo producto four⊙four

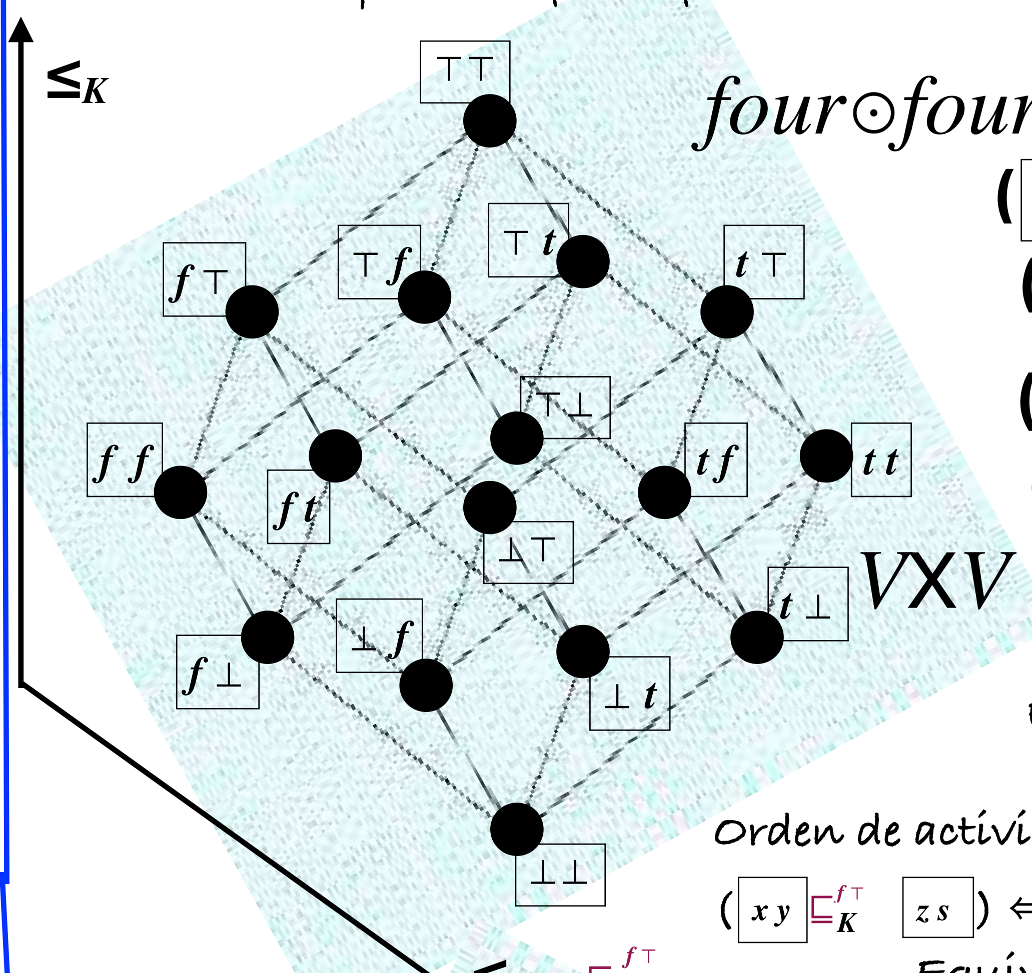
$(VXV,\ \sqsubseteq^{f\top}_K,\ \leq_K,\ \neg_T)$

four⊙four =

$(\boxed{x\ y}\leq_T\boxed{z\ s})\Leftrightarrow$
$((\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{s}\leq_k\boxed{v}))$

$(\boxed{x\ y}\leq_K\boxed{z\ s})\Leftrightarrow$
$((\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{y}\leq_k\boxed{s}))$

$\neg_T\boxed{x\ y}=\boxed{y\ x}$



El orden como "perspectiva" en $(VXV,\leq_K)$:

Orden de actividad desde la perspectiva $\boxed{f\top}$:

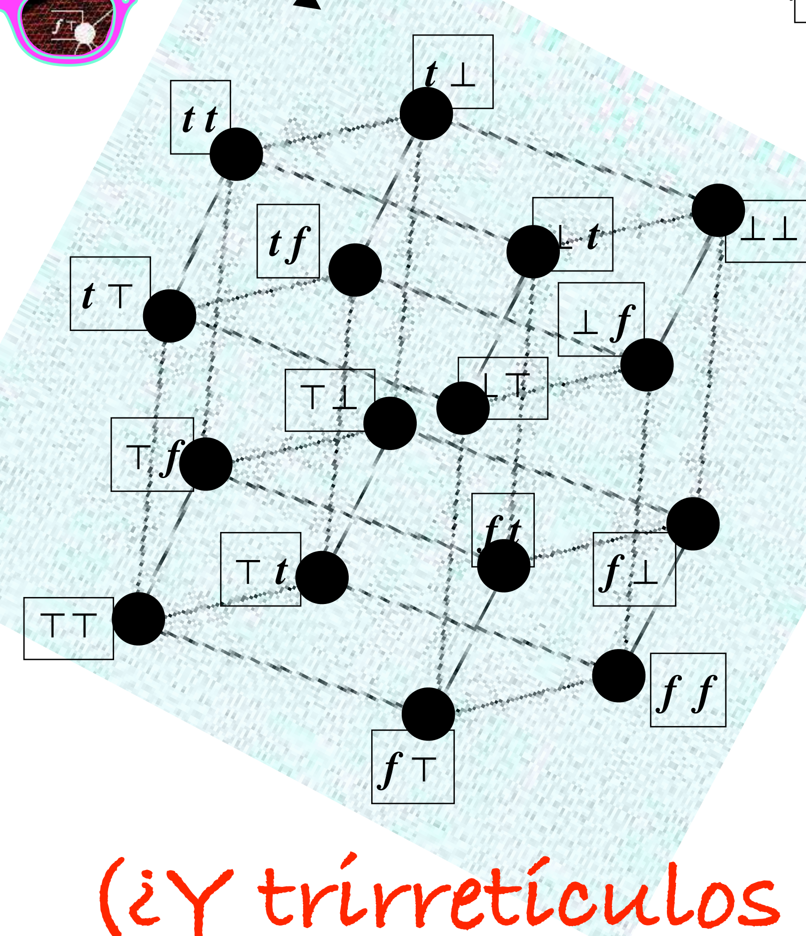
$(\boxed{x\ y}\sqsubseteq^{f\top}_K\boxed{z\ s})\Leftrightarrow\boxed{z\ s}\cdot_K\boxed{f\top}\leq_K\boxed{x\ y}\leq_K\boxed{z\ s}+_K\boxed{f\top}$

Equivalente a:

$(\boxed{z}\cdot_t\boxed{f}\leq_t\boxed{x}\leq_t\boxed{z}+_t\boxed{f})\ \&$

$(\boxed{s}\cdot_k\boxed{\top}\leq_k\boxed{y}\leq_k\boxed{s}+_k\boxed{\top})$

$\leq_T=\sqsubseteq^{f\top}_K$



Equivalente a su vez a:
$(\boxed{x}\leq_t\boxed{z})\&(\boxed{s}\leq_k\boxed{y})$,

es decir: $\leq_T=\sqsubseteq^{f\top}_K$

(cuestión abierta)

(¿Y trirretículos distributivos?)

Sobre los maximales en los inf-semiretículos $(\mathsf{X}_{x\in E} L_x, \sqsubseteq^W)$ asociados a productos de cadenas

Nota1. Sea $(L,\leq)$ una cadena acotada. Si $L=[0,1]\subset\mathbb{R}$ o $L=[0,1]\subset\mathbb{Q}$, se puede considerar en ella la diferencia usual como ley de composición parcial: si $\alpha \geq \beta$ entonces α-$\beta\in L$. En particular, fijando $\alpha=1$, se obtiene una negación fuerte en L: $\beta'=1-\beta$ $\forall\beta\in L$.

Si L es finita, identificándola con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$, también tiene a la diferencia α-β como ley parcial del mismo tipo; y para $\alpha=n$ se obtiene la negación fuerte, (ahora la única), $\beta'=n-\beta$ $\forall\beta\in L$.

Nota1. Sea $(L,\leq)$ una cadena acotada. Si $L=[0,1]\subset\mathbb{R}$ o $L=[0,1]\subset\mathbb{Q}$, se puede considerar en ella la diferencia usual como ley de composición parcial: si $\alpha \geq \beta$ entonces $\alpha\text{-}\beta\in L$. En particular, fijando $\alpha=1$, se obtiene una negación fuerte en L: $\beta'=1\text{-}\beta\ \forall\beta\in L$.

Si L es finita, identificándola con $n+1=\{0,1,\dots,n\}$, también tiene a la diferencia $\alpha\text{-}\beta$ como ley parcial del mismo tipo; y para $\alpha=n$ se obtiene la negación fuerte, (ahora la única), $\beta'=n\text{-}\beta\ \forall\beta\in L$.

Nota2. Sea E un referencial y sea $((L_x, \leq_x, min_x, max_x, 0_x, 1_x), '^x)_{x\in E}$ una colección de cadenas acotadas con negación fuerte, sub-indicada por E. Si $\underset{x\in E}{X} L_x=\{A:E\rightarrow\bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$ representa el conjunto producto de la familia $(L_x)_{x\in E}$ y si $\leq$ es la relación de orden en $\underset{x\in E}{X} L_x$ tal que $(A \leq B)\Leftrightarrow(A(x)\leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, entonces $(\underset{x\in E}{X} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ es un retículo distributivo y acotado con negación fuerte en el que $A\cdot B$ y $A+B$ son respectivamente los operadores sup e inf dados por: $(A\cdot B)(x)=min_x(A(x),B(x))$, $(A+B)(x)=max_x(A(x),B(x))\ \forall x\in E$, los símbolos 0 y 1 representan respectivamente los elementos mínimo y máximo: $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x\ \forall x\in E$ y $':\underset{x\in E}{X} L_x\rightarrow\underset{x\in E}{X} L_x$ es la aplicación tal que $(A')(x)=(A(x))'^x\ \forall x\in E$, que es negación fuerte en el retículo.

Nota1. Sea $(L,\leq)$ una cadena acotada. Si $L=[0,1]\subset\mathbb{R}$ o $L=[0,1]\subset\mathbb{Q}$, se puede considerar en ella la diferencia usual como ley de composición parcial: si $\alpha \geq \beta$ entonces α-$\beta\in L$. En particular, fijando $\alpha=1$, se obtiene una negación fuerte en L: $\beta'=1-\beta\ \forall\beta\in L$.

Si L es finita, identificándola con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$, también tiene a la diferencia α-β como ley parcial del mismo tipo; y para $\alpha=n$ se obtiene la negación fuerte, (ahora la única), $\beta'=n-\beta\ \forall\beta\in L$.

Nota2. Sea E un referencial y sea $((L_x, \leq_x, \min_x, \max_x, 0_x, 1_x),'^x)_{x\in E}$ una colección de cadenas acotadas con negación fuerte, sub-indicada por E. Si $\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x=\{A:E \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x \ /\ A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$ representa el conjunto producto de la familia $(L_x)_{x\in E}$ y si $\leq$ es la relación de orden en $\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x$ tal que $(A \leq B)\Leftrightarrow(A(x)\leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, entonces $(\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ es un retículo distributivo y acotado con negación fuerte en el que $A\cdot B$ y $A+B$ son respectivamente los operadores sup e inf dados por: $(A\cdot B)(x)=\min_x(A(x),B(x))$, $(A+B)(x)=\max_x(A(x),B(x))\ \forall x\in E$, los símbolos 0 y 1 representan respectivamente los elementos mínimo y máximo: $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x\ \forall x\in E$ y $':\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x\rightarrow\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x$ es la aplicación tal que $(A')(x)=(A(x))'^x\ \forall x\in E$, que es negación fuerte en el retículo.

Nota3. Si $<_x$ representa el orden estricto en L_x tal que $\alpha<_x\beta\Leftrightarrow(\alpha\leq_x\beta)\&(\alpha\neq\beta)$, dado $A\in\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x$ le asociamos dos subconjuntos de E; su soporte: $SUPP(A)=\{x\in E/\ 0_x<_x A(x)\}=\{x\in E/\ 0_x\neq A(x)\}$ y su núcleo: $KER(A)=\{y\in E\ /A(y)=1_y\}$. Se verifica: $SUPP(A')=(KER(A))^c\ \ \forall A\in\underset{x\in E}{\mathrm{X}} L_x$

Nota1. Sea $(L,\leq)$ una cadena acotada. Si $L=[0,1]\subset\mathbb{R}$ o $L=[0,1]\subset\mathbb{Q}$, se puede considerar en ella la diferencia usual como ley de composición parcial: si $\alpha\geq\beta$ entonces $\alpha-\beta\in L$. En particular, fijando $\alpha=1$, se obtiene una negación fuerte en L: $\beta'=1-\beta\ \forall\beta\in L$.
Si L es finita, identificándola con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$, también tiene a la diferencia $\alpha-\beta$ como ley parcial del mismo tipo; y para $\alpha=n$ se obtiene la negación fuerte, (ahora la única), $\beta'=n-\beta\ \forall\beta\in L$.

Nota2. Sea E un referencial y sea $((L_x, \leq_x, \min_x, \max_x, 0_x, 1_x),'^x)_{x\in E}$ una colección de cadenas acotadas con negación fuerte, sub-indicada por E. Si $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x=\{A:E\rightarrow\bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$ representa el conjunto producto de la familia $(L_x)_{x\in E}$ y si $\leq$ es la relación de orden en $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$ tal que $(A\leq B)\Leftrightarrow(A(x)\leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, entonces $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ es un retículo distributivo y acotado con negación fuerte en el que $A\cdot B$ y $A+B$ son respectivamente los operadores sup e inf dados por: $(A\cdot B)(x)=\min_x(A(x),B(x))$, $(A+B)(x)=\max_x(A(x),B(x))\ \forall x\in E$, los símbolos 0 y 1 representan respectivamente los elementos mínimo y máximo: $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x\ \forall x\in E$ y $':\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x\rightarrow\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$ es la aplicación tal que $(A')(x)=(A(x))'^x\ \forall x\in E$, que es negación fuerte en el retículo.

Nota3. Si $<_x$ representa el orden estricto en L_x tal que $\alpha<_x\beta\Leftrightarrow(\alpha\leq_x\beta)\&(\alpha\neq\beta)$, dado $A\in\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$ le asociamos dos subconjuntos de E; su soporte: $SUPP(A)=\{x\in E/\ 0_x<_x A(x)\}=\{x\in E/\ 0_x\neq A(x)\}$ y su núcleo: $KER(A)=\{y\in E\,/A(y)=1_y\}$. Se verifica: $SUPP(A')=(KER(A))^c\ \ \forall A\in\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$

Nota4. Diremos que un elemento $N\in\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$ es nítido si $N(x)\in\{0_x, 1_x\}\ \forall x\in E$. Los nítidos están caracterizados por $SUPP(N)=KER(N)=N$. El conjunto de elementos nítidos es subretículo de $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$, que, con la restricción de la negación, resulta ser un Álgebra de Boole isomorfa a la de los subconjuntos de E: $(\mathcal{P}(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset, E),{}^c)$ por lo que, identificando un subconjunto N de E con el nítido: $f_N(x)=1_x$ si $x\in N$ y $f_N(y)=0_y$ si $y\notin N$, consideraremos el álgebra de Boole de los subconjuntos de E sumergida en $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$. En esa línea, se identifica los nítidos 0_x y 1_x con $\emptyset$ y con E respectivamente y además, podemos escribir: $KER(A)\leq A\leq SUPP(A)\ \forall A\in\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$.

Nota1. Sea $(L,\leq)$ una cadena acotada. Si $L=[0,1]\subset\mathbb{R}$ o $L=[0,1]\subset\mathbb{Q}$, se puede considerar en ella la diferencia usual como ley de composición parcial: si $\alpha\geq\beta$ entonces $\alpha-\beta\in L$. En particular, fijando $\alpha=1$, se obtiene una negación fuerte en L: $\beta'=1-\beta\ \forall\beta\in L$.

Si L es finita, identificándola con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$, también tiene a la diferencia $\alpha-\beta$ como ley parcial del mismo tipo; y para $\alpha=n$ se obtiene la negación fuerte, (ahora la única), $\beta'=n-\beta\ \forall\beta\in L$.

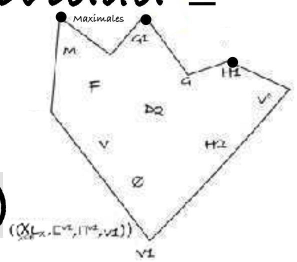
Nota2. Sea E un referencial y sea $((L_x, \leq_x, \min_x, \max_x, 0_x, 1_x),'^x)_{x\in E}$ una colección de cadenas acotadas con negación fuerte, sub-indicada por E. Si $\underset{x\in E}{\times}L_x=\{A:E\rightarrow\bigcup_{x\in E}L_x\ /\ A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$ representa el conjunto producto de la familia $(L_x)_{x\in E}$ y si $\leq$ es la relación de orden en $\underset{x\in E}{\times}L_x$ tal que $(A\leq B)\Leftrightarrow(A(x)\leq_x B(x)\ \forall x\in E)$, entonces $(\underset{x\in E}{\times}L_x, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ es un retículo distributivo y acotado con negación fuerte en el que $A\cdot B$ y $A+B$ son respectivamente los operadores sup e inf dados por: $(A\cdot B)(x)=\min_x(A(x),B(x))$, $(A+B)(x)=\max_x(A(x),B(x))\ \forall x\in E$, los símbolos 0 y 1 representan respectivamente los elementos mínimo y máximo: $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x\ \forall x\in E$ y $':\underset{x\in E}{\times}L_x\rightarrow\underset{x\in E}{\times}L_x$ es la aplicación tal que $(A')(x)=(A(x))'^x\ \forall x\in E$, que es negación fuerte en el retículo.

Nota3. Si $<_x$ representa el orden estricto en L_x tal que $\alpha<_x\beta\Leftrightarrow(\alpha\leq_x\beta)\&(\alpha\neq\beta)$, dado $A\in\underset{x\in E}{\times}L_x$ le asociamos dos subconjuntos de E; su soporte: $SUPP(A)=\{x\in E/\ 0_x<_x A(x)\}=\{x\in E/\ 0_x\neq A(x)\}$ y su núcleo: $KER(A)=\{y\in E\ /A(y)=1_y\}$. Se verifica: $SUPP(A')=(KER(A))^c\ \ \forall A\in\underset{x\in E}{\times}L_x$

Nota4. Diremos que un elemento $N\in\underset{x\in E}{\times}L_x$ es nítido si $N(x)\in\{0_x, 1_x\}\ \forall x\in E$. Los nítidos están caracterizados por $SUPP(N)=KER(N)=N$. El conjunto de elementos nítidos es subretículo de $\underset{x\in E}{\times}L_x$, que, con la restricción de la negación, resulta ser un Álgebra de Boole isomorfa a la de los subconjuntos de E: $(\mathcal{P}(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset, E),^c)$ por lo que, identificando un subconjunto N de E con el nítido: $f_N(x)=1_x$ si $x\in N$ y $f_N(y)=0_y$ si $y\notin N$, consideraremos el álgebra de Boole de los subconjuntos de E sumergida en $\underset{x\in E}{\times}L_x$. En esa línea, se identifica los nítidos 0_x y 1_x con $\emptyset$ y con E respectivamente y además, podemos escribir: $KER(A)\leq A\leq SUPP(A)\ \forall A\in\underset{x\in E}{\times}L_x$.

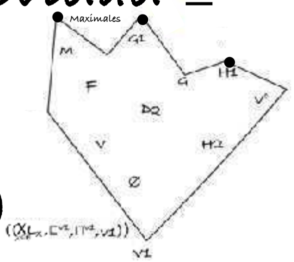
Nota5. En particular, si $L_x=L\ \forall x\in E$ y todas las negaciones $'^x$ también coinciden con $':L\rightarrow L$, el conjunto $\underset{x\in E}{\times}L_x$ es la clase de L-borrosos de E: $\underset{x\in E}{\times}L_x\equiv L^E=\{A/A:E\rightarrow L\}$ y $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E),')$ es el retículo distributivo y acotado de L-borrosos de E con una negación tal que, si $N\in L^E$ es nítido, entonces $N^c=N'$.

Proposición. Si $((L_x, \leq_x, \min_x, \max_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ es una colección de cadenas acotadas subindicadas por el referencial E, si $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x = \{A: E \to \bigcup_{x\in E} L_x \ / \ A(x)\in L_x \ \forall x\in E\}$ es el retículo distributivo acotado producto, y si $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W, W)$ es el inf-semirretículo con elemento mínimo W asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ determinado por el L-borroso $W\in \underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$, entonces todo maximal M de ese inf-semirretículo $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W, W)$ es un nítido y se verifica:



$$\mathrm{Maximales}((\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W)) = \{ M\in P(E) \ / \ [SUPP(W)]^c \subseteq M \subseteq [KER(W)]^c \} \subseteq P(E)$$

<u>Proposición</u>. Si $((L_x, \leq_x, \min_x, \max_x, 0_x, 1_x))_{x\in E}$ es una colección de cadenas acotadas subindicadas por el referencial E, si $\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x = \{A:E \rightarrow \bigcup_{x\in E} L_x \,/\, A(x)\in L_x\ \forall x\in E\}$ es el retículo distributivo acotado producto, y si $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W, W)$ es el inf-semirretículo con elemento mínimo W asociado al orden de actividad $\sqsubseteq^W$ determinado por el L-borroso $W\in \underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$, entonces
todo maximal M de ese inf-semirretículo $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W, W)$ es un nítido y se verifica:



$$\text{Maximales}((\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W)) = \{ M\in P(E) \,/\, [SUPP(W)]^c \subseteq M \subseteq [KER(W)]^c \} \subseteq P(E)$$

<u>Demostración</u>. Sea $M\in P(E)$ tal que $[SUPP(W)]^c \subseteq M \subseteq [KER(W)]^c$. Supongamos que $M \sqsubseteq^W S$ para algún $S\in \underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$. Entonces $M(x) \sqsubseteq^{W(x)} S(x)\ \forall x\in E$. Por hipótesis, si $x\notin M$ entonces $x\in SUPP(W)$, es decir, $0_x <_x W(x)$. Por lo tanto: $0_x = M(x) \sqsubseteq^{W(x)} S(x)$, por lo que $\min_x(S(x), W(x)) \leq_x 0_x$ y en consecuencia $S(x)=0_x$. En resumen $(M(x)=0_x) \Rightarrow (S(x)=0_x)$.
Sea $x\in M$. Por hipótesis, $x\notin KER(W)$ y en consecuencia $W(x) <_x 1_x$, luego $1_x = M(x) \sqsubseteq^{W(x)} S(x)$, por lo que $1_x \leq_x \max_x(S(x), W(x))$ y en consecuencia $S(x)=1_x$, que prueba que $(M(x)=1_x) \Rightarrow (S(x)=1_x)$ y que

concluye la igualdad $M=S$, es decir, M es maximal en el inf-semirretículo $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W, W)$.
Sea ahora un elemento cualquiera $H\in \underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x$. Demostremos que existe al menos un $M_H\in P(E)$ tal que $[SUPP(W)]^c \subseteq M_H \subseteq [KER(W)]^c$ $^{(*)}$ y $H \sqsubseteq^W M_H$ $^{(**)}$. Sea M_H tal que:
$M_H(x) = [0_x$ si $(H(x) \leq_x W(x)) \,\&\, (0_x <_x W(x))$; $M_H(x) = 1_x$ en otro caso$]$. Demostremos que M_H verifica $^{(*)}$ y $^{(**)}$.
Si $x\notin M_H$ entonces $M_H(x)=0_x$ y por tanto $0_x <_x W(x)$ y $M(x) \leq_x W(x)$. En consecuencia, por una parte $x\in SUPP(W)$ y por otra, $(M_H(x) \cdot_x W(x)) = 0_x \leq_x H(x) \leq_x W(x) = (W(x) +_x 0_x)$, luego $[SUPP(W)]^c \subseteq M_H$ y $H(x) \sqsubseteq^{W(x)} M_H(x)$. Supongamos ahora que $y\in M_H$, equivalente a $M_H(y)=1_y$. Entonces $((W(y)=0_y)$ ó $(W(y) <_y H(y))$. En el primer caso, $y\notin KER(W)$, o lo que es equivalente $y\in (KER(W))^c$. Además $(H(y) \leq_y 1_y) \Leftrightarrow (H(y) \leq_y M_H(y)) \Leftrightarrow (H(y) \sqsubseteq^{0_y} M_H(y)) \Leftrightarrow (H(y) \sqsubseteq^{W(y)} M_H(y))$.

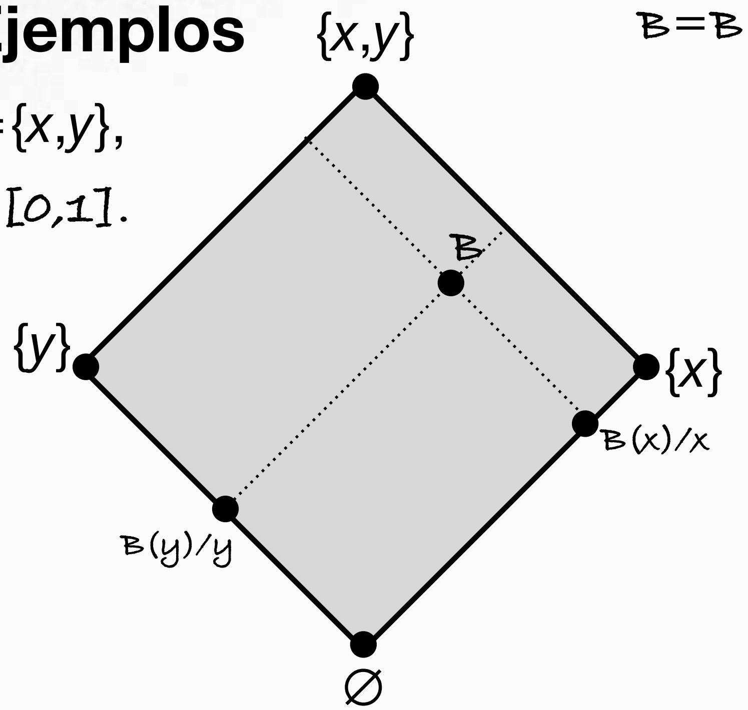
Para el segundo caso: $(W(y) <_y H(y))$, (además de $y\notin KER(H)$), se verifica
$(M_H(y) \cdot_y W(y)) = (1_y \cdot_y W(y)) = W(y) <_y H(y) \leq_y 1_y = (1_y +_y W(y)) = (M_H(y) +_y W(y))$, es decir $H(y) \sqsubseteq^{W(y)} M_H(y)$. En conclusión, M_H es tal que cumple $^{(*)}$ y $^{(**)}$ por lo que los únicos maximales de $(\underset{x\in E}{\mathsf{X}} L_x, \sqsubseteq^W)$ son los elementos M del subconjunto: $\{ M\in P(E) \,/\, [SUPP(W)]^c \subseteq M \subseteq [KER(W)]^c \}$.∎

Ejemplos

$B=B(x)/x+B(y)/y$

$E=\{x,y\}$,

$L=[0,1]$.



$([0,1]^E, \leq)$

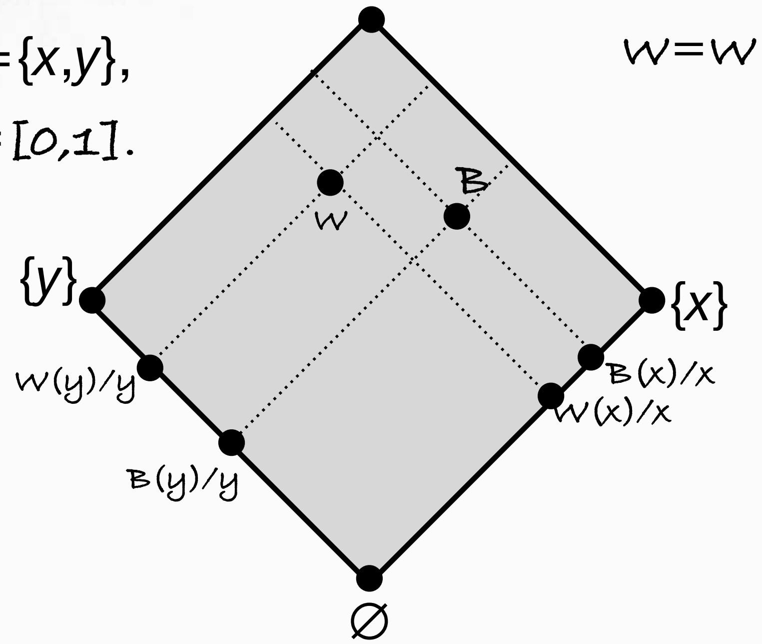
Ejemplos

$E=\{x,y\}$,

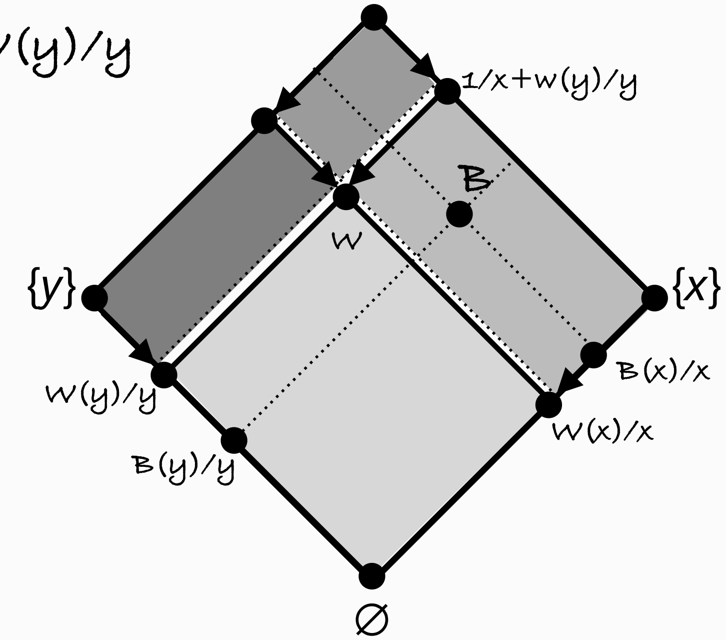
$L=[0,1]$.

$B=B(x)/x+B(y)/y$

$W=W(x)/x+W(y)/y$



($[0,1]^E$, ≤)



($[0,1]^E$, ≤)

Ejemplos

$E=\{x,y\}$,

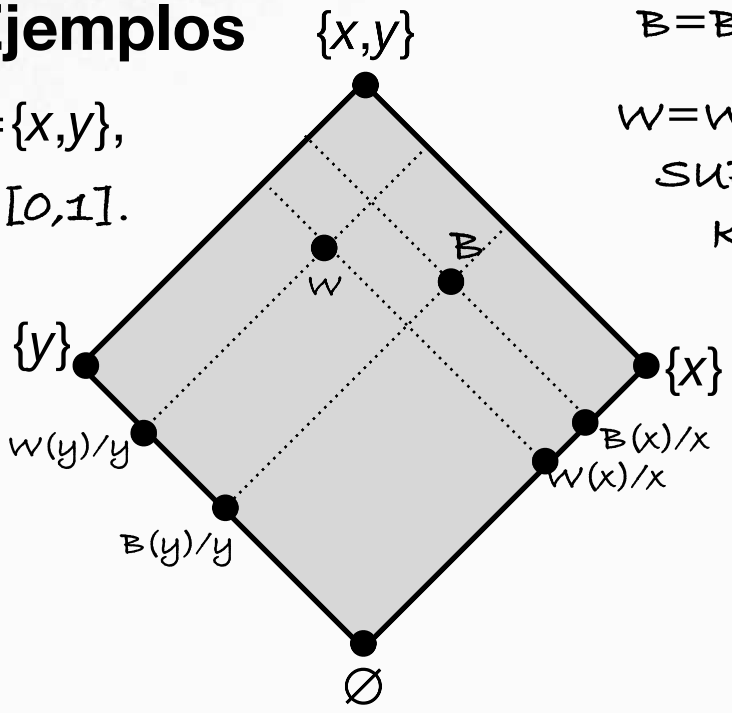
$L=[0,1]$.

$B=B(x)/x+B(y)/y$

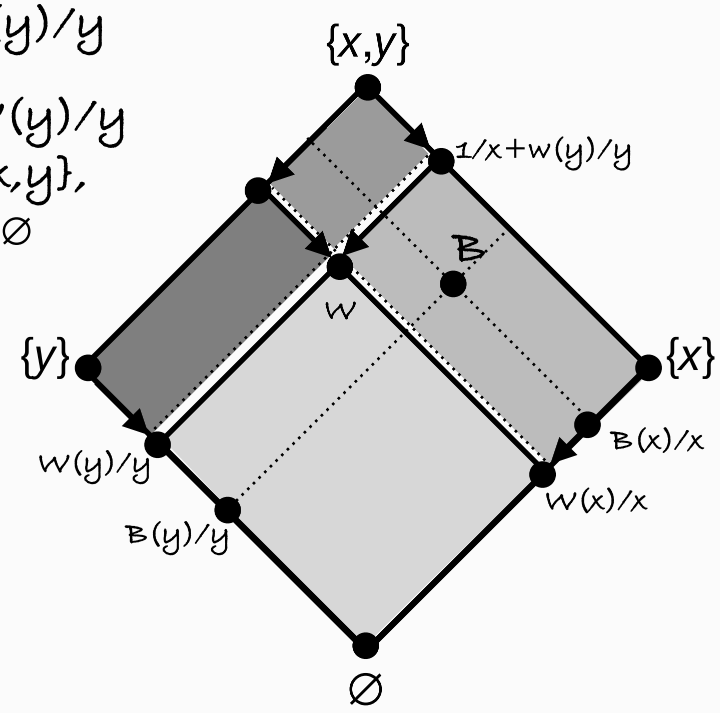
$W=W(x)/x+W(y)/y$

$SUPP(W)=\{x,y\}$,

$KER(W)=\varnothing$



$([0,1]^E, \leq)$

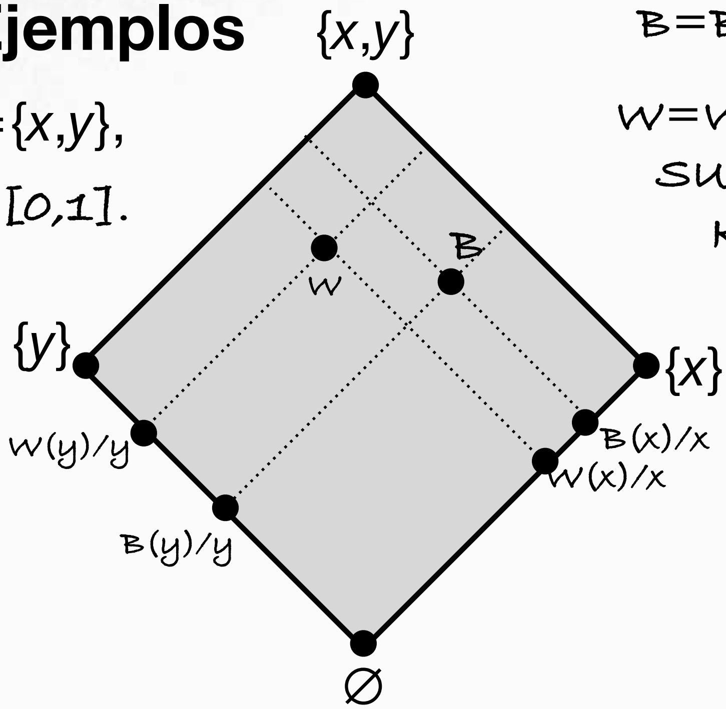


$([0,1]^E, \leq)$

Ejemplos

$E=\{x,y\}$,

$L=[0,1]$.



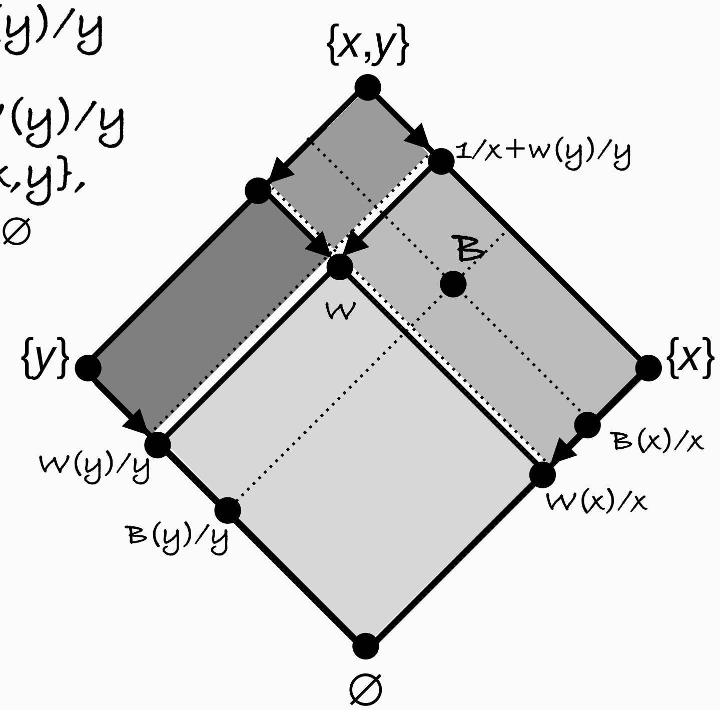
($[0,1]^E, \leq$)

$B=B(x)/x+B(y)/y$

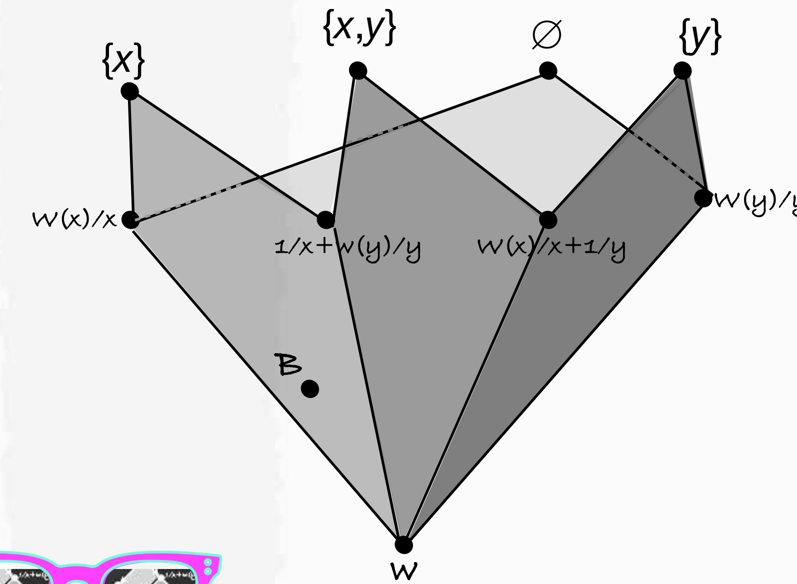
$W=W(x)/x+W(y)/y$

$SUPP(W)=\{x,y\}$,

$KER(W)=\varnothing$



($[0,1]^E, \leq$)



($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$)

Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$) $=\{ S\in P(E) \ / \ (SUPP(W))^c \subseteq S \subseteq (KER(W))^c \} = [(SUPP(W))^c, (KER(W))^c] \subseteq P(E)$.

En este caso, $(SUPP(W))^c=\varnothing$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$) $=P(E)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

Ejemplos

$E=\{x,y\}$,

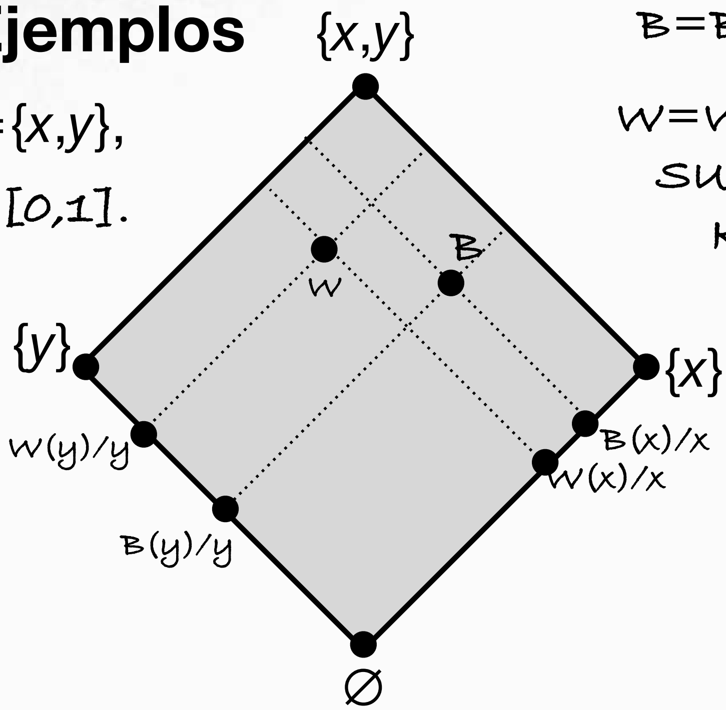
$L=[0,1]$.

$B=B(x)/x+B(y)/y$

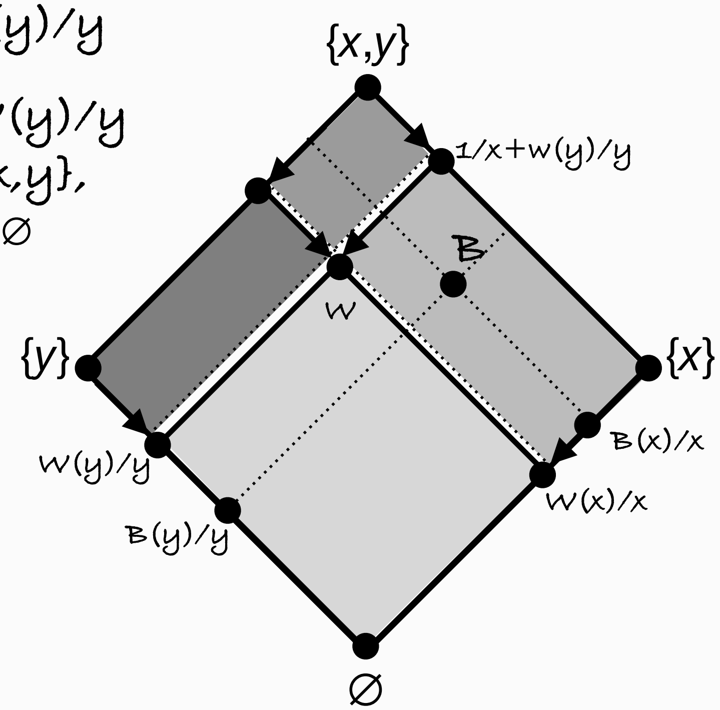
$W=W(x)/x+W(y)/y$

$SUPP(W)=\{x,y\}$,

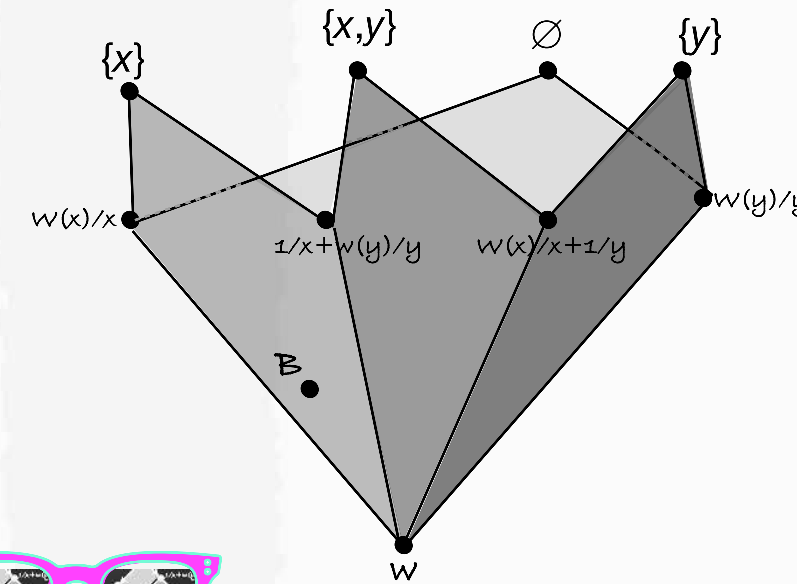
$KER(W)=\varnothing$



($[0,1]^E, \leq$)



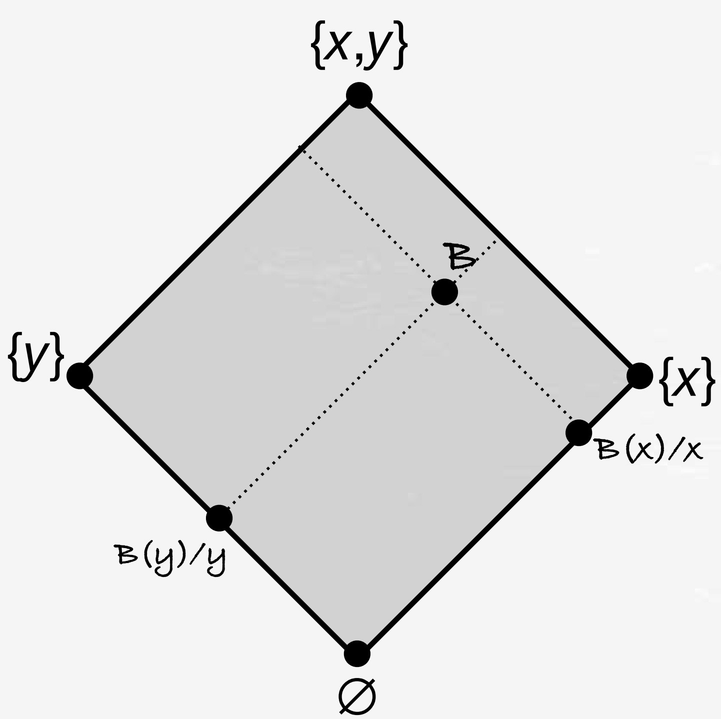
($[0,1]^E, \leq$)



($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$)

Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$) $=\{ S\in P(E) \ / \ (SUPP(W))^c \subseteq S \subseteq (KER(W))^c \} = [(SUPP(W))^c, (KER(W))^c] \subseteq P(E)$.

En este caso, $(SUPP(W))^c=\varnothing$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$) $=P(E)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

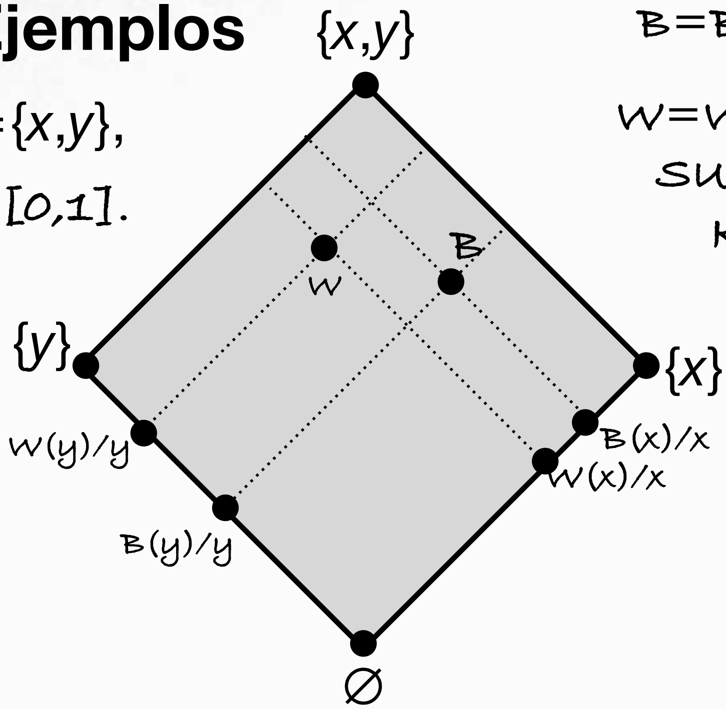


($[0,1]^E, \leq$)

Ejemplos

$E=\{x,y\}$,

$L=[0,1]$.



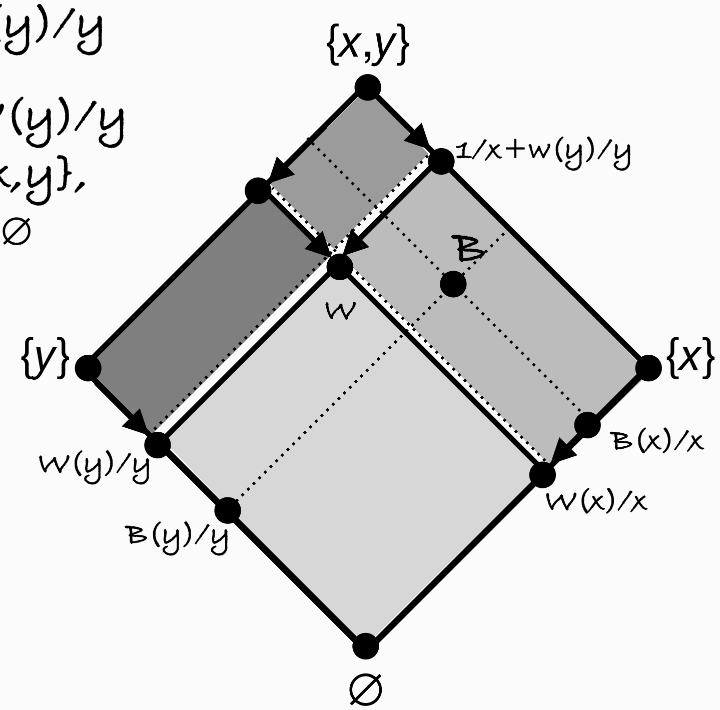
($[0,1]^E, \leq$)

$B=B(x)/x+B(y)/y$

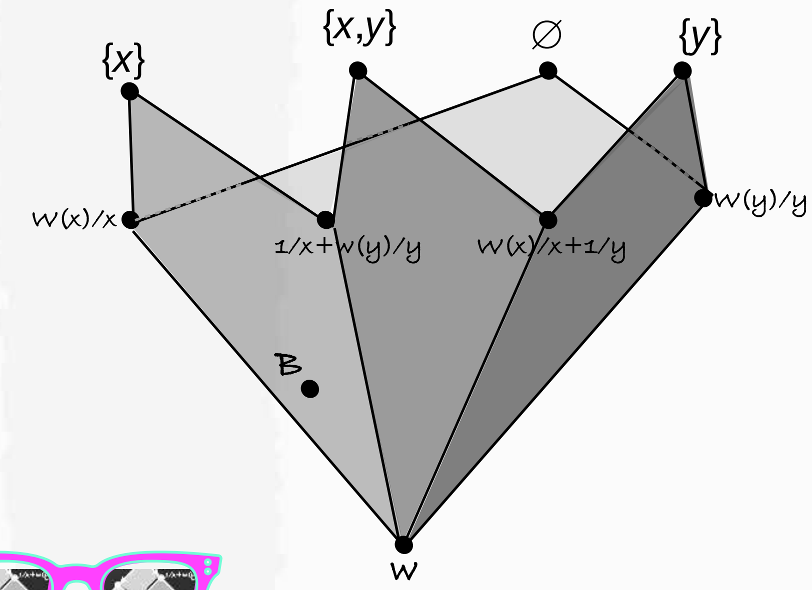
$W=W(x)/x+W(y)/y$

$SUPP(W)=\{x,y\}$,

$KER(W)=\varnothing$



($[0,1]^E, \leq$)

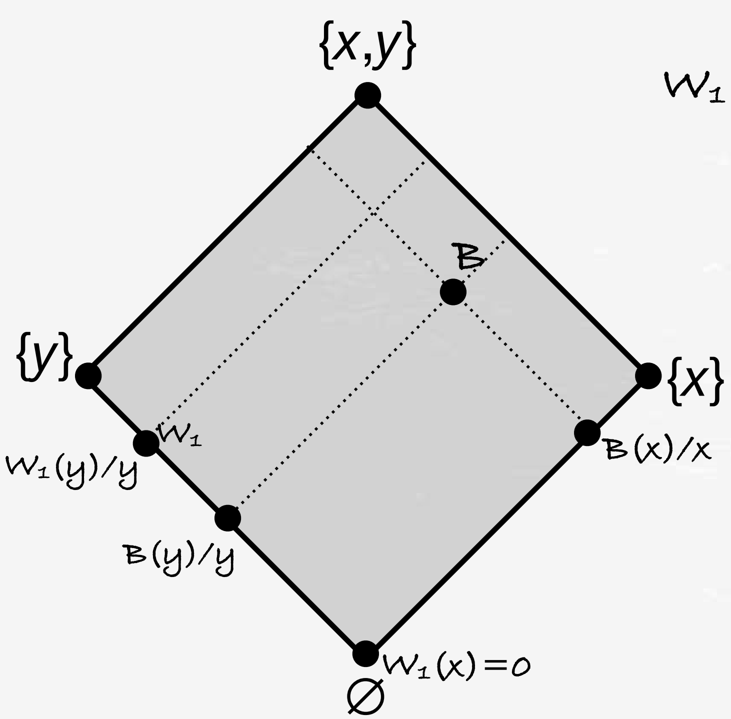


($[0,1]^E, \sqsubseteq^{w}$)

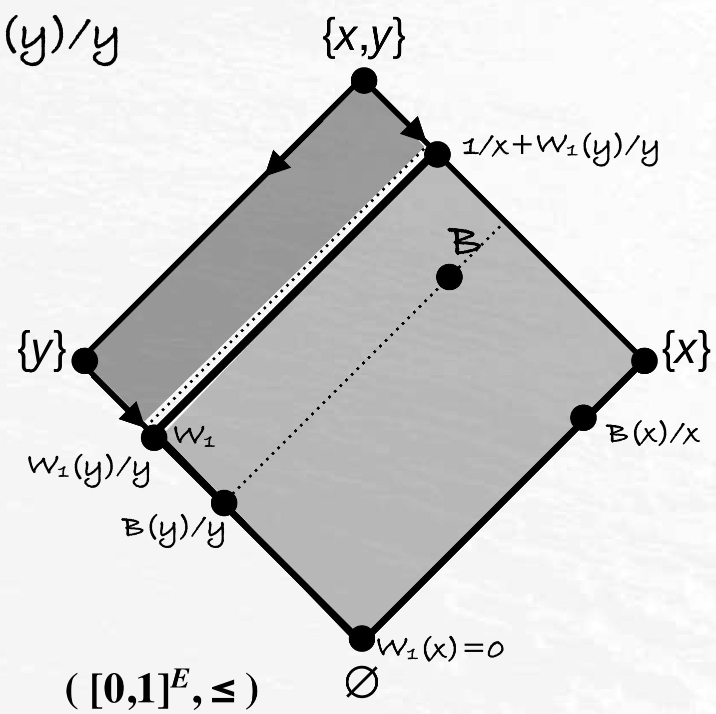
Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^{w}$) $=\{ S\in P(E) \ / \ (SUPP(W))^c \subseteq S \subseteq (KER(W))^c \} = [(SUPP(W))^c, (KER(W))^c] \subseteq P(E)$.

En este caso, $(SUPP(W))^c=\varnothing$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego Maximales($[0,1]^E, \sqsubseteq^{w}$) $=P(E)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

$W_1=0/x+W_1(y)/y$



($[0,1]^E, \leq$)

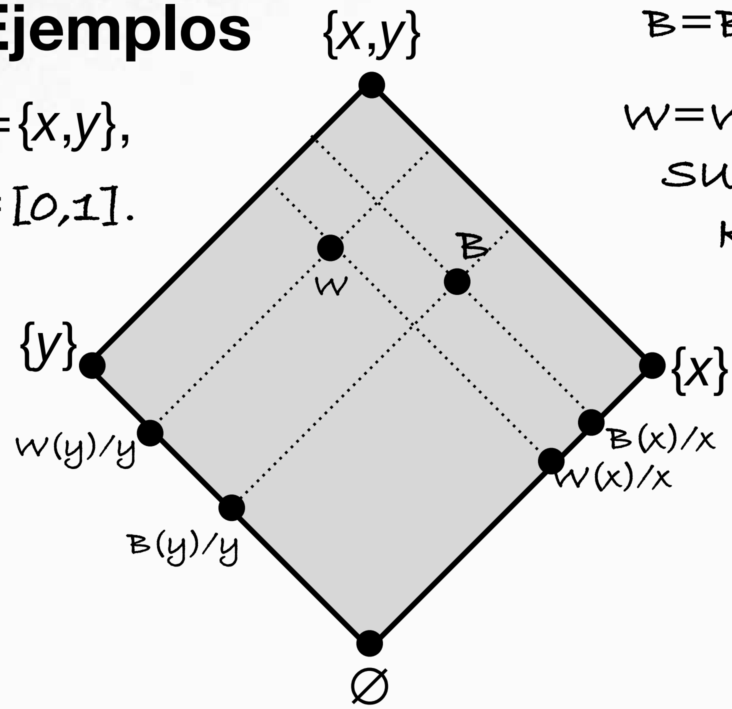


($[0,1]^E, \leq$)

Ejemplos

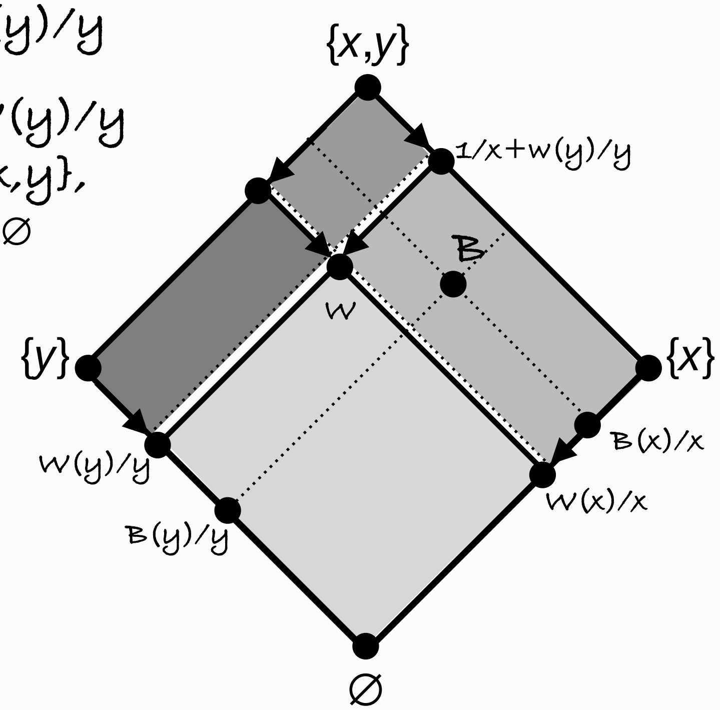
$E=\{x,y\}$,
$L=[0,1]$.

$B=B(x)/x+B(y)/y$

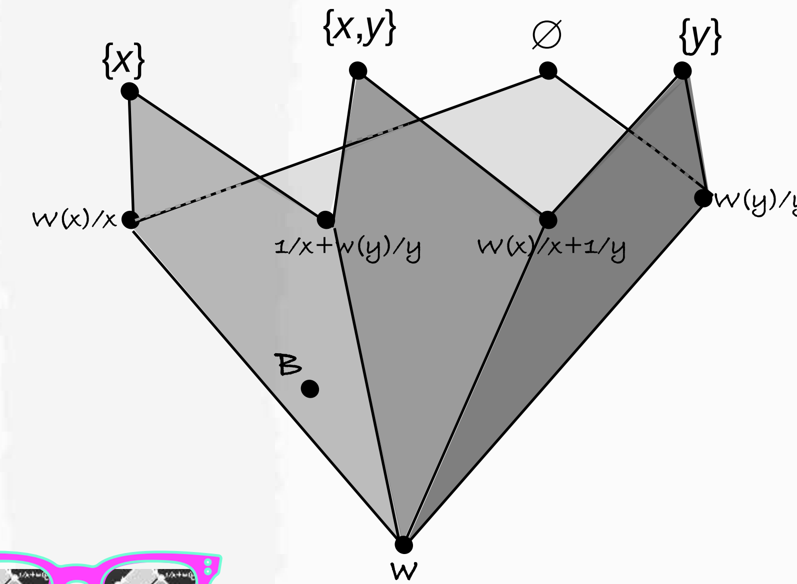


$([0,1]^E, \leq)$

$W=W(x)/x+W(y)/y$
$SUPP(W)=\{x,y\}$,
$KER(W)=\varnothing$



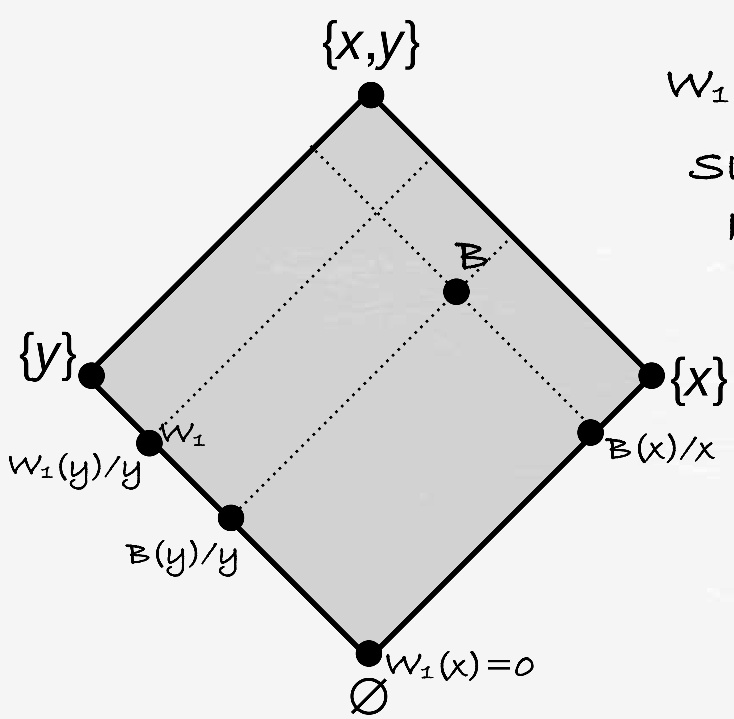
$([0,1]^E, \leq)$



$([0,1]^E, \sqsubseteq^W)$

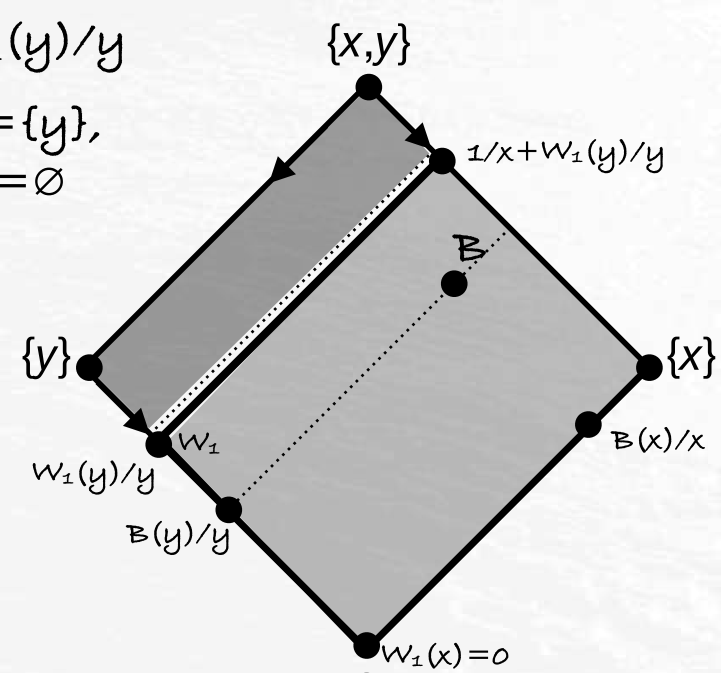
Maximales$([0,1]^E, \sqsubseteq^W)=\{ S\in P(E) \ / \ (SUPP(W))^c \subseteq S \subseteq (KER(W))^c \}=[(SUPP(W))^c, (KER(W))^c] \subseteq P(E)$.

En este caso, $(SUPP(W))^c=\varnothing$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego Maximales$([0,1]^E, \sqsubseteq^W)=P(E)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$



$([0,1]^E, \leq)$

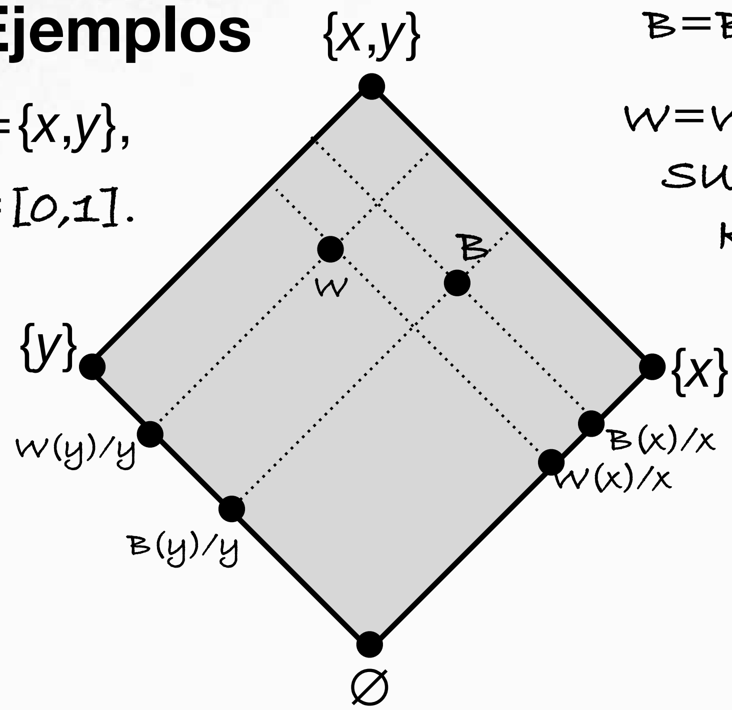
$W_1=0/x+W_1(y)/y$
$SUPP(W_1)=\{y\}$,
$KER(W_1)=\varnothing$



$([0,1]^E, \leq)$

Ejemplos

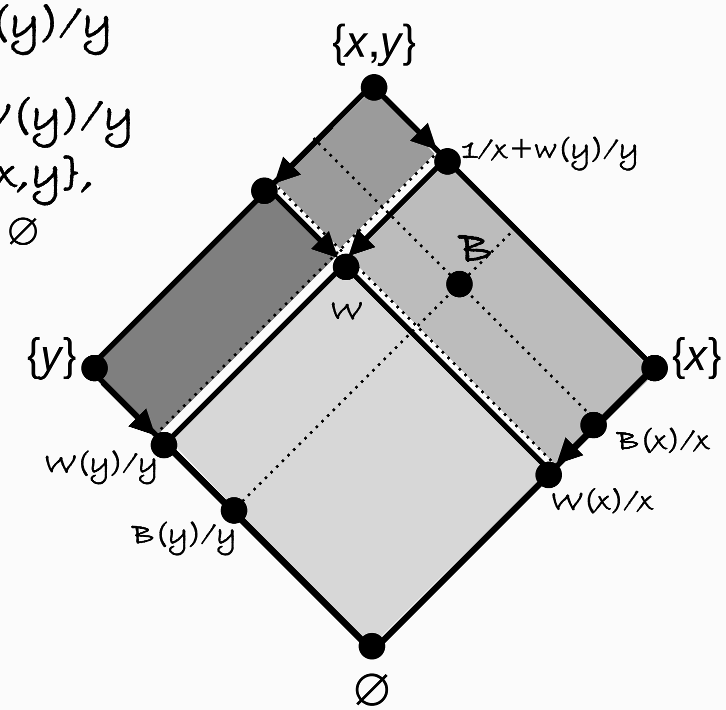
$E=\{x,y\}$,
$L=[0,1]$.



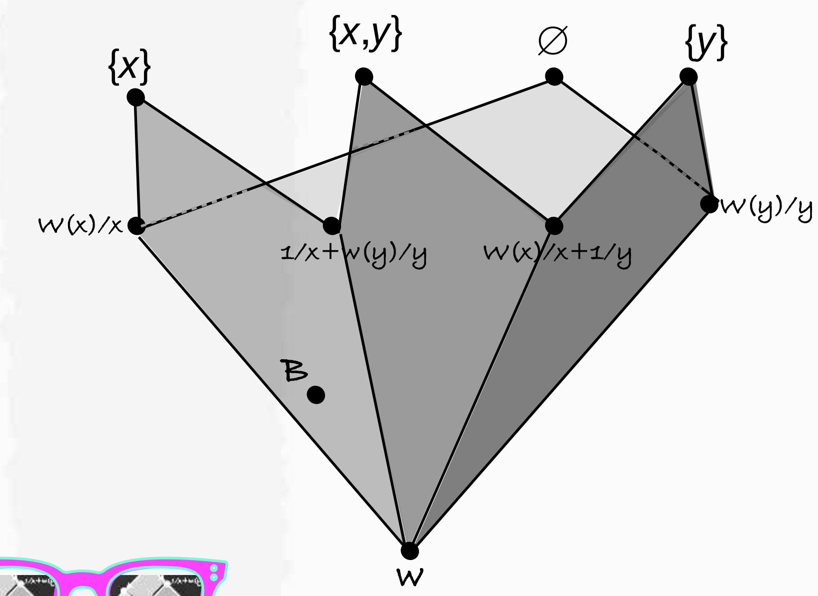
($[0,1]^E, \leq$)

$B=B(x)/x+B(y)/y$

$W=W(x)/x+W(y)/y$
$SUPP(W)=\{x,y\}$,
$KER(W)=\varnothing$



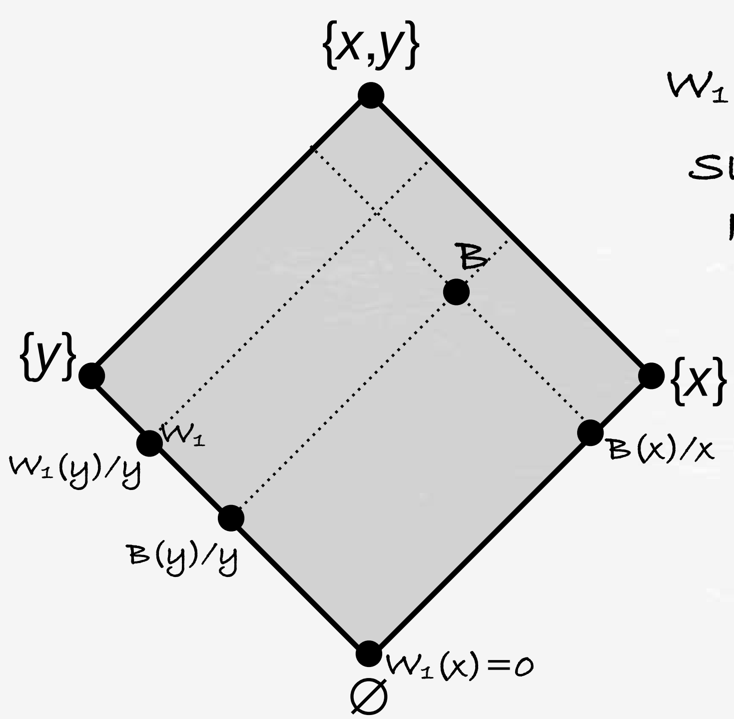
($[0,1]^E, \leq$)



($[0,1]^E, \sqsubseteq^W$)

$Maximales([0,1]^E, \sqsubseteq^W)=\{S\in P(E)\ /\ (SUPP(W))^c\subseteq S\subseteq (KER(W))^c\}=[(SUPP(W))^c, (KER(W))^c]\subseteq P(E)$.

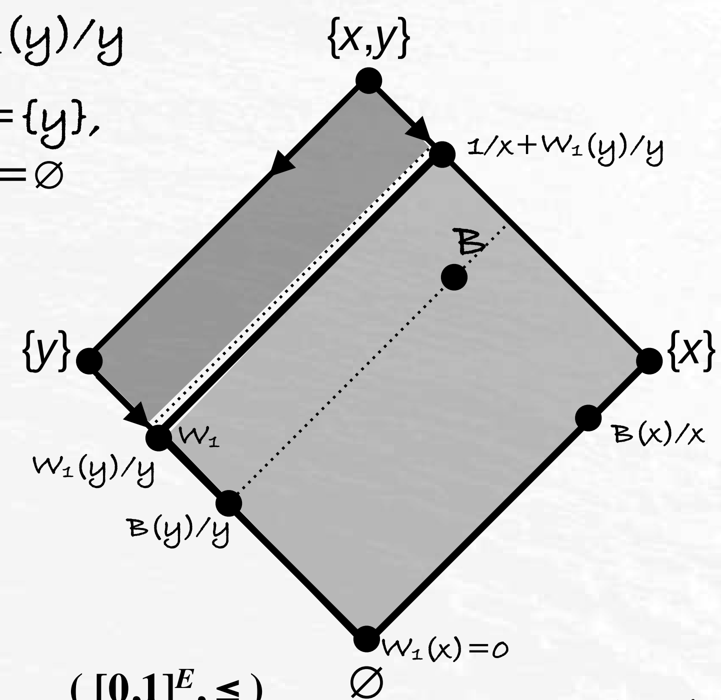
En este caso, $(SUPP(W))^c=\varnothing$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego $Maximales([0,1]^E, \sqsubseteq^W)=P(E)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$



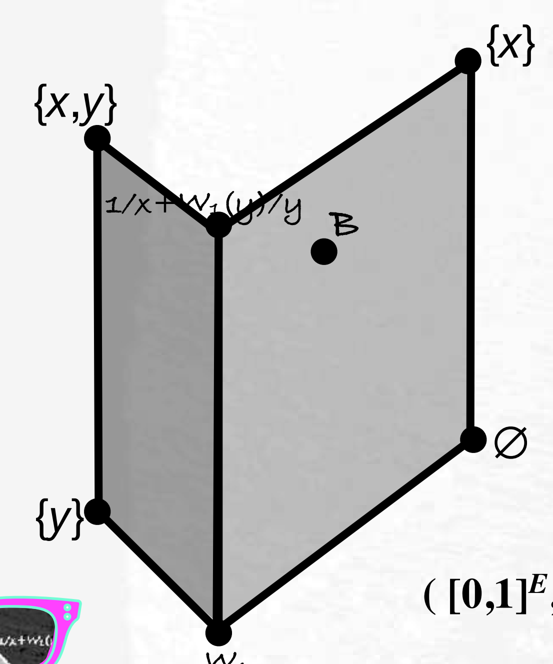
($[0,1]^E, \leq$)

$W_1=0/x+W_1(y)/y$

$SUPP(W_1)=\{y\}$,
$KER(W_1)=\varnothing$



($[0,1]^E, \leq$)



($[0,1]^E, \sqsubseteq^{W_1}$)

En este caso, $(SUPP(W_1))^c=\{x\}$ y $(KER(W))^c=\{x,y\}=E$, luego $Maximales([0,1]^E, \sqsubseteq^{W_1})=P(E)=\{\{x\},\{x,y\}\}$

Caso $\bigtimes_{x\in E} L_x = L^E$: relación de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ en L^E con las familias $(\sqsubseteq^{W_\alpha})_{\alpha\in L}$ de órdenes de actividad en $P(E)$ asociadas a los familias $(W_\alpha)_{\alpha\in L}$ de α-cortes $W_\alpha \in P(E)$ de

__Proposición__. Sea $(L,\leq, \min, \max)$ una cadena y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Si $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(W_\alpha)_{\alpha\in L}$ son las familias correspondientes de sus α-cortes, entonces:

$$(A \sqsubseteq^{W} B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \quad \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \quad \forall\alpha\in L)$$

Proposición. Sea $(L,\leq, min, max)$ una cadena y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Si $(A\alpha)_{\alpha\in L}$, $(B\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(W\alpha)_{\alpha\in L}$ son las familias correspondientes de sus α-cortes, entonces:

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L)$$

Demostración. La expresión $A \sqsubseteq^W B$ es equivalente a $(B\cdot W \leq A \leq B+W)$, y como $(B\cdot W)_\alpha = (B_\alpha \cap W_\alpha)$ para todo $\alpha\in L$, obtenemos que $(B\cdot W \leq A) \Leftrightarrow ((B\cdot W)_\alpha \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((B_\alpha \cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L)$.

Por otra parte, al ser $(L,\leq)$ una cadena(*), también se verifica que $(B+W)_\alpha = B_\alpha \cup W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L$, luego $(A \leq B+W) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B+W)_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B_\alpha \cup W_\alpha) \ \forall\alpha\in L)$. En consecuencia:

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow ((B_\alpha \cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \subseteq (B_\alpha \cup W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L). \blacksquare$$

Proposición. Sea $(L,\leq, \min, \max)$ una cadena y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Si $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(W_\alpha)_{\alpha\in L}$ son las familias correspondientes de sus α-cortes, entonces:

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L)$$

Demostración. La expresión $A \sqsubseteq^W B$ es equivalente a $(B\cdot W \leq A \leq B+W)$, y como $(B\cdot W)_\alpha = (B_\alpha \cap W_\alpha)$ para todo $\alpha\in L$, obtenemos que $(B\cdot W \leq A) \Leftrightarrow ((B\cdot W)_\alpha \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((B_\alpha\cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L)$.

Por otra parte, al ser $(L,\leq)$ una cadena(*), también se verifica que $(B+W)_\alpha = B_\alpha \cup W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L$, luego $(A \leq B+W) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B+W)_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \forall\alpha\in L)$. En consecuencia:

$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow ((B_\alpha\cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \subseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha\Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha\Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L)$.∎

(*)Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo cualquiera, (no necesariamente cadena), sólo se puede asegurar que $(B+W)_\alpha \supseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L$; aunque sí se cumple el siguiente resultado parcial:

Proposición. Sea $(L,\leq)$ un retículo distributivo y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Se verifica:

(1) Si W es nítido entonces $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^W B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha\Delta W) \subseteq (B_\alpha\Delta W) \ \ \forall\alpha\in L)$.

(2) Si B es nítido entonces $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^B W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha\Delta B) \subseteq (W_\alpha\Delta B) \ \ \forall\alpha\in L)$.

Proposición. Sea $(L,\leq, \min, \max)$ una cadena y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Si $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(W_\alpha)_{\alpha\in L}$ son las familias correspondientes de sus α-cortes, entonces:

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L)$$

Demostración. La expresión $A \sqsubseteq^W B$ es equivalente a $(B\cdot W \leq A \leq B+W)$, y como $(B\cdot W)_\alpha = (B_\alpha \cap W_\alpha)$ para todo $\alpha\in L$, obtenemos que $(B\cdot W \leq A) \Leftrightarrow ((B\cdot W)_\alpha \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((B_\alpha\cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \ \forall\alpha\in L)$.

Por otra parte, al ser $(L,\leq)$ una cadena(*), también se verifica que $(B+W)_\alpha = B_\alpha \cup W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L$, luego $(A \leq B+W) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B+W)_\alpha \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \forall\alpha\in L)$. En consecuencia:

$$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow ((B_\alpha\cap W_\alpha) \subseteq A_\alpha \subseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W_\alpha) \subseteq (B_\alpha \Delta W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L). \blacksquare$$

(*) Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo cualquiera, (no necesariamente cadena), sólo se puede asegurar que $(B+W)_\alpha \supseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \ \forall\alpha\in L$; aunque sí se cumple el siguiente resultado parcial:

Proposición. Sea $(L,\leq)$ un retículo distributivo y E un referencial. Sean $A\in L^E$, $B\in L^E$ y $W\in L^E$ subconjuntos L-borrosos de E. Se verifica:

(1) Si W es nítido entonces $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^W B_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta W) \subseteq (B_\alpha \Delta W) \ \ \forall\alpha\in L)$.

(2) Si B es nítido entonces $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^B W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta B) \subseteq (W_\alpha \Delta B) \ \ \forall\alpha\in L)$.

Demostración. (1) Para que sirva como demostración el razonamiento empleado en la proposición anterior, bastará demostrar que, en el caso en que W es nítido, se verifica $(B+W)_\alpha \subseteq (B_\alpha\cup W_\alpha) \ \forall\alpha\in L$.
Si $\alpha=0$ evidente. Si $\alpha\neq 0$: $(x\in (B+W)_\alpha) \Rightarrow ((B+W)(x)\geq\alpha) \Rightarrow ((B(x)\geq\alpha)$ ó $(W(x)=1)) \Rightarrow ((x\in B_\alpha)$ ó $(x\in W)) \Rightarrow ((x\in B_\alpha)$ ó $(x\in W_\alpha)) \Rightarrow (x\in (B_\alpha\cup W_\alpha))$.

(2) Sea B nítido. entonces, de $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^B W)$ y del apartado anterior, se deduce que
$(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A_\alpha \sqsubseteq^B W_\alpha \ \ \forall\alpha\in L) \Leftrightarrow ((A_\alpha \Delta B) \subseteq (W_\alpha \Delta B) \ \ \forall\alpha\in L). \blacksquare$

Un ejemplo que ilustra la caracterización en (L^E, ≤) de la relación $A \sqsubseteq^W D$ mediante las correspondientes familias de α-cortes: $(W_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(D_\alpha)_{\alpha \in L}$ y la de órdenes de actividad $(\sqsubseteq^{W_\alpha})_{\alpha \in L}$

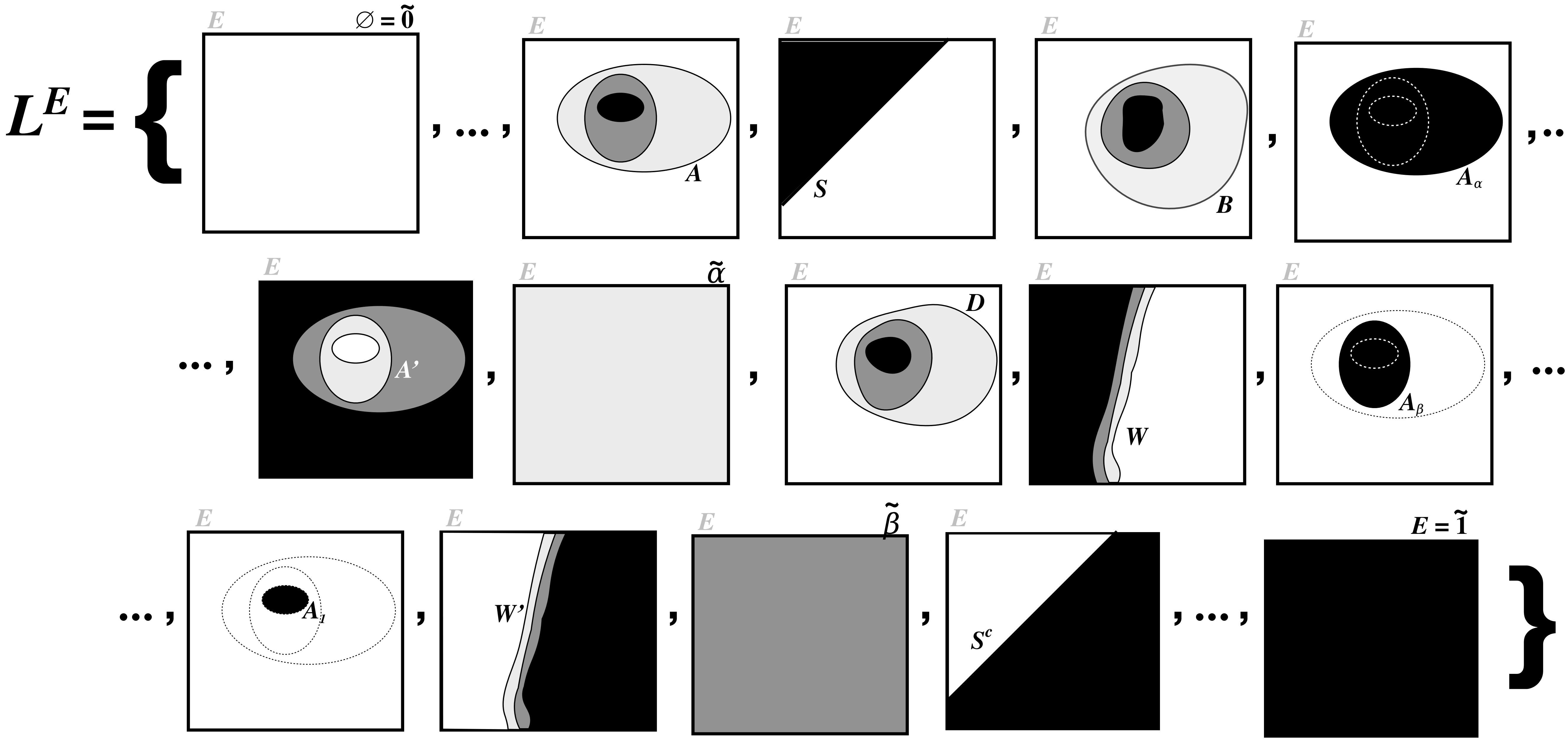
$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ cadena $0 < \alpha < \beta < 1$ de escala de grises 

E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ cadena $0 < \alpha < \beta < 1$ de escala de grises 

E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

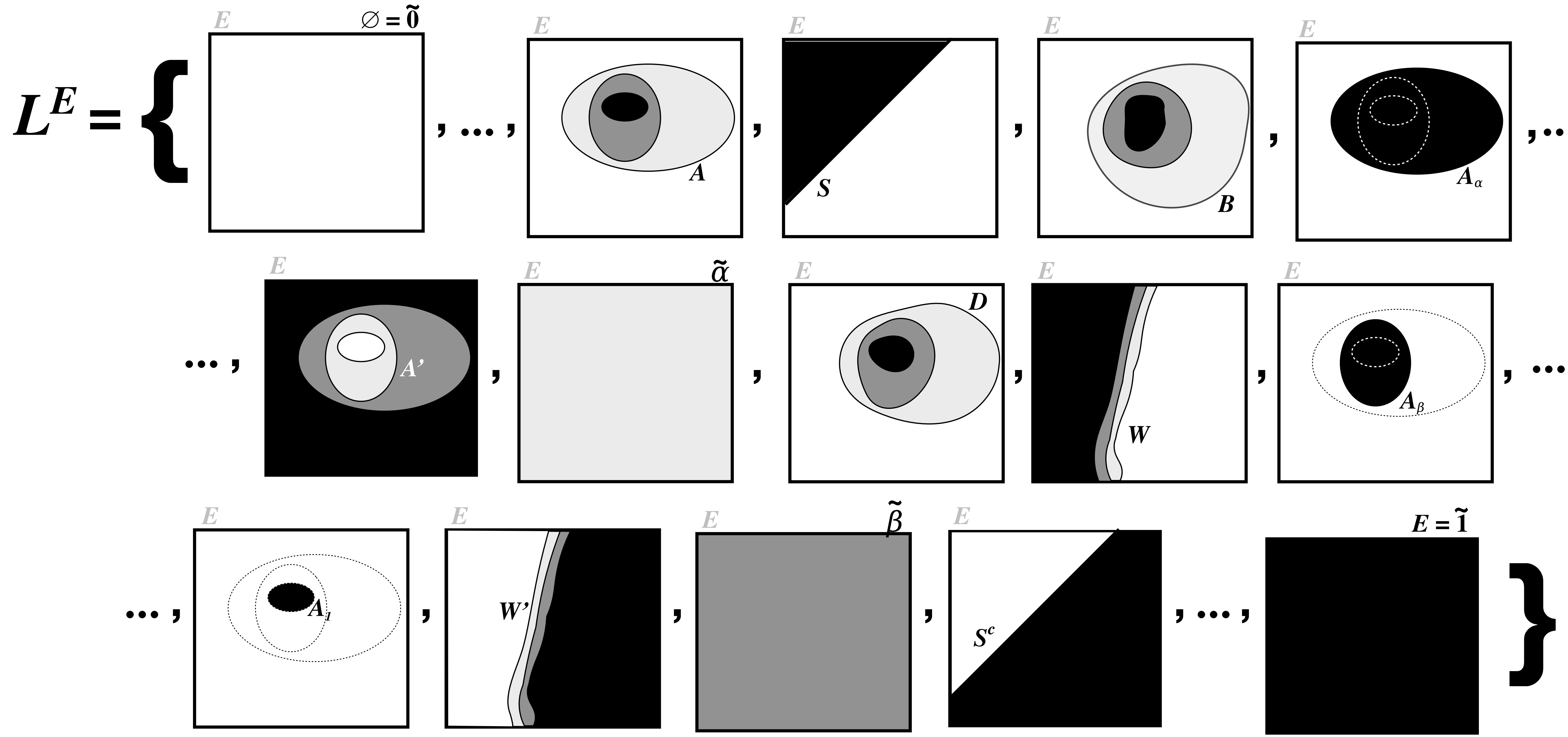
L^E el subconjunto de sus imágenes en tonos de grises A: $E \rightarrow L$. (Incluidas las binarias).



$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ cadena $0 < \alpha < \beta < 1$ de escala de grises

E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

L^E el subconjunto de sus imágenes en tonos de grises $A: E \to L$. (Incluidas las binarias).



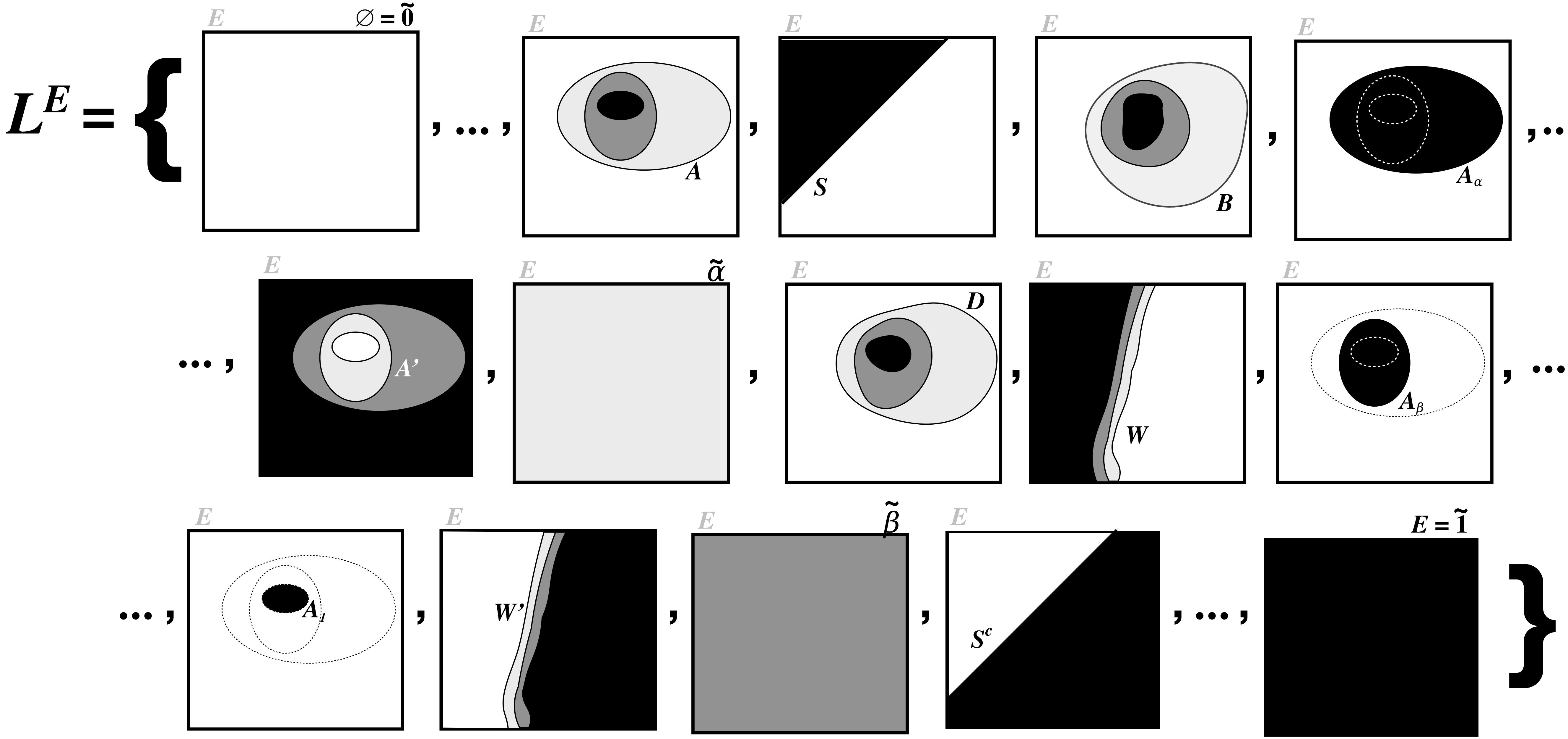
$((L^E \le, \cdot, +, \varnothing, E),')$ el retículo distributivo acotado de esas imágenes con la "inclusión":

$$(A \le B) \Leftrightarrow (A(x) \le B(x) \quad \forall x \in E)$$

$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ cadena $0 < \alpha < \beta < 1$ de escala de grises

E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

L^E el subconjunto de sus imágenes en tonos de grises A: $E \to L$. (Incluidas las binarias).

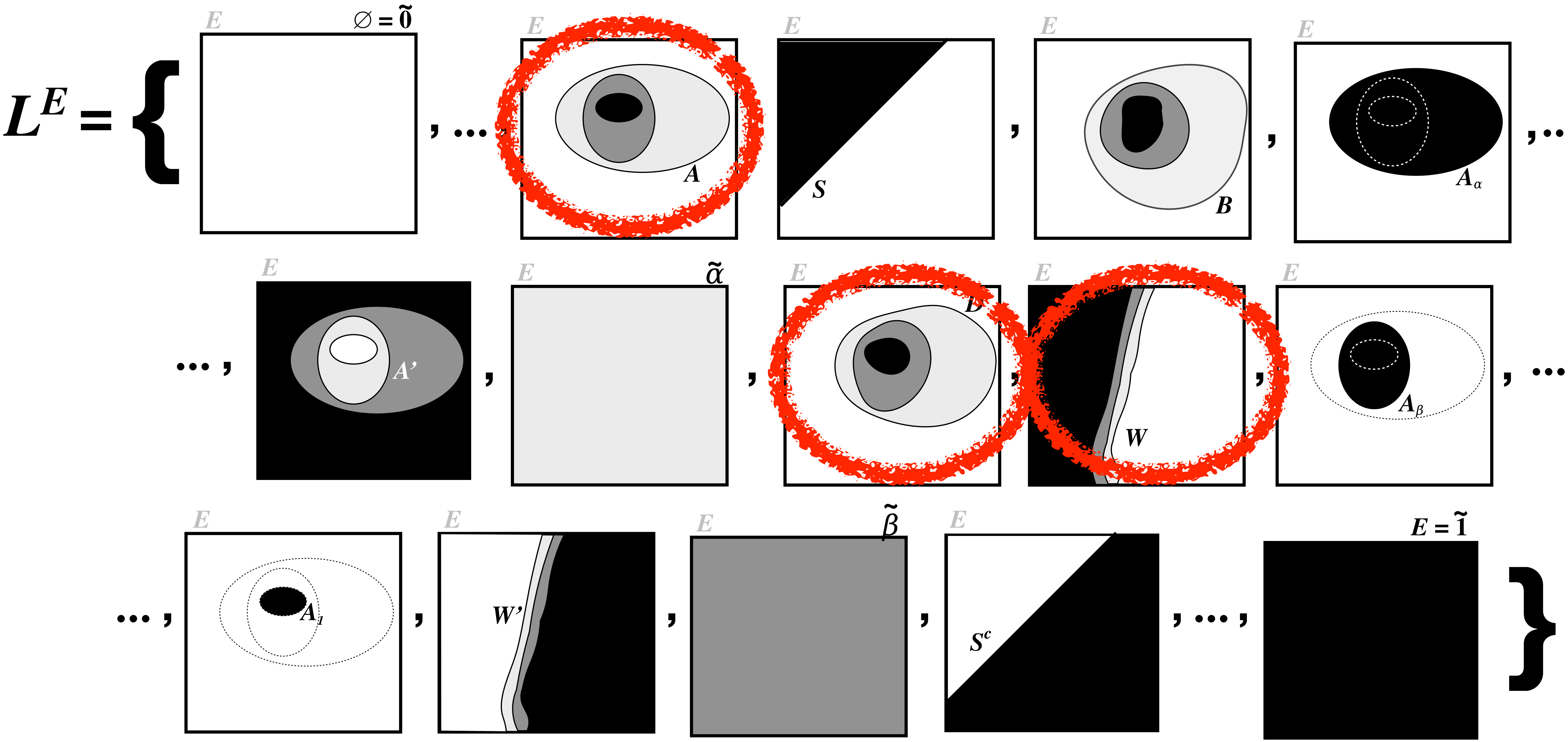


$(L^E \leq, \cdot, +, \varnothing, E),')$ el retículo distributivo acotado de esas imágenes con la "inclusión":

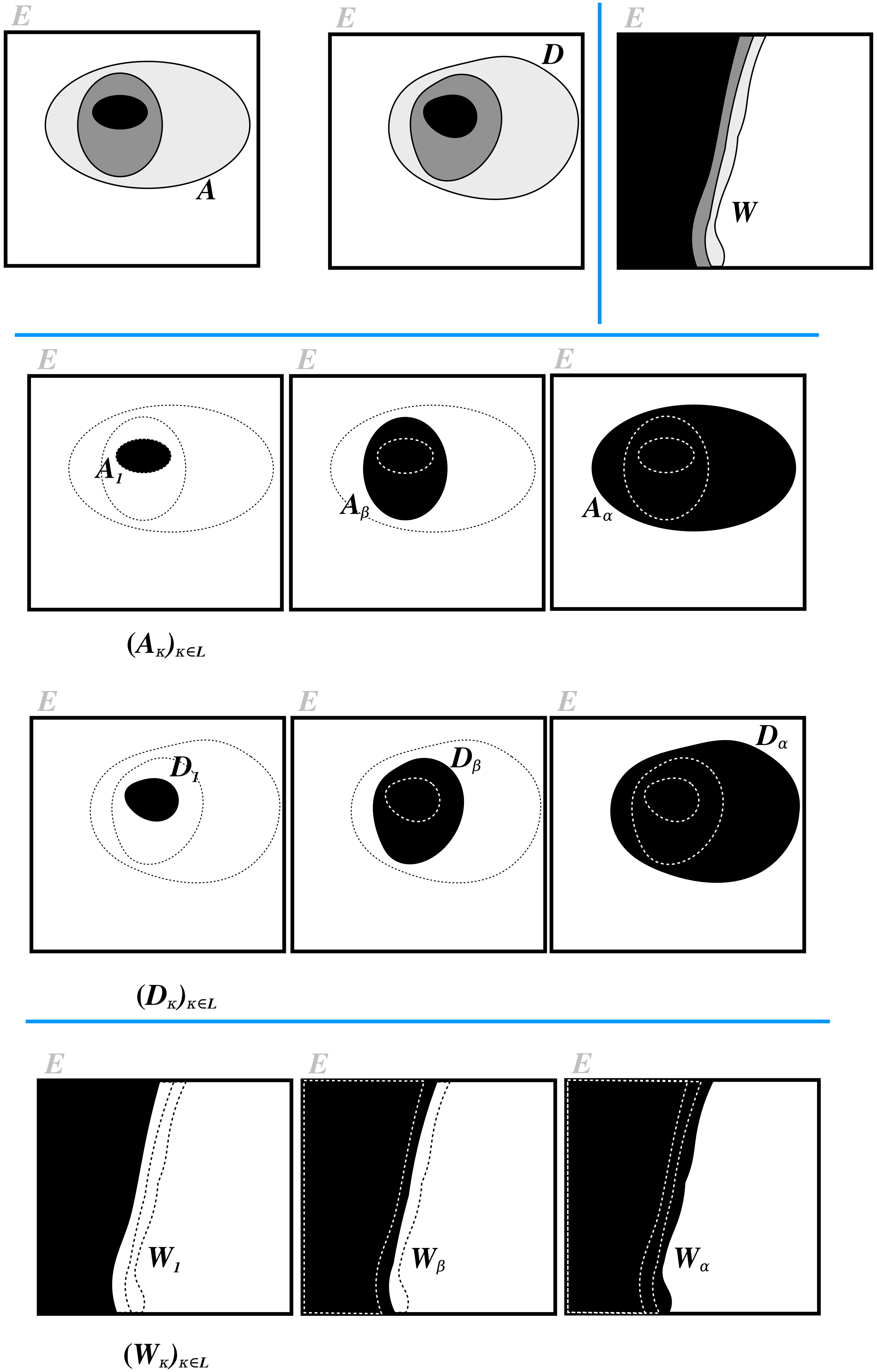
$$(A \leq B) \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x) \quad \forall x \in E)$$

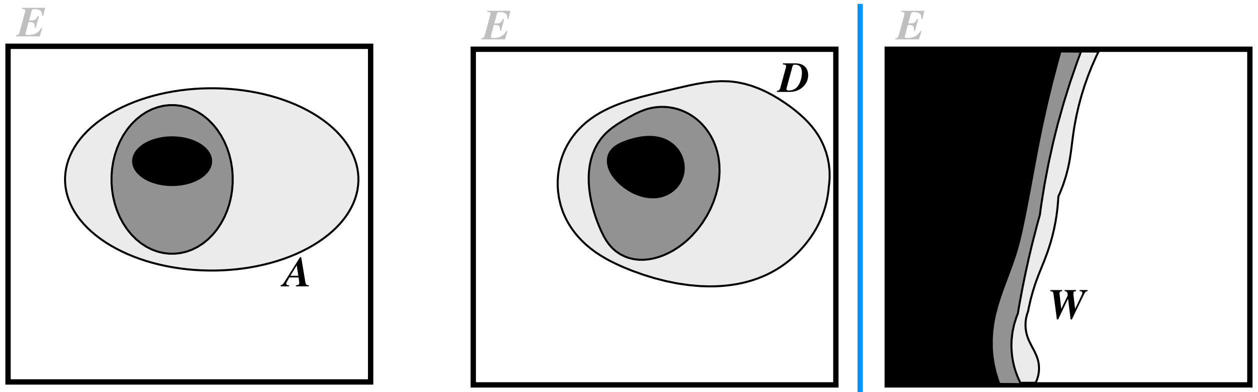
Si $\kappa \in L$, A_κ representa el κ-corte, (imagen binaria), asociada a $A \in L^E$: $A_\kappa = \{x \in E \,/\, A(x) \geq \kappa\}$;

y $\tilde{\kappa} \in L^E$ representa la imagen "constante" tal que $\tilde{\kappa}(x) = \kappa \;\; \forall x \in E$.

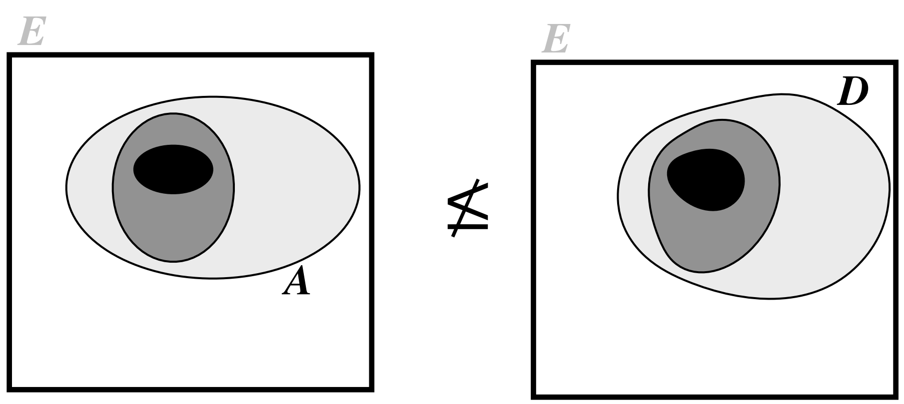


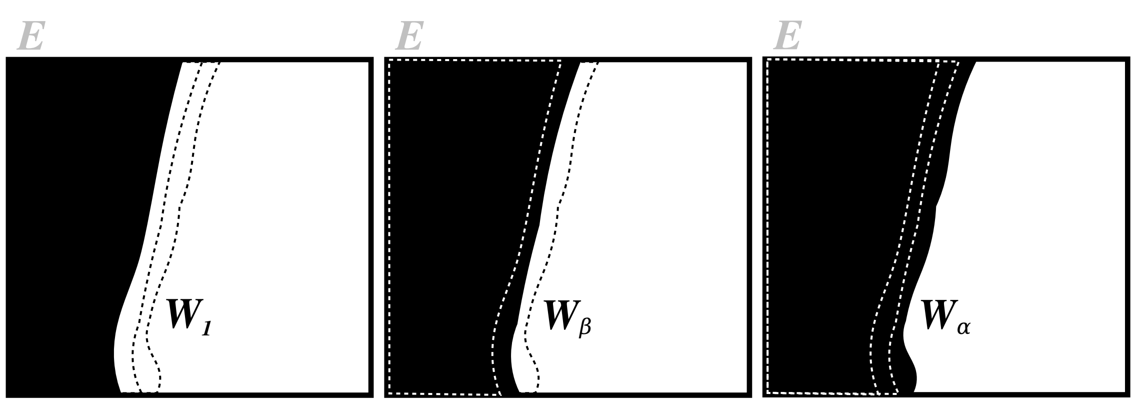
$L^E = \{$
E
$\varnothing = \tilde{0}$
A
S
B
A_α
A'
$\tilde{\alpha}$
D
W
A_β
A_1
W'
$\tilde{\beta}$
S^c
$E = \tilde{1}$
$\}$


E
A
E
D
E
W
E
A_1
E
A_β
E
A_α
$(A_\kappa)_{\kappa\in L}$
E
D_1
E
D_β
E
D_α
$(D_\kappa)_{\kappa\in L}$
E
W_1
E
W_β
E
W_α
$(W_\kappa)_{\kappa\in L}$

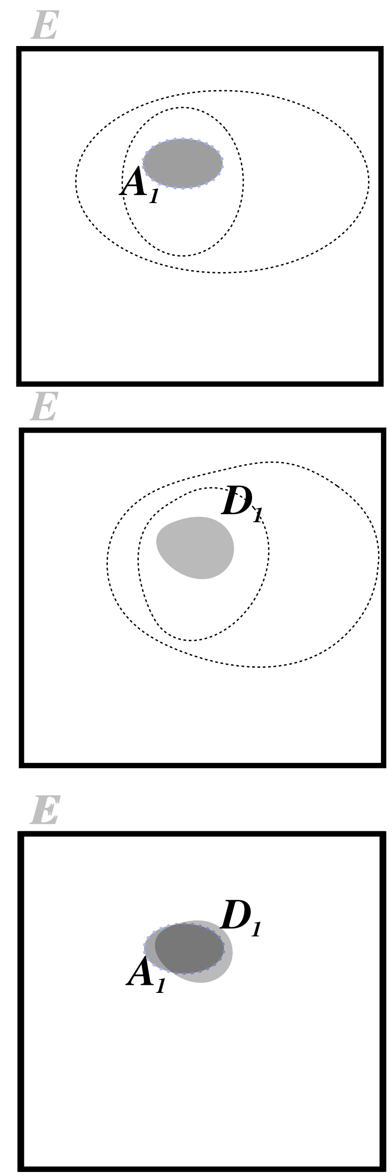


luego $(A \not\leq D)$



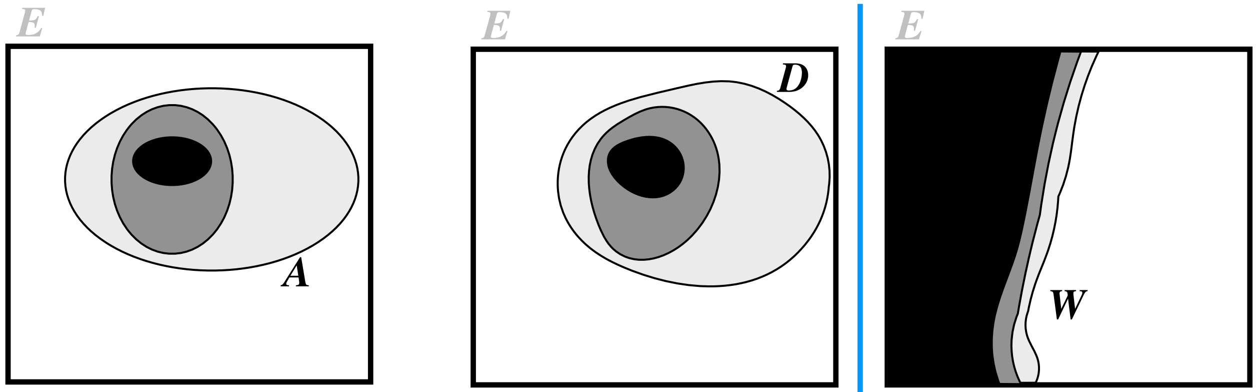


$(W_{\kappa})_{\kappa \in L}$

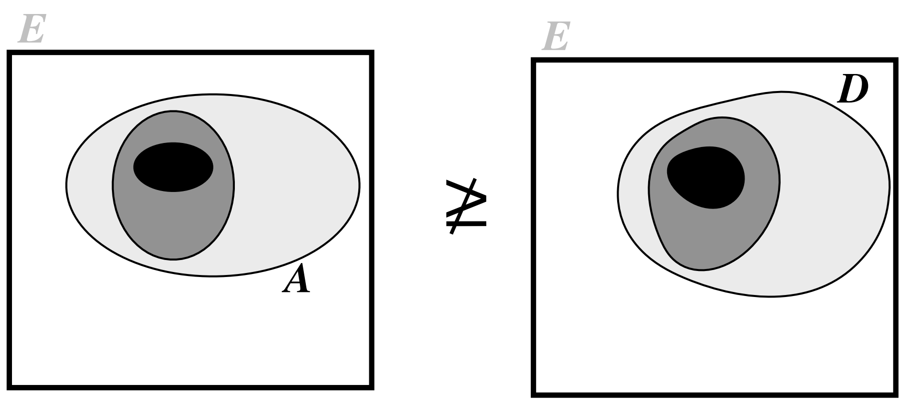


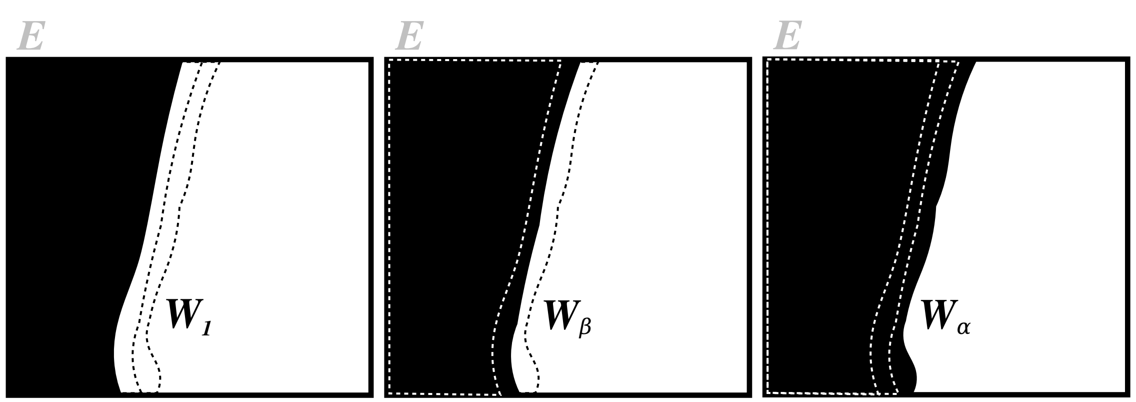
Se verifica:

$(A_1 \not\subseteq D_1)$

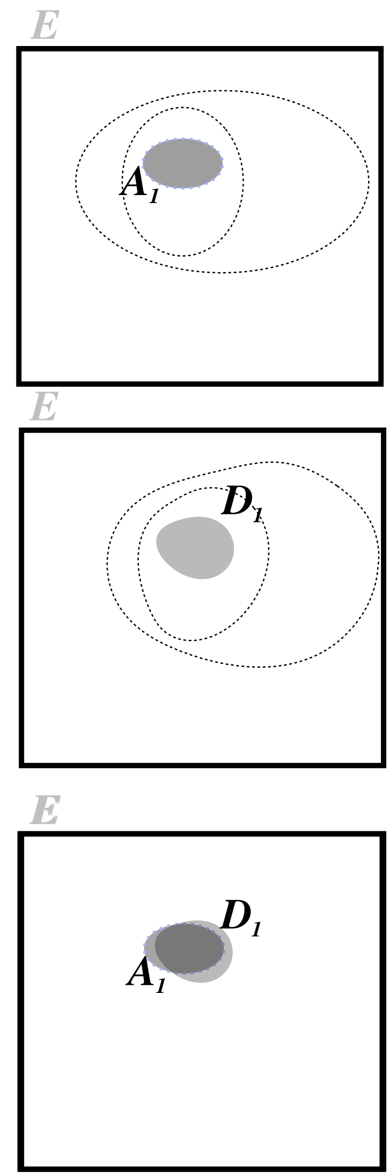


luego $(A \not\leq D)$ & $(A \not\geq D)$



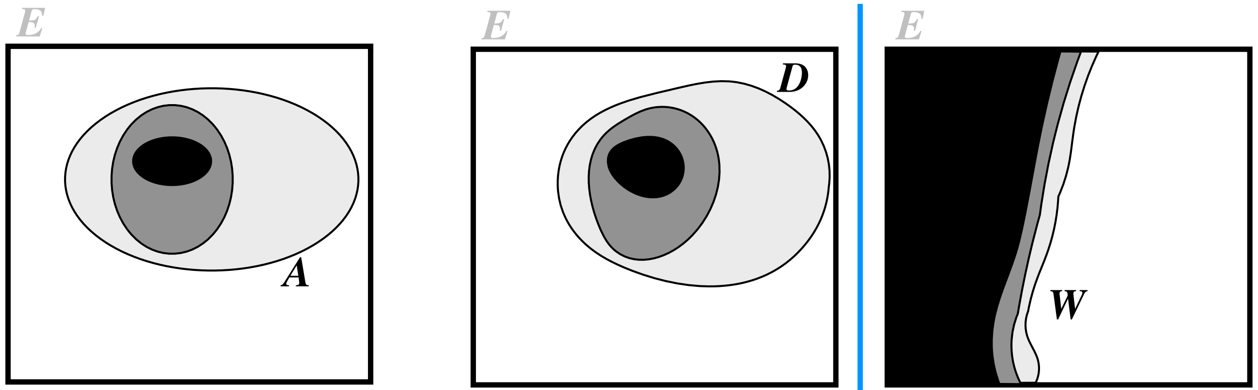


$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$

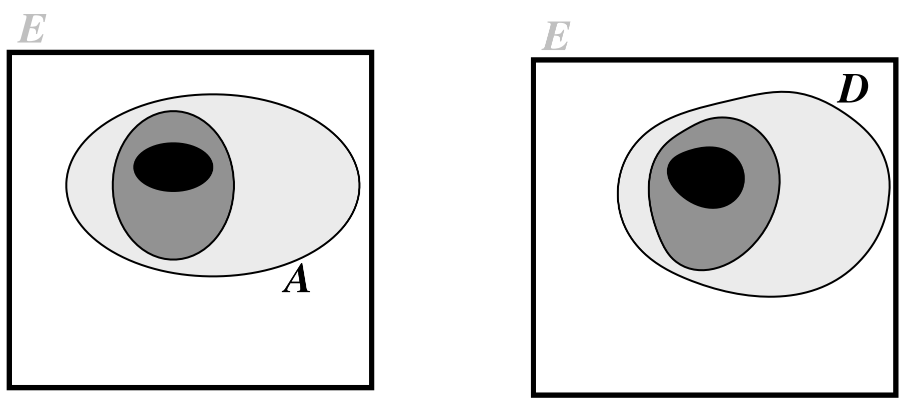


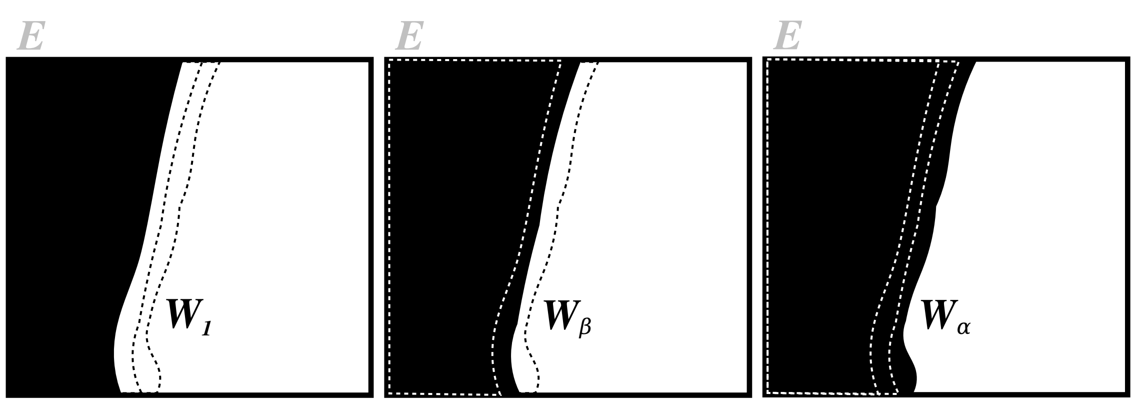
Se verifica:

$$(A_1 \not\subseteq D_1) \,\&\, (D_1 \not\subseteq A_1)$$

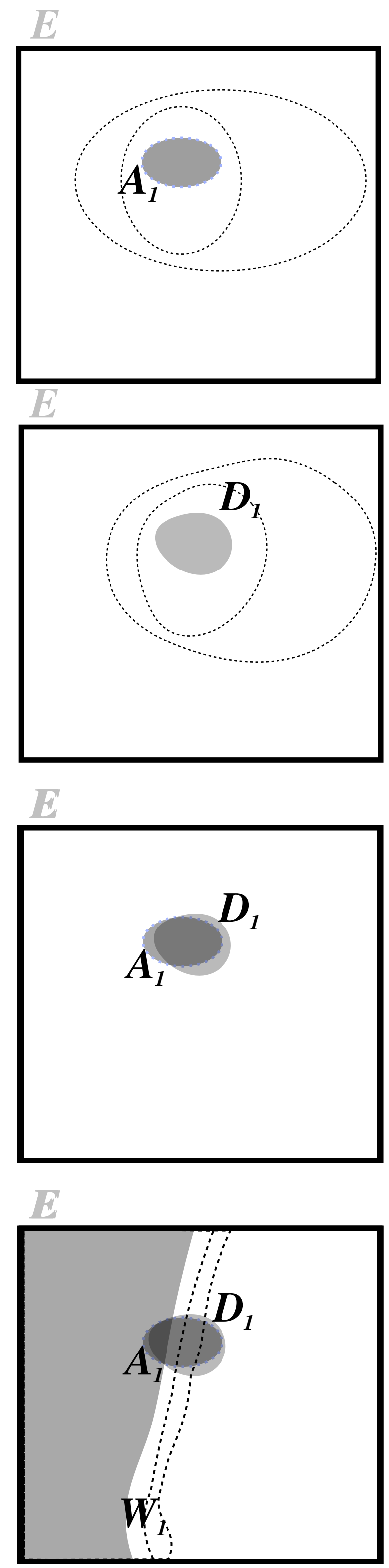


luego $(A \nleq D)$ & $(A \ngeq D)$



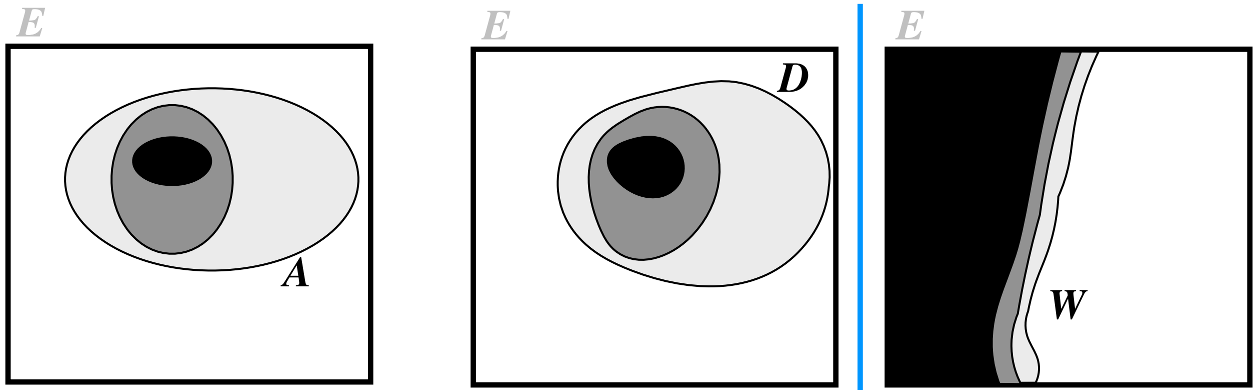


$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$

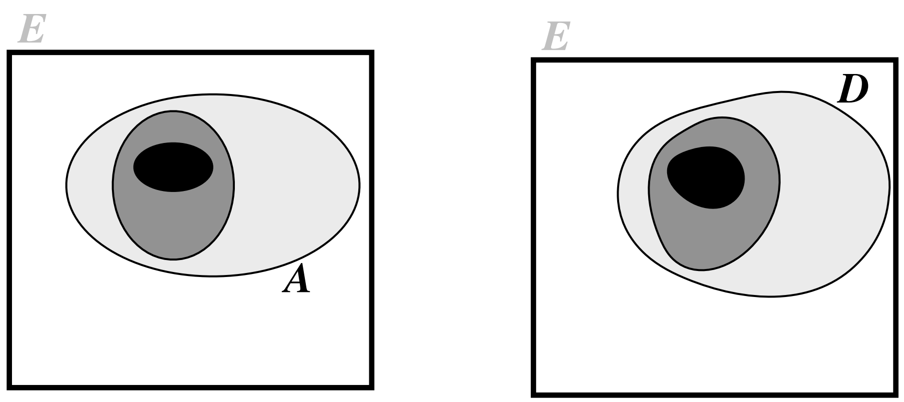


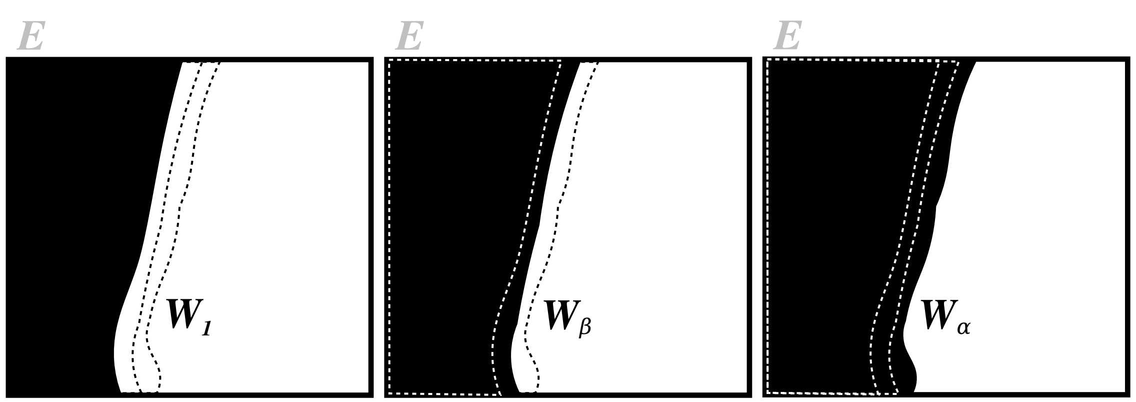
Se verifica:

$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$ $\qquad$ $(A_1 \nsubseteq D_1)$ & $(D_1 \nsubseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

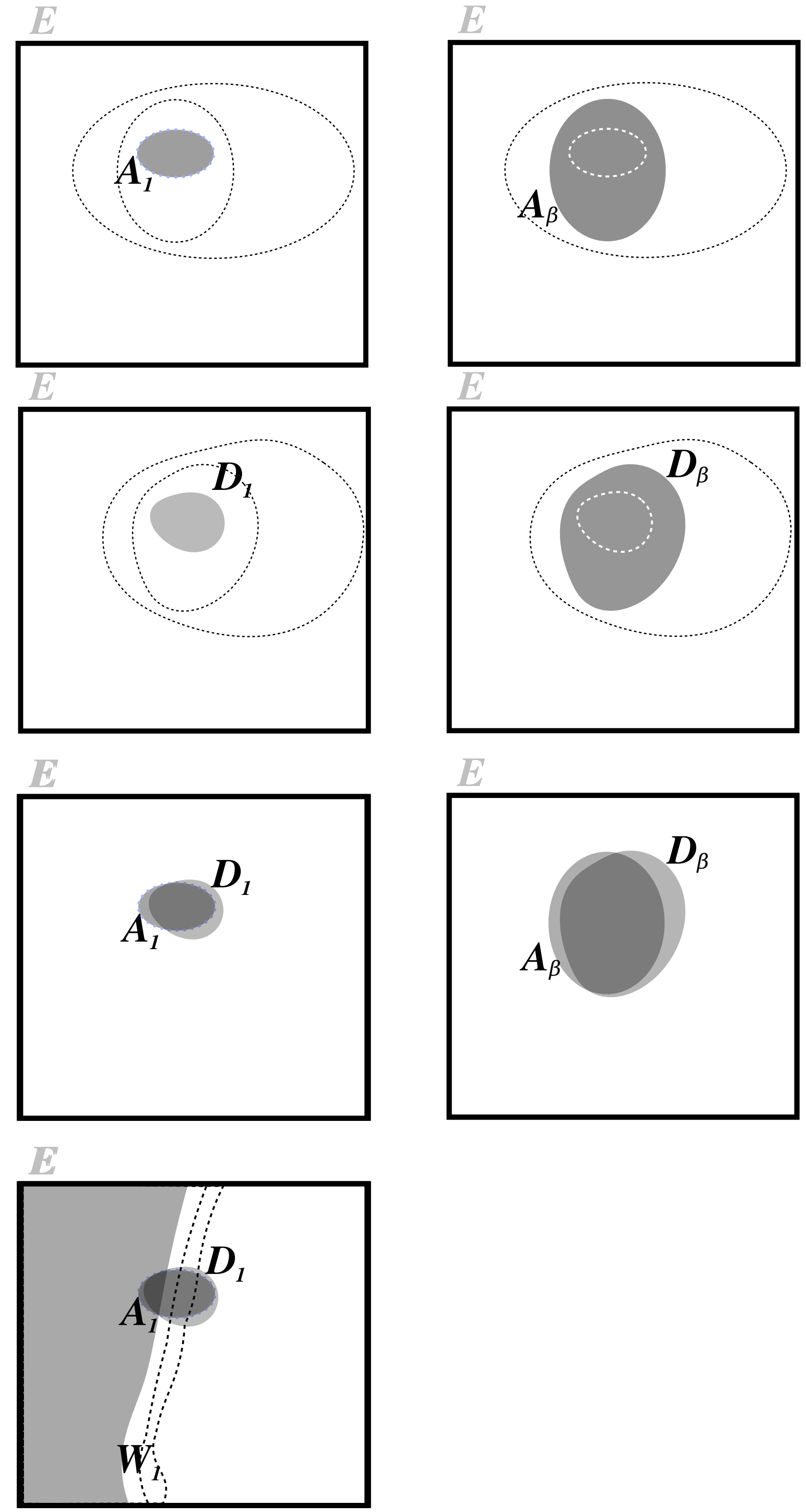


luego $(A \not\leq D)$ & $(A \not\geq D)$





$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$

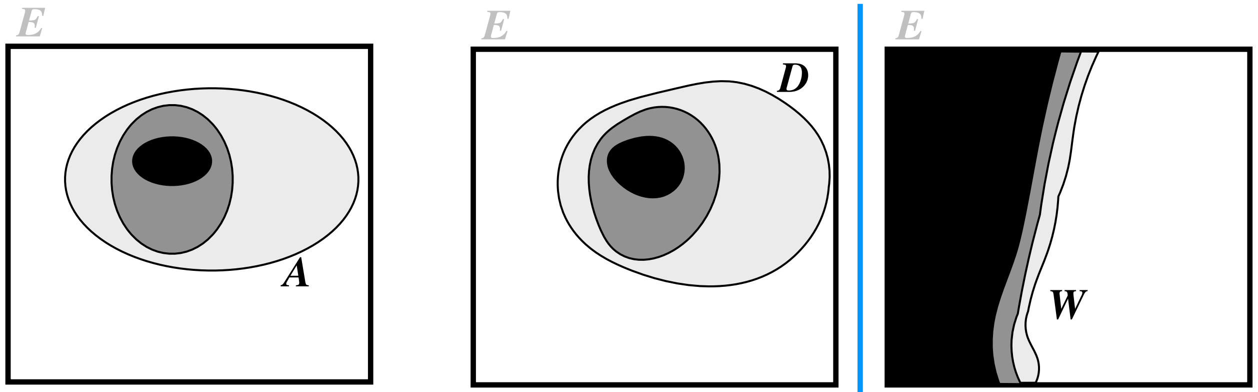


Se verifica:

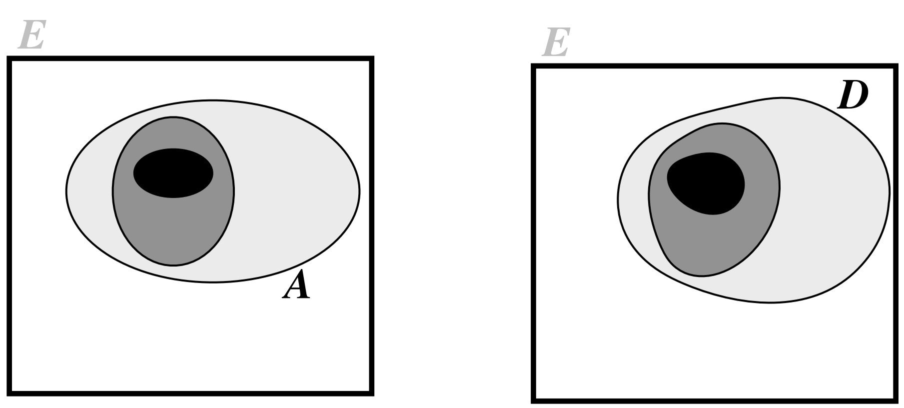
$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$

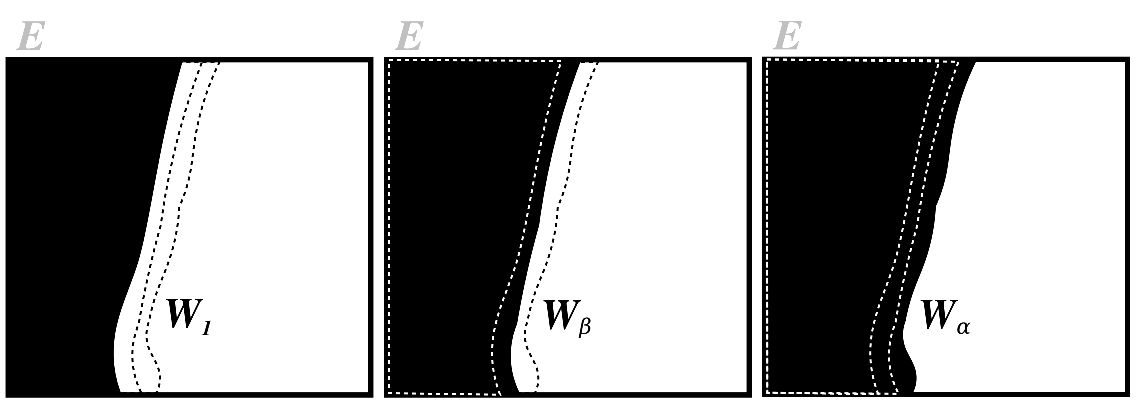
$(A_1 \nsubseteq D_1)$ & $(D_1 \nsubseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

$(A_\beta \nsubseteq D_\beta)$ & $(D_\beta \nsubseteq A_\beta)$

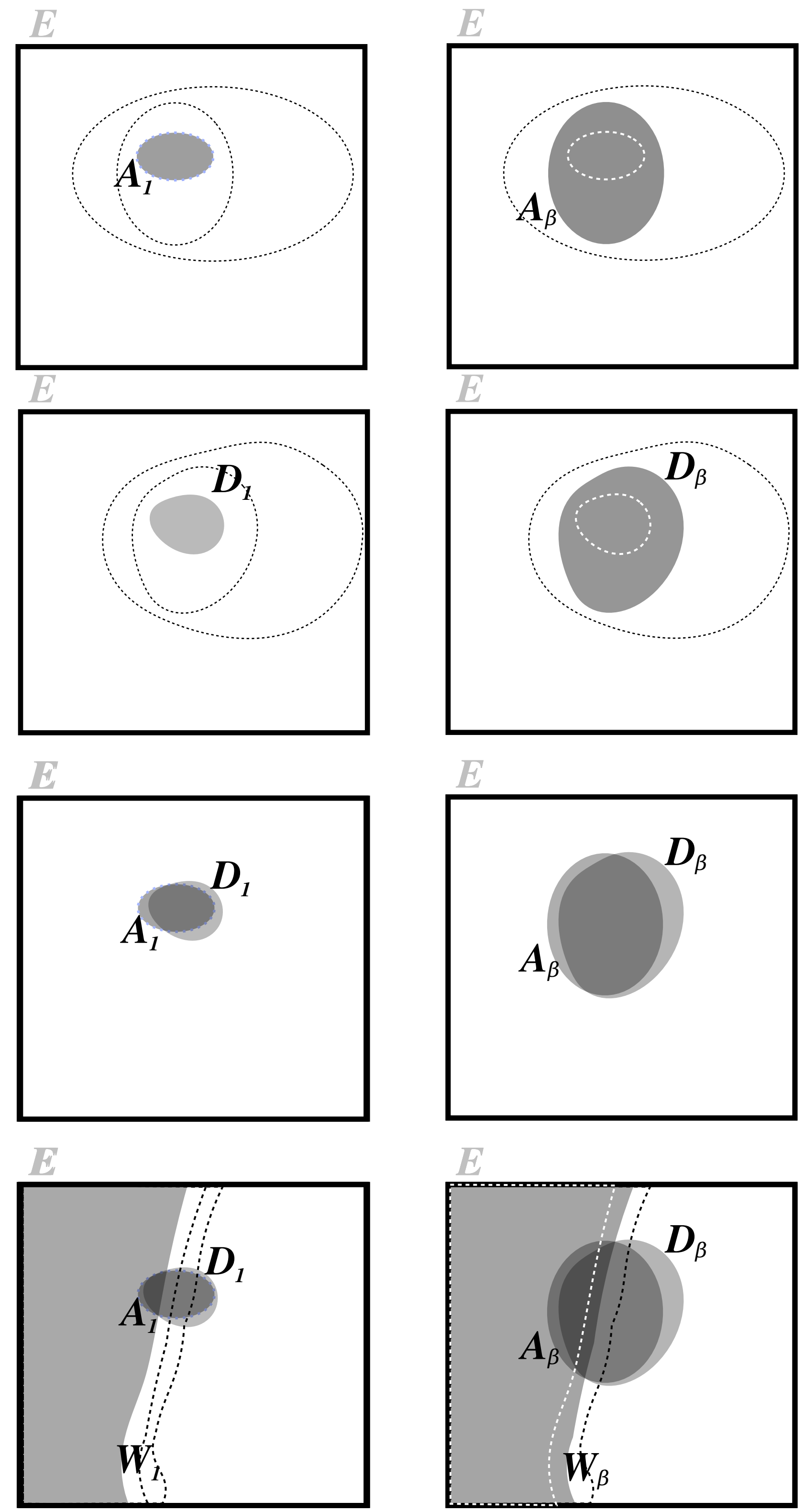


luego $(A \not\leq D)$ & $(A \not\geq D)$





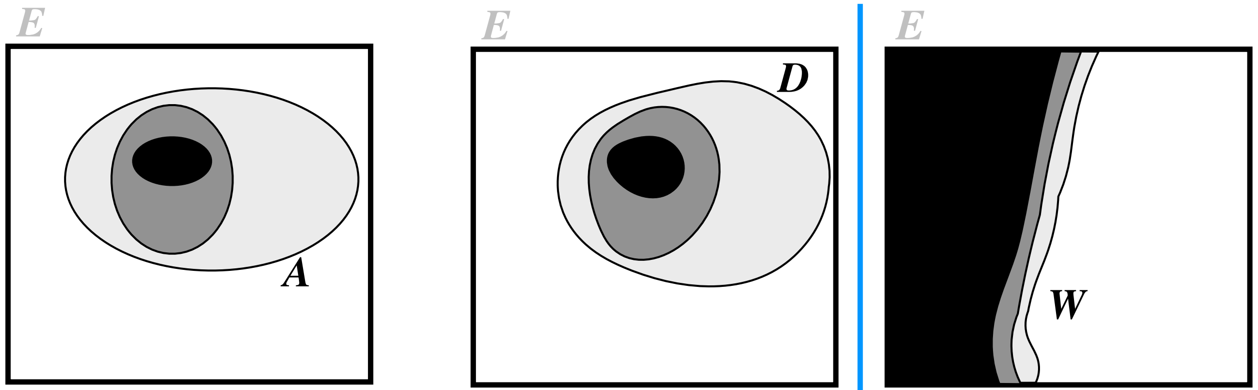
$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$



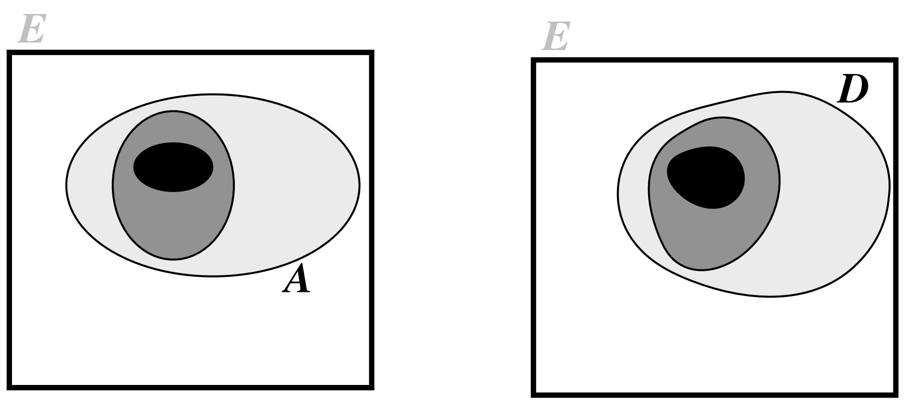
Se verifica:

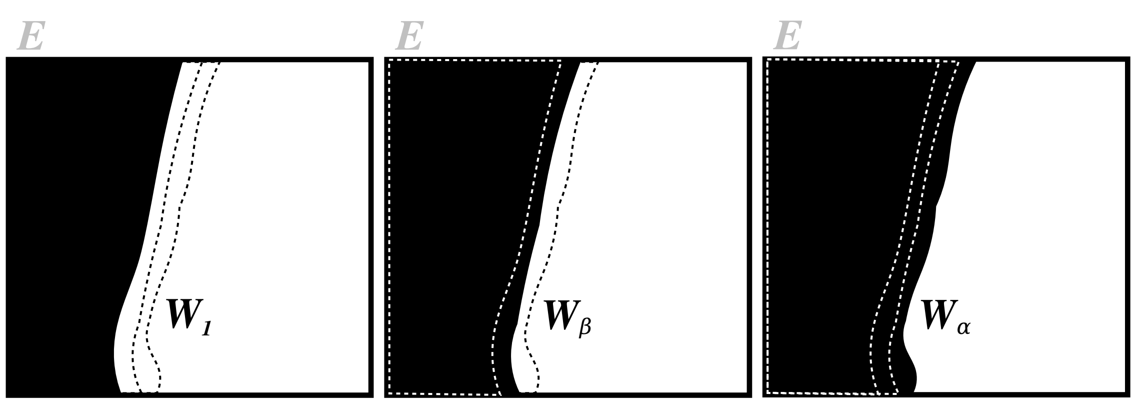
$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$ $\quad$ $(A_1 \nsubseteq D_1)$ & $(D_1 \nsubseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

$(A_\beta \Delta W_\beta \subseteq D_\beta \Delta W_\beta)$ $\quad$ $(A_\beta \nsubseteq D_\beta)$ & $(D_\beta \nsubseteq A_\beta)$ & $(A_\beta \sqsubseteq^{W_\beta} D_\beta)$

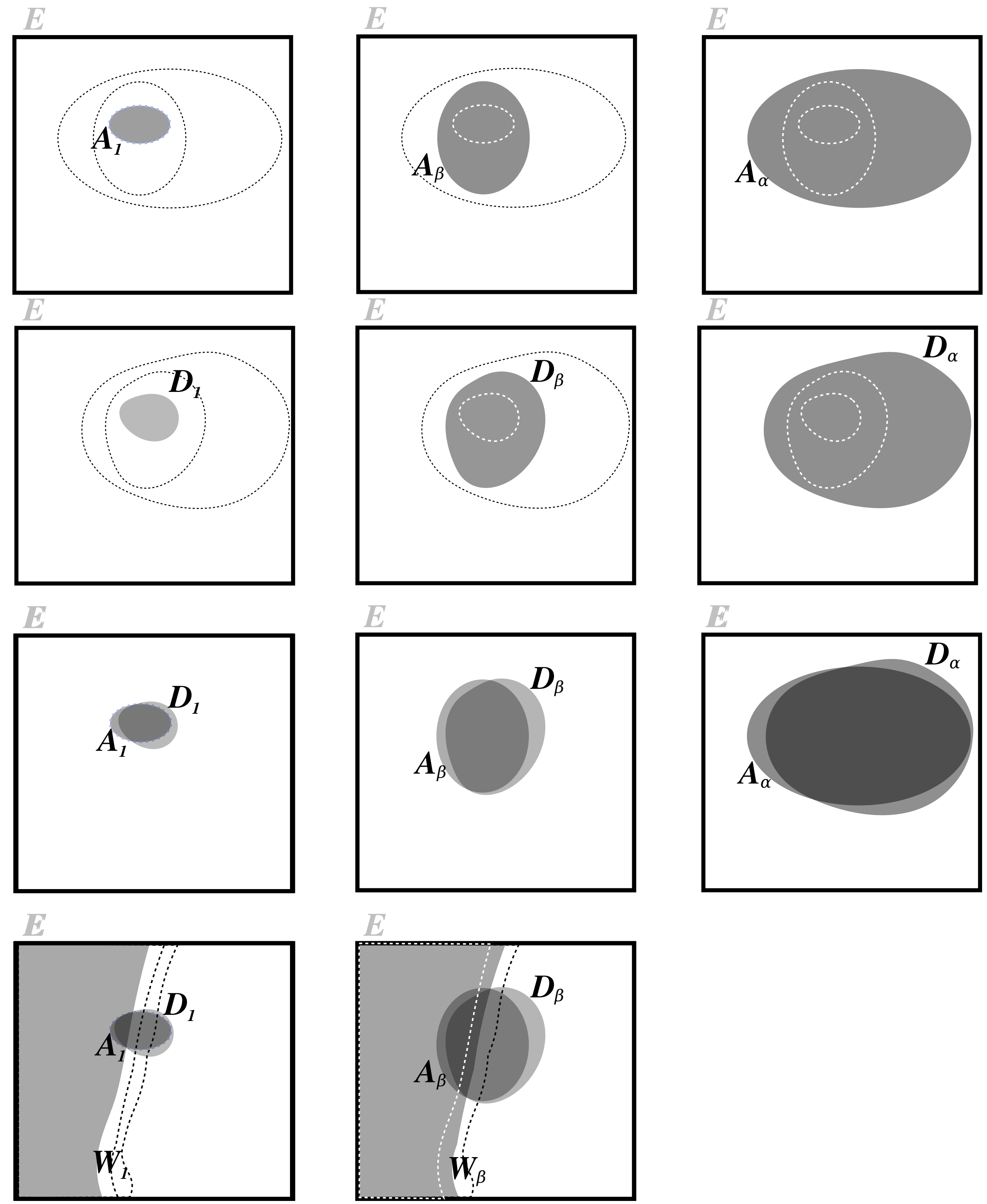


luego $(A \not\leq D)$ & $(A \not\geq D)$





$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$

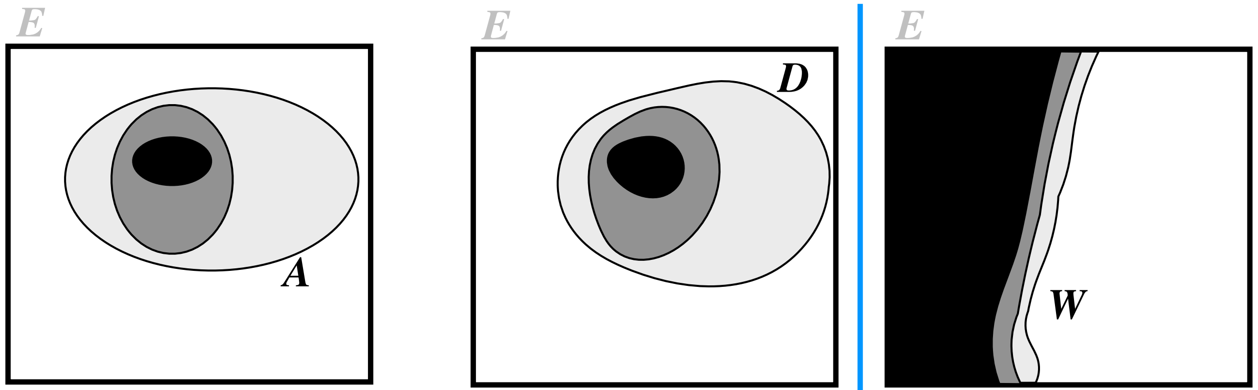


Se verifica:

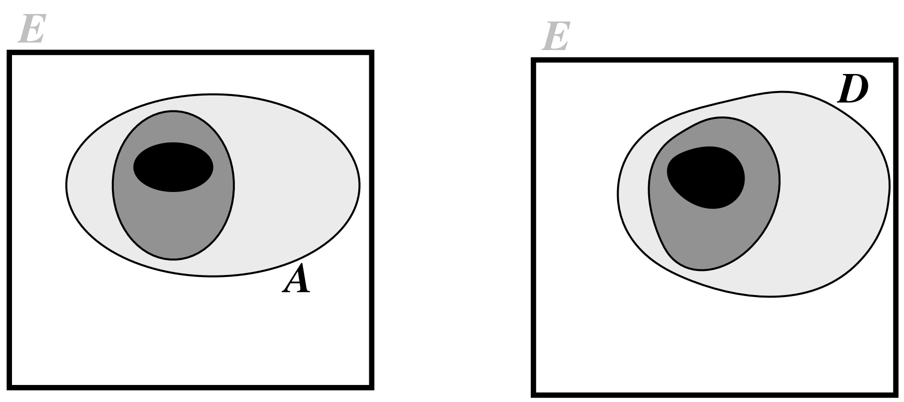
$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$ $\quad$ $(A_1 \nsubseteq D_1)$ & $(D_1 \nsubseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

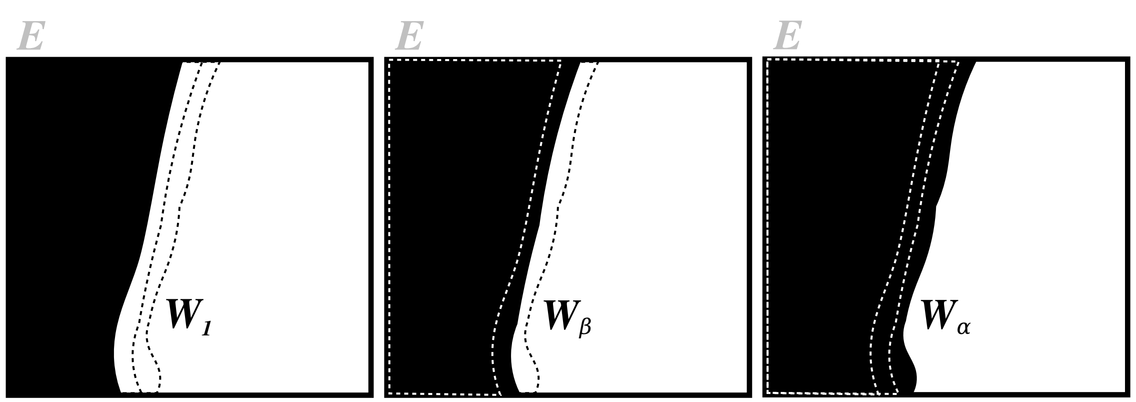
$(A_\beta \Delta W_\beta \subseteq D_\beta \Delta W_\beta)$ $\quad$ $(A_\beta \nsubseteq D_\beta)$ & $(D_\beta \nsubseteq A_\beta)$ & $(A_\beta \sqsubseteq^{W_\beta} D_\beta)$

$(A_\alpha \nsubseteq D_\alpha)$ & $(D_\alpha \nsubseteq A_\alpha)$

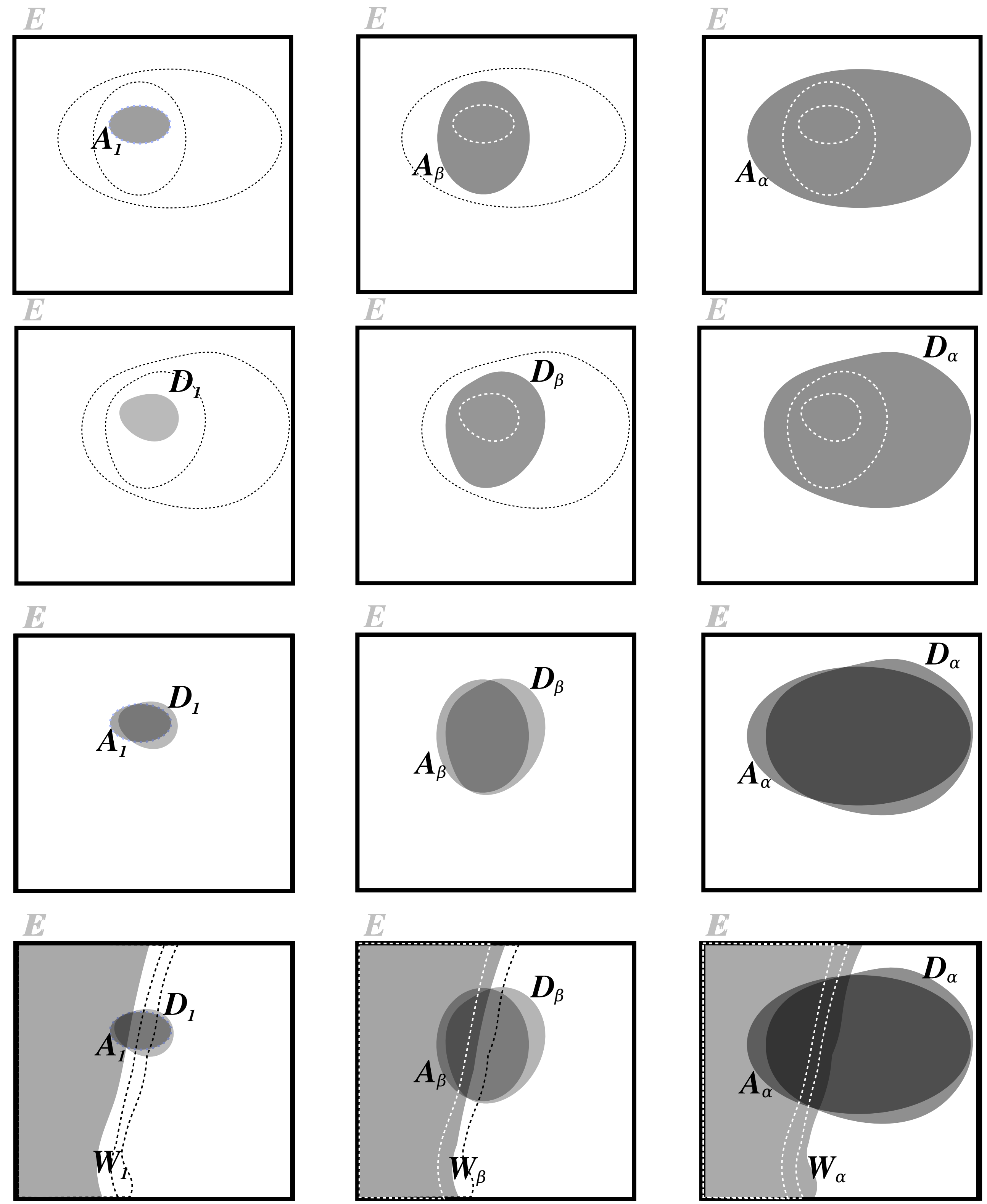


luego $(A \not\leq D)$ & $(A \not\geq D)$





$(W_\kappa)_{\kappa \in L}$

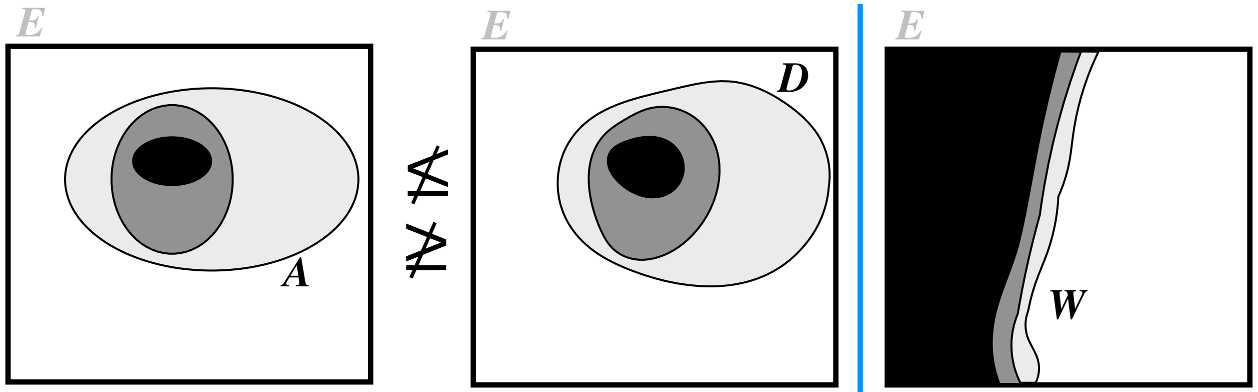


Se verifica:

$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$ $\quad$ $(A_1 \not\subseteq D_1)$ & $(D_1 \not\subseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

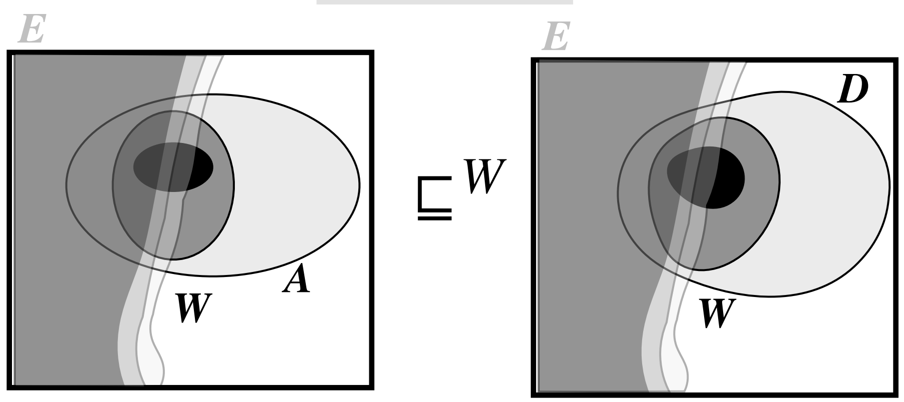
$(A_\beta \Delta W_\beta \subseteq D_\beta \Delta W_\beta)$ $\quad$ $(A_\beta \not\subseteq D_\beta)$ & $(D_\beta \not\subseteq A_\beta)$ & $(A_\beta \sqsubseteq^{W_\beta} D_\beta)$

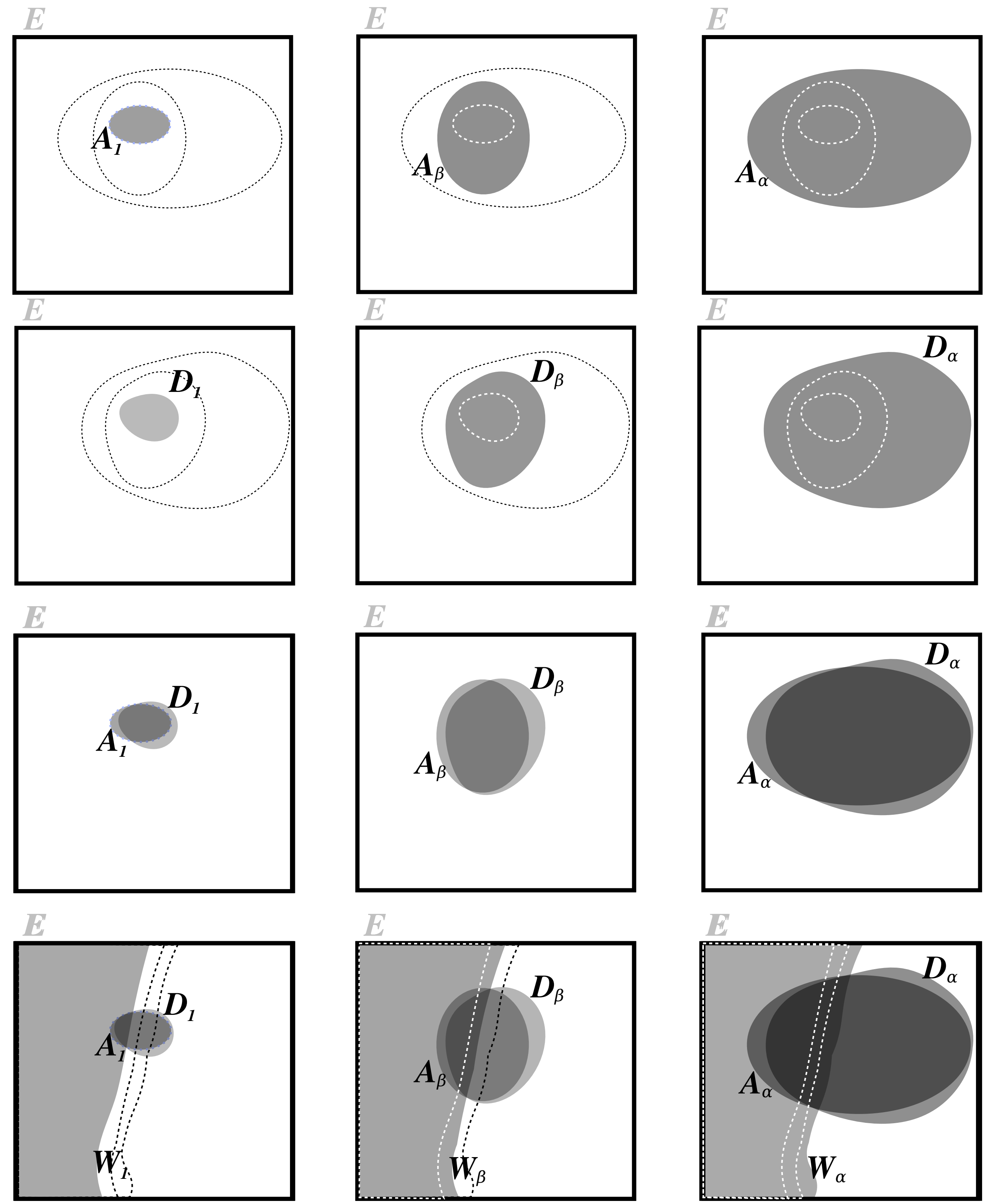
$(A_\alpha \Delta W_\alpha \subseteq D_\alpha \Delta W_\alpha)$ $\quad$ $(A_\alpha \not\subseteq D_\alpha)$ & $(D_\alpha \not\subseteq A_\alpha)$ & $(A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} D_\alpha)$



luego $(A \nleq D)$ & $(A \ngeq D)$

aunque: $(A \sqsubseteq^{W} D)$





Se verifica:

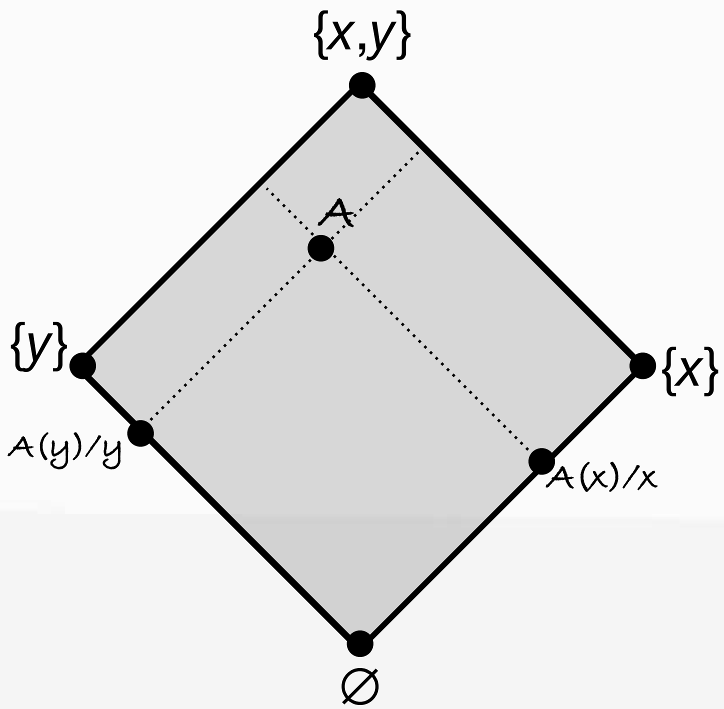
$(A_1 \Delta W_1 \subseteq D_1 \Delta W_1)$ $(A_1 \nsubseteq D_1)$ & $(D_1 \nsubseteq A_1)$ & $(A_1 \sqsubseteq^{W_1} D_1)$

$(A_\beta \Delta W_\beta \subseteq D_\beta \Delta W_\beta)$ $(A_\beta \nsubseteq D_\beta)$ & $(D_\beta \nsubseteq A_\beta)$ & $(A_\beta \sqsubseteq^{W_\beta} D_\beta)$

$(A_\alpha \Delta W_\alpha \subseteq D_\alpha \Delta W_\alpha)$ $(A_\alpha \nsubseteq D_\alpha)$ & $(D_\alpha \nsubseteq A_\alpha)$ & $(A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} D_\alpha)$

Ejemplo (ilustrado con puntos del retículo)

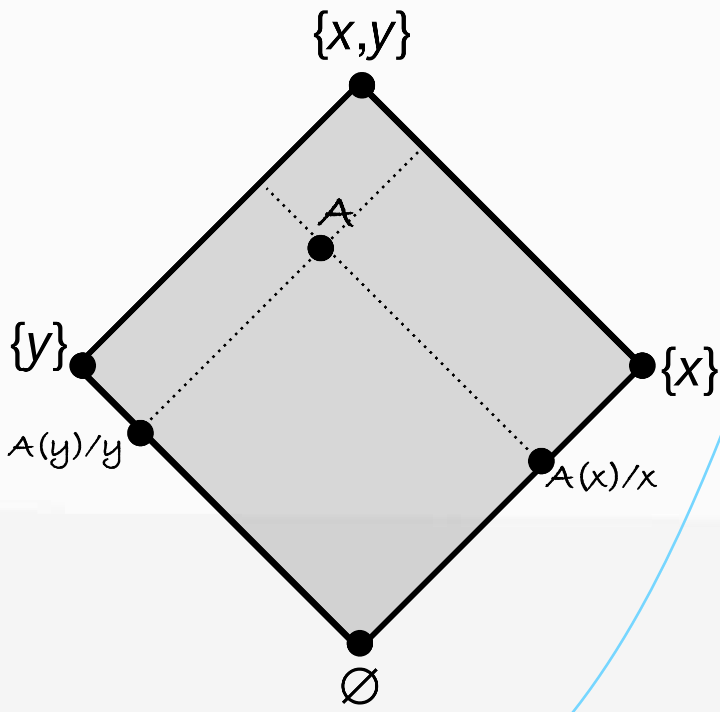
Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.



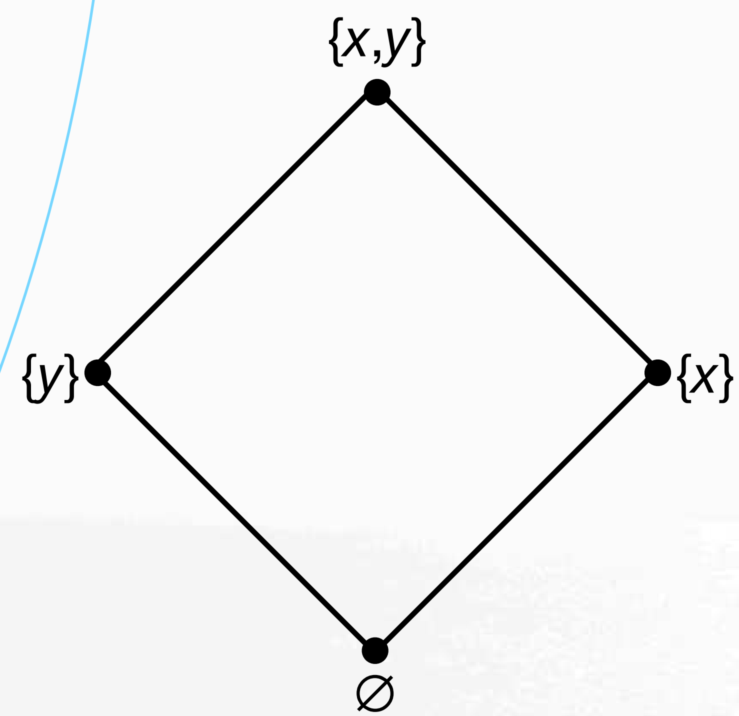
$(L^E,\leq)$

Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

Álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):



$(L^E, \leq)$

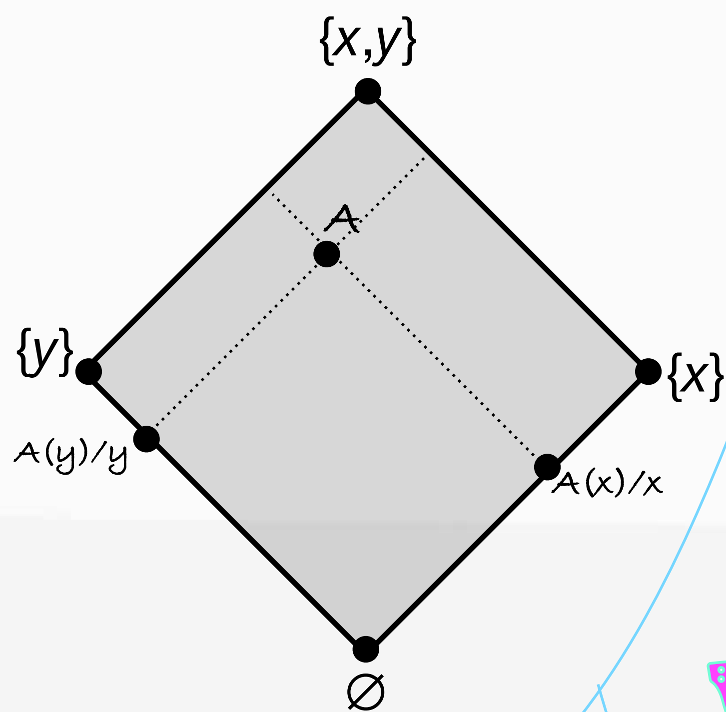


$(P(E), \subseteq)$

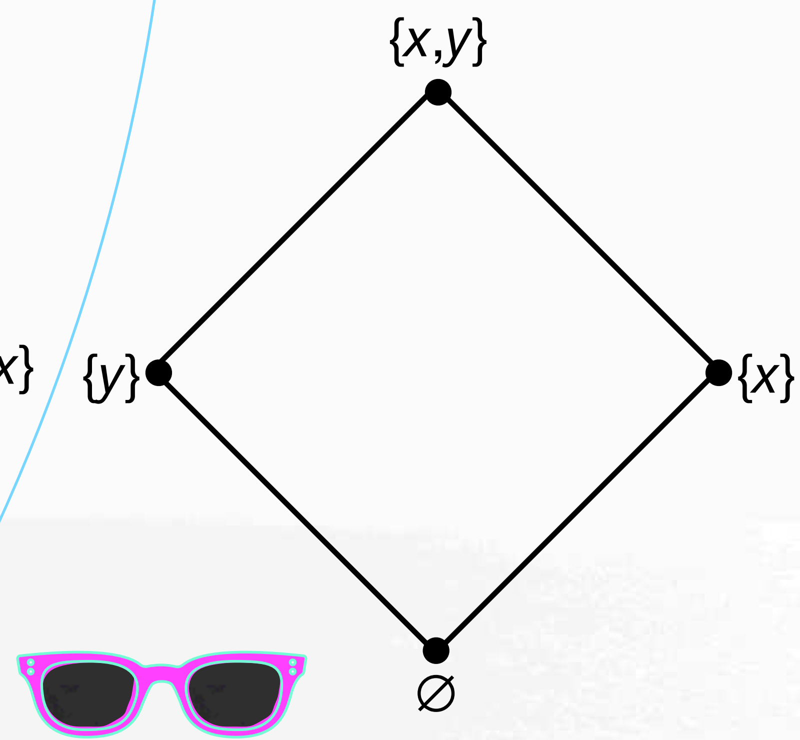
Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):

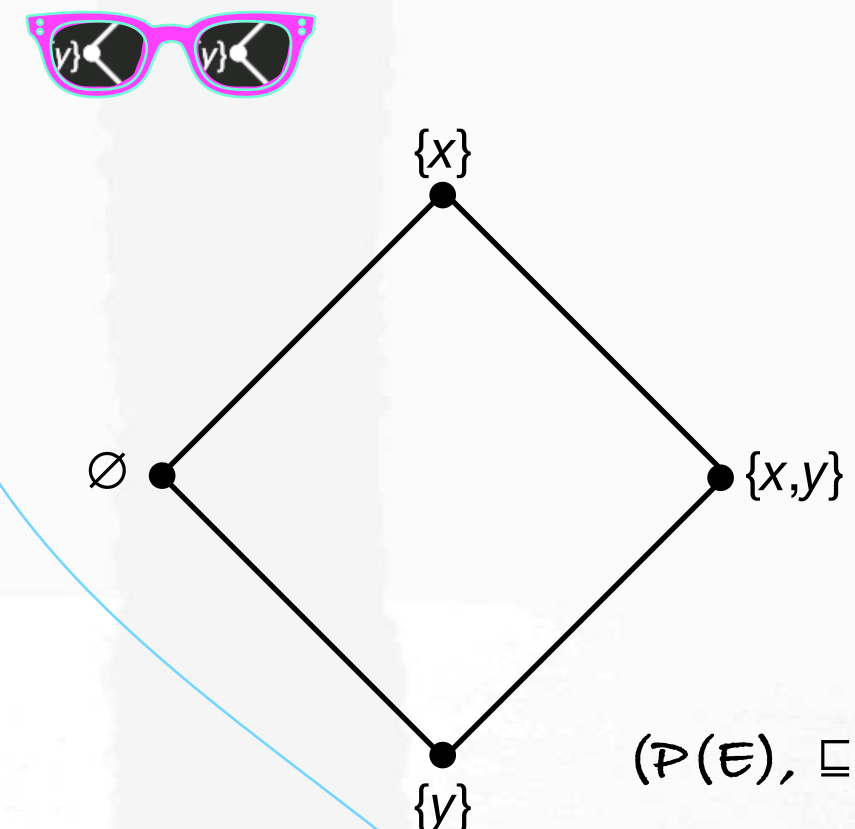
Y Álgebras de Boole $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w})$ isomorfas a la anterior ($w\in\{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$):



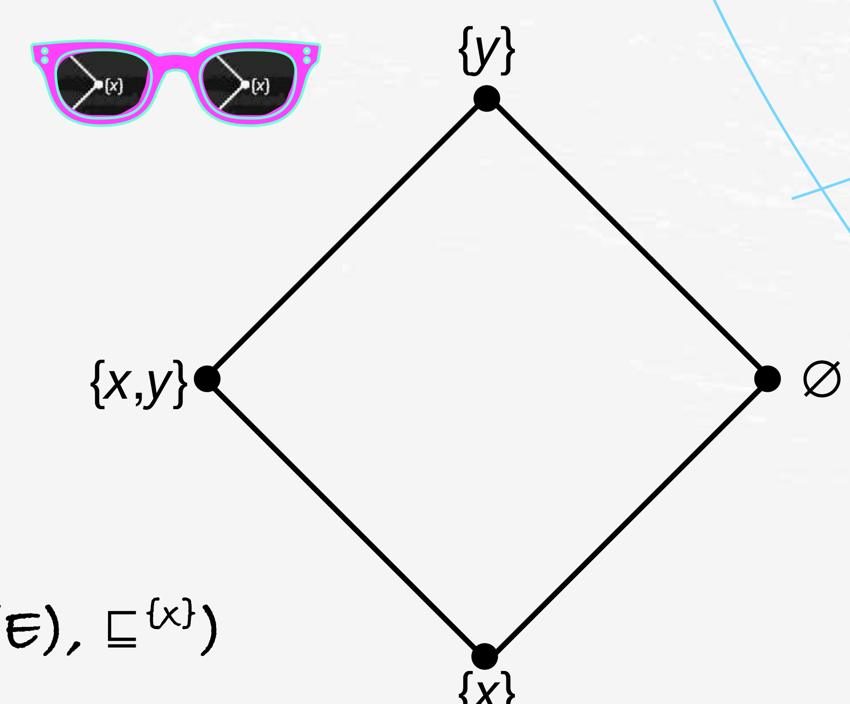
$(L^E,\leq)$



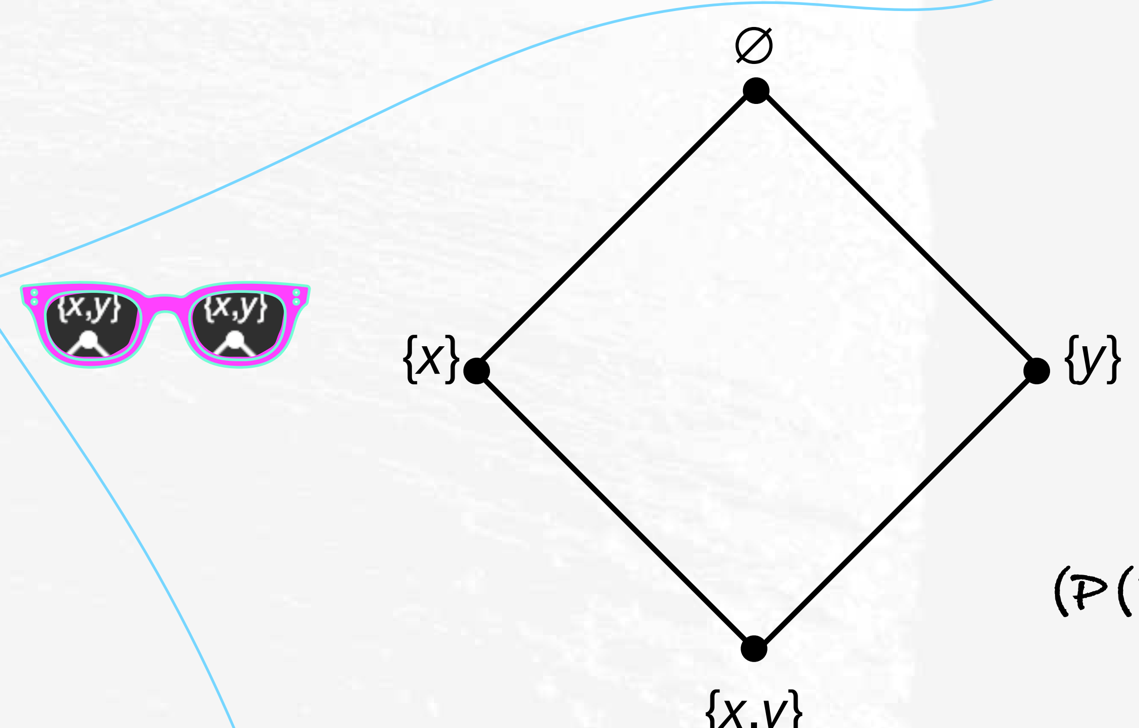
$(\mathcal{P}(E), \subseteq) = (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\emptyset})$



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$



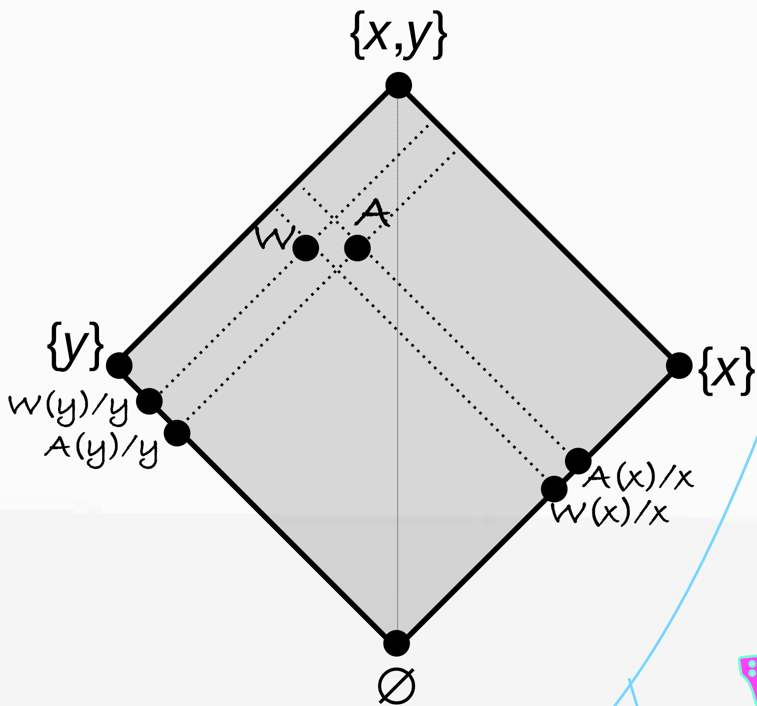
$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (\mathcal{P}(E), \supseteq)$

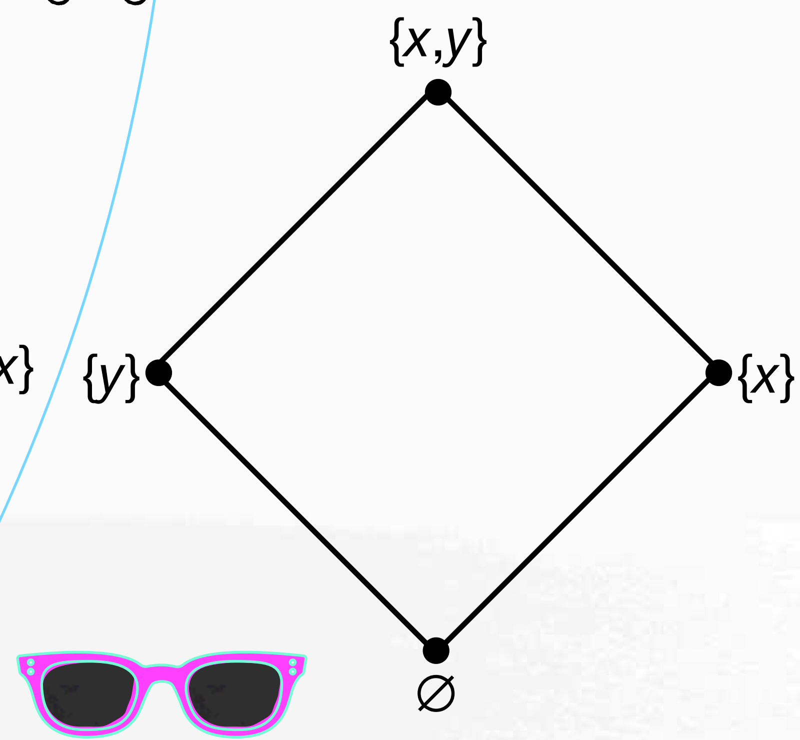
Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

Borroso no nítido
$w=w(x)/x+w(y)/y$



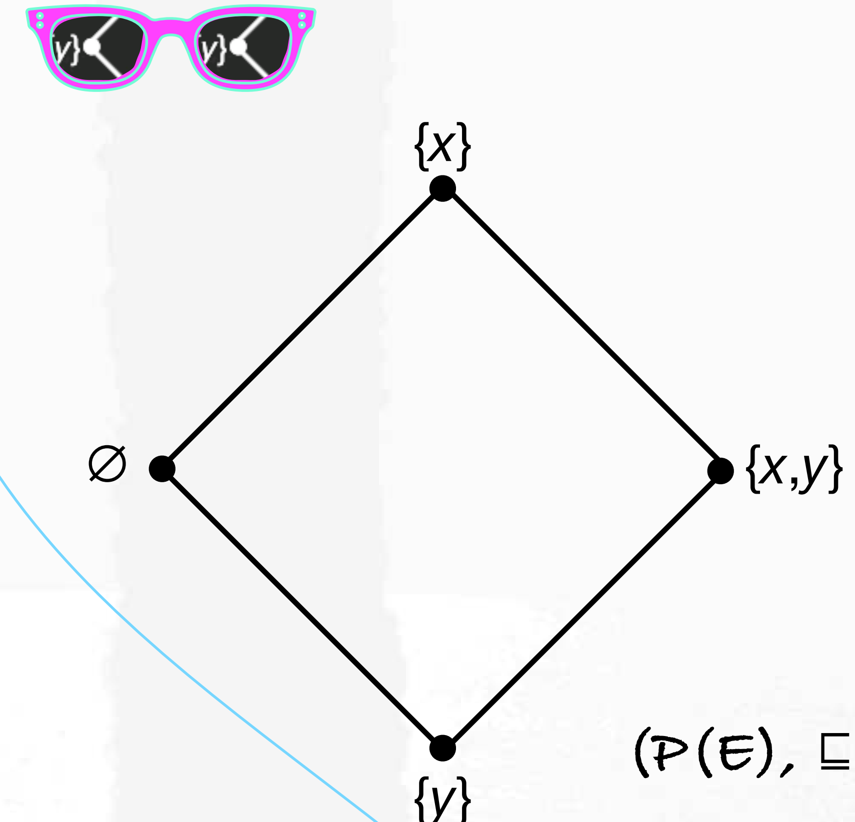
$(L^E, \leq)$

Álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):

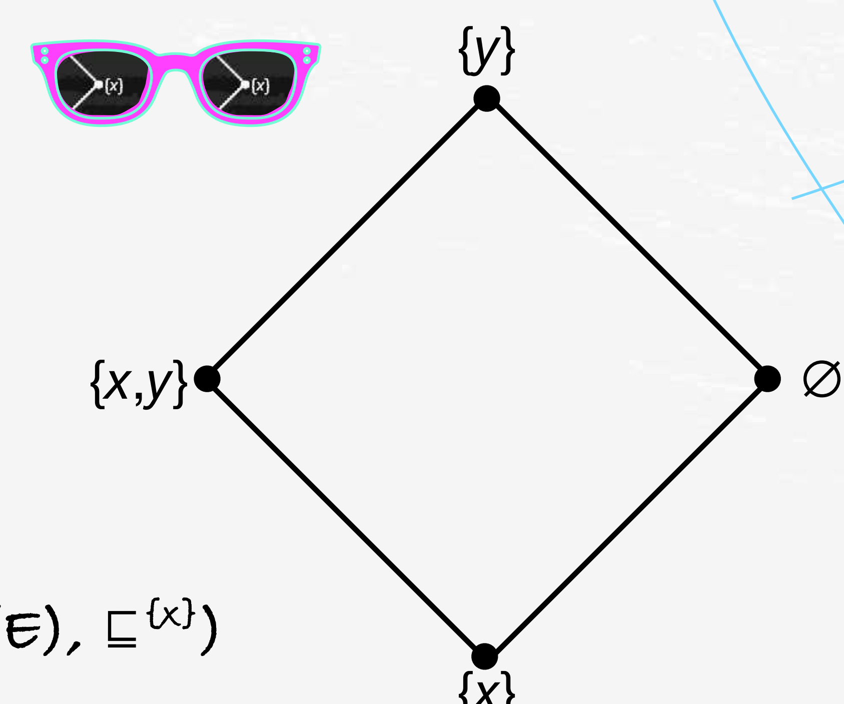


$(\mathcal{P}(E), \subseteq) = (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\emptyset})$

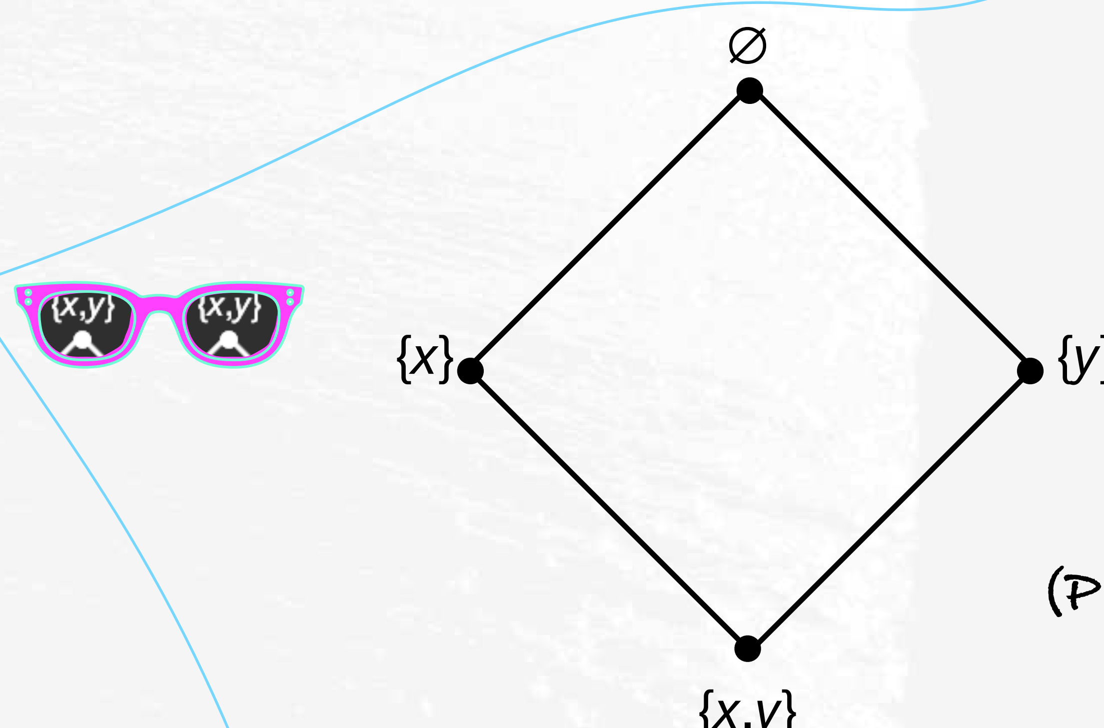
Y Álgebras de Boole $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w})$ isomorfas a la anterior ($w \in \{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$):



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

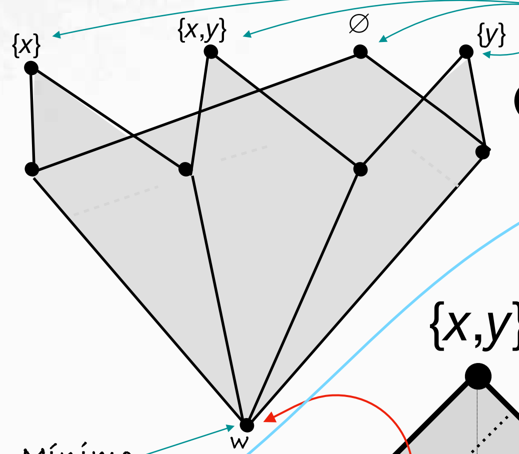


$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (\mathcal{P}(E), \supseteq)$

Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:

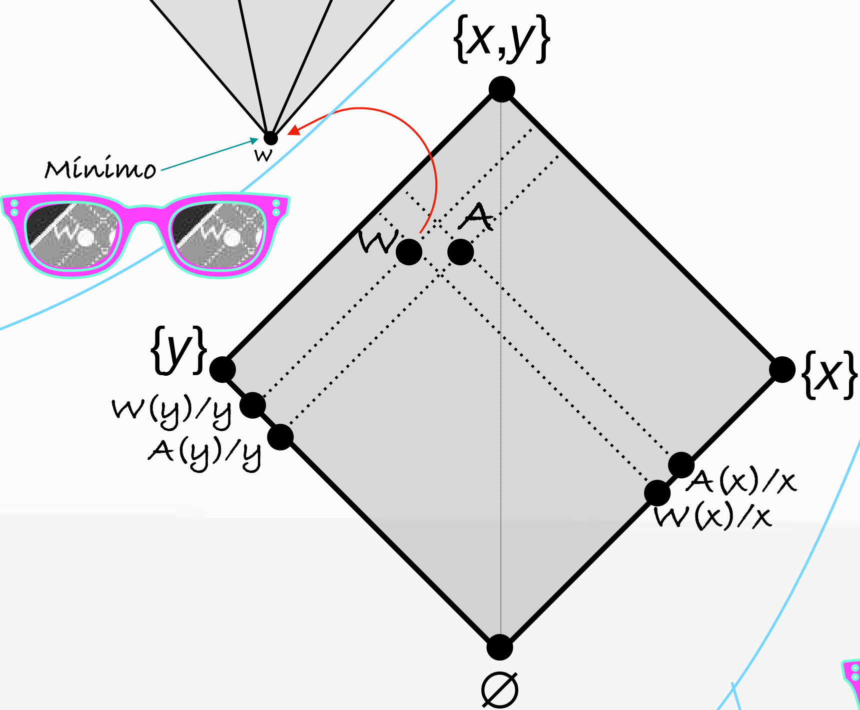


$(L^E, \sqsubseteq^W)$

(Nítidos N tales que: $(Sop(W))^c \subseteq N \subseteq (Ker(W))^c$)

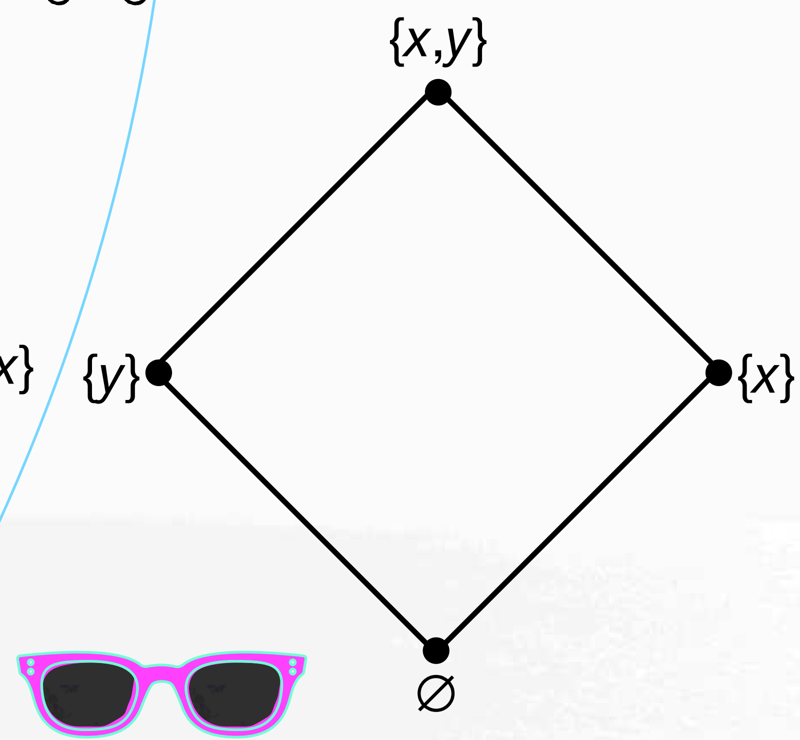
Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

Borroso no nítido $w=w(x)/x+w(y)/y$



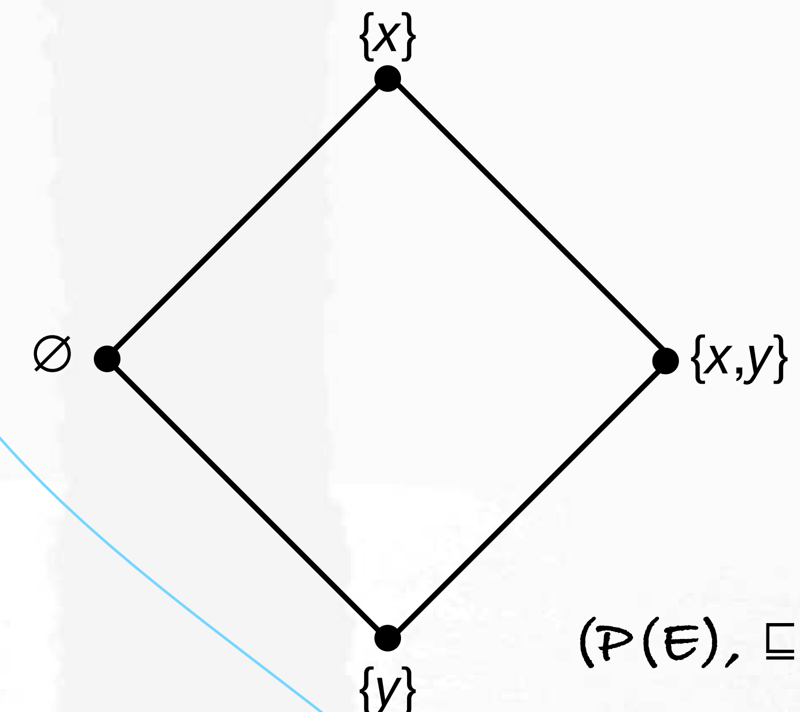
$(L^E,\leq)$

Álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):

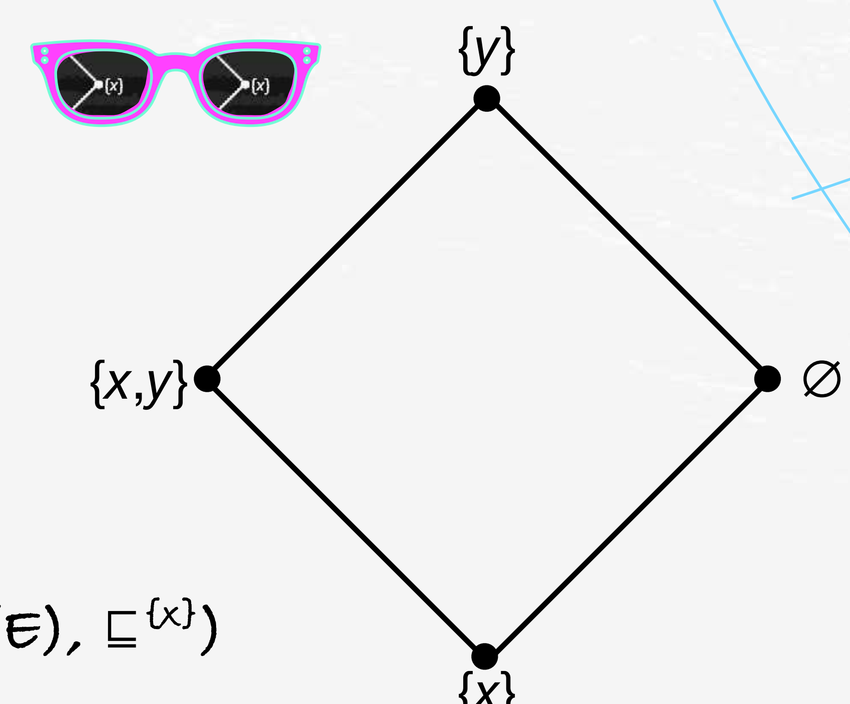


$(P(E), \subseteq) = (P(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

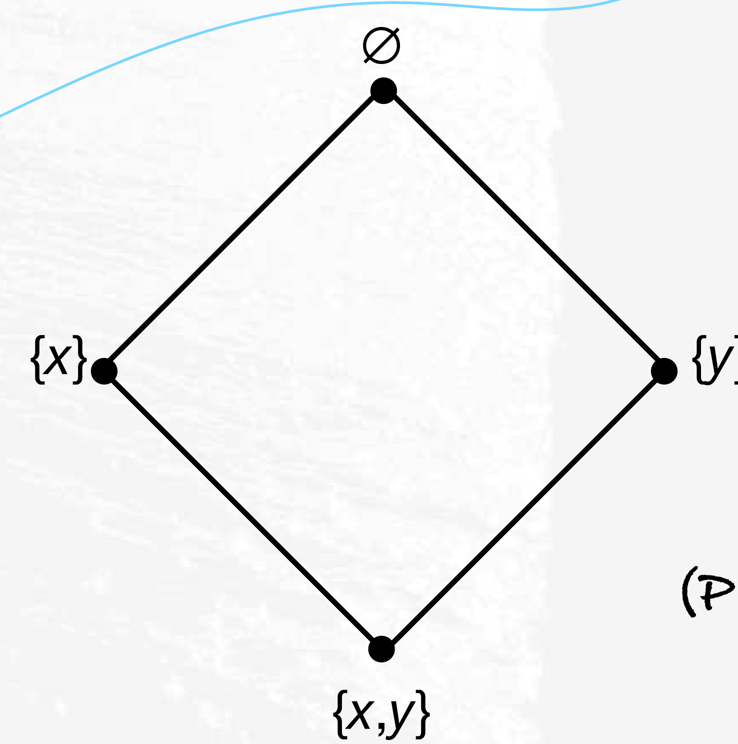
Y Álgebras de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfas a la anterior ($w \in \{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$):



$(P(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

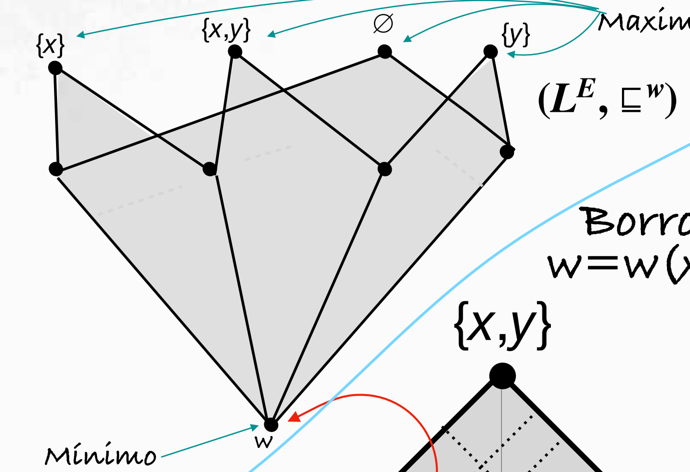


$(P(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$



$(P(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (P(E), \supseteq)$

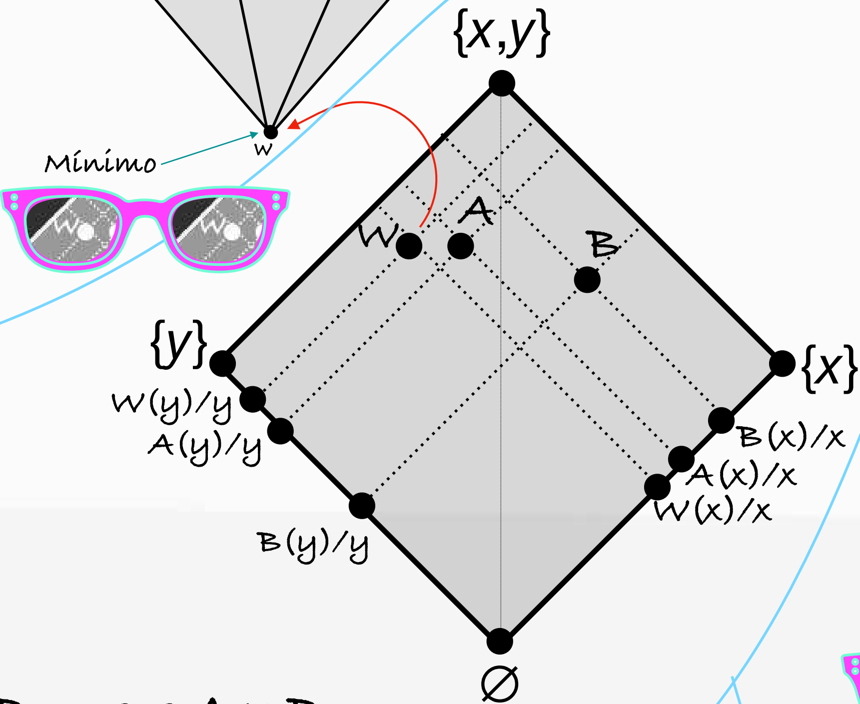
Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:



(Nítidos N tales que:
$(Sop(W))^c \subseteq N \subseteq (Ker(W))^c$)

Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

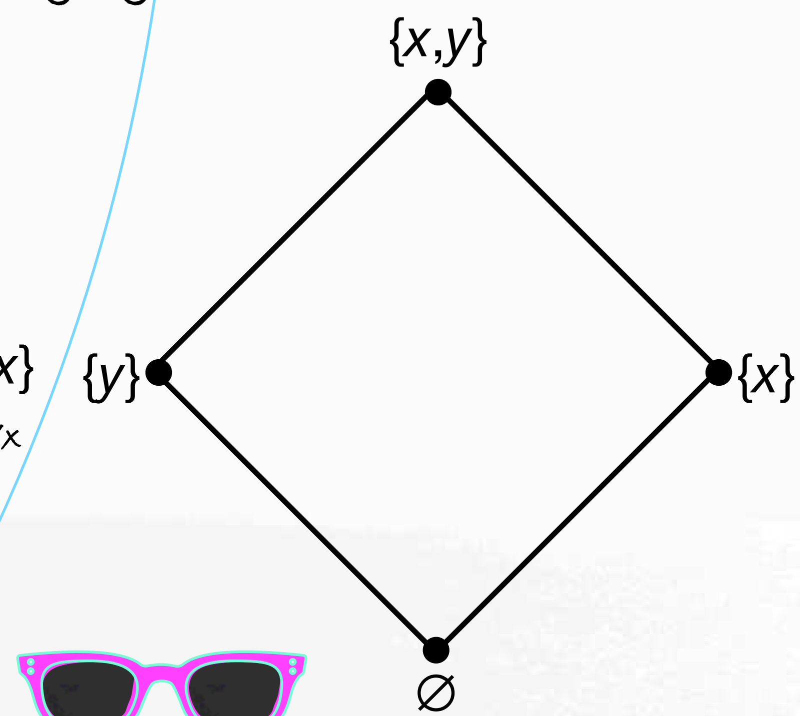
Borroso no nítido
$w=w(x)/x+w(y)/y$



Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^W B$

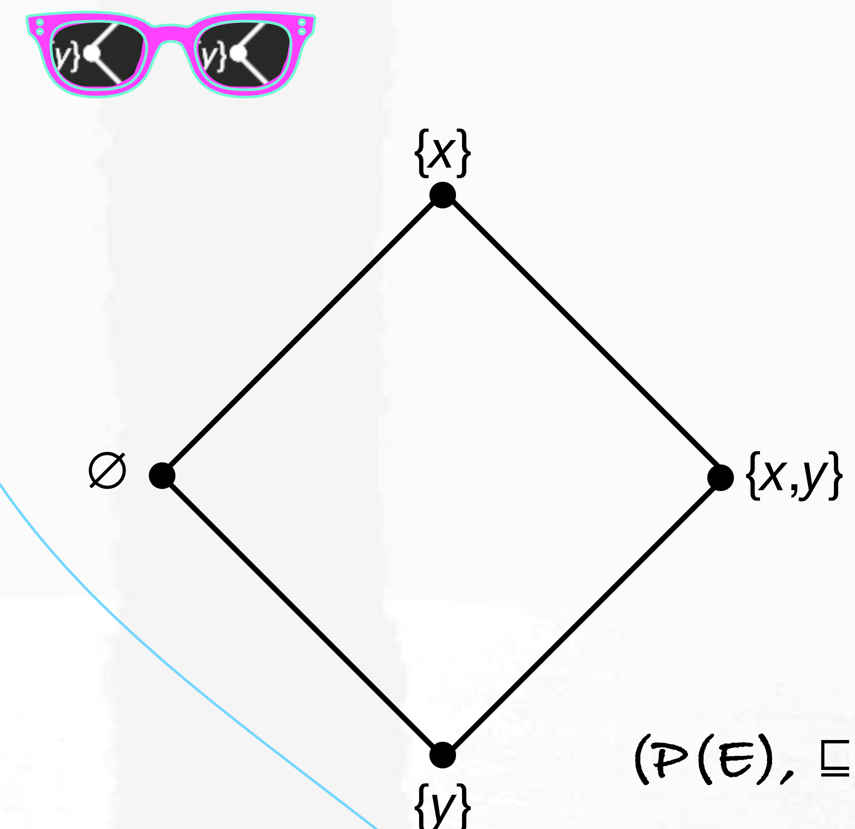
$(L^E,\leq)$

Álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):

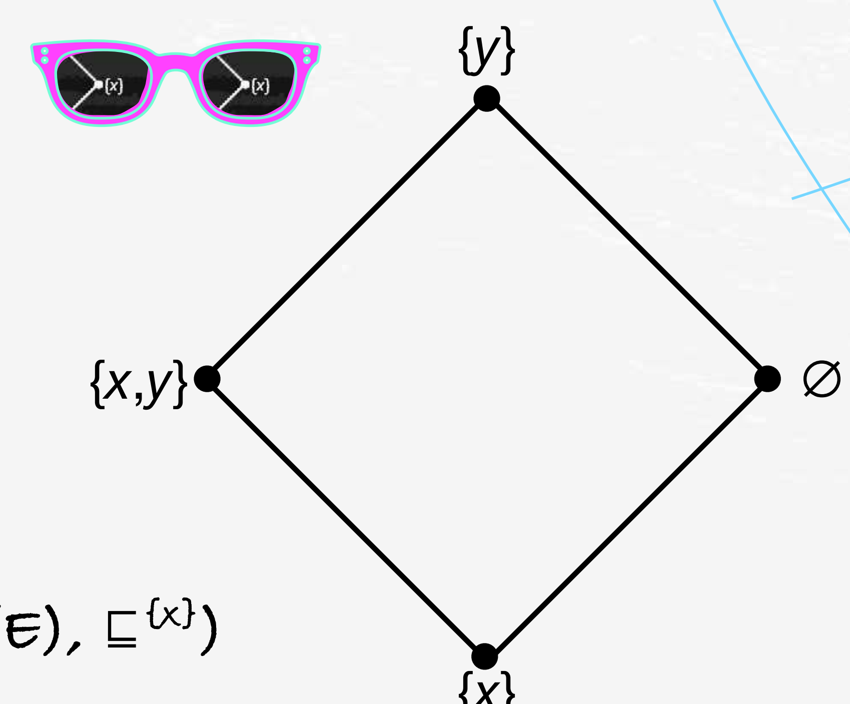


$(P(E), \subseteq) = (P(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

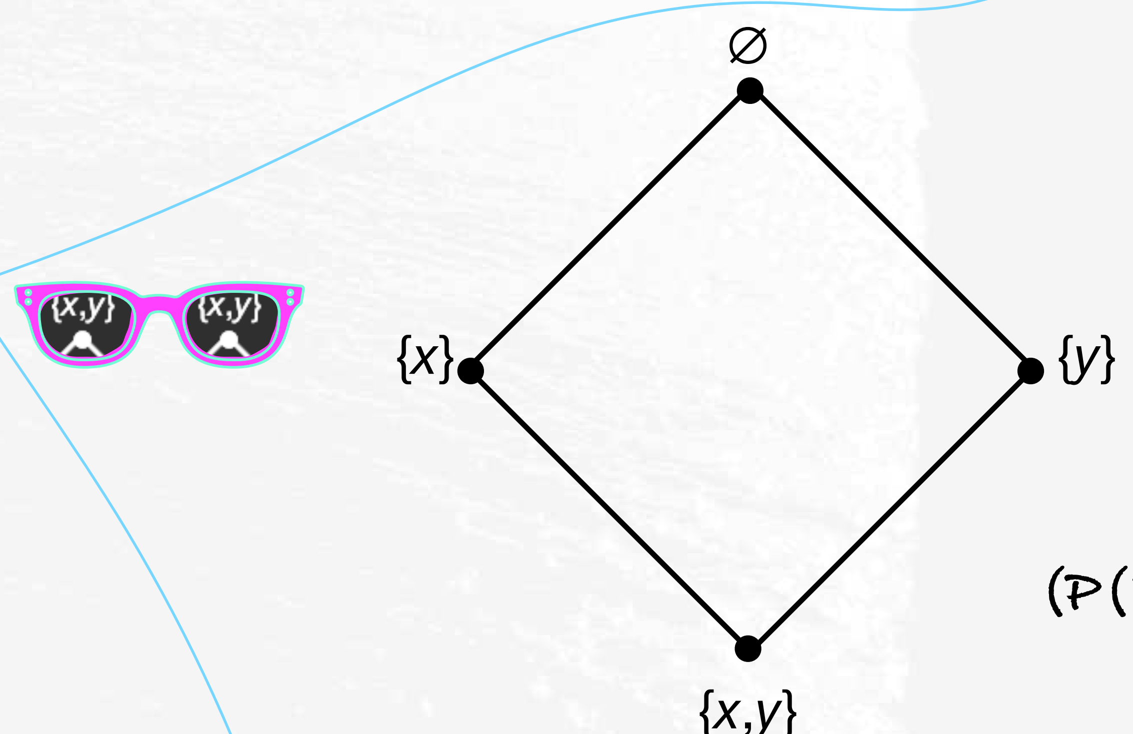
Y Álgebras de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfas a la anterior ($w \in \{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$):



$(P(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

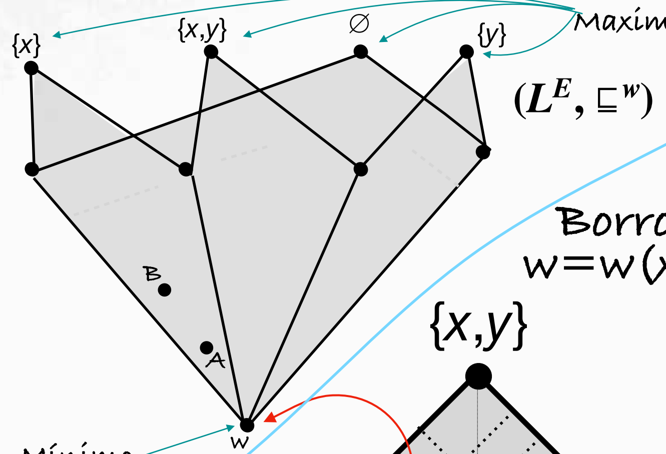


$(P(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$



$(P(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (P(E), \supseteq)$

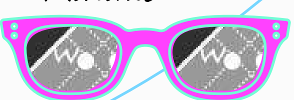
Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:

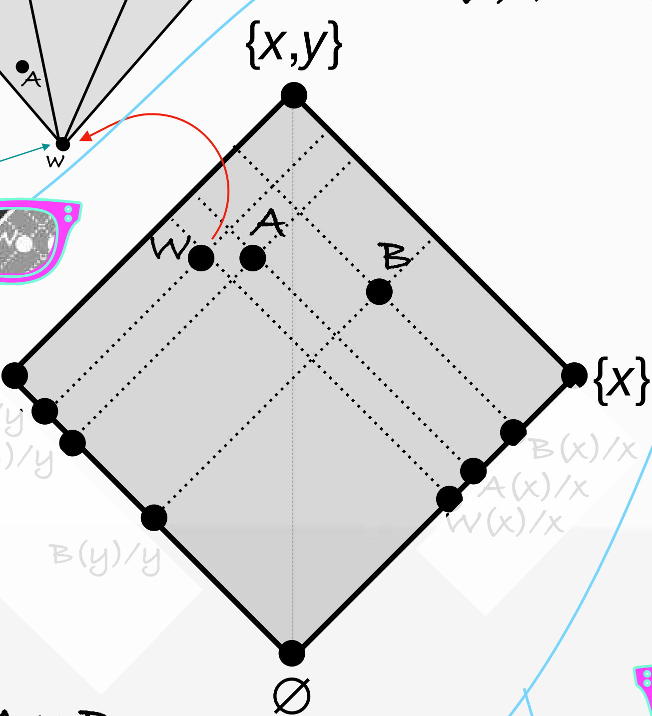


(Nítidos N tales que: $(\mathrm{Sop}(W))^c \subseteq N \subseteq (\mathrm{Ker}(W))^c$)

Sea $L=[0,1]$ y $E=\{x,y\}$. El retículo $(L^E, \leq)$ de subconjuntos borrosos $A=A(x)/x+A(y)/y$ de E.

Borroso no nítido $w=w(x)/x+w(y)/y$

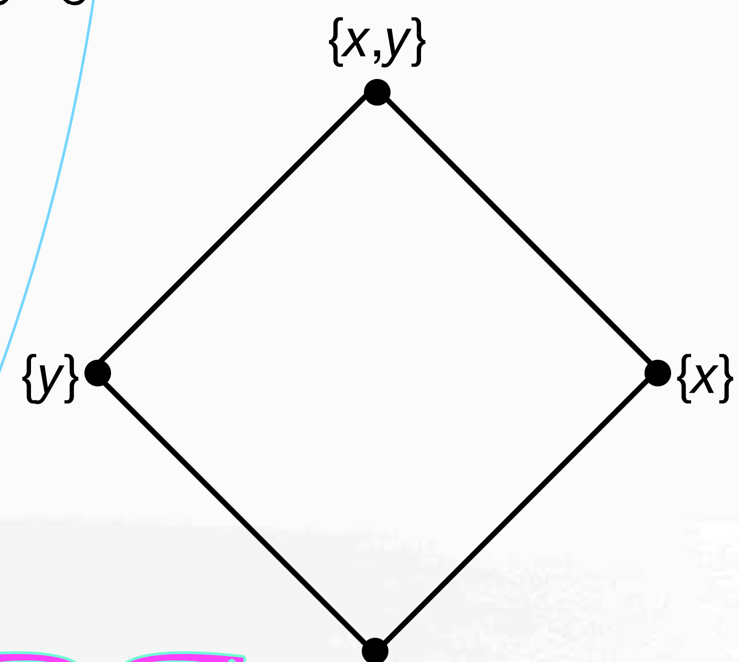




Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^W B$

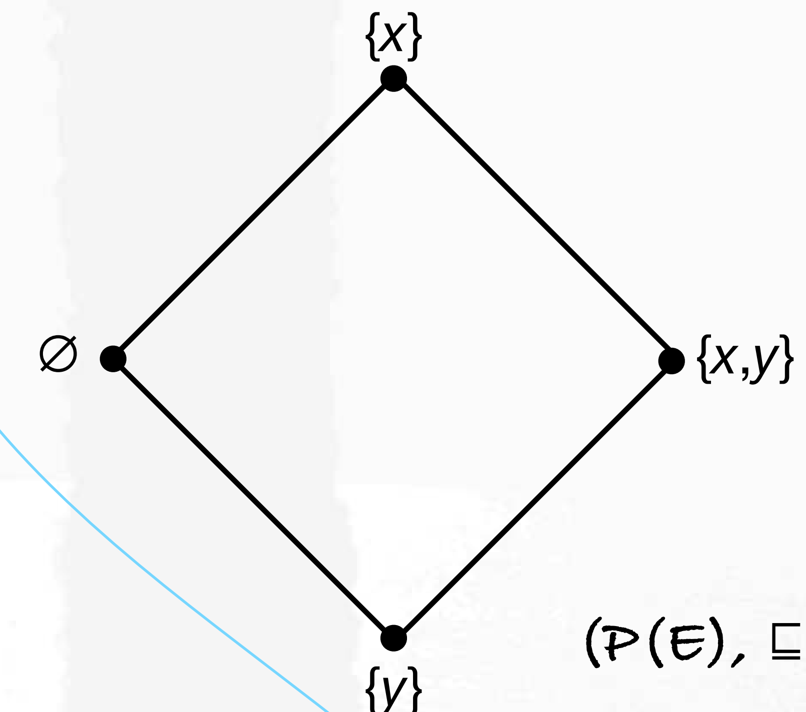
$(L^E, \leq)$

Álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$ incluida en el retículo anterior (subconjuntos nítidos):

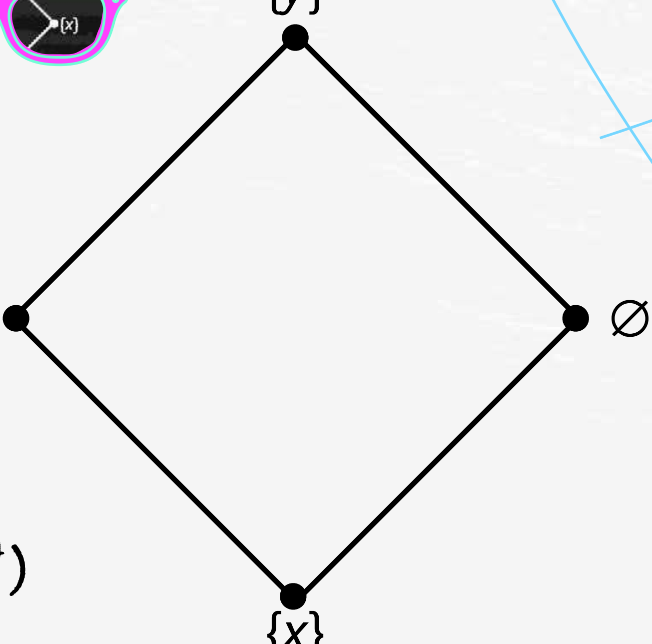


$(P(E), \subseteq) = (P(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

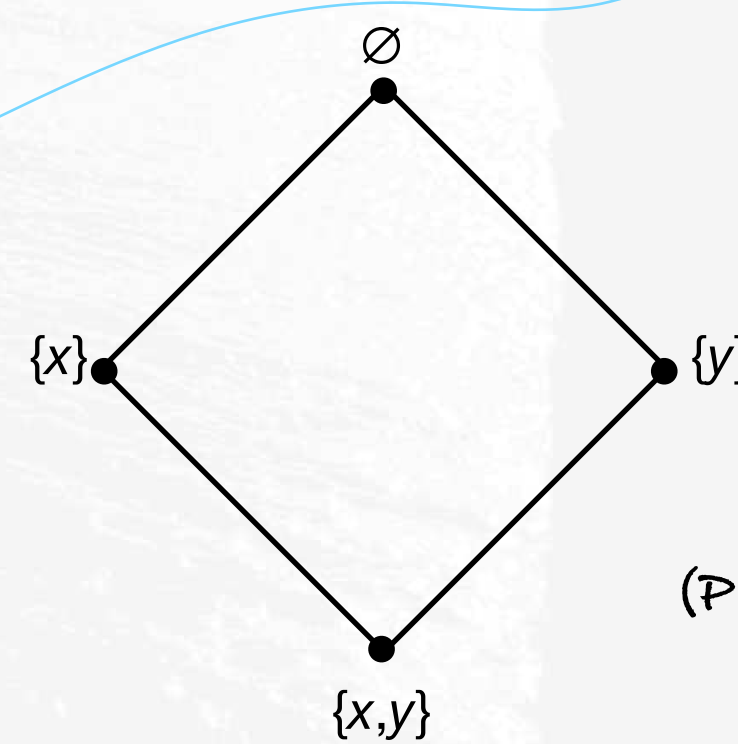
Y Álgebras de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$ isomorfas a la anterior ($w \in \{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$):



$(P(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

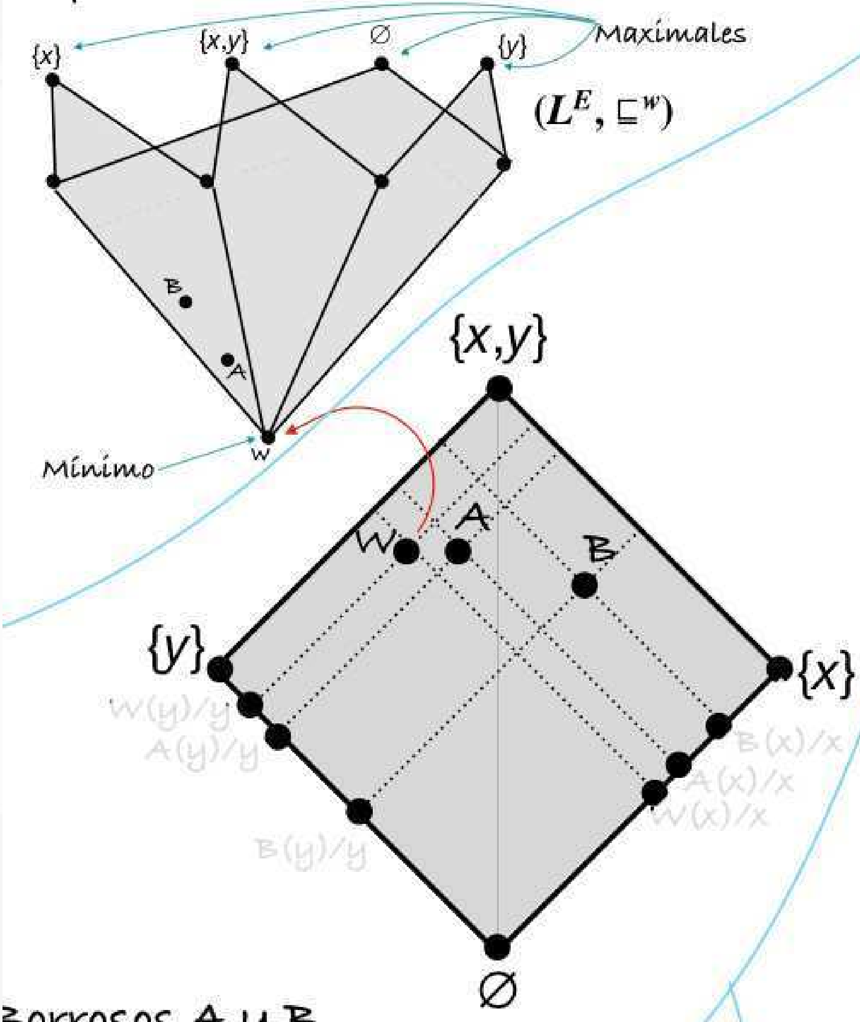


$(P(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$



$(P(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (P(E), \supseteq)$

Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:



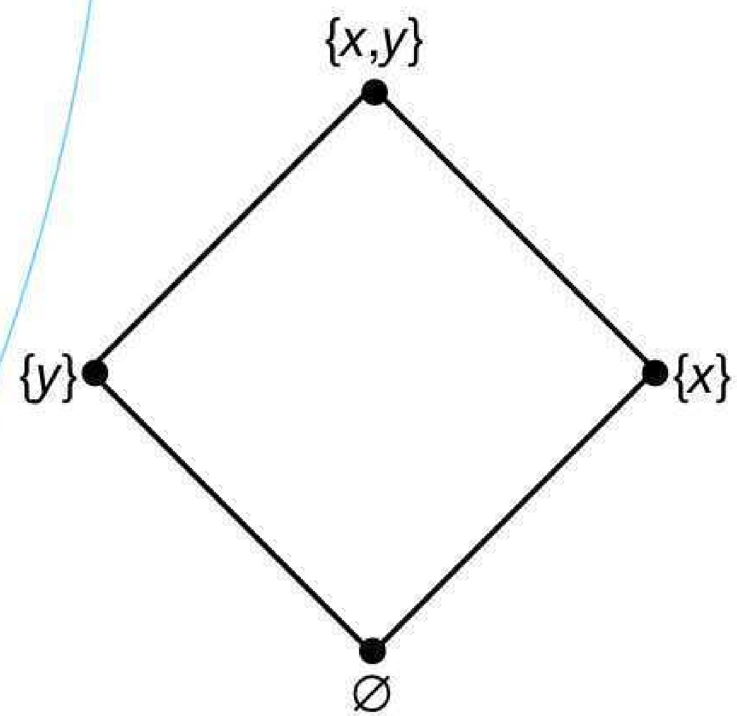
Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^W B$

$(L^E, \leq)$

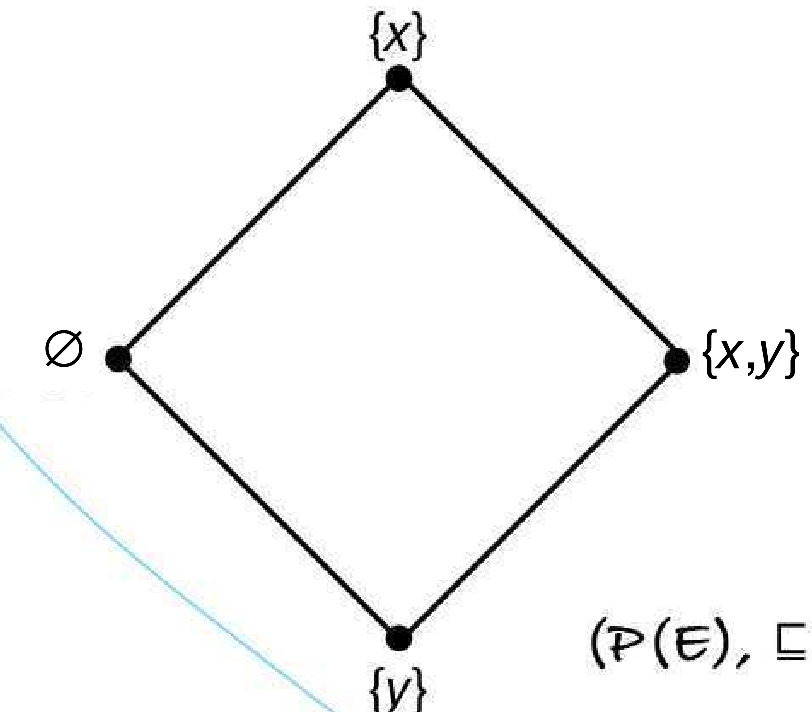
$W_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L$: $0 \leq \alpha \leq \min(w(x), w(y)) = w(x)$

$W_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L$: $\min(w(x), w(y)) = w(x) < \alpha \leq \max(w(x), w(y)) = w(y)$

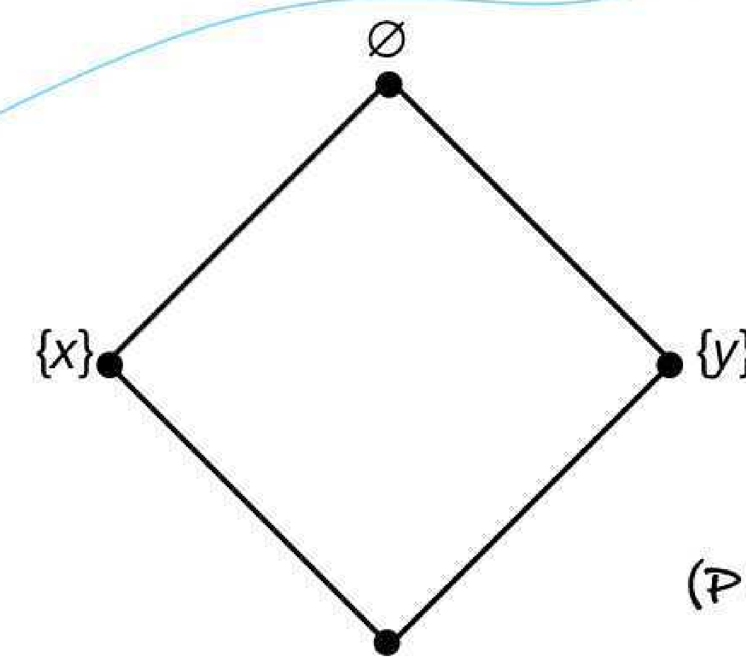
$W_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L$: $\max(w(x), w(y)) = w(y) < \alpha \leq 1$



$(\mathcal{P}(E), \subseteq) = (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

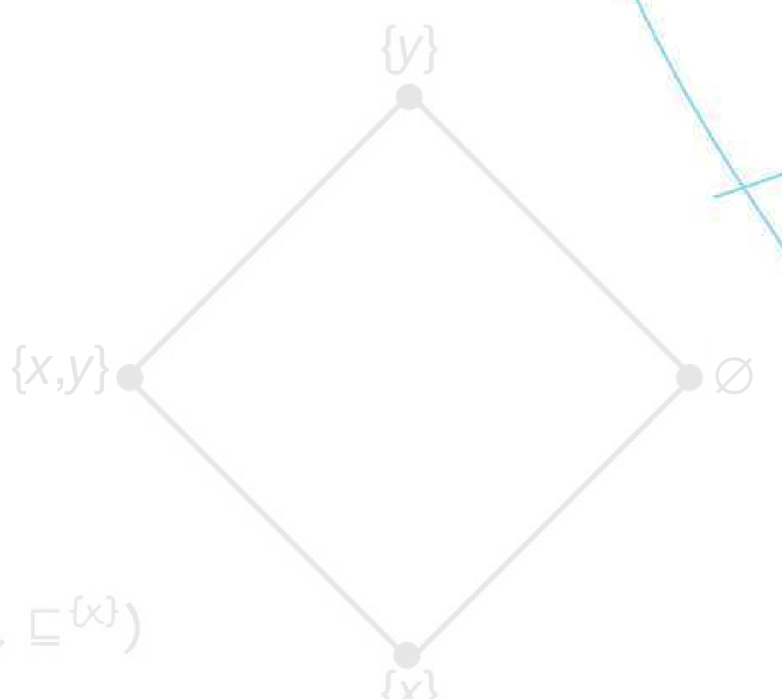


$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$



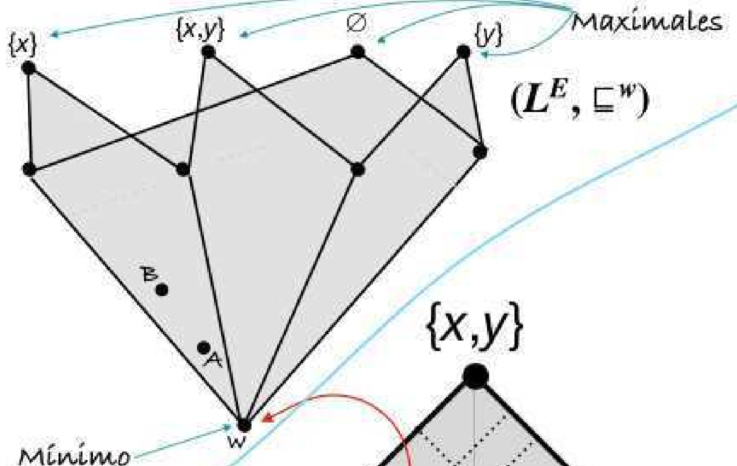
$W_\alpha = \{x,y\}$

$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (\mathcal{P}(E), \supseteq)$



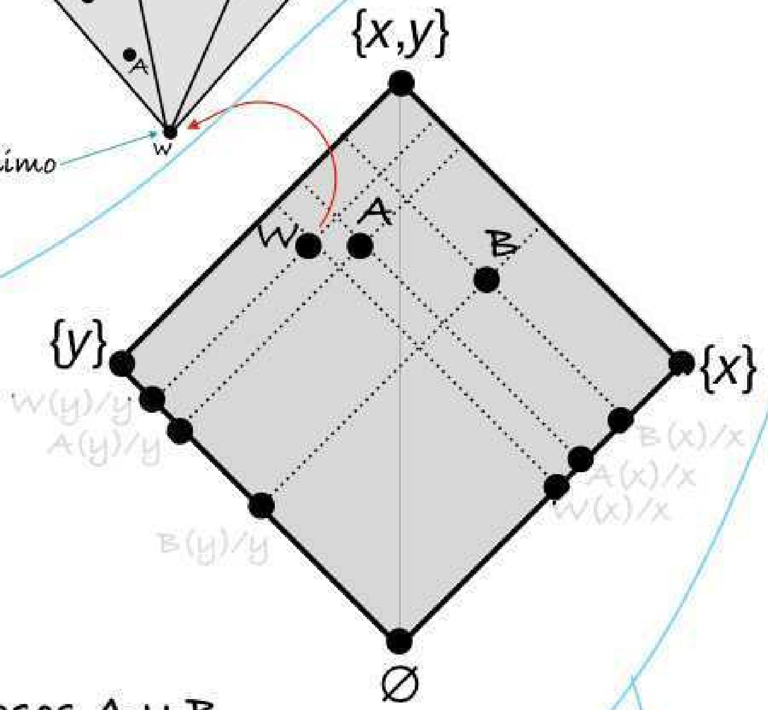
$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$

Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:



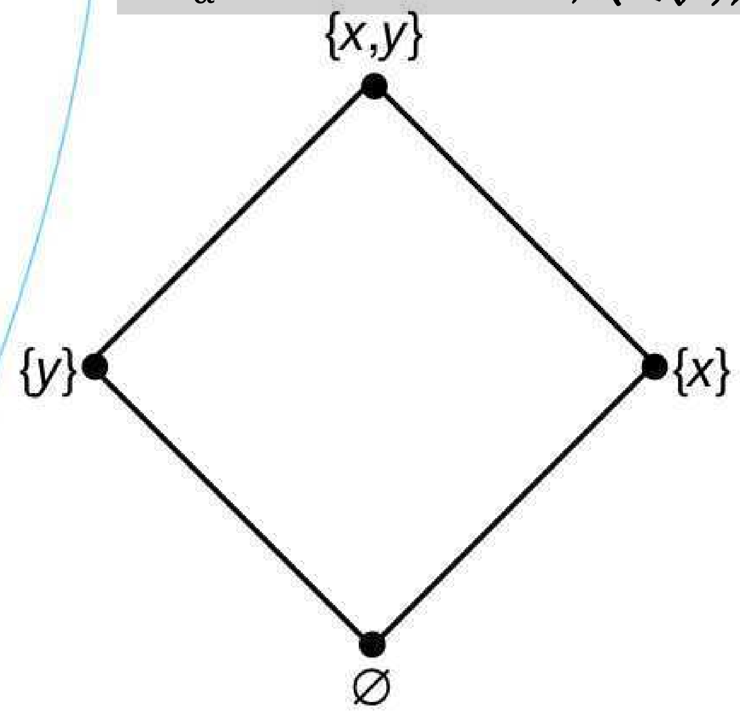
$W_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L$: $0 \le \alpha \le \min(w(x),w(y)) = w(x)$
$W_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L$: $\min(w(x),w(y)) = w(x) < \alpha \le \max(w(x),w(y)) = w(y)$
$W_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L$: $\max(w(x),w(y)) = w(y) < \alpha \le 1$

$A_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L$: $0 \le \alpha \le \min(A(x),A(y)) = A(x)$
$A_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L$: $\min(A(x),A(y)) = A(x) < \alpha \le \max(A(x),A(y)) = A(y)$
$A_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L$: $\max(A(x),A(y)) = A(y) < \alpha \le 1$

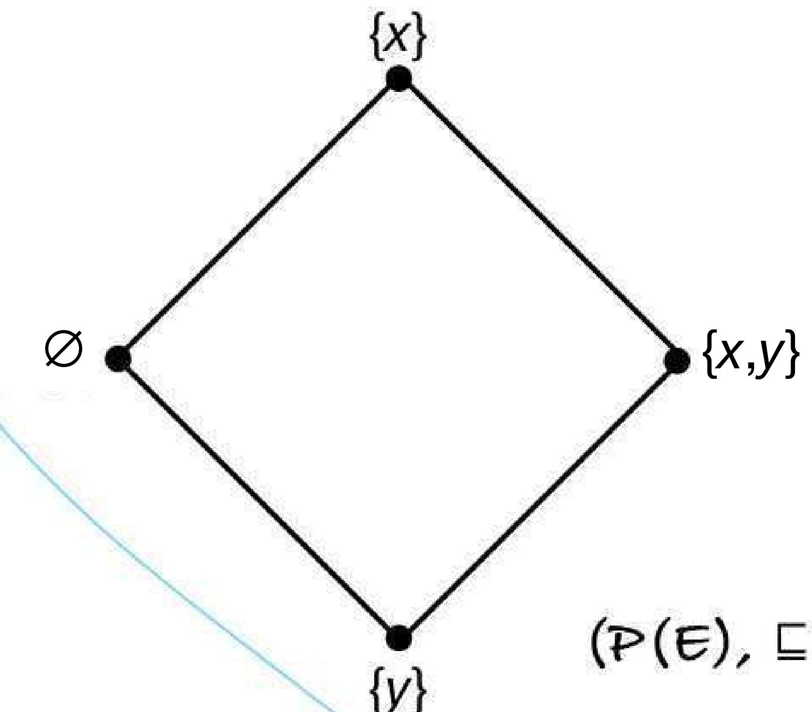


Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^W B$

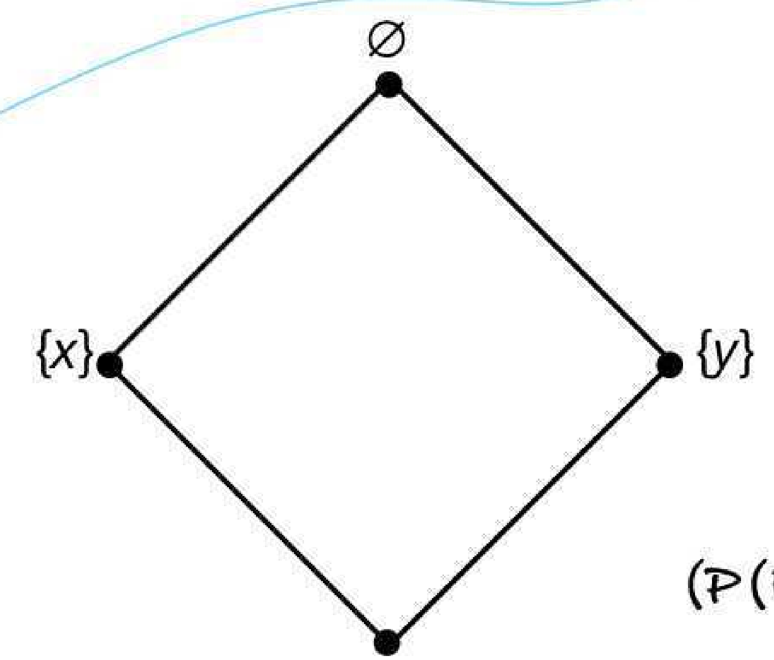
$(L^E, \le)$



$(P(E), \subseteq) = (P(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

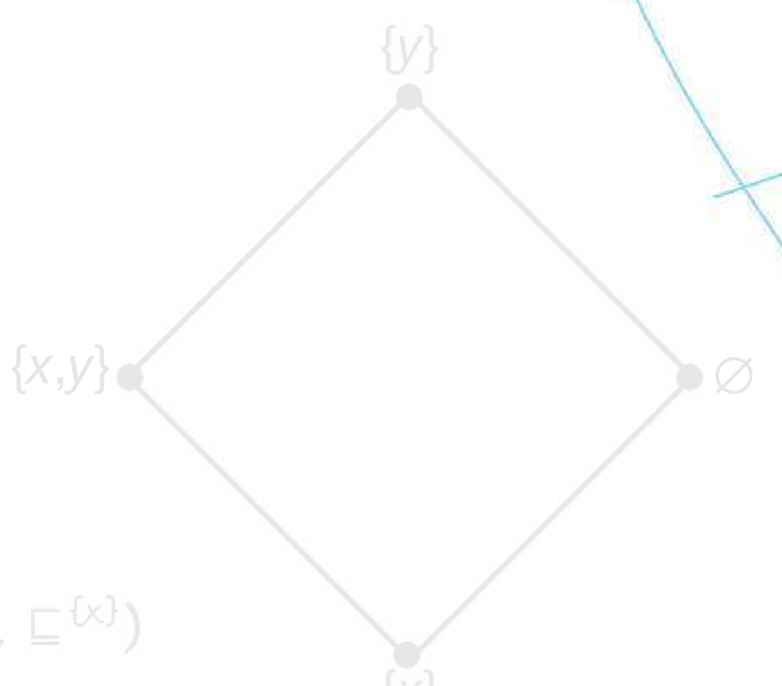


$(P(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$



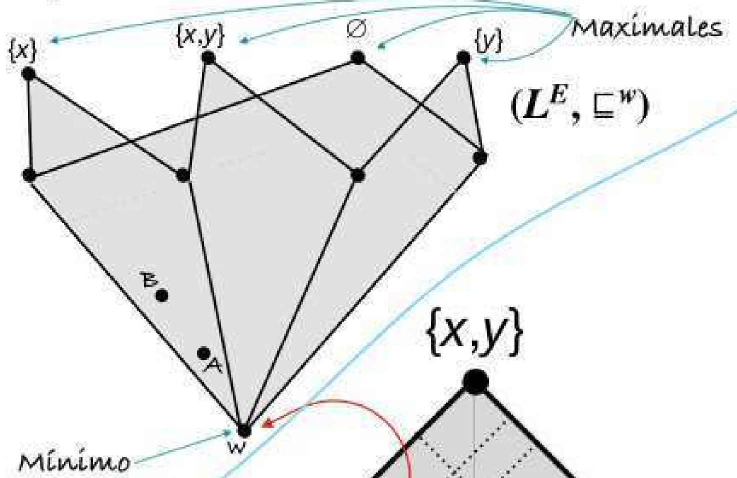
$W_\alpha = \{x,y\}$

$(P(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (P(E), \supseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$

Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:



$W_\alpha = E = \{x,y\}\ \ \forall\alpha\in L:\ 0 \le \alpha \le \min(w(x),w(y)) = w(x)$

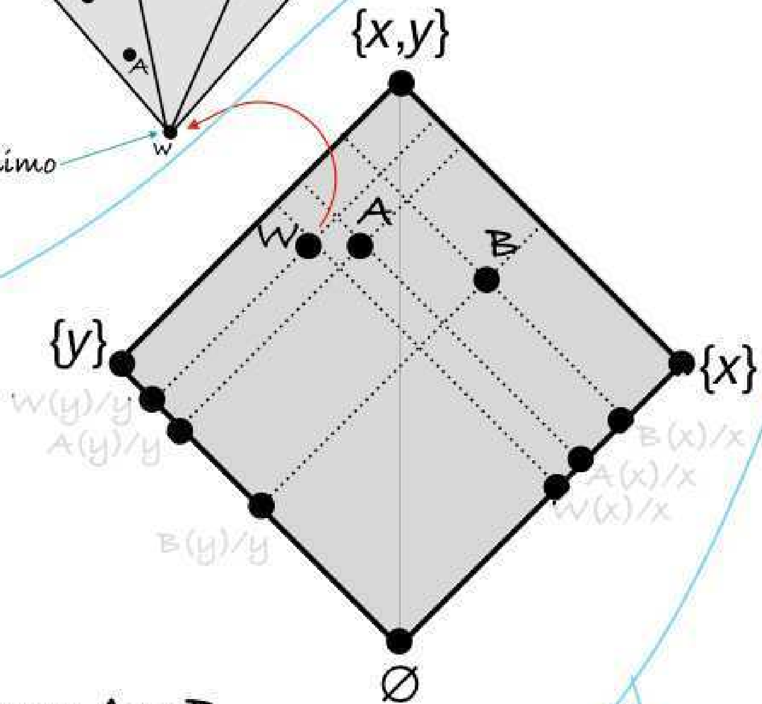
$W_\alpha = \{y\}\ \ \forall\alpha\in L:\ \min(w(x),w(y)) = w(x)\ < \alpha \le \max(w(x),w(y)) = w(y)$

$W_\alpha = \varnothing\ \ \forall\alpha\in L:\ \max(w(x),w(y)) = w(y)\ < \alpha \le 1$

$A_\alpha = E = \{x,y\}\ \ \forall\alpha\in L:\ 0 \le \alpha \le \min(A(x),A(y)) = A(x)$

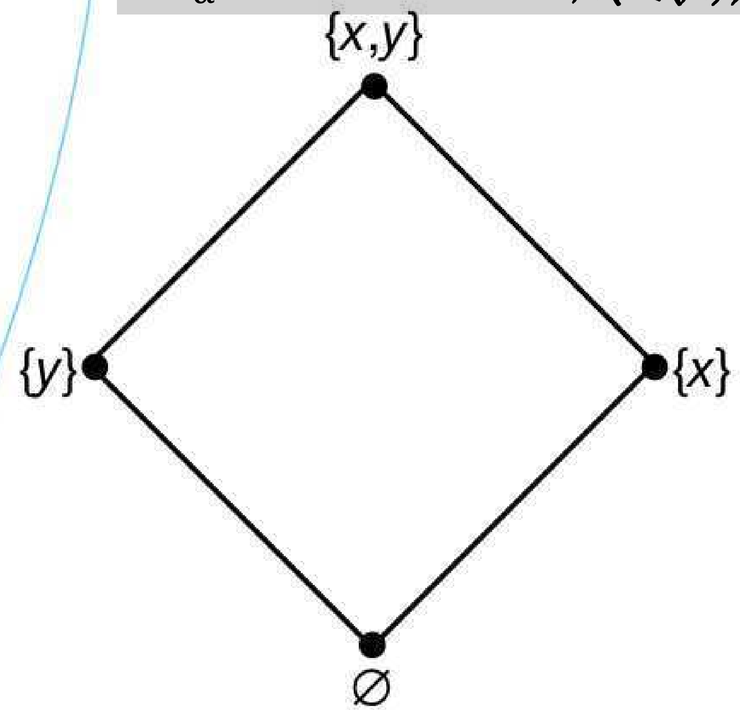
$A_\alpha = \{y\}\ \ \forall\alpha\in L:\ \min(A(x),A(y)) = A(x)\ < \alpha \le \max(A(x),A(y)) = A(y)$

$A_\alpha = \varnothing\ \ \forall\alpha\in L:\ \max(A(x),A(y)) = A(y)\ < \alpha \le 1$

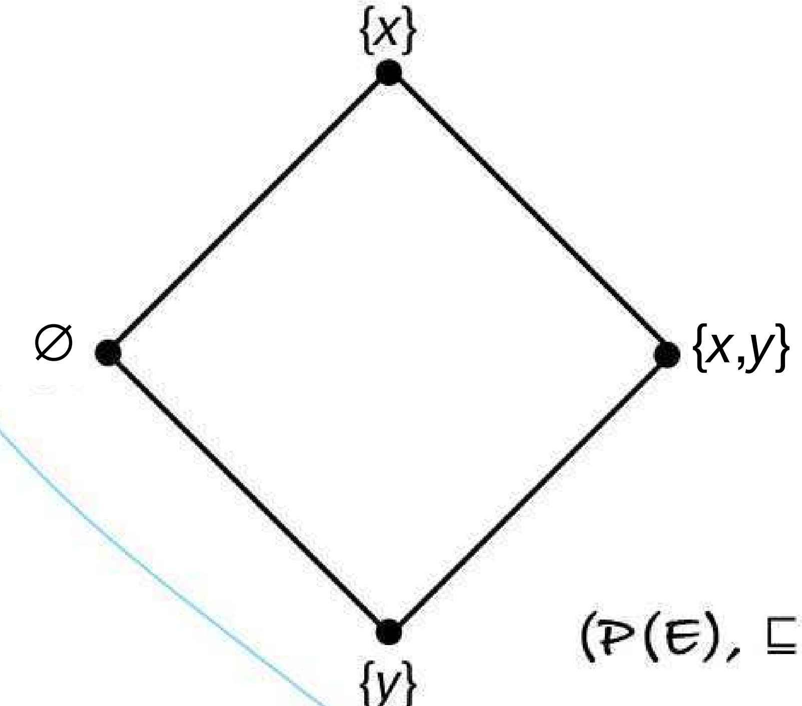


Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^W B$

$(L^E, \le)$



$(P(E), \subseteq) = (P(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$

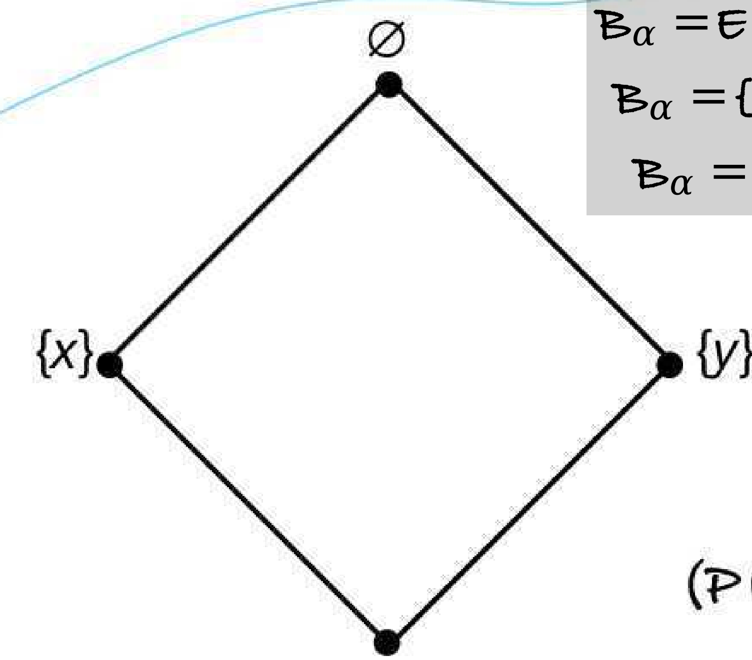


$(P(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

$B_\alpha = E = \{x,y\}\ \ \forall\alpha\in L:\ 0 \le \alpha \le B(y)$

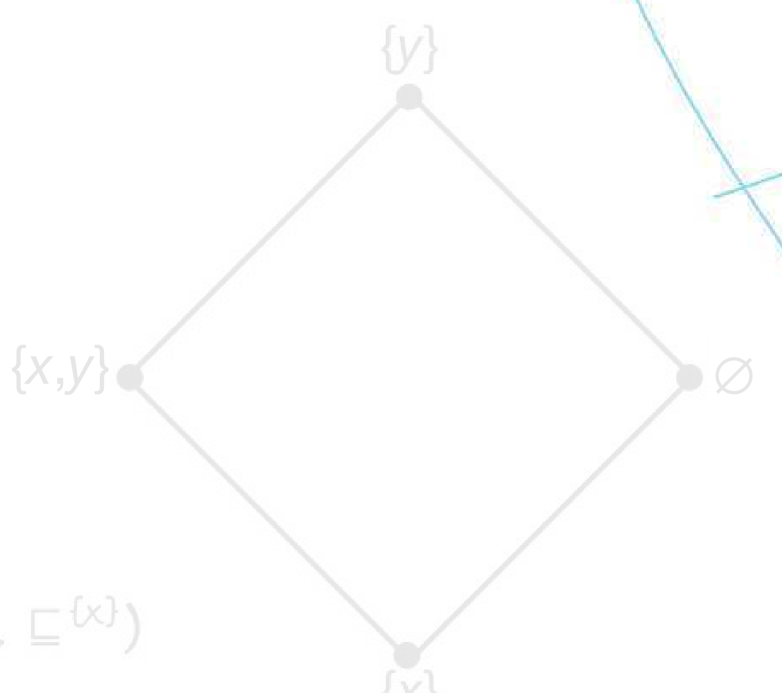
$B_\alpha = \{x\}\ \ \forall\alpha\in L:\ B(y) < \alpha \le B(x)$

$B_\alpha = \varnothing\ \ \forall\alpha\in L:\ B(x) < \alpha \le 1$



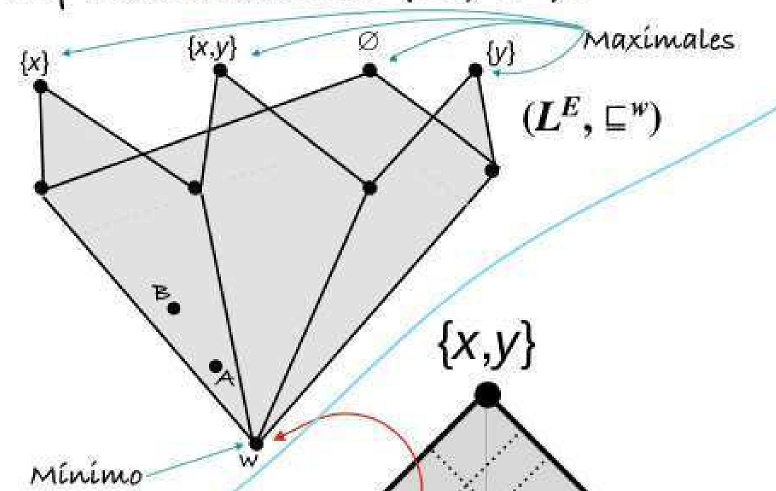
$W_\alpha = \{x,y\}$

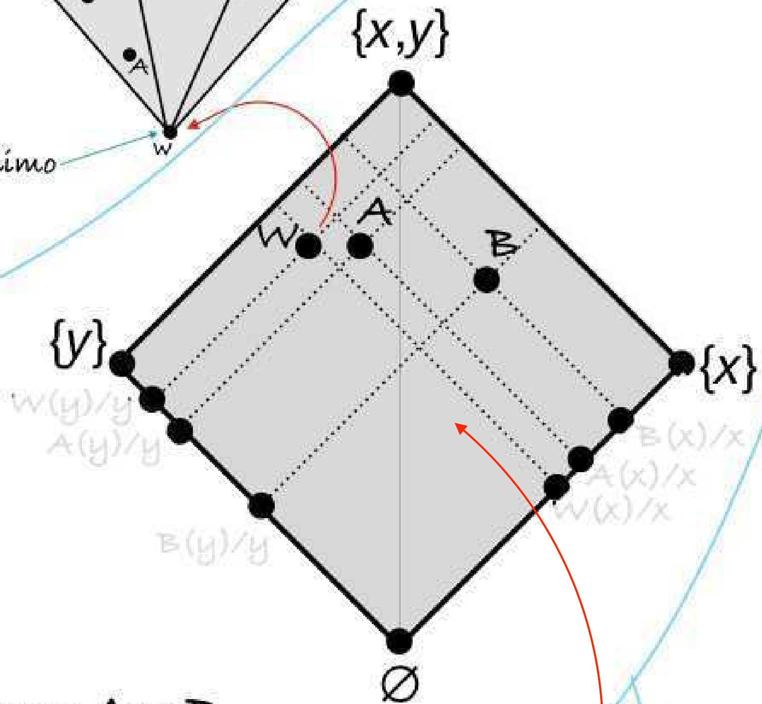
$(P(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (P(E), \supseteq)$



$(P(E), \sqsubseteq^{\{x\}})$

inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^w)$:



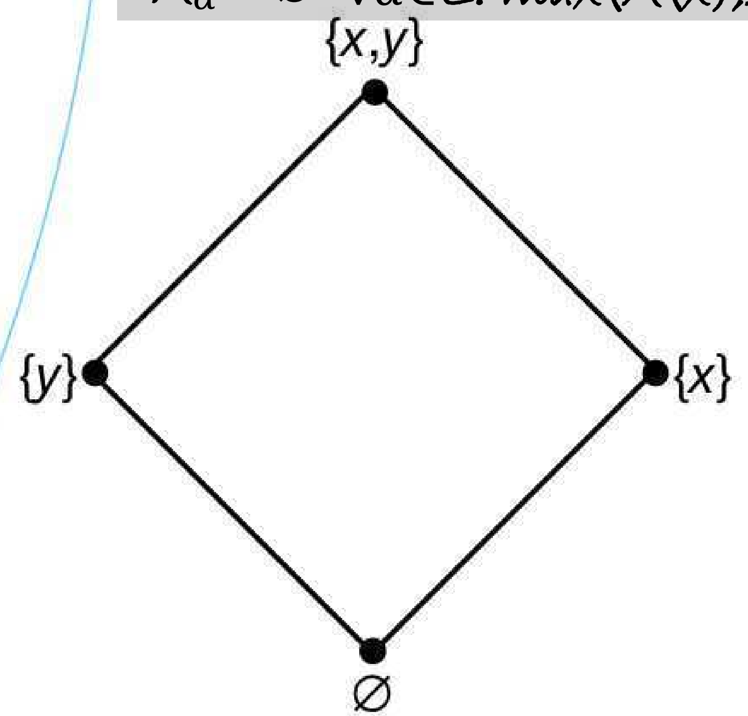


Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^w B$

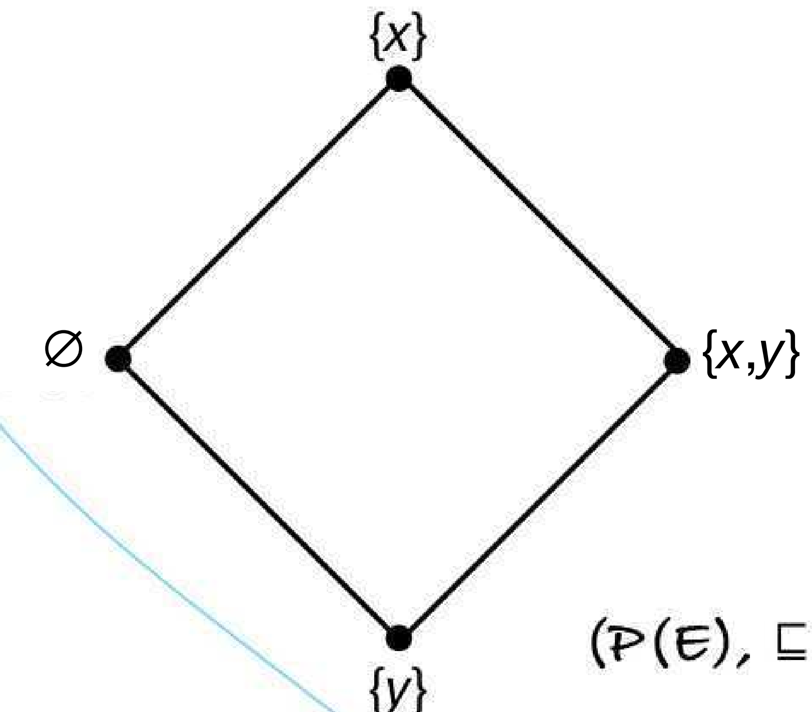
$(L^E, \leq)$

$W_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq \min(w(x),w(y)) = w(x)$
$W_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L: \min(w(x),w(y)) = w(x) < \alpha \leq \max(w(x),w(y)) = w(y)$
$W_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L: \max(w(x),w(y)) = w(y) < \alpha \leq 1$

$A_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq \min(A(x),A(y)) = A(x)$
$A_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L: \min(A(x),A(y)) = A(x) < \alpha \leq \max(A(x),A(y)) = A(y)$
$A_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L: \max(A(x),A(y)) = A(y) < \alpha \leq 1$

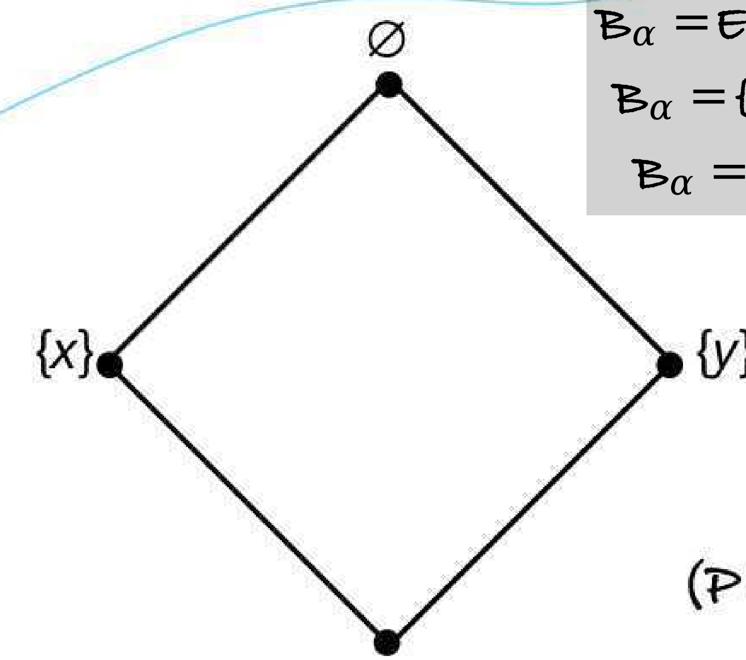


$(\mathcal{P}(E), \subseteq) = (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\varnothing})$



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

$B_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq B(y)$
$B_\alpha = \{x\}$ $\forall \alpha \in L: B(y) < \alpha \leq B(x)$
$B_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \in L: B(x) < \alpha \leq 1$



$W_\alpha = \{x,y\}$

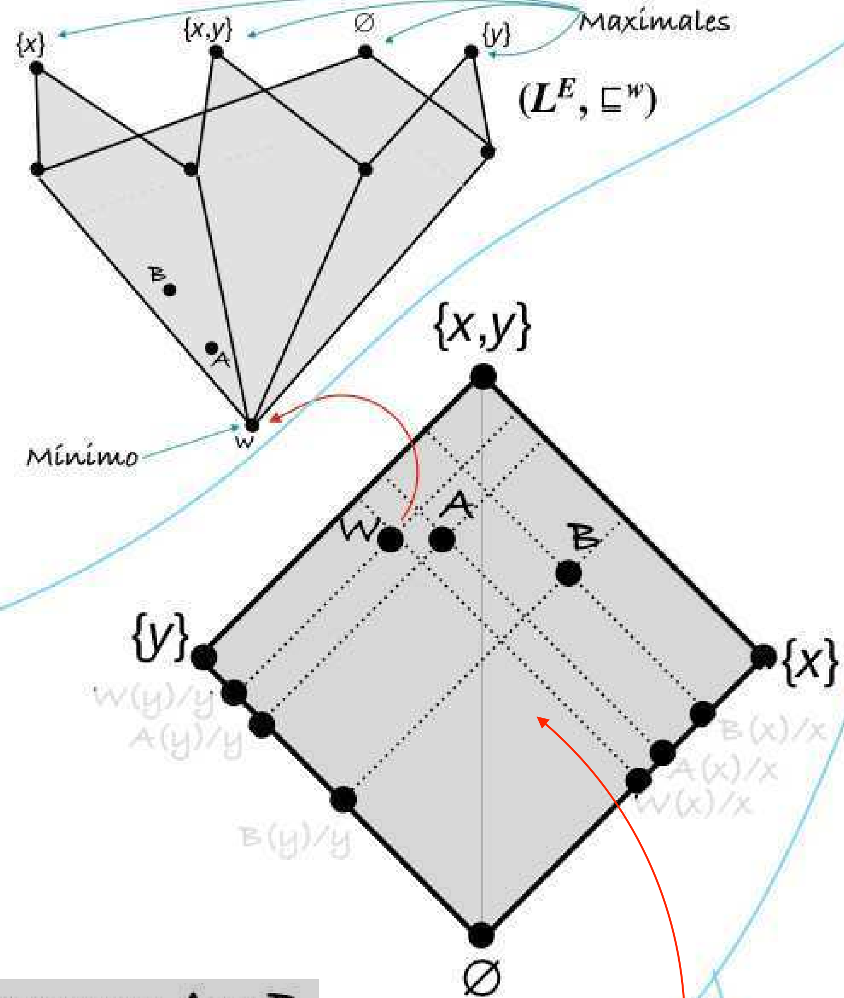
$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (\mathcal{P}(E), \supseteq)$

$0 < B(y) < w(x) < w(x) < A(x) < A(y)$,
$A(y) < B(x) < B(y) < w(y) < 1$,

luego

para $0 \leq \alpha < B(y)$: $(A_\alpha = E, B_\alpha = E, W_\alpha = E) \& (E \sqsubseteq^E E)$,
para $(B(y) \leq \alpha < w(x)$: $A_\alpha = E, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = E) \& (E \sqsubseteq^E \{x\})$,
para $w(x) \leq \alpha \leq A(x)$: $A_\alpha = E, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (E \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $A(x) < \alpha < A(y)$: $A_\alpha = \{y\}, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (\{y\} \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $A(y) \leq \alpha \leq B(x)$: $A_\alpha = \varnothing, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (\varnothing \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $B(x) < \alpha \leq B(y)$: $A_\alpha = \varnothing, B_\alpha = \varnothing, W_\alpha = \{y\}) \& (\varnothing \sqsubseteq^{\{y\}} \varnothing)$,
para $B(y) < \alpha \leq 1$: $A_\alpha = \varnothing, B_\alpha = \varnothing, W_\alpha = \varnothing) \& (\varnothing \sqsubseteq^{\varnothing} \varnothing)$.

Inf-semirretículo $(L^E, \sqsubseteq^w)$:

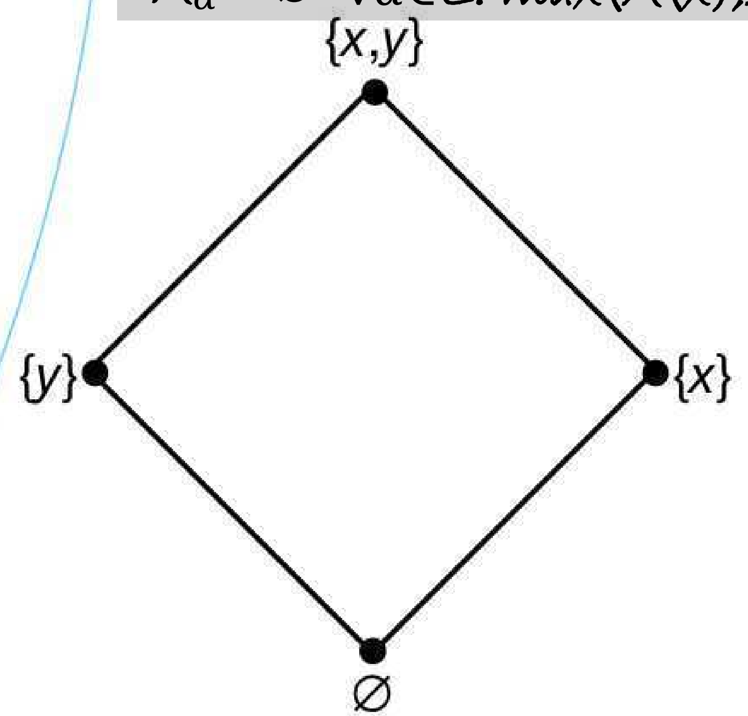


$(L^E, \leq)$

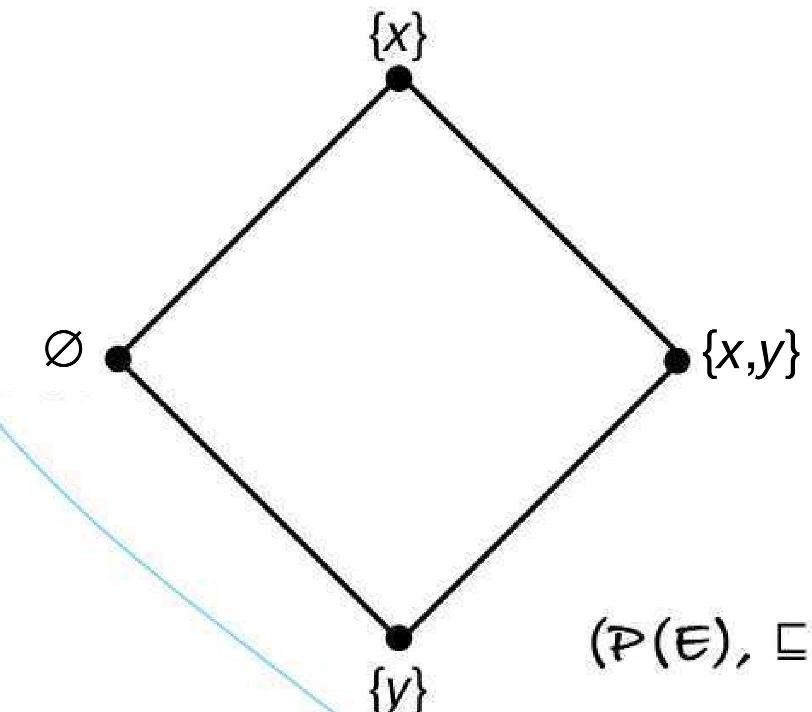
Borrosos A y B tales que $A \sqsubseteq^w B$

$W_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq \min(w(x), w(y)) = w(x)$
$W_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L: \min(w(x), w(y)) = w(x) < \alpha \leq \max(w(x), w(y)) = w(y)$
$W_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha \in L: \max(w(x), w(y)) = w(y) < \alpha \leq 1$

$A_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq \min(A(x), A(y)) = A(x)$
$A_\alpha = \{y\}$ $\forall \alpha \in L: \min(A(x), A(y)) = A(x) < \alpha \leq \max(A(x), A(y)) = A(y)$
$A_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha \in L: \max(A(x), A(y)) = A(y) < \alpha \leq 1$

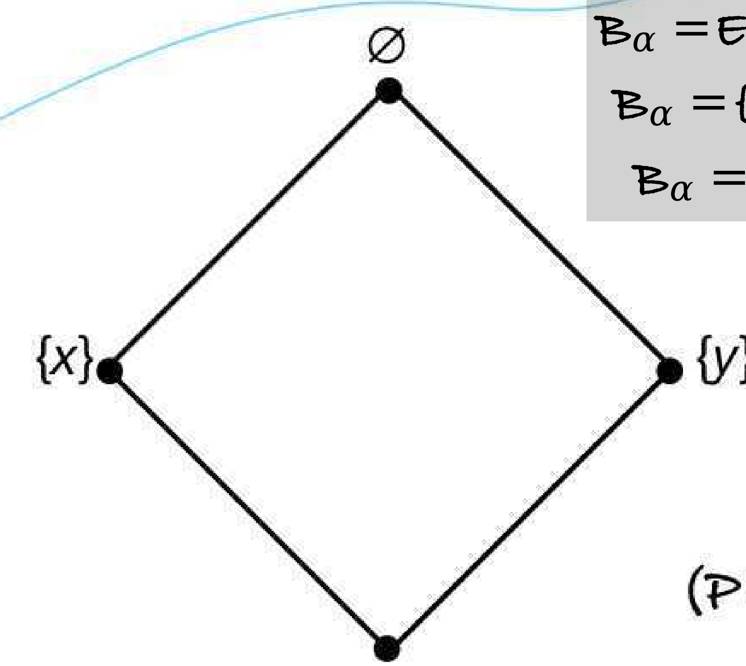


$(\mathcal{P}(E), \subseteq) = (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\emptyset})$



$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{y\}})$

$B_\alpha = E = \{x,y\}$ $\forall \alpha \in L: 0 \leq \alpha \leq B(y)$
$B_\alpha = \{x\}$ $\forall \alpha \in L: B(y) < \alpha \leq B(x)$
$B_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha \in L: B(x) < \alpha \leq 1$



$W_\alpha = \{x,y\}$

$(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{\{x,y\}}) = (\mathcal{P}(E), \supseteq)$

$0 < B(y) < w(x) < w(x) < A(x) < A(y),$
$A(y) < B(x) < B(y) < w(y) < 1,$

luego

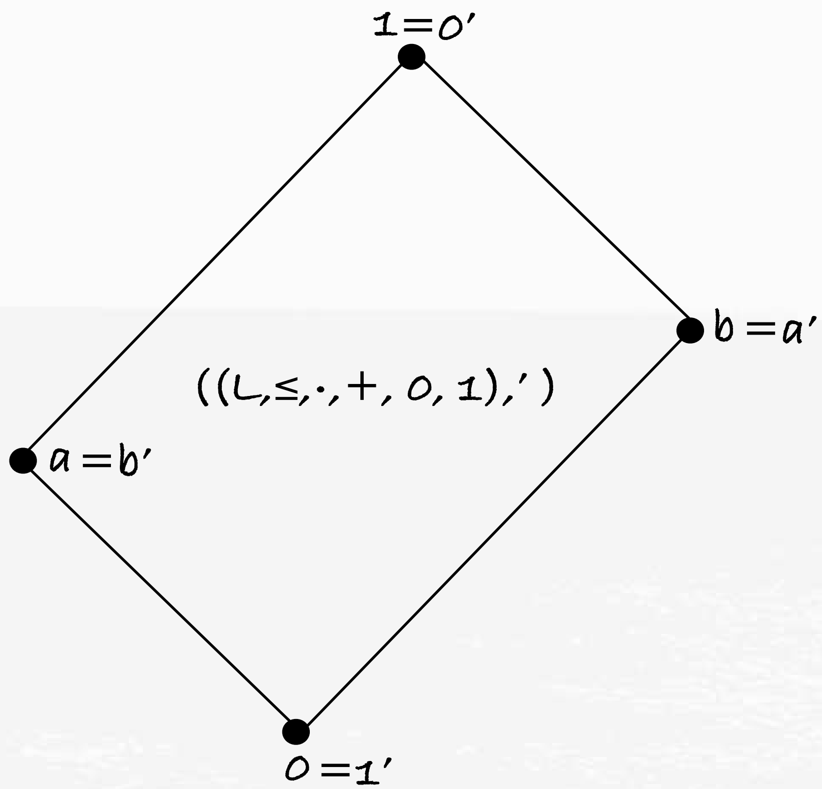
para $0 \leq \alpha < B(y)$: $(A_\alpha = E, B_\alpha = E, W_\alpha = E) \& (E \sqsubseteq^E E)$,
para $(B(y) \leq \alpha < w(x)$: $A_\alpha = E, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = E) \& (E \sqsubseteq^E \{x\})$,
para $w(x) \leq \alpha \leq A(x)$: $A_\alpha = E, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (E \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $A(x) < \alpha < A(y)$: $A_\alpha = \{y\}, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (\{y\} \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $A(y) \leq \alpha \leq B(x)$: $A_\alpha = \emptyset, B_\alpha = \{x\}, W_\alpha = \{y\}) \& (\emptyset \sqsubseteq^{\{y\}} \{x\})$,
para $B(x) < \alpha \leq B(y)$: $A_\alpha = \emptyset, B_\alpha = \emptyset, W_\alpha = \{y\}) \& (\emptyset \sqsubseteq^{\{y\}} \emptyset)$,
para $B(y) < \alpha \leq 1$: $A_\alpha = \emptyset, B_\alpha = \emptyset, W_\alpha = \emptyset) \& (\emptyset \sqsubseteq^{\emptyset} \emptyset)$.

Es decir: $A_\alpha \sqsubseteq^{W_\alpha} B_\alpha$ $\forall \alpha \in [0,1]$

Órdenes de actividad en otros ejemplos distinguidos de retículos distributivos:
Caso de retículos de intervalos de retículos distributivos

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

$((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$
Retículo distributivo
con negación fuerte



ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a}) \,\&\, (\underline{b}\leq\bar{b})$

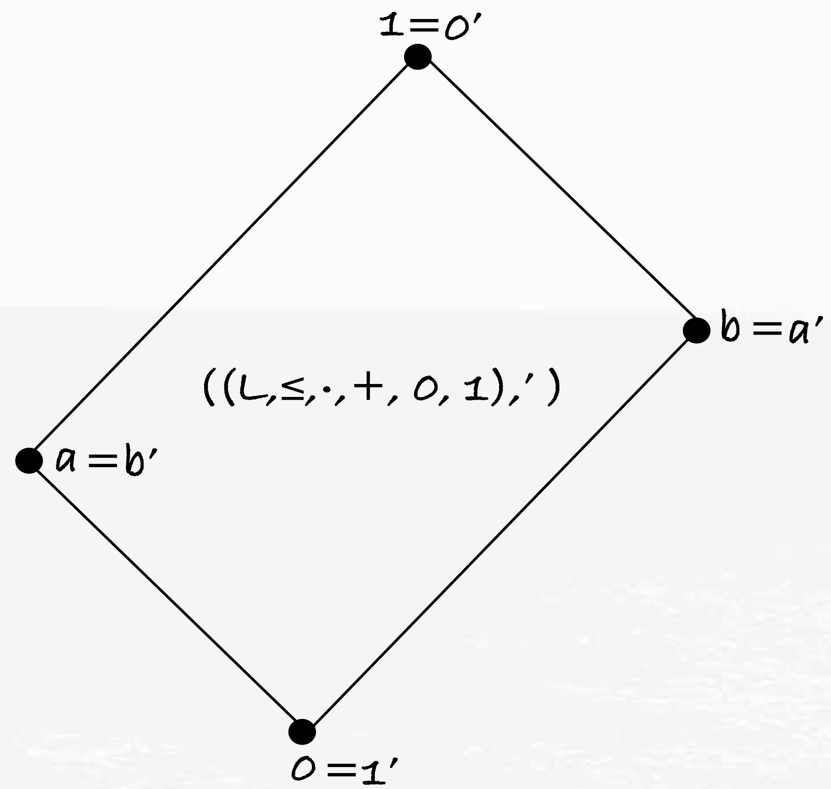
$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte



ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$, con $\underline{a}\leq\overline{a}$.

$[\underline{a},\overline{a}]\leq[\underline{b},\overline{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\overline{a})\,\&\,(\underline{b}\leq\overline{b})$

$[\underline{a},\overline{a}]\cdot[\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \overline{a}\cdot\overline{b}]$

$[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \overline{a}+\overline{b}]$

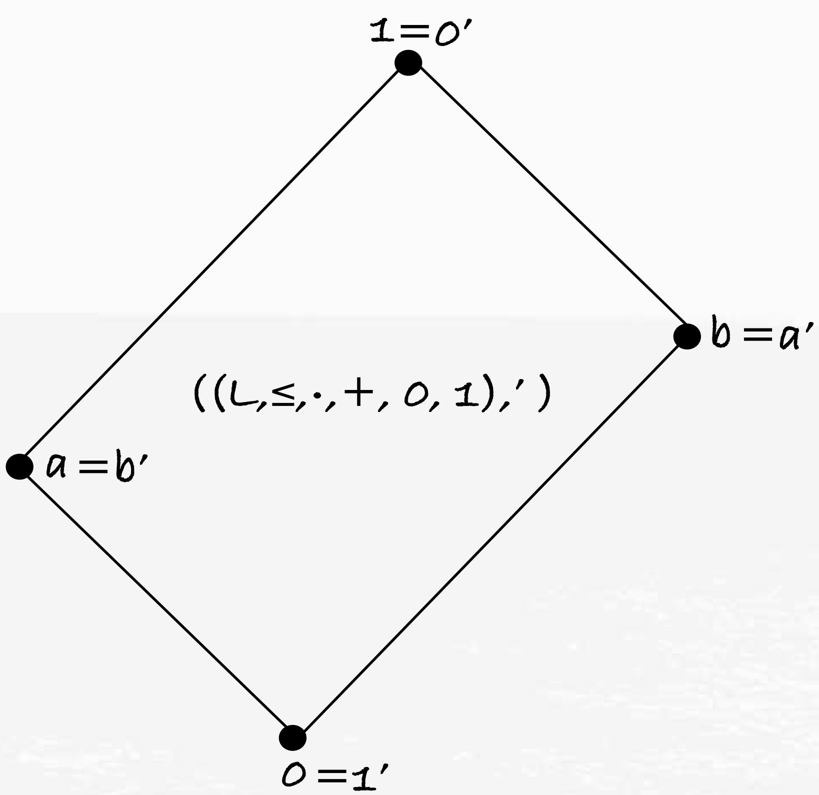
$[\underline{a},\overline{a}]'=[\overline{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

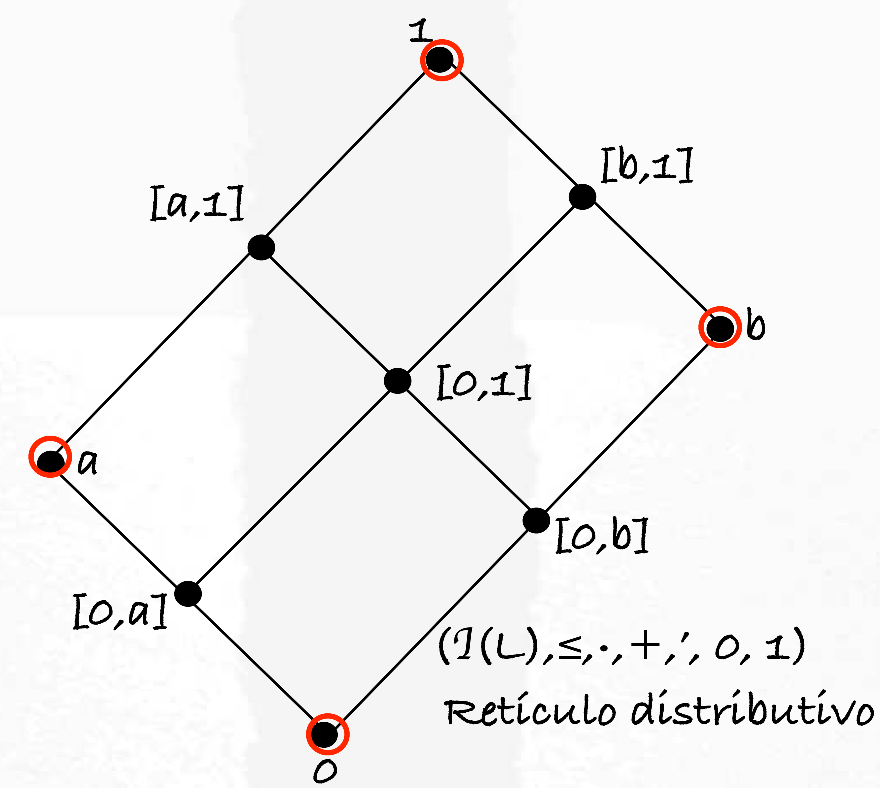
$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)





ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a})\,\&\,(\underline{b}\leq\bar{b})$

$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

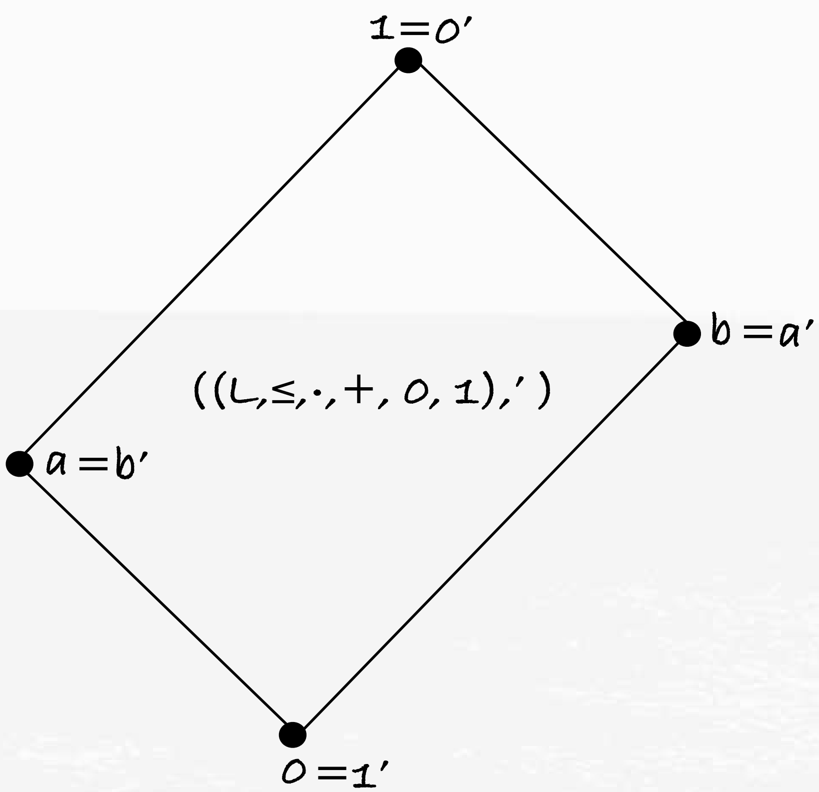
$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

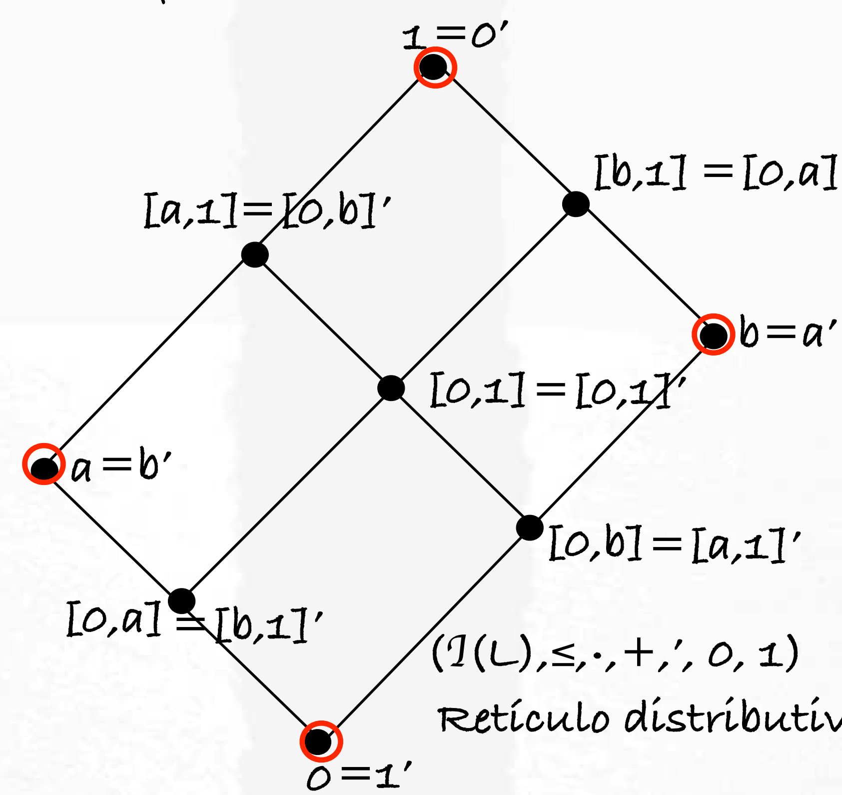
$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$\Rightarrow$

$((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)





$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a})\,\&\,(\underline{b}\leq\bar{b})$

$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

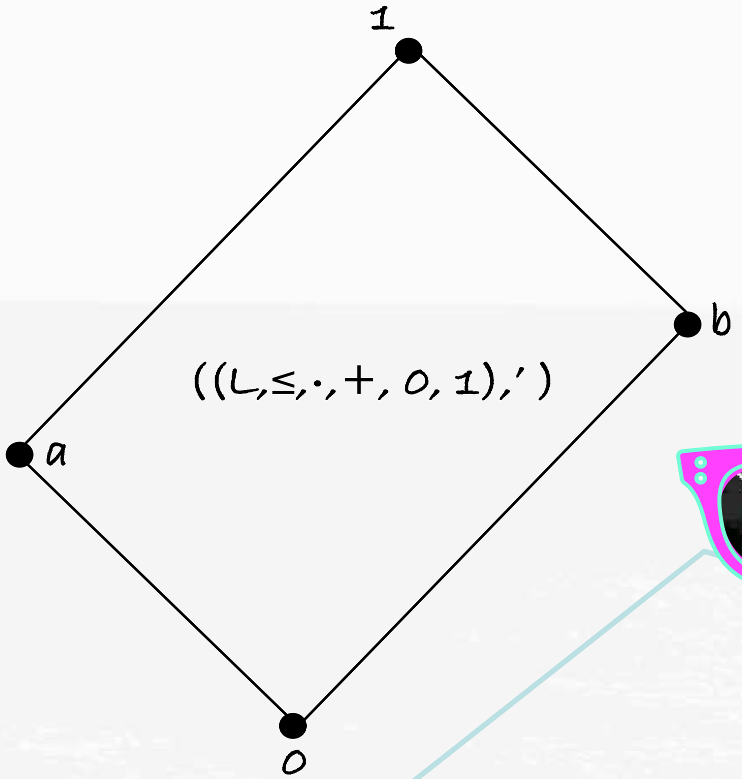
$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

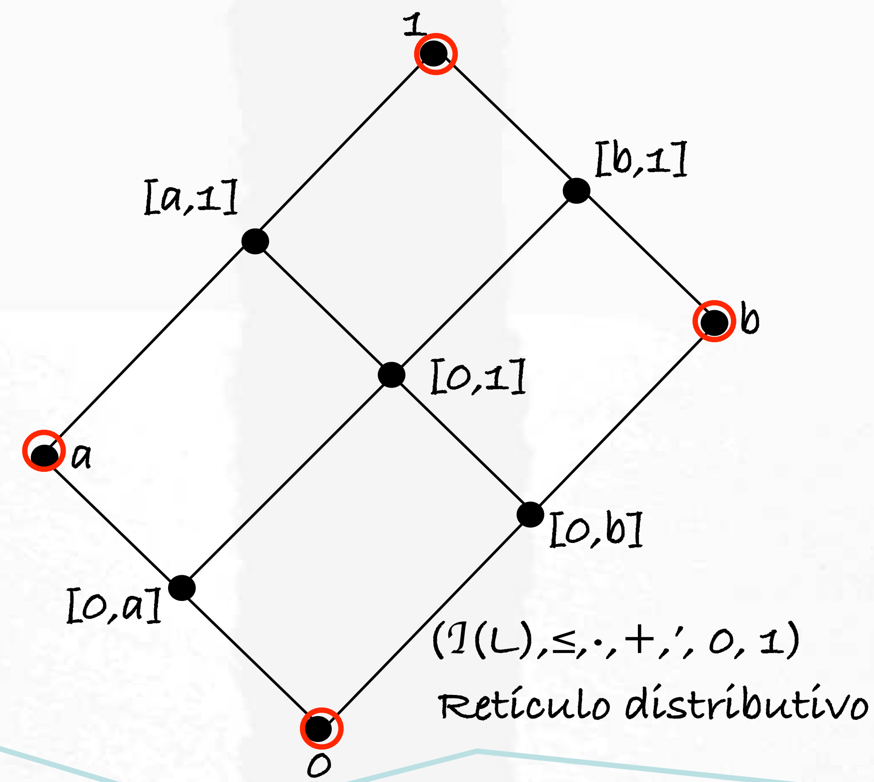
$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ Retículo distributivo con negación fuerte $\Rightarrow$ $((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$ Retículo distributivo con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)





Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$:

$([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow$

$([y]\cdot[w]\leq[x]\leq[y]+[w])$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a}) \,\&\, (\underline{b}\leq\bar{b})$

$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

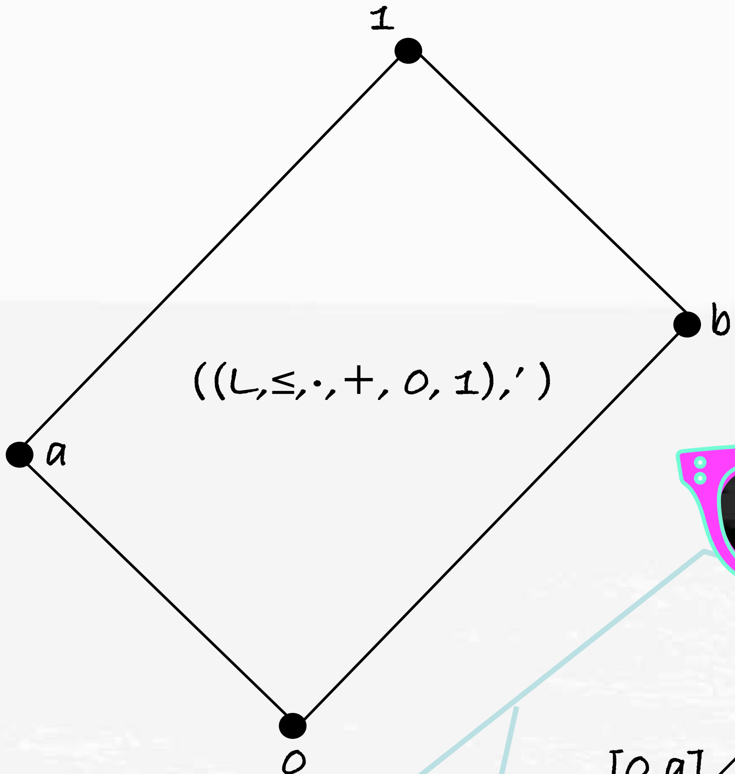
$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

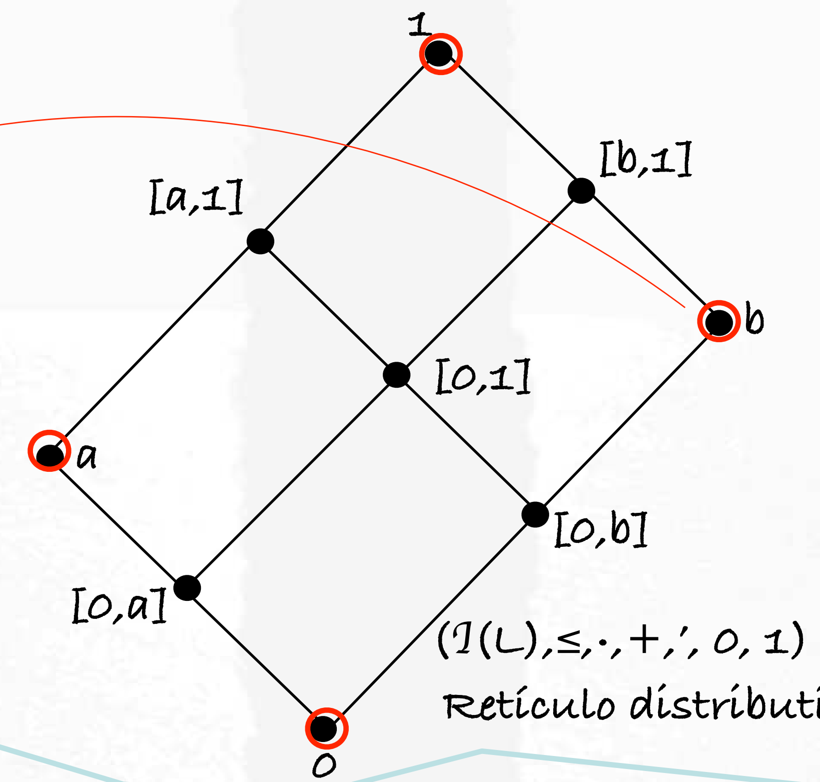
$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

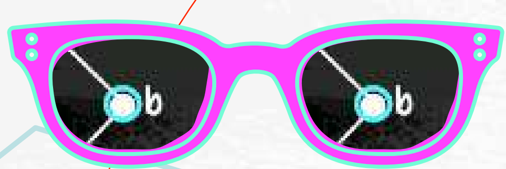
$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

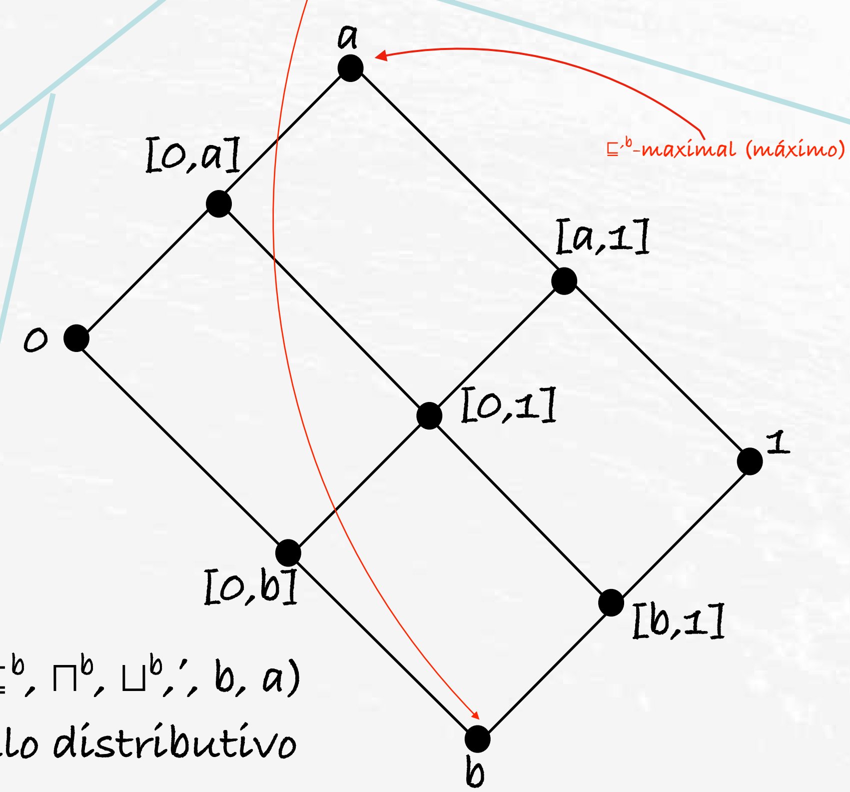
$((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)









Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$:
$([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow$

$([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^b,\sqcap^b,\sqcup^b,',b,a)$
Retículo distributivo
isomorfo a $(\mathcal{I}(L),\leq)$

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a})\,\&\,(\underline{b}\leq\bar{b})$

$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

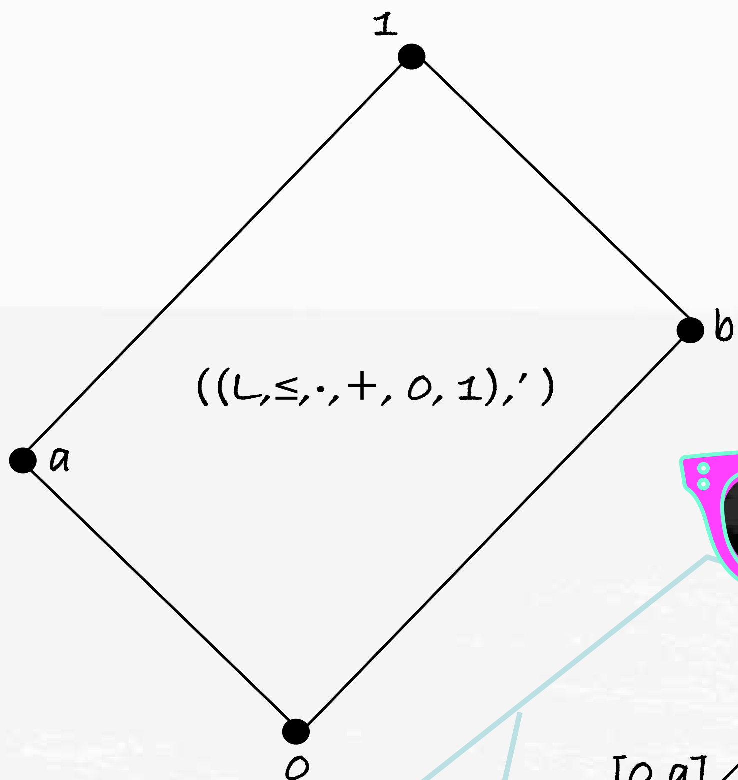
$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

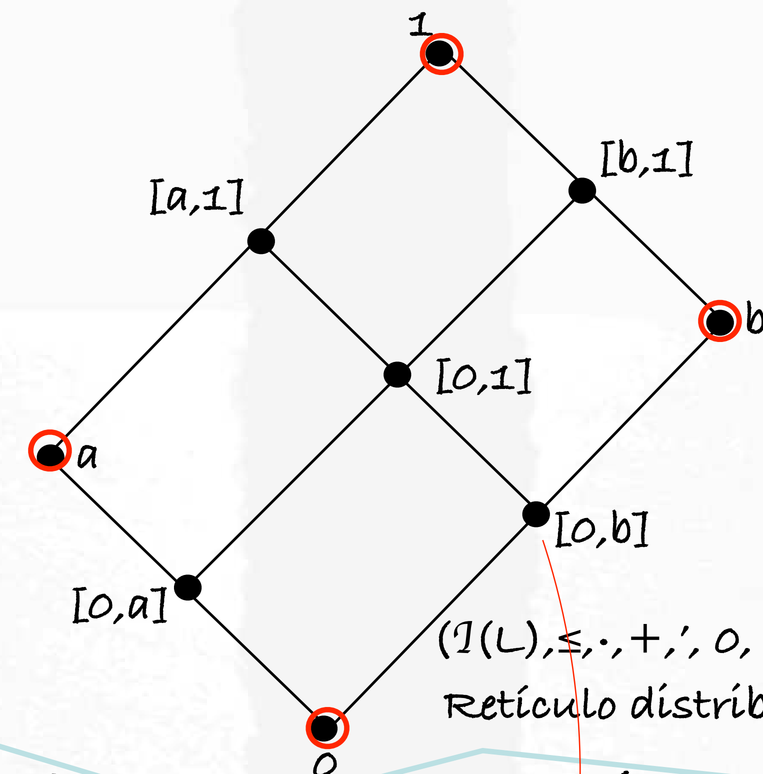
$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo
con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)



$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$

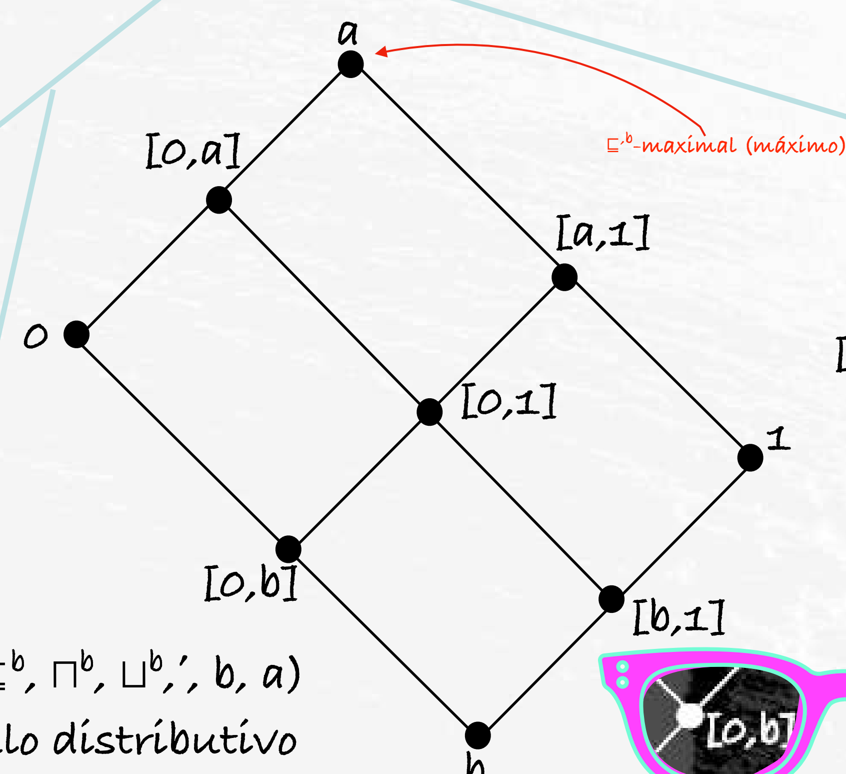


$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

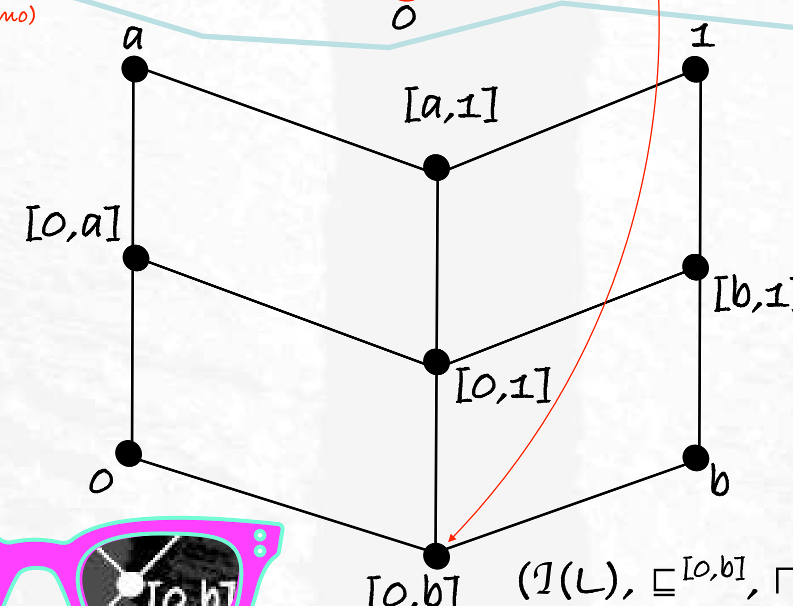
Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$:

$([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow$

$([y]\cdot[w]\leq[x]\leq[y]+[w])$



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^b,\sqcap^b,\sqcup^b,',b,a)$
Retículo distributivo
isomorfo a $(\mathcal{I}(L),\leq)$



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,b]},\sqcap^{[0,b]},[0,b])$
Inf-semirretículo

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Intervalo de $(L,\leq)$: $[a]=[\underline{a},\bar{a}]$, con $\underline{a}\leq\bar{a}$.

$[\underline{a},\bar{a}]\leq[\underline{b},\bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a}\leq\bar{a})\,\&\,(\underline{b}\leq\bar{b})$

$[\underline{a},\bar{a}]\cdot[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}\cdot\underline{b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}]$

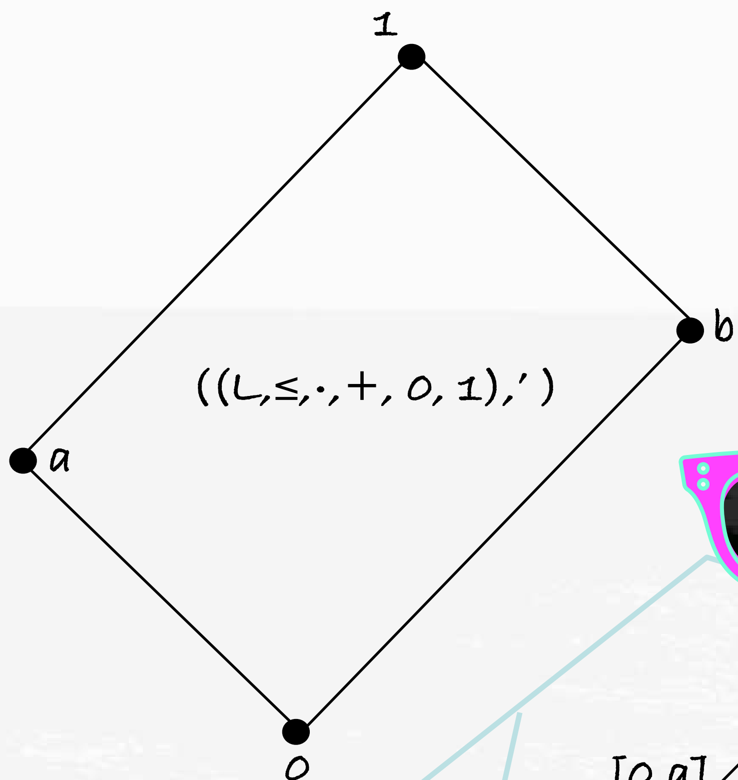
$[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\ \bar{a}+\bar{b}]$

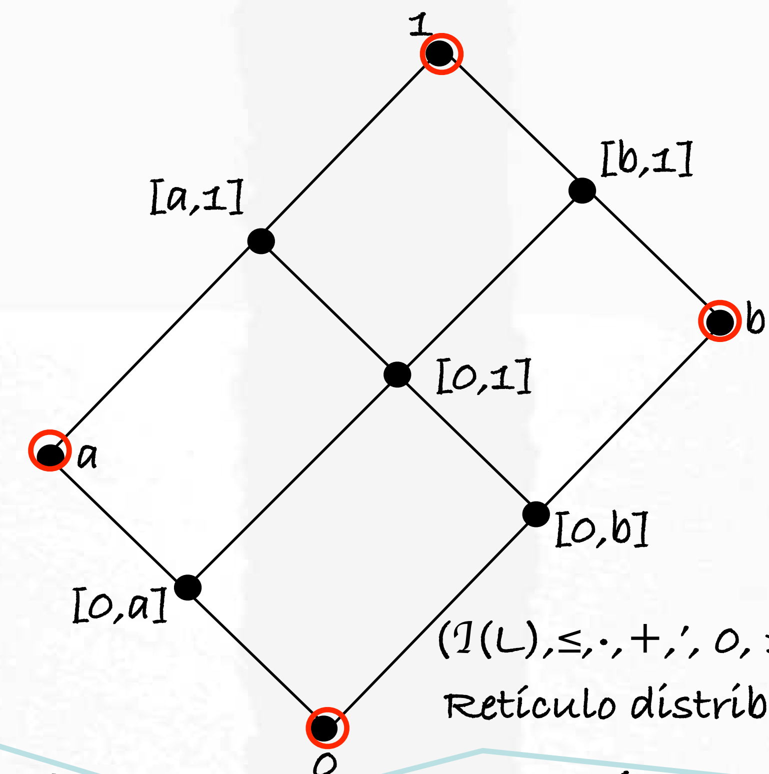
$[\underline{a},\bar{a}]'=[\bar{a}',\underline{a}']$ (si existe negación en L).

$\mathcal{I}(L)$ conjunto de intervalos con el orden y los operadores sup e inf asociados:

$((L,\leq,\cdot,+,0,1),')$ Retículo distributivo con negación fuerte $\Rightarrow$ $((\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1),')$ Retículo distributivo con negación fuerte

$(L,\leq)$ es $\{0,1\}$-subrretículo de $(\mathcal{I}(L),\leq)$, (identificando $x\in L$ con $[x,x]\in\mathcal{I}(L)$)



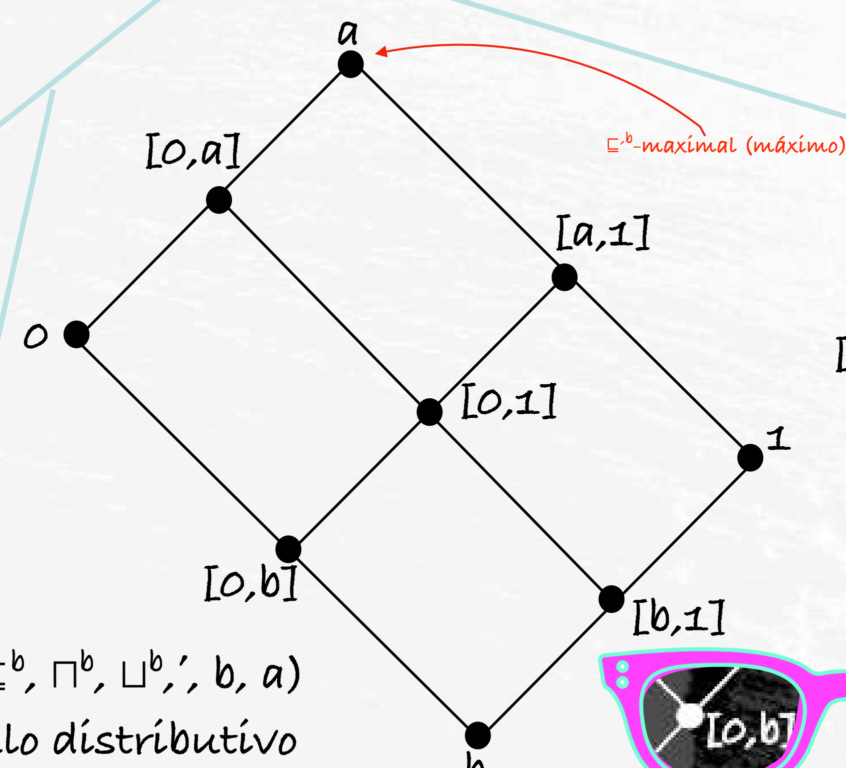


$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$ Retículo distributivo

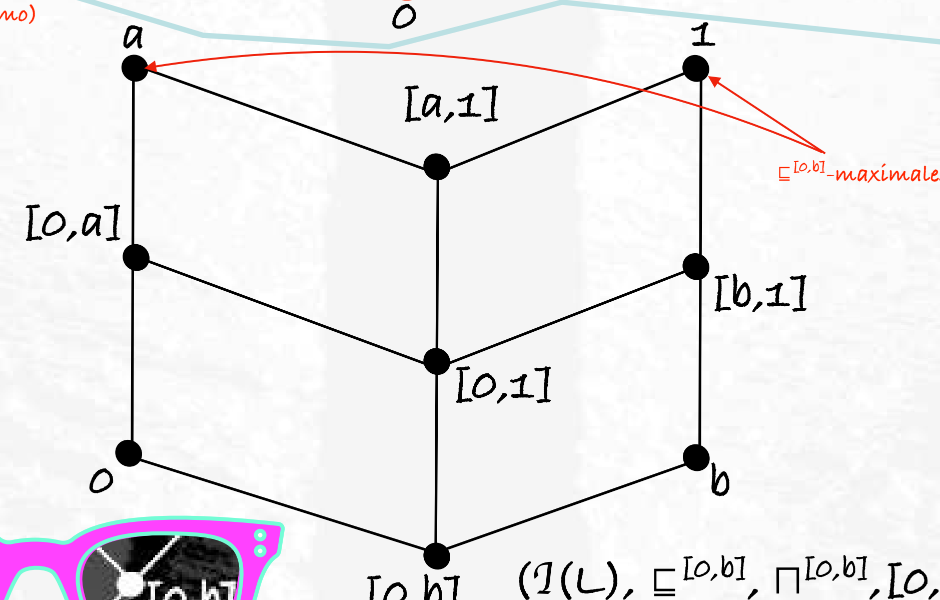
Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$:

$([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow$

$([y]\cdot[w]\leq[x]\leq[y]+[w])$



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{b},\sqcap^{b},\sqcup^{b},',b,a)$ Retículo distributivo isomorfo a $(\mathcal{I}(L),\leq)$



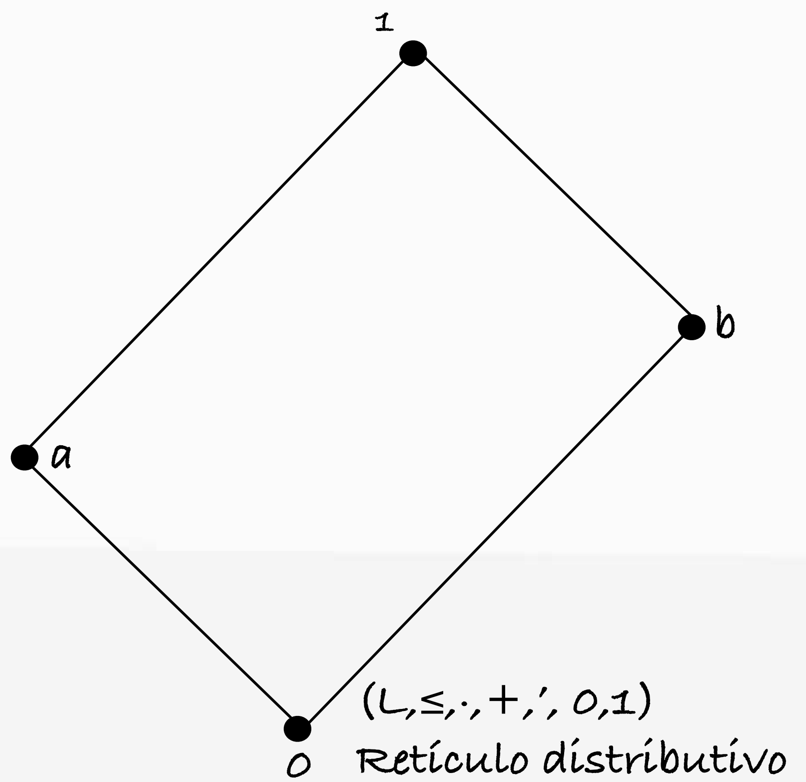
$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,b]},\sqcap^{[0,b]},[0,b])$ Inf-semirretículo

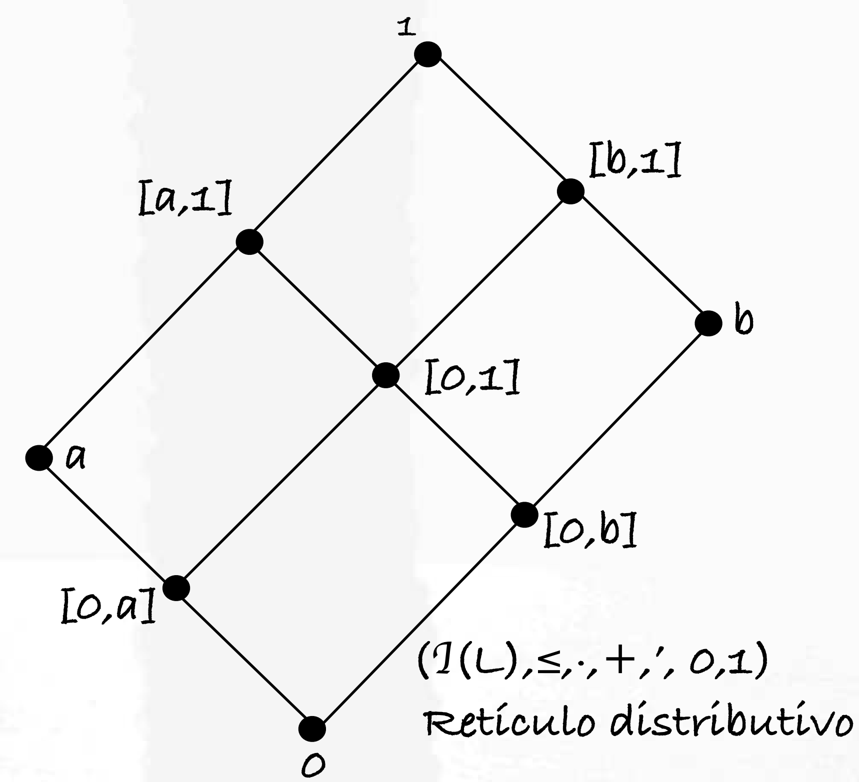
Un caso distinguido de la teoría de Conjuntos Borrosos: "Sharpened order" como dual de un orden de actividad

ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

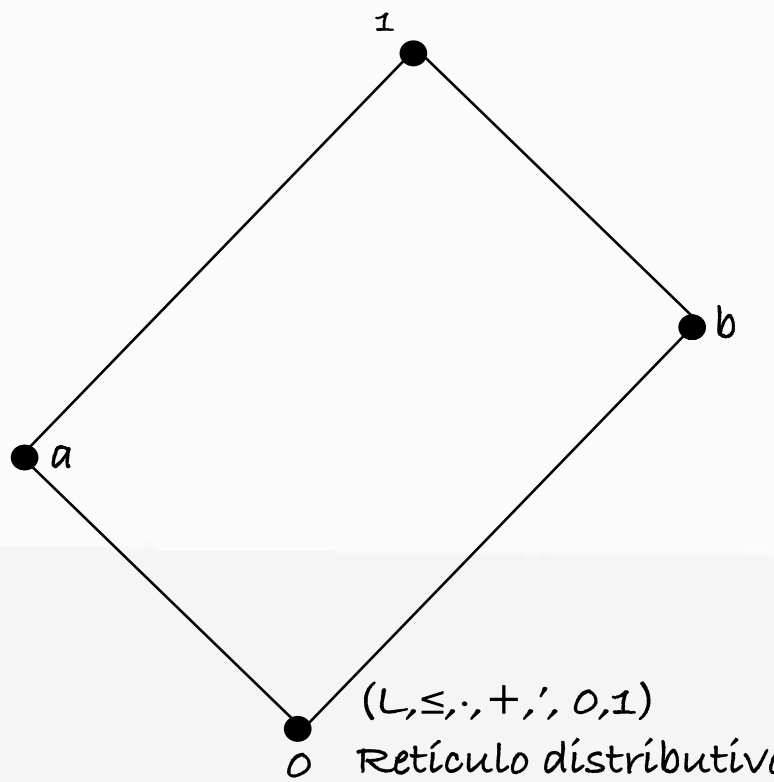




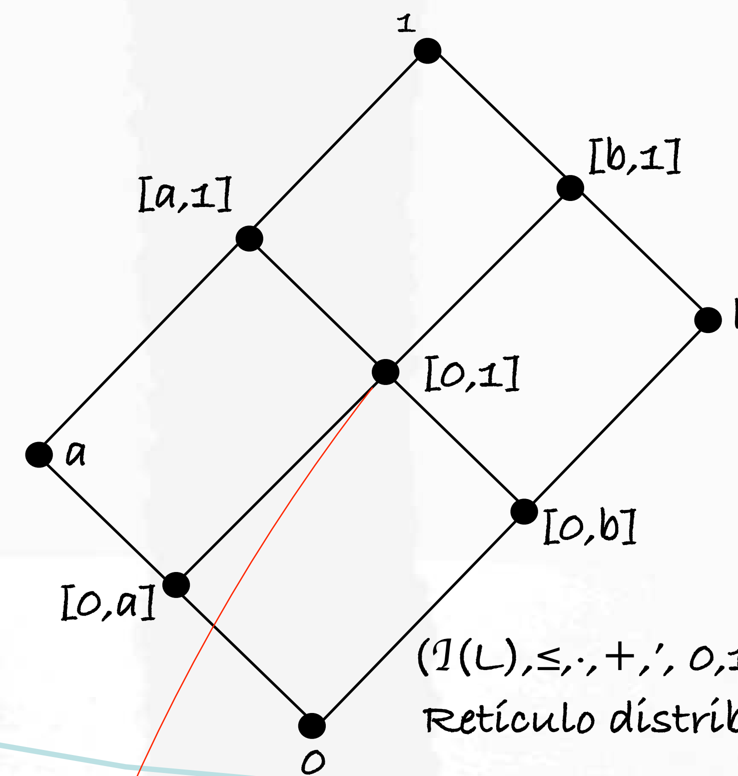
ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

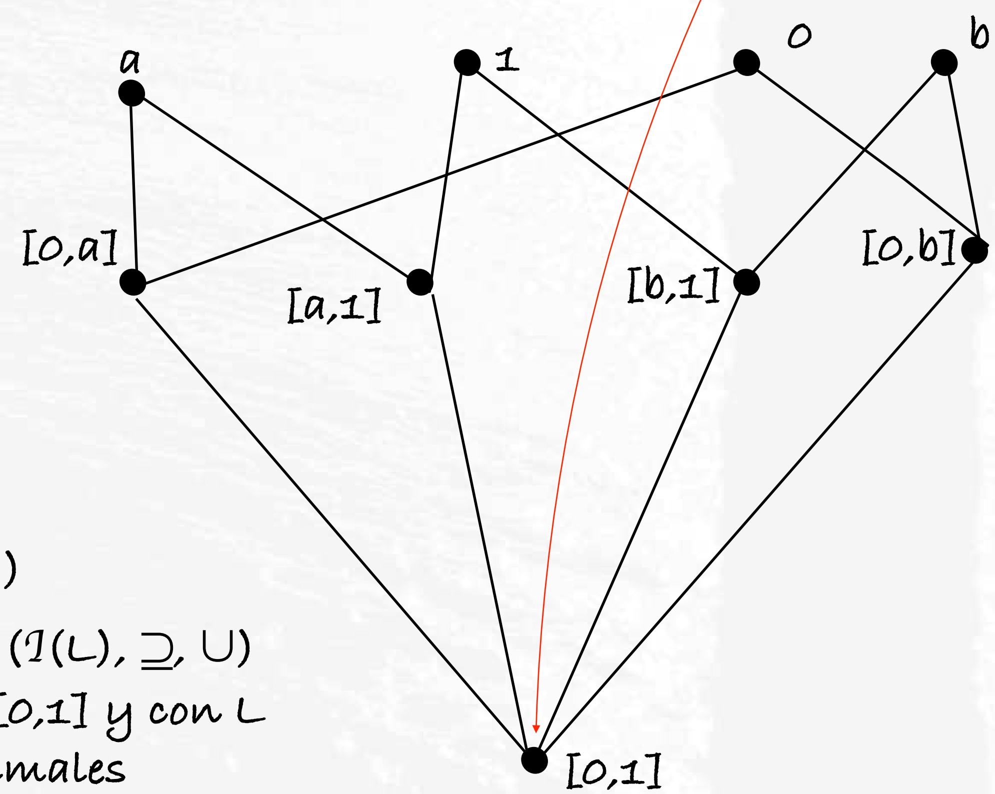


$(L,\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo



$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

Si $[w]=[0,1]$, el orden de actividad $\sqsubseteq^{[0,1]}$ es la restricción de la inclusión de conjuntos $\supseteq$ a $\mathcal{I}(L)$: $([x]\sqsubseteq^{[0,1]}[y] \Leftrightarrow [x] \supseteq [y])$



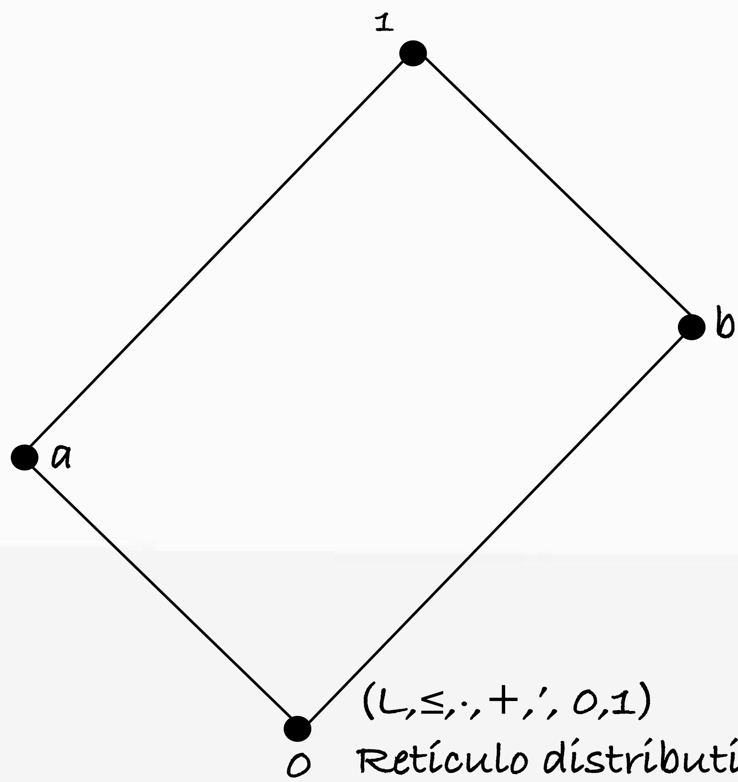
$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,1]},\sqcap^{[0,1]},[0,1])$

Es el Inf-semirretículo $(\mathcal{I}(L),\supseteq,\cup)$ con elemento mínimo $[0,1]$ y con L como conjunto de maximales

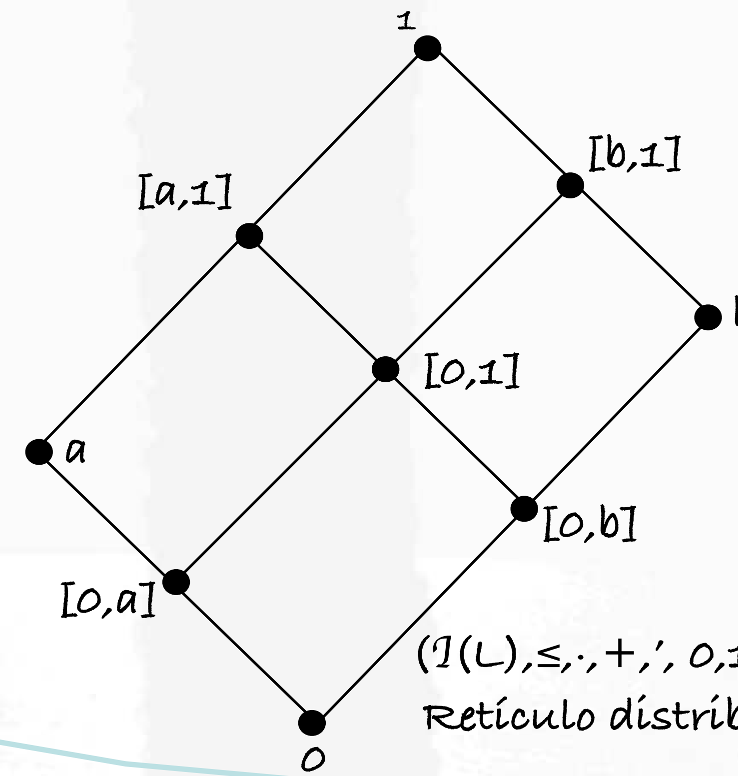
ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

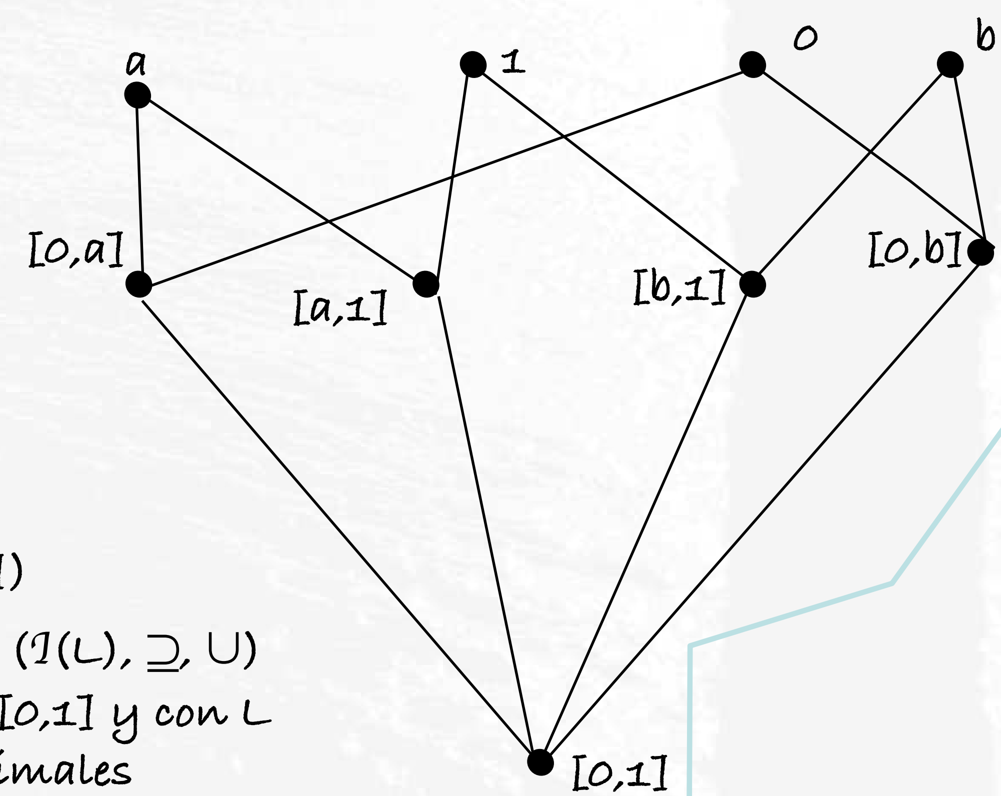


$(L,\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo



$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

Si $[w]=[0,1]$, el orden de actividad $\sqsubseteq^{[0,1]}$ es la restricción de la inclusión de conjuntos $\supseteq$ a $\mathcal{I}(L)$: $([x]\sqsubseteq^{[0,1]}[y] \Leftrightarrow [x]\supseteq[y])$



Orden Dual:
"Sharpened order"
en retículos
distributivos.

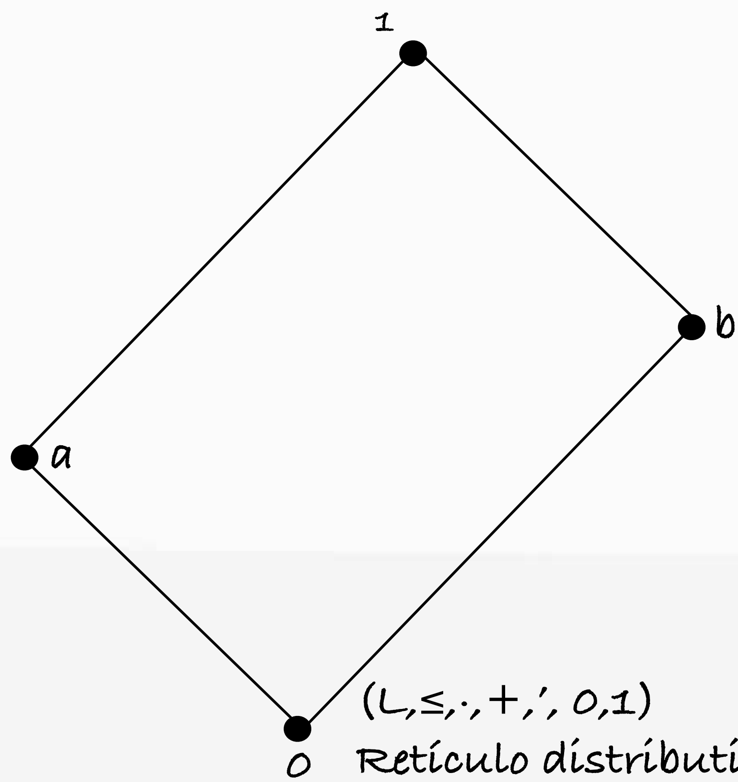
$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,1]},\sqcap^{[0,1]},[0,1])$

Es el Inf-semirretículo $(\mathcal{I}(L),\supseteq,\cup)$ con elemento mínimo $[0,1]$ y con L como conjunto de maximales

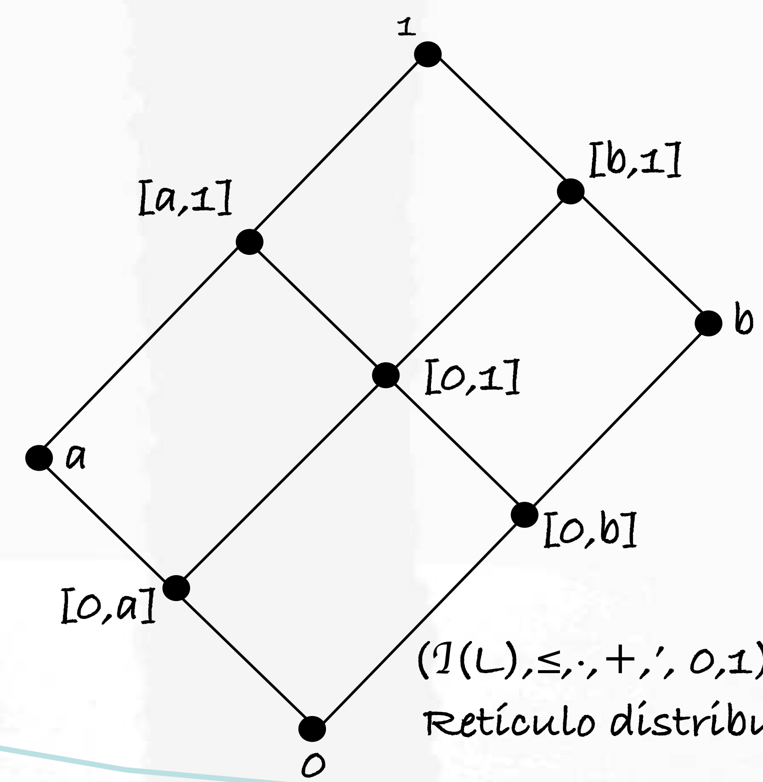
ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

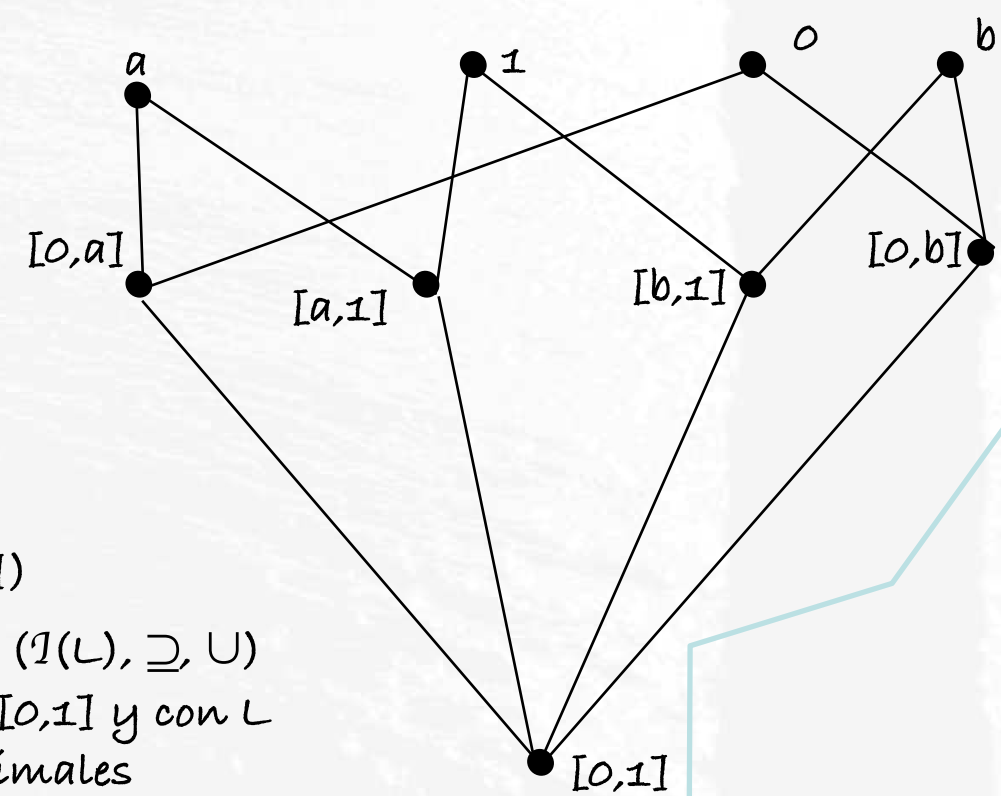


$(L,\leq,\cdot,+,{}',0,1)$
Retículo distributivo



$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,{}',0,1)$
Retículo distributivo

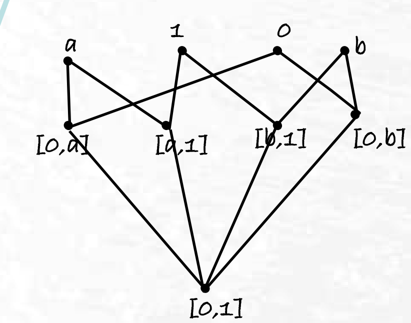
Si $[w]=[0,1]$, el orden de actividad $\sqsubseteq^{[0,1]}$ es la restricción de la inclusión de conjuntos $\supseteq$ a $\mathcal{I}(L)$: $([x]\sqsubseteq^{[0,1]}[y] \Leftrightarrow [x]\supseteq[y])$



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,1]},\sqcap^{[0,1]},[0,1])$

Es el Inf-semirretículo $(\mathcal{I}(L),\supseteq,\cup)$ con elemento mínimo $[0,1]$ y con L como conjunto de maximales

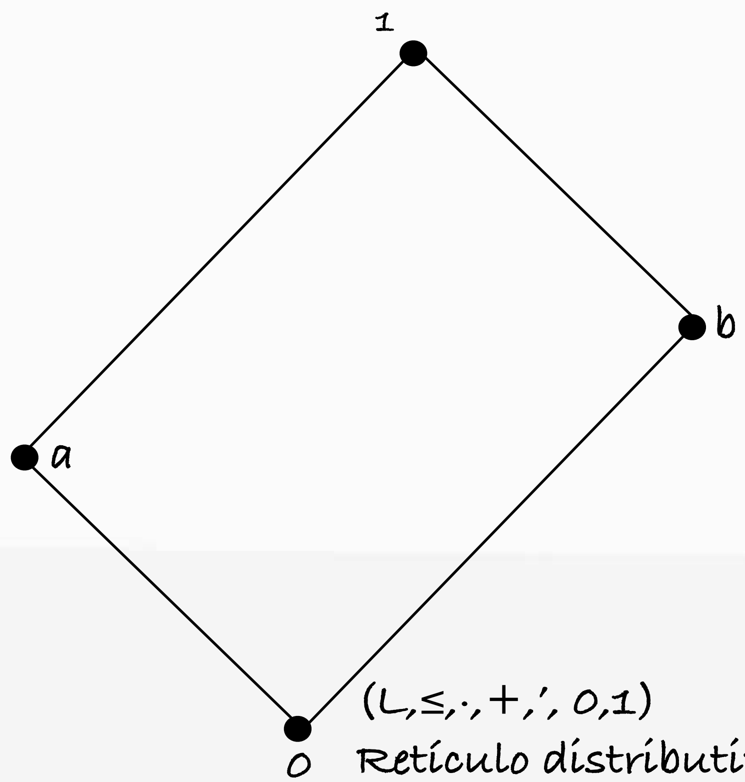
Orden Dual:
"Sharpened order"
en retículos
distributivos.



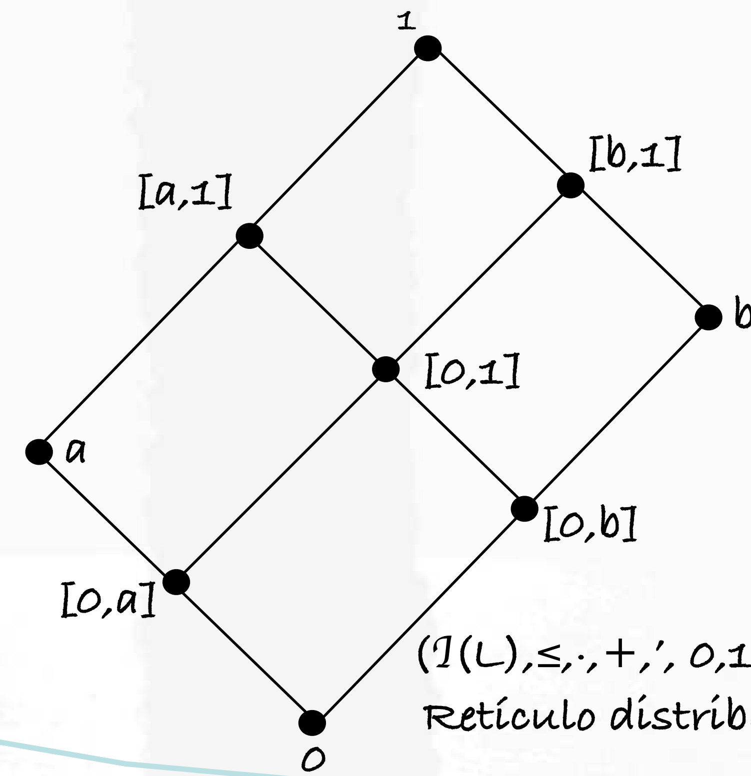
ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x]\leq [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

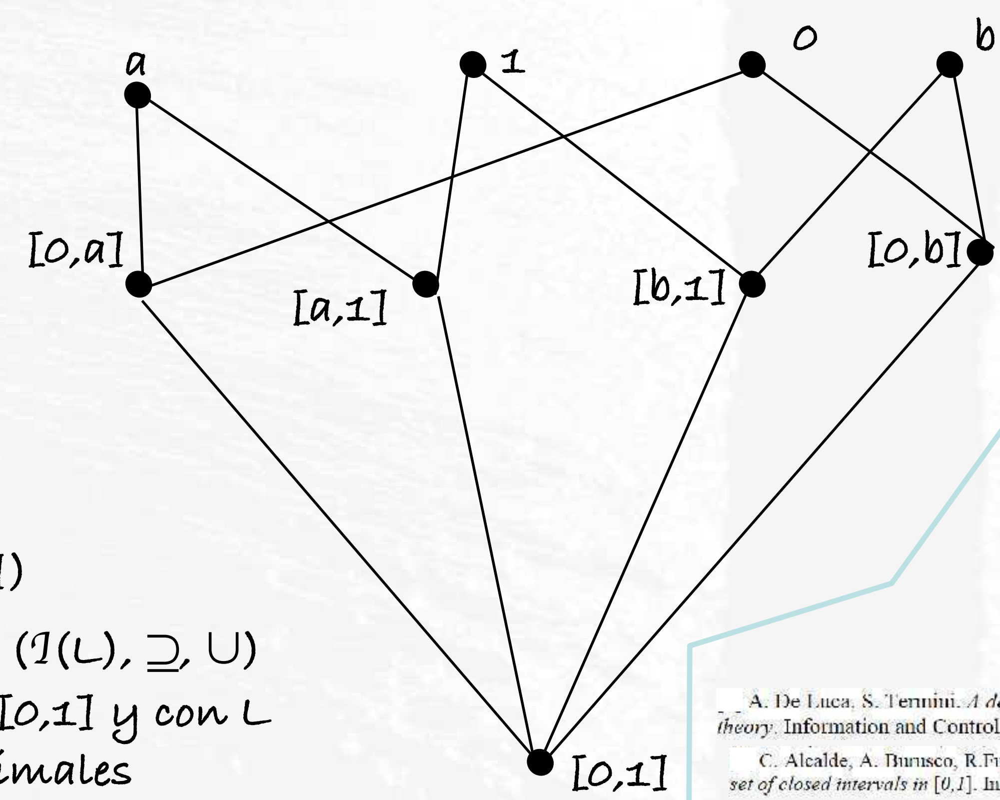


$(L,\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo



$(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

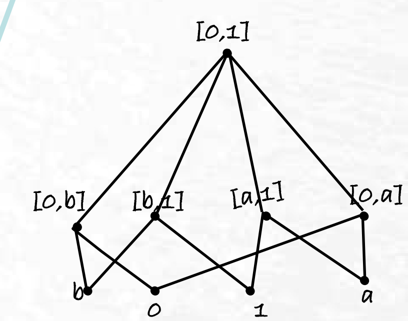
Si $[w]=[0,1]$, el orden de actividad $\sqsubseteq^{[0,1]}$ es la restricción de la inclusión de conjuntos $\supseteq$ a $\mathcal{I}(L)$: $([x]\sqsubseteq^{[0,1]}[y] \Leftrightarrow [x]\supseteq[y])$



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,1]},\sqcap^{[0,1]},[0,1])$

Es el Inf-semirretículo $(\mathcal{I}(L),\supseteq,\cup)$ con elemento mínimo $[0,1]$ y con L como conjunto de maximales

Orden Dual: "Sharpened order" en retículos distributivos.



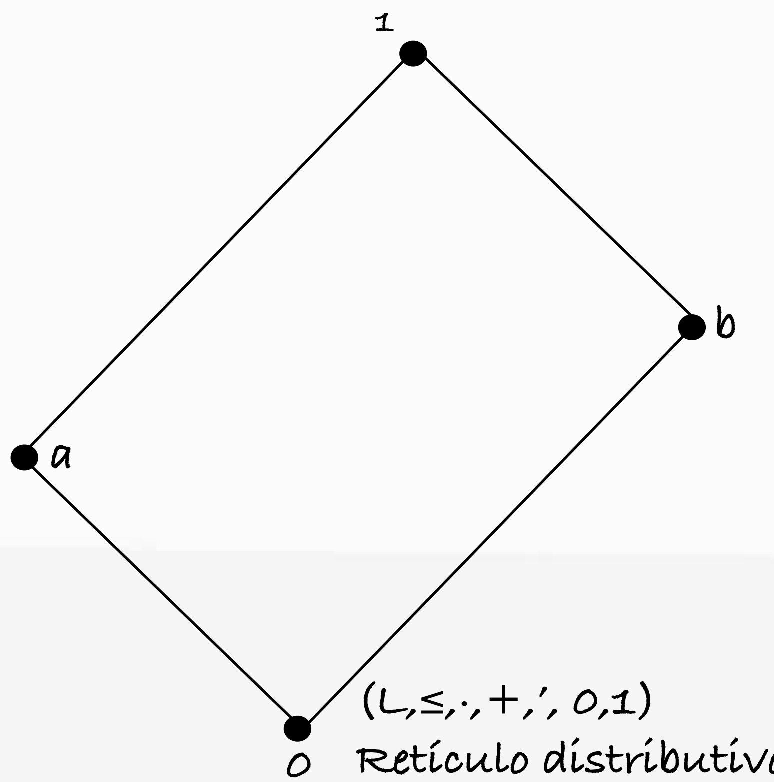
A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.

C. Alcalde, A. Burusco, R.Fuentes-González: *Ambiguity and fuzzyness measures defined on the set of closed intervals in [0,1]*. Information Sciences **Vol 177 Issue 7** (2007) 1687-1698.

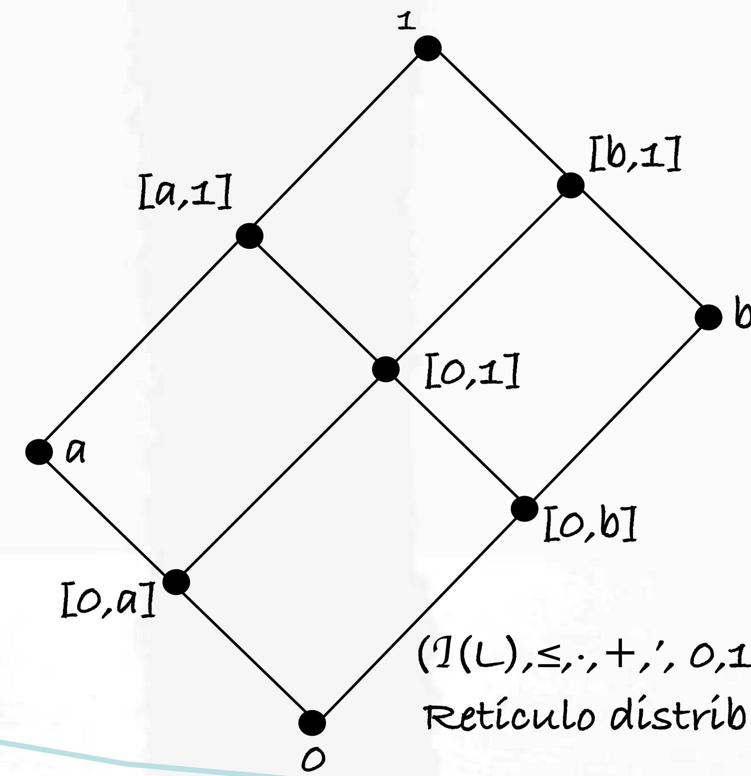
ORDEN DE ACTIVIDAD EN EL RETÍCULO DE INTERVALOS DE UN RETÍCULO DISTRIBUTIVO

(*) Orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\le)$: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\le [x]\le [y]+[w])$

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, se verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y}))}$.

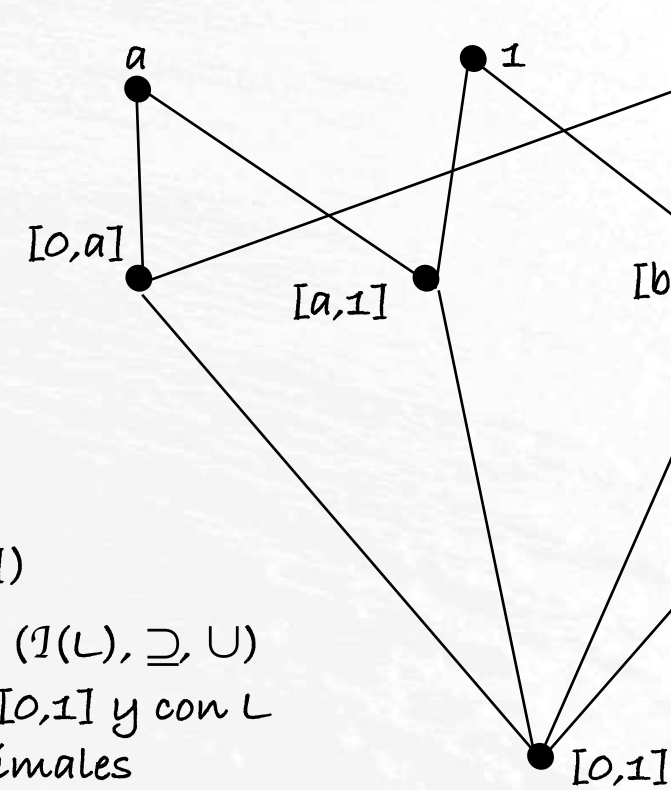


$(L,\le,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

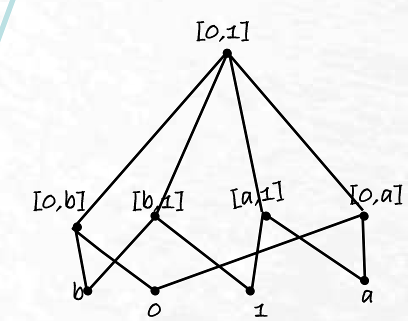


$(\mathcal{I}(L),\le,\cdot,+,',0,1)$
Retículo distributivo

Si $[w]=[0,1]$, el orden de actividad $\sqsubseteq^{[0,1]}$ es la restricción de la inclusión de conjuntos $\supseteq$ a $\mathcal{I}(L)$: $([x]\sqsubseteq^{[0,1]}[y] \Leftrightarrow [x]\supseteq[y])$



Orden Dual:
"Sharpened order"
en retículos
distributivos.



$(\mathcal{I}(L),\sqsubseteq^{[0,1]},\sqcap^{[0,1]},[0,1])$

Es el Inf-semirretículo $(\mathcal{I}(L),\supseteq,\cup)$ con elemento mínimo $[0,1]$ y con L como conjunto de maximales

A. De Luca, S. Termini. *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control **Vol 20 Issue 4** (1972) 301-312.
C. Alcalde, A. Burusco, R.Fuentes-González: *Ambiguity and fuzzyness measures defined on the set of closed intervals in [0,1]*. Information Sciences **Vol 177 Issue 7** (2007) 1687-1698.

(*) (Véase la transparencia siguiente)

(Continuación)

Los órdenes de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ se reducen a órdenes del mismo tipo en $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$:

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y sea $(\mathcal{I}(L),\leq)$ el retículo de sus intervalos cerrados.

Si $[z]=[\underline{z},\bar{z}]$, el orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$ tal que: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow \big((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\bar{x}\sqsubseteq^{\bar{w}}\bar{y})\big)}$.

(Continuación)

Los órdenes de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq,\cdot,+,0,1)$ se reducen a órdenes del mismo tipo en $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$:

<u>Proposición</u>. Sea $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y sea $(\mathcal{I}(L),\leq)$ el retículo de sus intervalos cerrados.

Si $[z]=[\underline{z},\overline{z}]$, el orden de actividad en $(\mathcal{I}(L),\leq)$ tal que: $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w])$

verifica: $\boxed{([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\overline{x}\sqsubseteq^{\overline{w}}\overline{y}))}$.

<u>Demostración</u>. $([x]\sqsubseteq^{[w]}[y]) \Leftrightarrow ([y]\cdot[w]\leq [x] \leq [y]+[w]) \Leftrightarrow ([\underline{y}\cdot\underline{w},\ \overline{y}\cdot\overline{w}]\leq [\underline{x},\overline{x}] \leq [\underline{y}+\underline{w},\ \overline{y}+\overline{w}]) \Leftrightarrow$

$((\underline{y}\cdot\underline{w}\leq\underline{x}\leq\underline{y}+\underline{w})\,\&\,(\overline{y}\cdot\overline{w}\leq\overline{x}\leq\overline{y}+\overline{w})) \Leftrightarrow ((\underline{x}\sqsubseteq^{\underline{w}}\underline{y})\,\&\,(\overline{x}\sqsubseteq^{\overline{w}}\overline{y}))$. ■

En la literatura sobre conjuntos L-borrosos, un caso importante aparece en el caso en que L es el retículo $\mathcal{I}(C)$ de intervalos de una cadena C...

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C} = \{ 0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

$\mathcal{I}(\mathbf{C}) = \{ [a] = [a_p, a_q] \ / \ (a_p \leq a_q) \}$

$(a_0 = 0,\ a_n = 1)$

$([a] \leq [b]) \Leftrightarrow ((a_p \leq b_p) \,\&\, (a_q \leq b_q))$, $[a] \cdot [b] = [min(a_p, b_p), min(a_q, b_q)]$,

$[a] + [b] = [max(a_p, b_p), max(a_q, b_q)]$, $[a_p, a_q]' = [1 - a_q, 1 - a_p]$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}$(**C**), ≤) de intervalos de una cadena finita (**C**, ≤)

$\mathbf{C}=\{\,0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

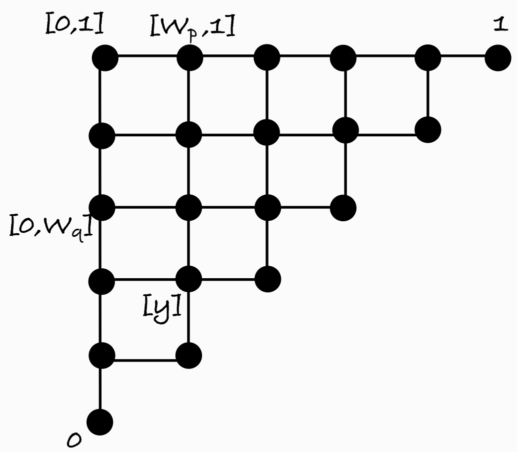
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{\,[a]=[a_p,a_q]\ /\ (a_p \leq a_q)\,\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b])\Leftrightarrow((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q)),\ [a]\cdot[b]=[min(a_p,b_p),min(a_q,b_q)],$

$[a]+[b]=[max(a_p,b_p),max(a_q,b_q)],\ [a_p,a_q]'=[1\text{-}a_q,1\text{-}a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



el retículo distributivo

$((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$,

(con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

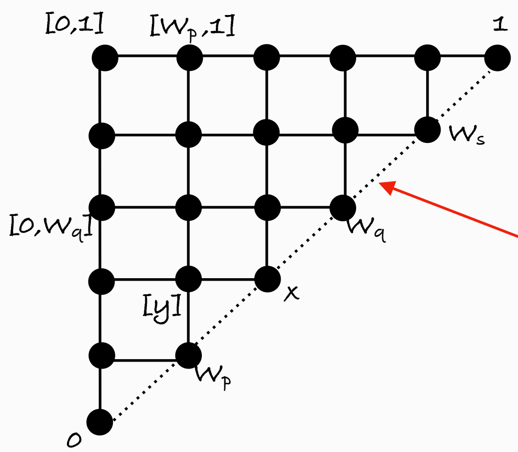
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{ [a]=[a_p,a_q] \ / \ (a_p \leq a_q) \}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p) \,\&\, (a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_p,b_p), min(a_q,b_q)]$,

$[a]+[b]=[max(a_p,b_p), max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q, 1-a_p]$

<u>Ejemplo</u>. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

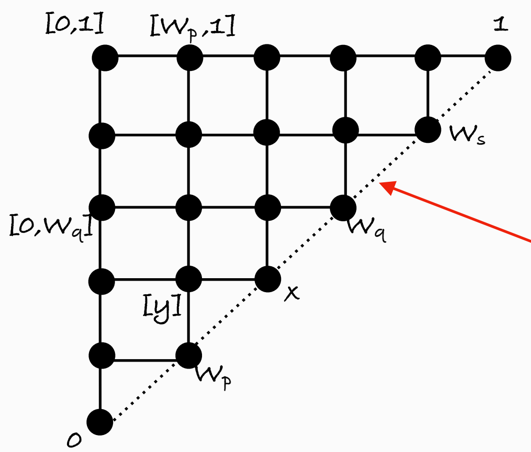
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \le a_q)\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_p\le b_p) \,\&\, (a_q\le b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

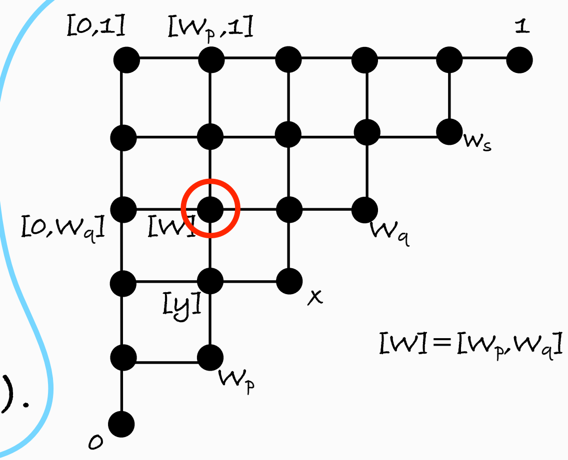
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\le)$.

el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\le,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

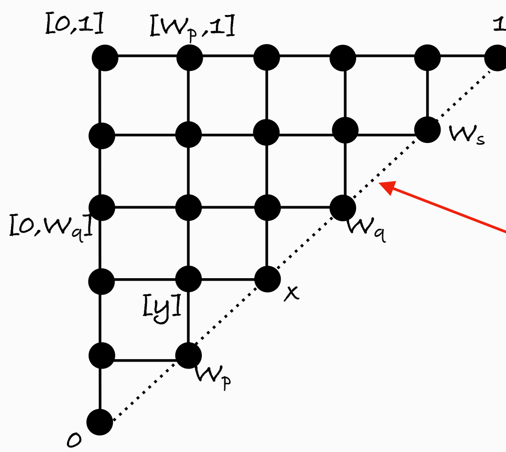
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{\,[a]=[a_p,a_q] \;/\; (a_p \leq a_q)\,\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

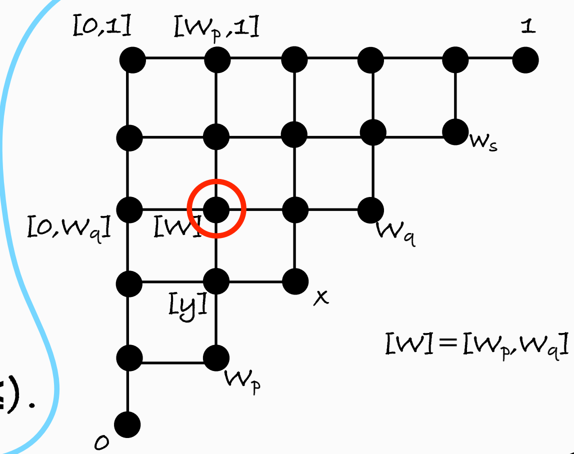
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

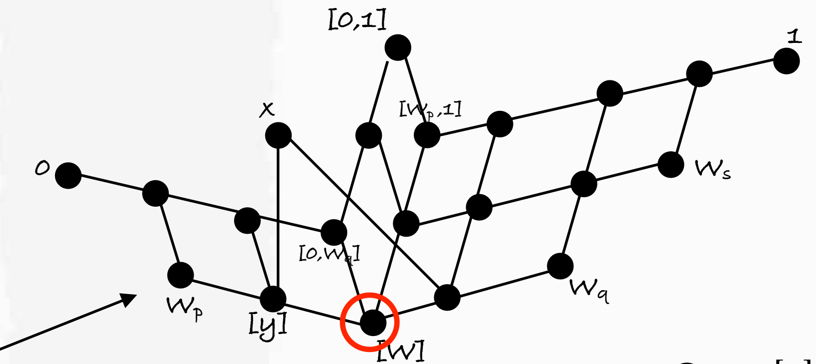
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$



($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w]}$)

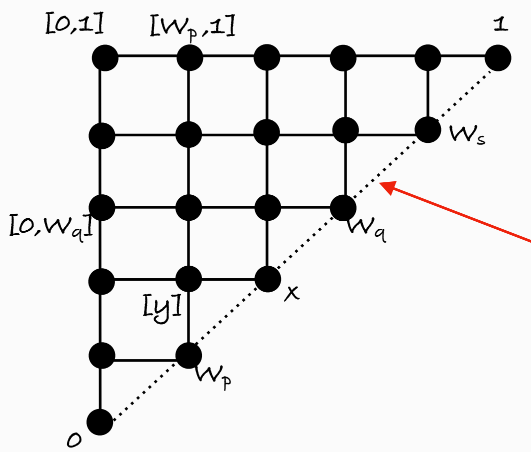
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{ 0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

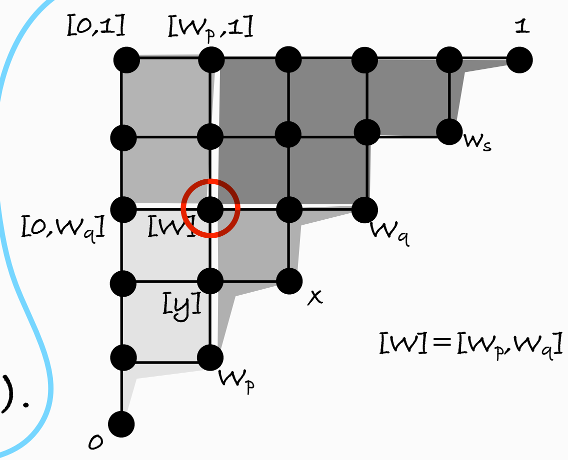
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{ [a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \leq a_q) \}$ $\quad ([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p) \,\&\, (a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_p,b_p),min(a_q,b_q)]$,

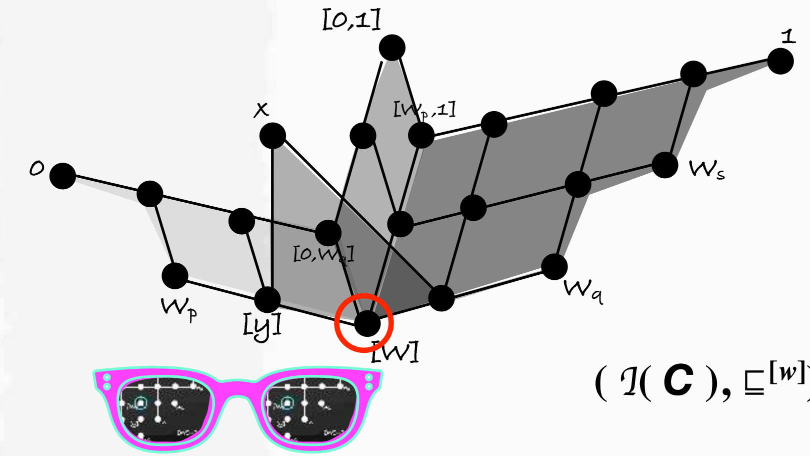
$(a_0=0,\ a_n=1)$ $\quad [a]+[b]=[max(a_p,b_p),max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).





($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w]}$)

el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p) \,\&\, (a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

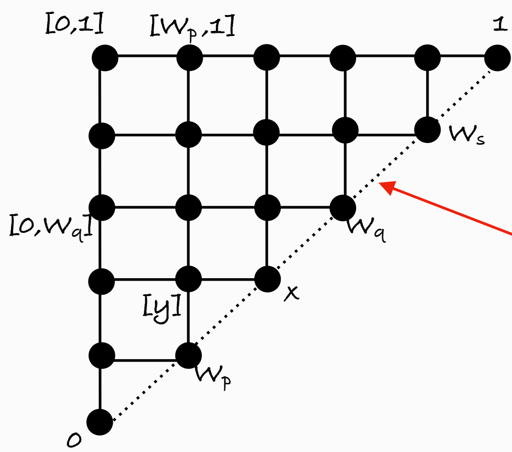
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{ [a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \leq a_q) \}$ $\quad ([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p) \,\&\, (a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

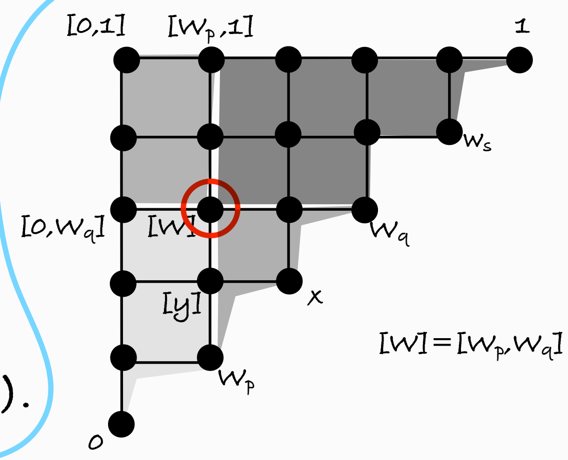
$(a_0=0,\ a_n=1)$ $\quad [a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

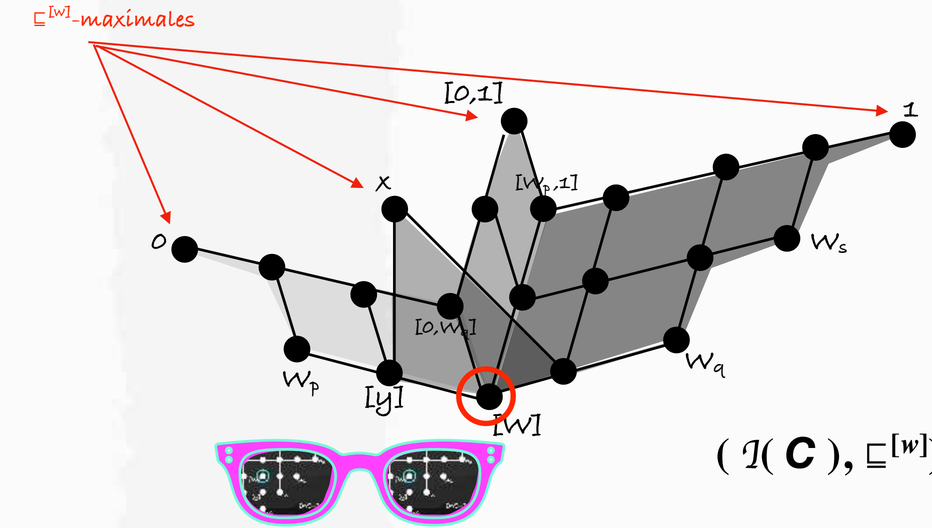
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p) \,\&\, (a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$



($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w]}$)

Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \dots, a_p, \dots, 1\}$

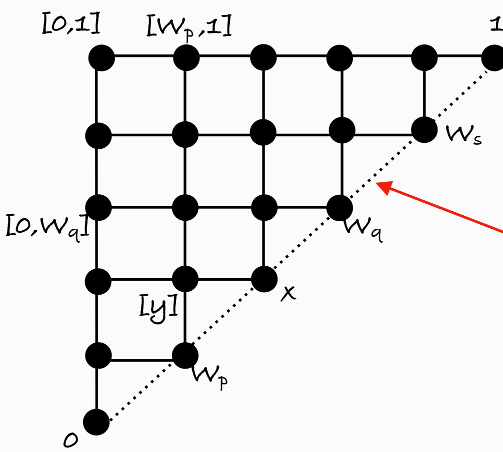
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \ / \ (a_p \leq a_q)\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_p,b_p),min(a_q,b_q)]$,

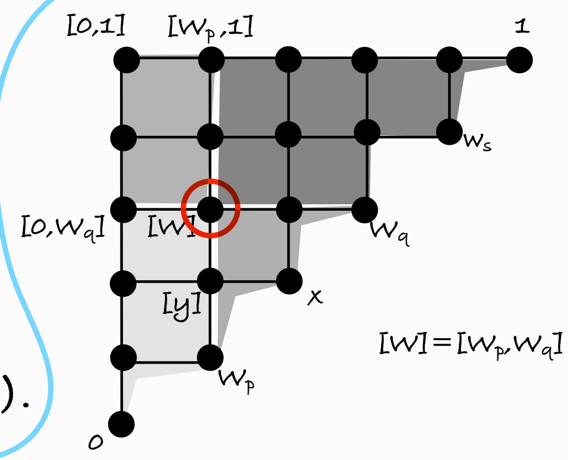
$[a]+[b]=[max(a_p,b_p),max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq)$.

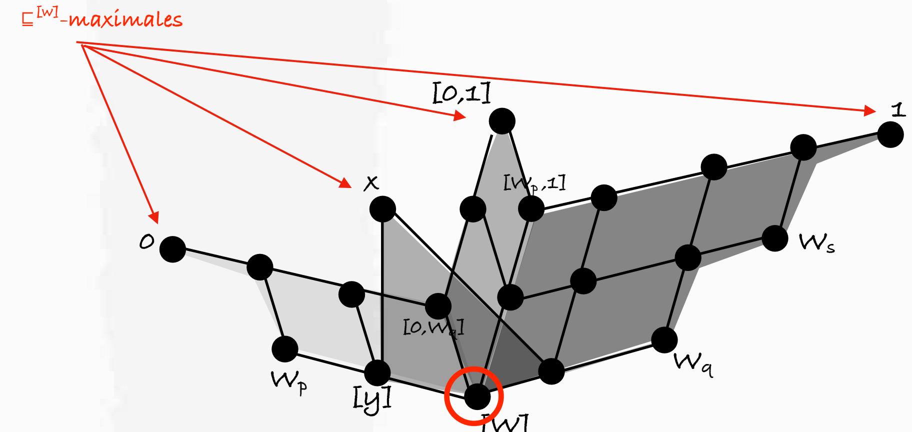
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

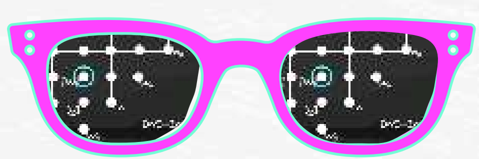


$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})$

Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x,[0,1], 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

Otras perspectivas…



Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

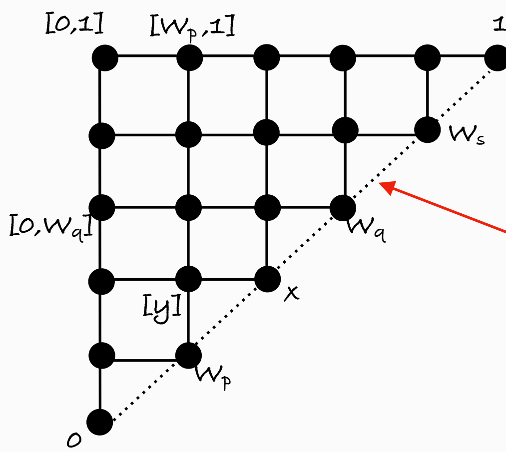
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \;/\; (a_p \leq a_q)\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

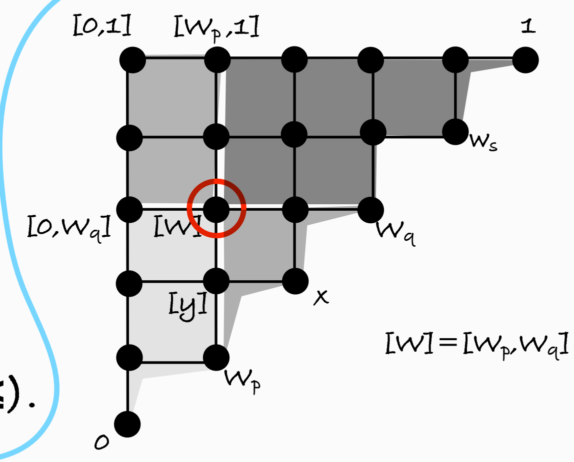
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

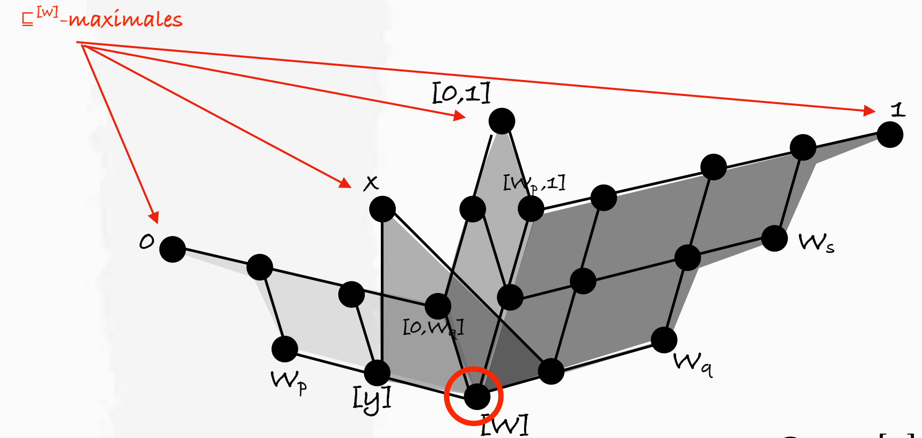
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

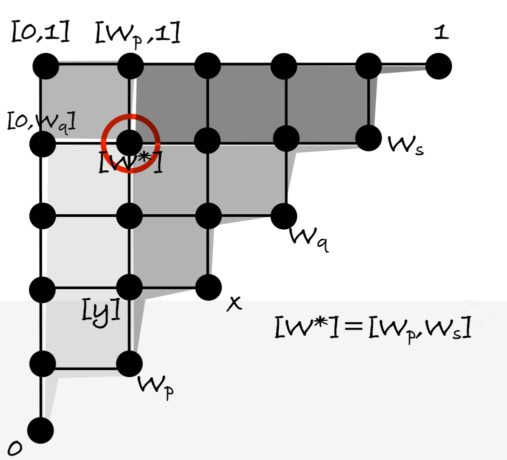


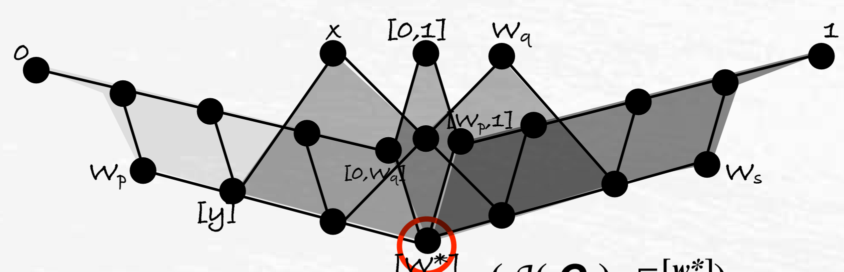
($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w]}$)

Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

Otras perspectivas...





($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w^*]}$)

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

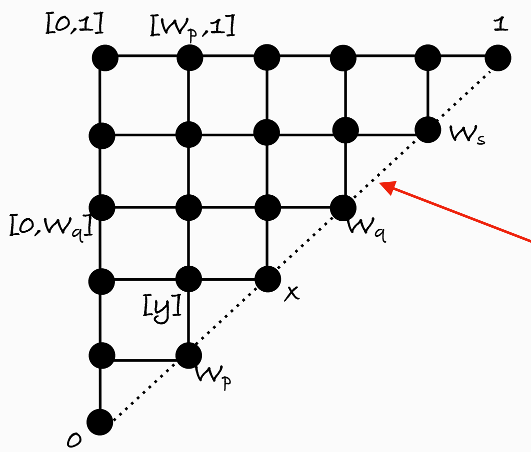
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \leq a_q)\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

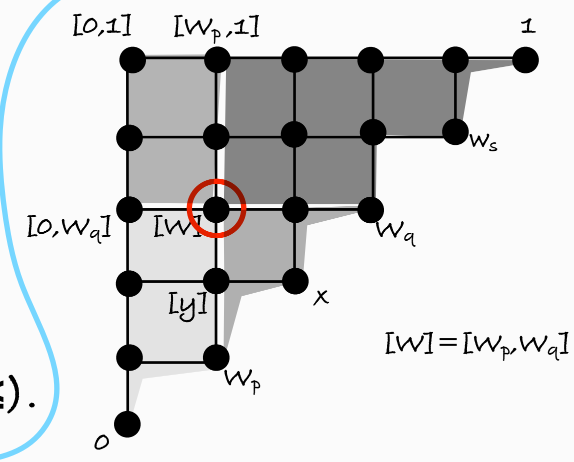
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si $\mathbf{C}$ es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

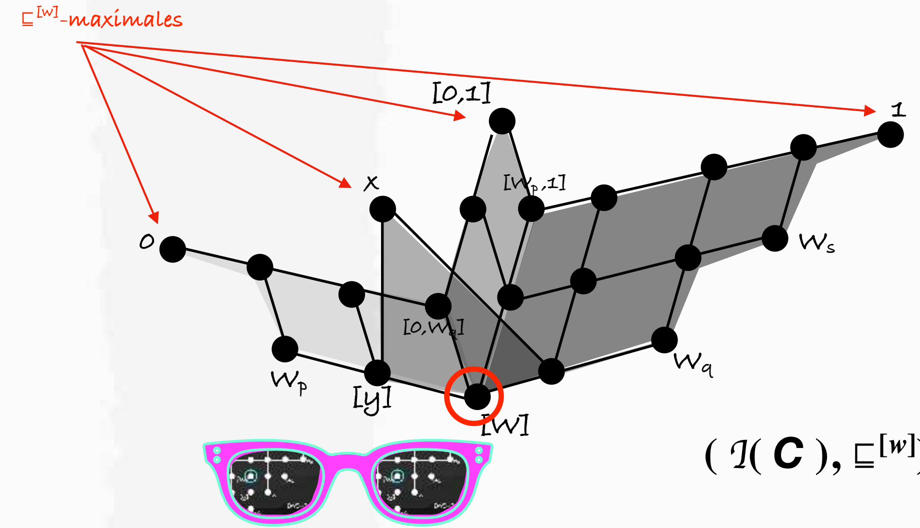
el retículo distributivo (($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤,·,+, 0, 1),′), (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

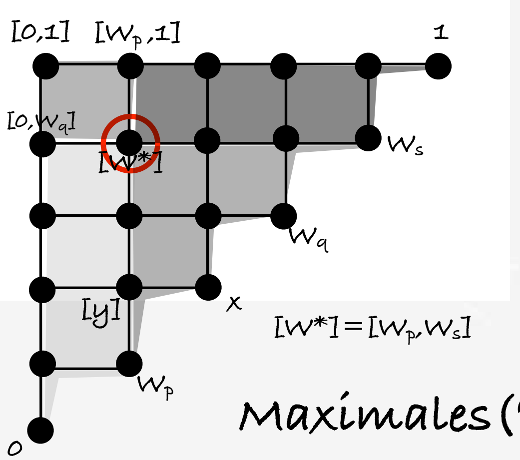
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

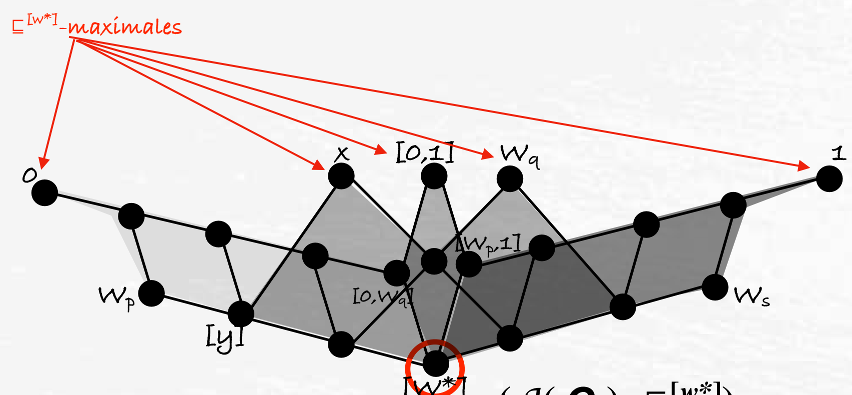


Maximales($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w]}$) = {0, x, [0,1], 1}

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

Otras perspectivas…





Maximales($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w^*]}$) = {0, x, w_4, [0,1], 1}

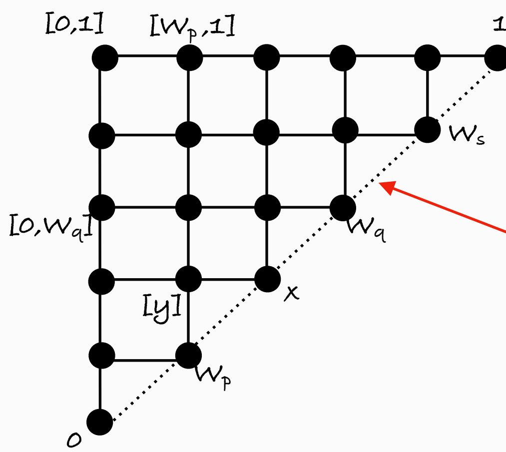
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{\,0,\, a_1,\, \ldots, a_p,\, \ldots,\, 1\}$

$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{\,[a]=[a_p,a_q]\ /\ (a_p \leq a_q)\,\}$ $\quad ([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q)),\ [a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)],$

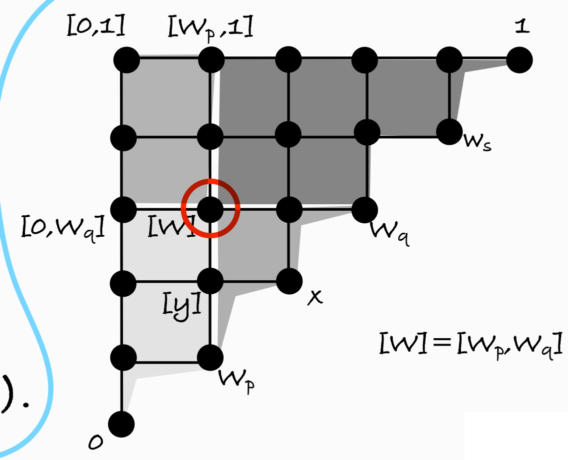
$(a_0=0,\ a_n=1)$ $\quad [a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)],\ [a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

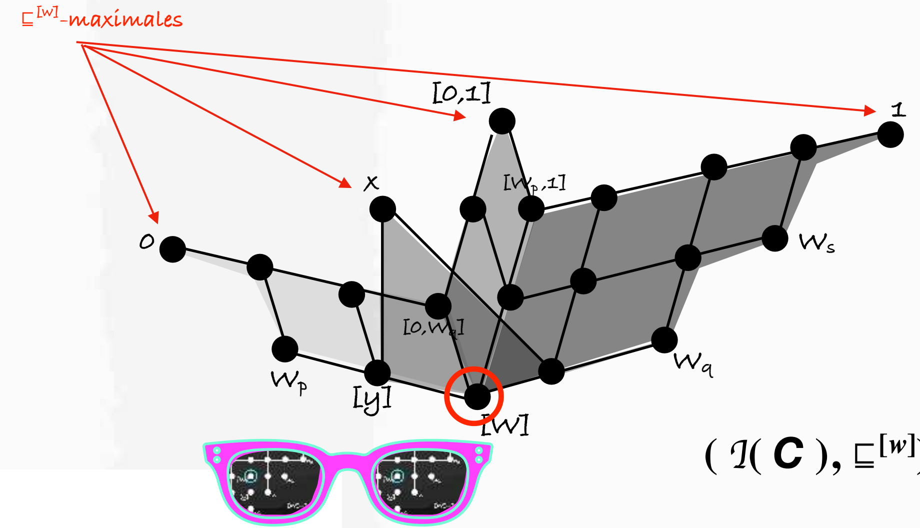
el retículo distributivo (($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤,·,+, 0, 1),′), (con negación fuerte), es:



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a]\ \sqsubseteq^{[w]}[b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

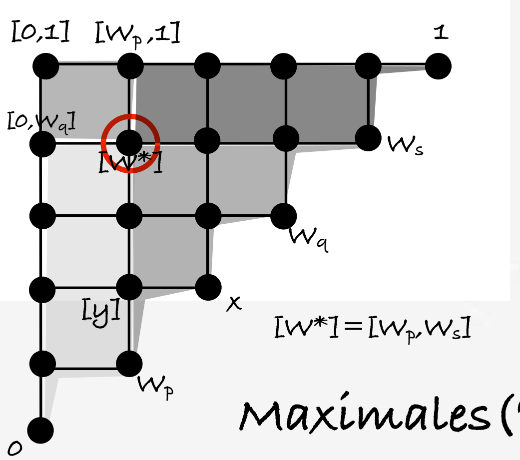


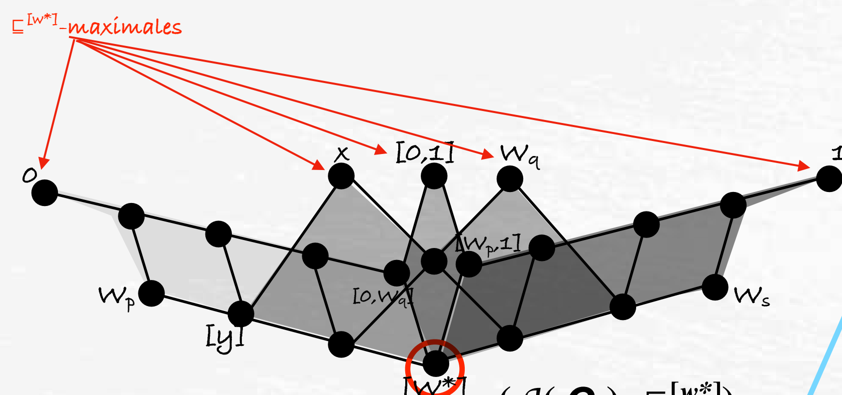
($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w]}$)

Maximales($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w]}$) = {0, x, [0,1], 1}

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

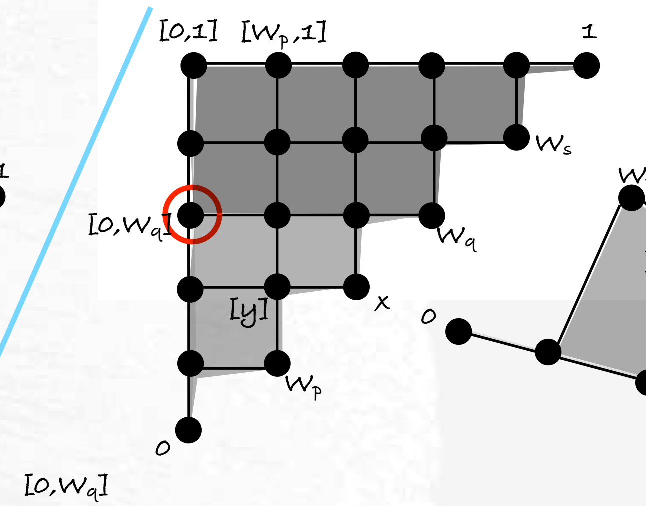
Otras perspectivas…

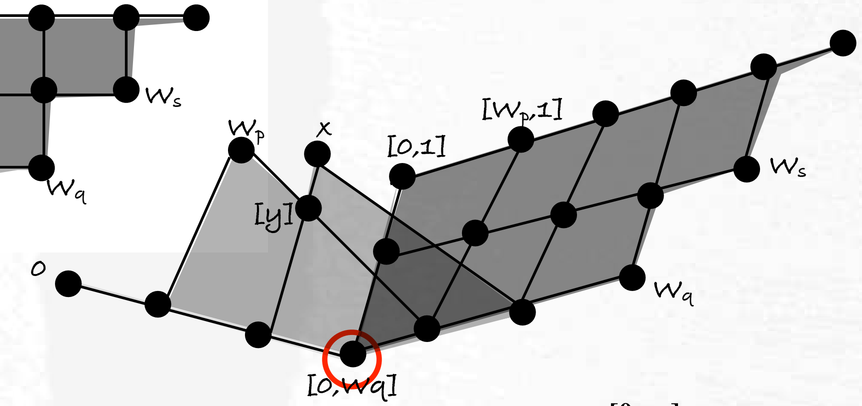




($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w^*]}$)

Maximales($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, $\sqsubseteq^{[w^*]}$) = {0, x, w_4, [0,1], 1}





($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[0,w_q]}$)

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

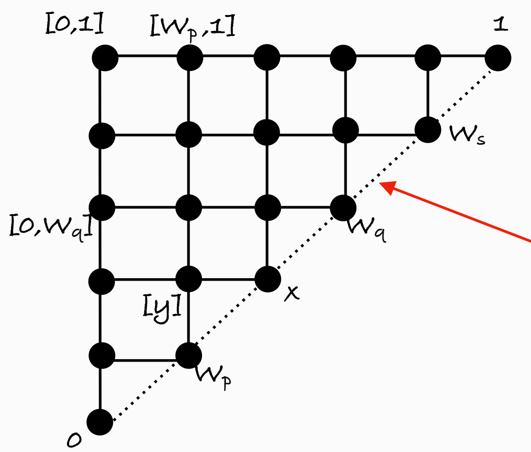
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{ [a]=[a_p,a_q] \ / \ (a_p \leq a_q) \}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

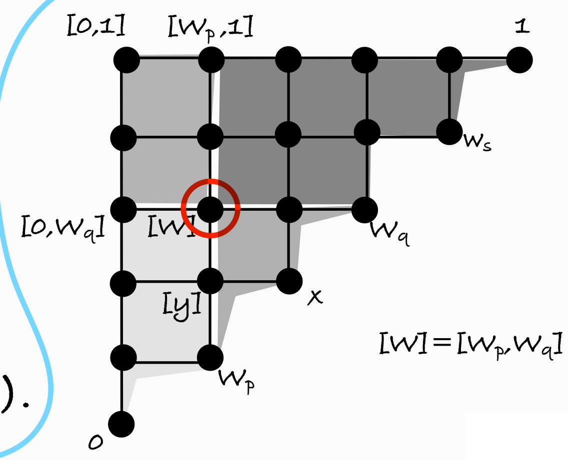
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p) \& (a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

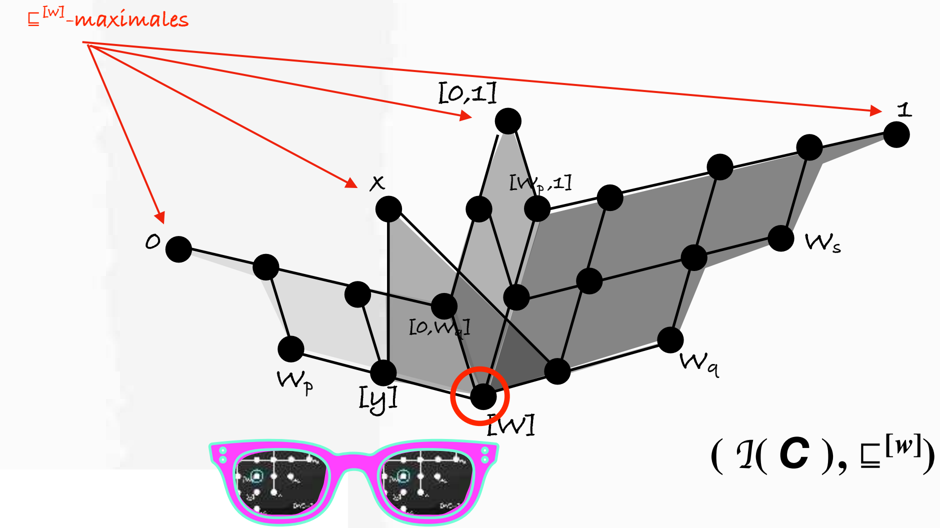
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq)$.





el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

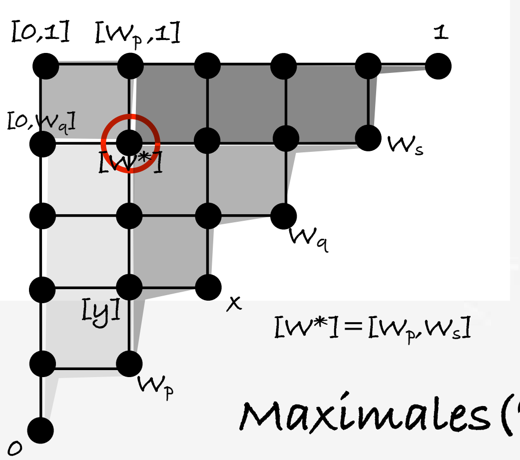
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

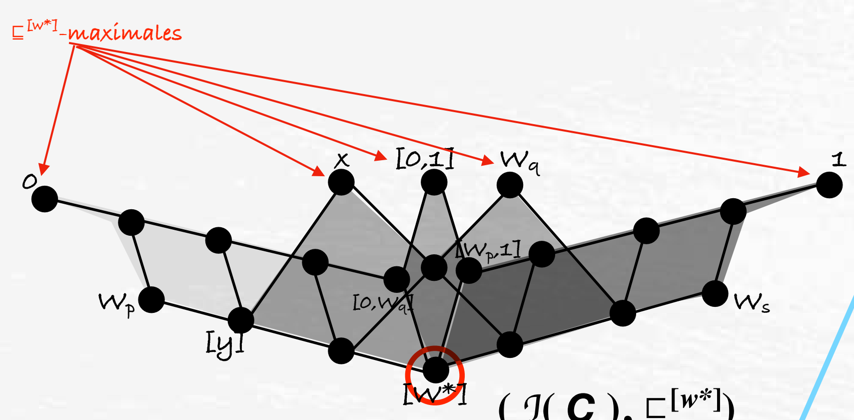
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p) \& (a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

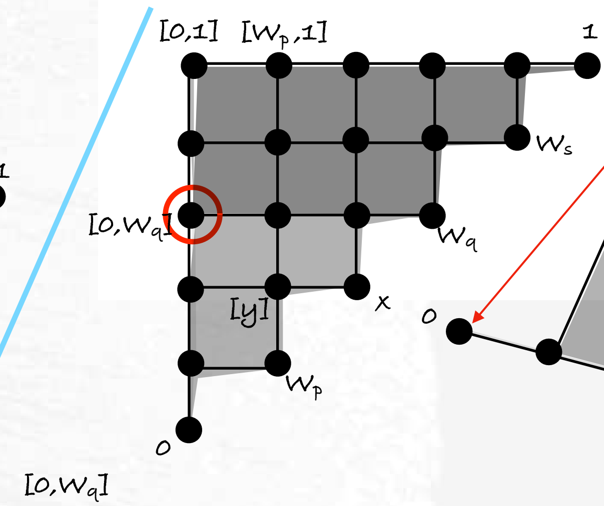
(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

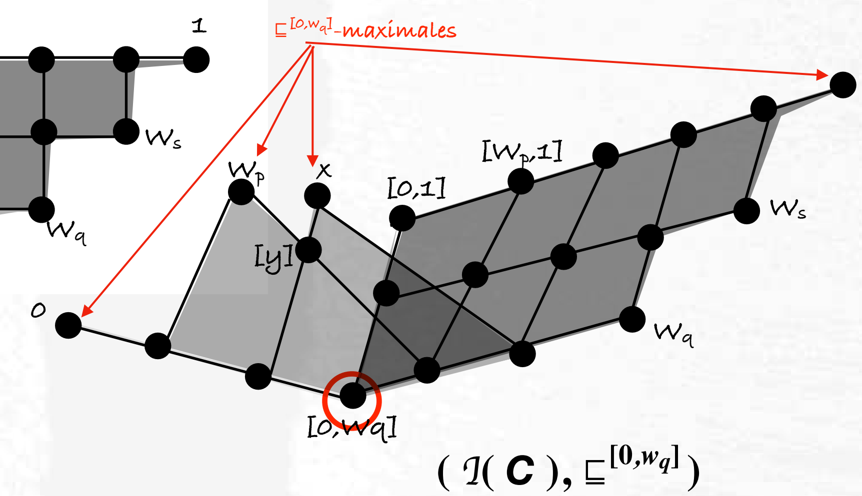
Otras perspectivas...





Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0, x, w_4, [0,1], 1\}$





Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

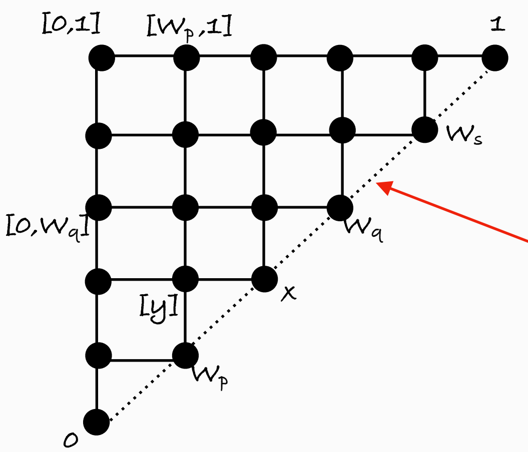
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \leq a_q)\}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

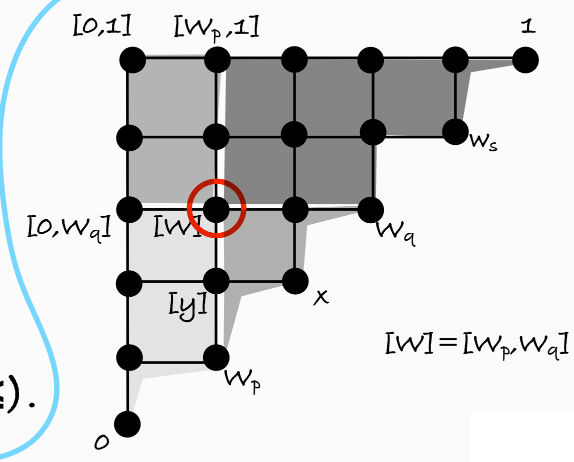
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

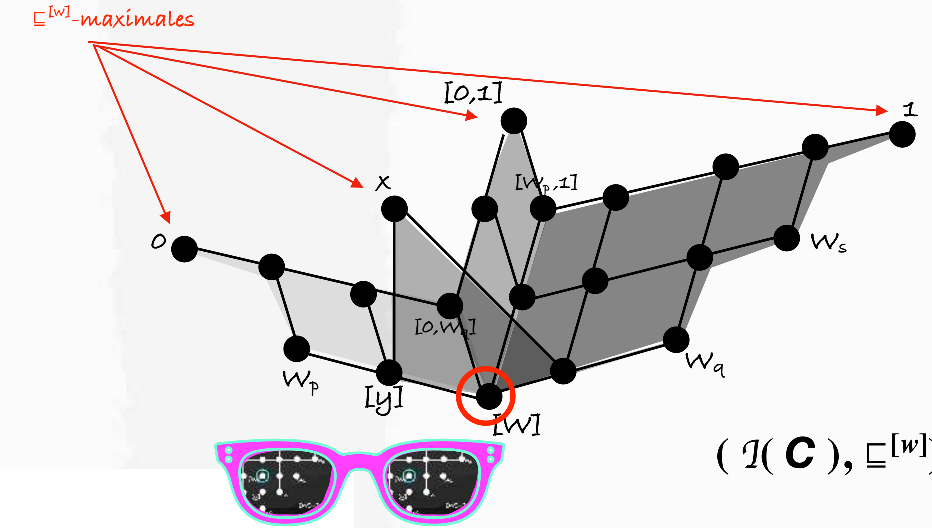
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq)$.





$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})$

el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

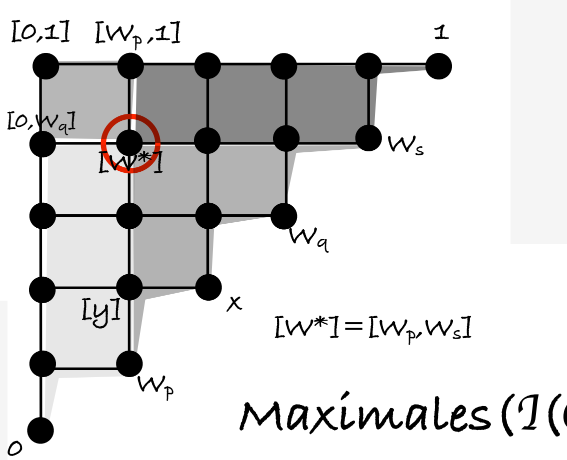
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

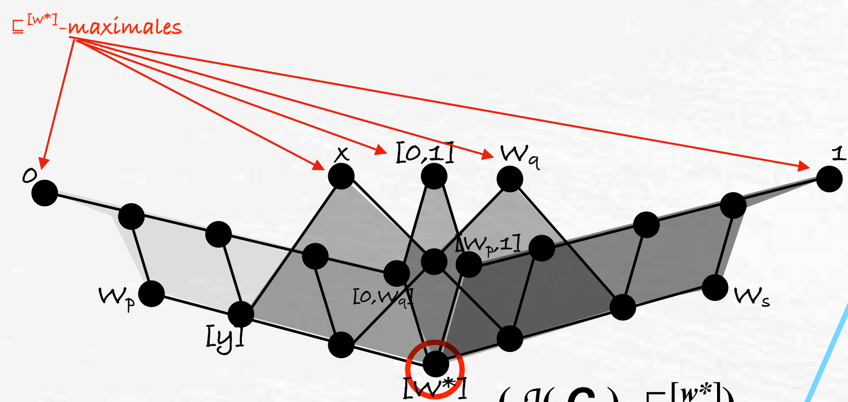
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

$\text{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0,\ x, [0,1],\ 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

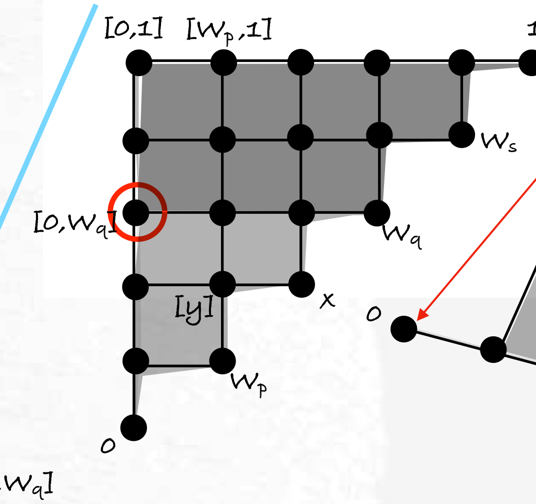
Otras perspectivas...

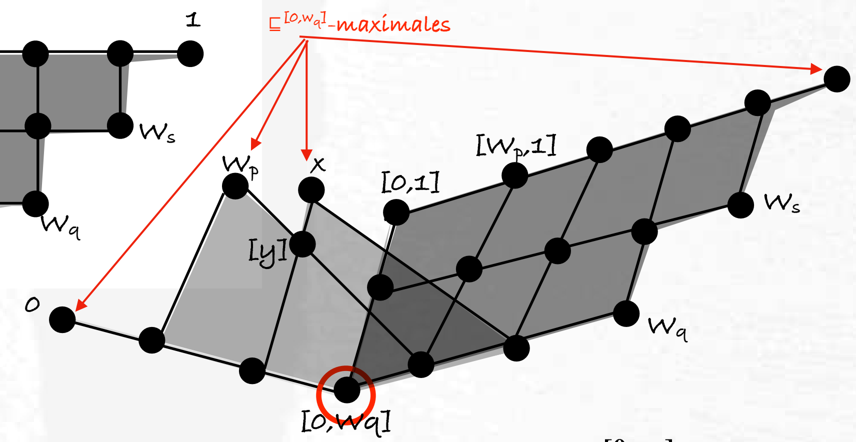




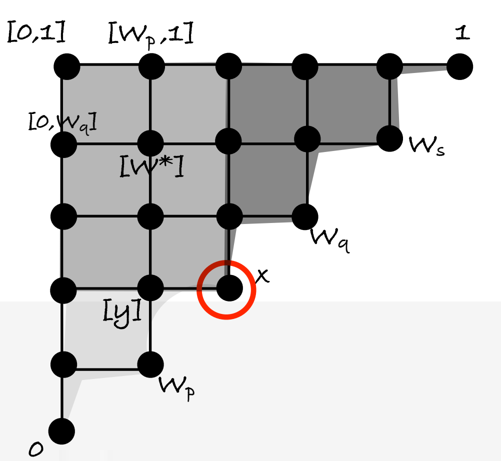
$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w^*]})$

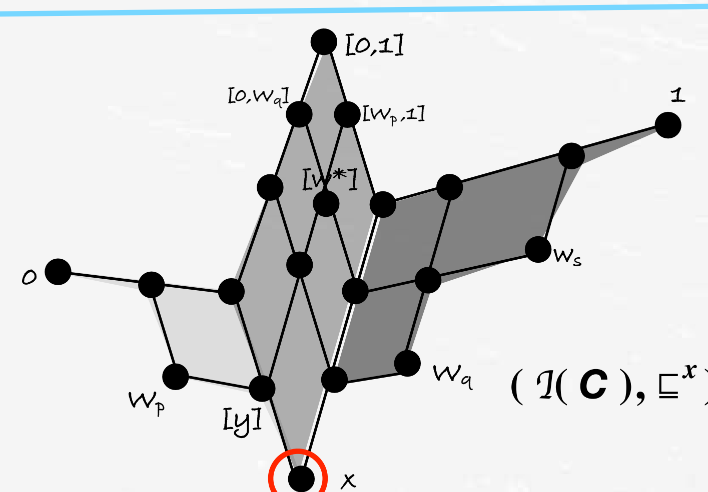
$\text{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0,\ x,\ w_4,\ [0,1],\ 1\}$





$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[0,w_q]})$





$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{x})$

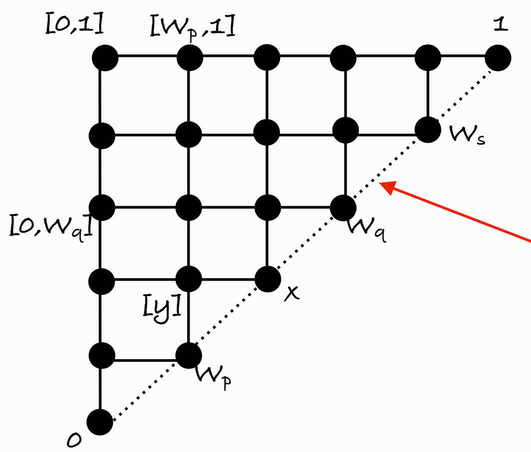
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \;/\; (a_p \leq a_q)\}$ $\quad ([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

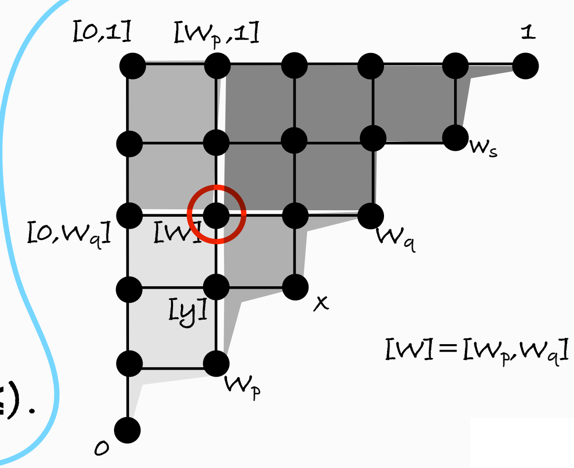
$(a_0=0,\ a_n=1)$ $\quad [a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

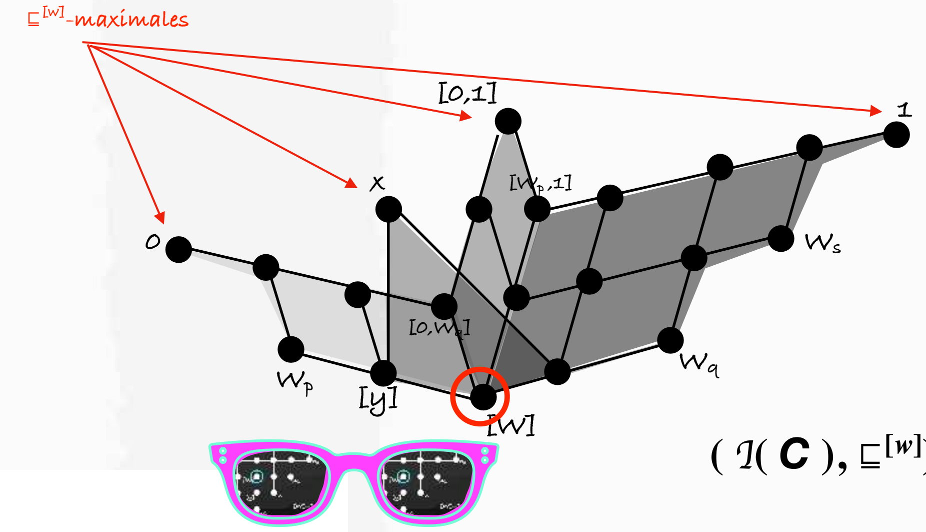
Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤).

el retículo distributivo (($\mathcal{I}(\mathbf{C})$,≤,·,+, 0, 1),′), (con negación fuerte), es:





($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w]}$)

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

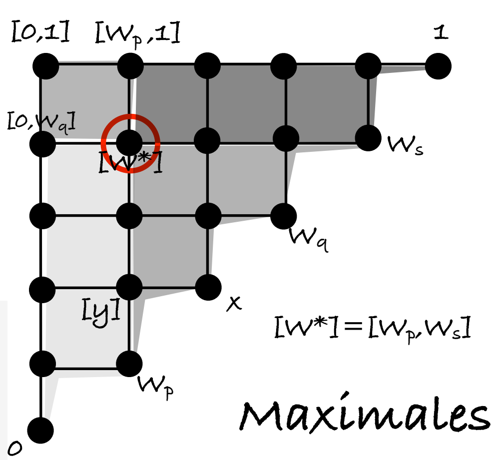
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

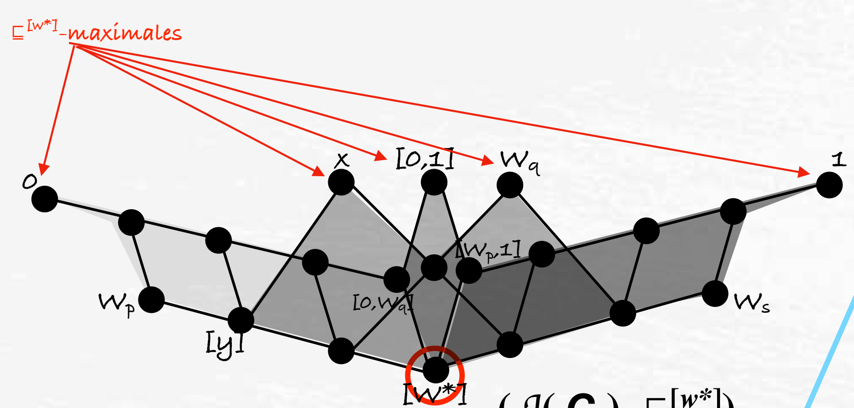
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

Maximales ($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w]}$) = {0, x, [0,1], 1}

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

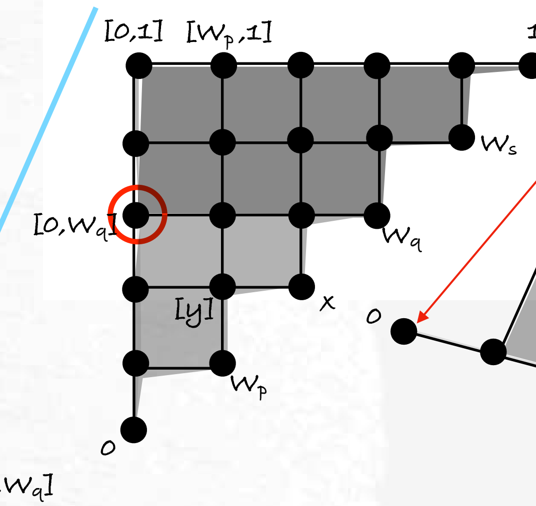
Otras perspectivas...

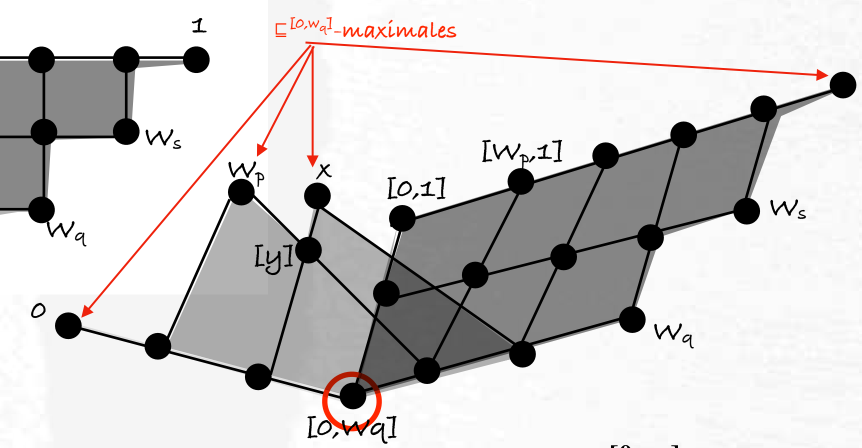




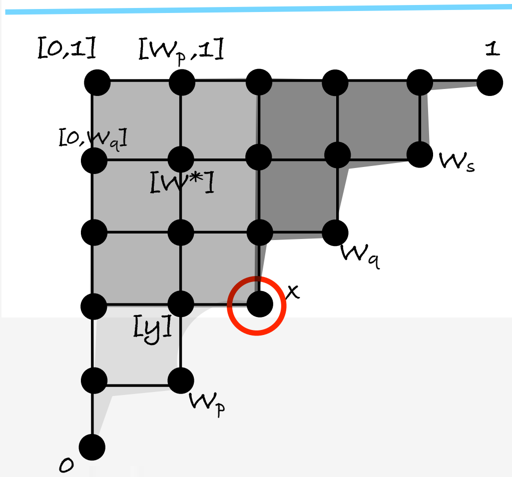
($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w^*]}$)

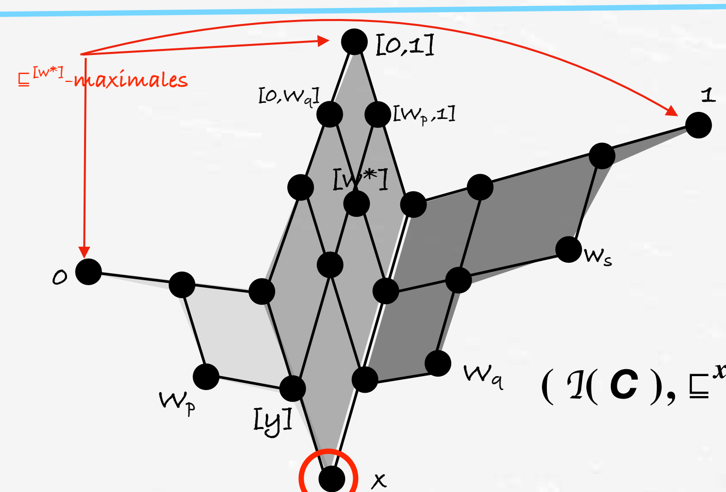
Maximales ($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[w^*]}$) = {0, x, w_4, [0,1], 1}





($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{[0,w_q]}$)





($\mathcal{I}$(**C**), $\sqsubseteq^{x}$)

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{\,0,\ a_1,\ \ldots,a_p,\ \ldots,\ 1\}$

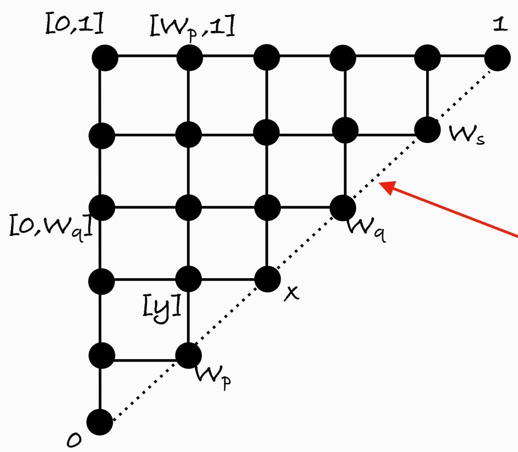
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{\ [a]=[a_p,a_q]\ /\ (a_p\le a_q)\ \}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\le[b])\Leftrightarrow((a_p\le b_p)\,\&\,(a_q\le b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

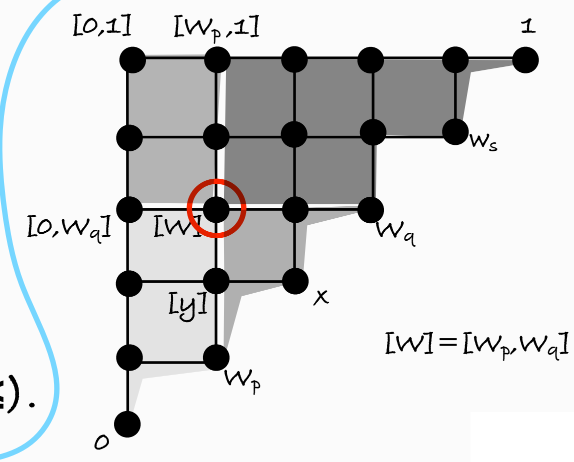
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

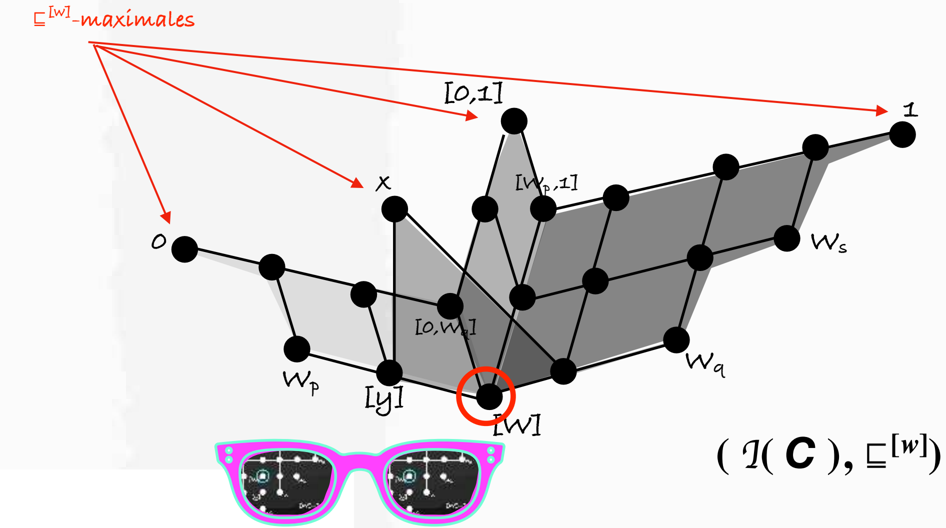
Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]\ \ \forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\le)$.

el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\le,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:





$(\ \mathcal{I}(\mathbf{C}\,),\sqsubseteq^{[w]})$

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

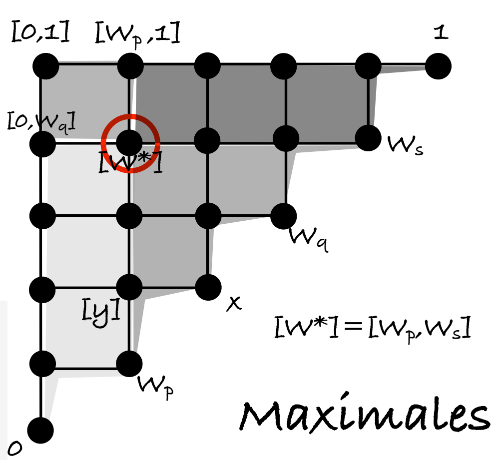
$([a]\ \sqsubseteq^{[w]}[b])\Leftrightarrow(([b]\cdot[w])\le[a]\le([b]+[w]))$

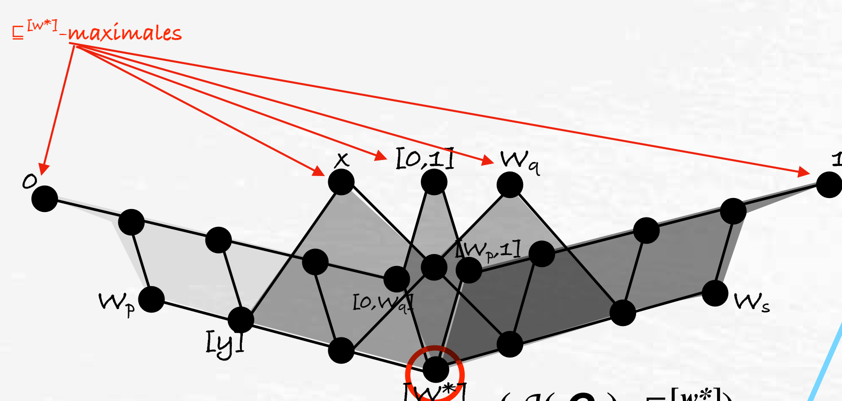
$\Leftrightarrow(a_p\sqsubseteq^{w_p}b_p)\,\&\,(a_q\sqsubseteq^{w_q}b_q)$

$\mathrm{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\ \sqsubseteq^{[w]})=\{0,\ x,[0,1],\ 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

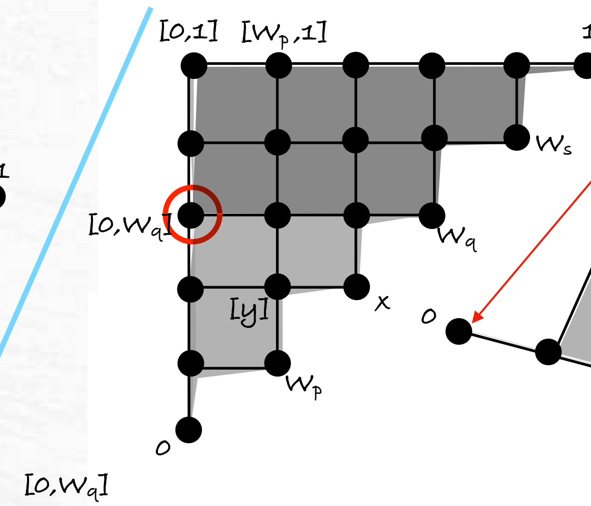
Otras perspectivas...

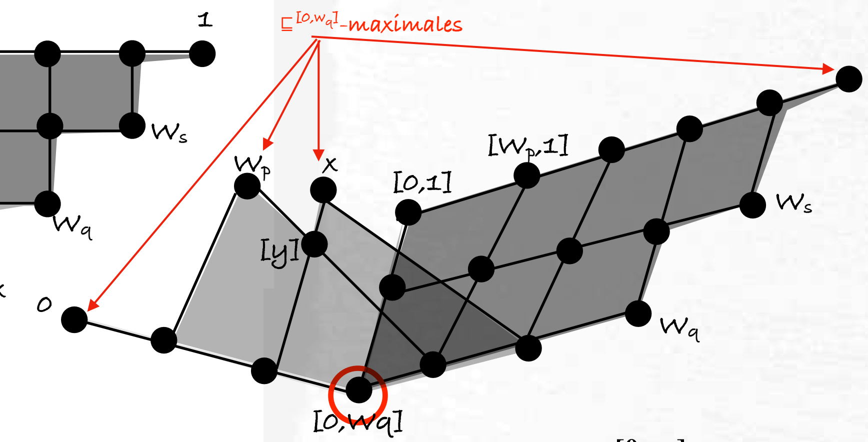




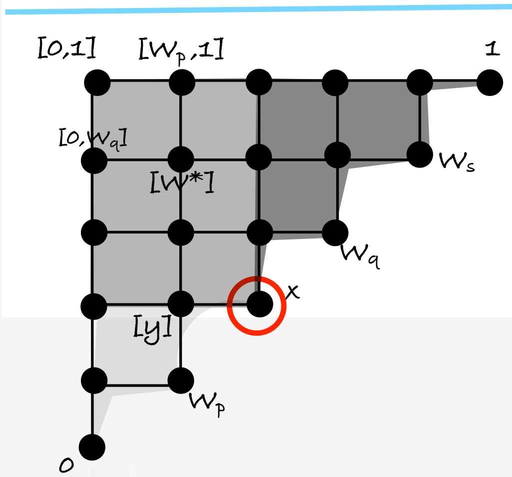
$(\ \mathcal{I}(\mathbf{C}\,),\sqsubseteq^{[w^*]})$

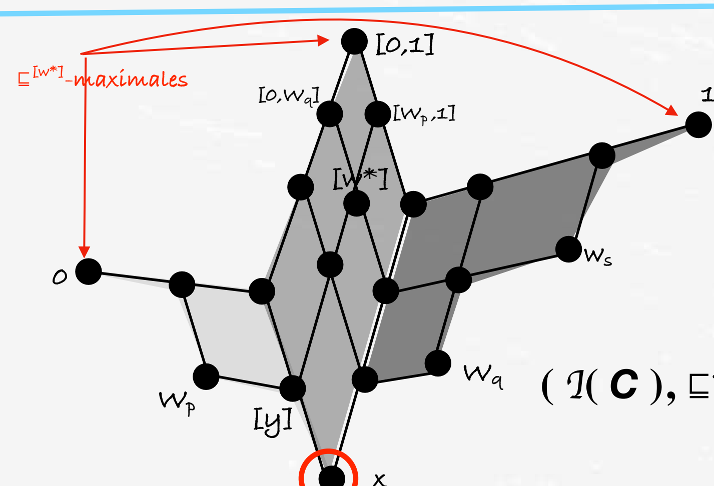
$\mathrm{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\ \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0,\ x,\ w_4,\ [0,1],\ 1\}$



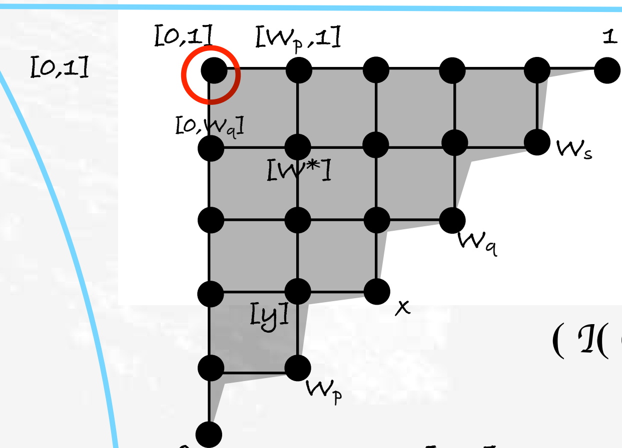


$(\ \mathcal{I}(\mathbf{C}\,),\sqsubseteq^{[0,w_q]})$

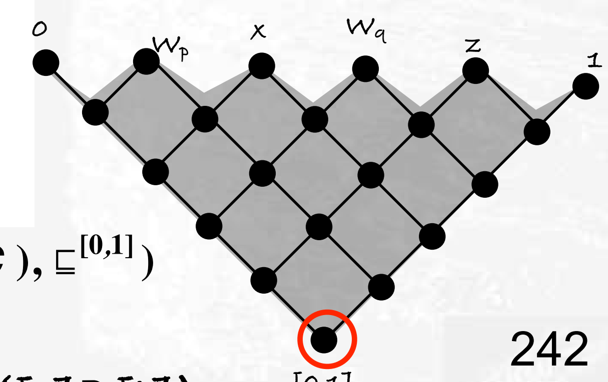




$(\ \mathcal{I}(\mathbf{C}\,),\sqsubseteq^{x})$



$(\ \mathcal{I}(\mathbf{C}\,),\sqsubseteq^{[0,1]})$



$([r]\sqsubseteq^{[0,1]}[t])\Leftrightarrow([r]\supseteq[t])$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(\mathbf{C})$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

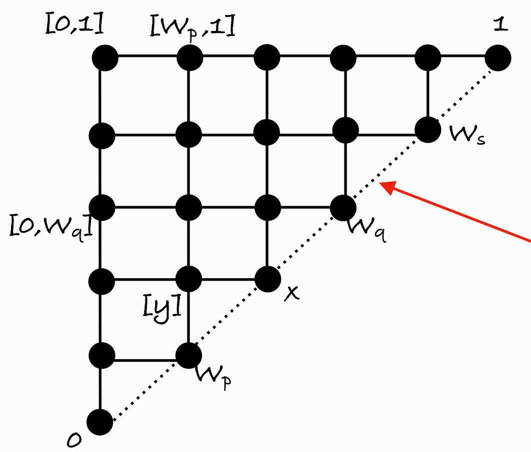
$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \ / \ (a_p \leq a_q)\}$

$(a_0=0, a_n=1)$

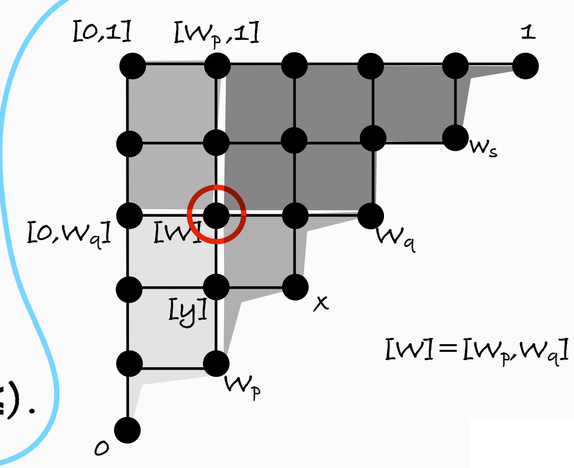
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

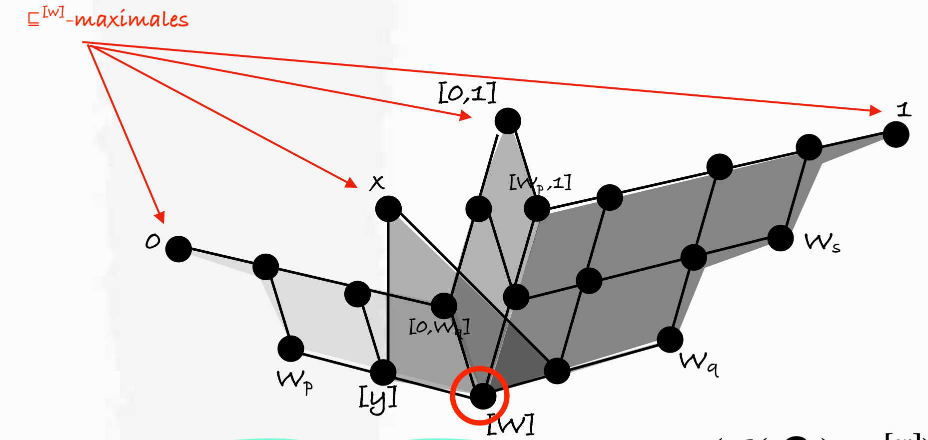
$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

<u>Ejemplo</u>. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in\mathbf{C}$, se puede considerar a la cadena $\mathbf{C}\equiv(0<w_p<x<w_q<w_s<1)$ incluida en el retículo de sus intervalos $(\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq)$.





el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

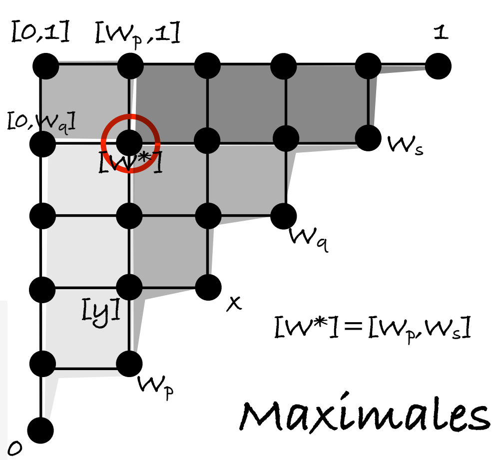
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

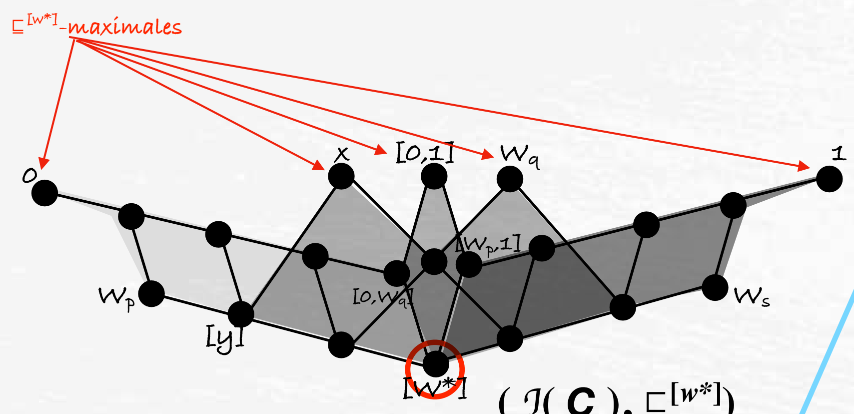
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

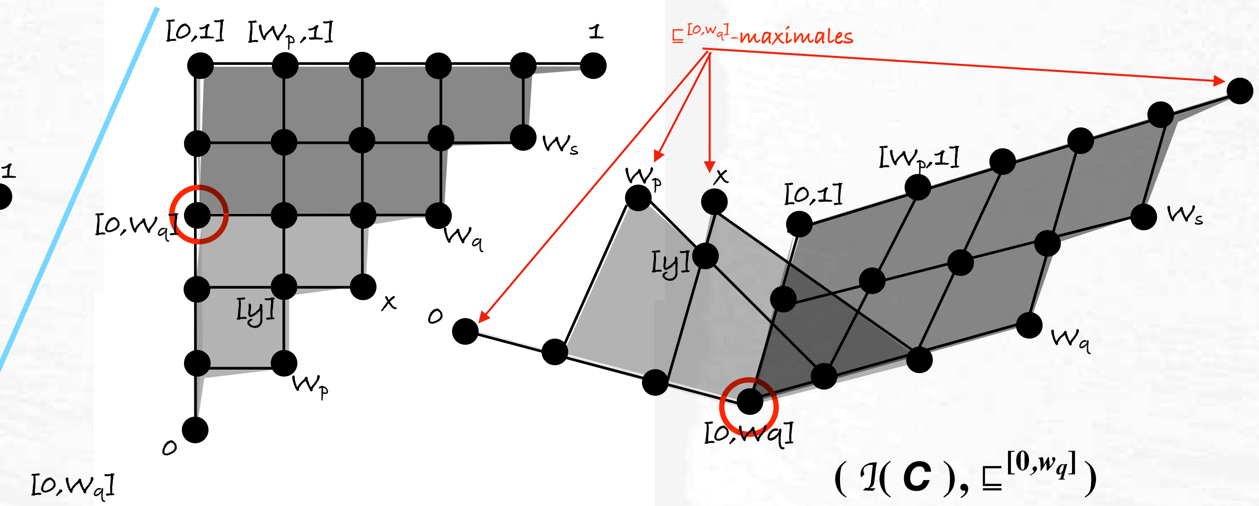
(<u>Nota</u>. w_p y w_q <u>NO</u> son maximales).

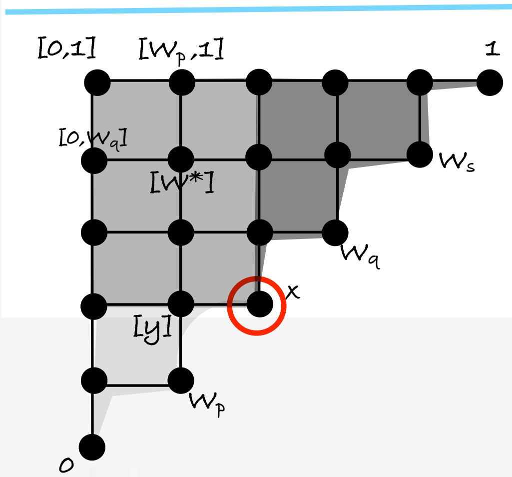
Otras perspectivas...

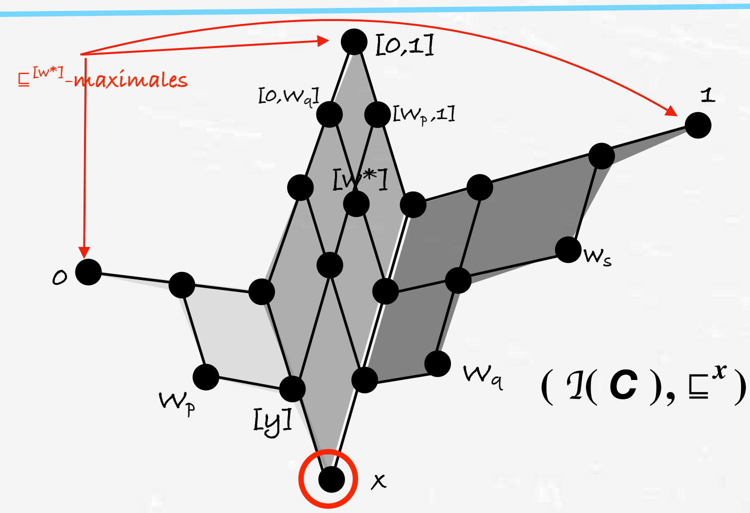


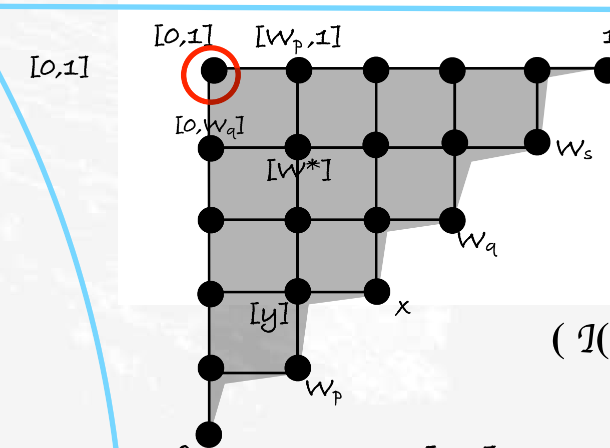


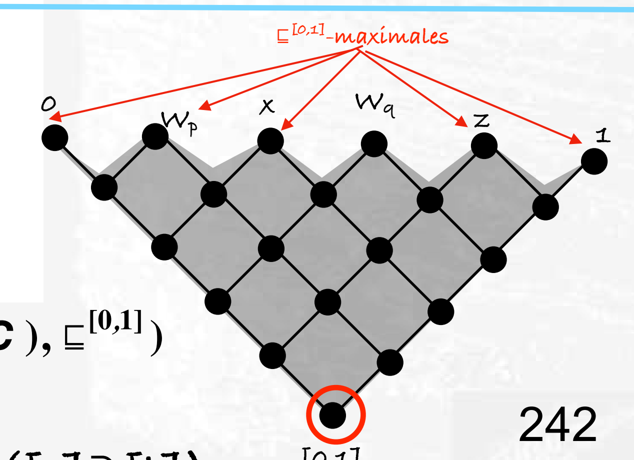
Maximales$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0, x, w_4, [0,1], 1\}$











$([r]\sqsubseteq^{[0,1]}[t]) \Leftrightarrow ([r]\supseteq[t])$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$C = \{0, a_1, \dots, a_p, \dots, 1\}$

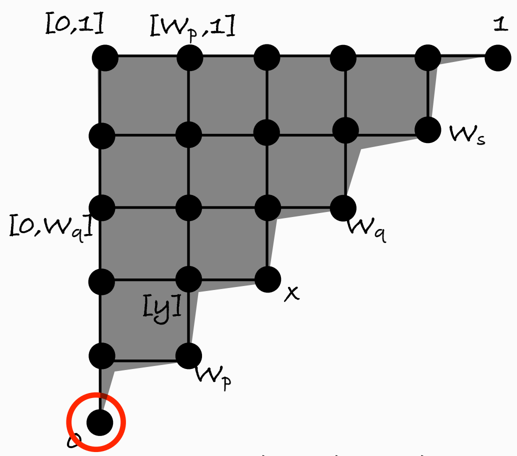
$\mathcal{I}(C) = \{ [a] = [a_p, a_q] \ / \ (a_p \leq a_q) \}$

$(a_0 = 0, \ a_n = 1)$

$([a] \leq [b]) \Leftrightarrow ((a_p \leq b_p) \,\&\, (a_q \leq b_q))$, $[a] \cdot [b] = [\min(a_p, b_p), \min(a_q, b_q)]$,

$[a] + [b] = [\max(a_p, b_p), \max(a_q, b_q)]$, $[a_p, a_q]' = [1 - a_q, 1 - a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|C| = 6$, entonces,



el retículo distributivo $((\mathcal{I}(C), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$, (con negación fuerte), es:

Se verifica:

$([a] \sqsubseteq^{0} [b]) \Leftrightarrow ([a] \leq [b])$

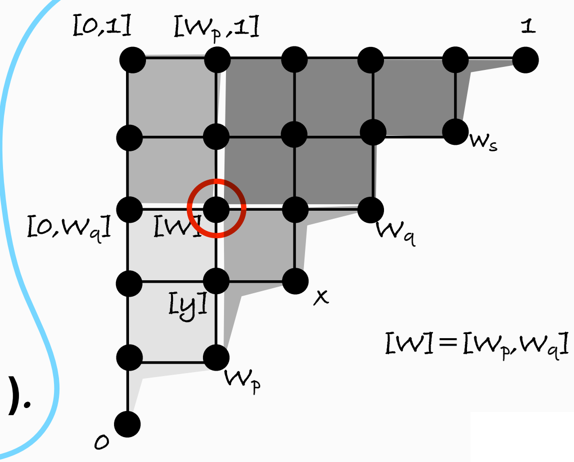
$\Leftrightarrow ((a_p \leq b_p) \,\&\, (a_q \leq b_q))$,

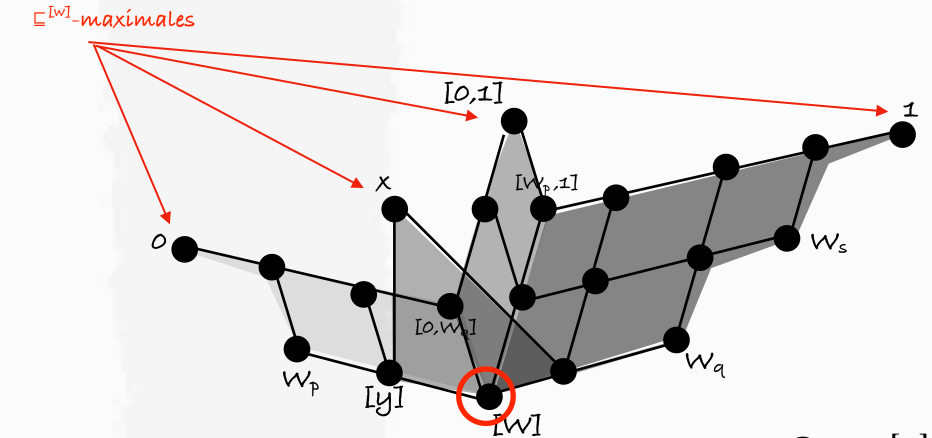
es decir: $(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{x}) \equiv (\mathcal{I}(C), \leq)$.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(C)$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b] \cdot [w]) \leq [a] \leq ([b] + [w]))$

$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p) \,\&\, (a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$



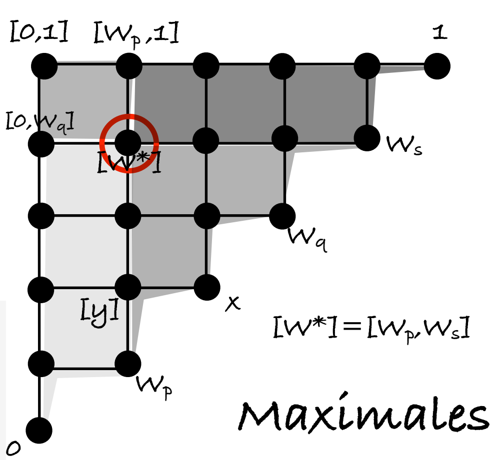


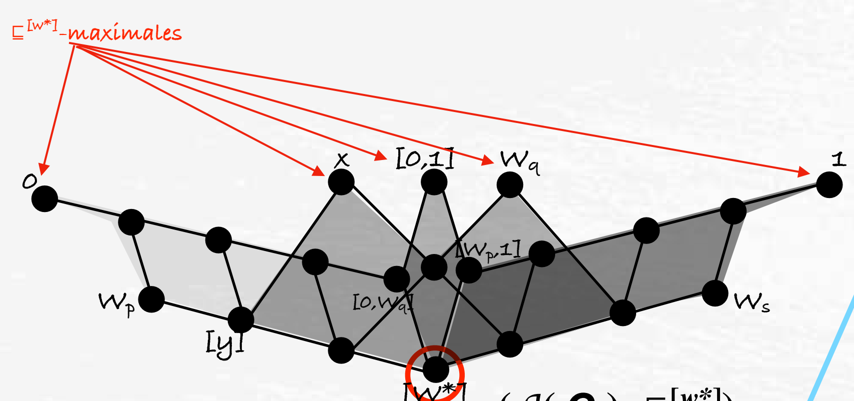
$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w]})$

$\text{Maximales}(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, x, [0,1], 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

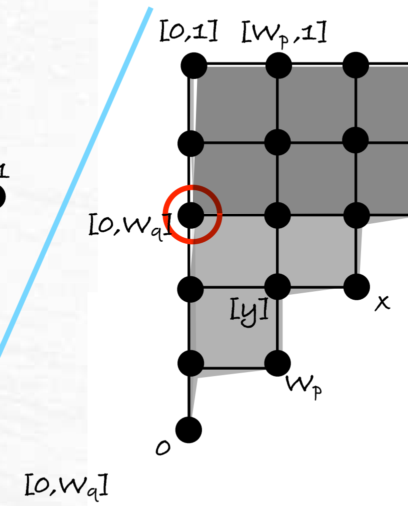
Otras perspectivas...

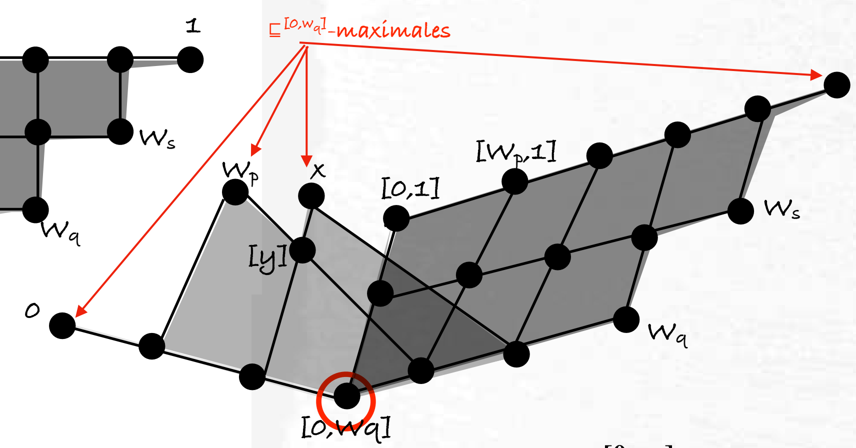




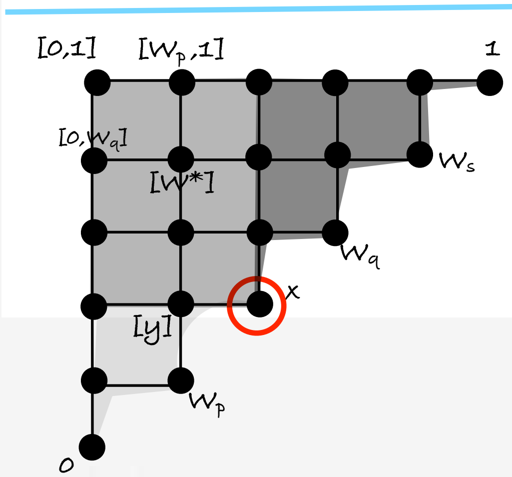
$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w^*]})$

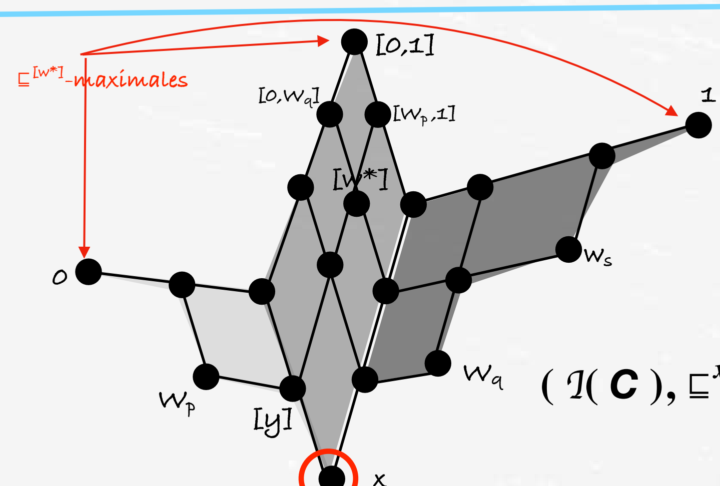
$\text{Maximales}(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w^*]}) = \{0, x, w_4, [0,1], 1\}$



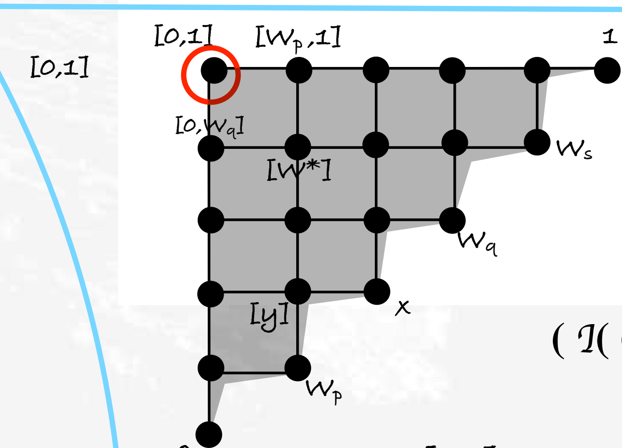


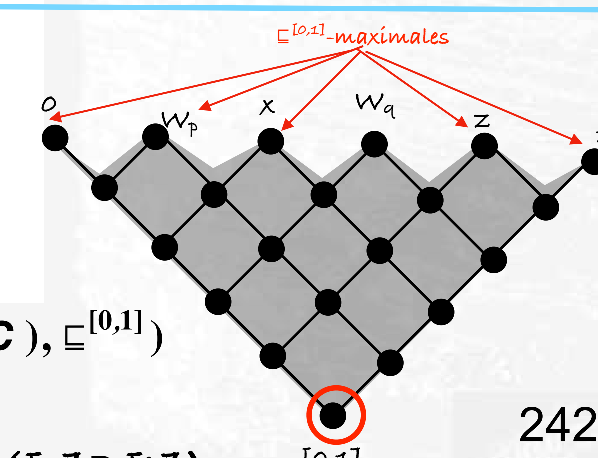
$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[0,w_q]})$





$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{x})$





$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[0,1]})$

$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

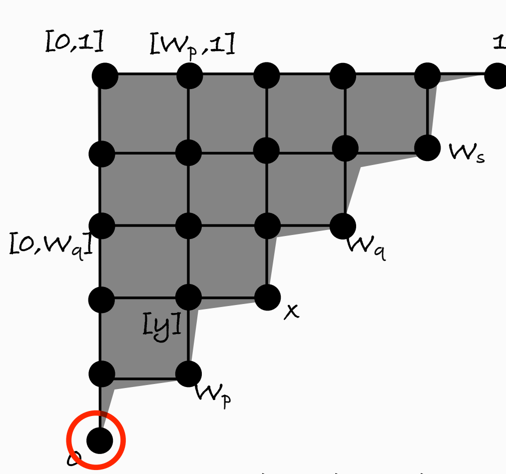
$\mathbf{C}=\{0, a_1, \ldots, a_p, \ldots, 1\}$

$\mathcal{I}(\mathbf{C})=\{[a]=[a_p,a_q] \,/\, (a_p \le a_q)\}$ $\quad (a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_p\le b_p)\,\&\,(a_q\le b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|\mathbf{C}|=6$, entonces,



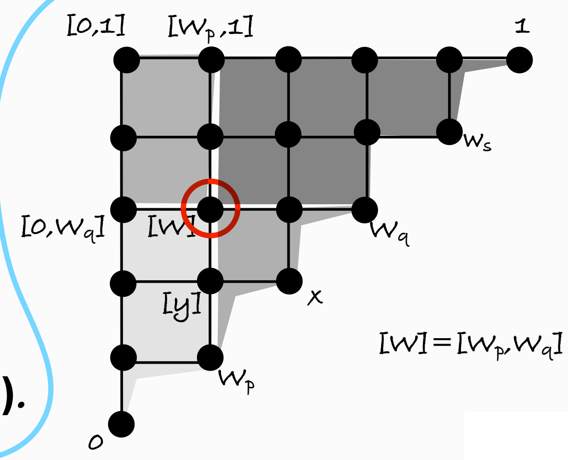
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(\mathbf{C}),\le,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

Se verifica:

$([a] \sqsubseteq^{o} [b]) \Leftrightarrow ([a] \le [b])$

$\Leftrightarrow ((a_p \le b_p)\,\&\,(a_q \le b_q))$,

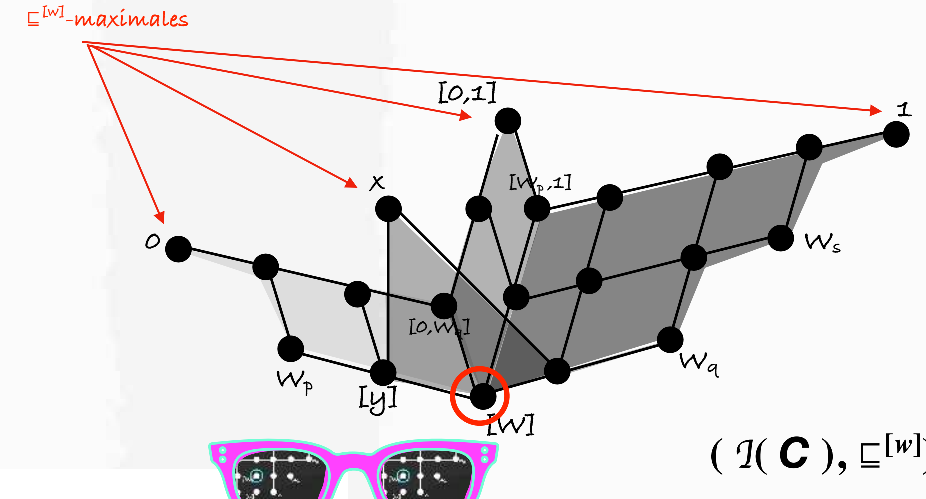
es decir: $(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{x}) \equiv (\mathcal{I}(\mathbf{C}), \le)$.



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(\mathbf{C})$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \le [a] \le ([b]+[w]))$

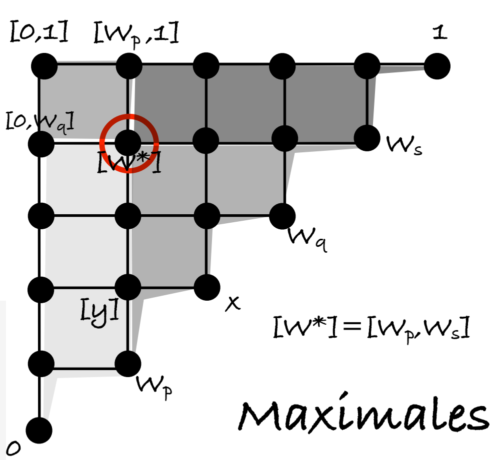
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

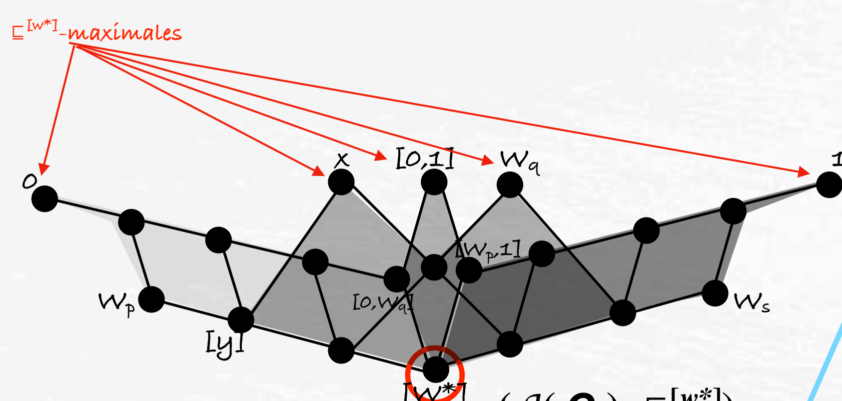


$\text{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

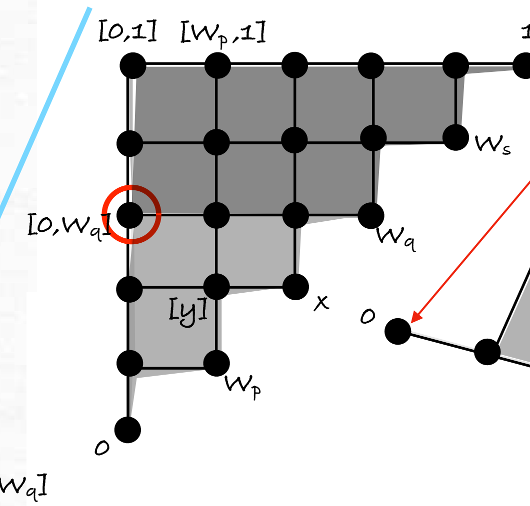
(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

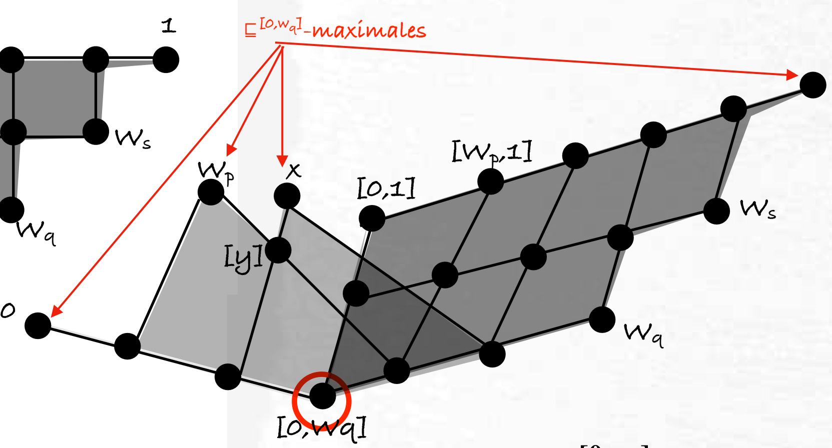
Otras perspectivas...

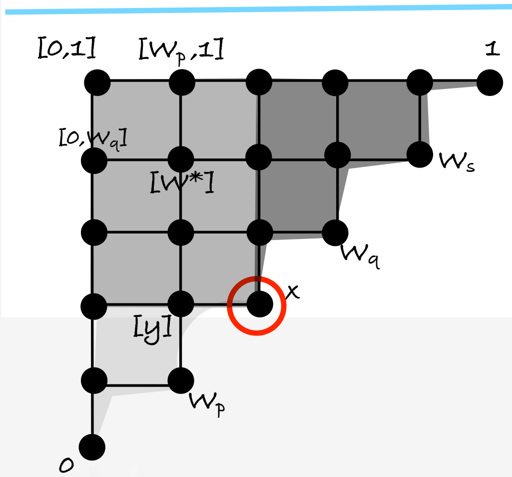


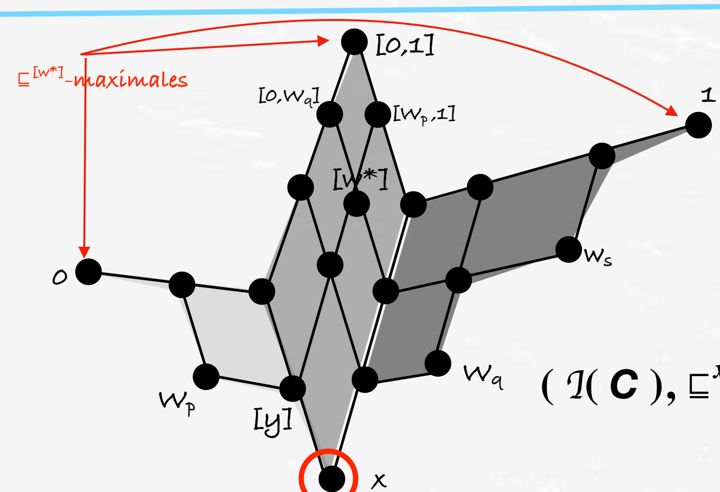


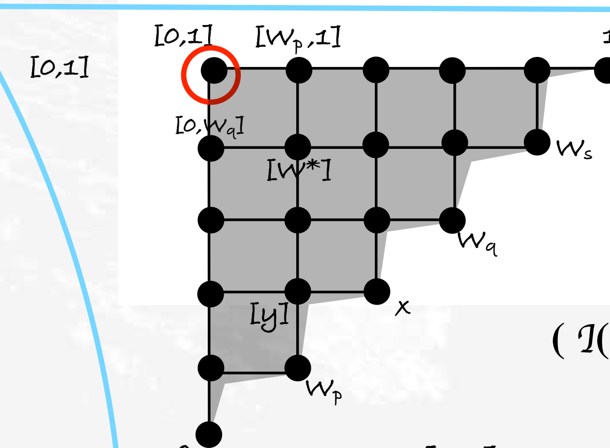
$\text{Maximales}(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0, x, w_4, [0,1], 1\}$

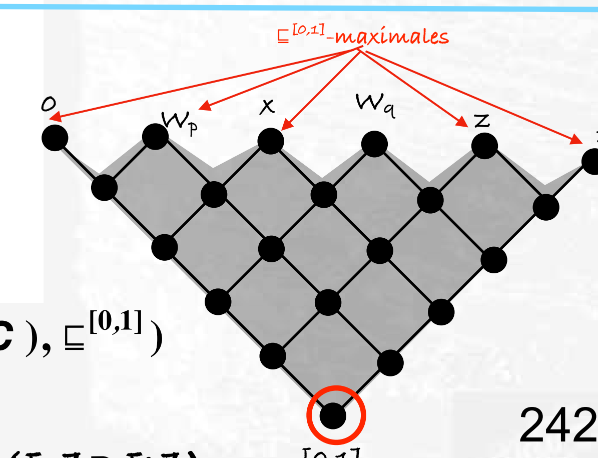












$(\mathcal{I}(\mathbf{C}), \sqsubseteq^{[0,1]})$

$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}(C)$, ≤) de intervalos de una cadena finita (C, ≤)

$C=\{0, a_1, \dots, a_p, \dots, 1\}$

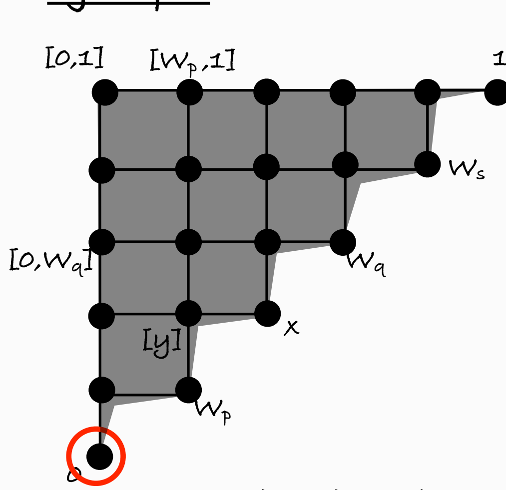
$\mathcal{I}(C)=\{ [a]=[a_p,a_q] \;/\; (a_p \leq a_q) \}$

$(a_0=0,\ a_n=1)$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_p,b_p),\min(a_q,b_q)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_p,b_p),\max(a_q,b_q)]$, $[a_p,a_q]'=[1-a_q,1-a_p]$

Ejemplo. Si **C** es una cadena con cardinal $|C|=6$, entonces,



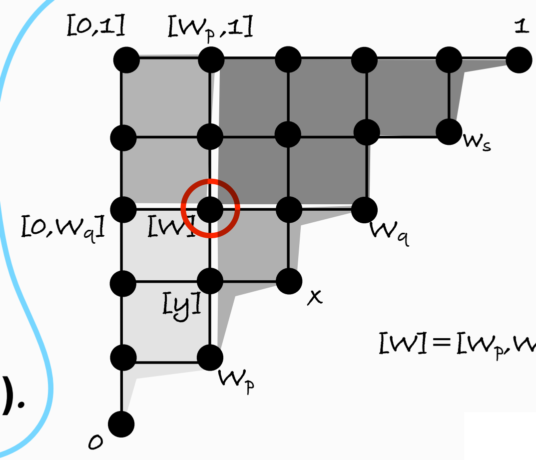
el retículo distributivo $((\mathcal{I}(C),\leq,\cdot,+,0,1),')$, (con negación fuerte), es:

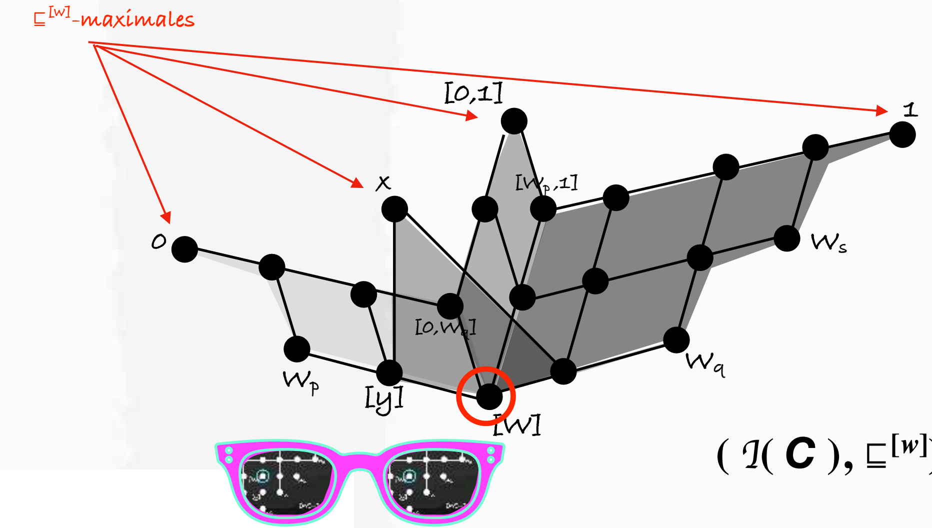
Se verifica:

$([a] \sqsubseteq^{o} [b]) \Leftrightarrow ([a] \leq [b])$

$\Leftrightarrow ((a_p \leq b_p)\,\&\,(a_q \leq b_q))$,

es decir: $(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{x}) \equiv (\mathcal{I}(C), \leq)$.





$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w]})$

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}(C)$:

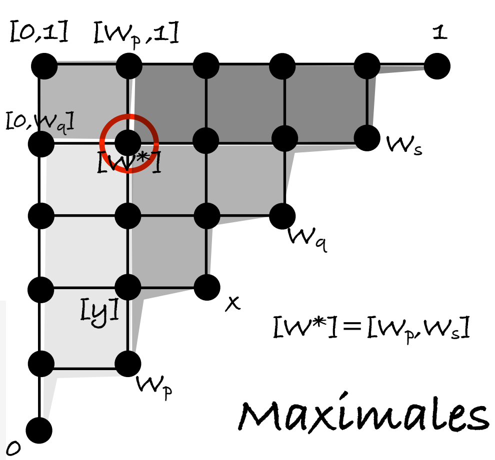
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

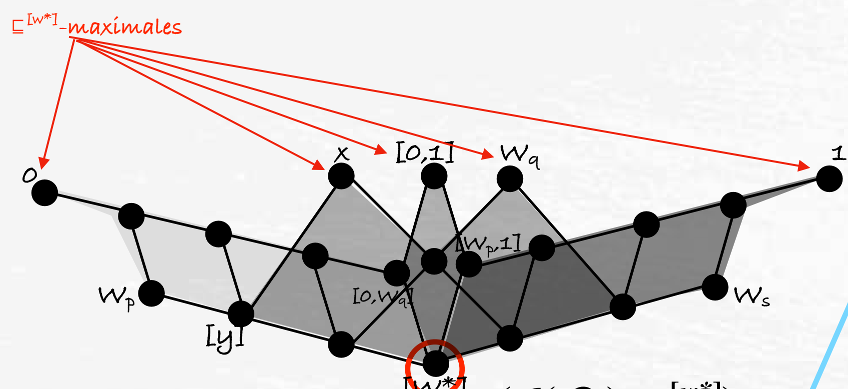
$\Leftrightarrow (a_p \sqsubseteq^{w_p} b_p)\,\&\,(a_q \sqsubseteq^{w_q} b_q)$

$\mathrm{Maximales}(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w]})=\{0, x, [0,1], 1\}$

(Nota. w_p y w_q NO son maximales).

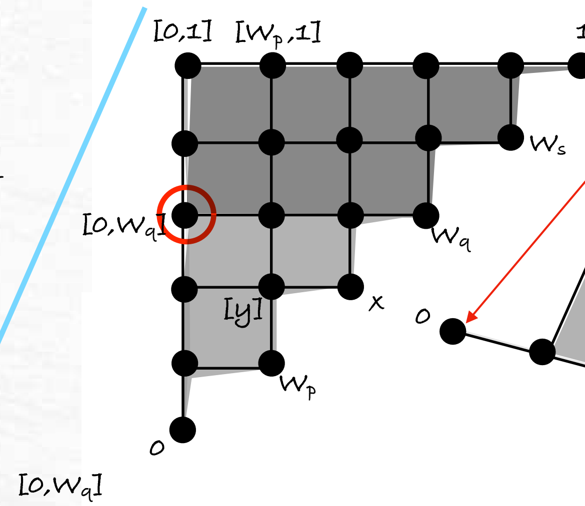
Otras perspectivas…

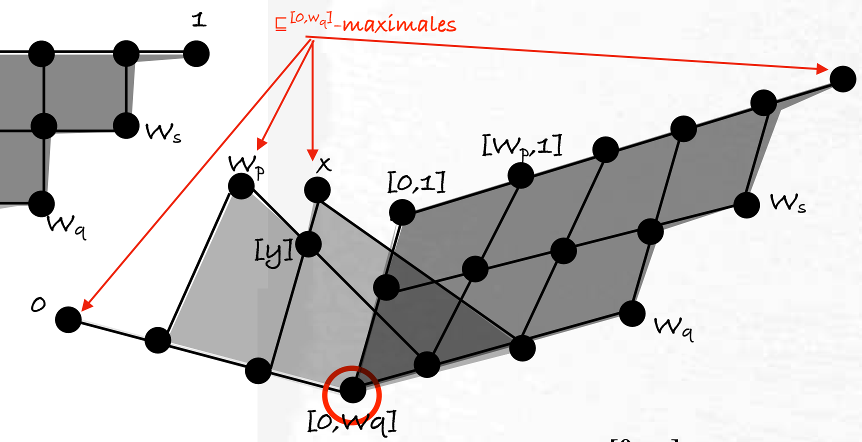




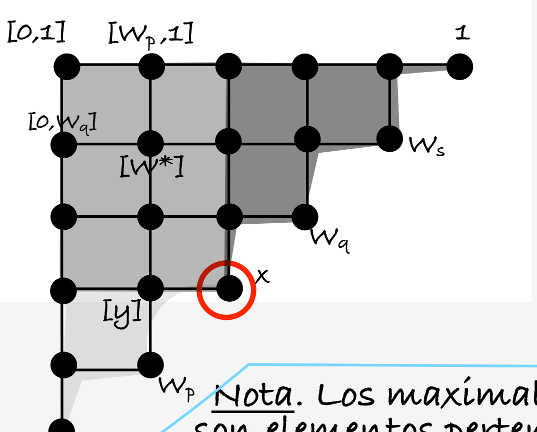
$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w^*]})$

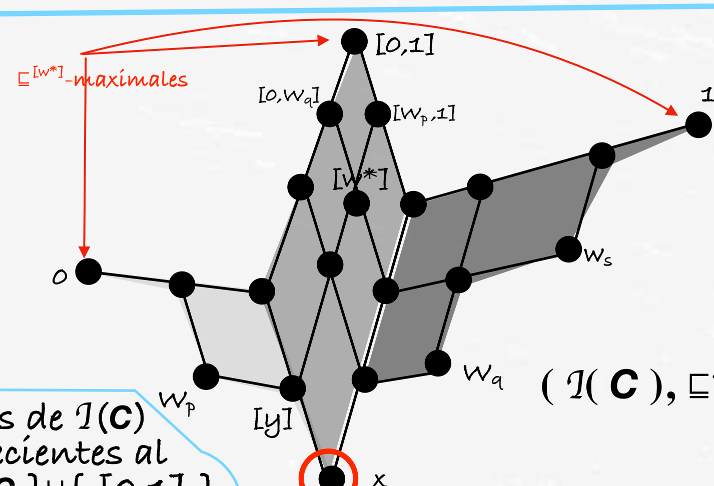
$\mathrm{Maximales}(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[w^*]})=\{0, x, w_4, [0,1], 1\}$





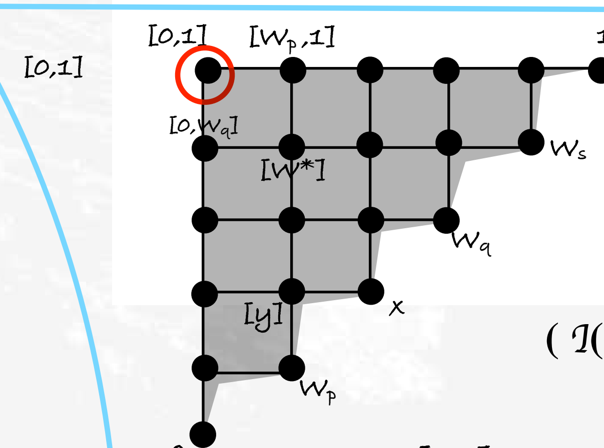
$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[0,w_q]})$

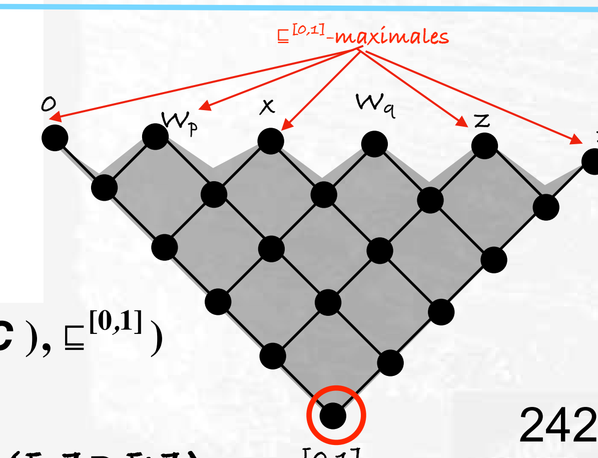




$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{x})$

Nota. Los maximales de $\mathcal{I}(C)$ son elementos pertenecientes al subconjunto $\{ [x,x] \;/\; x\in C \} \cup \{ [0,1] \}$.





$(\mathcal{I}(C), \sqsubseteq^{[0,1]})$

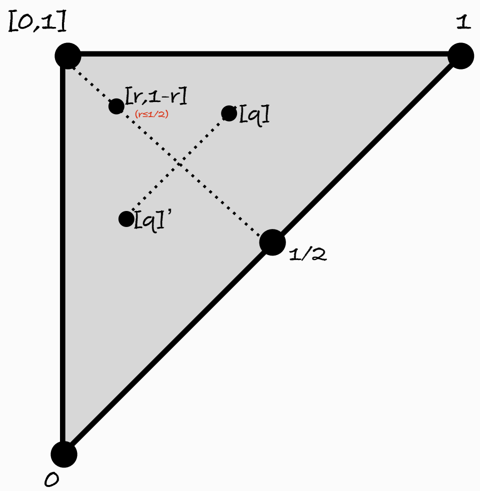
$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[W]}$ en el retículo ($\mathcal{I}$([0,1]), ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a] = [a_1,a_2] \,/\, (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

$([a] \le [b]) \Leftrightarrow ((a_1 \le b_1) \,\&\, (a_2 \le b_2))$, $[a]\cdot[b] = [min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b] = [max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]' = [1-a_2, 1-a_1]$



$((\mathcal{I}([0,1]), \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

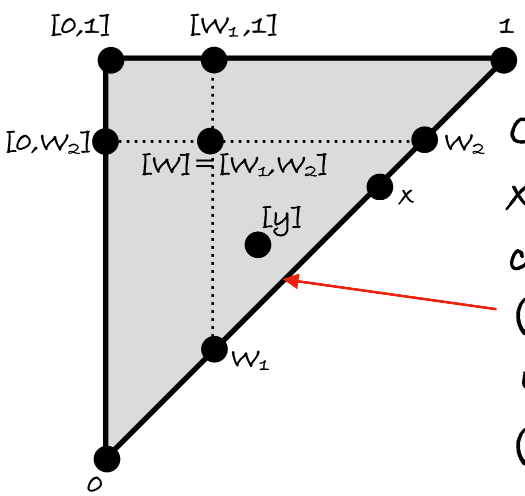
Retículo distributivo
con negación fuerte.

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1]), \leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1], \leq$)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \,\&\, (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2, 1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x] \ \ \forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

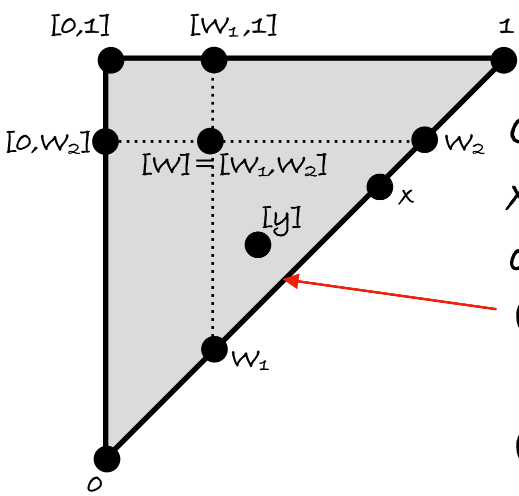
Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

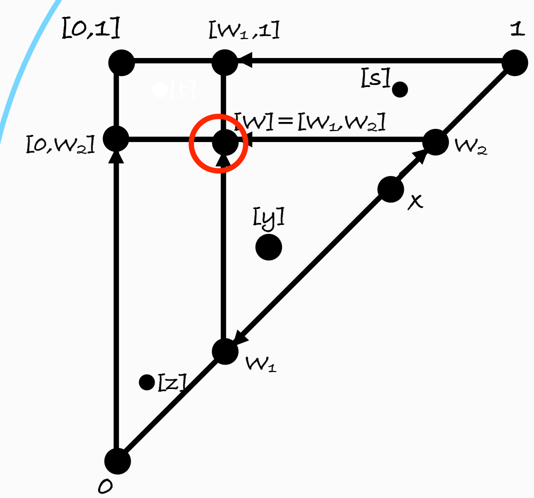
$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \;/\; (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_1\le b_1) \,\&\, (a_2\le b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1),min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[max(a_1,b_1),max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\le)$ incluida en el retículo de intervalos ($\mathcal{I}([0,1]),\le$).



(($\mathcal{I}([0,1]),\le,\cdot,+,0,1),'$)

Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \le [a] \le ([b]+[w]))$

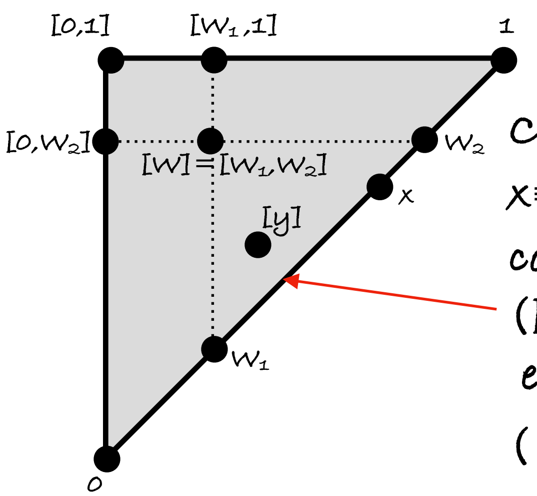
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \;/\; (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_1\le b_1)\,\&\,(a_2\le b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

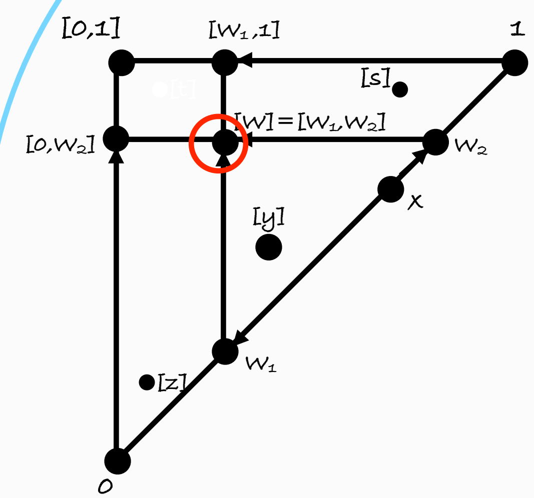
$[a]+[b]=[max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2, 1-a_1]$

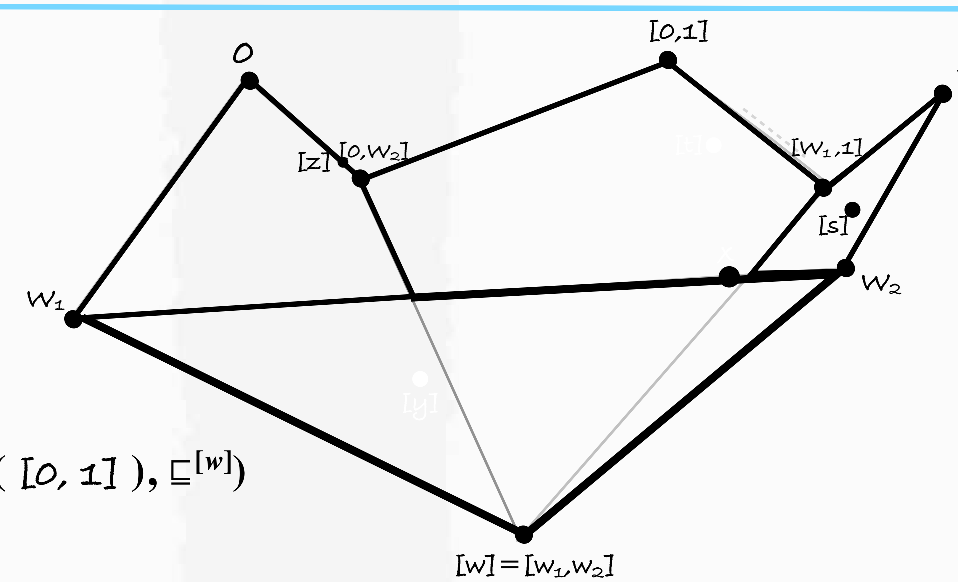


Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x\in[0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\le)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\le)$.

$((\mathcal{I}([0,1]),\le,\cdot,+,0,1),')$

Retículo distributivo con negación fuerte.





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \le [a] \le ([b]+[w]))$

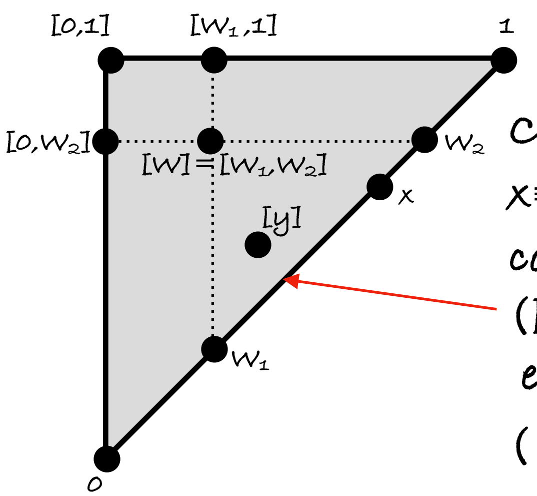
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1)\,\&\,(a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

$\mathcal{I}([0,1])=\{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

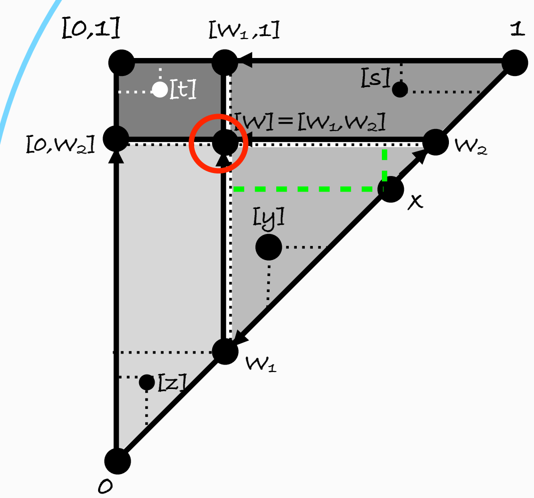
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \& (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1),min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[max(a_1,b_1),max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



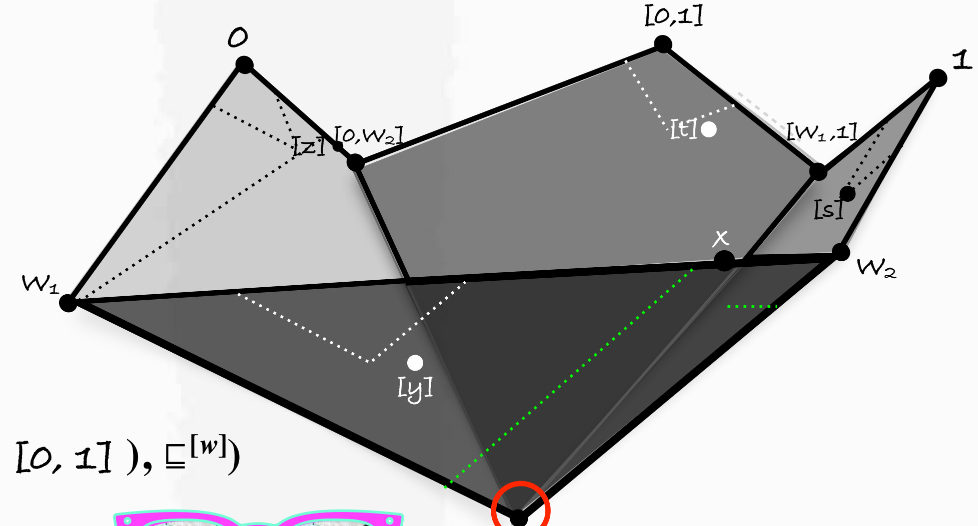
Con la identificación: $x\equiv[x,x] \ \ \forall x\in[0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo con negación fuerte.

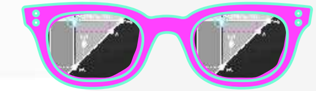


Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \& (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$



$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{[w]})$

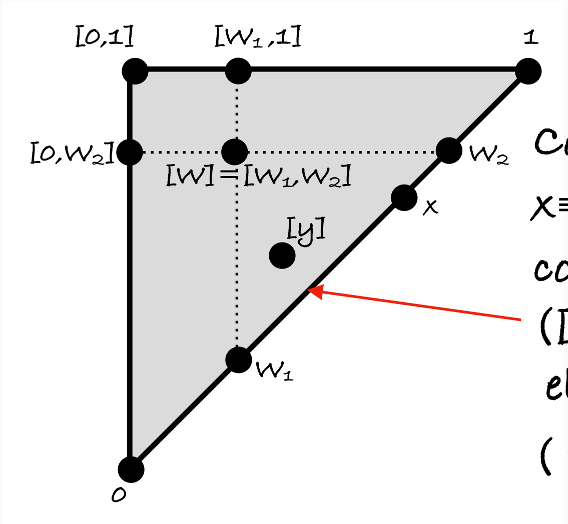


Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, $\leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1]$, $\leq$)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{ [a] = [a_1,a_2] \,/\, (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1) \}$

$([a] \leq [b]) \Leftrightarrow ((a_1 \leq b_1) \,\&\, (a_2 \leq b_2))$, $[a] \cdot [b] = [min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

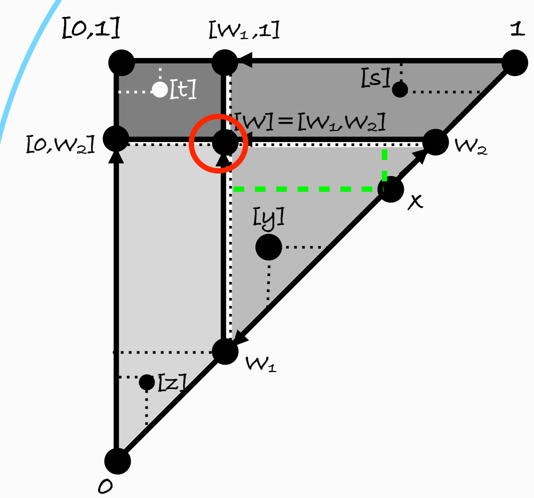
$[a] + [b] = [max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]' = [1-a_2, 1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1], \leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

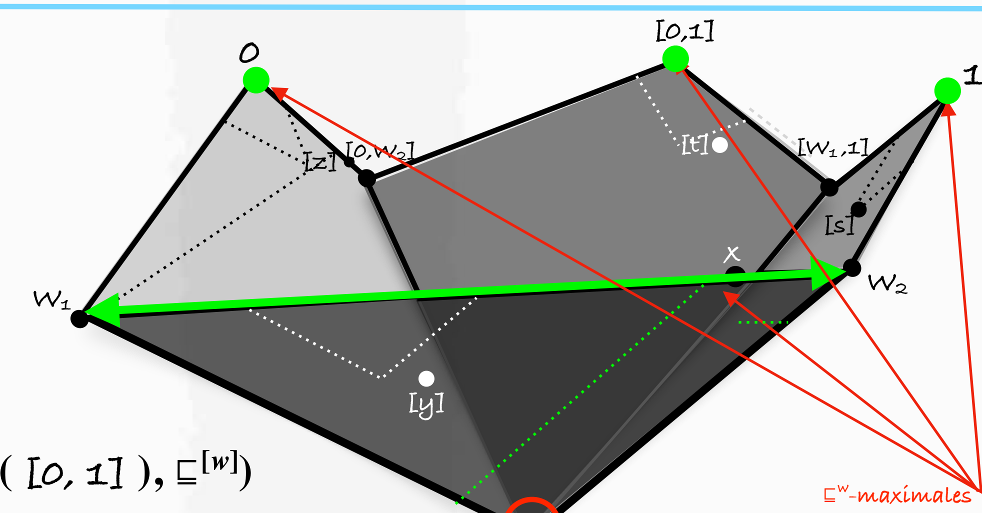
Retículo distributivo con negación fuerte.



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b] \cdot [w]) \leq [a] \leq ([b] + [w]))$

$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$



Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

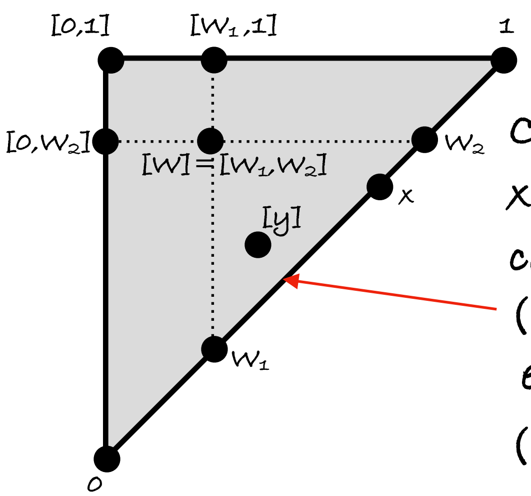
(Nota. w_1 y w_2 NO son maximales).

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1]), \leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1], \leq$)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \;/\; (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

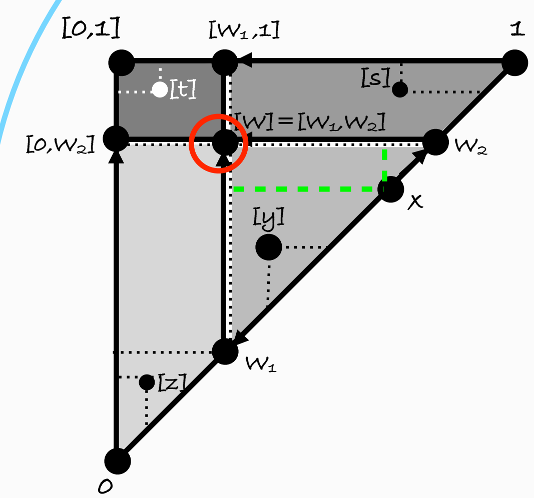
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \,\&\, (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2, 1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.

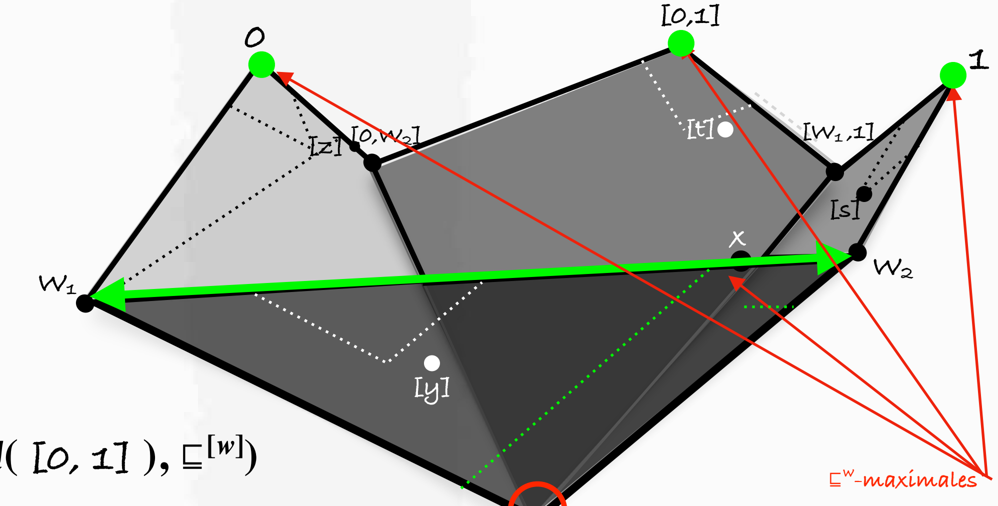
$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo con negación fuerte.



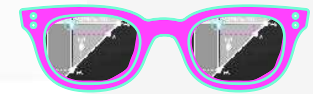
Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$



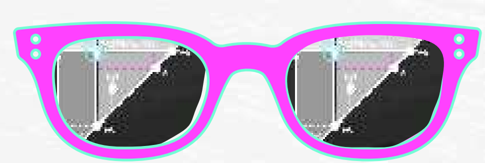
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$



Maximales$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas…

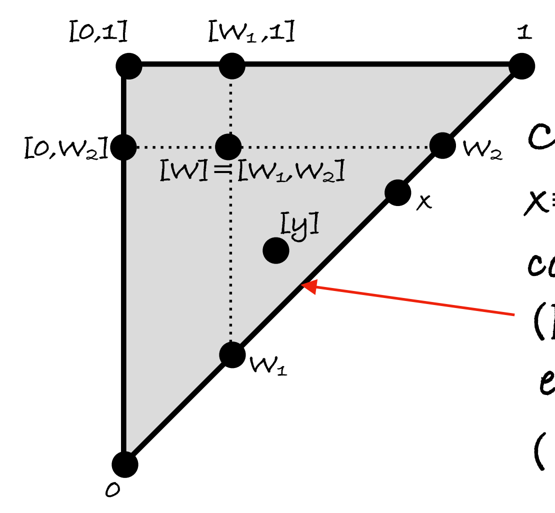


Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$ de intervalos de la cadena $([0,1], \leq)$

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \,/\, (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

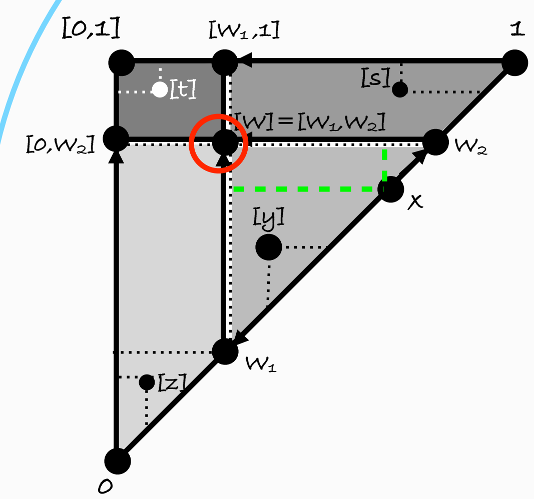
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \,\&\, (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



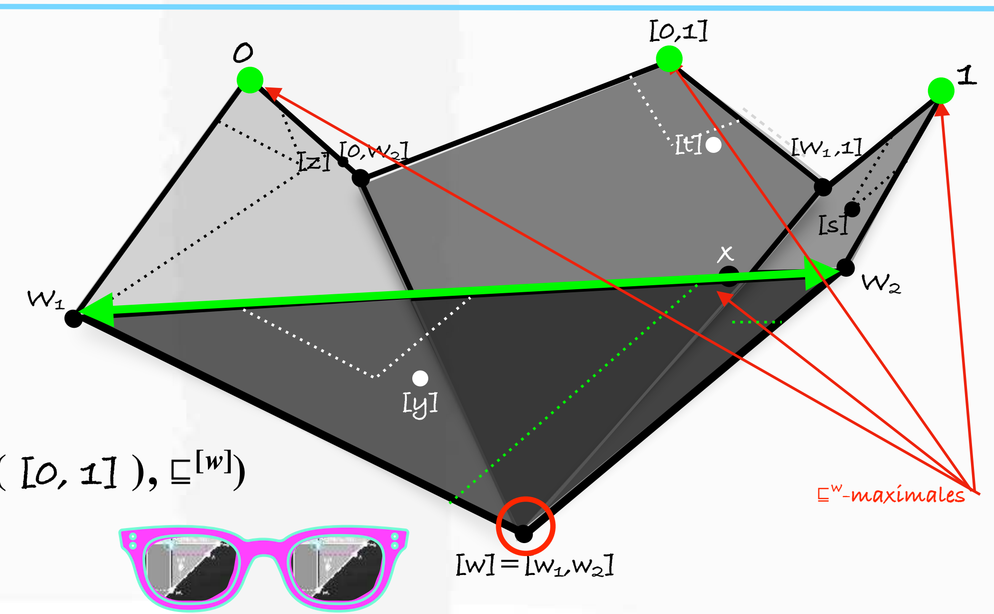
Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in[0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo con negación fuerte.



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

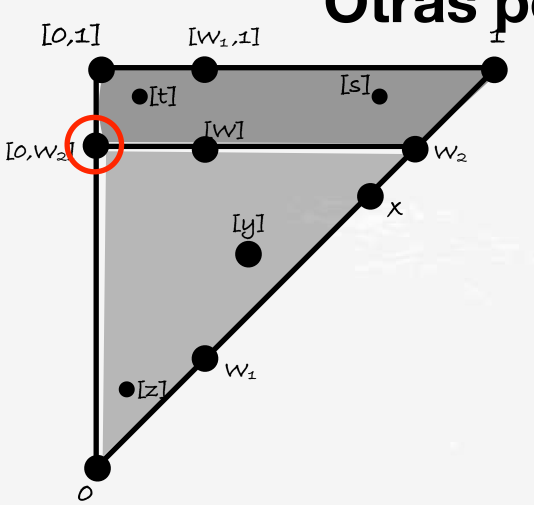


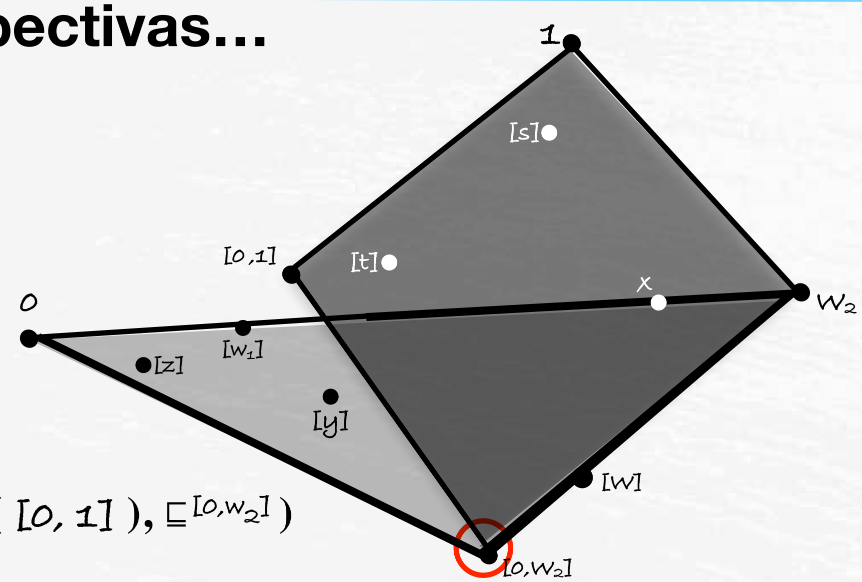
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0,1,[0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas…





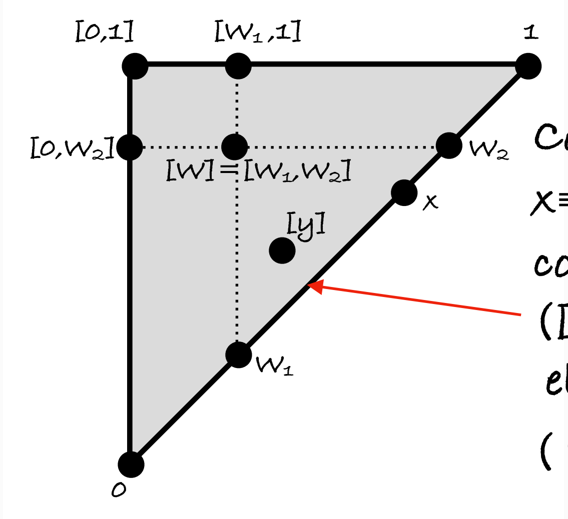
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$ de intervalos de la cadena $([0,1], \leq)$

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a] = [a_1, a_2] \,/\, (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

$([a] \leq [b]) \Leftrightarrow ((a_1 \leq b_1) \,\&\, (a_2 \leq b_2))$, $[a] \cdot [b] = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)]$,

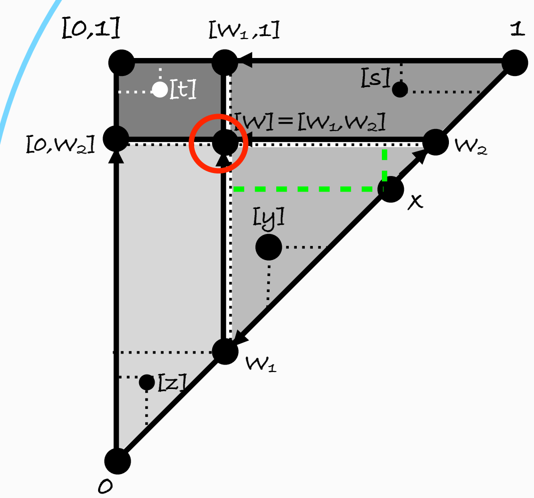
$[a] + [b] = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)]$, $[a_1, a_2]' = [1-a_2, 1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1], \leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

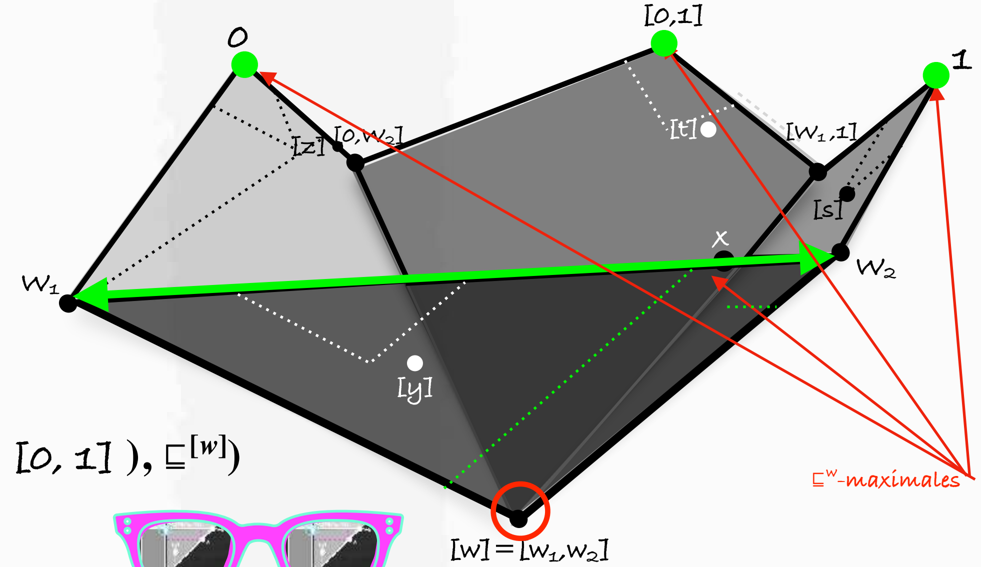
Retículo distributivo con negación fuerte.



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b] \cdot [w]) \leq [a] \leq ([b] + [w]))$

$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

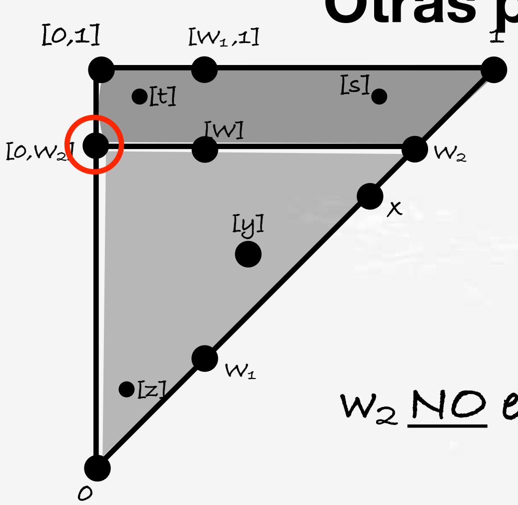


$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

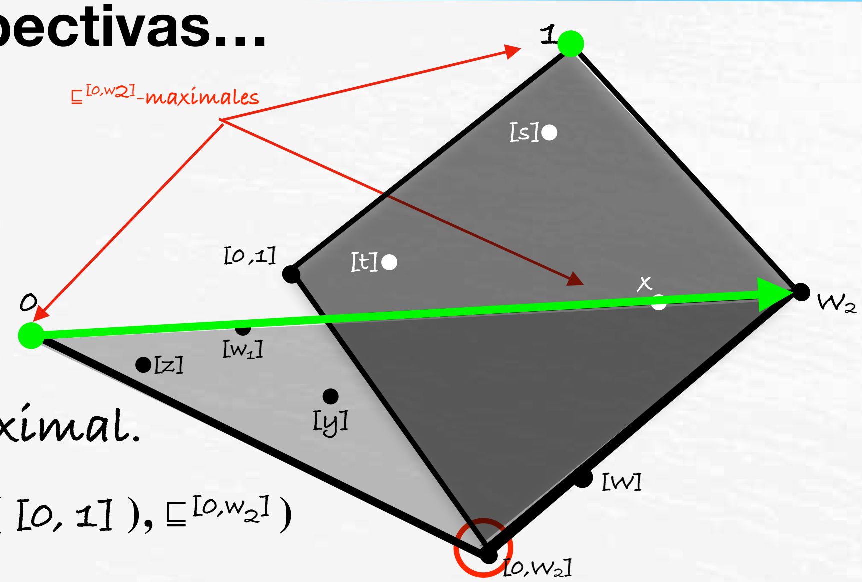
$\text{Maximales}(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \,]w_1, w_2[$

(Nota. w_1 y w_2 NO son maximales).

Otras perspectivas…



w_2 NO es maximal.



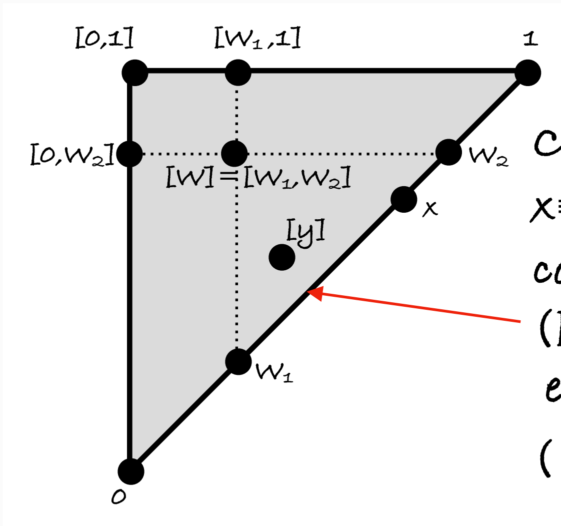
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

$\text{Maximales}(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0, w_2[$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

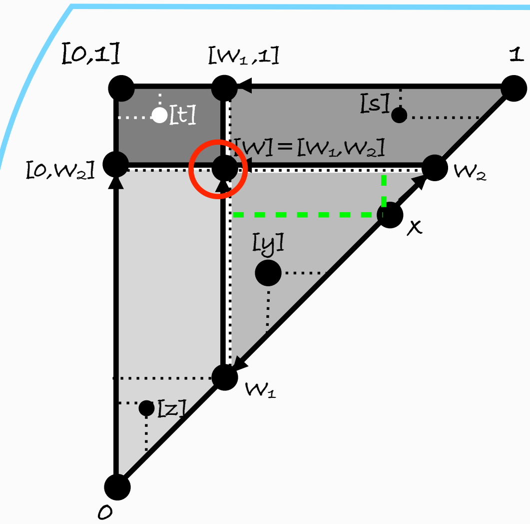
$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a] = [a_1, a_2] \ / \ (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

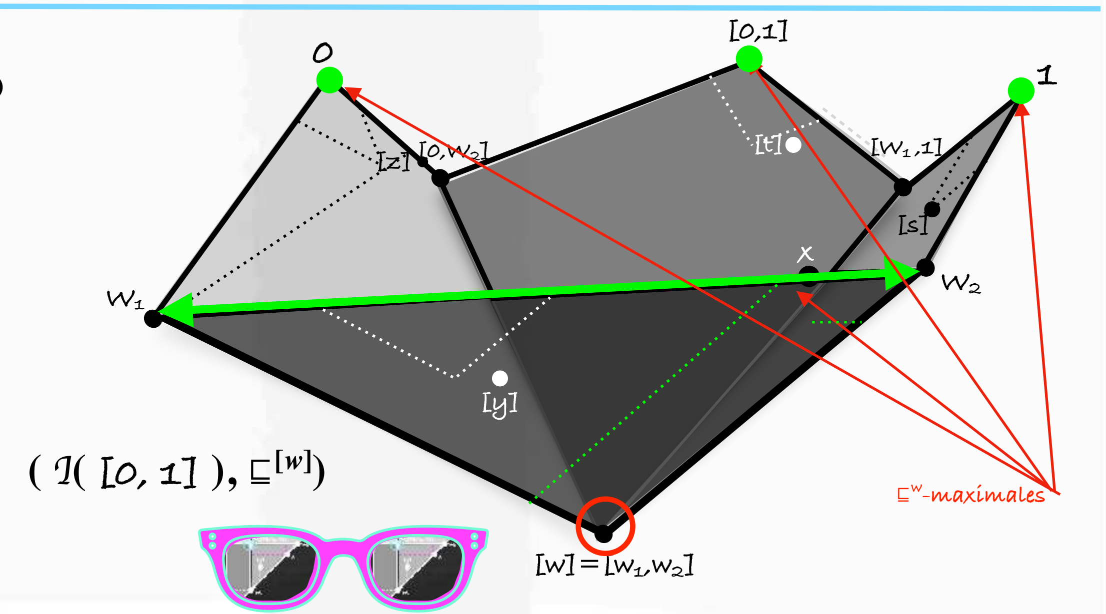
$([a] \le [b]) \Leftrightarrow ((a_1 \le b_1) \ \& \ (a_2 \le b_2))$, $[a] \cdot [b] = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)]$,
$[a] + [b] = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)]$, $[a_1, a_2]' = [1-a_2, 1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1], \le)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]), \le)$.

$((\mathcal{I}([0,1]), \le, \cdot, +, 0, 1), ')$
Retículo distributivo con negación fuerte.





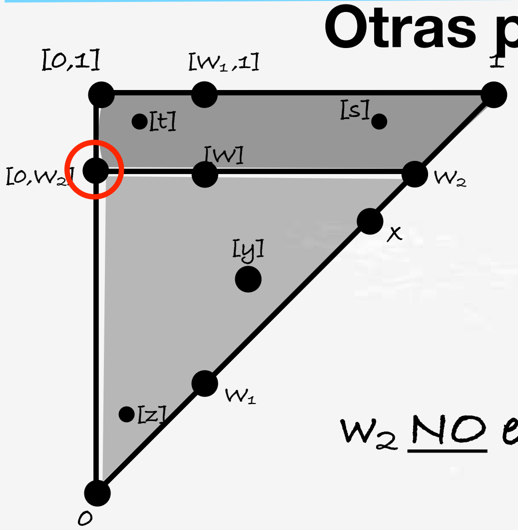
($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{[w]}$)

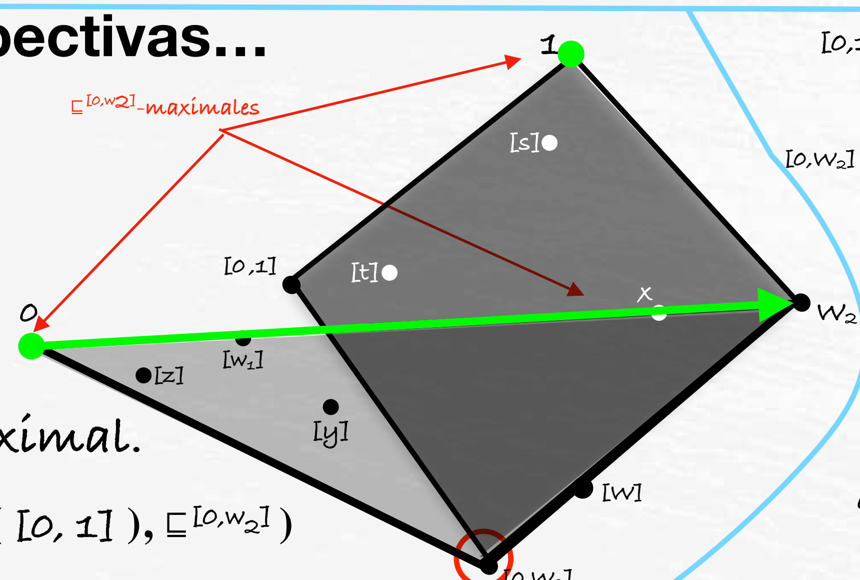
Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b] \cdot [w]) \le [a] \le ([b] + [w]))$
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \ \& \ (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \,]w_1, w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas…

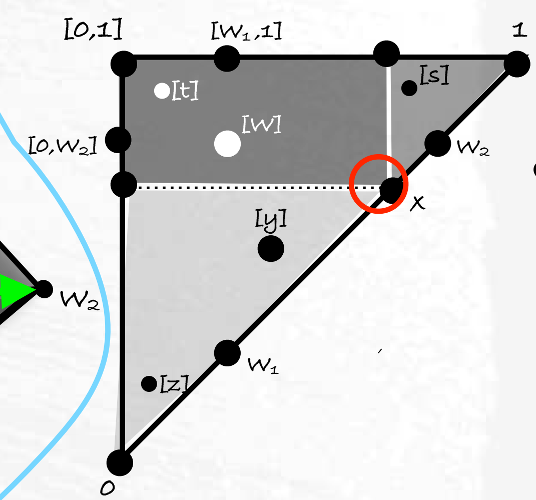


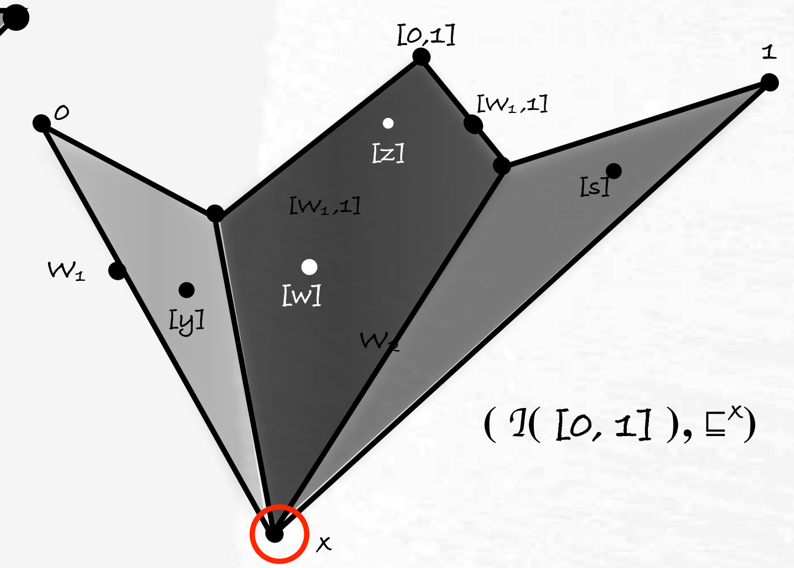


w_2 <u>NO</u> es maximal.

($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{[0,w_2]}$)

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0, w_2[$





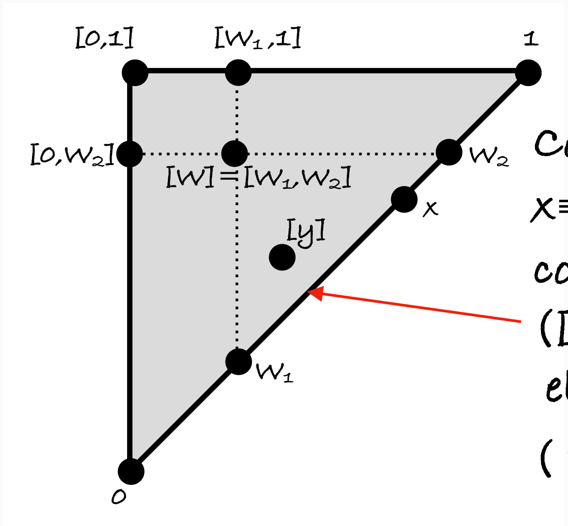
($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{x}$)

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$ de intervalos de la cadena $([0,1], \leq)$

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \,\&\, (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

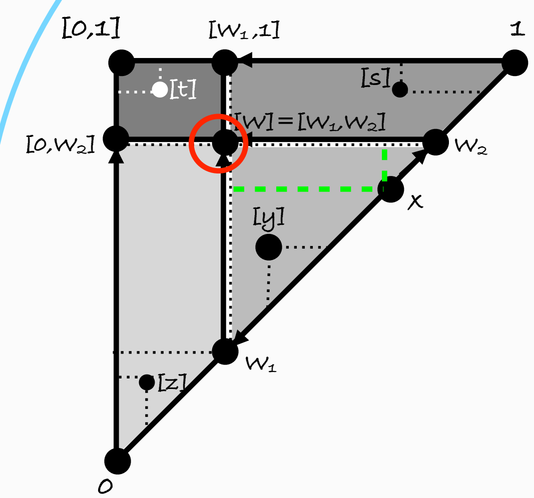
$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in[0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

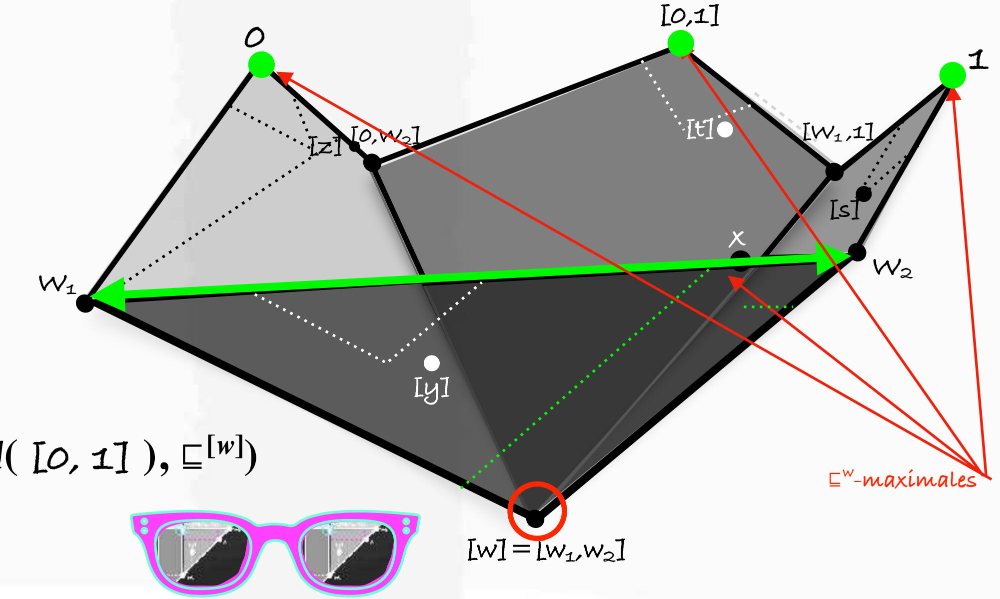
Retículo distributivo con negación fuerte.



Órdenes de actividad en $\mathcal{I}[0,1]$:

$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

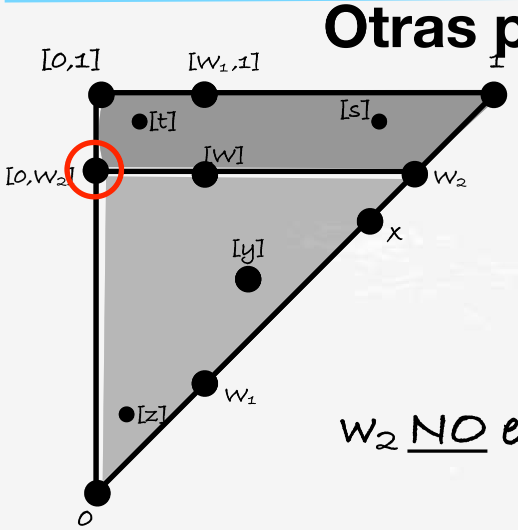


$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

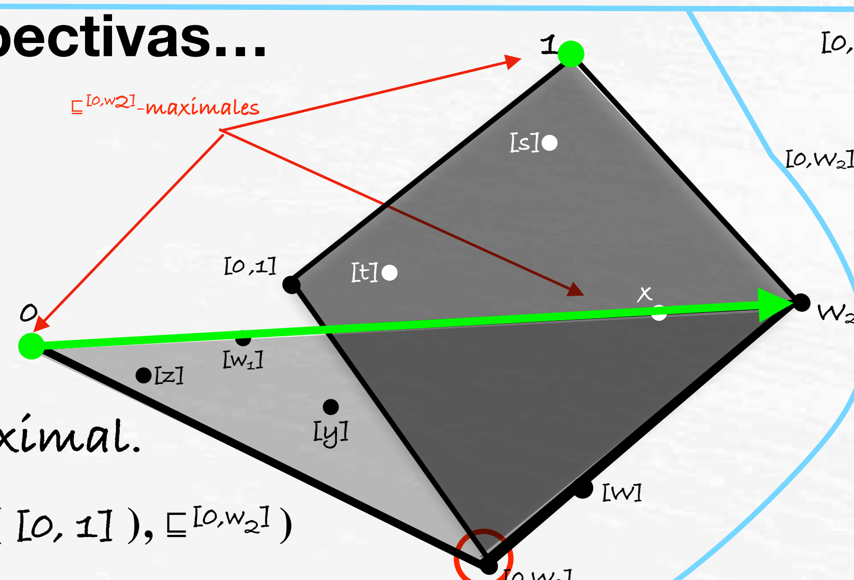
Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0,1,[0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas…

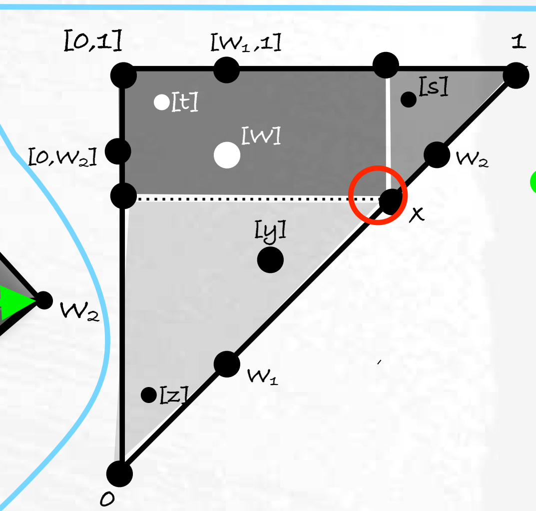


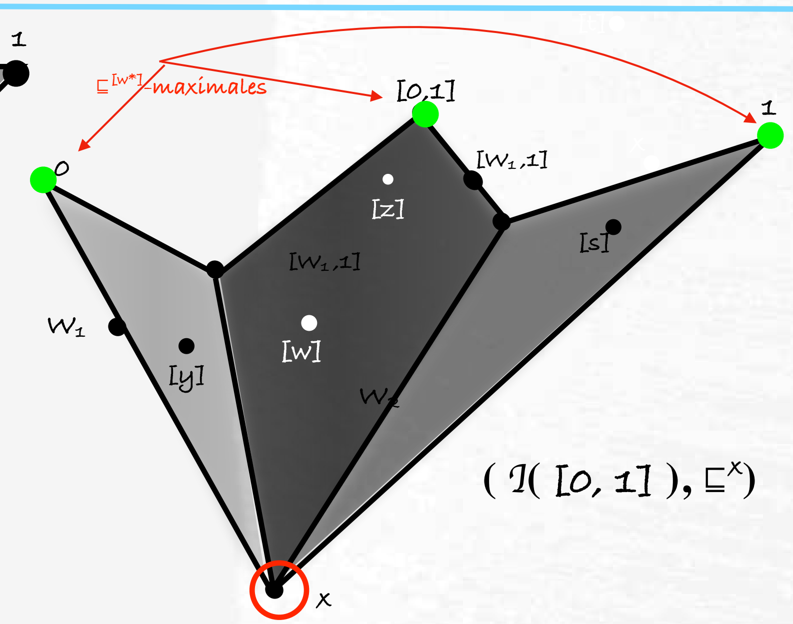
w_2 <u>NO</u> es maximal.



$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$





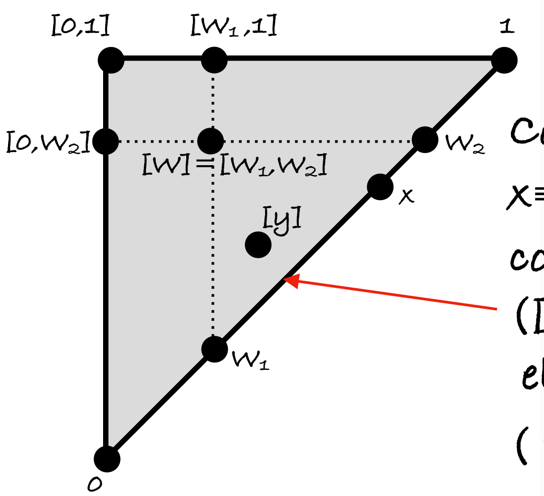
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x})$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo $(\mathcal{I}([0,1]), \leq)$ de intervalos de la cadena $([0,1], \leq)$

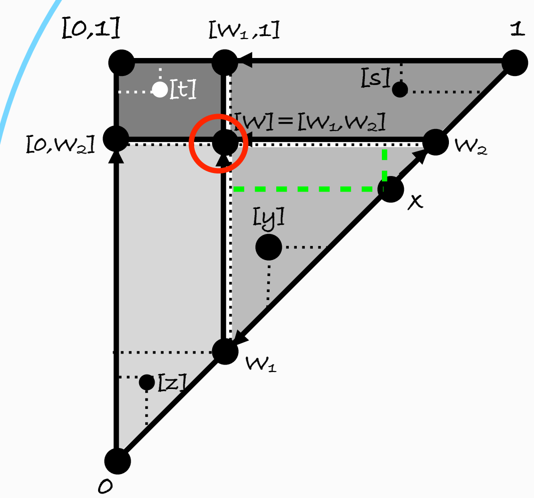
$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \,/\, (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

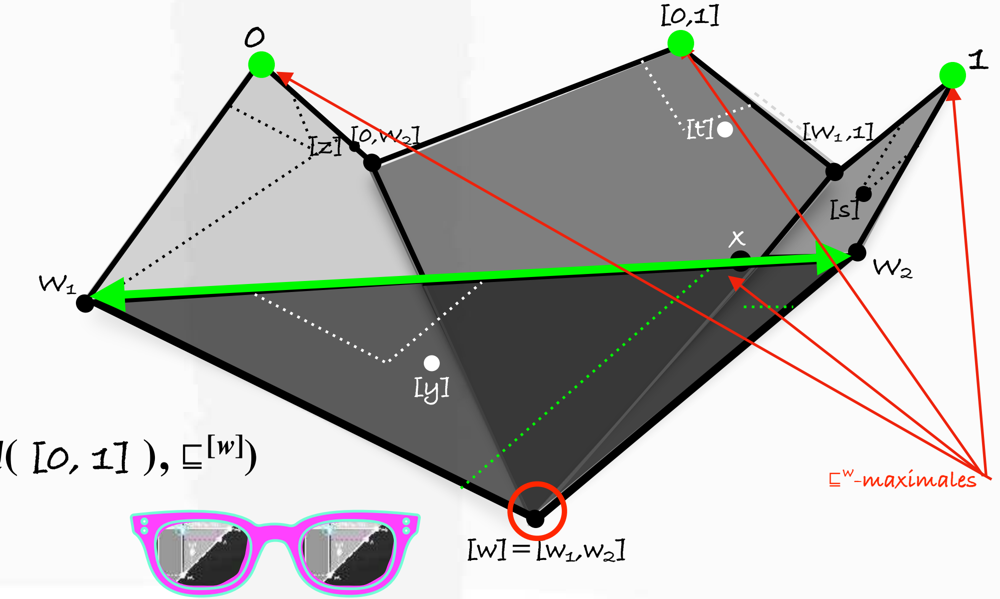
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1) \,\&\, (a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo con negación fuerte.

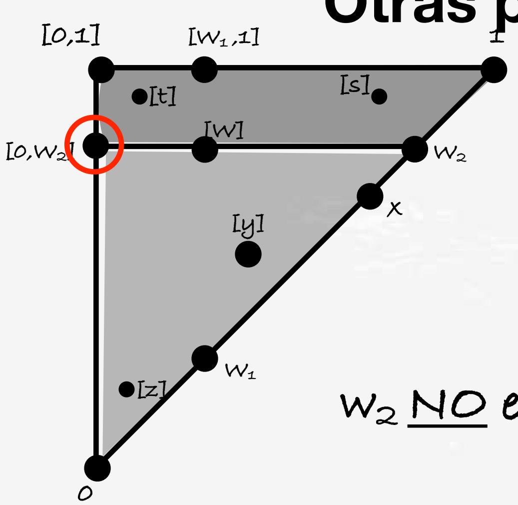
Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

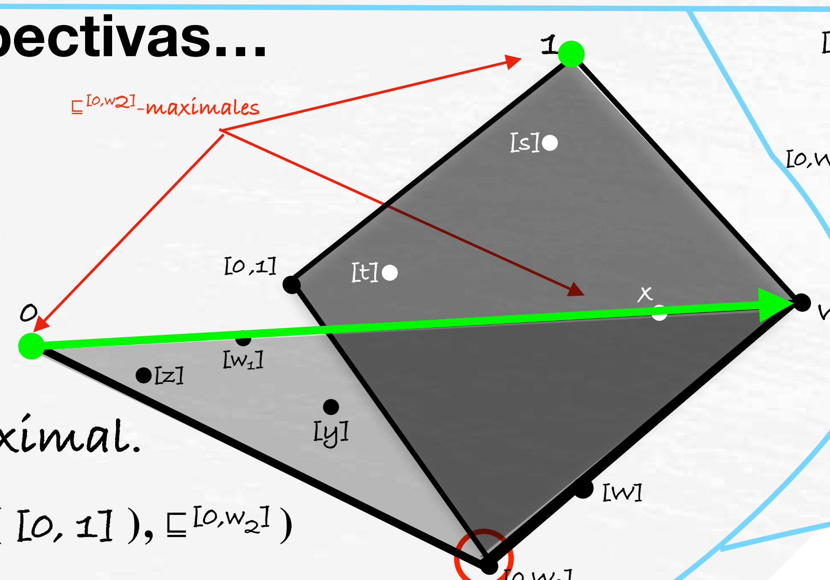
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0,1,[0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(Nota. w_1 y w_2 NO son maximales).

Otras perspectivas...

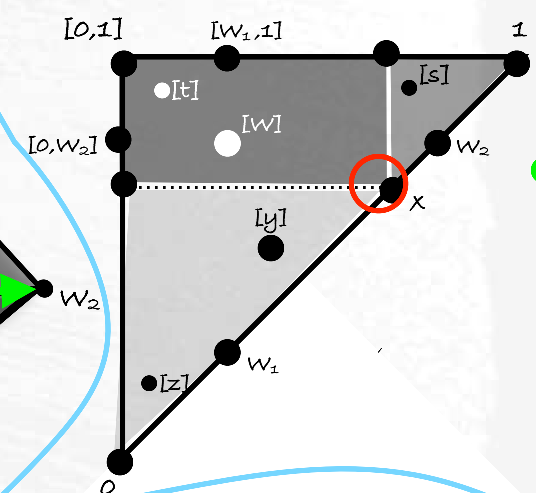


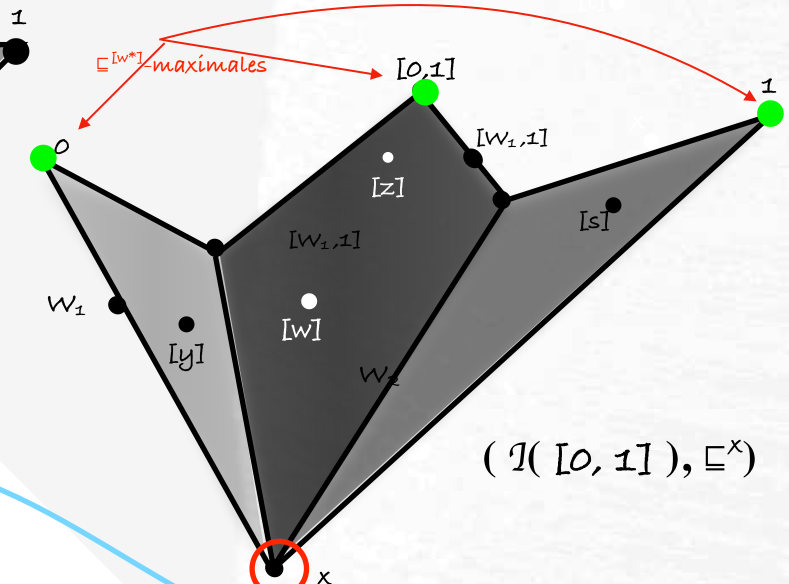


w_2 NO es maximal.

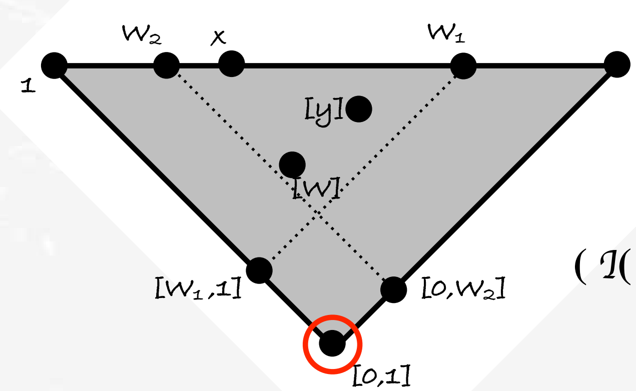
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x})$



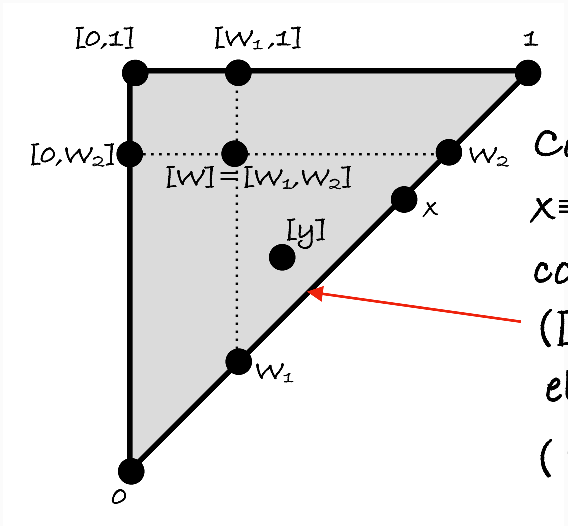
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,1]})$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, $\leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1]$, $\leq$)

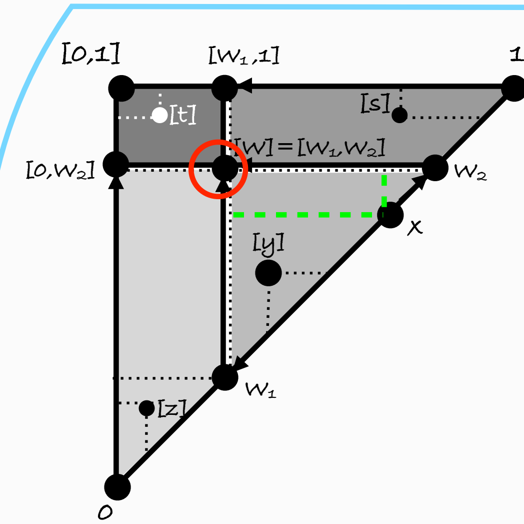
$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

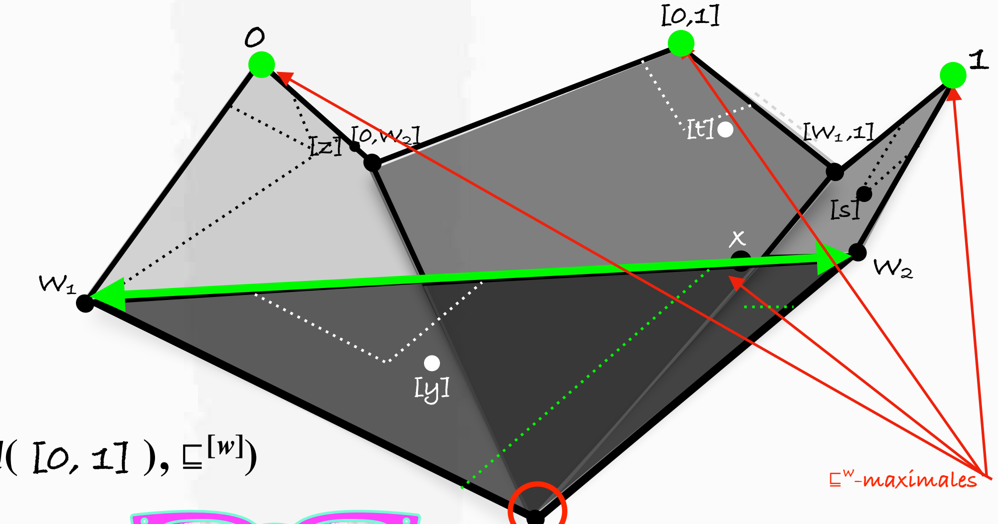
$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1)\,\&\,(a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$



Con la identificación: $x\equiv[x,x]$ $\forall x\in[0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\leq)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.





($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{[w]}$)

$[w]=[w_1,w_2]$

$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}[0,1]$:

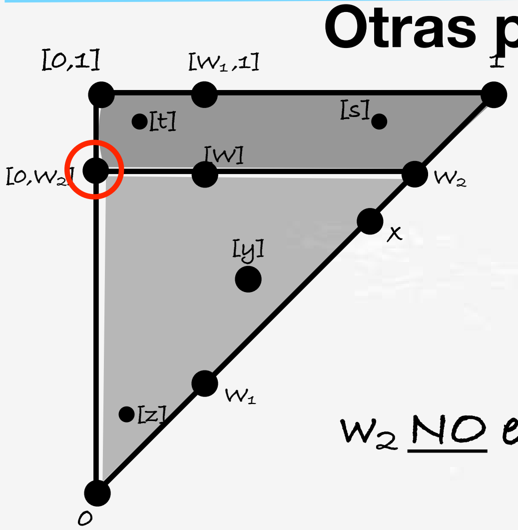
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

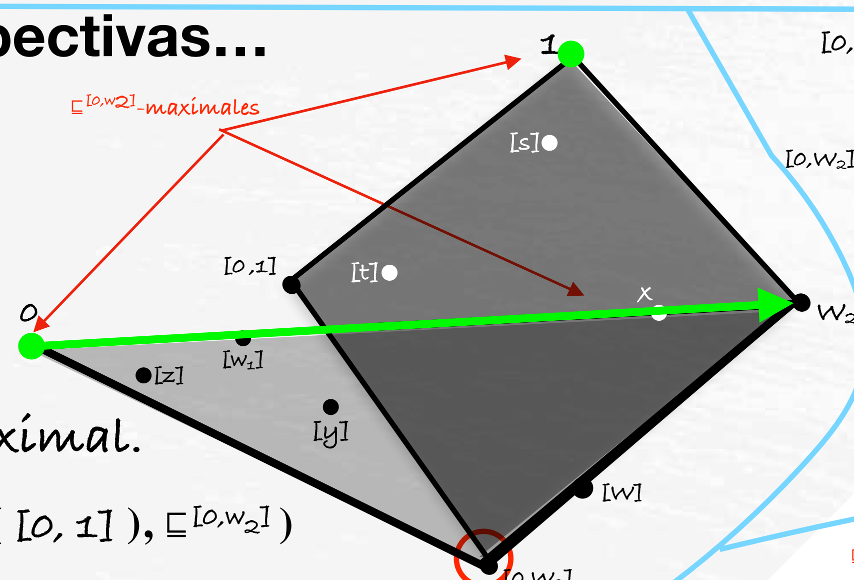
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1)\,\&\,(a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0,1,[0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(Nota. w_1 y w_2 NO son maximales).

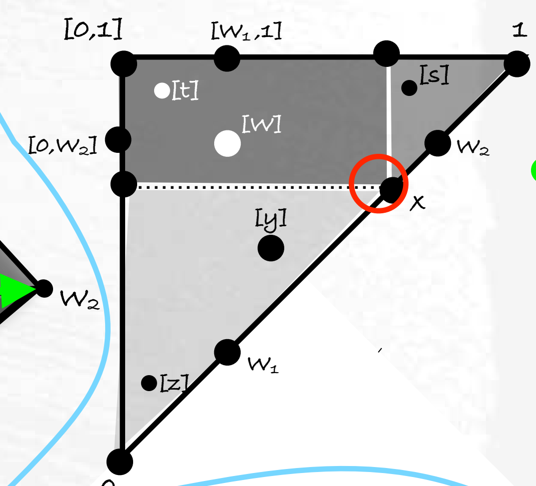
Otras perspectivas...

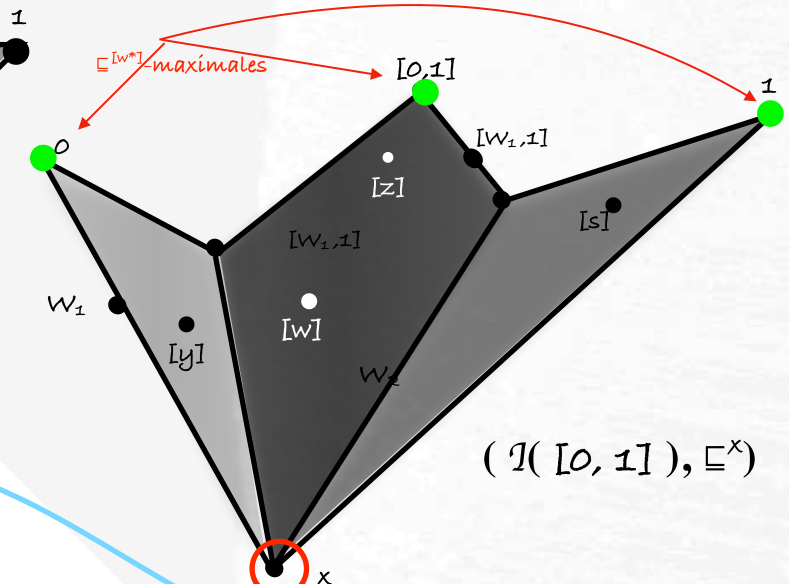




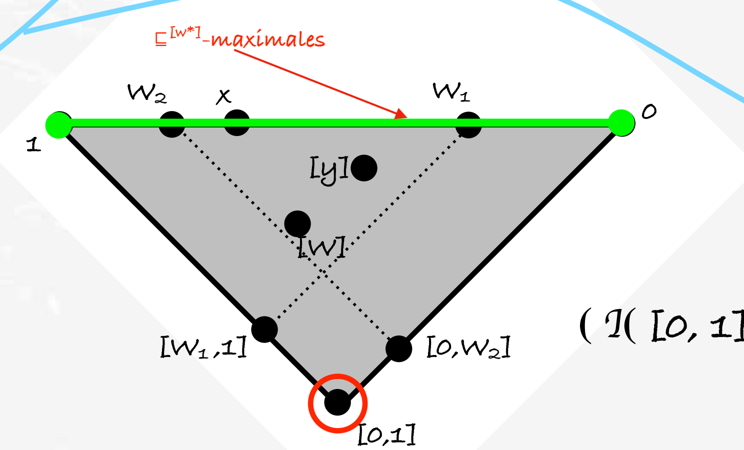
w_2 NO es maximal.

($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{[0,w_2]}$)





($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{x}$)



($\mathcal{I}$([0, 1]), $\sqsubseteq^{[0,1]}$)

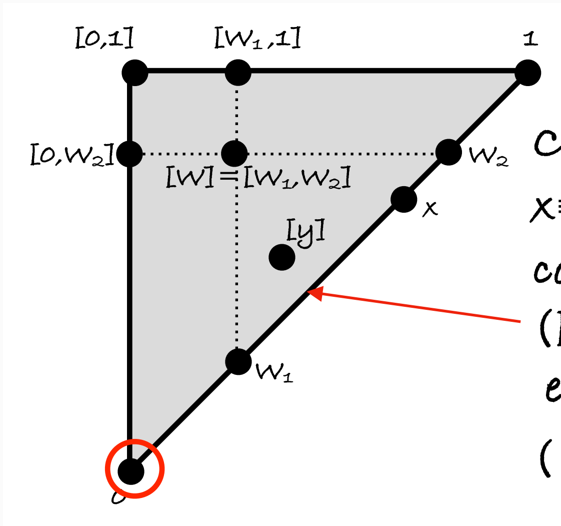
Maximales$(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

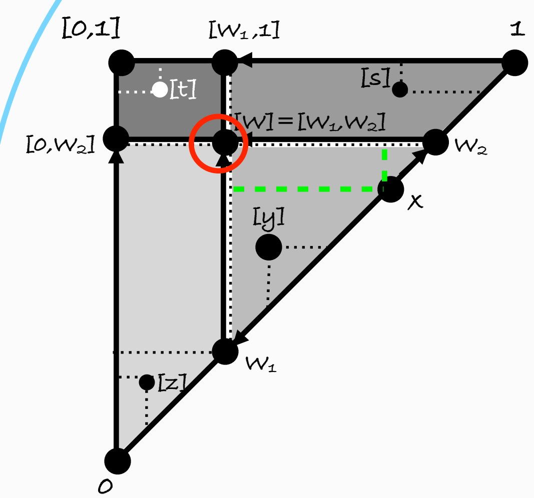
$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

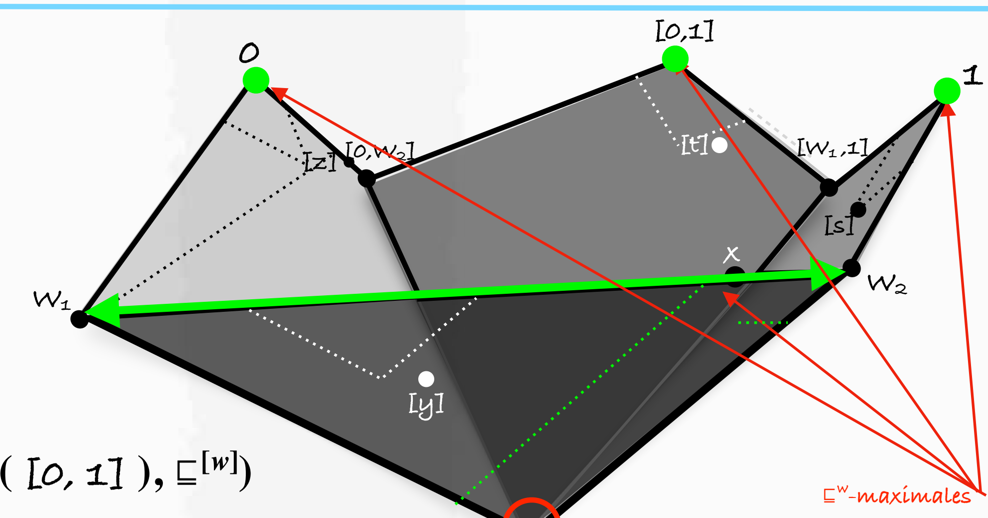
$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_1 \le b_1) \& (a_2 \le b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$

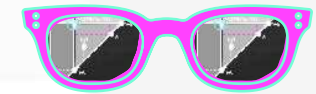


Con la identificación: $x \equiv [x,x]$ $\forall x \in [0,1]$, se considera la cadena $([0,1],\le)$ incluida en el retículo de intervalos $(\mathcal{I}([0,1]),\le)$.





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$



$((\mathcal{I}([0,1]),\le,\cdot,+,0,1),')$
Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

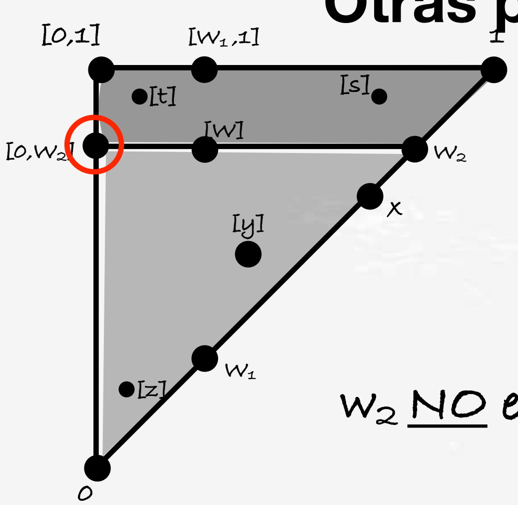
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \le [a] \le ([b]+[w]))$

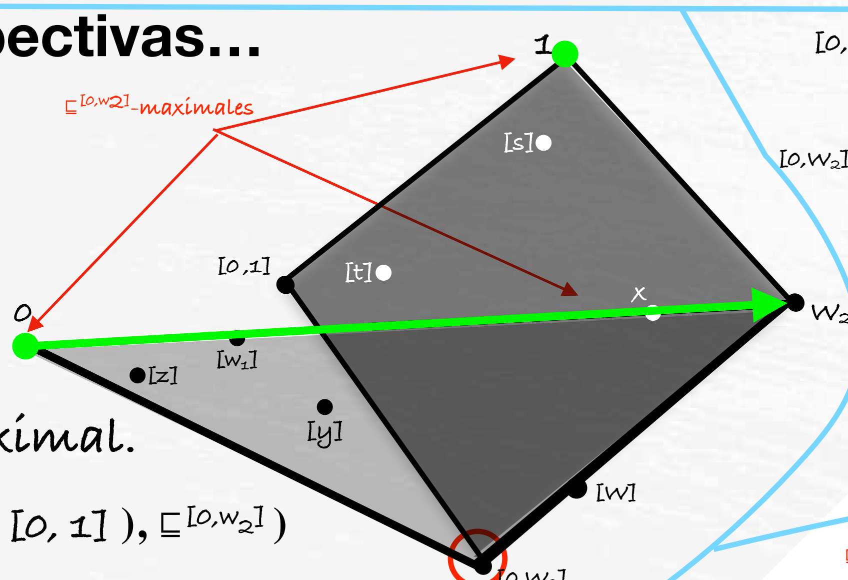
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \& (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0,1,[0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas...

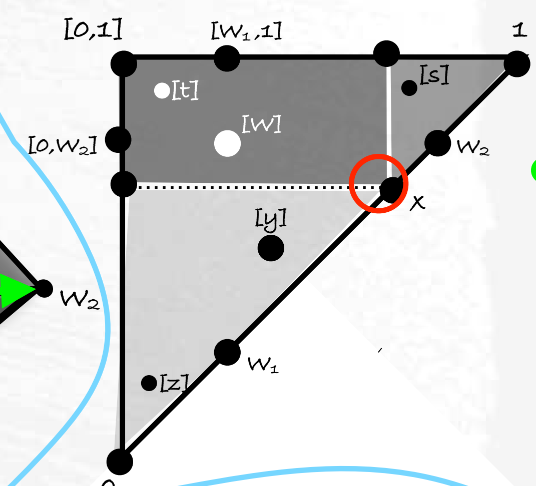


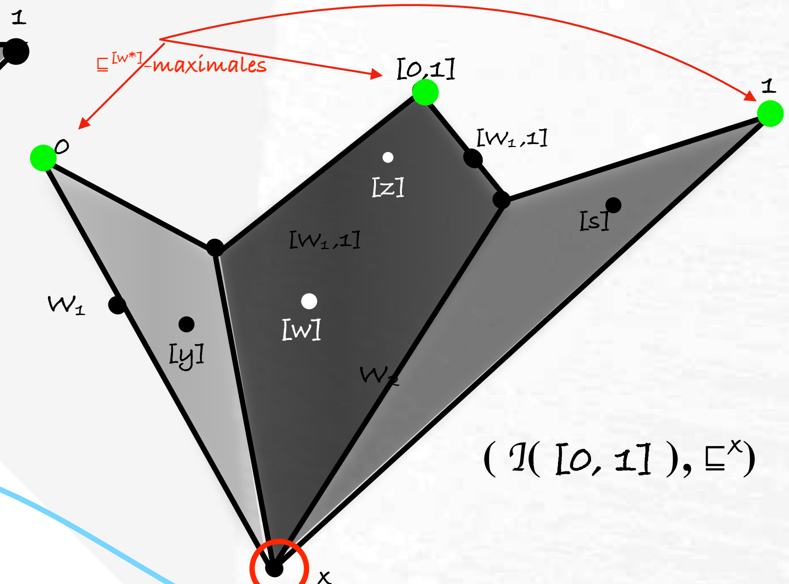


w_2 <u>NO</u> es maximal.

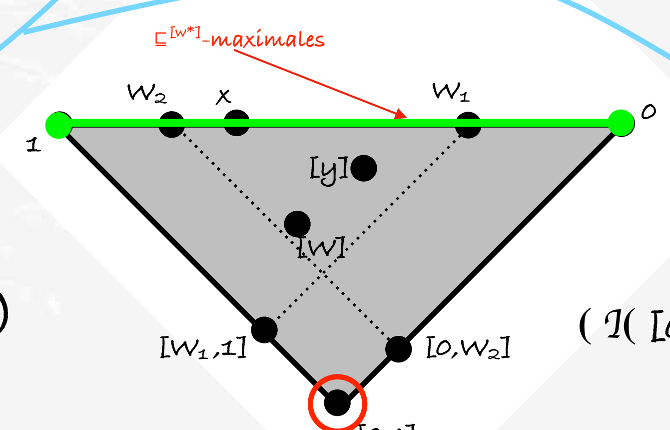
$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x})$



$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,1]})$

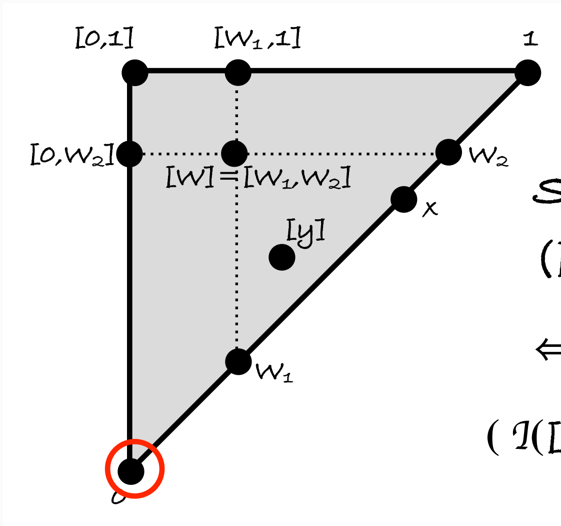
En este caso:
$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$. (Inclusión usual de conjuntos)

Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1])$, $\leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1]$, $\leq$)

$\mathcal{I}([0,1])=\{[a]=[a_1,a_2] \;/\; (0\leq a_1\leq a_2\leq 1)\}$

$([a]\leq[b])\Leftrightarrow((a_1\leq b_1)\,\&\,(a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$

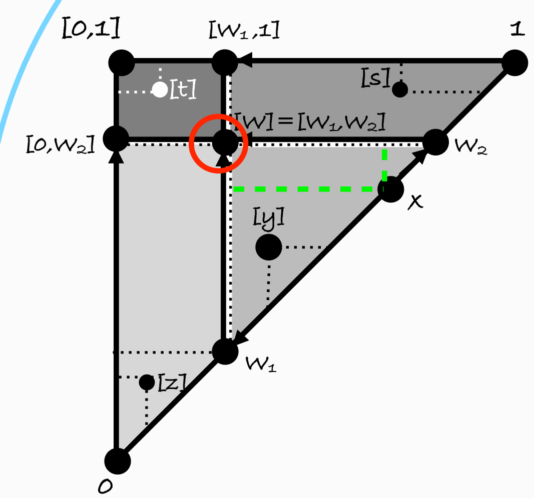


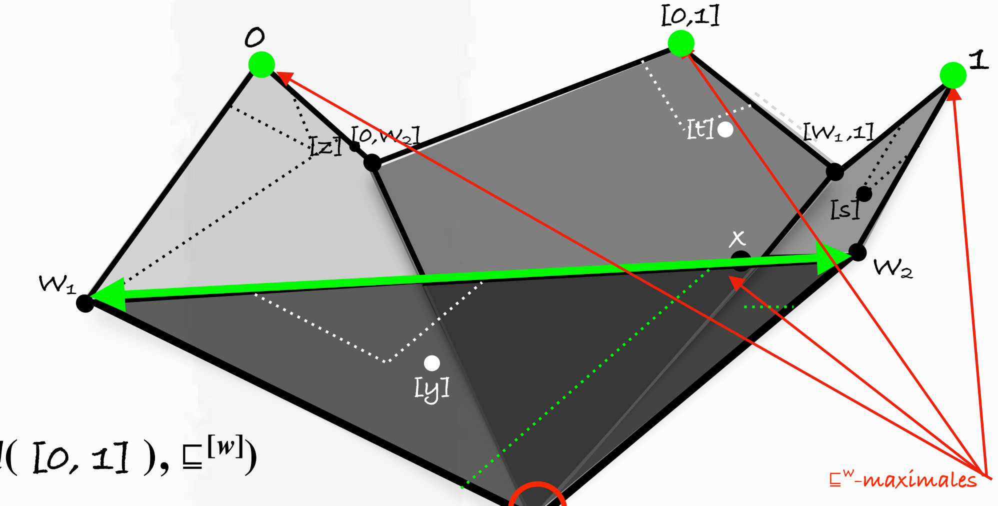
Se verifica:

$([a]\sqsubseteq^{0}[b])\Leftrightarrow([a]\leq[b])$

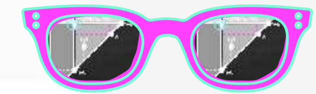
$\Leftrightarrow((a_p\leq b_p)\,\&\,(a_q\leq b_q))$

$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{x})\equiv(\mathcal{I}([0,1]),\leq)$.





$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{[w]})$



$((\mathcal{I}([0,1]),\leq,\cdot,+,0,1),')$

Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

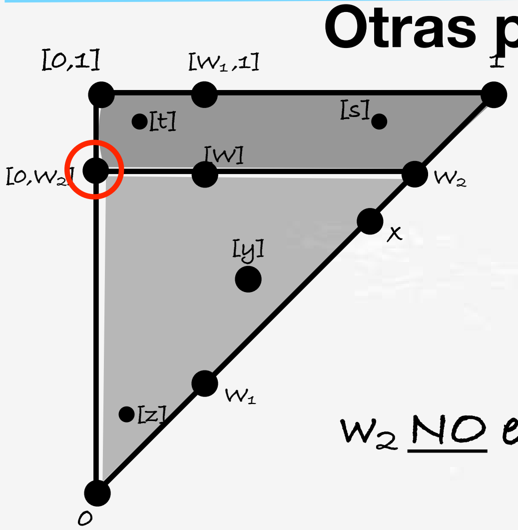
$([a]\sqsubseteq^{[w]}[b])\Leftrightarrow(([b]\cdot[w])\leq[a]\leq([b]+[w]))$

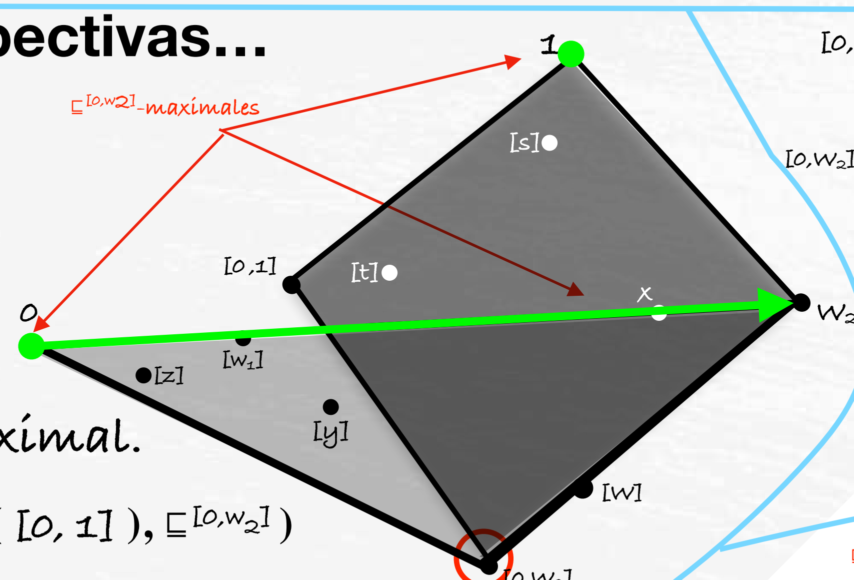
$\Leftrightarrow(a_1\sqsubseteq^{w_1}b_1)\,\&\,(a_2\sqsubseteq^{w_2}b_2)$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1],\sqsubseteq^{[w]})=\{0,1,[0,1]\}\cup\,]w_1,w_2[$

(Nota. w_1 y w_2 NO son maximales).

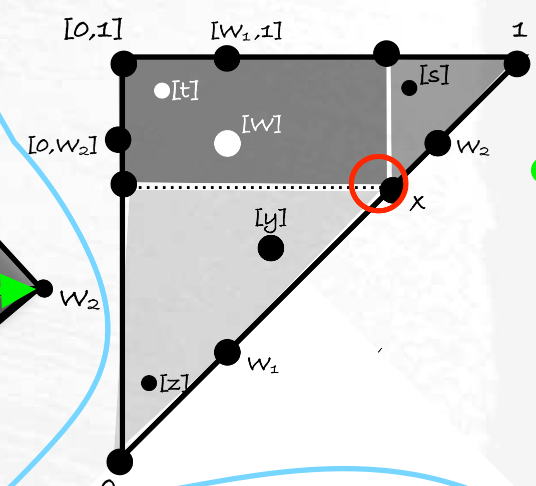
Otras perspectivas...

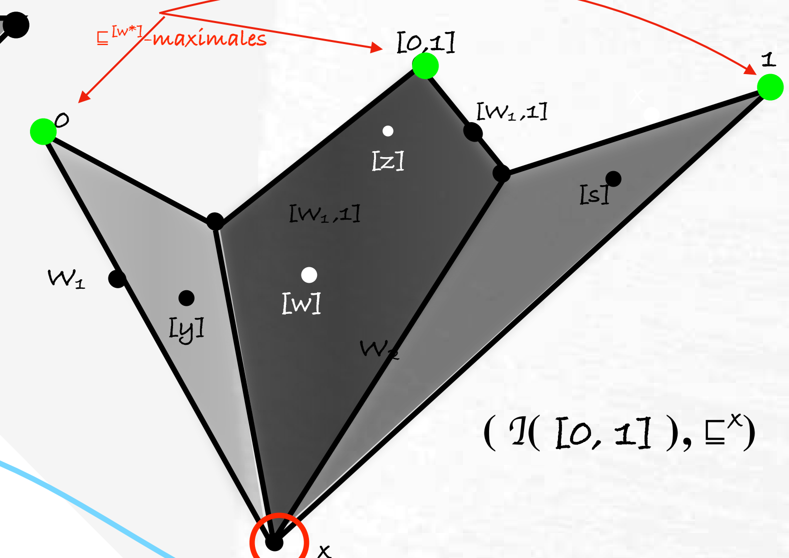




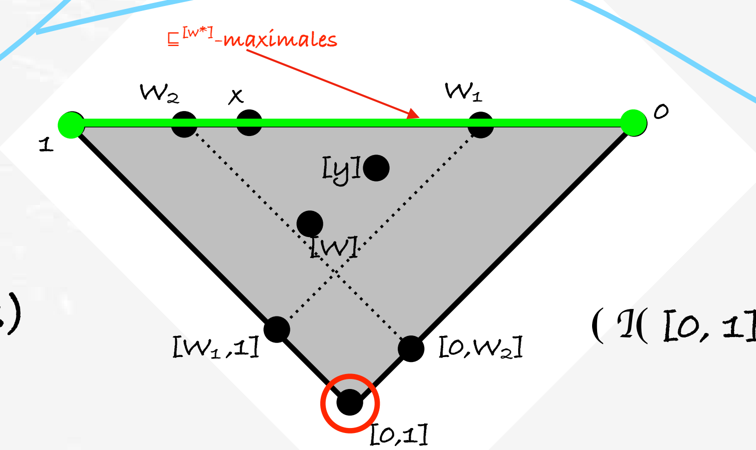
w_2 NO es maximal.

$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{[0,w_2]})$





$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{x})$



$(\mathcal{I}([0,1]),\sqsubseteq^{[0,1]})$

Maximales$(\mathcal{I}([0,1],\sqsubseteq^{[0,w_2]})=\{1\}\cup\,[0,w_2[$

En este caso:

$([r]\sqsubseteq^{[0,1]}[t])\Leftrightarrow([r]\supseteq[t])$. (Inclusión usual de conjuntos)

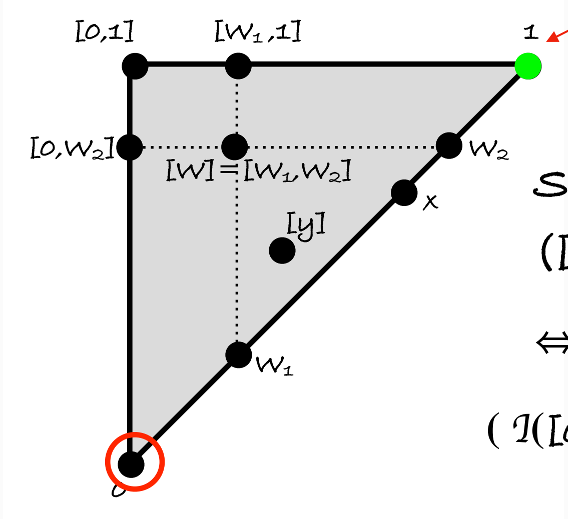
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}$([0,1]), ≤) de intervalos de la cadena ([0,1], ≤)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \ / \ (0 \le a_1 \le a_2 \le 1)\}$

$([a]\le[b]) \Leftrightarrow ((a_1\le b_1) \,\&\, (a_2\le b_2))$, $[a]\cdot[b]=[min(a_1,b_1), min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[max(a_1,b_1), max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2, 1-a_1]$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{o}]) = \{1\}$

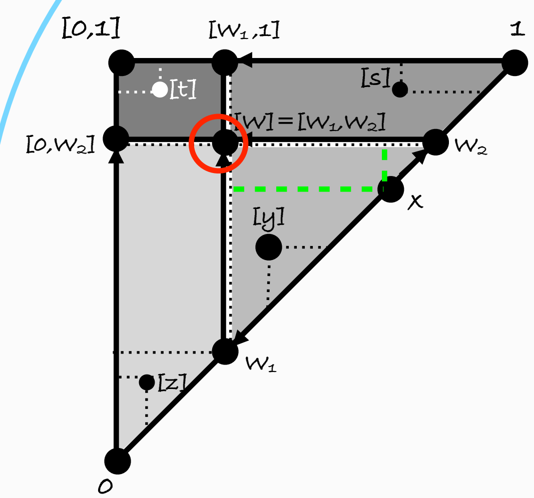


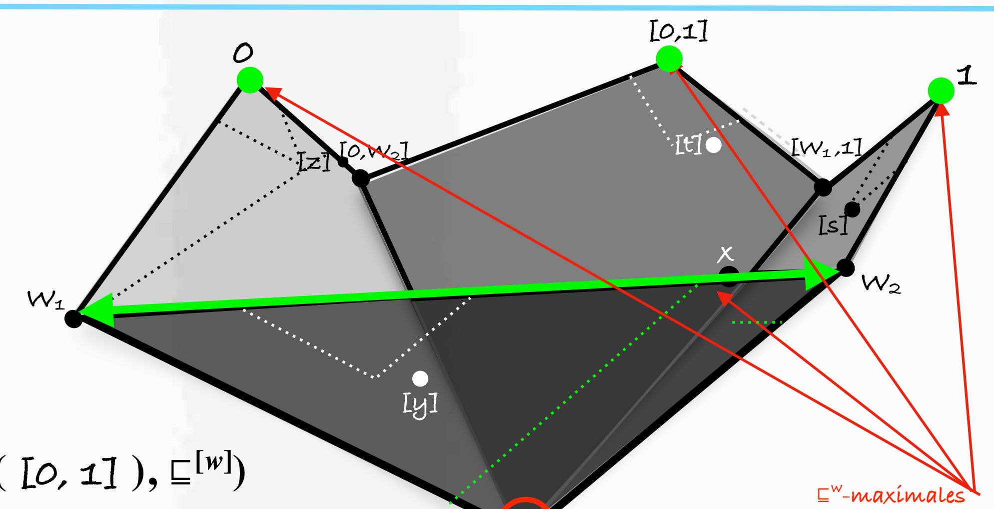
Se verifica:

$([a] \sqsubseteq^{o} [b]) \Leftrightarrow ([a] \le [b])$

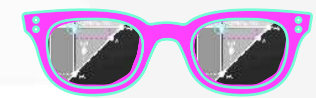
$\Leftrightarrow ((a_p \le b_p) \,\&\, (a_q \le b_q))$

$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x}) \equiv (\mathcal{I}([0,1]), \le)$.





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$



$((\mathcal{I}([0,1]), \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}([0,1])$:

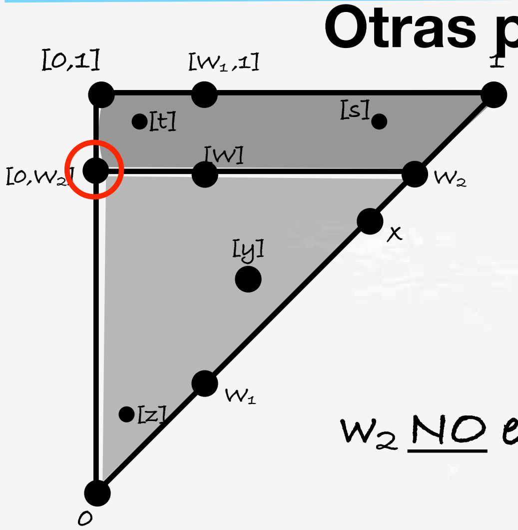
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \le [a] \le ([b]+[w]))$

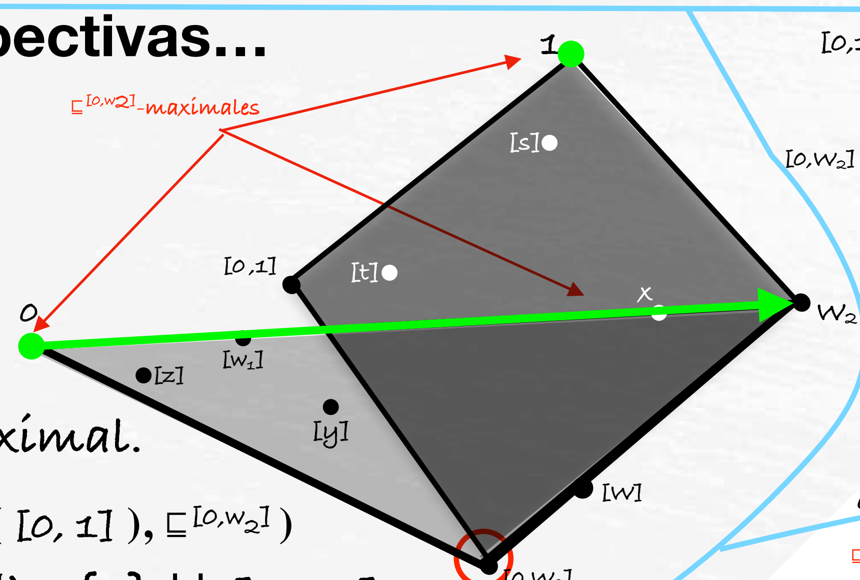
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1) \,\&\, (a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \ ]w_1, w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas...



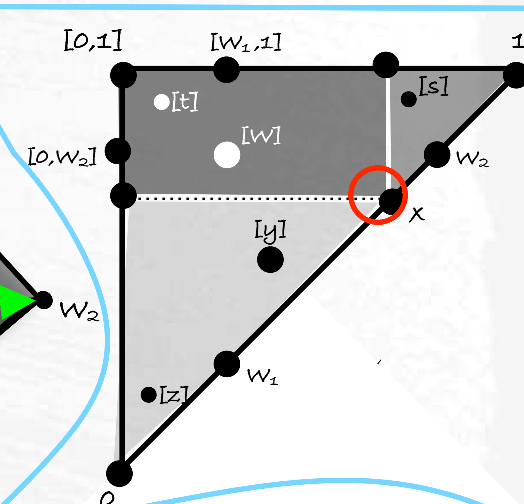


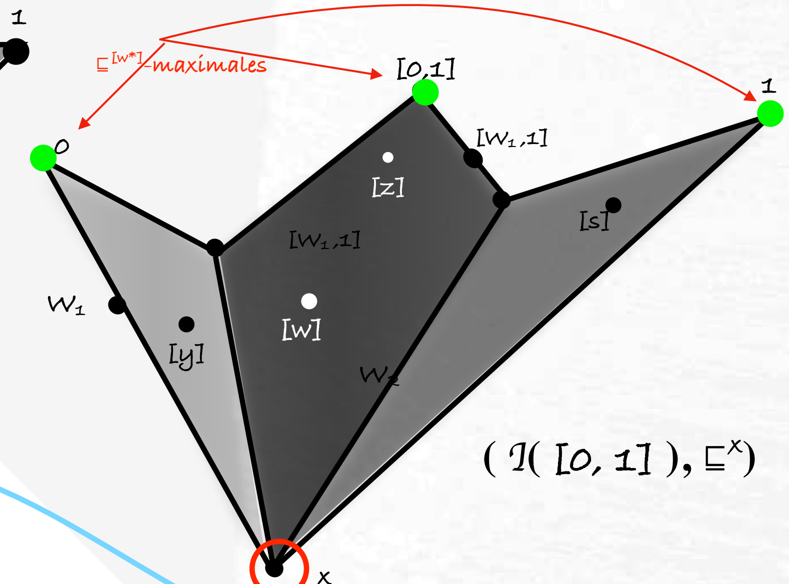
w_2 <u>NO</u> es maximal.

$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0, w_2[$

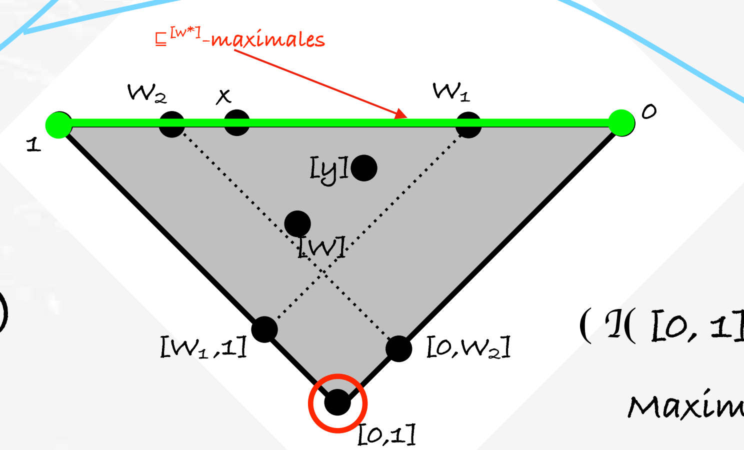
Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0, w_2[$





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) =$ $\{0, 1, [0,1]\}$



$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,1]})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,1]}) =]0,1[$

En este caso:

$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$. (Inclusión usual de conjuntos)

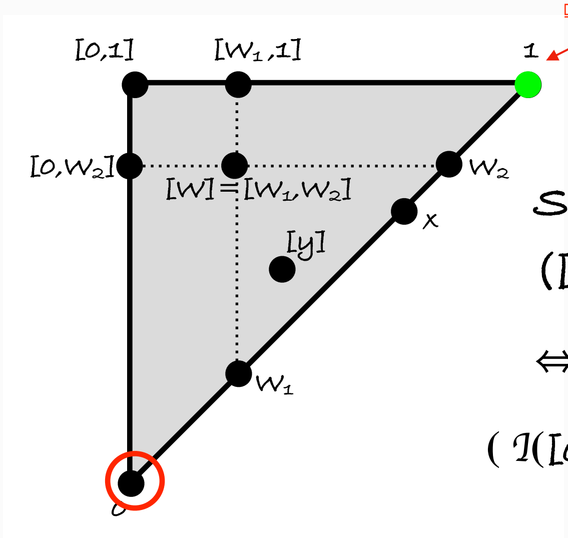
Órdenes de actividad $\sqsubseteq^{[w]}$ en el retículo ($\mathcal{I}([0,1]), \leq$) de intervalos de la cadena ($[0,1], \leq$)

$\mathcal{I}([0,1]) = \{[a]=[a_1,a_2] \;/\; (0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)\}$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{0}]) = \{1\}$

$([a]\leq[b]) \Leftrightarrow ((a_1\leq b_1)\,\&\,(a_2\leq b_2))$, $[a]\cdot[b]=[\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)]$,

$[a]+[b]=[\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, $[a_1,a_2]'=[1-a_2,1-a_1]$

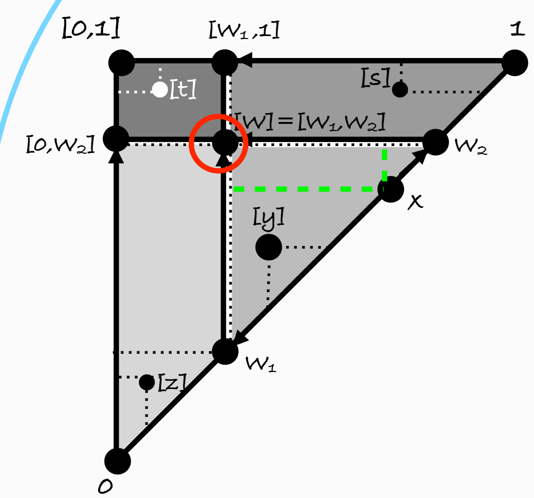


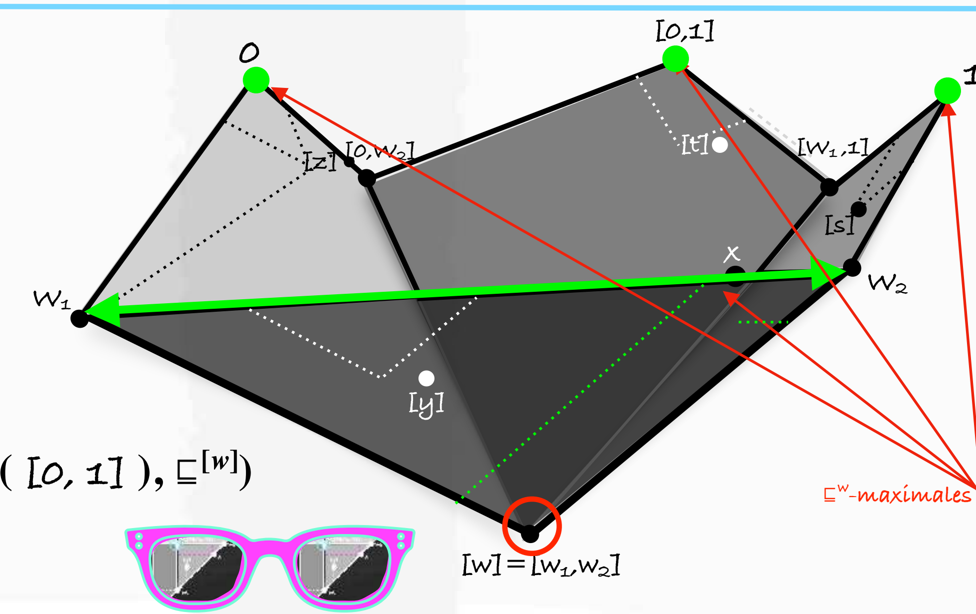
Se verifica:

$([a] \sqsubseteq^{o} [b]) \Leftrightarrow ([a] \leq [b])$

$\Leftrightarrow ((a_p \leq b_p)\,\&\,(a_q \leq b_q))$

$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x}) \equiv (\mathcal{I}([0,1]), \leq)$.





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[w]})$

$((\mathcal{I}([0,1]), \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

Retículo distributivo con negación fuerte.

Órdenes de actividad en $\mathcal{I}[0,1]$:

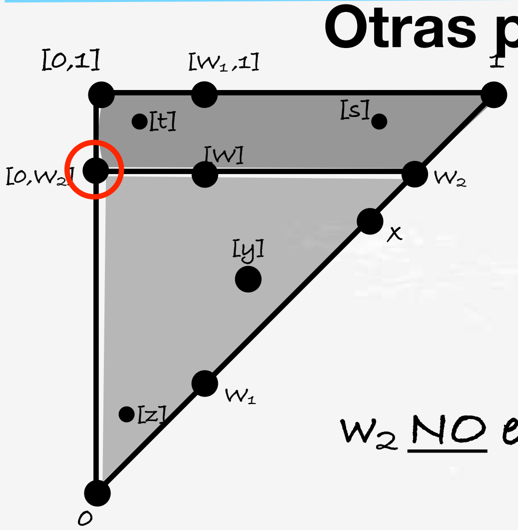
$([a] \sqsubseteq^{[w]} [b]) \Leftrightarrow (([b]\cdot[w]) \leq [a] \leq ([b]+[w]))$

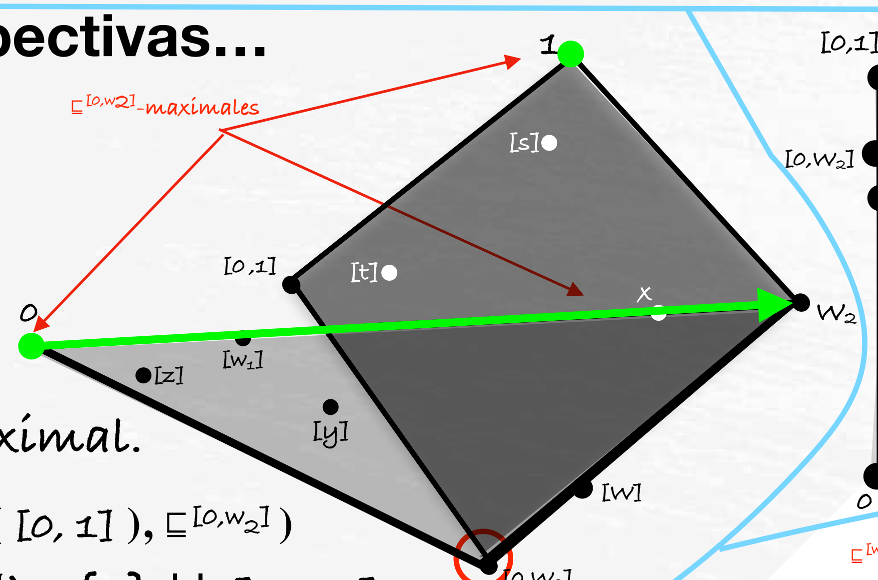
$\Leftrightarrow (a_1 \sqsubseteq^{w_1} b_1)\,\&\,(a_2 \sqsubseteq^{w_2} b_2)$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[w]}) = \{0, 1, [0,1]\} \cup \,]w_1,w_2[$

(<u>Nota</u>. w_1 y w_2 <u>NO</u> son maximales).

Otras perspectivas…



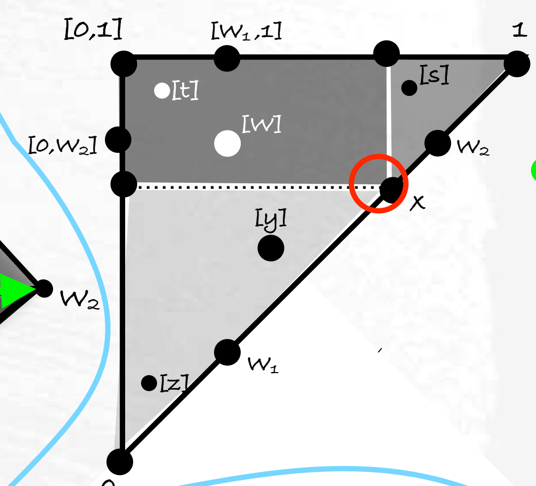


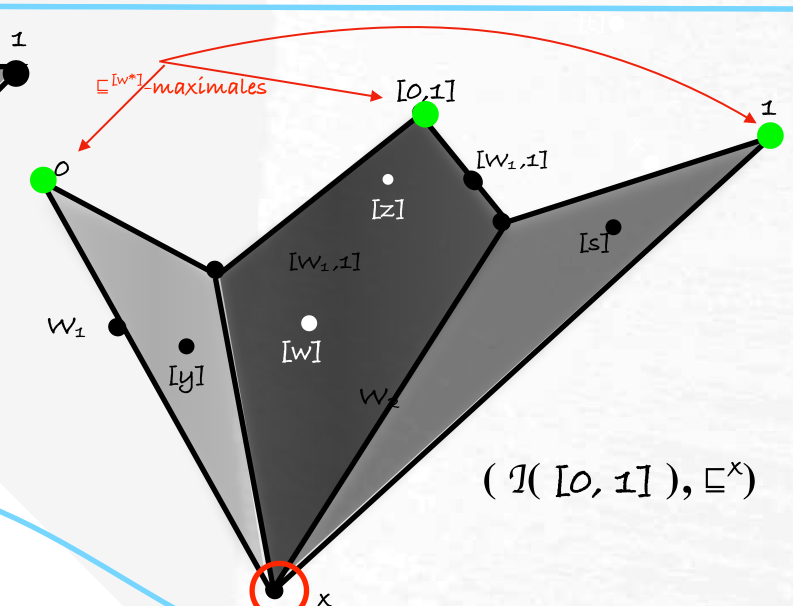
w_2 <u>NO</u> es maximal.

$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,w_2]})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$

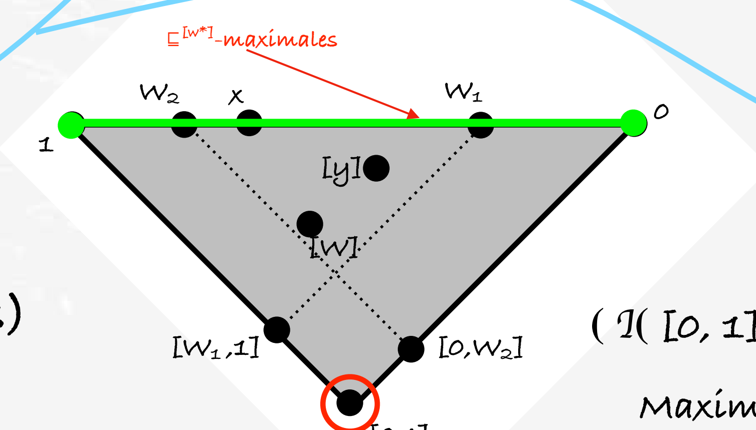
Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{1\} \cup [0,w_2[$





$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{x})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,w_2]}) = \{0, 1, [0,1]\}$



$(\mathcal{I}([0,1]), \sqsubseteq^{[0,1]})$

Maximales $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{[0,1]}) = \,]0,1[$

En este caso:

$([r] \sqsubseteq^{[0,1]} [t]) \Leftrightarrow ([r] \supseteq [t])$. (inclusión usual de conjuntos)

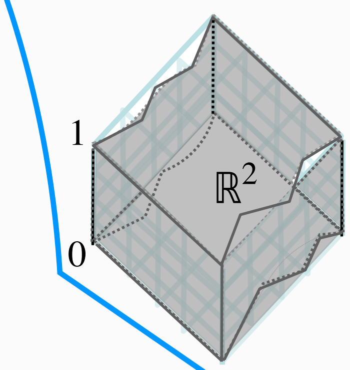
<u>Nota</u>. Los maximales de $(\mathcal{I}([0,1], \sqsubseteq^{0}])$ son elementos pertenecientes al subconjunto $\{[x,x] \;/\; x\in[0,1]\} \cup \{[0,1]\}$.

El orden de actividad en retículos que son álgebras de Heyting y retículos browerianos: $(L, \sqsubseteq^{\omega})$ como semiretículo o como retículo completo

Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^{\omega})$.

Por ejemplo:

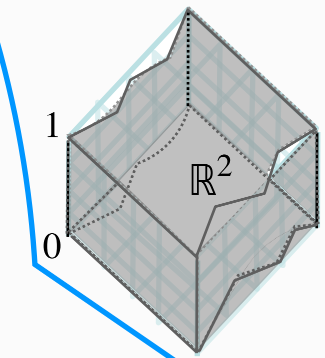
$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2}, \leq)$



OPERADORES ASOCIADOS AL ORDEN DE ACTIVIDAD:CÁLCULO DE SUPREMOS E ÍNFIMOS

Por ejemplo:

$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2}, \leq)$



Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^{\omega})$.

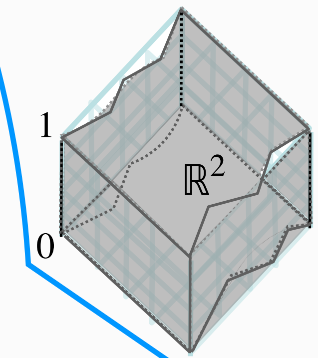
Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \emptyset$:

$\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / \ m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / \ m \in M\}$, entonces el inf-semirretículo $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \omega)$ es completo con operador $\inf^{\omega}$: (evidentemente, $(L,\leq)$ es distributivo)

$$\boxed{\sqcap^{\omega} M = \inf^{\omega} M = (\inf M + \omega \cdot \sup M) \ \forall \omega \in L, \ \forall M \subseteq L, \ M \neq \emptyset}$$

Por ejemplo:

$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2},\leq)$



Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^{\omega})$.

Proposición. (1) Sea $(L,\leq)$ un retículo completo $(L,\leq,\cdot,+)$ tal que $\forall\alpha$ y $\forall M\neq\varnothing$:

$\alpha\cdot\sup M = \sup\{\alpha\cdot m/\ m\in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m/\ m\in M\}$, entonces (evidentemente, $(L,\leq)$ es distributivo)

el inf-semirretículo $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \omega)$ es completo con operador $\inf^{\omega}$:

$$\boxed{\sqcap^{\omega}M = \inf^{\omega}M = (\inf M+\omega\cdot\sup M)\ \forall\omega\in L,\ \forall M\subseteq L,\ M\neq\varnothing}\ (*)$$

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^{\omega}M$ en $(L,\sqsubseteq^{\omega})$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^{\omega}M = \sup^{\omega}M = \inf^{\omega^c}M = (\inf M+\omega^c\cdot\sup M)\ \forall\omega\in L,\ \forall M\subseteq L,\ M\neq\varnothing}\ (*)$$

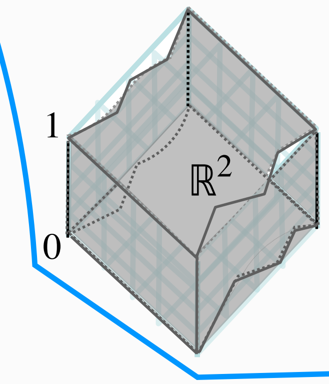
En este caso, si definimos: $\inf^{\omega}\varnothing = \omega^c$, $\sup^{\omega}\varnothing = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \sqcup^{\omega}, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo.

(*) $\inf^{\omega}M = \inf M + \omega\cdot\sup M = (\omega^c+\omega)\cdot\inf M + \omega\cdot\sup M = \omega^c\cdot\inf M+\omega\cdot\inf M + \omega\cdot\sup M = \omega^c\cdot\inf M + \omega\cdot\sup M$
$\sup^{\omega}M = \inf^{\omega^c}M = \inf M + \omega^c\cdot\sup M = (\omega^c+\omega)\cdot\inf M + \omega^c\cdot\sup M = \omega^c\cdot\inf M+\omega\cdot\inf M + \omega^c\cdot\sup M = \omega\cdot\inf M + \omega^c\cdot\sup M$

OPERADORES ASOCIADOS AL ORDEN DE ACTIVIDAD:CÁLCULO DE SUPREMOS E ÍNFIMOS

Por ejemplo:

$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2}, \leq)$



Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^\omega)$.

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall\alpha$ y $\forall M \neq \varnothing$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces el inf-semirretículo $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \omega)$ es completo con operador $\inf^\omega$: (evidentemente, $(L,\leq)$ es distributivo)

$$\boxed{\sqcap^\omega M = \inf^\omega M = (\inf M + \omega \cdot \sup M)\ \forall \omega \in L,\ \forall M \subseteq L,\ M \neq \varnothing} \ (*)$$

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^\omega M$ en $(L, \sqsubseteq^\omega)$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^\omega M = \sup^\omega M = \inf^{\omega^c} M = (\inf M + \omega^c \cdot \sup M)\ \forall \omega \in L,\ \forall M \subseteq L,\ M \neq \varnothing} \ (*)$$

En este caso, si definimos: $\inf^\omega \varnothing = \omega^c$, $\sup^\omega \varnothing = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \sqcup^\omega, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo. (**)

(*) $\inf^\omega M = \inf M + \omega \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M$

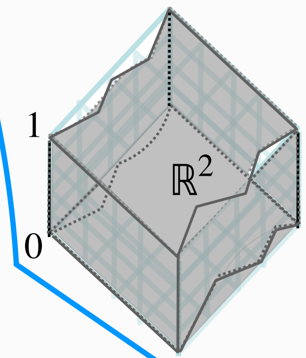
$\sup^\omega M = \inf^{\omega^c} M = \inf M + \omega^c \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M$

(**) **Nota.** $\inf^\omega \varnothing = \omega^c \cdot \inf \varnothing + \omega \cdot \sup \varnothing = \omega^c \cdot 1 + \omega \cdot 0 = \omega^c$, $\sup^\omega \varnothing = \omega \cdot \inf \varnothing + \omega^c \cdot \sup \varnothing = \omega \cdot 1 + \omega^c \cdot 0 = \omega$

(***) (Véase la transparencia siguiente)

Por ejemplo:

$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2}, \leq)$



Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^{\omega})$.

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \emptyset$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces el inf-semirretículo $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \omega)$ es completo con operador $\inf^{\omega}$: (evidentemente, $(L,\leq)$ es distributivo)

$$\boxed{\sqcap^{\omega} M = \inf^{\omega} M = (\inf M + \omega \cdot \sup M) \ \forall \omega \in L, \forall M \subseteq L, \ M \neq \emptyset}$$ (*)

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^{\omega} M$ en $(L, \sqsubseteq^{\omega})$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^{\omega} M = \sup^{\omega} M = \inf^{\omega^c} M = (\inf M + \omega^c \cdot \sup M) \ \forall \omega \in L, \forall M \subseteq L, \ M \neq \emptyset}$$ (*)

En este caso, si definimos: $\inf^{\omega} \emptyset = \omega^c$, $\sup^{\omega} \emptyset = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \sqcup^{\omega}, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo. (**)

Nota. Si $\bar{a}$ es una tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, con $k \in \{1,2,\ldots\}$, podemos interpretar $\sqcap^{\omega} M = \inf^{\omega}$ como un operador de agregación desde "la perspectiva" proporcionada por ω:

$n \geq 1$

Que será de tipo "centro" o "mediana".

L. Fung and K. Fu, An axiomatic approach to rational decision-making in a fuzzy environment, in: Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes (K. Tanaka, L.Zadeh, K. Fu and M. Shimura, eds.), Academic Press, 1975, pp. 227–256.

[9] M. Barbut: *Médiane, distributivité,éloignements*. Math. et Sci. Humaines **Vol 70** (1980) 5-31.

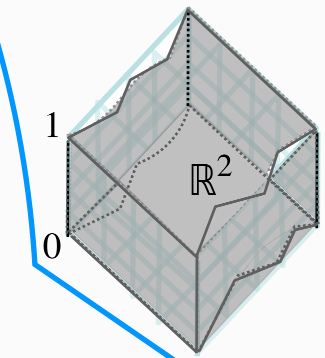
(*) $\inf^{\omega} M = \inf M + \omega \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M$

$\sup^{\omega} M = \inf^{\omega^c} M = \inf M + \omega^c \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M$

(**) **Nota.** $\inf^{\omega} \emptyset = \omega^c \cdot \inf \emptyset + \omega \cdot \sup \emptyset = \omega^c \cdot 1 + \omega \cdot 0 = \omega^c$, $\sup^{\omega} \emptyset = \omega \cdot \inf \emptyset + \omega^c \cdot \sup \emptyset = \omega \cdot 1 + \omega^c \cdot 0 = \omega$

(***) (Véase la transparencia siguiente)

Por ejemplo:
$(L,\leq) = ([0,1]^{\mathbb{R}^2}, \leq)$



Supremos e ínfimos de subconjuntos cualesquiera M de $(L, \sqsubseteq^\omega)$.

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \varnothing$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces el inf-semirretículo $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \omega)$ es completo con operador $\inf^\omega$: (evidentemente, $(L,\leq)$ es distributivo)

$$\boxed{\sqcap^\omega M = \inf^\omega M = (\inf M + \omega \cdot \sup M)\ \forall \omega \in L,\ \forall M \subseteq L,\ M \neq \varnothing}$$ (*)

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^\omega M$ en $(L, \sqsubseteq^\omega)$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^\omega M = \sup^\omega M = \inf^{\omega^c} M = (\inf M + \omega^c \cdot \sup M)\ \forall \omega \in L,\ \forall M \subseteq L,\ M \neq \varnothing}$$ (*)

En este caso, si definimos: $\inf^\omega \varnothing = \omega^c$, $\sup^\omega \varnothing = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \sqcup^\omega, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo. (**)

Nota. Si $\bar{a}$ es una tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, con $k \in \{1,2,\ldots\}$, podemos interpretar $\sqcap^\omega M = \inf^\omega$ como un operador de agregación desde "la perspectiva" proporcionada por ω:

$n \geq 1$

Que será de tipo "centro" o "mediana".

L. Fung and K. Fu, An axiomatic approach to rational decision-making in a fuzzy environment, in: Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes (K. Tanaka, L.Zadeh, K. Fu and M. Shimura, eds.), Academic Press, 1975, pp. 227–256.
[9] M. Barbut: *Médiane, distributivité,éloignements*. Math. et Sci. Humaines **Vol 70** (1980) 5-31.

(***) Proposición. Se verifica un resultado de acotación de $\sqcap^S M$ en $(L, \sqsubseteq^\omega)$, para cualquier $\forall S \in L^E$:

$$\boxed{[x \sqsubseteq^\omega B)\ \forall x \in M)] \Rightarrow [(\,(\sqcap^S M) \sqsubseteq^\omega B\,)\ \forall S \in L^E]}$$

(*) $\inf^\omega M = \inf M + \omega \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \sup M$
$\sup^\omega M = \inf^{\omega^c} M = \inf M + \omega^c \cdot \sup M = (\omega^c + \omega) \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega^c \cdot \inf M + \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M = \omega \cdot \inf M + \omega^c \cdot \sup M$

(**) **Nota.** $\inf^\omega \varnothing = \omega^c \cdot \inf \varnothing + \omega \cdot \sup \varnothing = \omega^c \cdot 1 + \omega \cdot 0 = \omega^c$, $\sup^\omega \varnothing = \omega \cdot \inf \varnothing + \omega^c \cdot \sup \varnothing = \omega \cdot 1 + \omega^c \cdot 0 = \omega$

(***) (Véase la transparencia siguiente)

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \emptyset$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces

Demostración. (1) Sea $w \in L$ y sea M un subconjunto de L no vacío. Denotemos por $(\sqcap^w M) \in L$ al elemento asociado al par (w,M) tal que $\sqcap^w M = (\inf M + w \cdot \sup M)$. Demostremos que $\sqcap^w M$ es el ínfimo de M en el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w)$, es decir que $\sqcap^w M = \inf^w M$.

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \emptyset$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces

Demostración. (1) Sea $w \in L$ y sea M un subconjunto de L no vacío. Denotemos por $(\sqcap^w M) \in L$ al elemento asociado al par (w,M) tal que $\sqcap^w M = (\inf M + w \cdot \sup M)$. Demostremos que $\sqcap^w M$ es el ínfimo de M en el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w)$, es decir que $\sqcap^w M = \inf^w M$.

Para ello, demostremos primero que $\sqcap^w M$ es un minorante de M en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Si $x \in M$, se verifica que: $w \cdot x \leq (\inf M + w \cdot x) = (\inf M \cdot x + w \cdot \sup M \cdot x) = (\sqcap^w M) \cdot x \leq (\sqcap^w M)$.

Por otra parte, para $x \in M$ se verifica que: $\sqcap^w M = (\sqcap^w M) \cdot x = (\inf M + w \cdot \sup M) \cdot x \leq (x + w \cdot \sup M) \cdot x = x \leq x + w$. En conclusión, se verifica que $(w \cdot x \leq (\sqcap^w M) \leq (x+w)\ \forall x \in M)$ o lo que es equivalente: $(((\sqcap^w M) \sqsubseteq^w x)\ \forall x \in M)$.

Demostremos ahora que es el mayor de los minorantes. Sea $s \in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s \sqsubseteq^w x)\ \forall x \in M)$.

Por hipótesis, $((w \cdot x \leq s \leq w+x)\ \forall x \in M)$, luego si $(w \cdot M) = \{w \cdot x / x \in M\}$ y $(w+M) = \{w+x / x \in M\}$, obtenemos $\sup(w \cdot M) = \sup\{w \cdot x / x \in M\} \leq s$, $s \leq \inf\{w+x / x \in M\} = \inf(w+M)$ y finalmente:

$(\sqcap^w M) \cdot w = (\inf M + w \cdot \sup M) \cdot w = w \cdot \sup M = \sup(w \cdot M) \leq s \leq \inf(w+M) = w + \inf M = w(\inf M + w \cdot \sup M) = w + (\sqcap^w M)$

que prueba que $s \sqsubseteq^w (\sqcap^w M)$, es decir, que $(\sqcap^w M)$ es el máximo de los minorantes de M y en consecuencia su ínfimo $\sqcap^w M = \inf^w M$.

Proposición. (1) Sea $(L, \leq)$ un retículo completo $(L, \leq, \cdot, +)$ tal que $\forall \alpha$ y $\forall M \neq \emptyset$:

(***) $\alpha \cdot \sup M = \sup\{\alpha \cdot m / m \in M\}$, $\alpha + \inf M = \inf\{\alpha + m / m \in M\}$, entonces

Demostración. (1) Sea $w\in L$ y sea M un subconjunto de L no vacío. Denotemos por $(\sqcap^w M)\in L$ al elemento asociado al par (w,M) tal que $\sqcap^w M=(\inf M+w\cdot \sup M)$. Demostremos que $\sqcap^w M$ es el ínfimo de M en el inf-semiretículo $(L,\sqsubseteq^w)$, es decir que $\sqcap^w M=\inf^w M$.

Para ello, demostremos primero que $\sqcap^w M$ es un minorante de M en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Si $x\in M$, se verifica que: $w\cdot x \leq (\inf M+w\cdot x)=(\inf M\cdot x+w\cdot \sup M\cdot x)= (\sqcap^w M)\cdot x \leq (\sqcap^w M)$.

Por otra parte, para $x\in M$ se verifica que: $\sqcap^w M=(\sqcap^w M)\cdot x=(\inf M+w\cdot \sup M)\cdot x \leq (x+w\cdot \sup M)\cdot x=x\leq x+w$. En conclusión, se verifica que $(w\cdot x \leq (\sqcap^w M) \leq (x+w)\ \forall x\in M)$ o lo que es equivalente: $(((\sqcap^w M) \sqsubseteq^w x)\ \forall x\in M)$.

Demostremos ahora que es el mayor de los minorantes. Sea $s\in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s\sqsubseteq^w x)\ \forall x\in M)$.

Por hipótesis, $((w\cdot x \leq s \leq w+x)\ \forall x\in M)$, luego si $(w\cdot M)=\{w\cdot x/x\in M\}$ y $(w+M)=\{w+x/x\in M\}$, obtenemos $\sup(w\cdot M)=\sup\{w\cdot x/x\in M\} \leq s$, $s\leq \inf\{w+x/x\in M\}=\inf(w+M)$ y finalmente:

$(\sqcap^w M)\cdot w=(\inf M+w\cdot \sup M)\cdot w=w\cdot \sup M=\sup(w\cdot M)\leq s\leq \inf(w+M)=w+\inf M=w(\inf M+w\cdot \sup M)=w+(\sqcap^w M)$

que prueba que $s\sqsubseteq^w(\sqcap^w M)$, es decir, que $(\sqcap^w M)$ es el máximo de los minorantes de M y en consecuencia su ínfimo $\sqcap^w M=\inf^w M$.

Proposición.

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^\omega M$ en $(L,\sqsubseteq^\omega)$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^\omega M = \sup^\omega M= \inf^{\omega^c} M= (\inf M+\omega^c\cdot \sup M)\ \forall \omega\in L,\ \forall M\subseteq L,\ M \neq \varnothing}$$

En este caso, si definimos: $\inf^\omega\varnothing = \omega^c$, $\sup^\omega\varnothing = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \sqcup^\omega, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo.

<u>Demostración</u>. (1) Sea $w\in L$ y sea M un subconjunto de L no vacío. Denotemos por $(\sqcap^w M)\in L$ al elemento asociado al par (w,M) tal que $\sqcap^w M=(\inf M+w\cdot \sup M)$. Demostremos que $\sqcap^w M$ es el ínfimo de M en el inf-semiretículo $(L,\sqsubseteq^w)$, es decir que $\sqcap^w M=\inf^w M$.

Para ello, demostremos primero que $\sqcap^w M$ es un minorante de M en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Si $x\in M$, se verifica que: $w\cdot x \le (\inf M+w\cdot x)=(\inf M\cdot x+w\cdot \sup M\cdot x)= (\sqcap^w M)\cdot x \le (\sqcap^w M)$.

Por otra parte, para $x\in M$ se verifica que: $\sqcap^w M=(\sqcap^w M)\cdot x=(\inf M+w\cdot \sup M)\cdot x \le (x+w\cdot \sup M)\cdot x=x\le x+w$. En conclusión, se verifica que $(w\cdot x \le (\sqcap^w M) \le (x+w)\ \forall x\in M)$ o lo que es equivalente: $(((\sqcap^w M) \sqsubseteq^w x)\ \forall x\in M)$.

Demostremos ahora que es el mayor de los minorantes. Sea $s\in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s\sqsubseteq^w x)\ \forall x\in M)$. Por hipótesis, $((w\cdot x \le s \le w+x)\ \forall x\in M)$, luego si $(w\cdot M)=\{w\cdot x/x\in M\}$ y $(w+M)=\{w+x/x\in M\}$, obtenemos $\sup(w\cdot M)=\sup\{w\cdot x\ /x\in M\} \le s$, $s\le \inf\{w+x\ /x\in M\}=\inf(w+M)$ y finalmente:

$(\sqcap^w M)\cdot w=(\inf M+w\cdot \sup M)\cdot w=w\cdot \sup M=\sup(w\cdot M)\le s\le \inf(w+M)=w+\inf M=w(\inf M+w\cdot \sup M)=w+(\sqcap^w M)$

que prueba que $s\sqsubseteq^w(\sqcap^w M)$, es decir, que $(\sqcap^w M)$ es el máximo de los minorantes de M y en consecuencia su ínfimo $\sqcap^w M=\inf^w M$.

(2) Sea $w\in L$ complementado con complemento w^c y sea M un subconjunto no vacío de L. Un razonamiento análogo al del apartado anterior prueba que el elemento $(\sqcup^w M)\in L$:

$$\sqcup^w M=\sup{}^w M= \inf{}^{w^c} M= (\inf M+w^c\cdot \sup M),$$

es el supremo de M en el ahora retículo $(L, \sqsubseteq^w)$.∎

(2) Si además, ω es complementado con complemento ω^c, entonces para todo M existe $\sup^\omega M$ en $(L,\sqsubseteq^\omega)$ y se verifica:

$$\boxed{\sqcup^\omega M = \sup{}^\omega M= \inf{}^{\omega^c} M= (\inf M+\omega^c\cdot \sup M)\ \forall \omega\in L,\ \forall M\subseteq L,\ M \neq \varnothing}$$

En este caso, si definimos: $\inf^\omega\varnothing = \omega^c$, $\sup^\omega\varnothing = \omega$, se verifica que $(L, \sqsubseteq^\omega, \sqcap^\omega, \sqcup^\omega, \omega, \omega^c)$ es un retículo completo.

Demostración. (1) Sea $w \in L$ y sea M un subconjunto de L no vacío. Denotemos por $(\sqcap^w M) \in L$ al elemento asociado al par (w,M) tal que $\sqcap^w M = (\inf M + w \cdot \sup M)$. Demostremos que $\sqcap^w M$ es el ínfimo de M en el inf-semiretículo $(L, \sqsubseteq^w)$, es decir que $\sqcap^w M = \inf^w M$.

Para ello, demostremos primero que $\sqcap^w M$ es un minorante de M en $(L, \sqsubseteq^w)$:

Si $x \in M$, se verifica que: $w \cdot x \leq (\inf M + w \cdot x) = (\inf M \cdot x + w \cdot \sup M \cdot x) = (\sqcap^w M) \cdot x \leq (\sqcap^w M)$.

Por otra parte, para $x \in M$ se verifica que: $\sqcap^w M = (\sqcap^w M) \cdot x = (\inf M + w \cdot \sup M) \cdot x \leq (x + w \cdot \sup M) \cdot x = x \leq x + w$. En conclusión, se verifica que $(w \cdot x \leq (\sqcap^w M) \leq (x+w)\ \forall x \in M)$ o lo que es equivalente: $(((\sqcap^w M) \sqsubseteq^w x)\ \forall x \in M)$.

Demostremos ahora que es el mayor de los minorantes. Sea $s \in L$ otro minorante en $(L, \sqsubseteq^w)$: $(s \sqsubseteq^w x)\ \forall x \in M)$.

Por hipótesis, $((w \cdot x \leq s \leq w + x)\ \forall x \in M)$, luego si $(w \cdot M) = \{w \cdot x / x \in M\}$ y $(w + M) = \{w + x / x \in M\}$, obtenemos $\sup(w \cdot M) = \sup\{w \cdot x / x \in M\} \leq s$, $s \leq \inf\{w + x / x \in M\} = \inf(w + M)$ y finalmente:

$(\sqcap^w M) \cdot w = (\inf M + w \cdot \sup M) \cdot w = w \cdot \sup M = \sup(w \cdot M) \leq s \leq \inf(w + M) = w + \inf M = w(\inf M + w \cdot \sup M) = w + (\sqcap^w M)$

que prueba que $s \sqsubseteq^w (\sqcap^w M)$, es decir, que $(\sqcap^w M)$ es el máximo de los minorantes de M y en consecuencia su ínfimo $\sqcap^w M = \inf^w M$.

(2) Sea $w \in L$ complementado con complemento w^c y sea M un subconjunto no vacío de L. Un razonamiento análogo al del apartado anterior prueba que el elemento $(\sqcup^w M) \in L$:

$$\sqcup^w M = \sup^w M = \inf^{w^c} M = (\inf M + w^c \cdot \sup M),$$

es el supremo de M en el ahora retículo $(L, \sqsubseteq^w)$.∎

Proposición. Se verifica un resultado de acotación de $\sqcap^s M$ en $(L, \sqsubseteq^\omega)$, para cualquier $\forall s \in L^E$:

$$[x \sqsubseteq^\omega b)\ \forall\, x \in M)] \Rightarrow [(\,(\sqcap^s M) \sqsubseteq^\omega b\,)\ \forall s \in L^E]$$

Demostración. $[x \sqsubseteq^\omega b)\ \forall\, x \in M)] \Rightarrow [b \cdot w \leq x \leq b + w \quad \forall\, x \in M)] \Rightarrow$

$[b \cdot w \leq \inf M \leq (\inf M + s \cdot \sup M) = (\sup M \cdot (s + \inf M)) \leq \sup M \leq (b + w) \quad \forall s \in L^E] \Rightarrow$

$[b \cdot w \leq (\,\sqcap^s M\,) \leq (b + w)\,] \Rightarrow (\,\sqcap^s M\,) \sqsubseteq^\omega b$.∎

Relación $\hat{R}_{\hat{W}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$ obtenida de otra R entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

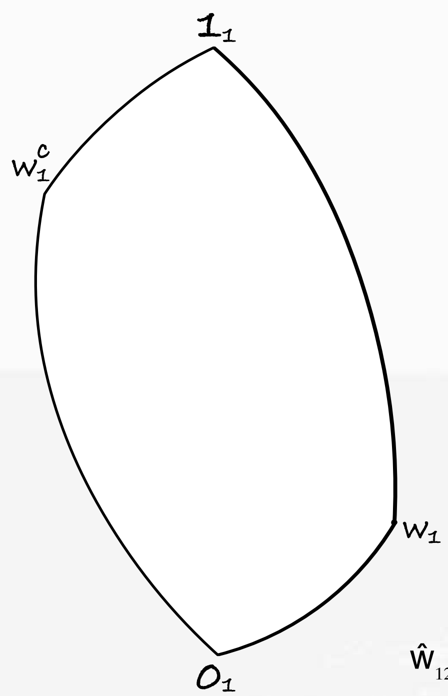
$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

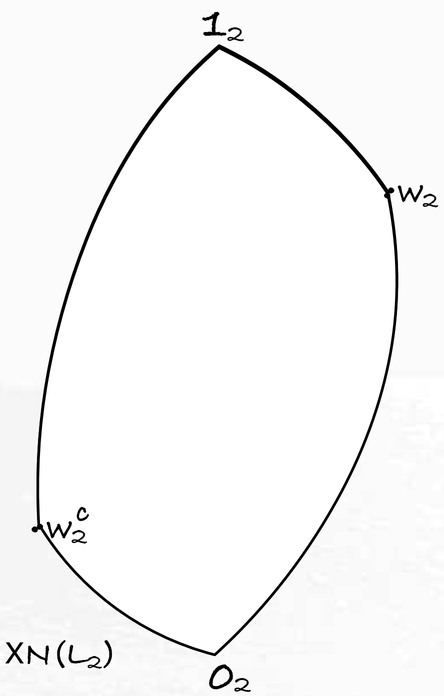
$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$$



$\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$



Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

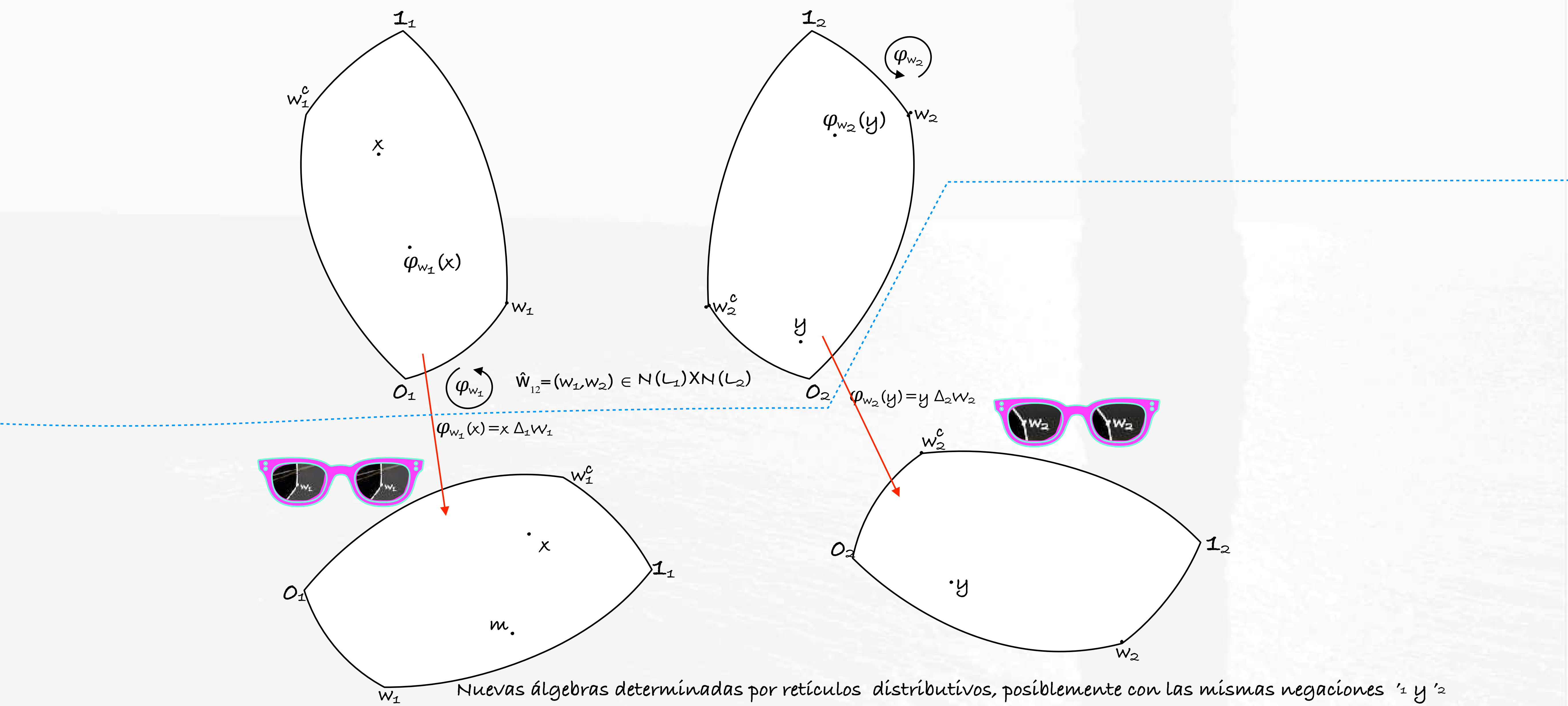
$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^{i}, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^{2}, w_2, \Delta_2)$$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^{1}$ y $'^{2}$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^{1})$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^{2})$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

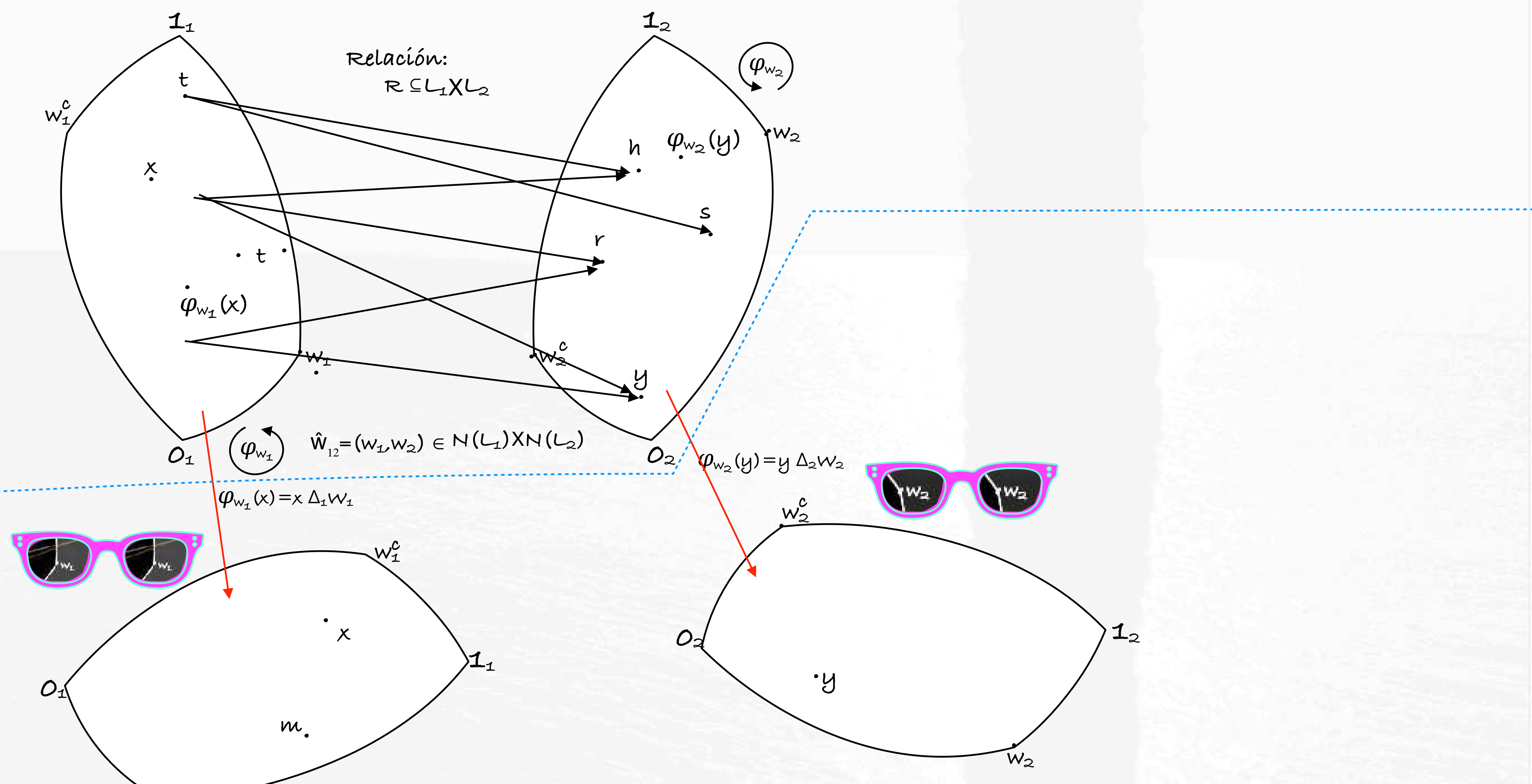
$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^1$ y $'^2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

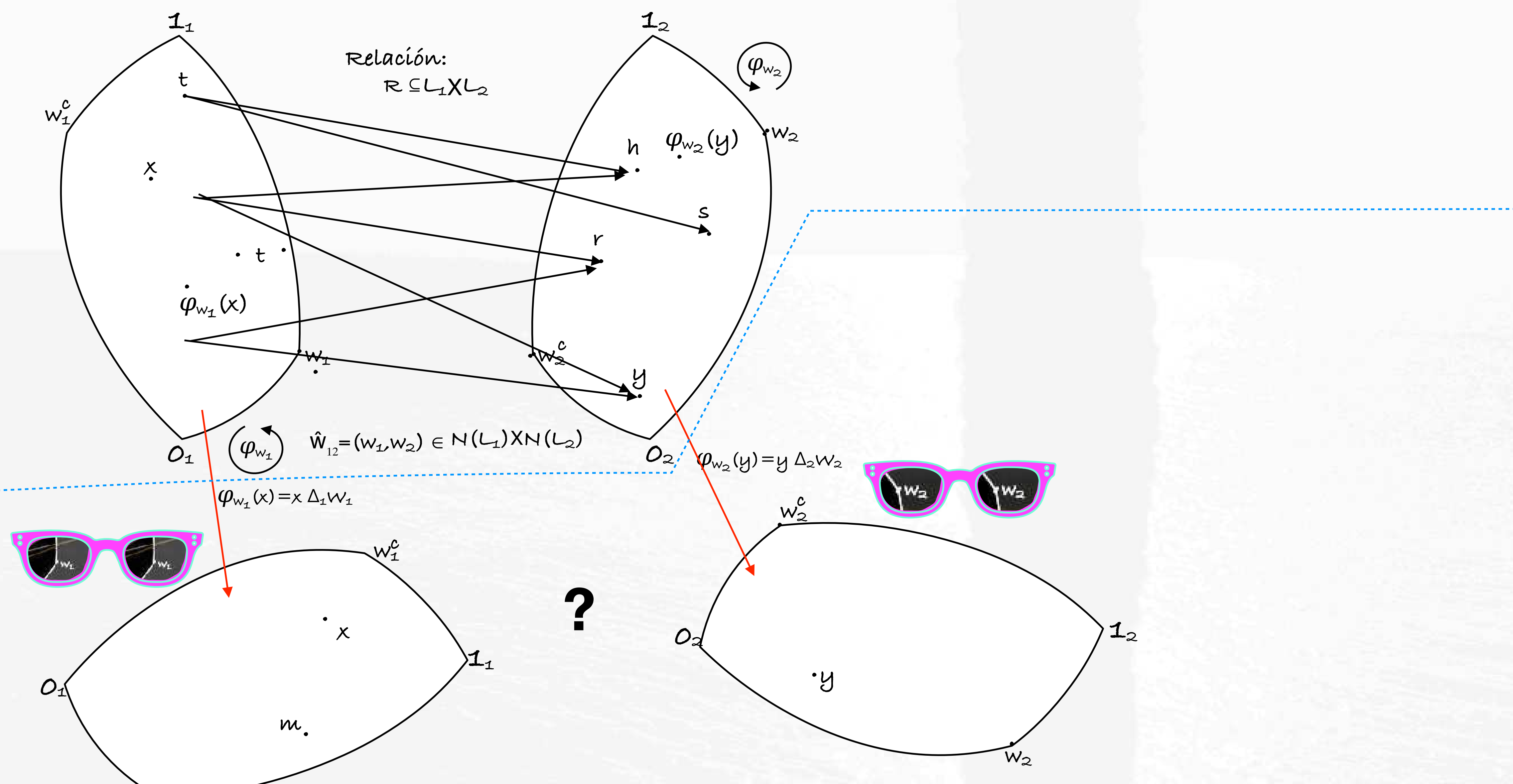
$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$



w_1 Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^1$ y $'^2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$

Al introducir "perspectivas" w_1 en L_1 y w_2 en L_2, ¿cómo extender de forma coherente la relación R a otra $\hat{R}_{\hat{w}}$ ahora entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{w_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{w_2})$?

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

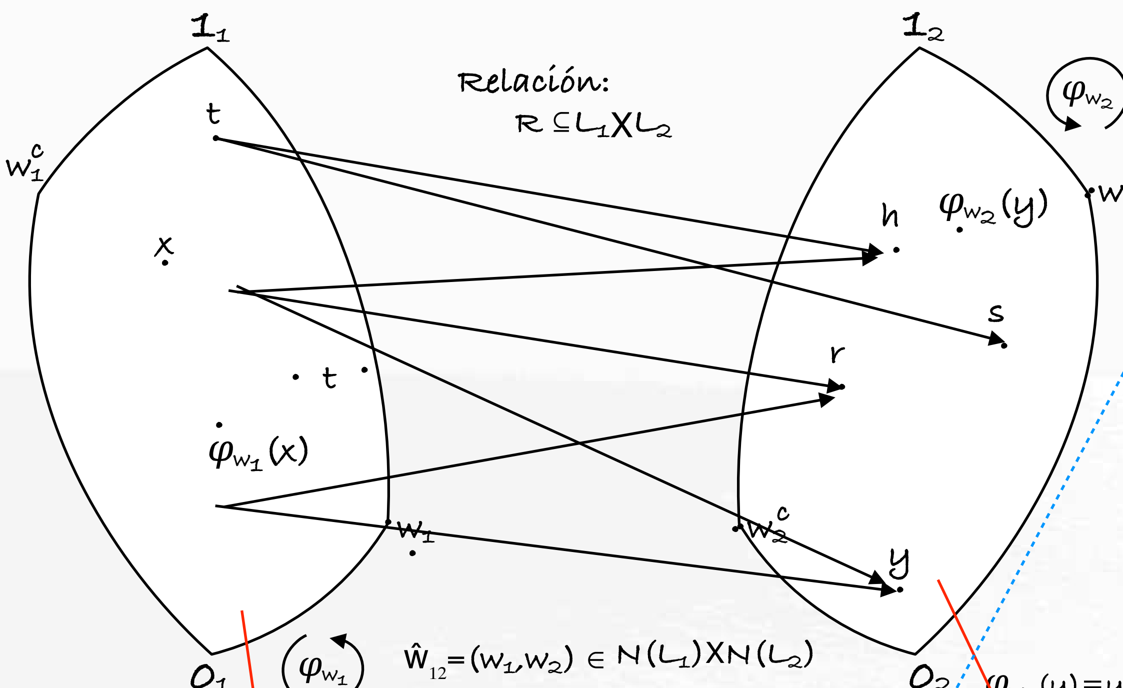
$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i)\quad i=1,2,\ldots$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$



Una propuesta:

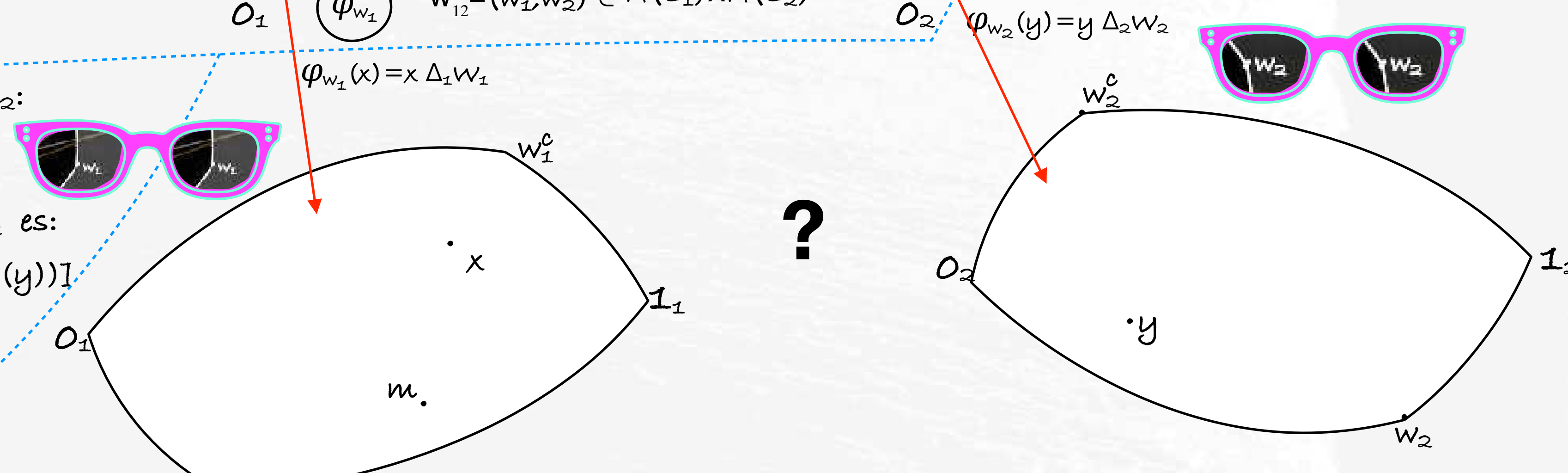
Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Definición.

Su extensión $\hat{R}_{\hat{w}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\; R\; (\varphi_{w_2}(y))]$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Al introducir "perspectivas" w_1 en L_1 y w_2 en L_2, ¿cómo extender de forma coherente la relación R a otra $\hat{R}_{\hat{w}}$ ahora entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$?

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

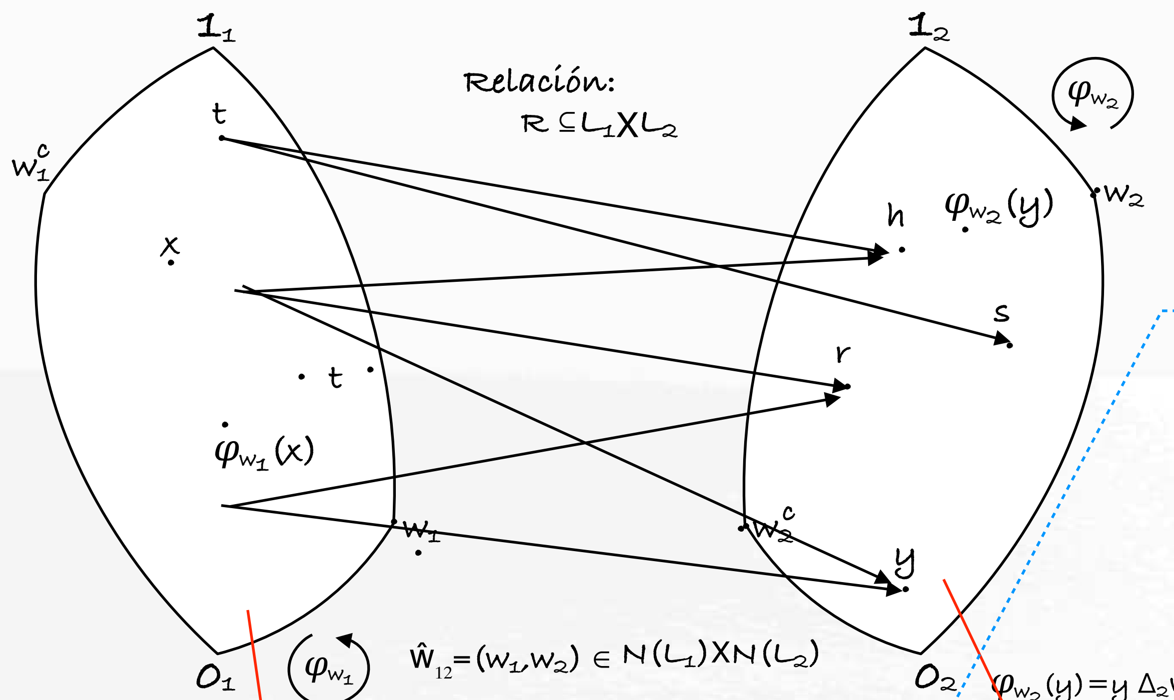
$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$



$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$

$\varphi_{w_2}(y) = y \, \Delta_2 w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \, \Delta_1 w_1$

$\hat{R}_{\hat{w}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$

$x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$

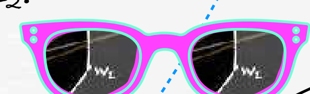
Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

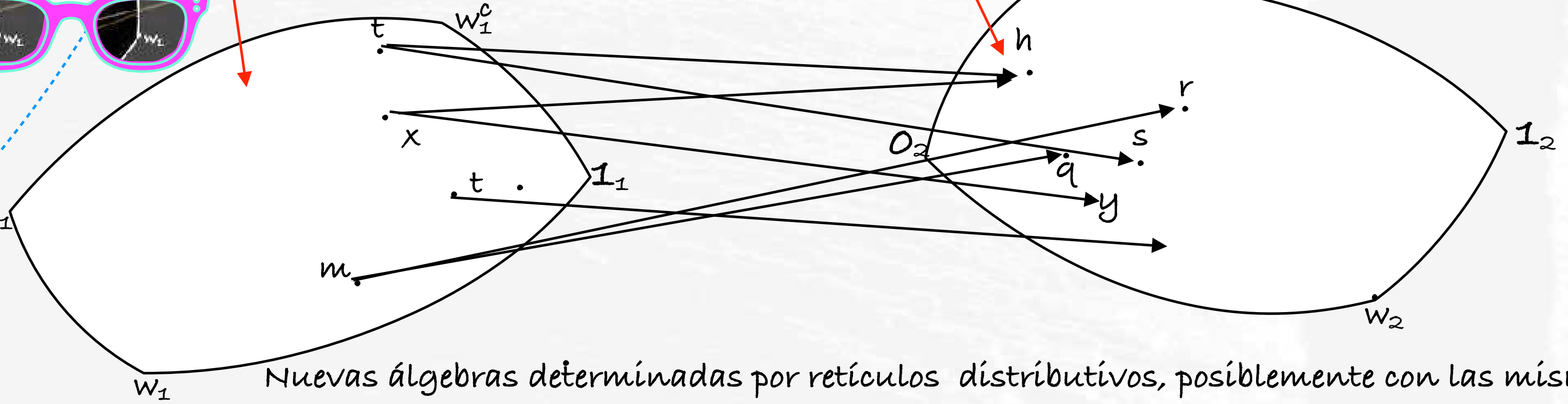
$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Definición.

Su extensión $\hat{R}_{\hat{w}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$





Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^1$ y $'^2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y (w

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i) \quad i = 1,2,\ldots$$

$$((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \, R \, (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$\Leftrightarrow [(x \triangle_1 W_1) \, R \, (y \triangle_2 W_2)]$$

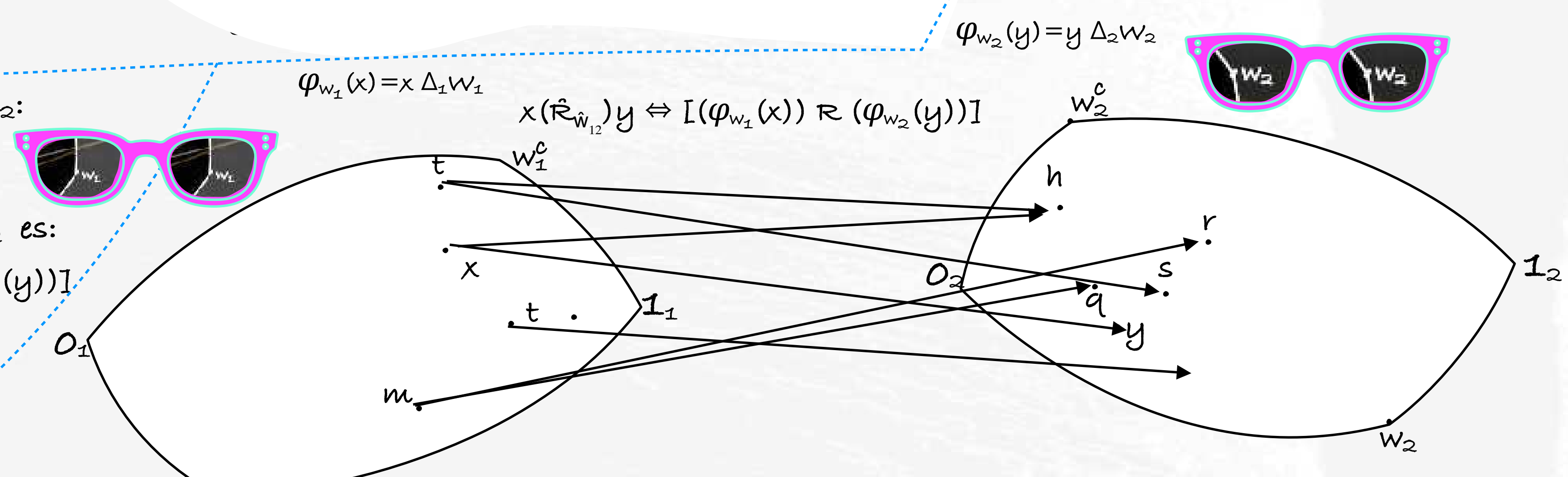
Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Definición.

Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \, R \, (\varphi_{w_2}(y))]$



w_1

Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

$((L_i, \le_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i)$ $i=1,2,\dots$

Para $i\in\{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y (w

$z_i \Delta_i w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$((L_2, \le_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\, R\, (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$\Leftrightarrow [(x \triangle_1 W_1)\, R\, (y \triangle_2 W_2)]$$

si $\hat{w}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

(*) $(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}} \; \forall (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$

$\varphi_{w_2}(y) = y \Delta_2 w_2$

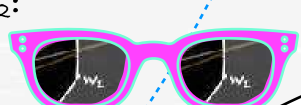
Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Definición.

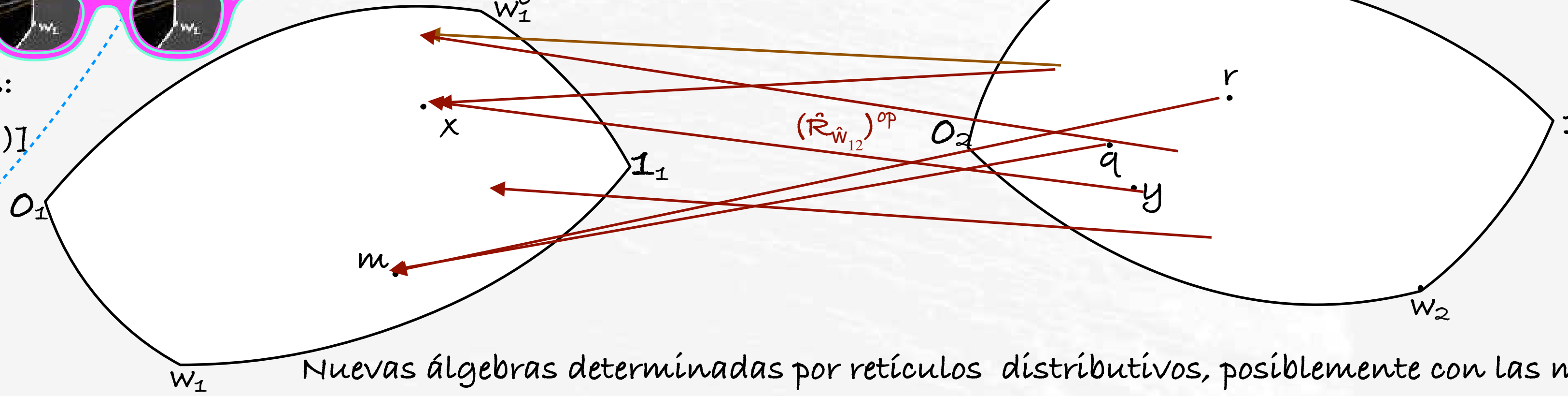
Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\, R\, (\varphi_{w_2}(y))]$



$\varphi_{w_1}(x) = x \Delta_1 w_1$

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\, R\, (\varphi_{w_2}(y))]$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^{i}, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y (w

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) \;+_i\; (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^{2}, w_2, \Delta_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$\Leftrightarrow [(x \triangle_1 W_1)\ R\ (y \triangle_2 W_2)]$$

(*) Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 entonces, para todo $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$:

$(R \subseteq S) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \subseteq (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$,

$(\widehat{R \cap S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cap (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$, $(\widehat{R \cup S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cup (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$.

si $\hat{w}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

(*) $(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}} \; \forall (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2 w_2$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

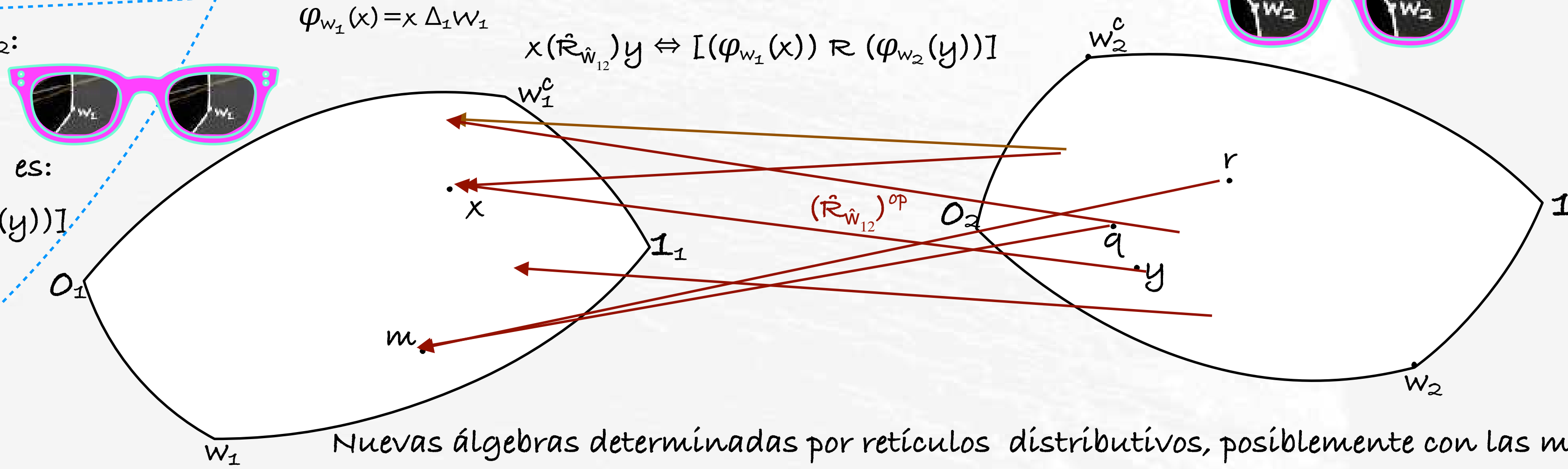
Definición.

Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1 w_1$

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^{1}$ y $'^{2}$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^{1})$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^{2})$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia simétrica:

$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i) \quad i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y (w

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

<u>Nota</u>. Como $x \triangle_i W_i \triangle_i W_i = x \quad \forall (x, W_i) \in L_i X N(L_i)$ para toda R y todo par $(w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ se verifica la equivalencia $[(x \triangle_1 W_1)(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(y \triangle_2 W_2)] \Leftrightarrow (xRy)$.

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{W_1}(x))\; R\; (\varphi_{W_2}(y))]$$
$$\Leftrightarrow [(x \triangle_1 W_1)\; R\; (y \triangle_2 W_2)]$$

(*) Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 entonces, para todo $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$:

$(R \subseteq S) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \subseteq (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$,

$(\widehat{R \cap S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cap (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$, $(\widehat{R \cup S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cup (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$.

si $\hat{W}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

(*) $(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}} \;\forall (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$

$\varphi_{W_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

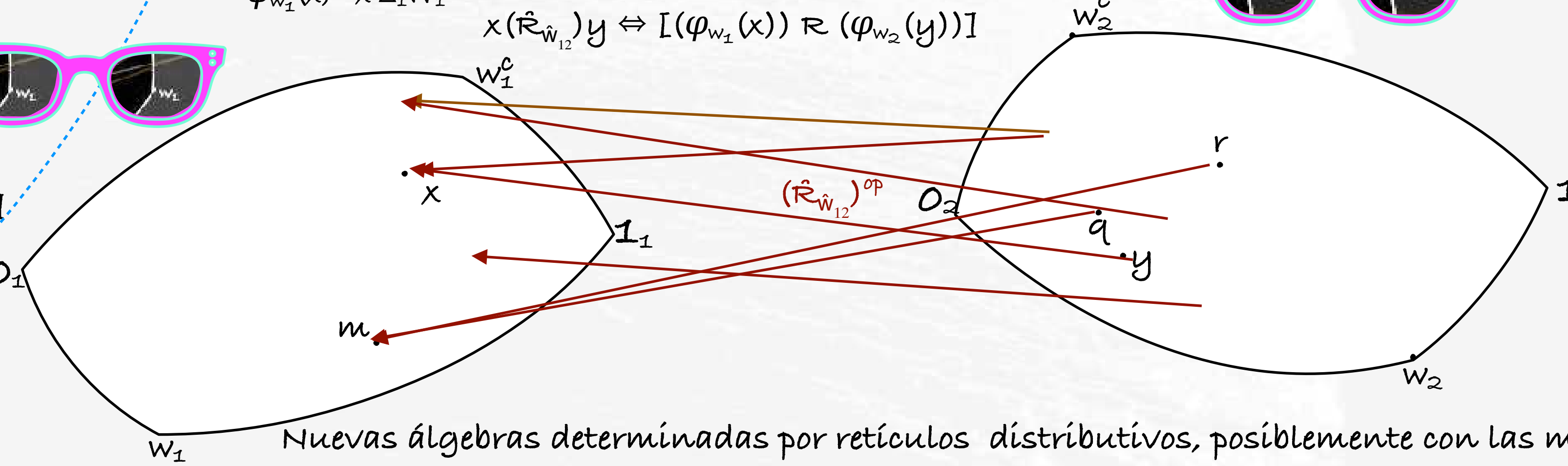
<u>Definición</u>.

Su <u>extensión</u> $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{W_1}(x))\; R\; (\varphi_{W_2}(y))]$

$\varphi_{W_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{W_1}(x))\; R\; (\varphi_{W_2}(y))]$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^1$ y $'^2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1)$ $\quad ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$

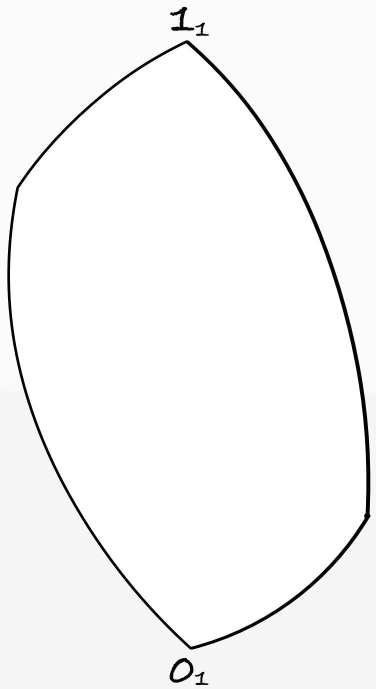
(*) (Véase transparencias siguientes)

Composición $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}$ de las extensiones en retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_i})$, de relaciones R y S entre retículos $(L_1, \leq_i)$.

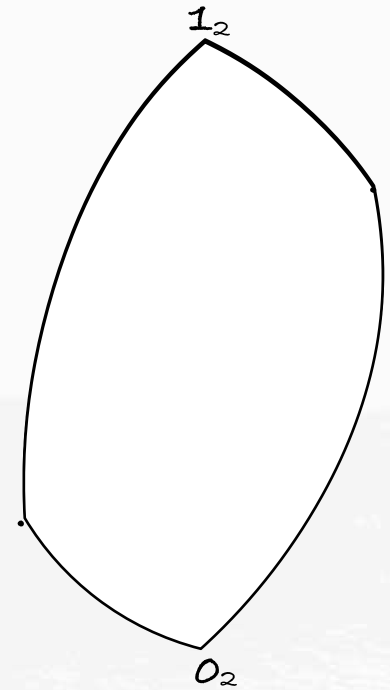
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

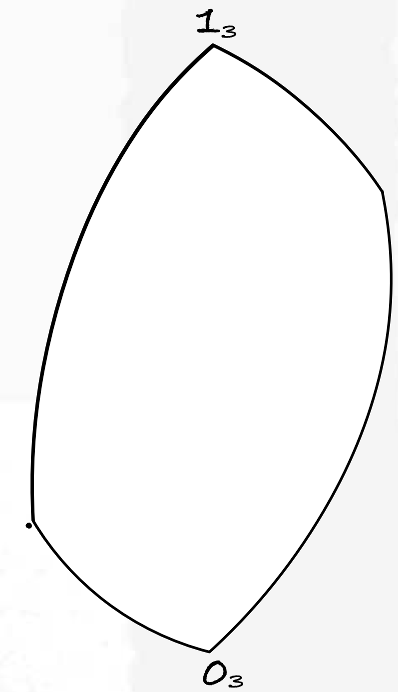
$(L_1, \leq_1)$



$(L_2, \leq_2)$

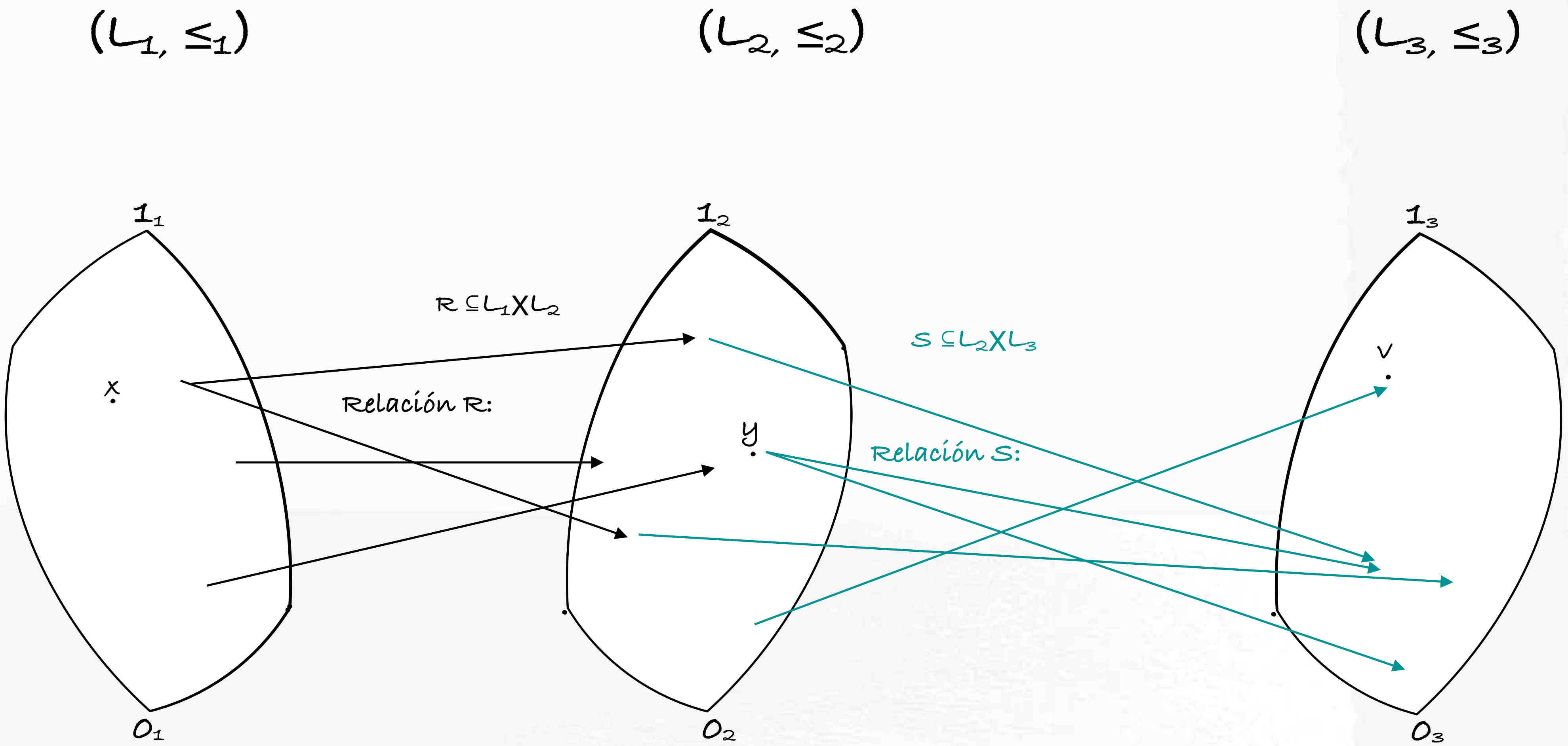


$(L_3, \leq_3)$



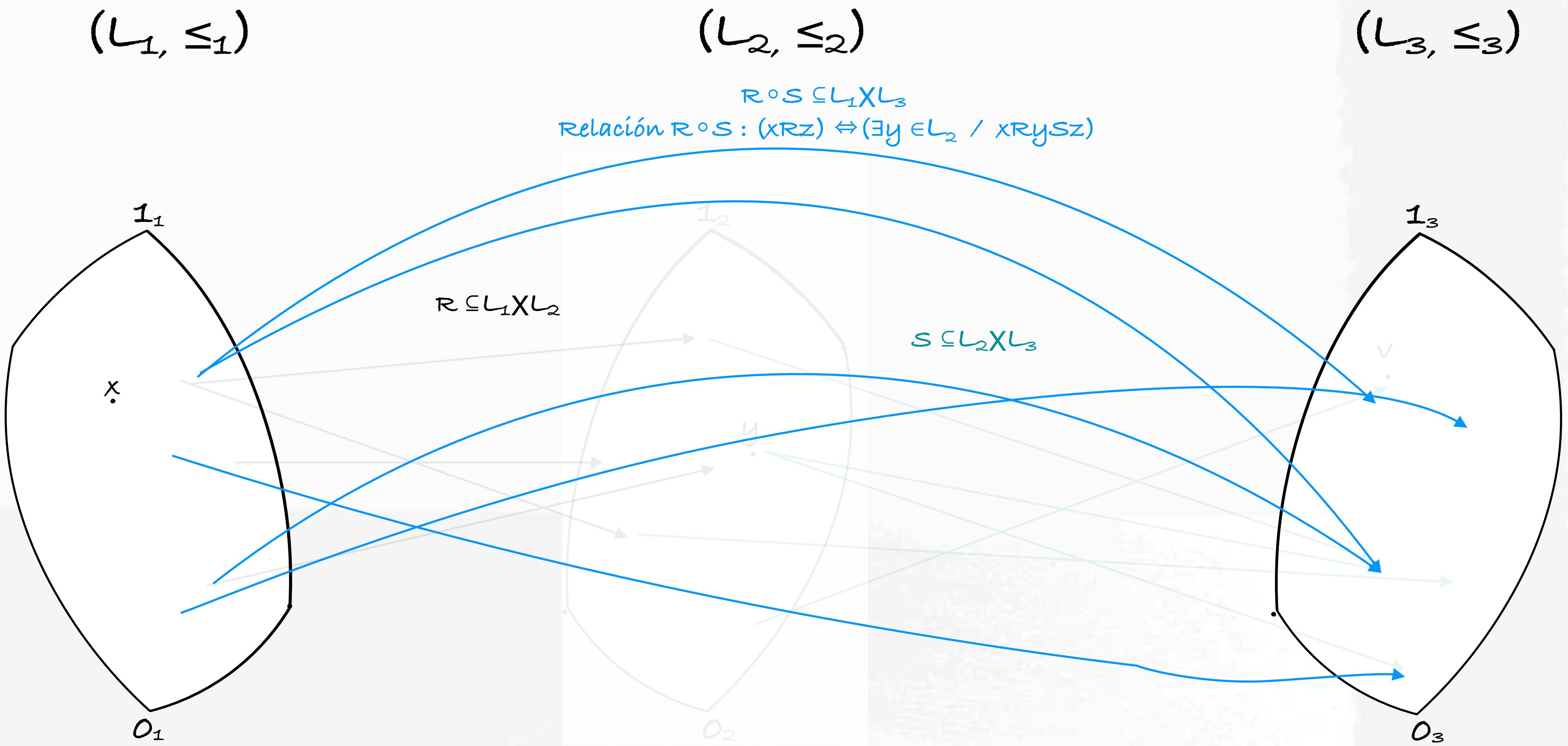
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



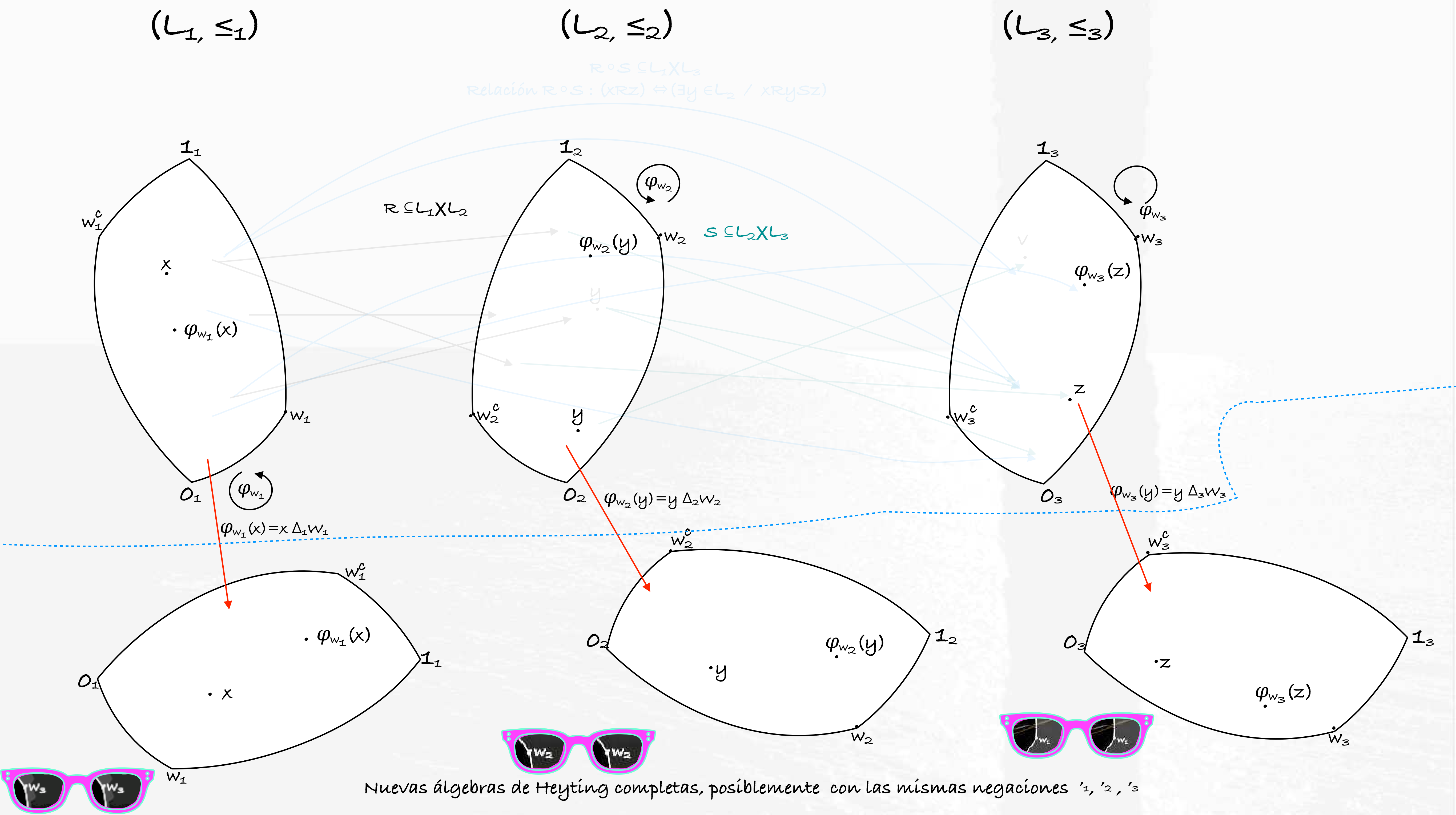
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

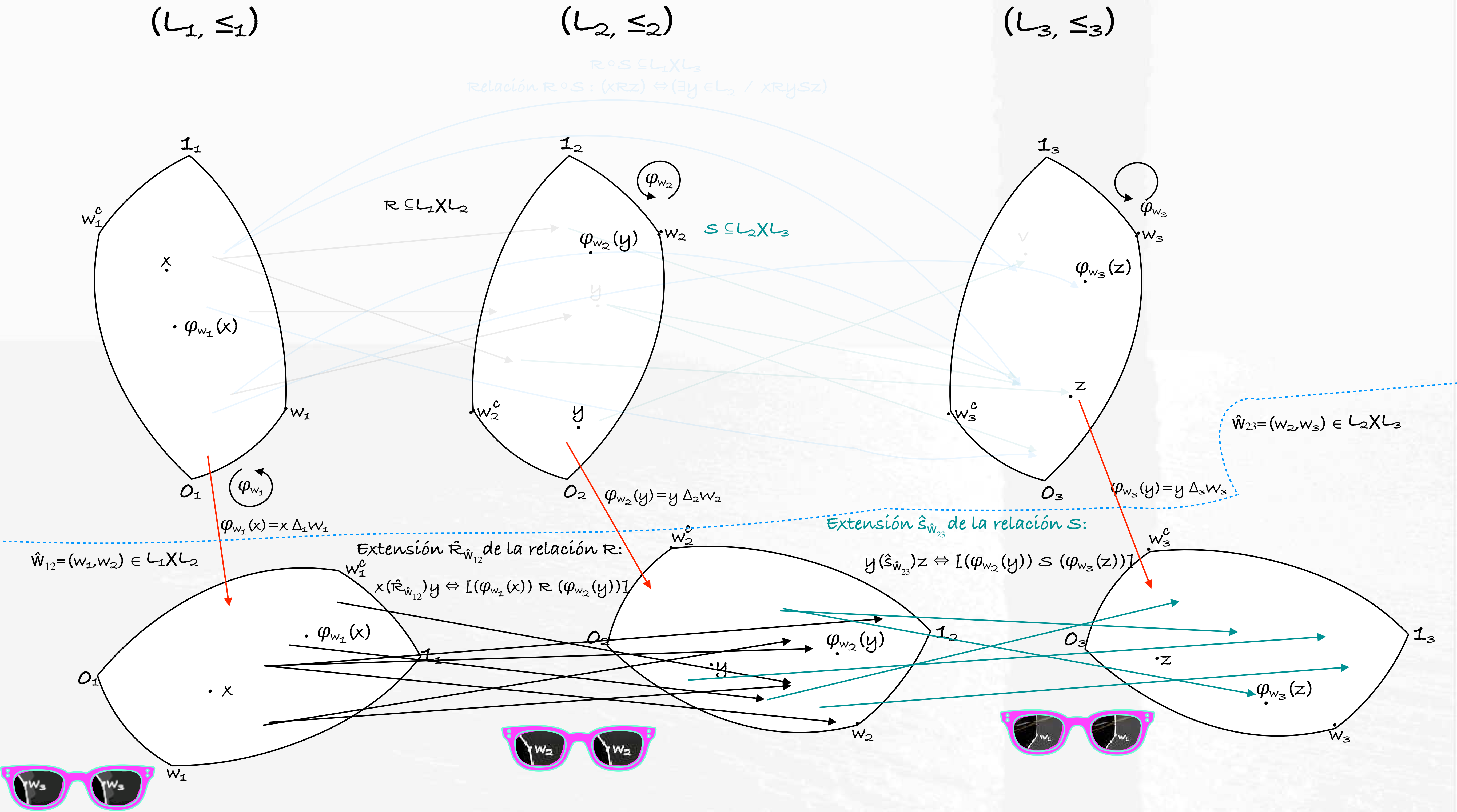


Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1, '_2, '_3$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ $((L_3, \sqsubseteq^{w_3}, \sqcap^{w_3}, \sqcup^{w_3}, w_3, w_3^c), '_3)$

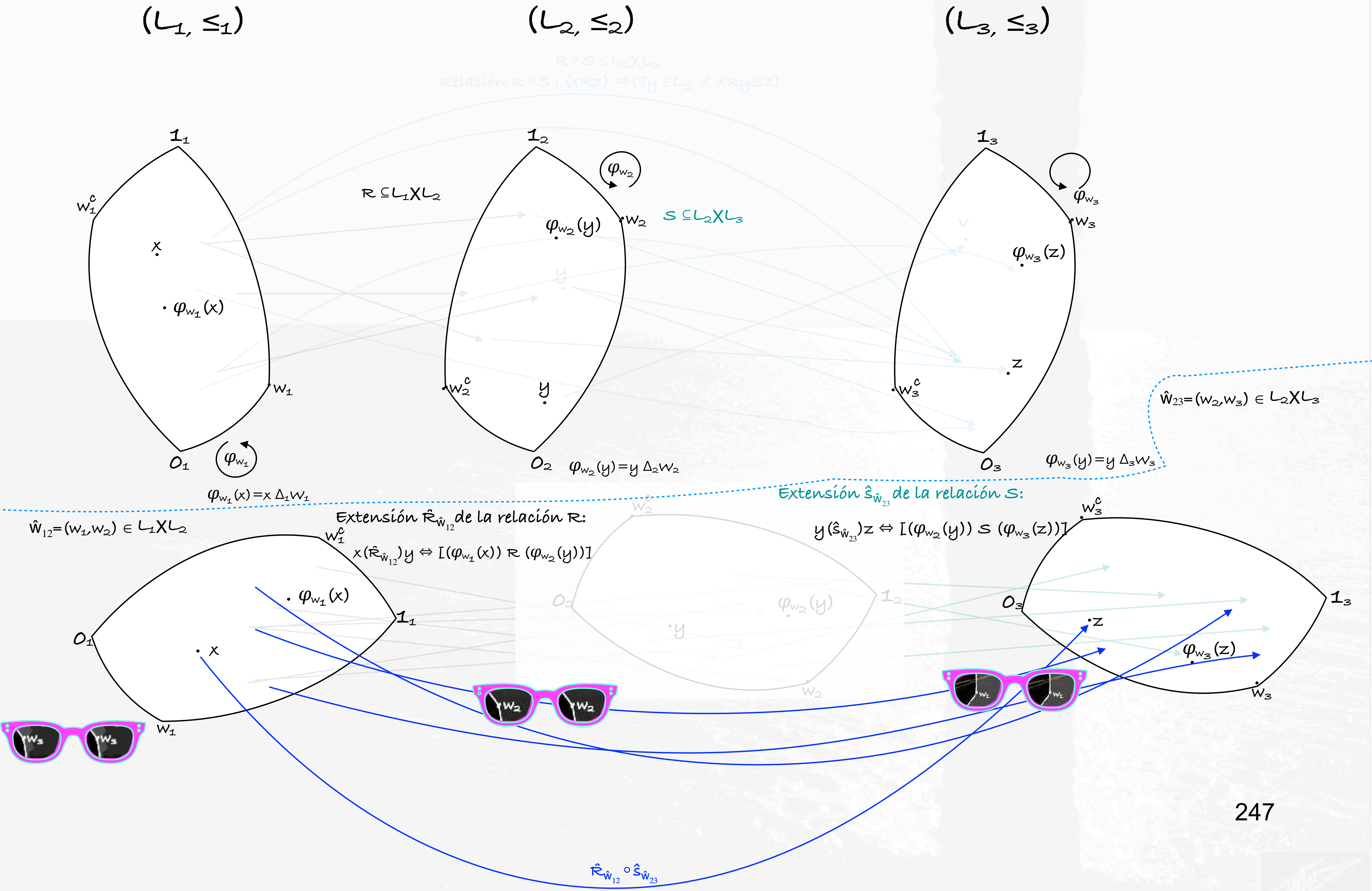
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \le_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \le_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \le_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



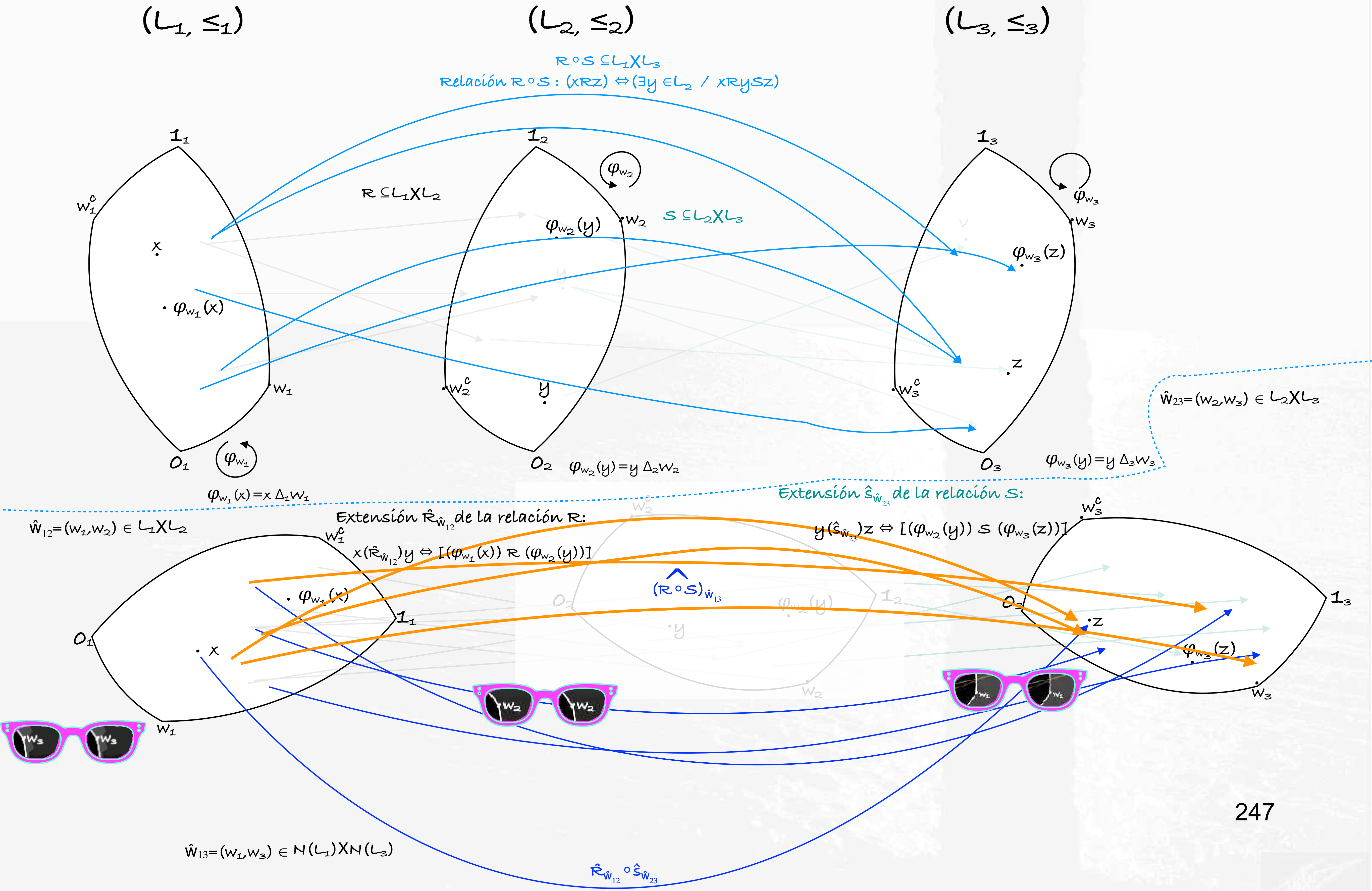
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



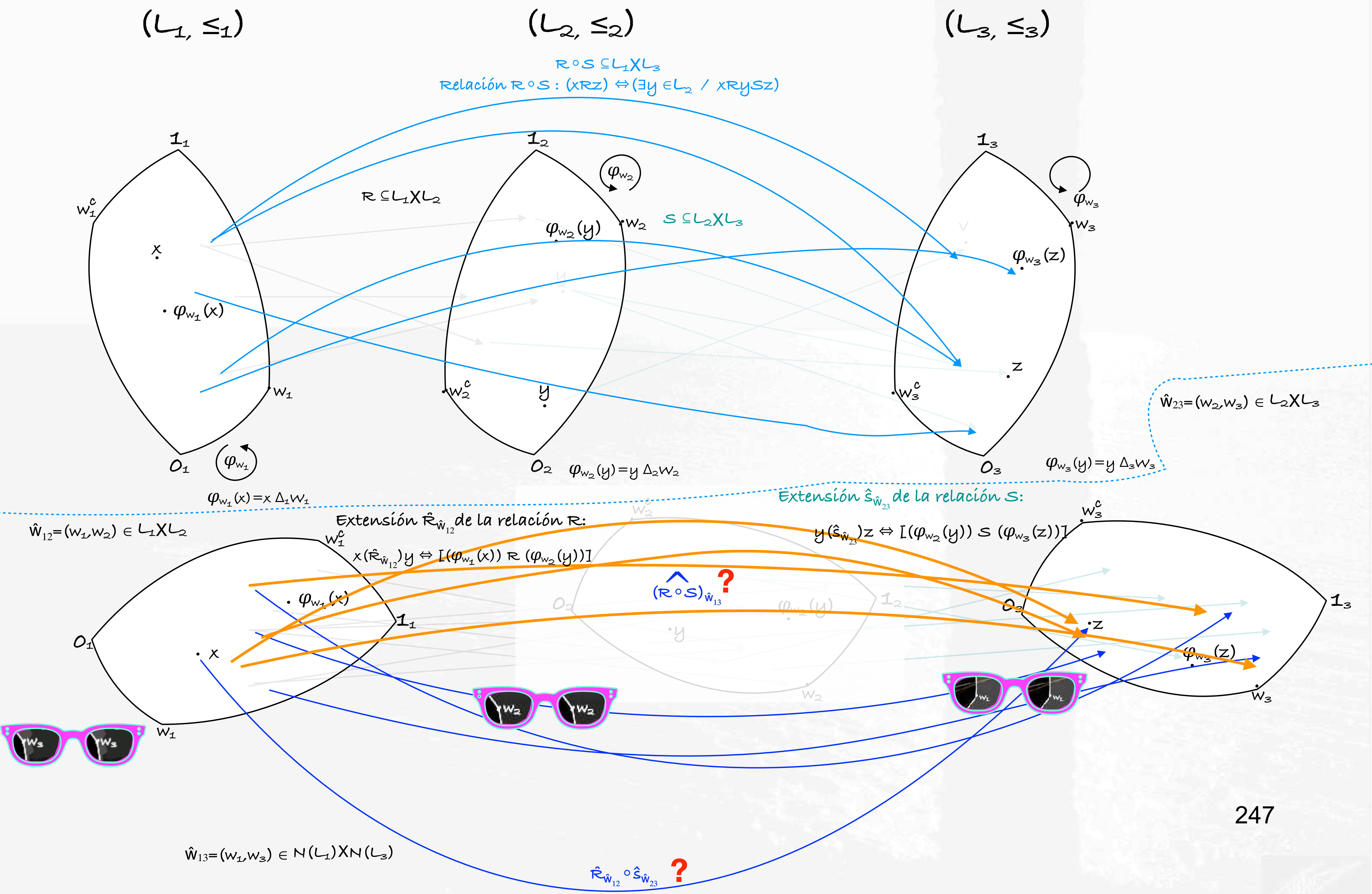
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



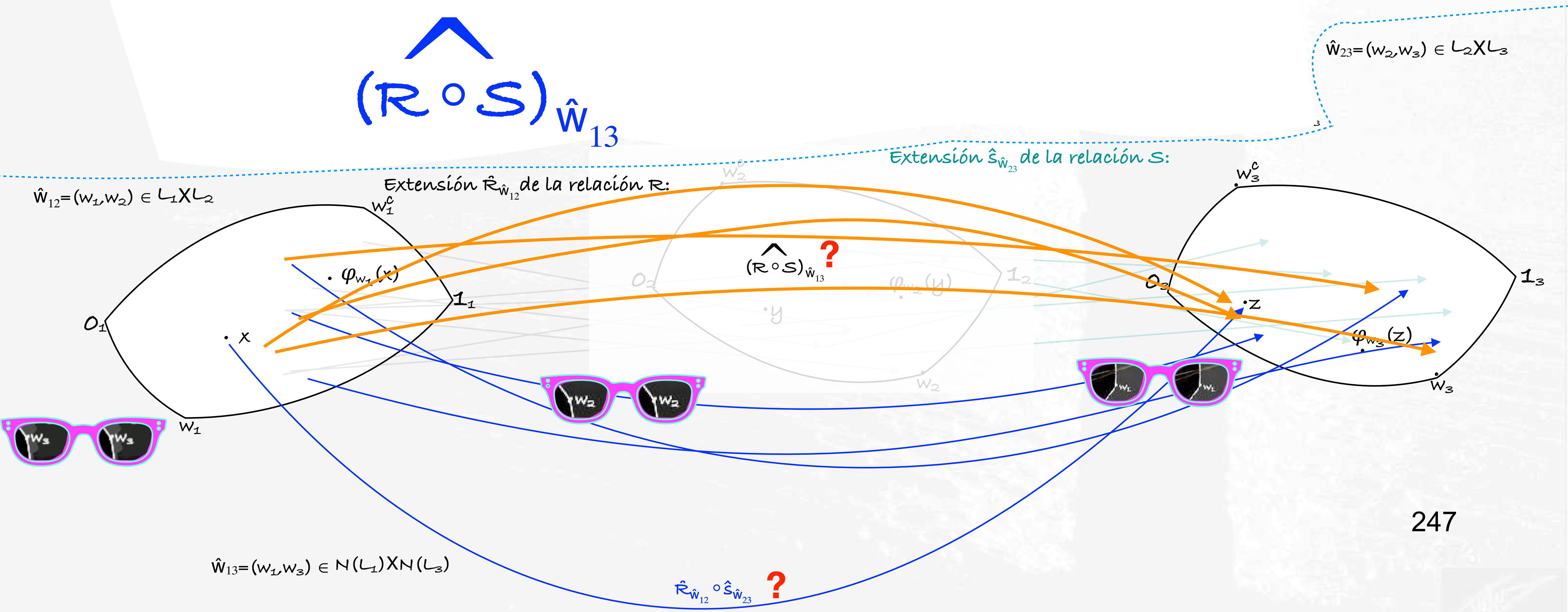
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$y(\hat{S}_{\hat{W}_{23}})z \Leftrightarrow [(\varphi_{w_2}(y))\ S\ (\varphi_{w_3}(z))]$$

$$\widehat{(R \circ S)}_{\hat{W}_{13}}$$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'^2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

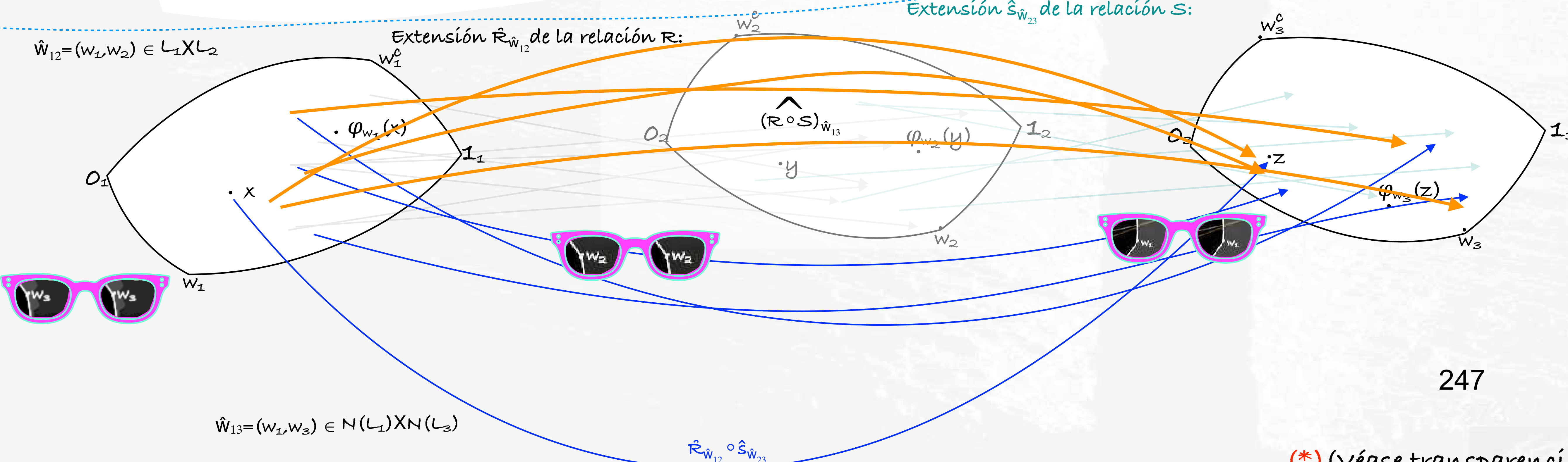
$((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1, w_1, \Delta_1)$ $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$ $((L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '^3, w_3, \Delta_3)$

$$x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$y(\hat{S}_{\hat{w}_{23}})z \Leftrightarrow [(\varphi_{w_2}(y))\ S\ (\varphi_{w_3}(z))]$$

$\hat{w}_{23}=(w_2,w_3) \in L_2 X L_3$

(*) $$\widehat{(R \circ S)}_{\hat{w}_{13}} = \hat{R}_{\hat{w}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{w}_{23}} \quad \forall (w_1, w_2, w_3)$$



(*) (Véase transparencias siguientes)

<u>Proposición</u>. (1) Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 y si $\hat{w}_{ij}=(w_i,w_j)\in N(L_1)XN(L_2)$, se verifica:
$(R\subseteq S)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\subseteq(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $((R=S)\Leftrightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})=(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
$(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
(2) $(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op}=(\widehat{R^{op}})_{\hat{w}_{21}}\forall(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$.
(3) Si R es una relación de L_1 en L_2, S otra de L_2 en L_3 y $R\circ S$ es la relación de L_1 en L_3 compuesta de ambas, entonces se verifica: $(\widehat{R\circ S})_{\hat{w}_{13}}=\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\circ\hat{S}_{\hat{w}_{23}}\forall(w_1,w_2,w_3)\in N(L_1)XN(L_2)XN(L_2)$.

Proposición. (1) Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 y si $\hat{w}_{ij}=(w_i,w_j)\in N(L_1)XN(L_2)$, se verifica:

$(R\subseteq S)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\subseteq(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $((R=S)\Leftrightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})=(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.

$(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.

(2) $(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op}=(\widehat{R^{op}})_{\hat{w}_{21}}\ \forall(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$.

(3) Si R es una relación de L_1 en L_2, S otra de L_2 en L_3 y $R\circ S$ es la relación de L_1 en L_3 compuesta de ambas, entonces se verifica: $(\widehat{R\circ S})_{\hat{w}_{13}}=\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\circ\hat{S}_{\hat{w}_{23}}\ \forall(w_1,w_2,w_3)\in N(L_1)XN(L_2)XN(L_2)$.

Demostración.

(1) Por la hipótesis $(R\subseteq S)$: $[(x\triangle_1 w_1)R(y\triangle_2 w_2)]\Rightarrow[(x\triangle_1 w_1)S(y\triangle_2 w_2)]$, es decir $[x\ \hat{R}_{\hat{w}_{12}}\ y]\Rightarrow[x\ \hat{S}_{\hat{w}_{12}}\ y]$, luego $((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\subseteq(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$. De este resultado y de $(Q^{op})^{op}=Q$, se desprende que $((R=S)\Leftrightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})=(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$

También, del resultado anterior se deduce que $(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}\subseteq((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$ y $((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\subseteq(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}$.

Supongamos que $[x\ ((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\ y]$. Entonces

$[x\ ((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\ y]\Rightarrow[x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y]\&[x(\hat{S}_{\hat{w}_{12}})y]\Rightarrow[(x\triangle_1W_1)\ R(y\triangle_2W_2)]\&\ [(x\triangle_1W_1)\ S(y\triangle_2W_2)]\Rightarrow$

$[(x\triangle_1W_1)\ (R\cap S)(y\triangle_2W_2)]\Rightarrow[x\ (\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}\ y]$, que termina la prueba de $(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.

Un razonamiento análogo prueba que $(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.

(2) $[y\ (\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op}x]\Leftrightarrow[x\ (\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y]\Leftrightarrow[(x\triangle_1W_1)\ R(y\triangle_2W_2)]\Leftrightarrow[(y\triangle_1W_2)\ (R^{op})\ (x\triangle_2W_1)]\Leftrightarrow[y\ (\widehat{R^{op}})_{\hat{w}_{21}}\ x]$.

(3) Supongamos que R es una relación de L_1 en L_2, S otra de L_2 en L_3 y $R\circ S$ es la relación de L_1 en L_3 compuesta de ambas. Entonces:

$y^*=y\triangle_2w_2$

$[x((\widehat{R\circ S})_{\hat{w}_{13}})z]\Leftrightarrow[(x\triangle_1W_1)\ (R\circ S)\ (z\triangle_3W_3)]\Leftrightarrow(\exists y\in L_2:[(x\triangle_1W_1)Ry]\&[yS(z\triangle_3W_3)])\Leftrightarrow$

$(\exists y^*\in L_2:\ [(x\triangle_1w_1)R(y^*\triangle_2w_2)]\&[(y^*\triangle_2w_2)S(z\triangle_3w_3)])\Leftrightarrow(\exists y^*\in L_2:\ [x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y^*]\&[y^*(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\ z]\Leftrightarrow$

$[x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\circ\hat{S}_{\hat{w}_{23}})y]$.∎

Proposición. (1) Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 y si $\hat{w}_{ij}=(w_i,w_j)\in N(L_1)XN(L_2)$, se verifica:
$(R\subseteq S)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\subseteq(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $((R=S)\Leftrightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})=(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
$(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$, $(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
(2) $(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op}=(\widehat{R^{op}})_{\hat{w}_{21}}\forall(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$.
(3) Si R es una relación de L_1 en L_2, S otra de L_2 en L_3 y $R\circ S$ es la relación de L_1 en L_3 compuesta de ambas, entonces se verifica: $(\widehat{R\circ S})_{\hat{w}_{13}}=\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\circ\hat{S}_{\hat{w}_{23}}\forall(w_1,w_2,w_3)\in N(L_1)XN(L_2)XN(L_2)$.

Demostración.
(1) Por la hipótesis $(R\subseteq S)$: $[(x\triangle_1w_1)R(y\triangle_2w_2)]\Rightarrow[(x\triangle_1w_1)S(y\triangle_2w_2)]$, es decir $[x\,\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\,y]\Rightarrow[x\,\hat{S}_{\hat{w}_{12}}\,y]$, luego $((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\subseteq(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$. De este resultado y de $(Q^{op})^{op}=Q$, se desprende que $((R=S)\Leftrightarrow((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})=(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$
También, del resultado anterior se deduce que $(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}\subseteq((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$ y $((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\subseteq(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}$.
Supongamos que $[x\,((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\,y]$. Entonces
$[x\,((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))\,y]\Rightarrow[x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y]\&[x(\hat{S}_{\hat{w}_{12}})y]\Rightarrow[(x\triangle_1W_1)\,R(y\triangle_2W_2)]\&\,[(x\triangle_1W_1)\,S(y\triangle_2W_2)]\Rightarrow$
$[(x\triangle_1W_1)\,(R\cap S)(y\triangle_2W_2)]\Rightarrow[x\,(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}\,y]$, que termina la prueba de $(\widehat{R\cap S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cap(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
Un razonamiento análogo prueba que $(\widehat{R\cup S})_{\hat{w}_{12}}=((\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\cup(\hat{S}_{\hat{w}_{12}}))$.
(2) $[y\,(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op}x]\Leftrightarrow[x\,(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y]\Leftrightarrow[(x\triangle_1W_1)\,R(y\triangle_2W_2)]\Leftrightarrow[(y\triangle_1W_2)\,(R^{op})\,(x\triangle_2W_1)]\Leftrightarrow[y\,(\widehat{R^{op}})_{\hat{w}_{21}}\,x]$.
(3) Supongamos que R es una relación de L_1 en L_2, S otra de L_2 en L_3 y $R\circ S$ es la relación de L_1 en L_3 compuesta de ambas. Entonces:
$y^*=y\triangle_2w_2$
$[x((\widehat{R\circ S})_{\hat{w}_{13}})z]\Leftrightarrow[(x\triangle_1W_1)\,(R\circ S)\,(z\triangle_3W_3)]\Leftrightarrow(\exists y\in L_2:[(x\triangle_1W_1)Ry]\&[yS(z\triangle_3W_3)])\Leftrightarrow$
$(\exists y^*\in L_2:\,[(x\triangle_1w_1)R(y^*\triangle_2w_2)]\&[(y^*\triangle_2w_2)S(z\triangle_3w_3)])\Leftrightarrow(\exists y^*\in L_2:\,[x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y^*]\&[y^*(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})\,z]\Leftrightarrow$
$[x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}}\circ\hat{S}_{\hat{w}_{23}})y]$.∎

Notas. Los resultados de (1) son más generales: $(\widehat{\bigcap_{i\in J}R_i})_{\hat{w}_{12}}=\bigcap_{i\in J}((\hat{R})_{\hat{w}_{12}})_i$, $(\widehat{\bigcup_{i\in J}R_i})_{\hat{w}_{12}}=\bigcup_{i\in J}((\hat{R})_{\hat{w}_{12}})_i$ para toda familia $(R_i)_{i\in J}$ de relaciones.
De (3) se deduce que en el caso $L_1=L_2=L$ y $\hat{w}=(w,w)$, si $R^0=I_L$, (relación identidad en L), y $R^n=(R^{n-1}\circ R)$ se verifica:
$$(\widehat{R^n})_{\hat{w}}=(\hat{R}_{\hat{w}})^n\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

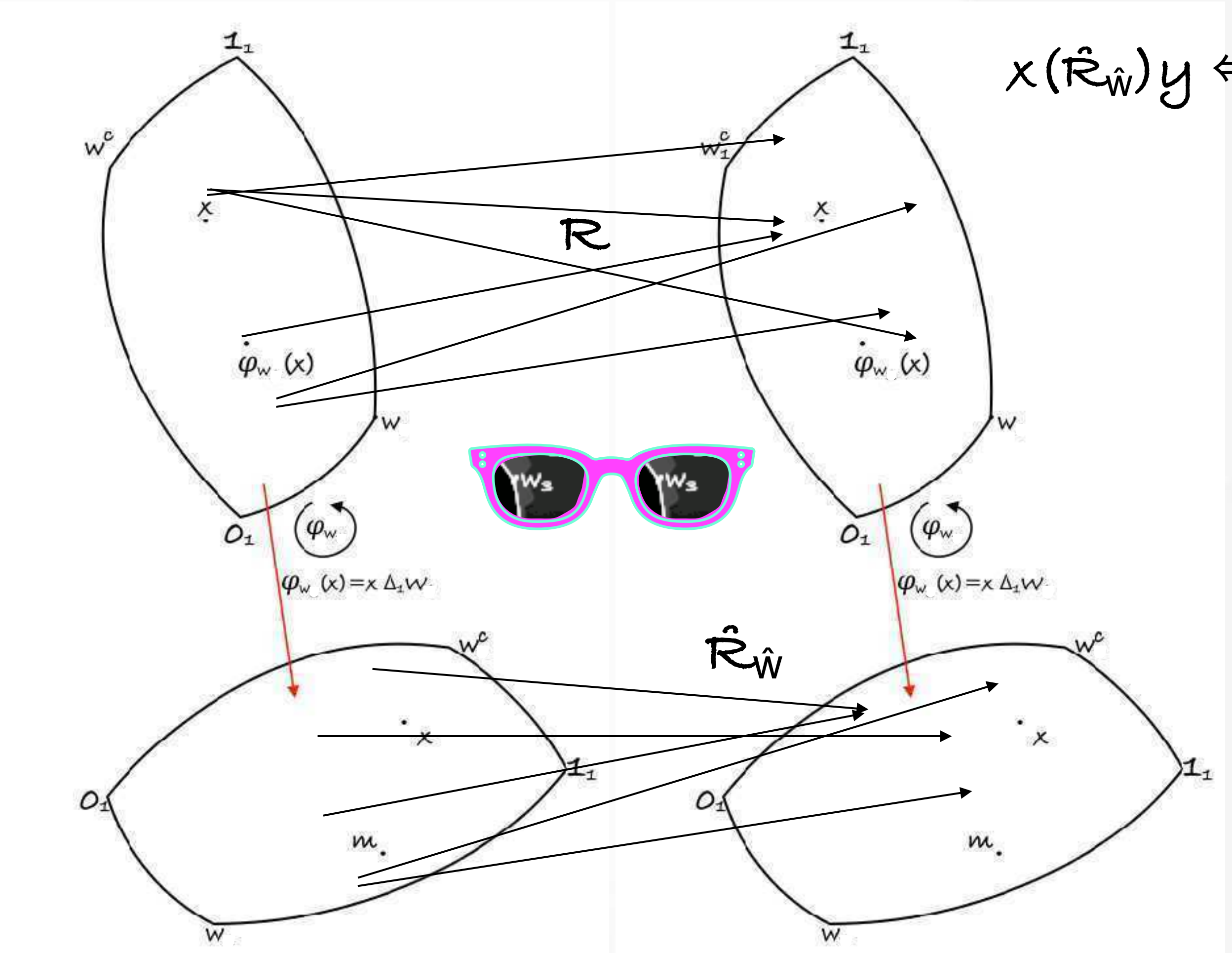
la relación extensión $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$ de una relación R en un mismo retículo: $(L_1, \leq_1) = (L_1, \leq_1)$.

Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2 = w$:

Sea R una relación en L_1

y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con

$\hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$



$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \ R \ (\varphi_w(y))]$

Sea $L_1=L_2$ y sea $w_1=w_2=w$:

Sea R una relación en L_1

y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con

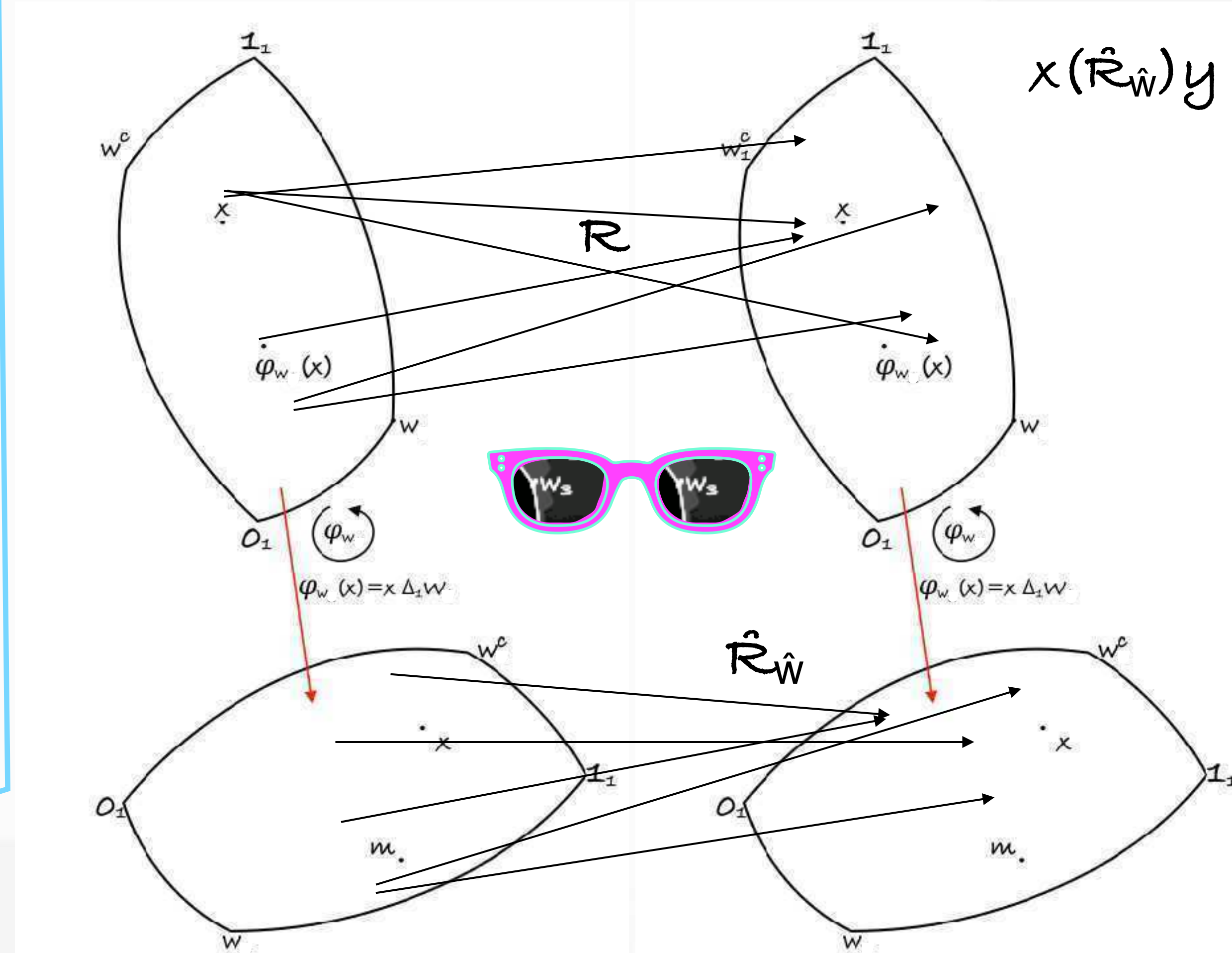
$\hat{W}=(w,w)\in N(L_1)XN(L_1)$

(*) En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}}=I_{L_1}$

Y para todo $w_1\in N(L_1)$

y para toda relación $R\subseteq L_1XL_1$:

(*) $\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}})}_{\hat{W}}=R$



$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x))\ R\ (\varphi_w(y))]$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2 = w$:

Sea R una relación en L_1

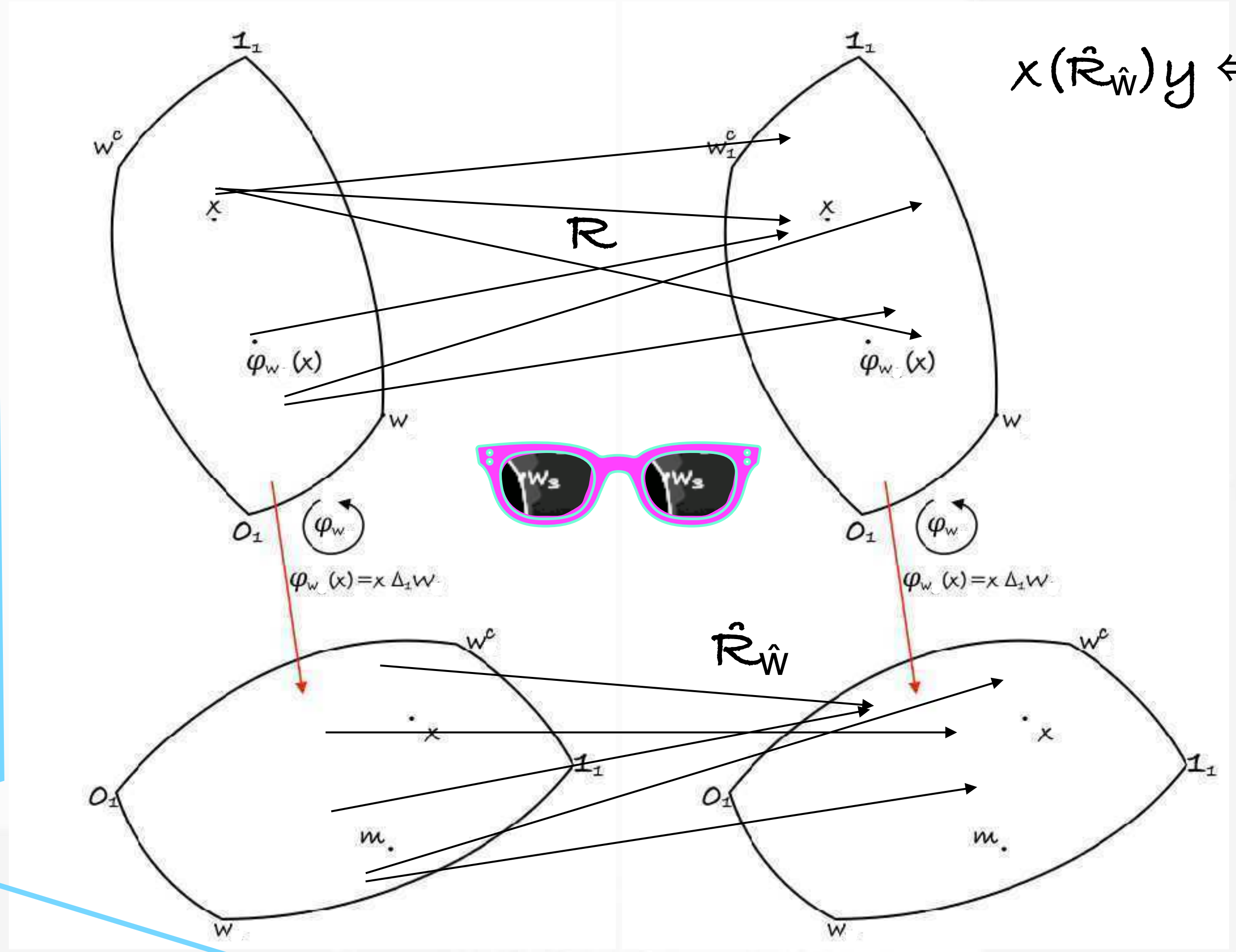
y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con

$\hat{W} = (w,w) \in N(L_1) X N(L_1)$

(*) En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$ y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

(*) $(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}}})_{\hat{W}} = R$



$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x))\ R\ (\varphi_w(y))]$

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{W}}$ "hereda" propiedades de R:(*)

Si R es reflexiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es:

$(I_{L_1} \subseteq R) \Rightarrow (I_{L_1} \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es simétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es:

$(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{W}} = (\hat{R}_{\hat{W}})^{op}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es transitiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es:

$((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}} \circ \hat{R}_{\hat{W}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

(*) (Véase transparencias siguientes)

Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2 = w$:

Sea R una relación en L_1

y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con

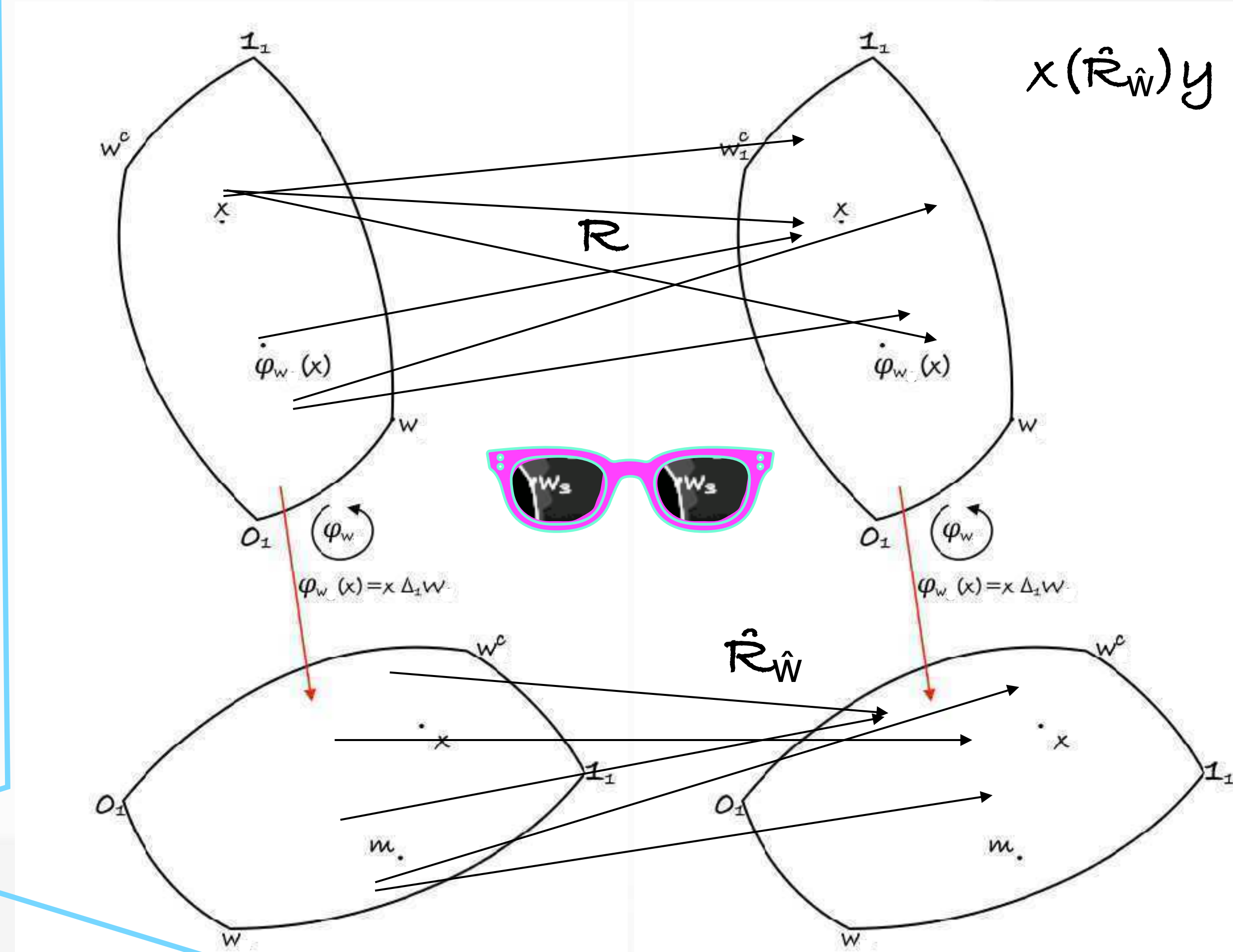
$\hat{W} = (w,w) \in N(L_1) X N(L_1)$

(*) En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$

y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

(*) $(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}}})_{\hat{W}} = R$



$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \; R \; (\varphi_w(y))]$

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{W}}$ "hereda" propiedades de R:(*)

Si R es <u>reflexiva</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$(I_{L_1} \subseteq R) \Rightarrow (I_{L_1} \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>simétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{W}} = (\hat{R}_{\hat{W}})^{op}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>transitiva</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}} \circ \hat{R}_{\hat{W}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

(*)
Si R es <u>antisimétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$[(xRy) \,\&\, (yRx) \Rightarrow (x=y)] \Rightarrow$

$[(x\hat{R}_{\hat{W}}y) \,\&\, (y\hat{R}_{\hat{W}}x) \Rightarrow (x=y)]$

$\forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

etc...

(*) (Véase transparencias siguientes)

Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2 = w$:

Sea R una relación en L_1

y sea $\hat{R}_{\hat{w}}$ su extensión con

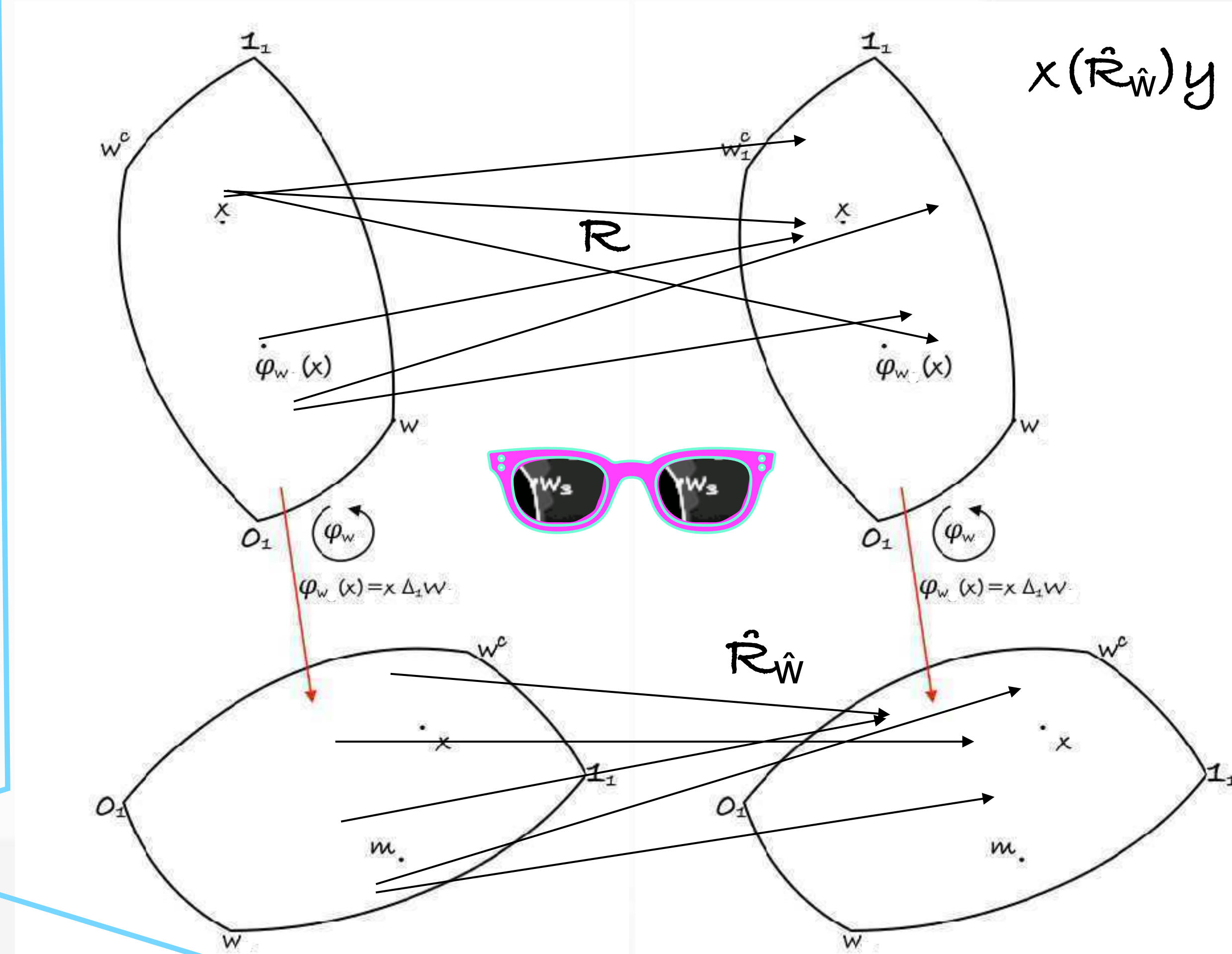
$\hat{w} = (w,w) \in N(L_1) X N(L_1)$

(*) En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{w}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$

y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

(*) $(\widehat{\hat{R}_{\hat{w}}})_{\hat{w}} = R$



$x (\hat{R}_{\hat{w}}) y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \, R \, (\varphi_w(y))]$

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{w}}$ "hereda" propiedades de R:(*)

Si R es <u>reflexiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(I_{L_1} \subseteq R) \Rightarrow (I_{L_1} \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>simétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{w}} = (\hat{R}_{\hat{w}})^{op}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>transitiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{w}} \circ \hat{R}_{\hat{w}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

(*)

Si R es <u>antisimétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$[(xRy) \,\&\, (yRx) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow$

$[(x\hat{R}_{\hat{w}}y) \,\&\, (y\hat{R}_{\hat{w}}x) \Rightarrow (x = y)]$

$\forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

etc...

(*) $((\widehat{Cl_{ref}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{ref}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

$(\widehat{Cl_{tran}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{tran}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

...)

(*) (véase transparencias siguientes)

Proposición. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R\in L_1XL_2$ se verifica: $(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}}=R$.

Proposición. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R\in L_1XL_2$ se verifica: $\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}}=R$.

Demostración. Se verifica: $[x(\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}})y] \Leftrightarrow [(x\triangle_1 w_1)(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(y\triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow$ $[(x\triangle_1 w_1\triangle_1 w_1)(R)(y\triangle_2 w_2\triangle_2 w_2)]\Leftrightarrow[xRy]$.∎

__Proposición__. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R\in L_1XL_2$ se verifica: $\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}}=R$.

__Demostración__. Se verifica: $[x(\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}})y] \Leftrightarrow [(x\triangle_1 w_1)(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(y\triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow$

$[(x\triangle_1 w_1\triangle_1 w_1)(R)(y\triangle_2 w_2\triangle_2 w_2)]\Leftrightarrow[xRy]$.∎

En el caso en que $L_1=L_2=L$:

__Proposición__. Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte y sea $\hat{W}=(w,w)\in N(L)XN(L)$. Se verifica:

(1) Si I_L es la identidad en L, (es decir: $(x\, I_L y)\Leftrightarrow(x=y)$), entonces: $\widehat{(I_L)}_{\hat{W}}=I_L$.

(2) Si R es reflexiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(I_L\subseteq R)\Rightarrow(I_L\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})$.

(3) Si R es simétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})$.

(4) Si R es transitiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})$.

(5) Si R es antisimétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $[(xRy)\&(yRx)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[(x\hat{R}_{\hat{W}}y)\&(y\hat{R}_{\hat{W}}x)\Rightarrow(x=y)]$

$\underline{\text{Proposición}}$. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R \in L_1 X L_2$ se verifica: $\widehat{(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})}_{\hat{w}_{12}} = R$.

$\underline{\text{Demostración}}$. Se verifica: $[x(\widehat{(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})}_{\hat{w}_{12}})y] \Leftrightarrow [(x \triangle_1 w_1)(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})(y \triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow$

$[(x \triangle_1 w_1 \triangle_1 w_1)(R)(y \triangle_2 w_2 \triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow [xRy]$.∎

En el caso en que $L_1 = L_2 = L$:

$\underline{\text{Proposición}}$. Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte y sea $\hat{w} = (w, w) \in N(L) X N(L)$. Se verifica:

(1) Si I_L es la identidad en L, (es decir: $(x\, I_L\, y) \Leftrightarrow (x = y)$), entonces: $\widehat{(I_L)}_{\hat{w}} = I_L$.

(2) Si R es reflexiva, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es: $(I_L \subseteq R) \Rightarrow (I_L \subseteq \hat{R}_{\hat{w}})$.

(3) Si R es simétrica, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es: $(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{w}} = (\hat{R}_{\hat{w}})^{op})$.

(4) Si R es transitiva, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es: $((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{w}} \circ \hat{R}_{\hat{w}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{w}})$.

(5) Si R es antisimétrica, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es: $[(xRy) \& (yRx) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow [(x\hat{R}_{\hat{w}}y) \& (y\hat{R}_{\hat{w}}x) \Rightarrow (x = y)]$

$\underline{\text{Demostración}}$. (1) Se verifica: $[x(\widehat{(I_L)}_{\hat{w}})y] \Leftrightarrow [(x \triangle w)(I_L)(y \triangle w)] \Leftrightarrow [(x \triangle w) = (y \triangle w)] \Leftrightarrow (x = y)$.

(2) Si R es reflexiva, se verifica: $(I_L \subseteq R) \Rightarrow (\widehat{(I_L)}_{\hat{w}} \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \Rightarrow (I_L \subseteq \hat{R}_{\hat{w}})$; luego $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es.

(3) Si R es simétrica, se verifica: $(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{w}} = \widehat{(R^{op})}_{\hat{w}}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{w}} = (\hat{R}_{\hat{w}})^{op})$; luego $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es.

(4) Si R es transitiva: $((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\widehat{R \circ R})_{\hat{w}} \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{w}} \circ \hat{R}_{\hat{w}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{w}})$; luego $\hat{R}_{\hat{w}}$ también lo es.

(5) Si R es antisimétrica $[(xRy) \& (yRx) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow [R \cap R^{op} \subseteq I_L] \Rightarrow [(\widehat{R \cap R^{op}})_{\hat{w}} \subseteq \widehat{(I_L)}_{\hat{w}}] \Rightarrow$

$(\hat{R}_{\hat{w}} \cap (\hat{R}_{\hat{w}})^{op}) \subseteq (I_L)_{\hat{w}}] \Rightarrow [(x\hat{R}_{\hat{w}}y) \& (y\hat{R}_{\hat{w}}x) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow [\hat{R}_{\hat{w}}$ es antisimétrica$]$.∎

Proposición. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R\in L_1XL_2$ se verifica: $\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}}=R$.

Demostración. Se verifica: $[x(\widehat{(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})}_{\hat{W}_{12}})y] \Leftrightarrow [(x\triangle_1 w_1)(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(y\triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow$
$[(x\triangle_1 w_1\triangle_1 w_1)(R)(y\triangle_2 w_2\triangle_2 w_2)]\Leftrightarrow[xRy]$.∎

En el caso en que $L_1=L_2=L$:

Proposición. Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte y sea $\hat{W}=(w,w)\in N(L)XN(L)$. Se verifica:

(1) Si I_L es la identidad en L, (es decir: $(x\, I_L y)\Leftrightarrow(x=y)$), entonces: $\widehat{(I_L)}_{\hat{W}}=I_L$.

(2) Si R es reflexiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(I_L\subseteq R)\Rightarrow(I_L\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})$.

(3) Si R es simétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})$.

(4) Si R es transitiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})$.

(5) Si R es antisimétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $[(xRy)\&(yRx)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[(x\hat{R}_{\hat{W}}y)\&(y\hat{R}_{\hat{W}}x)\Rightarrow(x=y)]$

Demostración. (1) Se verifica: $[x(\widehat{(I_L)}_{\hat{W}})y] \Leftrightarrow[(x\triangle w)(I_L)(y\triangle w)]\Leftrightarrow[(x\triangle w)=(y\triangle w)]\Leftrightarrow(x=y)$.

(2) Si R es reflexiva, se verifica: $(I_L\subseteq R)\Rightarrow(\widehat{(I_L)}_{\hat{W}}\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})\Rightarrow(I_L\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(3) Si R es simétrica, se verifica: $(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=\widehat{(R^{op})}_{\hat{W}})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(4) Si R es transitiva: $((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\widehat{R\circ R})_{\hat{W}}\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(5) Si R es antisimétrica $[(xRy)\&(yRx)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[R\cap R^{op}\subseteq I_L]\Rightarrow[(\widehat{R\cap R^{op}})_{\hat{W}}\subseteq\widehat{(I_L)}_{\hat{W}}]\Rightarrow$
$(\hat{R}_{\hat{W}}\cap(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})\subseteq(I_L)_{\hat{W}}]\Rightarrow[(x\hat{R}_{\hat{W}}y)\&(y\hat{R}_{\hat{W}}x)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[\hat{R}_{\hat{W}}$ es antisimétrica$]$.∎

Nota. Las propiedades demostradas implican otras entre clausuras reflexivas, transitivas, etc.: $((\widehat{Cl_{ref}(R)})_{\hat{W}}=Cl_{ref}(\hat{R}_{\hat{W}})$, $(\widehat{Cl_{tran}(R)})_{\hat{W}}=Cl_{tran}(\hat{R}_{\hat{W}})$, ...

Proposición. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, +_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, entonces:

(1) Para toda relación $R\in L_1XL_2$ se verifica: $(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}}=R$.

Demostración. Se verifica: $[x((\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}})y] \Leftrightarrow [(x\triangle_1 w_1)(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(y\triangle_2 w_2)] \Leftrightarrow$
$[(x\triangle_1 w_1\triangle_1 w_1)(R)(y\triangle_2 w_2\triangle_2 w_2)]\Leftrightarrow[xRy]$.■

Nota. Estos resultados prueban que si $R\subseteq LXL$ es una semejanza, una equivalencia, un orden,..., entonces $\hat{R}_{\hat{W}}$ también es del mismo tipo.

En el caso en que $L_1=L_2=L$:

Proposición. Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ un retículo distributivo y acotado con una negación fuerte y sea $\hat{W}=(w,w)\in N(L)XN(L)$. Se verifica:

(1) Si I_L es la identidad en L, (es decir: $(x\, I_L y)\Leftrightarrow(x=y)$), entonces: $(\widehat{I_L})_{\hat{W}}=I_L$.

(2) Si R es reflexiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(I_L\subseteq R)\Rightarrow(I_L\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})$.

(3) Si R es simétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})$.

(4) Si R es transitiva, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})$.

(5) Si R es antisimétrica, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es: $[(xRy)\&(yRx)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[(x\hat{R}_{\hat{W}}y)\&(y\hat{R}_{\hat{W}}x)\Rightarrow(x=y)]$

Demostración. (1) Se verifica: $[x((\widehat{I_L})_{\hat{W}})y] \Leftrightarrow [(x\triangle w)(I_L)(y\triangle w)]\Leftrightarrow[(x\triangle w)=(y\triangle w)]\Leftrightarrow(x=y)$.

(2) Si R es reflexiva, se verifica: $(I_L\subseteq R)\Rightarrow((\widehat{I_L})_{\hat{W}}\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})\Rightarrow(I_L\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(3) Si R es simétrica, se verifica: $(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\widehat{R^{op}})_{\hat{W}})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(4) Si R es transitiva: $((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\widehat{R\circ R})_{\hat{W}}\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})$; luego $\hat{R}_{\hat{W}}$ también lo es.

(5) Si R es antisimétrica $[(xRy)\&(yRx)\Rightarrow(x=y)] \Rightarrow[R\cap R^{op}\subseteq I_L] \Rightarrow[(\widehat{R\cap R^{op}})_{\hat{W}}\subseteq(\widehat{I_L})_{\hat{W}}] \Rightarrow$
$(\hat{R}_{\hat{W}}\cap(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})\subseteq(I_L)_{\hat{W}}]\Rightarrow[(x\hat{R}_{\hat{W}}y)\&(y\hat{R}_{\hat{W}}x)\Rightarrow(x=y)]\Rightarrow[\hat{R}_{\hat{W}}$ es antisimétrica$]$.■

Nota. Las propiedades demostradas implican otras entre clausuras reflexivas, transitivas, etc.: $((\widehat{Cl_{ref}(R)})_{\hat{W}}=Cl_{ref}(\hat{R}_{\hat{W}})$, $(\widehat{Cl_{tran}(R)})_{\hat{W}}=Cl_{tran}(\hat{R}_{\hat{W}})$, ...

Relación L-borrosa $\hat{R}_{\hat{W}}$ obtenida de otra L-borrosa R entre $(L_1,\leq_1)$ y $(L_2,\leq_2)$ y asociada a un par de "perspectivas" (w_1,w_2).

Álgebras determinadas por un retículo con negación $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y por retículos distributivos con una negación fuerte $'_i$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia simétrica Δ_i :

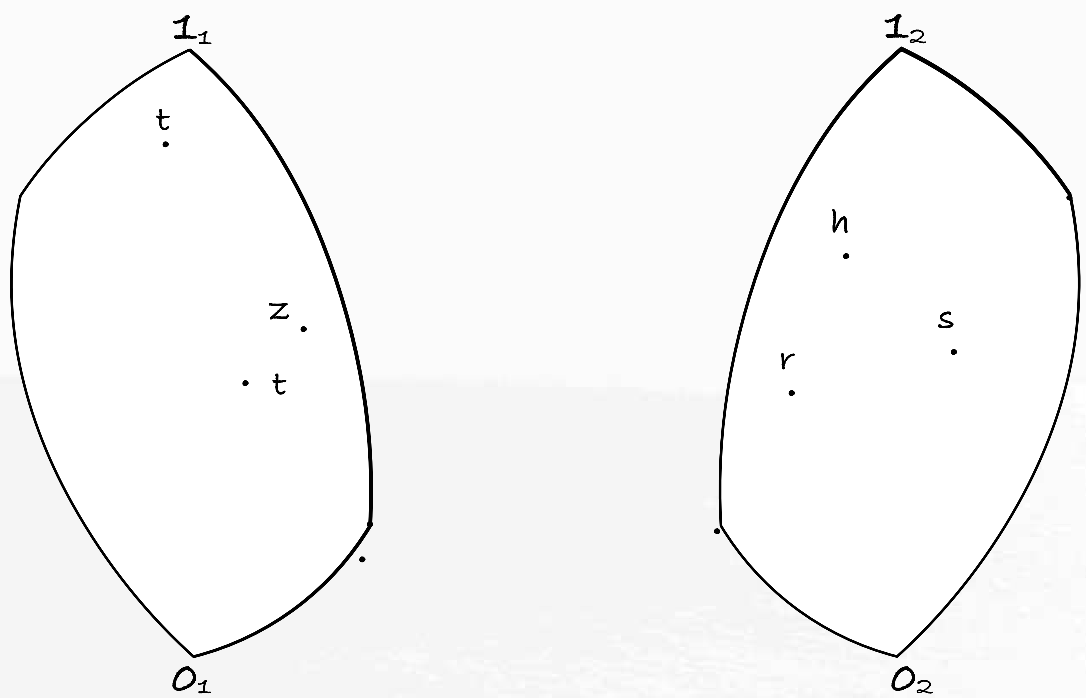
$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i), \; i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$



Álgebras determinadas por un retículo con negación $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y por retículos distributivos con una negación fuerte $'_i$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia simétrica Δ_i:

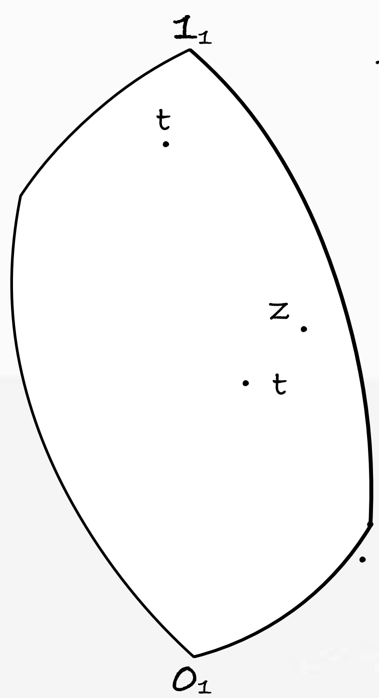
$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i), \; i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$



Relación L-borrosa R:

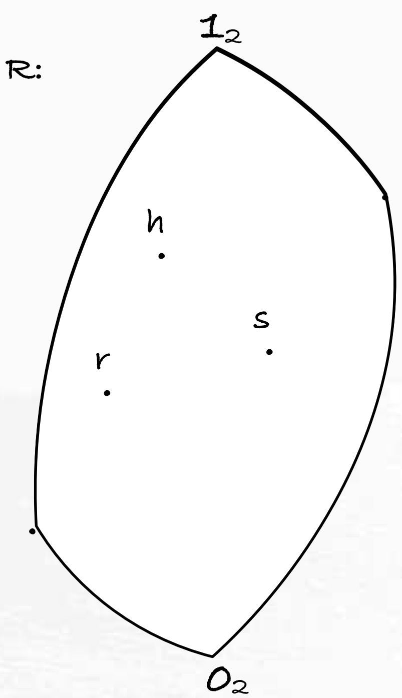
$R \in L^{L_1 \times L_2}$

$R(x,y) \in L,$

$R(t,s) \in L,$

$R(t,y) \in L,$

...



Álgebras determinadas por un retículo con negación $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y por retículos distributivos con una negación fuerte $'_i$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia simétrica Δ_i:

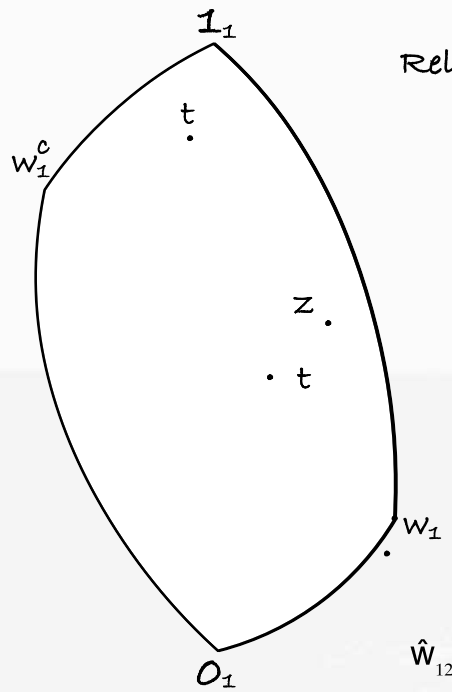
$$((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '_i, w_i, \Delta_i),\ i=1,2,\ldots$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$



Relación L-borrosa R:

$R \in L^{L_1 \times L_2}$

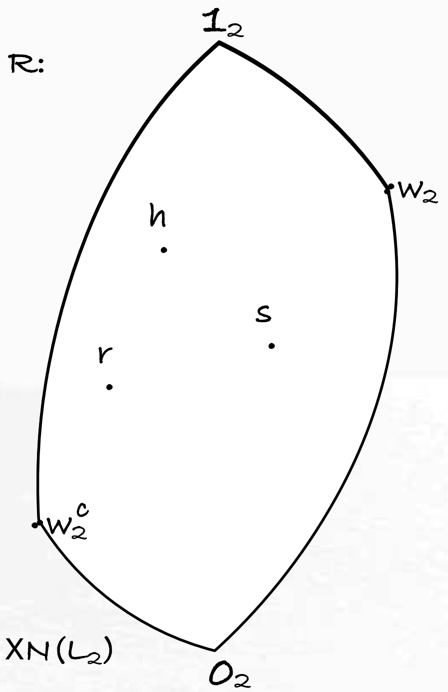
$R(x,y) \in L,$

$R(t,s) \in L,$

$R(t,y) \in L,$

…

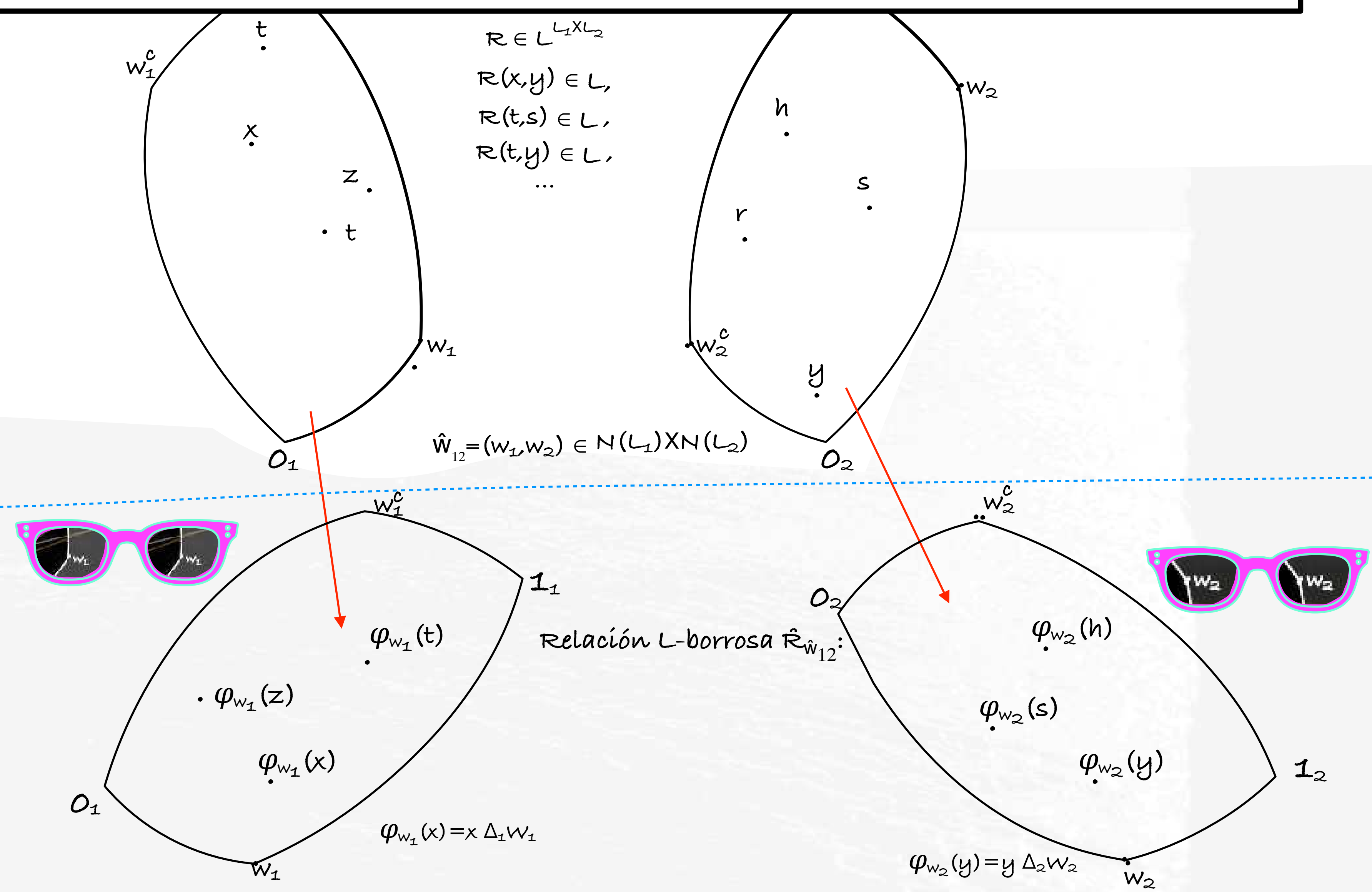
$\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$



$$\hat{R}_{\hat{w}_{12}} \in L^{L_1 X L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$$

<u>Nota</u>. para toda R y todo par $(w_1,w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ se verificala igualdad: $\hat{R}_{\hat{w}_{12}}(x \triangle_1 w_1, y \triangle_2 w_2) = R(x,y)$.



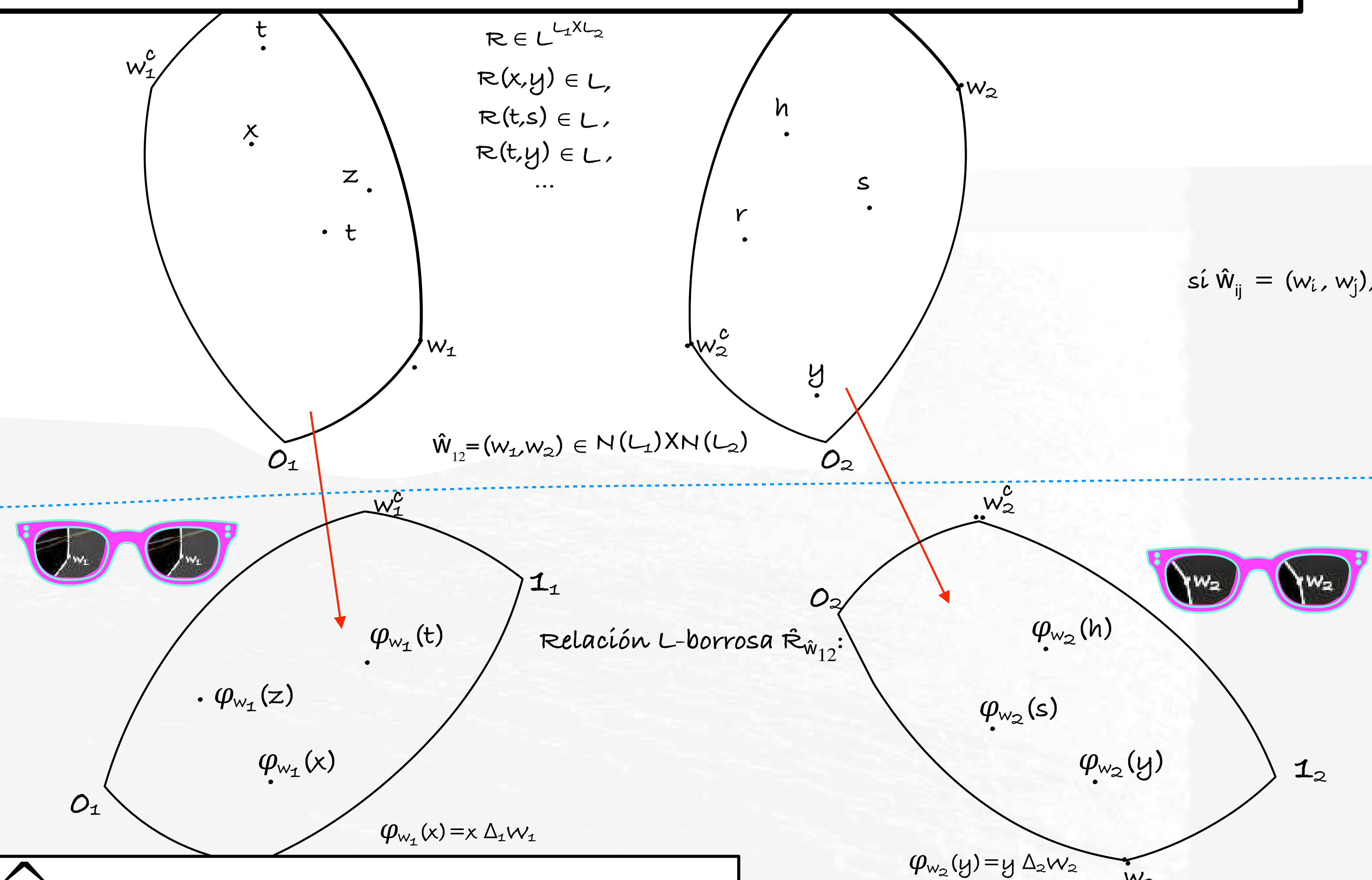
Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$$\hat{R}_{\hat{w}_{12}} \in L^{L_1 X L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$$

<u>Nota</u>. para toda R y todo par $(w_1,w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ se verificala igualdad: $\hat{R}_{\hat{w}_{12}}(x \triangle_1 w_1, y \triangle_2 w_2) = R(x,y)$.



sí $\hat{w}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

nte con las

$\sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

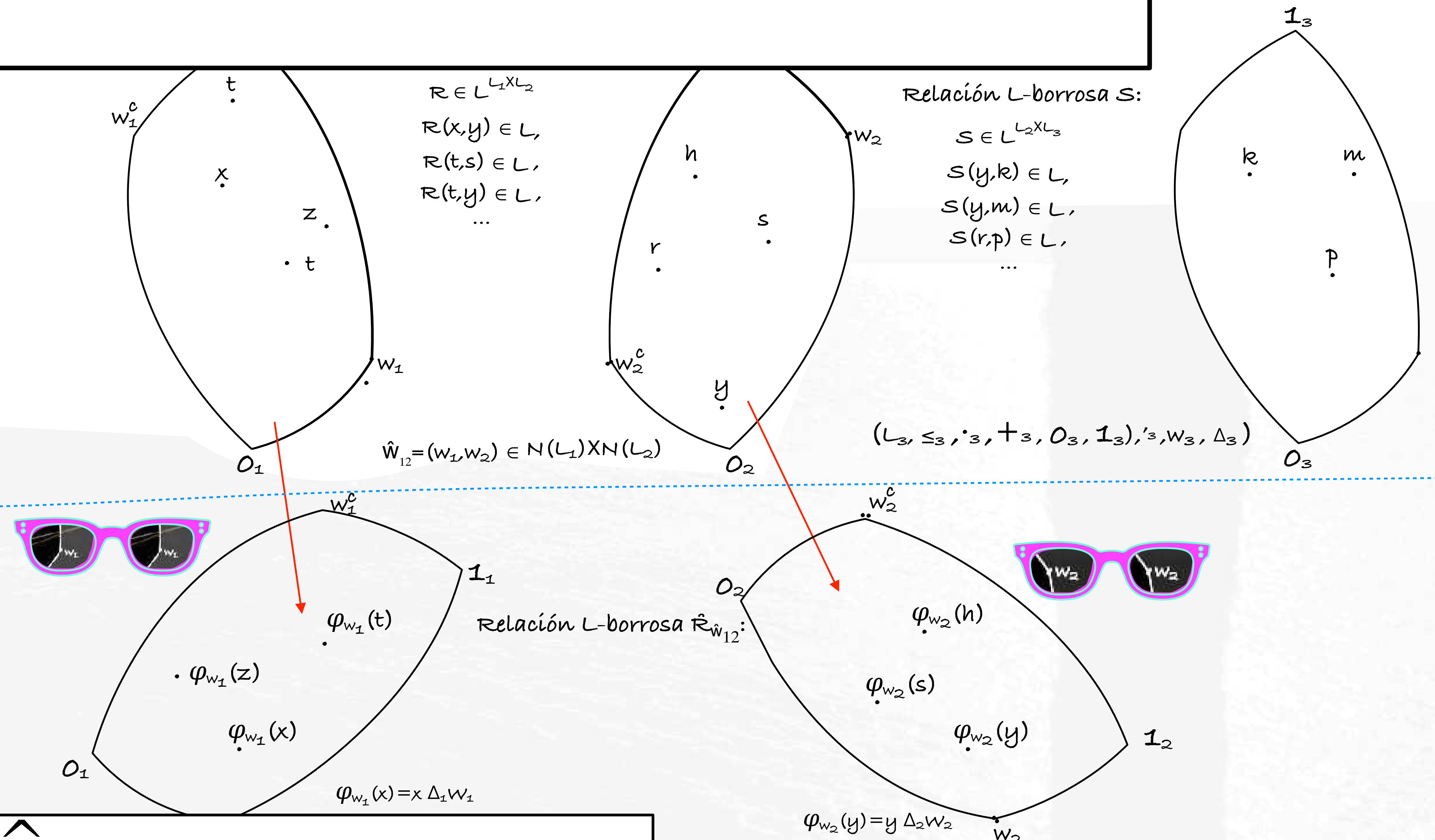
$$(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})' = \widehat{(R')}_{\hat{w}_{12}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

$$(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})^{op} = \widehat{(R^{op})}_{\hat{w}_{21}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \in L^{L_1 \times L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$$

Nota. para toda R y todo par $(w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$ se verificala igualdad: $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x \triangle_1 w_1, y \triangle_2 w_2) = R(x,y)$.



nte con las

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})' = \widehat{(R')}_{\hat{W}_{12}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$$

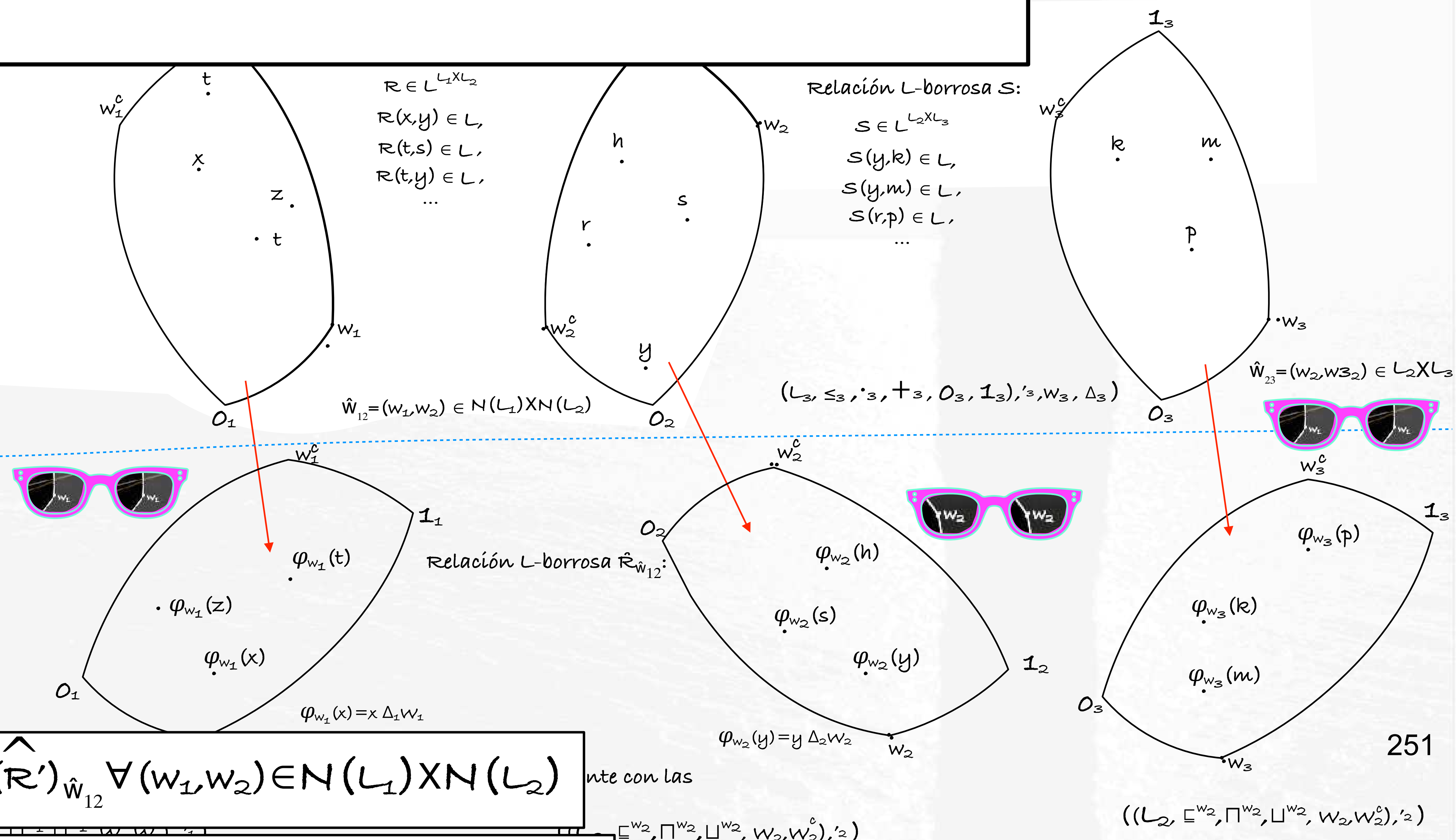
$\sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = \widehat{(R^{op})}_{\hat{W}_{21}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \in L^{L_1 \times L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$$

Nota. para toda R y todo par $(w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$ se verifica la igualdad: $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x \triangle_1 w_1, y \triangle_2 w_2) = R(x,y)$.



$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})' = \widehat{(R')}_{\hat{W}_{12}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = \widehat{(R^{op})}_{\hat{W}_{21}} \; \forall (w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \in L^{L_1 X L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x),\ \varphi_{w_2}(y))$$

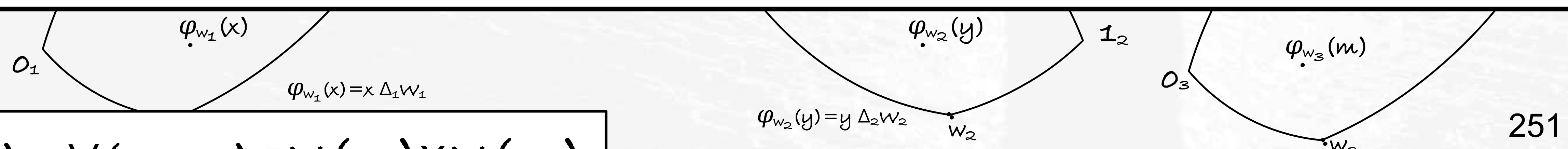
<u>Nota</u>. para toda R y todo par $(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ se verificala igualdad: $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x\triangle_1 w_1,\ y\triangle_2 w_2) = R(x,y)$.

$$R\circ S \in L^{L_1 X L_3},\ R\triangleleft S \in L^{L_1 X L_3}$$

$$\forall (x,m)\in L_1 X L_3:$$

$$(R\circ S)(x,m) = \sup_L\{R(x,y)\cdot S(y,m)\ /\ y\in L_2\}\in L$$

$$(R\triangleleft S)(x,m) = \inf_L\{R(x,y)\rightarrow S(y,m)\ /\ y\in L_2\}\in L$$



$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})' = (\widehat{R'})_{\hat{W}_{12}}\ \forall (w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}}\ \forall (w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \in L^{L_1 X L_2}$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{W_1}(x), \varphi_{W_2}(y))$$

<u>Nota</u>. para toda R y todo par $(W_1,W_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ se verificala igualdad: $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x \triangle_1 W_1, y \triangle_2 W_2) = R(x,y)$.

$$R \circ S \in L^{L_1 X L_3}, \; R \triangleleft S \in L^{L_1 X L_3}$$

$$\forall (x,m) \in L_1 X L_3:$$

$$(R \circ S)(x,m) = \sup_L \{R(x,y) \cdot S(y,m) \; / \; y \in L_2\} \in L$$

$$(R \triangleleft S)(x,m) = \inf_L \{R(x,y) \rightarrow S(y,m) \; / \; y \in L_2\} \in L$$

$$\widehat{(R \circ S)}_{\hat{W}_{13}} = \hat{R}_{\hat{W}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}$$

$$\widehat{(R \triangleleft S)}_{\hat{W}_{13}} = \hat{R}_{\hat{W}_{12}} \triangleleft \hat{S}_{\hat{W}_{23}}$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})' = \widehat{(R')}_{\hat{W}_{12}} \; \forall (W_1,W_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = \widehat{(R^{op})}_{\hat{W}_{21}} \; \forall (W_1,W_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

(Véase la transparencia siguiente)

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si f: F→L es una función y si φ:F→F es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$$

<u>Proposición</u> (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si f: $F \rightarrow L$ es una función y si φ:$F \rightarrow F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \;/\; s\in F\} = \{(f\circ\varphi)(k) \;/\; k\in F\}$$

<u>Demostración</u>. Sea $t\in\{f(s) \;/\; s\in M\}$, entonces existe $s\in M$ tal que $f(s)=t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s))=t$. Sea $k=\varphi^{-1}(s)\in F$.

Entonces se verifica que $t=f(s)=(f\circ\varphi)(k)$, luego $t\in\{(f\circ\varphi)(k) \;/\; k\in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \;/\; s\in F\} \subsetneq \{(f\circ\varphi)(k) \;/\; k\in F\}$.

Sea ahora el conjunto $\{(f\circ\varphi)(k) \;/\; k\in F\}$. Si $g=f\circ\varphi$, utilizando el resultado anterior para g: $F\rightarrow L$ y para φ^{-1}:$F\rightarrow F$, deducimos que $\{(f\circ\varphi)(k) \;/\; k\in F\}=\{g(k) \;/\; k\in F\} \subsetneq \{(g\circ\varphi^{-1})(s) \;/\; s\in F\} = \{(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(s) \;/\; s\in F\}= \{f(s) \;/\; s\in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si $f: F \to L$ es una función y si $\varphi: F \to F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \;/\; s \in F\} = \{(f \circ \varphi)(k) \;/\; k \in F\}$$

Demostración. Sea $t \in \{f(s) \;/\; s \in M\}$, entonces existe $s \in M$ tal que $f(s)=t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s))=t$. Sea $k=\varphi^{-1}(s) \in F$.
Entonces se verifica que $t=f(s)=(f \circ \varphi)(k)$, luego $t \in \{(f \circ \varphi)(k) \;/\; k \in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \;/\; s \in F\} \subsetneq \{(f \circ \varphi)(k) \;/\; k \in F\}$.
Sea ahora el conjunto $\{(f \circ \varphi)(k) \;/\; k \in F\}$. Si $g=f \circ \varphi$, utilizando el resultado anterior para $g: F \to L$ y para $\varphi^{-1}: F \to F$, deducimos que
$\{(f \circ \varphi)(k) \;/\; k \in F\}=\{g(k) \;/\; k \in F\} \subsetneq \{(g \circ \varphi^{-1})(s) \;/\; s \in F\} = \{(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(s) \;/\; s \in F\} = \{f(s) \;/\; s \in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Sean $((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i)$, $i=1,2,3$ retículos distributivos y acotados con negación fuerte y con nítidos respectivos w_i en cada uno de ellos. Sean $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i^c), '_i)$, $i=1,2,3$ los correspondientes retículos asociados a las "perspectivas" w_i.
Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ otro retículo con negación que utilizaremos como espacio de valoración de relaciones borrosas asociadas a los $(L_i, \leq_i)$.

Consideramos las relaciones borrosas $R \in L^{L_1 X L_2}$ y $S \in L^{L_2 X L_3}$. Las composiciones $R \circ S$ y $R \circ S$ son tales que, $\forall (x,z) \in L_1 X L_3$:

$$(R \circ S)(x,z) = \sup_L\{R(x,y) \cdot S(y,z) \;/\; y \in L_2\} \in L, \quad (R \triangleleft S)(x,z) = \inf_L\{R(x,y) \to S(y,z) \;/\; y \in L_2\} \in L .$$

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si $f: F\to L$ es una función y si $\varphi:F\to F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$$

Demostración. Sea $t\in\{f(s) \,/\, s\in M\}$, entonces existe $s\in M$ tal que $f(s)=t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s))=t$. Sea $k=\varphi^{-1}(s)\in F$.

Entonces se verifica que $t=f(s)=(f\circ\varphi)(k)$, luego $t\in\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \,/\, s\in F\} \subsetneq \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$.

Sea ahora el conjunto $\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$. Si $g=f\circ\varphi$, utilizando el resultado anterior para $g: F\to L$ y para $\varphi^{-1}:F\to F$, deducimos que

$\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}=\{g(k) \,/\, k\in F\} \subsetneq \{(g\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\}= \{f(s) \,/\, s\in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Sean $((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i)$, $i=1,2,3$ retículos distributivos y acotados con negación fuerte y con nítidos respectivos w_i en cada uno de ellos. Sean $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i^c), '_i)$, $i=1,2,3$ los correspondientes retículos asociados a las "perspectivas" w_i.

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ otro retículo con negación que utilizaremos como espacio de valoración de relaciones borrosas asociadas a los $(L_i, \leq_i)$.

Consideramos las relaciones borrosas $R \in L^{L_1\times L_2}$ y $S \in L^{L_2\times L_3}$. Las composiciones $R\circ S$ y $R\circ S$ son tales que, $\forall (x,z)\in L_1\times L_3$:

$$(R\circ S)(x,z)=\sup_L\{ R(x,y)\cdot S(y,z) \,/\, y \in L_2\} \in L,\quad (R\triangleleft S)(x,z)=\inf_L\{ R(x,y)\to S(y,z) \,/\, y \in L_2\} \in L .$$

Las correspondientes extensiones en $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i), '_i)$, $i=1,2,3$ asociadas a $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2) \in N(L_1)\times N(L_2)$ y $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2) \in N(L_1)\times N(L_2)$ son las relaciones L-borrosas $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$, $\hat{S}_{\hat{W}_{23}}$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}$, $(\widehat{R\triangleleft S})_{\hat{W}_{13}}$ tales que:

$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y)= R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$, $(\hat{S}_{\hat{W}_{23}})(y,z)= S(\varphi_{w_2}(y), \varphi_{w_3}(z))$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$,

$(\widehat{R\triangleleft S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\triangleleft S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$ $\forall (x,y,z)\in L_1\times L_2\times L_3$. .

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si $f\colon F \to L$ es una función y si $\varphi\colon F \to F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \,/\, s \in F\} = \{(f \circ \varphi)(k) \,/\, k \in F\}$$

Demostración. Sea $t \in \{f(s) \,/\, s \in M\}$, entonces existe $s \in M$ tal que $f(s) = t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s)) = t$. Sea $k = \varphi^{-1}(s) \in F$.

Entonces se verifica que $t = f(s) = (f \circ \varphi)(k)$, luego $t \in \{(f \circ \varphi)(k) \,/\, k \in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \,/\, s \in F\} \subsetneq \{(f \circ \varphi)(k) \,/\, k \in F\}$.

Sea ahora el conjunto $\{(f \circ \varphi)(k) \,/\, k \in F\}$. Si $g = f \circ \varphi$, utilizando el resultado anterior para $g\colon F \to L$ y para $\varphi^{-1}\colon F \to F$, deducimos que

$\{(f \circ \varphi)(k) \,/\, k \in F\} = \{g(k) \,/\, k \in F\} \subsetneq \{(g \circ \varphi^{-1})(s) \,/\, s \in F\} = \{(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(s) \,/\, s \in F\} = \{f(s) \,/\, s \in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Sean $((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$ retículos distributivos y acotados con negación fuerte y con nítidos respectivos w_i en cada uno de ellos. Sean $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i^c), '^i)$, $i = 1, 2, 3$ los correspondientes retículos asociados a las "perspectivas" w_i.

Sea $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ otro retículo con negación que utilizaremos como espacio de valoración de relaciones borrosas asociadas a los $(L_i, \leq_i)$.

Consideramos las relaciones borrosas $R \in L^{L_1 X L_2}$ y $S \in L^{L_2 X L_3}$. Las composiciones $R \circ S$ y $R \circ S$ son tales que, $\forall (x,z) \in L_1 X L_3$:

$$(R \circ S)(x,z) = \sup_L\{R(x,y) \cdot S(y,z) \,/\, y \in L_2\} \in L, \quad (R \lhd S)(x,z) = \inf_L\{R(x,y) \to S(y,z) \,/\, y \in L_2\} \in L.$$

Las correspondientes extensiones en $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i), '^i)$, $i = 1, 2, 3$ asociadas a $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ son las relaciones L-borrosas $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$, $\hat{S}_{\hat{W}_{23}}$, $(\widehat{R \circ S})_{\hat{W}_{13}}$, $(\widehat{R \lhd S})_{\hat{W}_{13}}$ tales que:

$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y) = R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$, $(\hat{S}_{\hat{W}_{23}})(y,z) = S(\varphi_{w_2}(y), \varphi_{w_3}(z))$, $(\widehat{R \circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z) = (R \circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$,

$(\widehat{R \lhd S})_{\hat{W}_{13}}(x,z) = (R \lhd S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$ $\forall (x,y,z) \in L_1 X L_2 X L_3$. .

Proposición. Para $R \in L^{L_1 X L_2}$ y $S \in L^{L_2 X L}$ y $\forall (w_1, w_2, w_3) \in N(L_1) X N(L_2) X N(L_3)$ se verifica:

$$(i)\ (\widehat{R \circ S})_{\hat{W}_{13}} = (\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}), \quad (ii)\ (\widehat{R \lhd S})_{\hat{W}_{13}} = (\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \lhd \hat{S}_{\hat{W}_{23}})$$

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si $f: F\rightarrow L$ es una función y si $\varphi: F\rightarrow F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$$

Demostración. Sea $t\in\{f(s) \,/\, s\in M\}$, entonces existe $s\in M$ tal que $f(s)=t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s))=t$. Sea $k=\varphi^{-1}(s)\in F$.

Entonces se verifica que $t=f(s)=(f\circ\varphi)(k)$, luego $t\in\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \,/\, s\in F\} \subsetneq \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$.

Sea ahora el conjunto $\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$. Si $g=f\circ\varphi$, utilizando el resultado anterior para $g: F\rightarrow L$ y para $\varphi^{-1}: F\rightarrow F$, deducimos que $\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}=\{g(k) \,/\, k\in F\} \subsetneq \{(g\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\}= \{f(s) \,/\, s\in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Sean $((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i)$, $i=1,2,3$ retículos distributivos y acotados con negación fuerte y con nítidos respectivos w_i en cada uno de ellos. Sean $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i^c), '^i)$, $i=1,2,3$ los correspondientes retículos asociados a las "perspectivas" w_i.

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ otro retículo con negación que utilizaremos como espacio de valoración de relaciones borrosas asociadas a los $(L_i, \leq_i)$.

Consideramos las relaciones borrosas $R\in L^{L_1 X L_2}$ y $S\in L^{L_2 X L_3}$. Las composiciones $R\circ S$ y $R\circ S$ son tales que, $\forall (x,z)\in L_1 X L_3$:

$$(R\circ S)(x,z)=\sup_L\{ R(x,y)\cdot S(y,z) \,/\, y\in L_2\}\in L,\quad (R\lhd S)(x,z)=\inf_L\{ R(x,y)\rightarrow S(y,z) \,/\, y\in L_2\}\in L.$$

Las correspondientes extensiones en $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i), '^i)$, $i=1,2,3$ asociadas a $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ y $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ son las relaciones L-borrosas $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$, $\hat{S}_{\hat{W}_{23}}$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}$, $(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}$ tales que:

$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y)= R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$, $(\hat{S}_{\hat{W}_{23}})(y,z)= S(\varphi_{w_2}(y), \varphi_{w_3}(z))$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$,

$(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\lhd S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$ $\forall (x,y,z)\in L_1 X L_2 X L_3$.

Proposición. Para $R\in L^{L_1 X L_2}$ y $S\in L^{L_2 X L}$ y $\forall (w_1, w_2, w_3)\in N(L_1)XN(L_2)XN(L_3)$ se verifica:

$$(i)\ (\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}=(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}),\quad (ii)\ (\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}=(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\lhd \hat{S}_{\hat{W}_{23}})$$

Demostración.

Como consecuencia de la proposición auxiliar anterior, se obtiene los siguientes resultados para todo $(x,z)\in L_1 X L_3$:

(i) $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)=(R\circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))= \sup_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),y)\cdot S(y,\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}=$

$$\sup_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),\varphi_{w_2}(y))\cdot S(\varphi_{w_2}(y),\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}= \sup_L\{ \hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x,y)\cdot \hat{S}_{\hat{W}_{23}}(y,z) \,/\, y\in L_2\} =(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}})(x,z).$$

(ii) $(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)=(R\lhd S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))= \inf_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),y)\rightarrow S(y,\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}=$

$$\inf_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),\varphi_{w_2}(y))\rightarrow S(\varphi_{w_2}(y),\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}= \inf_L\{ \hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x,y)\rightarrow \hat{S}_{\hat{W}_{23}}(y,z) \,/\, y\in L_2\} =(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}})(x,z).$$ ∎

Proposición (Auxiliar). Si M y N son conjuntos no vacíos, si $f\colon F \rightarrow L$ es una función y si $\varphi\colon F \rightarrow F$ es una aplicación biyectiva, entonces se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$$

Demostración. Sea $t\in\{f(s) \,/\, s\in M\}$, entonces existe $s\in M$ tal que $f(s)=t$, es decir tal que $f(\varphi\varphi^{-1}(s))=t$. Sea $k=\varphi^{-1}(s)\in F$.

Entonces se verifica que $t=f(s)=(f\circ\varphi)(k)$, luego $t\in\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$, que prueba la inclusión $\{f(s) \,/\, s\in F\} \subsetneq \{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$.

Sea ahora el conjunto $\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}$. Si $g=f\circ\varphi$, utilizando el resultado anterior para $g\colon F\rightarrow L$ y para $\varphi^{-1}\colon F\rightarrow F$, deducimos que

$\{(f\circ\varphi)(k) \,/\, k\in F\}=\{g(k) \,/\, k\in F\} \subsetneq \{(g\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\} = \{(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(s) \,/\, s\in F\}= \{f(s) \,/\, s\in F\}$, que concluye la igualdad de conjuntos. ∎

Sean $((L_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i, w_i, \Delta_i)$, $i=1,2,3$ retículos distributivos y acotados con negación fuerte y con nítidos respectivos w_i en cada uno de ellos. Sean $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i{}^c), '_i)$, $i=1,2,3$ los correspondientes retículos asociados a las "perspectivas" w_i.

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ otro retículo con negación que utilizaremos como espacio de valoración de relaciones borrosas asociadas a los $(L_i, \leq_i)$.

Consideramos las relaciones borrosas $R\in L^{L_1 X L_2}$ y $S\in L^{L_2 X L_3}$. Las composiciones $R\circ S$ y $R\circ S$ son tales que, $\forall (x,z)\in L_1 X L_3$:

$$(R\circ S)(x,z)=\sup_L\{ R(x,y)\cdot S(y,z) \,/\, y\in L_2\}\in L,\quad (R\lhd S)(x,z)=\inf_L\{ R(x,y)\rightarrow S(y,z) \,/\, y\in L_2\}\in L.$$

Las correspondientes extensiones en $((L_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, w_i, w_i), '_i)$, $i=1,2,3$ asociadas a $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ y $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ son las relaciones L-borrosas $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$, $\hat{S}_{\hat{W}_{23}}$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}$, $(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}$ tales que:

$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y)= R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))$, $(\hat{S}_{\hat{W}_{23}})(y,z)= S(\varphi_{w_2}(y), \varphi_{w_3}(z))$, $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$,

$(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)= (R\lhd S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))$ $\forall (x,y,z)\in L_1XL_2XL_3$. .

Proposición . Para $R\in L^{L_1XL_2}$ y $S\in L^{L_2XL}$ y $\forall (w_1, w_2, w_3)\in N(L_1)XN(L_2)XN(L_3)$ se verifica:

$$(i)\ (\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}=(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ\ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}),\quad (ii)\ (\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}=(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\lhd\ \hat{S}_{\hat{W}_{23}})$$

Demostración.

Como consecuencia de la proposición auxiliar anterior, se obtiene los siguientes resultados para todo $(x,z)\in L_1XL_3$:

(i) $(\widehat{R\circ S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)=(R\circ S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))= \sup_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),y)\cdot S(y,\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}=$

$\sup_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),\varphi_{w_2}(y))\cdot S(\varphi_{w_2}(y),\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}= \sup_L\{ \hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x,y)\cdot\hat{S}_{\hat{W}_{23}}(y,z) \,/\, y\in L_2\} =(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ\ \hat{S}_{\hat{W}_{23}})(x,z)$.

(ii) $(\widehat{R\lhd S})_{\hat{W}_{13}}(x,z)=(R\lhd S)(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_3}(z))= \inf_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),y)\rightarrow S(y,\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}=$

$\inf_L\{ R(\varphi_{w_1}(x),\varphi_{w_2}(y))\rightarrow S(\varphi_{w_2}(y),\varphi_{w_3}(z)) \,/\, y\in L_2\}= \inf_L\{ \hat{R}_{\hat{W}_{12}}(x,y)\rightarrow\hat{S}_{\hat{W}_{23}}(y,z) \,/\, y\in L_2\} =(\hat{R}_{\hat{W}_{12}}\circ\ \hat{S}_{\hat{W}_{23}})(x,z)$. ∎

Proposición . Para $R\in L^{L_1XL_2}$ y $\forall (w_1, w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ se verifica:

$$(iii)\ (\hat{R}_{\hat{W}_{12}})' = (\widehat{R'})_{\hat{W}_{12}}\qquad (iv)\ (\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op}=(\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}}$$

Demostración. (iii) $(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})'(x,y)= [(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y)]'=[R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))]'=R'(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))=(\widehat{R'})_{\hat{W}_{12}}(x,y)$.

(iv) $(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op}(y,x)= (\hat{R}_{\hat{W}_{12}})(x,y)=R(\varphi_{w_1}(x), \varphi_{w_2}(y))=R^{op}(\varphi_{w_2}(y), \varphi_{w_1}(x))=(\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}}(y,x)$. ∎

Función $\hat{g}_{\hat{W}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$ obtenida de otra g entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

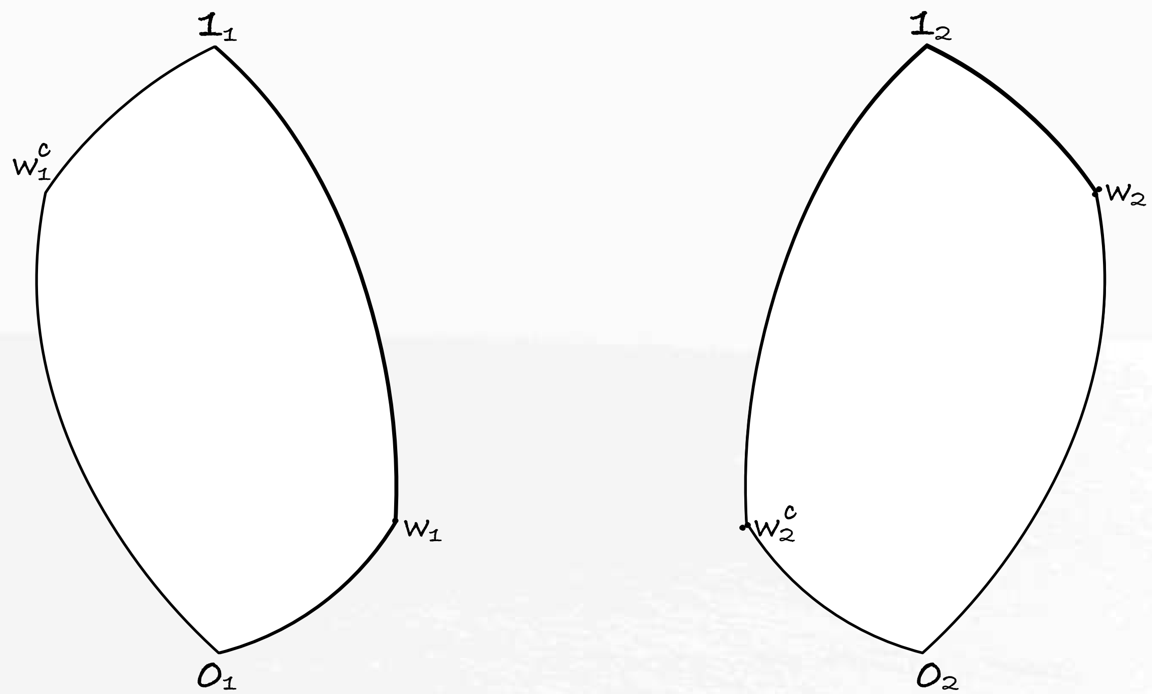
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1, w_1, \Delta_1)$$

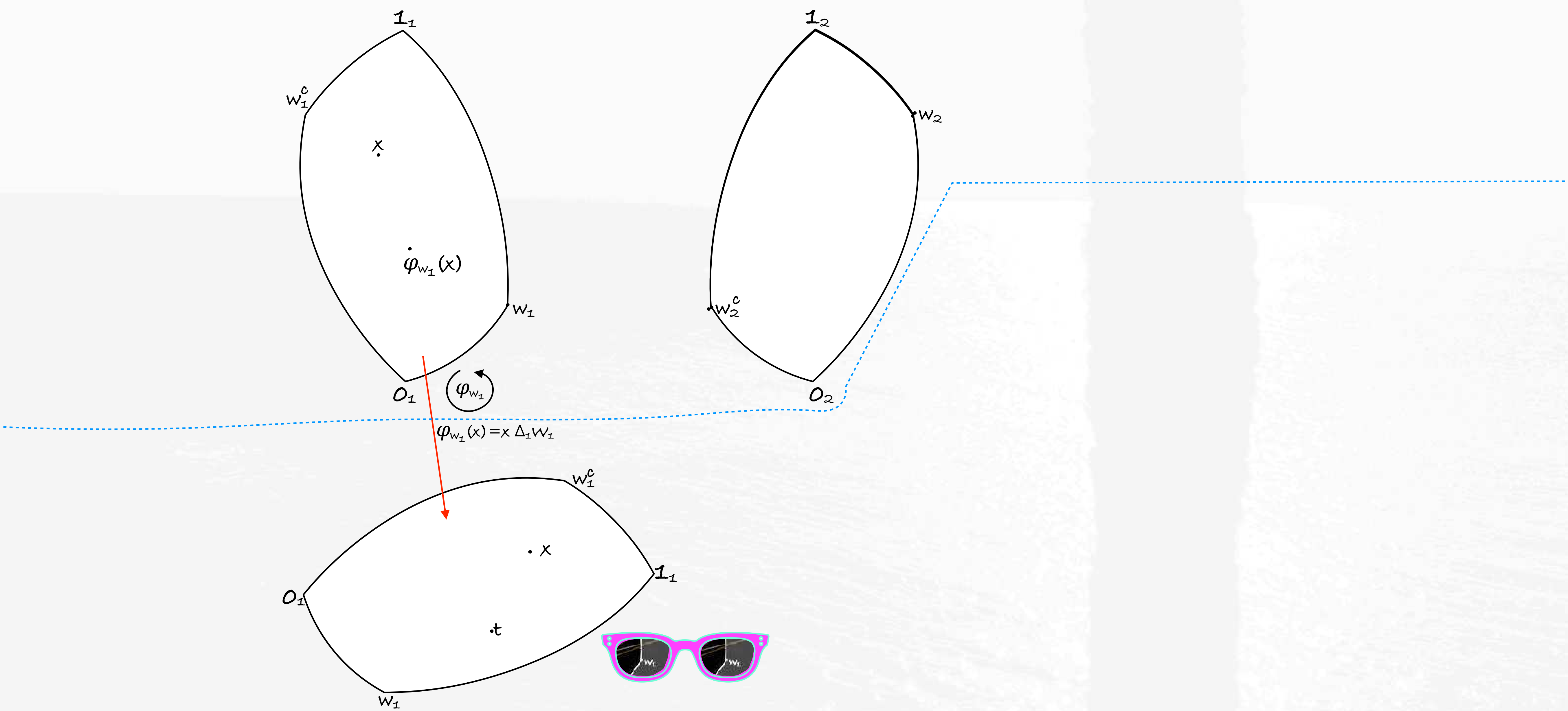
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

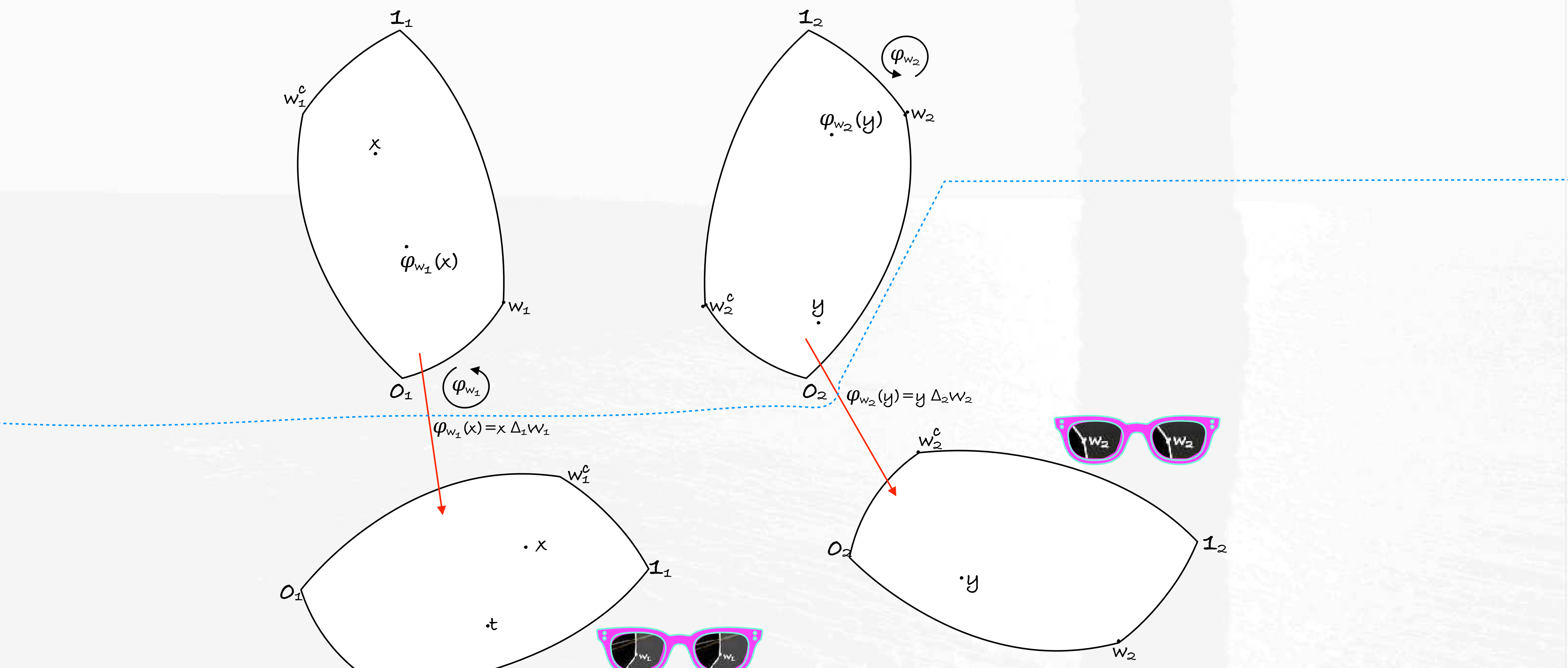
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall \, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

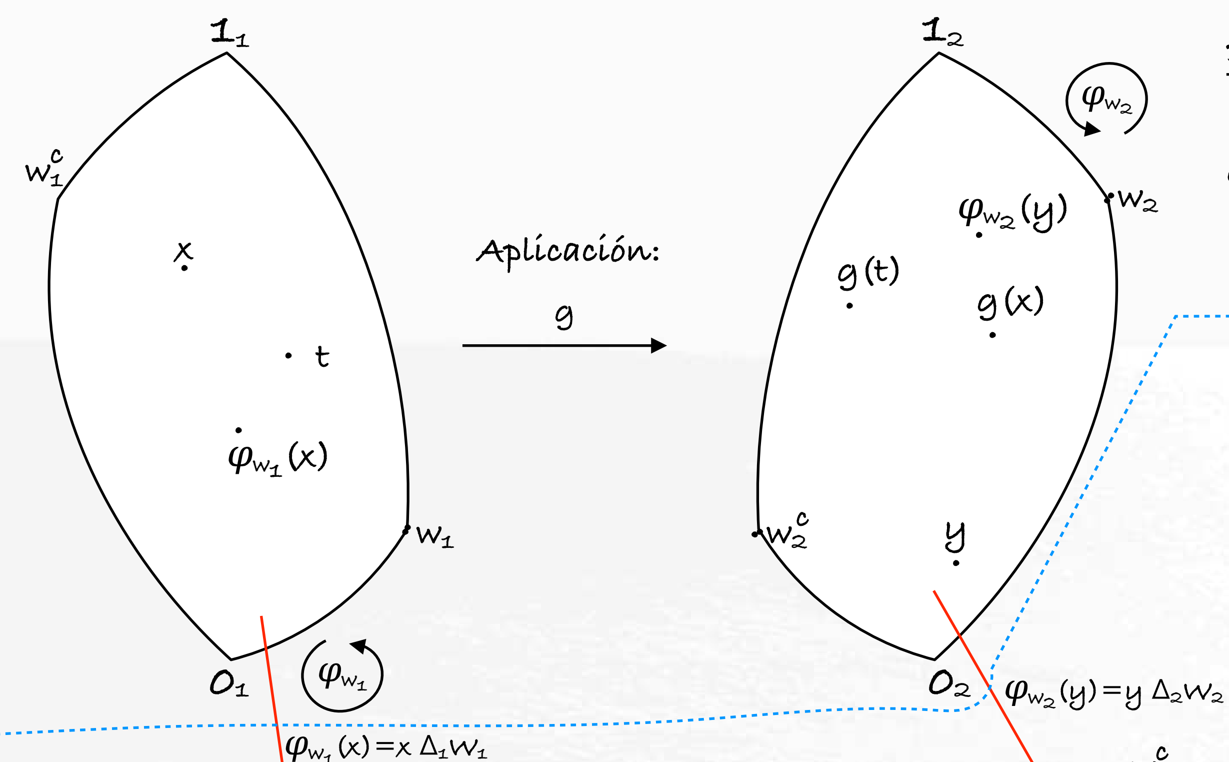
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

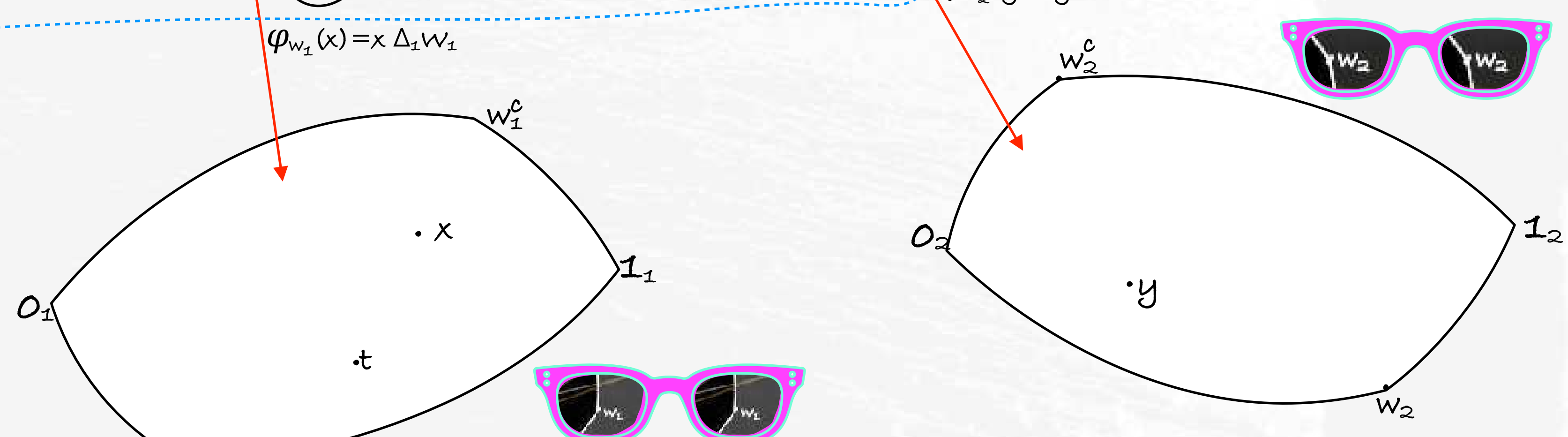
Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



<u>Posibles propiedades de la función</u> g:

$g(\sum_{1} x_j) = \sum_{2} g(x_j)$, $g(\prod_{1} x_j) = \prod_{2} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j \in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \le_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

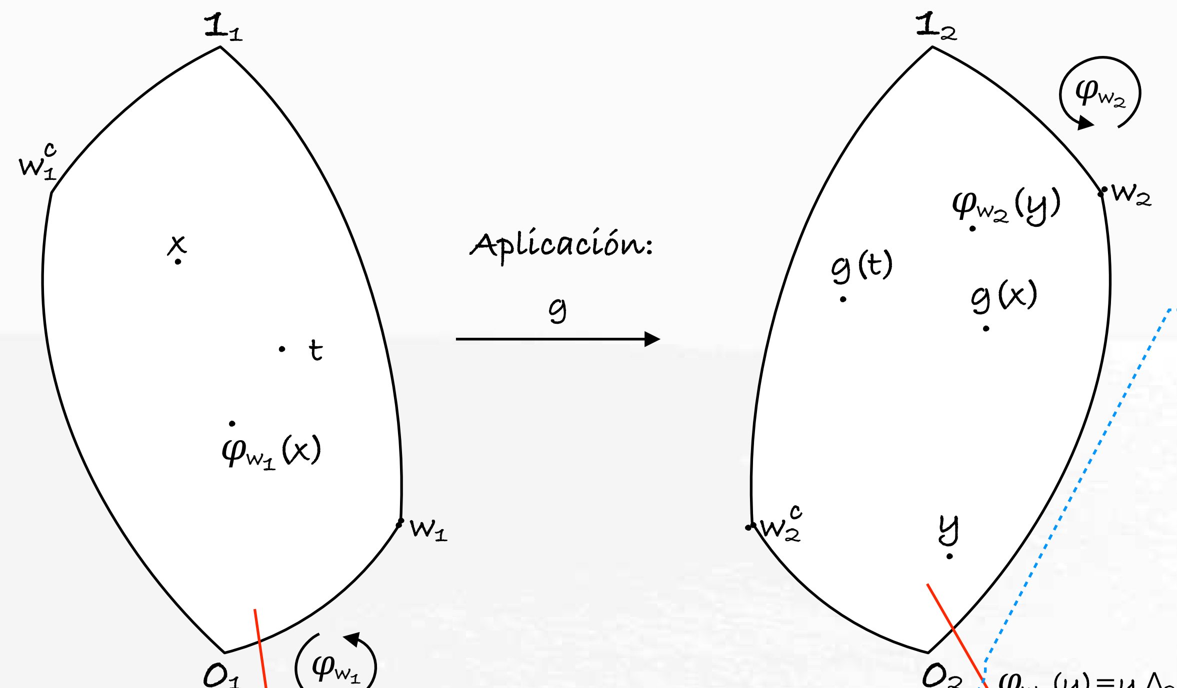
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \le_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

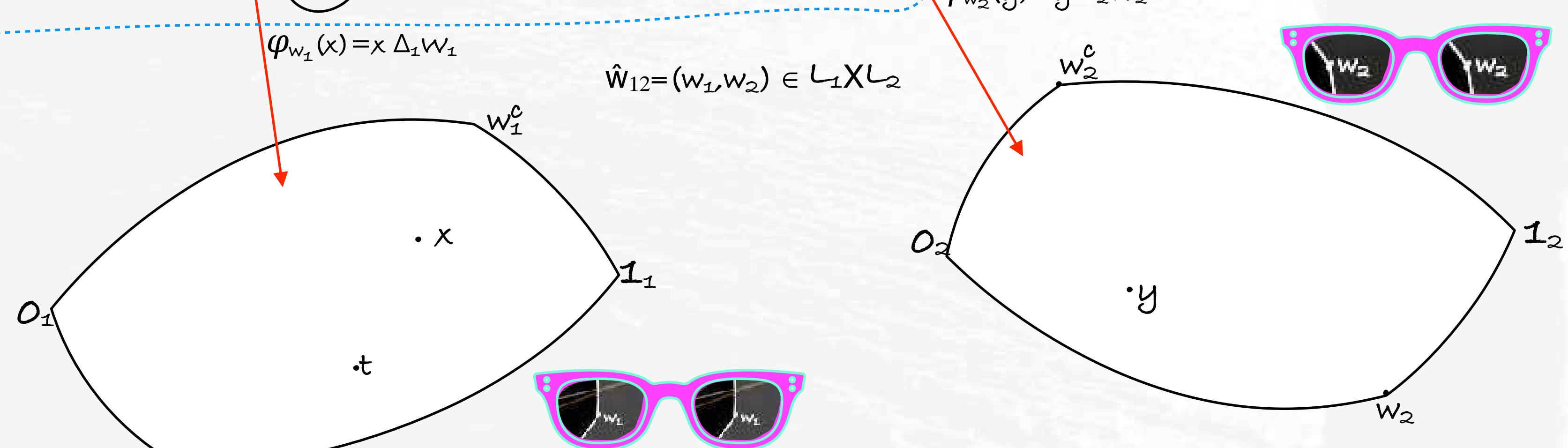
$g(\sum_{1, j\in J} x_j) = \sum_{2, j\in J} g(x_j)$, $g(\prod_{1, j\in J} x_j) = \prod_{2, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \le_1 y) \Rightarrow (g(x) \le_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

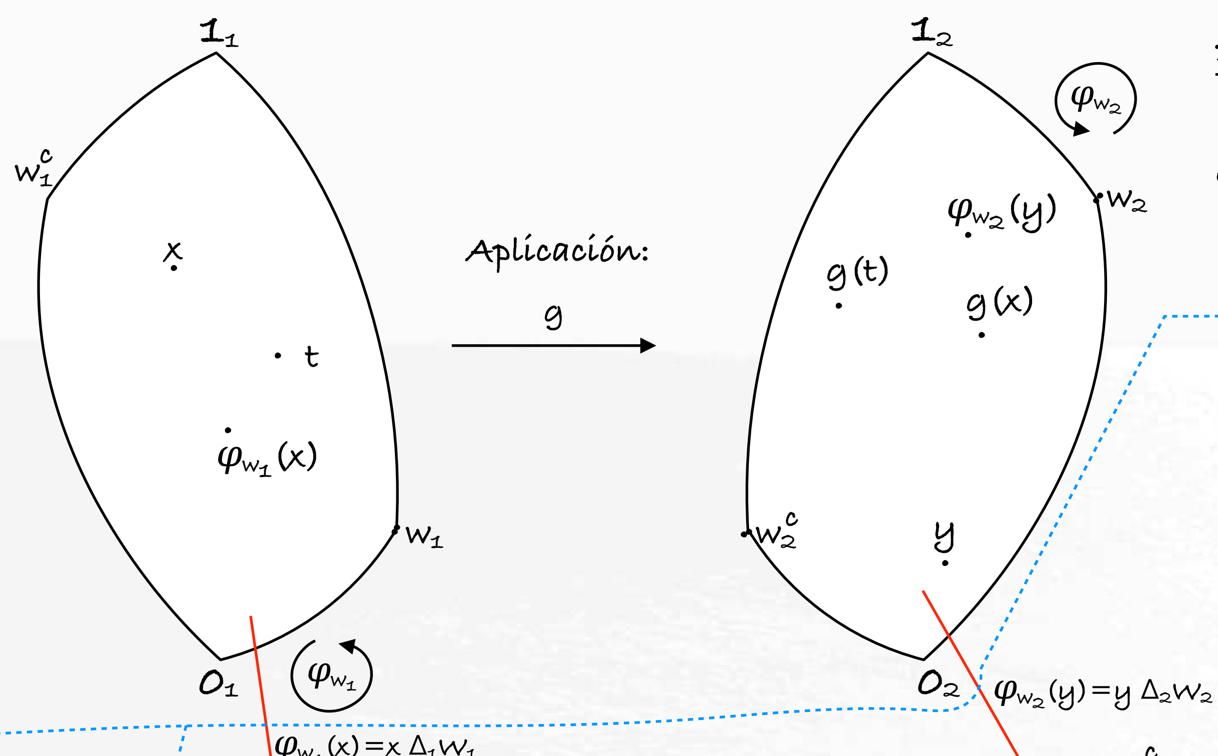
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i

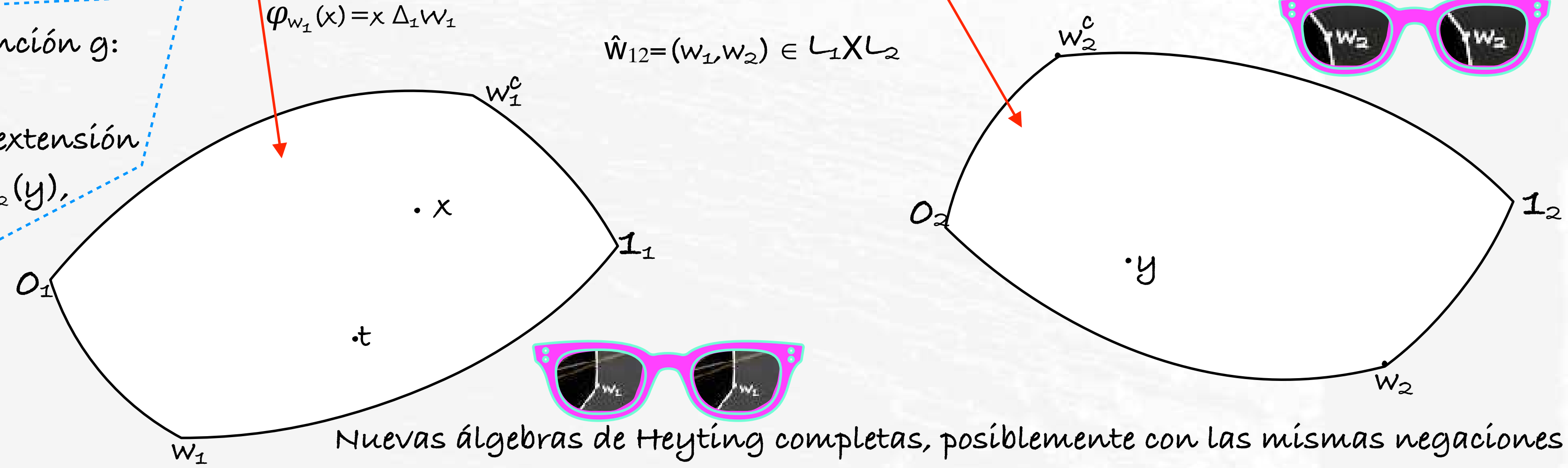


Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_{1} x_j) = \sum_{2} g(x_j)$, $g(\prod_{1} x_j) = \prod_{2} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$
$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$,...

Relación R_g asociada a la función g:
$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$
Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

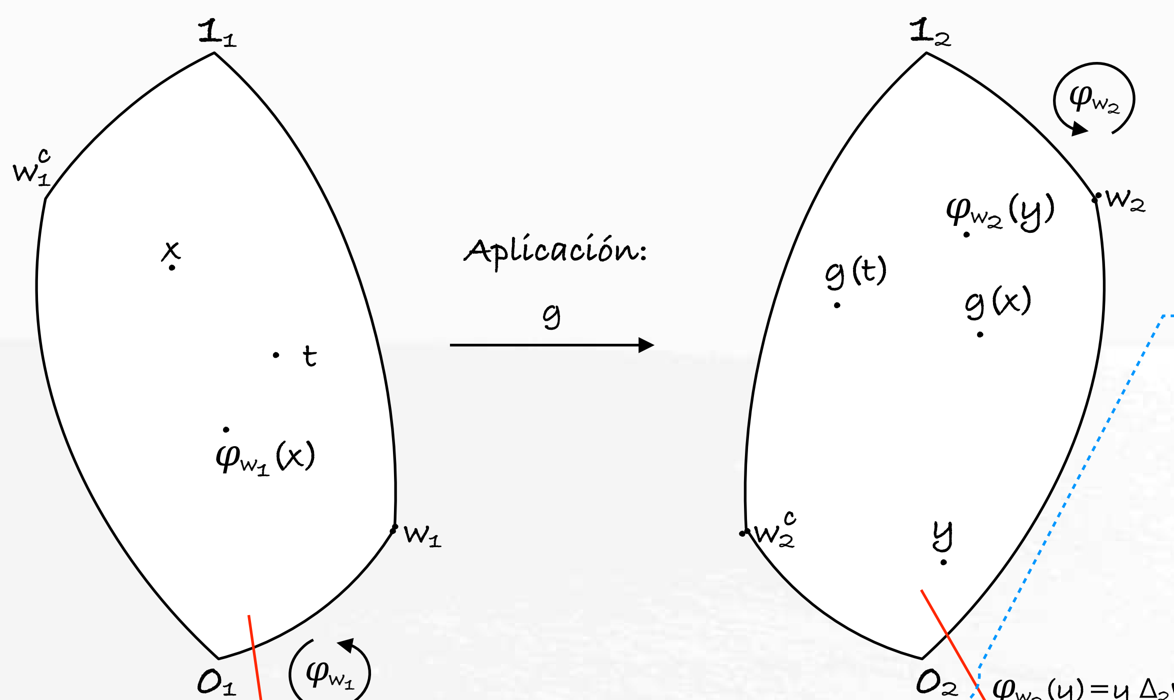
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_1 x_j) = \sum_2 g(x_j)$, $g(\prod_1 x_j) = \prod_2 g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j \in J}$
$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$,...

$\varphi_{w_2}(y) = y \, \Delta_2 w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \, \Delta_1 w_1$

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

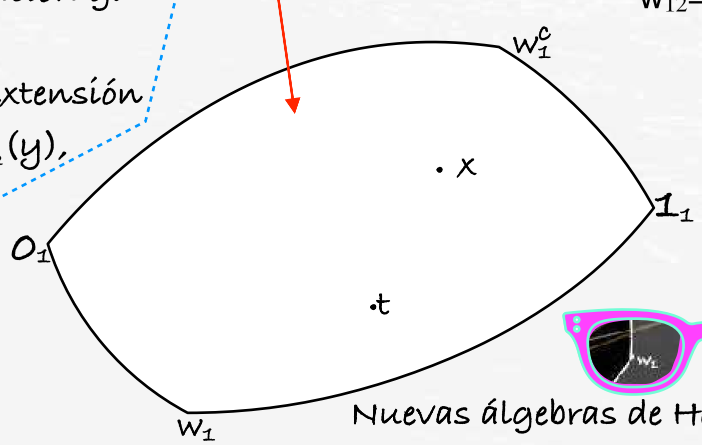
Luego, según se ha visto, su extensión es: $x (\widehat{R_g})_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

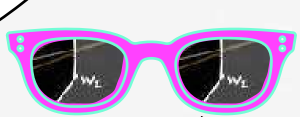
es decir,

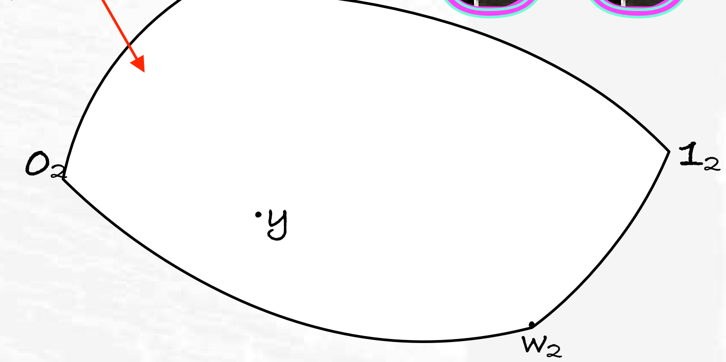
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) =$
$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,







Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

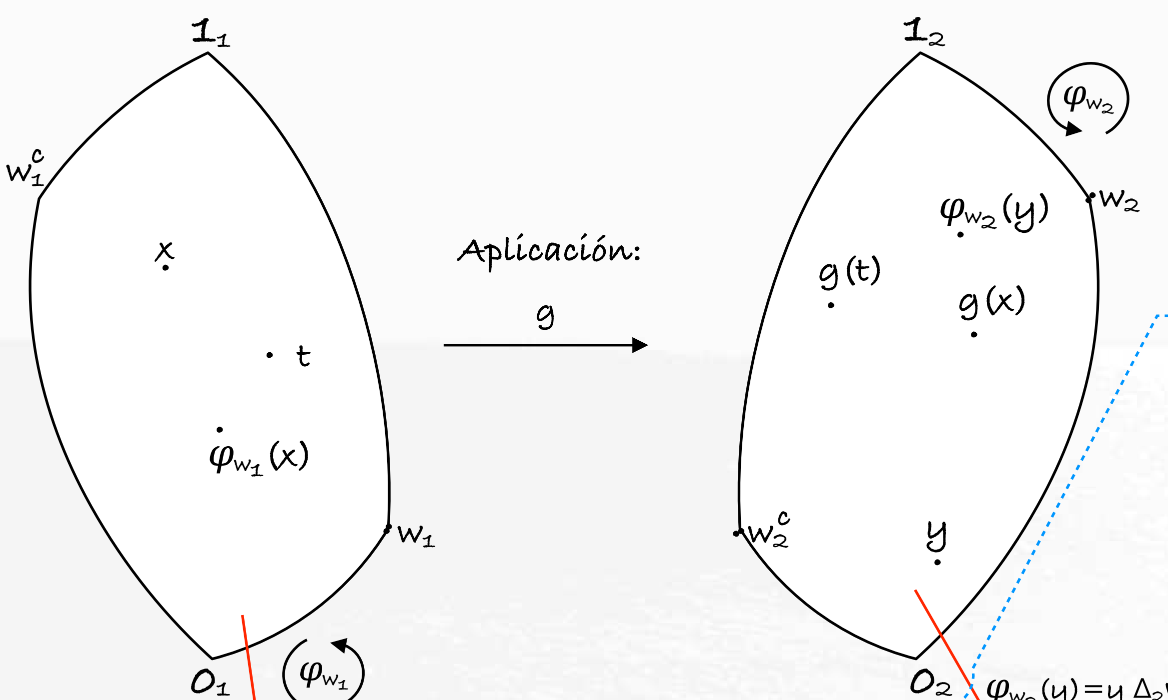
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_{2\, j\in J} g(x_j)$, $g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\widehat{R_g})_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

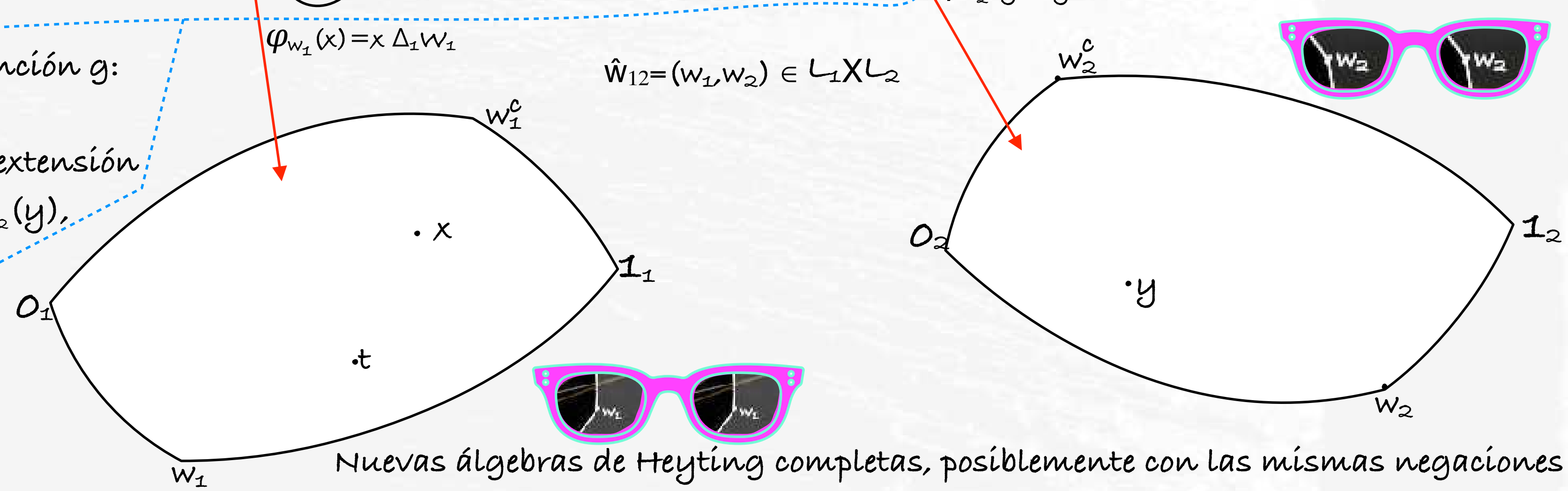
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

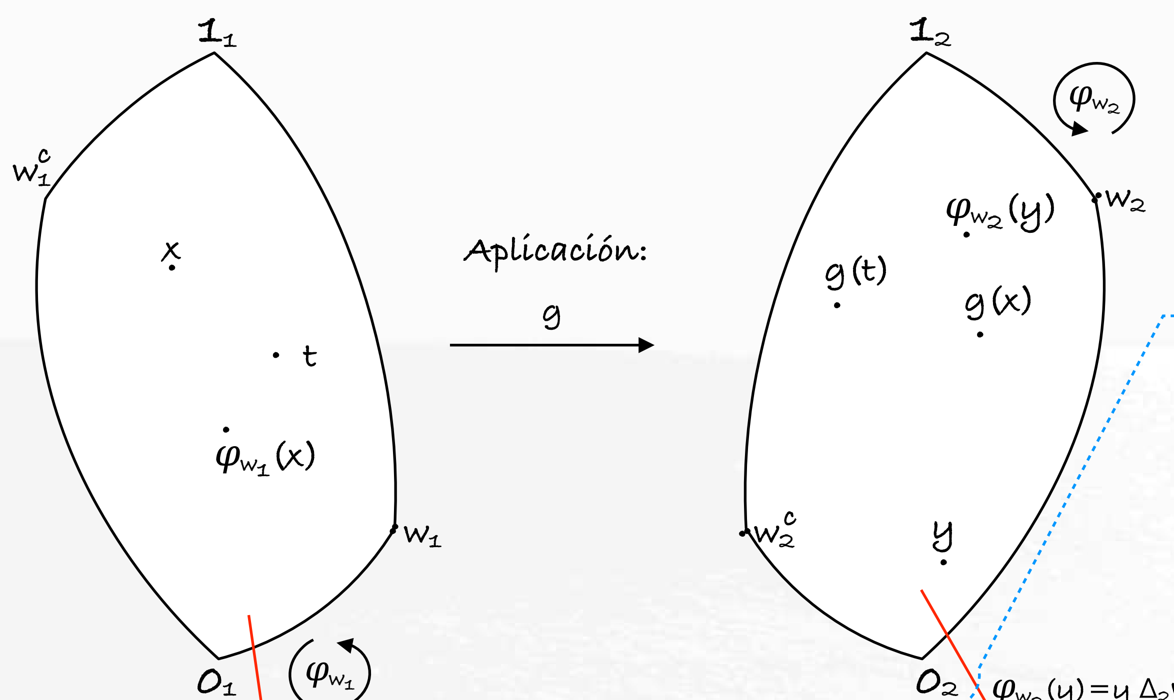
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_1 x_j) = \sum_2 g(x_j)$, $g(\prod_1 x_j) = \prod_2 g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...

$\varphi_{w_1}(x) = x \, \Delta_1 w_1$

$\varphi_{w_2}(y) = y \, \Delta_2 w_2$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x (\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

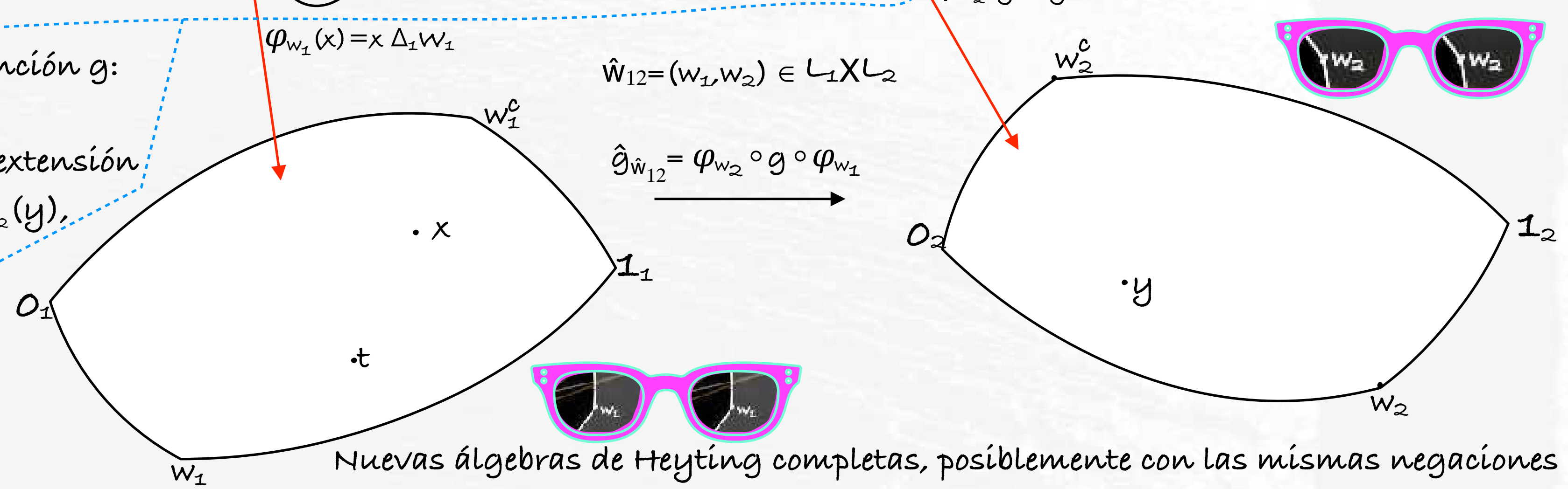
y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

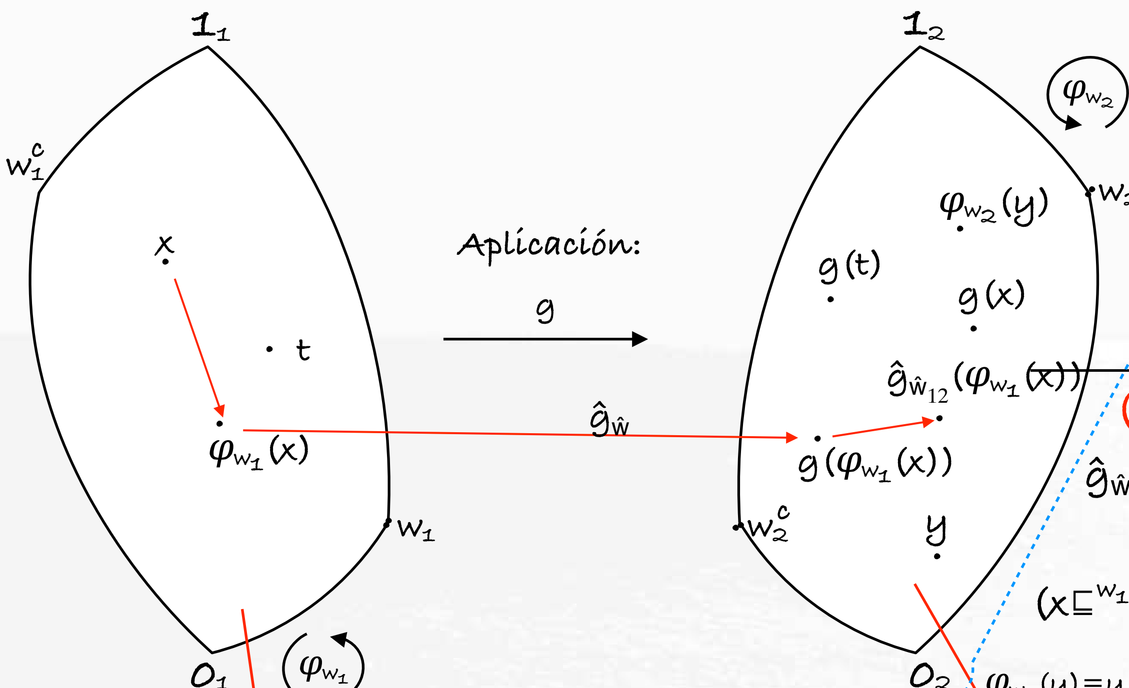
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\Sigma_i M$ y $\Pi_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_{2\, j\in J} g(x_j),\; g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y)),\; g(0_1) = 0_2,\; g(1_1) = 1_2, \ldots$

Propiedades análogas de las w-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ de g:

(*)

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J} x_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x_j),\; \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\prod^{w_1}_{j\in J} x_j) = (\prod^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(A_j)) \,\forall (x_j)_{j\in J},$

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y)),\; \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2,\; \hat{g}^{c}_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2^c, \ldots$

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

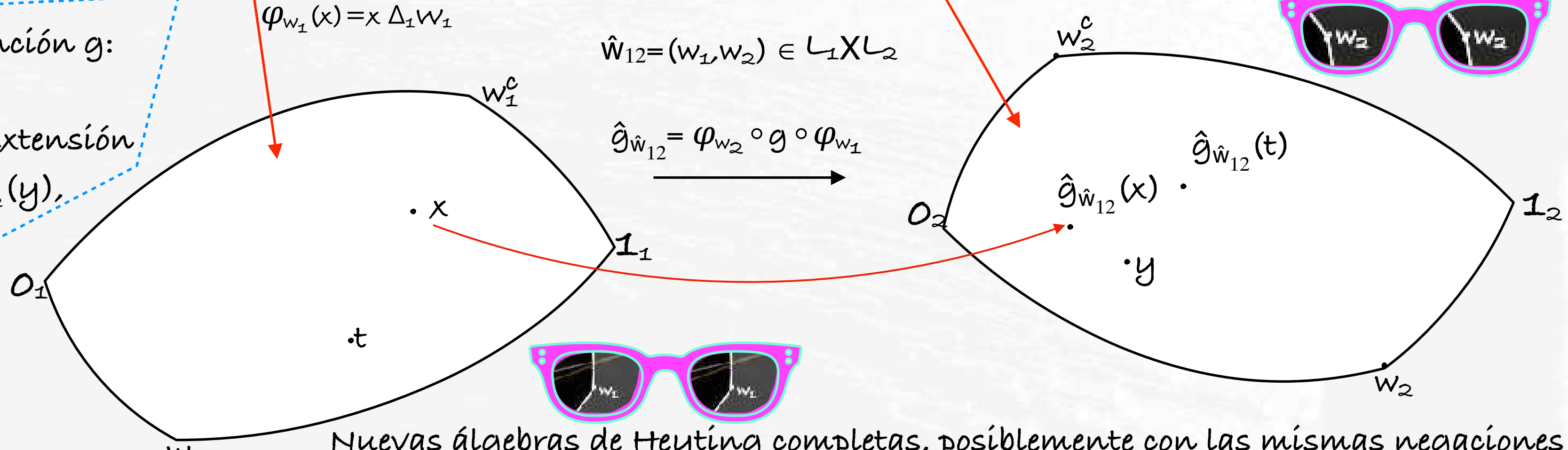
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

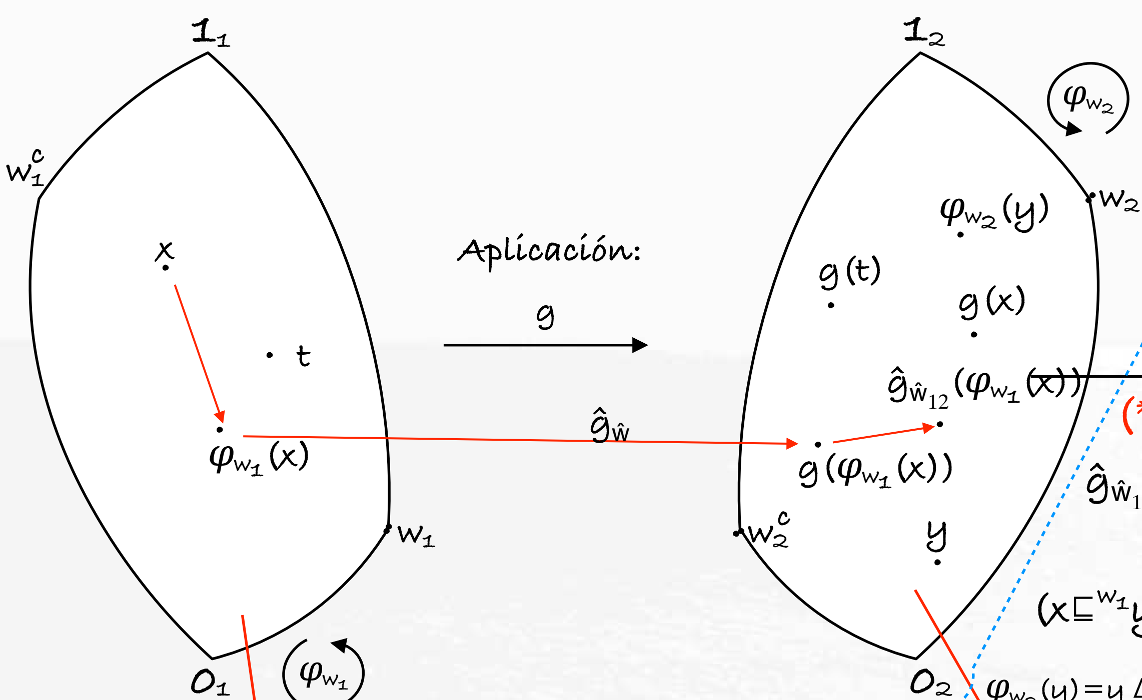
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_{1, j\in J} x_j) = \sum_{2, j\in J} g(x_j)$, $g(\prod_{1, j\in J} x_j) = \prod_{2, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2, \ldots$

Propiedades análogas de las w-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ de g:

(*)

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J} x_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\bigsqcap^{w_1}_{j\in J} x_j) = (\bigsqcap^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(A_j)) \,\forall (x_j)_{j\in J}$,

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(W_1) = W_2$, $\hat{g}^{c}_{\hat{w}_{12}}(W_1) = W_2^c, \ldots$

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

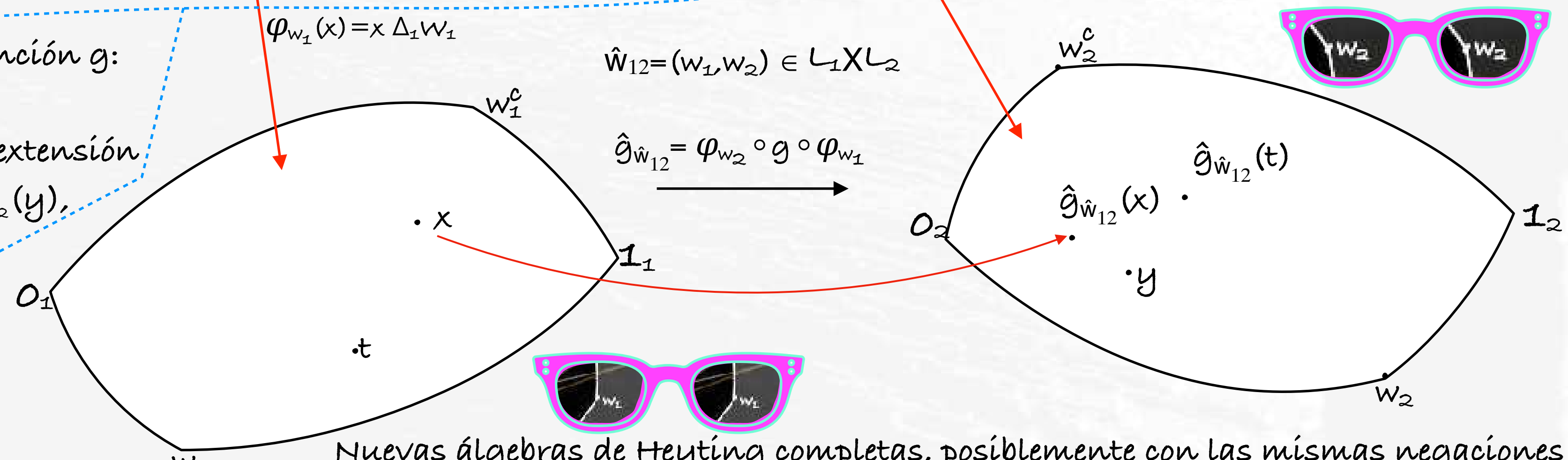
y en consecuencia $y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

$\hat{w}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

(*) Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $\widehat{(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})}_{\hat{w}_{12}} = g$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

Para $i\in\{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i

$$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

(*)

$(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J} x_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\prod^{w_1}_{j\in J} x_j) = (\prod^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(A_j))\ \forall (x_j)_{j\in J}$,

$y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2$, $\hat{g}^c_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2^c, \ldots$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

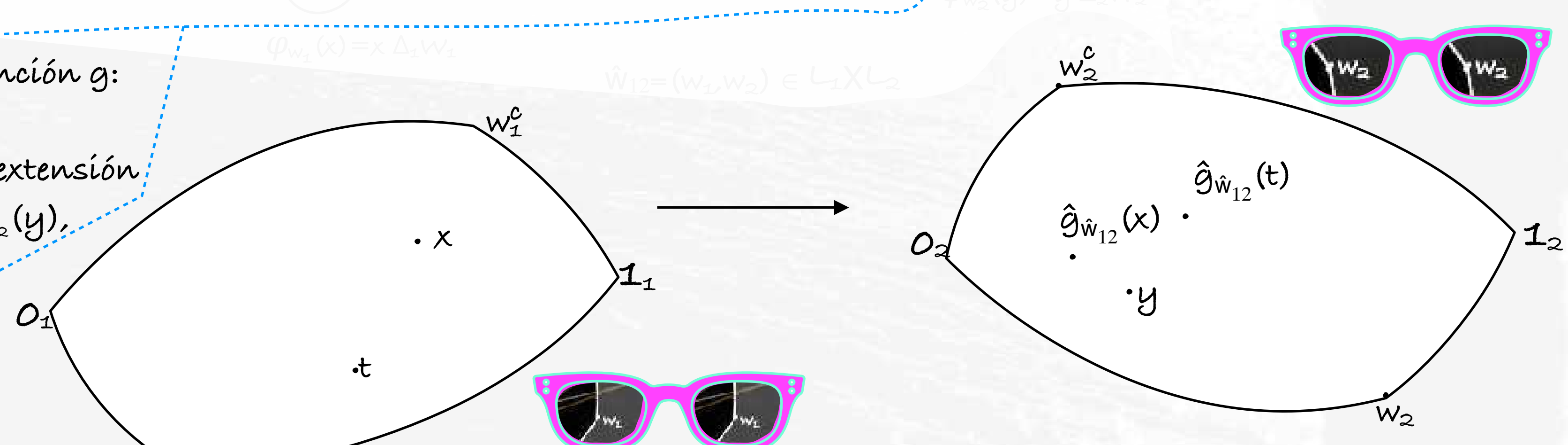
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

(*) Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $(\widehat{\hat{g}_{\hat{w}_{12}}})_{\hat{w}_{12}} = g$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i

$$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

Casos particulares:

(*) $w_1 = 0 : \hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g$

$w_2 = 0 : \hat{g}_{\hat{w}_{12}} = g \circ \varphi_{w_1}$

(*)

$(\bigsqcup^{w_1}_{j \in J} x_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j \in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(\prod^{w_1}_{j \in J} x_j) = (\prod^{w_2}_{j \in J} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(A_j)) \,\forall (x_j)_{j \in J}$,

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2$, $\hat{g}^{c}_{\hat{w}_{12}}(w_1) = w_2^c$,...

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, según se ha visto, su extensión es: $x(\hat{R}_g)_{\hat{w}_{12}} y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

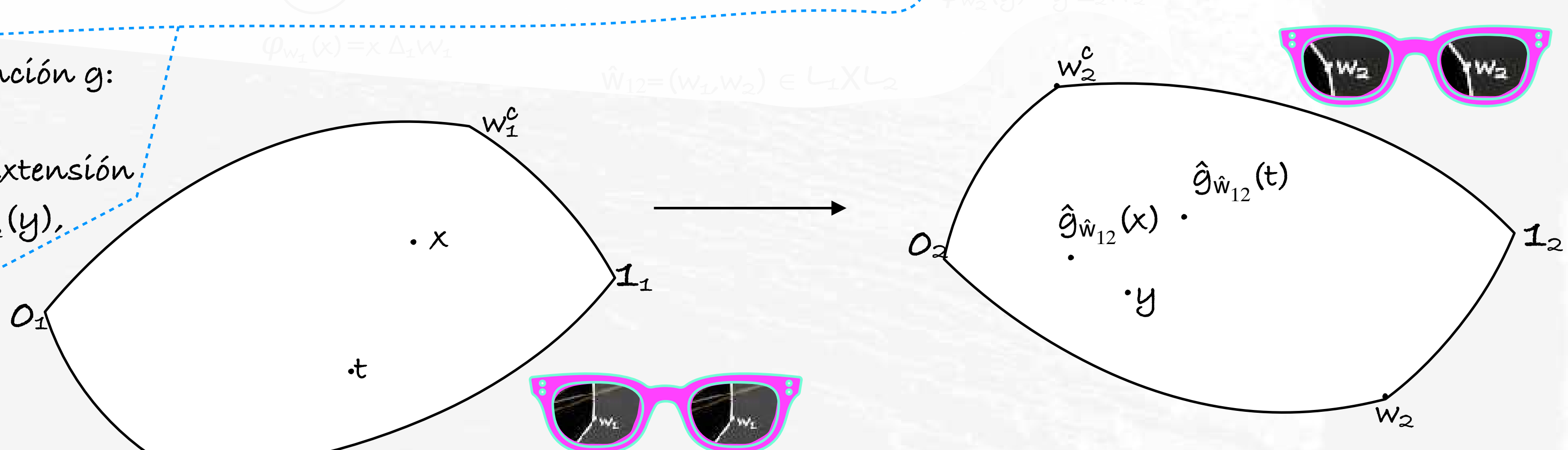
y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) =$

$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta para la extensión $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

(*) Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{12}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $\widehat{(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})}_{\hat{w}_{12}} = g$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Proposición. Sean $((L_k, \leq_k, \cdot_k, \prod_k, +_k, \sum_k, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sean $\hat{W}_{12} = (W_1, W_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$ y $((L_k, \sqsubseteq_k^{W_k}, \sqcap_k^{W_k}, \prod_k^{W_k}, \sqcup_k^{W_k}, \bigsqcup_k^{W_k}, 0_k, 1_k), '_k)_{k\in\{1,2\}}$ los dos correspondientes retículos asociados a las perspectivas (W_1, W_2). Entonces:

Para toda función $g: L_1 \to L_2$, sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}} = \varphi_{W_2} \circ g \circ \varphi_{W_1}$ su extensión asociada a $\hat{W}_{12}$. Se verifica:

(1) Si g es isótona de $(L_1, \leq_1)$ en $(L_2, \leq_2)$, $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es de $(L_1, \sqsubseteq_1^{W_1})$ en $(L_2, \sqsubseteq_2^{W_2})$:

$[(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))] \Rightarrow [(x \sqsubseteq_1^{W_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \sqsubseteq_2^{W_2} \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))]$,

(2) $[g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_{2\, j\in J} g(x_j)] \Rightarrow [\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\bigsqcup_{1\, j\in J}^{W_1} x_j) = \bigsqcup_{2\, j\in J}^{W_2} \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j)]$,

(3) $[g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j)] \Rightarrow [\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\prod_{1\, j\in J}^{W_1} x_j) = \prod_{2\, j\in J}^{W_2} \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j)]$,

(4) $[g(0_1) = 0_2] \Rightarrow [\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(W_1) = W_2]$, $[g(1_1) = 1_2] \Rightarrow [\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(W_1^c) = W_2^c]$

(5) $(\widehat{\hat{g}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}} = g$.

Proposición. Sean $((L_k,\leq_k,\cdot_k,\prod_k,+_k,\sum_k,0_k,1_k),'_k)_{k\in\{1,2\}}$ dos retículos distributivos con negación fuerte y sean $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)\times N(L_2)$ y $((L_k,\sqsubseteq_k^{w_k},\sqcap_k^{w_k},\prod_k^{w_k},\sqcup_k^{w_k},\bigsqcup_k^{w_k},0_k,1_k),'_k)_{k\in\{1,2\}}$ los dos correspondientes retículos asociados a las perspectivas (w_1,w_2). Entonces:

Para toda función $g: L_1\to L_2$, sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}$ su extensión asociada a $\hat{W}_{12}$. Se verifica:

(1) Si g es isótona de $(L_1,\leq_1)$ en $(L_2,\leq_2)$, $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es de $(L_1,\sqsubseteq^{w_1})$ en $(L_2,\sqsubseteq^{w_2})$:

$[(x\leq_1 y)\Rightarrow(g(x)\leq_2 g(y))]\Rightarrow[(x\sqsubseteq_1^{w_1}y)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\sqsubseteq_2^{w_2}\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))]$,

(2) $[g(\sum_{1\,j\in J}x_j)=\sum_{2\,j\in J}g(x_j)]\Rightarrow[\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\bigsqcup_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)=\bigsqcup_{2\,j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j)]$,

(3) $[g(\prod_{1\,j\in J}x_j)=\prod_{2\,j\in J}g(x_j)]\Rightarrow[\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\prod_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)=\prod_{2\,j\in J}^{w_2}\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j)]$,

(4) $[g(0_1)=0_2]\Rightarrow[\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(W_1)=W_2]$, $[g(1_1)=1_2]\Rightarrow[\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(W_1^c)=W_2^c]$

(5) $(\widehat{\hat{g}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}}=g$.

Demostración. (1) $[(x\sqsubseteq_1^{w_1}y)\Rightarrow[(x\Delta_1 w_1\leq_1 y\Delta_1 w_1)]\Rightarrow[(g(x\Delta_1 w_1)\leq_2 g(y\Delta_1 w_1))]\Rightarrow$

$[(g(x\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2\sqsubseteq_2^{w_1}g(y\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)]\Rightarrow[\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\sqsubseteq_2^{w_1}\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y)$.

(2) $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\bigsqcup_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)=g((\bigsqcup_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2=g((\sum_{1\,j\in J}(x_j\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2=((\sum_{2\,j\in J}g(x_j\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2=$
$(\bigsqcup_{2\,j\in J}^{w_2}(g(x_j\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)=\bigsqcup_{2\,j\in J}^{w_2}(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j))$.

(3) $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(\prod_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)=g((\prod_{1\,j\in J}^{w_1}x_j)\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2=g((\prod_{1\,j\in J}(x_j\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2=((\prod_{2\,j\in J}g(x_j\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2=$
$(\prod_{2\,j\in J}^{w_2}(g(x_j\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)=\prod_{2\,j\in J}^{w_2}(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x_j))$.

(4) Si $g(0_1)=0_2$ entonces: $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(w_1)=g(w_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2=g(0_1)\Delta_2 w_2=0_2\Delta_2 w_2=w_2$.

Si $g(1_1)=1_2$ entonces: $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(w^c{}_1)=g(w^c{}_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2=g(1_1)\Delta_2 w_2=1_2\Delta_2 w_2=W^c{}_2$.

(5) $[(\widehat{\hat{g}_{\hat{W}_{12}}})_{\hat{W}_{12}}](x)=((\hat{g}_{\hat{W}_{12}})(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2=(g(x\Delta_1 w_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)\Delta_2 w_2=g(x)$. ∎

Otras propiedades de $\hat{g}_{\hat{W}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$ en función de g entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.

Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w}_{12} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

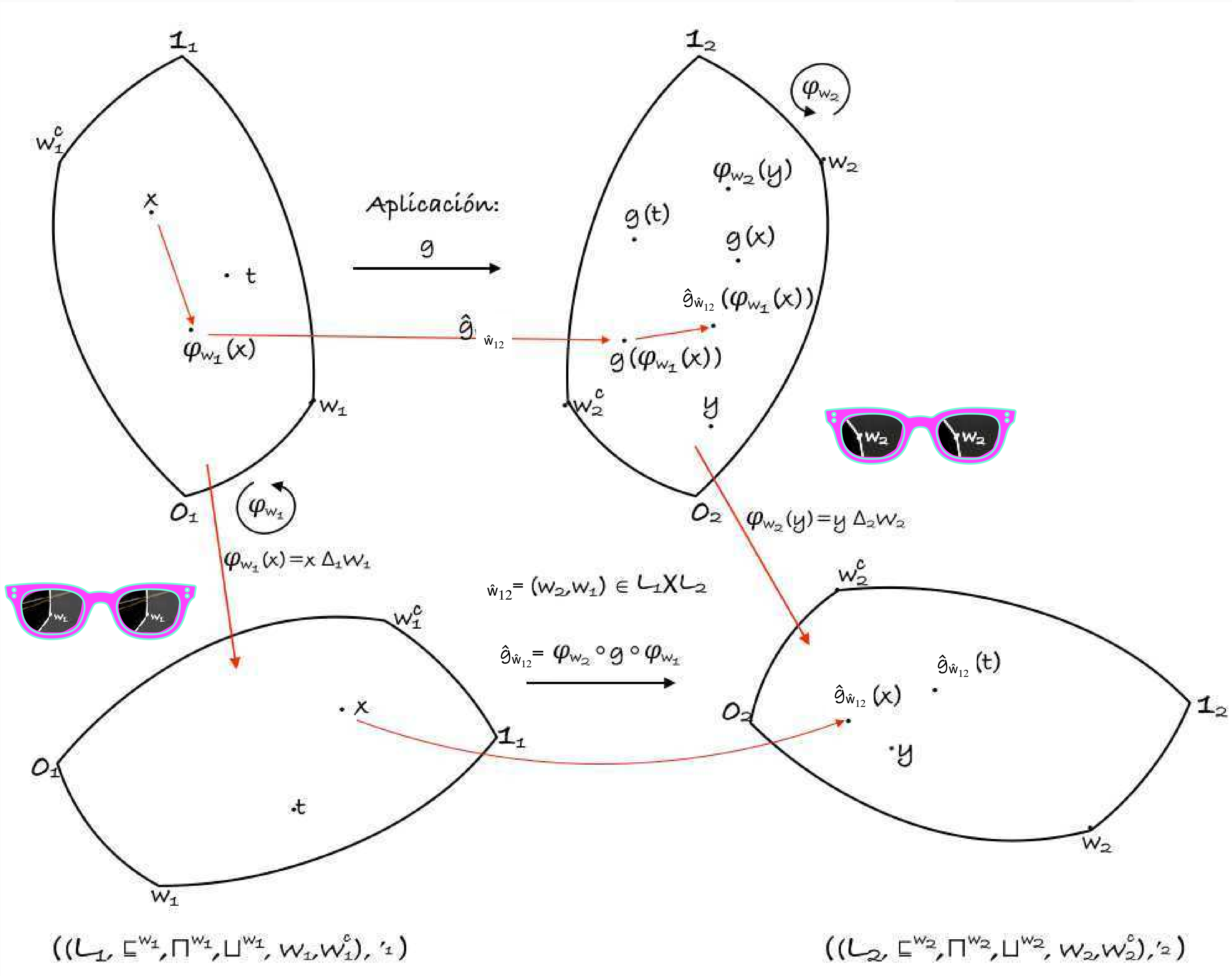
Propiedades correspondientes de sus $\hat{w}_{12}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{w}_{21}}$).



Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w}_{12} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

Propiedades correspondientes de sus $\hat{w}_{12}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{w}_{21}}$).

En particular, si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$:
y si $g = i$ (identidad en L, $i(x) = x \ \forall x \in L$)
o si $g = '$ (negación fuerte en L: $g(x) = x' \ \forall x \in L$)

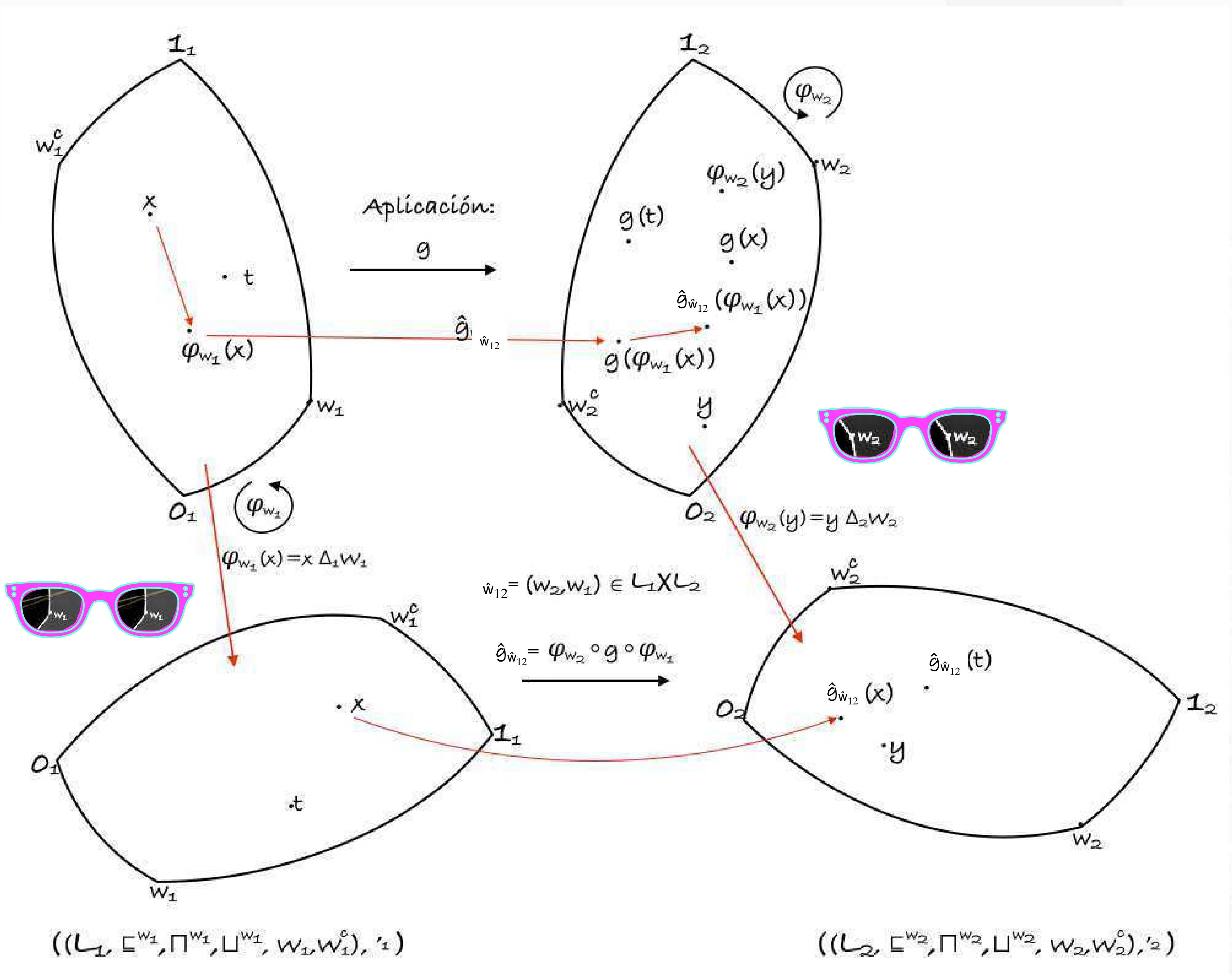
$\hat{w}_{12} = (w, w) \in LXL$

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\hat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{w} = (w, w)$ de i y ' son ellas mismas:

$\hat{i}_{\hat{w}} = i$ ($\hat{i}_{\hat{w}}(x) = x \ \forall x \in L$)

$\hat{'}_{\hat{w}} = '$ ($\hat{'}_{\hat{w}}(x) = x' \ \forall x \in L$)



Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w}_{12} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

Propiedades correspondientes de sus $\hat{w}_{12}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{w}_{21}}$).

En particular, si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$:

y si $g = i$ (identidad en L, $i(x) = x \ \forall x \in L$)

o si $g = '$ (negación fuerte en L: $g(x) = x' \ \forall x \in L$)

$\hat{w}_{12} = (w, w) \in L X L$

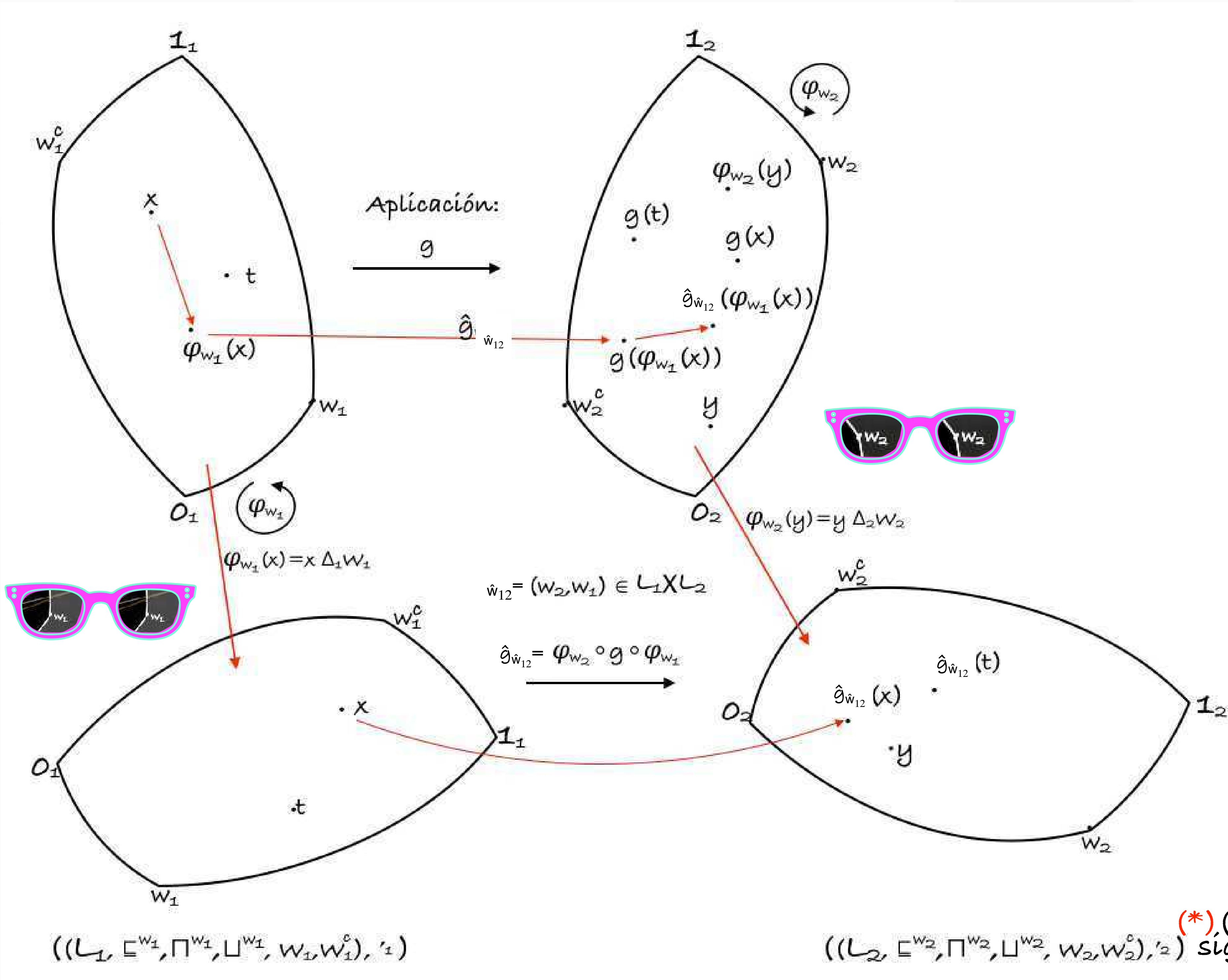
$\hat{g}_{\hat{w}_{12}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\hat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{w} = (w, w)$ de i y $'$ son ellas mismas:

$\hat{i}_{\hat{w}} = i$ ($\hat{i}_{\hat{w}}(x) = x \ \forall x \in L$)

$\hat{'}_{\hat{w}} = '$ ($\hat{'}_{\hat{w}}(x) = x' \ \forall x \in L$)

(*)



(*) (Véase transparencias siguientes)

Proposición . Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \rightarrow ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.

Sea $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$, con $N(L_k) = \{w \in L_k / w^c \text{ existe y } w^c = w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \rightarrow ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) = (g(x \Delta_1 w_1)) \Delta_2 w_2 \ \forall x \in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{w}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{w}_{21}}$.

<u>Proposición</u>. Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \rightarrow ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.
Sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2) \in N(L_1) \times N(L_2)$, con $N(L_k)=\{w \in L_k \,/\, w^c \text{ existe y } w^c = w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \rightarrow ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) = (g(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2 \ \forall x \in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{w}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{w}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{w}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{w}_{21}}$.

<u>Demostración</u>. (1) $(x \neq y) \Rightarrow (x\Delta_1 w_1 \neq y\Delta_1 w_1) \Rightarrow (g(x\Delta_1 w_1) \neq g(y\Delta_1 w_1)) \Rightarrow (((g(x\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2 \neq (g(y\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y \in L_2$ y consideremos $y^* = y\Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^* \in L_1$ tal que $y^* = g(x^*)$, luego:
$(y^* = g(x^*)) \Rightarrow (y^*\Delta_2 w_2 = g(x^*)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^*)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^*\Delta_1 w_1 \Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x^*\Delta_1 w_1))$, es decir,

existe en L_1 un elemento $x = x^*\Delta_1 w_1$ tal que $y = \hat{g}_{\hat{w}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición . Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \rightarrow ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.
Sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, con $N(L_k)=\{w\in L_k \,/\, w^c$ existe y $w^c=w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \rightarrow ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)=(g(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2 \;\; \forall x\in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $\forall y\in L_2 \;\; \exists x\in L_1 : y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{W}_{21}})^{-1}$es tal que $(\hat{g}_{\hat{W}_{12}})^{-1}=\widehat{(g^{-1})}_{\hat{W}_{21}}$.

Demostración. (1) $(x \neq y)\Rightarrow (x\Delta_1 w_1 \neq y\Delta_1 w_1)\Rightarrow (g(x\Delta_1 w_1)\neq g(y\Delta_1 w_1))\Rightarrow(((g(x\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2\neq(g(y\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2)\Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\neq\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y\in L_2$ y consideremos $y^*=y\Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^*\in L_1$ tal que $y^*=g(x^*)$, luego:
$(y^*=g(x^*))\Rightarrow (y^*\Delta_2 w_2=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*\Delta_1 w_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x^*\Delta_1 w_1))$, es decir,

existe en L_1 un elemento $x=x^*\Delta_1 w_1$ tal que $y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición. Si $L_1=L_2=L$ y $w_1=w_2=w$ y si $g=i$ (identidad en L, $i(x)=x \;\; \forall x \in L$) o si $g='$ (negación fuerte en L: $g(x)=x' \;\forall x \in L$), entonces

las extensiones $\hat{i}_{\hat{W}}$ y $\hat{'}_{\hat{W}}$ en L con $\hat{W}=(w,w)$ de i y ' son ellas mismas :

$$\hat{i}_{\hat{W}}=i \;\; (\hat{i}_{\hat{W}}(x)=x \;\; \forall x \in L),$$

$$\hat{'}_{\hat{W}}=' \;\; (\hat{'}_{\hat{W}}(x)=x' \;\forall x \in L).$$

Proposición . Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.

Sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, con $N(L_k)=\{w\in L_k \,/\, w^c \text{ existe y } w^c=w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)=(g(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2 \ \forall x\in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $\forall y\in L_2 \ \exists x\in L_1 : y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{W}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{W}_{12}})^{-1}=(\widehat{g^{-1}})_{\hat{W}_{21}}$.

Demostración. (1) $(x \neq y)\Rightarrow (x\Delta_1 w_1 \neq y\Delta_1 w_1)\Rightarrow (g(x\Delta_1 w_1)\neq g(y\Delta_1 w_1))\Rightarrow(((g(x\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2\neq(g(y\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2)\Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\neq\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y\in L_2$ y consideremos $y^*=y\Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^*\in L_1$ tal que $y^*=g(x^*)$, luego:
$(y^*=g(x^*))\Rightarrow (y^*\Delta_2 w_2=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*\Delta_1 w_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x^*\Delta_1 w_1))$, es decir,

existe en L_1 un elemento $x=x^*\Delta_1 w_1$ tal que $y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición. Si $L_1=L_2=L$ y $w_1=w_2=w$ y si $g=i$ (identidad en$L$, $i(x)=x \ \forall x \in L$) o si $g='$ (negación fuerte en L: $g(x)=x' \ \forall x \in L$), entonces

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\widehat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{W}=(w,w)$ de i y $'$ son ellas mismas :

$$\hat{i}_{\hat{w}}=i \ (\hat{i}_{\hat{w}}(x)=x \ \forall x \in L),$$
$$\widehat{'}_{\hat{w}}=' \ (\widehat{'}_{\hat{w}}(x)=x' \ \forall x \in L).$$

Demostración. $\hat{i}_{\hat{w}}(x)=((i(x\Delta w)))\Delta w)=((x\Delta w))\Delta w)=x \ \forall x \in L$. $(x)^{\widehat{'}_{\hat{w}}}$ en$=(((x\Delta w)')\Delta w)=((x'\Delta w))\Delta w)=x' \ \forall x \in L$.∎

Proposición . Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.

Sea $\hat{W}_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$, con $N(L_k)=\{w\in L_k \,/\, w^c$ existe y $w^c=w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)=(g(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2 \ \forall x\in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $(x\neq y)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\neq\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $\forall y\in L_2 \ \exists x\in L_1 : y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{W}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{W}_{12}})^{-1}=\widehat{(g^{-1})}_{\hat{W}_{21}}$.

Demostración. (1) $(x\neq y)\Rightarrow (x\Delta_1 w_1\neq y\Delta_1 w_1)\Rightarrow (g(x\Delta_1 w_1)\neq g(y\Delta_1 w_1))\Rightarrow(((g(x\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2\neq(g(y\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)\neq\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y\in L_2$ y consideremos $y^*=y\Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^*\in L_1$ tal que $y^*=g(x^*)$, luego:

$(y^*=g(x^*))\Rightarrow (y^*\Delta_2 w_2=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=g(x^*\Delta_1 w_1\Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2)\Rightarrow (y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x^*\Delta_1 w_1))$, es decir,

existe en L_1 un elemento $x=x^*\Delta_1 w_1$ tal que $y=\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición. Si $L_1=L_2=L$ y $w_1=w_2=w$ y si $g=i$ (identidad en L, $i(x)=x \ \forall x\in L$) o si $g='$ (negación fuerte en L: $g(x)=x' \ \forall x\in L$), entonces las extensiones $\hat{i}_{\hat{W}}$ y $\hat{'}_{\hat{W}}$ en L con $\hat{W}=(w,w)$ de i y $'$ son ellas mismas :

$$\hat{i}_{\hat{W}}=i \ (\hat{i}_{\hat{W}}(x)=x \ \forall x\in L),$$

$$\hat{'}_{\hat{W}}=' \ (\hat{'}_{\hat{W}}(x)=x' \ \forall x\in L).$$

Demostración. $\hat{i}_{\hat{W}}(x)=((i(x\Delta w)))\Delta w)=((x\Delta w))\Delta w)=x \ \forall x\in L$. $(x)\hat{'}_{\hat{W}}$ en$=(((x\Delta w)')\Delta w)=((x'\Delta w))\Delta w)=x' \ \forall x\in L$.∎

Definición. Sean $(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0, 1_1)$ y $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0, 1_2)$ dos retículos distributivos acotados y sea $\theta\subseteq L_1XL_2$ una relación binaria de L_1 en L_2.

Diremos que θ es congruente de $(L_1, \leq_1)$ en $(L_2, \leq_2)$ si:

$$(x\theta y)\&(z\theta t)\Rightarrow [(x\cdot_1 z)\theta(y\cdot_2 t)]\&[(x+_1 z)\theta(y+_2 t)]. \ (*)$$

(*) Nota. Si $(L_1, \leq_1)=(L_2, \leq_2)=(L, \leq)$ y θ es de equivalencia, entonces esta expresión es equivalente a decir que θ es congruencia en el retículo $(L,\leq)$.

Proposición . Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.

Sea $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$, con $N(L_k) = \{w \in L_k \,/\, w^c$ existe y $w^c = w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) = (g(x \Delta_1 w_1)) \Delta_2 w_2 \;\; \forall x \in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $\forall y \in L_2 \;\; \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{W}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{W}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{W}_{21}}$.

Demostración. (1) $(x \neq y) \Rightarrow (x \Delta_1 w_1 \neq y \Delta_1 w_1) \Rightarrow (g(x \Delta_1 w_1) \neq g(y \Delta_1 w_1)) \Rightarrow (((g(x \Delta_1 w_1))) \Delta_2 w_2 \neq (g(y \Delta_1 w_1))) \Delta_2 w_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y \in L_2$ y consideremos $y^* = y \Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^* \in L_1$ tal que $y^* = g(x^*)$, luego:
$(y^* = g(x^*)) \Rightarrow (y^* \Delta_2 w_2 = g(x^*) \Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^*) \Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^* \Delta_1 w_1 \Delta_1 w_1) \Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x^* \Delta_1 w_1))$, es decir,

existe en L_1 un elemento $x = x^* \Delta_1 w_1$ tal que $y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición. Si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$ y si $g = i$ (identidad en L, $i(x) = x \;\; \forall x \in L$) o si $g = '$ (negación fuerte en L: $g(x) = x' \; \forall x \in L$), entonces

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\hat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{W} = (w,w)$ de i y $'$ son ellas mismas :

$$\hat{i}_{\hat{w}} = i \;\; (\hat{i}_{\hat{w}}(x) = x \;\; \forall x \in L),$$
$$\hat{'}_{\hat{w}} = ' \;\; (\hat{'}_{\hat{w}}(x) = x' \;\; \forall x \in L).$$

Demostración. $\hat{i}_{\hat{w}}(x) = ((i(x \Delta w))) \Delta w) = ((x \Delta w)) \Delta w) = x \;\; \forall x \in L$. $\;(x)\hat{'}_{\hat{w}}$ en$= (((x \Delta w)')\Delta w) = ((x' \Delta w)) \Delta w) = x' \;\; \forall x \in L$.∎

Definición. Sean $(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0, 1_1)$ y $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0, 1_2)$ dos retículos distributivos acotados y sea $\boldsymbol{\theta} \subseteq L_1 X L_2$ una relación binaria de L_1 en L_2.

Diremos que $\boldsymbol{\theta}$ es congruente de $(L_1, \leq_1)$ en $(L_2, \leq_2)$ si:

$$(x \boldsymbol{\theta} y) \& (z \boldsymbol{\theta}\, t) \Rightarrow [(x \cdot_1 z) \boldsymbol{\theta} (y \cdot_2 t)] \& [(x +_1 z) \boldsymbol{\theta} (y +_2 t)]. \;\; (*)$$

Proposición . Si $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es la correspondiente extensión de asociada a los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c))$ y $(L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c)$ entonces :

$$[\boldsymbol{\theta} \text{ es congruente de } (L_1, \leq_1) \text{ en } (L_2, \leq_2)] \Rightarrow [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}} \text{ es congruente de } (L_1, \sqsubseteq^{w_1}) \text{ en } (L_2, \sqsubseteq^{w_2})]$$

Demostración. Supongamos que $(x\, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}}\, y) \& (z\, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}}\, t)$, equivalente a: $[(x \Delta w_1) \boldsymbol{\theta} (y \Delta w_2)] \& [(z \Delta w_1) \boldsymbol{\theta} (t \Delta w_2)]$, luego
$([(x \Delta w_1) \cdot_1 (z \Delta w_1)] \boldsymbol{\theta} [(y \Delta w_2) \cdot_2 (t \Delta w_2)]) \& ([(x \Delta w_1) +_1 (z \Delta w_1)] \boldsymbol{\theta} [(y \Delta w_2) +_2 (t \Delta w_2)])$ equivalente a su vez a
$([(x \sqcap^{w_1} z) \Delta w_1] \boldsymbol{\theta} [(y \sqcap^{w_2} t) \Delta w_2]) \& ([(x \sqcup^{w_1} z) \Delta w_1] \boldsymbol{\theta} [(y \sqcup^{w_2} t) \Delta w_2])$ que prueba finalmente que:
$((x \sqcap^{w_1} z)\; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}} (y \sqcap^{w_2} t)) \& (x \sqcup^{w_1} z)\; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{W}_{12}} (y \sqcup^{w_2} t)$ que prueba el enunciado.∎

(*) Nota. Si $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ y $\boldsymbol{\theta}$ es de equivalencia, entonces esta expresión es equivalente a decir que $\boldsymbol{\theta}$ es congruencia en el retículo $(L, \leq)$.

Proposición. Sea una función g entre dos retículos distributivos acotados con negación fuerte $g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$.
Sea $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$, con $N(L_k) = \{w \in L_k \,/\, w^c \text{ existe y } w^c = w'^k\}$ y sea $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ la correspondiente extensión de g tal que $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) = (g(x\Delta_1 w_1))\Delta_2 w_2 \ \forall x \in L_1$, entonces:

(1) Si g es inyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Si g es suprayectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_{\hat{W}_{12}}$ también lo es, y su inversa $(\hat{g}_{\hat{W}_{21}})^{-1}$ es tal que $(\hat{g}_{\hat{W}_{12}})^{-1} = \widehat{(g^{-1})}_{\hat{W}_{21}}$.

Demostración. (1) $(x \neq y) \Rightarrow (x\Delta_1 w_1 \neq y\Delta_1 w_1) \Rightarrow (g(x\Delta_1 w_1) \neq g(y\Delta_1 w_1)) \Rightarrow (((g(x\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2 \neq (g(y\Delta_1 w_1)))\Delta_2 w_2) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x) \neq \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(y))$.

(2) Sea $y \in L_2$ y consideremos $y^* = y\Delta_2 w_2$. Entonces existe $x^* \in L_1$ tal que $y^* = g(x^*)$, luego:
$(y^* = g(x^*)) \Rightarrow (y^*\Delta_2 w_2 = g(x^*)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^*)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = g(x^*\Delta_1 w_1 \Delta_1 w_1)\Delta_2 w_2) \Rightarrow (y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x^*\Delta_1 w_1))$, es decir,
existe en L_1 un elemento $x = x^*\Delta_1 w_1$ tal que $y = \hat{g}_{\hat{W}_{12}}(x)$.

(3) Es consecuencia de los dos apartados anteriores.∎

Proposición. Si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$ y si $g = i$ (identidad en L, $i(x) = x \ \forall x \in L$) o si $g = '$ (negación fuerte en L: $g(x) = x' \ \forall x \in L$), entonces las extensiones $\hat{i}_{\hat{W}}$ y $\hat{'}_{\hat{W}}$ en L con $\hat{W} = (w, w)$ de i y $'$ son ellas mismas:

$$\hat{i}_{\hat{W}} = i \ \ (\hat{i}_{\hat{W}}(x) = x \ \ \forall x \in L),$$
$$\hat{'}_{\hat{W}} = ' \ \ (\hat{'}_{\hat{W}}(x) = x' \ \forall x \in L).$$

Demostración. $\hat{i}_{\hat{W}}(x) = ((i(x\Delta w)))\Delta w) = ((x\Delta w))\Delta w) = x \ \forall x \in L$. $(x)\hat{'}_{\hat{W}}$ en $= (((x\Delta w)')\Delta w) = ((x'\Delta w))\Delta w) = x' \ \forall x \in L$.∎

Definición. Sean $(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0, 1_1)$ y $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0, 1_2)$ dos retículos distributivos acotados y sea $\theta \subseteq L_1 X L_2$ una relación binaria de L_1 en L_2.
Diremos que θ es congruente de $(L_1, \leq_1)$ en $(L_2, \leq_2)$ si:

$$(x\theta y) \& (z\theta t) \Rightarrow [(x \cdot_1 z)\theta(y \cdot_2 t)] \& [(x +_1 z)\theta(y +_2 t)]. \ (*)$$

Proposición. Si $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $\hat{\theta}_{\hat{W}_{12}} \subseteq L_1 X L_2$ es la correspondiente extensión de asociada a los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c))$ y $(L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c)$ entonces:

$$[\theta \text{ es congruente de } (L_1, \leq_1) \text{ en } (L_2, \leq_2)] \Rightarrow [\hat{\theta}_{\hat{W}_{12}} \text{ es congruente de } (L_1, \sqsubseteq^{w_1}) \text{ en } (L_2, \sqsubseteq^{w_2})]$$

Demostración. Supongamos que $(x\, \hat{\theta}_{\hat{W}_{12}}\, y) \& (z\, \hat{\theta}_{\hat{W}_{12}}\, t)$, equivalente a: $[(x\Delta w_1)\theta(y\Delta w_2)] \& [(z\Delta w_1)\theta(t\Delta w_2)]$, luego
$([(x\Delta w_1) \cdot_1 (z\Delta w_1)]\theta[(y\Delta w_2) \cdot_2 (t\Delta w_2)]) \& ([(x\Delta w_1) +_1 (z\Delta w_1)]\theta[(y\Delta w_2) +_2 (t\Delta w_2)])$ equivalente a su vez a
$([(x \sqcap^{w_1} z)\Delta w_1)]\theta[(y \sqcap^{w_2} t)\Delta w_2)]) \& ([(x \sqcup^{w_1} z)\Delta w_1)]\theta[(y \sqcup^{w_2} t)\Delta w_2)])$ que prueba finalmente que:
$((x \sqcap^{w_1} z)\ \hat{\theta}_{\hat{W}_{12}}(y \sqcap^{w_2} t)) \& (x \sqcup^{w_1} z)\ \hat{\theta}_{\hat{W}_{12}}(y \sqcup^{w_2} t)$ que prueba el enunciado.∎

Corolario. Si $\theta \subseteq LXL$ es una congruencia en el retículo distributivo y acotado $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y $\hat{W} = (w, w) \in N(L) X N(L)$ entonces, la correspondiente extensión asociada $\hat{\theta}_{\hat{W}} \subseteq LXL$ es congruencia en el retículo $(L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c)$.∎

(*) **Nota**. Si $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ y θ es de equivalencia, entonces esta expresión es equivalente a decir que θ es congruencia en el retículo $(L, \leq)$.

Extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\widehat{(')}_{\hat{w}}$ de la función identidad $i: L \to L$ y de una negación fuerte $('): L \to L$ respectivamente.

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $': L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

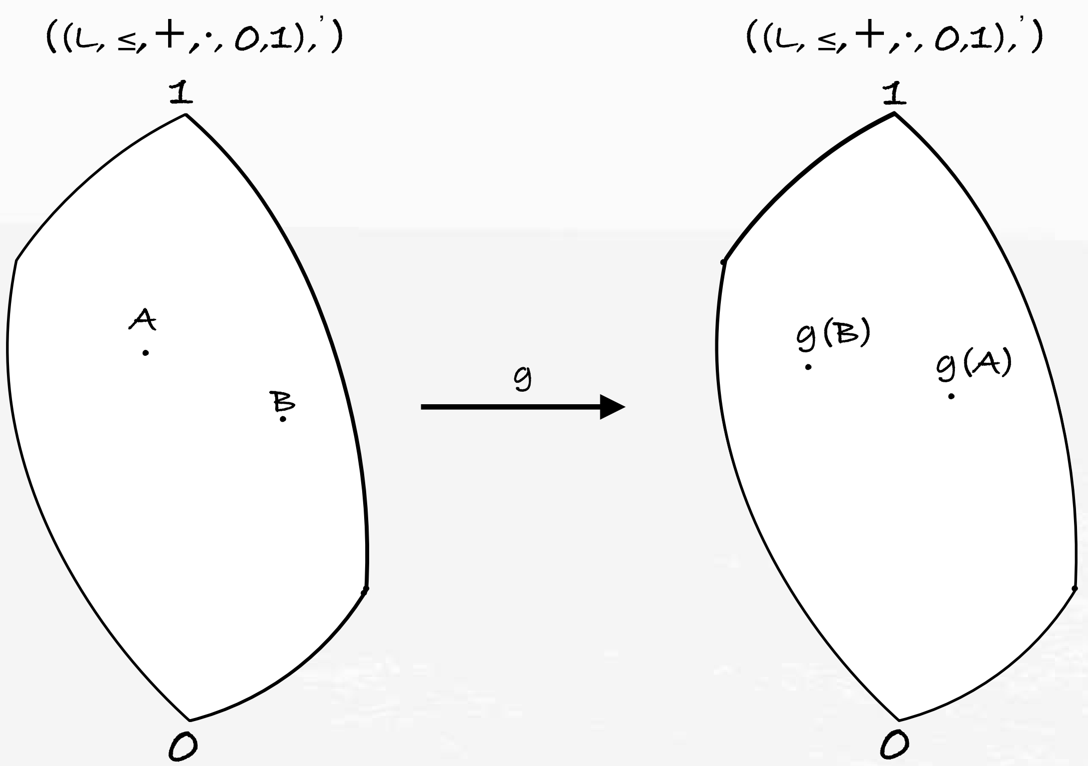
UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $'$: $L \rightarrow L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g: L \rightarrow L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \rightarrow L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ responde al siguiente esquema:

Retículo distributivo con negación fuerte



UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \le_1) = (L_2, \le_2) = (L, \le)$ con una negación fuerte $'$: $L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

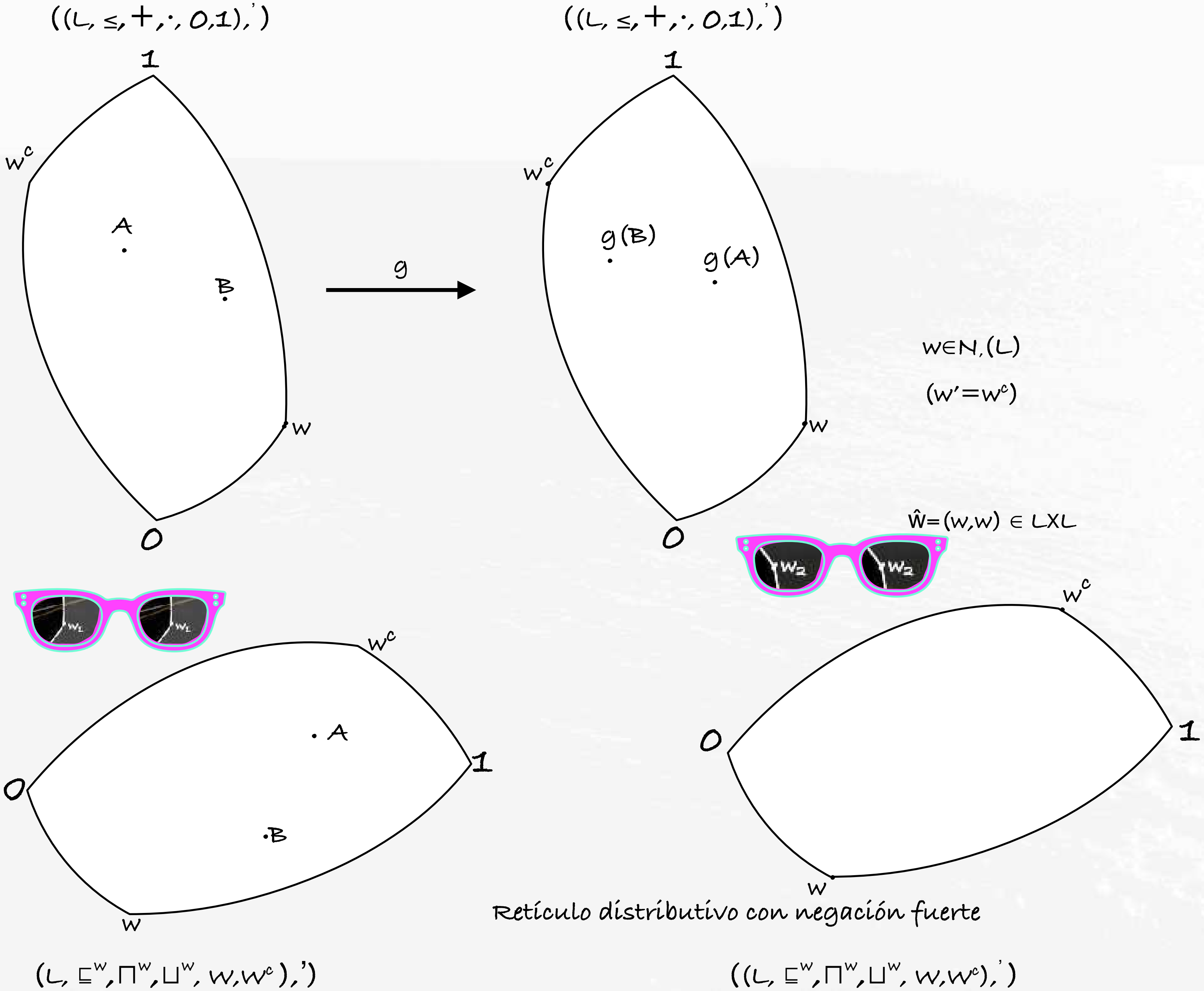
Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w, w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ responde al siguiente esquema:

$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L, \ \forall W \in N(L)$

Retículo distributivo con negación fuerte



Retículo distributivo con negación fuerte

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $'$: $L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

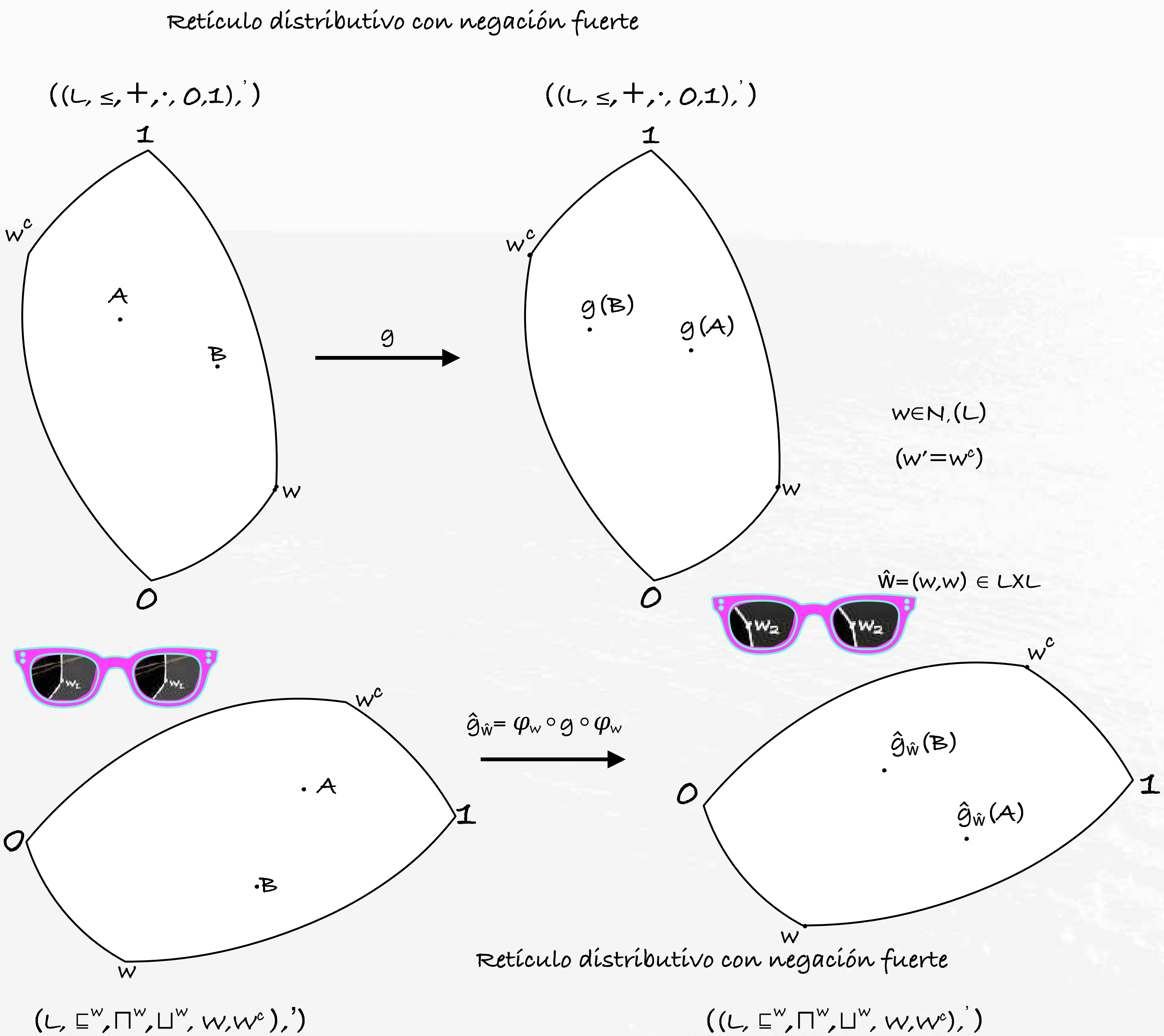
$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L, \forall w \in N(L)$



UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g:L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}:L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ responde al siguiente esquema:

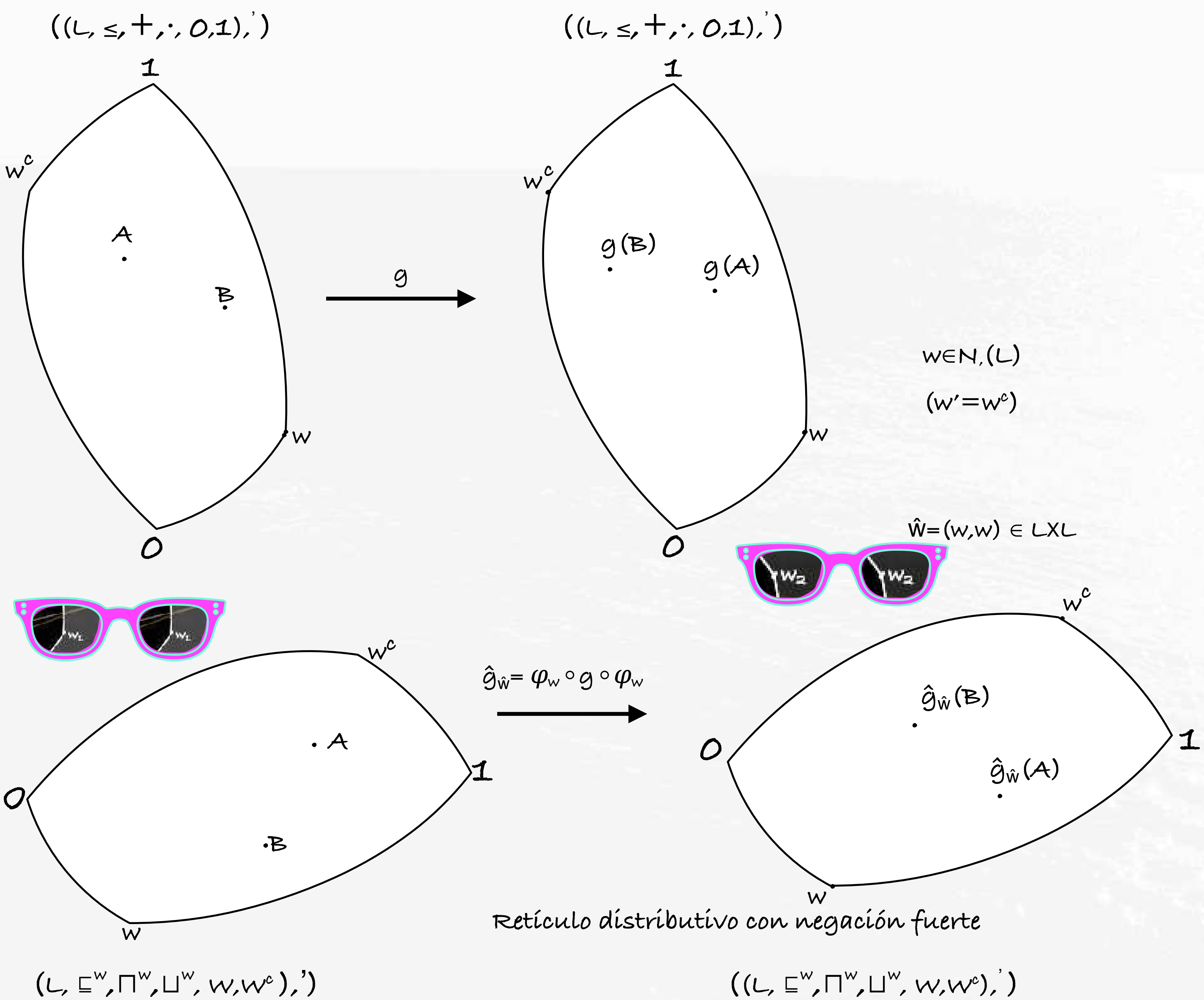
$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L,\ \forall w \in N(L)$$

Si $g = i$, siendo $i:L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_w = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall w \in N(L).$$

Retículo distributivo con negación fuerte



Retículo distributivo con negación fuerte

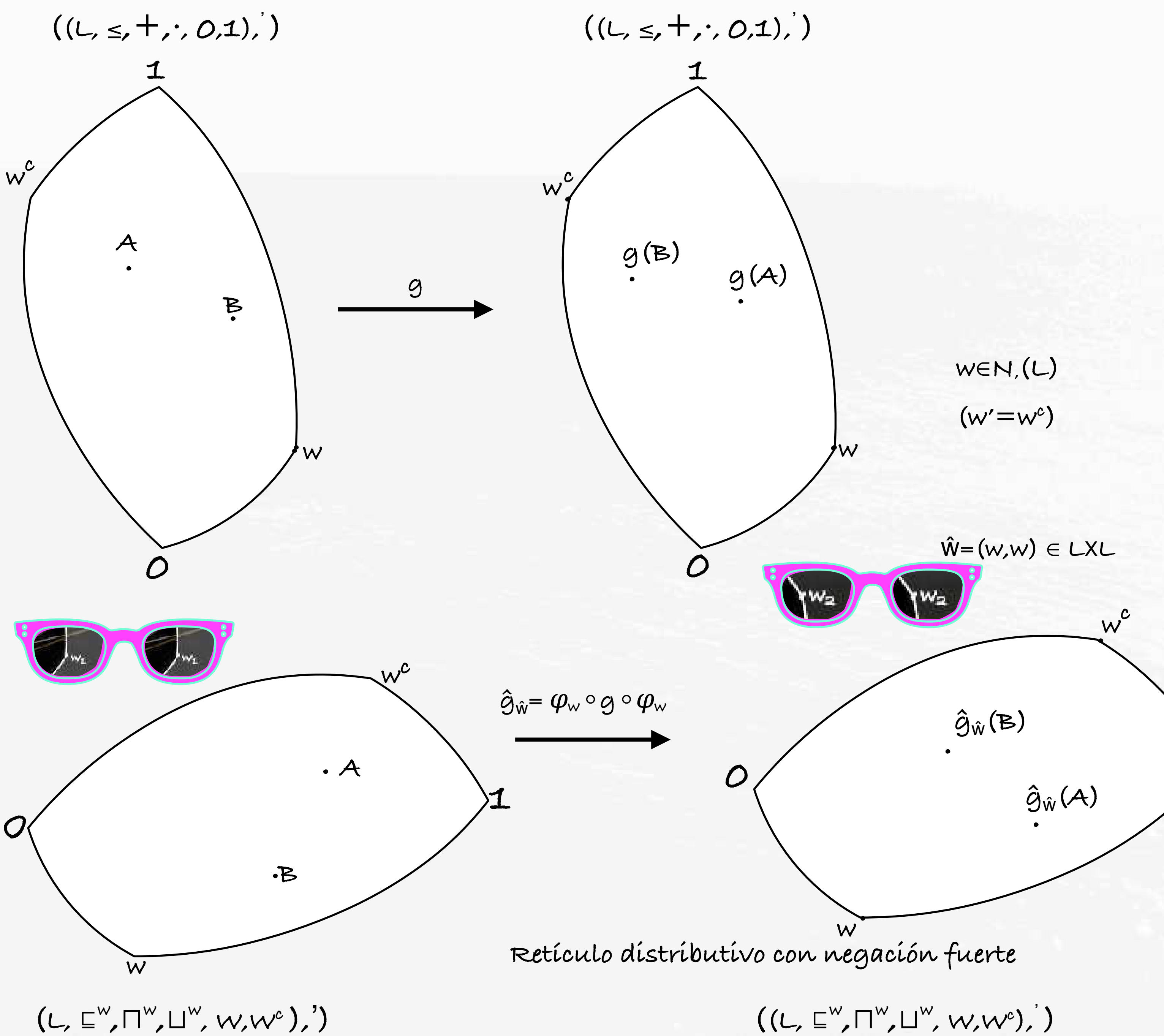
UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g:L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L X L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ responde al siguiente esquema:

Retículo distributivo con negación fuerte



$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L, \forall w \in N(L)$

Si $g = i$, siendo $i: L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$\hat{i}_w = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall w \in N(L)$.

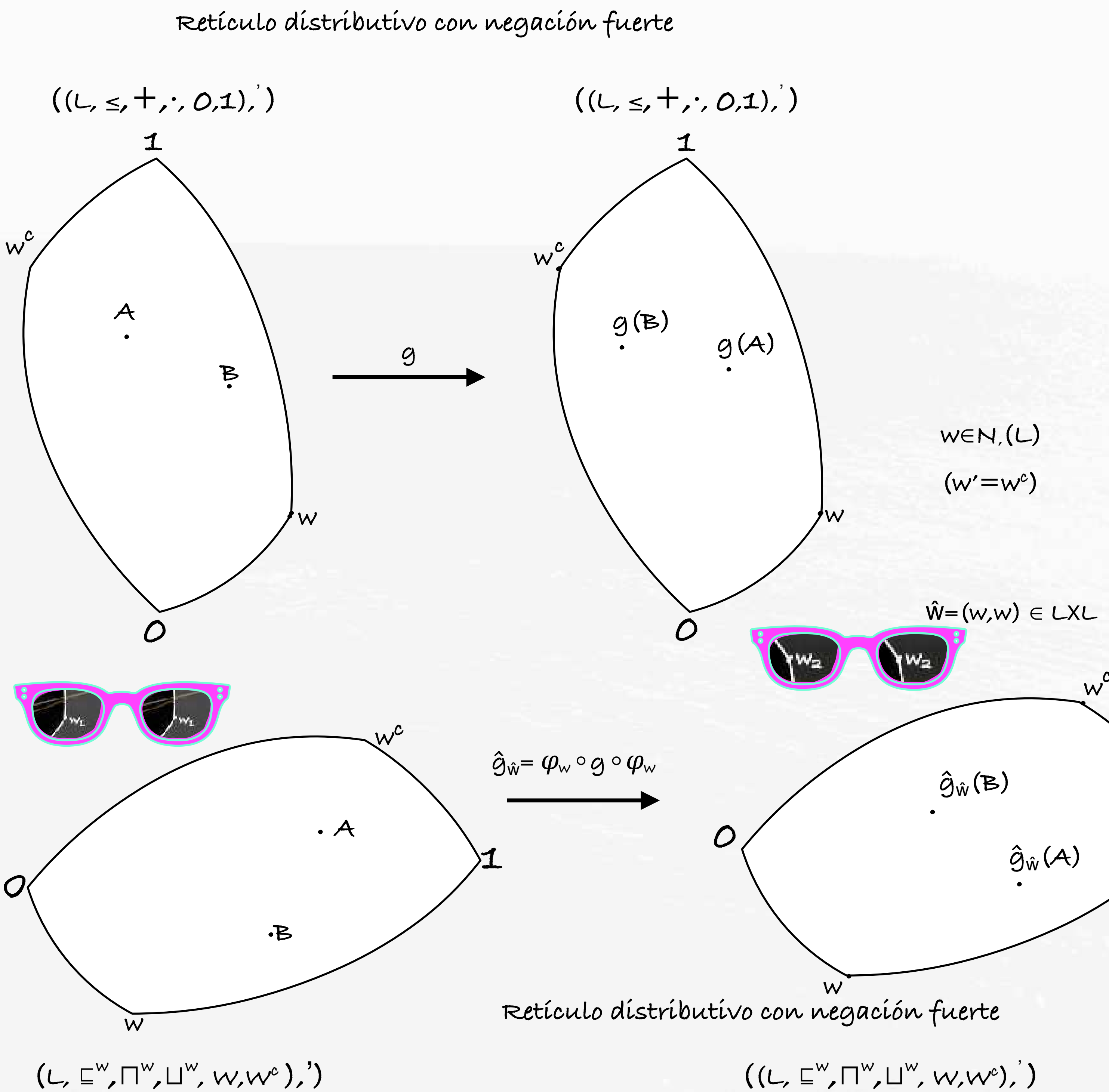
Veamos el caso en que g es una negación fuerte en $(L, \leq)$.

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g:L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^W)$ responde al siguiente esquema:



$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L,\ \forall W \in N(L)$$

Si $g = i$, siendo $i:L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_W = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall W \in N(L).$$

Veamos el caso en que g es una negación fuerte en $(L, \leq)$.

Proposición. Si L es distributivo y si $W \in N(L)$ entonces se verifica:

$$(A \triangle W)' = (A' \triangle W) \quad \forall A \in L$$

Demostración. $(A \triangle W)' = (A \cdot W^c + A' \cdot W)' =$
$(A' + W) \cdot (A + W^c) = A' \cdot A + A' \cdot W^c + A \cdot W + W \cdot W^c$
$= A' \cdot A \cdot 1 + A' \cdot W^c + A \cdot W + 0 =$
$A' \cdot A \cdot (W + W^c) + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$A' \cdot A \cdot W + A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$(A' \cdot A \cdot W + A \cdot W) + (A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c) =$
$(A \cdot W + A' \cdot W^c) = (A' \triangle W)$. ∎

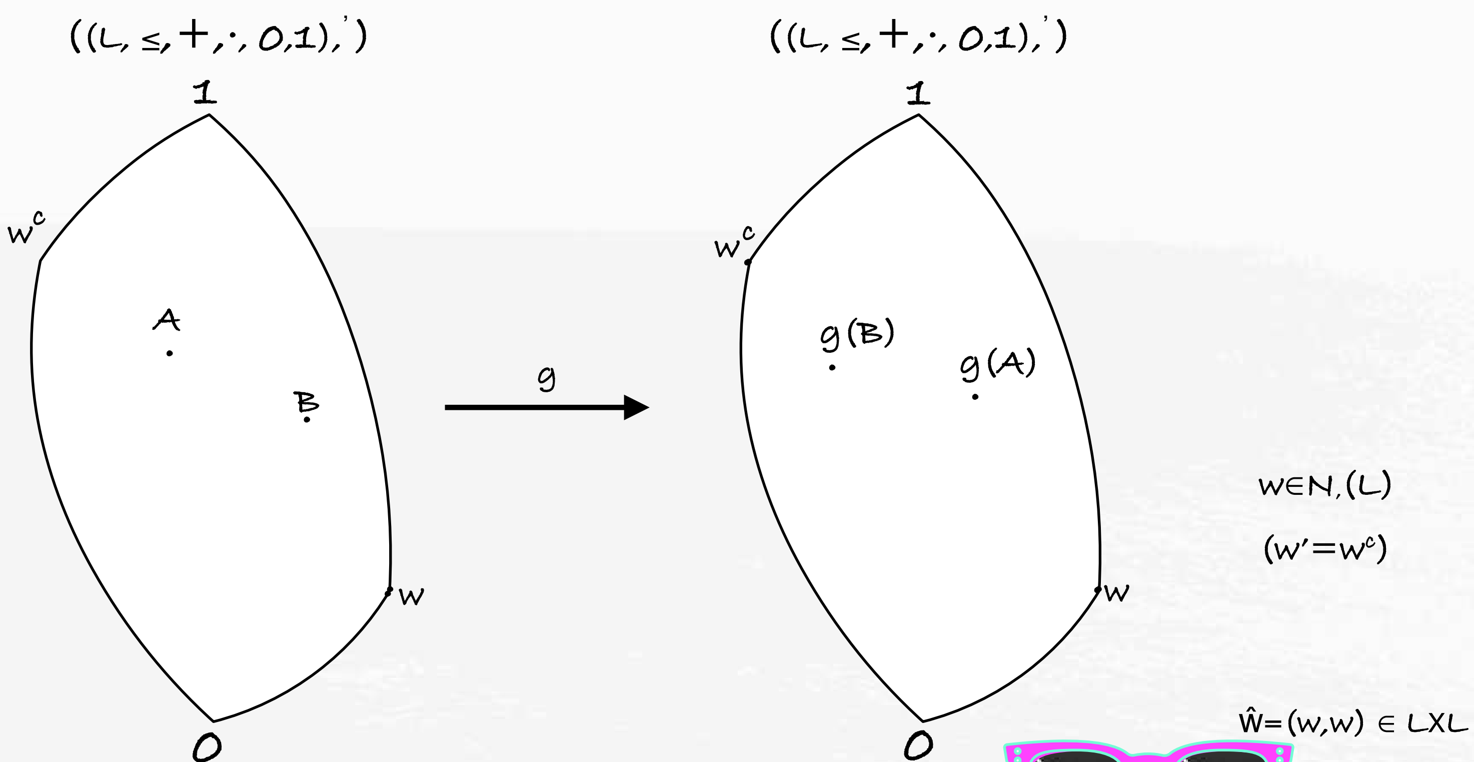
UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N(L) \subseteq L$ tal que

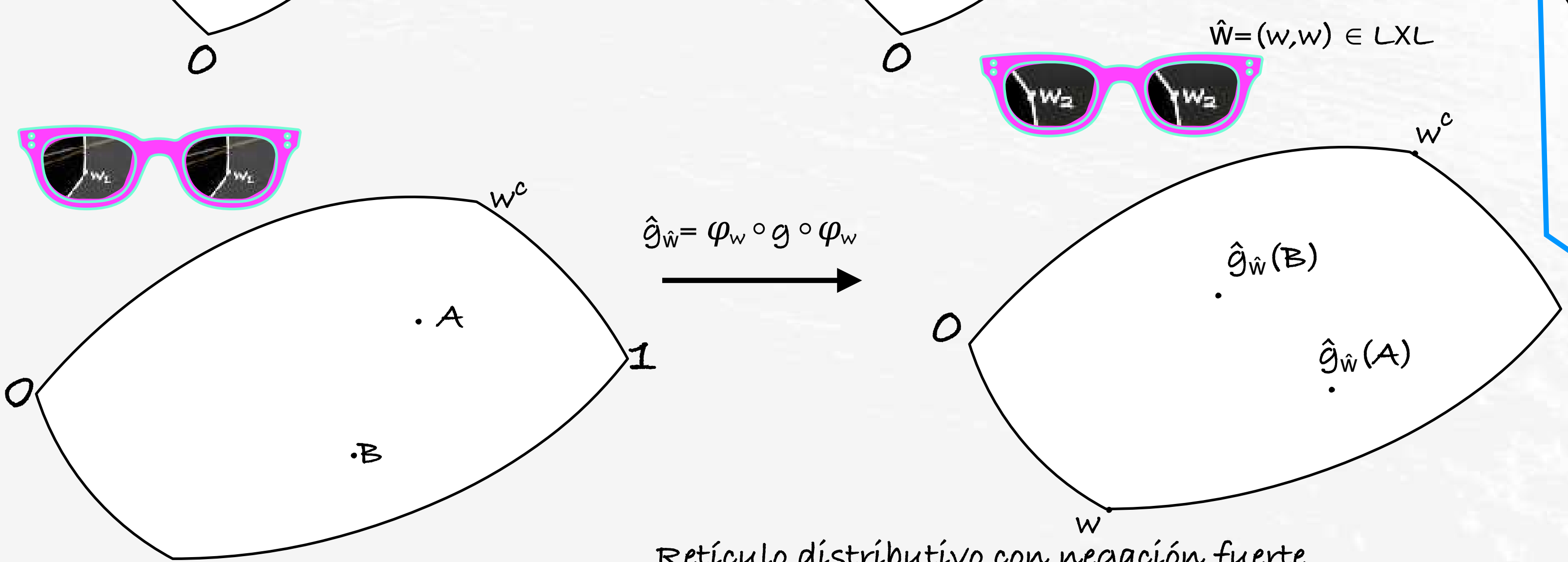
$$N(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N(L)$.

Para $\hat{w} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{w}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

Retículo distributivo con negación fuerte





$(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$ $((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L,\ \forall W \in N(L)$$

Si $g = i$, siendo $i: L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_w = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall W \in N(L).$$

Veamos el caso en que g es una negación fuerte en $(L, \leq)$.

<u>Proposición</u>. Si L es distributivo y si $W \in N_{,}(L)$ entonces se verifica:

$$(A \triangle W)' = (A' \triangle W) \quad \forall A \in L$$

<u>Demostración</u>. $(A \triangle W)' = (A \cdot W^c + A' \cdot W)' =$
$(A' + W) \cdot (A + W^c) = A' \cdot A + A' \cdot W^c + A \cdot W + W \cdot W^c$
$= A' \cdot A \cdot 1 + A' \cdot W^c + A \cdot W + 0 =$
$A' \cdot A \cdot (W + W^c) + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$A' \cdot A \cdot W + A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$(A' \cdot A \cdot W + A \cdot W) + (A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c) =$
$(A \cdot W + A' \cdot W^c) = (A' \triangle W)$. ∎

<u>Corolario</u>. Si g es una negación fuerte $':L \to L$, coincide con su extensión:

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \hat{(')}_{\hat{w}} = (\varphi_w \circ (') \circ \varphi_w) = (') \quad \forall W \in N(L)$$

<u>Demostración</u>. $\hat{g}_{\hat{w}}(A) = (A)^{\hat{(')}_{\hat{w}}} =$

$$(A \triangle W)' \triangle W = (A' \triangle W) \triangle W = A'. \blacksquare$$

Ejemplo de función $\hat{g}_w$

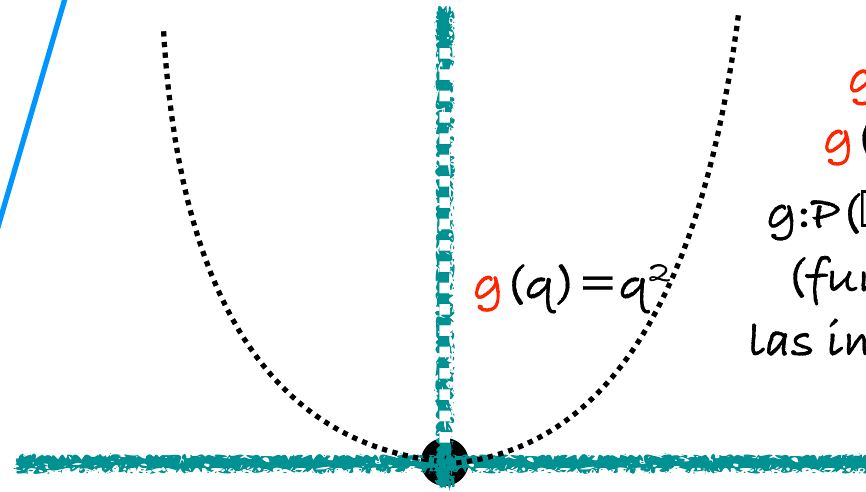
$\mathbb{Q}$ nºs racionales $\mathbb{W}=\mathbb{Q}^c$ nºs irracionales

Textura: nº real "x"

Textura: nº irracional "i"

Textura: nº racional "q"

Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.

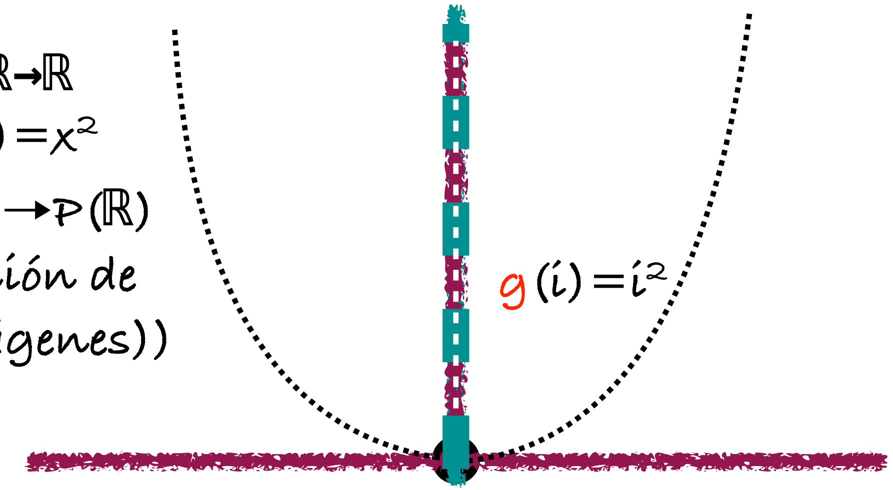


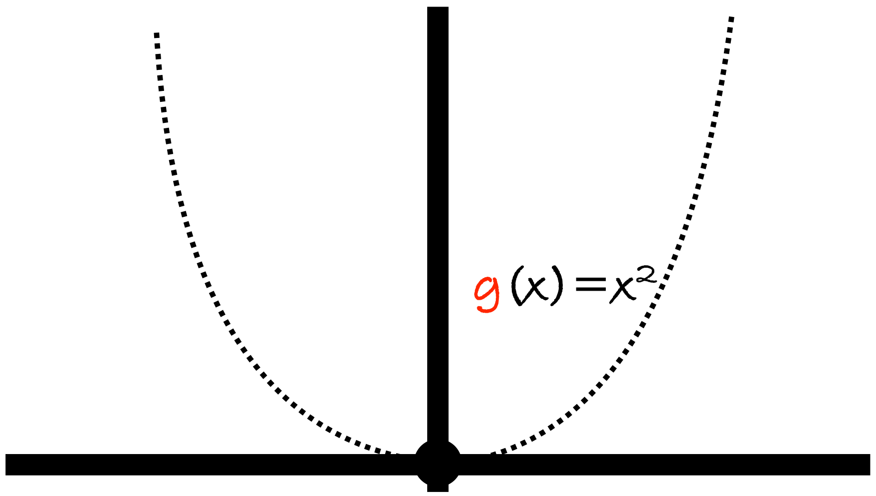
g:ℝ→ℝ

g(x)=x²

g:P(ℝ)→P(ℝ)

(función de las imágenes))





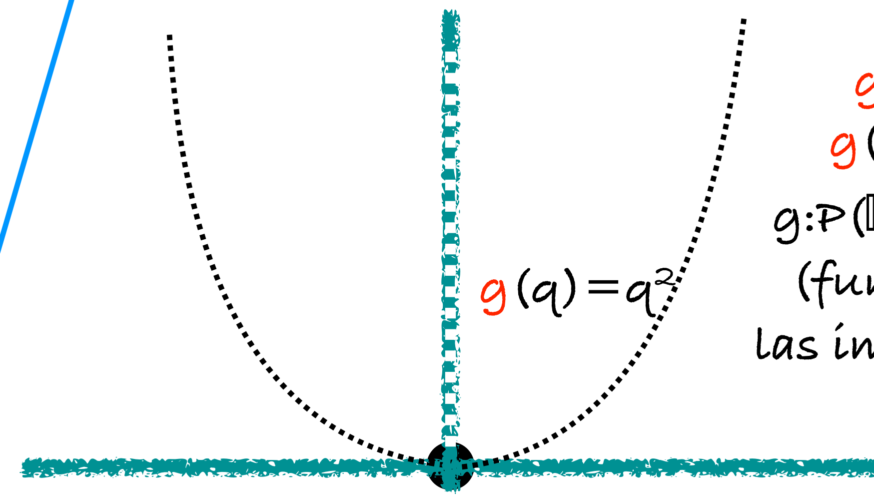
$\mathbb{Q}$ nºs racionales $\mathbb{W}=\mathbb{Q}^c$ nºs irracionales

Textura: nº real "x"

Textura: nº irracional "i"

Textura: nº racional "q"

Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.

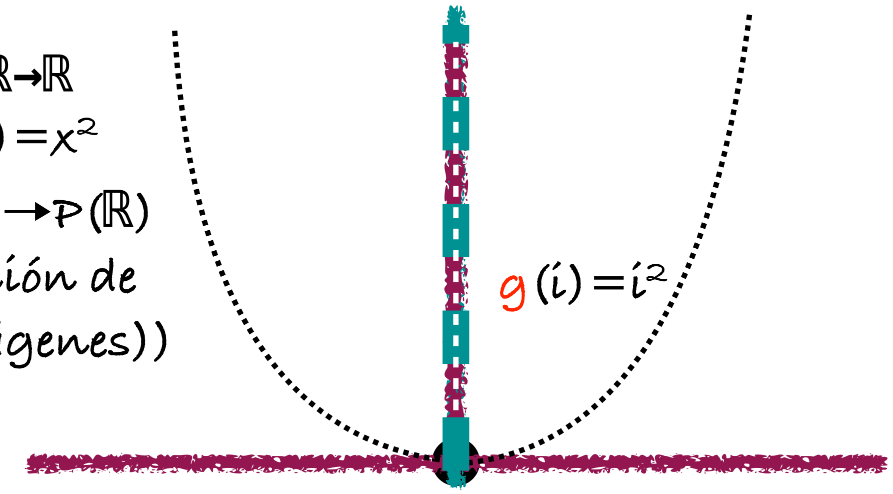


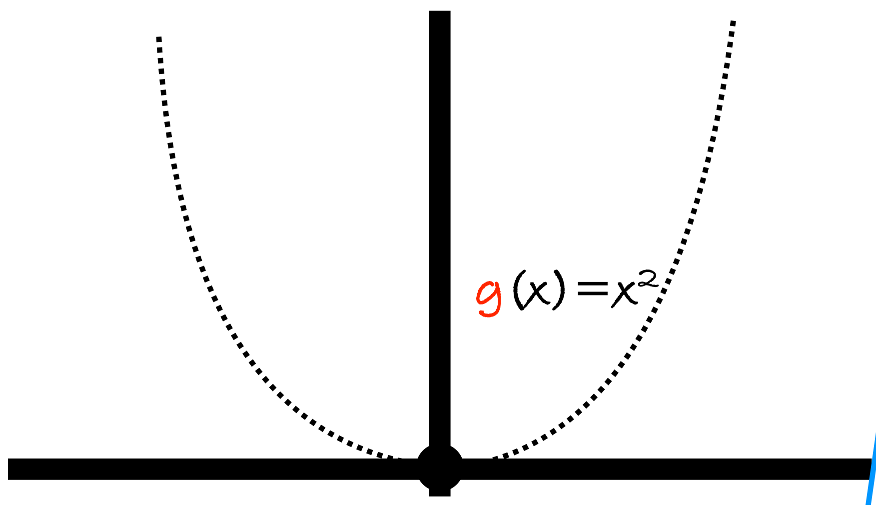
$g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$g(x)=x^2$

$g:\mathcal{P}(\mathbb{R})\rightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R})$

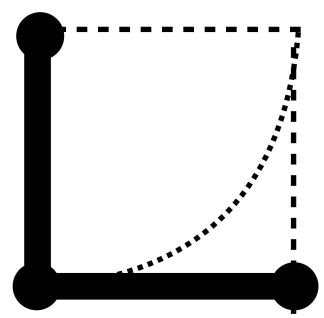
(función de las imágenes))



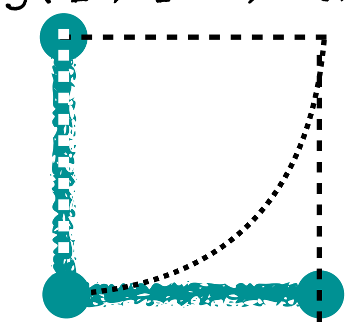


$g(A)=\{f(x)\ /\ x\in A\}=\{x^2\ /\ x\in A\}\quad \forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$g([0,1])=\{x^2\ /\ x\in[0,1]\}=[0,1]$



$g([0,1]\cap\mathbb{Q})=\{x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\}\subset([0,1]\cap\mathbb{Q})$



$g([0,1]\cap\mathbb{W})=\{x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{W}\}\subset[0,1$

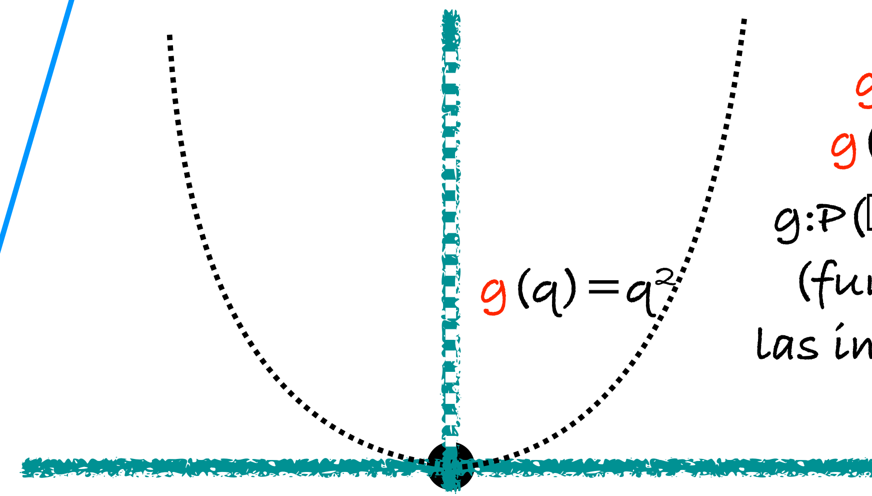
$\mathbb{Q}$ nºs racionales $\mathbb{W}=\mathbb{Q}^c$ nºs irracionales

Textura: nº real "x"

Textura: nº irracional "i"

Textura: nº racional "q"

Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.

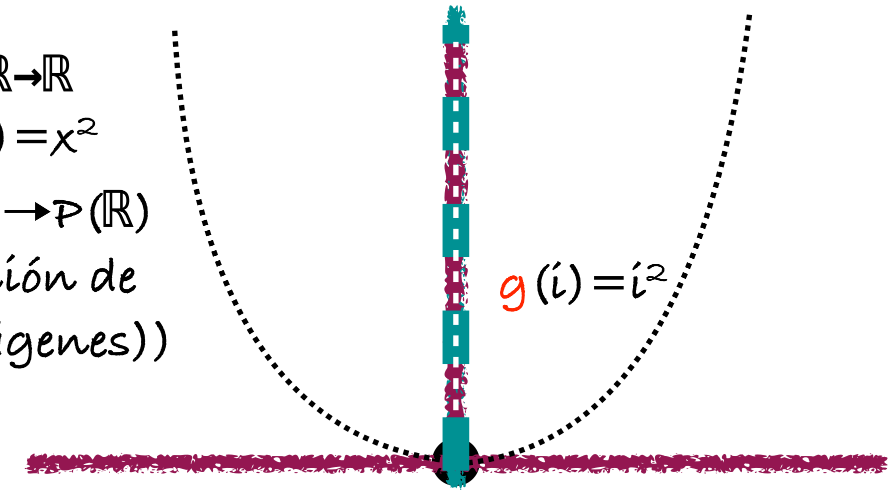


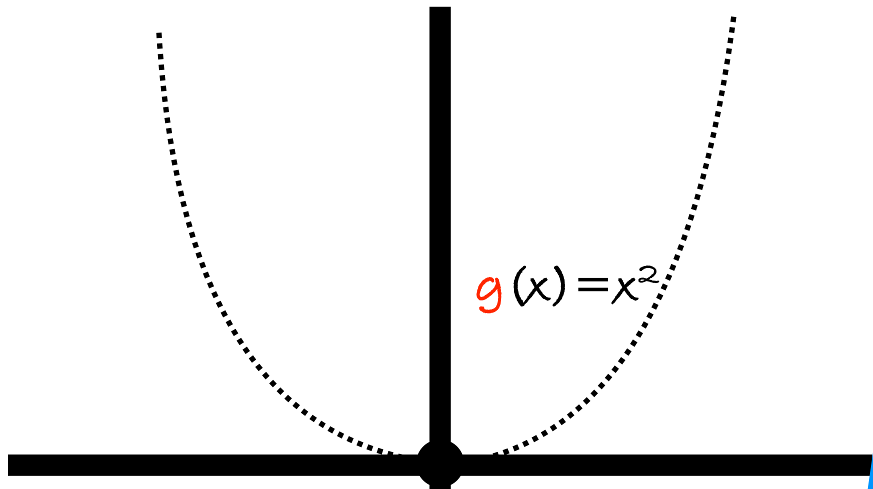
$g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$g(x)=x^2$

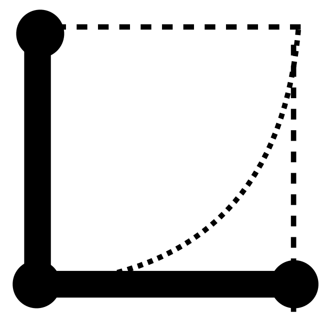
$g:\mathcal{P}(\mathbb{R})\rightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(función de las imágenes))

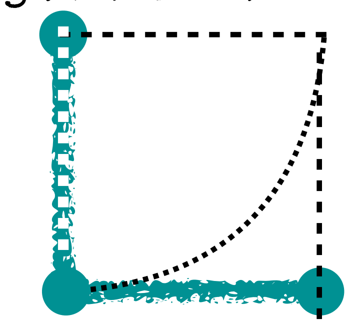




$g(\ [0,1]\ )=\{\ x^2\ /\ x\in[0,1]\ \}\ =[0,1]$



$g(\ [0,1]\cap\mathbb{Q}\ )=\{\ x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\ \}\subset(\ [0,1]\cap\mathbb{Q}\ )$



$g(\ [0,1]\cap\mathbb{W}\ )=\{\ x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{W}\ \}\subset[0,1]$

$g(\ A\ )=\{\ f(x)\ /\ x\in A\ \}=\{\ x^2\ /\ x\in A\ \}\quad \forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$

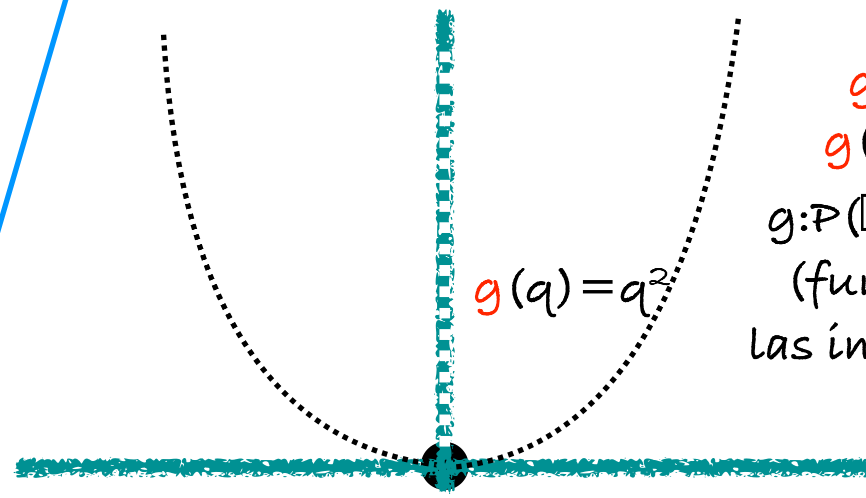
$\mathbb{Q}$ nºs racionales $\quad$ $\mathbb{W}=\mathbb{Q}^c$ nºs irracionales

Textura: nº real "x"

Textura: nº irracional "i"

Textura: nº racional "q"

Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.

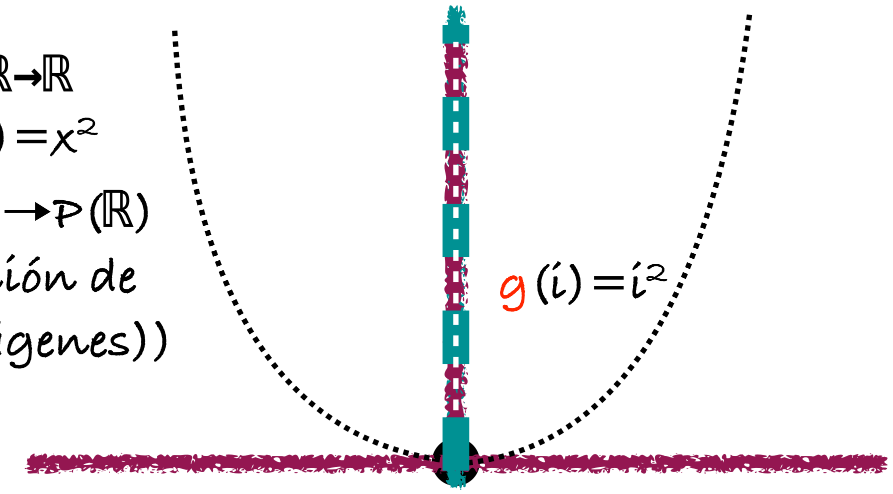


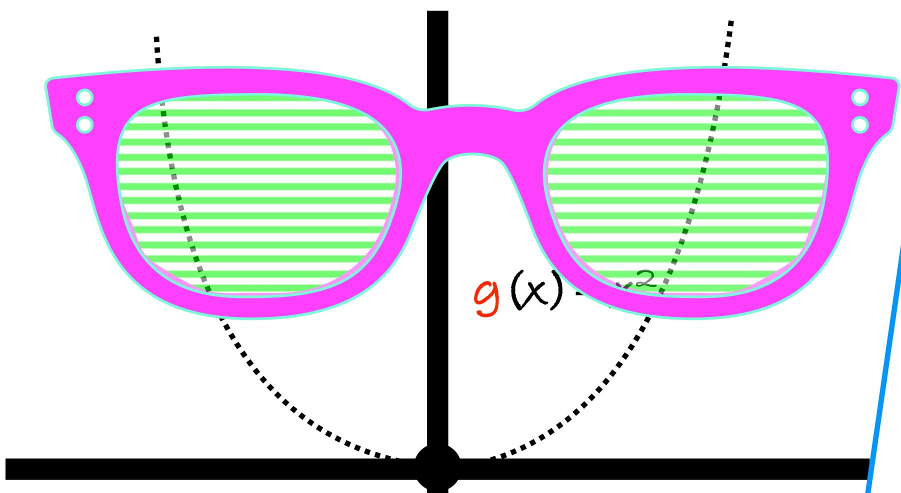
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(x)=x^2$

$g:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$

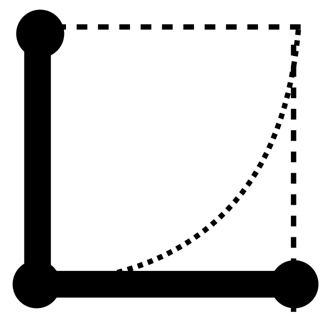
(función de las imágenes))



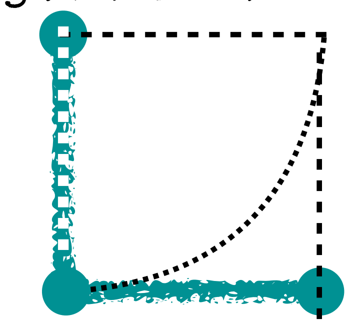


$g(A)=\{\, f(x)\ /\ x\in A\,\}=\{\, x^2\ /\ x\in A\,\}\quad \forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$

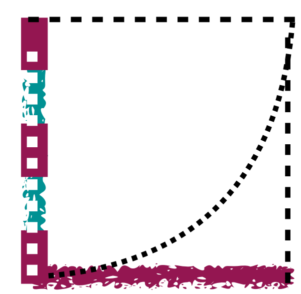
$g(\,[0,1]\,)=\{\, x^2\ /\ x\in[0,1]\,\}=[0,1]$

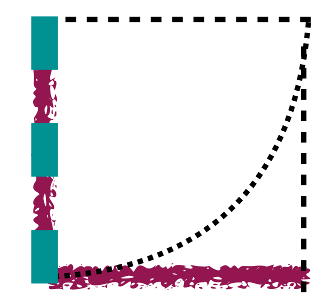


$g(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)=\{\, x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\,\}\subset(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)$

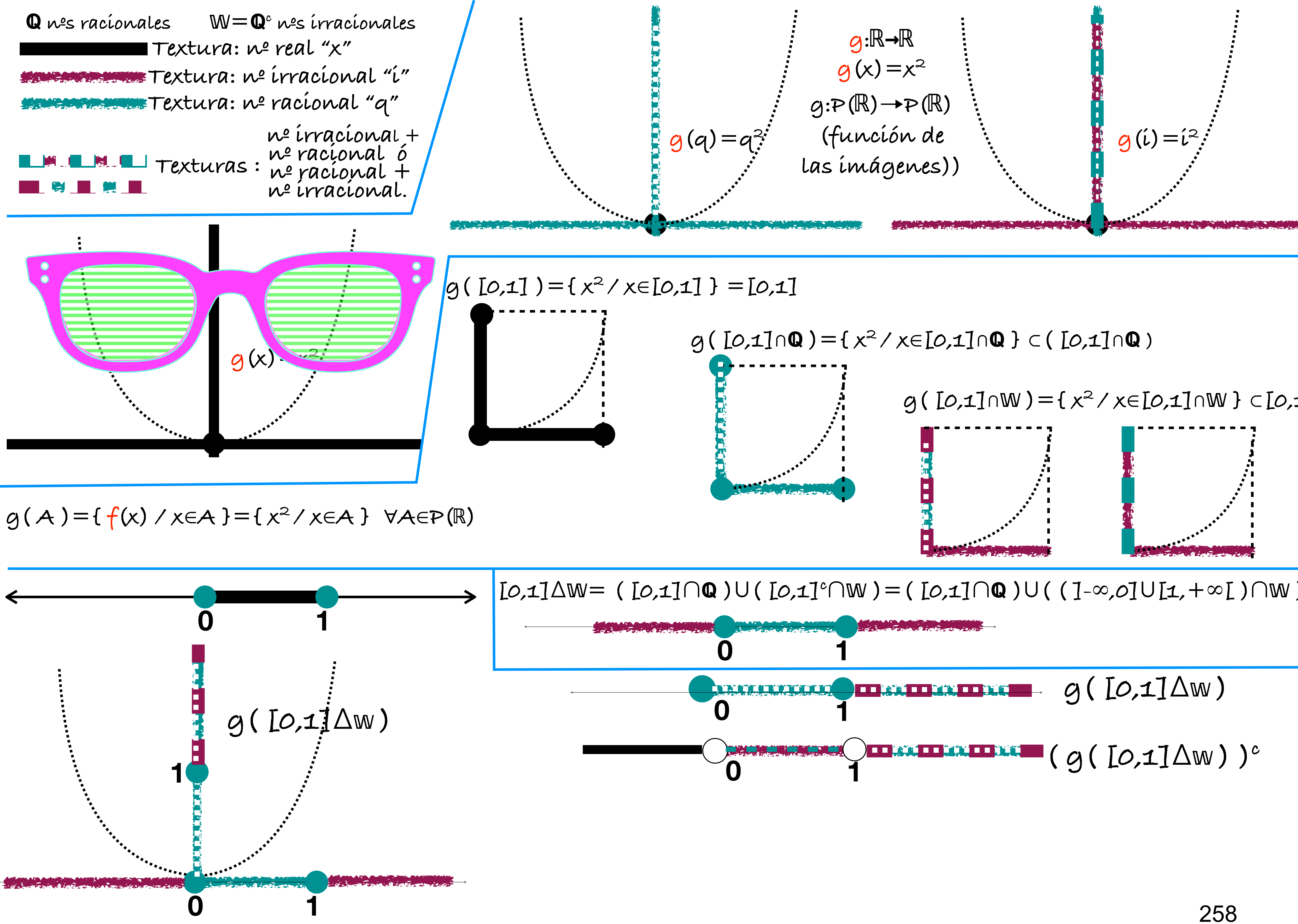


$g(\,[0,1]\cap\mathbb{W}\,)=\{\, x^2\ /\ x\in[0,1]\cap\mathbb{W}\,\}\subset[0,1]$

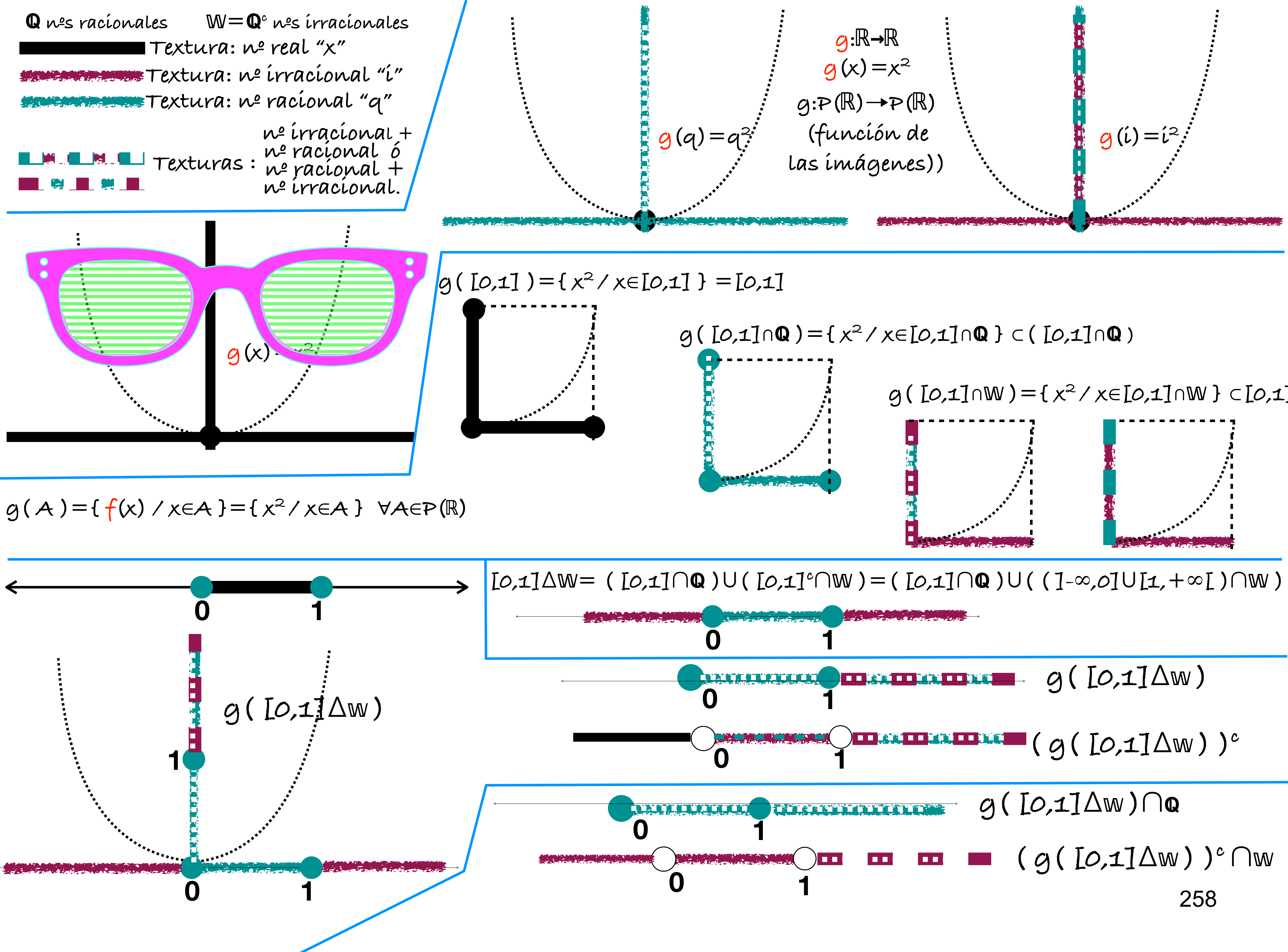




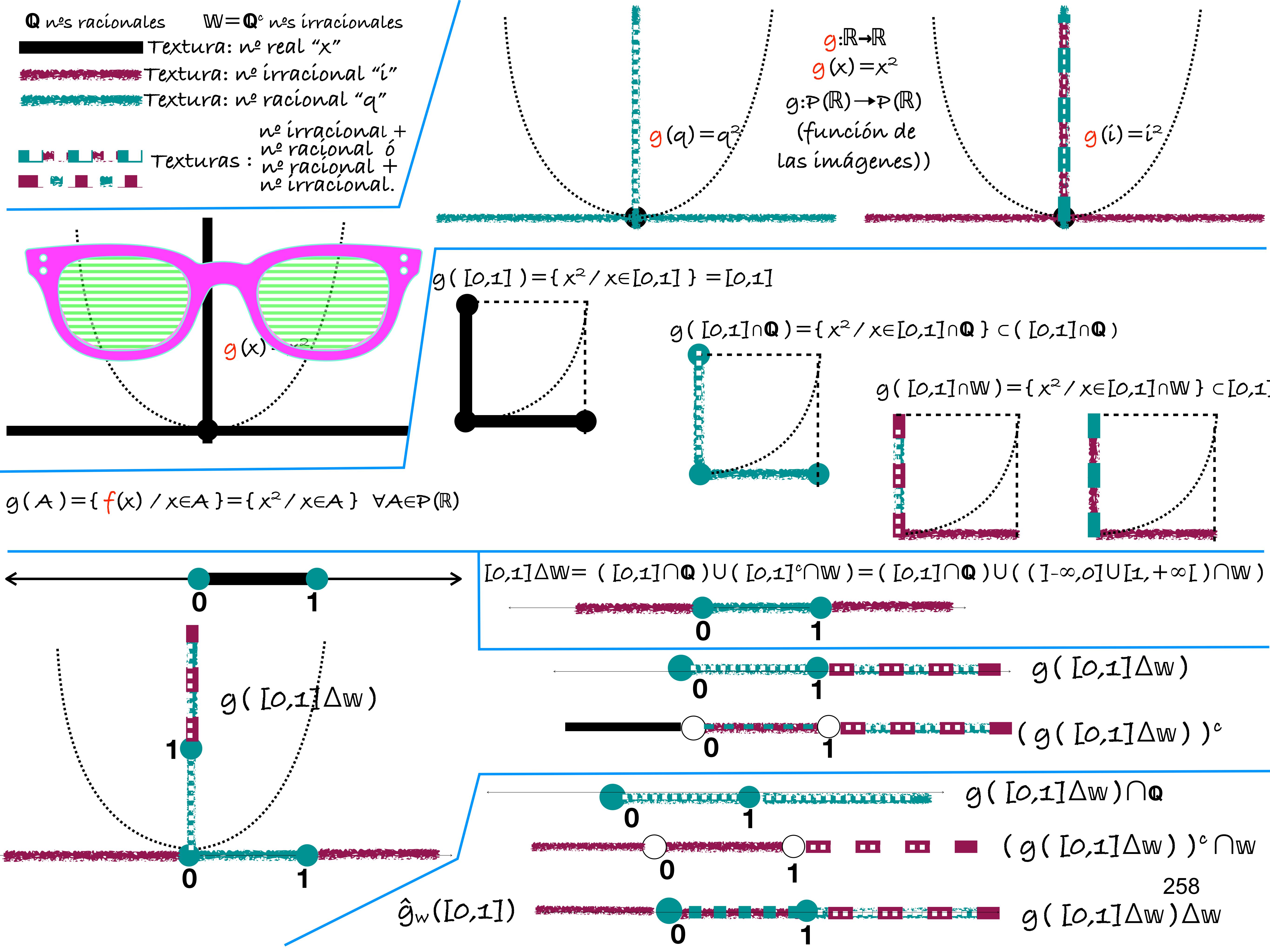
$[0,1]\Delta\mathbb{W}=(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)\cup(\,[0,1]^c\cap\mathbb{W}\,)=(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)\cup(\,(\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\,)\cap\mathbb{W}\,)$



ℚ nºs racionales
𝕎=ℚᶜ nºs irracionales
Textura: nº real "x"
Textura: nº irracional "i"
Textura: nº racional "q"
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.
g(q)=q²
g:ℝ→ℝ
g(x)=x²
g:P(ℝ)→P(ℝ)
(función de las imágenes))
g(i)=i²
g(x)=x²
g([0,1])={ x² / x∈[0,1] } =[0,1]
g([0,1]∩ℚ)={ x² / x∈[0,1]∩ℚ } ⊂ ([0,1]∩ℚ)
g([0,1]∩𝕎)={ x² / x∈[0,1]∩𝕎 } ⊂[0,1]
g(A)={ f(x) / x∈A }={ x² / x∈A } ∀A∈P(ℝ)
0
1
[0,1]Δ𝕎= ([0,1]∩ℚ)∪([0,1]ᶜ∩𝕎)=([0,1]∩ℚ)∪(( ]-∞,0]∪[1,+∞[ )∩𝕎)
0
1
g([0,1]Δ𝕎)
0
1
(g([0,1]Δ𝕎))ᶜ
0
1
g([0,1]Δ𝕎)
1
0
1



Q nºs racionales W=Q^c nºs irracionales
Textura: nº real "x"
Textura: nº irracional "i"
Textura: nº racional "q"
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.
g(q)=q²
g:ℝ→ℝ
g(x)=x²
g:P(ℝ)→P(ℝ)
(función de las imágenes))
g(i)=i²
g(x)=x²
g([0,1])={ x² / x∈[0,1] } =[0,1]
g([0,1]∩Q)={ x² / x∈[0,1]∩Q } ⊂([0,1]∩Q)
g([0,1]∩W)={ x² / x∈[0,1]∩W } ⊂[0,1]
g(A)={ f(x) / x∈A }={ x² / x∈A } ∀A∈P(ℝ)
0
1
[0,1]ΔW= ([0,1]∩Q)∪([0,1]^c∩W)=([0,1]∩Q)∪((]-∞,0]∪[1,+∞[ )∩W)
0
1
g([0,1]Δw)
0
1
1
g([0,1]Δw)
(g([0,1]Δw))^c
0
1
g([0,1]Δw)∩Q
0
1
(g([0,1]Δw))^c ∩W
0
1
0
1



ℚ nºs racionales
𝕎=ℚᶜ nºs irracionales
Textura: nº real "x"
Textura: nº irracional "i"
Textura: nº racional "q"
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.
g(q)=q²
g:ℝ→ℝ
g(x)=x²
g:P(ℝ)→P(ℝ)
(función de las imágenes))
g(i)=i²
g(x)=x²
g([0,1])={ x² / x∈[0,1] } =[0,1]
g([0,1]∩ℚ)={ x² / x∈[0,1]∩ℚ } ⊂([0,1]∩ℚ)
g([0,1]∩𝕎)={ x² / x∈[0,1]∩𝕎 } ⊂[0,1]
g(A)={ f(x) / x∈A }={ x² / x∈A } ∀A∈P(ℝ)
0
1
[0,1]Δ𝕎= ([0,1]∩ℚ)∪([0,1]ᶜ∩𝕎)=([0,1]∩ℚ)∪(( ]-∞,0]∪[1,+∞[ )∩𝕎)
g([0,1]Δw)
(g([0,1]Δw))ᶜ
g([0,1]Δw)∩ℚ
(g([0,1]Δw))ᶜ∩w
ĝ_w([0,1])
g([0,1]Δw)Δw

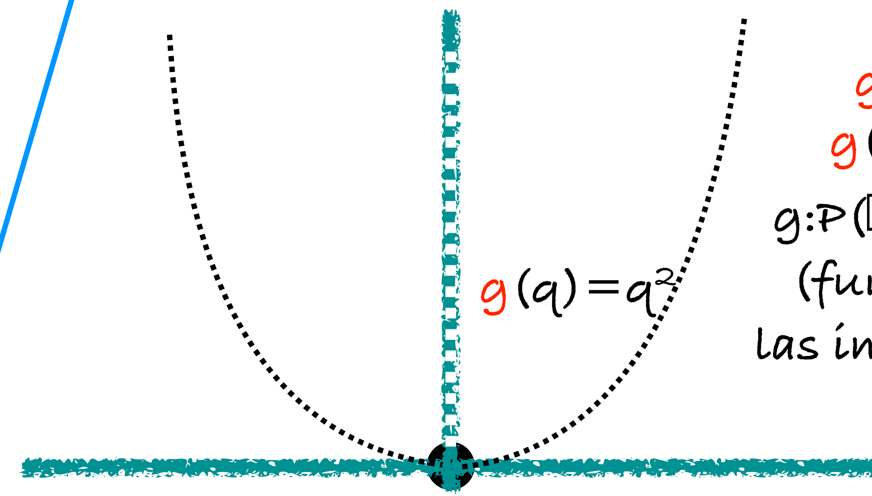
$\mathbb{Q}$ nºs racionales $\mathbb{W}=\mathbb{Q}^c$ nºs irracionales

Textura: nº real "x"

Textura: nº irracional "i"

Textura: nº racional "q"

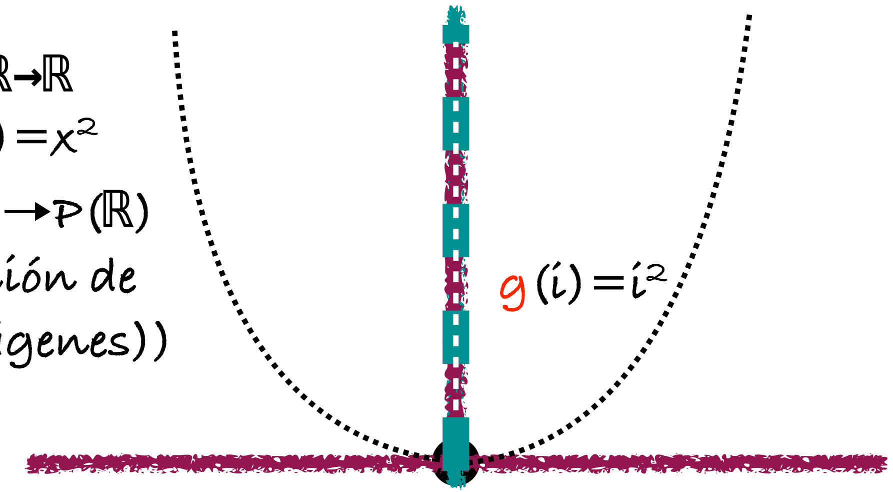
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.

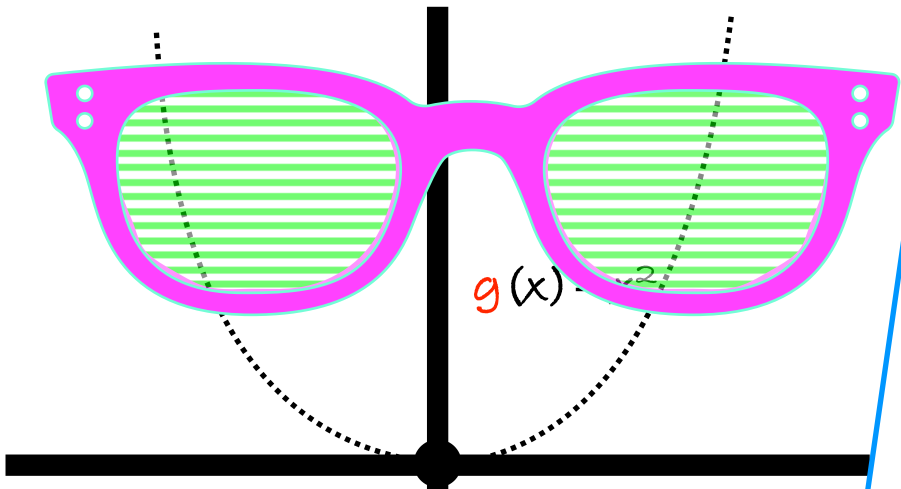


$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

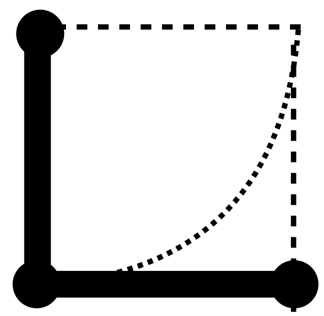
$g(x)=x^2$

$g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ (función de las imágenes))

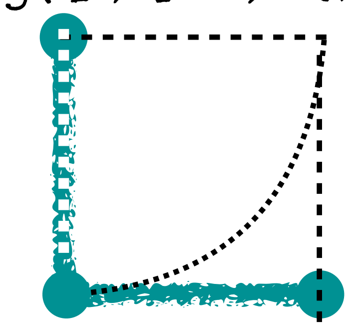




$g(\,[0,1]\,)=\{\,x^2\,/\,x\in[0,1]\,\}=[0,1]$

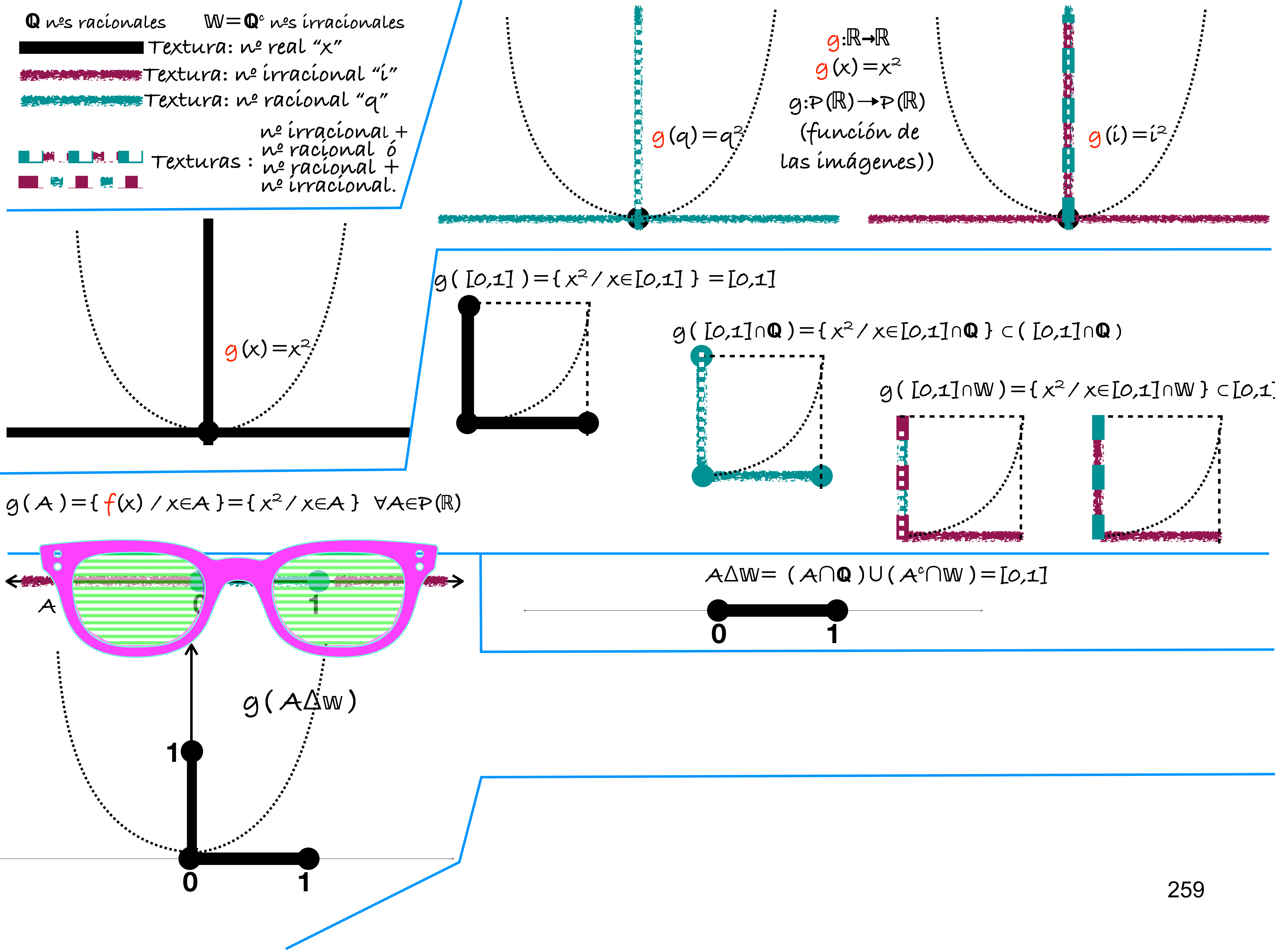


$g(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)=\{\,x^2\,/\,x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\,\}\subset(\,[0,1]\cap\mathbb{Q}\,)$

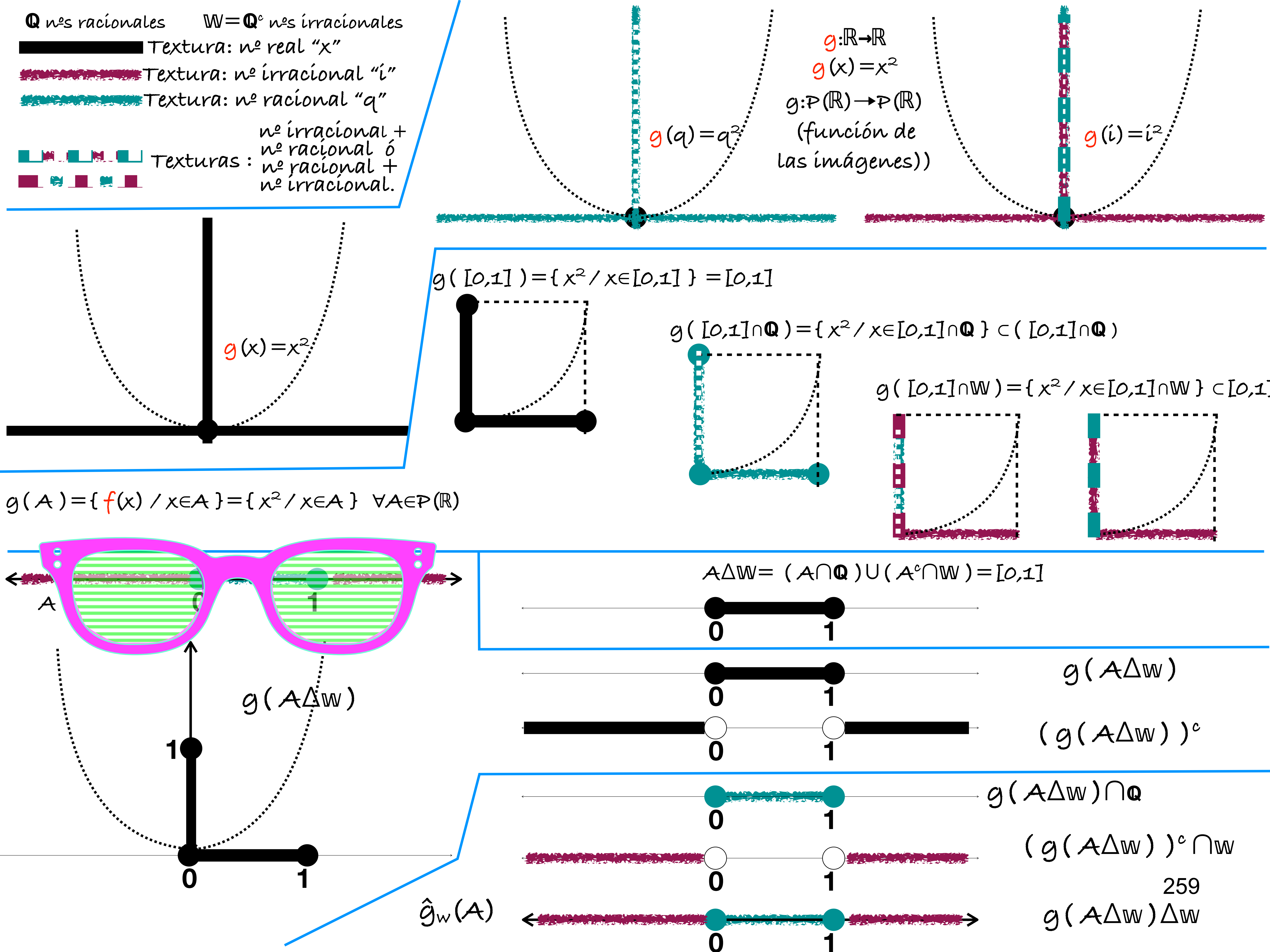


$g(\,[0,1]\cap\mathbb{W}\,)=\{\,x^2\,/\,x\in[0,1]\cap\mathbb{W}\,\}\subset[0,1]$

$g(\,A\,)=\{\,f(x)\,/\,x\in A\,\}=\{\,x^2\,/\,x\in A\,\}\quad\forall A\in P(\mathbb{R})$



Q n.ºs racionales
W=Qᶜ n.ºs irracionales
Textura: nº real "x"
Textura: nº irracional "i"
Textura: nº racional "q"
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.
g(q)=q²
g:ℝ→ℝ
g(x)=x²
g:P(ℝ)→P(ℝ)
(función de las imágenes))
g(i)=i²
g(x)=x²
g([0,1])={ x² / x∈[0,1] } =[0,1]
g([0,1]∩Q)={ x² / x∈[0,1]∩Q } ⊂ ([0,1]∩Q)
g([0,1]∩W)={ x² / x∈[0,1]∩W } ⊂[0,1]
g(A)={ f(x) / x∈A }={ x² / x∈A } ∀A∈P(ℝ)
A
0
1
AΔW= (A∩Q)∪(Aᶜ∩W)=[0,1]
0
1
g(AΔW)
1
0
1

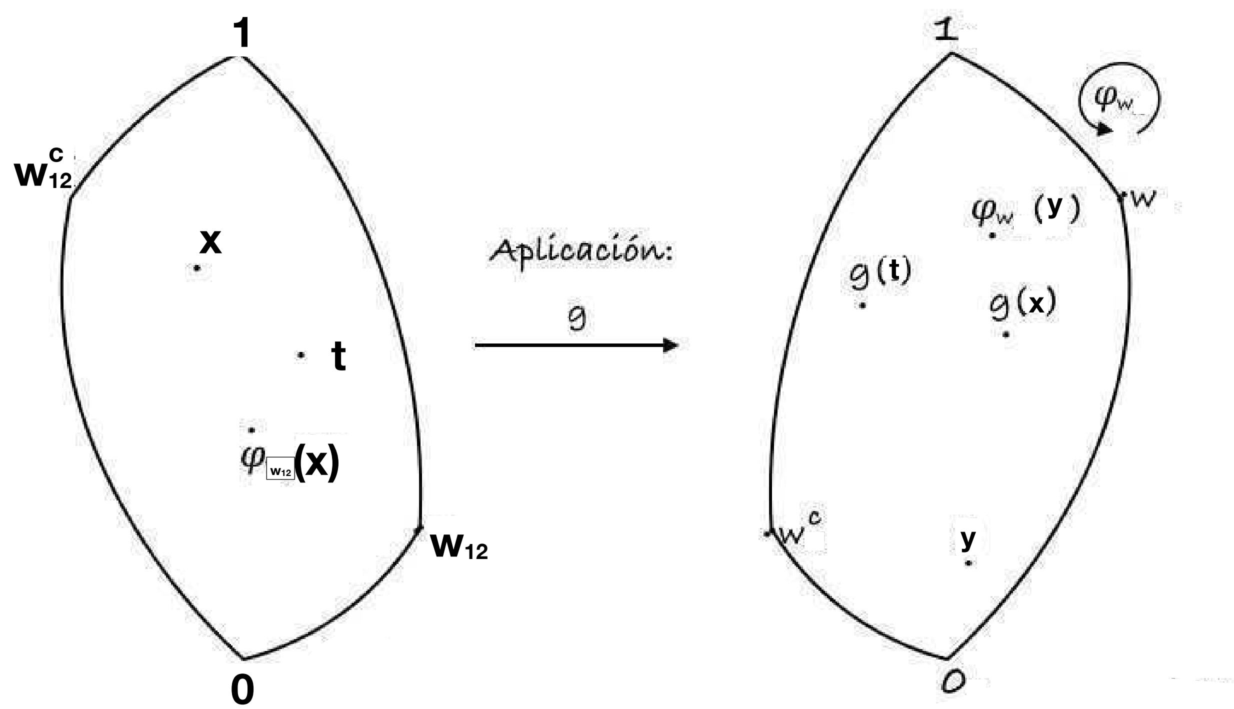


Q nºs racionales W=Qᶜ nºs irracionales
Textura: nº real "x"
Textura: nº irracional "i"
Textura: nº racional "q"
Texturas : nº irracional + nº racional ó nº racional + nº irracional.
g(q)=q²
g:ℝ→ℝ
g(x)=x²
g:P(ℝ)→P(ℝ)
(función de las imágenes))
g(i)=i²
g(x)=x²
g([0,1])={ x²/ x∈[0,1] } =[0,1]
g([0,1]∩Q)={ x²/ x∈[0,1]∩Q } ⊂ ([0,1]∩Q)
g([0,1]∩W)={ x²/ x∈[0,1]∩W } ⊂[0,1]
g(A)={ f(x) / x∈A }={ x²/ x∈A } ∀A∈P(ℝ)
A
0
1
A∆W= (A∩Q)∪(Aᶜ∩W)=[0,1]
g(A∆w)
(g(A∆w))ᶜ
g(A∆w)∩Q
(g(A∆w))ᶜ ∩w
ĝw(A)
g(A∆w)∆w

Algunas propiedades de la extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ de una función g definida en un producto de retículos $(L_1 X L_2, \leq_{12})$.

Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$



(w_{12}, w)

Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 \times L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

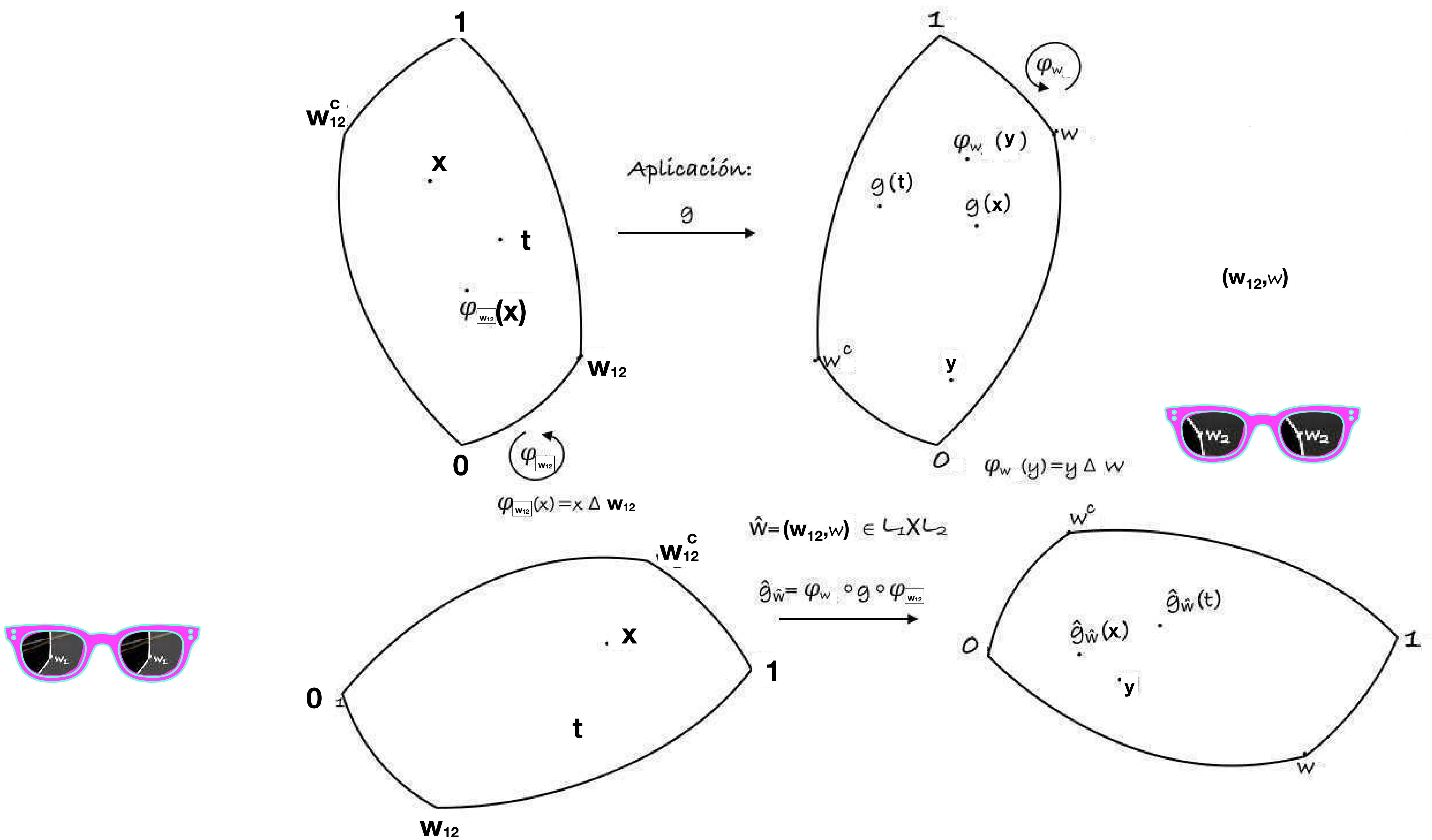
$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1 \times L_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1 \times L_2) \times L$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1 \times L_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \to ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), ')$



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

Ejemplo1: $(L_1=L,\ L_2=N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x\triangle s = x\cdot s^c + x'\cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1XL_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1XL_2)XL$

$\hat{w} = ((w,w),w) \in LXLXL$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

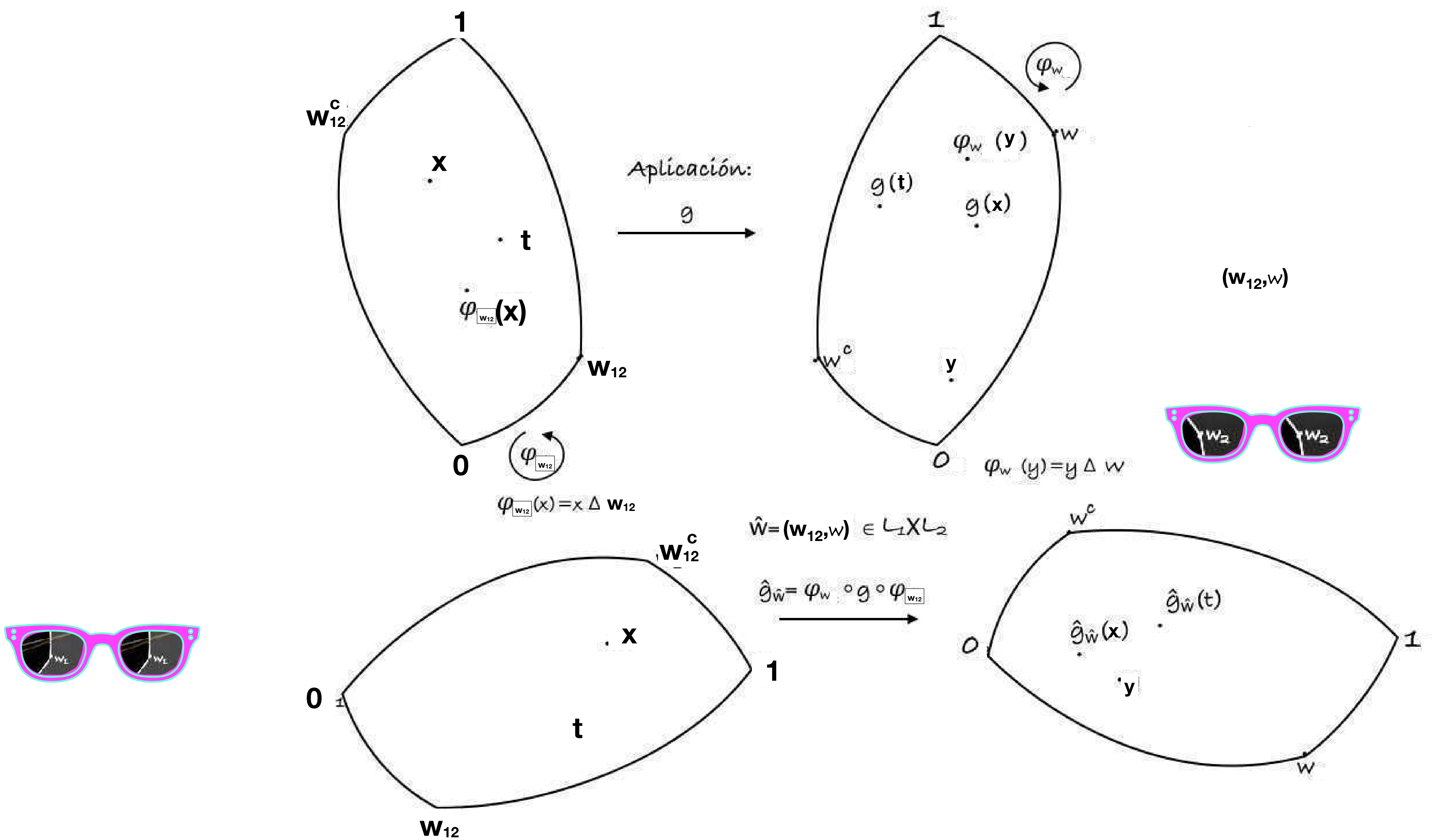
Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '^{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

(*) **Ejemplo1':** Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.



(*) Véase la transparencia siguiente.

Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1XL_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1XL_2)XL$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

Ejemplo1: $(L_1=L,\ L_2=N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x\triangle s = x\cdot s^c + x'\cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

$\hat{w} = ((w,w), w) \in LXLXL$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

(*) Ejemplo1': Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x\triangle^w s) = (x\triangle s\triangle w) \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

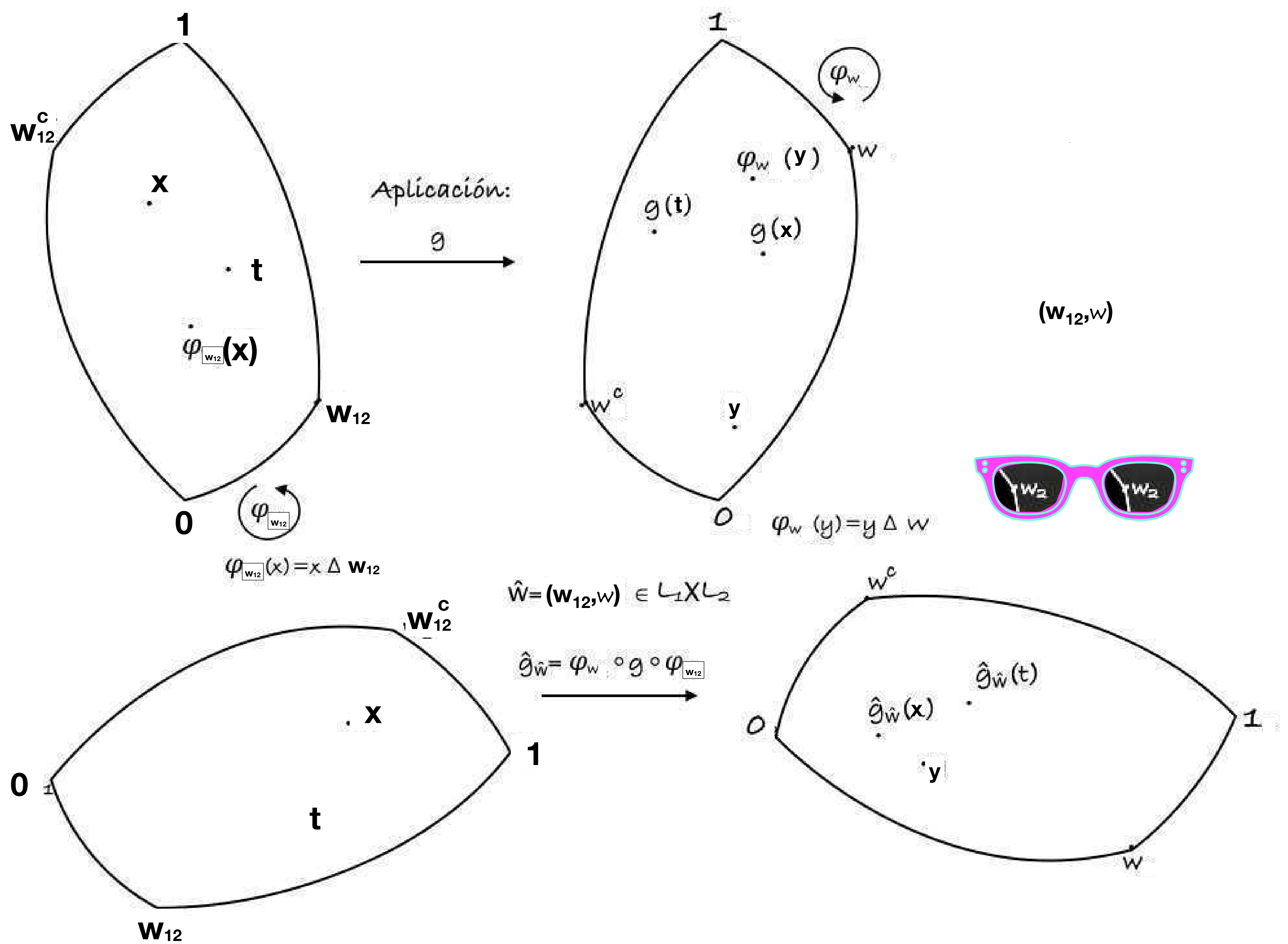
Ejemplo2: $(L_1=L_2=L)$ y $g=(\cdot)$ (ínfimo en L).

$g(x, y) = x\cdot y \quad \forall (x, y) \in LXL$.

Ejemplo2': Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x\sqcap^w y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) \quad \forall (x, y) \in LXL$.



(*) Véase la transparencia siguiente.

Funciones g tipo operaciones binarias:

g: $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

Ejemplo1: $(L_1=L,\ L_2=N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle$: $((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x\triangle s = x\cdot s^c + x'\cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Ejemplo2: $(L_1=L_2=L)$ y $g=(\cdot)$ (ínfimo en L).

$g(x, y) = x\cdot y \quad \forall (x, y) \in LXL$.

Ejemplo3: $(L_1=L_2=L)$ y $g=(+)$ (supremo en L).

$g(x, y) = x + y \quad \forall (x, y) \in LXL$.

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1XL_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1XL_2)XL$

$\hat{w} = ((w,w),w) \in LXLXL$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$: (*)

$\hat{g}_{\hat{w}}$: $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '^{12}) \to ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

(*) **Ejemplo1':** Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x\triangle^w s) = (x\triangle s\triangle w) \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Ejemplo2': Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

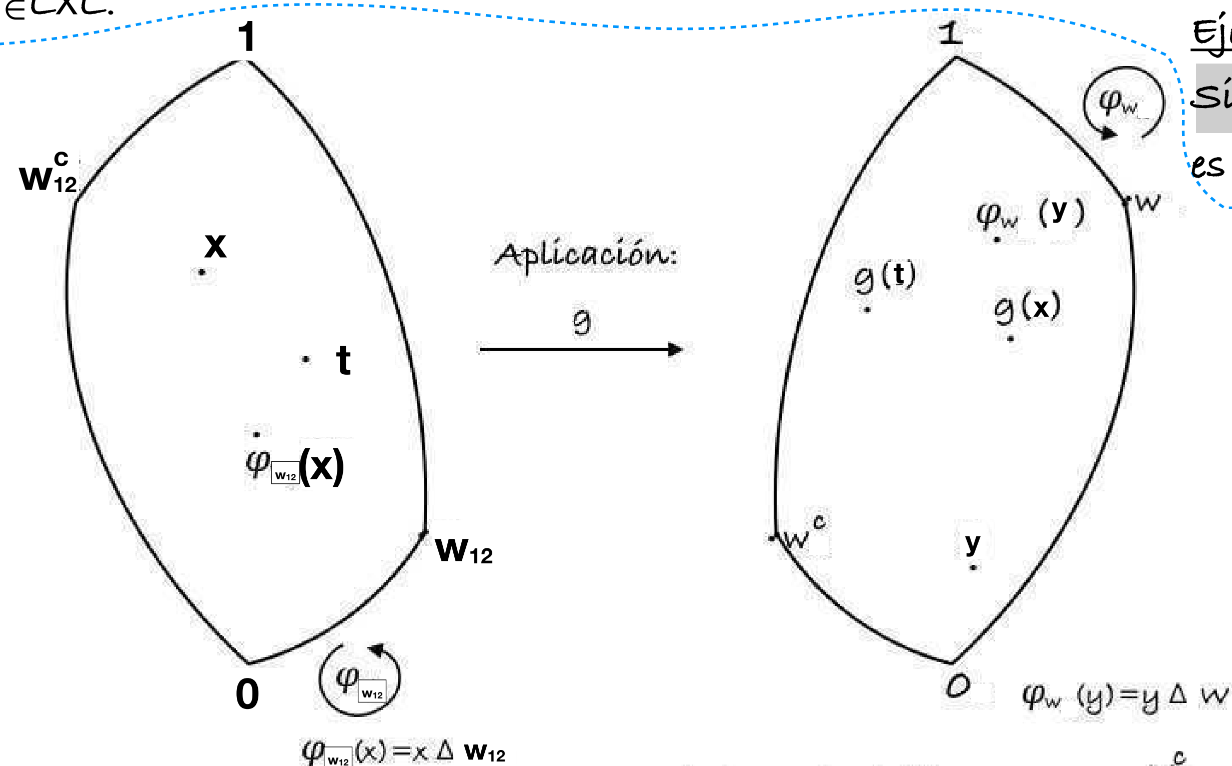
Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x\sqcap^w y) = x\cdot y + w\cdot(x+y) \quad \forall (x, y) \in LXL$.

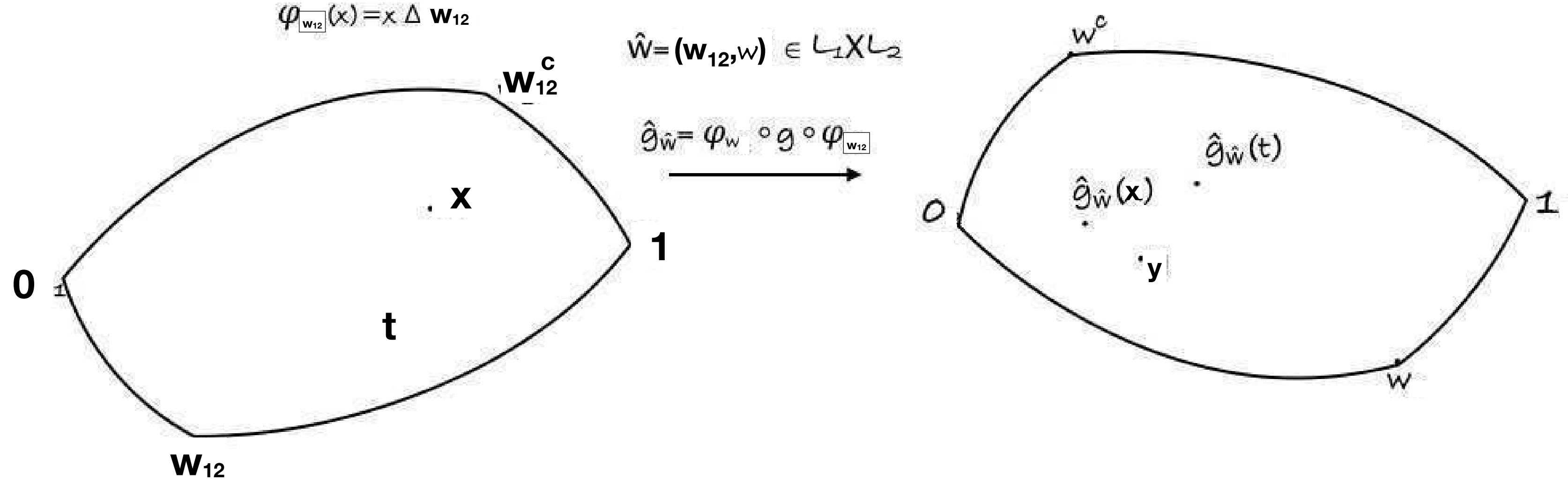
Ejemplo3': Su w-extensión $\hat{+}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{+}_{\hat{w}} = \sqcup^w$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{+}_{\hat{w}}(x, y) = (x\sqcup^w y) = x\cdot y + w^c\cdot(x+y) \quad \forall (x, y) \in LXL$.



(w_{12}, w)



(*) Véase la transparencia siguiente.

(*) (Véase transparencias siguientes)

Sobre la extensión $\hat{\Delta}_{\hat{w}}$ de la función diferencia simétrica Δ y de otras operaciones distinguidas en un retículo L.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '_{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \,\&\, (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z, y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z, y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de $L_1 X L_2$:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \,\&\, (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z, y \sqcap^{w_2} t)$, $(x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z, y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \bullet_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \& (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \bullet_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z,\ y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z,\ y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de $L_1 X L_2$:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \& (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z,\ y \sqcap^{w_2} t)$, $(x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z,\ y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto $L_1 X L_2$ es tal que, para todo par de elementos de $L_1 X L_2$: $(x,y) \mathbf{\Delta}_{12} (z,t) = (x,y) \bullet_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \bullet_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t\ ) = (x \Delta_1 z\ ,\ y \Delta_2 t)$.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \& (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z,\ y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z,\ y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de L_1XL_2 :

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \& (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z,\ y \sqcap^{w_2} t), (x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z,\ y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto L_1XL_2 es tal que, para todo par de elementos de L_1XL_2: $(x,y)\boldsymbol{\Delta}_{12}(z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t\ ) = (x\Delta_1 z\ ,\ y\Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}}), '^{12})$ isomorfa a $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12}, \boldsymbol{\Delta}_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', \Delta)$ y los elementos $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}$: $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}), '^{12}) \to ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), ')$ con $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}((x,y)) = (g((x\Delta_1 w_1\ ,\ y\Delta_2 w_2)))\Delta w \quad \forall (x,\ y) \in L_1XL_2\ .$$

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), {}'^{1})$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), {}'^{2})$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), {}'^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \,\&\, (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z,\ y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z,\ y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^{1}, y'^{2})$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de $L_1 X L_2$:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \,\&\, (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z,\ y \sqcap^{w_2} t)$, $(x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z,\ y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto $L_1 X L_2$ es tal que, para todo par de elementos de $L_1 X L_2$: $(x,y) \boldsymbol{\Delta}_{12} (z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^{1} +_1 x'^{1} \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^{2} +_2 y'^{2} \cdot_2 t\ ) = (x \Delta_1 z\ ,\ y \Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}}), {}'^{12})$ isomorfa a $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), {}'^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), {}'^{12}, \boldsymbol{\Delta}_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}', \Delta)$ y los elementos $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}$: $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}), {}'^{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), {}')$ con $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}((x,y)) = (g((x \Delta_1 w_1\ ,\ y \Delta_2 w_2))) \Delta w \quad \forall (x,\ y) \in L_1 X L_2\ .$$

<u>Ejemplo1</u>: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle$: $((L X N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), {}') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}')$

tal que $\triangle(x,\ s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x,\ s) \in L X N(L)$.

<u>Ejemplo1'</u>: Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^{w}$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^{w})$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x,\ s) = (x \triangle^{w} s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x,\ s) \in L X N(L)$.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \& (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z, y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z, y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $0 = (0_1, 0_2)$, $1 = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $w_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de L_1XL_2:

$[(x,y) \sqsubseteq^{w_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \& (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{w_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z, y \sqcap^{w_2} t)$, $(x,y) \sqcup^{w_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z, y \sqcup^{w_2} t)]$; $w_{12}^c = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto L_1XL_2 es tal que, para todo par de elementos de L_1XL_2: $(x,y) \Delta_{12} (z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z , y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t) = (x \Delta_1 z , y \Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '^{12})$ isomorfa a $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12})$ y que justifican la siguiente:

Definición. Dada una función $g: ((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '^{12}, \Delta_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', \Delta)$ y los elementos $w_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}), '^{12}) \to ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), ')$ con $\hat{w} = (w_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{w}}((x,y)) = (g((x\Delta_1 w_1 , y\Delta_2 w_2)))\Delta w \quad \forall (x, y) \in L_1XL_2 .$$

Ejemplo1: $(L_1 = L, L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Ejemplo1': Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$,

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Nota. Un caso particular distinguido: cuando $(L_1 = L_2 = L)$ la aplicación $g: LXL \to L$ es una operación binaria en el retículo L.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '_{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \& (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z, y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z, y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de $L_1 X L_2$:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \& (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z, y \sqcap^{w_2} t), (x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z, y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}^{\mathbf{c}}_{12} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto $L_1 X L_2$ es tal que, para todo par de elementos de $L_1 X L_2$: $(x,y) \mathbf{\Delta}_{12} (z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t) = (x \Delta_1 z\ ,\ y \Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}^{\mathbf{c}}_{12}), '^{12})$ isomorfa a $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12}, \mathbf{\Delta}_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', \Delta)$ y los elementos $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}$: $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}), '^{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$ con $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}((x,y)) = (g((x \Delta_1 w_1\ ,\ y \Delta_2 w_2))) \Delta w \quad \forall (x, y) \in L_1 X L_2\ .$$

<u>Ejemplo1</u>: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle$: $((L X N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

<u>Ejemplo1'</u>: Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

<u>Nota</u>. Un caso particular distinguido: cuando $(L_1 = L_2 = L)$ la aplicación $g: L X L \rightarrow L$ es una operación binaria en el retículo L.

<u>Ejemplo2</u>: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (\cdot)$ (ínfimo en L) .

$g(x, y) = x \cdot y \quad \forall (x, y) \in L X L$.

<u>Ejemplo2'</u>: Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in L X L$.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \,\&\, (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z,\ y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z,\ y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de $L_1 X L_2$:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \,\&\, (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z,\ y \sqcap^{w_2} t)$, $(x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z,\ y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto $L_1 X L_2$ es tal que, para todo par de elementos de $L_1 X L_2$: $(x,y) \boldsymbol{\Delta}_{12} (z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t\ ) = (x \Delta_1 z\ ,\ y \Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}}), '^{12})$ isomorfa a $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12}, \boldsymbol{\Delta}_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', \Delta)$ y los elementos $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}$: $((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}), '^{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$ con $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}((x,y)) = (g((x \Delta_1 w_1\ ,\ y \Delta_2 w_2)))\Delta w \quad \forall (x, y) \in L_1 X L_2\ .$$

<u>Ejemplo1</u>: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle$: $((L X N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

<u>Ejemplo1'</u>: Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(\mathbf{x}, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

<u>Nota</u>. Un caso particular distinguido: cuando $(L_1 = L_2 = L)$ la aplicación $g: L X L \rightarrow L$ es una operación binaria en el retículo L.

<u>Ejemplo2</u>: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (\cdot)$ (ínfimo en L) .

$g(x, y) = x \cdot y \quad \forall (x, y) \in L X L$.

<u>Ejemplo2'</u>: Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in L X L$.

<u>Ejemplo3</u>: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (+)$ (supremo en L) .

$g(x, y) = x + y \quad \forall (x, y) \in L X L$.

<u>Ejemplo3'</u>: Su w-extensión $\hat{+}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{+}_{\hat{w}} = \sqcup^w$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{+}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcup^w y) = x \cdot y + w^c \cdot (x + y) \ \forall (x, y) \in L X L$.

Sean $((L_1,\le_1,\cdot_1,+_1,0_1,1_1),{}'^{1})$, $((L_2,\le_2,\cdot_2,+_2,0_2,1_2),{}'^{2})$ y $((L,\le,\cdot,+,0,1),{}')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1XL_2,\le_{12},\cdot_{12},+_{12},0,1),{}'^{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:
$[(x,y)\le_{12}(z,t)]\Leftrightarrow[(x\le_1 y)\&(z\le_2 t)]$; $[(x,y)\cdot_{12}(z,t)=(x\cdot_1 z,\ y\cdot_2 t)$, $(x,y)+_{12}(z,t)=(x+_1 z,\ y+_2 t)$, $(x,y)'^{12}=(x'^{1},y'^{2})$, $0=(0_1,0_2)$, $1=(1_1,1_2)$.

Entonces, si $w_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de L_1XL_2:
$[(x,y)\sqsubseteq^{w_{12}}(z,t)]\Leftrightarrow[(x\sqsubseteq^{w_1}z)\&(y\sqsubseteq^{w_2}t)]$; $[(x,y)\sqcap^{w_{12}}(z,t)=(x\sqcap^{w_1}z,\ y\sqcap^{w_2}t), (x,y)\sqcup^{w_{12}}(z,t)=(x\sqcup^{w_1}z,\ y\sqcup^{w_2}t)]$; $w_{12}^c=(w_1^c,w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto L_1XL_2 es tal que, para todo par de elementos de L_1XL_2: $(x,y)\Delta_{12}(z,t)=(x,y)\cdot_{12}(z,t)'^{12}+_{12}(x,y)'^{12}\cdot_{12}(z,t)=(x\cdot_1 z'^{1}+_1 x'^{1}\cdot_1 z\ ,\ y\cdot_2 t'^{2}+_2 y'^{2}\cdot_2 t)=(x\Delta_1 z\ ,\ y\Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1XL_2,\sqsubseteq^{w_{12}},\sqcap^{w_{12}},\sqcup^{w_{12}},w_{12},w_{12}^c),{}'^{12})$ isomorfa a $((L_1XL_2,\le_{12},\cdot_{12},+_{12},0,1),{}'^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1XL_2,\le_{12},\cdot_{12},+_{12},0,1),{}'^{12},\Delta_{12})\to((L,\le,\cdot,+,0,1),{}',\Delta)$ y los elementos $w_{12}=(w_1,w_2)\in N(L_1)XN(L_2)$ y $w\in N(L)$; su extensión $\hat g_{\hat w}$: $((L_1XL_2,\sqsubseteq^{w_{12}},\sqcap^{w_{12}},\sqcup^{w_{12}},w_{12},w_{12}),{}'^{12})\to((L,\sqsubseteq^{w},\sqcap^{w},\sqcup^{w},w,w^c),{}')$ con $\hat w=(w_{12},w)$, viene dada por:

$$\hat g_{\hat w}((x,y))=(g((x\Delta_1 w_1\ ,\ y\Delta_2 w_2)))\Delta w \quad \forall (x,y)\in L_1XL_2 .$$

<u>Ejemplo1</u>: ($L_1=L$, $L_2=N(L)$) y g diferencia simétrica:
$\triangle$: $((LXN(L),\le,\cdot,+,0,1),{}')\to((L,\le,\cdot,+,0,1),{}')$
tal que $\triangle(x,s)=x\triangle s=x\cdot s^c+x'\cdot s \quad \forall (x,s)\in LXN(L)$.

<u>Ejemplo1'</u>: Su w-extensión $\hat\triangle_{\hat w}$
Si $w_1=w_2=w$: $\hat\triangle_{\hat w}=\triangle^{w}$ (w-diferencia simétrica en $(L,\sqsubseteq^{w})$),
es decir: $\hat\triangle_{\hat w}(x,s)=(x\triangle^{w}s)=(x\triangle s\triangle w) \quad \forall (x,s)\in LXN(L)$.

<u>Nota</u>. Un caso particular distinguido: cuando ($L_1=L_2=L$) la aplicación $g:LXL\to L$ es una operación binaria en el retículo L.

<u>Ejemplo2</u>: ($L_1=L_2=L$) y $g=(\cdot)$ (ínfimo en L) .
$g(x,y)=x\cdot y \quad \forall (x,y)\in LXL$.

<u>Ejemplo2'</u>: Su w-extensión $\hat\cdot_{\hat w}$
Si $w_1=w_2=w$: $\hat\cdot_{\hat w}=\sqcap^{w}$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L,\sqsubseteq^{w})$),
es decir: $\hat\cdot_{\hat w}(x,y)=(x\sqcap^{w}y)=x\cdot y+w\cdot(x+y) \quad \forall (x,y)\in LXL$.

<u>Ejemplo3</u>: ($L_1=L_2=L$) y $g=(+)$ (supremo en L) .
$g(x,y)=x+y \quad \forall (x,y)\in LXL$.

<u>Ejemplo3'</u>: Su w-extensión $\hat +_{\hat w}$
Si $w_1=w_2=w$: $\hat +_{\hat w}=\sqcup^{w}$ (w-ínfimo en $(L,\sqsubseteq^{w})$),
es decir: $\hat +_{\hat w}(x,y)=(x\sqcup^{w}y)=x\cdot y+w^{c}\cdot(x+y) \quad \forall (x,y)\in LXL$.

<u>Ejemplo4</u>: Si g es la diferencia_(-) tal que
$x\text{-}s=x\cdot s^c \quad \forall (x,s)\in LXN(L)$,.

<u>Ejemplo4'</u>: Su w-extensión $\hat -_{\hat w}$
Si $w_1=w_2=w$: $\hat -_{\hat w}=\sqcup^{w}$ (w-diferencia en $(L,\sqsubseteq^{w})$),
es decir: $\hat -_{\hat w}(x,y)=(x\overset{w}{-}y)=x\sqcap^{w}y^c=x\cdot y^c+w\cdot(x+y^c) \quad \forall (x,y)\in LXL$.

Sean $((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1)$, $((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2)$ y $((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículos distributivos y acotados con negaciones fuertes. Sea $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '_{12})$ el retículo producto de los dos primeros con el orden, las operaciones y los extremos definidos como es usual:

$[(x,y) \leq_{12} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \leq_1 y) \& (z \leq_2 t)]$; $[(x,y) \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z,\ y \cdot_2 t)$, $(x,y) +_{12} (z,t) = (x +_1 z,\ y +_2 t)$, $(x,y)'^{12} = (x'^1, y'^2)$, $\mathbf{0} = (0_1, 0_2)$, $\mathbf{1} = (1_1, 1_2)$.

Entonces, si $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ obtenemos el orden de actividad y las operaciones asociadas para elementos (x,y), (z,t) de L_1XL_2:

$[(x,y) \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}} (z,t)] \Leftrightarrow [(x \sqsubseteq^{w_1} z) \& (y \sqsubseteq^{w_2} t)]$; $[(x,y) \sqcap^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcap^{w_1} z,\ y \sqcap^{w_2} t), (x,y) \sqcup^{\mathbf{w}_{12}} (z,t) = (x \sqcup^{w_1} z,\ y \sqcup^{w_2} t)]$; $\mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}} = (w_1^c, w_2^c)$.

Si Δ_1 y Δ_2 son las diferencias simétricas en L_1 y L_2 respectivamente, entonces la diferencia simétrica en el producto L_1XL_2 es tal que, para todo par de elementos de L_1XL_2: $(x,y)\boldsymbol{\Delta}_{12}(z,t) = (x,y) \cdot_{12} (z,t)'^{12} +_{12} (x,y)'^{12} \cdot_{12} (z,t) = (x \cdot_1 z'^1 +_1 x'^1 \cdot_1 z\ ,\ y \cdot_2 t'^2 +_2 y'^2 \cdot_2 t\ ) = (x\Delta_1 z\ ,\ y\Delta_2 t)$.

Son elementos que determinan la estructura $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}^{\mathbf{c}}), '^{12})$ isomorfa a $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12})$ y que justifican la siguiente:

<u>Definición</u>. Dada una función g: $((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), '^{12}, \boldsymbol{\Delta}_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', \Delta)$ y los elementos $\mathbf{w}_{12} = (w_1, w_2) \in N(L_1)XN(L_2)$ y $w \in N(L)$; su extensión $\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}$: $((L_1XL_2, \sqsubseteq^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcap^{\mathbf{w}_{12}}, \sqcup^{\mathbf{w}_{12}}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{12}), '^{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), ')$ con $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_{12}, w)$, viene dada por:

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{w}}}((x,y)) = (g((x\Delta_1 w_1\ ,\ y\Delta_2 w_2)))\Delta w \quad \forall (x,\ y) \in L_1XL_2\ .$$

<u>Ejemplo1</u>: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle$: $((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x,\ s) = x\triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x,\ s) \in LXN(L)$.

<u>Ejemplo1'</u>: Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^{w}$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^{w})$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(\mathbf{x},\ s) = (x\triangle^{w} s) = (x\triangle s\triangle w) \quad \forall (x,\ s) \in LXN(L)$.

<u>Nota</u>. Un caso particular distinguido: cuando $(L_1 = L_2 = L)$ la aplicación $g: LXL \rightarrow L$ es una operación binaria en el retículo L.

<u>Ejemplo2</u>: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (\cdot)$ (ínfimo en L) .

$g(x,\ y) = x \cdot y \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

<u>Ejemplo2'</u>: Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^{w}$ (la extensión de $(\cdot)$ es el w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^{w})$,

es decir: $\quad \hat{\cdot}_{\hat{w}}(x,\ y) = (x \sqcap^{w} y) = x \cdot y + w \cdot (x + y) \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

<u>Ejemplo3</u>: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (+)$ (supremo en L) .

$g(x,\ y) = x + y \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

<u>Ejemplo3'</u>: Su w-extensión $\hat{+}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{+}_{\hat{w}} = \sqcup^{w}$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^{w})$,

es decir: $\quad \hat{+}_{\hat{w}}(x,\ y) = (x \sqcup^{w} y) = x \cdot y + w^{c} \cdot (x + y) \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

<u>Ejemplo4</u>: Si g es la diferencia (-) tal que

$x\text{-}s = x \cdot s^c \quad \forall (x,\ s) \in LXN(L),.$

<u>Ejemplo4'</u>: Su w-extensión $\hat{-}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{-}_{\hat{w}} = \sqcup^{w}$ (w-diferencia en $(L, \sqsubseteq^{w})$,

es decir: $\quad \hat{-}_{\hat{w}}(x,\ y) = (x \overset{w}{-} y) = x \sqcap^{w} y^c = x \cdot y^{c} + w \cdot (x + y^c) \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

<u>Ejemplo5</u>: Si $g = (\rightarrow)$ es la implicación tal que

$s \rightarrow x = s^c + x \quad \forall (x,\ s) \in LXN(L)$, entonces

$(\rightarrow_{\hat{w}}) = (\rightarrow)$ (esta última $(\rightarrow)$ es la w-implicación $s \rightarrow x = (s^c \sqcup^{w} x)$)

es decir $(\rightarrow_{\hat{w}})(x,\ s) = s \rightarrow x = (s^c \sqcup^{w} x) \quad \forall (x,\ s) \in LXN(L)$.

<u>Ejemplo5'</u>: Su w-extensión $\hat{\rightarrow}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\quad \hat{\rightarrow}_{\hat{w}} = (\overset{w}{\rightarrow})$ (w-implicación en $(L, \sqsubseteq^{w})$,

es decir: $\quad \hat{\rightarrow}_{\hat{w}}(x,\ y) = y \overset{w}{\rightarrow} x = (y^c \sqcup^{w} x) = x \cdot y^{c} + w^c \cdot (x + y^c) \quad \forall (x,\ y) \in LXL$.

Sobre la extensión de los residuos de los operadores inf y sup

__Proposición__. Sea L retículo broweriano y dual broweriano, sea $\hat{w}=((w,w),w)$ con $w \in N(L)$. Se verifica:

(1) Si $\rightsquigarrow$ es el residuo del operador ínfimo $(\cdot)$ en $(L,\leq)$: $x \rightsquigarrow y=\sup\{k\in L \,/\, x\cdot k \leq y\}$ $\forall (x, y)\in LXL$, entonces, su extensión $(\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}})$ coincide con $(\overset{w}{\rightsquigarrow})$, (siendo $(\overset{w}{\rightsquigarrow})$ el w-residuo de $\sqcap^{w}$ en $(L, \sqsubseteq^{w})$ tal que $x \overset{w}{\rightsquigarrow} y=\bigsqcup^{w}\{r\in L \,/\, (x\sqcap^{w}r) \sqsubseteq^{w} y\}$ $\forall (x, y)\in LXL$),

es decir: $(x \hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}} y)=(x \overset{w}{\rightsquigarrow} y)$ $\forall (x, y)\in LXL$.

En particular: $(s \hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}} y)=(s \overset{w}{\rightsquigarrow} y)=(s^{c}\sqcup^{w} y)$ $\forall (s, y)\in N(L)XL$.

(2) Si $\dot{-}$ es el co-residuo del operador supremo $(+)$ en $(L,\leq)$: $x \dot{-} y=\inf\{k\in L \,/\, x\leq y+k\}$ $\forall (x, y)\in LXL$, entonces su extensión $(\hat{\dot{-}}_{\hat{w}})$ coincide con $(\overset{w}{\dot{-}})$, (siendo $(\overset{w}{-})$ el w-coresiduo de $\bigsqcup^{w}$ en $(L, \sqsubseteq^{w})$ tal que $x \overset{w}{-} y=\sqcap^{w}\{r\in L \,/\, x \sqsubseteq^{w} (x\bigsqcup^{w} r)\}$ $\forall (x, y)\in LXL$),

es decir: $(x \hat{\dot{-}}_{\hat{w}} y)=(x \overset{w}{\dot{-}} y)$ $\forall (x, y)\in LXL$.

En particular: $(s \hat{\dot{-}}_{\hat{w}} y)=(s \overset{w}{-} y)=(s^{c}\sqcap^{w} y)$ $\forall (x, y)\in N(L)XL$.

Proposición. Sea L retículo broweriano y dual broweriano, sea $\hat{w}=((w,w),w)$ con $w \in N(L)$. Se verifica:

(1) Si $\rightsquigarrow$ es el residuo del operador ínfimo $(\cdot)$ en $(L,\leq)$: $x \rightsquigarrow y=\sup\{k\in L \,/\, x\cdot k \leq y\}$ $\forall (x, y)\in LXL$, entonces, su extensión $(\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}})$ coincide con $(\overset{w}{\rightsquigarrow})$, (siendo $(\overset{w}{\rightsquigarrow})$ el w-residuo de $\sqcap^w$ en $(L, \sqsubseteq^w)$ tal que $x\overset{w}{\rightsquigarrow}y=\bigsqcup^w\{r\in L \,/\, (x\sqcap^w r) \sqsubseteq^w y\}$ $\forall (x, y)\in LXL$),

es decir: $(x\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}}y)=(x\overset{w}{\rightsquigarrow}y)$ $\forall (x, y)\in LXL$.

En particular: $(s\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}}y)=(s\overset{w}{\rightsquigarrow}y)=(s^c\sqcup^w y)$ $\forall (s, y)\in N(L)XL$.

(2) Si $\dot{-}$ es el co-residuo del operador supremo $(+)$ en $(L,\leq)$: $x \dot{-} y=\inf\{k\in L \,/\, x\leq y+k\}$ $\forall (x, y)\in LXL$, entonces su extensión $(\hat{\dot{-}}_{\hat{w}})$ coincide con $(\overset{w}{\dot{-}})$, (siendo $(\overset{w}{-})$ el w-coresiduo de $\bigsqcup^w$ en $(L, \sqsubseteq^w)$ tal que $x\overset{w}{-}y=\sqcap^w\{r\in L \,/\, x \sqsubseteq^w (x\bigsqcup^w r)\}$ $\forall (x, y)\in LXL$),

es decir: $(x\hat{\dot{-}}_{\hat{w}}y)=(x\overset{w}{\dot{-}}y)$ $\forall (x, y)\in LXL$.

En particular: $(s\hat{-}_{\hat{w}}y)=(s\overset{w}{-}y)=(s^c\sqcap^w y)$ $\forall (x, y)\in N(L)XL$.

Demostración. (1) $[x(\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}})y]=\varphi_w[\varphi_w(x)(\rightsquigarrow)\varphi_w(y)]=[(x\Delta w)(\rightsquigarrow)(y\Delta w)]\Delta w=[\sup\{k\Delta w\in L \,/\, (x\Delta w)\cdot(k\Delta w)\leq(y\Delta w)\}]\Delta w=$
$(\bigsqcup^w\{k\Delta w\Delta w\in L \,/\, (x\sqcap^w k)\Delta w\leq(y\Delta w)\})=(\bigsqcup^w\{k\in L \,/\, (x\sqcap^w k)\sqsubseteq^w y\})=[x(\overset{w}{\rightsquigarrow})y]$.

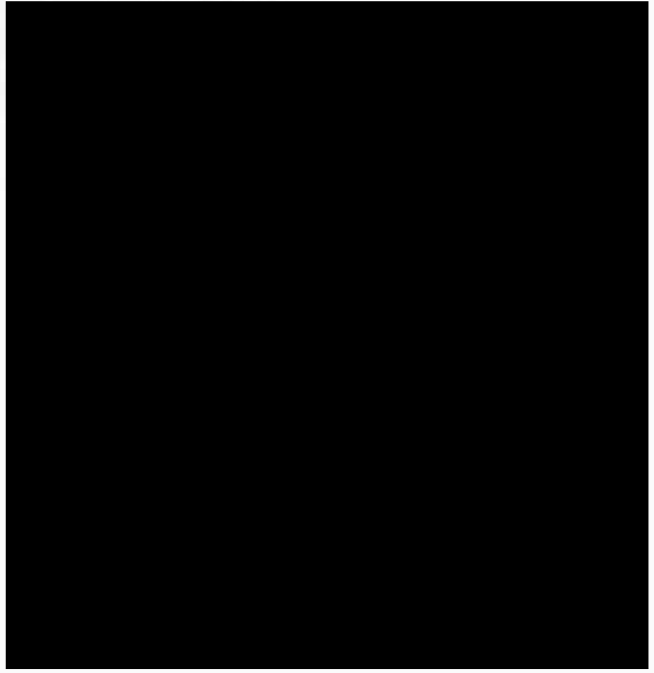
En particular, si s es complementado tal que $s^c=s'$, entonces, para todo y, el residuo $(s\overset{w}{\rightsquigarrow}y)=(s^c\sqcup^w y)$, luego por el apartado anterior, también $(s(\hat{\rightsquigarrow}_{\hat{w}})y)=(s^c\sqcup^w y)$.

(2) La demostración de este apartado es análoga a la del anterior.∎

Ejemplo. Comportamiento de las familias $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$ y $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$ de los subconjuntos ordinarios de nivel de un L-borroso A, de su núcleo KER(A) y de su soporte SUPP(A), en el álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W),^c)$

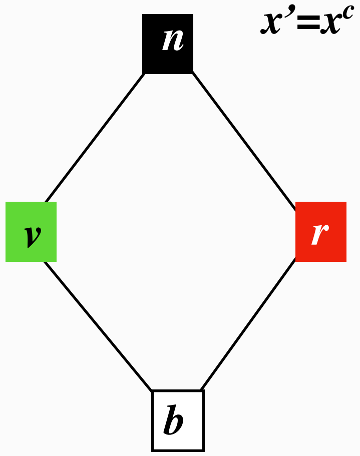
Ejemplo de expresión de la w-pertenencia de un L-borroso mediante su familia de α-cortes

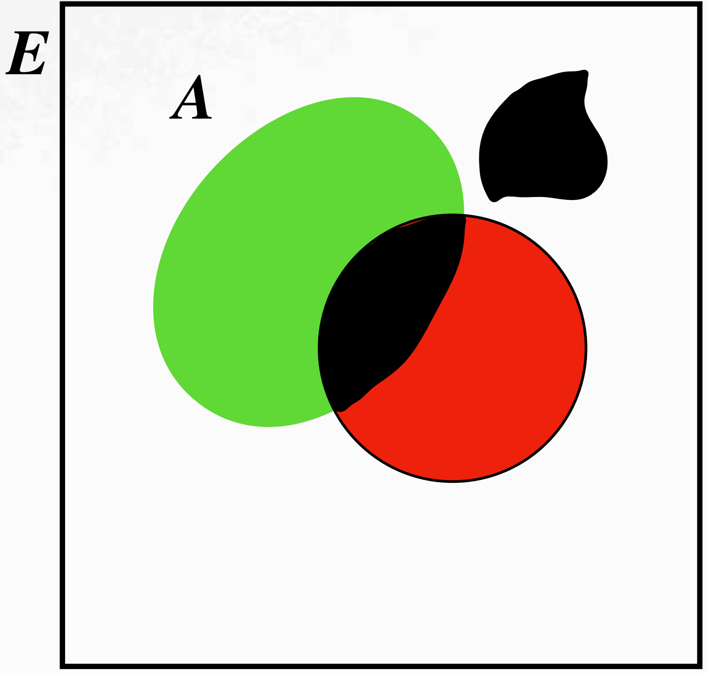
E



$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$

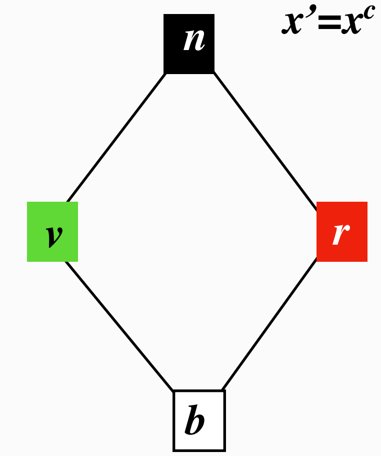


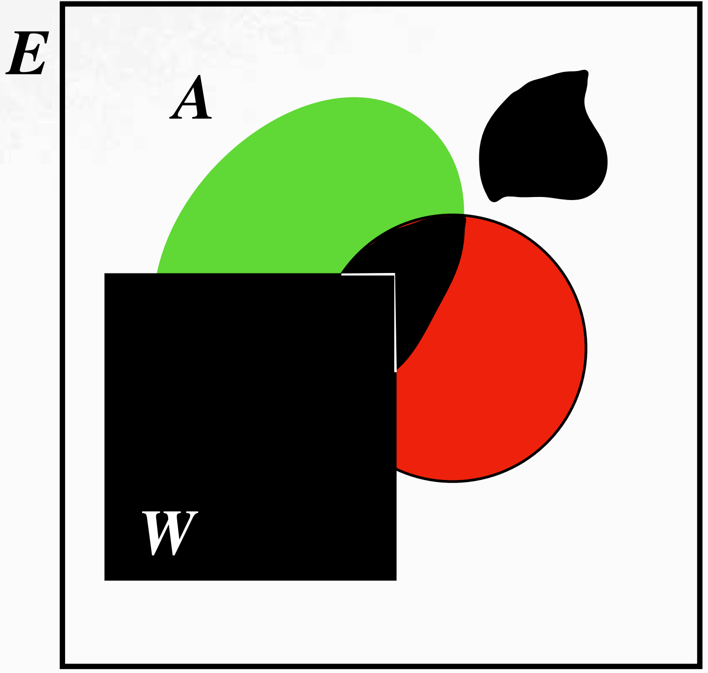


$A: E \to L$

$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$



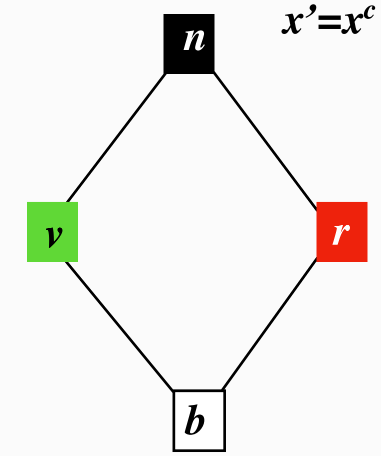


$A: E \to L$, $W: E \to L$

W *nítido* ($W(E) \subseteq \{\boxed{b}, \boxed{n}\}$)

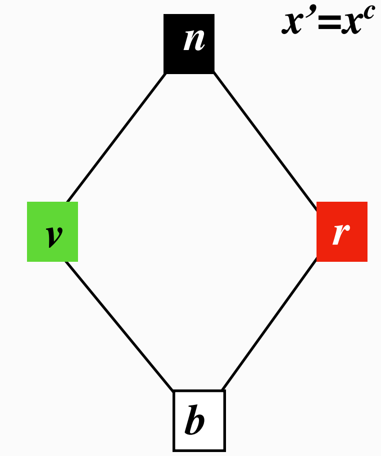
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

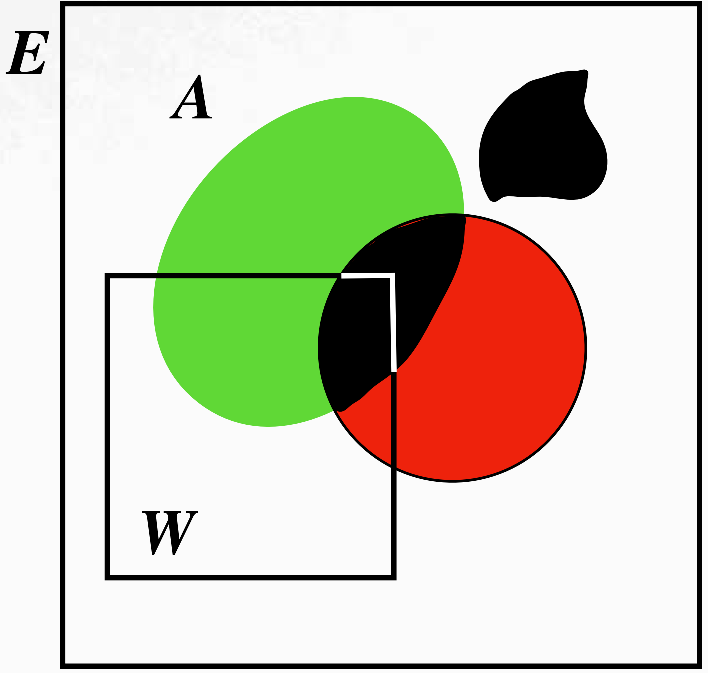
$x' = x^c$



$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$



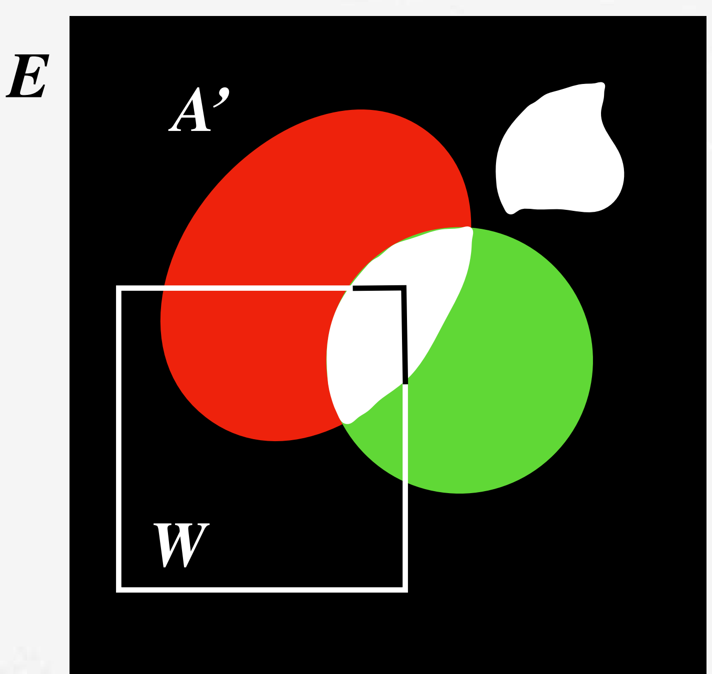


$A: E \to L \ , \ W: E \to L$

W nítido ($W(E) \subseteq \{ \boxed{b}, \boxed{n} \}$)

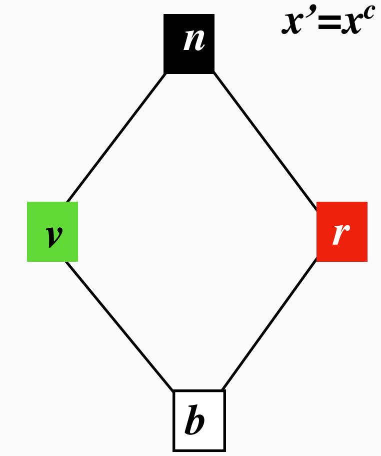
$A': E \to L \ ,$

$A'(x) = (A(x))' = (A(x))^c \ \forall x \in E$

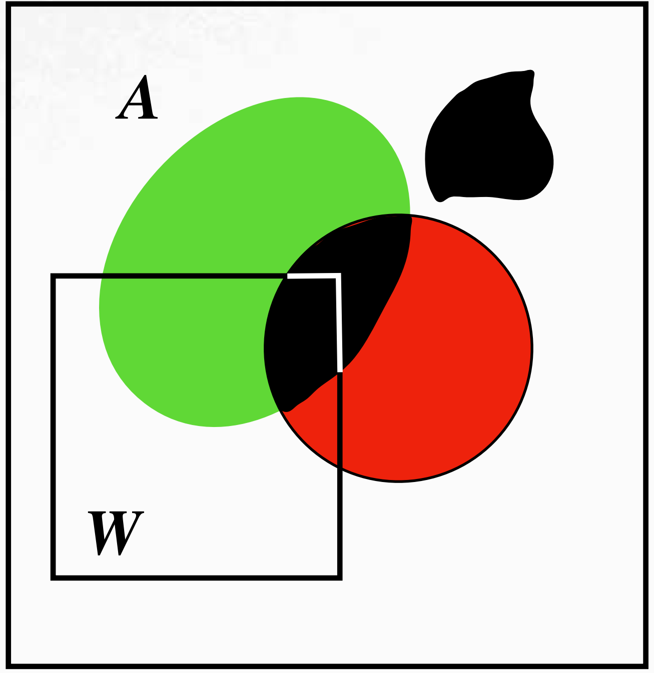


$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \blacksquare n), ')$

$x' = x^c$



E



$$A : E \to L \;,\; W : E \to L$$

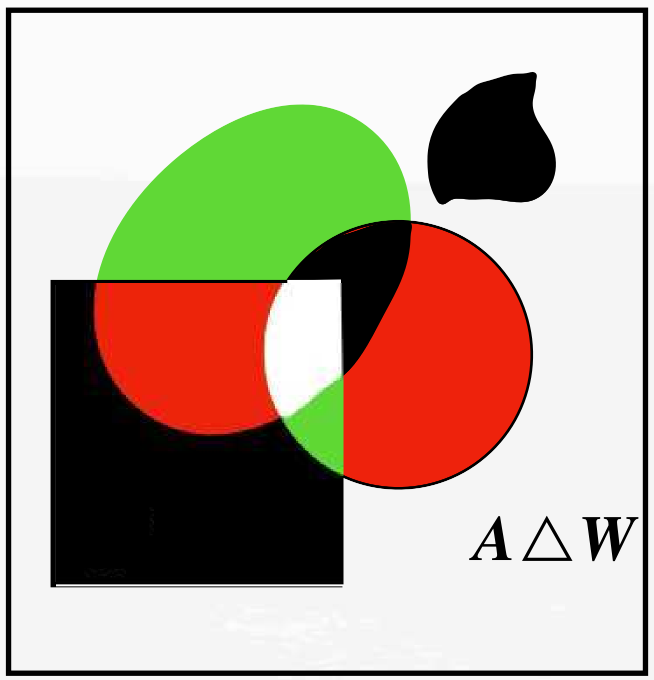
$$W \text{ nítido } (\, W(E) \subseteq \{ \boxed{b}, \blacksquare n \} \,)$$

$$A' : E \to L \,,$$

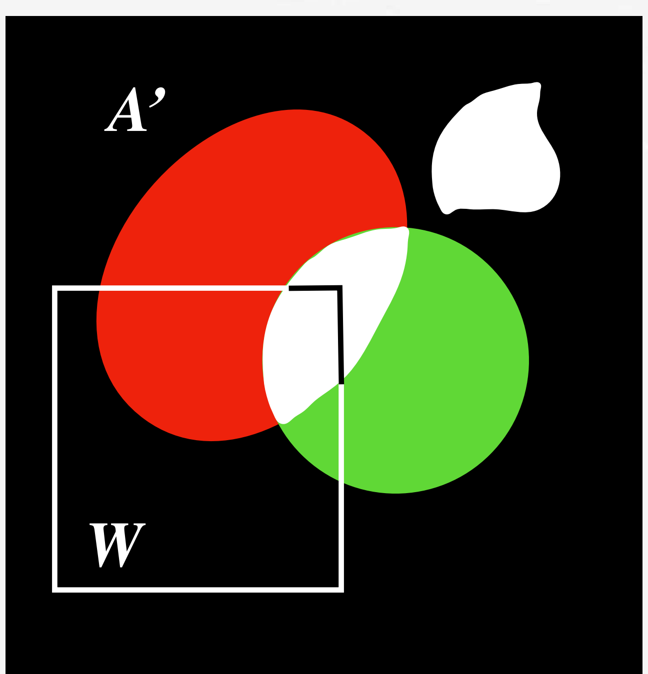
$$A'(x) = (A(x))' = (A(x))^c \;\forall x \in E$$

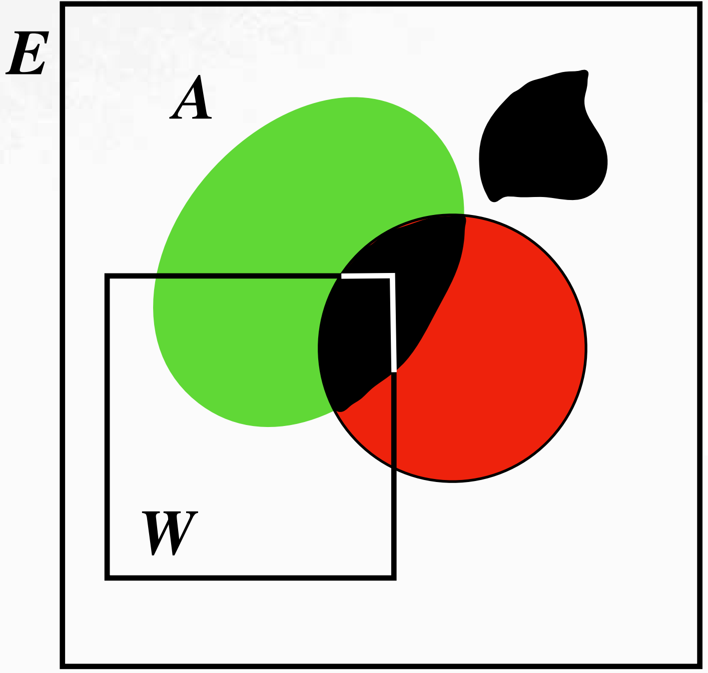
$$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$$

E

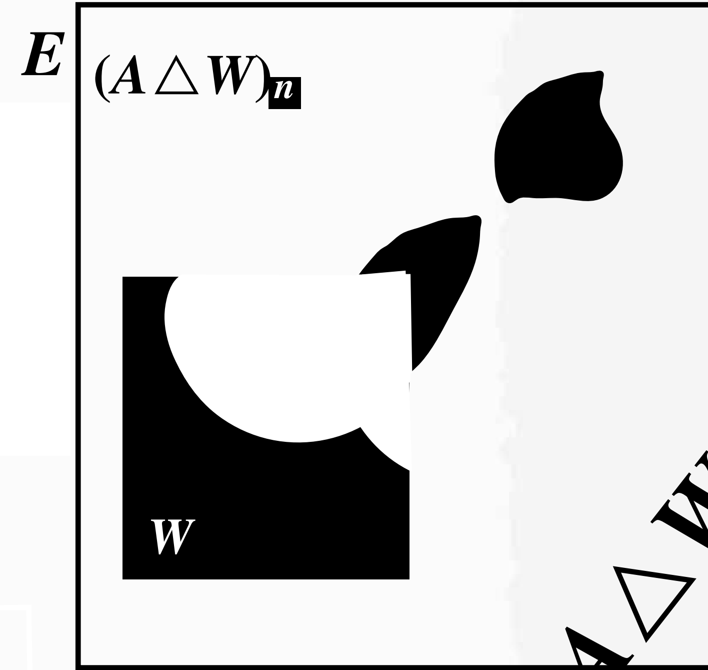


E



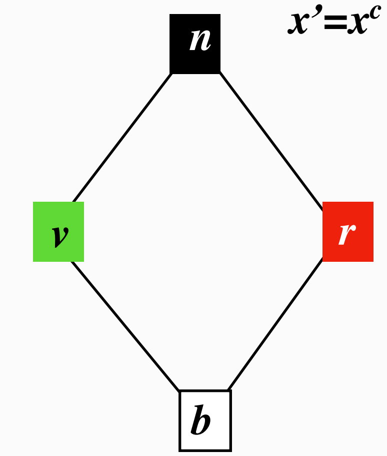


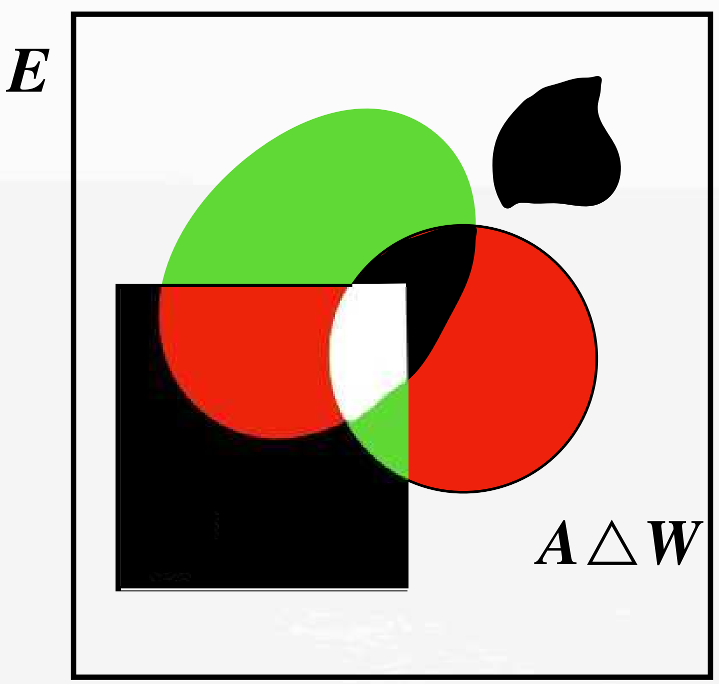
$$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$$

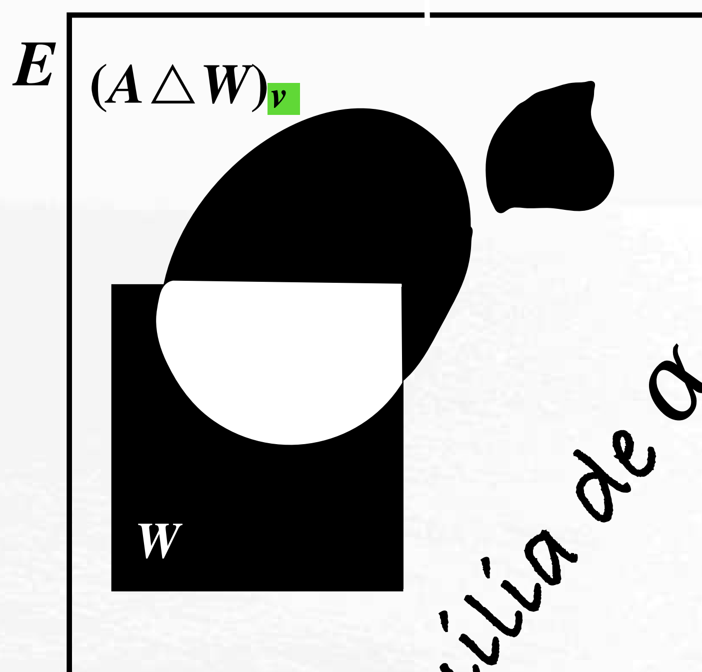


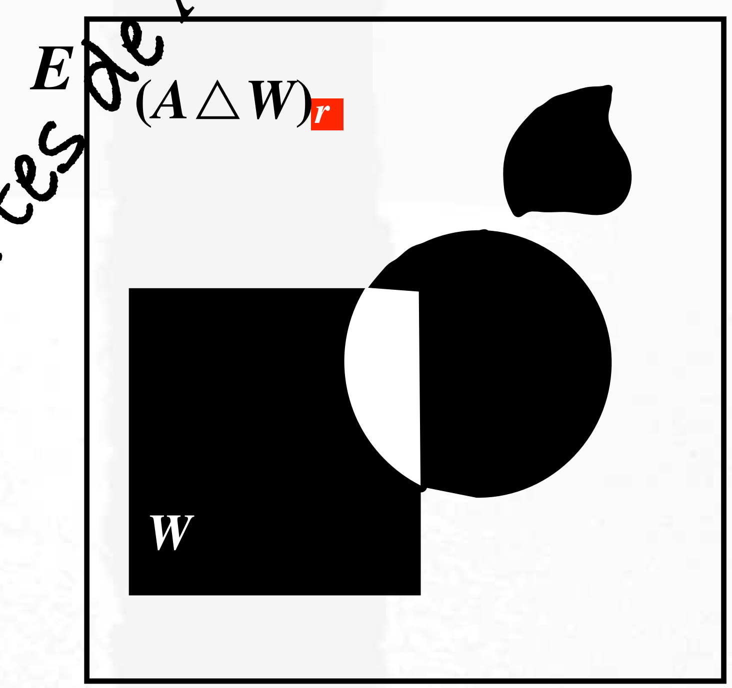
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$





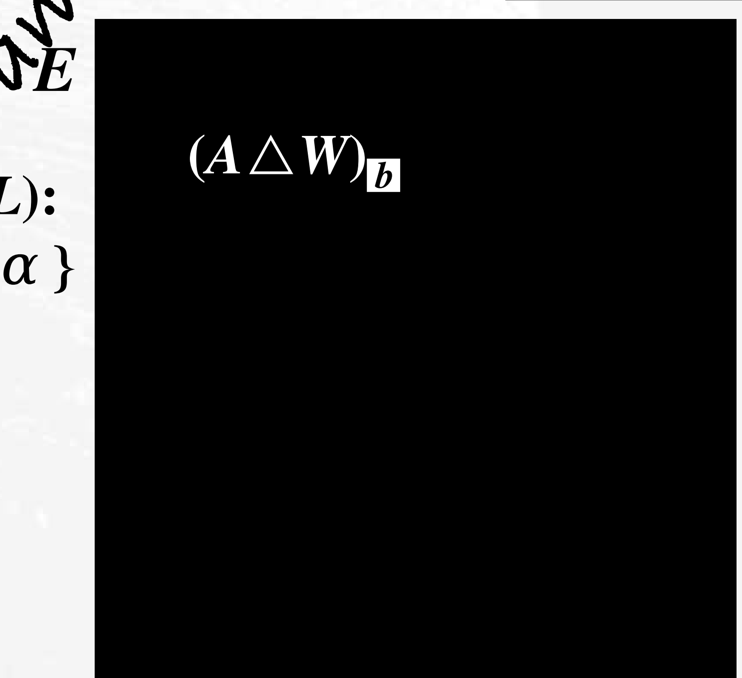


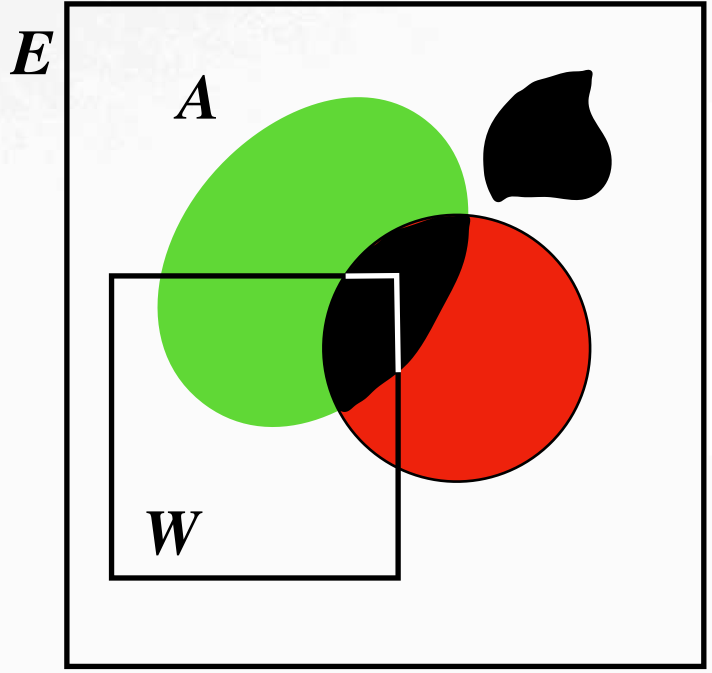


Família de α-cortes de $A \triangle W$

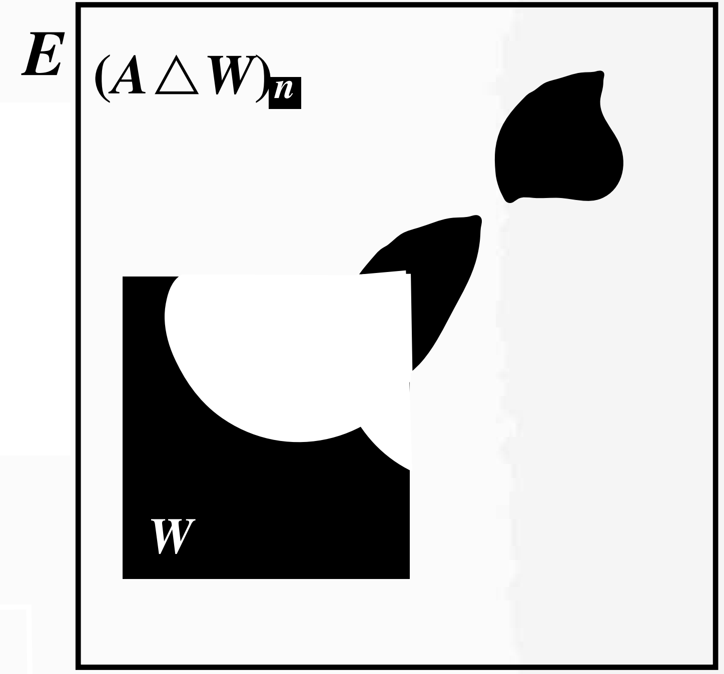
α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$$(A \triangle W)_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$$



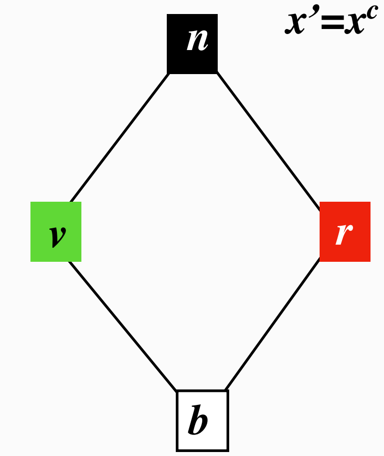


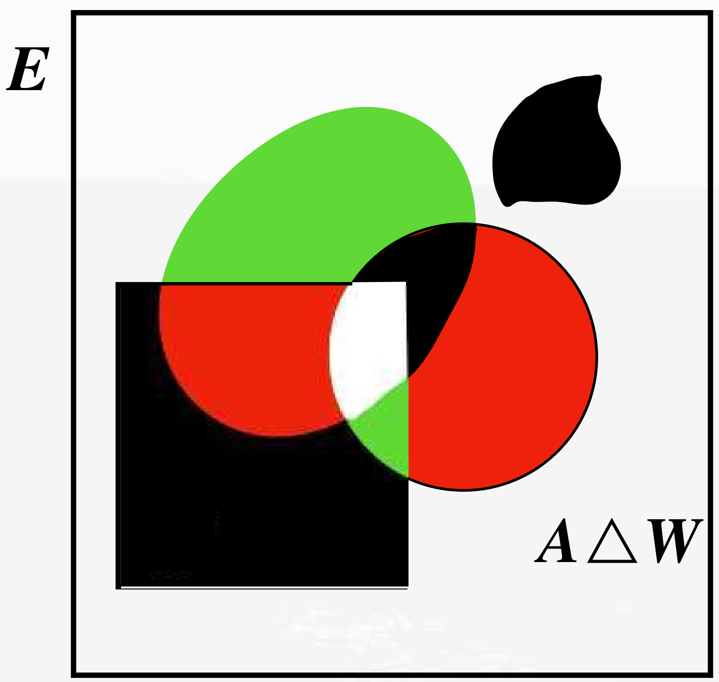
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

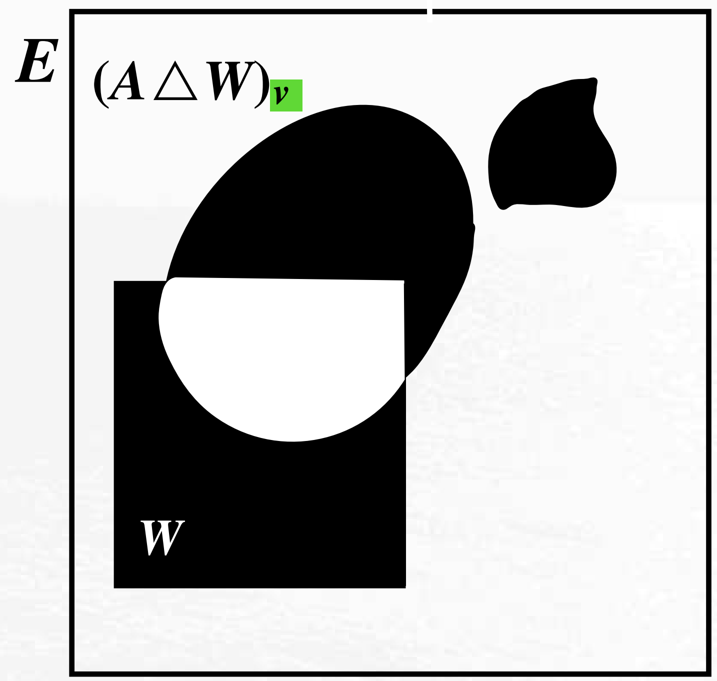


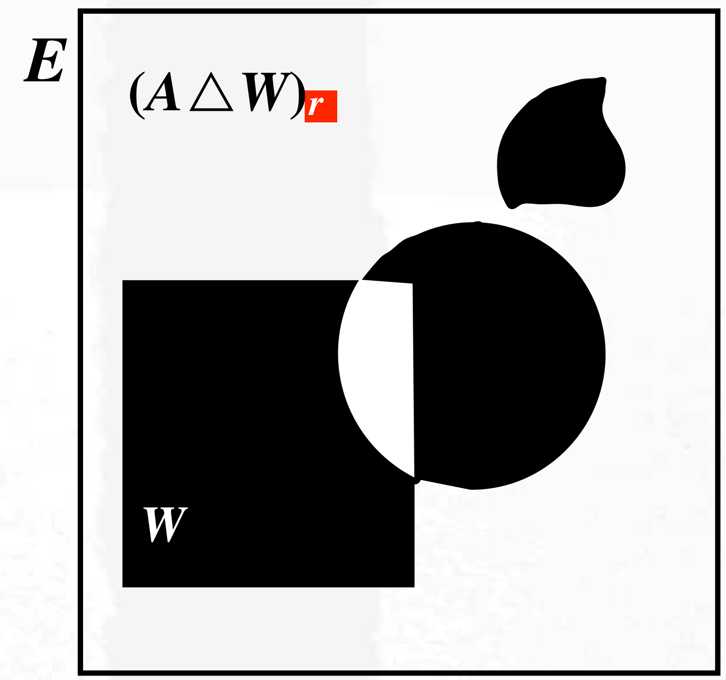
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$



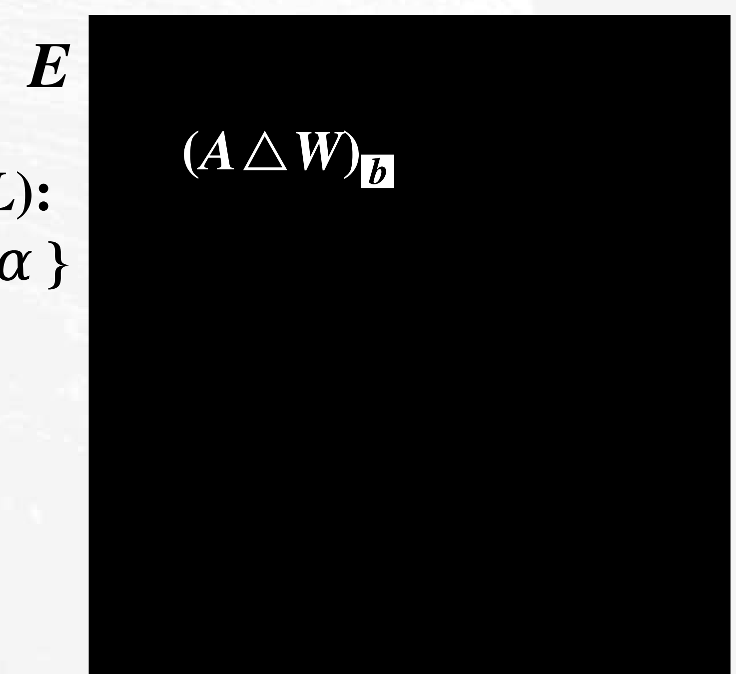






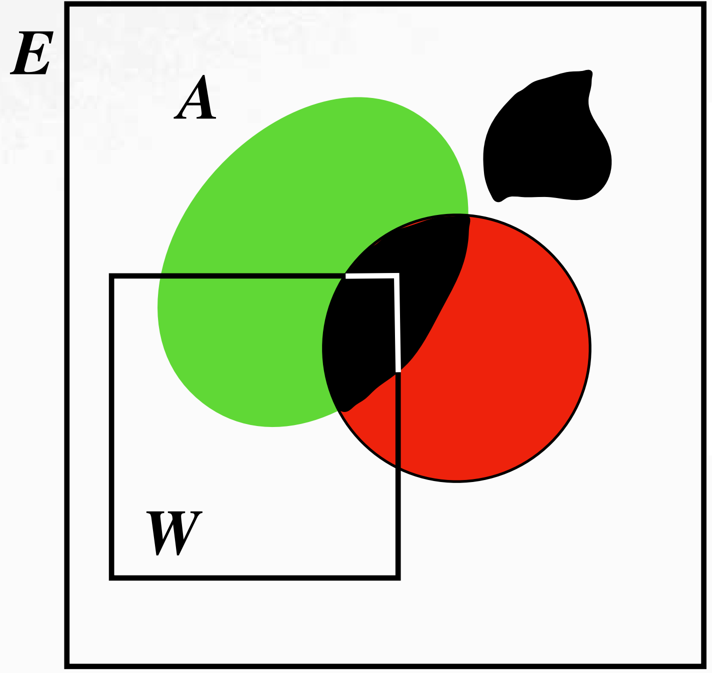
α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$(A \triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$

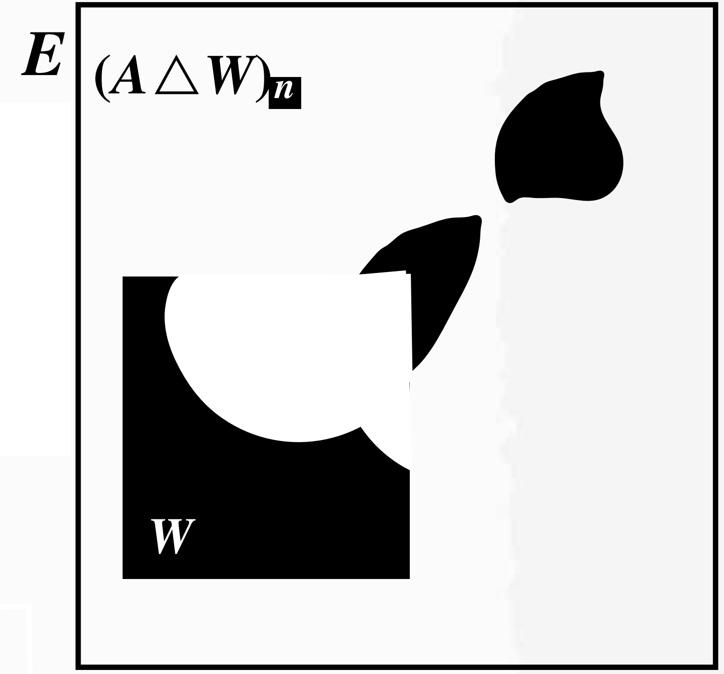


En función de α-cortes:

$A \triangle W$

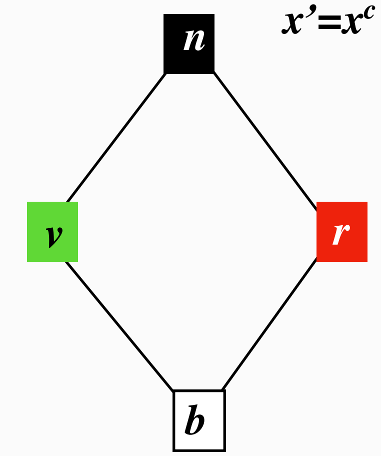


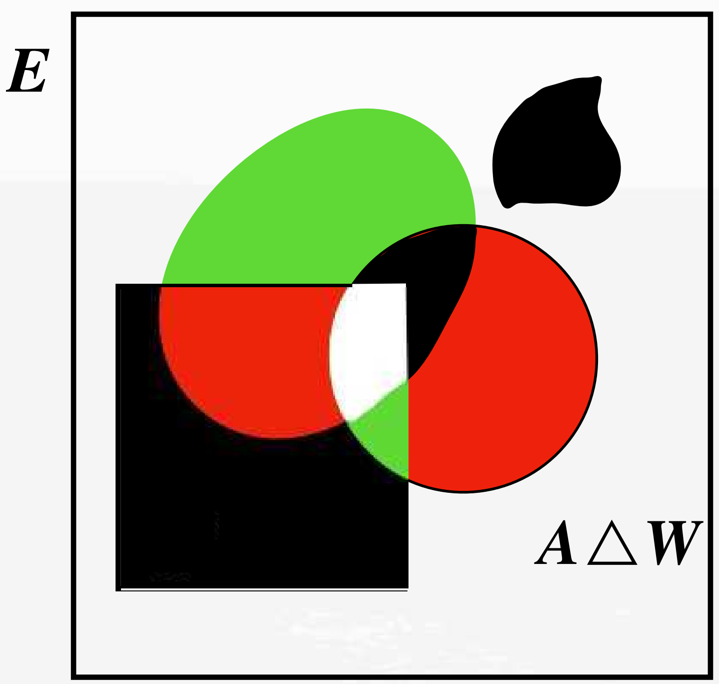
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

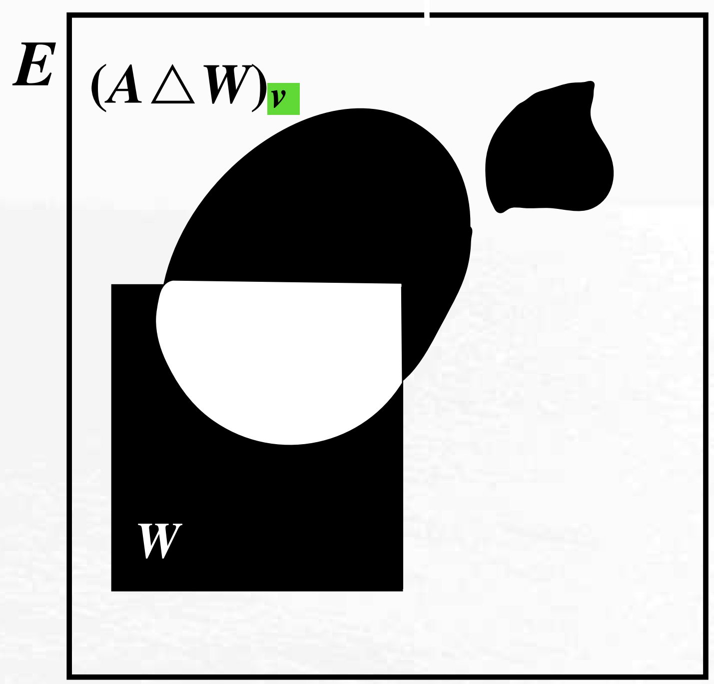


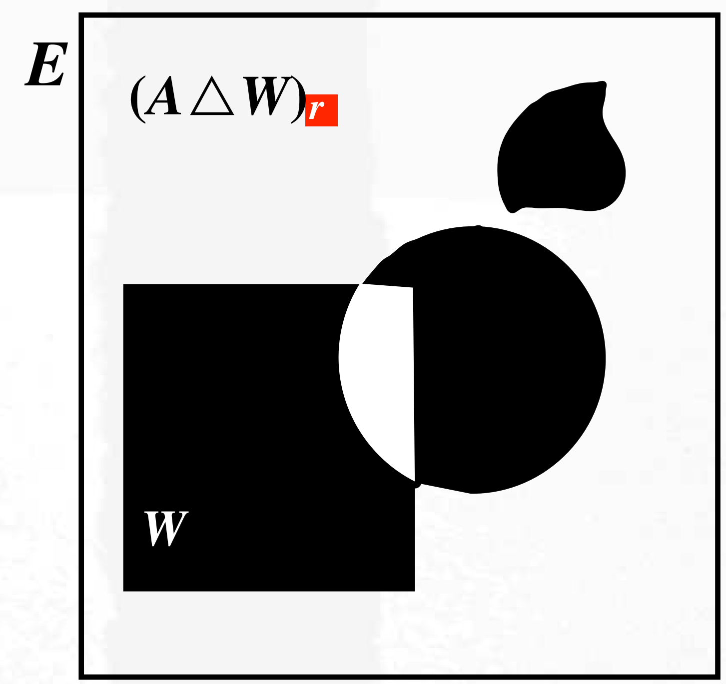
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$









E

α-cortes de $A \triangle W$, ($\alpha \in L$):

$(A \triangle W)_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$

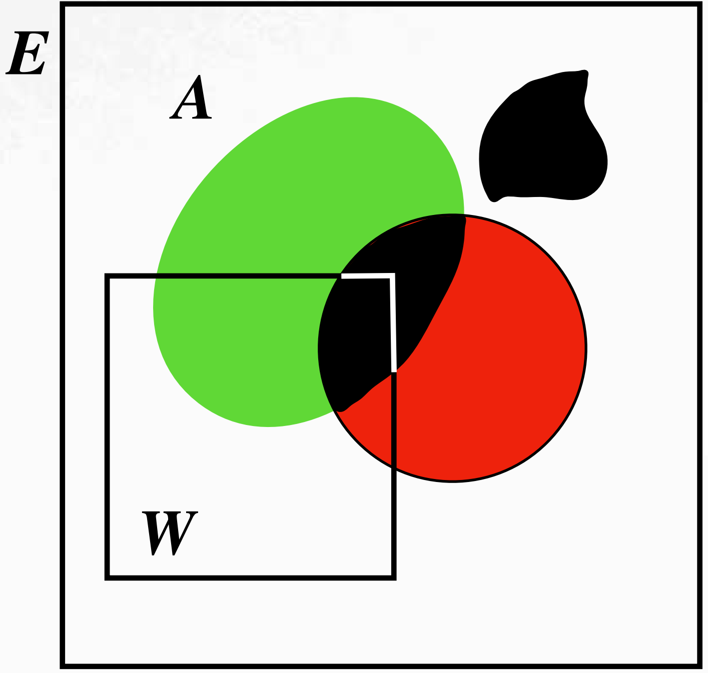
$(A \triangle W)_b$

(Se puede prescindir de

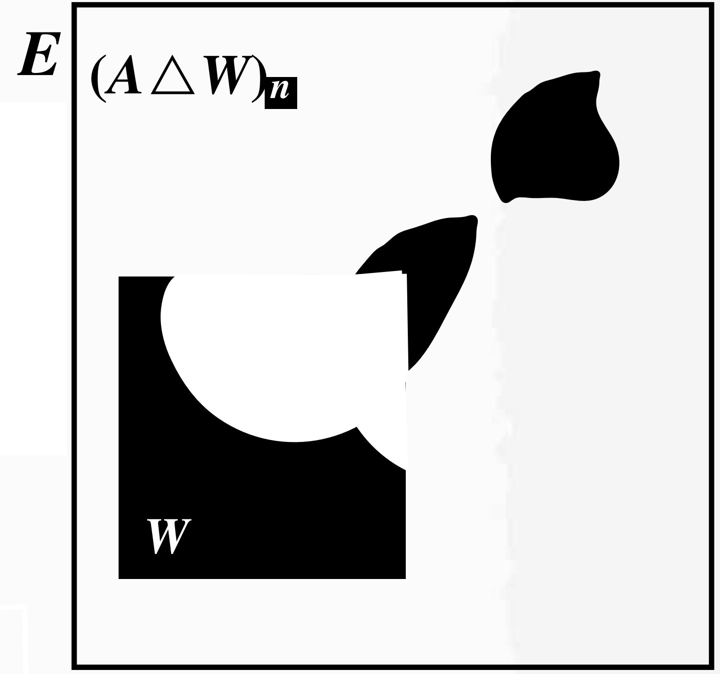
$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\mathfrak{b}} = \boxed{\mathfrak{b}}$)

En función de α-cortes:

$A \triangle W =$

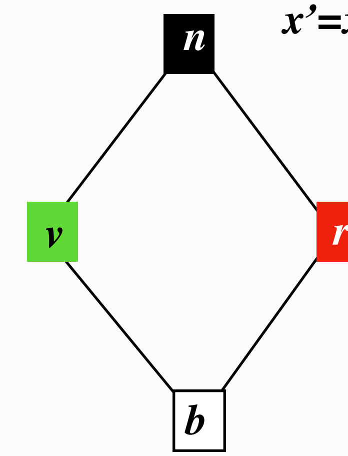


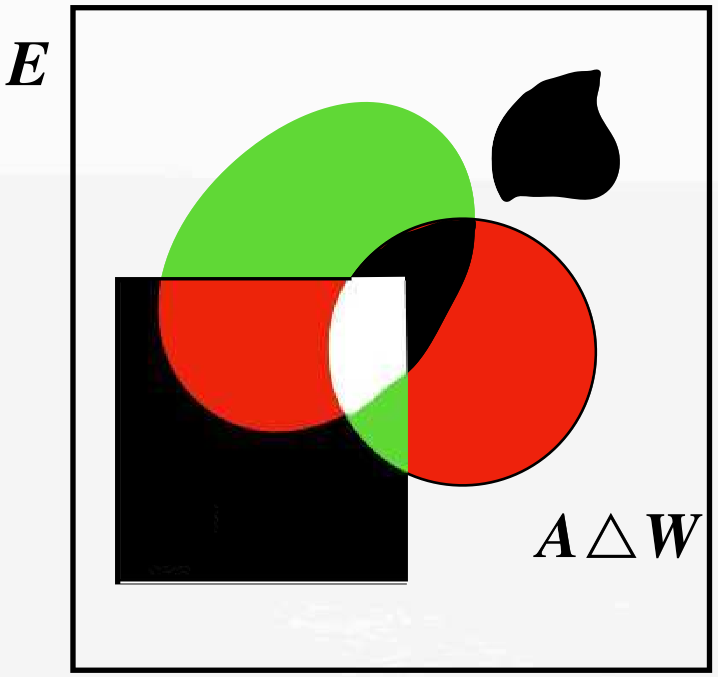
$$A\triangle W = A\cdot W^c + A'\cdot W$$

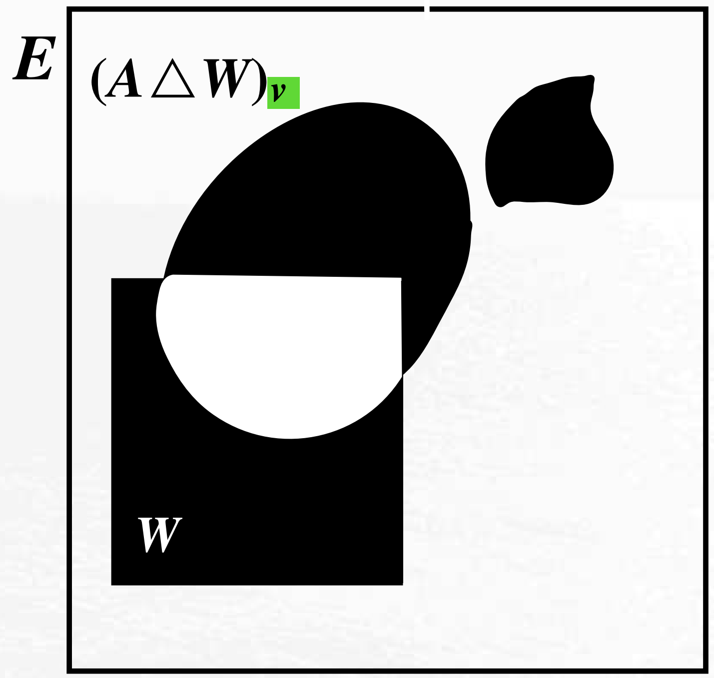


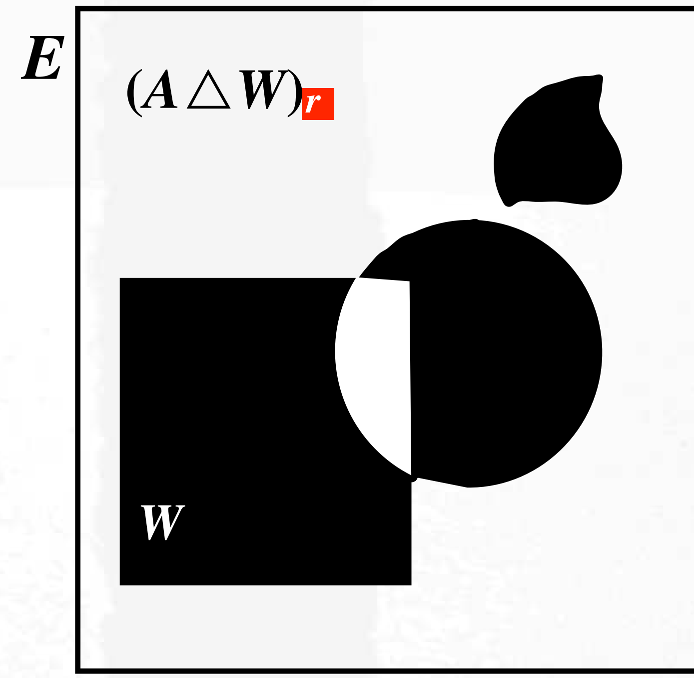
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \blacksquare n), ')$

$x' = x^c$









E

α**-cortes de** $A\triangle W$, $(\alpha\in L)$:

$(A\triangle W)_\alpha = \{\, x\in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$

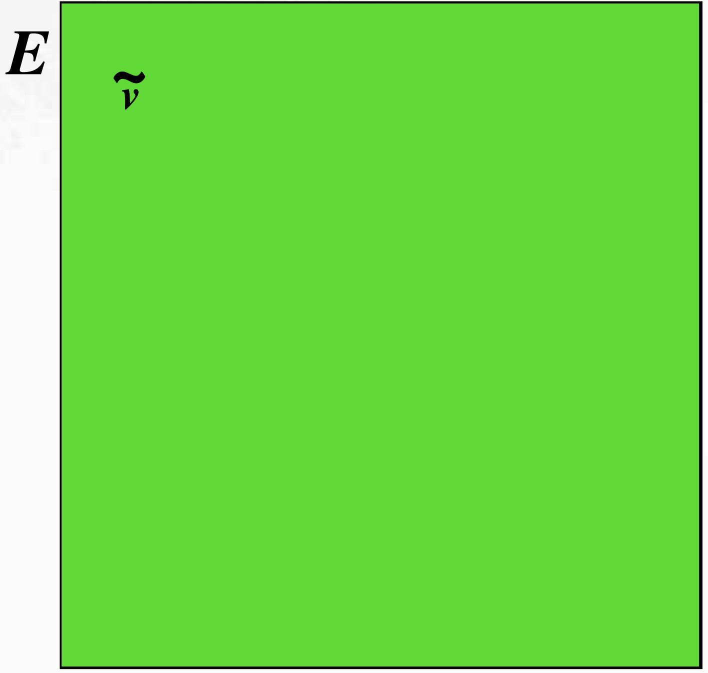
(Se puede prescindir de

$(A\triangle W)_{\boxed{b}}\cdot \boxed{\mathfrak{b}} = \boxed{\mathfrak{b}}$)

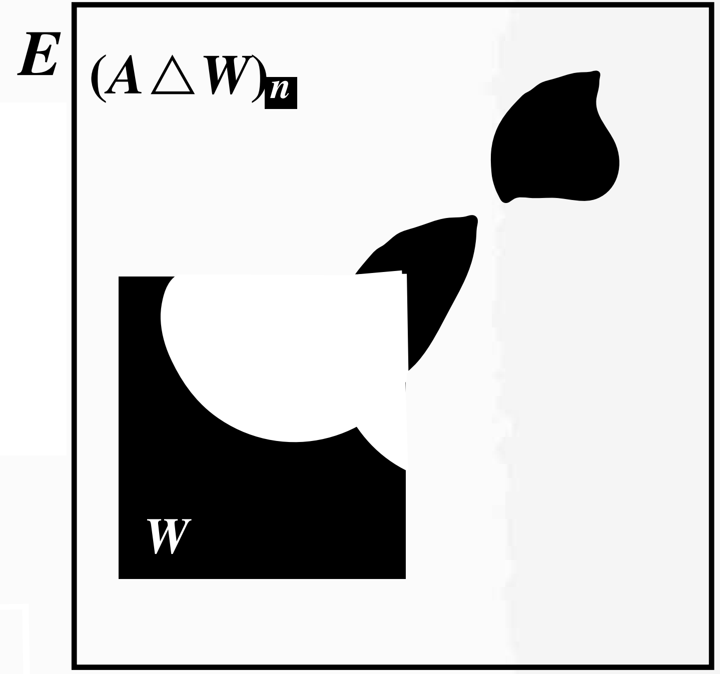
En función de α-cortes:

$A\triangle W =$

$(A\triangle W)_v$

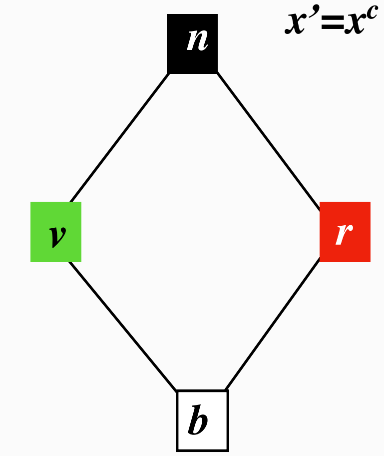


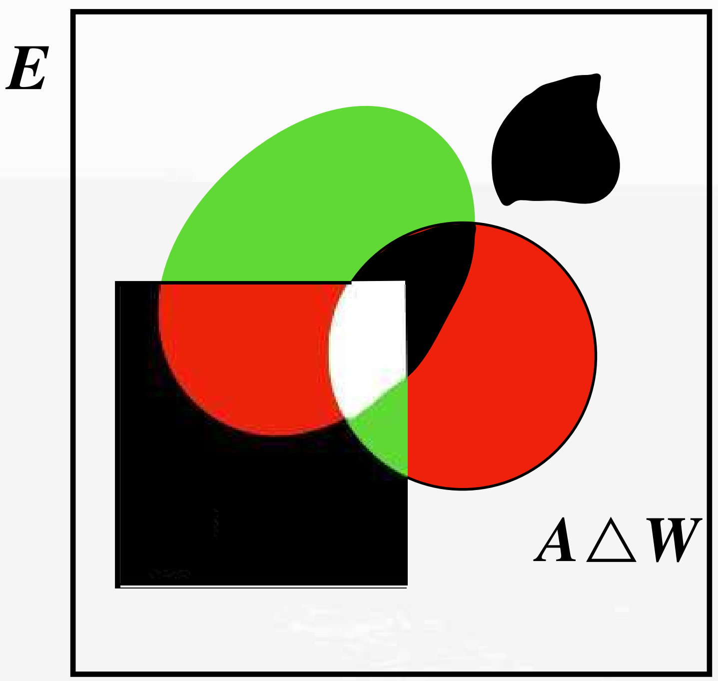
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

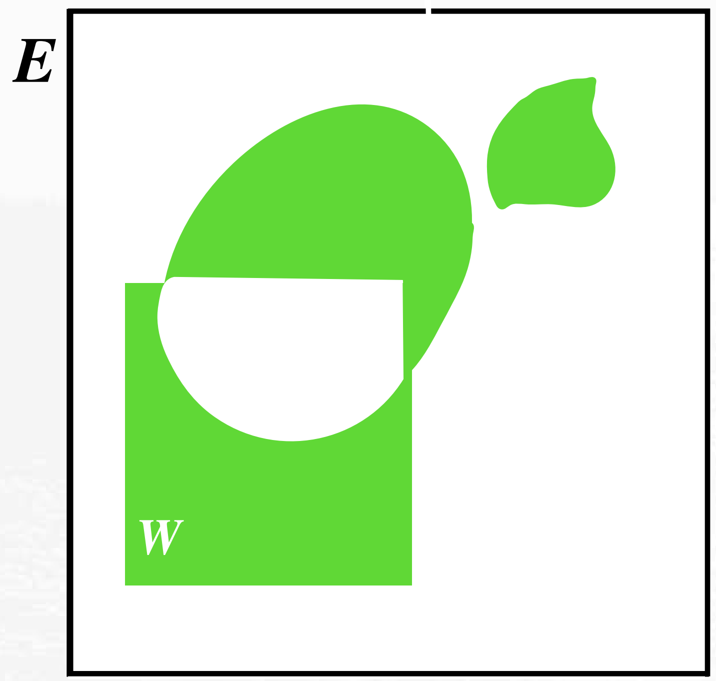


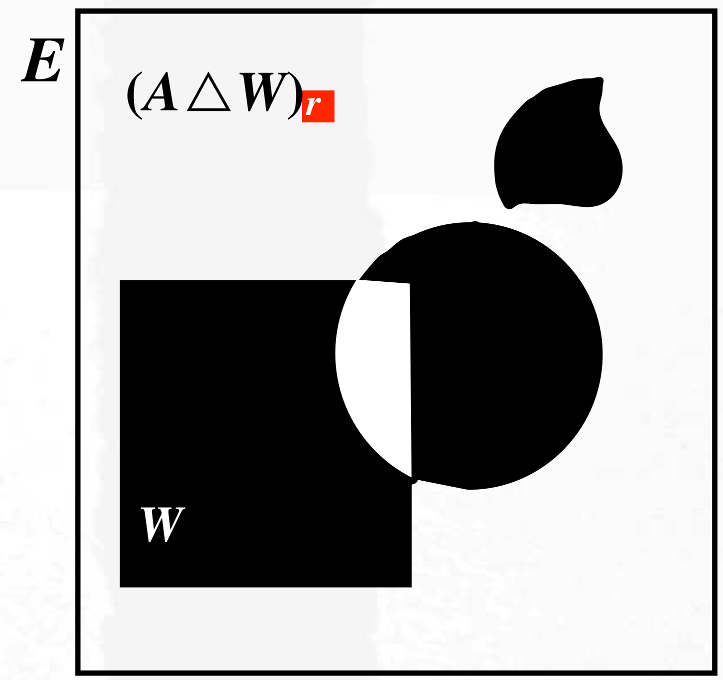
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}, ')$

$x' = x^c$









E

α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$(A \triangle W)_{\alpha} = \{ x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \}$

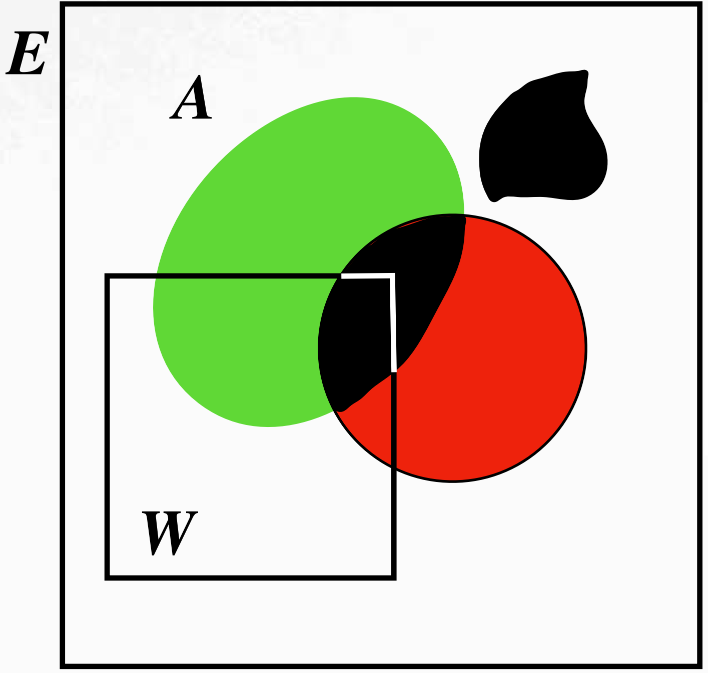
(Se puede prescindir de

$(A \triangle W)_{b} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

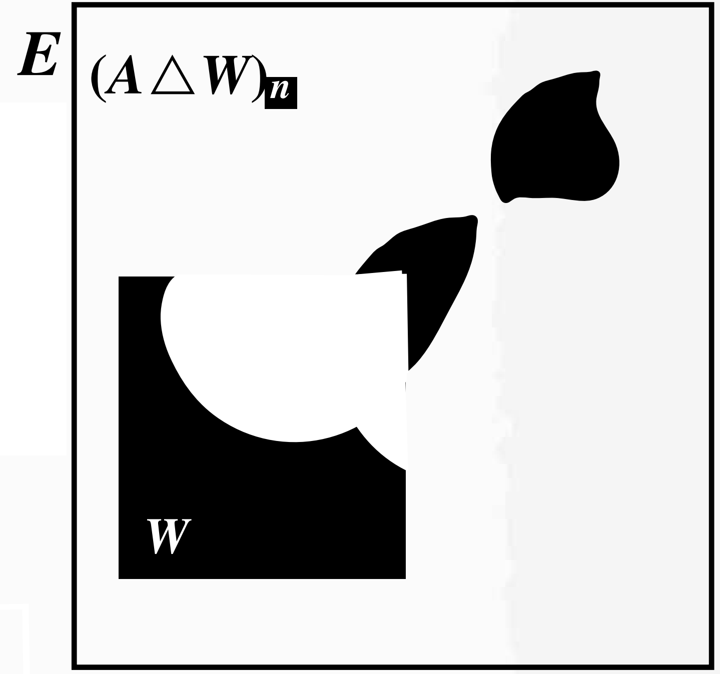
En función de α-cortes:

$A \triangle W =$

$(A \triangle W)_{v} \cdot \boxed{\tilde{v}}$

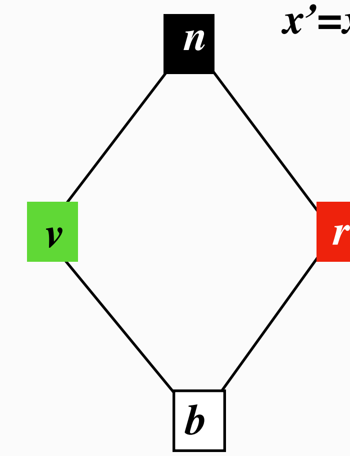


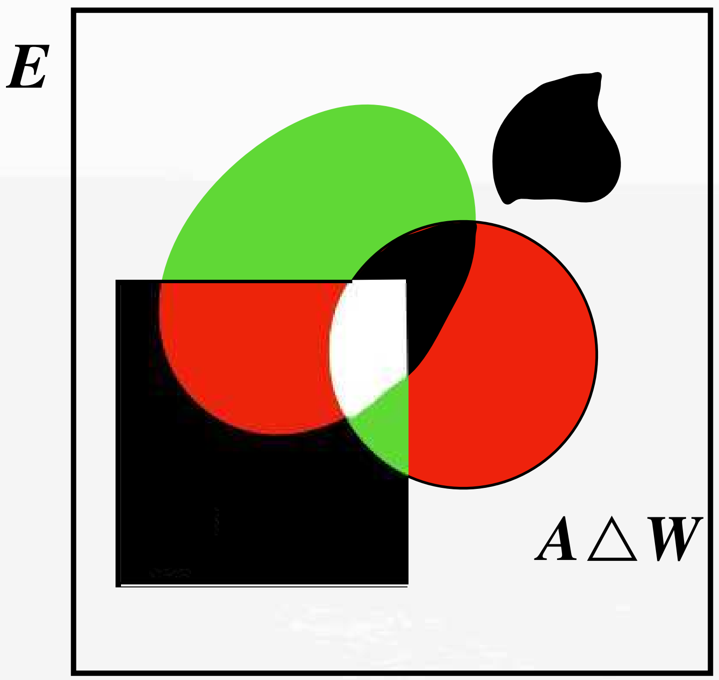
$A \triangle W = A{\cdot}W^c + A'{\cdot}W$

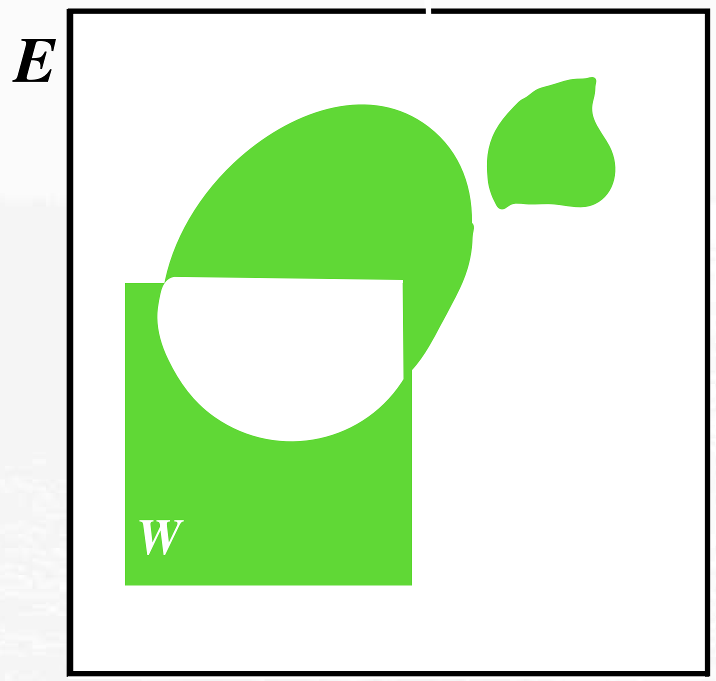


$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

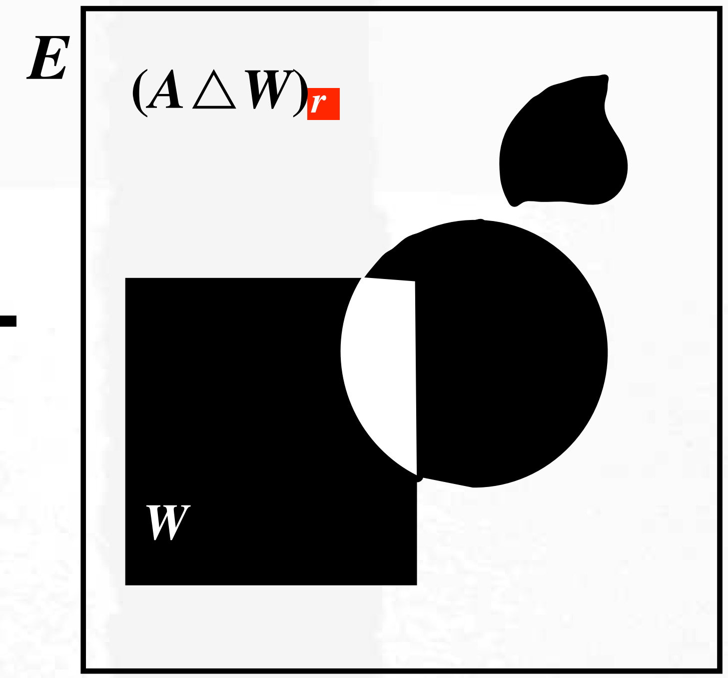
$x' = x^c$







+



E

α-cortes de $A \triangle W$, ($\alpha \in L$):

$(A \triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$

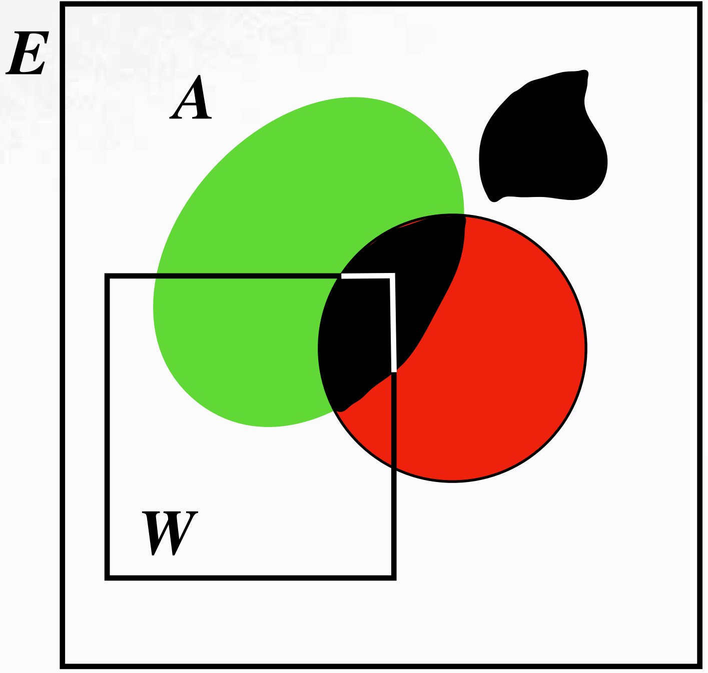
(Se puede prescindir de

$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

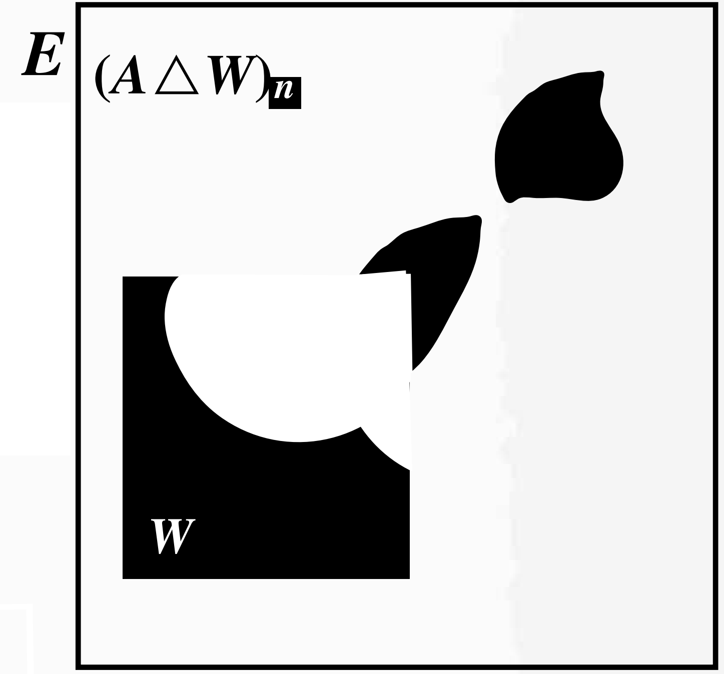
En función de α-cortes:

$A \triangle W =$

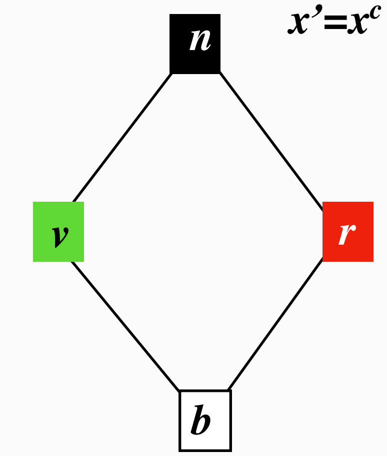
$(A \triangle W)_{\boxed{v}} \cdot \boxed{\tilde{v}}$ +

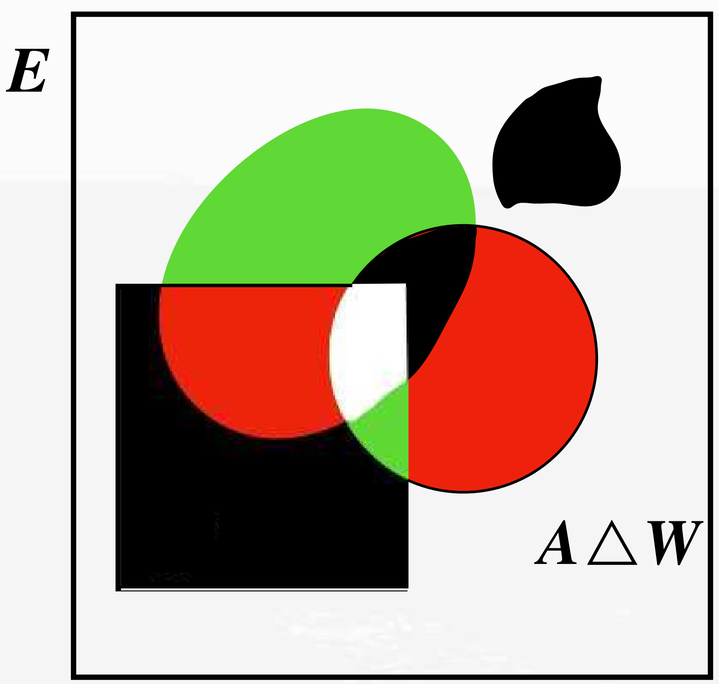


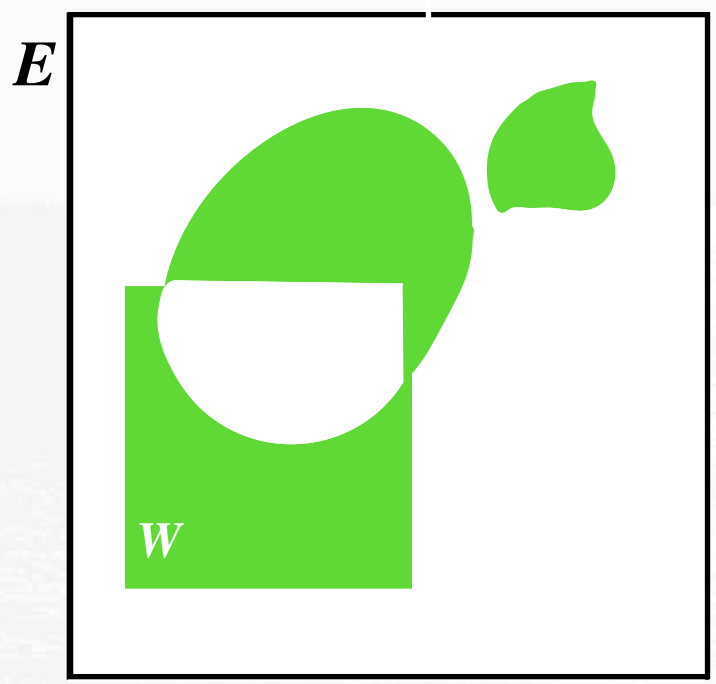
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$



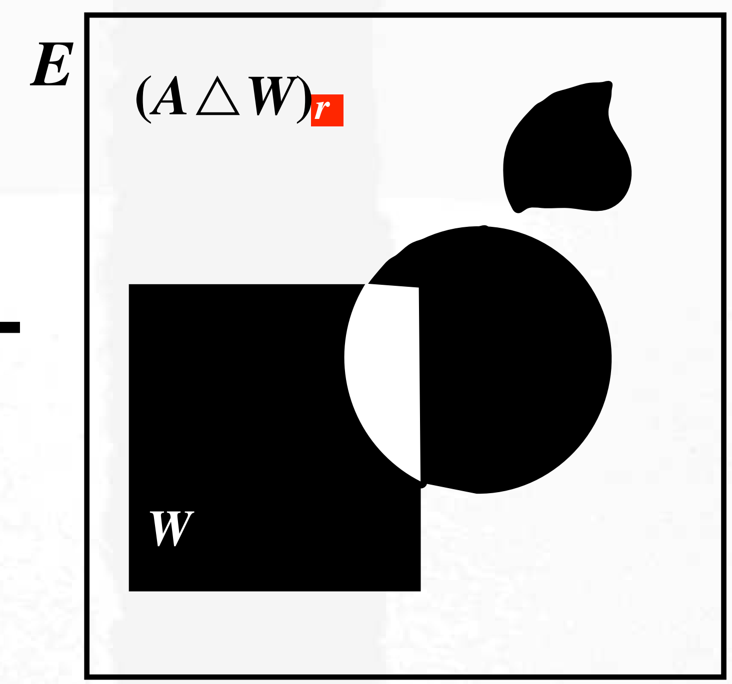
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$
$x' = x^c$







+



α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:
$(A \triangle W)_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$

(Se puede prescindir de
$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

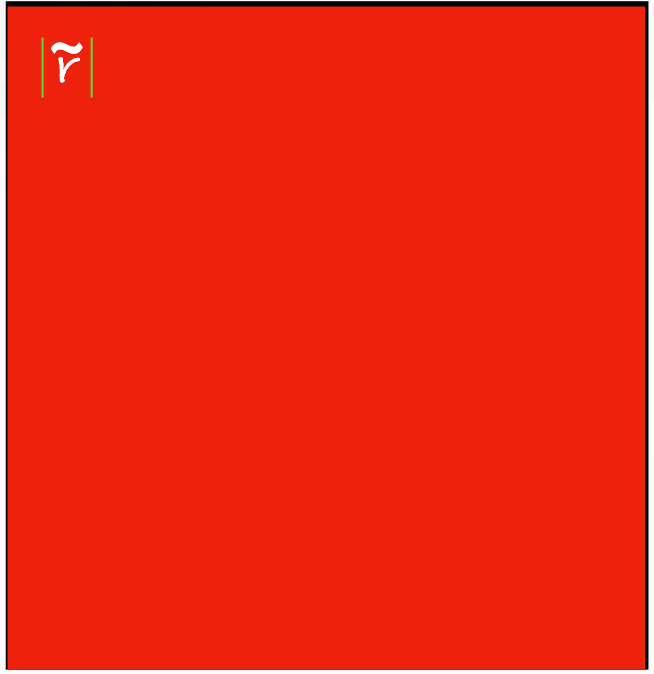
En función de α-cortes:

$A \triangle W =$

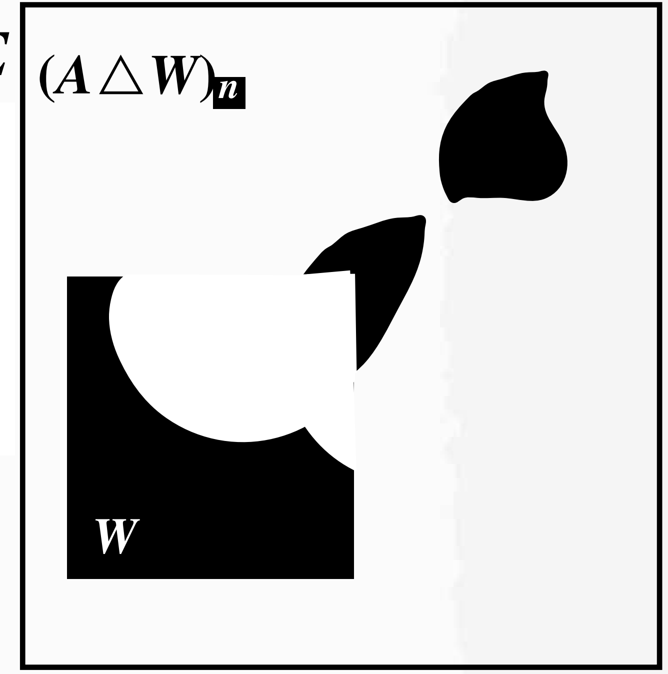
$(A \triangle W)_{\boxed{v}} \cdot \boxed{\tilde{v}} +$

$(A \triangle W)_{\boxed{r}}$

E

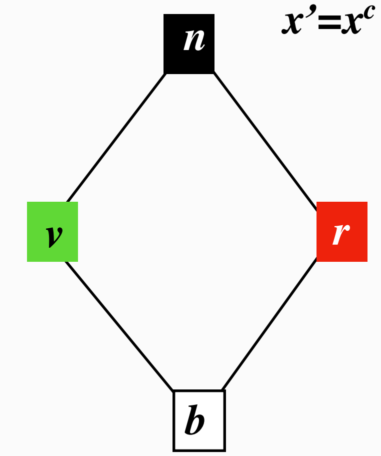


E



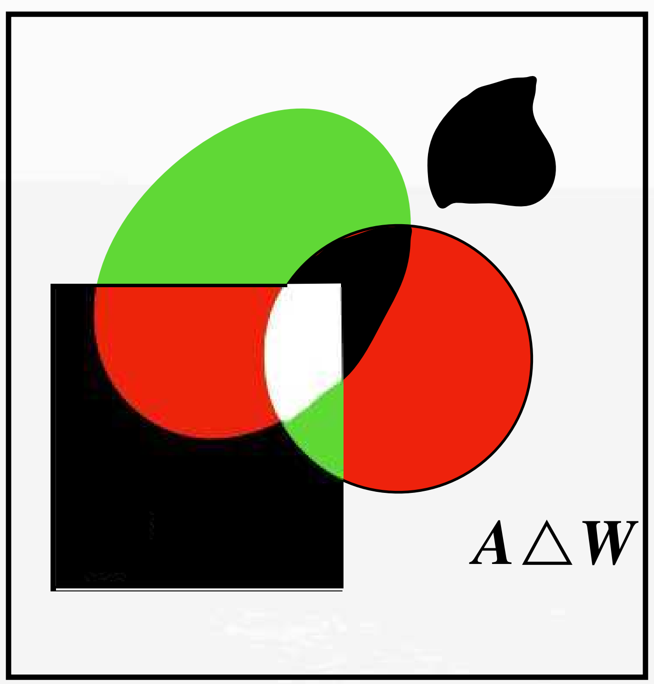
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}, ')$

$x' = x^c$

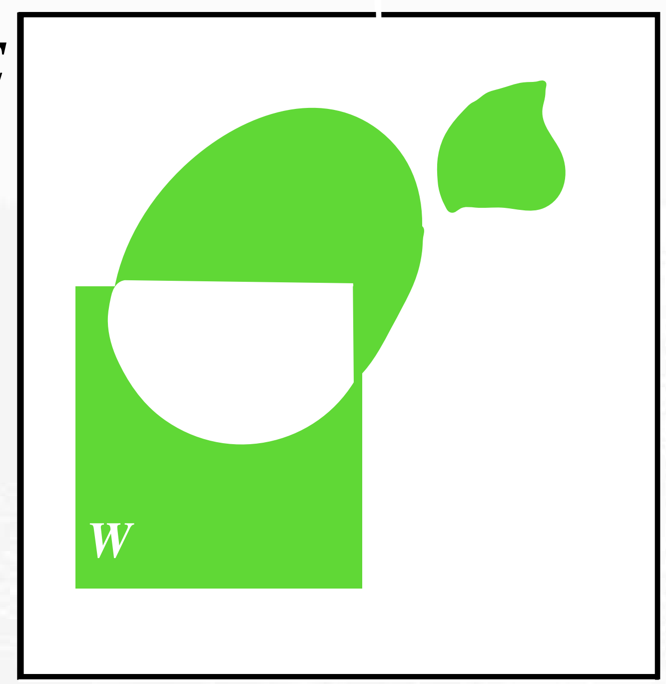


$$A \triangle W = A\cdot W^c + A'\cdot W$$

E

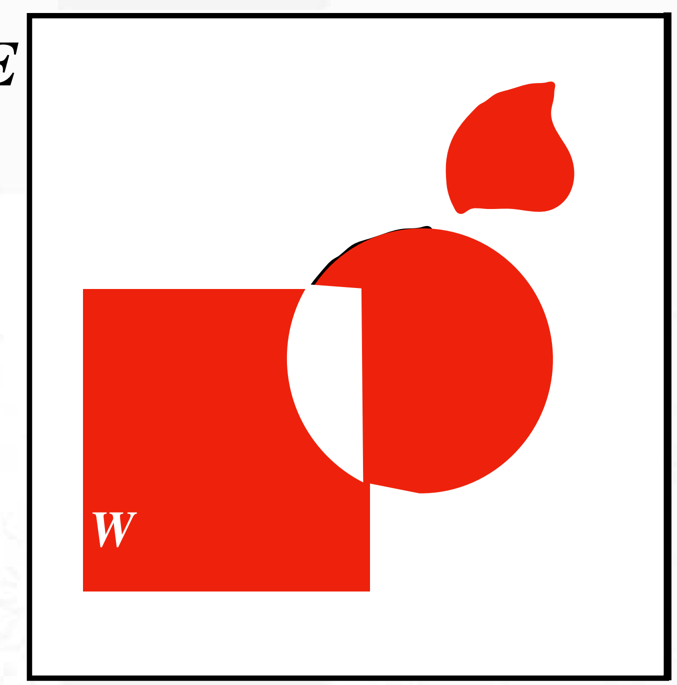


E



+

E



E

α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$$(A \triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$$

(Se puede prescindir de

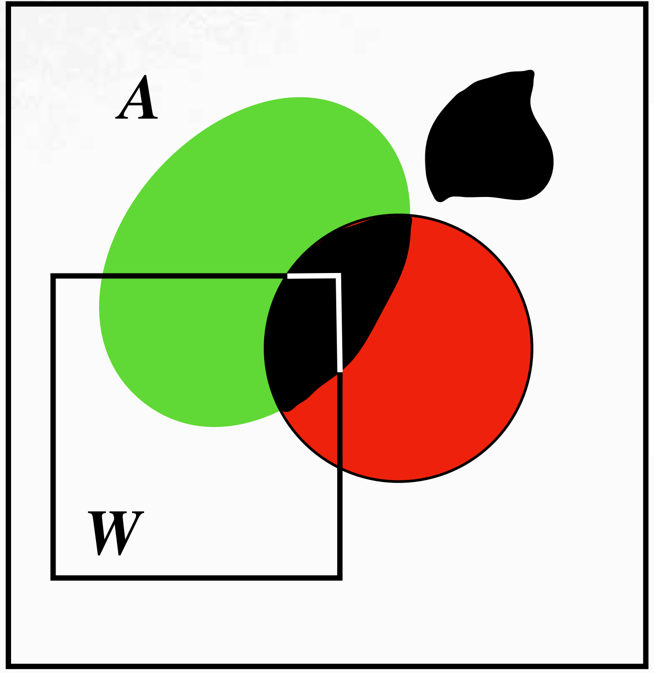
$(A \triangle W)_{b} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

En función de α-cortes:

$$A \triangle W =$$

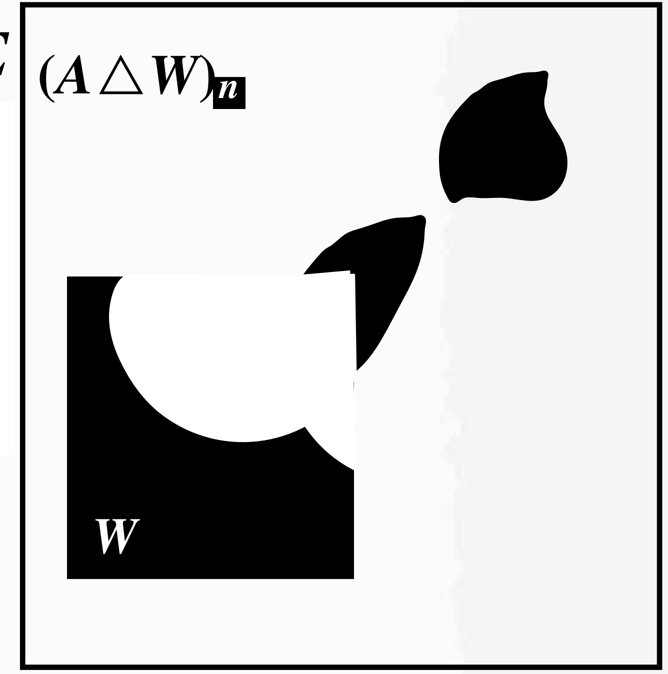
$$(A \triangle W)_{v} \cdot \tilde{v} \; +$$

$$(A \triangle W)_{r} \cdot \tilde{r}$$

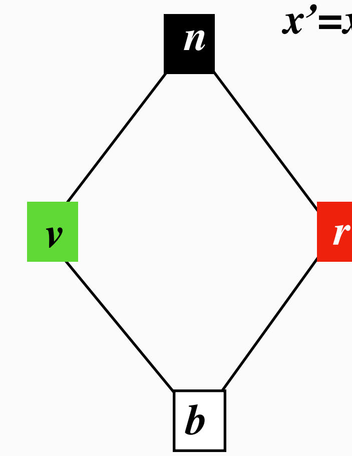


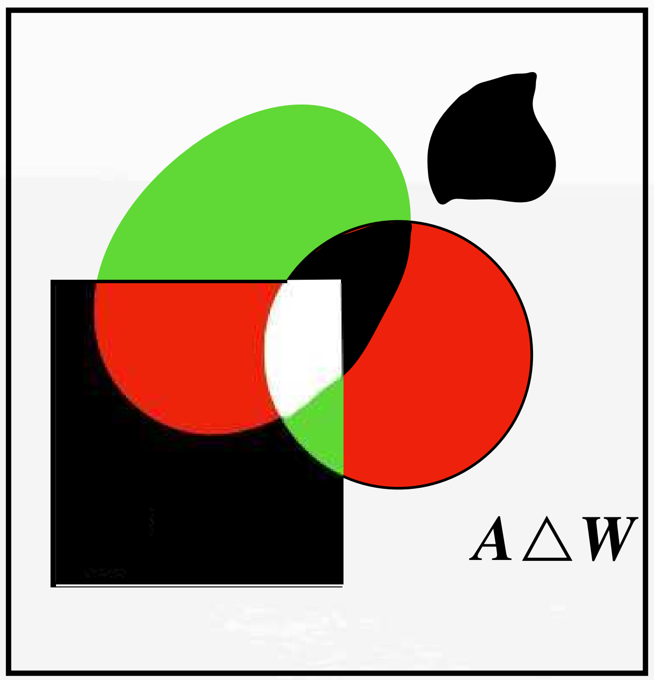
$$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$$

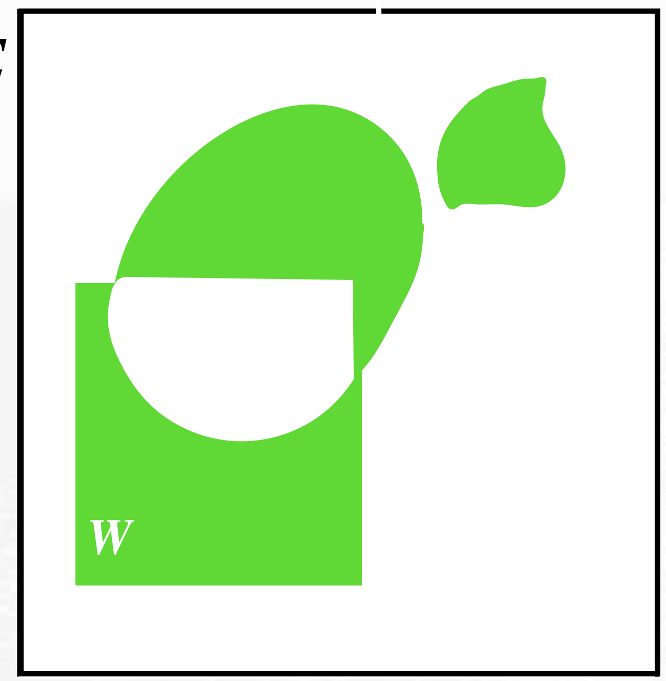
+



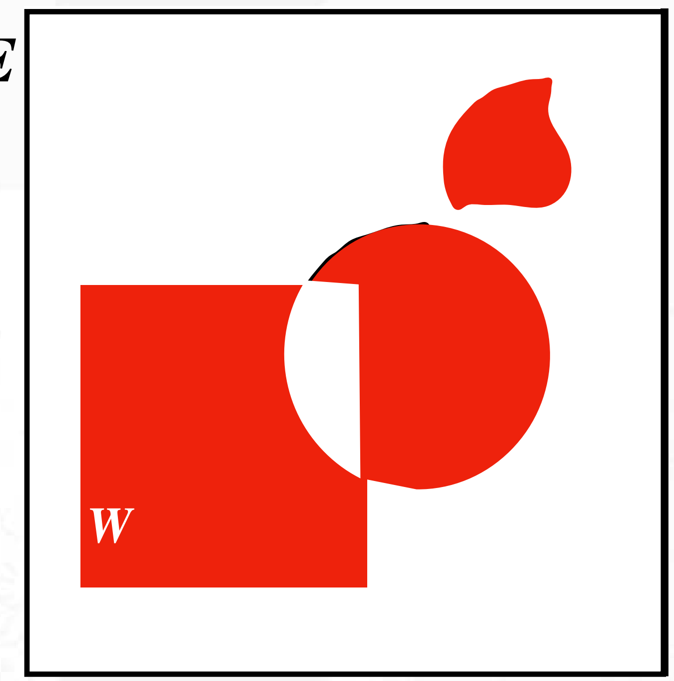
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \blacksquare n), ')$
$x' = x^c$







+



+

E

α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:
$(A \triangle W)_\alpha = \{ x \in E \ / \ A(x) \geq \alpha \}$

(Se puede prescindir de
$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

En función de α-cortes:

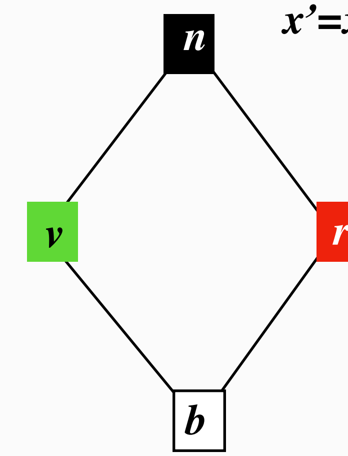
$A \triangle W =$

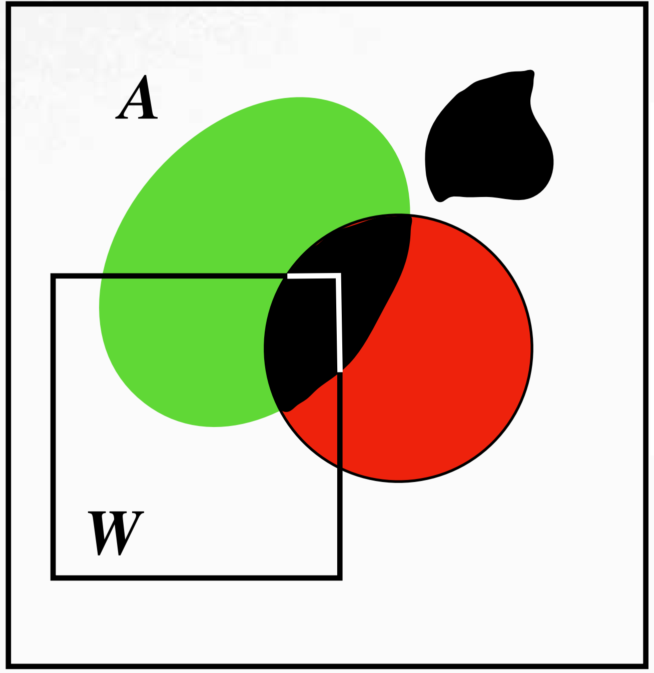
$(A \triangle W)_v \cdot \tilde{v}$ +

$(A \triangle W)_r \cdot \tilde{r}$ +

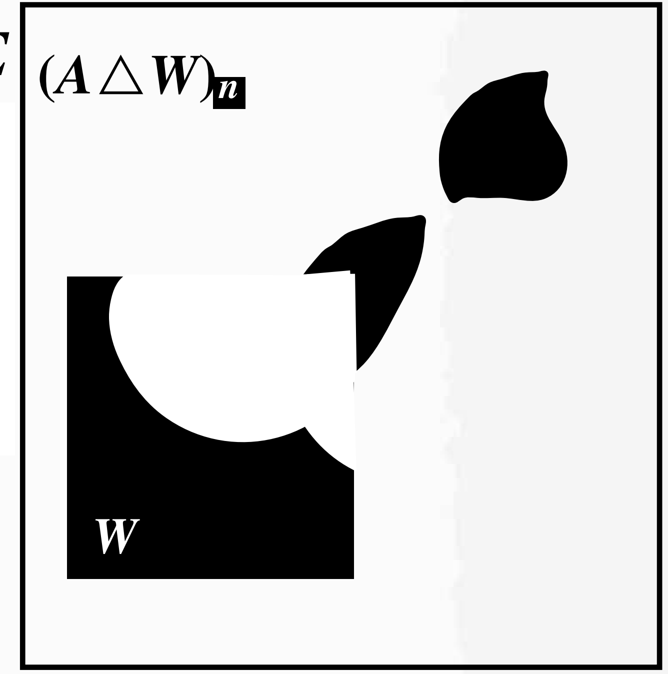
$(L, \le, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$

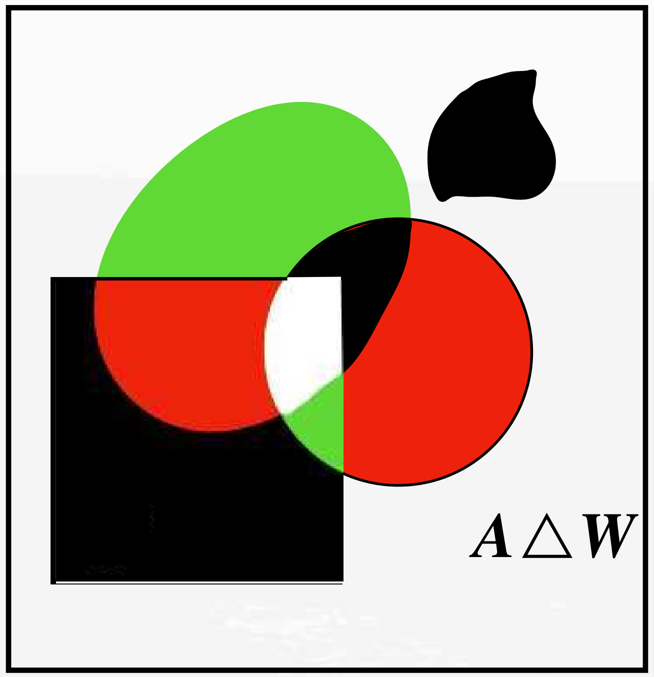


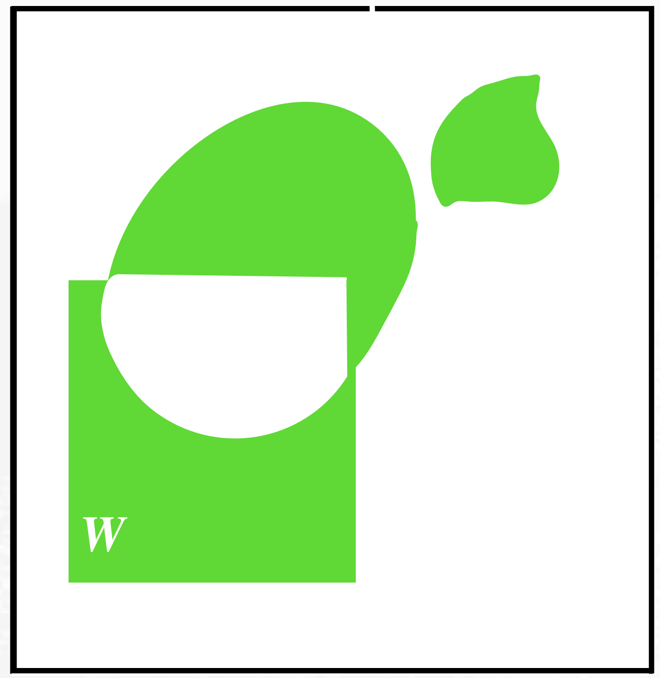


$+$

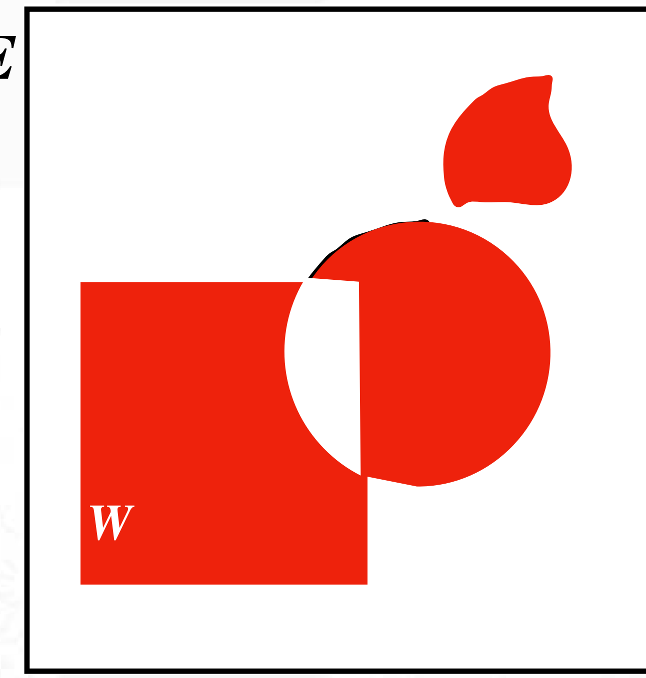


$$A \triangle W = A\cdot W^c + A'\cdot W$$





$+$



$+$

E

α-cortes de $A\triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$(A\triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \ge \alpha \,\}$

(Se puede prescindir de

$(A\triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

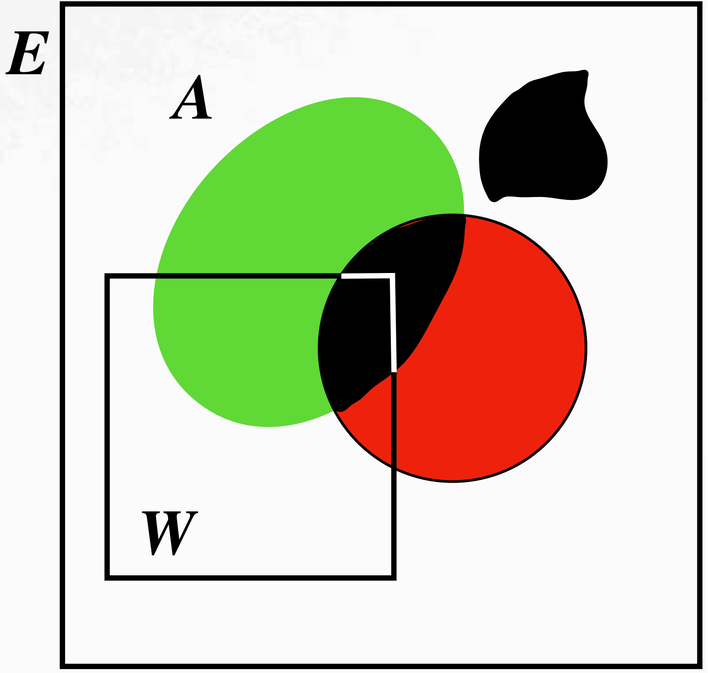
En función de α-cortes:

$A\triangle W =$

$(A\triangle W)_{v} \cdot \tilde{v}$ +

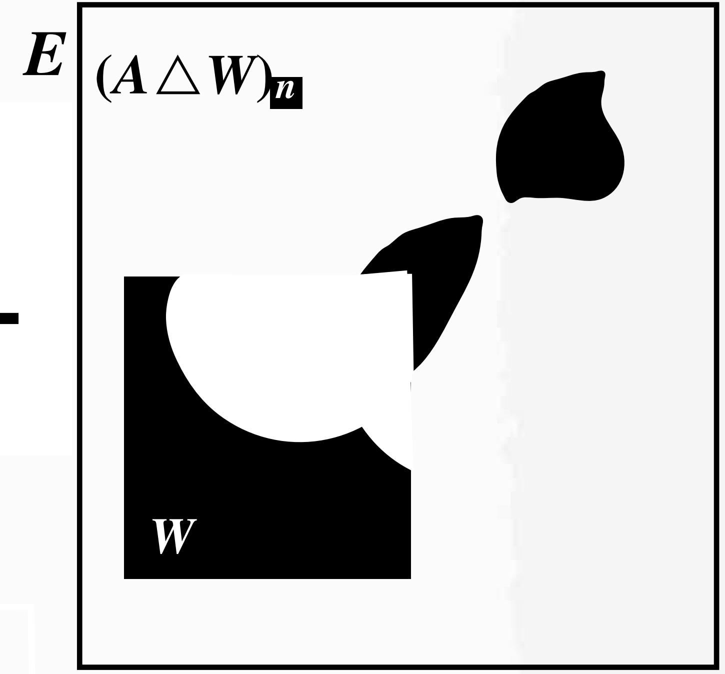
$(A\triangle W)_{r} \cdot \tilde{r}$ +

$(A\triangle W)_{n}$



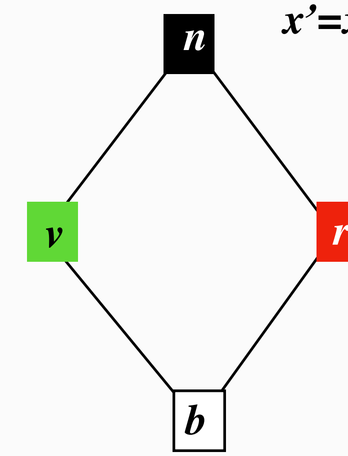
$+$

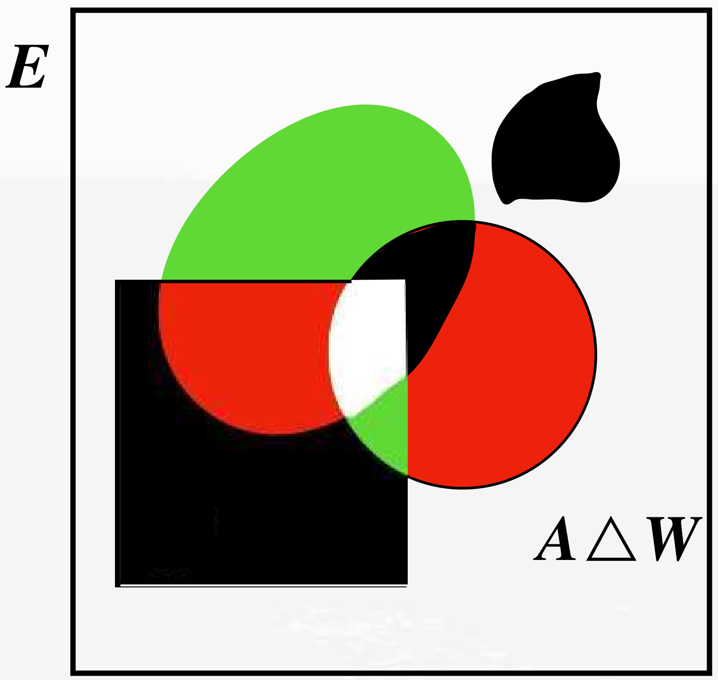
$$A \triangle W = A\cdot W^c + A'\cdot W$$

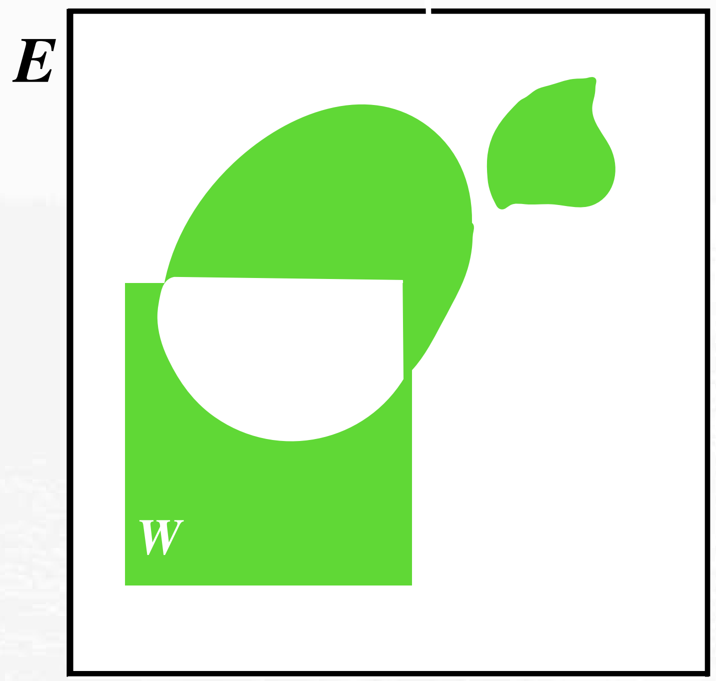


$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

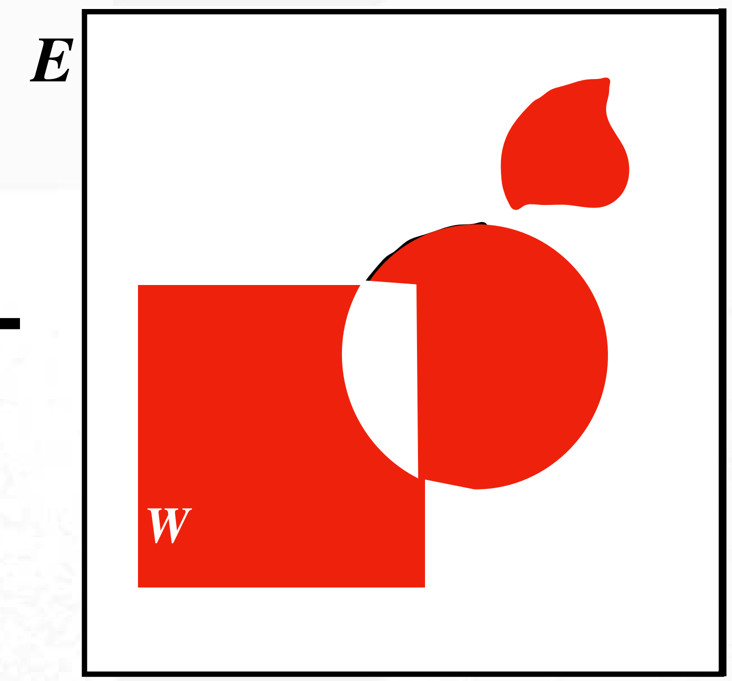
$x' = x^c$







$+$



$+$

α-cortes de $A \triangle W$, $(\alpha \in L)$:

$$(A \triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$$

E

(Se puede prescindir de

$$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}} \;)$$

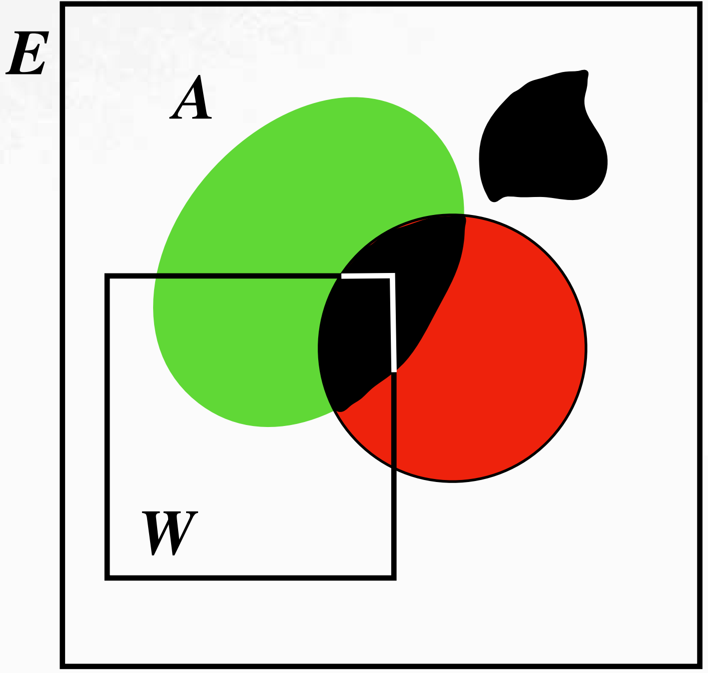
En función de α-cortes:

$$A \triangle W =$$

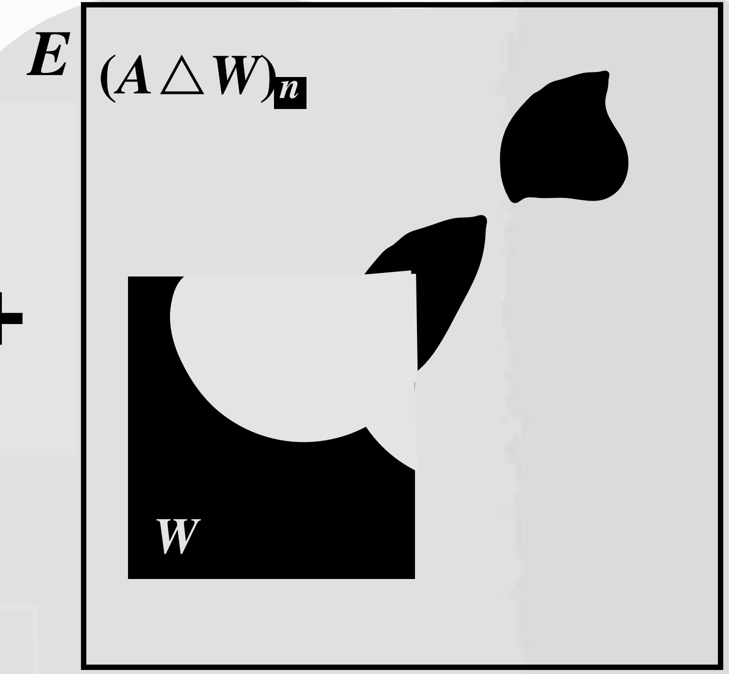
$$(A \triangle W)_v \cdot \tilde{v} \;+$$

$$(A \triangle W)_r \cdot \tilde{r} \;+$$

$$(A \triangle W)_n \cdot \tilde{n}$$

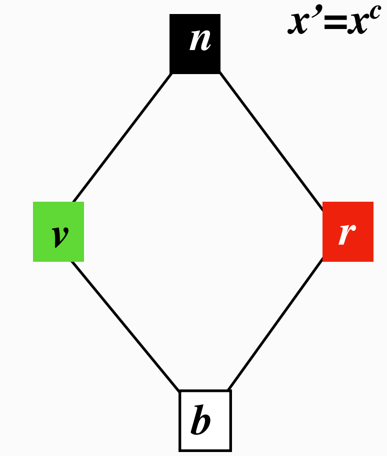


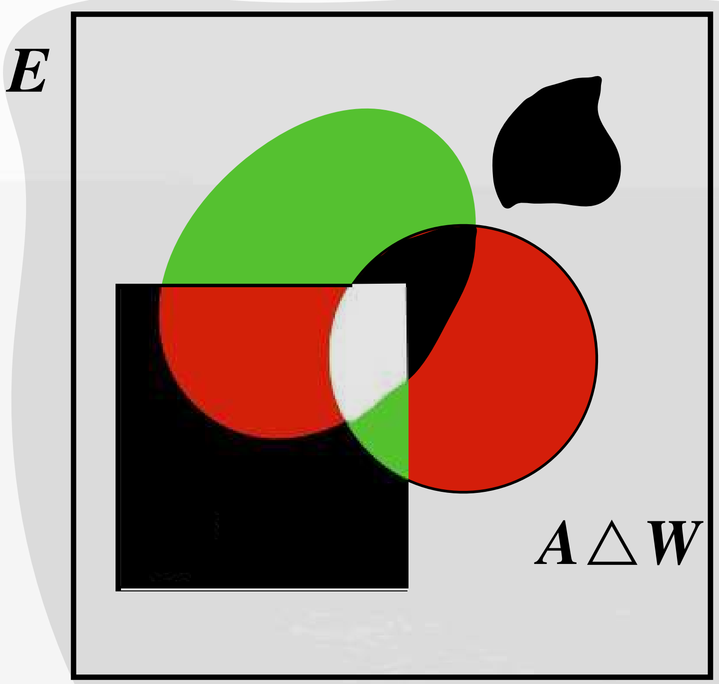
$$A \triangle W = A\cdot W^c + A'\cdot W$$



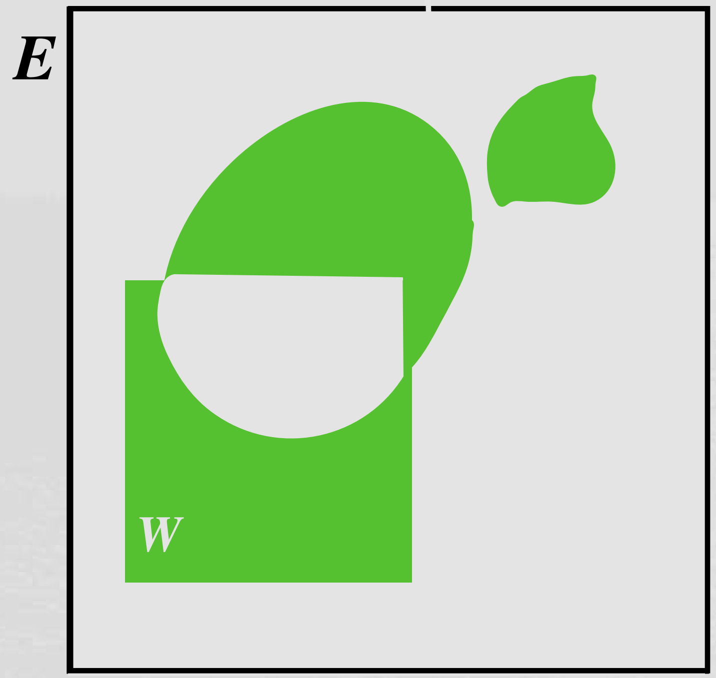
$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}), ')$

$x' = x^c$

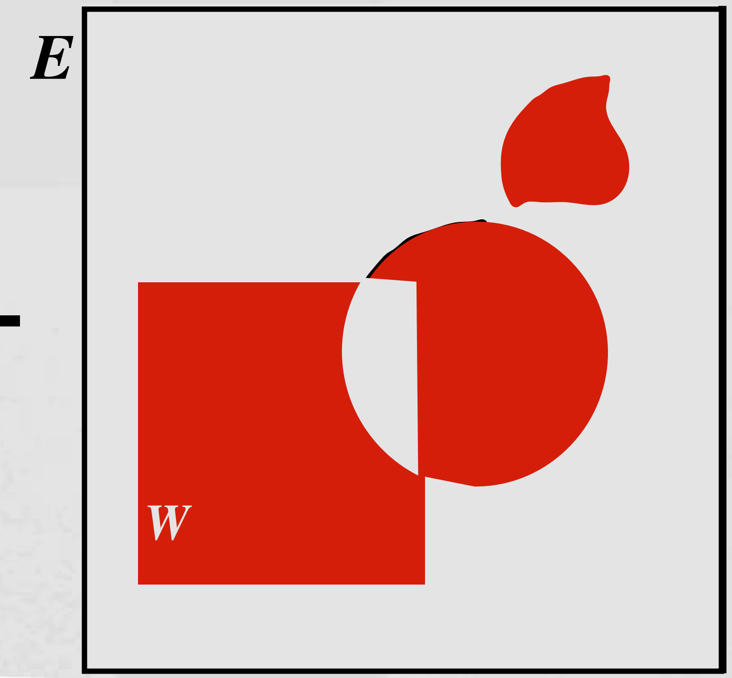




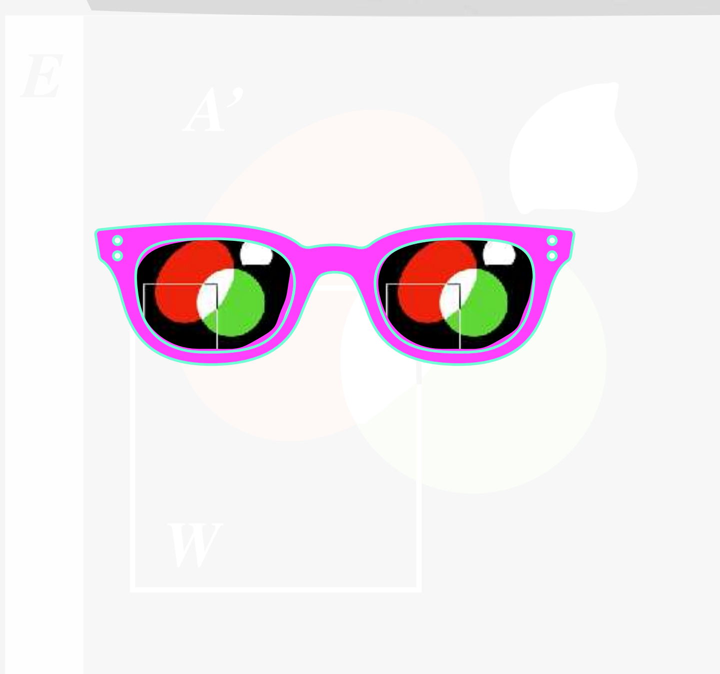
=



+



+



E

α-cortes de $A\triangle W$, $(\alpha \in L)$:

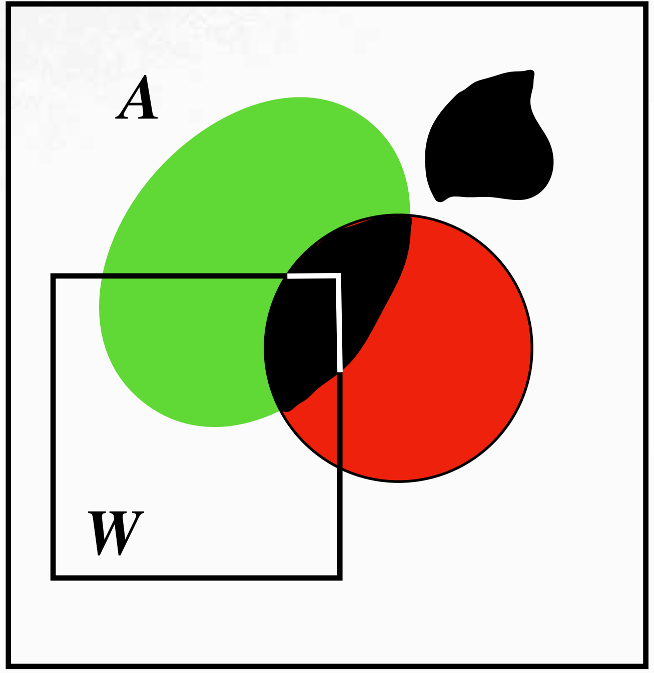
$$(A\triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \;/\; A(x) \geq \alpha \,\}$$

(Se puede prescindir de

$(A\triangle W)_b \cdot \tilde{b} = \tilde{b}$)

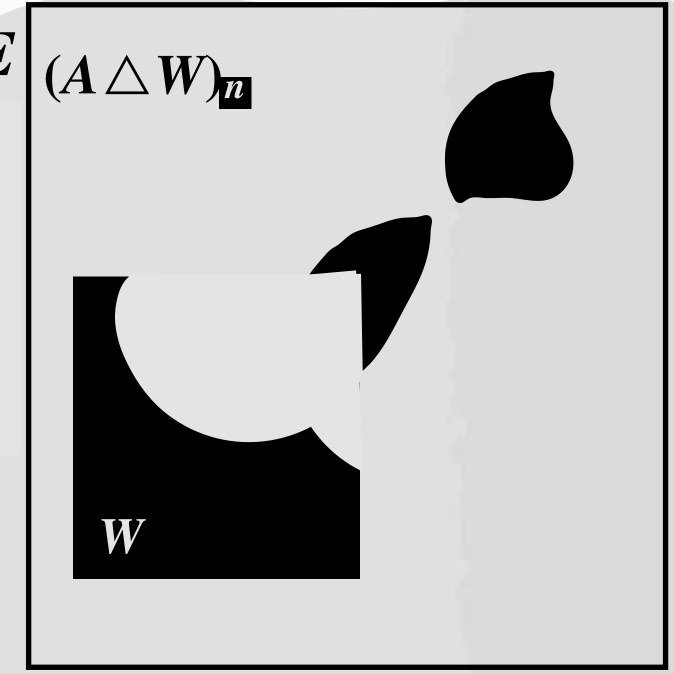
En función de α-cortes:

$$A\triangle W = (A\triangle W)_v \cdot \tilde{v} + (A\triangle W)_r \cdot \tilde{r} + (A\triangle W)_n \cdot \tilde{n}$$

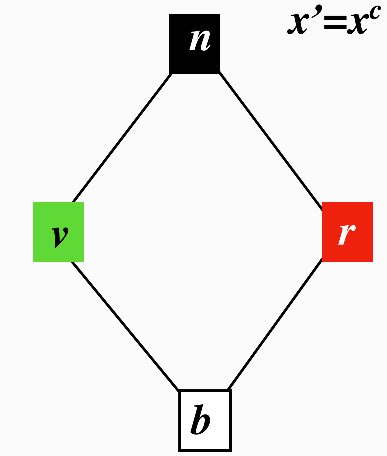


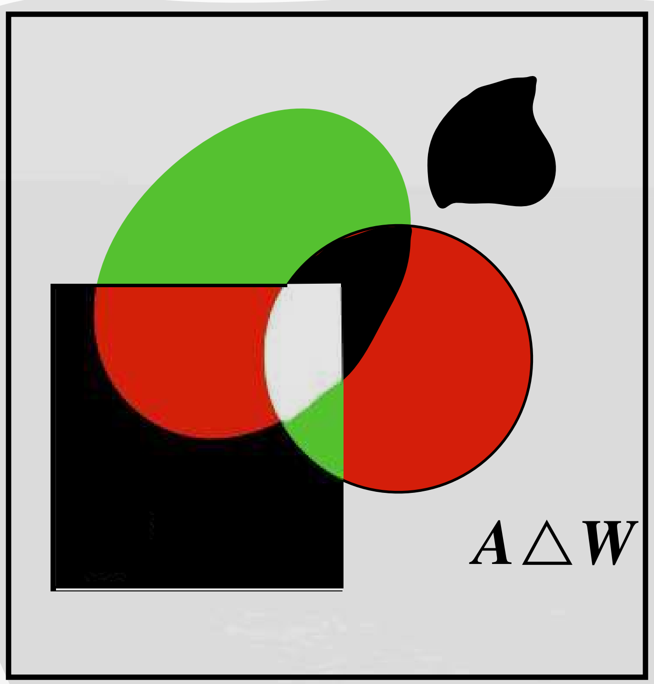
$A \triangle W = A \cdot W^c + A' \cdot W$

+



$(L, \leq, \cdot, +, \boxed{b}, \boxed{n}, ')$
$x' = x^c$

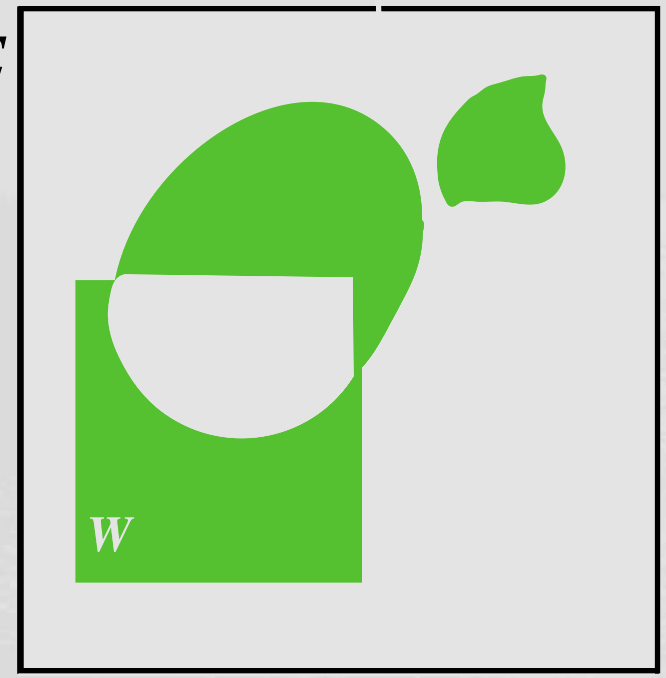




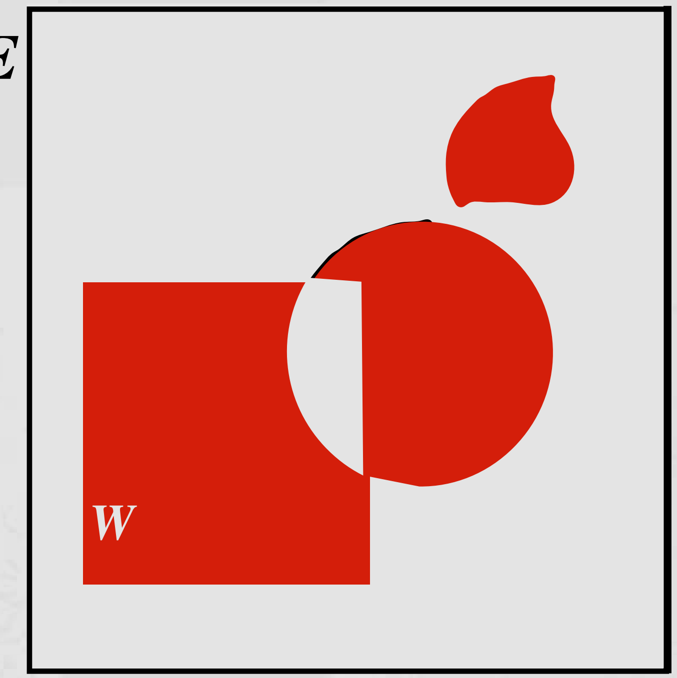
$A \triangle W = \in^W(A)$

w-pertenencia

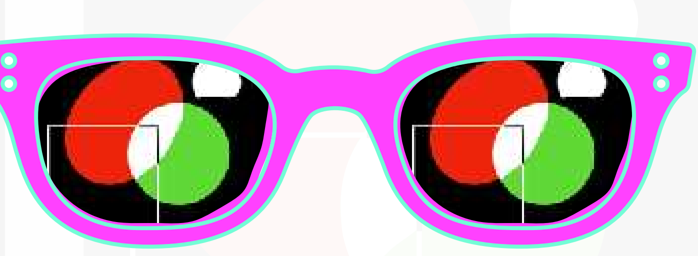
=



+



+



E

α-cortes de A△W, (α∈L):

$(A \triangle W)_\alpha = \{\, x \in E \ /\ A(x) \geq \alpha \,\}$

(Se puede prescindir de

$(A \triangle W)_{\boxed{b}} \cdot \boxed{\tilde{b}} = \boxed{\tilde{b}}$)

En función de α-cortes:

$$A \triangle W = (A \triangle W)_{v} \cdot \tilde{v} + (A \triangle W)_{r} \cdot \tilde{r} + (A \triangle W)_{n} \cdot \tilde{n}$$

Las familias $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ y $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$ como extensiones de funciones

Sea $A{:}E \rightarrow L$ un subconjunto L-borroso y $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$ las familias de sus α-cortes y α-cortes estrictos respectivamente:

$$A_\alpha = \{ x\in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}, \quad A^*_\alpha = \{ x\in E \,/\, A(x) \not\leq \alpha \}$$

Sea $A:E \to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$ las familias de sus α-cortes y α-cortes estrictos respectivamente:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}, \quad A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \not\leq \alpha \}$$

Dado $A \in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq) \to (\mathcal{P}(E), \subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq) \to (\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(\alpha) = A_\alpha$, $\mathbf{A}^*(\alpha) = A^*_\alpha \quad \forall \alpha \in L$.

Sea $A:E\rightarrow L$ un subconjunto L-borroso y $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(A^*{}_\alpha)_{\alpha\in L}$ las familias de sus α-cortes y α-cortes estrictos respectivamente:

$$A_\alpha = \{x\in E \,/\, A(x)\geq \alpha\}, \quad A^*{}_\alpha = \{x\in E \,/\, A(x)\not\leq \alpha\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\rightarrow(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\rightarrow(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(\alpha)=A_\alpha$, $\mathbf{A}^*(\alpha)=A^*{}_\alpha$ $\quad\forall\alpha\in L$. (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M)=\bigcap\limits_{\alpha\in M}\mathbf{A}(\alpha)=\bigsqcup\limits_{\alpha\in M}^{E}\mathbf{A}(\alpha)$, $\mathbf{A}^*(\inf M)=\bigcup\limits_{\alpha\in M}\mathbf{A}^*(\alpha)=\bigsqcap\limits_{\alpha\in M}^{E}\mathbf{A}^*(\alpha)$ $\quad\forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$.

(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A:E \to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$, $(A^*_\alpha)_{\alpha \in L}$ las familias de sus α-cortes y α-cortes estrictos respectivamente:

$$A_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \geq \alpha \}, \quad A^*_\alpha = \{ x \in E \,/\, A(x) \not\leq \alpha \}$$

Dado $A \in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq) \to (\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq) \to (\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(\alpha) = A_\alpha$, $\mathbf{A}^*(\alpha) = A^*_\alpha \quad \forall \alpha \in L.$ (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M) = \bigcap_{\alpha \in M} \mathbf{A}(\alpha) = \bigsqcup^E_{\alpha \in M} \mathbf{A}(\alpha)$, $\mathbf{A}^*(\inf M) = \bigcup_{\alpha \in M} \mathbf{A}^*(\alpha) = \bigsqcap^E_{\alpha \in M} \mathbf{A}^*(\alpha) \quad \forall M \subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L, \leq)$ y $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^E) \equiv (\mathcal{P}(E), \supseteq)$.

Sea $k \in L$ complementado tal que $k' = k^c$ y sea $W \in \mathcal{P}(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)} = \varphi_W \circ \mathbf{A} \circ \varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)} = \varphi_W \circ \mathbf{A}^* \circ \varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(\alpha) = \varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(\alpha))) = (\mathbf{A}(\alpha \Delta_L k))\Delta^\partial W = (A_{\alpha \Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall \alpha \in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(k,W)}(\alpha) = \varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(\alpha))) = (\mathbf{A}^*(\alpha \Delta_L k))\Delta^\partial W = (A^*_{\alpha \Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall \alpha \in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(\alpha) = \varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(\alpha))) = (\mathbf{A}(\alpha \Delta_L 0))\Delta^\partial W = (A_\alpha)\Delta^\partial W = \varphi_W(A_\alpha) \quad \forall \alpha \in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(\alpha) = \varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(\alpha))) = (\mathbf{A}^*(\alpha \Delta_L 0))\Delta^\partial W = (A^*_\alpha)\Delta^\partial W = \varphi_W(A^*_\alpha) \quad \forall \alpha \in L$$

Nota. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s \, \Delta_L \, k = s' \cdot k + s \cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^E) \equiv (\mathcal{P}(E), \supseteq)$: $A \, \Delta^\partial B = (A \cup W^c) \cap (A^c \cup W) = (A^c \Delta W) = (A \Delta W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(L^E, \leq)$: $A \, \Delta_{L^E} W = A' \cdot W + A \cdot W^c$.

(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A:E\to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_a)_{a\in L}$, $(A^*_a)_{a\in L}$ las familias de sus a-cortes y a-cortes estrictos respectivamente:

$$A_a=\{x\in E\,/\,A(x)\geq a\},\quad A^*_a=\{x\in E\,/\,A(x)\not\leq a\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\to(P(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\to(P(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(a)=A_a$, $\mathbf{A}^*(a)=A^*_a$ $\quad\forall a\in L$. (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M)=\bigcap_{a\in M}\mathbf{A}(a)=\sqcup^E_{a\in M}\mathbf{A}(a)$, $\mathbf{A}^*(\inf M)=\bigcup_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)=\sqcap^E_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)$ $\quad\forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(P(E),\sqsubseteq^E)\equiv(P(E),\supseteq)$.

Sea $k\in L$ complementado tal que $k'=k^c$ y sea $W\in P(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}\circ\varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}^*\circ\varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A^*_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall a\in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A_a)\quad\forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A^*_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A^*_a)\quad\forall a\in L$$

Nota. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s\,\Delta_L\,k=s'\cdot k+s\cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(P(E),\sqsubseteq^E)\equiv(P(E),\supseteq)$ $A\,\Delta^\partial B=(A\cup W^c)\cap(A^c\cup W)=(A^c\Delta W)=(A\Delta W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(L^E,\leq)$: $A\,\Delta_{L^E}\,W=A'\cdot W+A\cdot W^c$.

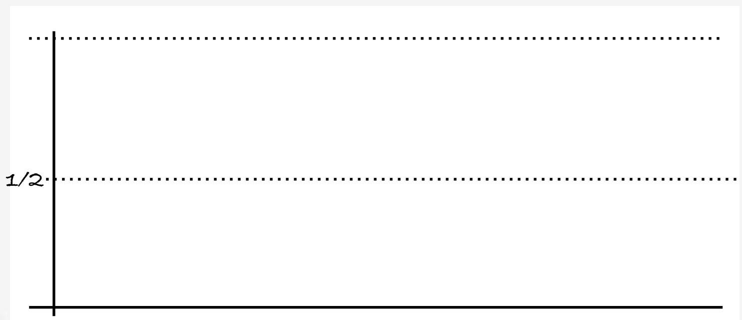
En consecuencia, de las expresiones $A=\sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a})=\prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde{a}]$ y $\varphi_W(A)=A\Delta_{L^E}W$ $\quad\forall A\in L^E$

se deduce: $\varphi_W(A)=\varphi_W(\sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a}))=\sqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\varphi_W(A_a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})]=\sqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})]$,

$\varphi_W(A)=\varphi_W(\prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde{a}])=\sqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\varphi_W((A)^*_a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})]=\sqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})]$ $\quad\forall A\in L^E$,

siendo $\tilde{a}$ y $\varphi_W(\tilde{a})$ los subconjuntos L-borrosos de E tales que: $\tilde{a}(x)=a$ $\forall x\in E$ y

$[\varphi_W(\tilde{a})](x)=[\tilde{a}\Delta_{L^E}W](x)=[(\tilde{a}\cdot W)+(\tilde{a}'\cdot W^c)](x)=[\tilde{a}\ \mathbf{si}\ x\in W,\ \tilde{a}'\ \mathbf{si}\ x\notin W]$ $\forall x\in E$:



(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A: E \to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_a)_{a\in L}$, $(A^*{}_a)_{a\in L}$ las familias de sus a-cortes y a-cortes estrictos respectivamente:

$$A_a = \{x\in E \,/\, A(x) \geq a\}, \quad A^*{}_a = \{x\in E \,/\, A(x) \not\leq a\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(a) = A_a$, $\mathbf{A}^*(a) = A^*{}_a$ $\forall a\in L$. (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M) = \bigcap_{a\in M}\mathbf{A}(a) = \bigsqcup^E_{a\in M}\mathbf{A}(a)$, $\mathbf{A}^*(\inf M) = \bigcup_{a\in M}\mathbf{A}^*(a) = \bigsqcap^E_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)$ $\forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^E) \equiv (\mathcal{P}(E), \supseteq)$.

Sea $k\in L$ complementado tal que $k' = k^c$ y sea $W\in\mathcal{P}(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)} = \varphi_W\circ\mathbf{A}\circ\varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)} = \varphi_W\circ\mathbf{A}^*\circ\varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(a) = \varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(a))) = (\mathbf{A}(a\Delta_L k))\Delta^\partial W = (A_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*{}_{(k,W)}(a) = \varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(a))) = (\mathbf{A}^*(a\Delta_L k))\Delta^\partial W = (A^*{}_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall a\in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a) = \varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(a))) = (\mathbf{A}(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W = (A_a)\Delta^\partial W = \varphi_W(A_a) \quad \forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*{}_{(0,W)}(a) = \varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(a))) = (\mathbf{A}^*(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W = (A^*{}_a)\Delta^\partial W = \varphi_W(A^*{}_a) \quad \forall a\in L$$

Nota. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s\,\Delta_L\, k = s'\cdot k + s\cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^E) \equiv (\mathcal{P}(E), \supseteq)$ $A\,\Delta^\partial B = (A\cup W^c)\cap(A^c\cup W) = (A^c\Delta\, W) = (A\,\Delta\, W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(LE, \leq)$: $A\,\Delta_{L^E} W = A'\cdot W + A\cdot W^c$.

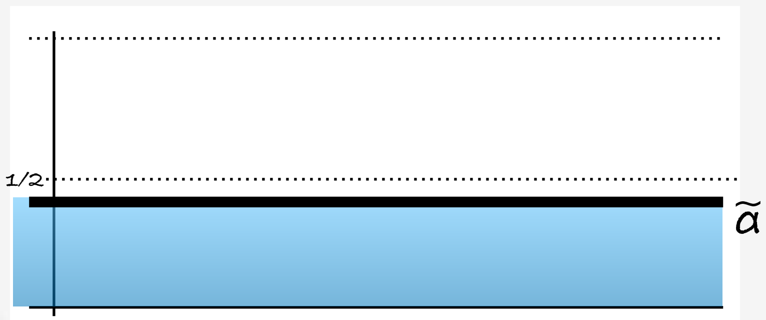
En consecuencia, de las expresiones $A = \sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a}) = \prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*{}_a + \tilde{a}]$ y $\varphi_W(A) = A\Delta_{L^E}W$ $\forall A\in L^E$ se deduce:

$\varphi_W(A) = \varphi_W(\sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a})) = \bigsqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\varphi_W(A_a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})] = \bigsqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})]$,

$\varphi_W(A) = \varphi_W(\prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*{}_a + \tilde{a}]) = \bigsqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\varphi_W((A)^*{}_a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})] = \bigsqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\hat{\mathbf{A}}^*{}_{(0,W)}(a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})]$ $\forall A\in L^E$,

siendo $\tilde{a}$ y $\varphi_W(\tilde{a})$ los subconjuntos L-borrosos de E tales que: $\tilde{a}(x) = a$ $\forall x\in E$ y

$[\varphi_W(\tilde{a})](x) = [\tilde{a}\Delta_{L^E}W](x) = [(\tilde{a}\cdot W) + (\tilde{a}'\cdot W^c)](x) = [\tilde{a}$ **si** $x\in W$, $\tilde{a}'$ **si** $x\notin W]$ $\forall x\in E$:



(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A:E\to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(A^*_\alpha)_{\alpha\in L}$ las familias de sus α-cortes y α-cortes estrictos respectivamente:

$$A_\alpha=\{x\in E / A(x)\geq \alpha\},\quad A^*_\alpha=\{x\in E / A(x)\not\leq \alpha\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(\alpha)=A_\alpha$, $\mathbf{A}^*(\alpha)=A^*_\alpha$ $\forall\alpha\in L$. (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M)=\bigcap_{\alpha\in M}\mathbf{A}(\alpha)=\bigsqcup^E_{\alpha\in M}\mathbf{A}(\alpha)$, $\mathbf{A}^*(\inf M)=\bigcup_{\alpha\in M}\mathbf{A}^*(\alpha)=\bigsqcap^E_{\alpha\in M}\mathbf{A}^*(\alpha)$ $\forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, <u>erosión</u> y <u>dilatación</u> morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$.

Sea $k\in L$ complementado tal que $k'=k^c$ y sea $W\in\mathcal{P}(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}\circ\varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}^*\circ\varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(\alpha)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(\alpha)))=(\mathbf{A}(\alpha\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A_{\alpha\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall\alpha\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(k,W)}(\alpha)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(\alpha)))=(\mathbf{A}^*(\alpha\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A^*_{\alpha\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall\alpha\in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(\alpha)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(\alpha)))=(\mathbf{A}(\alpha\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A_\alpha)\Delta^\partial W=\varphi_W(A_\alpha)\quad\forall\alpha\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(\alpha)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(\alpha)))=(\mathbf{A}^*(\alpha\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A^*_\alpha)\Delta^\partial W=\varphi_W(A^*_\alpha)\quad\forall\alpha\in L$$

<u>Nota</u>. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s\,\Delta_L\, k=s'\cdot k+s\cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$ $A\,\Delta^\partial B=(A\cup W^c)\cap(A^c\cup W)=(A^c\Delta\, W)=(A\,\Delta\, W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(L^E,\leq)$: $A\,\Delta_{L^E}\,W=A'\cdot W+A\cdot W^c$.

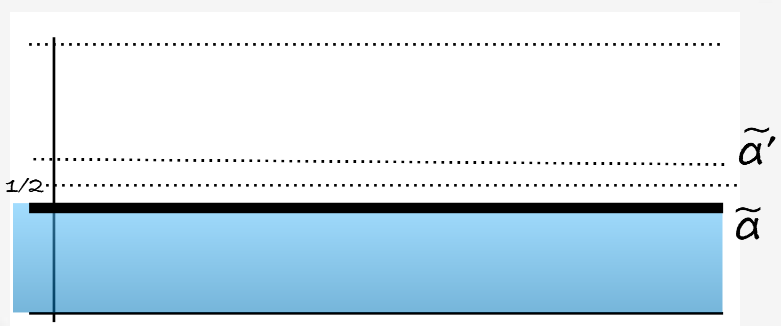
En consecuencia, de las expresiones $A=\sum_{\alpha\in L-\{0\}}(A_\alpha\cdot\tilde\alpha)=\prod_{\alpha\in L-\{1\}}[(A)^*_\alpha+\tilde\alpha]$ y $\varphi_W(A)=A\Delta_{L^E}W$ $\forall A\in L^E$

se deduce: $\varphi_W(A)=\varphi_W\left(\sum_{\alpha\in L-\{0\}}(A_\alpha\cdot\tilde\alpha)\right)=\bigsqcup^W_{\alpha\in L-\{0\}}[\varphi_W(A_\alpha)\sqcap^W\varphi_W(\tilde\alpha)]=\bigsqcup^W_{\alpha\in L-\{0\}}[\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(\alpha)\sqcap^W\varphi_W(\tilde\alpha)]$,

$\varphi_W(A)=\varphi_W\left(\prod_{\alpha\in L-\{1\}}[(A)^*_\alpha+\tilde\alpha]\right)=\bigsqcap^W_{\alpha\in L-\{1\}}[\varphi_W((A)^*_\alpha)\sqcup^W\varphi_W(\tilde\alpha)]=\bigsqcap^W_{\alpha\in L-\{1\}}[\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(\alpha)\sqcup^W\varphi_W(\tilde\alpha)]$ $\forall A\in L^E$,

siendo $\tilde\alpha$ y $\varphi_W(\tilde\alpha)$ los subconjuntos L-borrosos de E tales que: $\tilde\alpha(x)=\alpha$ $\forall x\in E$ y

$[\varphi_W(\tilde\alpha)](x)=[\tilde\alpha\Delta_{L^E}W](x)=[(\tilde\alpha\cdot W)+(\tilde\alpha'\cdot W^c)](x)=[\tilde\alpha \textbf{ si } x\in W,\ \tilde\alpha' \textbf{ si } x\notin W]$ $\forall x\in E$:



(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A:E \to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_a)_{a\in L}$, $(A^*_a)_{a\in L}$ las familias de sus a-cortes y a-cortes estrictos respectivamente:

$$A_a = \{x\in E \,/\, A(x) \geq a\}, \quad A^*_a = \{x\in E \,/\, A(x) \not\leq a\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(a)=A_a$, $\mathbf{A}^*(a)=A^*_a \quad \forall a\in L.$ (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M)=\bigcap_{a\in M}\mathbf{A}(a)=\bigsqcup^E_{a\in M}\mathbf{A}(a)$, $\mathbf{A}^*(\inf M)=\bigcup_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)=\bigsqcap^E_{a\in M}\mathbf{A}^*(a) \quad \forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$.

Sea $k\in L$ complementado tal que $k'=k^c$ y sea $W\in\mathcal{P}(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}\circ\varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}^*\circ\varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A^*_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W \quad \forall a\in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A_a) \quad \forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A^*_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A^*_a) \quad \forall a\in L$$

Nota. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s\,\Delta_L\, k=s'\cdot k+s\cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)=(\mathcal{P}(E),\supseteq)$ $A\,\Delta^\partial B=(A\cup W^c)\cap(A^c\cup W)=(A^c\Delta\, W)=(A\,\Delta\, W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(L^E,\leq)$: $A\,\Delta_{L^E}\,W=A'\cdot W+A\cdot W^c$.

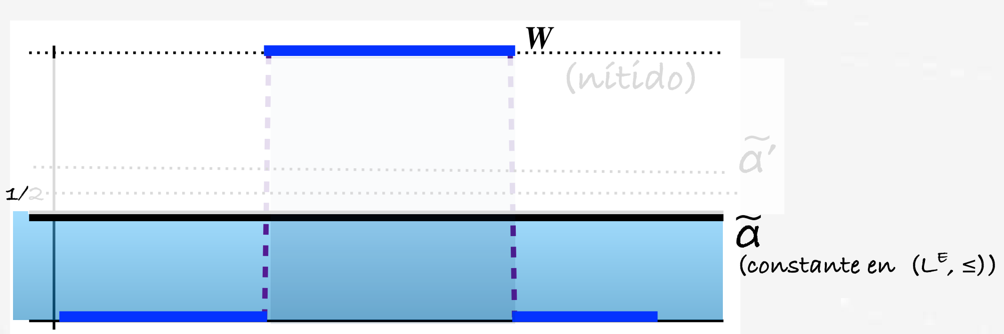
En consecuencia, de las expresiones $A=\sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a})=\prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde{a}]$ y $\varphi_W(A)=A\Delta_{L^E}W \quad \forall A\in L^E$

se deduce: $\varphi_W(A)=\varphi_W(\sum_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde{a}))=\bigsqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\varphi_W(A_a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})]=\bigsqcup^W_{a\in L-\{0\}}[\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde{a})]$,

$\varphi_W(A)=\varphi_W(\prod_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde{a}])=\bigsqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\varphi_W((A)^*_a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})]=\bigsqcap^W_{a\in L-\{1\}}[\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde{a})] \quad \forall A\in L^E$,

siendo $\tilde{a}$ y $\varphi_W(\tilde{a})$ los subconjuntos L-borrosos de E tales que: $\tilde{a}(x)=a \;\forall x\in E$ y

$[\varphi_W(\tilde{a})](x)=[\tilde{a}\Delta_{L^E}W](x)=[(\tilde{a}\cdot W)+(\tilde{a}'\cdot W^c)](x)=[\tilde{a}\text{ si } x\in W,\ \tilde{a}'\text{ si } x\notin W] \;\forall x\in E$:



(*) (Demostrado anteriormente)

Sea $A:E\to L$ un subconjunto L-borroso y $(A_a)_{a\in L}$, $(A^*_a)_{a\in L}$ las familias de sus a-cortes y a-cortes estrictos respectivamente:

$$A_a=\{x\in E / A(x)\geq a\},\quad A^*_a=\{x\in E / A(x)\not\leq a\}$$

Dado $A\in L^E$, consideremos las aplicaciones asociadas $\mathbf{A}:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ y $\mathbf{A}^*:(L,\leq)\to(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ definidas por: $\mathbf{A}(a)=A_a$, $\mathbf{A}^*(a)=A^*_a$ $\forall a\in L$. (*)

Se verifica que $\mathbf{A}(\sup M)=\bigcap\limits_{a\in M}\mathbf{A}(a)=\bigsqcup\limits^E_{a\in M}\mathbf{A}(a)$, $\mathbf{A}^*(\inf M)=\bigcup\limits_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)=\sqcap\limits^E_{a\in M}\mathbf{A}^*(a)$ $\forall M\subseteq L$, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^*$ son respectivamente, erosión y dilatación morfológicas entre los retículos $(L,\leq)$ y $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$.

Sea $k\in L$ complementado tal que $k'=k^c$ y sea $W\in\mathcal{P}(E)$. Consideremos sus (k,W)-extensiones:

$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}\circ\varphi_k$, $(\hat{\mathbf{A}}^*)_{(k,W)}=\varphi_W\circ\mathbf{A}^*\circ\varphi_k$, es decir:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(k,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_k(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L k))\Delta^\partial W=(A^*_{a\Delta_L k})\Delta^\partial W\quad\forall a\in L$$

En particular, si $k=0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A_a)\ \forall a\in L$$

$$\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)=\varphi_W(\mathbf{A}^*(\varphi_0(a)))=(\mathbf{A}^*(a\Delta_L 0))\Delta^\partial W=(A^*_a)\Delta^\partial W=\varphi_W(A^*_a)\ \forall a\in L$$

Nota. Δ_L es la diferencia simétrica en $(L,\leq)$: $s\,\Delta_L\,k=s'\cdot k+s\cdot k^c$; Δ^∂ es la diferencia simétrica en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^E)\equiv(\mathcal{P}(E),\supseteq)$ $A\,\Delta^\partial B=(A\cup W^c)\cap(A^c\cup W)=(A^c\Delta W)=(A\,\Delta\,W)^c$, y Δ_{L^E} es la diferencia simétrica en $(L^E,\leq)$: $A\,\Delta_{L^E}W=A'\cdot W+A\cdot W^c$.

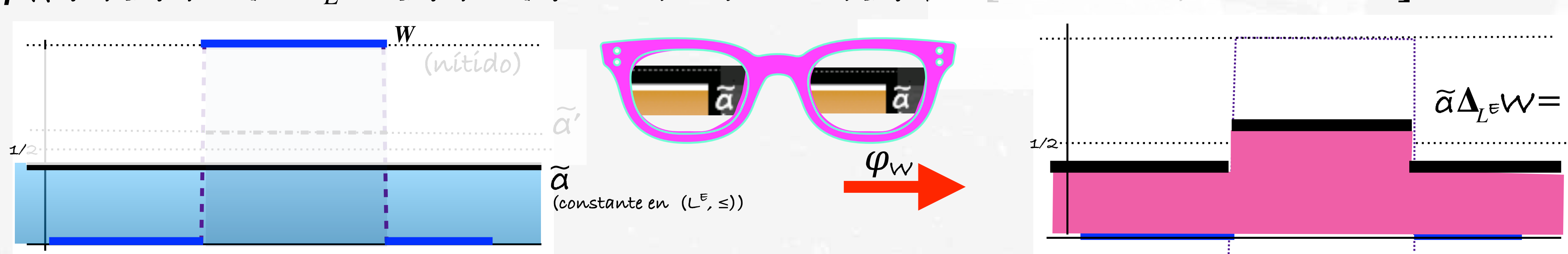
En consecuencia, de las expresiones $A=\sum\limits_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde a)=\prod\limits_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde a]$ y $\varphi_W(A)=A\Delta_{L^E}W$ $\forall A\in L^E$

se deduce: $\varphi_W(A)=\varphi_W(\sum\limits_{a\in L-\{0\}}(A_a\cdot\tilde a))=\bigsqcup\limits^W_{a\in L-\{0\}}[\varphi_W(A_a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde a)]=\bigsqcup\limits^W_{a\in L-\{0\}}[\hat{\mathbf{A}}_{(0,W)}(a)\sqcap^W\varphi_W(\tilde a)]$,

$\varphi_W(A)=\varphi_W(\prod\limits_{a\in L-\{1\}}[(A)^*_a+\tilde a])=\sqcap\limits^W_{a\in L-\{1\}}[\varphi_W((A)^*_a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde a)]=\sqcap\limits^W_{a\in L-\{1\}}[\hat{\mathbf{A}}^*_{(0,W)}(a)\sqcup^W\varphi_W(\tilde a)]$ $\forall A\in L^E$,

siendo $\tilde a$ y $\varphi_W(\tilde a)$ los subconjuntos L-borrosos de E tales que: $\tilde a(x)=a$ $\forall x\in E$ y

$[\varphi_W(\tilde a)](x)=[\tilde a\Delta_{L^E}W](x)=[(\tilde a\cdot W)+(\tilde a'\cdot W^c)](x)=[\tilde a\ \textbf{si}\ x\in W,\ \tilde a'\ \textbf{si}\ x\notin W]$ $\forall x\in E$:



(*) (Demostrado anteriormente)

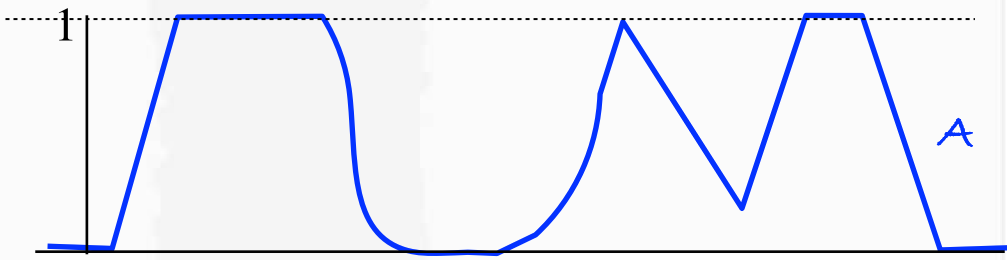
Extensiones del núcleo KER(A) y del soporte SUPP(A) de un subconjunto L-borroso A en el álgebra $(P(E), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W}, W, W^{c}), ^{c})$

NÚCLEO   KER: $(L^E,\leq) \rightarrow (P(E), \subseteq)$ tal que $KER(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

<u>NÚCLEO</u> $\mathrm{KER}:(L^E,\leq)\rightarrow(P(E),\subseteq)$ tal que $\mathrm{KER}(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

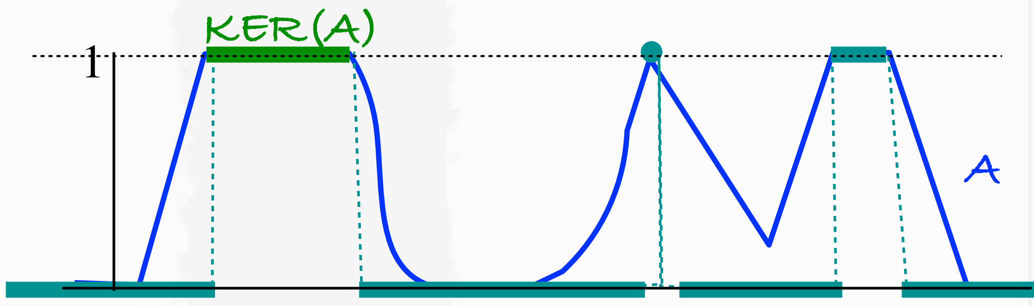
$\mathrm{KER}(A\cdot B)=\mathrm{KER}(A)\cap\mathrm{KER}(B)$, $\mathrm{KER}(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}\mathrm{KER}(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una <u>erosión morfológica</u>)



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO KER: $(L^E, \leq) \rightarrow (P(E), \subseteq)$ tal que $KER(A) = \{x \in E \ / \ A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$

$KER(A \cdot B) = KER(A) \cap KER(B)$, $KER(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

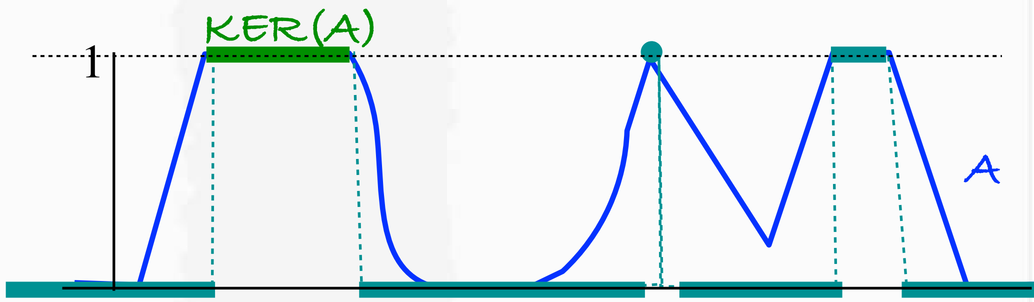


$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

NÚCLEO $KER: (L^E, \leq) \to (P(E), \subseteq)$ tal que $KER(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$

¡$(P(E), \subseteq)$ incluido en $(L^E, \leq)$!

$KER(A \cdot B) = KER(A) \cap KER(B)$, $KER(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

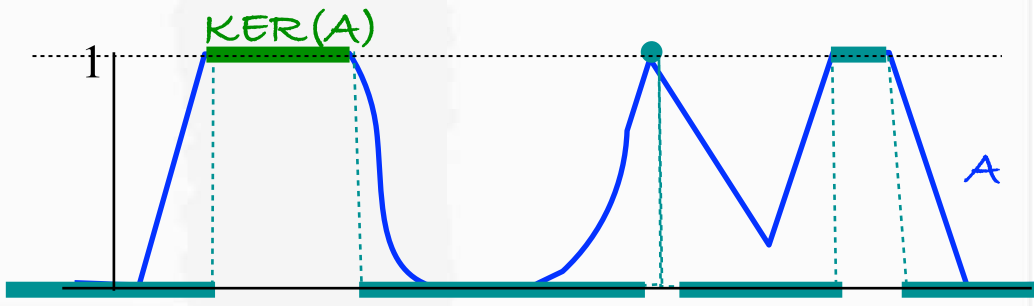


$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

NÚCLEO $(\mathrm{KER}: (L^E,\leq) \to (L^E, \leq))$, tal que $\mathrm{KER}(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

$\mathrm{KER}(A \cdot B) = \mathrm{KER}(A) \cap \mathrm{KER}(B)$, $\mathrm{KER}(\prod_{s\in S} A_s) = \bigcap_{s\in S} \mathrm{KER}(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

$A \leq B \Rightarrow (\mathrm{KER}(A) \subseteq \mathrm{KER}(B))$, $\mathrm{KER}(\mathrm{KER}(A)) = \mathrm{KER}(A)$, $\mathrm{KER}(A) \leq A \;\; \forall A \in L^E$ (KER es apertura en $(L^E,\leq)$)



$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

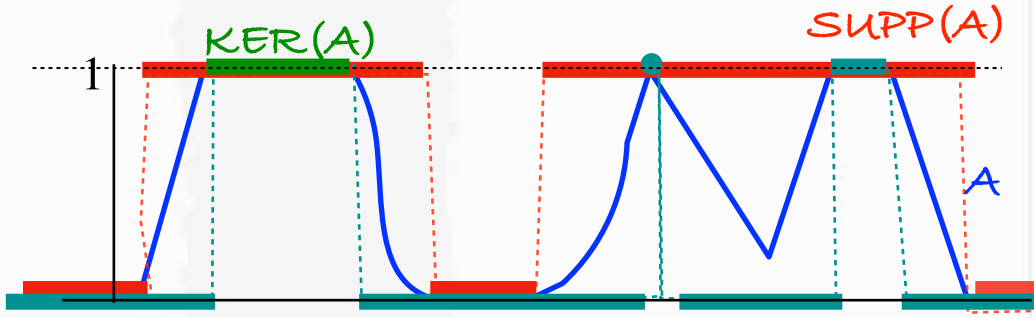
<u>NÚCLEO</u> (KER: $(L^E,\leq) \rightarrow (L^E,\leq)$), tal que $KER(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} KER(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (KER es una <u>erosión morfológica</u>)

$A\leq B \Rightarrow (KER(A)\subseteq KER(B))$, $KER(KER(A))=KER(A)$, $KER(A)\leq A$ $\forall A\in L^E$ (KER es <u>apertura</u> en $(L^E,\leq)$)

<u>SOPORTE</u> SUPP: $(L^E,\leq)\rightarrow (P(E),\subseteq)$, tal que $SUPP(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0 \quad \forall A\in L^E$

$SUPP(A+B)=SUPP(A)\cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} SUPP(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una <u>dilatación</u>)



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO $(KER:(L^E,\leq)\to(L^E,\leq))$, tal que $KER(A)=\{x\in E\ /\ A(x)=1\}=A_1\quad\forall A\in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

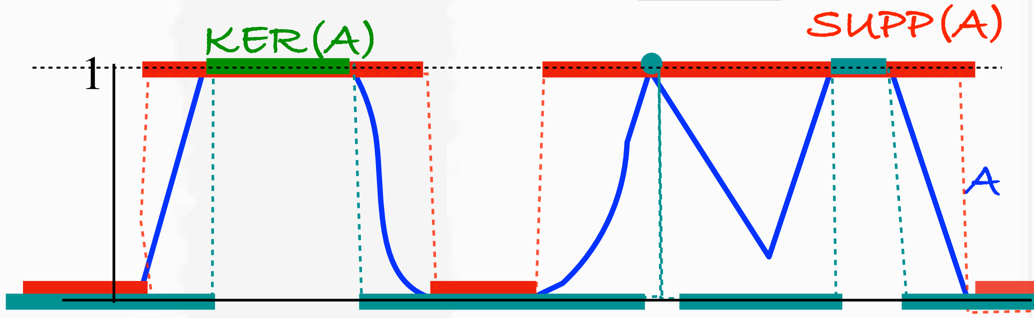
$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}KER(A_s)\quad\forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

$A\leq B\Rightarrow(KER(A)\subseteq KER(B))$, $KER(KER(A))=KER(A)$, $KER(A)\leq A\ \forall A\in L^E$ (KER es apertura en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(SUPP:(L^E,\leq)\to(L^E,\leq))$, tal que $SUPP(A)=\{x\in E\ /\ A(x)>0\}=A^*_0\quad\forall A\in L^E$

$SUPP(A+B)=SUPP(A)\cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}SUPP(A_s)\ \forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una dilatación)

$A\leq B\Rightarrow(SUPP(A)\subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A))=SUPP(A)$, $A\leq SUPP(A)\quad\forall A\in L^E$ (SUPP es cierre en $(L^E,\leq)$)



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO $(KER: (L^E,\leq) \to (L^E,\leq))$, tal que $KER(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} KER(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

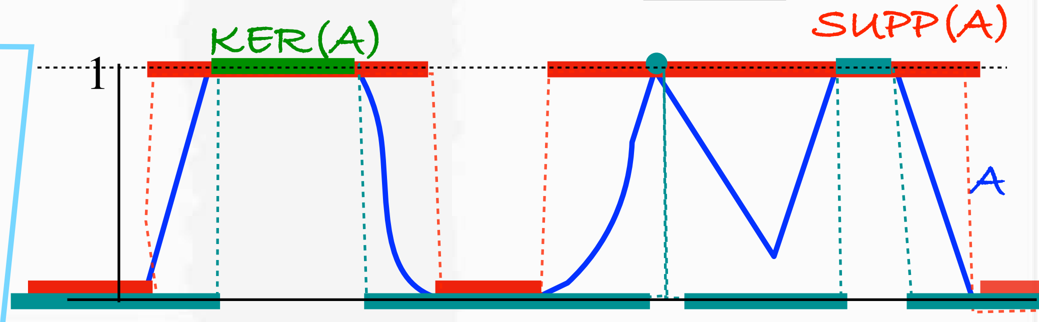
$A\leq B \Rightarrow (KER(A)\subseteq KER(B))$, $KER(KER(A))=KER(A)$, $KER(A)\leq A \;\forall A\in L^E$ (KER es apertura en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(SUPP: (L^E,\leq) \to (L^E,\leq))$, tal que $SUPP(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0 \quad \forall A\in L^E$

$SUPP(A+B)=SUPP(A)\cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} SUPP(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una dilatación)

$A\leq B \Rightarrow (SUPP(A)\subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A))=SUPP(A)$, $A\leq SUPP(A) \quad \forall A\in L^E$ (SUPP es cierre en $(L^E,\leq)$)

$KER(M)=SUPP(M)=M \;\forall M\in P(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO $(KER: (L^E,\leq) \to (L^E,\leq))$, tal que $KER(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

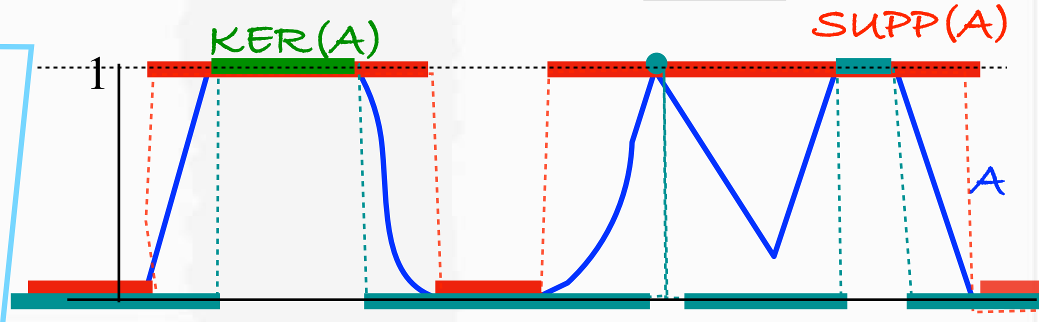
$A\leq B \Rightarrow (KER(A)\subseteq KER(B))$, $KER(KER(A))=KER(A)$, $KER(A)\leq A \ \forall A\in L^E$ (KER es apertura en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(SUPP: (L^E,\leq) \to (L^E,\leq))$, tal que $SUPP(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0 \quad \forall A\in L^E$

$SUPP(A+B)=SUPP(A)\cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} SUPP(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. ($SUPP$ es una dilatación)

$A\leq B \Rightarrow (SUPP(A)\subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A))=SUPP(A)$, $A\leq SUPP(A) \quad \forall A\in L^E$ ($SUPP$ es cierre en $(L^E,\leq)$)

$KER(M)=SUPP(M)=M \ \forall M\in P(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

Sea $W\in L^E$ tal que $W'=W^c$. Las álgebras $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ y $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$ son isomorfas.

NÚCLEO $(KER:(L^E,\leq)\rightarrow(L^E,\leq))$, tal que $KER(A)=\{x\in E\ /\ A(x)=1\}=A_1\ \ \forall A\in L^E$ ¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

$KER(A\cdot B)=KER(A)\cap KER(B)$, $KER(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}KER(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

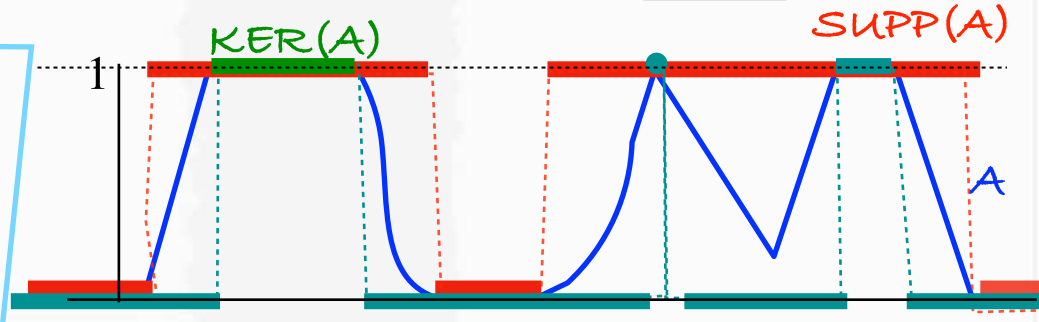
$A\leq B\Rightarrow(KER(A)\subseteq KER(B))$, $KER(KER(A))=KER(A)$, $KER(A)\leq A\ \forall A\in L^E$ (KER es apertura en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(SUPP:(L^E,\leq)\rightarrow(L^E,\leq))$, tal que $SUPP(A)=\{x\in E\ /\ A(x)>0\}=A^*_0\ \ \forall A\in L^E$

$SUPP(A+B)=SUPP(A)\cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}SUPP(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una dilatación)

$A\leq B\Rightarrow(SUPP(A)\subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A))=SUPP(A)$, $A\leq SUPP(A)\ \ \forall A\in L^E$ (SUPP es cierre en $(L^E,\leq)$)

$KER(M)=SUPP(M)=M\ \forall M\in P(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

Sea $W\in L^E$ tal que $W'=W^c$. Las álgebras $((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),')$ y $(L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$ son isomorfas.

Las extensiones asociadas a W: $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\rightarrow(P(E),\sqsubseteq^W))$, $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\rightarrow(P(E),\sqsubseteq^W))$ tales que

$$\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ KER\circ\varphi_k](A)=[KER(A\Delta W)]\Delta W,$$
$$\widehat{\mathbf{Supp}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ SUPP\circ\varphi_k](A)=[SUPP(A\Delta W)]\Delta W\quad\forall A\in L^E$$

NÚCLEO $(KER: (L^E, \leq) \to (L^E, \leq))$, tal que $KER(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$ ¡$(P(E), \subseteq)$ incluido en $(L^E, \leq)$)!

$KER(A \cdot B) = KER(A) \cap KER(B)$, $KER(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

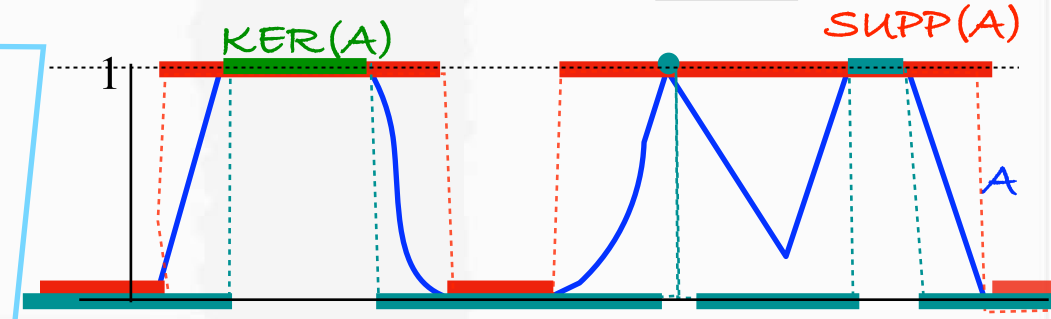
$A \leq B \Rightarrow (KER(A) \subseteq KER(B))$, $KER(KER(A)) = KER(A)$, $KER(A) \leq A \ \forall A \in L^E$ (KER es apertura en $(L^E, \leq)$)

SOPORTE $(SUPP: (L^E, \leq) \to (L^E, \leq))$, tal que $SUPP(A) = \{x \in E \,/\, A(x) > 0\} = A^*_0 \quad \forall A \in L^E$

$SUPP(A+B) = SUPP(A) \cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s \in S} A_s) = \bigcup_{s \in S} SUPP(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una dilatación)

$A \leq B \Rightarrow (SUPP(A) \subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A)) = SUPP(A)$, $A \leq SUPP(A) \quad \forall A \in L^E$ (SUPP es cierre en $(L^E, \leq)$)

$KER(M) = SUPP(M) = M \ \forall M \in P(E)$



$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

Sea $W \in L^E$ tal que $W' = W^c$. Las álgebras $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$ y $(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ son isomorfas.

Las extensiones asociadas a W: $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)} : (L^E, \sqsubseteq^W) \to (P(E), \sqsubseteq^W))$, $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)} : (L^E, \sqsubseteq^W) \to (P(E), \sqsubseteq^W))$ tales que

$$\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) = [\varphi_W \circ KER \circ \varphi_k](A) = [KER(A \Delta W)] \Delta W,$$

$$\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) = [\varphi_W \circ SUPP \circ \varphi_k](A) = [SUPP(A \Delta W)] \Delta W \quad \forall A \in L^E$$

Proposición. Se verifica:

(i) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(M) = \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(M) = M \quad \forall M \in P(E)$,

(ii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A \in L^E$

(iii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(\sqcap^W_{s \in S} A_s) = \sqcap^W_{s \in S} \widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A_s)$, $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(\sqcup^W_{s \in S} A_s) = \sqcup_{s \in S} \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices

(iv) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}[\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)] = \widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)$ $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}[\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)] = \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A \in L^E \ \forall M \in P(E)$

NÚCLEO $(KER: (L^E, \leq) \to (L^E, \leq))$, tal que $KER(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$ ¡$(P(E), \subseteq)$ incluido en $(L^E, \leq)$!

$KER(A \cdot B) = KER(A) \cap KER(B)$, $KER(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} KER(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (KER es una erosión morfológica)

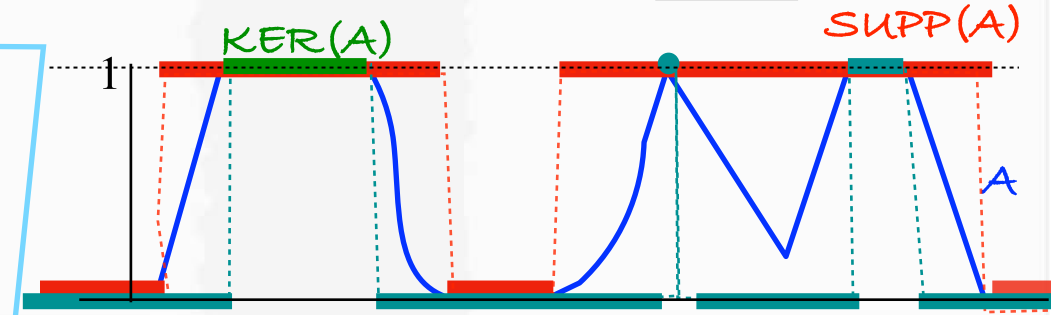
$A \leq B \Rightarrow (KER(A) \subseteq KER(B))$, $KER(KER(A)) = KER(A)$, $KER(A) \leq A \quad \forall A \in L^E$ (KER es apertura en $(L^E, \leq)$)

SOPORTE $(SUPP: (L^E, \leq) \to (L^E, \leq))$, tal que $SUPP(A) = \{x \in E \,/\, A(x) > 0\} = A^*_0 \quad \forall A \in L^E$

$SUPP(A + B) = SUPP(A) \cup SUPP(B)$, $SUPP(\sum_{s \in S} A_s) = \bigcup_{s \in S} SUPP(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (SUPP es una dilatación)

$A \leq B \Rightarrow (SUPP(A) \subseteq SUPP(B))$, $SUPP(SUPP(A)) = SUPP(A)$, $A \leq SUPP(A) \quad \forall A \in L^E$ (SUPP es cierre en $(L^E, \leq)$)

$KER(M) = SUPP(M) = M \quad \forall M \in P(E)$



$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

Sea $W \in L^E$ tal que $W' = W^c$. Las álgebras $((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$ y $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ son isomorfas.

Las extensiones asociadas a W: $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (P(E), \sqsubseteq^W))$, $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (P(E), \sqsubseteq^W))$ tales que

$$\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) = [\varphi_W \circ KER \circ \varphi_R](A) = [KER(A \Delta W)] \Delta W,$$
$$\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) = [\varphi_W \circ SUPP \circ \varphi_R](A) = [SUPP(A \Delta W)] \Delta W \quad \forall A \in L^E$$

Proposición. Se verifica:

(*)(i) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(M) = \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(M) = M \quad \forall M \in P(E)$,

(ii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A \in L^E$

(iii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(\sqcap^W_{s \in S} A_s) = \sqcap^W_{s \in S} \widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A_s)$, $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(\sqcup^W_{s \in S} A_s) = \sqcup_{s \in S} \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices

(iv) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}[\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)] = \widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)$ $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}[\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)] = \widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A \in L^E \; \forall M \in P(E)$

Es decir, $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}$ es erosión morfológica de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ y apertura morfológica en $(L^E, \sqsubseteq^W)$ y $\widehat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}$ es dilatación morfológica de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ y cierre morfológico en $(L^E, \sqsubseteq^W)$.

Proposición. Se verifica:

(i) $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(M)=\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(M)=M \quad \forall M\in P(E)$,

(ii) $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) \sqsubseteq^{W} A \sqsubseteq^{W} \hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A\in L^{E}, \forall M\in P(E)$

(iii) $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(\sqcap^{W}_{s\in S} A_s)=\sqcap^{W}_{s\in S}\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A_s)$, $\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(\sqcup^{W}_{s\in S} A_s)=\sqcup^{W}_{s\in S}\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices

(iv) $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}[\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)]=\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)$ $\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}[\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)]=\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A) \quad \forall A\in L^{E}\ \forall M\in P(E)$

Demostración. (i) Si $M\in P(E)$: $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(M)=[\varphi_W\circ KER\circ\varphi_k](M)=[KER(M\Delta W)]\Delta W=(M\Delta W)\Delta W=M$.

También, si $M\in P(E)$: $\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(M)=[\varphi_W\circ SUPP\circ\varphi_k](M)=[SUPP(M\Delta W)]\Delta W=(M\Delta W)\Delta W=M$.

(ii) $[KER(A)\leq A\leq SUPP(A)]\Rightarrow[\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A) \sqsubseteq^{W} A \sqsubseteq^{W} \hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)]$.

(iii) $[KER(\sqcap_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} KER(A_s)]\Rightarrow[\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(\sqcap^{W}_{s\in S} A_s)=\sqcap^{W}_{s\in S}\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A_s)]$.

$[SUPP(\sum_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} SUPP(A_s)]\Rightarrow[\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(\sqcup^{W}_{s\in S} A_s)=\sqcup^{W}_{s\in S}\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A_s)]$.

(iv) Del apartado (i) se deduce inmediatamente que $\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}[\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)]=\hat{\mathbf{Ker}}_{(w,w)}(A)$ y que $\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}[\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)]=\hat{\mathbf{Supp}}_{(w,w)}(A)$.∎

Conexión con otros términos en la literatura: Orden de Actividad y "Relación de Intermediación"

Relación de Intermediación (Betweenness relation): concepto relacionado con la teoría de retículos (Lattice Theory) (Principales trabajos: entre 1917 y 1959)

$$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$$

$$\Leftrightarrow x \sqsubseteq^{y \cdot w} (y+w)$$

[7] J.M. Cibulskis: *A characterization of the lattice orderings on a set which induce a given betweenness*. Journal of the London Mathematical Society **Vol 1 (1)** (1969):480-482.

[8] E. Pitcher and M.F. Smiley, *Transitives of betweenness*, Trans. Amer. Math. Soc. **Vol 52** (1942)95–114.

$$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$$

$$\Leftrightarrow x \sqsubseteq^{y \cdot w} (y+w)$$

Peter C. Fishburn, Betweenness, orders and interval graphs, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 1, Issue 2, July 1971, Pages 159–178

[7] J.M. Cibulskis: *A characterization of the lattice orderings on a set which induce a given betweenness*. Journal of the London Mathematical Society **Vol 1 (1)** (1969):480-482.

[8] E. Pitcher and M.F. Smiley, *Transitives of betweenness*, Trans. Amer. Math. Soc. **Vol 52** (1942)95–114.

En un retículo distributivo y acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, se define la relación de intermediación (betweenness) como la relación ternaria $B \subseteq L^3$ tal que:

$$(x, y, z) \in B \Leftrightarrow (x \cdot y) + (y \cdot z) = y = (x+y) \cdot (y+z)$$

ORDEN DE ACTIVIDAD Y RELACIÓN DE INTERMEDIACIÓN

$$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$$

$$\Leftrightarrow x \sqsubseteq^{y \cdot w} (y+w)$$

Peter C. Fishburn, Betweenness, orders and interval graphs, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 1, Issue 2, July 1971, Pages 159–178

[7] J.M. Cibulskis: *A characterization of the lattice orderings on a set which induce a given betweenness*. Journal of the London Mathematical Society **Vol 1 (1)** (1969):480-482.

[8] E. Pitcher and M.F. Smiley, *Transitives of betweenness*, Trans. Amer. Math. Soc. **Vol 52** (1942)95–114.

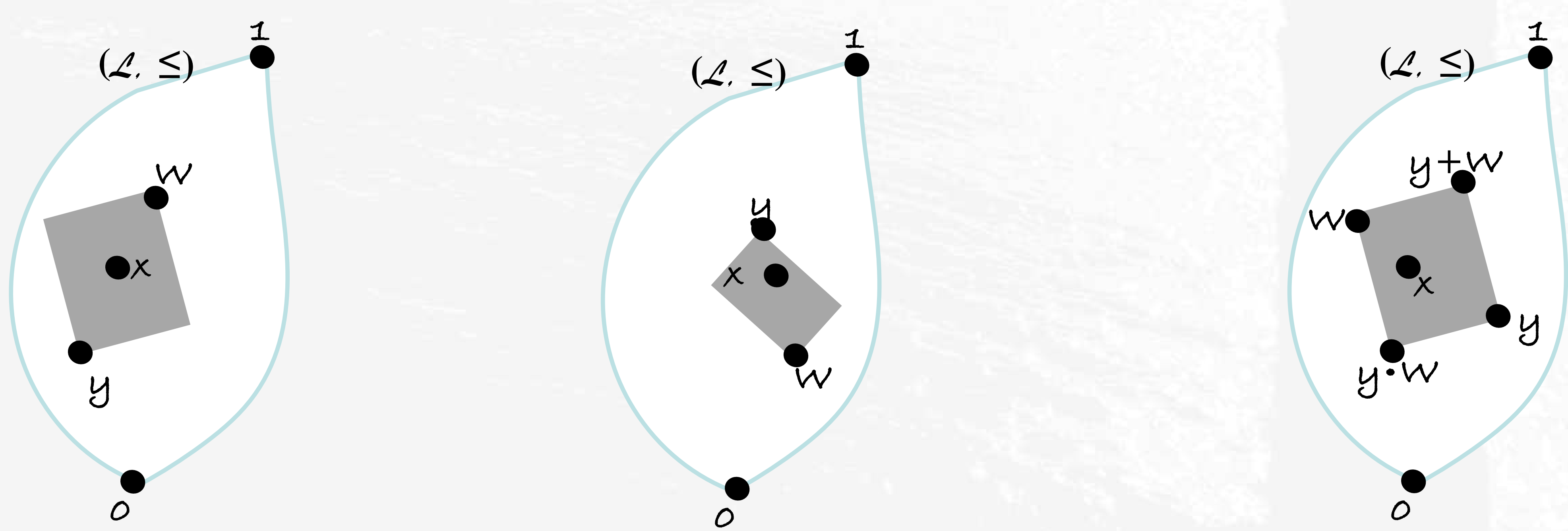
En un retículo distributivo y acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, se define la relación de intermediación (betweenness) como la relación ternaria $B \subseteq L^3$ tal que:

$$(x, y, z) \in B \Leftrightarrow (x \cdot y) + (y \cdot z) = y = (x+y) \cdot (y+z)$$

En un retículo distributivo y acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

(i) $x \sqsubseteq^{w} y$

(ii) $(w, x, y) \in B$




Del periódico “El Español”

Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), no. 6, 567--572

TERNARY BOOLEAN ALGEBRA

A. A. GRAU

1. Introduction. The present paper[1] is concerned with a ternary operation in Boolean algebra. We assume a degree of familiarity with the latter [1, 2],[2] and by the former we shall mean simply a function of three variables defined for elements of a set K whose values are also in K. Ternary operations have been discussed in groupoids [4] and groups [3]; in Boolean algebra an operation different from the

4. Associated Boolean algebras. Let p be a fixed element of K. Define

$$(4.1)\qquad a \cap b = a^p b, \qquad a \cup b = a^{p'} b$$

and refer to the system formed by the elements of K and the operations $\cap$ and $\cup$ as $B(p)$. We may prove:

THEOREM I. *The system $B(p)$ forms a Boolean algebra with p as its universe element and p' as its null element.*

ternary algebra provides a new postulational approach to Boolean algebra. The ternary operation has a unique realization in Boolean algebra (§6). Other applications of ternary operations and the matter of a valid representation for ternary Boolean algebra are left to a subsequent paper.

2. Postulates for ternary Boolean algebra. Let K be a system consisting of a set of elements $a, b, \cdots$, and two operations under which the system is closed, one ternary, $a^b c$, and the other unitary a'. These satisfy the following relations for all a, b, c, d, and e:

$$(2.1)\qquad a^b(c^d e) = (a^b c)^d (a^b e),$$

$$(2.2)\qquad a^b b = b^b a = b,$$

$$(2.3)\qquad a^b b' = b'^b a = a.$$

The system thus defined we shall call a *ternary Boolean alg*

It is easily verified that the following function in Boole satisfies the postulates:

$$(2.4)\qquad (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a).$$

The system K possesses a realization therefore and the p consistent. By specifying zero and unit elements, 0 and restricting the ternary product $a^b c$ to $a \cap b = a^0 b$ an Boolean algebra arises as a special case of ternary Bo

4. Associated Boolean algebras. Let p be a fixed elen Define

$$(4.1)\qquad a \cap b = a^p b, \qquad a \cup b = a^{p'} b$$

and refer to the system formed by the elements of K and tions $\cap$ and $\cup$ as $B(p)$. We may prove:

THEOREM I. *The system $B(p)$ forms a Boolean algebra universe element and p' as its null element.*

Transactions of the American Mathematical Society
Vol. 18, No. 3 (Jul., 1917), pp. 301-325

SETS OF INDEPENDENT POSTULATES FOR BETWEENNESS*

BY

EDWARD V. HUNTINGTON AND J. ROBERT KLINE

INTRODUCTION

The "universe of discourse" of the present paper is the class of all well-defined systems (K, R) where K is any class of elements $A, B, C, \cdots$, and R is any triadic relation. The notation $R[ABC]$, or simply ABC, indicates that three given elements A, B, C, in the order stated, satisfy the relation R.

Examples of such systems (K, R) are the following, of which example (a) is the most important:

(*a*) K is the class of points on a line; AXB means that the point X lies between the points A and B.

(*b*) K is the class of natural numbers; AXB means that the number X is the product of the numbers A and B.

(*c*) K is the class of human beings; AXB means that X is a descendant of A and an ancestor of B.

(*d*) K is the class of points on the circumference of a circle; AXB means that the arc A-X-B is less than 180°.

(*e*) K is a class comprising four elements, namely, the numbers $2, 6, -6$, and 648; AXB means $X^4 = A \times B$.

It is obvious that these systems, and others like them, will possess a great variety of properties expressible in terms of the fundamental variables K and R. The object of this paper is to state clearly the characteristic properties of the type of system represented by example (a) above, by which this type of system is distinguished from all other possible systems (K, R).

Bull. Amer. Math. Soc.

APPLICATIONS OF TRANSITIVITIES OF BETWEENNESS IN LATTICE THEORY[1]

M. F. SMILEY AND W. R. TRANSUE

Introduction. This paper solves three characterization problems for lattices[2] [1]. Problem I is to characterize those metric spaces [2] into which lattice operations which are consistent with the given metric [1, p. 41] may be introduced. Problem II is to characterize those members of a rather general class of abstract systems which are modular lattices, while Problem III consists in the characterization of lattices in an even larger class of abstract systems.

Problem I has already been solved by V. Glivenko [3]. He showed that the property: "Among those elements metrically between [4, p. 76; 2] two elements a and b, the element $a \cup b$ is farthest from O," and its dual characterize those metric spaces which are also metric lattices with the same metric and least element O. Our approach to Problem I is through the existence of certain metric singularities [2, p. 47] in every metric lattice. Our solution also involves certain five point transitivities [5, Part I] of metric betweenness. The abstract system involved in Problem II (Problem III) is a wide generalization of the concept of a metric space—so general, in fact, that it also includes the concept of a modular lattice (lattice). We find it not difficult to extend the ideas essential to our solution of Problem I to give analogous solutions of Problems[3] II and III. Briefly, our results consist in characterizing the three important systems: metric

Presented to the Society, April 4, 1942; received by the editors June 2, 1942.

[1] This paper is an expansion of our note *Metric lattices as singular metric spaces* which was presented to the Society on December 29, 1941, and which was to appear in Bull. Amer. Math. Soc.

[2] Numbers in square brackets refer to the list of references at the end of the paper.

[3] It would be interesting to characterize metric spaces among our general systems. This problem appears difficult to us, and we make no attempt to solve it.

Bull. Amer. Math. Soc. Volume 53, Number 8 (1947), 749-752.

A TERNARY OPERATION IN DISTRIBUTIVE LATTICES

GARRETT BIRKHOFF AND S. A. KISS

It can be easily seen that the *graph* [1, p. 9],[1] of the Boolean algebra B^n of 2^n elements (consisting of the vertices and edges of an n-cube) has $2^n(n!)$ "link-automorphisms," whereas B^n has only $(n!)$ lattice-automorphisms. In an unpublished book,[2] one of us has developed new operations in B^n and other distributive lattices, which admit such a wider group of invariance. The purpose of this note is to show the role of the symmetric and self-dual ternary operation [1, p. 74]

$$(1)\qquad \begin{aligned}(a, b, c) &= (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)\\ &= (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)\end{aligned}$$

in a general distributive lattice L, with reference to the wider group of symmetries which it admits.

THEOREM 1. *In any metric distributive lattice* [1, p. 41], *the following conditions are equivalent*: (i) $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$, (ii) $|a-x| + |x-b| = |a-b|$, (iii) $(a, x, b) = x$.

PROOF. V. Glivenko [3, p. 819, Theorem V] has shown the equivalence of (i) and (ii); condition (i) says that x is metrically "between" a and b in the sense of Menger. But now if $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$, then $(a, x, b) = (a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) = (a \cap b) \cup [x \cap (a \cup b)] = x$. Conversely, if $(a, x, b) = x$, then

$$x = (a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) \geqq a \cap b,$$

and dually, $x \leqq a \cup b$. Hence (i) and (iii) are equivalent.

Contribution à L'Étude des Systèmes de Choses Normées
Author(s): V. Glivenko
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 59, No. 4 (Oct., 1937), pp. 941-956

Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), no. 6, 567--572

TERNARY BOOLEAN ALGEBRA

A. A. GRAU

1. Introduction. The present paper[1] is concerned with a ternary operation in Boolean algebra. We assume a degree of familiarity with the latter [1, 2],[2] and by the former we shall mean simply a function of three variables defined for elements of a set K whose values are also in K. Ternary operations have been discussed in groupoids [4] and groups [3]; in Boolean algebra an operation different from the

4. Associated Boolean algebras. Let p be a fixed element of K. Define

(4.1) $a \cap b = a^p b, \quad a \cup b = a^{p'} b$

and refer to the system formed by the elements of K and the operations $\cap$ and $\cup$ as $B(p)$. We may prove:

THEOREM I. *The system $B(p)$ forms a Boolean algebra with p as its universe element and p' as its null element.*

ternary algebra provides a new postulational approach to Boolean algebra. The ternary operation has a unique realization in Boolean algebra (§6). Other applications of ternary operations and the matter of a valid representation for ternary Boolean algebra are left to a subsequent paper.

2. Postulates for ternary Boolean algebra. Let K be a system consisting of a set of elements $a, b, \cdots$, and two operations under which the system is closed, one ternary, $a^b c$, and the other unitary a'. These satisfy the following relations for all a, b, c, d, and e:

(2.1) $a^b(c^d e) = (a^b c)^d (a^b e),$

(2.2) $a^b b = b^b a = b,$

(2.3) $a^b b' = b'^b a = a.$

The system thus defined we shall call a *ternary Boolean alg*

It is easily verified that the following function in Boole satisfies the postulates:

(2.4) $(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a).$

The system K possesses a realization therefore and the p consistent. By specifying zero and unit elements, 0 and restricting the ternary product $a^b c$ to $a \cap b = a^0 b$ and Boolean algebra arises as a special case of ternary Boo

4. Associated Boolean algebras. Let p be a fixed eler Define

(4.1) $a \cap b = a^p b, \quad a \cup b = a^{p'} b$

and refer to the system formed by the elements of K and tions $\cap$ and $\cup$ as $B(p)$. We may prove:

THEOREM I. *The system $B(p)$ forms a Boolean algebra universe element and p' as its null element.*

Transactions of the American Mathematical Society
Vol. 18, No. 3 (Jul., 1917), pp. 301-325

SETS OF INDEPENDENT POSTULATES FOR BETWEENNESS*

BY
EDWARD V. HUNTINGTON AND J. R

INTRODUCTION

The "universe of discourse" of the present pa defined systems (K, R) where K is any class o and R is any triadic relation. The notation R indicates that three given elements A, B, C, in t relation R.

Examples of such systems (K, R) are the follo is the most important:

(*a*) K is the class of points on a line; AXB m between the points A and B.

(*b*) K is the class of natural numbers; AXB m the product of the numbers A and B.

(*c*) K is the class of human beings; AXB means A and an ancestor of B.

(*d*) K is the class of points on the circumferen that the arc A-X-B is less than 180°.

(*e*) K is a class comprising four elements, namel and 648; AXB means $X^4 = A \times B$.

It is obvious that these systems, and others lik variety of properties expressible in terms of the and R. The object of this paper is to state clearl ties of the type of system represented by exampl type of system is distinguished from all other poss

Bull. Amer. Math. Soc.

APPLICATIONS OF TRANSITIVITIES OF BETWEENNESS IN LATTICE THEORY[1]

M. F. SMILEY AND W. R. TRANSUE

Introduction. This paper solves three characterization problems for metric spaces [2] into with the given metric to characterize those t systems which are the characterization stems. venko [3]. He showed etrically between [4, b is farthest from O," which are also metric t O. Our approach to n metric singularities also involves certain etweenness. The ab- III) is a wide general- neral, in fact, that it (lattice). We find it solution of Problem I d III. Briefly, our re- tant systems: metric

he editors June 2, 1942.
s as *singular metric spaces* and which was to appear
ces at the end of the paper. mong our general systems. npt to solve it.

Signal Processing
Volume 16, Issue 4, April 1989, Pages 303-317
Special Issue on Advances in Mathematical Morphology

Contrasts and activity lattice

F Meyer, J Serra

Abstract

Starting from the set P(*E*) of all the subsets of an arbitrary space *E*, one considers the class A of all the mappings from P(*E*) into itself. It is proved that A is a complete lattice with respect to the activity ordering, according to which a mapping is more active than another, when it modifies more elements of *E*. In this lattice, the infinum $\curlywedge$ is nothing but the already known morphological center. The class F of the real-valued functions f: E → R is closed under the supremum $\curlyvee$ iff some supplementary requirements are fulfilled. It is the case on the class of the contrast mappings, where at each point *x*, function *f*(*x*) may be transformed only into (ζ*f*)(*x*), (η*f*)(*x*) or *f*(*x*), where ζ and η are two mappings F → F. A contrast κ is idempotent when ζ and η are a compact $\vee$-underfilter and a compact $\wedge$-overfilter respectively. Examples are given.

12-1-2013

Road Systems and Betweenness

Paul Bankston
Marquette University, paul.bankston@marquette.edu

10-9-2014

The Antisymmetry Betweenness Axiom and Hausdorff Continua

Paul Bankston
Marquette University, paul.bankston@marquette.edu

Bull. Amer. Math. Soc. Volume 53, Number 8 (1947), 749-752.

A TERNARY OPERATION IN DISTRIBUTIVE LATTICES

GARRETT BIRKHOFF AND S. A. KISS

It can be easily seen that the *graph* [1, p. 9],[1] of the Boolean algebra B^n of 2^n elements (consisting of the vertices and edges of an n-cube) has $2^n(n!)$ "li lattice-automorphis veloped new operati admit such a wider to show the role of [1, p. 74]

(1) $(a, b$

in a general distribu of symmetries which

THEOREM 1. *In any metric distributive lattice* [1, p. 41], *the following conditions are equivalent*: (i) $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$, (ii) $|a-x| + |x-b| = |a-b|$, (iii) $(a, x, b) = x$.

PROOF. V. Glivenko [3, p. 819, Theorem V] has shown the equivalence of (i) and (ii); condition (i) says that x is metrically "between" a and b in the sense of Menger. But now if $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$, then $(a, x, b) = (a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) = (a \cap b) \cup [x \cap (a \cup b)] = x$. Conversely, if $(a, x, b) = x$, then

$$x = (a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) \geqq a \cap b,$$

and dually, $x \leqq a \cup b$. Hence (i) and (iii) are equivalent.

Wikipedia:

A **Jónsson term or majority term** is a term t with exactly three free variables that satisfies the equations

$$t(x, x, y) = t(x, y, x) = t(y, x, x) = x.$$

For example for lattices, the term

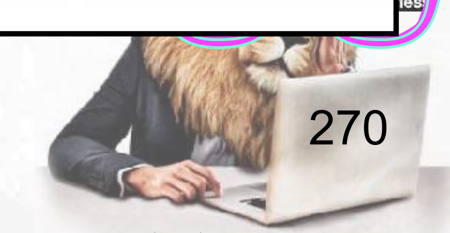
$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$ is a Jónsson term.

Contribution à L'Étude des Systèmes de Choses Normées
Author(s): V. Glivenko
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 59, No. 4 (Oct., 1937), pp. 941-956

Leer con pasión...

Jean Serra (ed.), Image Analysis and mathematical Morphology. Academic Press, vol. II (second printing 1992).

P. Soille, Morphological Image Analysis. Principles and Applications. Springer 1999.



Del periódico "El Español"

Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), no. 6, 567--572

TERNARY BOOLEAN ALGEBRA

A. A. GRAU

1. Introduction. The present paper[1] is concerned with a ternary operation in Boolean algebra. We assume a degree of familiarity with the latter [1, 2],[2] and by the former we shall mean simply a function of three variables defined for elements of a set K whose values are

Transactions of the American Mathematical Society
Vol. 18, No. 3 (Jul., 1917), pp. 301-325

SETS OF INDEPENDENT POSTULATES FOR BETWEENNESS*

BY

EDWARD V. HUNTINGTON AND J. R

INTRODUCTION

of the present pa
K is any class o
The notation R
nts A, B, C, in t

Bull. Amer. Math. Soc.

APPLICATIONS OF TRANSITIVITIES OF BETWEENNESS IN LATTICE THEORY[1]

M. F. SMILEY AND W. R. TRANSUE

Introduction. This paper solves three characterization problems for metric spaces [2] into with the given metric to characterize those t systems which are the characterization stems. venko [3]. He showed etrically between [4, b is farthest from O," which are also metric t O. Our approach to n metric singularities also involves certain s. The ab- de general- ct, that it We find it Problem I ly, our re- ns: metric

edians, Lattices, and Trees
uthor(s): Marlow Sholander
ource: *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 5, No. 5 (Oct., 1954), pp 08-812

Signal Processing
Volume 16, Issue 4, April 1989, Pages 303-317
Special Issue on Advances in Mathematical Morphology

ELSEVIER

Contrasts and activity lattice

F Meyer, J Serra

Abstract

Starting from the set P(E) o
class A of all the mappings
with respect to the activity o
another, when it modifies m
but the already known morp
E → R is closed under the
fulfilled. It is the case on the
function f(x) may be transfo
mappings F → F. A contrast κ is idempotent when ζ and η are a compact ∨-underfilter and a compact ∧-overfilter respectively. Examples are given.

A Characterization of Ordered Sets and Lattices via Betweenness Relations

Result.Math. 46 (2004) 237-250
1422-6383/04/040237-14
DOI 10.1007/s00025-004-0145-x
© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Nico Düvelmeyer*, Walter Wenzel

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 260, Number 2, August 1980

MEDIAN ALGEBRA

BY

JOHN R. ISBELL

Miskolc Mathematical Notes HU ISSN 1787-2405
Vol. 14 (2013), No. 3, pp. 827–844

ALGEBRAS ASSIGNED TO TERNARY RELATIONS

IVAN CHAJDA, MIROSLAV KOLAŘÍK, AND HELMUT LÄNGER

that the arc A-X-B is less than 180°.

(e) K is a class comprising four elements, name and 648; AXB means $X^4 = A \times B$.

It is obvious that these systems, and others lik variety of properties expressible in terms of the and R. The object of this paper is to state clearl ties of the type of system represented by exampl type of system is distinguished from all other poss

e 2, 1942.
metric spaces
as to appear
of the paper.
mong our general systems.
npt to solve it.

(2.3) $a^b b' = b'^b a = a$.

The system thus defined we shall call a *ternary Boolean alg*
It is easily verified that the following function in Boole satisfies the postulates:

(2.4) $(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$.

The system K possesses a realization therefore and the p consistent. By specifying zero and unit elements, 0 and restricting the ternary product $a^b c$ to $a \cap b = a^0 b$ an Boolean algebra arises as a special case of ternary Bo

4. Associated Boolean algebras. Let p be a fixed ele Define

(4.1) $a \cap b = a^p b$, $a \cup b = a^{p'} b$

and refer to the system formed by the elements of K and tions $\cap$ and $\cup$ as $B(p)$. We may prove:

THEOREM I. *The system $B(p)$ forms a Boolean algebra universe element and p' as its null element.*

Bull. Amer. Math. Soc. Volume 53, Number 8 (1947), 749-752.

A TERNARY OPERATION IN DISTRIBUTIVE LATTICES

GARRETT BIRKHOFF AND S. A. KISS

It can be easily seen that the *graph* [1, p. 9],[1] of the Boolean algebra B^n of 2^n elements (consisting of the vertices and edges of an n-cube) has $2^n(n!)$ "li lattice-automorphis veloped new operati admit such a wider to show the role of [1, p. 74]

(1) $(a, b$

in a general distribu of symmetries which

THEOREM 1. *In any metric distributive lattice* [1, p. 41], *the following conditions are equivalent*: (i) $a \cap b \leq x \leq a \cup b$, (ii) $|a-x| + |x-b| = |a-b|$

PROOF nce of a and b $(a, x, b$ ersely, i

and dual

Wikipedia:

A **Jónsson term or majority term** is a term t with exactly three free variables that satisfies the equations

t(x, x, y) = t(x, y, x) = t(y, x, x) = x.

For example for lattices, the term

(x ∧ y) ∨ (y ∧ z) ∨ (z ∧ x) is a Jónsson term.

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 260, Number 2, August 1980

MEDIAN ALGEBRA

BY

JOHN R. ISBELL

12-1-2013

Road Systems and Betweenness

Paul Bankston
Marquette University, paul.bankston@marquette.edu

10-9-2014

The Antisymmetry Betweenness Axiom and Hausdorff Continua

Paul Bankston
Marquette University, paul.bankston@marquette.edu

Contribution à L'Étude des Systèmes de Choses Normées
Author(s): V. Glivenko
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 59, No. 4 (Oct., 1937), pp. 941-956

Leer con pasión...

Jean Serra (ed.), Image Analysis and mathematical Morphology. Academic Press, vol. II (second printing 1992).

P. Soille, Morphological Image Analysis. Principles and Applications. Springer 1999.

Del periódico "El Español"

Recopilación de algunas propiedades de las inclusiones $\sqsubseteq^{w}$ y de sus intersecciones $\sqcap^{w}$ y uniones $\sqcup^{w}$ asociadas

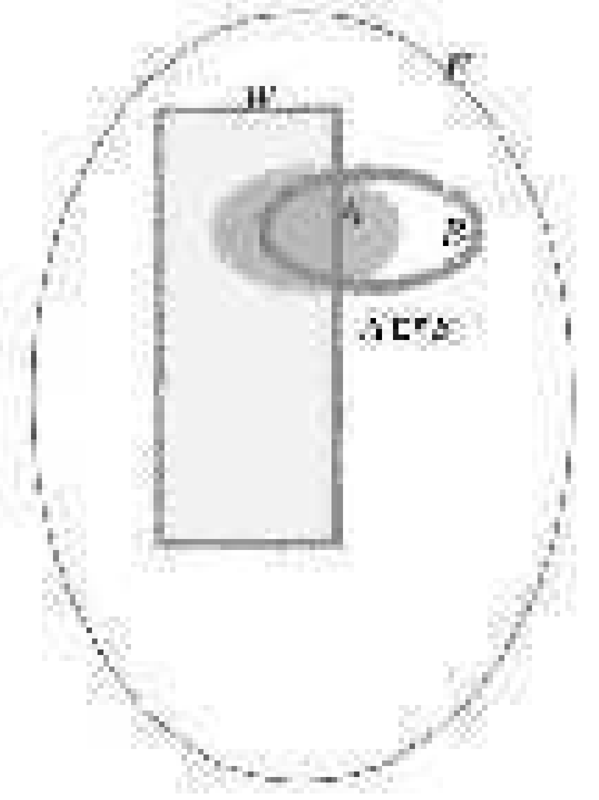
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

($\mathcal{L}$, $\leq$, $\cdot$, $+$) retículo distributivo.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.

Por ejemplo, si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:



ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

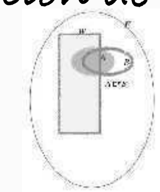
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

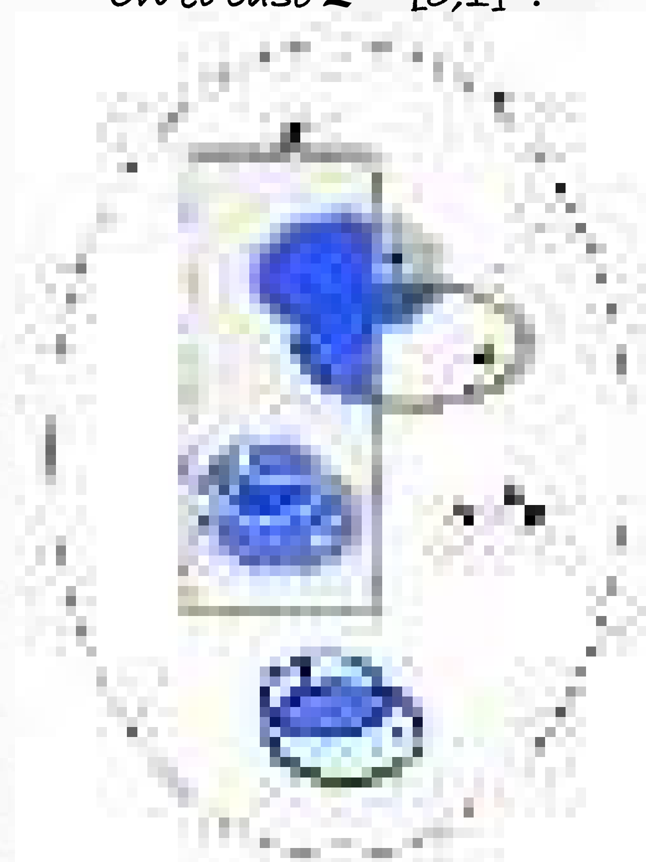
Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.



En el caso $\mathcal{L} = [0,1]^E$:



ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

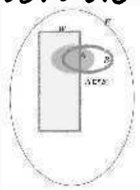
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.



W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

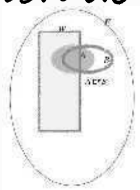
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

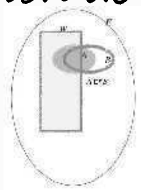
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

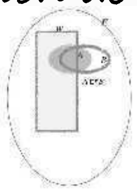
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c,

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

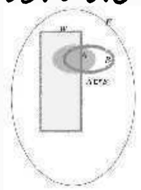
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c,

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Si W^c es complemento de W, el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

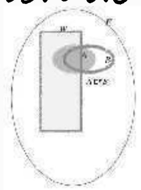
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c,

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Si W^c es complemento de W, el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

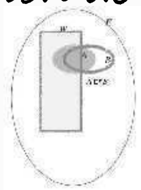
$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A\cdot B + W^c\cdot(A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

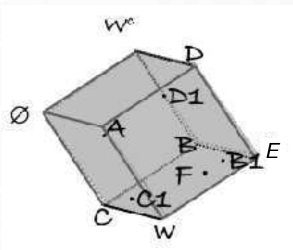
$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:



Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c,

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Si W^c es complemento de W, el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

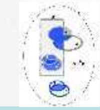
En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

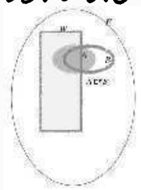
Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.



Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

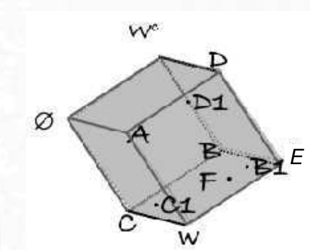
$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W A = A$.

Si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:



Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c,

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Si W^c es complemento de W, el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$

$\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

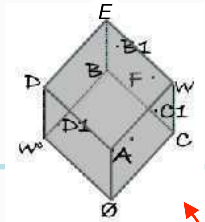
$\varphi_W : ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), \, ') \rightarrow ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), \, ')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, $\quad \varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]' \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:

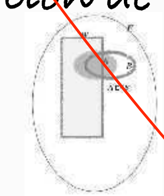


Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.



Si $\mathcal{L}$ es acotado con elementos mínimo 0, máximo 1 y si W^c es complemento de W:

La ley $A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B = A \cdot B + W^c \cdot (A+B)$ es tal que

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcup^W B = B)$, ($\sqcup^W$ es ley supremo en el ahora retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

W es elemento absorbente para la ley $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

$A \sqcap^W W = W \sqcap^W A = W$. Es el elemento mínimo del conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

El complemento W^c es elemento neutro para la ley $\sqcap^W$. $\forall A \in \mathcal{L}$:

$A \sqcap^W W^c = W^c \sqcap^W A = A$. Es además elemento máximo de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$.

Conmutatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqcap^W B = B \sqcap^W A$.

Idempotencia de las leyes del tipo $\sqcap^W$ $\forall (A,W) \in \mathcal{L}^2$:

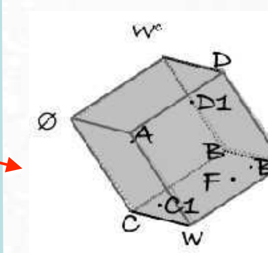
$A \sqcap^W A = A$.

Isomorfos

Asociatividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$ $\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^W C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^W C$.

Si $\mathcal{L} = [0,1]^E$:



Distributividad de las leyes del tipo $\sqcap^W$ $\forall (A,B,C,W,S) \in \mathcal{L}^5$:

$A \sqcap^W (B \sqcap^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcap^S (A \sqcap^W C)$,

En particular, si S es complementado con complemento S^c, $\forall (A,B,C,W) \in \mathcal{L}^4$:

$A \sqcap^W (B \sqcup^S C) = (A \sqcap^W B) \sqcup^S (A \sqcap^W C)$,

$A \sqcup^S (B \sqcap^W C) = (A \sqcup^S B) \sqcap^W (A \sqcup^S C)$.

Si W^c es complemento de W, el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es distributivo.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

$\varphi_W : ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), \,') \to ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), \,')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, $\varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]'$ $\forall A \in \mathcal{L}$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A \cdot B + W \cdot (A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W)$.

$\forall (W,V,X) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqsubseteq^W B \Rightarrow (A \sqcap^V X) \sqsubseteq^W (B \sqcap^V X)$, es decir, para todo par (W,V)

la ley $\sqcap^V$ es isótona para el orden $\sqsubseteq^W$

Si W es complementado y $V \in \mathcal{L}$, el operador $\sqcap^V$ es una nulnorma, (con elemento absorbente V), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

$\varphi_W : ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), \,') \rightarrow ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), \,')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W), \qquad \varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]' \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.

$\forall (W,V,X) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqsubseteq^W B \Rightarrow (A \sqcap^V X) \sqsubseteq^W (B \sqcap^V X)$, es decir, para todo par (W,V)

la ley $\sqcap^V$ es isótona para el orden $\sqsubseteq^W$

Si W es complementado y $V \in \mathcal{L}$, el operador $\sqcap^V$ es una nulnorma, (con elemento absorbente V), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

Si también $V \in \mathcal{L}$ es complementado, ese operador $\sqcap^V$ es además una uninorma, (con elemento neutro V^c), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

$\varphi_W : ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, $\quad \varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]' \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B) \quad \forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.

$\forall (W,V,X) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqsubseteq^W B \Rightarrow (A \sqcap^V X) \sqsubseteq^W (B \sqcap^V X)$, es decir, para todo par (W,V)

la ley $\sqcap^V$ es isótona para el orden $\sqsubseteq^W$

Si W es complementado y $V \in \mathcal{L}$, el operador $\sqcap^V$ es una nulnorma, (con elemento absorbente V), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

Si también $V \in \mathcal{L}$ es complementado, ese operador $\sqcap^V$ es además una uninorma, (con elemento neutro V^c), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$ y para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $S' = S^c$, se verifica:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(B \sqcap^S W) \sqsubseteq^S A \sqsubseteq^S (B \sqcup^S W)]$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

$\varphi_W : ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $\quad A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, $\quad \varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]' \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

ESTRUCTURA ASOCIADA AL ORDEN DE ACTIVIDAD GENERADO POR UN ELEMENTO *W*

$(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +)$ retículo distributivo.

Ley de composición $\sqcap^W$ en $\mathcal{L}$: $A \sqcap^W B = A\cdot B + W\cdot(A+B)$ $\forall (A,B,W) \in \mathcal{L}^3$,

Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \sqcap^W B = A)$ ($\sqcap^W$ es la ley ínfimo en el conjunto ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$ que resulta ser inf-semiretículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$.

Para cada $W \in \mathcal{L}$, se define la relación de orden de actividad $\sqsubseteq^W$:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$.

$\forall (W,V,X) \in \mathcal{L}^3$:

$A \sqsubseteq^W B \Rightarrow (A \sqcap^V X) \sqsubseteq^W (B \sqcap^V X)$, es decir, para todo par (W,V)

la ley $\sqcap^V$ es isótona para el orden $\sqsubseteq^W$

Si W es complementado y $V \in \mathcal{L}$, el operador $\sqcap^V$ es una nulnorma, (con elemento absorbente V), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

Si también $V \in \mathcal{L}$ es complementado, ese operador $\sqcap^V$ es además una uninorma, (con elemento neutro V^c), en el retículo distributivo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$.

Se verifica:

$A \sqcap^W B = W \Leftrightarrow (A\cdot B \leq W \leq A+B) \Leftrightarrow W \sqsubseteq^B A \Leftrightarrow W \sqsubseteq^A B$

(A y B son W-disjuntos)

Para cada $W \in \mathcal{L}$ y para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $S' = S^c$, se verifica:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow [(B \sqcap^S W) \sqsubseteq^S A \sqsubseteq^S (B \sqcup^S W)]$.

En conclusión, si W^c es complemento de W, entonces $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c)$ es un retículo distributivo con elemento mínimo W y elemento máximo W^c.

Finalmente, si en el retículo acotado $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ existe una negación fuerte $'$ y W complementado es tal que tal que $W^c = W'$, entonces la aplicación

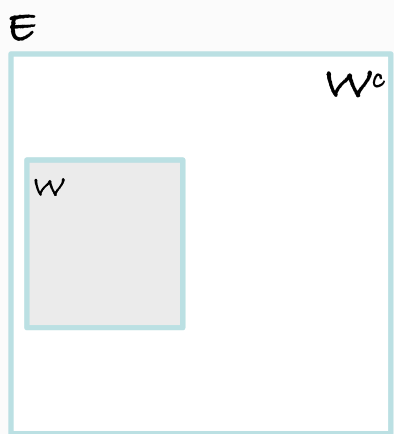
$\varphi_W: ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), {}') \rightarrow ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}')$ tal que

$\varphi_W(A) = A \triangle W = (A \cdot W^c) + (A' \cdot W)$ es un isomorfismo entre ambas estructuras

y $A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$, $\varphi_W(A') = [\varphi_W(A)]'$ $\forall A \in \mathcal{L}$.

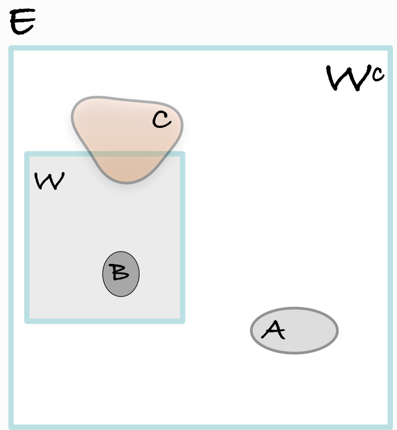
Relación entre filtros e ideales principales de los retículos $(\mathcal{L},\leq)$ y de $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{W})$.

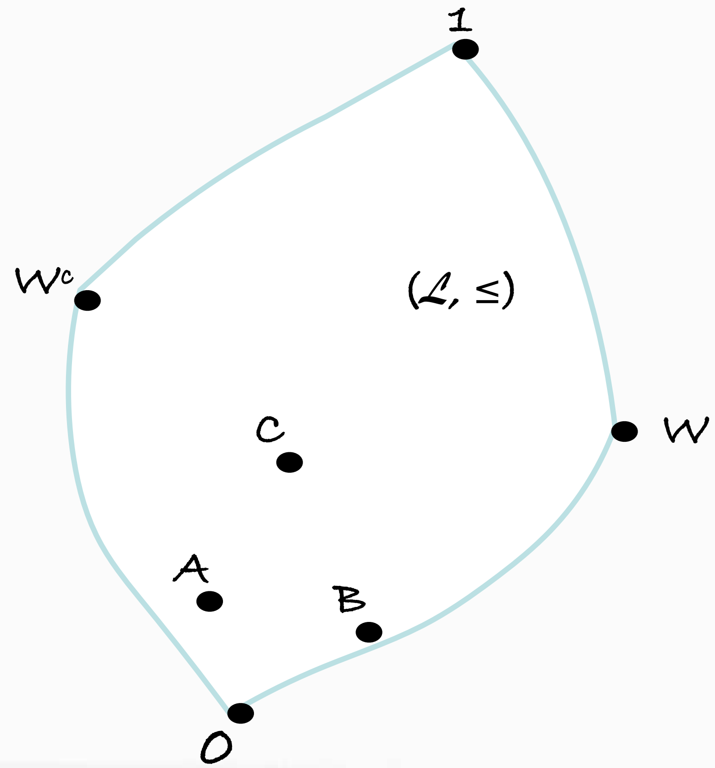
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:



Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

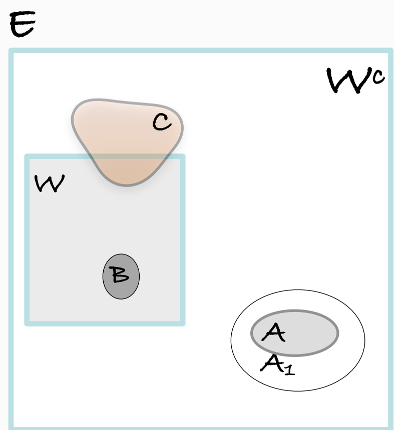
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

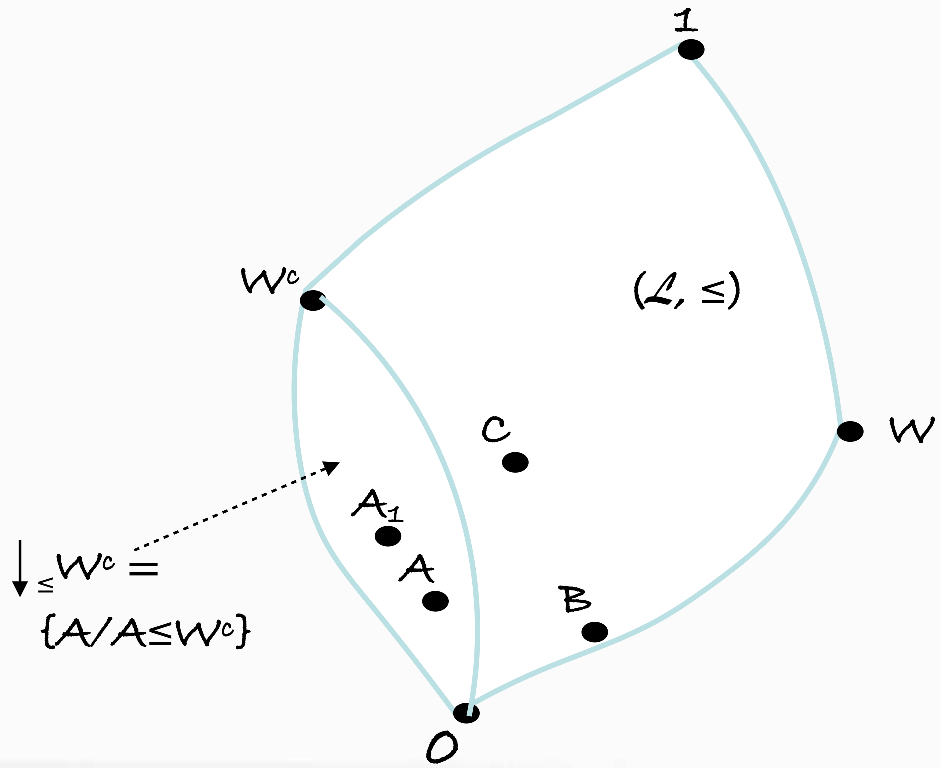




Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

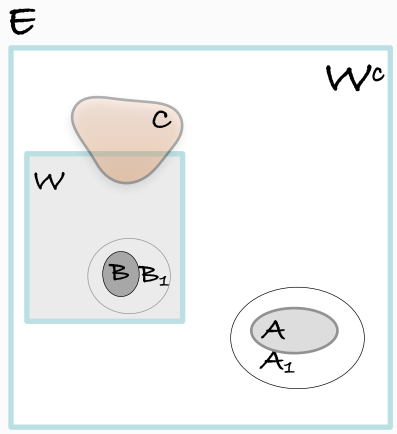
Por ejemplo $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$:

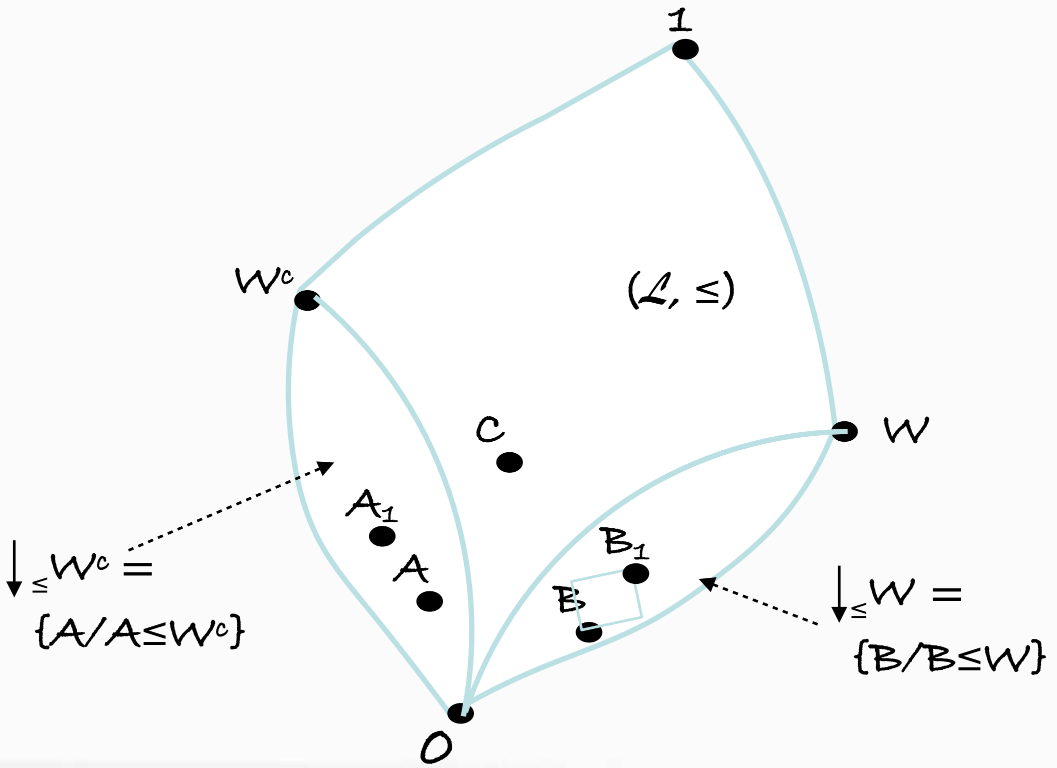




Retículo distributivo$(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $w^c = w'$

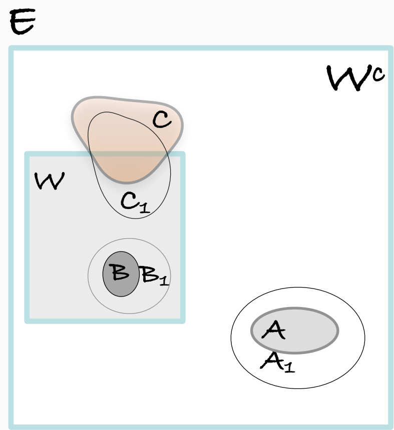
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

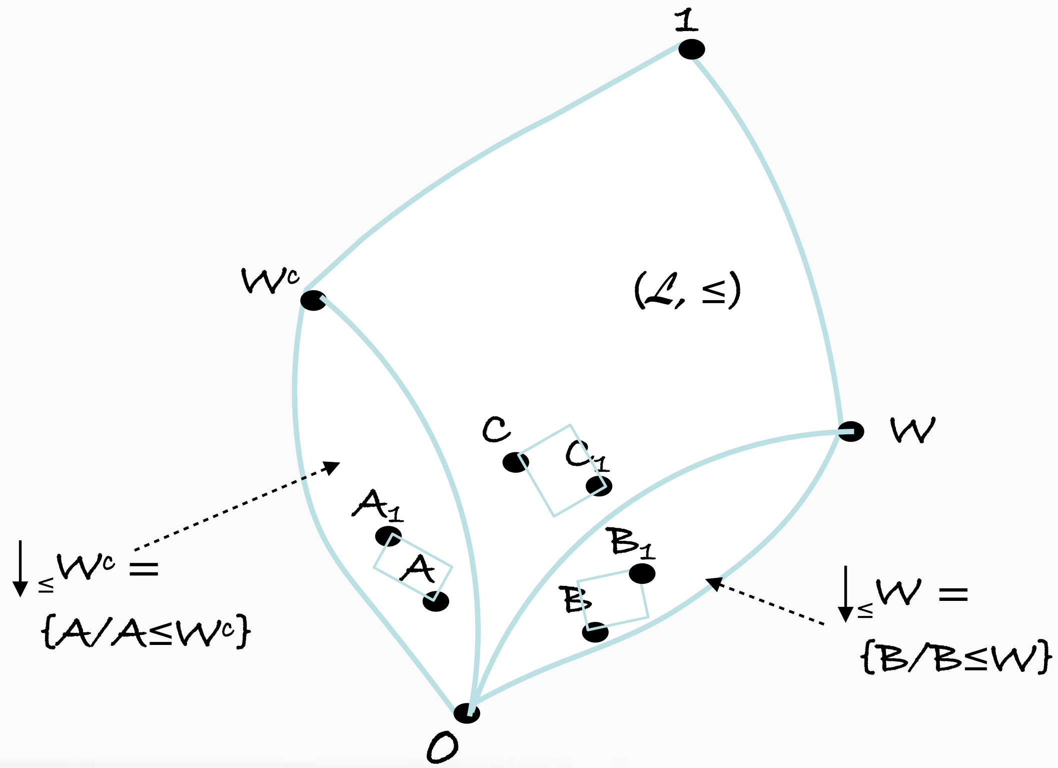




Retículo distributivo$(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $w^c = w'$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

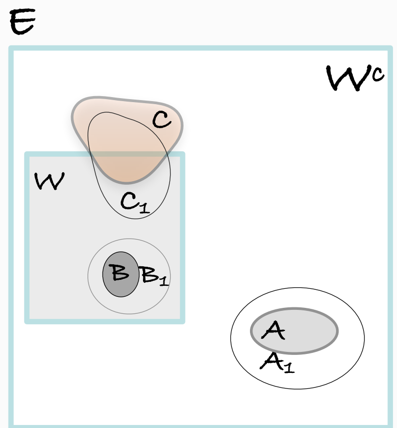


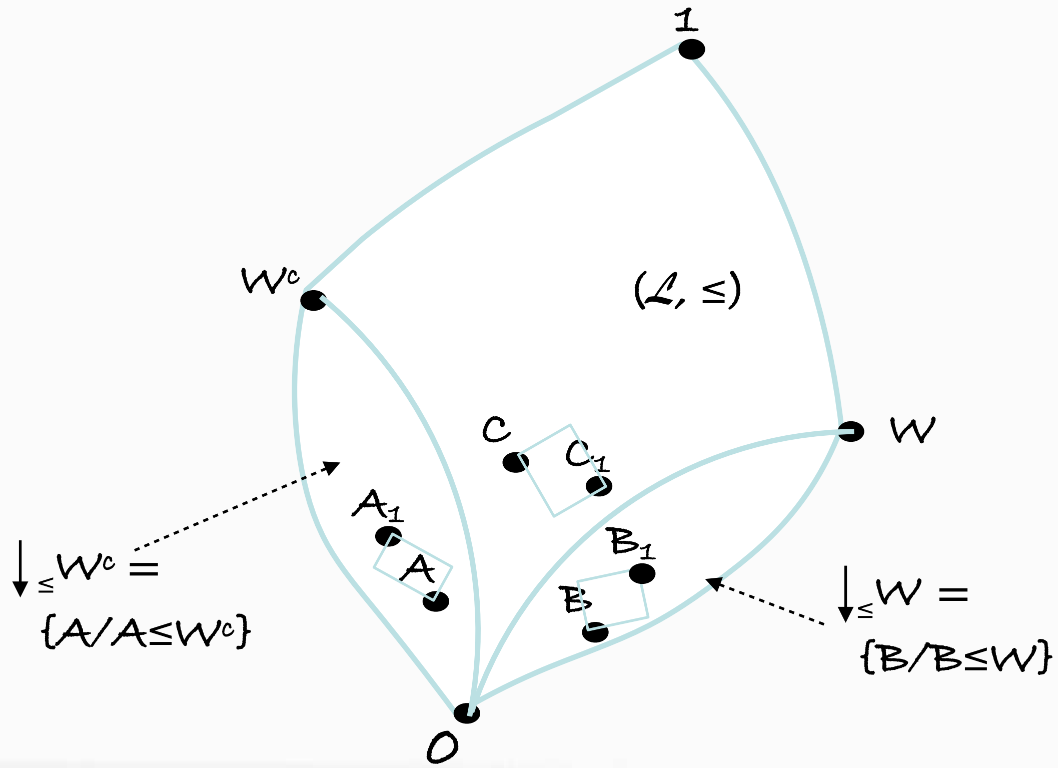


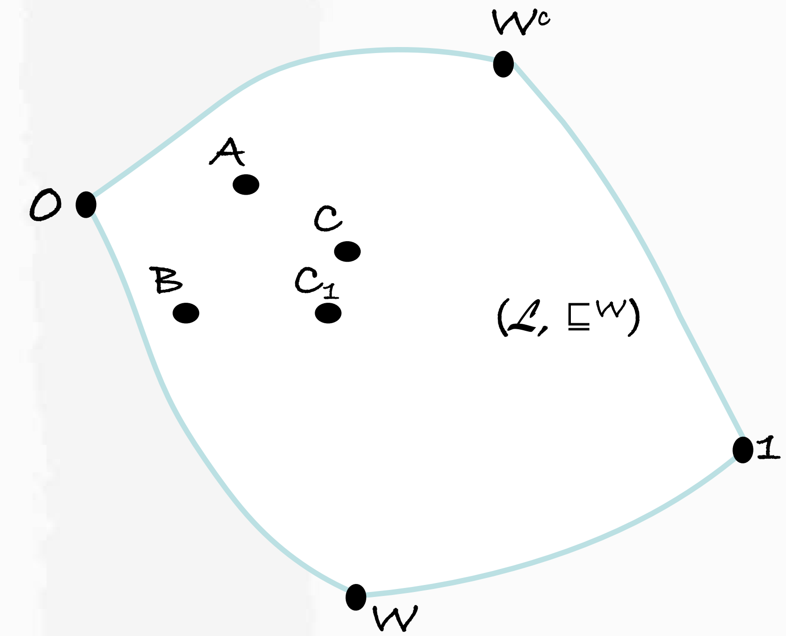
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W\in\mathcal{L}$ complementado tal que $W^c=W'$

Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

Por ejemplo $\mathcal{L}=P(E)$:



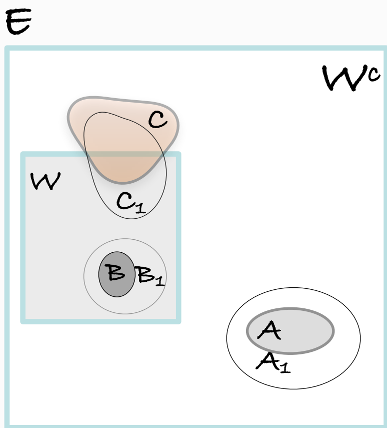


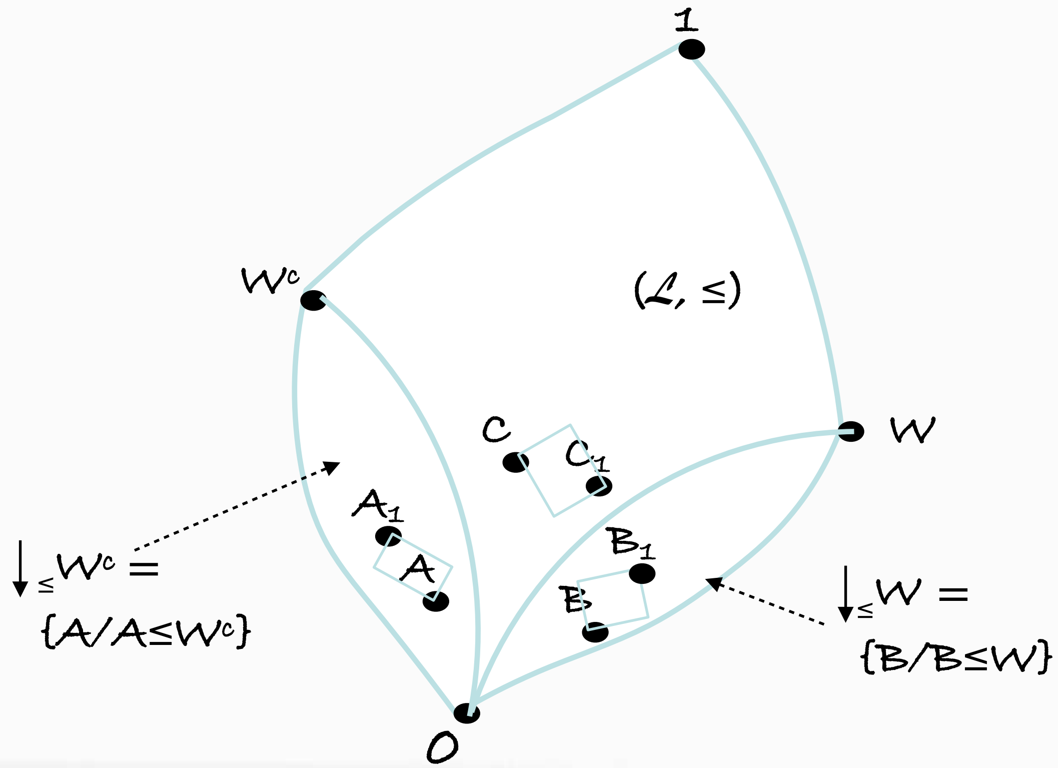


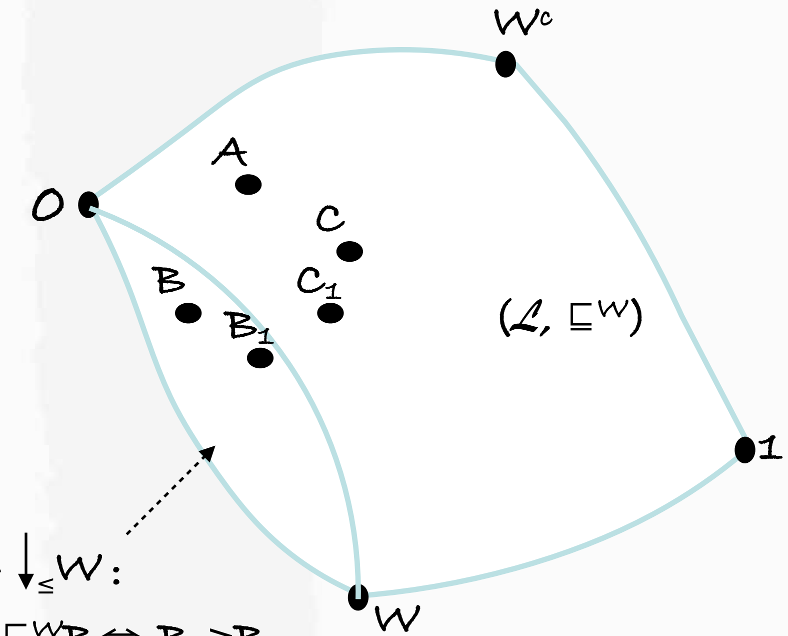
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:







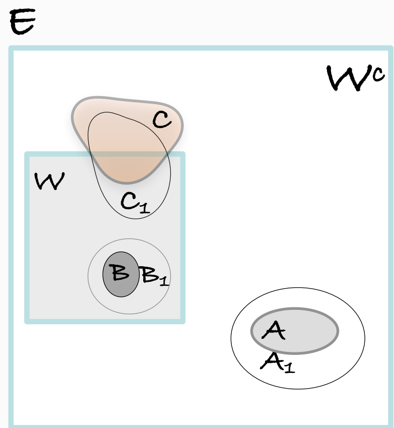
En $\downarrow_{\leq} W$:

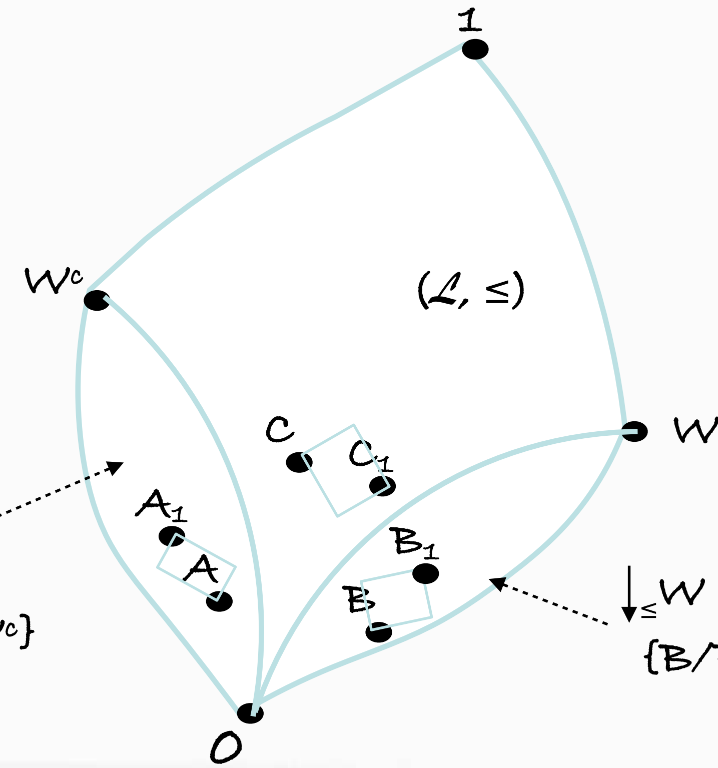
$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq^W} O$

Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \le)$ y $W\in\mathcal{L}$ complementado tal que $W^c=W'$

Por ejemplo $\mathcal{L}=P(E)$:





$\downarrow_{\le} W^c =$

$\{A/A\le W^c\}$

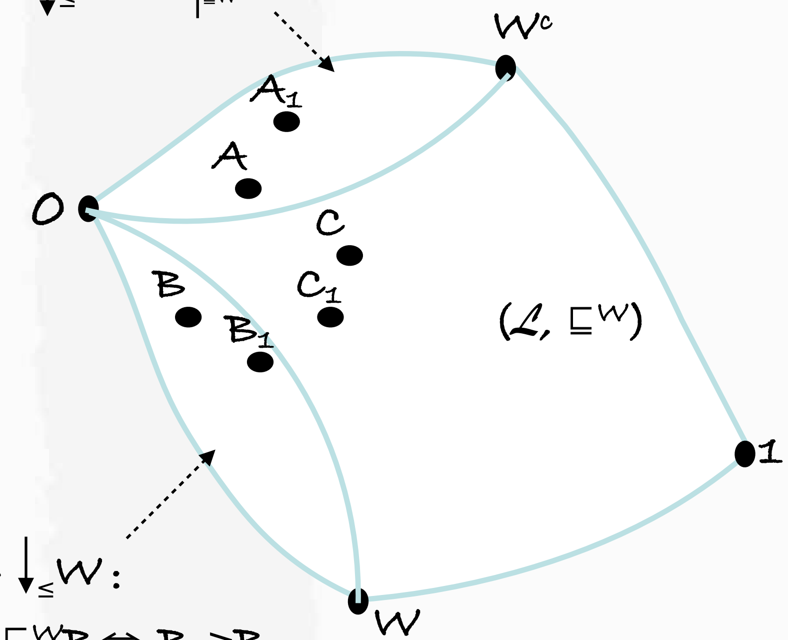
$\downarrow_{\le} W =$

$\{B/B\le W\}$

En $\downarrow_{\le} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A\le A_1$

$\downarrow_{\le} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} 0$



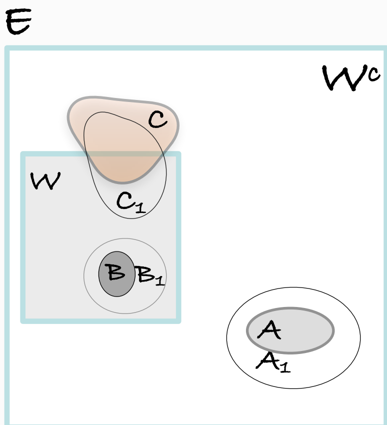
En $\downarrow_{\le} W$:

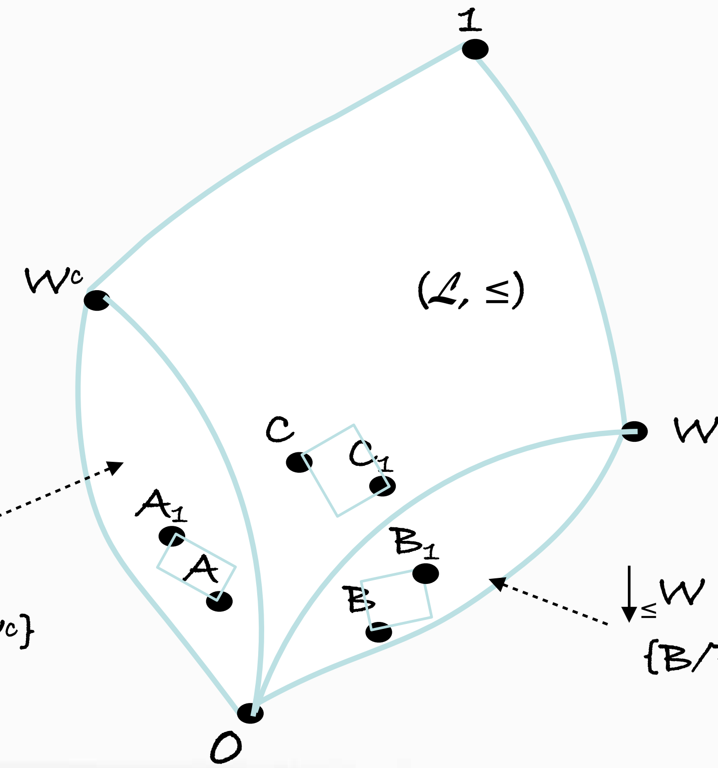
$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \ge B$

$\downarrow_{\le} W = \downarrow_{\sqsubseteq W} 0$

Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W\in\mathcal{L}$ complementado tal que $W^c=W'$

Por ejemplo $\mathcal{L}=P(E)$:





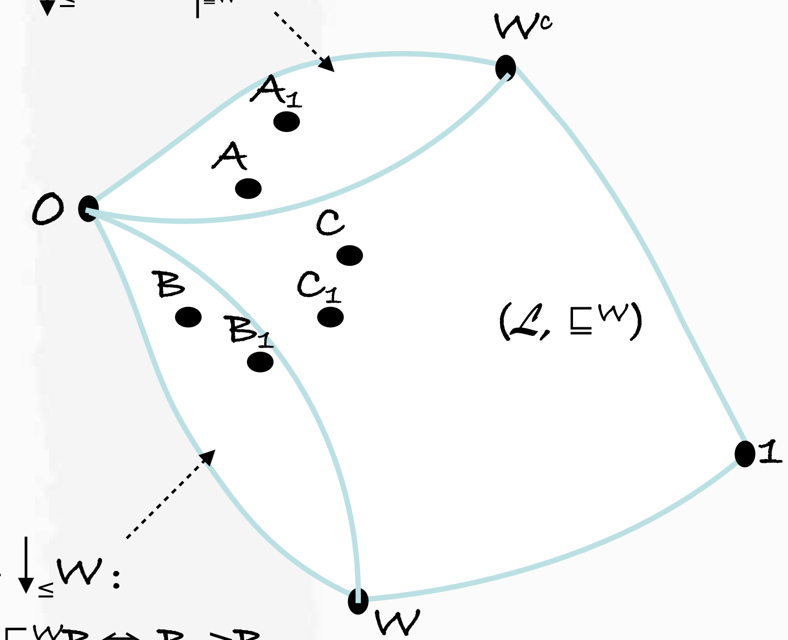
$\downarrow_{\leq}W^c =$
$\{A/A\leq W^c\}$

$\downarrow_{\leq}W =$
$\{B/B\leq W\}$

En $\downarrow_{\leq}W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A\leq A_1$

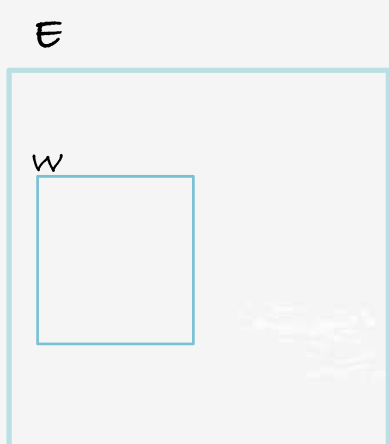
$\downarrow_{\leq}W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W}0$

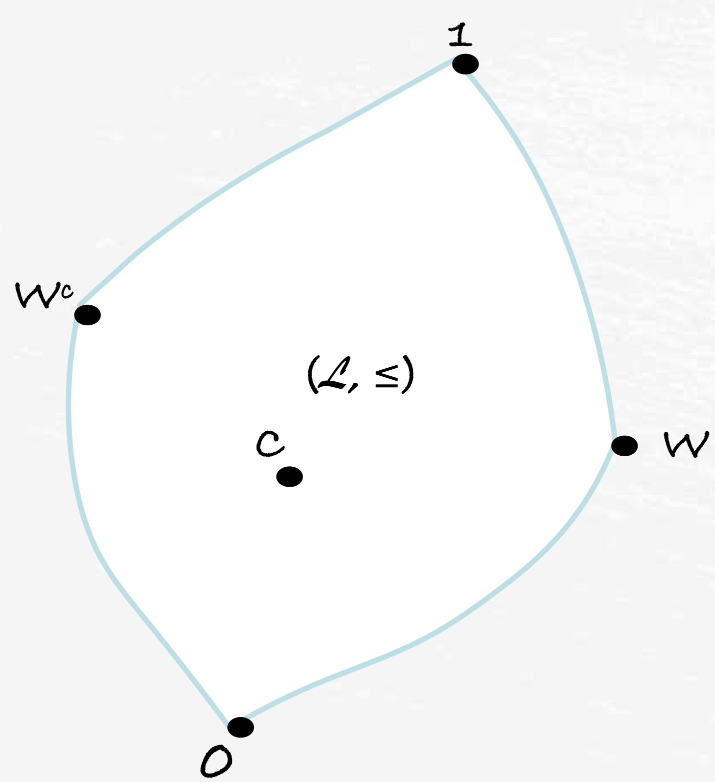


En $\downarrow_{\leq}W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

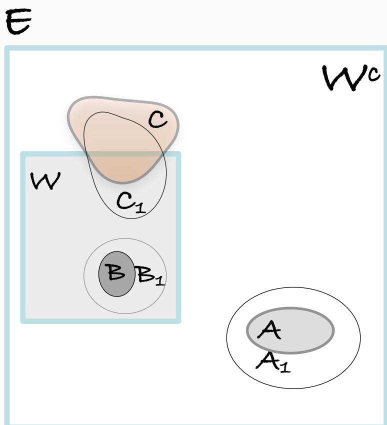
$\downarrow_{\leq}W = \downarrow_{\sqsubseteq W}0$

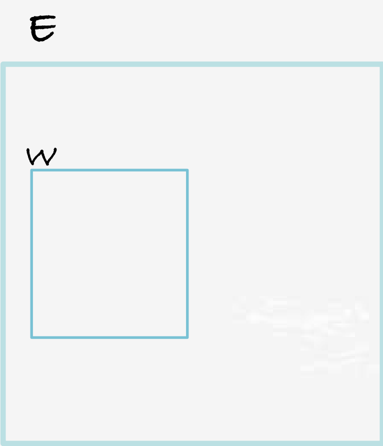


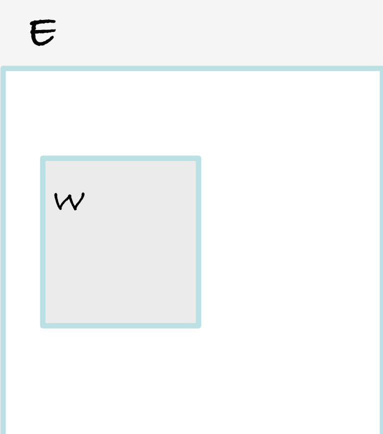


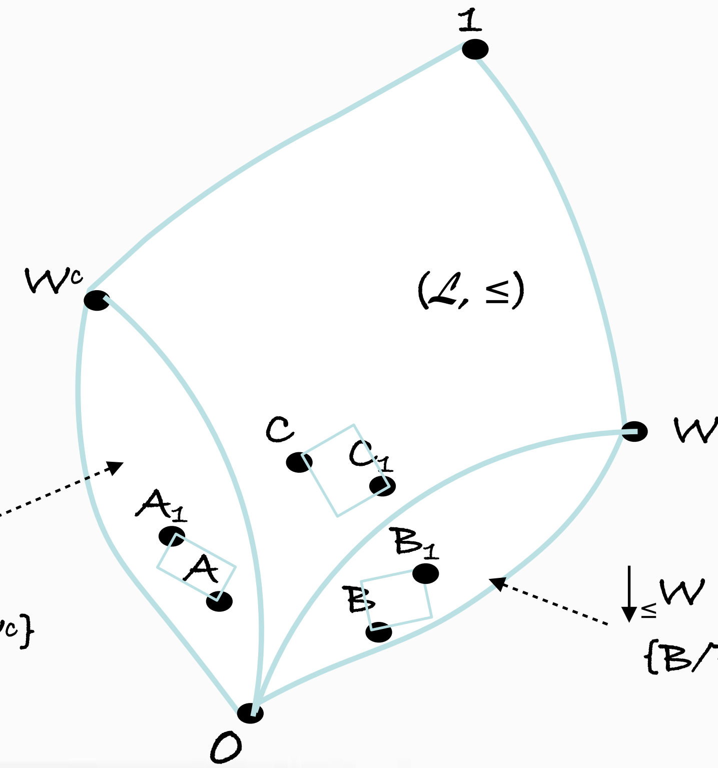
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:







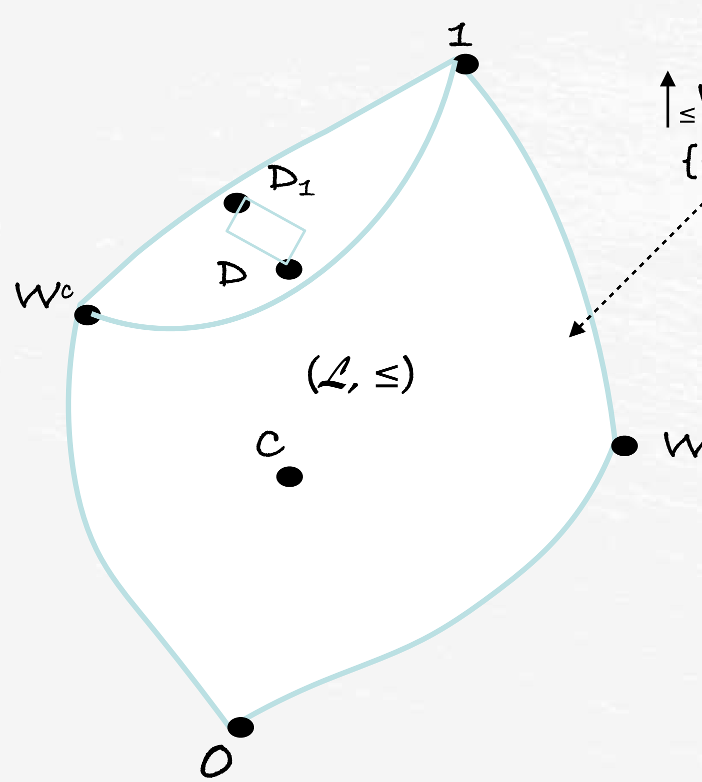


$\downarrow_{\leq} W^c =$

$\{A / A \leq W^c\}$

$\downarrow_{\leq} W =$

$\{B / B \leq W\}$



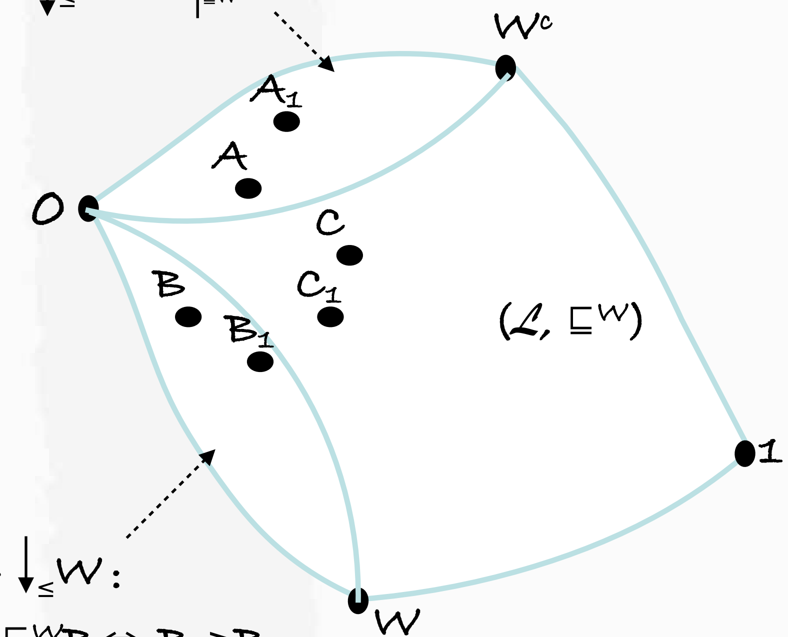
$\uparrow_{\leq} W =$

$\{H / B \leq H\}$

En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} 0$



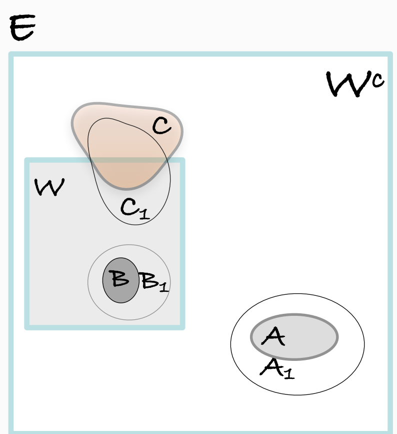
En $\downarrow_{\leq} W$:

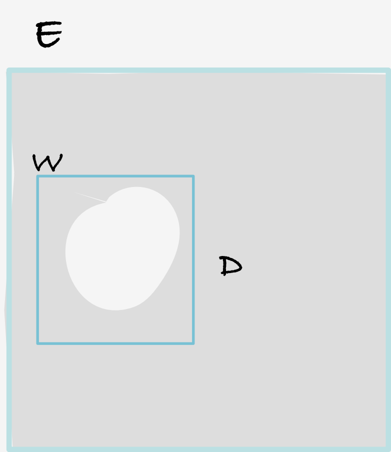
$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

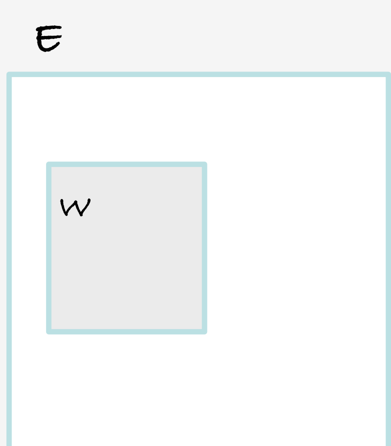
$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq W} 0$

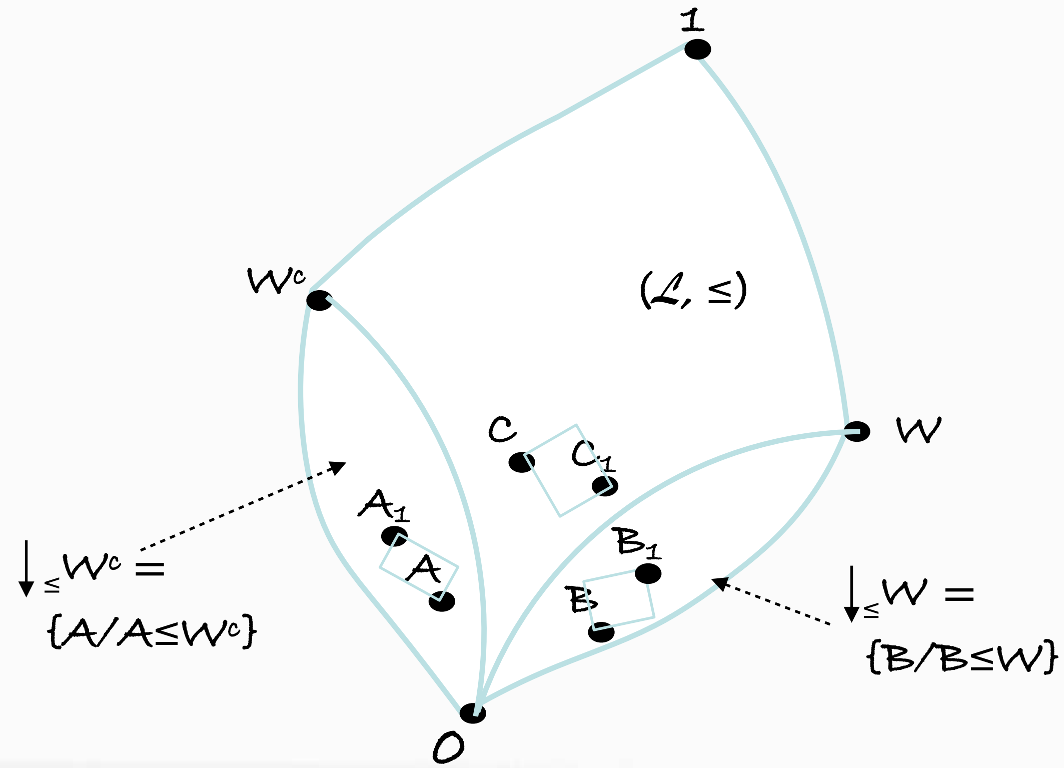
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

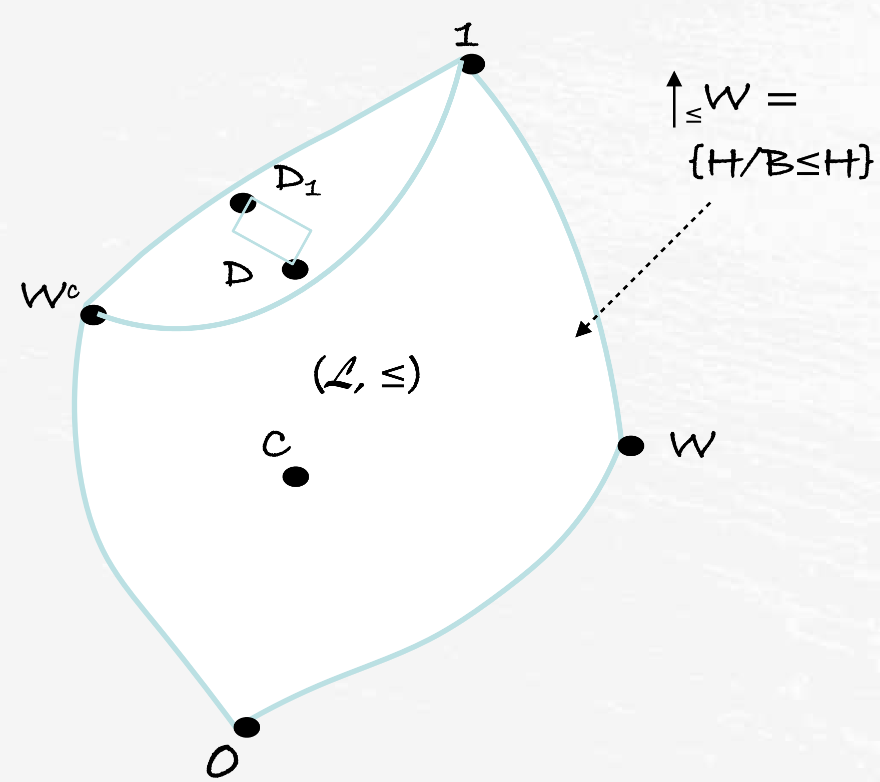
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:







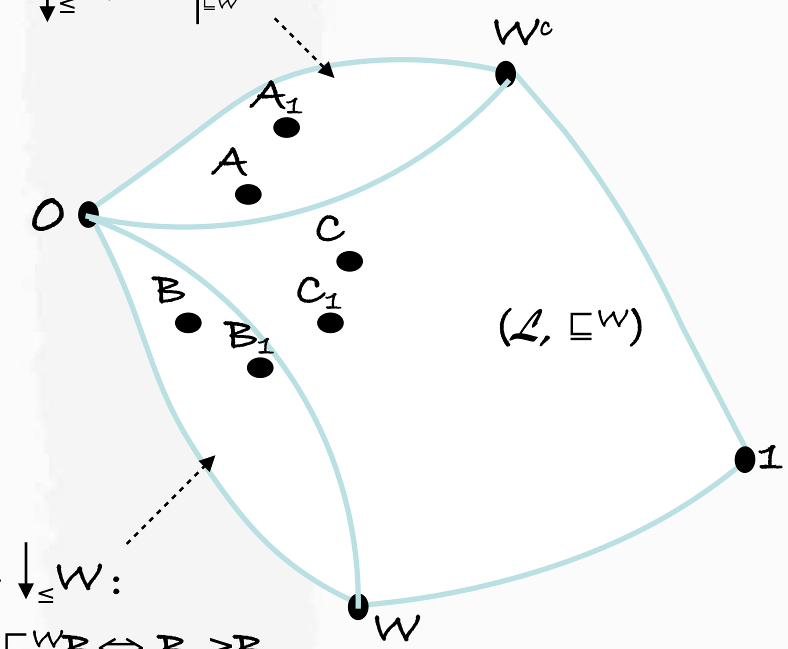




En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} 0$



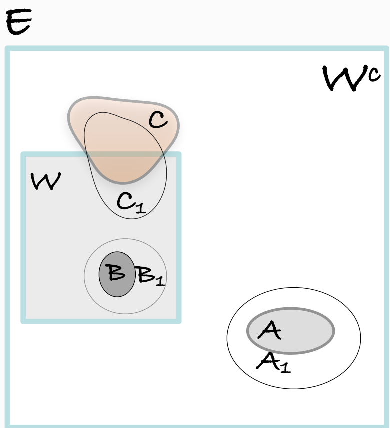
En $\downarrow_{\leq} W$:

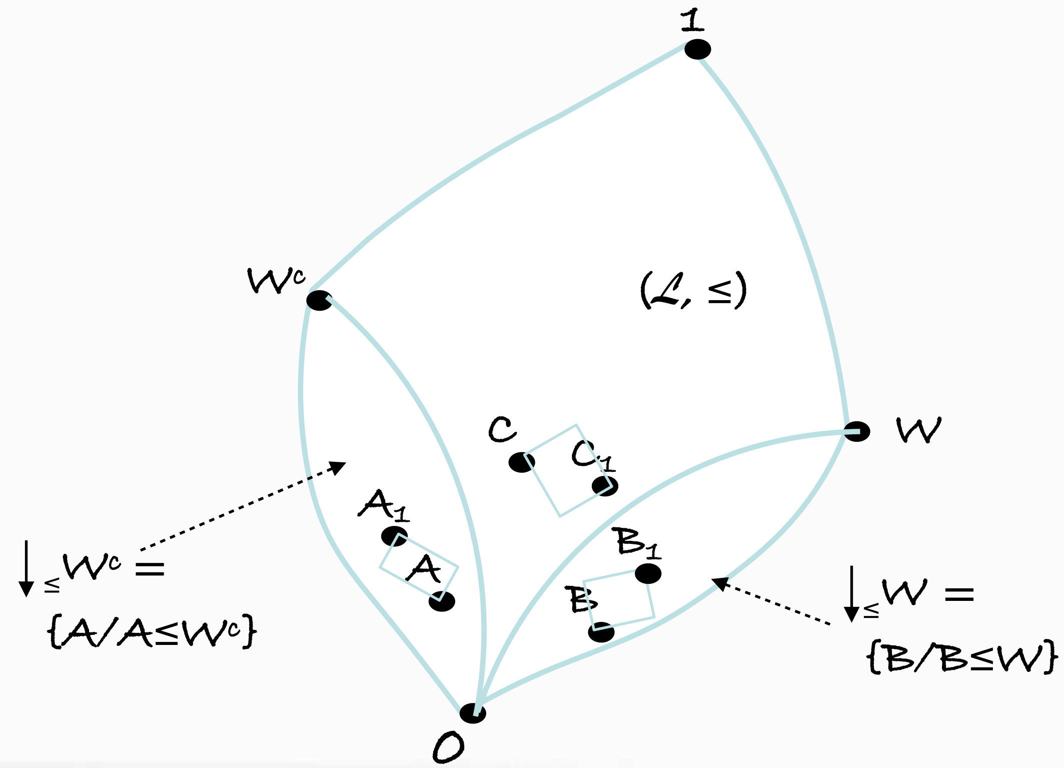
$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq W} 0$

Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

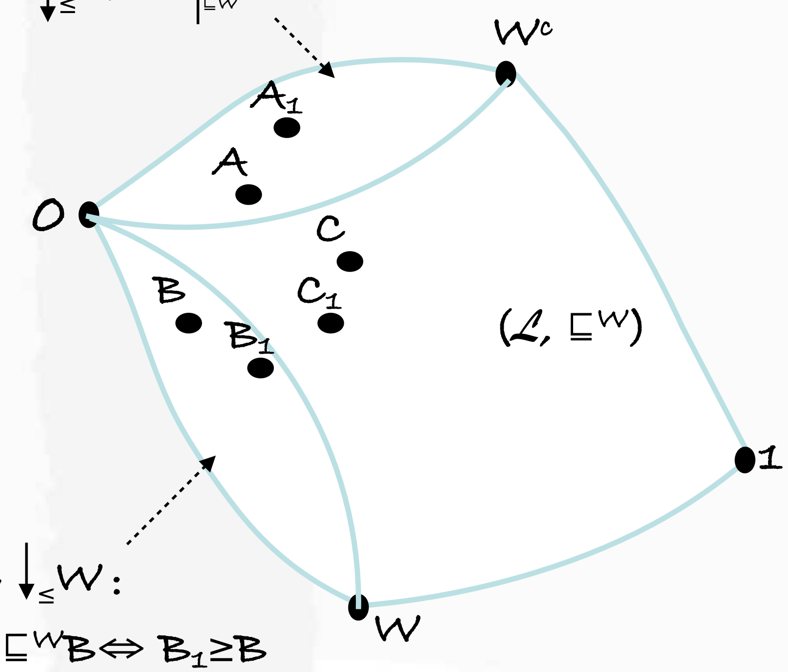




En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

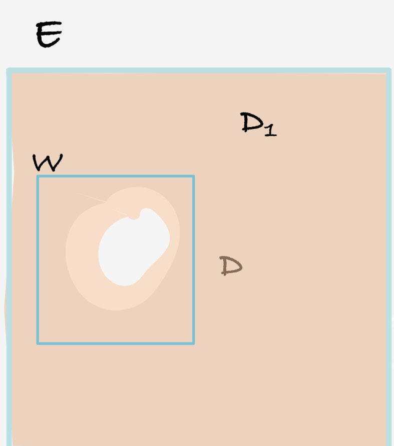
$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} O$

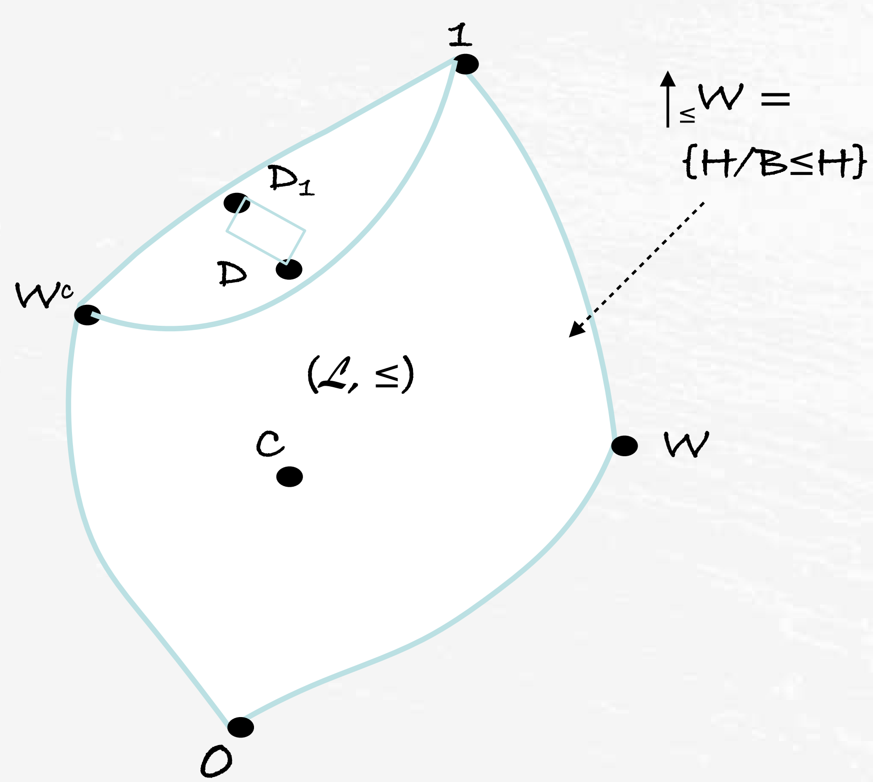


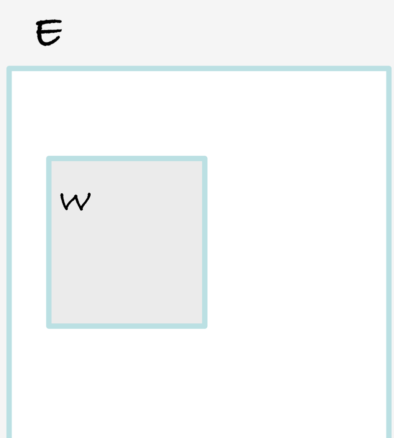
En $\downarrow_{\leq} W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq W} O$







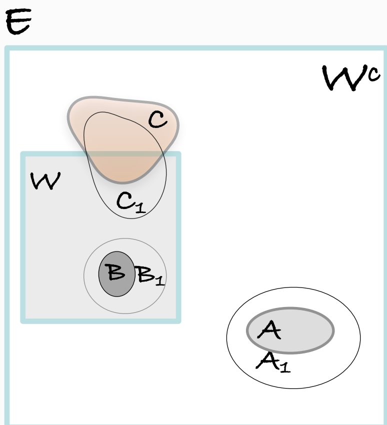
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W\in\mathcal{L}$ complementado tal que $W^c=W'$

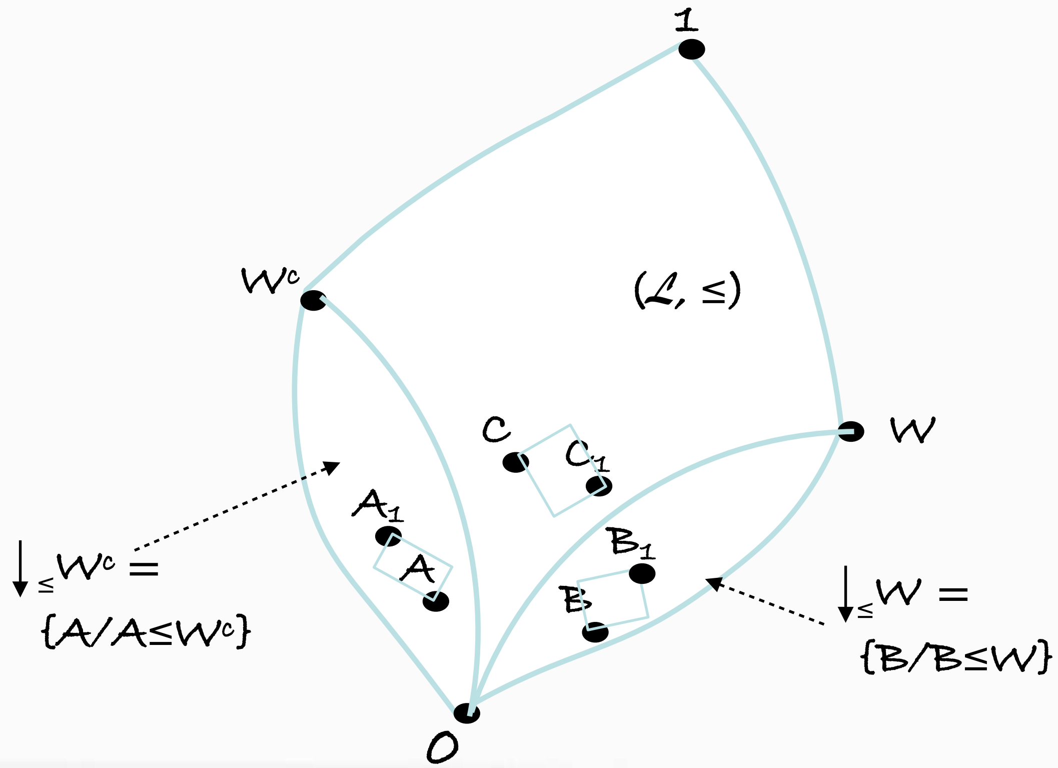
En $\downarrow_{\leq}W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

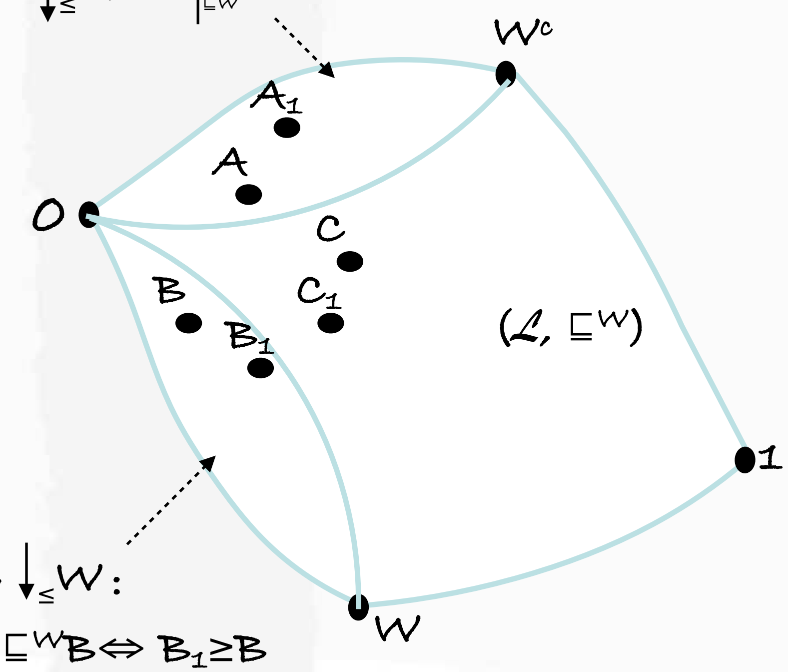
$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A\leq A_1$

$\downarrow_{\leq}W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} 0$

Por ejemplo $\mathcal{L}=P(E)$:



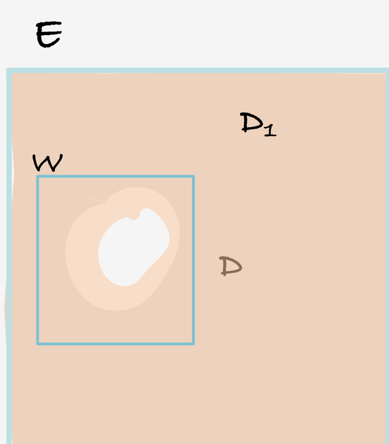


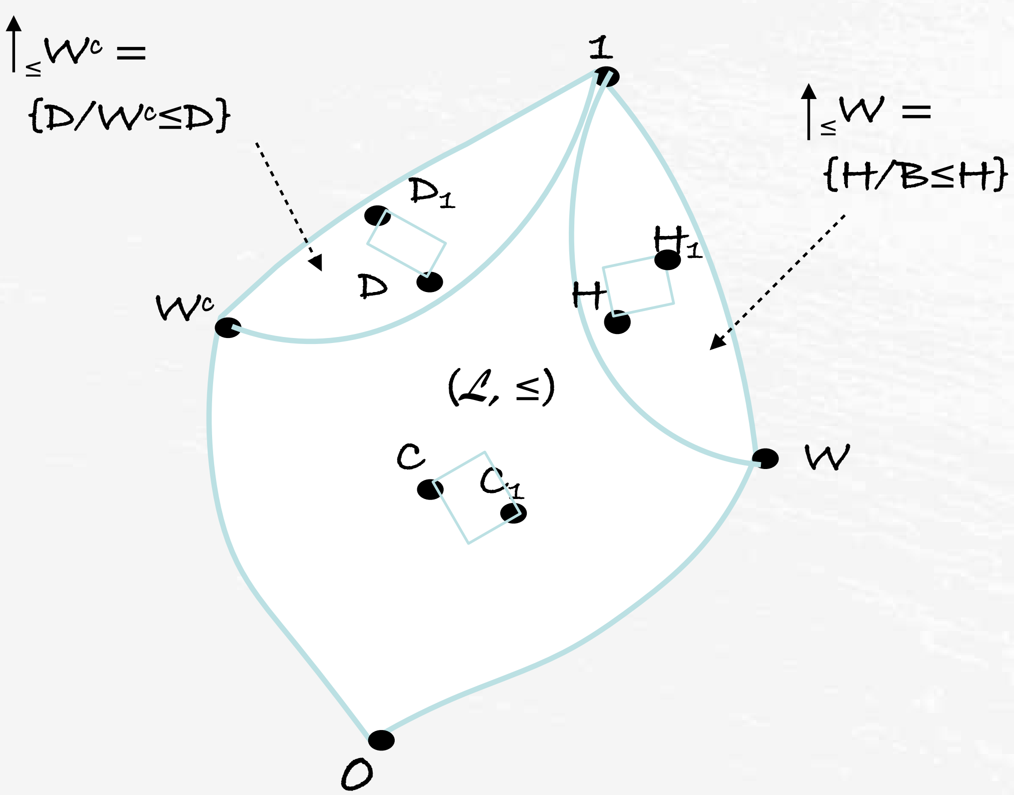


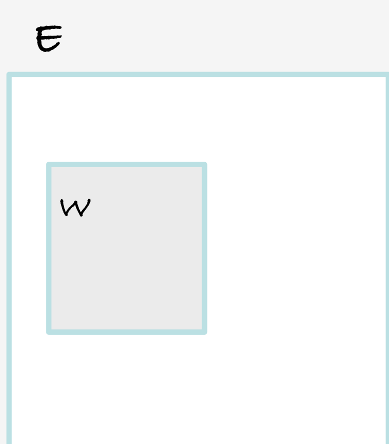
En $\downarrow_{\leq}W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1\geq B$

$\downarrow_{\leq}W = \downarrow_{\sqsubseteq W} 0$







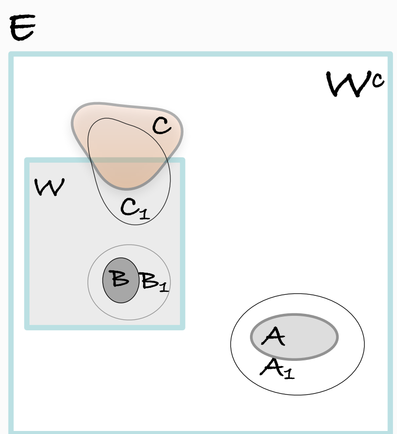
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

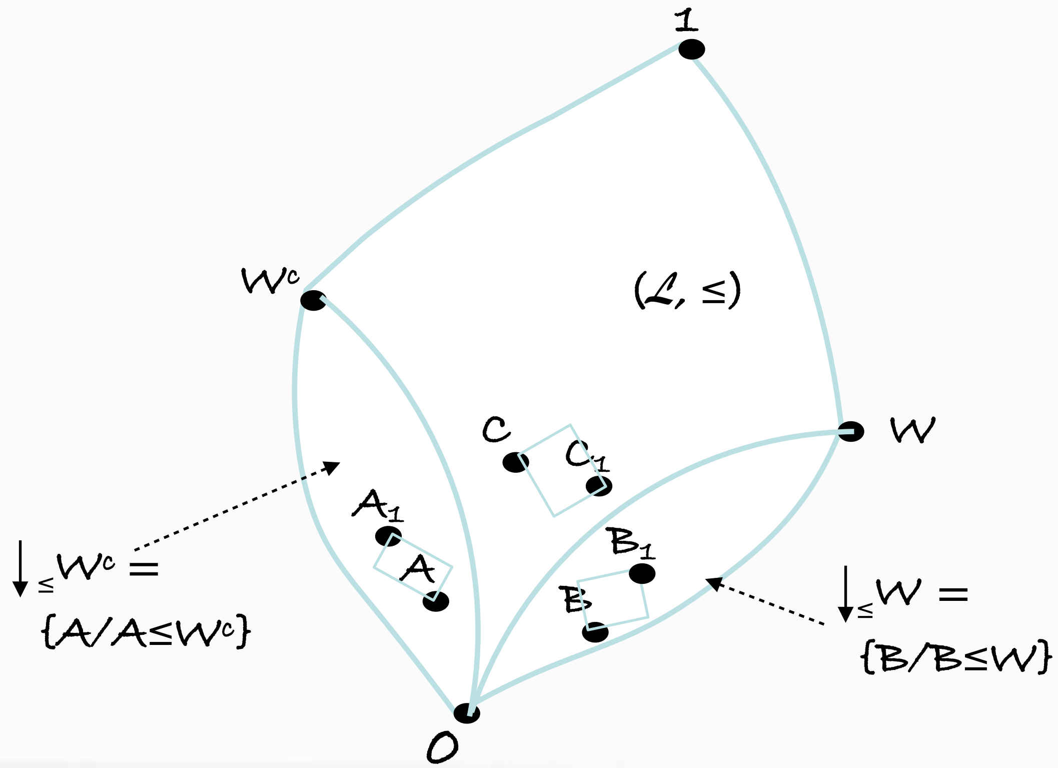
En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

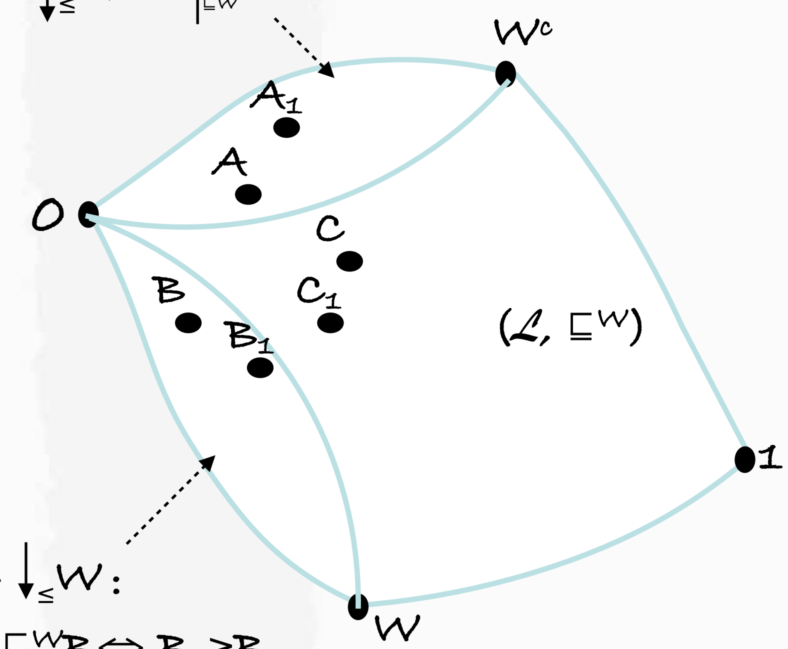
$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq^W} O$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:



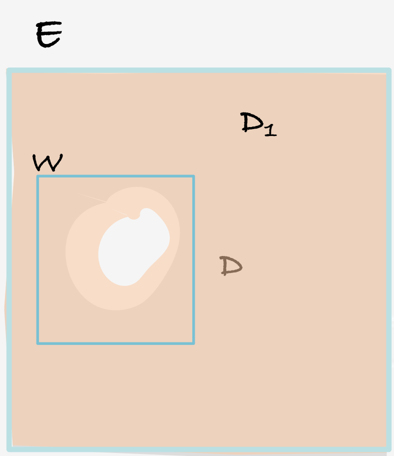


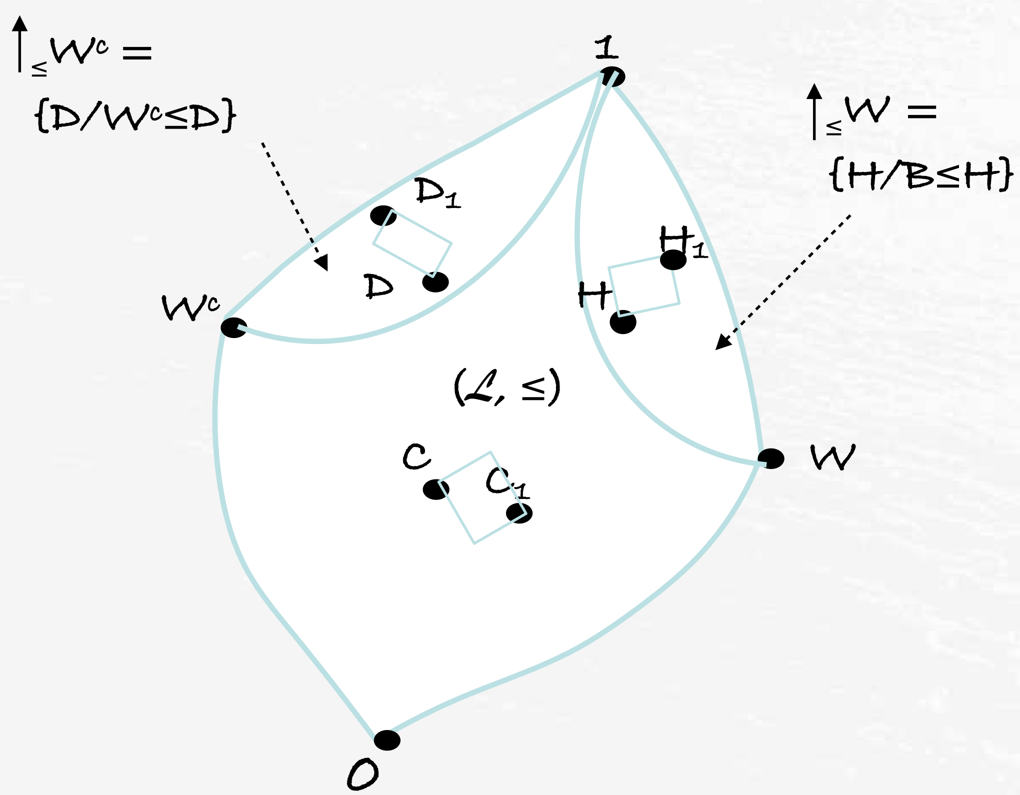


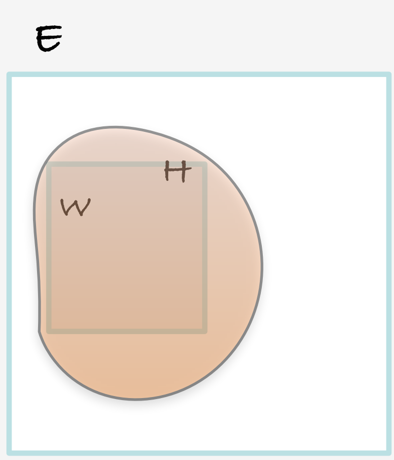
En $\downarrow_{\leq} W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq^W} O$

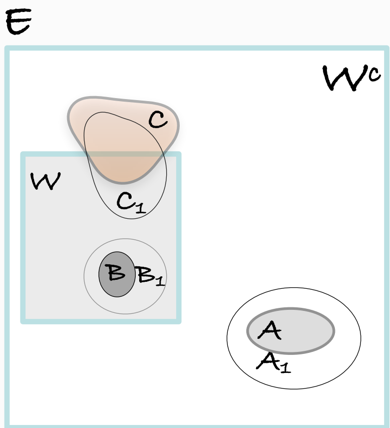


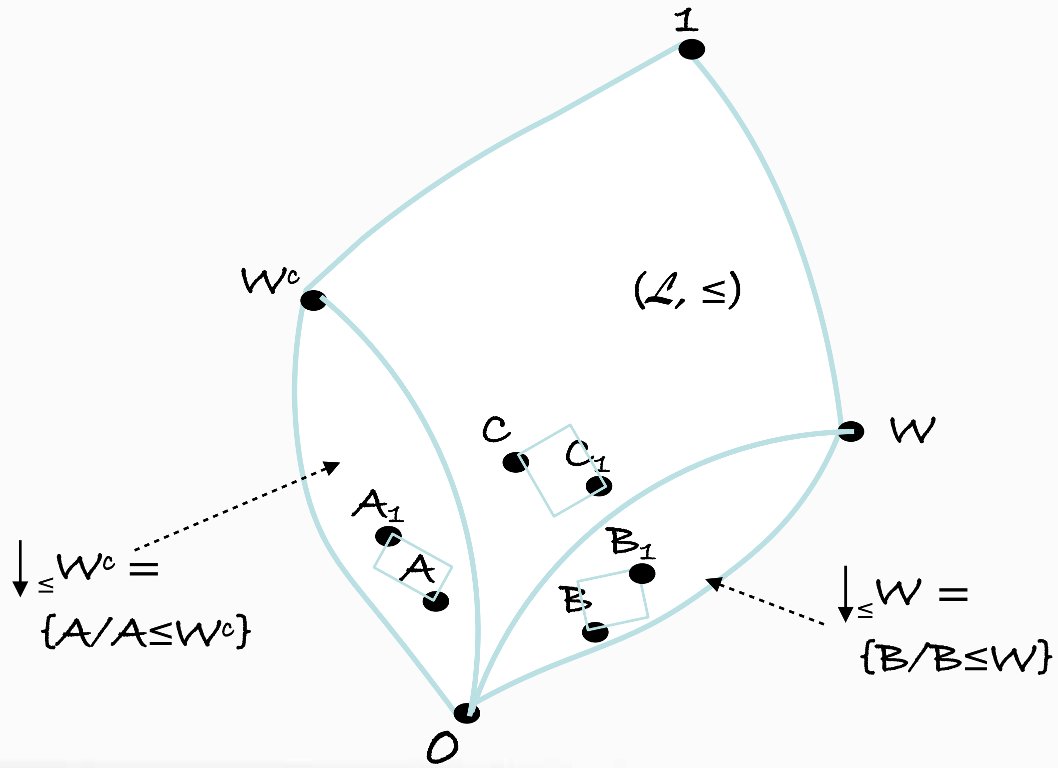




Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

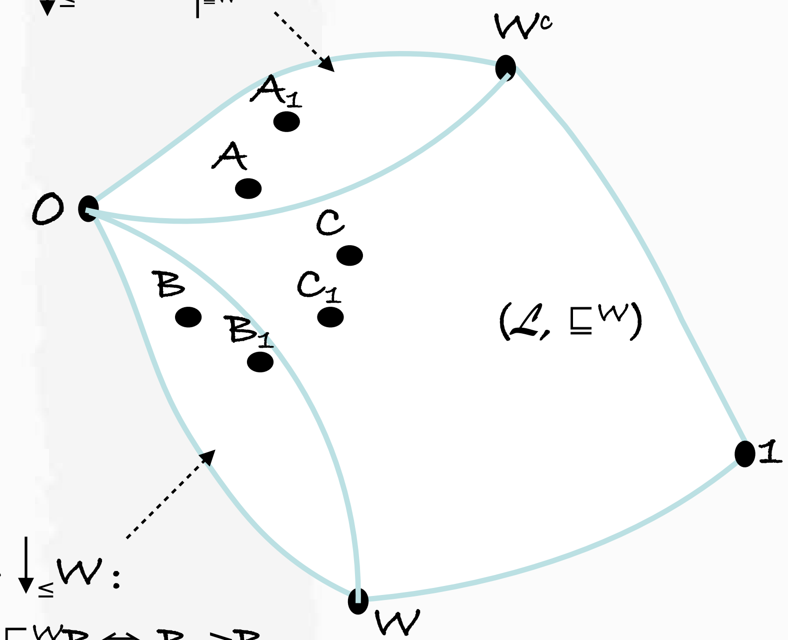




En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

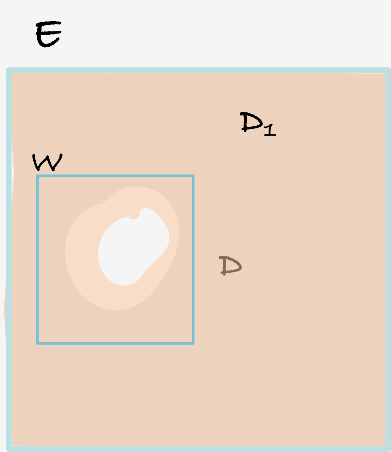
$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq^W} O$

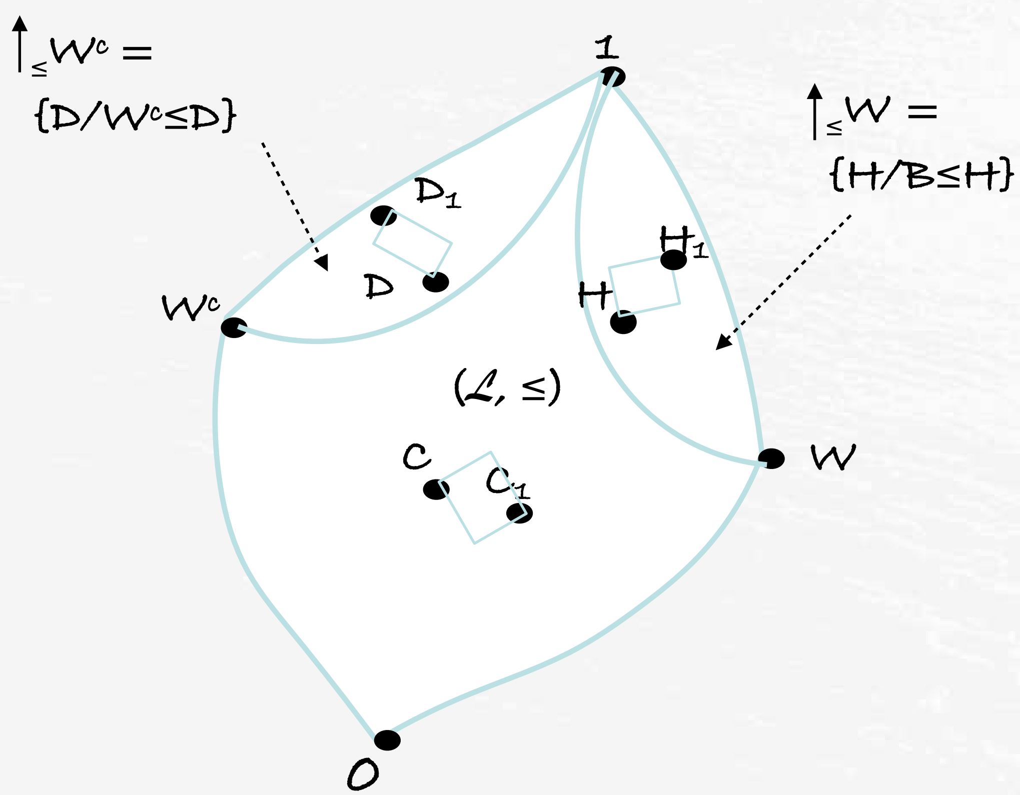


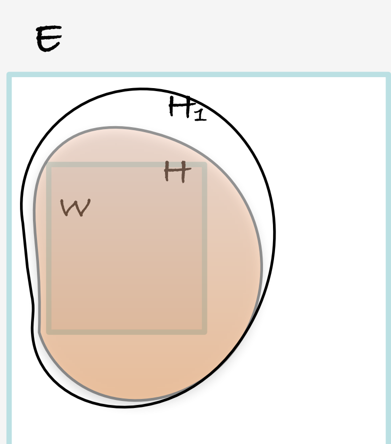
En $\downarrow_{\leq} W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq^W} O$







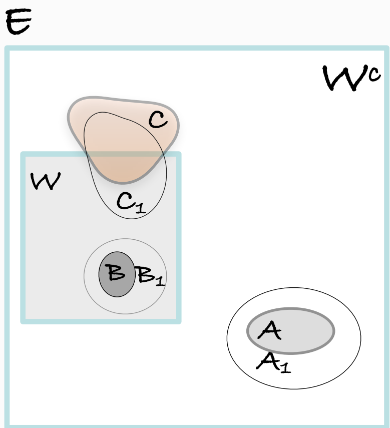
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

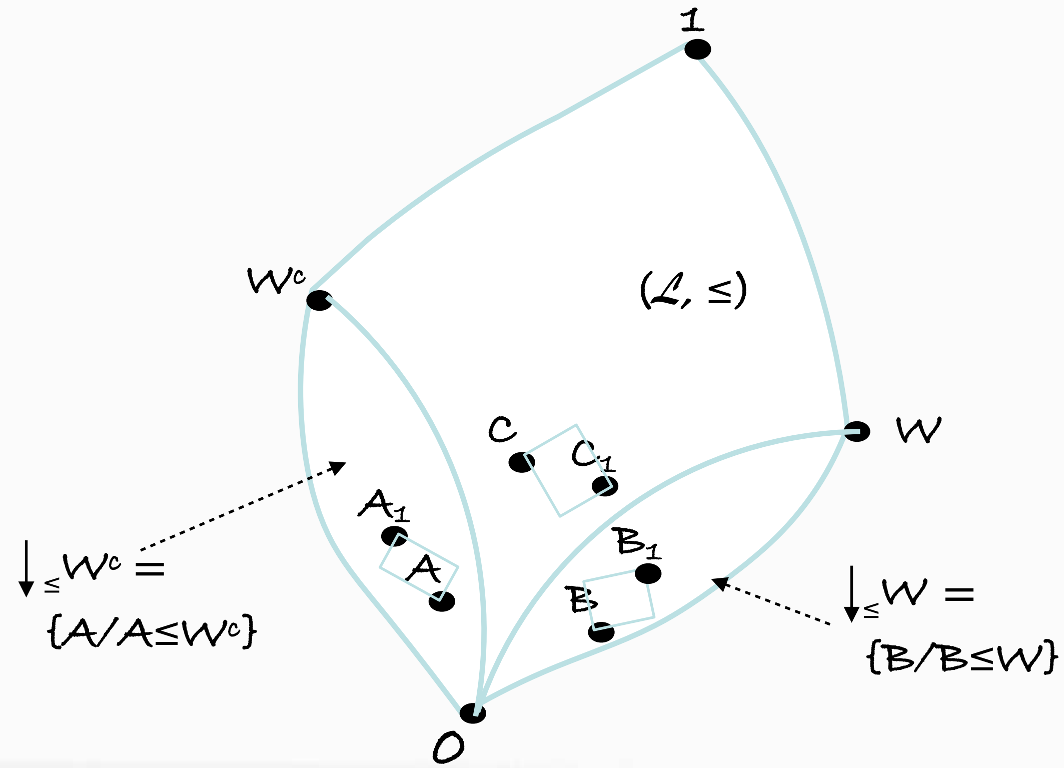
En $\downarrow_{\leq} W^c$: Retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^W)$

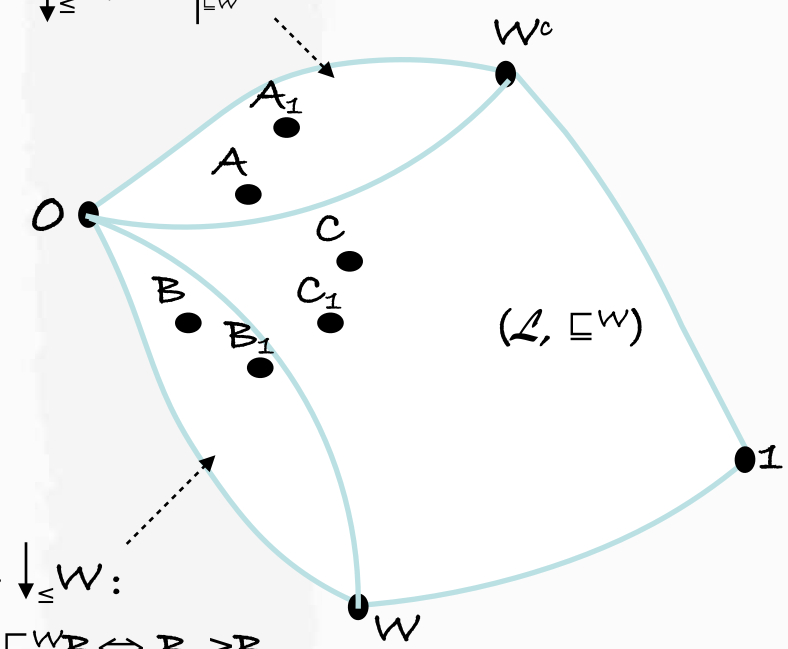
$A \sqsubseteq^W A_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$

$\downarrow_{\leq} W^c = \uparrow_{\sqsubseteq W} 0$

Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:



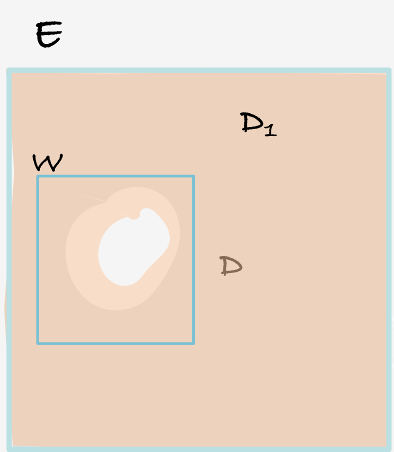


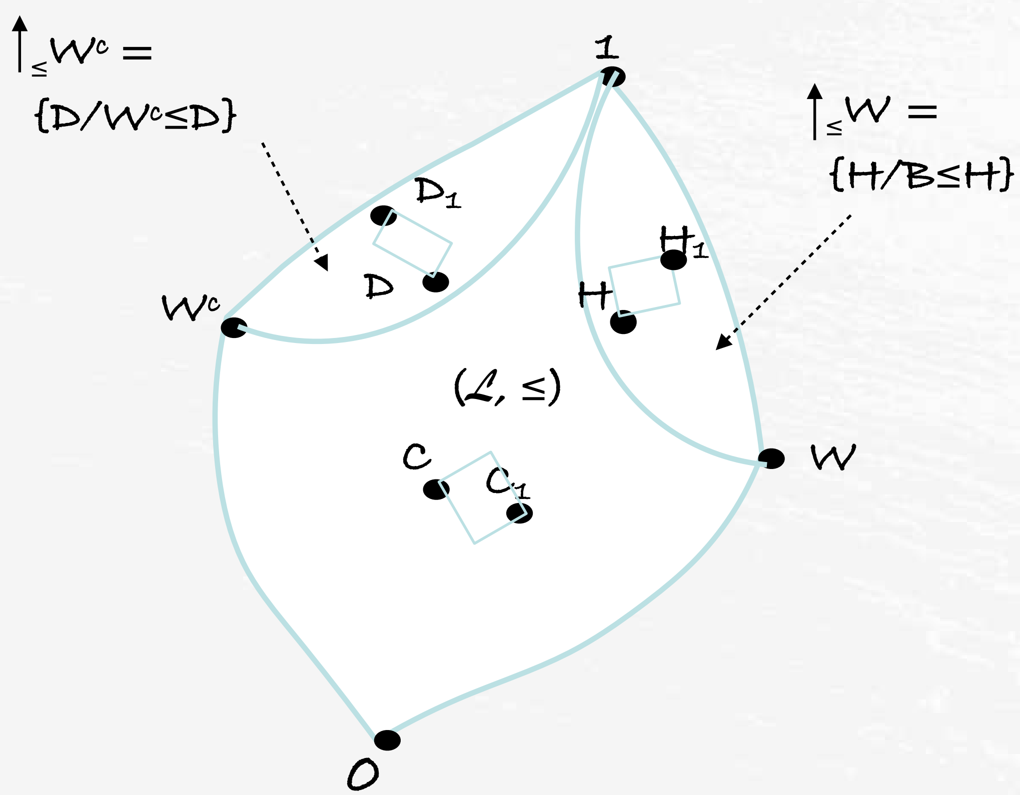


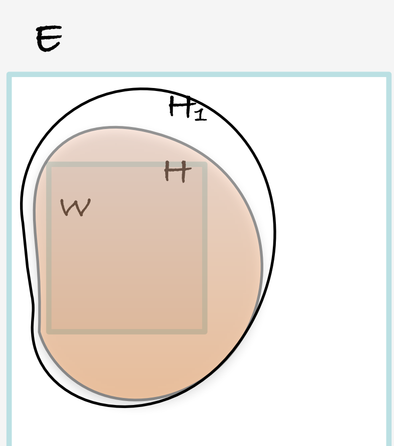
En $\downarrow_{\leq} W$:

$B_1 \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow B_1 \geq B$

$\downarrow_{\leq} W = \downarrow_{\sqsubseteq W} 0$

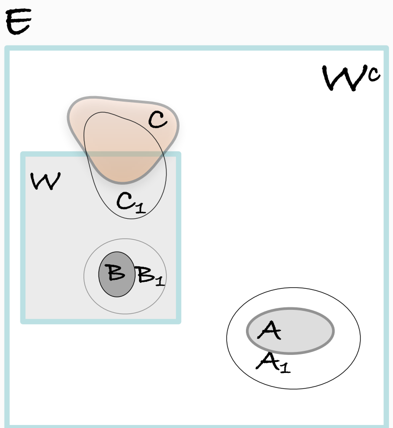


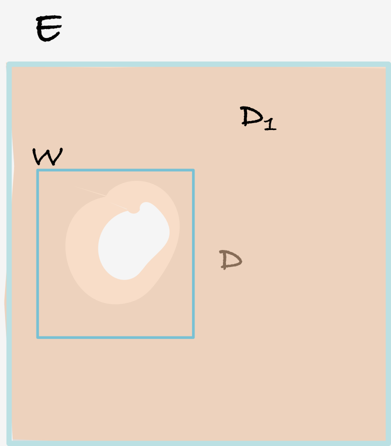


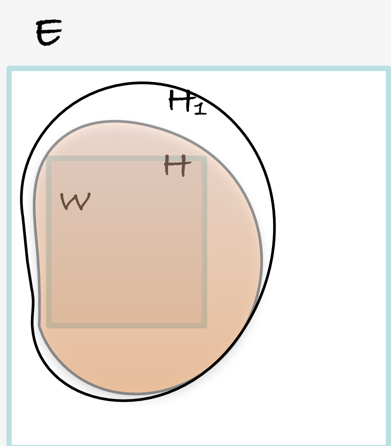


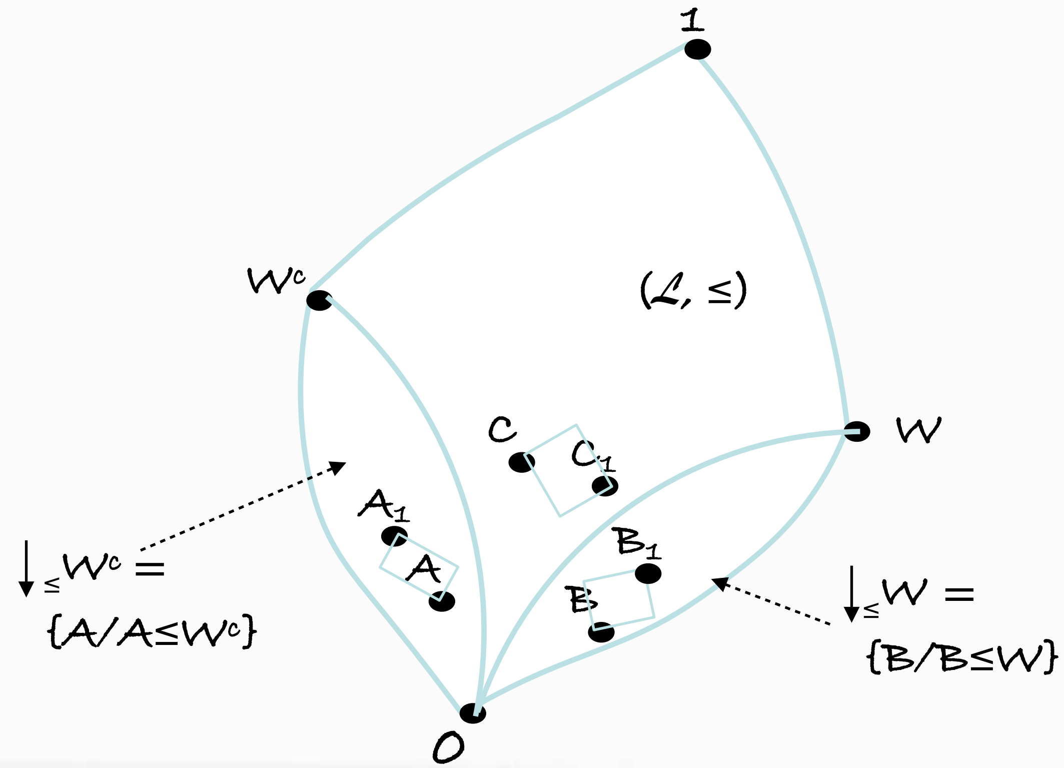
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $w^c = w'$

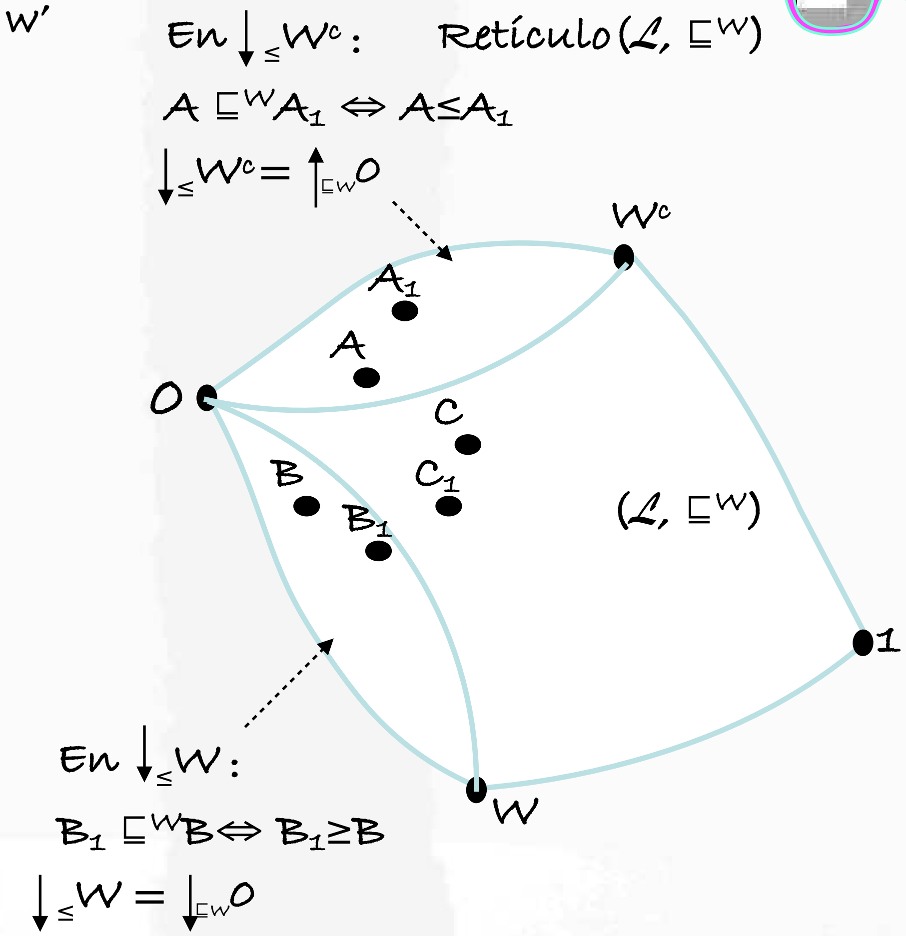
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

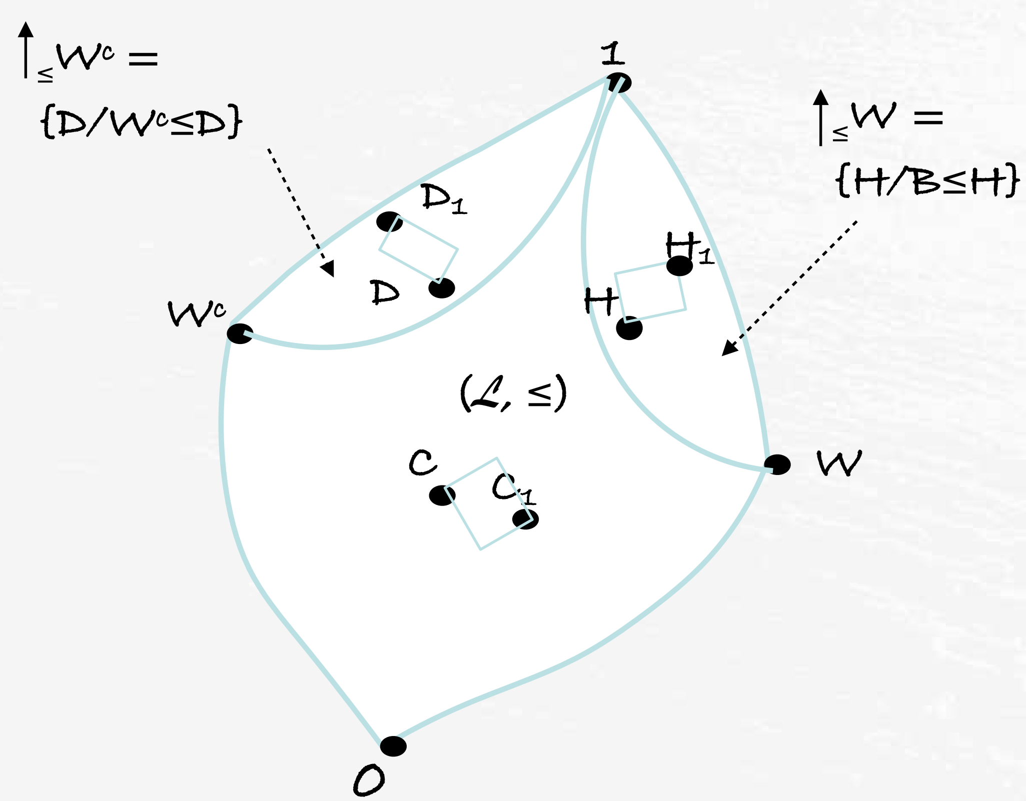


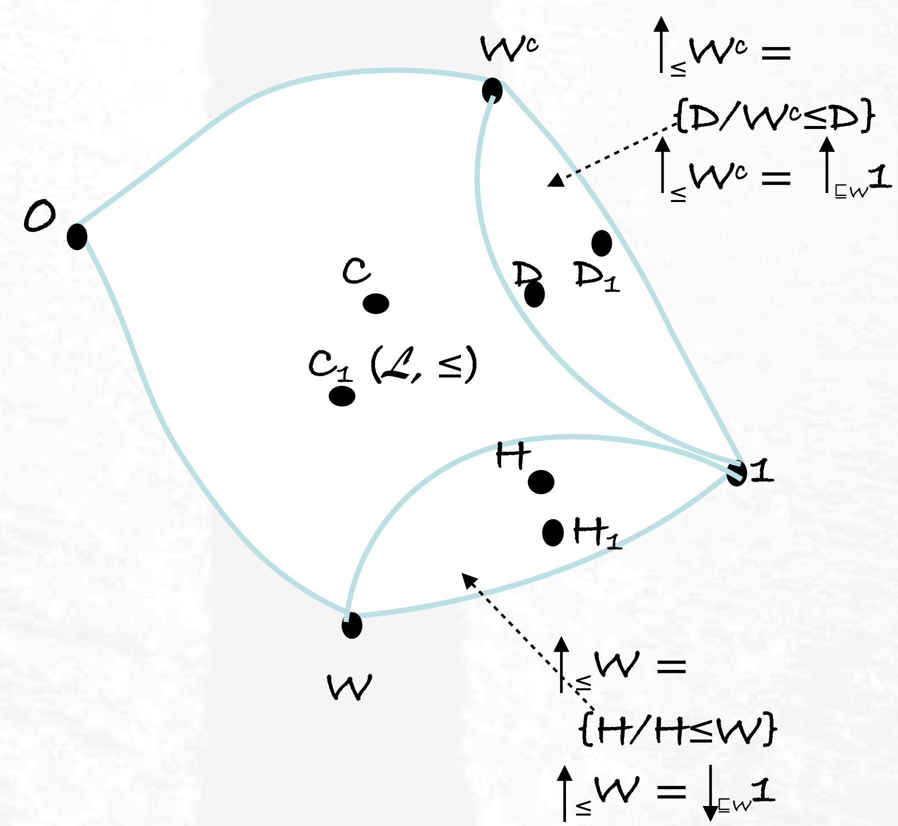






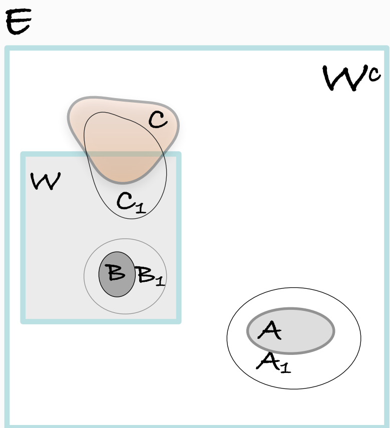


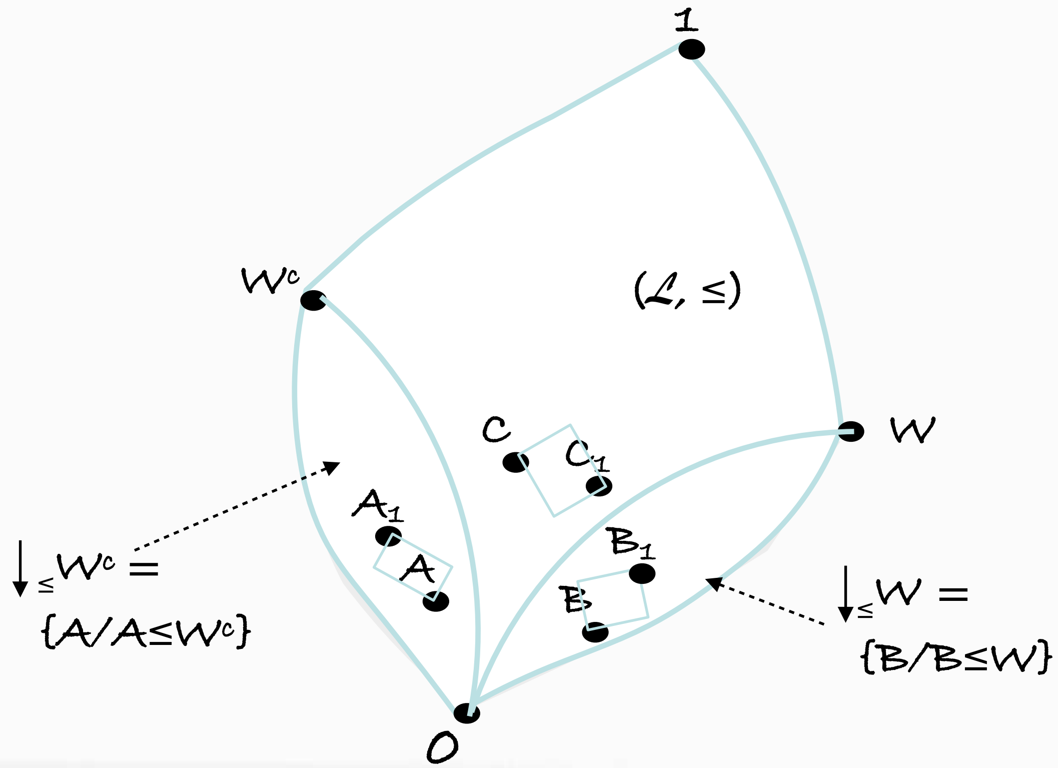


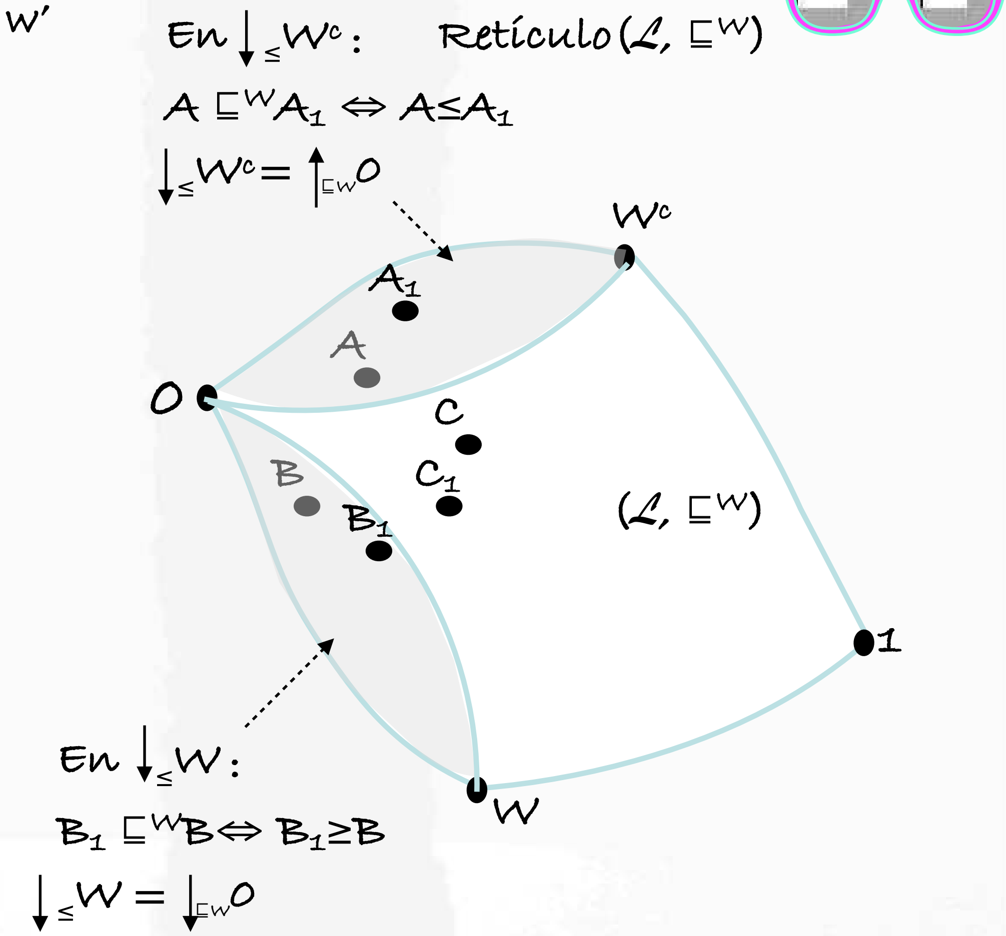


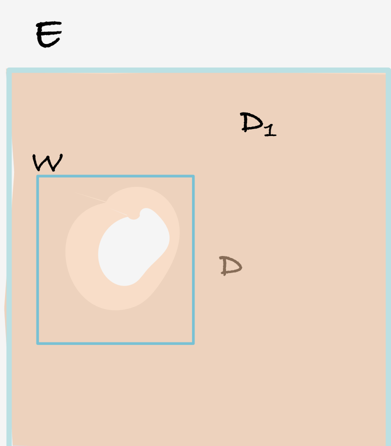
Retículo distributivo $(\mathcal{L}, \leq)$ y $W \in \mathcal{L}$ complementado tal que $W^c = W'$

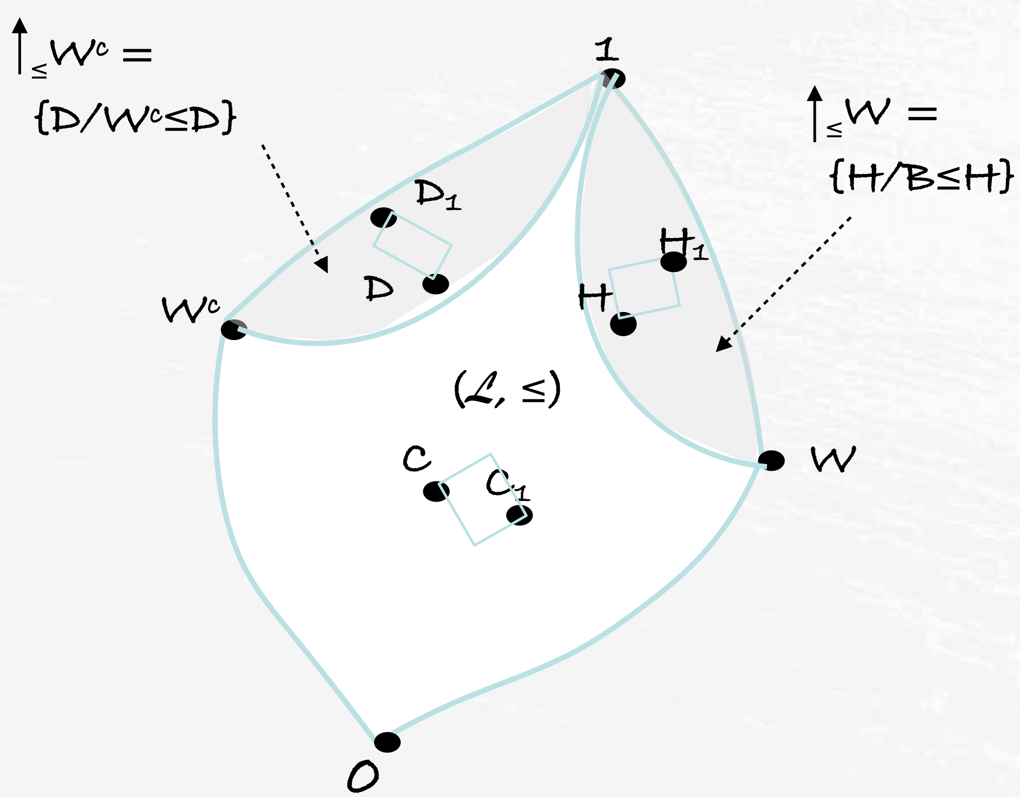
Por ejemplo $\mathcal{L} = P(E)$:

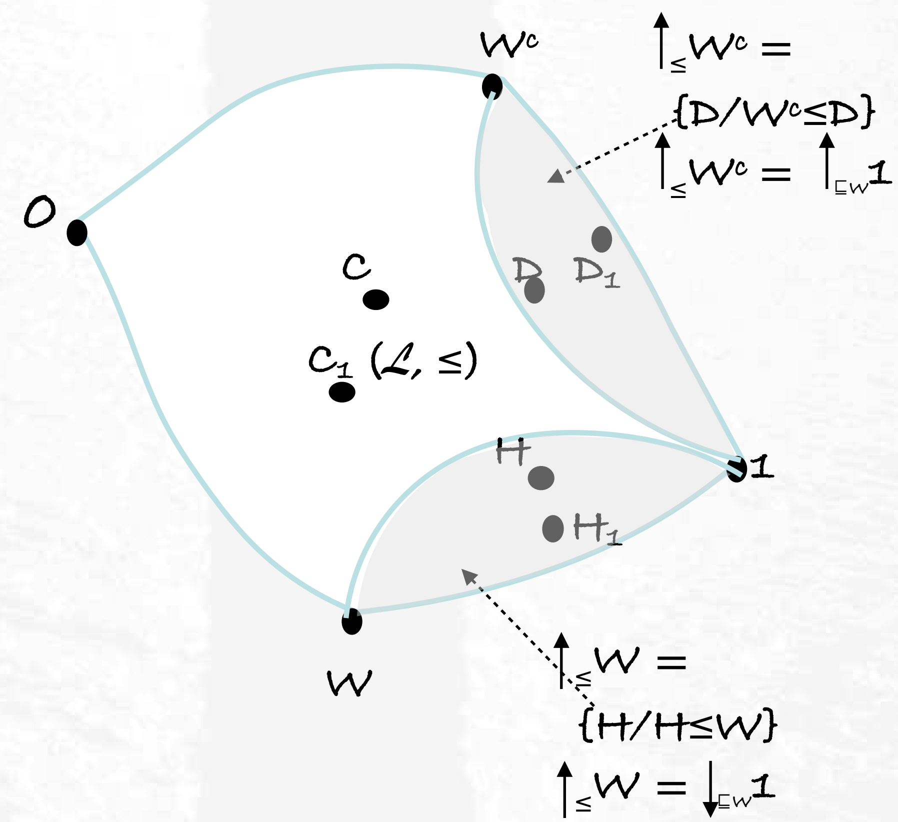


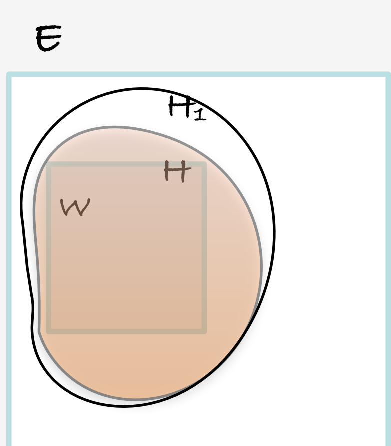












Subretículos de $(\mathcal{L}, \leq)$ en las que el orden $\sqsubseteq^W$ coincide con $\leq$ o con su opuesto $\geq$.

Algunas observaciones para el cómputo del orden $\sqsubseteq^{W}$ en $[0,1]^{E}$.

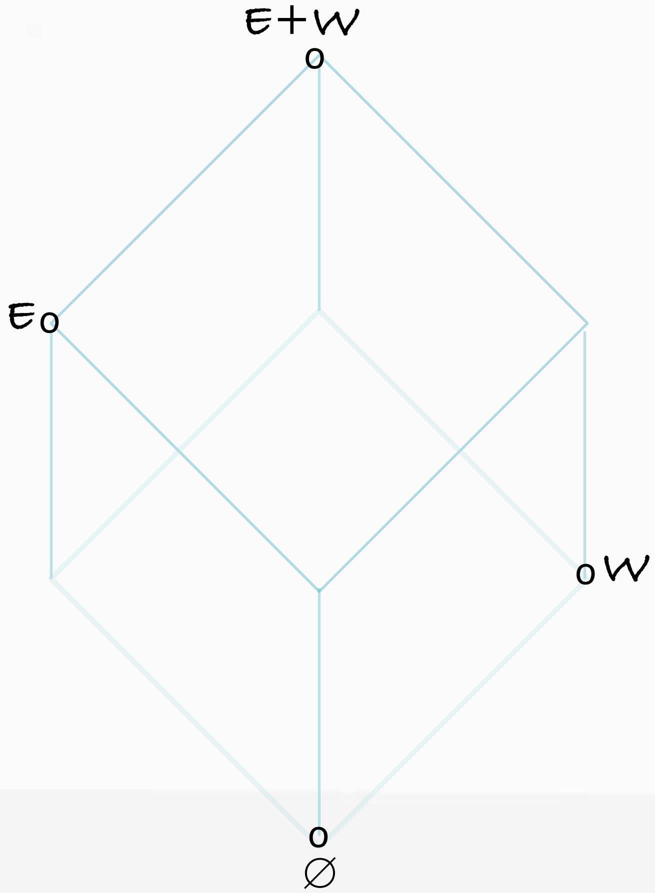
En general, si se conoce un algoritmo para la determinación de un álgebra determinada por un retículo acotado distributivo con negación fuerte $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$; entonces, si w es nítido, para el cómputo del álgebra isomorfa $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^{c}), ')$ podemos utilizar las equivalencias:

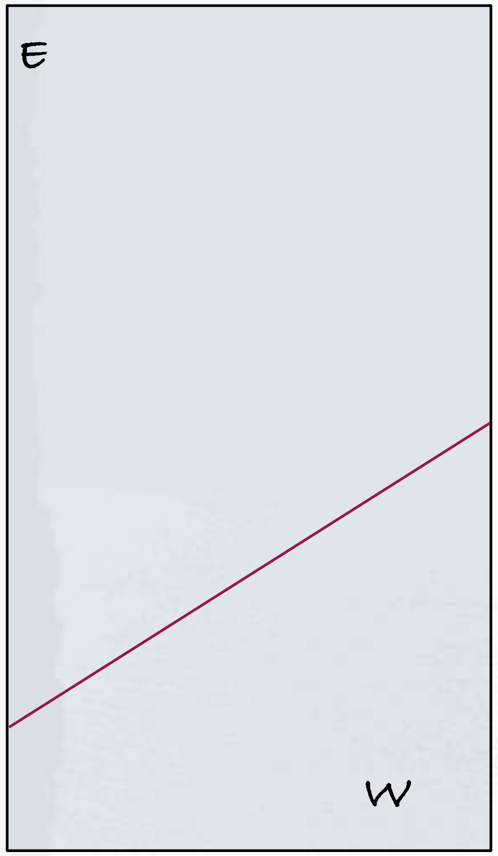
$$(\alpha \sqsubseteq^{W} \beta) \Leftrightarrow (\varphi_{w}(\alpha) \leq \varphi_{w}(\beta)) \Leftrightarrow (\alpha\Delta w \leq \beta\Delta w) \Leftrightarrow ((\alpha\cdot w^{c} + \alpha'\cdot w) \leq (\beta\cdot w^{c} + \beta'\cdot w))).$$

No obstante, como parte de la relación $\sqsubseteq^{w}$ coincide con la inicial $\leq$ o con superación dual $\geq$ en $\mathcal{L}$, puede simplificarse p
su determinación, tal como ilustramos a continuación.

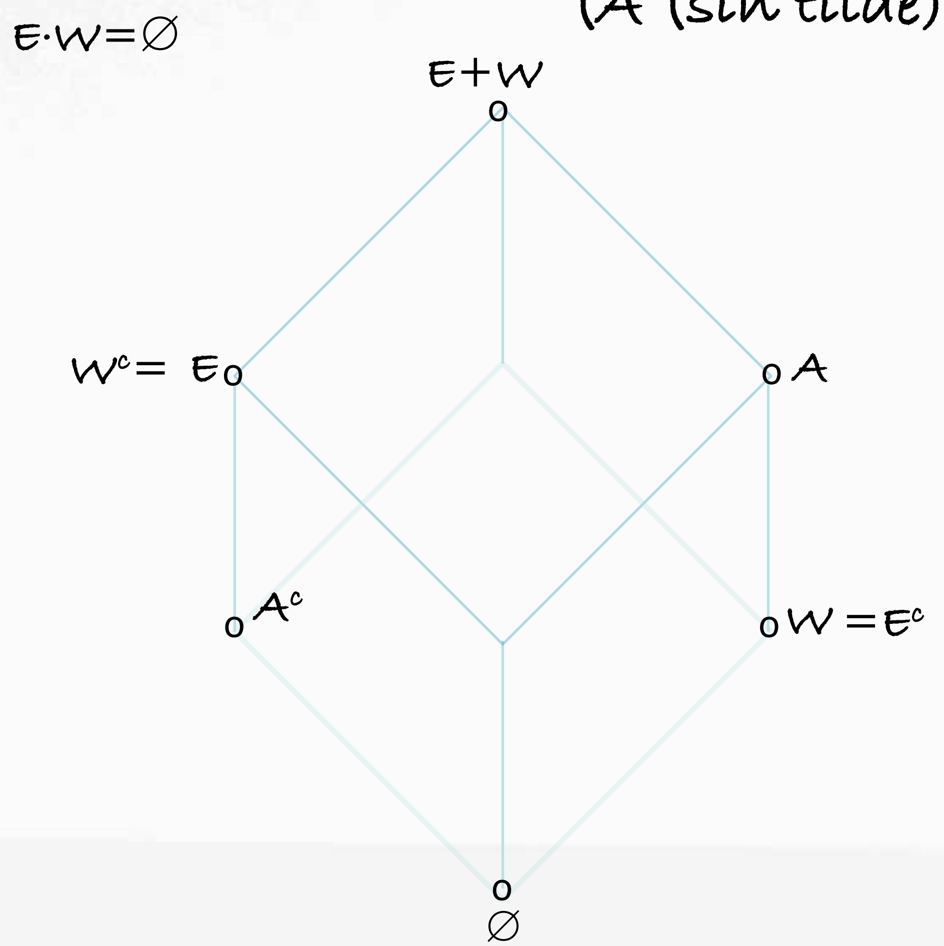
(A (sin tilde): nítido, $\widetilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

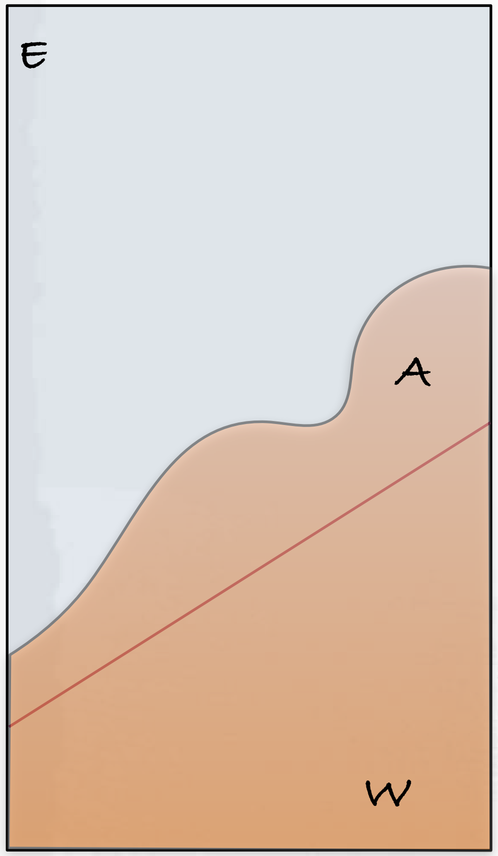
$E \cdot W = \emptyset$





(A (sin tilde): nítido, $\widetilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

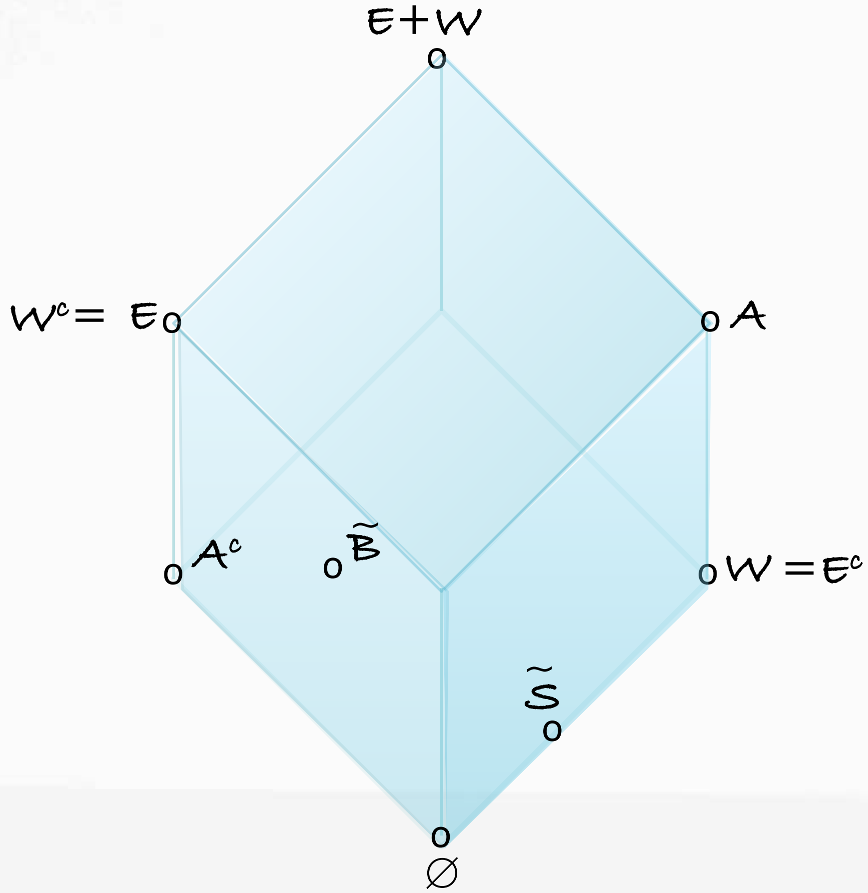


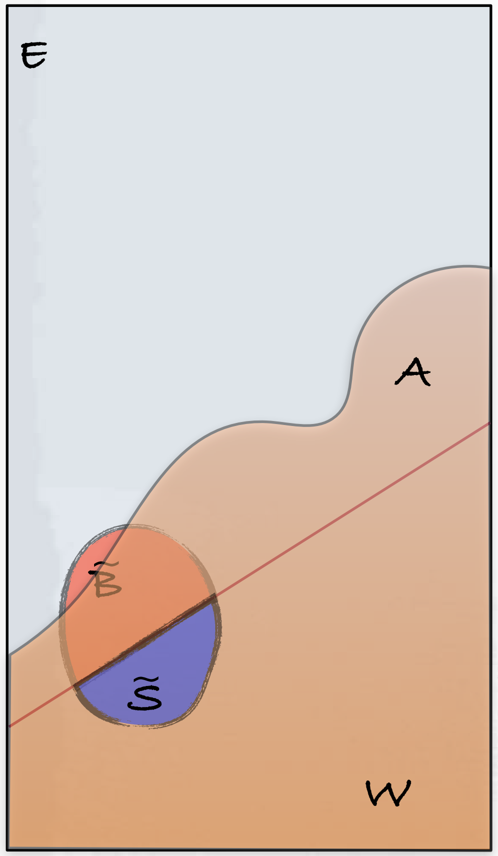


Para $L=\{0,1\}$, Álgebra de Boole: $(P(E+W), \subseteq)$,
con $\emptyset$, W, E, A, A^c,... pertenecientes a $P(E+W)$.

(A (sin tilde): nítido, $\tilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$E \cdot W = \emptyset$



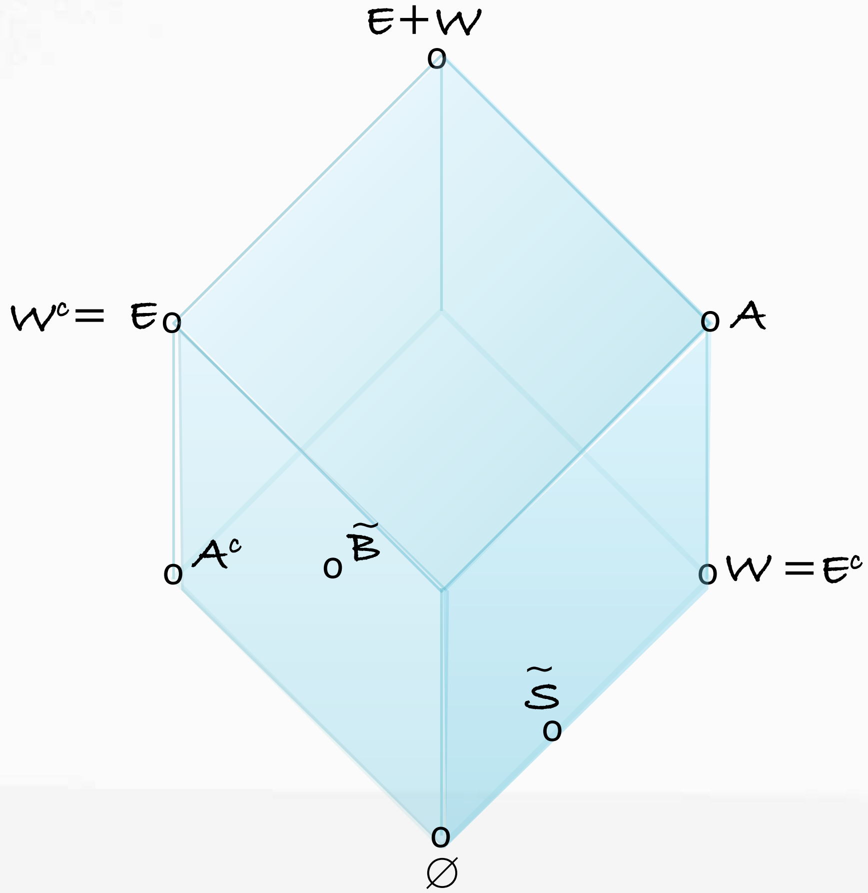


Para L=[0,1], Retículo distributivo: $([0.1]^{E+W}, \leq)$,
con $\emptyset$, W, E, A, A^c, $\tilde{B}$, ... pertenecientes a $[0.1]^{E+W}$.

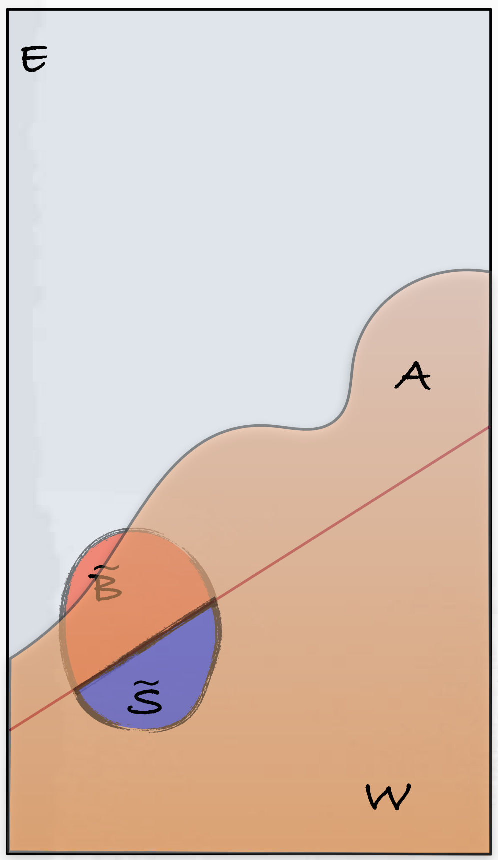
$E\cdot W=\emptyset$

(A (sin tilde): nítido, $\widetilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$\forall\widetilde{B}\in[0,1]^E$ & $\forall\widetilde{S}\in[0,1]^W$



$\widetilde{B}+\widetilde{S}\sqsubseteq^W\widetilde{B}$

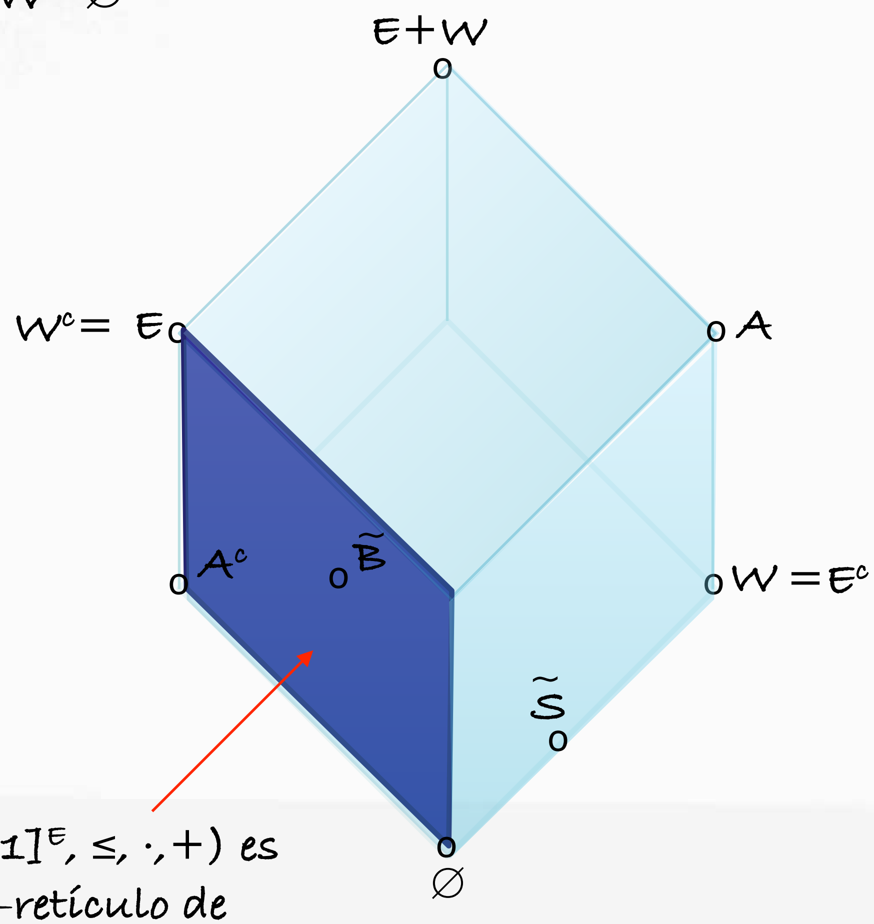


Para L=[0,1], Retículo distributivo: $([0.1]^{E+W}, \leq)$,
con $\emptyset$, W, E, A, A^c,$\widetilde{B}$, … pertenecientes a $[0.1]^{E+W}$.

$E \cdot W = \varnothing$

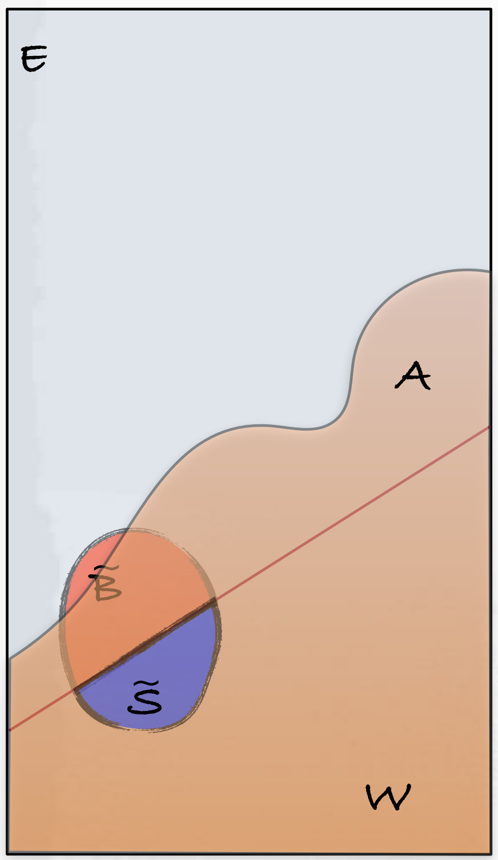
(A (sin tilde): nítido, $\widetilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$\forall \widetilde{B} \in [0,1]^E$ & $\forall \widetilde{S} \in [0,1]^W$



([0,1]^E, ≤, ·,+) es sub-retículo de ([0,1]$^{E+W}$, ≤, ·,+).

$\widetilde{B} + \widetilde{S} \sqsubseteq^W \widetilde{B}$

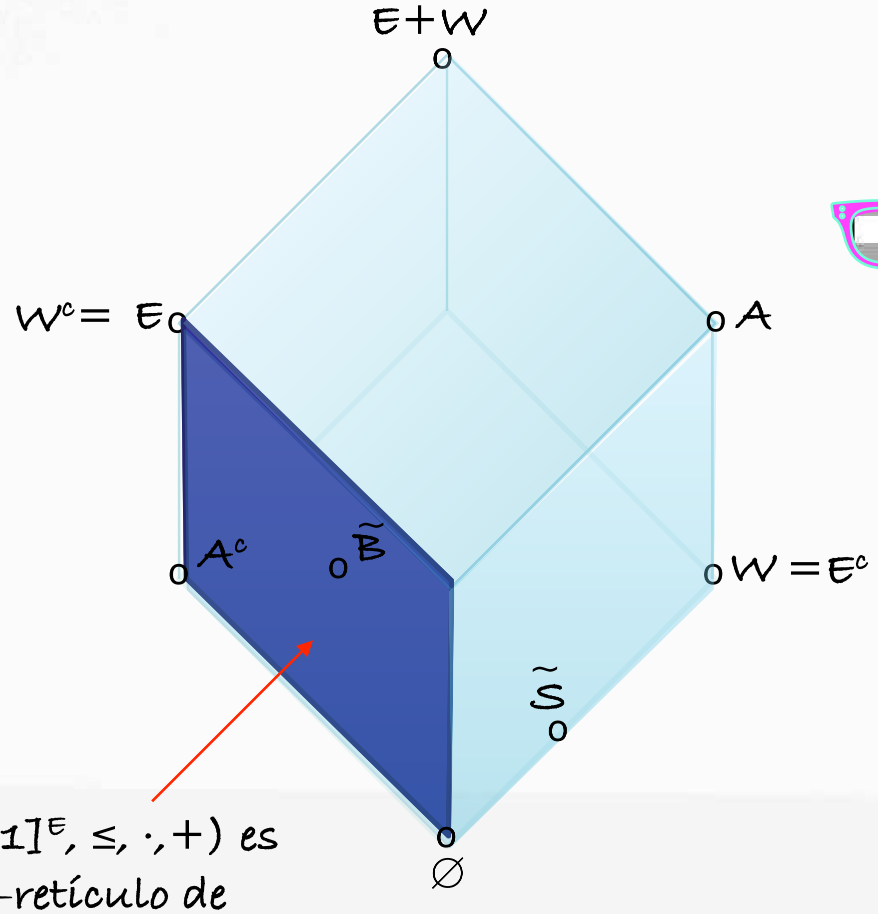


Para L=[0,1], Retículo distributivo: ([0.1]$^{E+W}$, ≤),
con ∅, W, E, A, A^c,$\widetilde{B}$, ... pertenecientes a [0.1]$^{E+W}$.

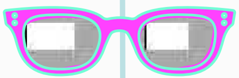
(A (sin tilde): nítido, $\tilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$E \cdot W = \emptyset$

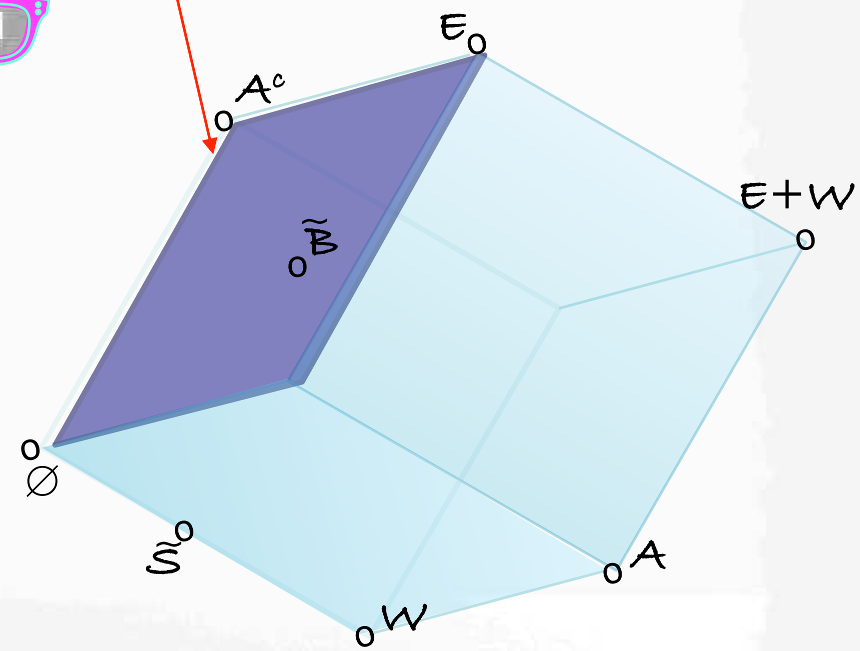
$\forall \tilde{B} \in [0,1]^E$ & $\forall \tilde{S} \in [0,1]^W$



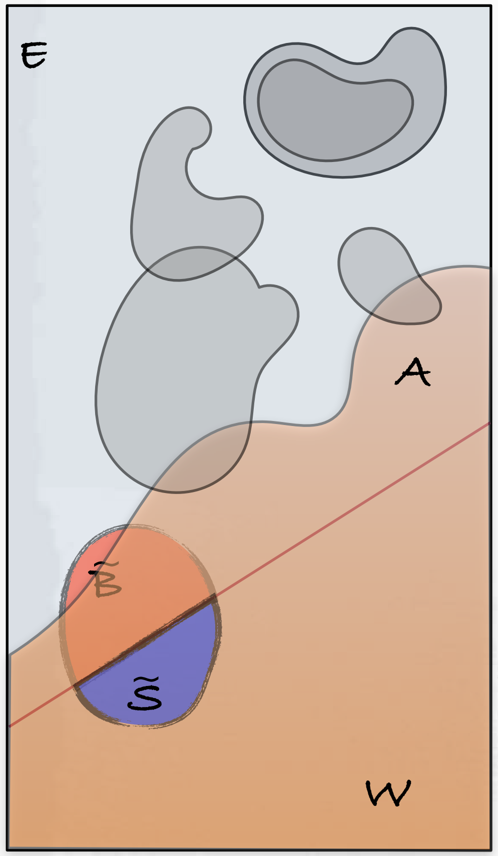
$([0,1]^E, \leq, \cdot, +)$ es sub-retículo de $([0,1]^{E+W}, \leq, \cdot, +)$.



$([0,1]^W, \leq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.



$\tilde{B} + \tilde{S} \sqsubseteq^W \tilde{B}$



Para L=[0,1], Retículo distributivo: $([0.1]^{E+W}, \leq)$, con $\emptyset$, W, E, A, A^c, $\tilde{B}$, ... pertenecientes a $[0.1]^{E+W}$.

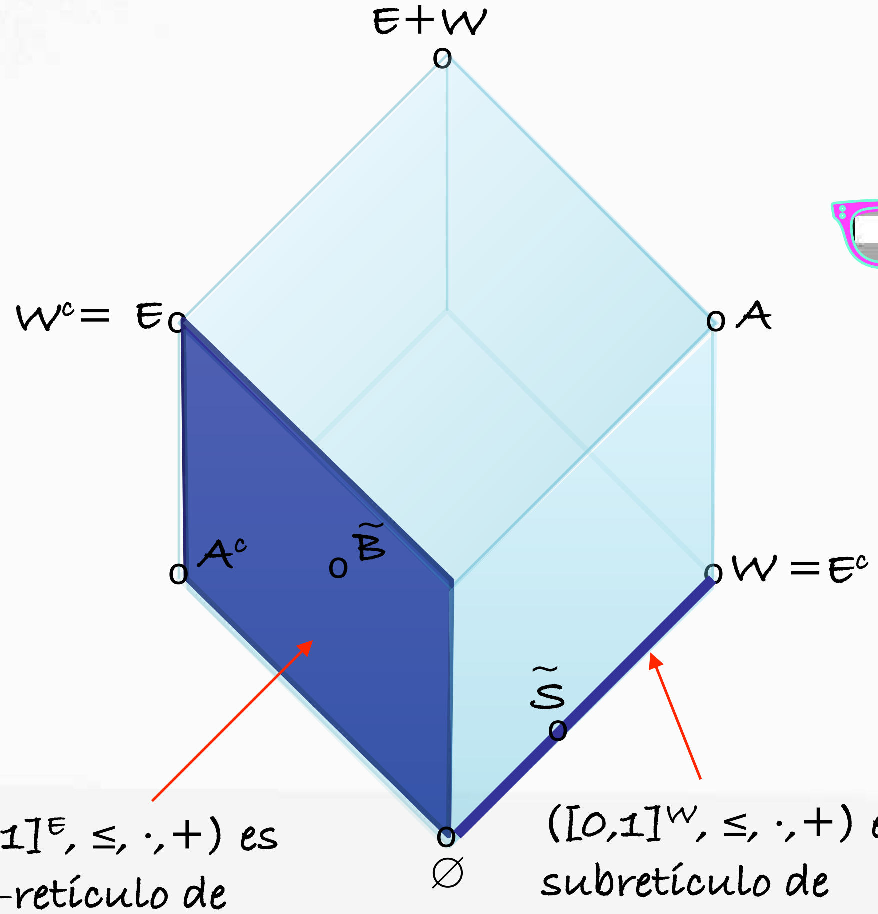
Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que $\emptyset \leq \tilde{M} \leq E = W^c$ y $\emptyset \leq \tilde{N} \leq E = W^c$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \leq \tilde{N}$$

$E \cdot W = \emptyset$

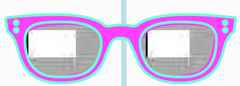
(A (sin tilde): nítido, $\tilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$\forall \tilde{B} \in [0,1]^E$ & $\forall \tilde{S} \in [0,1]^W$

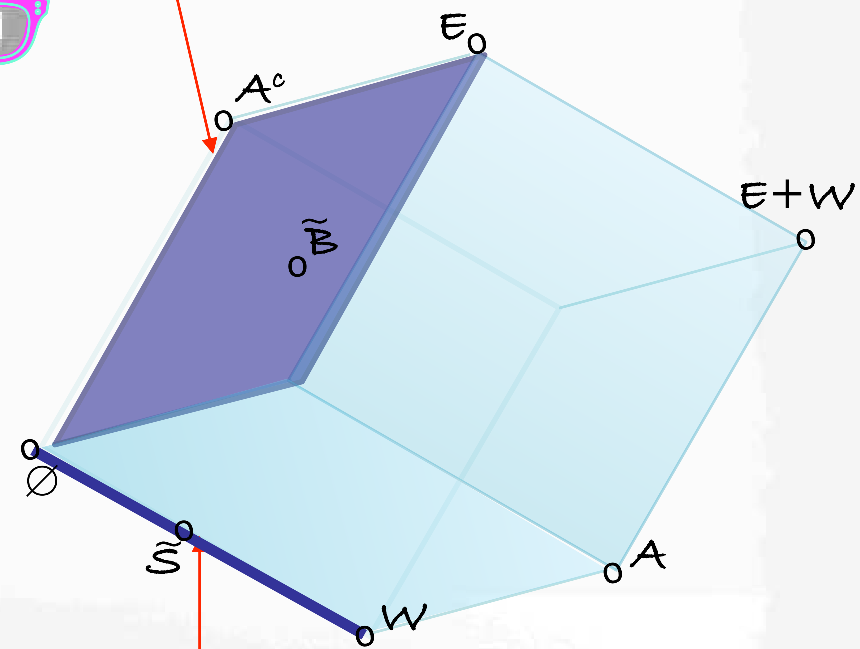


$([0,1]^E, \leq, \cdot, +)$ es sub-retículo de $([0,1]^{E+W}, \leq, \cdot, +)$.

$([0,1]^W, \leq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \leq, \cdot, +)$.

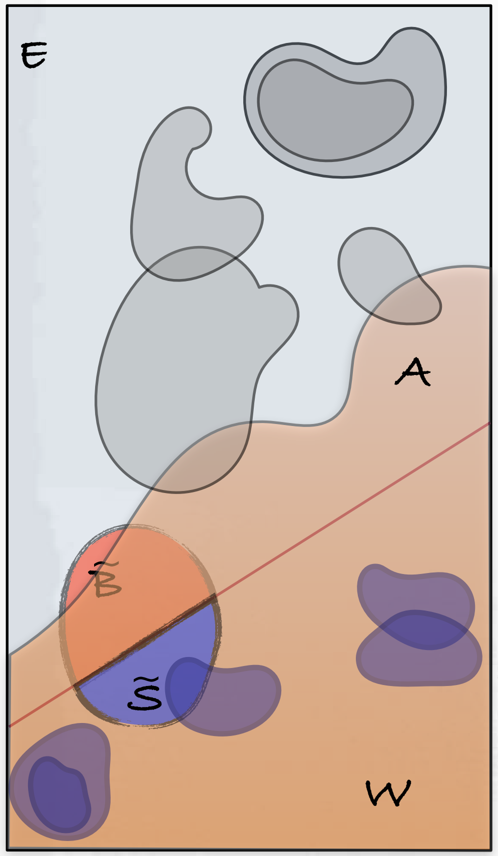


$([0,1]^W, \leq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.



$([0,1]^W, \geq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

$\tilde{B} + \tilde{S} \sqsubseteq^W \tilde{B}$



Para $L=[0,1]$, Retículo distributivo: $([0.1]^{E+W}, \leq)$, con $\emptyset$, W, E, A, A^c, $\tilde{B}$, ... pertenecientes a $[0.1]^{E+W}$.

Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$\emptyset \leq \tilde{M} \leq E = W^c$ y $\emptyset \leq \tilde{N} \leq E = W^c$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \leq \tilde{N}$$

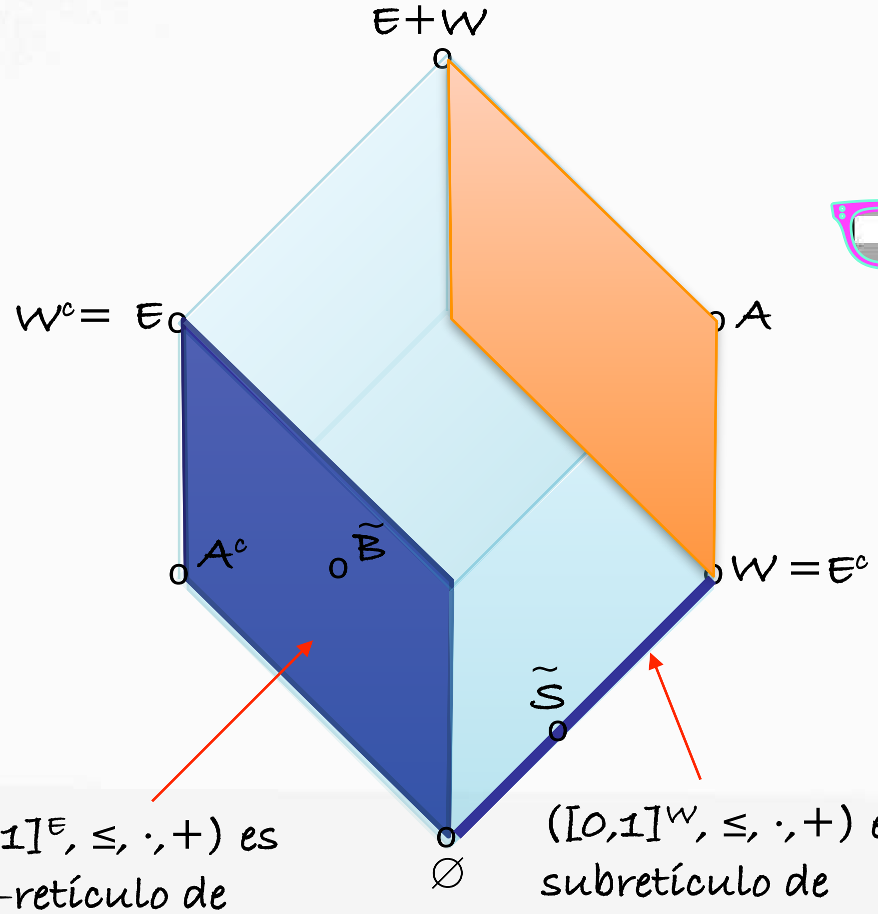
Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$\emptyset \leq \tilde{M} \leq W = E^c$ y $\emptyset \leq \tilde{N} \leq W = E^c$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \geq \tilde{N}$$

$E \cdot W = \varnothing$

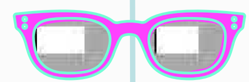
(A (sin tilde): nítido, $\widetilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

$\forall \widetilde{B} \in [0,1]^E$ & $\forall \widetilde{S} \in [0,1]^W$

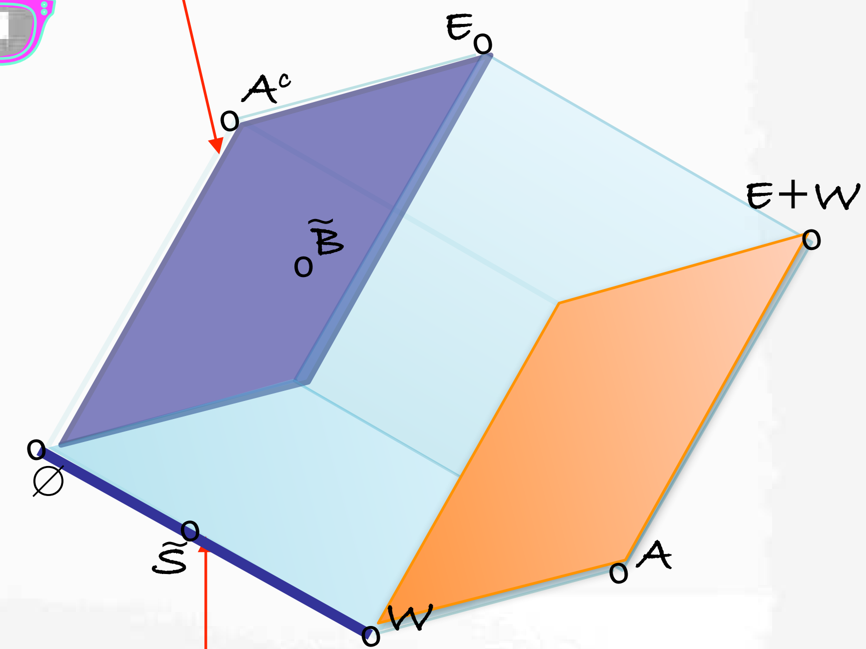


$([0,1]^E, \leq, \cdot, +)$ es sub-retículo de $([0,1]^{E+W}, \leq, \cdot, +)$.

$([0,1]^W, \leq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \leq, \cdot, +)$.

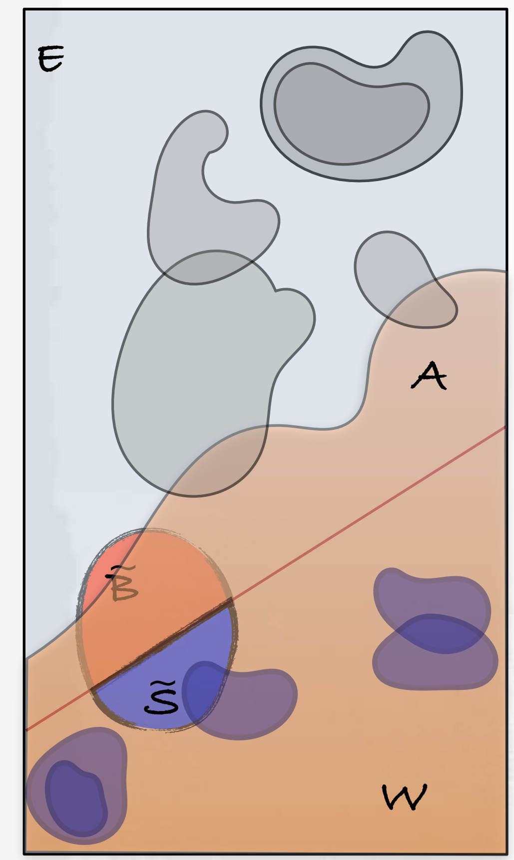


$([0,1]^W, \leq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

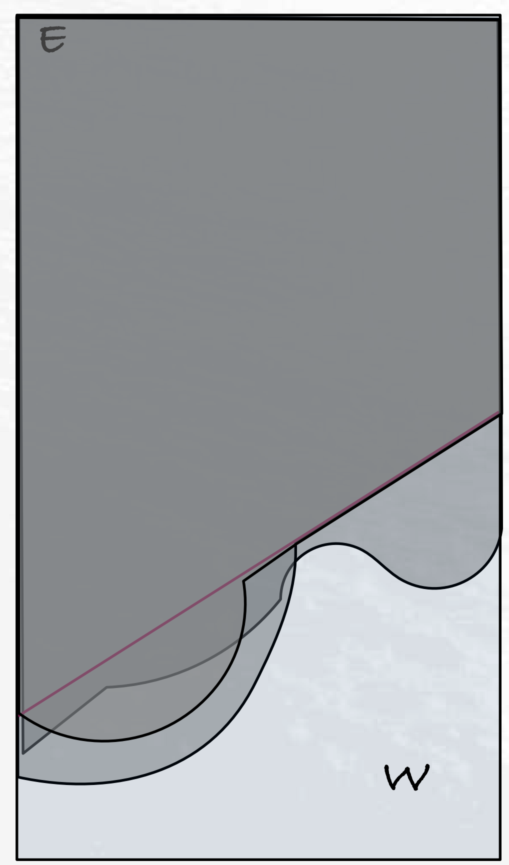


$([0,1]^W, \geq, \cdot, +)$ es subretículo de $([0,1]^{E+W}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$.

$\widetilde{B} + \widetilde{S} \sqsubseteq^W \widetilde{B}$



Para $L = [0,1]$, Retículo distributivo: $([0.1]^{E+W}, \leq)$, con $\varnothing$, W, E, A, A^c, $\widetilde{B}$, ... pertenecientes a $[0.1]^{E+W}$.



Si $\widetilde{M}$ y $\widetilde{N}$ son tales que

$E = W^c \leq \widetilde{M} \leq E+W$ y $E = W^c \leq \widetilde{N} \leq E+W$:

$$\widetilde{M} \sqsubseteq^W \widetilde{N} \Leftrightarrow \widetilde{M} \leq \widetilde{N}$$

Si $\widetilde{M}$ y $\widetilde{N}$ son tales que

$\varnothing \leq \widetilde{M} \leq E = W^c$ y $\varnothing \leq \widetilde{N} \leq E = W^c$:

$$\widetilde{M} \sqsubseteq^W \widetilde{N} \Leftrightarrow \widetilde{M} \leq \widetilde{N}$$

Si $\widetilde{M}$ y $\widetilde{N}$ son tales que

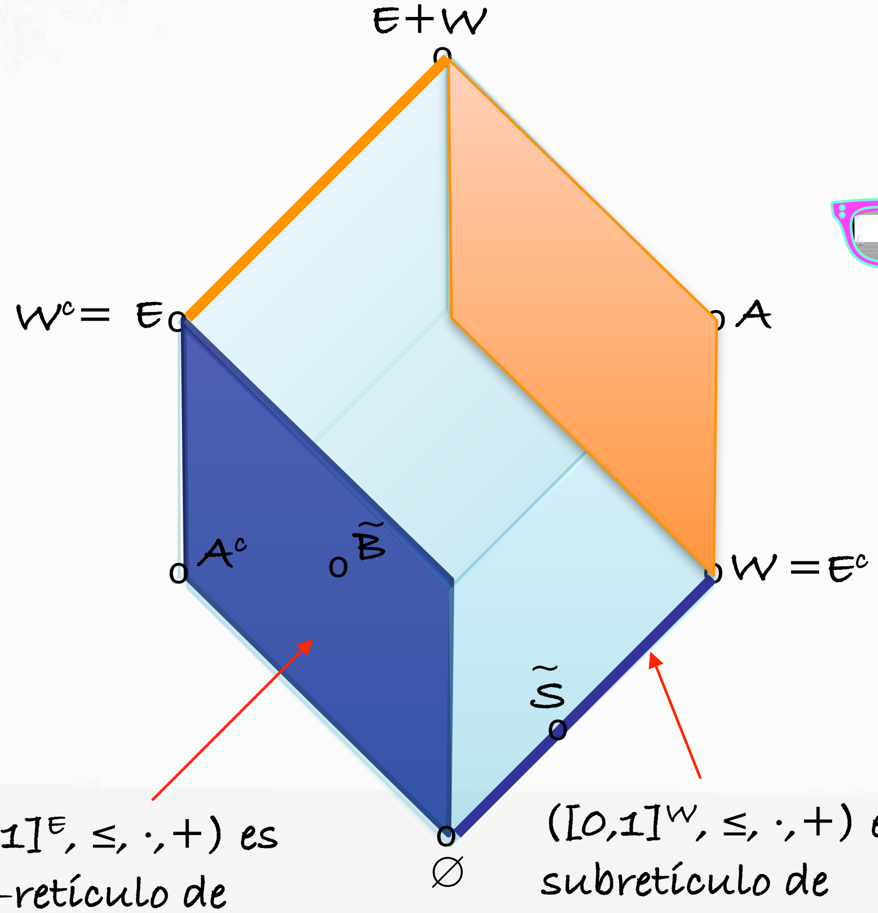
$\varnothing \leq \widetilde{M} \leq W = E^c$ y $\varnothing \leq \widetilde{N} \leq W = E^c$:

$$\widetilde{M} \sqsubseteq^W \widetilde{N} \Leftrightarrow \widetilde{M} \geq \widetilde{N}$$

(A (sin tilde): nítido, $\tilde{B}$ (con tilde): borroso propio)

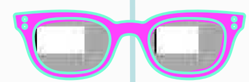
$E \cdot W = \varnothing$

$\forall \tilde{B} \in [0,1]^E$ & $\forall \tilde{S} \in [0,1]^W$

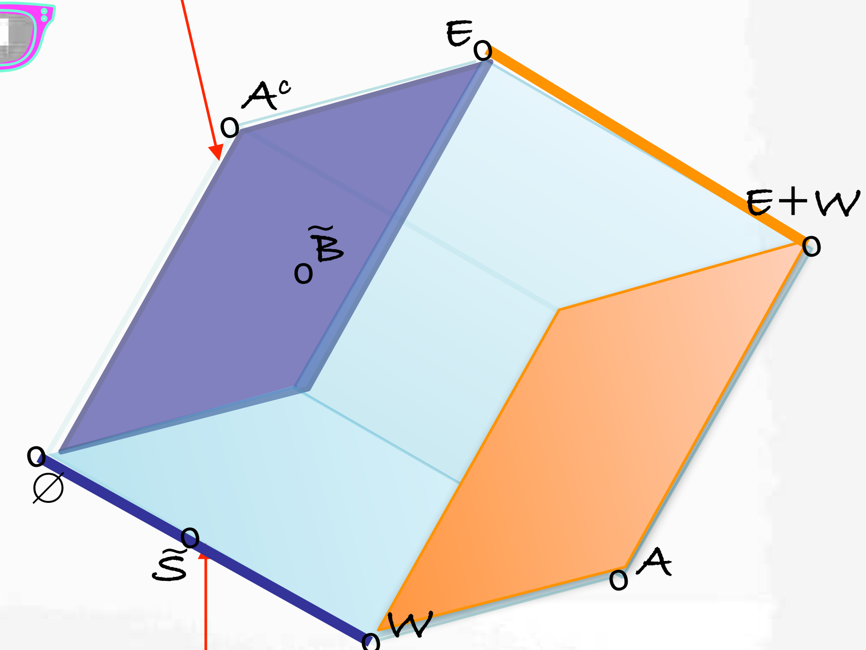


([0,1]^E, ≤, ·,+) es sub-retículo de ([0,1]$^{E+W}$, ≤, ·,+).

([0,1]^W, ≤, ·,+) es subretículo de ([0,1]$^{E+W}$, ≤, · ,+).

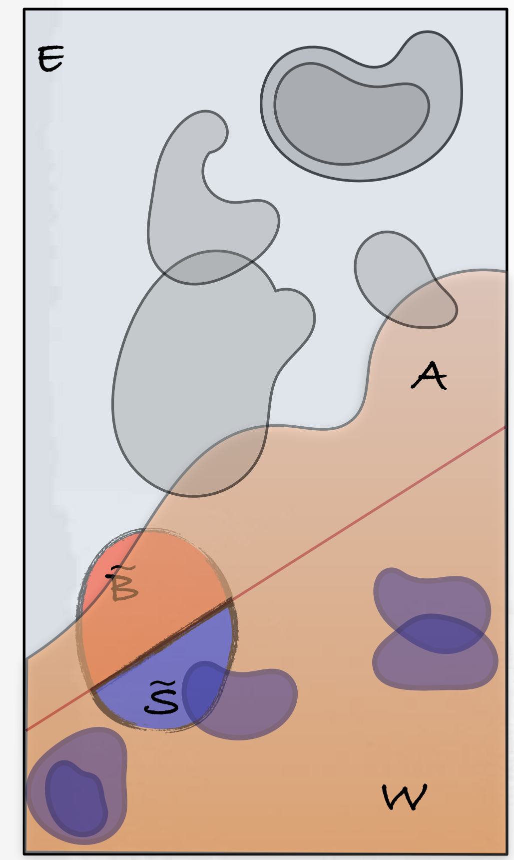


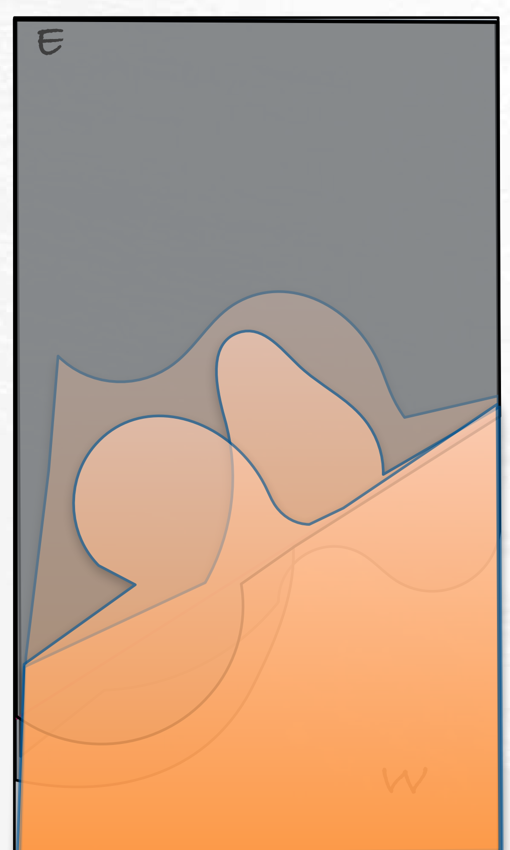
([0,1]^W, ≤, ·,+) es subretículo de ([0,1]$^{E+W}$,$\sqsubseteq^W$,$\sqcap^W$, $\sqcup^W$).



([0,1]^W, ≥, ·, +) es subretículo de ([0,1]$^{E+W}$, $\sqsubseteq^W$, $\sqcap^W$, $\sqcup^W$).

$\tilde{B}+\tilde{S} \sqsubseteq^W \tilde{B}$





Para L=[0,1], Retículo distributivo: ([0.1]$^{E+W}$, ≤), con ∅, W, E, A, Aᶜ,$\tilde{B}$, ... pertenecientes a [0.1]$^{E+W}$.

Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$E=W^c \le \tilde{M} \le E+W$ y $E=W^c \le \tilde{N} \le E+W$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \le \tilde{N}$$

Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$E=W^c \le \tilde{M} \le E+W$ y $E=W^c \le \tilde{N} \le E+W$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \ge \tilde{N}$$

Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$\varnothing \le \tilde{M} \le E=W^c$ y $\varnothing \le \tilde{N} \le E=W^c$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \le \tilde{N}$$

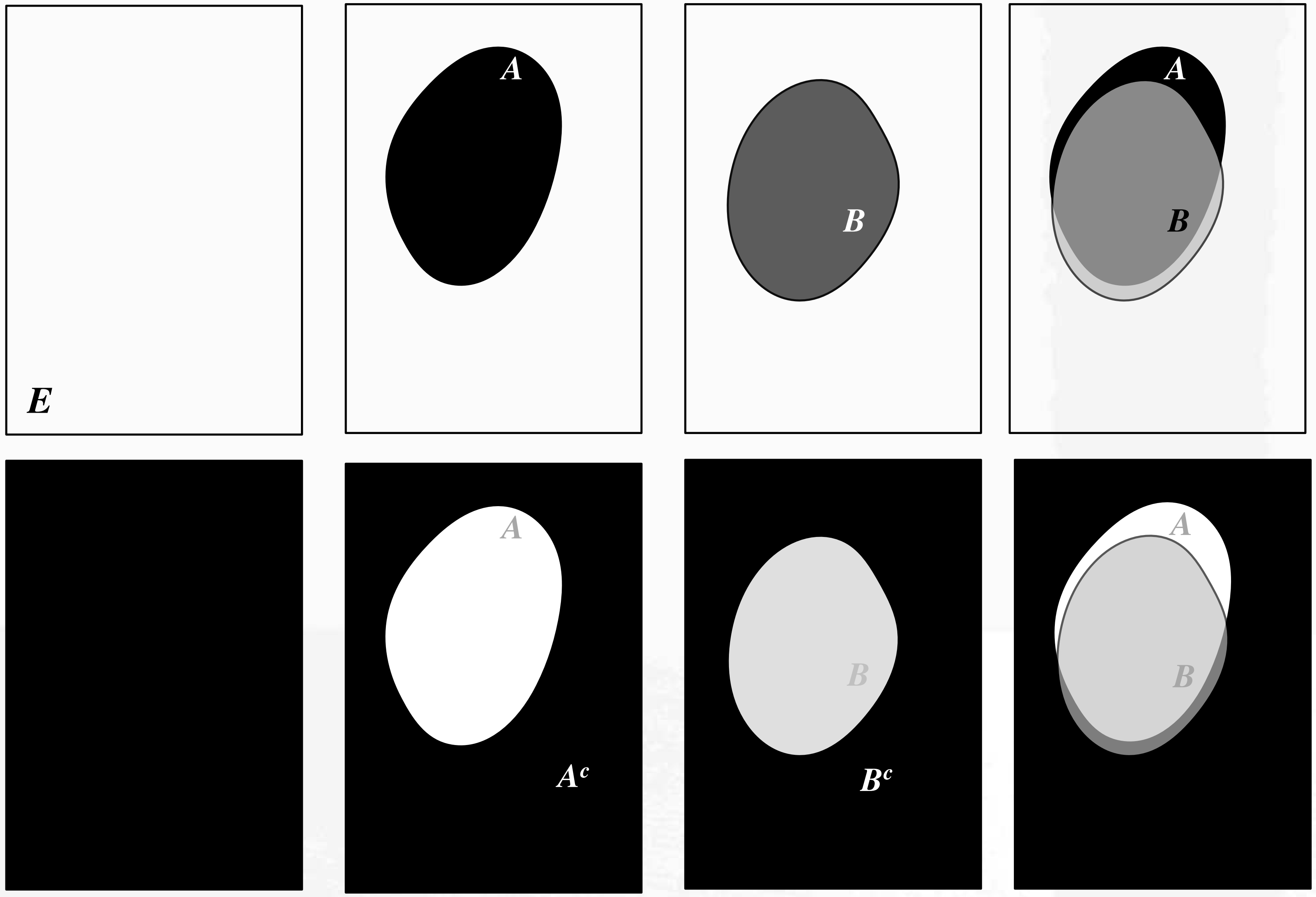
Si $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ son tales que
$\varnothing \le \tilde{M} \le W=E^c$ y $\varnothing \le \tilde{N} \le W=E^c$:

$$\tilde{M} \sqsubseteq^W \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \ge \tilde{N}$$

Soluciones de inecuaciones en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W})$ y $(L^{E}, \sqsubseteq^{W})$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \emptyset, E)$$

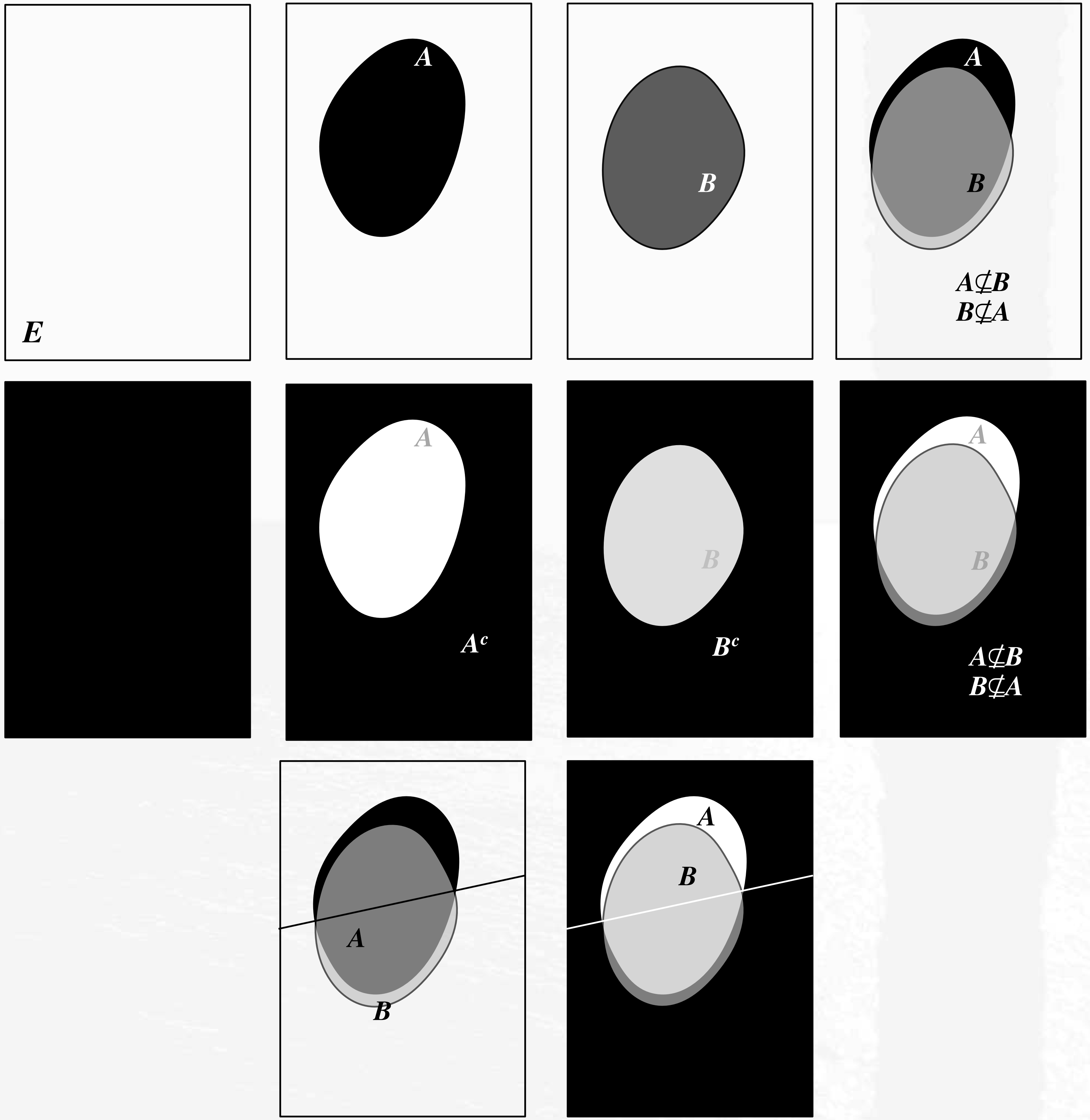


Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

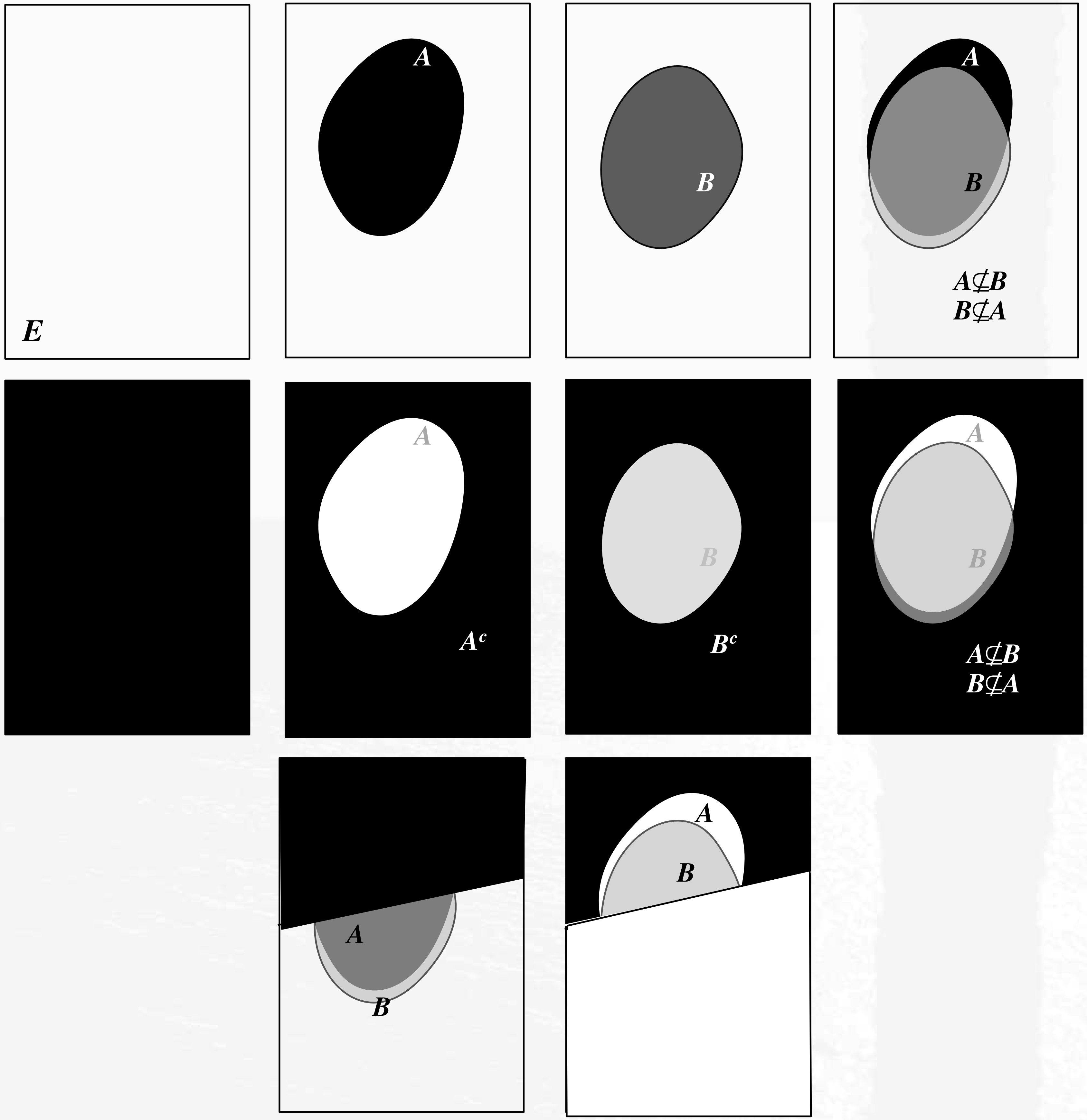


Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$$

A y B datos , W incógnita:

$$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$$



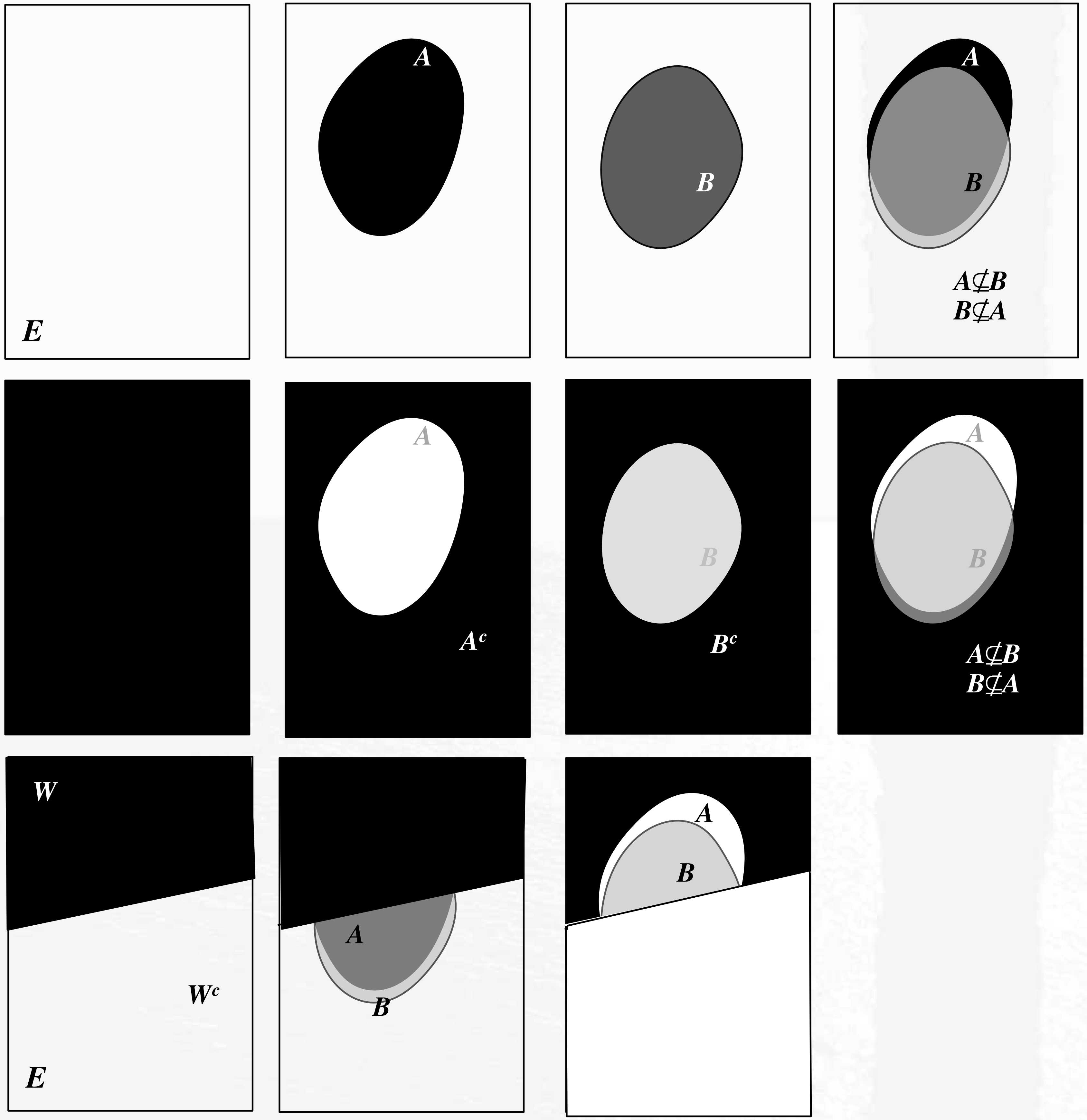
Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \sqsubseteq^{W} B$?

Un subconjunto W solución:



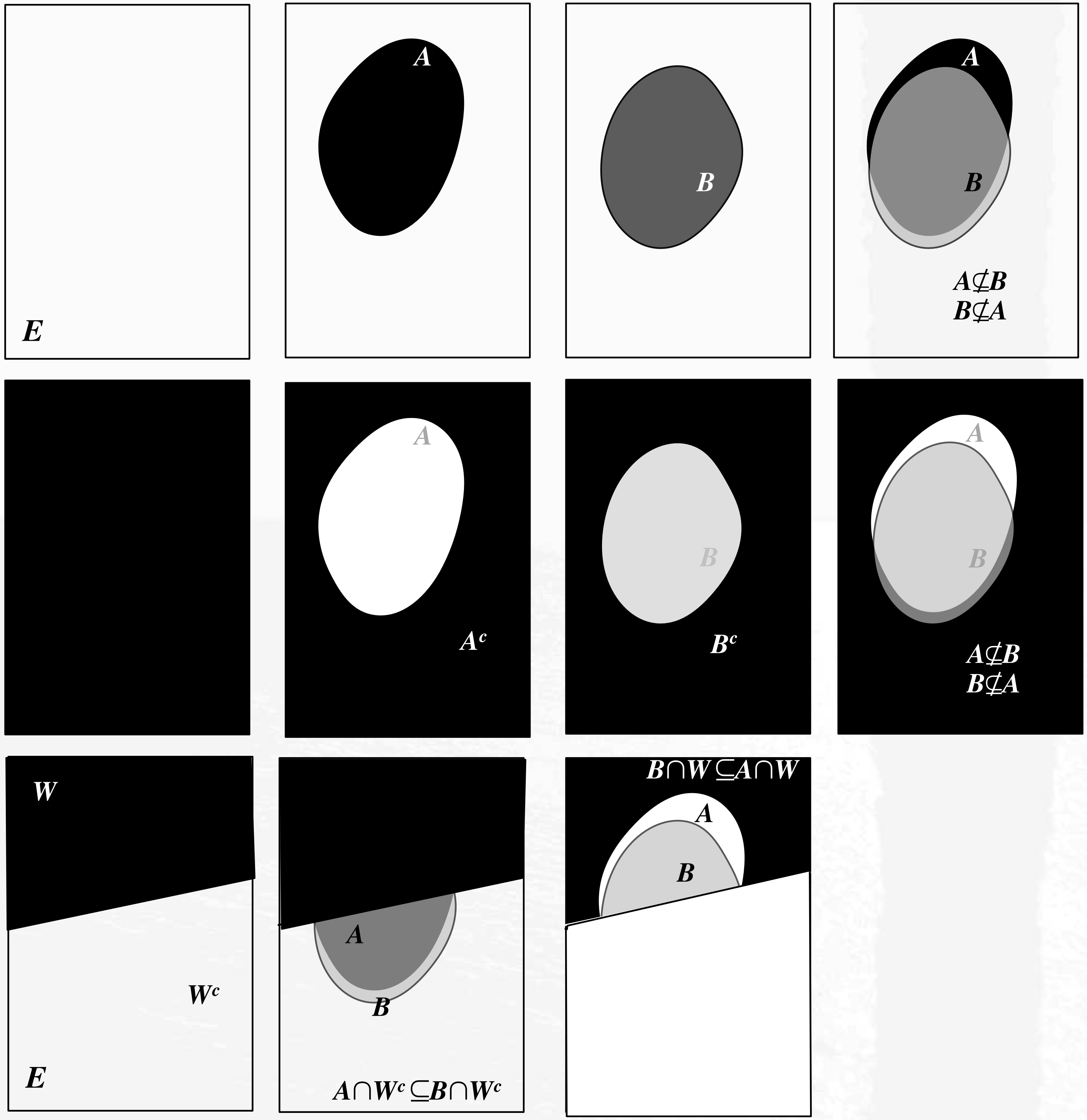
Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

Un subconjunto W solución:



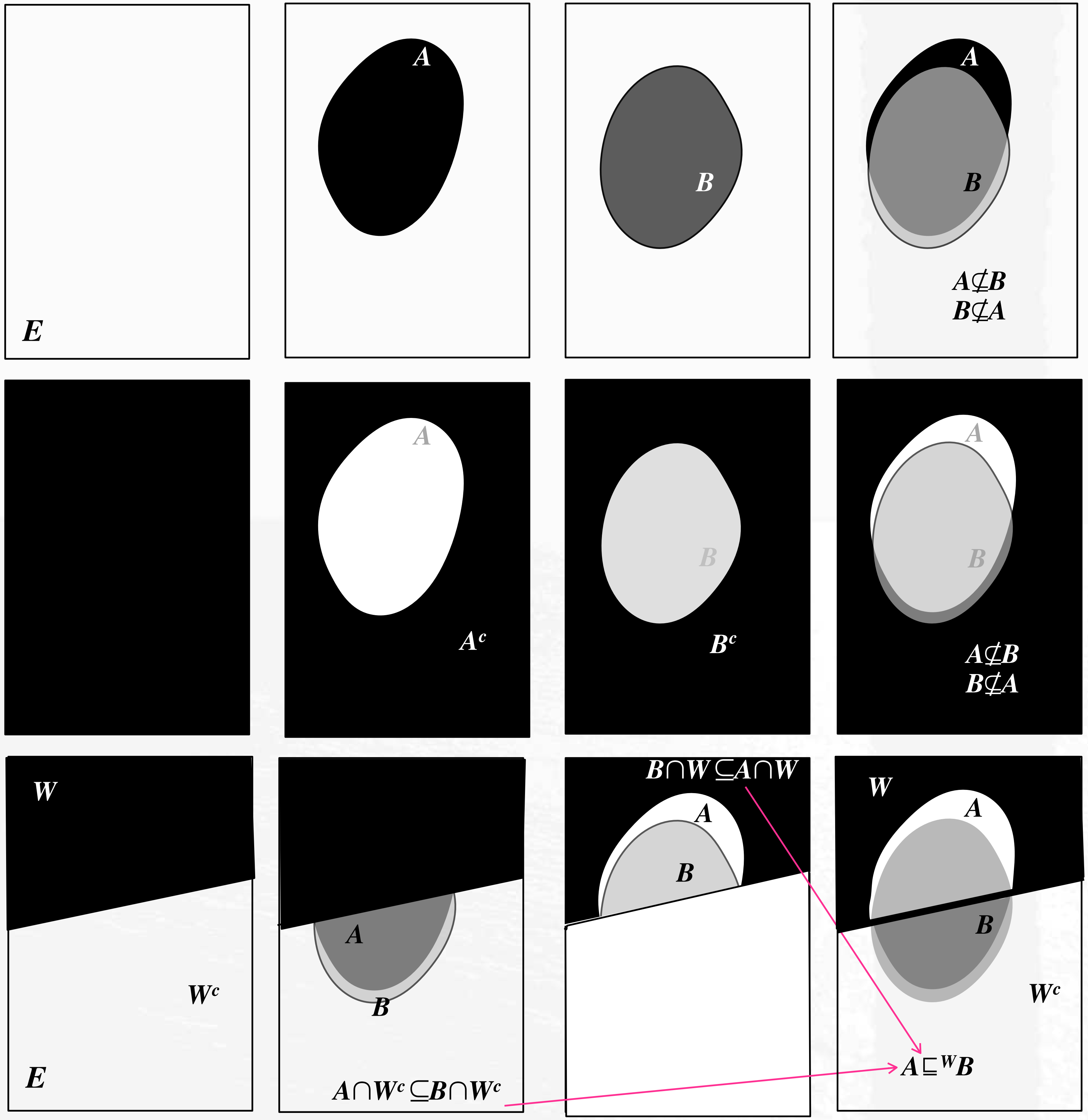
Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

Un subconjunto W solución:



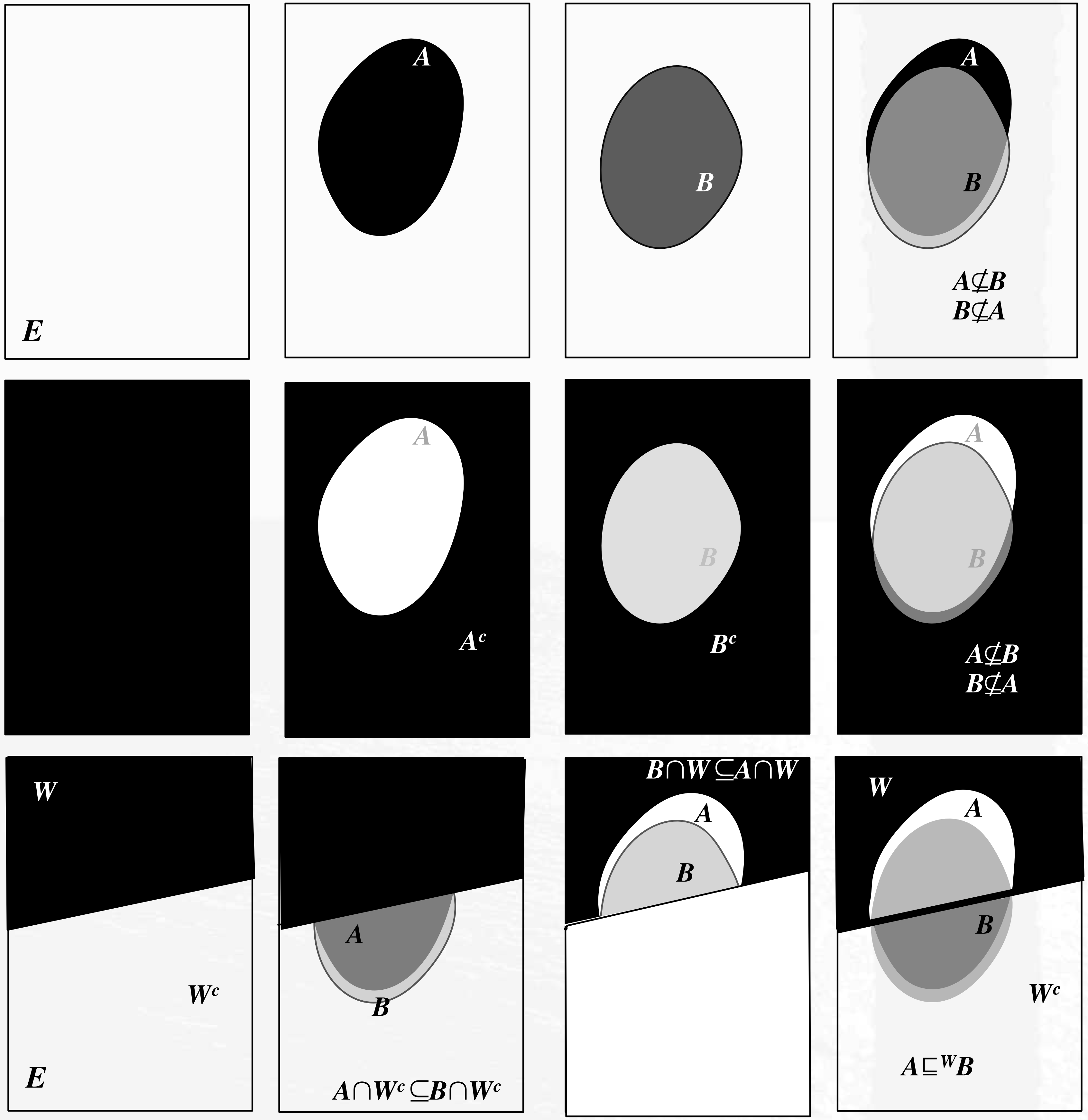
Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

Un subconjunto W solución:



$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

W no es el único subconjunto para el que se cumple $A \sqsubseteq^{W} B$: $A \sqsubseteq^{W_1} B$

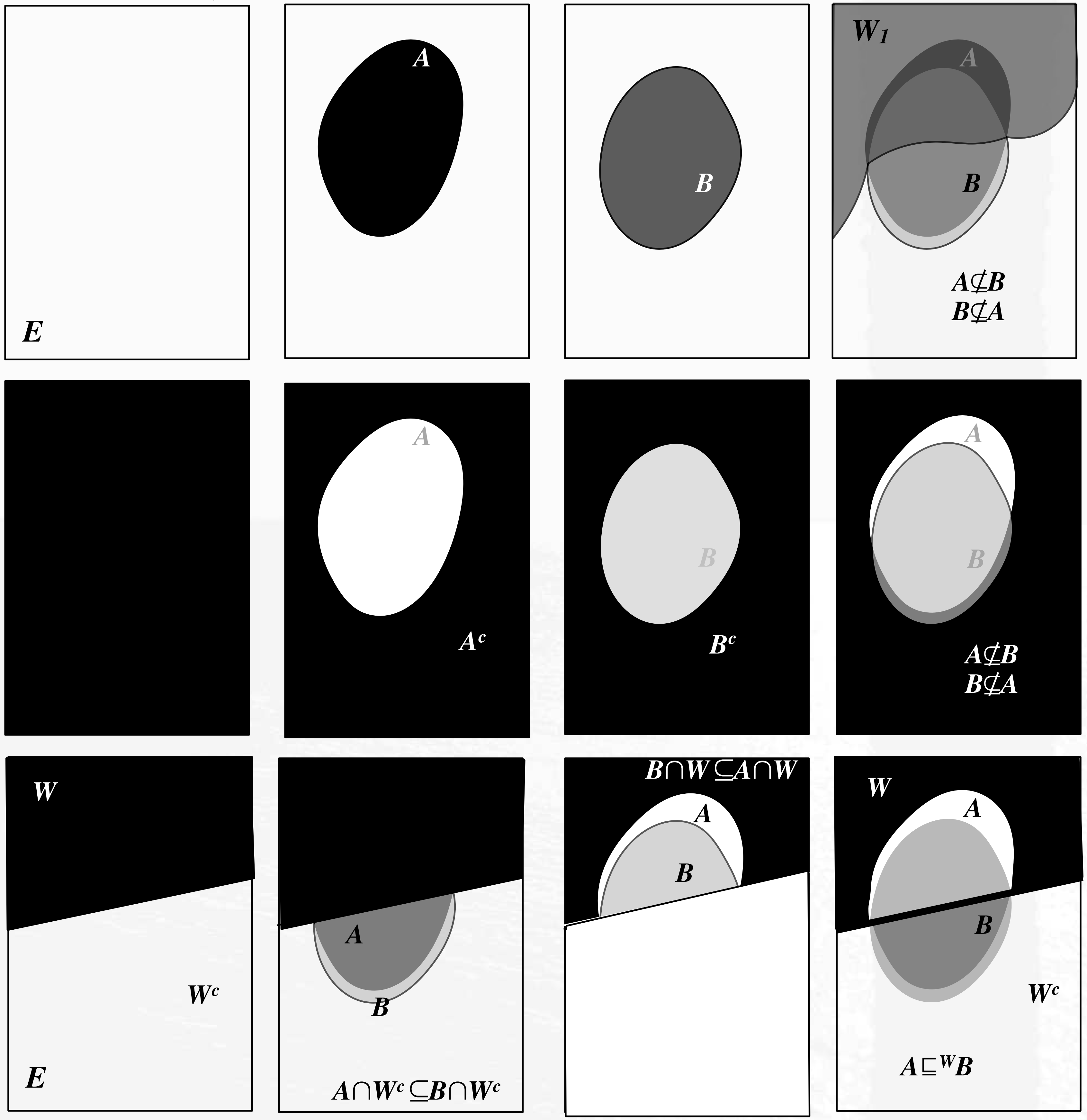
Órdenes $\sqsubseteq^{W}$ entre subconjuntos ordinarios

$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^{c}, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq}^{W} B$

Un subconjunto W solución:



$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^{c} \subseteq B \cap W^{c})] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^{W}$ es un "orden de actividad"

W no es el único subconjunto para el que se cumple $A \sqsubseteq^{W} B$: $A \sqsubseteq^{W_1} B$

"$\sqsubseteq^{W}$-inecuaciones"

Órdenes $\sqsubseteq^{W}$ entre subconjuntos ordinarios

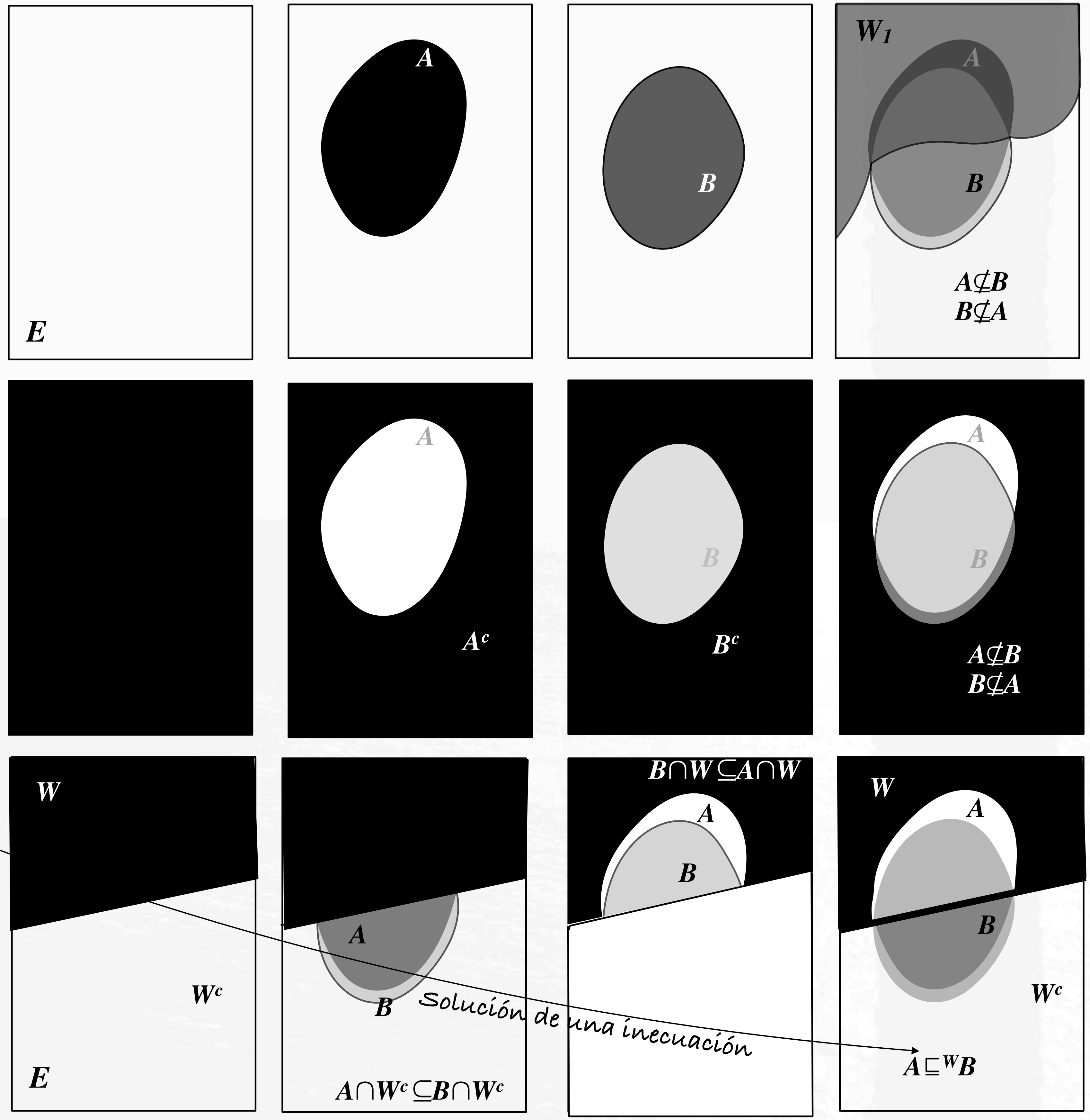
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^{c}, \varnothing, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq}^{W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



Inecuación

$A \sqsubseteq^{Z} B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W \subseteq A\cap W) \& (A\cap W^{c} \subseteq B\cap W^{c})] \Leftrightarrow (B\cap W \subseteq A \subseteq B\cup W)$$

$\sqsubseteq^{W}$ es un "orden de actividad"

“$\sqsubseteq^W$-inecuaciones”

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

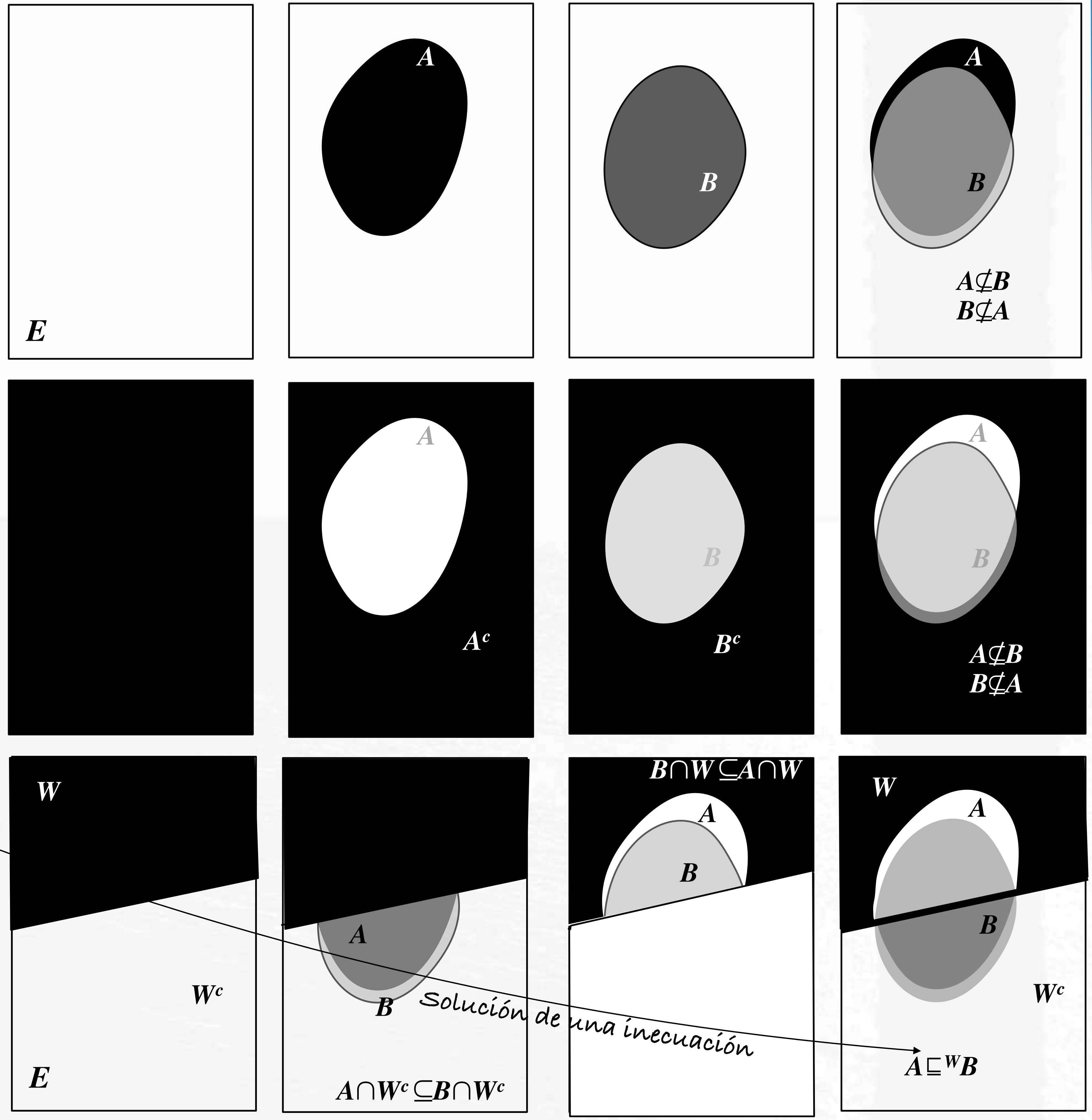
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

Antes resolvemos...

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un “orden de actividad”

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

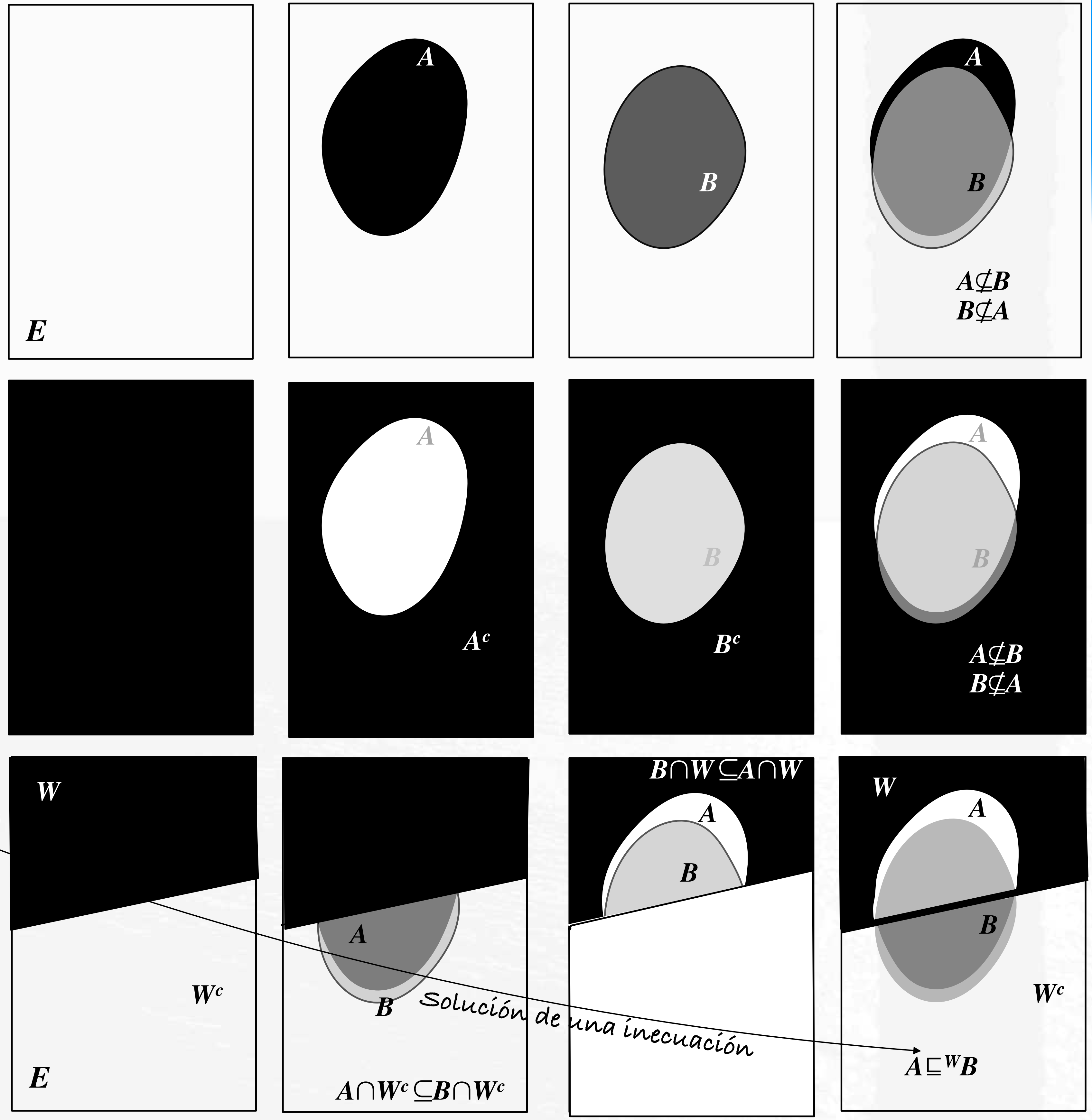
$$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$$

A y B datos , W incógnita:

$$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$$X \sqsubseteq^W B$$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$$A \sqsubseteq^Z B$$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

“$\sqsubseteq^{W}$-inecuaciones”

Órdenes $\sqsubseteq^{W}$ entre subconjuntos ordinarios

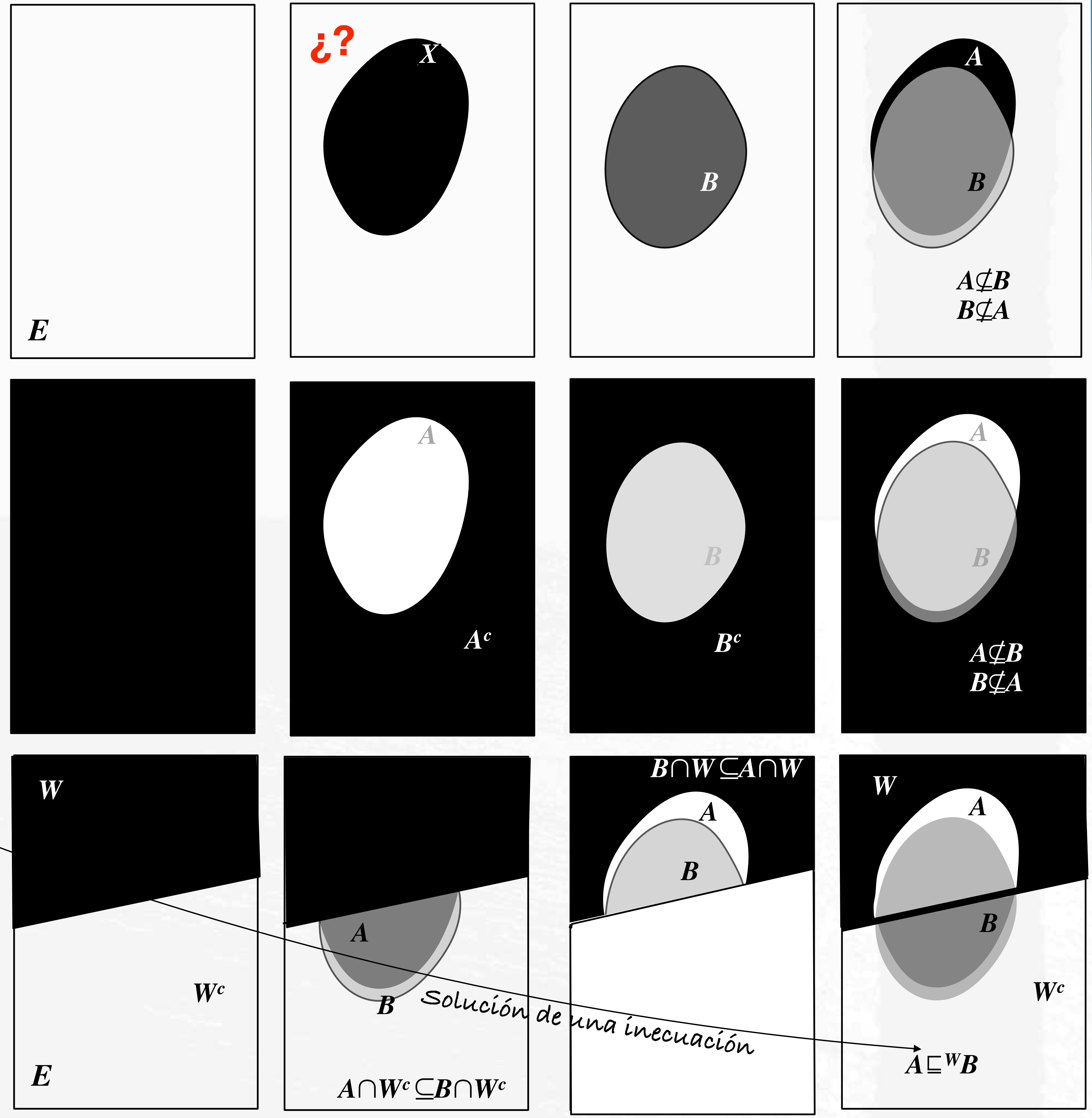
$$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^{c}, \varnothing, E)$$

A y B datos , W incógnita:

$$A \overset{?}{\sqsubseteq^{W}} B$$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



Inecuación

$$X \sqsubseteq^{W} B$$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Inecuación

$$A \sqsubseteq^{Z} B$$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^{W} B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \,\&\, (A \cap W^{c} \subseteq B \cap W^{c})] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^{W}$ es un “orden de actividad”

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

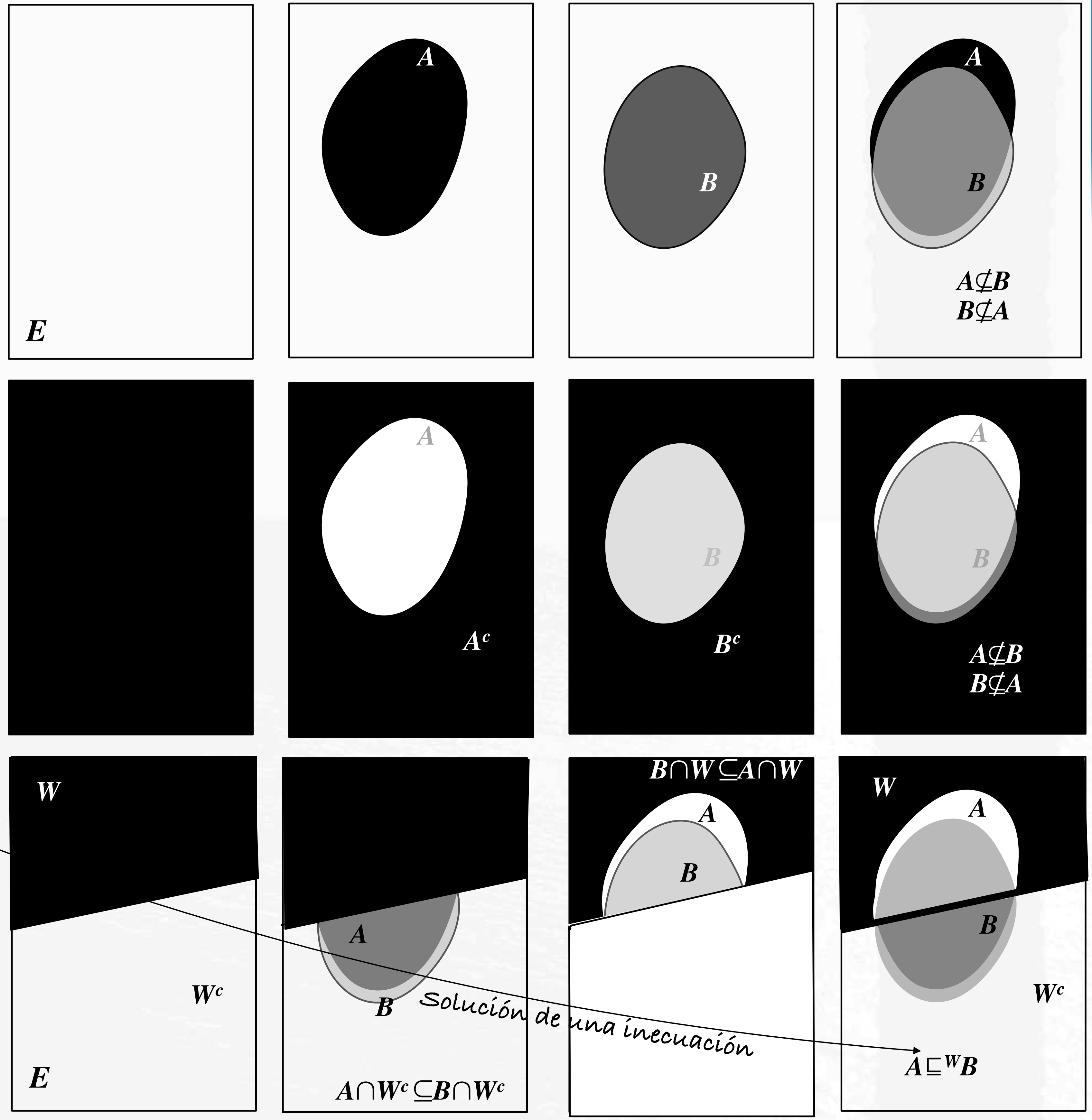
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B \cap W,\ B \cup W]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

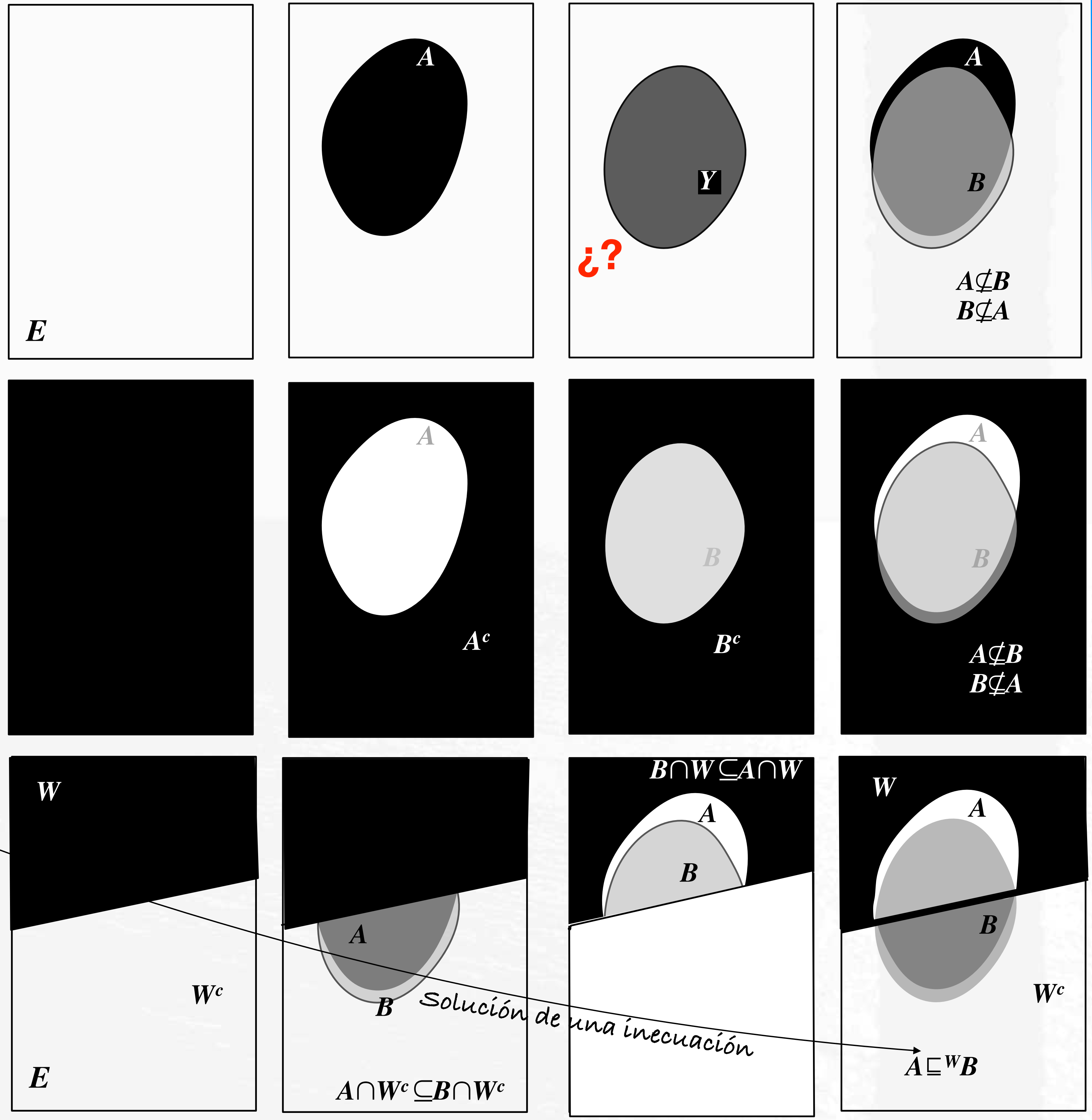
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cap W,\ B\cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W \subseteq A\cap W) \& (A\cap W^c \subseteq B\cap W^c)] \Leftrightarrow (B\cap W \subseteq A \subseteq B\cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

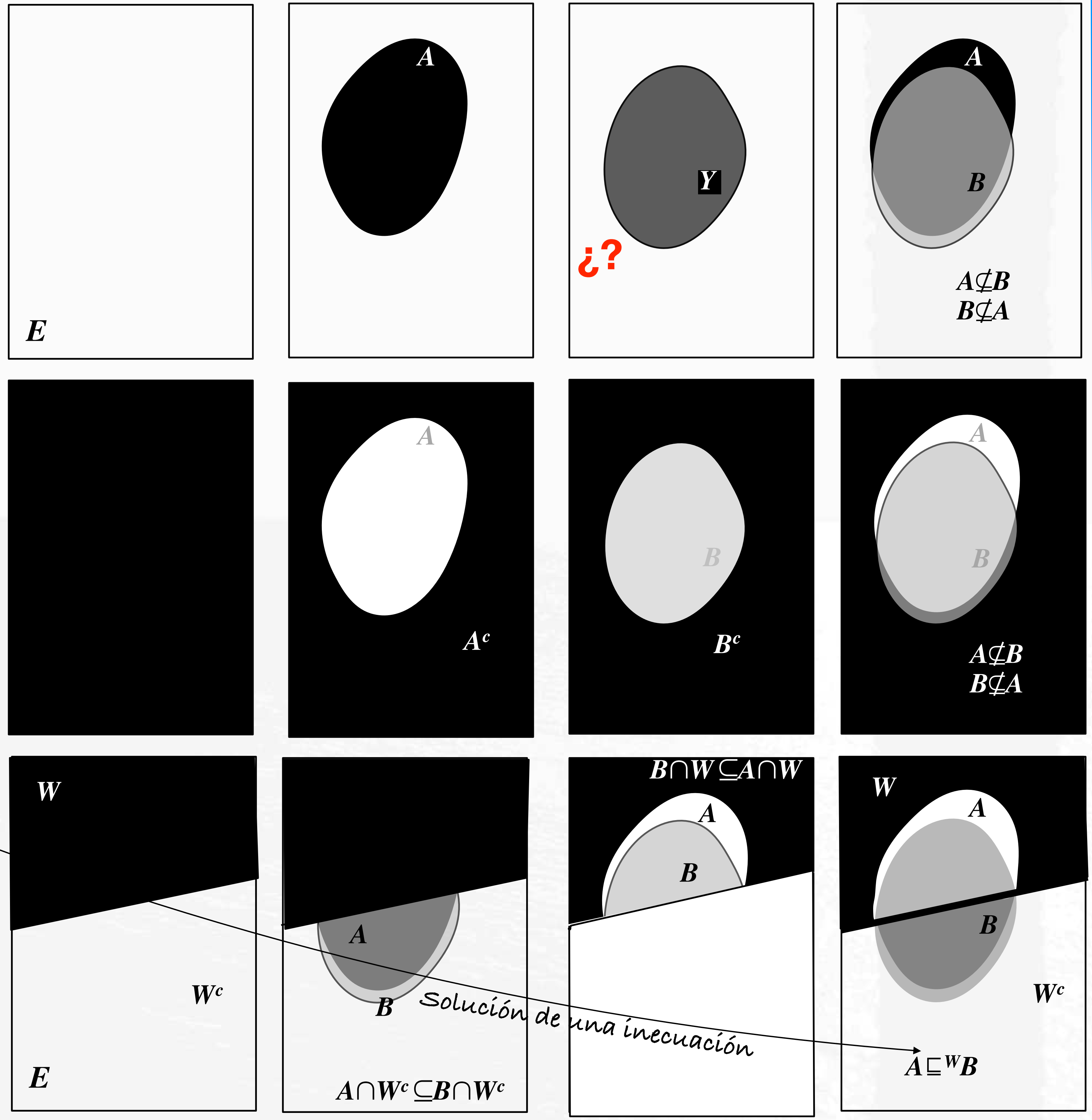
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq}^W B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B \cap W,\ B \cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

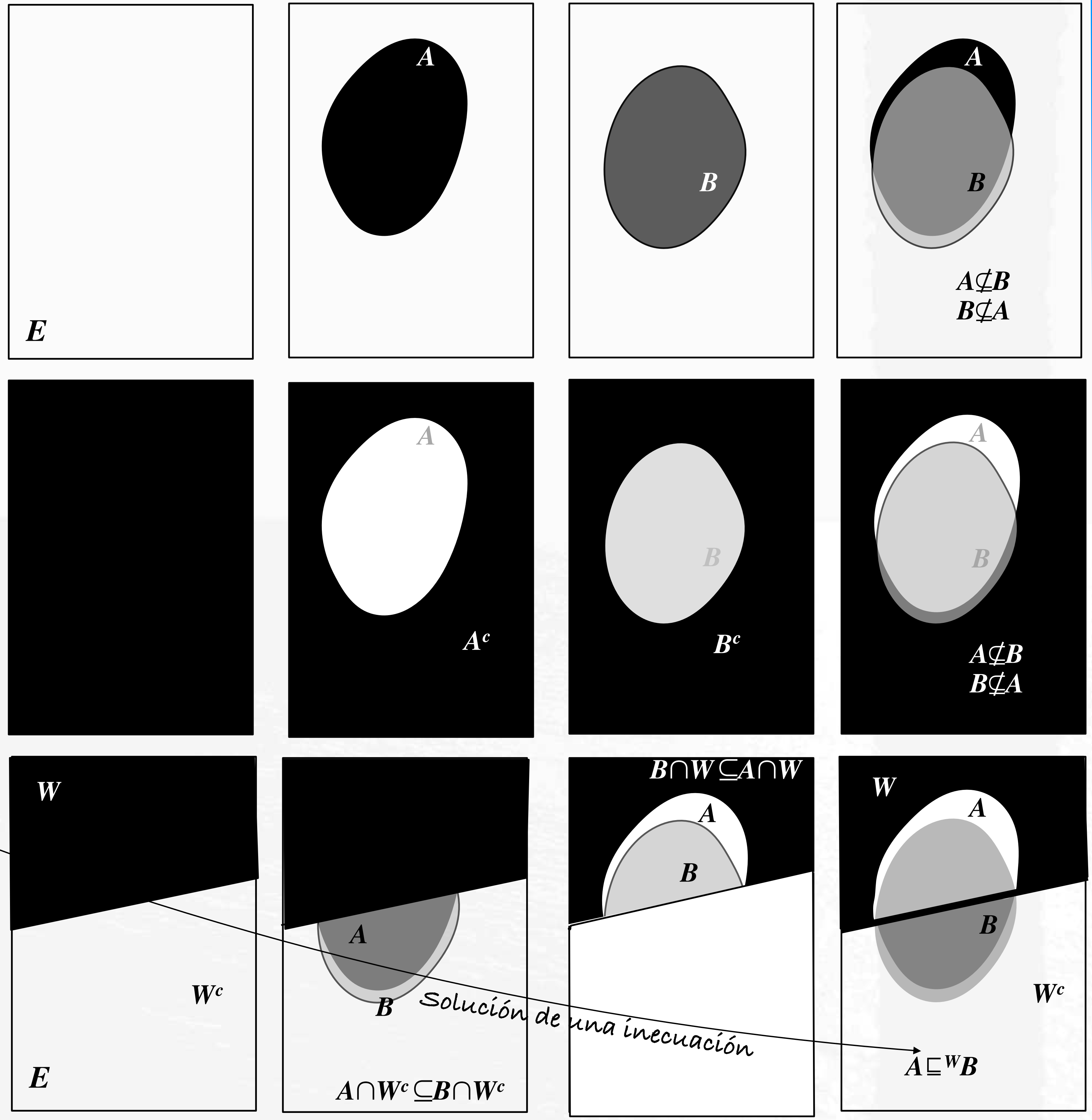
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq}^W B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B \cap W,\ B \cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

Como es equivalente a

$(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$,

Soluciones

$Y \in [A \cap W^c,\ A \cup W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

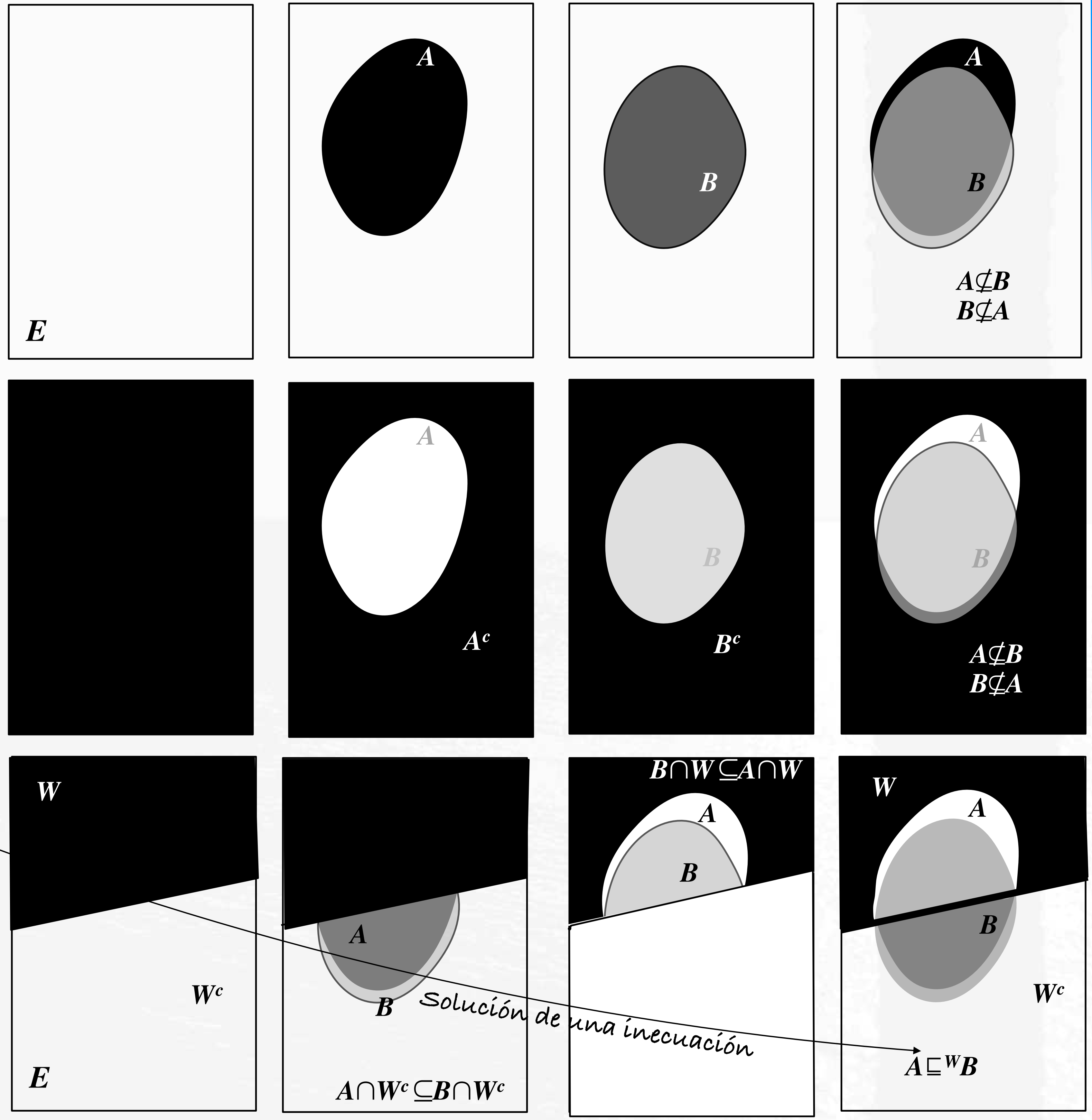
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \emptyset, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B \cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B \cap W,\ B \cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

Como es equivalente a

$(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$,

Soluciones

$Y \in [A \cap W^c,\ A \cup W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

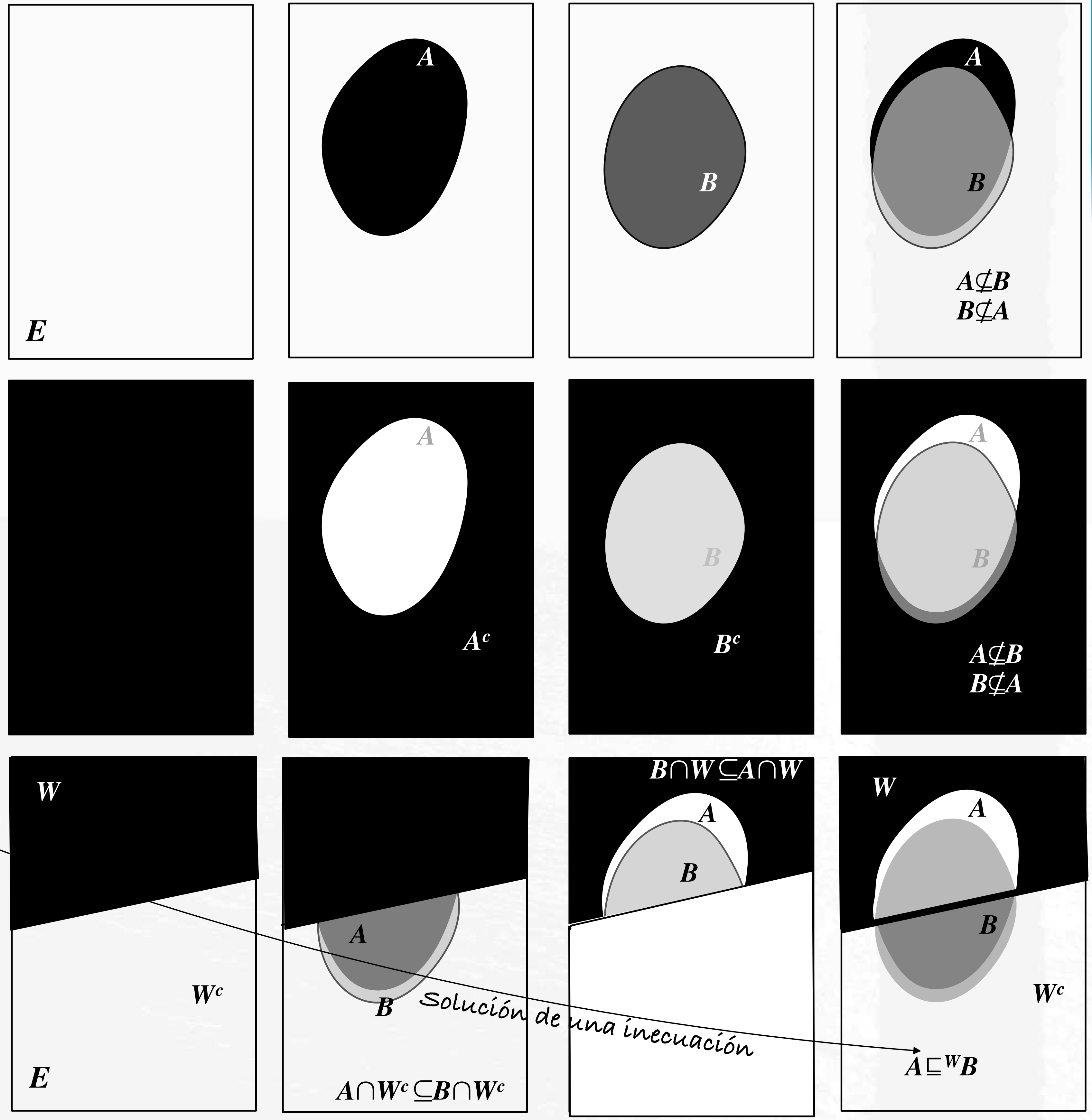
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \emptyset, E)$

A y B datos , W incógnita:

$A \overset{?}{\sqsubseteq^W} B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W \subseteq A\cap W) \& (A\cap W^c \subseteq B\cap W^c)] \Leftrightarrow (B\cap W \subseteq A \subseteq B\cup W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cap W,\ B\cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

Como es equivalente a

$(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$,

Soluciones

$Y \in [A\cap W^c,\ A\cup W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

“$\sqsubseteq^W$-inecuaciones”

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

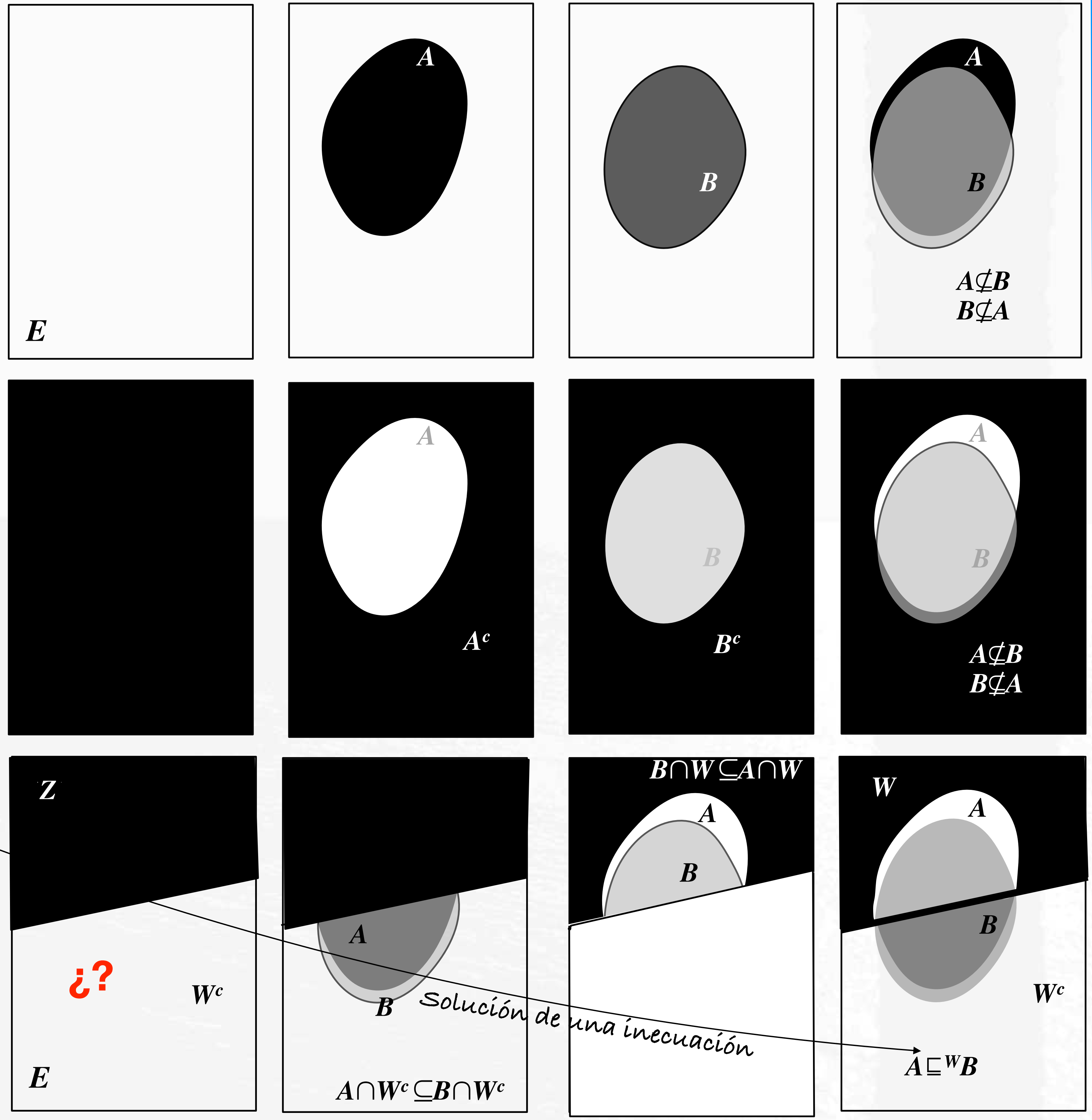
$$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$$

A y B datos , W incógnita:

$$A \sqsubseteq^W B$$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



Inecuación

$$X \sqsubseteq^W B$$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$$X \in [B\cap W,\ B\cup W]$$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$$A \sqsubseteq^W Y$$

$Y \in P(E)$ incógnita

Como es equivalente a

$(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$,

Soluciones

$$Y \in [A\cap W^c,\ A\cup W^c]$$

Inecuación

$$A \sqsubseteq^Z B$$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

Como es equivalente a

$(A \sqsubseteq^B Z)$,

$$A\sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A\triangle W \subseteq B\triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W\subseteq A\cap W)\&(A\cap W^c\subseteq B\cap W^c)] \Leftrightarrow (B\cap W\subseteq A\subseteq B\cup W)$$

$\sqsubseteq^W$ es un “orden de actividad”

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos ordinarios

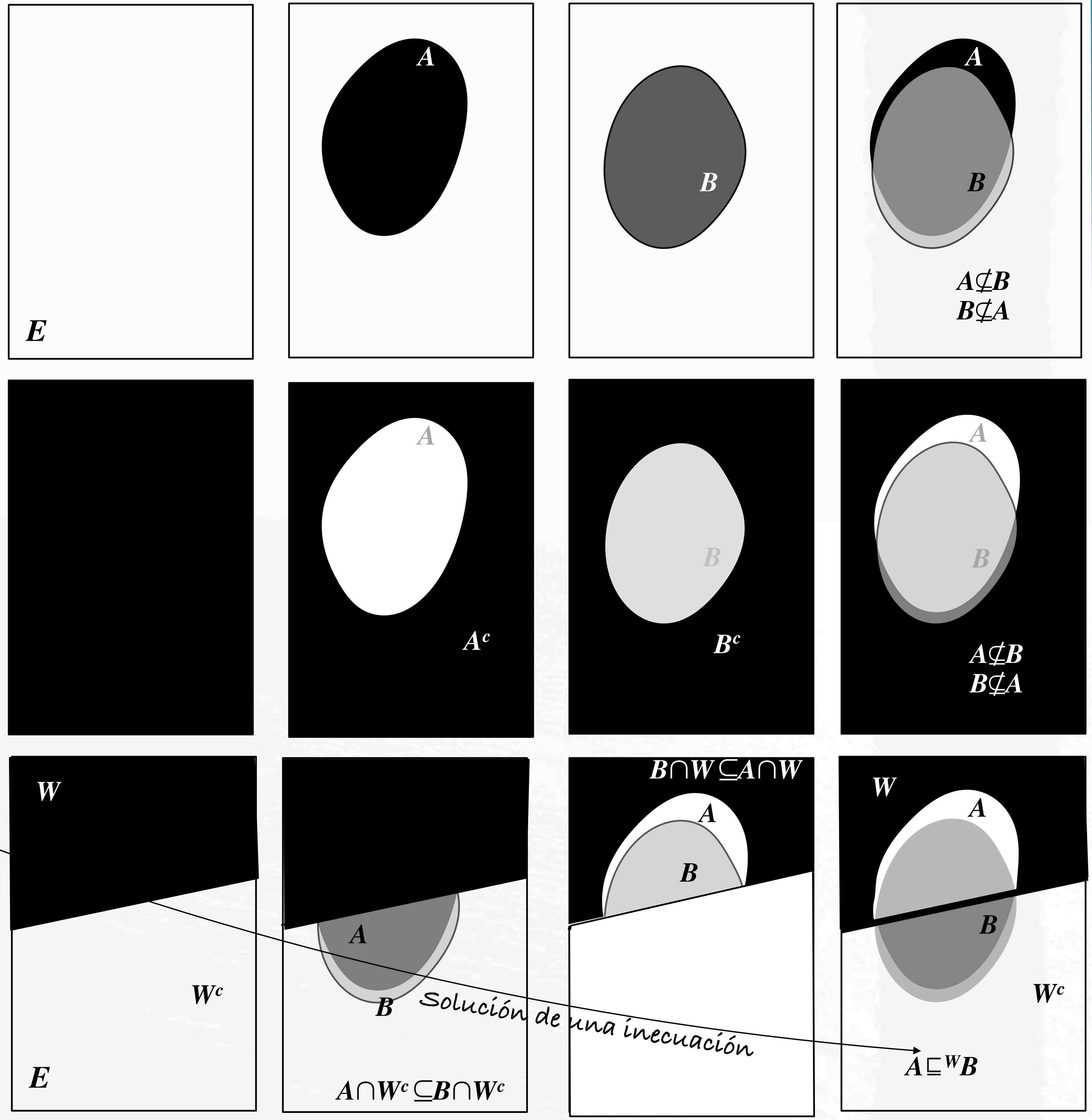
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$

A y B datos, W incógnita:

$A \sqsubseteq^W B$

¿Papel de W?

Un subconjunto W solución:



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (A \triangle W \subseteq B \triangle W) \Leftrightarrow [(B\cap W \subseteq A \cap W) \& (A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)] \Leftrightarrow (B \cap W \subseteq A \subseteq B \cup W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in P(E)XP(E)$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cap W,\ B \cup W]$

Datos

$(A,W) \in P(E)XP(E)$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

Como es equivalente a

$(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$,

Soluciones

$Y \in [A\cap W^c,\ A \cup W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in P(E)XP(E)$

Como es equivalente a

$(A \sqsubseteq^B Z)$,

Soluciones

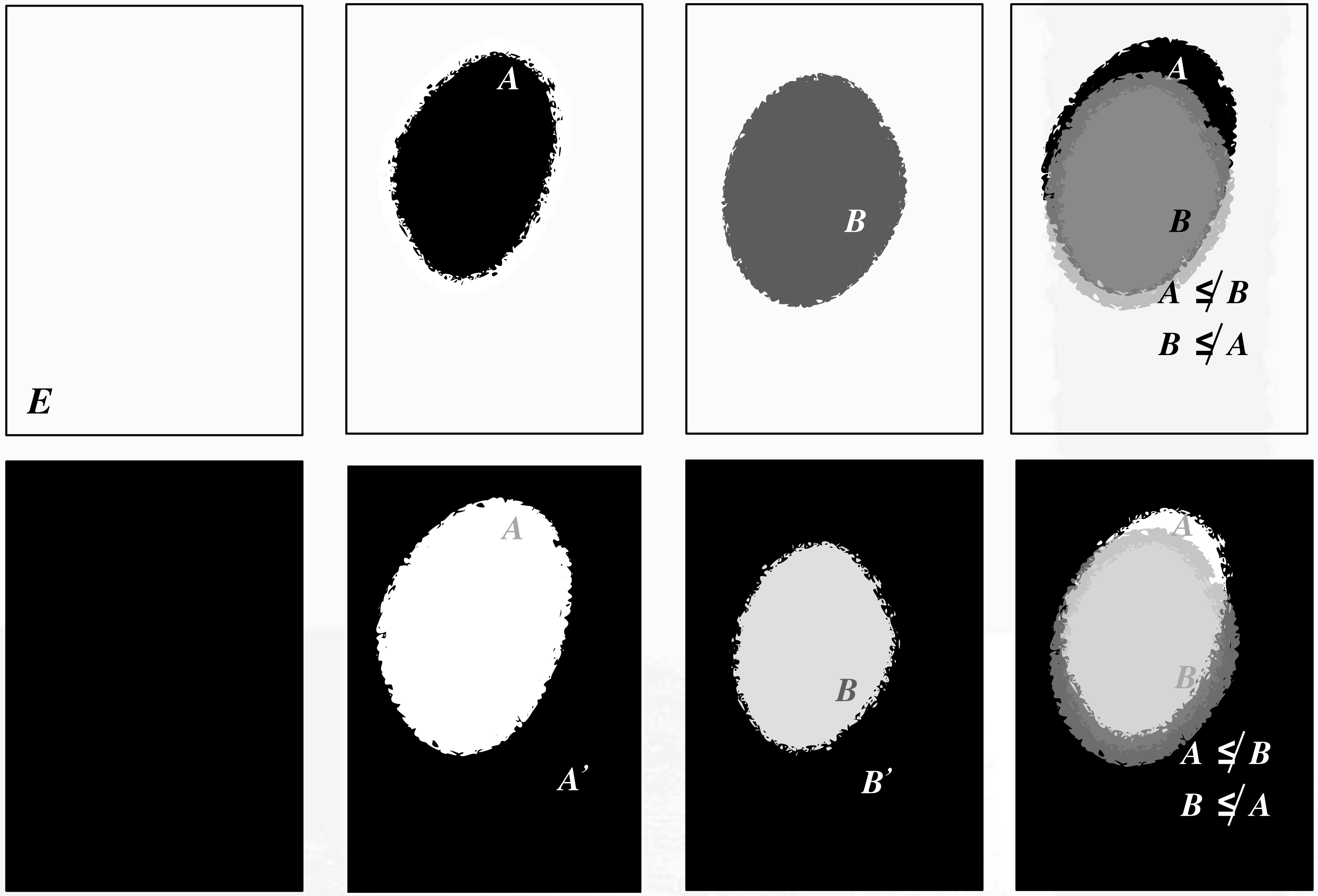
$Z \in [A\cap B^c,\ A \cup B^c]$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$

(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios" (no "crisp sets")

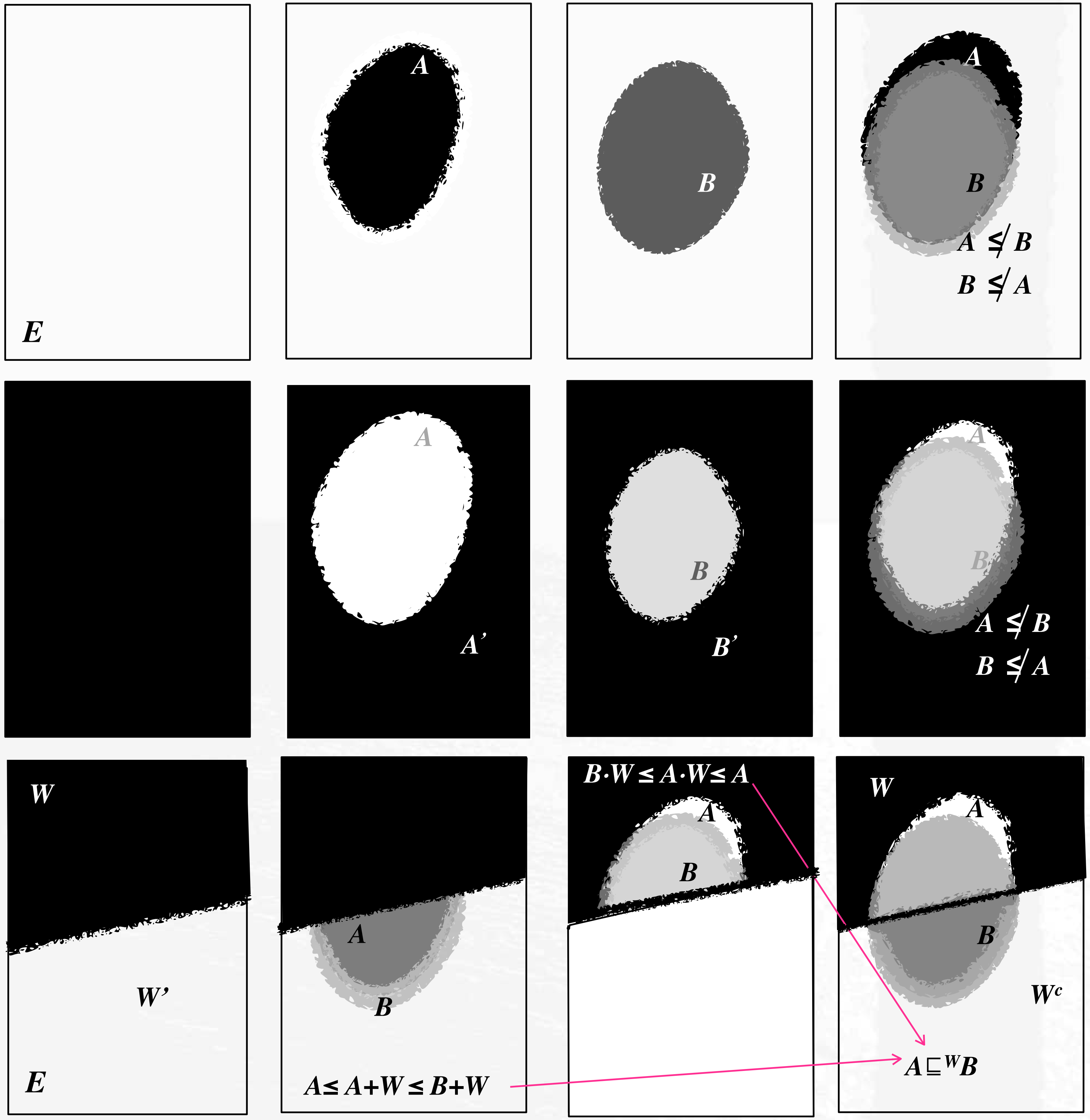


Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y *B* "borrosos propios" (no "crisp sets")

W también "borroso propio"



$$A \sqsubseteq^W B \Leftarrow \cancel{(B\cdot W \leq A\cdot W)\&(A\cdot W \leq B\cdot W)} \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$$

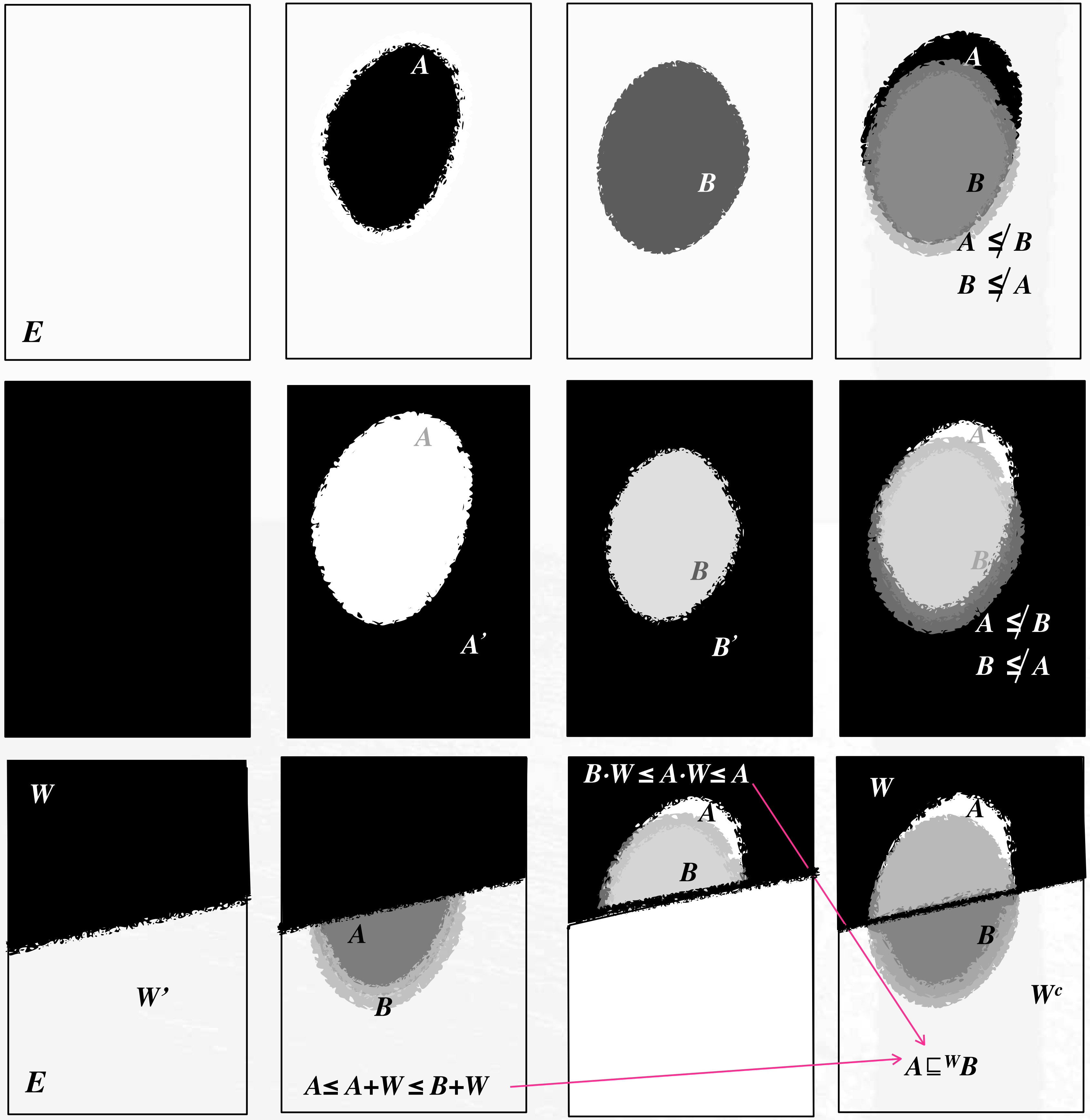
$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios"
(no "crisp sets")

W también "borroso propio"



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$ [redacted] $\Leftrightarrow (B{\cdot}W \leq A \leq B{+}W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

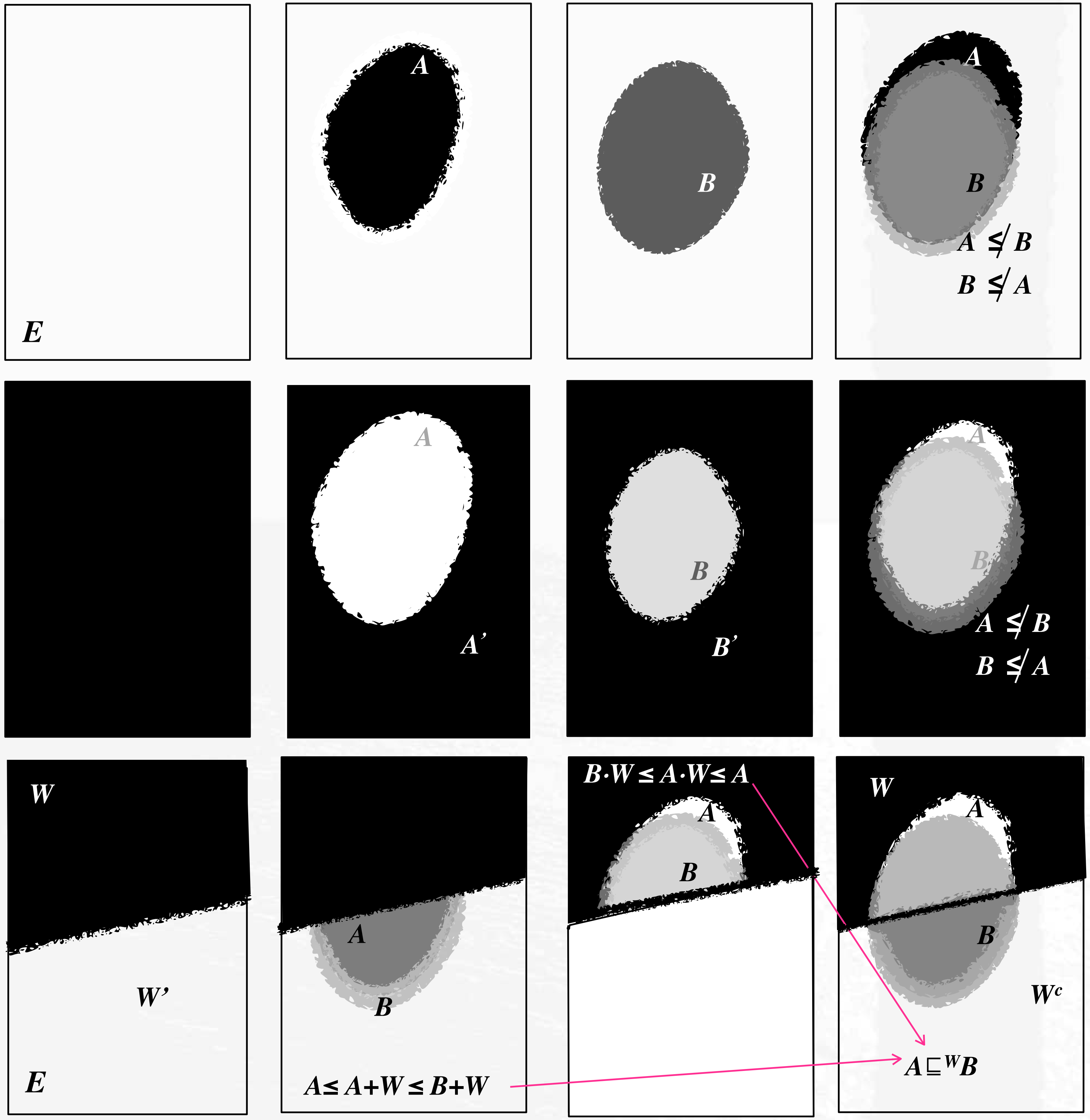
$(W,B) \in L^E \times L^E$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios" (no "crisp sets")

W también "borroso propio"



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow \cancel{(B\cdot W \leq A\cdot W)\&(A\cdot W \leq B\cdot W)} \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$

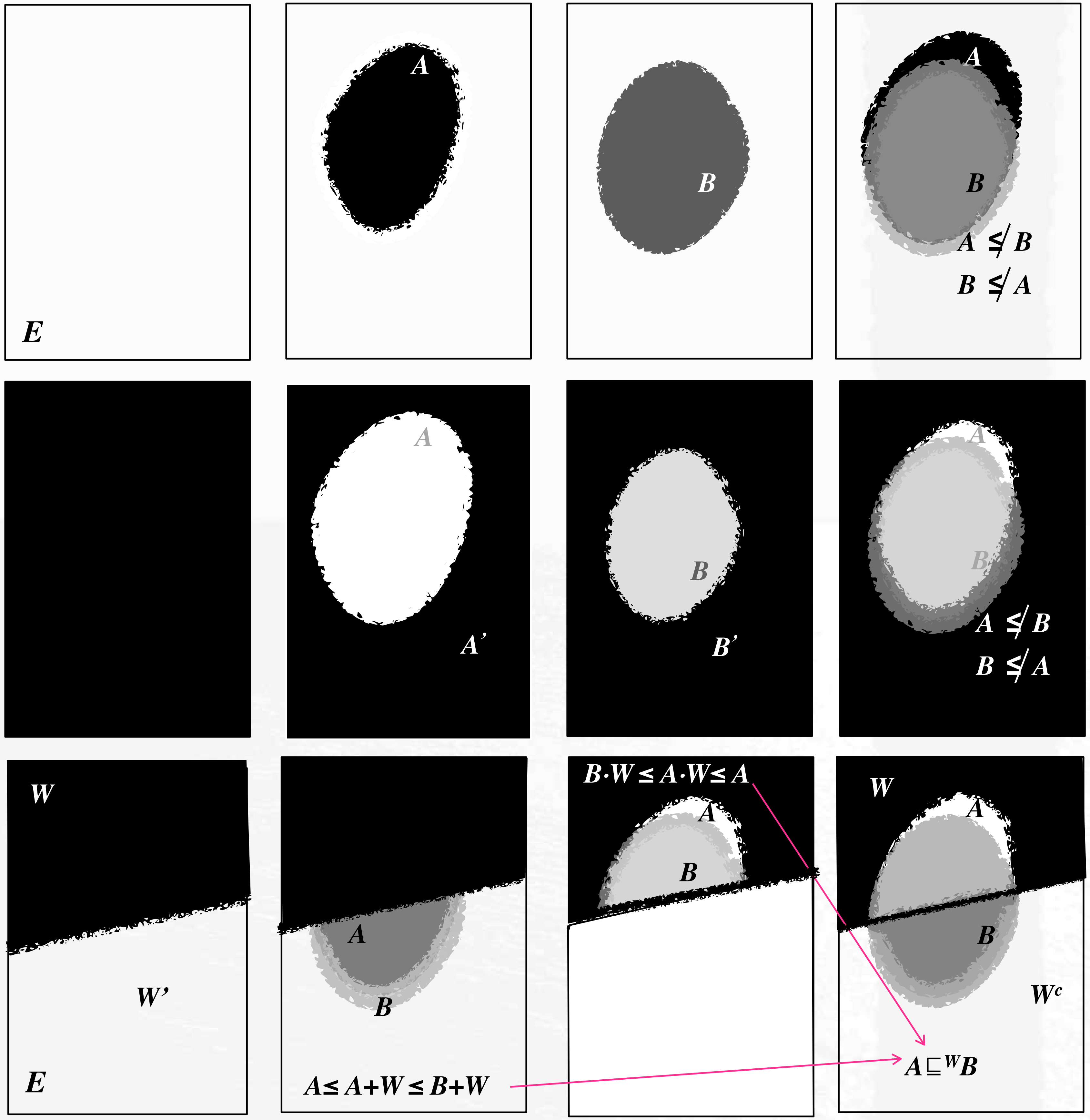
$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios" (no "crisp sets")

W también "borroso propio"



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

Datos

$(A,W) \in L^E \times L^E$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

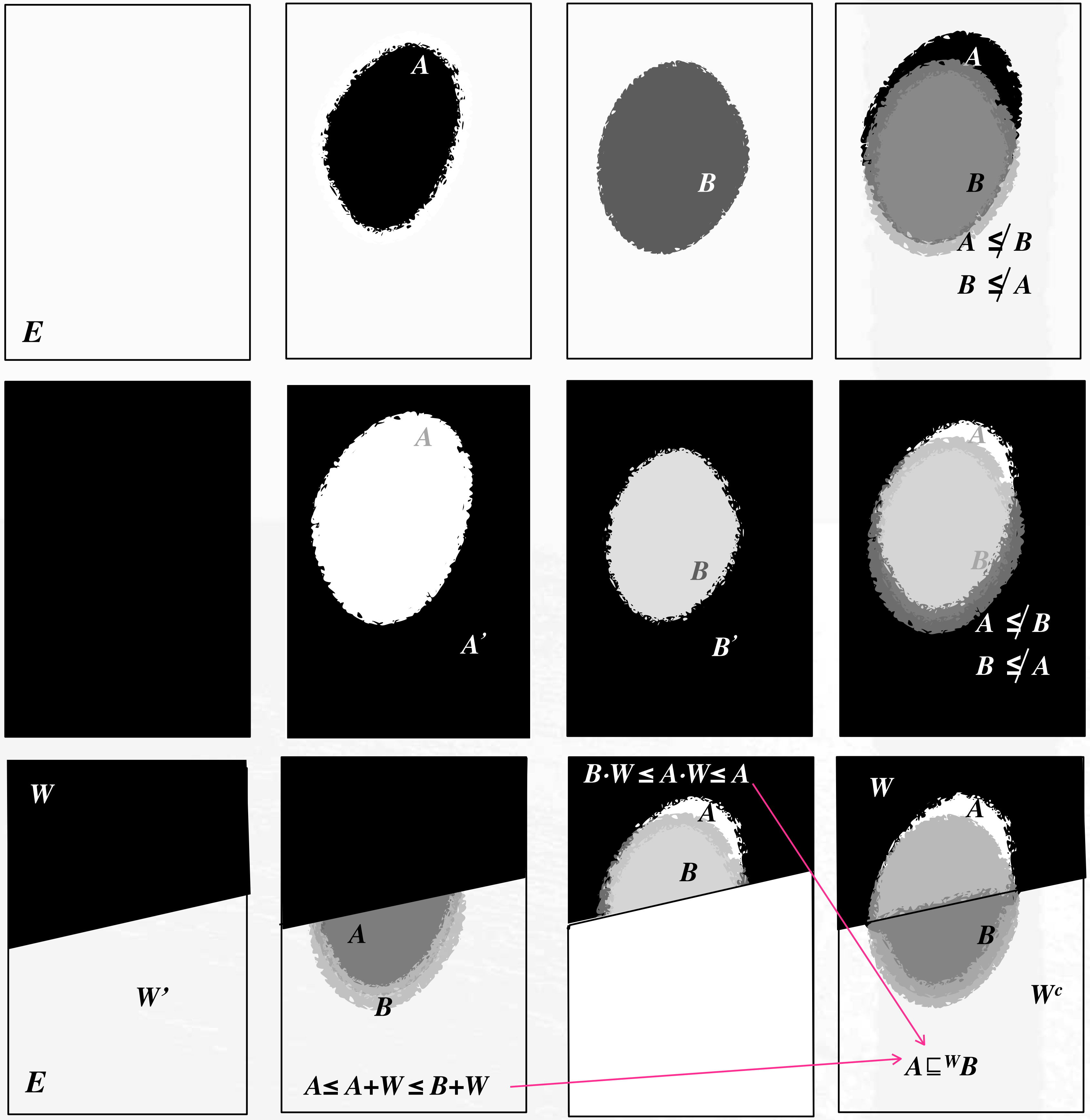
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow \cancel{(B\cdot W \leq A\cdot W)\&(A\cdot W \leq B\cdot W)} \Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios" (no "crisp sets")



"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

Datos

$(A,W) \in L^E \times L^E$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

¡ Equivalente a $(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$ sólo si W es "crisp set!

Soluciones

$Y \in [A\cdot W^c,\ A+W^c]$

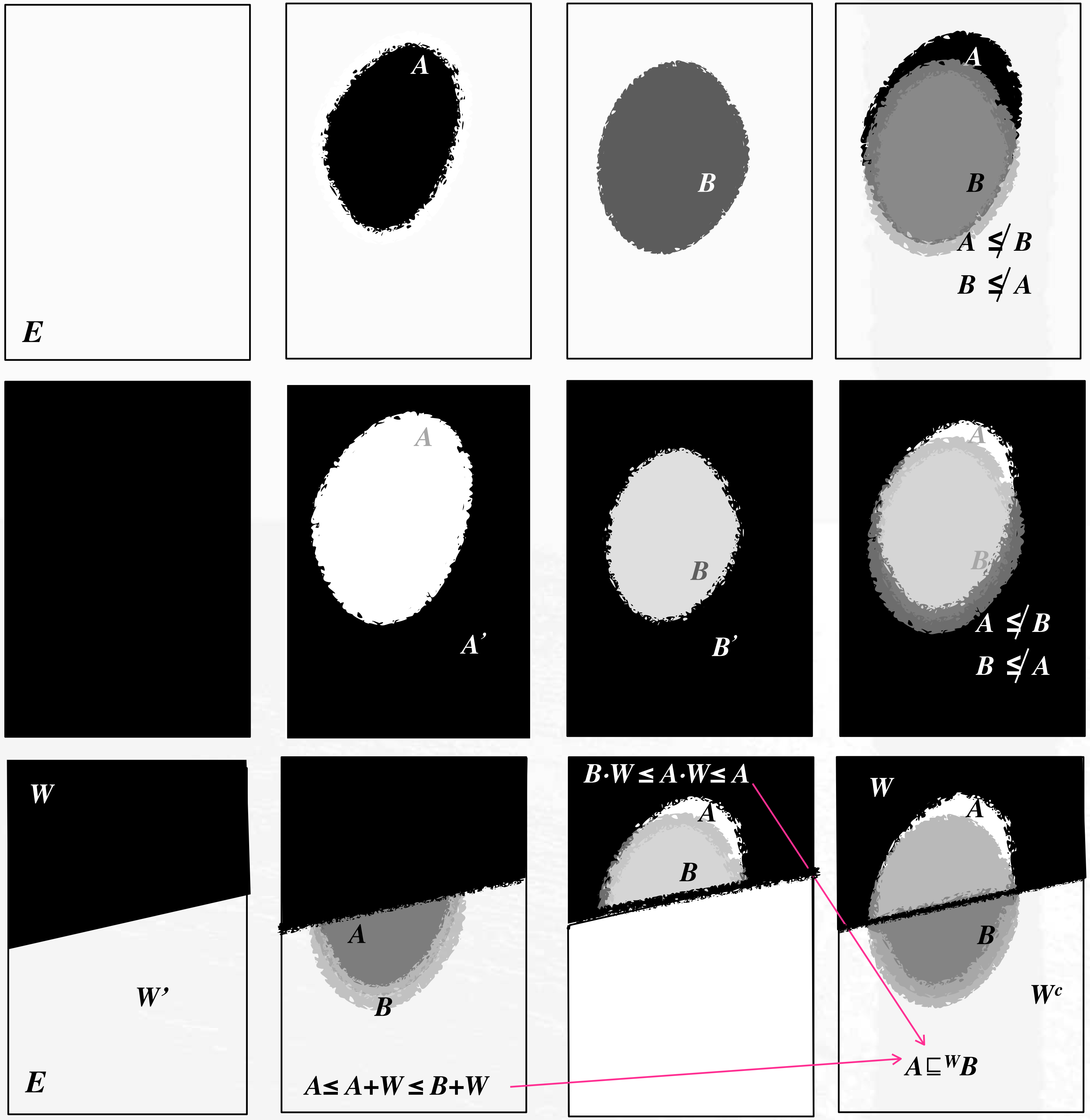
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$ ~~$(B\cdot W \leq A\cdot W)\&(A\cdot W \leq B\cdot W)$~~ $\Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios"
(no "crisp sets")



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow \cancel{(B\cdot W \le A\cdot W)\&(A\cdot W \le B\cdot W)} \Leftrightarrow (B\cdot W \le A \le B+W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

Datos

$(A,W) \in L^E \times L^E$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

¡ Equivalente a $(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$ sólo si W es "crisp set!

Soluciones

$Y \in [A\cdot W^c,\ A+W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

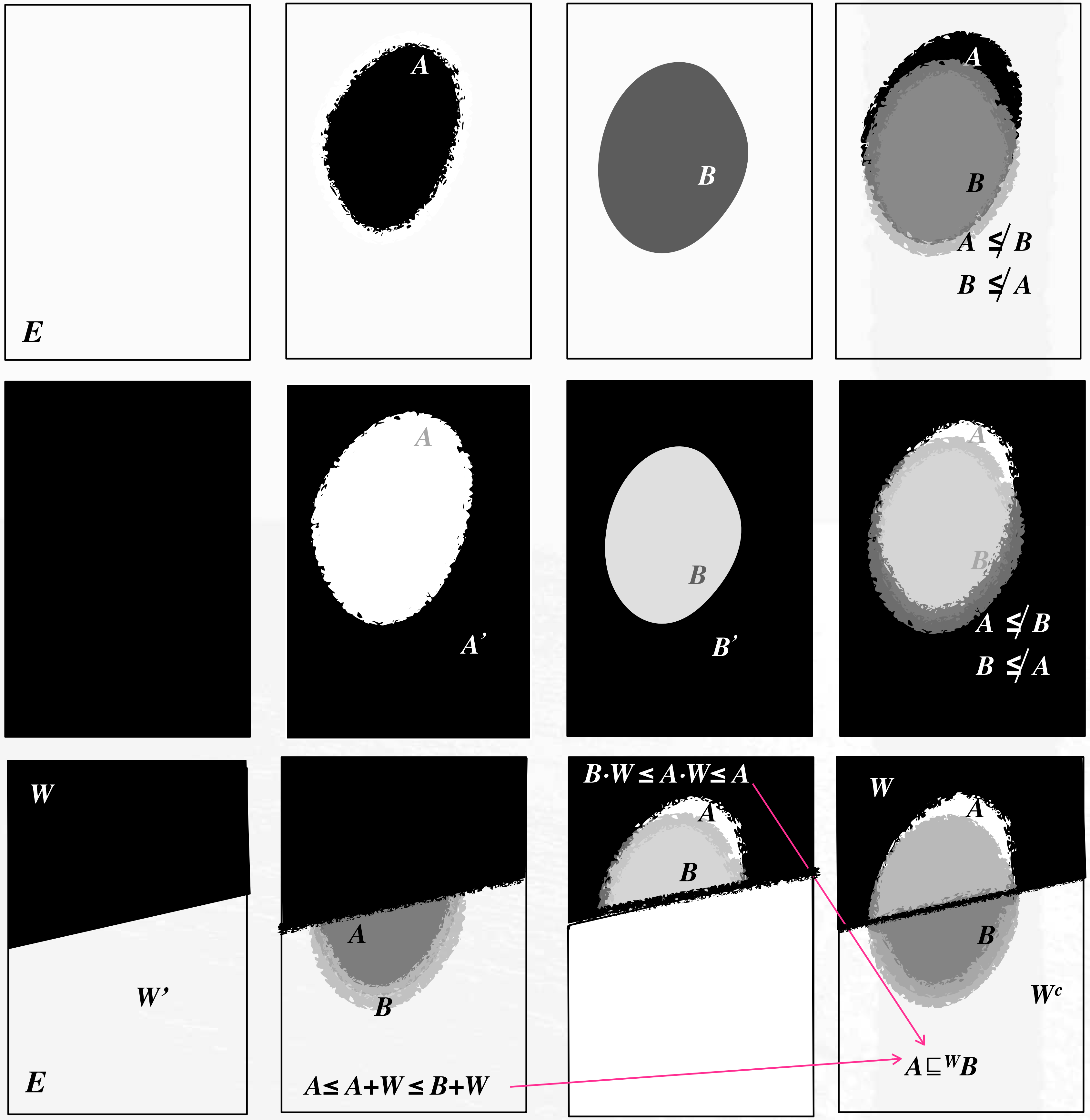
Datos

$(A,B) \in L^E \times L^E$

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios" (no "crisp sets")



$A \sqsubseteq^W B \Leftarrow$ [redacted] $\Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

Datos

$(A,W) \in L^E \times L^E$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

¡ Equivalente a $(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$ sólo si W es "crisp set!

Soluciones

$Y \in [A\cdot W^c,\ A+W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

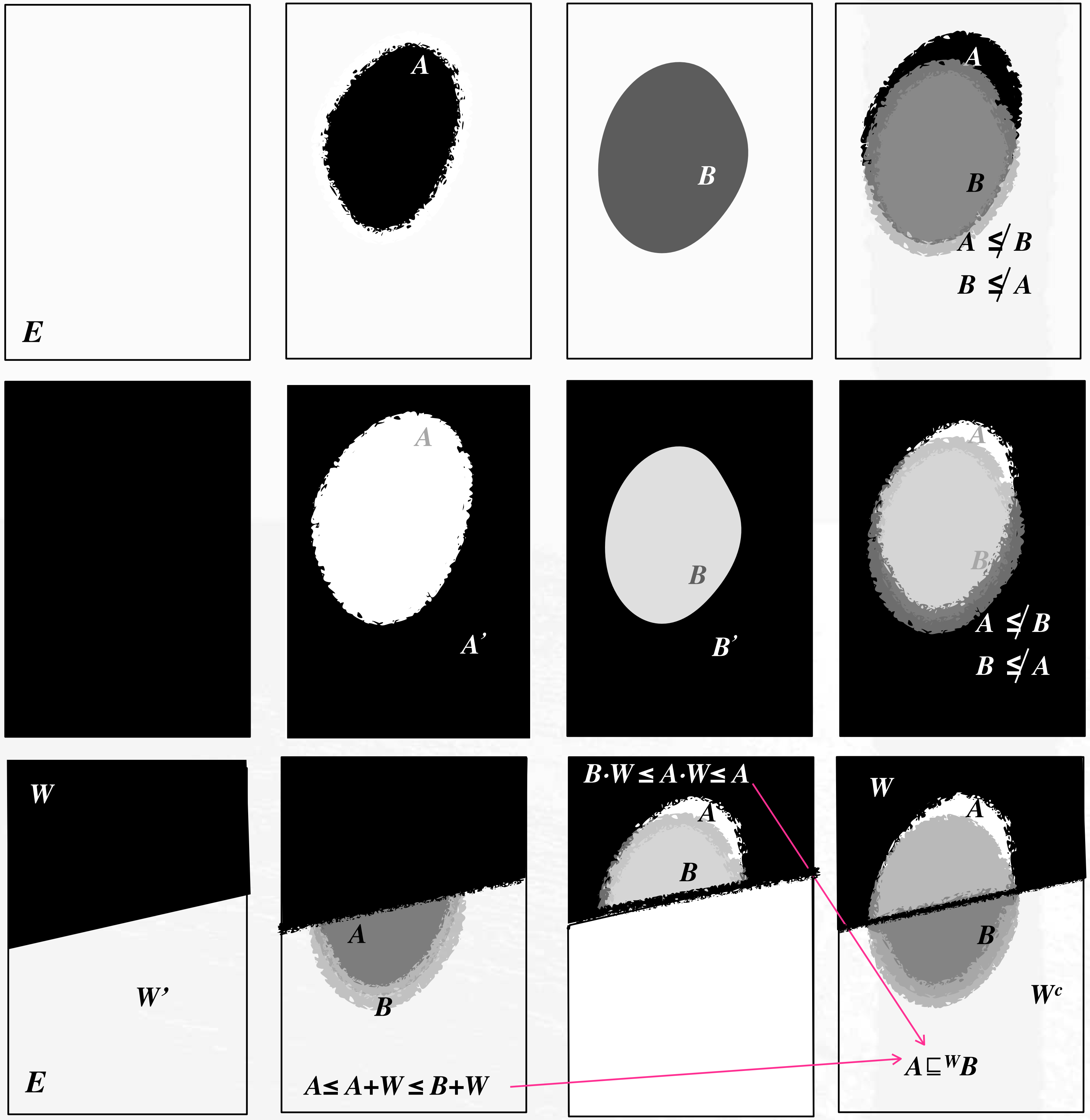
$(A,B) \in L^E \times L^E$

Como es equivalente a $(A \sqsubseteq^B Z)$ si B es crisp set,

Órdenes $\sqsubseteq^W$ entre subconjuntos borrosos

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ')$
(Imágenes como subconjunto L-borrosos)

A y B "borrosos propios"
(no "crisp sets")



$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$ ~~$(B\cdot W \le A\cdot W)\&(A\cdot W \le B+W)$~~ $\Leftrightarrow (B\cdot W \leq A \leq B+W)$

$\sqsubseteq^W$ es un "orden de actividad"

"$\sqsubseteq^W$-inecuaciones"

Inecuación

$X \sqsubseteq^W B$

Datos

$(W,B) \in L^E \times L^E$

$X \in P(E)$ incógnita

Soluciones

$X \in [B\cdot W,\ B+W]$

Datos

$(A,W) \in L^E \times L^E$

Inecuación

$A \sqsubseteq^W Y$

$Y \in P(E)$ incógnita

¡ Equivalente a $(Y \sqsubseteq^{W^c} A)$ sólo si W es "crisp set!

Soluciones

$Y \in [A\cdot W^c,\ A+W^c]$

Inecuación

$A \sqsubseteq^Z B$

$Z \in P(E)$ incógnita

Datos

$(A,B) \in L^E \times L^E$

Como es equivalente a $(A \sqsubseteq^B Z)$ si B es crisp set,

Soluciones

$Z \in [A\cdot B^c,\ A+B^c]$

Cuestión abierta: ¿Soluciones de $A \sqsubseteq^Z B$ para A,B,Z borrosos propios (no nítidos)?

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

280

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden, que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la 280 Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

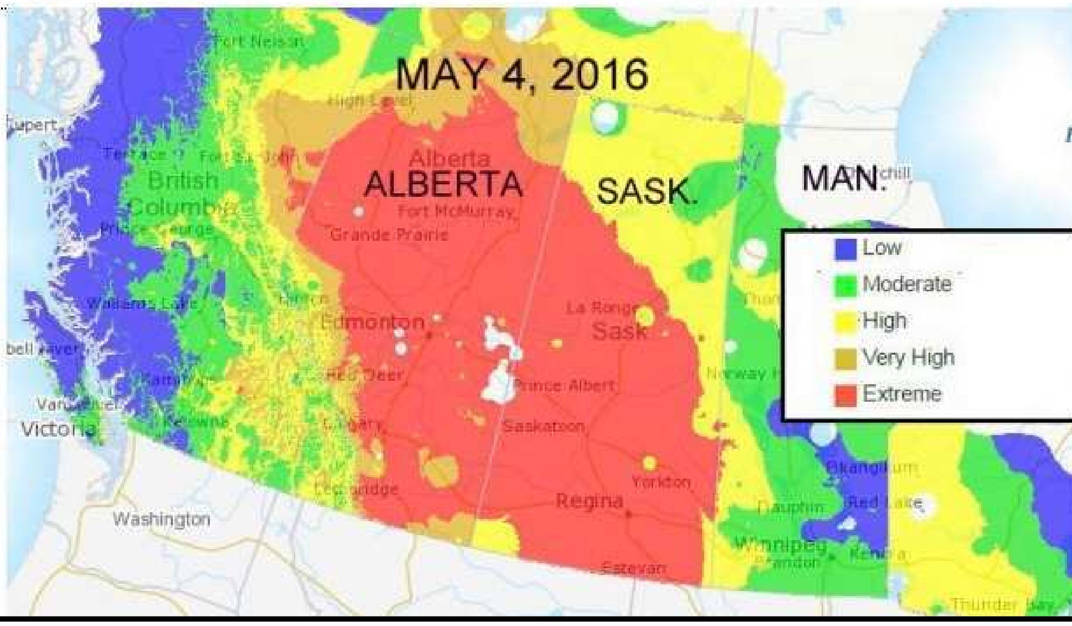
Conclusiones y algunas cuestiones

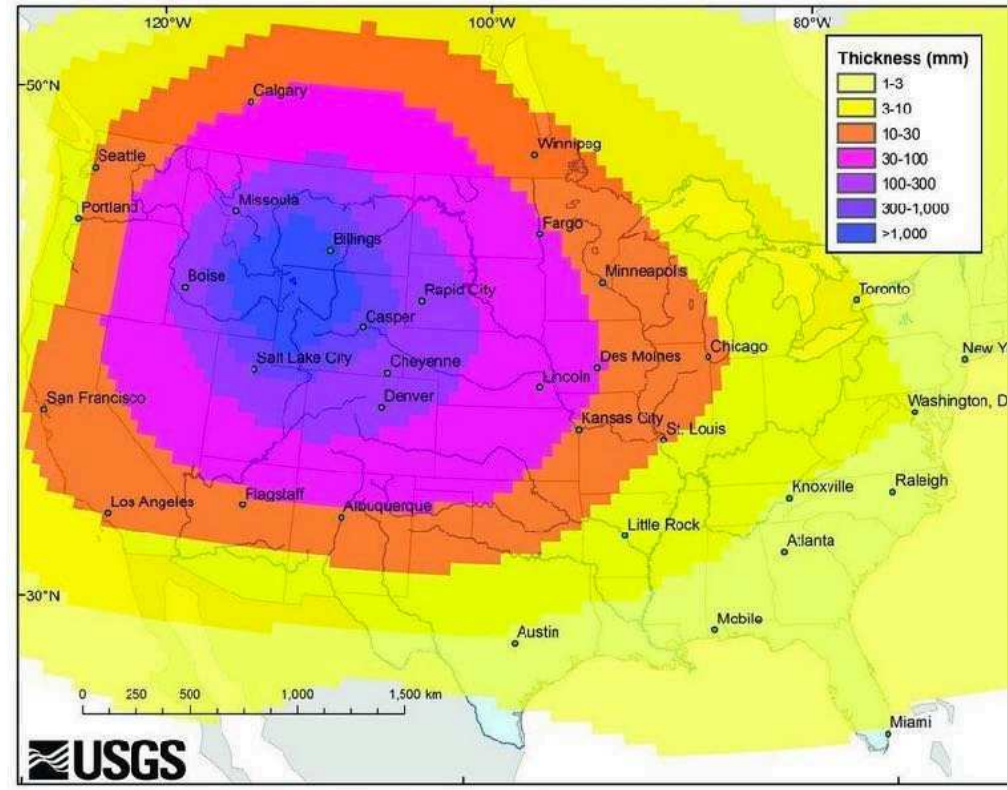
4. Aplicación de los órdenes de actividad en el análisis de mapas de riesgos y en el de mapas con isolíneas o curvas de nivel.

Giant red zone: Fire danger extreme across Saskatchewan, Alberta

Danger map shows 'extreme' risk of fires in both provinces

By Joelle Seal, CBC News Posted: May 04, 2016 5:03 PM CT | Last Updated: May 04, 2016 6:08 PM CT





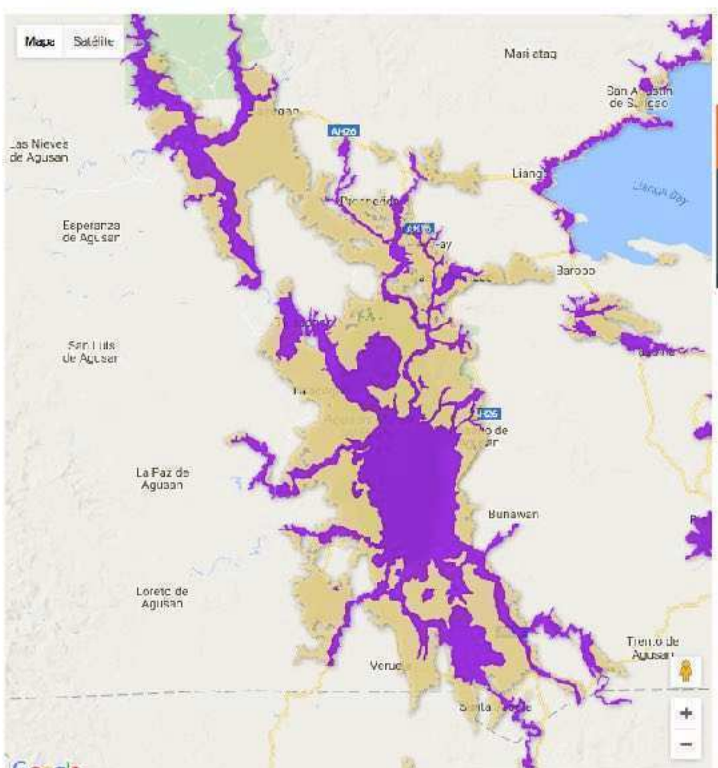
A simulation of the possible distribution of ash from a Yellowstone supereruption United States Geological Survey

The map below shows areas in the Philippines that are susceptible to floods and flashfloods. It is based on shapefile versions of hazard maps produced by the MGB.

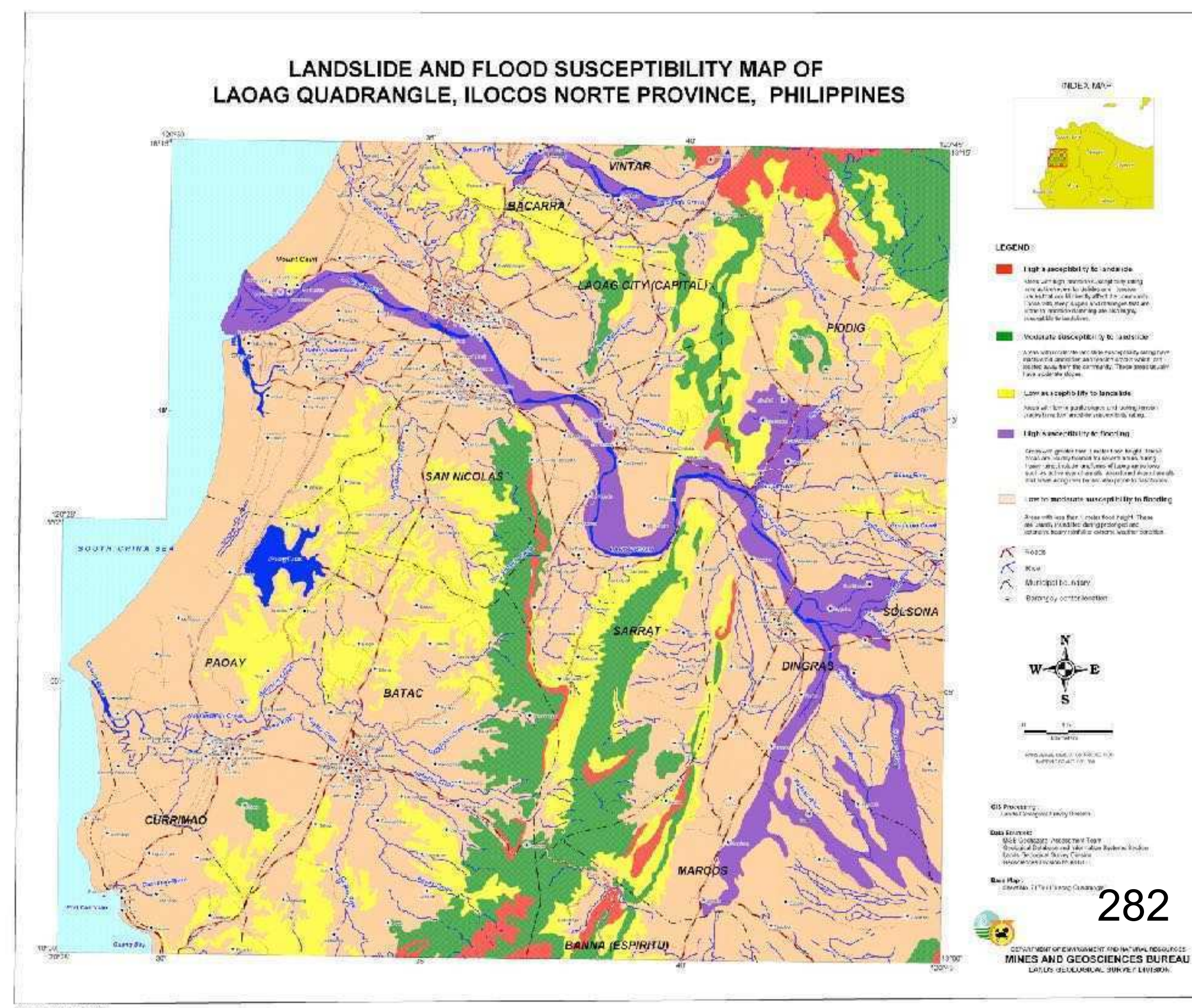
According to MGB Lands Geological Survey Division OIC Lilian Rollan, the different colors show different levels of danger. People living in different colored areas also need different levels of preparation.

Rollan explained that:

- Violet areas have high susceptibility to floods. They are usually near bodies of water or prone to flashfloods. According to Rollan, residents in these areas must always be ready to evacuate.
- Light yellow areas have moderate to low susceptibility to floods. These areas, however, are still vulnerable to "dangerous debris flow" during typhoons.



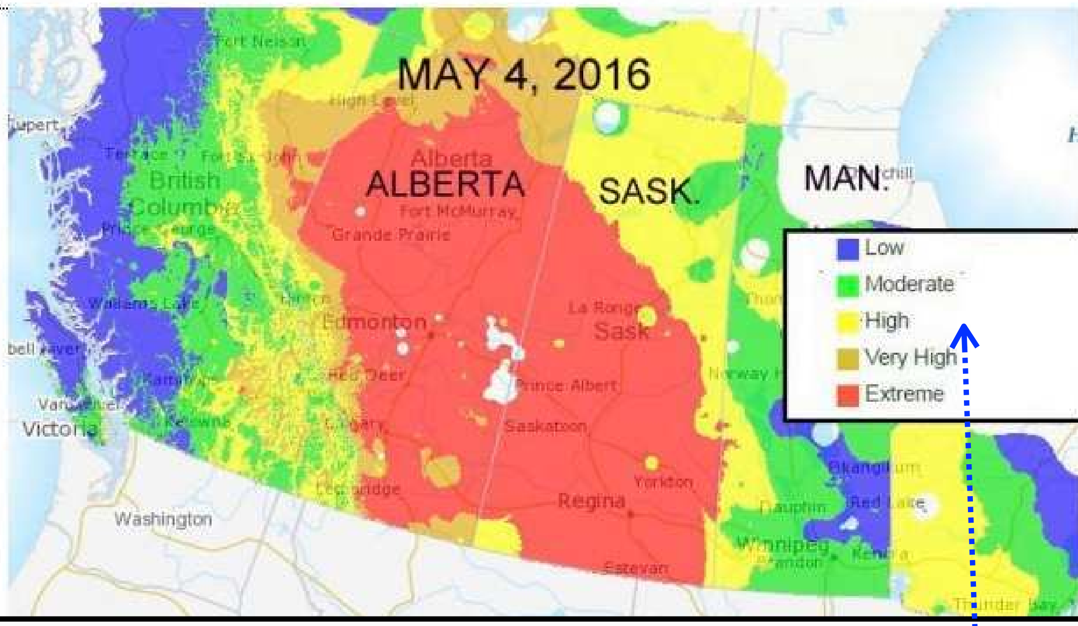
The graphic below shows what each color on the MGB maps mean:

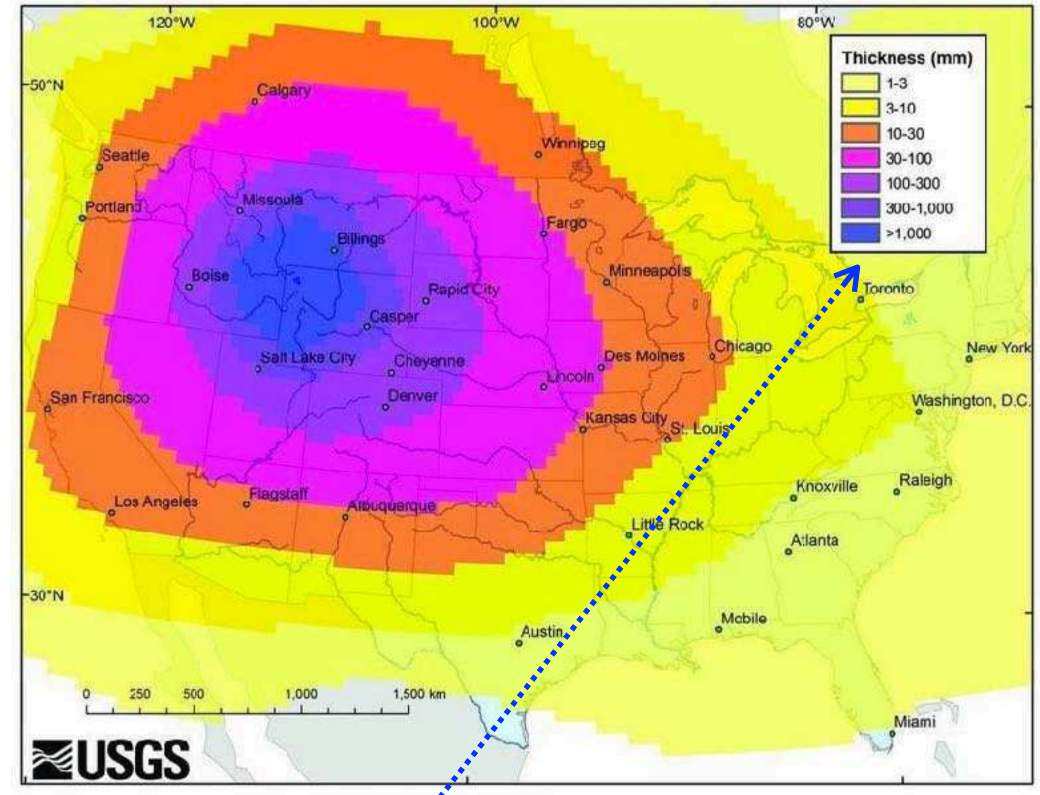


Giant red zone: Fire danger extreme across Saskatchewan, Alberta

Danger map shows 'extreme' risk of fires in both provinces

By Joelle Seal, CBC News Posted: May 04, 2016 5:03 PM CT | Last Updated: May 04, 2016 6:08 PM CT





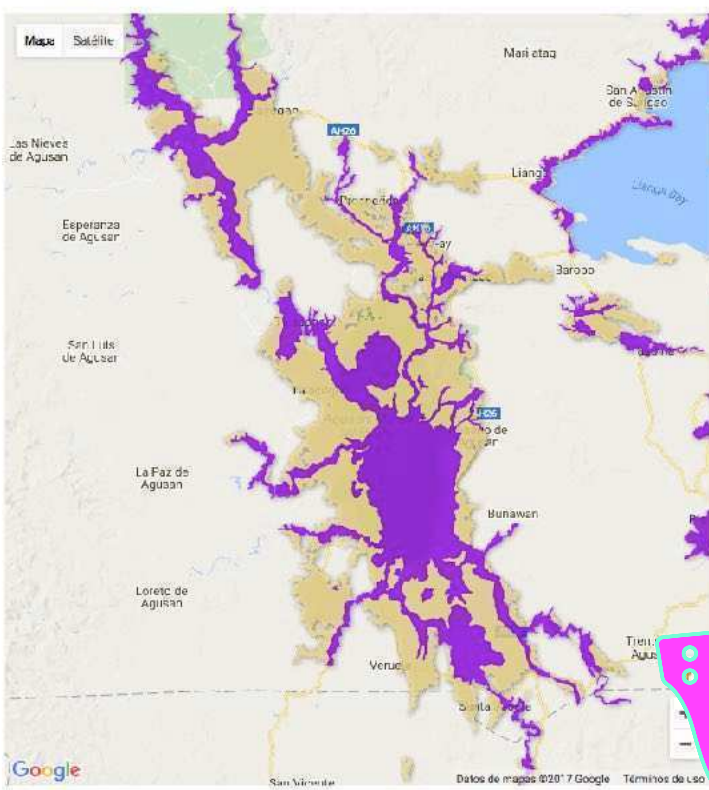
A simulation of the possible distribution of ash from a Yellowstone supereruption United States Geological Survey

The map below shows areas in the Philippines that are susceptible to floods and flashfloods. It is based on shapefile versions of hazard maps produced by the MGB.

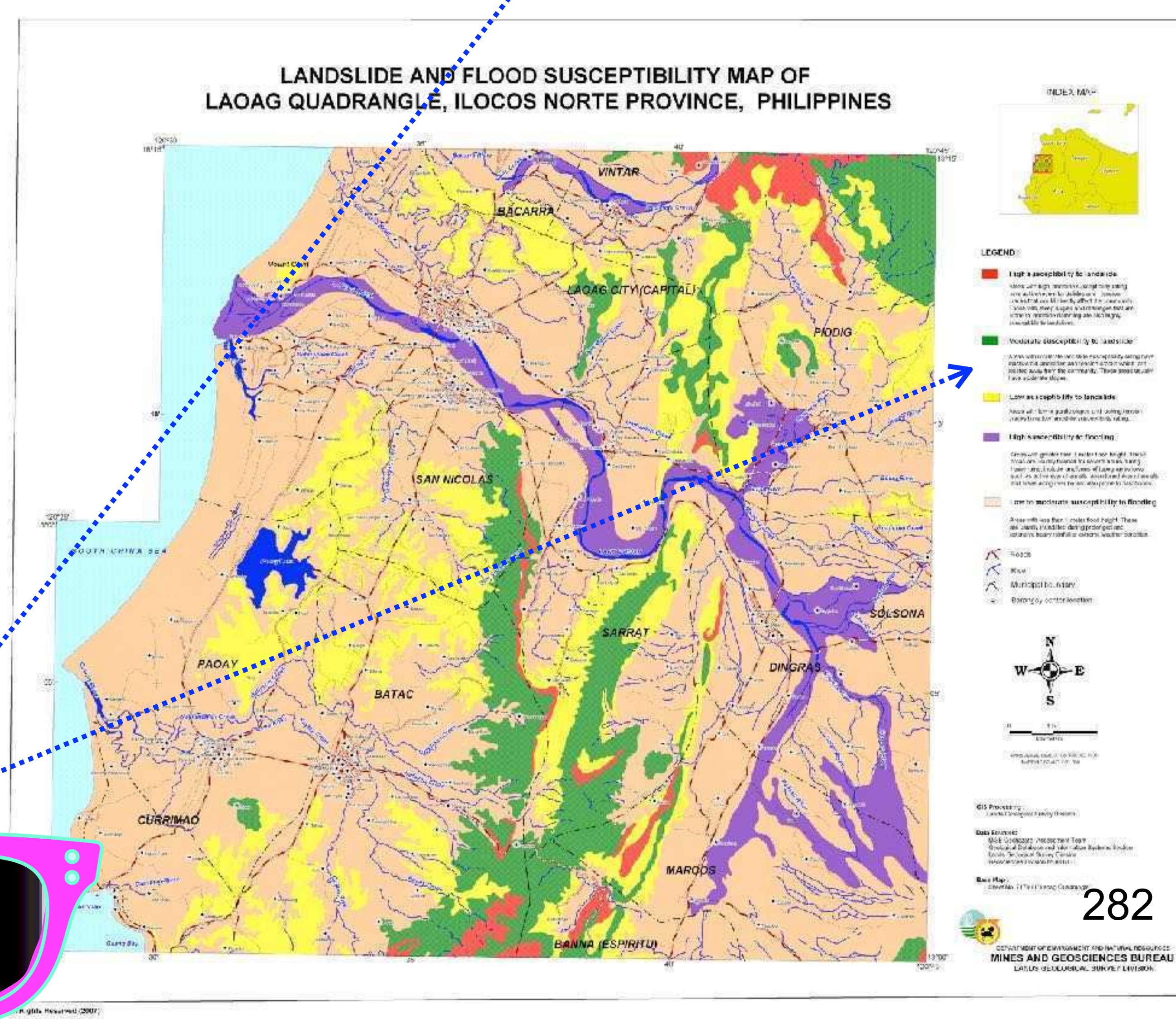
According to MGB Lands Geological Survey Division OIC Lilian Rollan, the different colors show different levels of danger. People living in different colored areas also need different levels of preparation.

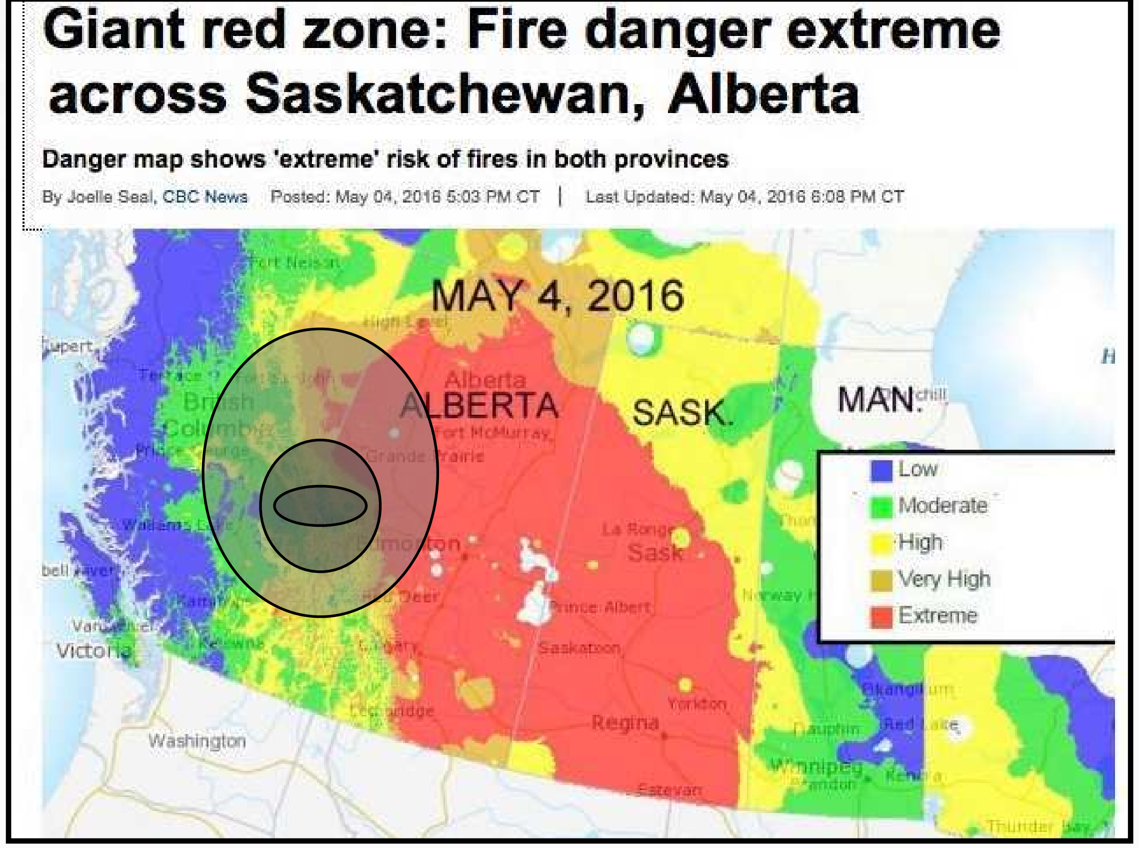
Rollan explained that:

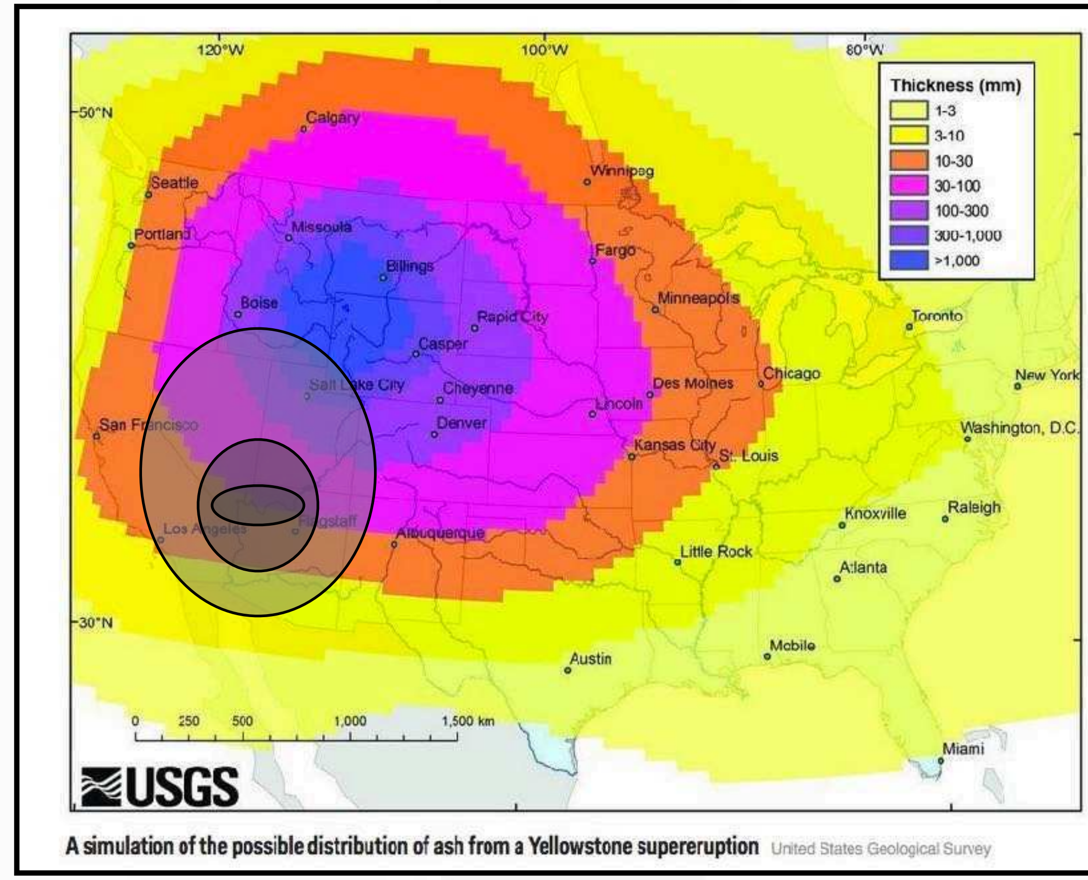
- Violet areas have high susceptibility to floods. They are usually near bodies of water or prone to flashfloods. According to Rollan, residents in these areas must always be ready to evacuate.
- Light yellow areas have moderate to low susceptibility to floods. These areas, however, are still vulnerable to "dangerous debris flow" during typhoons.

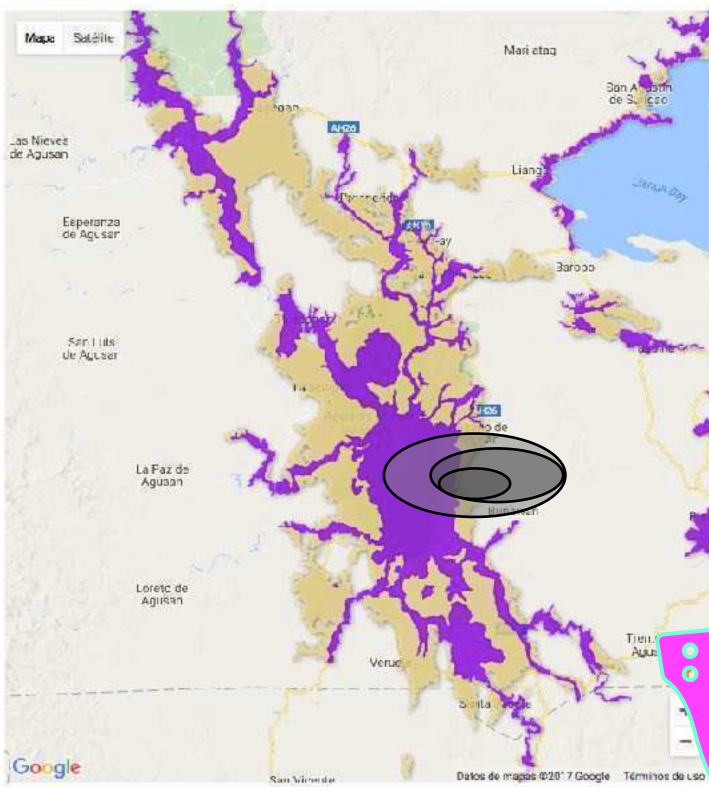


The graphic below shows what each color on the MGB maps mean:







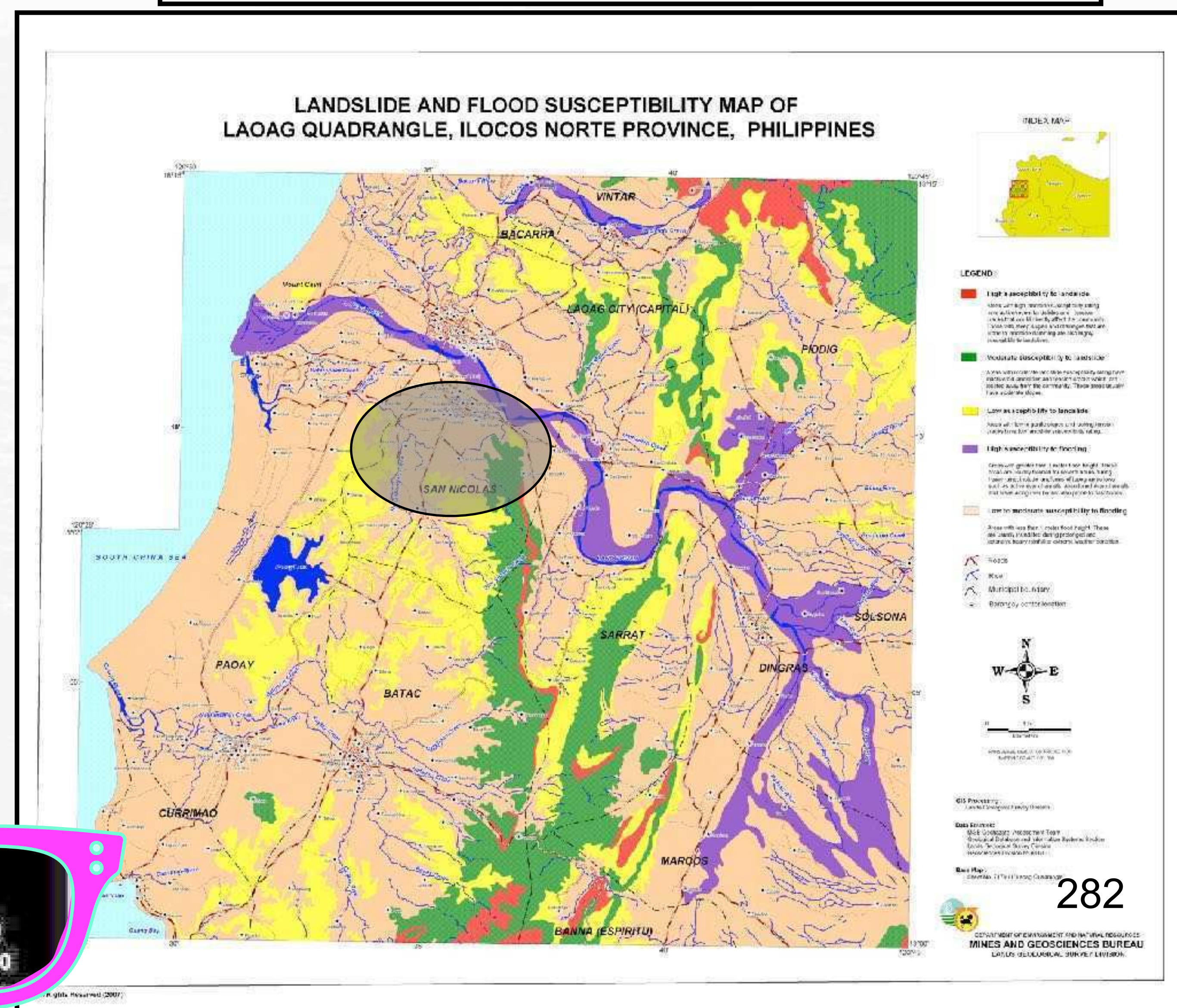

The map below shows areas in the Philippines that are susceptible to floods and flashfloods. It is based on shapefile versions of hazard maps produced by the MGB.

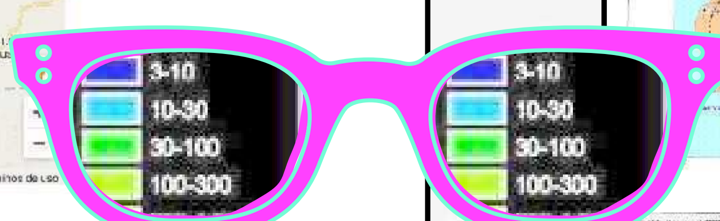
According to MGB Lands Geological Survey Division OIC Lilian Rollan, the different colors show different levels of danger. People living in different colored areas also need different levels of preparation.

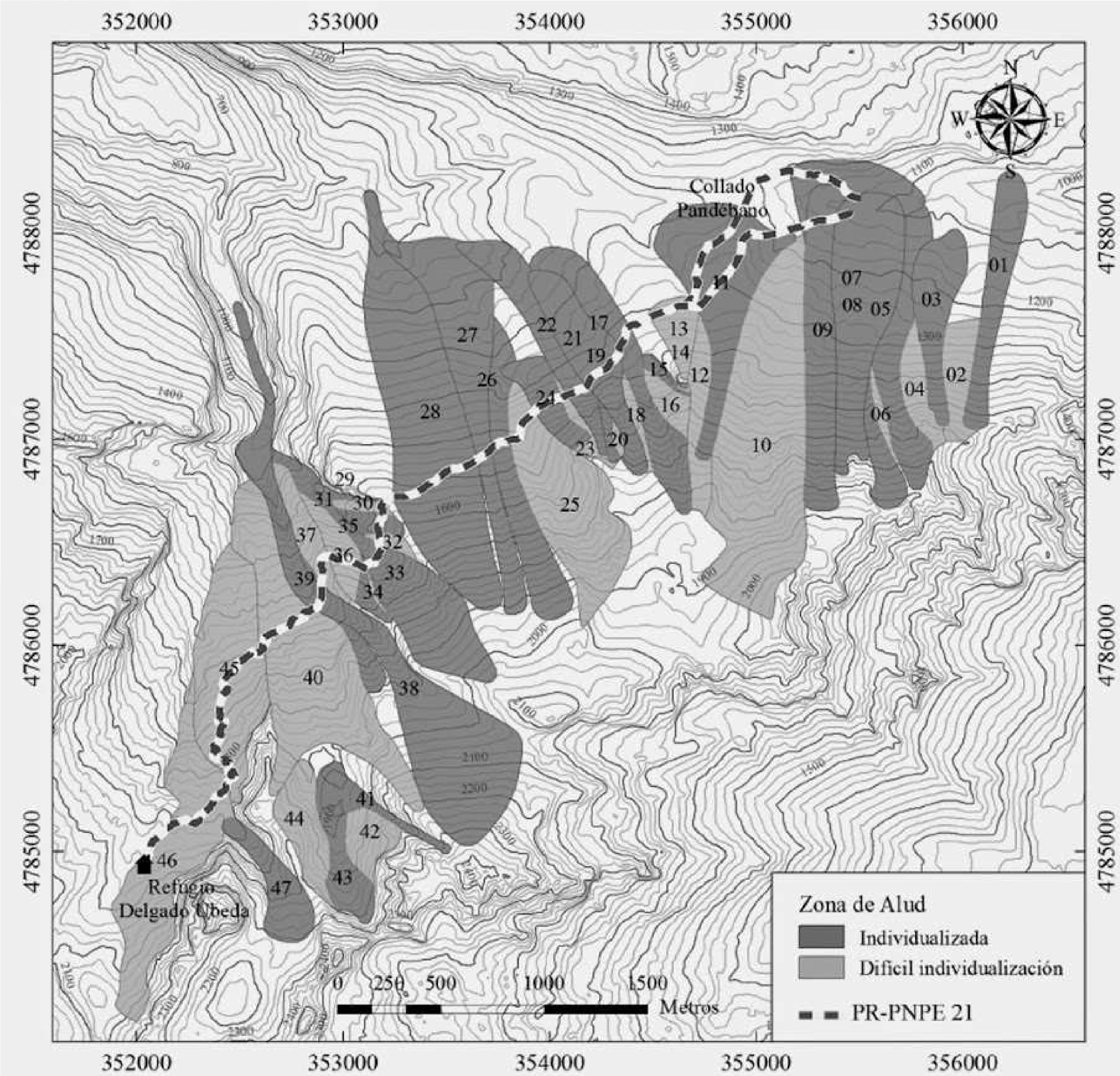
Rollan explained that:

- Violet areas have high susceptibility to floods. They are usually near bodies of water or prone to flashfloods. According to Rollan, residents in these areas must always be ready to evacuate.
- Light yellow areas have moderate to low susceptibility to floods. These areas, however, are still vulnerable to "dangerous debris flow" during typhoons.

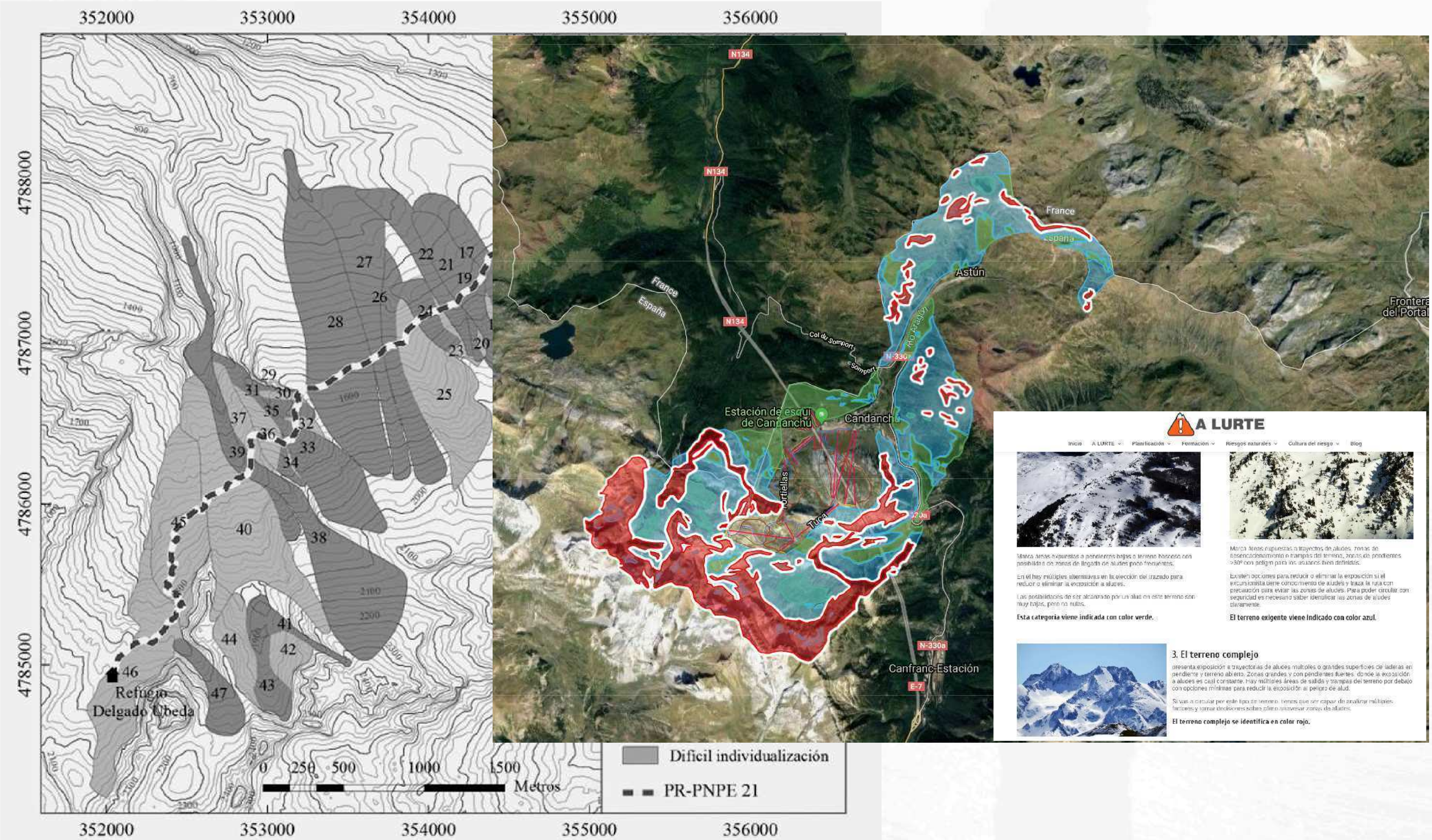
The graphic below shows what each color on the MGB maps mean:





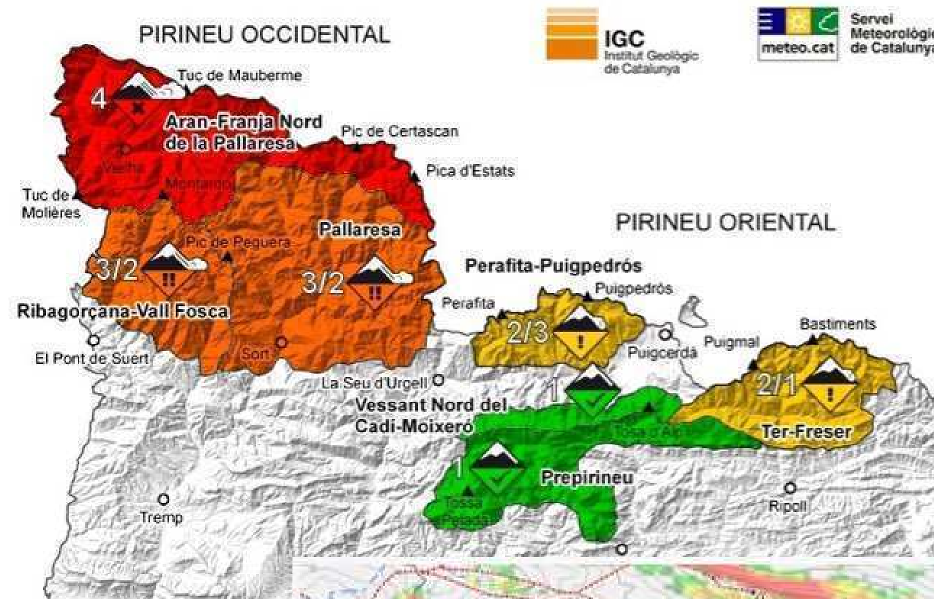


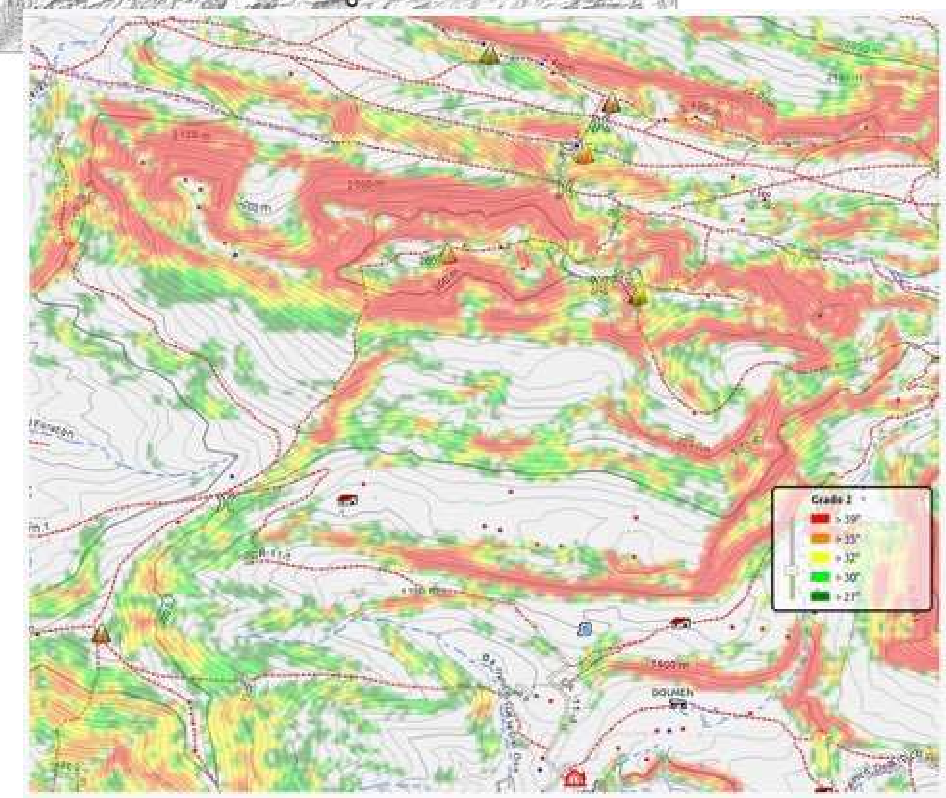
Búsqueda en la Web: plano, zona peligrosa, aludes,...



Búsqueda en la Web: plano, zona peligrosa, aludes,...

INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*





Búsqueda en la Web: plano, zona peligrosa, aludes,...

Zonas más peligrosas de Dublín – Dangerous areas

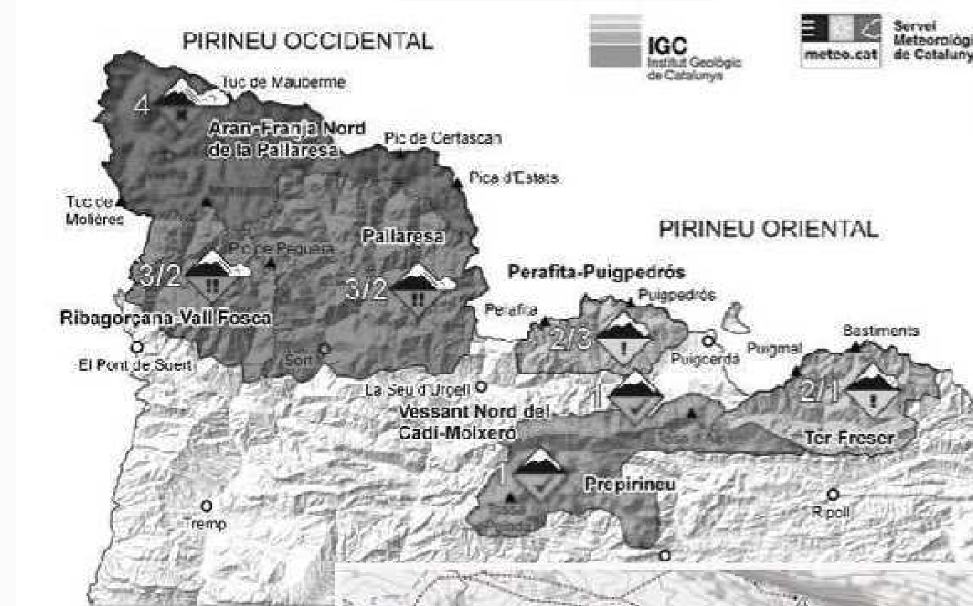
Mapa de los barrios más peligrosos de Londres

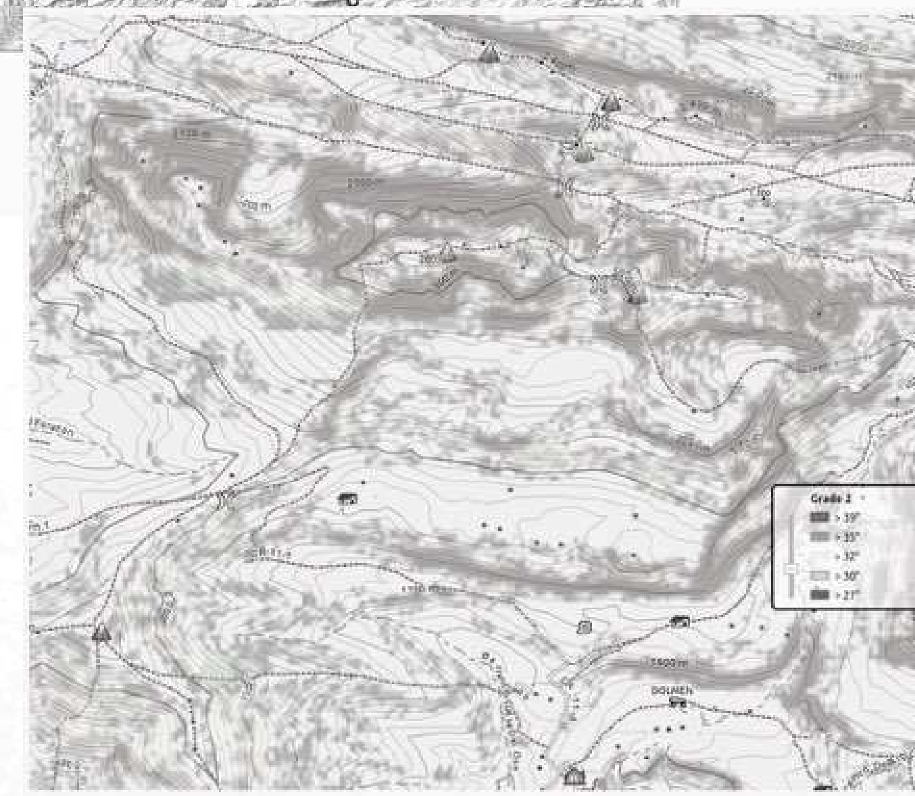
En el mapa que se muestra aquí abajo, se pueden ver marcados con una X roja los barrios más peligrosos de Londres, en los cuales el turista deberá ir con especial precaución o, sin ir más lejos, evitarlos. Estos barrios son: Tottenham Hale (norte), Seven Sisters (norte), Finsbury Park (norte), Hackney (noreste), Limehouse (este), Canning Town (este), Elephand and Castle (sur), Peckham (sur), Brixton (sur), Stockwell (sur) y Harlesden (oeste), entre otros.

Ver artículo original : « ¿Es Londres peligroso para turistas?

1 de 12 Foto Siguiente

Mexico

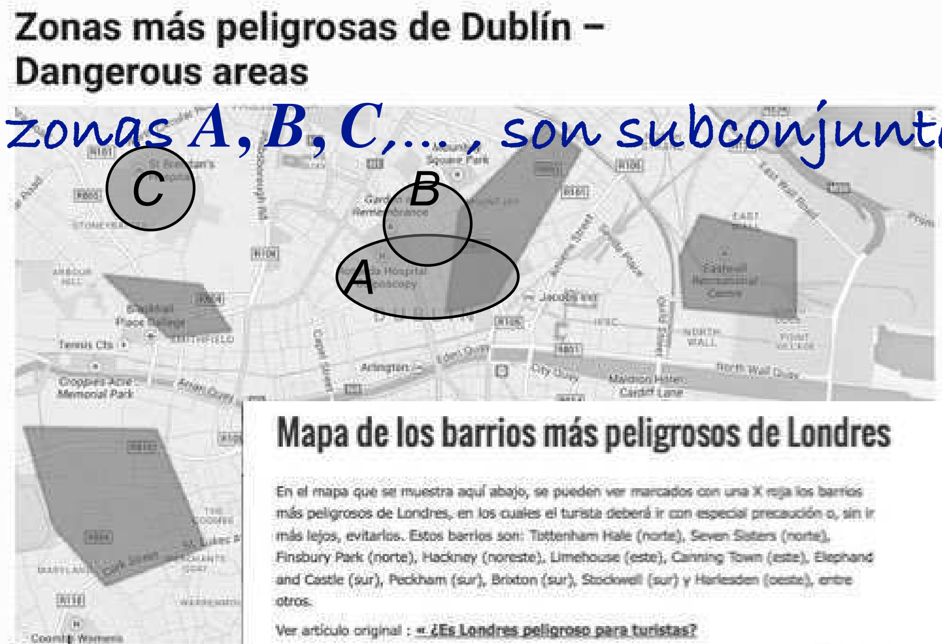


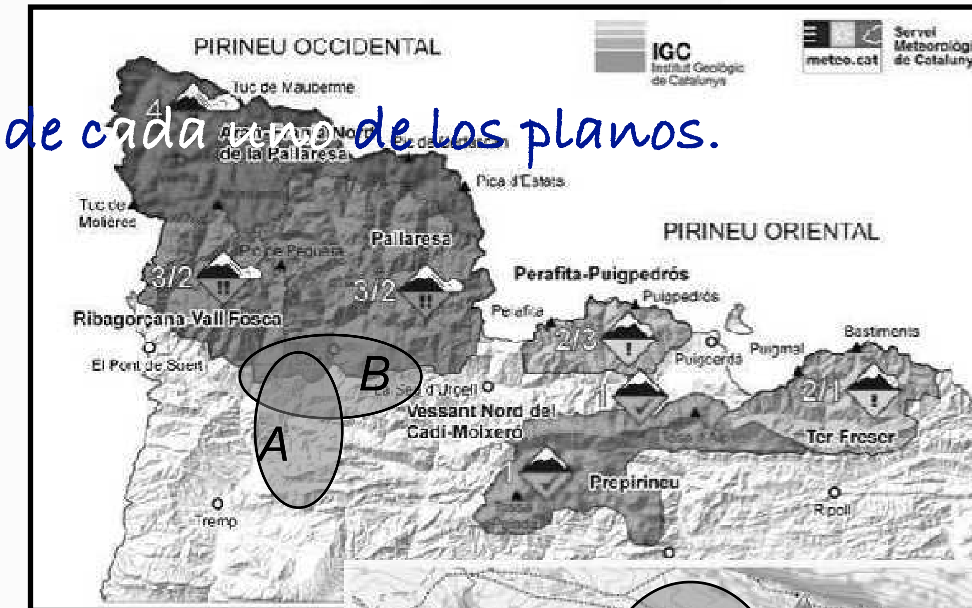


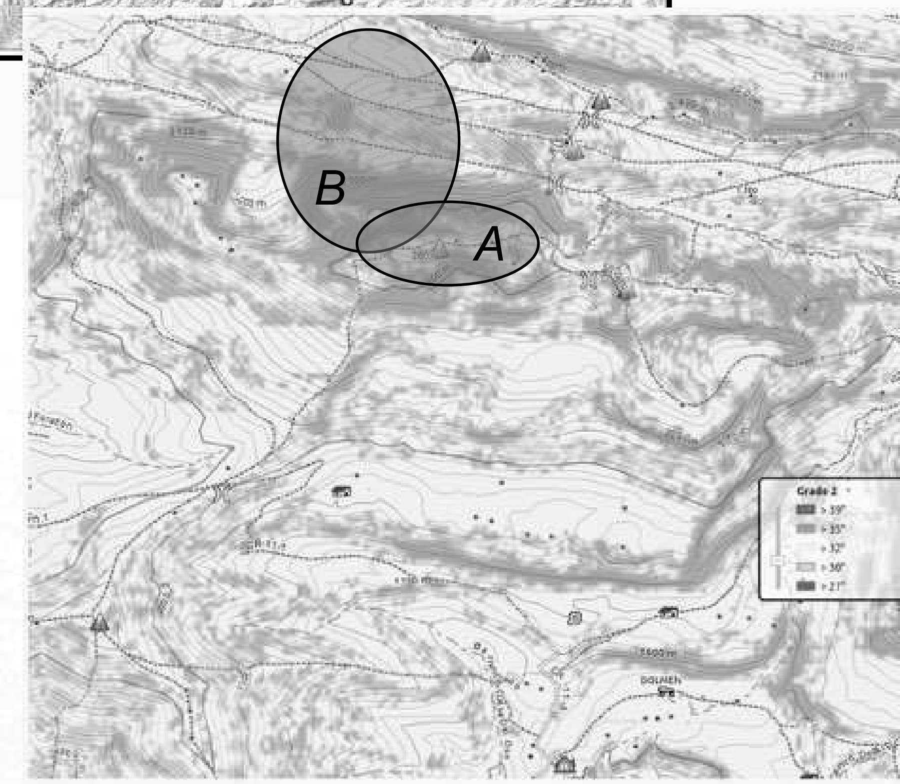
Búsqueda en la Web: plano, zona peligrosa, aludes,…

INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*

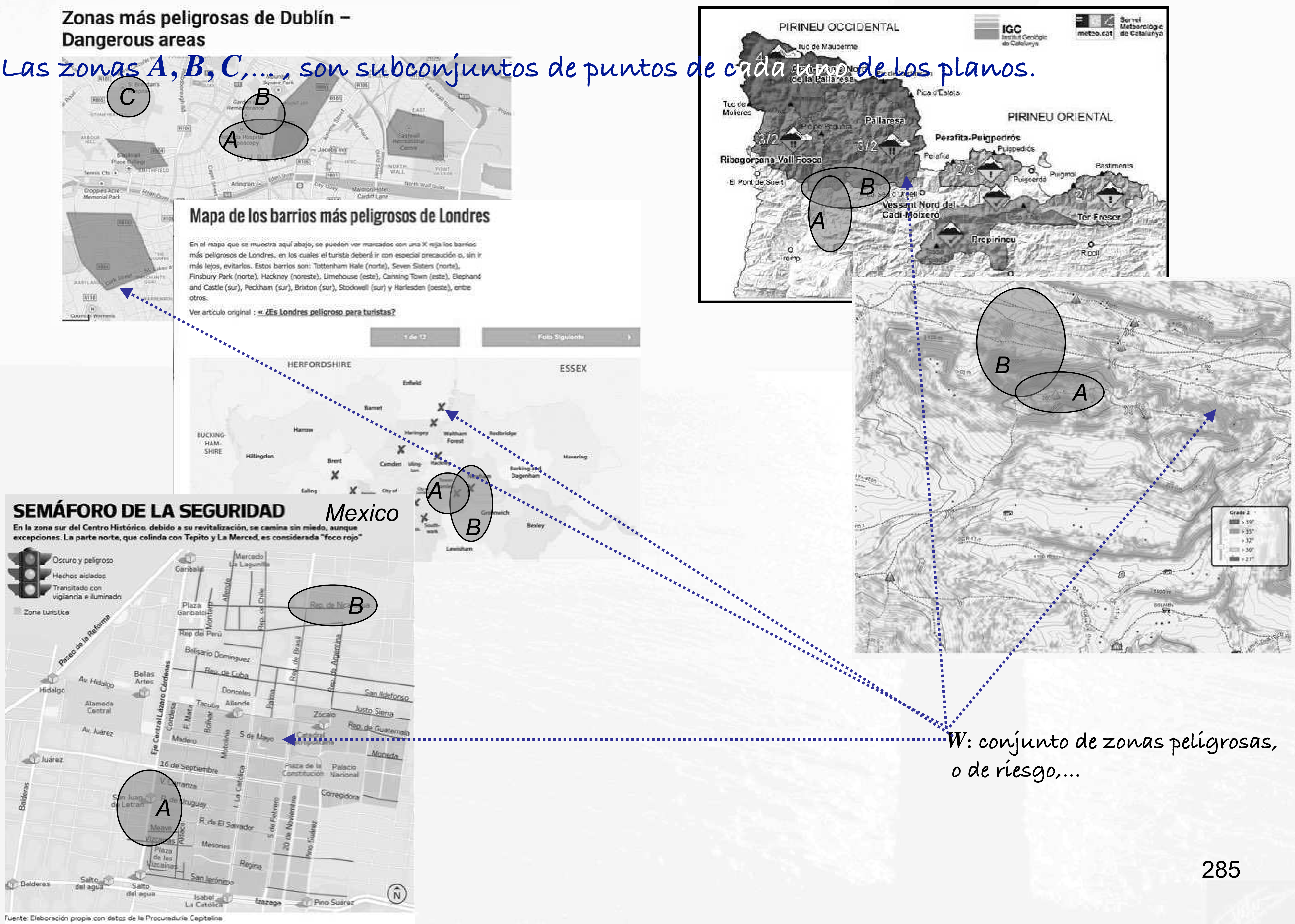
Las zonas $A, B, C, \ldots$, son subconjuntos de puntos de cada uno de los planos.



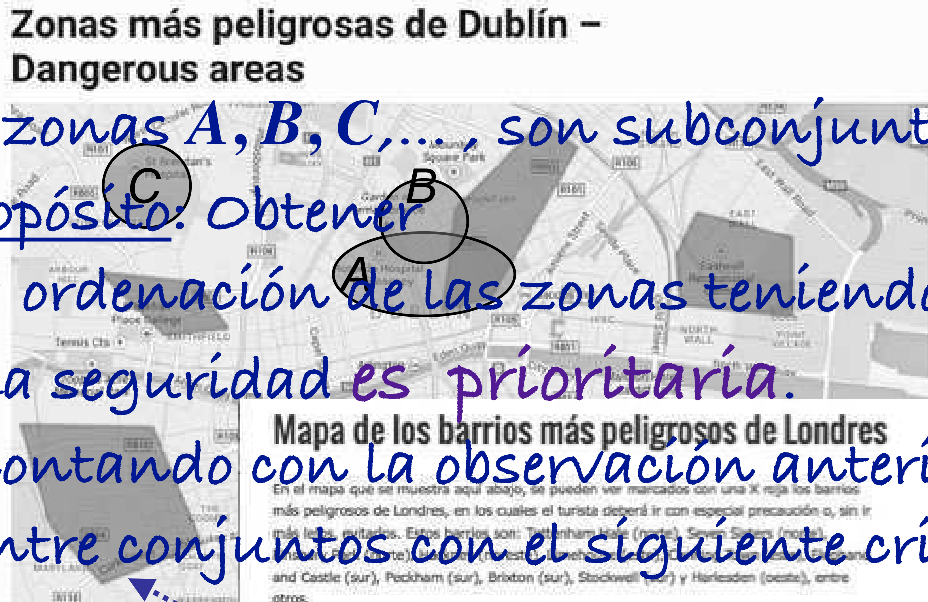




INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*



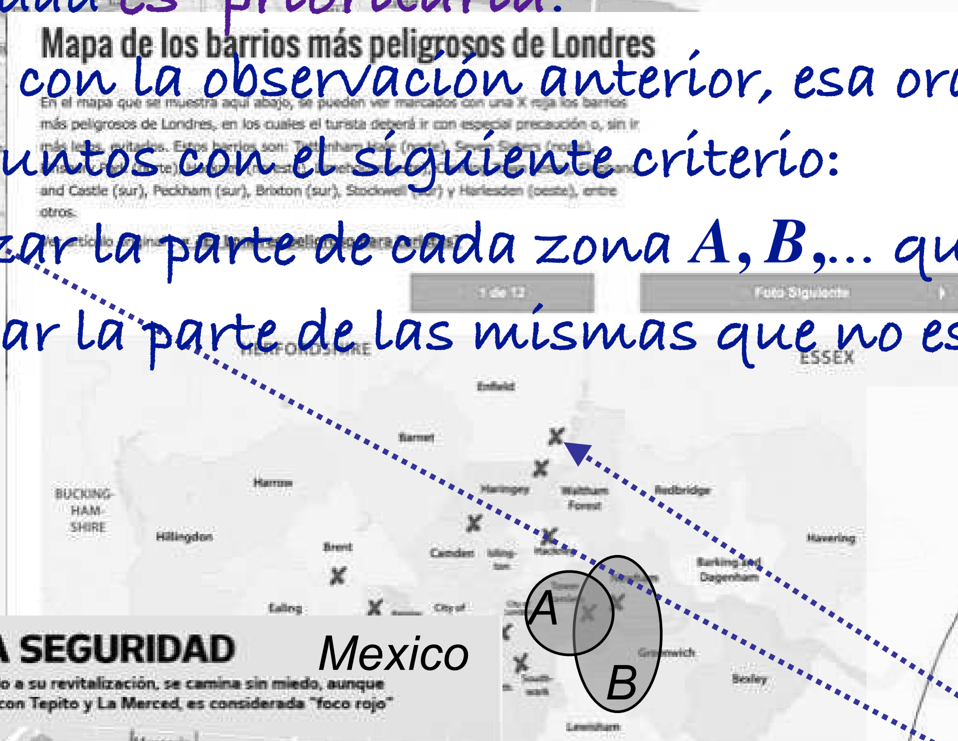
INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*

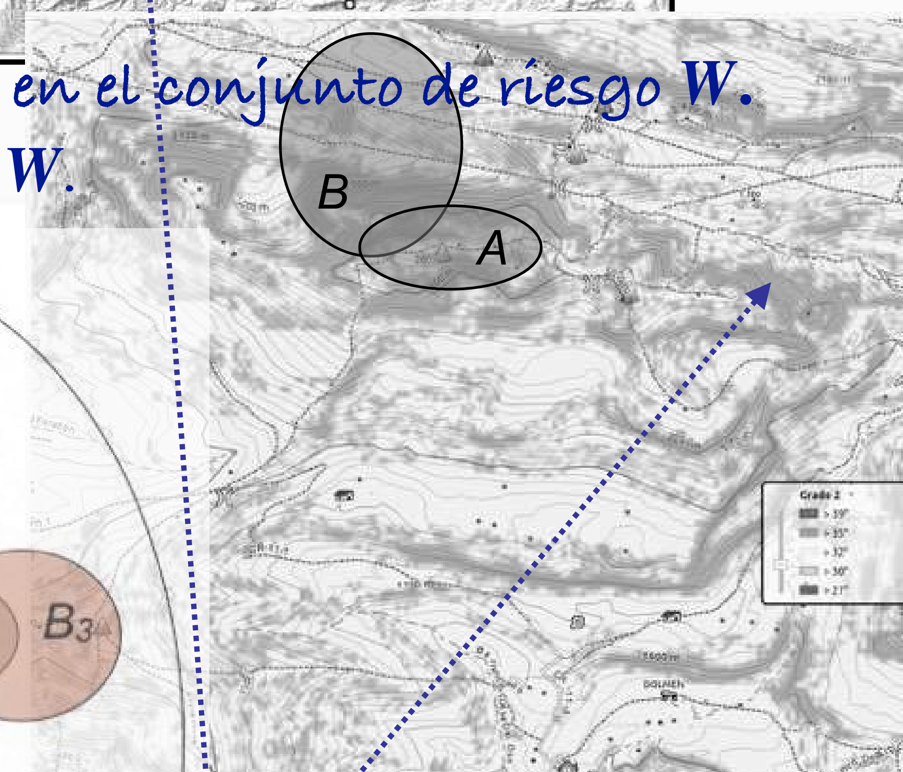


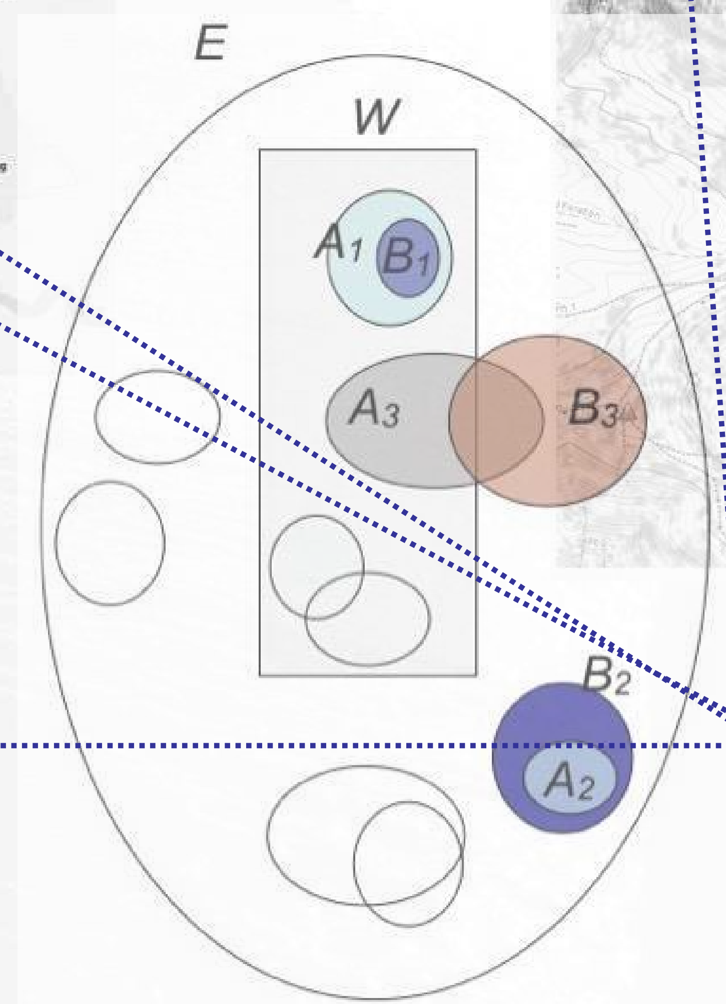
Las zonas $A, B, C, \ldots$, son subconjuntos de puntos de cada uno de los planos.

Propósito: Obtener una ordenación de las zonas teniendo en consideración:

1. La seguridad es prioritaria.
2. Contando con la observación anterior, esa ordenación debe expresarse mediante una relación entre conjuntos con el siguiente criterio:
   - Minimizar la parte de cada zona $A, B, \ldots$ que esté incluida en el conjunto de riesgo W.
   - Maximizar la parte de las mismas que no esté incluida en W.







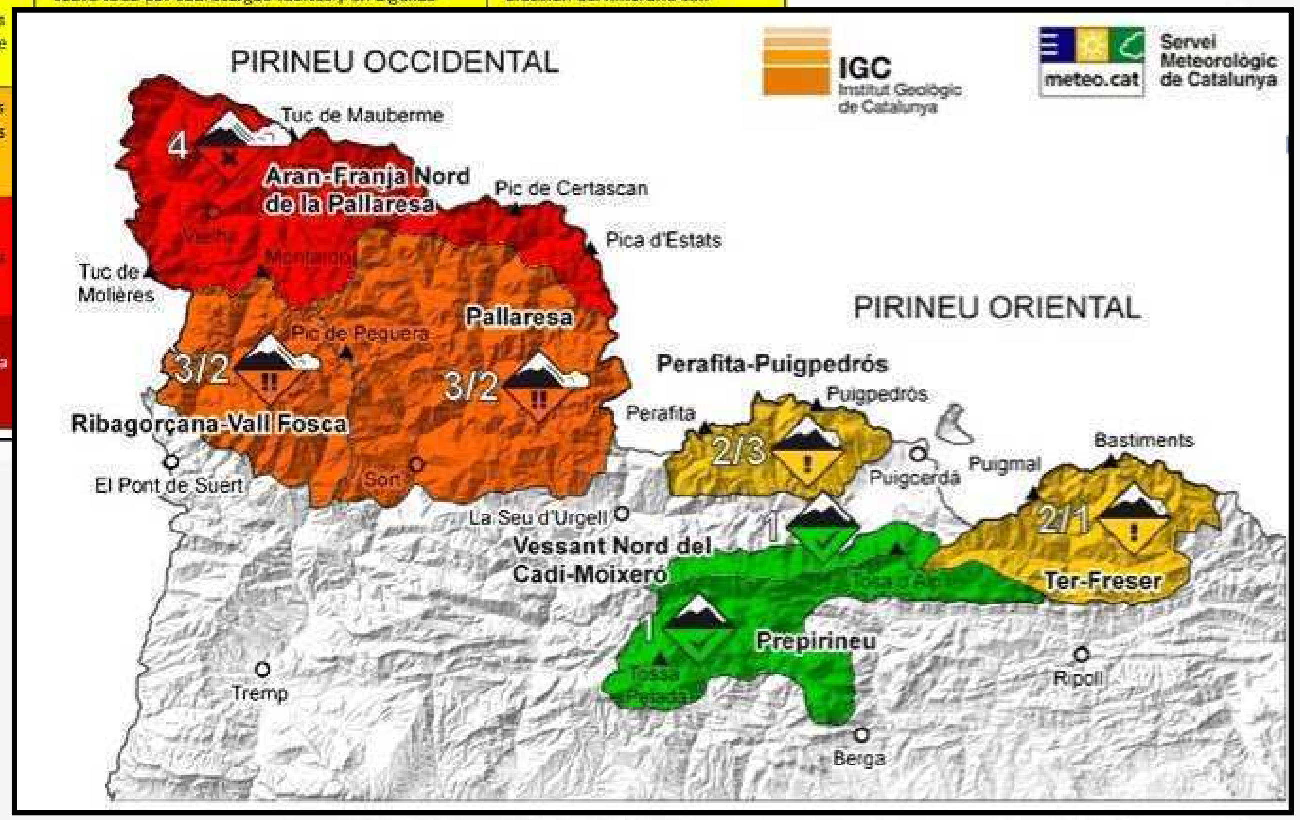
W: conjunto de zonas peligrosas, o de riesgo,...

INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*

ESCALA EUROPEA DE PELIGRO DE ALUDES				
Índice de peligro	**Riesgo**	**Estabilidad del Manto Nivoso**	**Probabilidad de desencadenamiento**	**Recomendaciones para la realización de actividades**
1	DÉBIL	Bien estabilizado en la mayoría de las vertientes	Sólo en pendientes muy propicias y sobre todo, a causa de fuertes sobrecargas. De forma natural sólo coladas o pequeños aludes	Actividad casi sin restricciones
2	LIMITADO	En algunas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderadamente estabilizado	Sobre todo por sobrecargas fuertes y en algunas pendientes cuyas características se describen normalmente en el boletín. No se esperan aludes espontáneos de gran amplitud	Elección del itinerario con precaución, evitando las pendientes con la orientación y altitud indicada
3	NOTABLE	En numerosas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderado o débilmente estabilizado	Incluso por sobrecargas débiles y en numerosas pendientes descritasen el boletín. En ciertas situaciones son posibles algunos aludes espontáneos de dimensiones medias y a veces grandes	Evitar las pendientes con la orientación y altitud indicada. En el resto de pendientes valorar su riesgo con prudencia
4	FUERTE	En la mayoría de las pendientes suficientemente propicias a aludes, débilmente estabilizado	Incluso por sobrecargas débiles en la mayoría de las pendientes suficientemente propicias a los mismos. Posibilidad de aludes espontáneos de dimensiones medias y a veces grandes	Actividad limitada a zonas de pendiente moderada y que no estén expuesta a ser barridas por aludes
5	MUY FUERTE	Inestabilidad generalizada del manto nivoso	Se esperan aludes espontáneos numerosos y grandes incluyendo zonas con pendientes poco propicias	Descartar cualquier tipo de actividad

INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*

ESCALA EUROPEA DE PELIGRO DE ALUDES				
Índice de peligro	Riesgo	Estabilidad del Manto Nivoso	Probabilidad de desencadenamiento	Recomendaciones para la realización de actividades
1	DÉBIL	Bien estabilizado en la mayoría de las vertientes	Sólo en pendientes muy propicias y sobre todo, a causa de fuertes sobrecargas. De forma natural sólo coladas o pequeños aludes	Actividad casi sin restricciones
2	LIMITADO	En algunas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderadamente estabilizado	Sobre todo por sobrecargas fuertes y en algunas	Elección del itinerario con
3	NOTABLE	En numerosas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderado o débilmente estabilizado		
4	FUERTE	En la mayoría de las pendientes suficientemente propicias a aludes, débilmente estabilizado		
5	MUY FUERTE	Inestabilidad generalizada del manto nivoso		



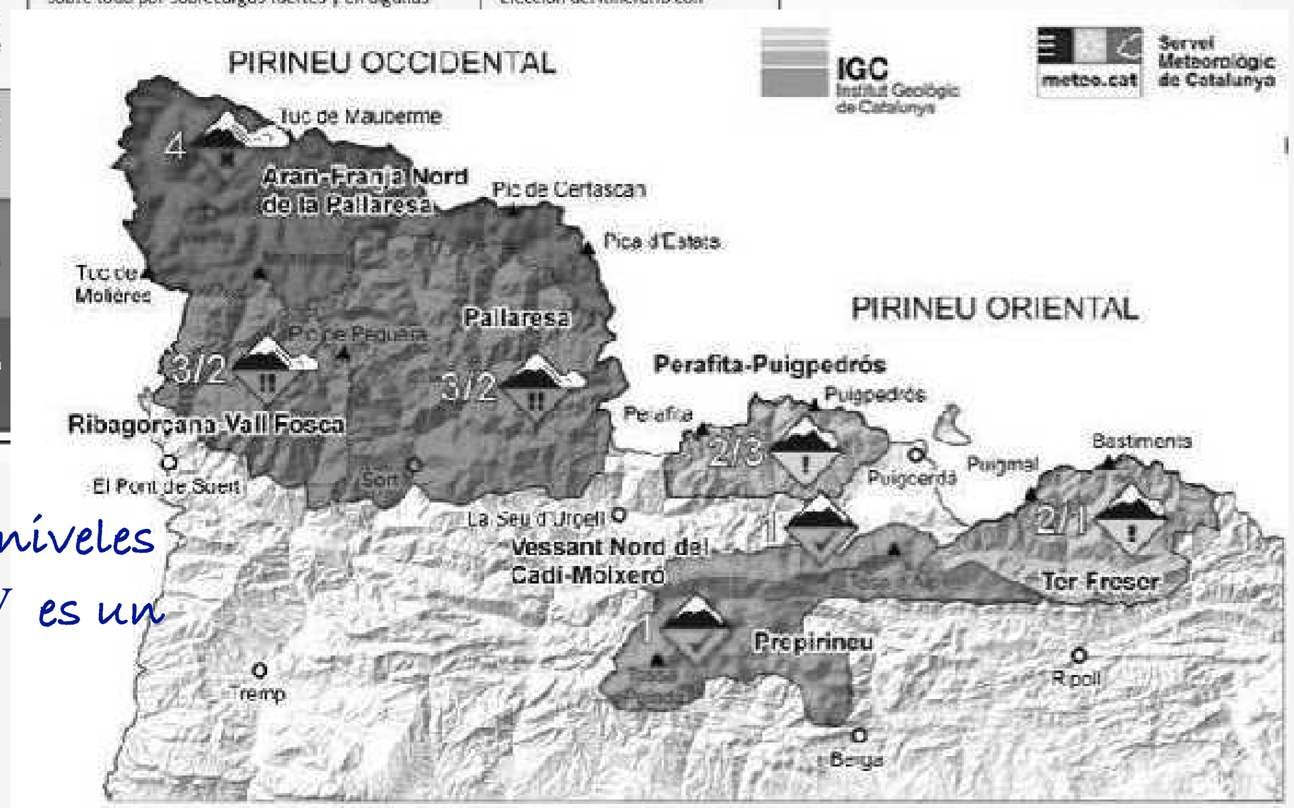
El referencial E de puntos del plano del IGC.

$P(E)$ conjunto de zonas de ese plano.

W unión de las zonas coloreadas.

INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*

ESCALA EUROPEA DE PELIGRO DE ALUDES				
Índice de peligro	Riesgo	Estabilidad del Manto Nivoso	Probabilidad de desencadenamiento	Recomendaciones para la realización de actividades
1	DÉBIL	Bien estabilizado en la mayoría de las vertientes	Sólo en pendientes muy propicias y sobre todo, a causa de fuertes sobrecargas. De forma natural sólo coladas o pequeños aludes	Actividad casi sin restricciones
2	LIMITADO	En algunas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderadamente estabilizado	Sobre todo por sobrecargas fuertes y en algunas	Elección del itinerario con
3	NOTABLE	En numerosas pendientes suficientemente propicias a aludes, moderado o débilmente estabilizado		
4	FUERTE	En la mayoría de las pendientes suficientemente propicias a aludes, débilmente estabilizado		
5	MUY FUERTE	Inestabilidad generalizada del manto nivoso		



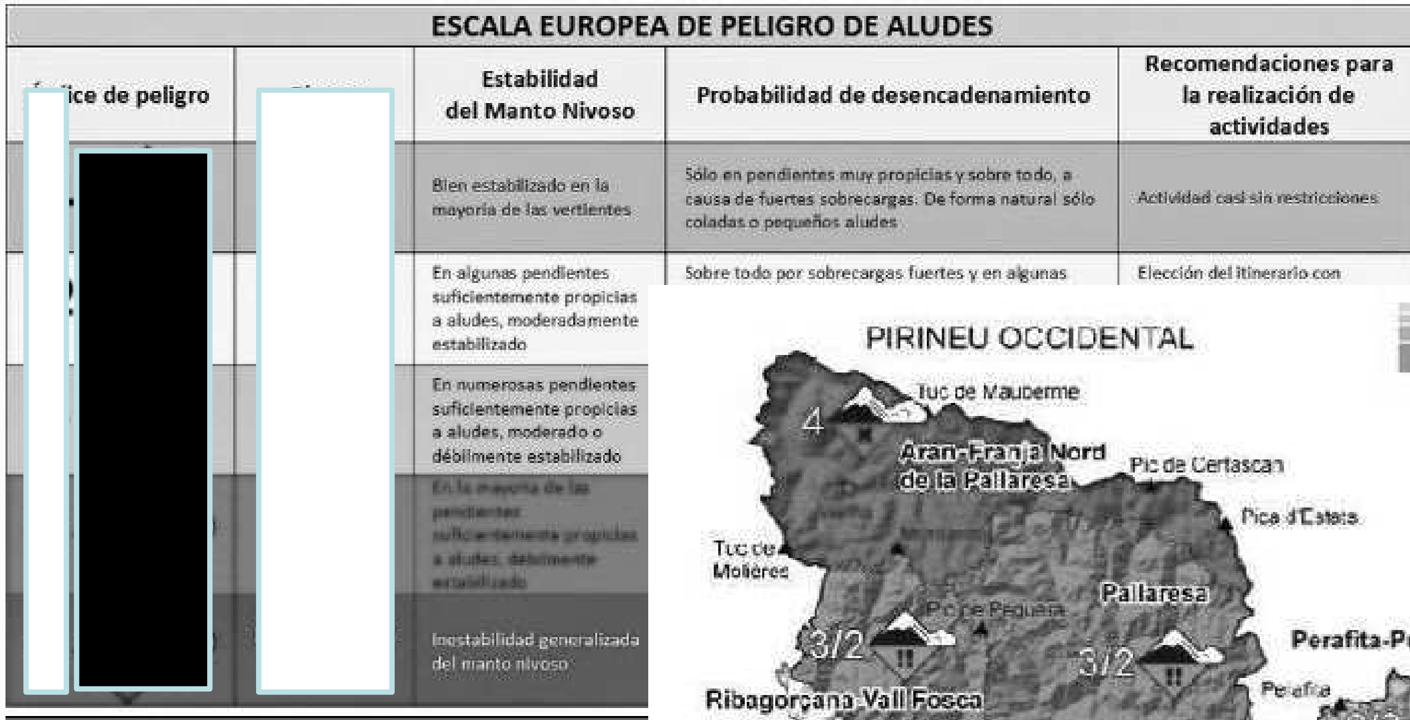
El referencial $\boldsymbol{E}$ de puntos del plano del IGC.

$\boldsymbol{P(E)}$ conjunto de zonas de ese plano.

$\boldsymbol{W}$ unión de las zonas coloreadas.

Por ahora, prescindimos de niveles de riesgo: suponemos que $\boldsymbol{W}$ es un subconjunto ordinario.

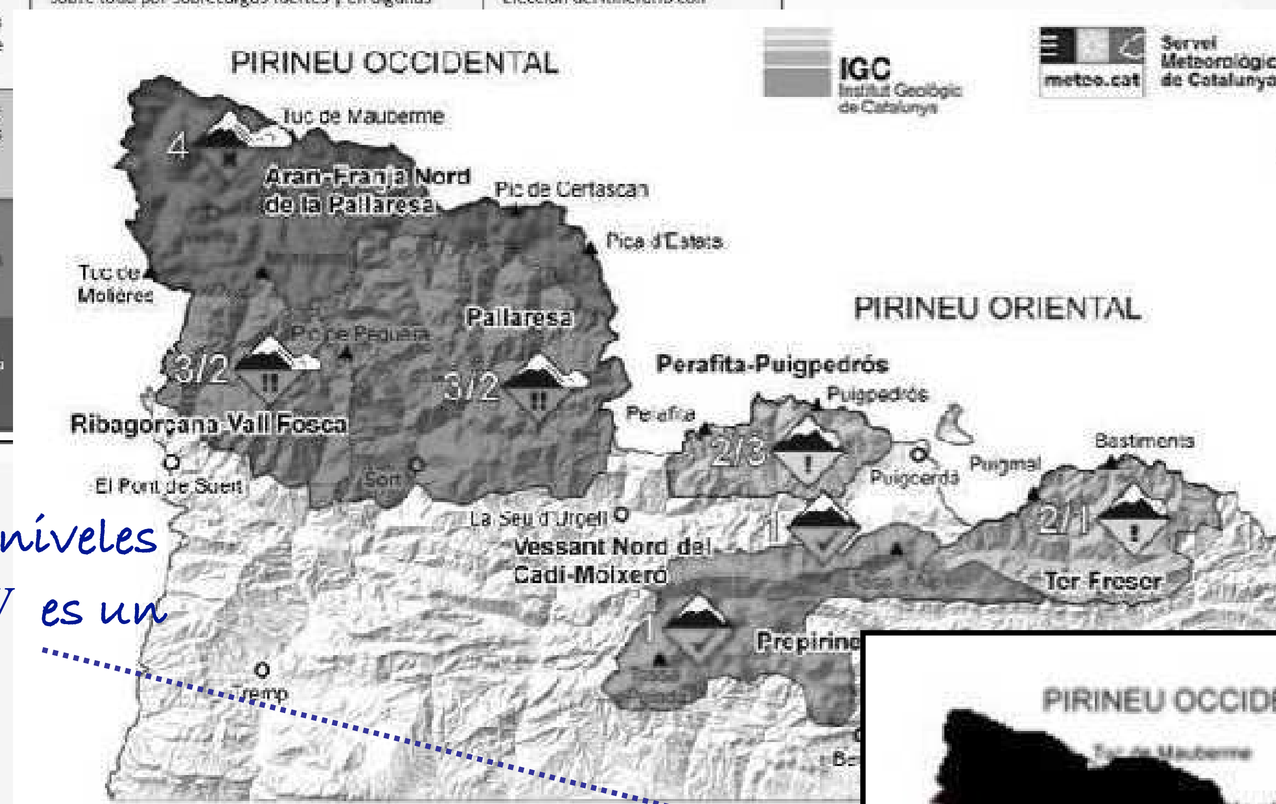
INCLUSIÓN EN *P*(*E*) ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO *W* DE *E*



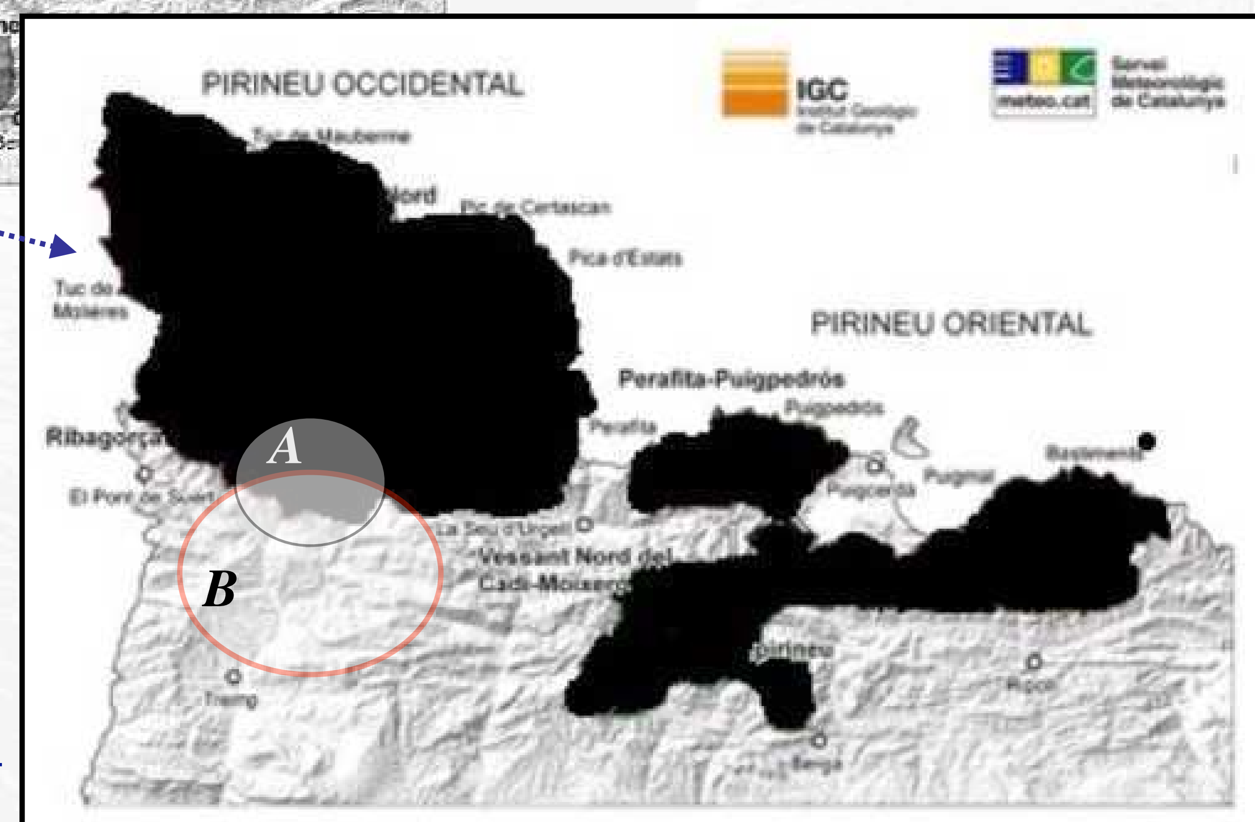
El referencial E de puntos del plano del IGC.

$P(E)$ conjunto de zonas de ese plano.

W unión de las zonas coloreadas.



Por ahora, prescindimos de niveles de riesgo: suponemos que W es un subconjunto ordinario.



La zonas A y B son tales que $A \sqsubseteq^W B$

Relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión desde la perspectiva de W":

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

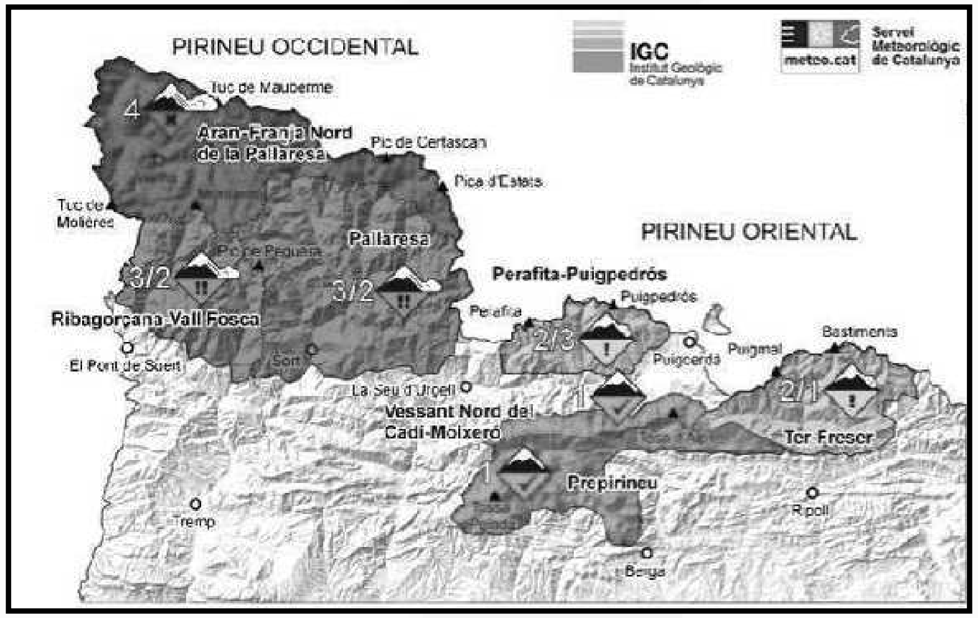
$\boxed{(A \cap W \supseteq B \cap W)\&(A \cap W^c \subseteq B \cap W^c)}$,

que también es equivalente a :

(1) $\boxed{A \,\Delta\, W \subseteq B \,\Delta\, W}$

(2) $\boxed{(B \cap W) \subseteq A \subseteq (B \cup W)}$, es decir, $\sqsubseteq^W$ es orden de actividad.

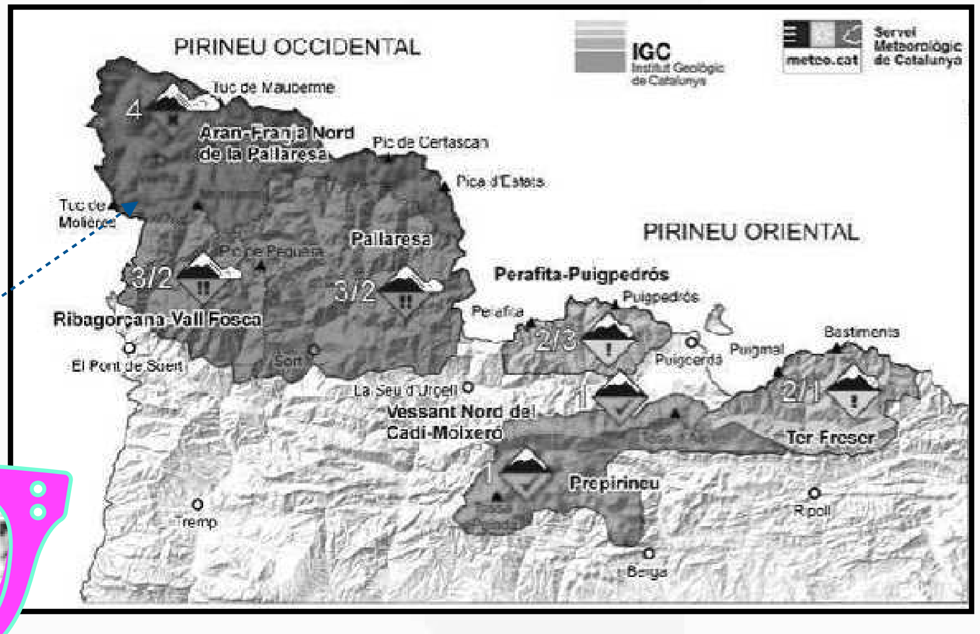
La zona A separa las zonas B y la de riesgo W.


PIRINEU OCCIDENTAL
IGC
Institut Geològic de Catalunya
meteo.cat
Servei Meteorològic de Catalunya
4
Tuc de Mauberme
Aran-Franja Nord de la Pallaresa
Pic de Certascan
Pica d'Estats
Tuc de Molières
PIRINEU ORIENTAL
Pallaresa
3/2
3/2
Perafita-Puigpedrós
Puigpedrós
Ribagorçana-Vall Fosca
El Pont de Suert
Sort
2/3
Puigcerdà
Puigmal
Bastiments
La Seu d'Urgell
Vessant Nord del Cadí-Moixeró
2/1
Ter-Freser
1
Prepirineu
Tremp
Ripoll
Berga

Relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión condicionada por W" :

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$(A \cap W \supseteq B \cap W)\&(A \cap W' \subseteq B \cap W')$. **?**



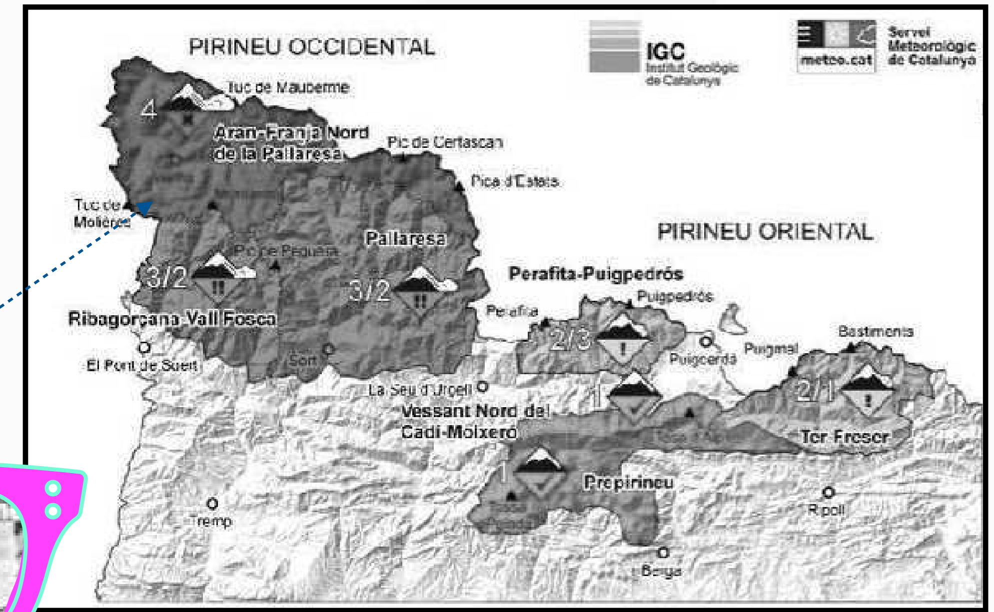
Subconjunto L-borroso

W

Relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión condicionada por W":

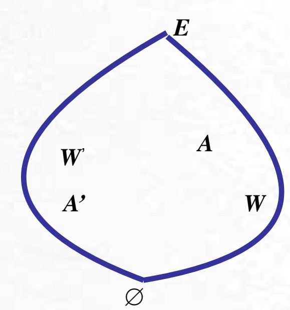
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$\cancel{(A \cap W \supseteq B \cap W)\&(A \cap W' \subseteq B \cap W')}$. ?



Subconjunto L-borroso

W



En el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$ de los subconjuntos L-borrosos asociados a un retículo distributivo y acotado L, el orden $\sqsubseteq^W$ "inclusión asociada al subconjunto borroso W", vendrá dado por el orden de actividad:

$$\boxed{A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W)},$$

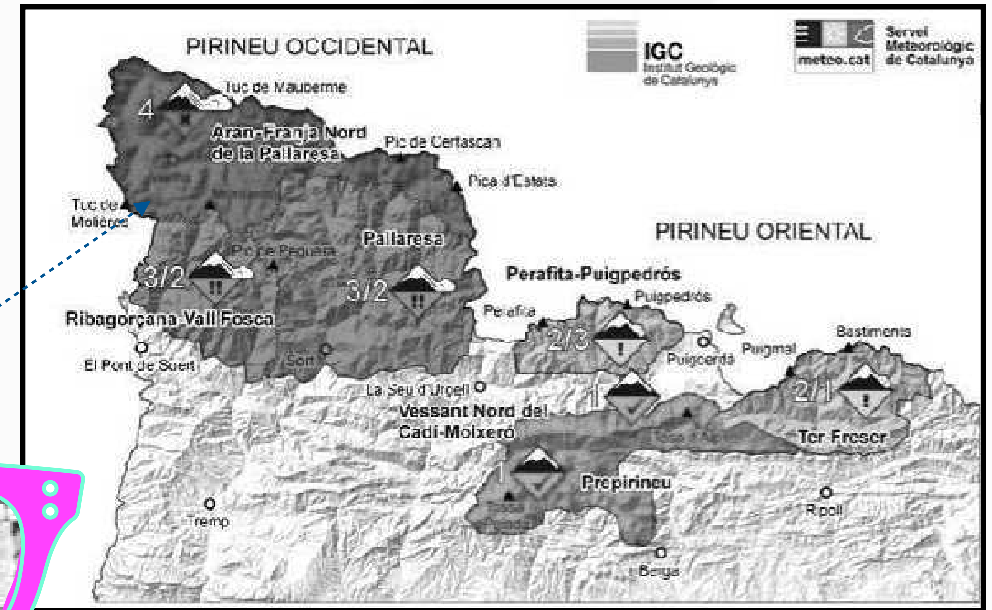
Relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión condicionada por W":

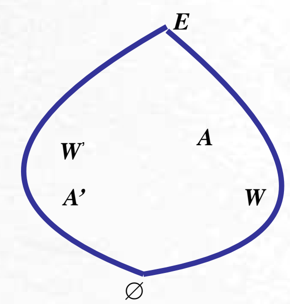
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$\cancel{(A \cap W \supseteq B \cap W)\&(A \cap W' \subseteq B \cap W')}$. **?**

Subconjunto L-borroso

W

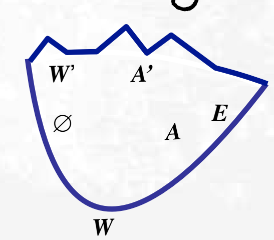




En el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ de los subconjuntos L-borrosos asociados a un retículo distributivo y acotado L, el orden $\sqsubseteq^W$ "inclusión asociada al subconjunto borroso W", vendrá dado por el orden de actividad:

$$\boxed{A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W)},$$

$(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es inf-semirretículo con elemento mínimo W y tal que $\boxed{A \sqcap^W B = (A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W)}$



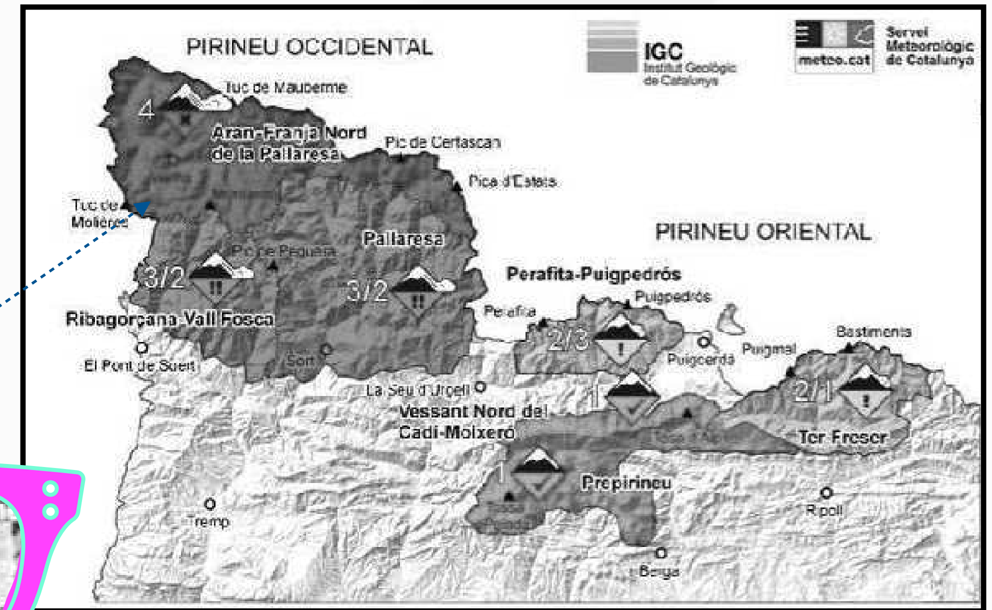
Relación $\sqsubseteq^W$ "inclusión condicionada por W ":

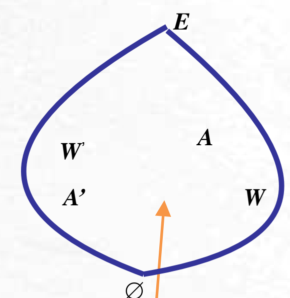
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$\cancel{(A \cap W \supseteq B \cap W)\&(A \cap W' \subseteq B \cap W')}$. **?**

Subconjunto L-borroso

W



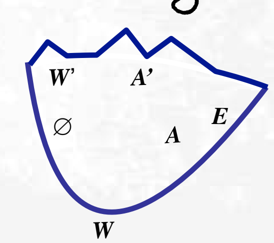


En el retículo $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$ de los subconjuntos L-borrosos asociados a un retículo distributivo y acotado L, el orden $\sqsubseteq^W$ "inclusión asociada al subconjunto borroso W ", vendrá dado por el orden de actividad:

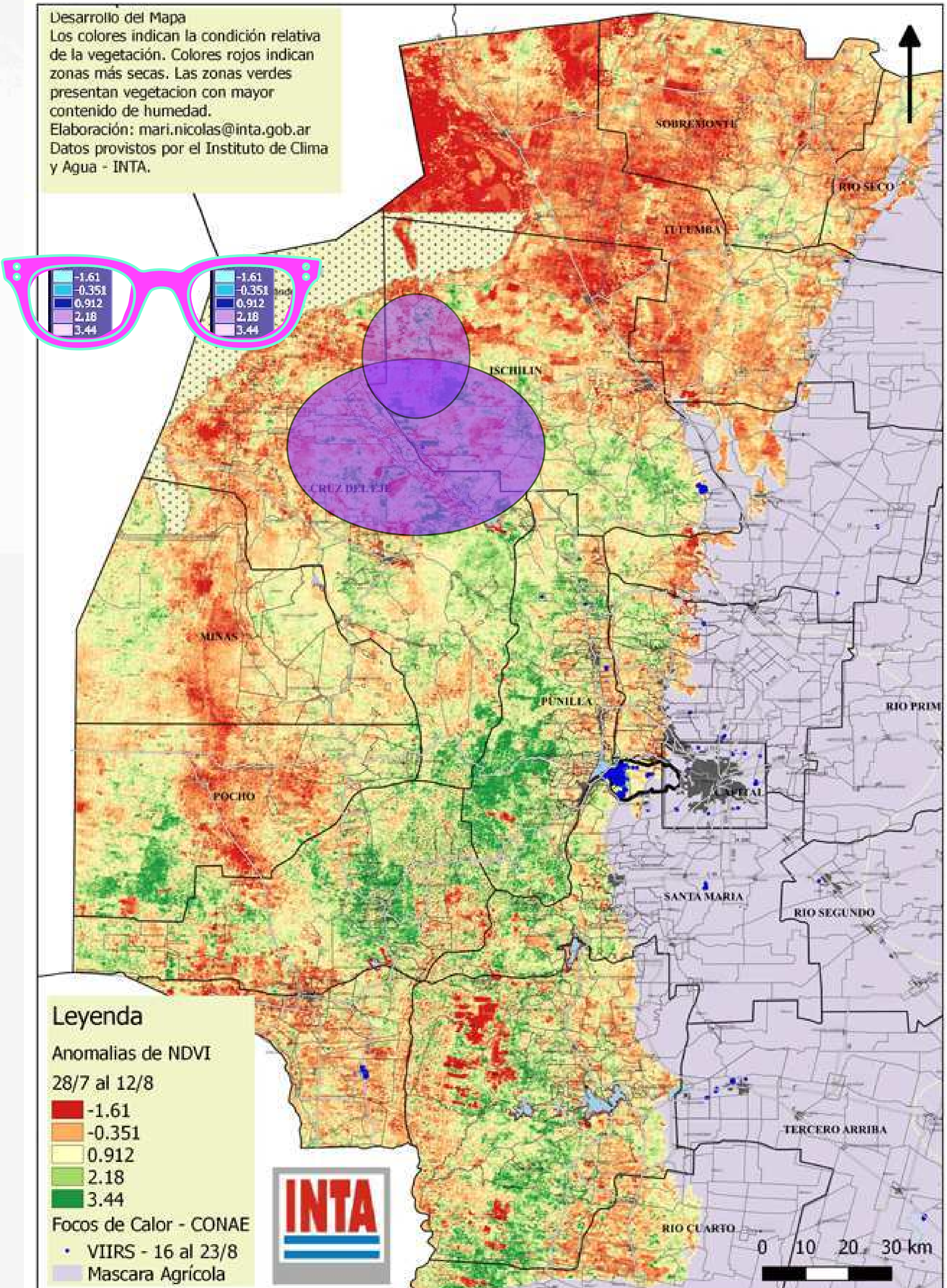
$$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W) \leq A \leq (B + W),$$

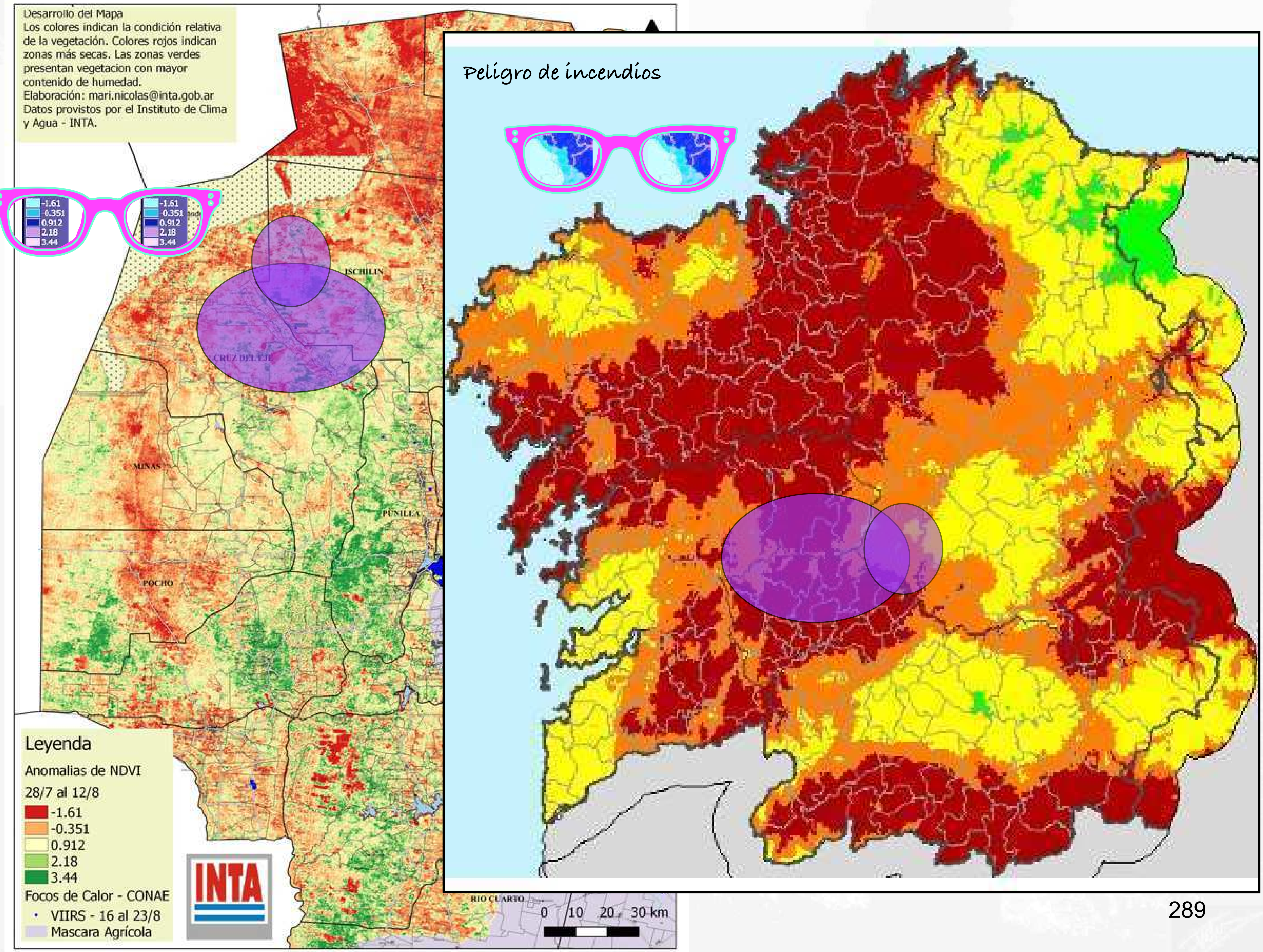
$(L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, W)$ es inf-semirretículo con elemento mínimo W y tal que $A \sqcap^W B = (A \cdot B) + (A \cdot W) + (B \cdot W)$

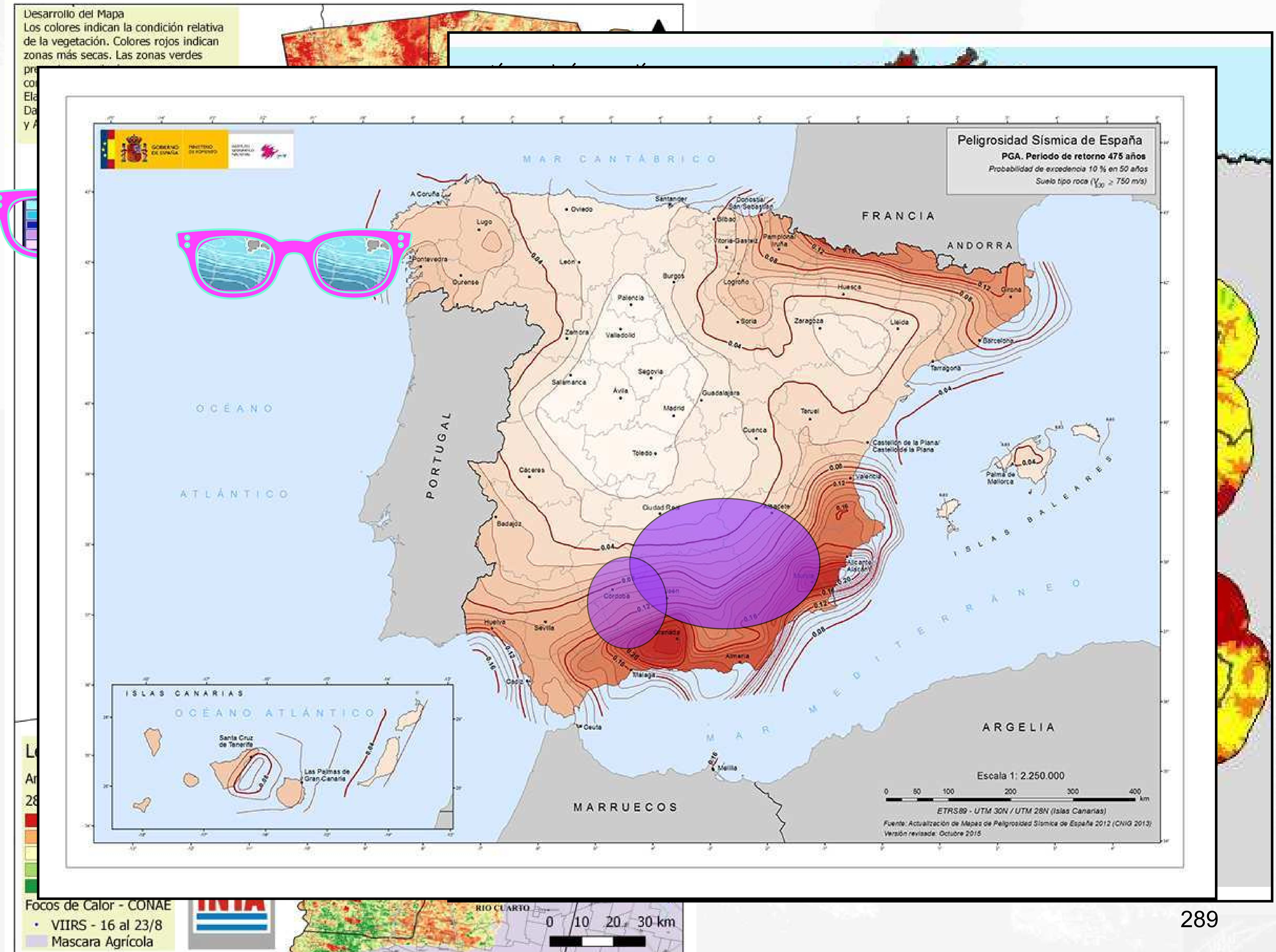
El operador $\sqcap^W$ es nulnorma idempotente en $(L^E, \leq)$.



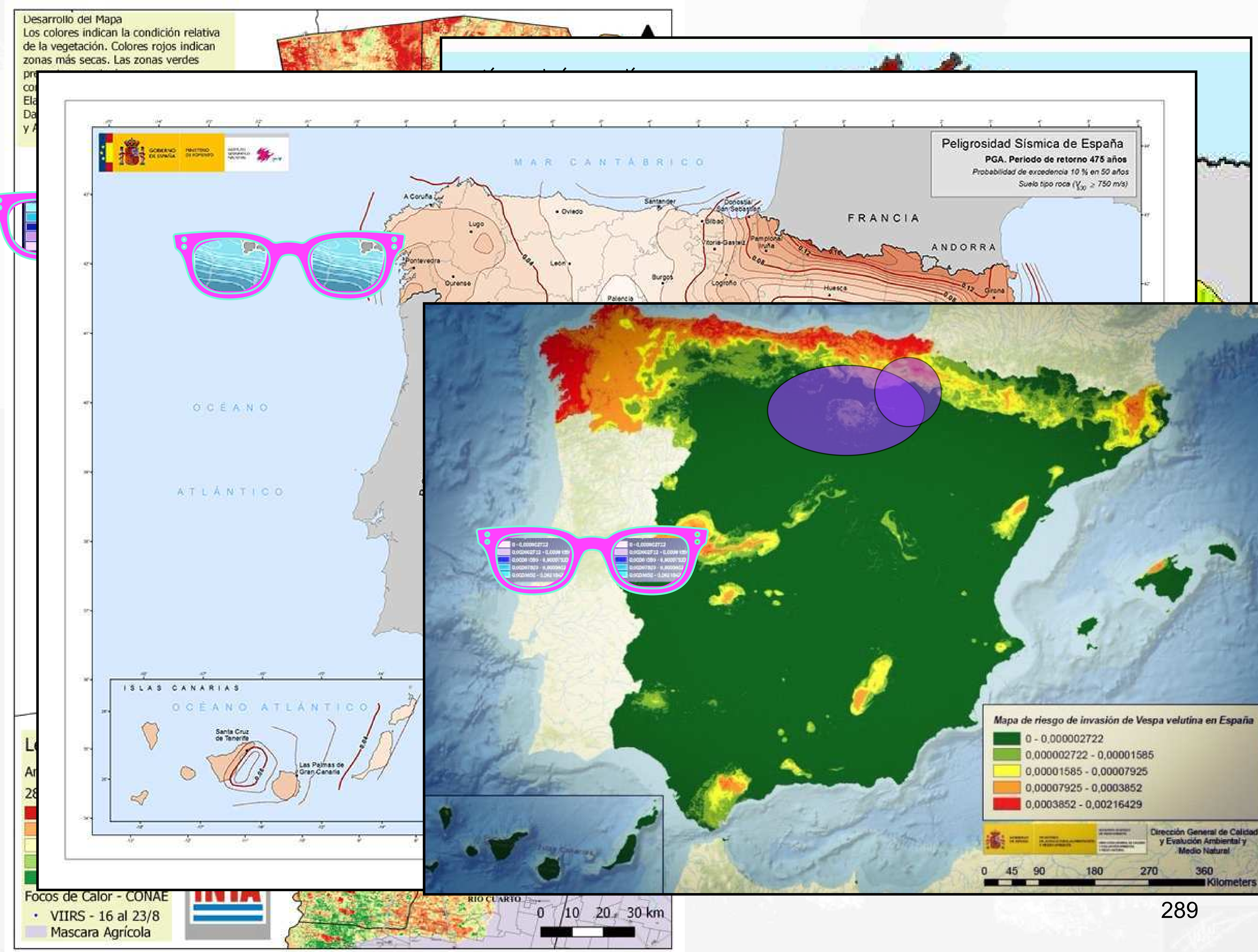
Otros ejemplos de mapas con zonas de riesgo o con zonas distinguidas por alguna circunstancia…

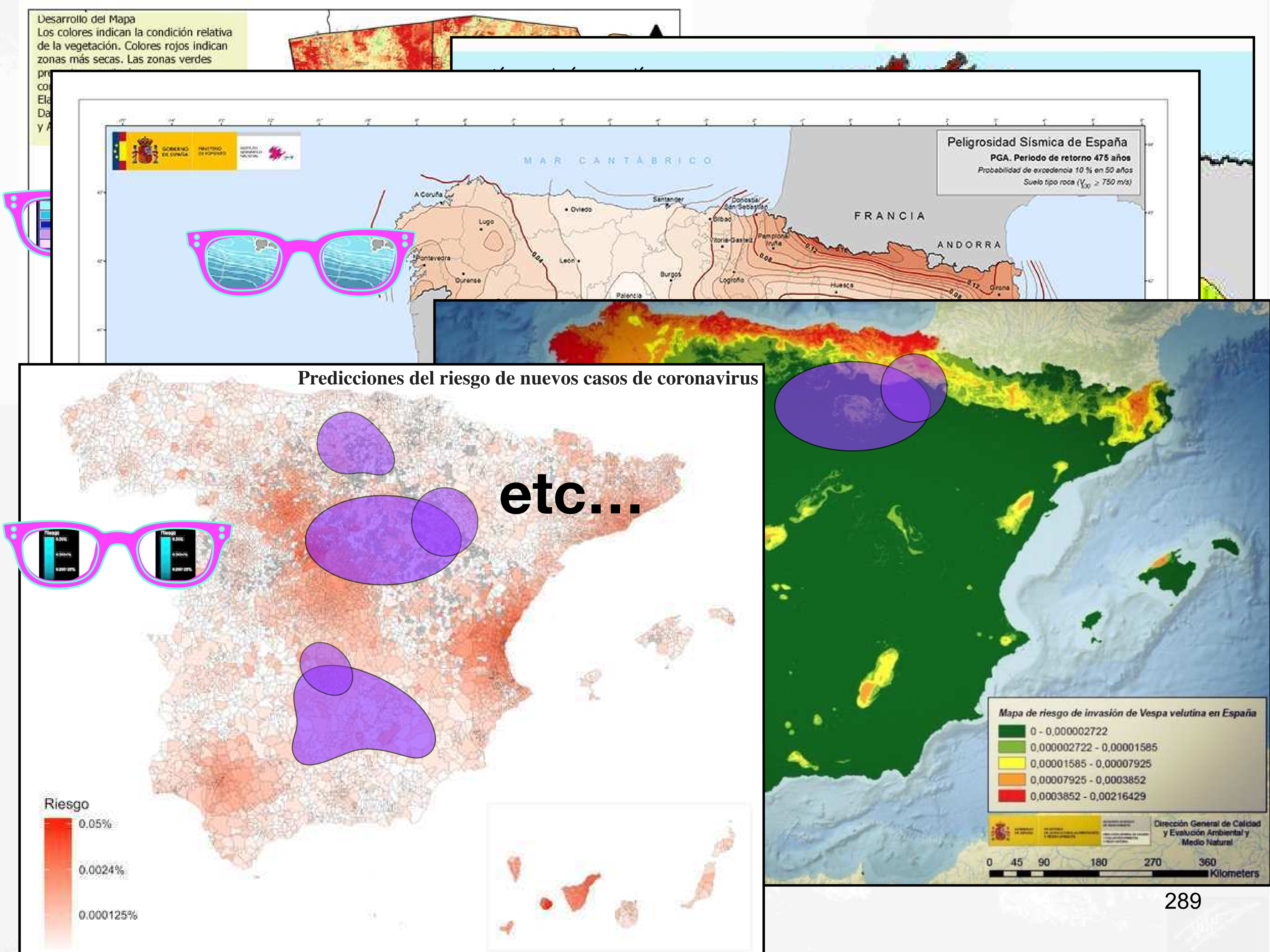

Desarrollo del Mapa
Los colores indican la condición relativa de la vegetación. Colores rojos indican zonas más secas. Las zonas verdes presentan vegetacion con mayor contenido de humedad.
Elaboración: mari.nicolas@inta.gob.ar
Datos provistos por el Instituto de Clima y Agua - INTA.
SOBREMONTE
RIO SECO
TULUMBA
ISCHILIN
CRUZ DEL EJE
MINAS
PUNILLA
RIO PRIM
CAPITAL
POCHO
SANTA MARIA
RIO SEGUNDO
TERCERO ARRIBA
RIO CUARTO
-1.61
-0.351
0.912
2.18
3.44
Leyenda
Anomalias de NDVI
28/7 al 12/8
-1.61
-0.351
0.912
2.18
3.44
Focos de Calor - CONAE
VIIRS - 16 al 23/8
Mascara Agrícola
INTA
0 10 20 30 km


Desarrollo del Mapa
Los colores indican la condición relativa de la vegetación. Colores rojos indican zonas más secas. Las zonas verdes presentan vegetacion con mayor contenido de humedad.
Elaboración: mari.nicolas@inta.gob.ar
Datos provistos por el Instituto de Clima y Agua - INTA.
-1.61
-0.351
0.912
2.18
3.44
-1.61
-0.351
0.912
2.18
3.44
ISCHILIN
CRUZ DEL EJE
MINAS
PUNILLA
POCHO
Leyenda
Anomalias de NDVI
28/7 al 12/8
-1.61
-0.351
0.912
2.18
3.44
Focos de Calor - CONAE
VIIRS - 16 al 23/8
Mascara Agrícola
INTA
RIO CUARTO
0 10 20 30 km
Peligro de incendios

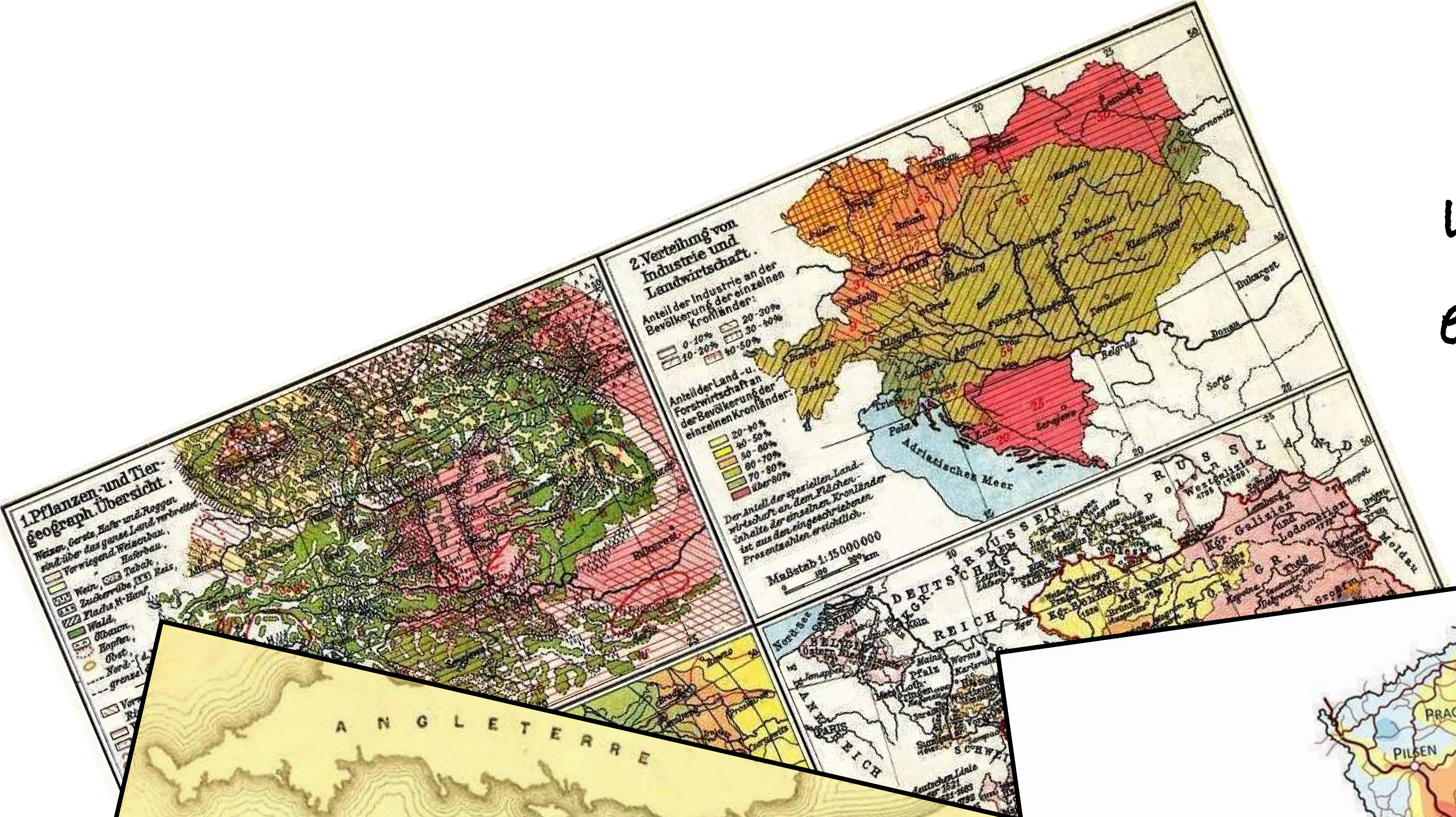


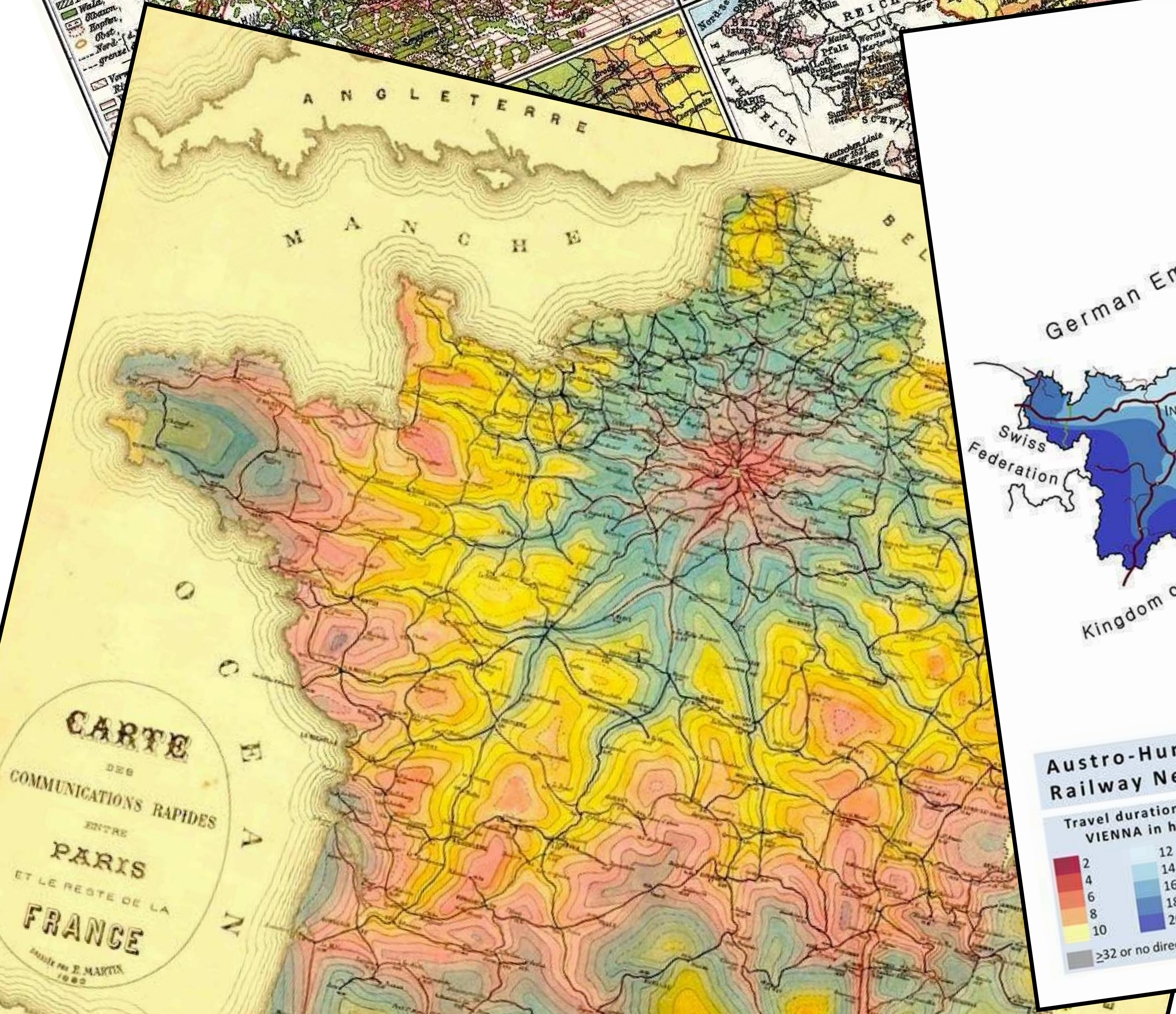
Desarrollo del Mapa
Los colores indican la condición relativa
de la vegetación. Colores rojos indican
zonas más secas. Las zonas verdes
Peligrosidad Sísmica de España
PGA. Periodo de retorno 475 años
Probabilidad de excedencia 10 % en 50 años
Suelo tipo roca ($V_{S30} \geq 750$ m/s)
MAR CANTÁBRICO
FRANCIA
ANDORRA
PORTUGAL
OCÉANO ATLÁNTICO
ISLAS BALEARES
MAR MEDITERRÁNEO
ARGELIA
MARRUECOS
ISLAS CANARIAS
OCÉANO ATLÁNTICO
A Coruña
Lugo
Oviedo
Santander
Bilbao
Pontevedra
Ourense
León
Burgos
Logroño
Huesca
Girona
Palencia
Zamora
Valladolid
Soria
Zaragoza
Lleida
Barcelona
Tarragona
Salamanca
Segovia
Ávila
Guadalajara
Madrid
Teruel
Cuenca
Toledo
Cáceres
Badajoz
Huelva
Sevilla
Almería
Málaga
Cádiz
Ceuta
Melilla
Santa Cruz de Tenerife
Las Palmas de Gran Canaria
Escala 1: 2.250.000
ETRS89 - UTM 30N / UTM 28N (Islas Canarias)
Fuente: Actualización de Mapas de Peligrosidad Sísmica de España 2012 (CNIG 2013)
Versión revisada: Octubre 2015
Focos de Calor - CONAE
VIIRS - 16 al 23/8
Mascara Agrícola
RIO CUARTO
0 10 20 30 km

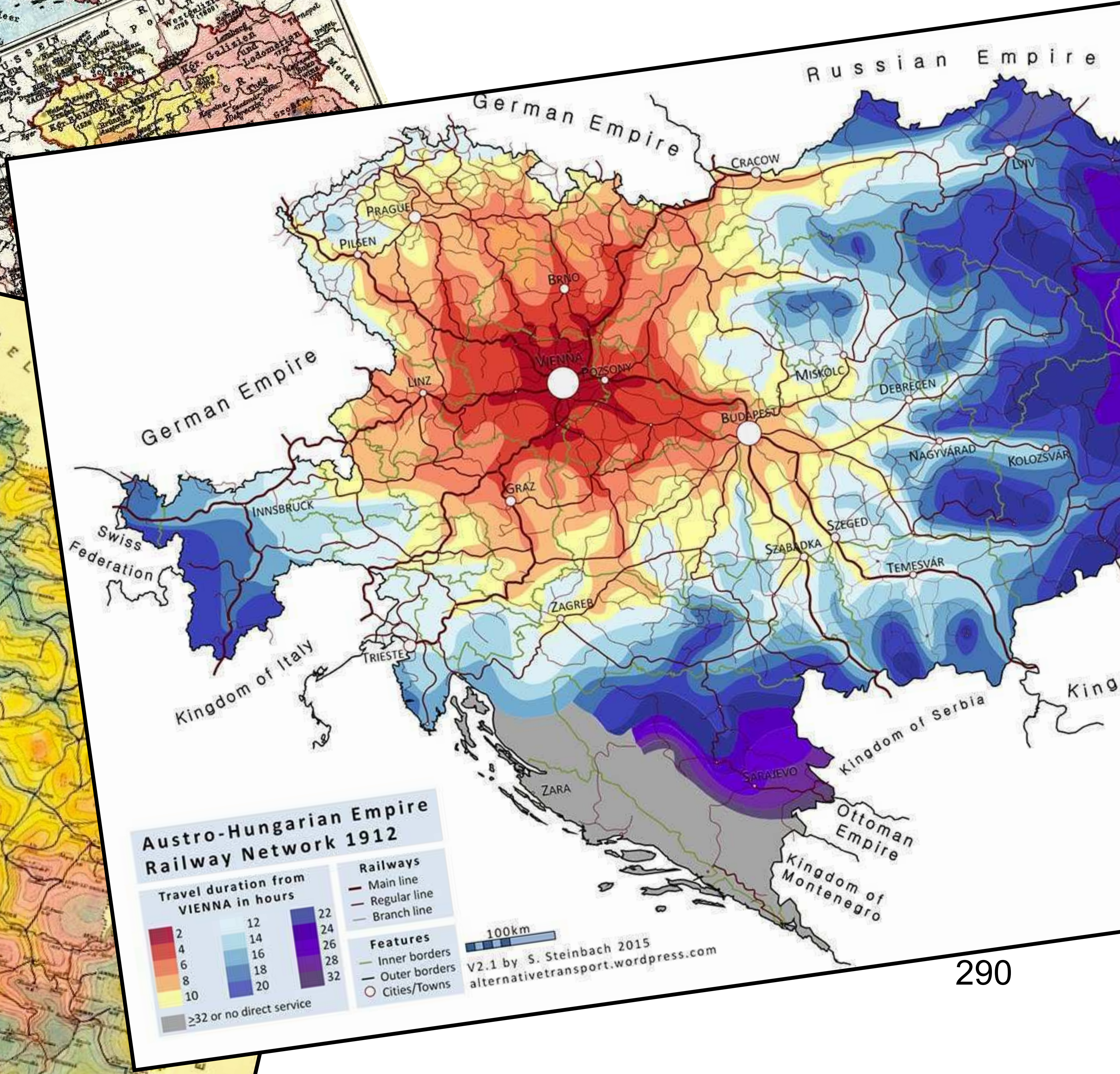

Desarrollo del Mapa
Los colores indican la condición relativa
de la vegetación. Colores rojos indican
zonas más secas. Las zonas verdes
Focos de Calor - CONAE
VIIRS - 16 al 23/8
Mascara Agrícola
0 10 20 30 km
Peligrosidad Sísmica de España
PGA. Periodo de retorno 475 años
Probabilidad de excedencia 10 % en 50 años
MAR CANTÁBRICO
FRANCIA
ANDORRA
OCÉANO
ATLÁNTICO
ISLAS CANARIAS
OCÉANO ATLÁNTICO
Santa Cruz de Tenerife
Las Palmas de Gran Canaria
A Coruña
Lugo
Oviedo
Santander
Bilbao
Pontevedra
Ourense
León
Burgos
Logroño
Palencia
Huesca
Girona
Mapa de riesgo de invasión de Vespa velutina en España
0 - 0,000002722
0,000002722 - 0,00001585
0,00001585 - 0,00007925
0,00007925 - 0,0003852
0,0003852 - 0,00216429
Dirección General de Calidad y Evaluación Ambiental y Medio Natural
0 45 90 180 270 360
Kilometers


Desarrollo del Mapa
Los colores indican la condición relativa
de la vegetación. Colores rojos indican
zonas más secas. Las zonas verdes
Peligrosidad Sísmica de España
PGA. Periodo de retorno 475 años
Probabilidad de excedencia 10 % en 50 años
Suelo tipo roca ($V_{s30} \geq 750$ m/s)
MAR CANTÁBRICO
FRANCIA
ANDORRA
A Coruña
Lugo
Oviedo
Santander
Donostia/San Sebastián
Bilbao
Vitoria-Gasteiz
Pamplona/Iruña
Pontevedra
Ourense
León
Burgos
Logroño
Huesca
Girona
Palencia
Predicciones del riesgo de nuevos casos de coronavirus
etc...
Riesgo
0.05%
0.0024%
0.000125%
Mapa de riesgo de invasión de Vespa velutina en España
0 - 0,000002722
0,000002722 - 0,00001585
0,00001585 - 0,00007925
0,00007925 - 0,0003852
0,0003852 - 0,00216429
Dirección General de Calidad y Evaluación Ambiental y Medio Natural
0 45 90 180 270 360
Kilometers

Una interpretación de $\sqsubseteq^{w}$ en mapas de isolíneas:

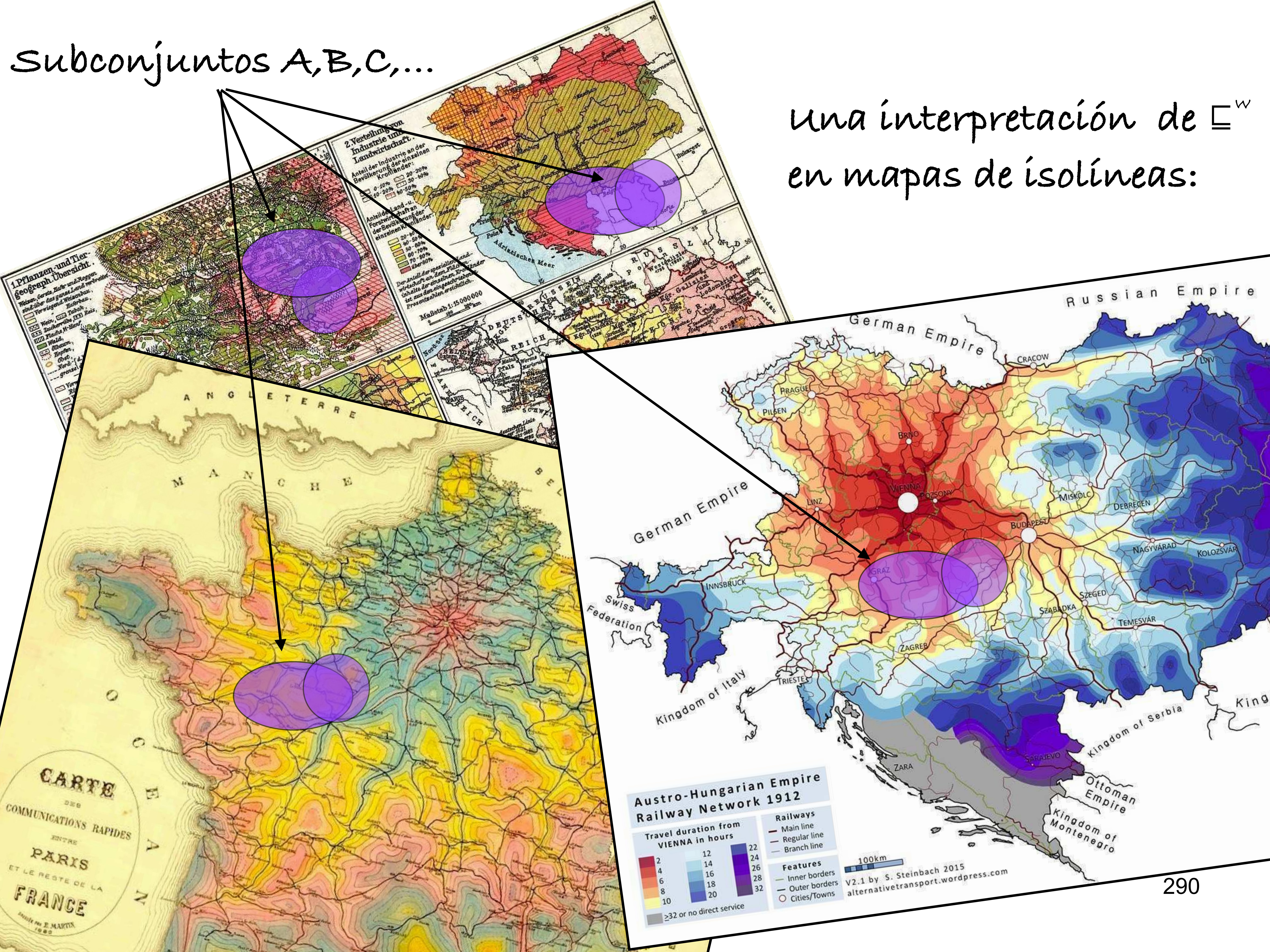






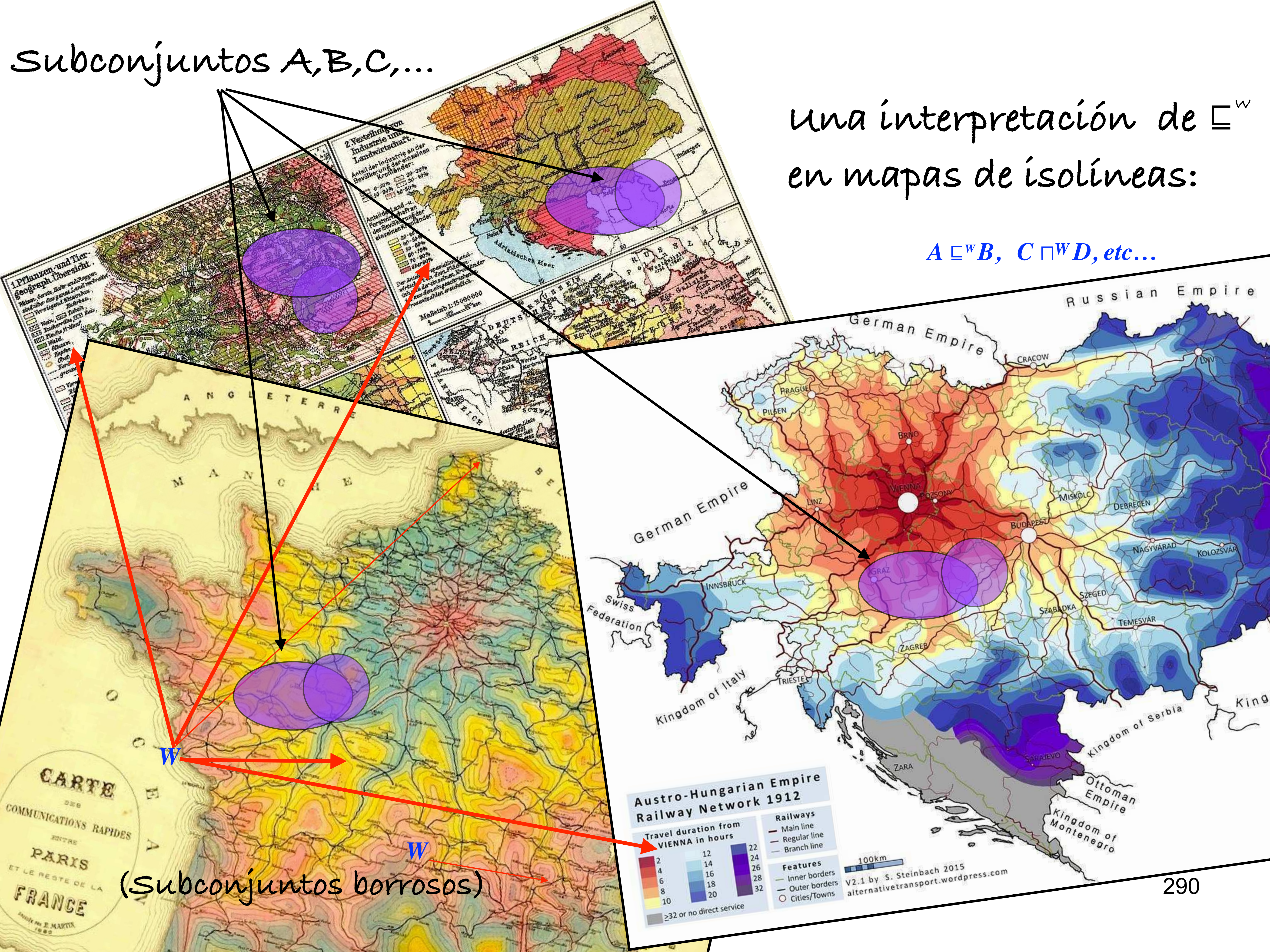
Subconjuntos A,B,C,...

Una interpretación de $\sqsubseteq^{w}$ en mapas de isolíneas:



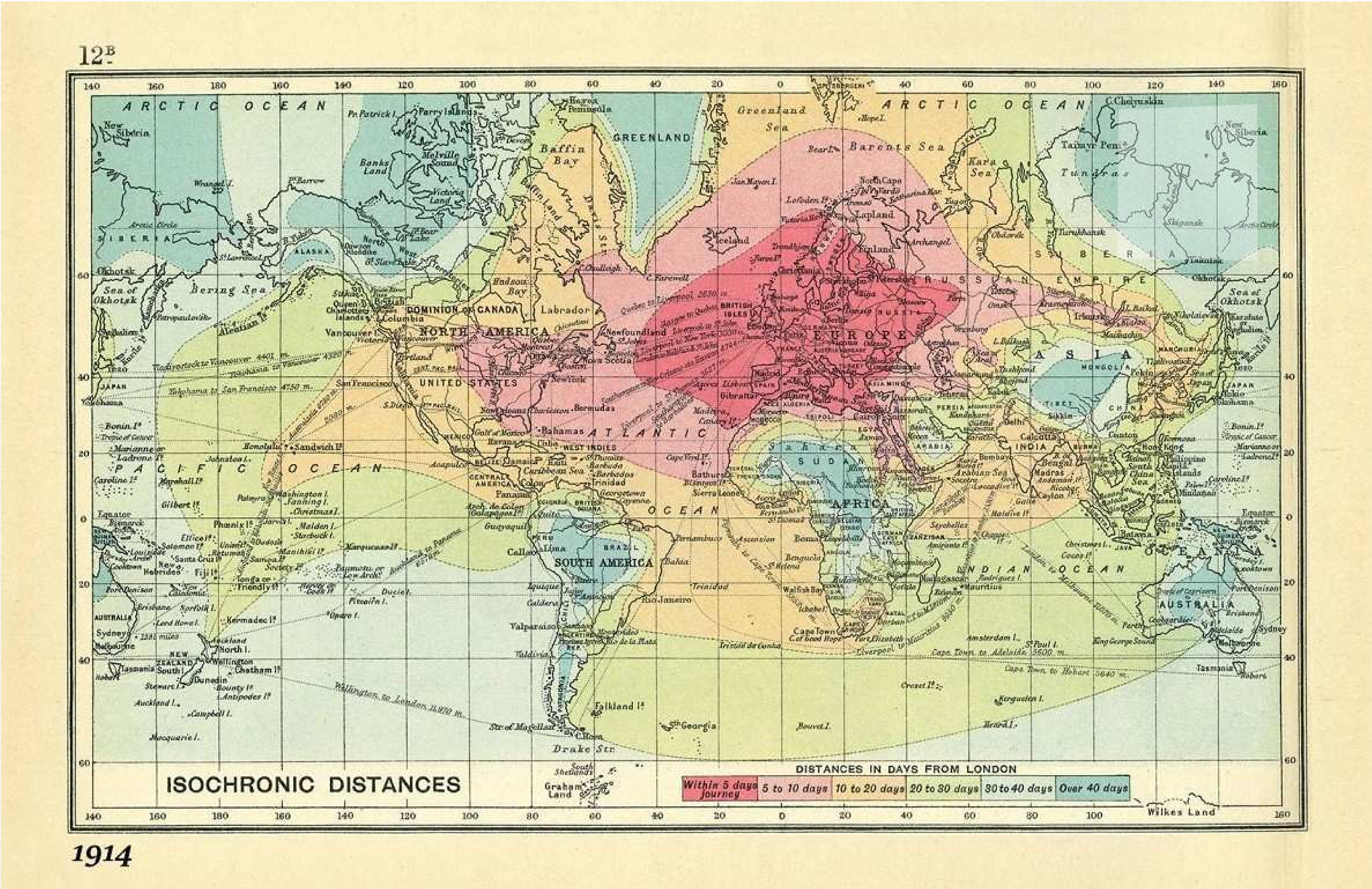
Una interpretación de $\sqsubseteq^{w}$ en mapas de isolíneas:

$A \sqsubseteq^{w} B,\ C \sqcap^{W} D, etc\ldots$



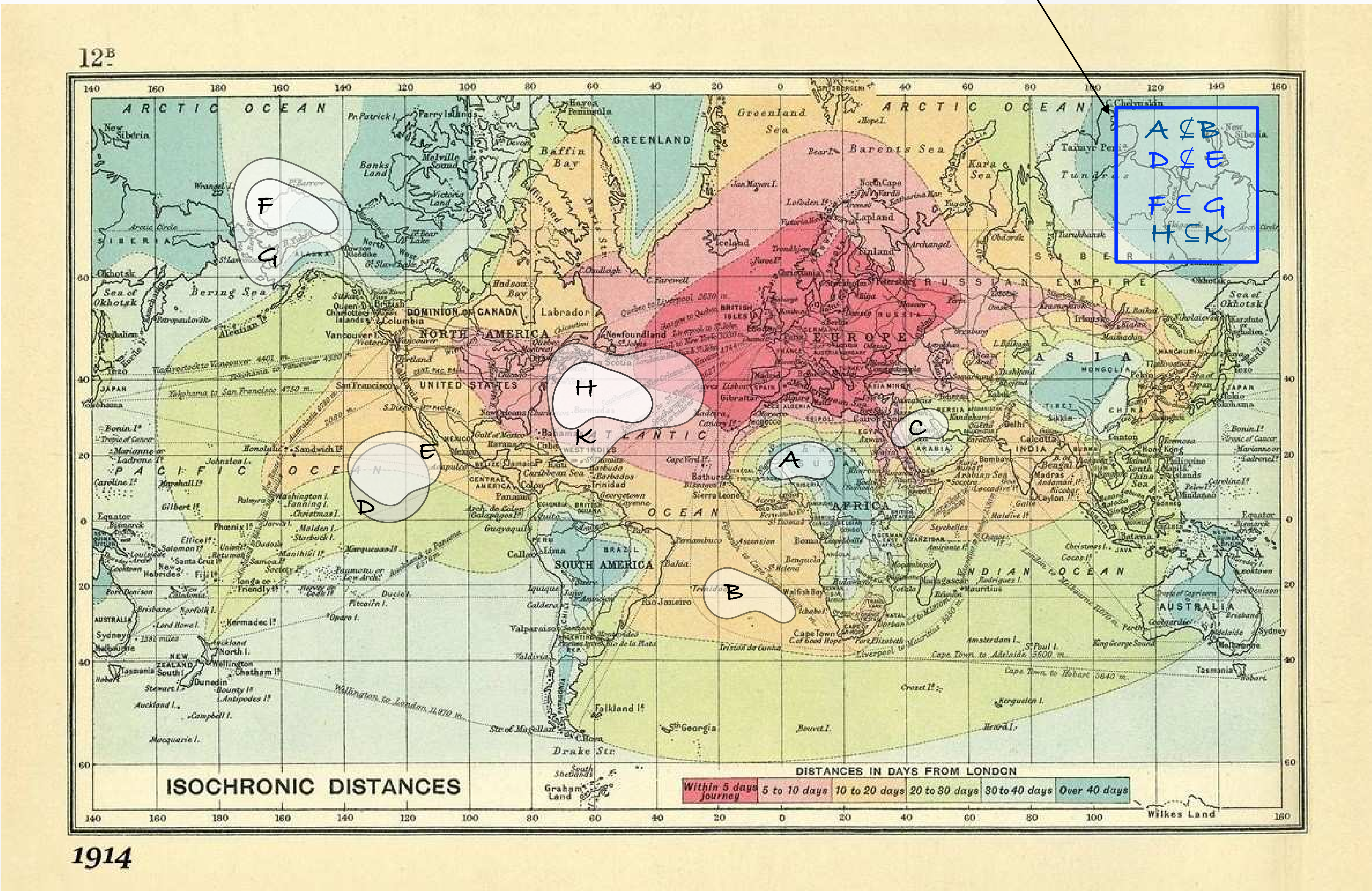
Detalle de un ejemplo:
Órdenes de actividad asociados a curvas de nivel o mapas de isolíneas

Distancias en días desde Londres



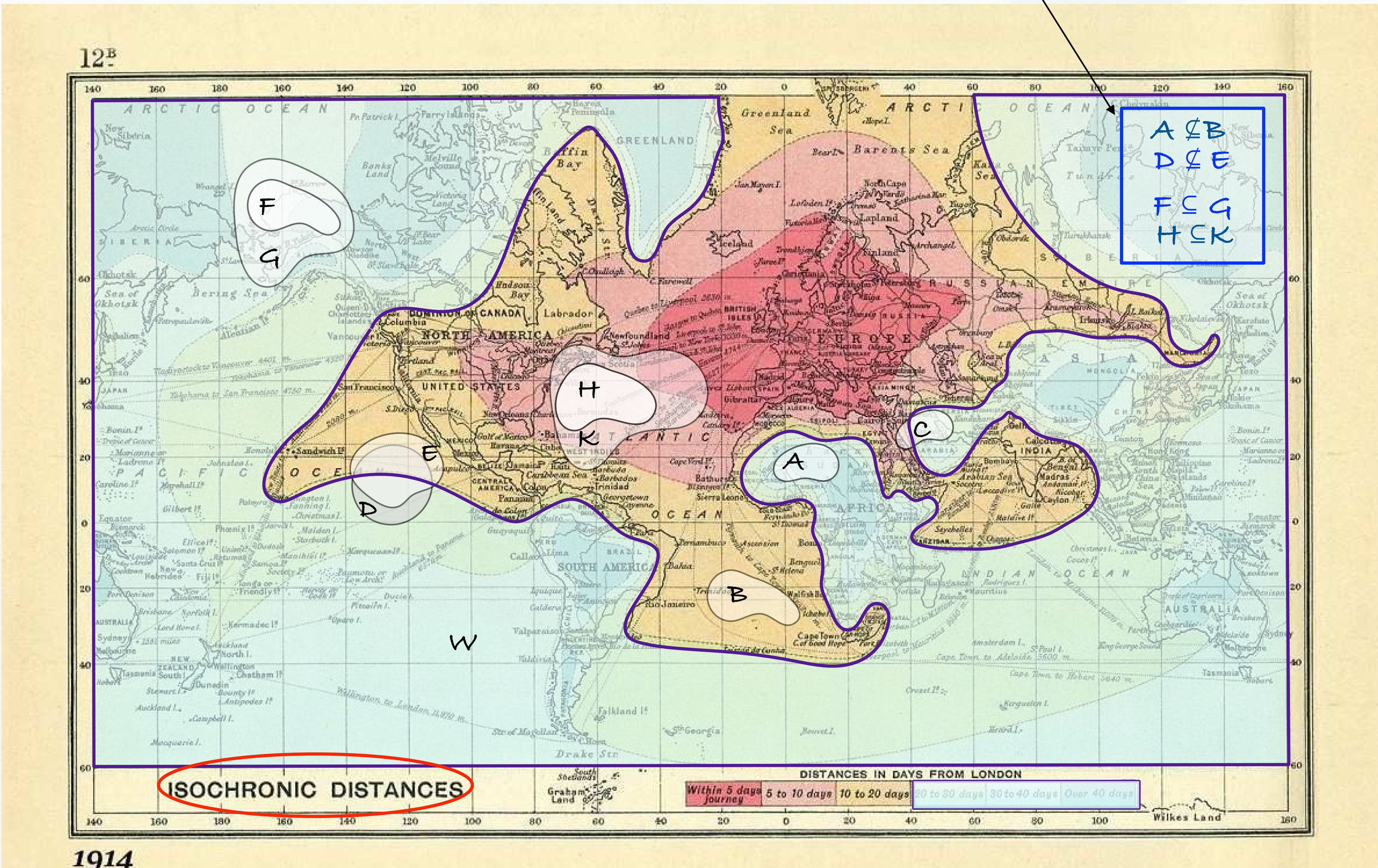
Distancias en días desde Londres

A, B,C,... subconjuntos nítidos o L-borrosos con la inclusión usual.



Distancias en días desde Londres

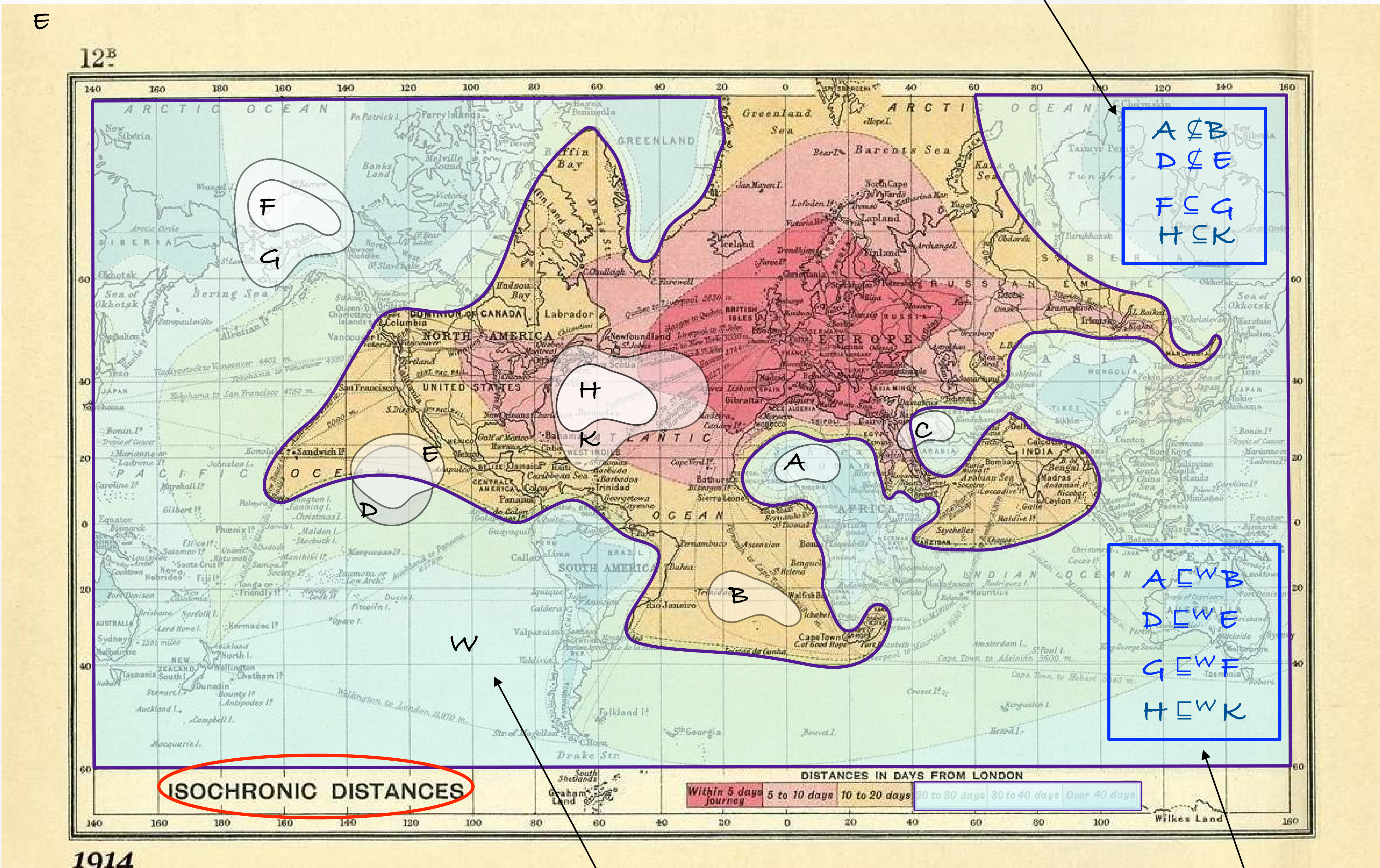
A, B,C,... subconjuntos nítidos o L-borrosos con la inclusión usual.



Subconjunto nítido $W \in P(E)$

Distancias en días desde Londres

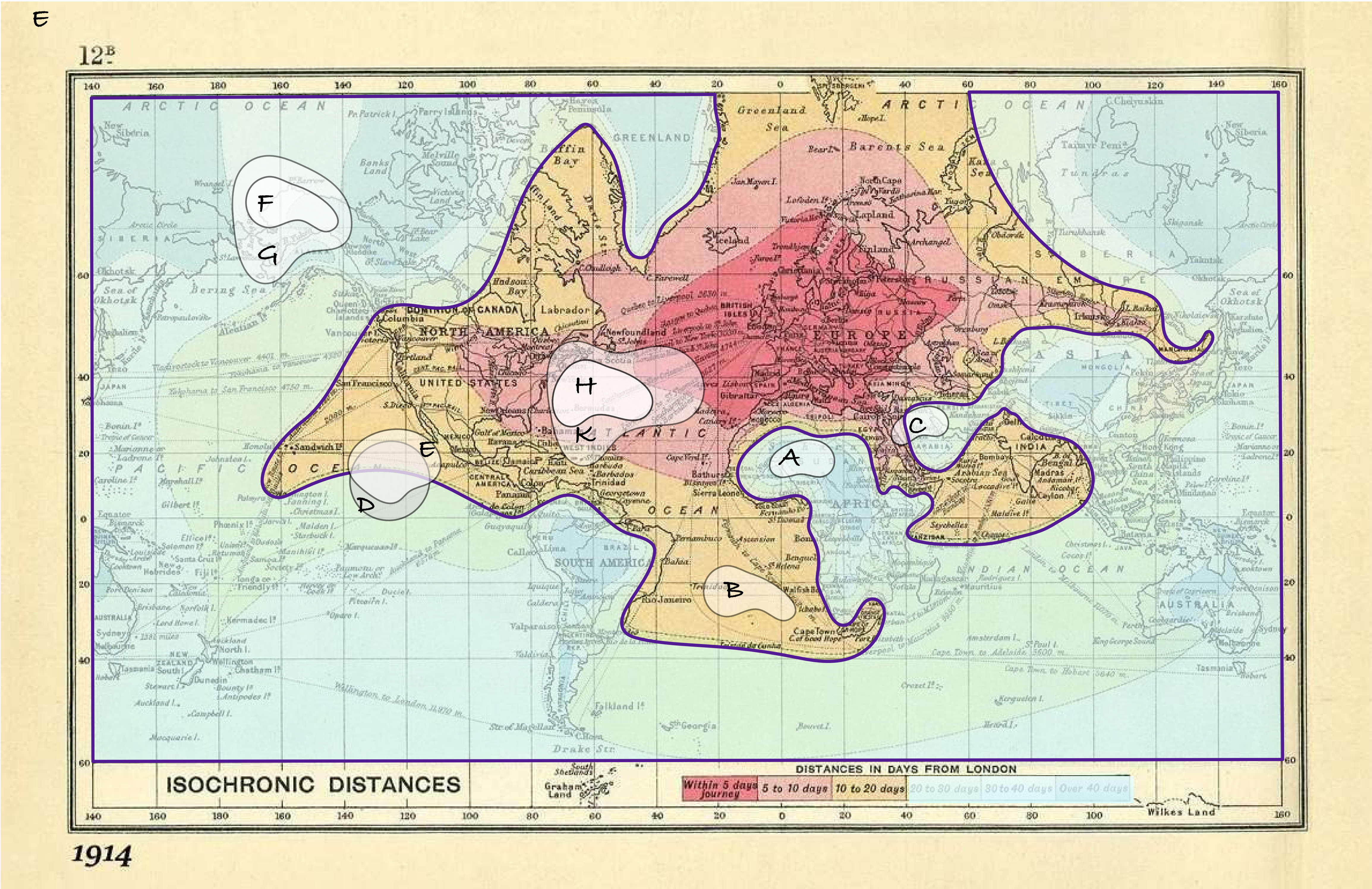
A, B,C,... subconjuntos nítidos o L-borrosos con la inclusión usual.



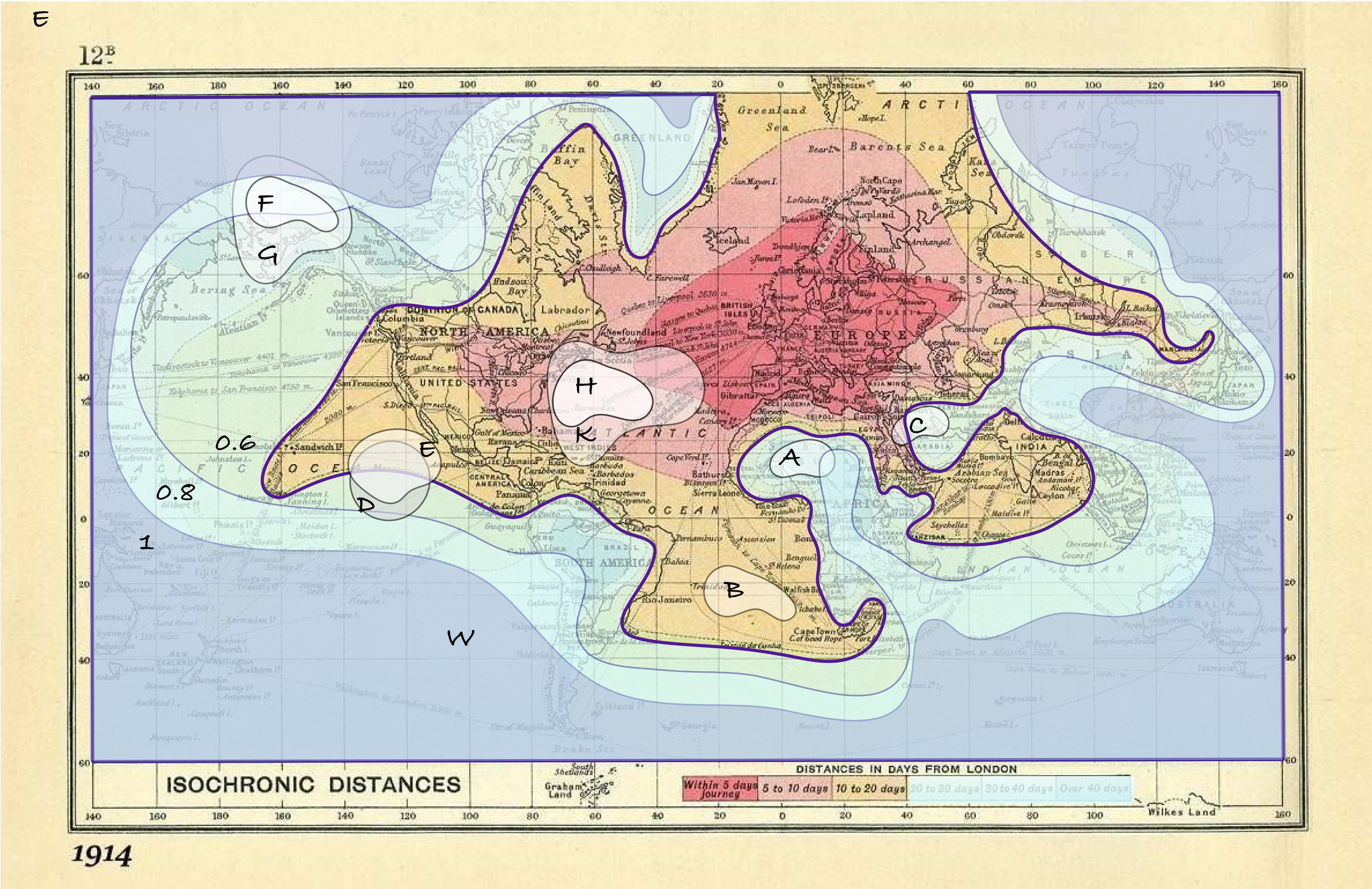
El orden $\sqsubseteq^{W}$ en mapas de isolíneas

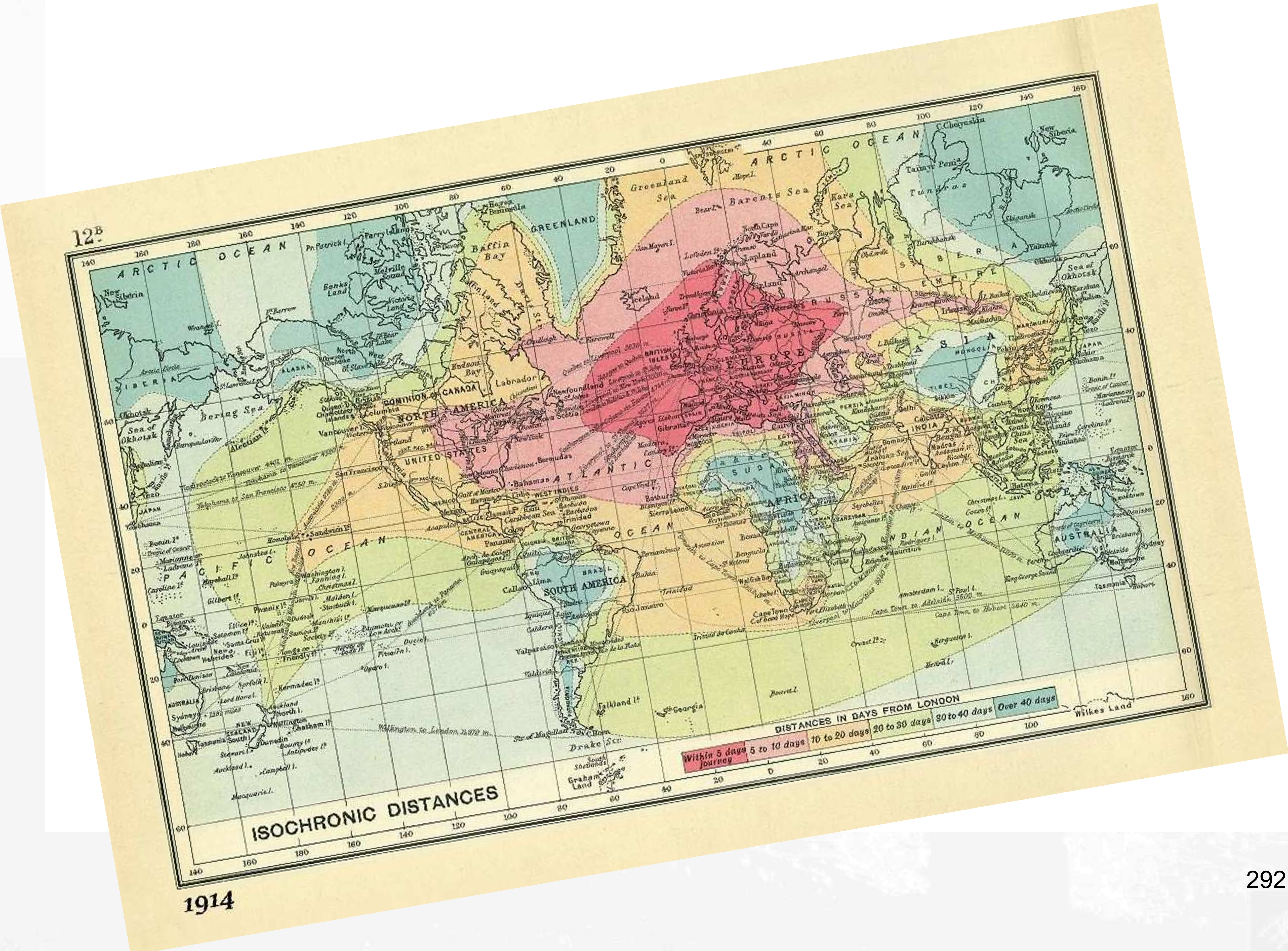
Subconjunto nítido $W \in P(E)$

La perspectiva asociada a "w" ,(más de 20 días) y ejemplos de "w-inclusiones".


E
12B
ISOCHRONIC DISTANCES
DISTANCES IN DAYS FROM LONDON
Within 5 days journey
5 to 10 days
10 to 20 days
20 to 30 days
30 to 40 days
Over 40 days
1914
A
B
C
D
E
F
G
H
K
ARCTIC OCEAN
NORTH AMERICA
UNITED STATES
SOUTH AMERICA
EUROPE
AFRICA
ASIA
INDIA
AUSTRALIA
GREENLAND
ATLANTIC
OCEAN
PACIFIC

W puede ser un subconjunto borroso: $W \in [0,1]^E$



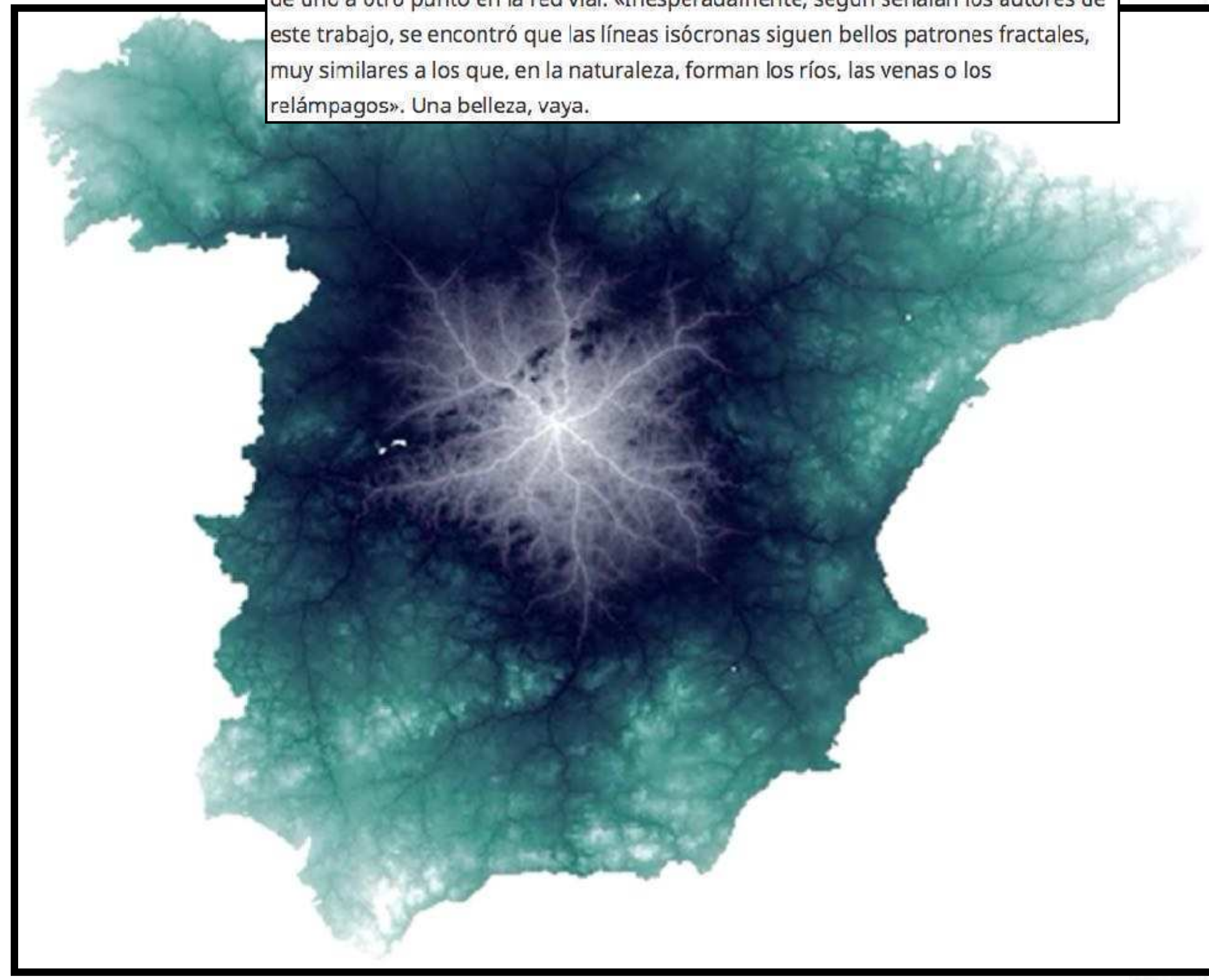

12B
ISOCHRONIC DISTANCES
1914
DISTANCES IN DAYS FROM LONDON
Within 5 days journey
5 to 10 days
10 to 20 days
20 to 30 days
30 to 40 days
Over 40 days

En la actualidad también tiene interés el uso de mapas de lineas isócronas:

En la actualidad también tiene interés el uso de mapas de lineas isócronas:

Determine drive-time or distance rings at any interval

Road Trees es un trabajo realizado por **SThAR**, una «spin-off» de la **Escuela Politécnica Federal de Lausanne**, en Suiza, que ha desarrollado **mapas isócronos de las principales carreteras de diez países**, entre ellos España. Para ello ha utilizado una hermosa paleta de colores que representa la dinámica de movimientos de uno a otro punto en la red vial. «Inesperadamente, según señalan los autores de este trabajo, se encontró que las líneas isócronas siguen bellos patrones fractales, muy similares a los que, en la naturaleza, forman los ríos, las venas o los relámpagos». Una belleza, vaya.



En la actualidad también tiene interés el uso de mapas de líneas isócronas:

Road Trees es un trabajo realizado por **SThAR**, una «spin-off» de la **Escuela Politécnica Federal de Lausanne**, en Suiza, que ha desarrollado **mapas isócronos de las principales carreteras de diez países**, entre ellos España. Para ello ha utilizado una hermosa paleta de colores que representa la dinámica de movimientos de uno a otro punto en la red vial. «Inesperadamente, según señalan los autores de este trabajo, se encontró que las líneas isócronas siguen bellos patrones fractales, muy similares a los que, en la naturaleza, forman los ríos, las venas o los relámpagos». Una belleza, vaya.

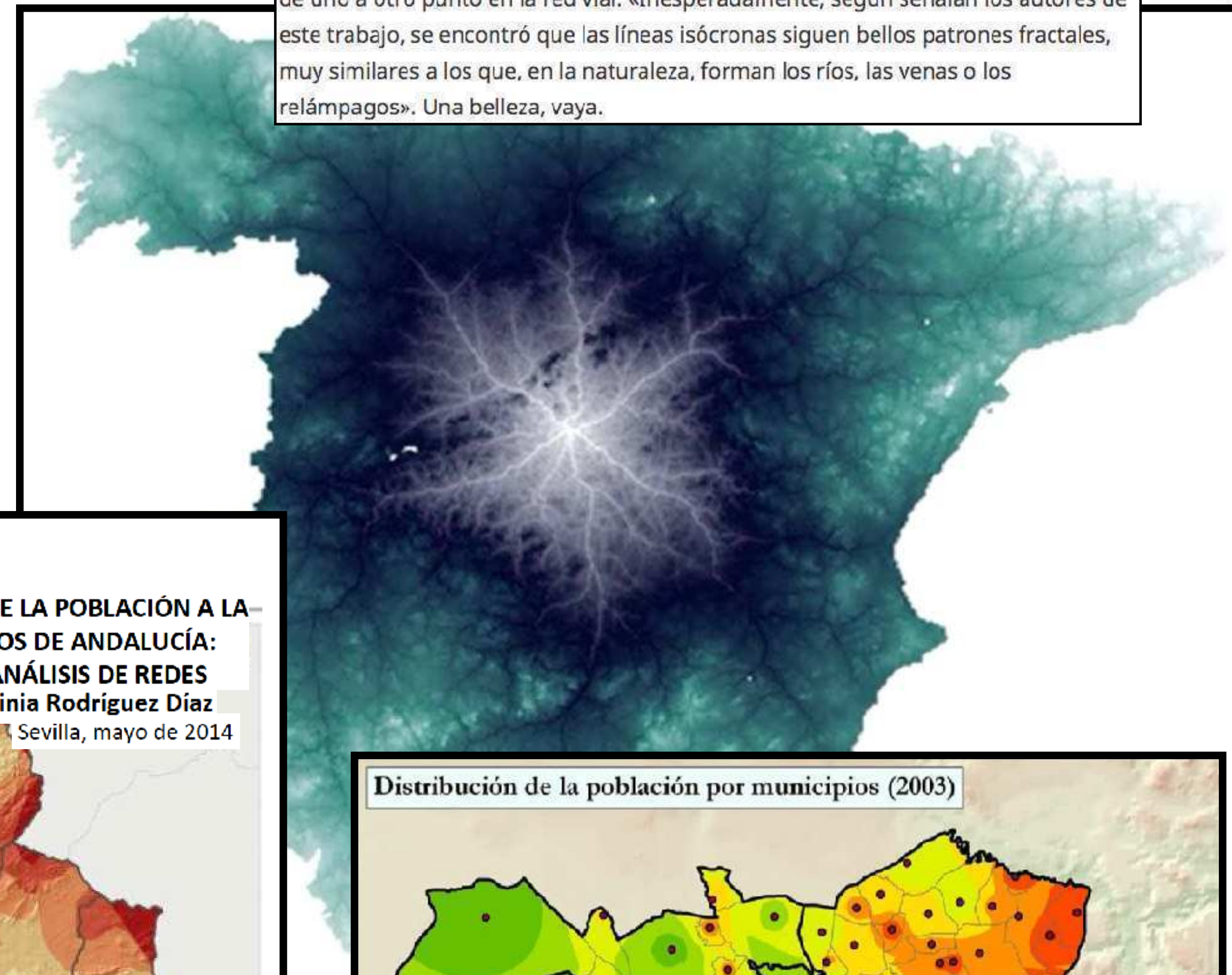
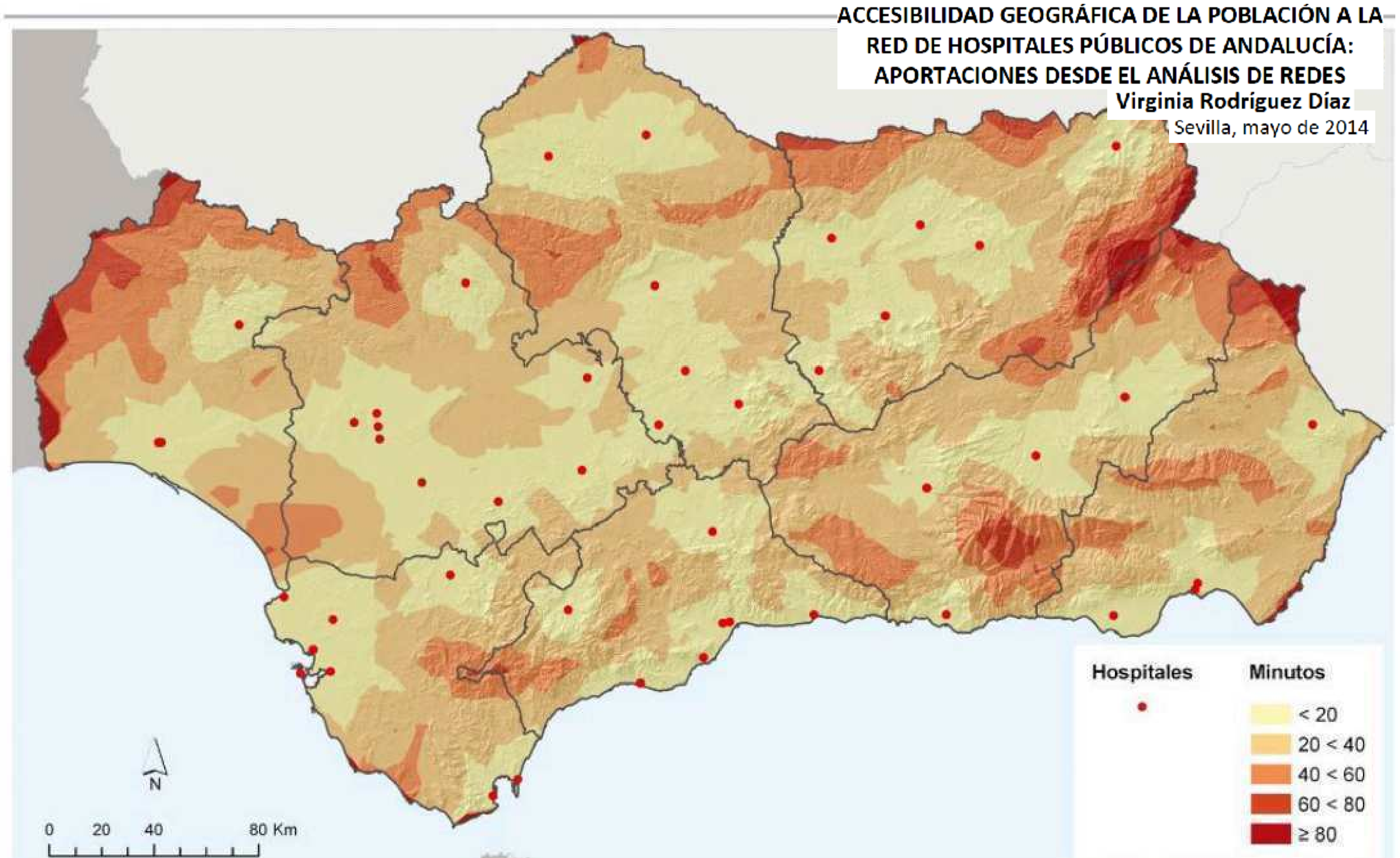
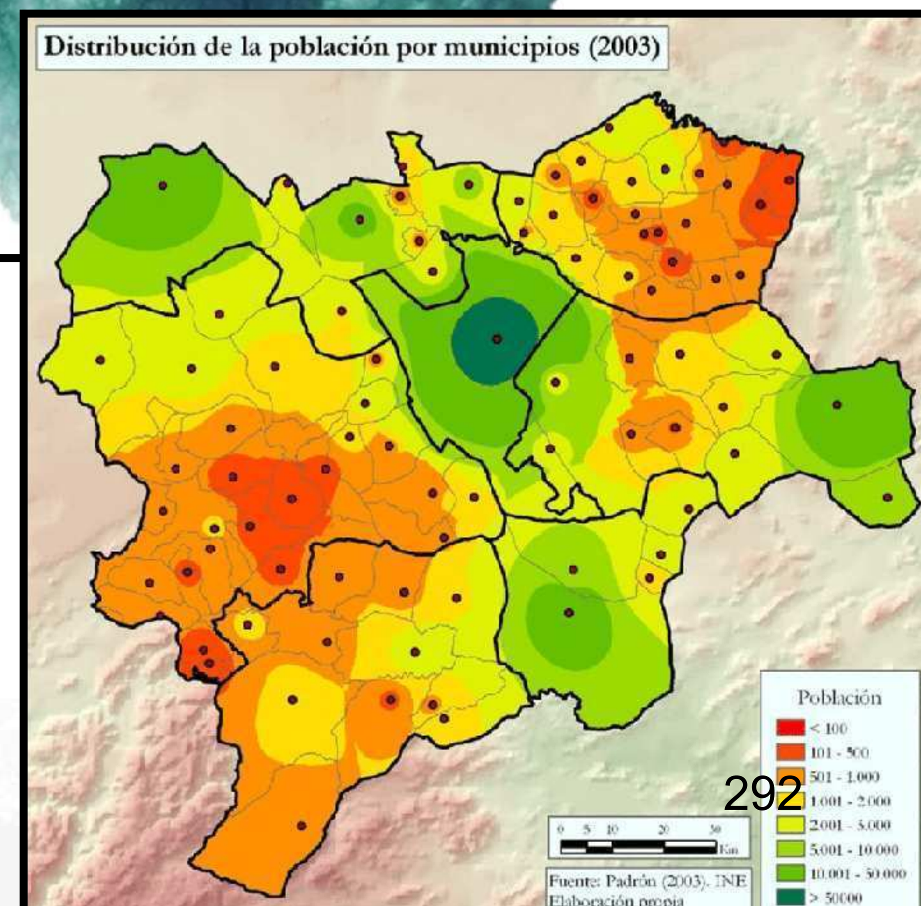


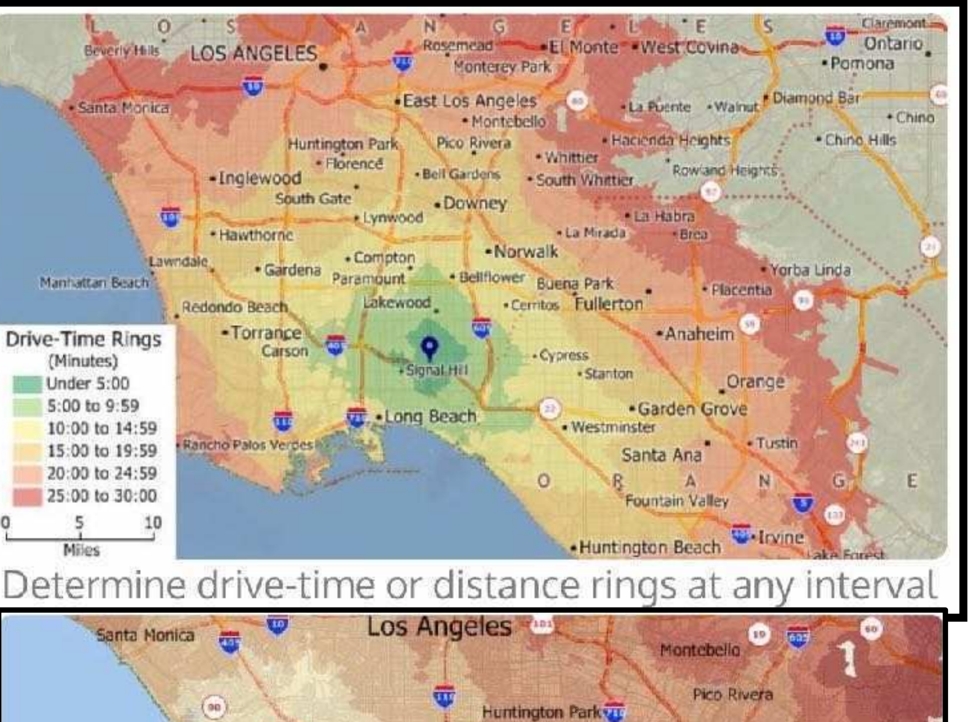
Figura 2.24.: Tiempo de acceso a la atención hospitalaria 2006.



Fuente: Pita y Pedregal 2011, p. 280.



En la actualidad también tiene interés el uso de mapas de líneas isócronas:



Road Trees es un trabajo realizado por **SThAR**, una «spin-off» de la **Escuela Politécnica Federal de Lausanne**, en Suiza, que ha desarrollado **mapas isócronos de las principales carreteras de diez países**, entre ellos España. Para ello ha utilizado una hermosa paleta de colores que representa la dinámica de movimientos de uno a otro punto en la red vial. «Inesperadamente, según señalan los autores de este trabajo, se encontró que las líneas isócronas siguen bellos patrones fractales, muy similares a los que, en la naturaleza, forman los ríos, las venas o los relámpagos». Una belleza, vaya.

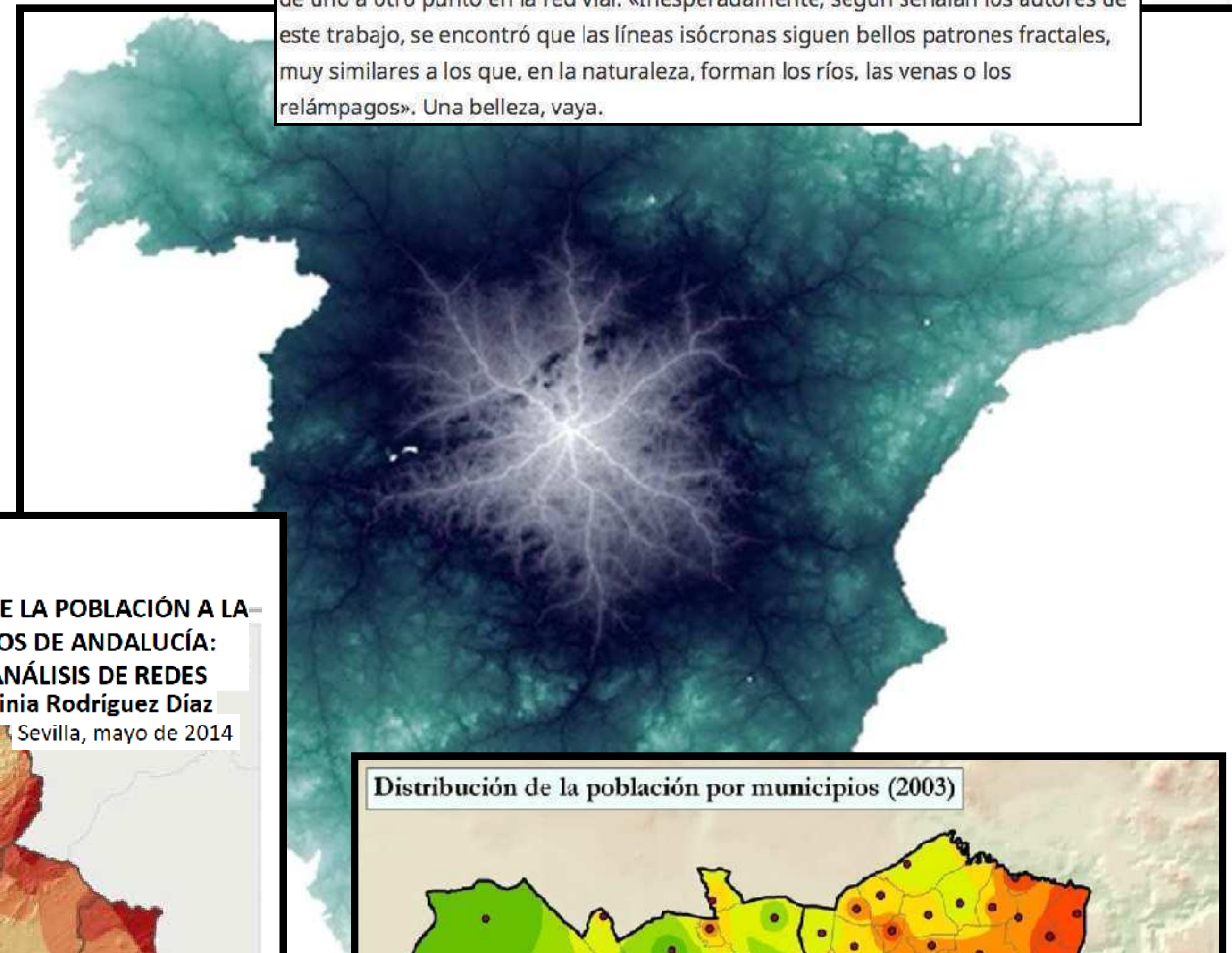
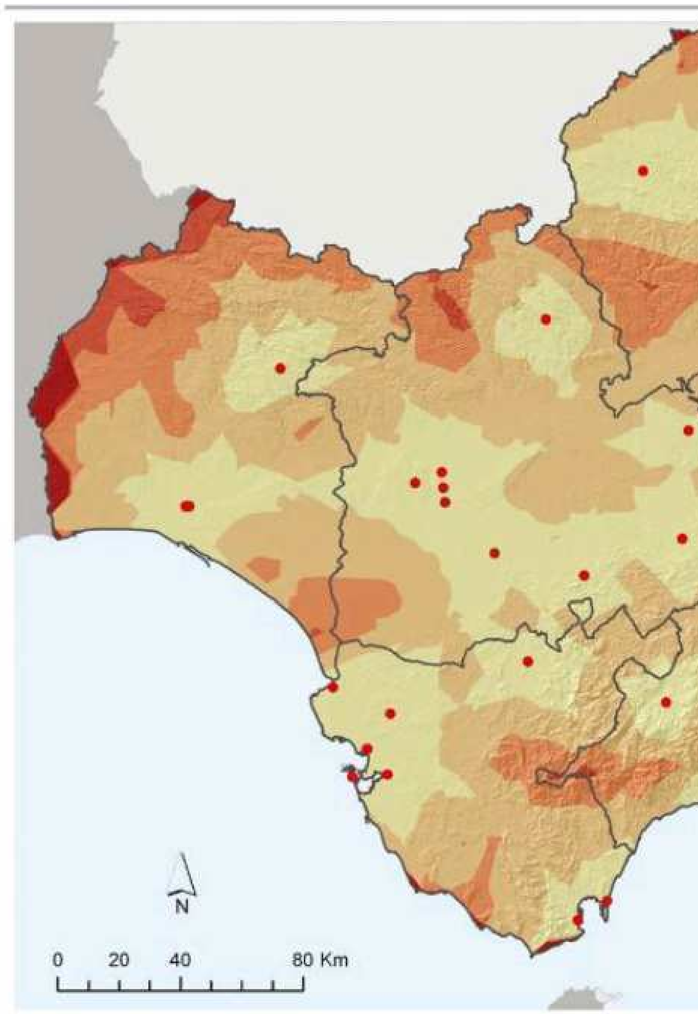
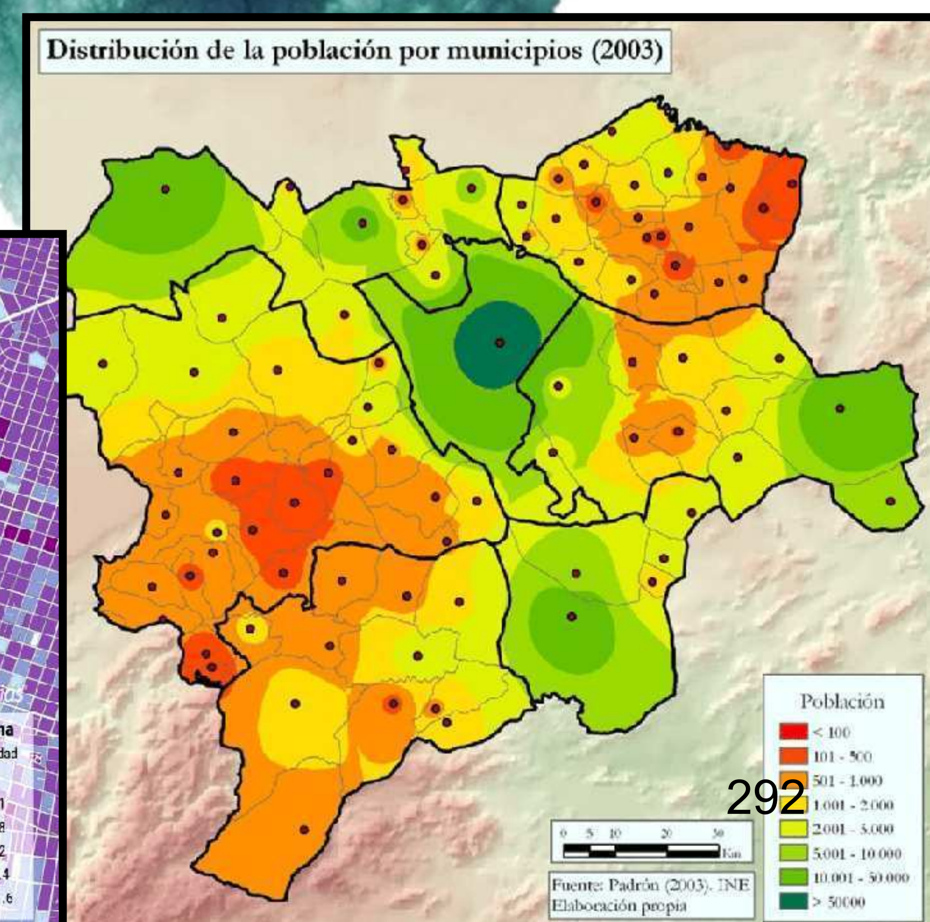


Figura 2.24.: Tiempo de acceso a la atención hospitalaria 2006.

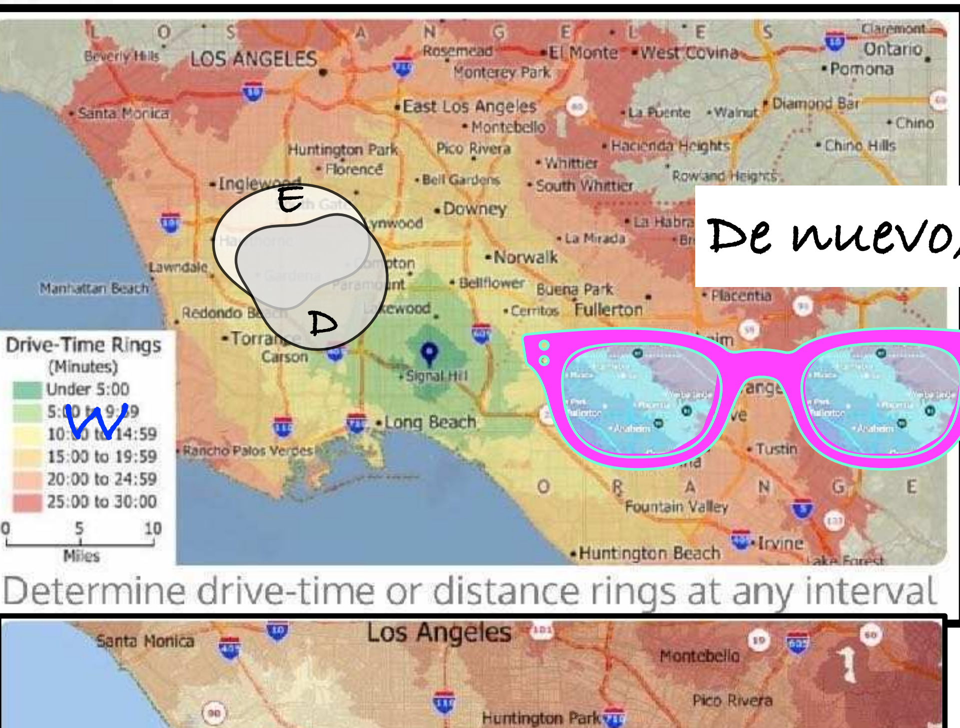
ACCESIBILIDAD GEOGRÁFICA DE LA POBLACIÓN A LA RED DE HOSPITALES PÚBLICOS DE ANDALUCÍA: APORTACIONES DESDE EL ANÁLISIS DE REDES
Virginia Rodríguez Díaz
Sevilla, mayo de 2014



Fuente: Pita y Pedregal 2011, p. 280.



En cada uno de ellos puede considerarse "inclusión con perspectiva"...



De nuevo, posibles "w-inclusiones":

$A \sqsubseteq^{w} B$

$D \sqsubseteq^{w} E$

$G \sqsubseteq^{w} F$

$H \sqsubseteq^{w} K$

etc...

Road Trees es un trabajo realizado por **SThAR**, una «spin-off» de la **Escuela Politécnica Federal de Lausanne**, en Suiza, que ha desarrollado **mapas isócronos de las principales carreteras de diez países**, entre ellos España. Para ello ha utilizado una hermosa paleta de colores que representa la dinámica de movimientos de uno a otro punto en la red vial. «Inesperadamente, según señalan los autores de este trabajo, se encontró que las líneas isócronas siguen bellos patrones fractales, muy similares a los que, en la naturaleza, forman los ríos, las venas o los relámpagos». Una belleza, vaya.

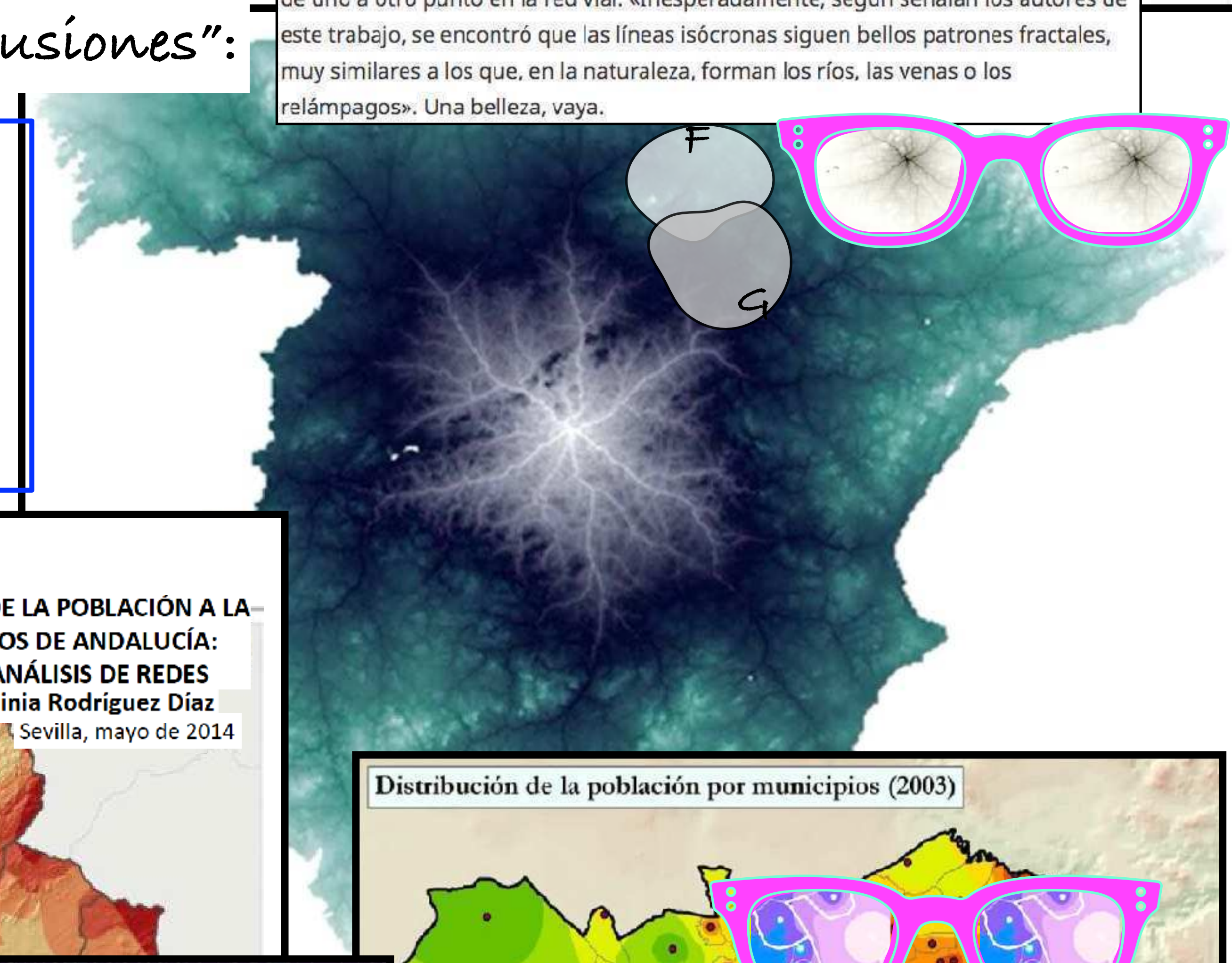
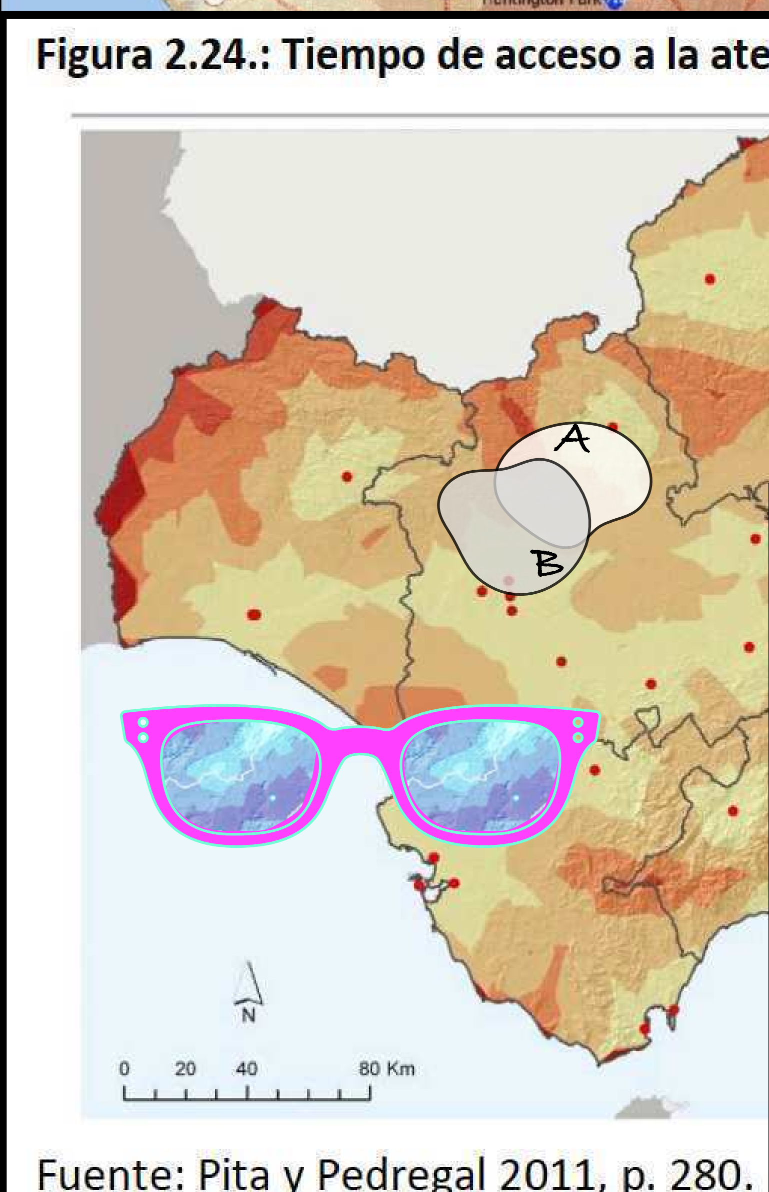
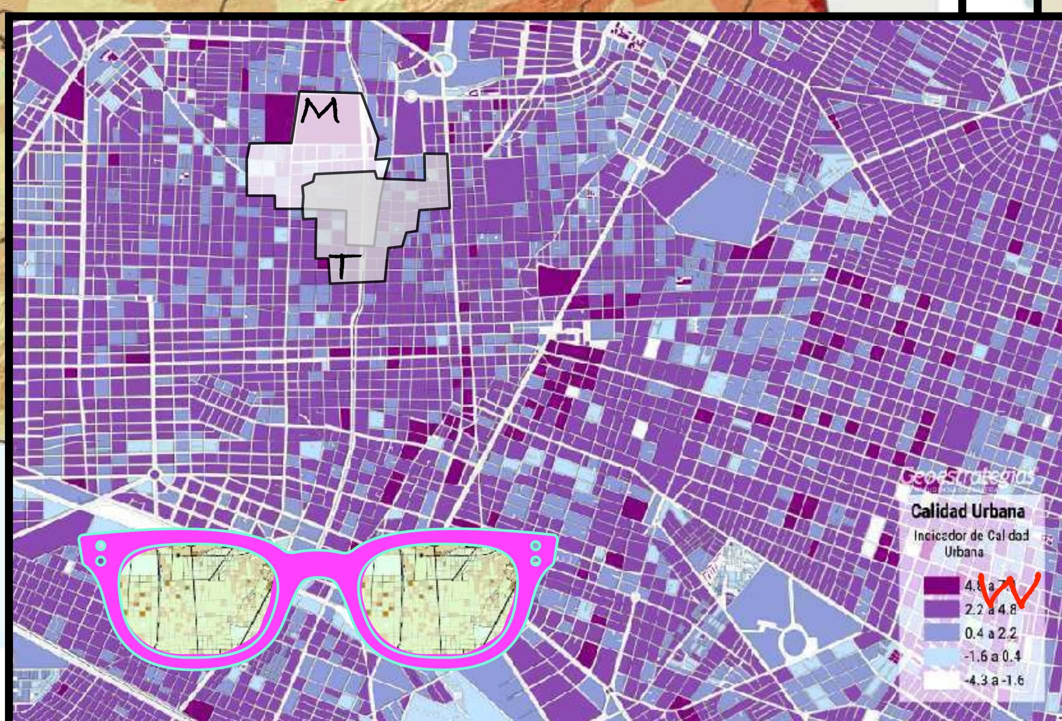


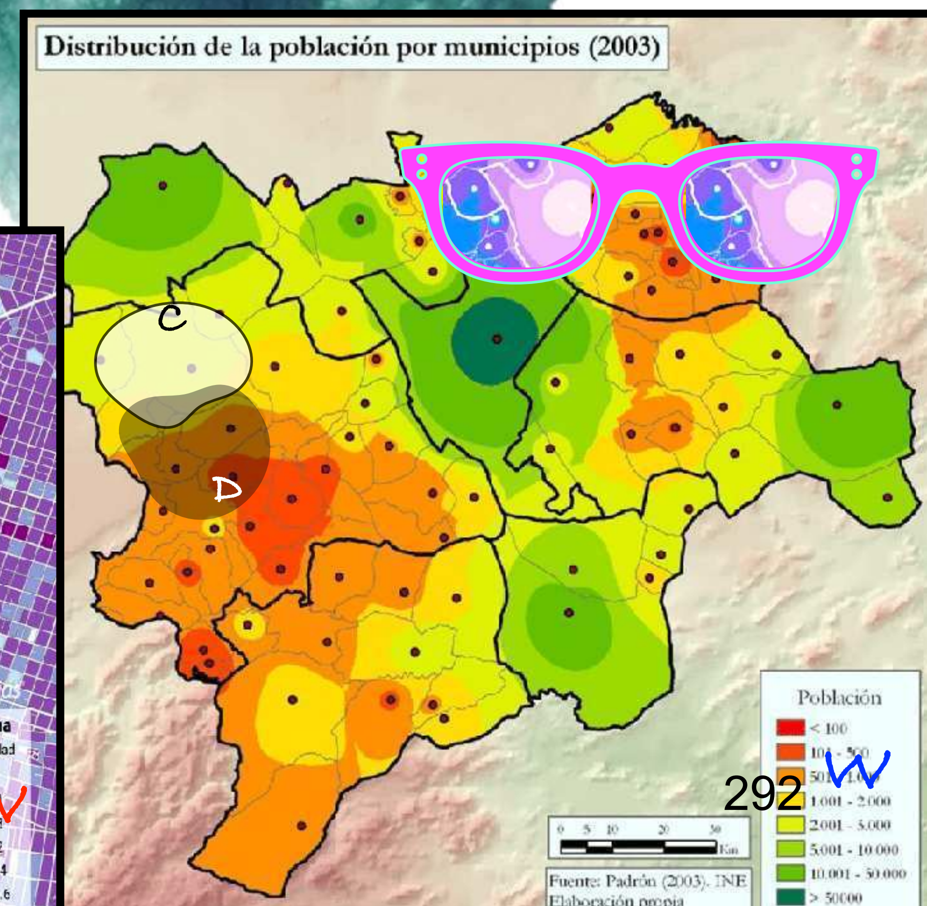
Figura 2.24.: Tiempo de acceso a la atención hospitalaria 2006.

ACCESIBILIDAD GEOGRÁFICA DE LA POBLACIÓN A LA RED DE HOSPITALES PÚBLICOS DE ANDALUCÍA: APORTACIONES DESDE EL ANÁLISIS DE REDES
Virginia Rodríguez Díaz
Sevilla, mayo de 2014

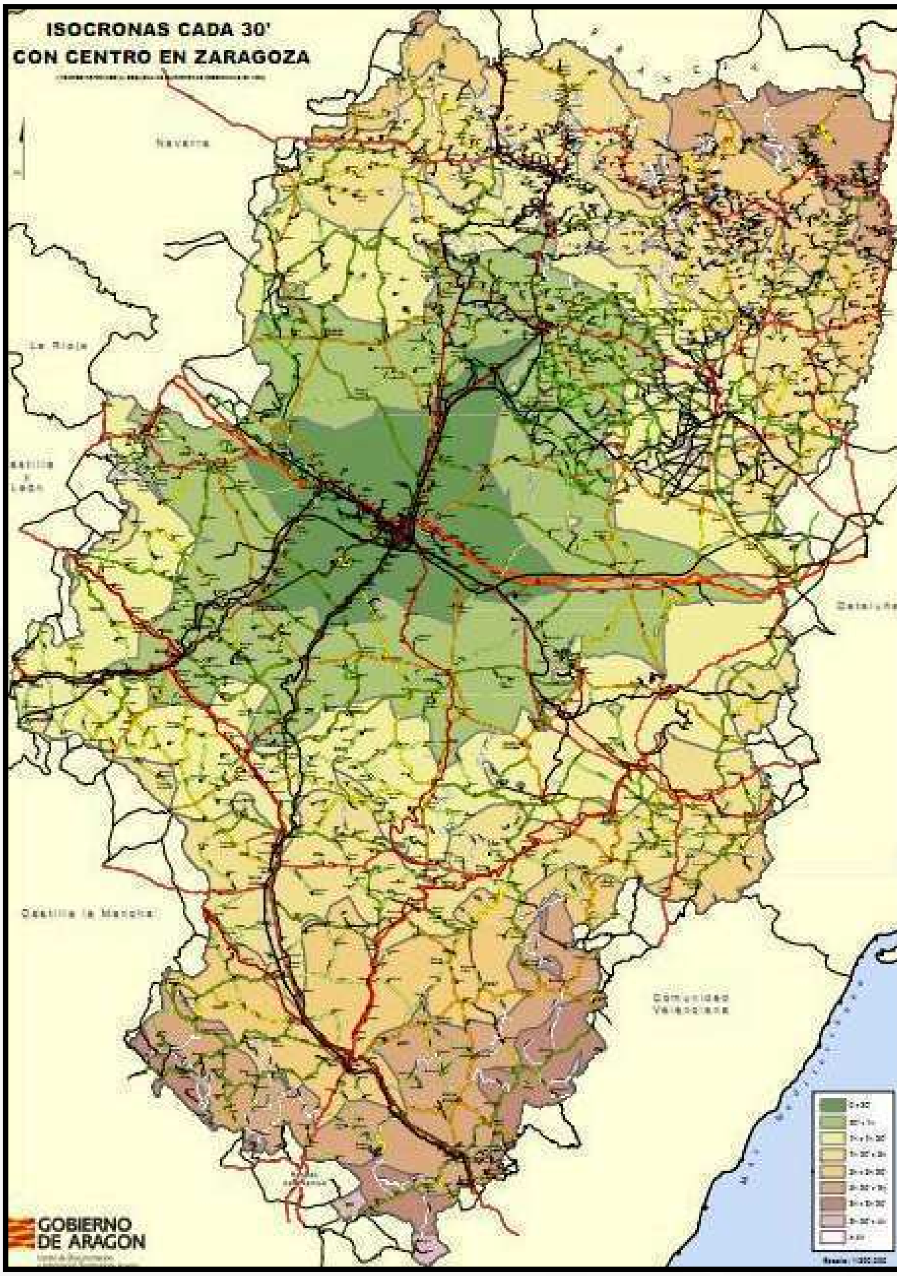


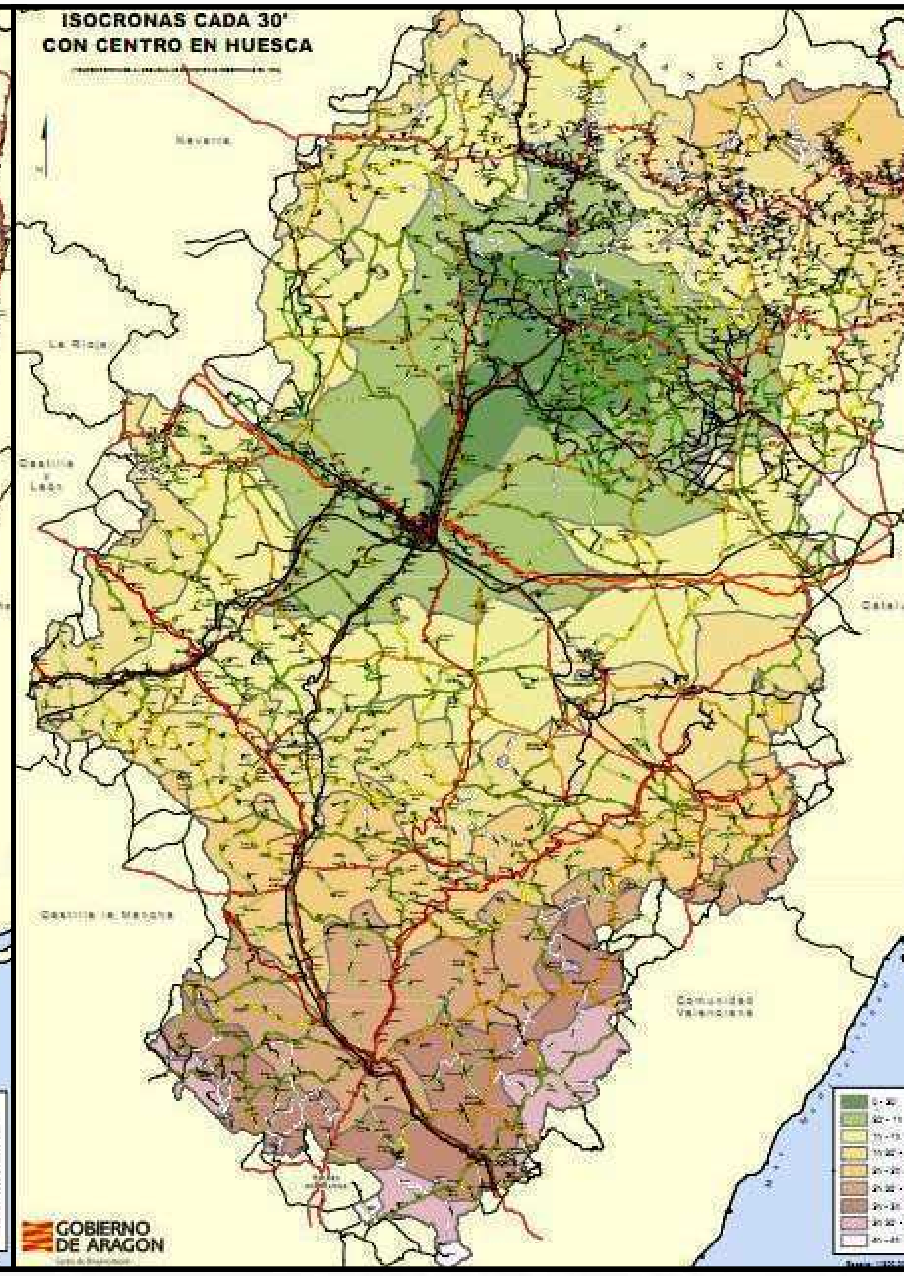
Fuente: Pita y Pedregal 2011, p. 280.

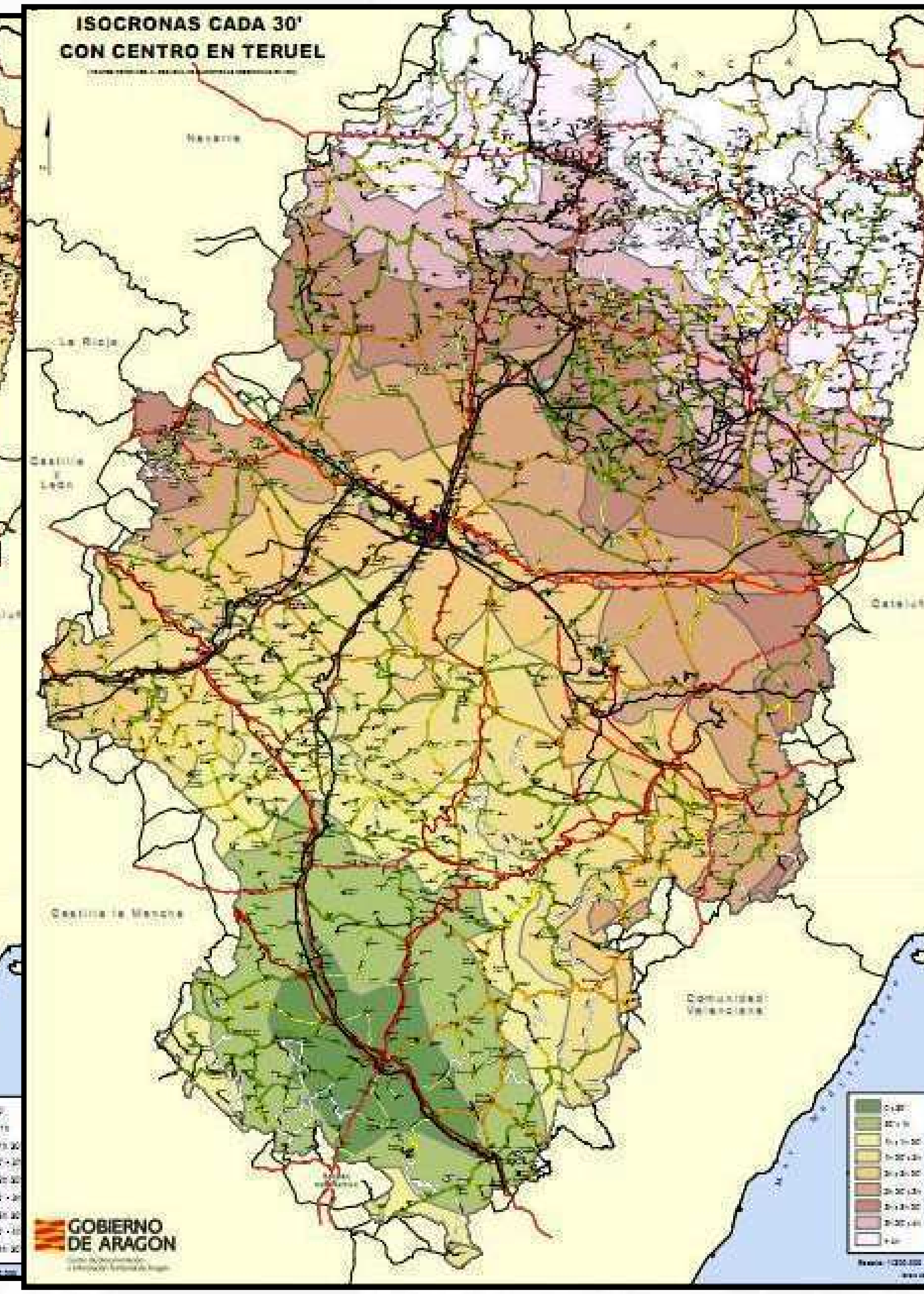




Otro ejemplo: Isócronas en las provincias de la Comunidad de Aragón (Spain): Zaragoza, Huesca, Teruel.

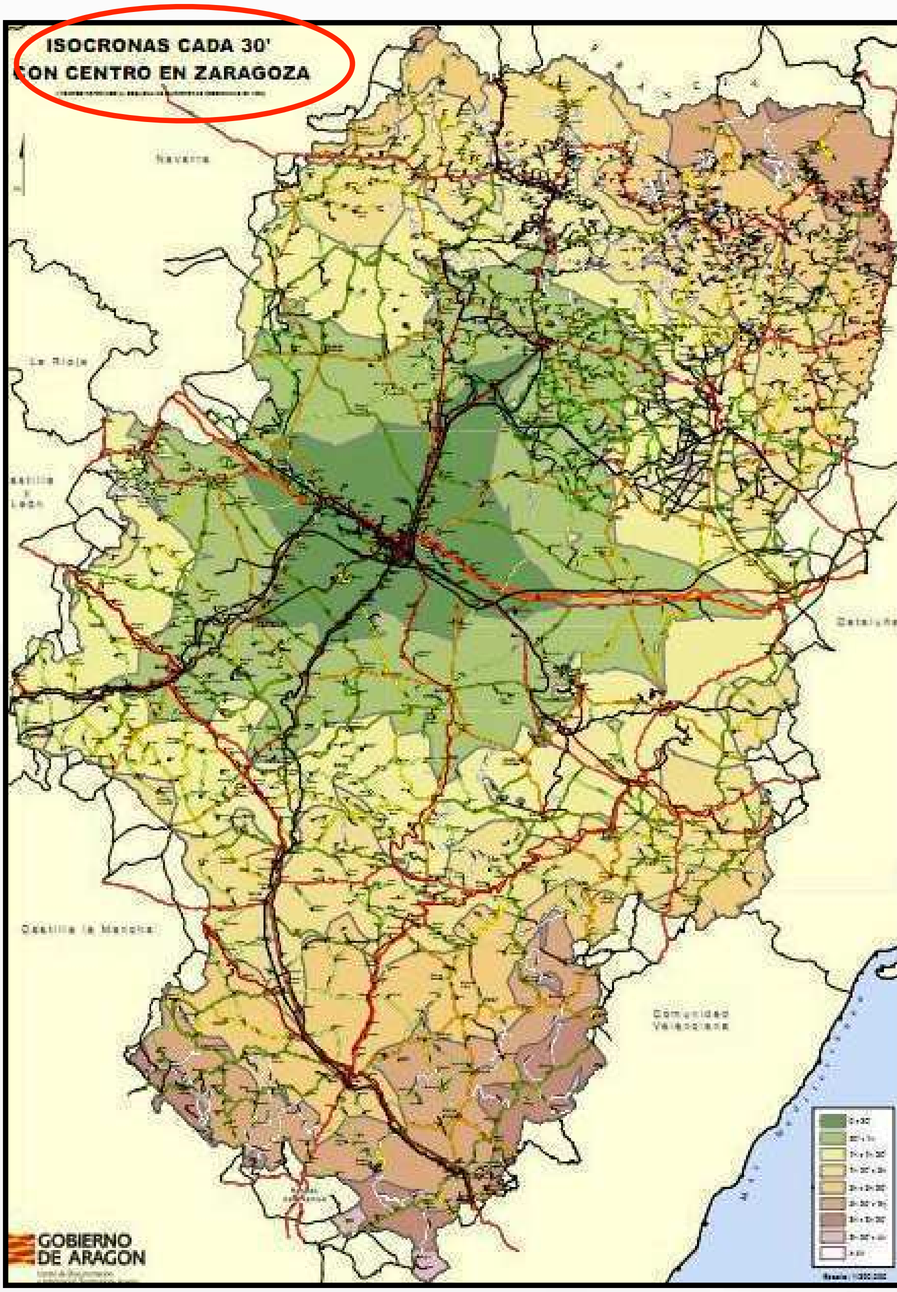


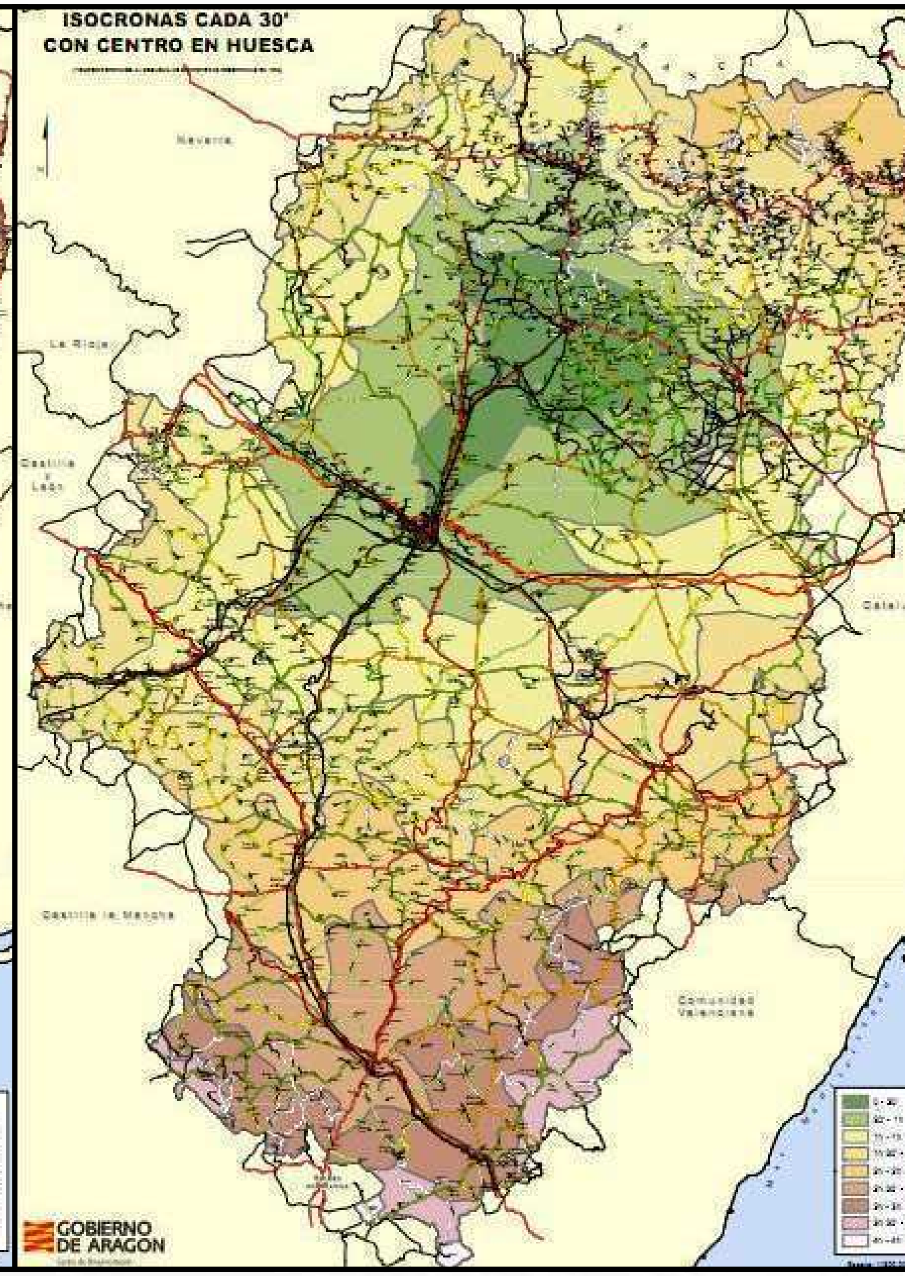


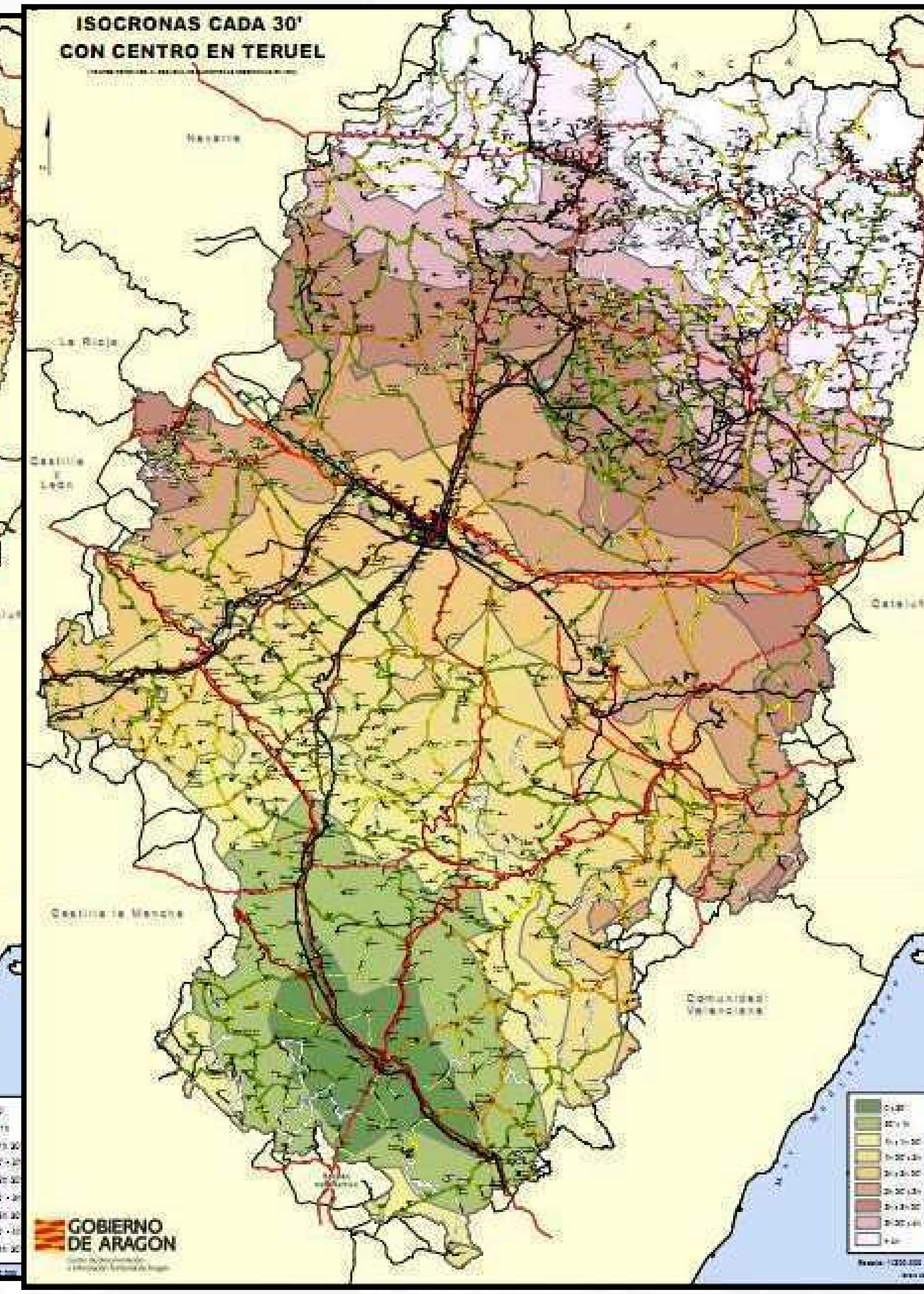


Las isocronas unen los puntos a los que se llega en un mismo tiempo desde un origen fijado. De esta forma se pueden crear mapas muy interesantes que varían notablemente en función de la calidad de las comunicaciones. Como muestra pongo tres ejemplos de mapas de isocronas por carretera para Zaragoza, Huesca y Teruel. Estos mapas han sido elaborados por el SITAR (Sistema de Información Territorial de Aragón) y en su página web se pueden descargar.

Otro ejemplo: Isócronas en las provincias de la Comunidad de Aragón (Spain): Zaragoza, Huesca, Teruel.

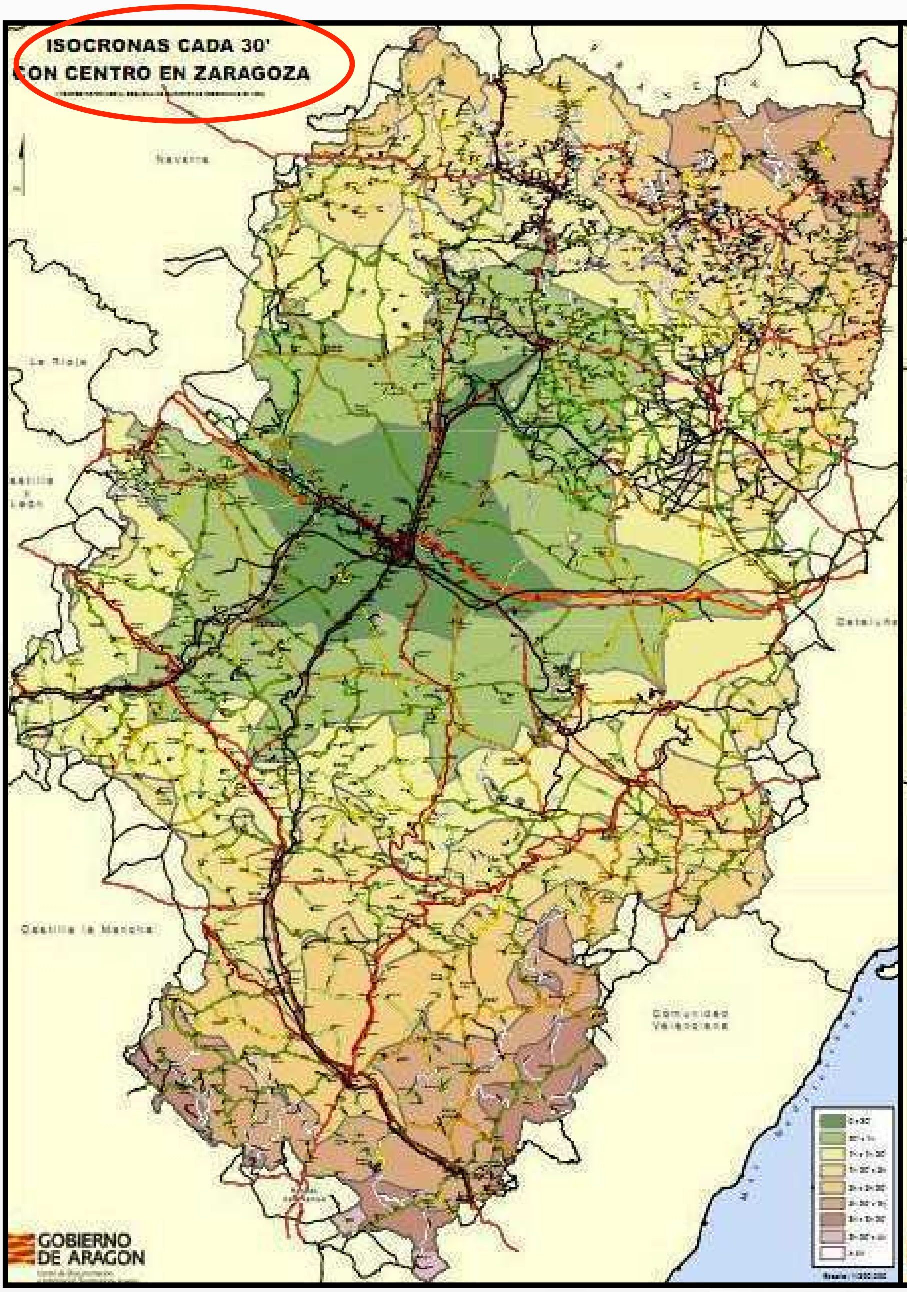


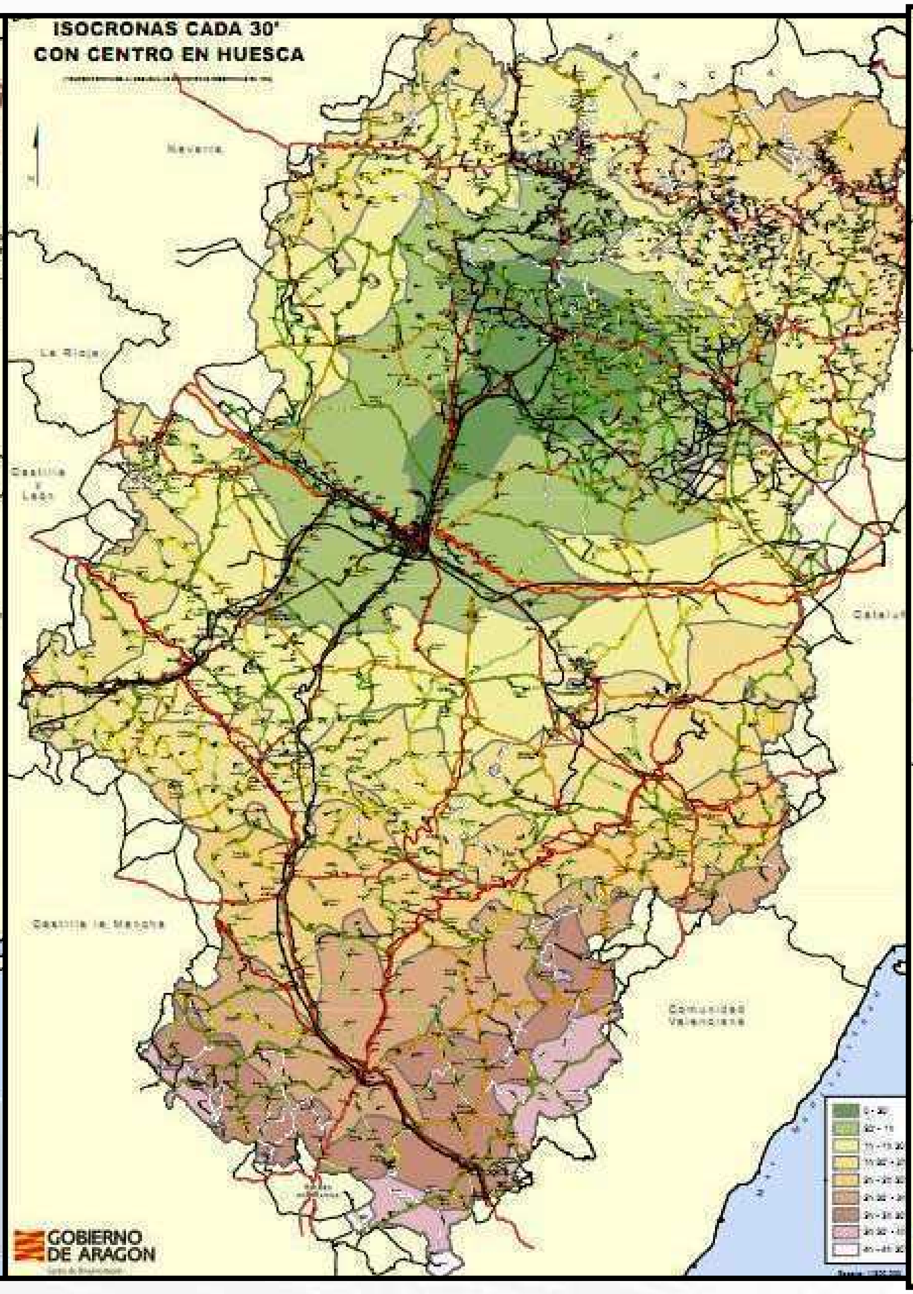


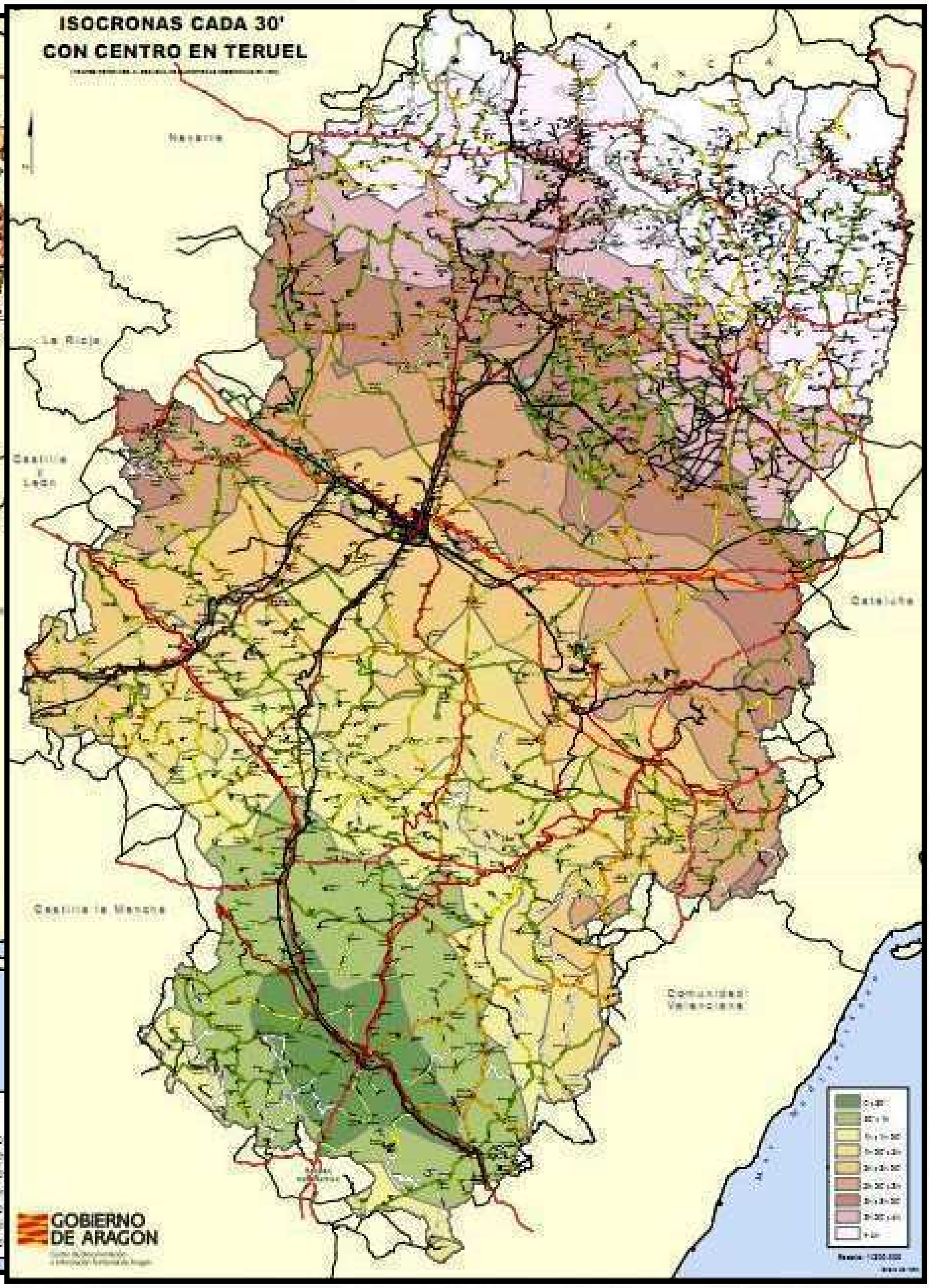


Las isocronas unen los puntos a los que se llega en un mismo tiempo desde un origen fijado. De esta forma se pueden crear mapas muy interesantes que varían notablemente en función de la calidad de las comunicaciones. Como muestra pongo tres ejemplos de mapas de isocronas por carretera para Zaragoza, Huesca y Teruel. Estos mapas han sido elaborados por el SITAR (Sistema de Información Territorial de Aragón) y en su página web se pueden descargar.

Otro ejemplo: Isócronas en las provincias de la Comunidad de Aragón (Spain): Zaragoza, Huesca, Teruel.





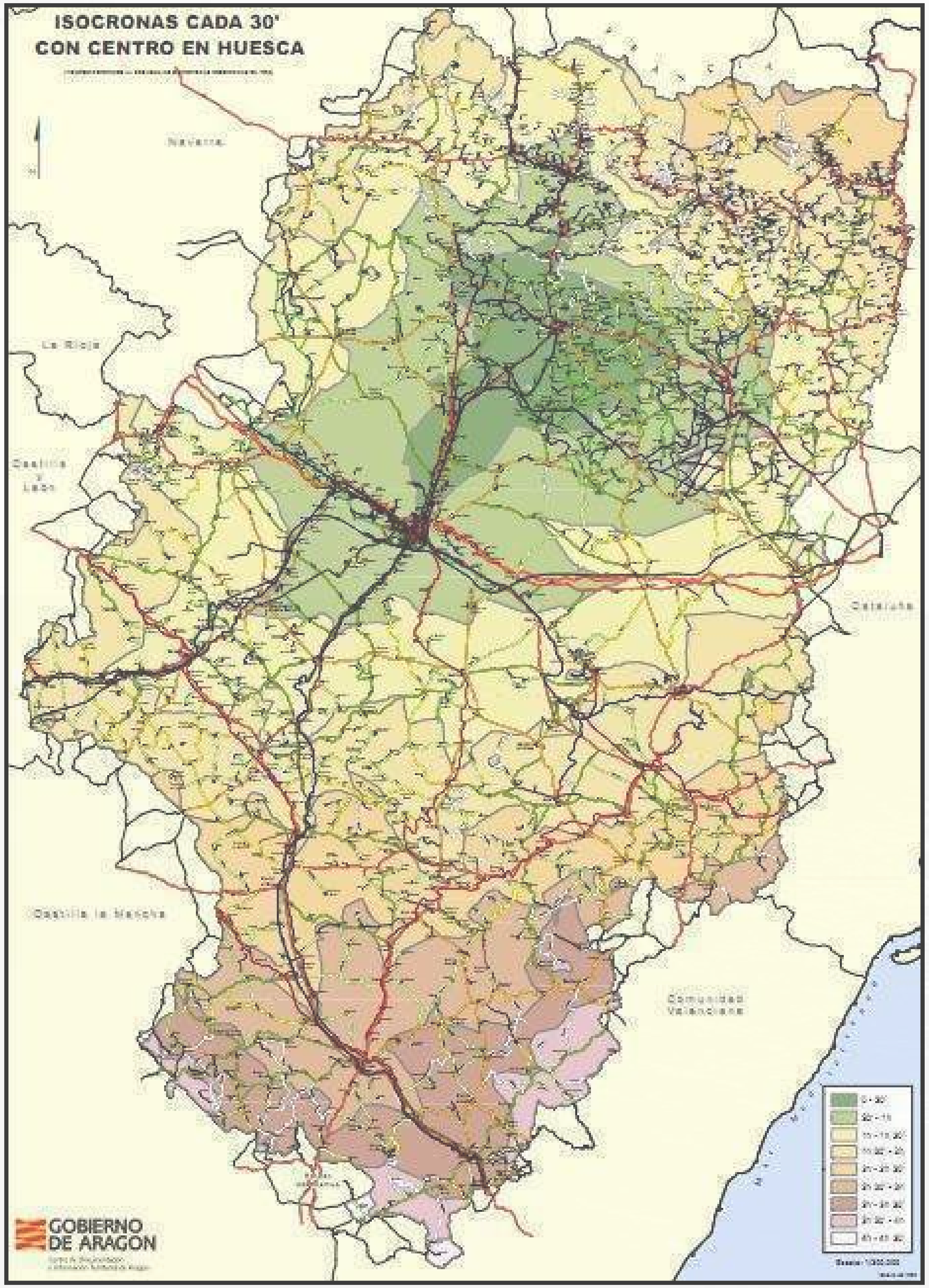


Las isocronas unen los puntos a los que se llega en un mismo tiempo desde un origen fijado. De esta forma se pueden crear mapas muy interesantes que varían notablemente en función de la calidad de las comunicaciones. Como muestra pongo tres ejemplos de mapas de isocronas por carretera para Zaragoza, Huesca y Teruel. Estos mapas han sido elaborados por el SITAR (Sistema de Información Territorial de Aragón) y en su página web se pueden descargar.

Una agregación de la información de los tres mapas:

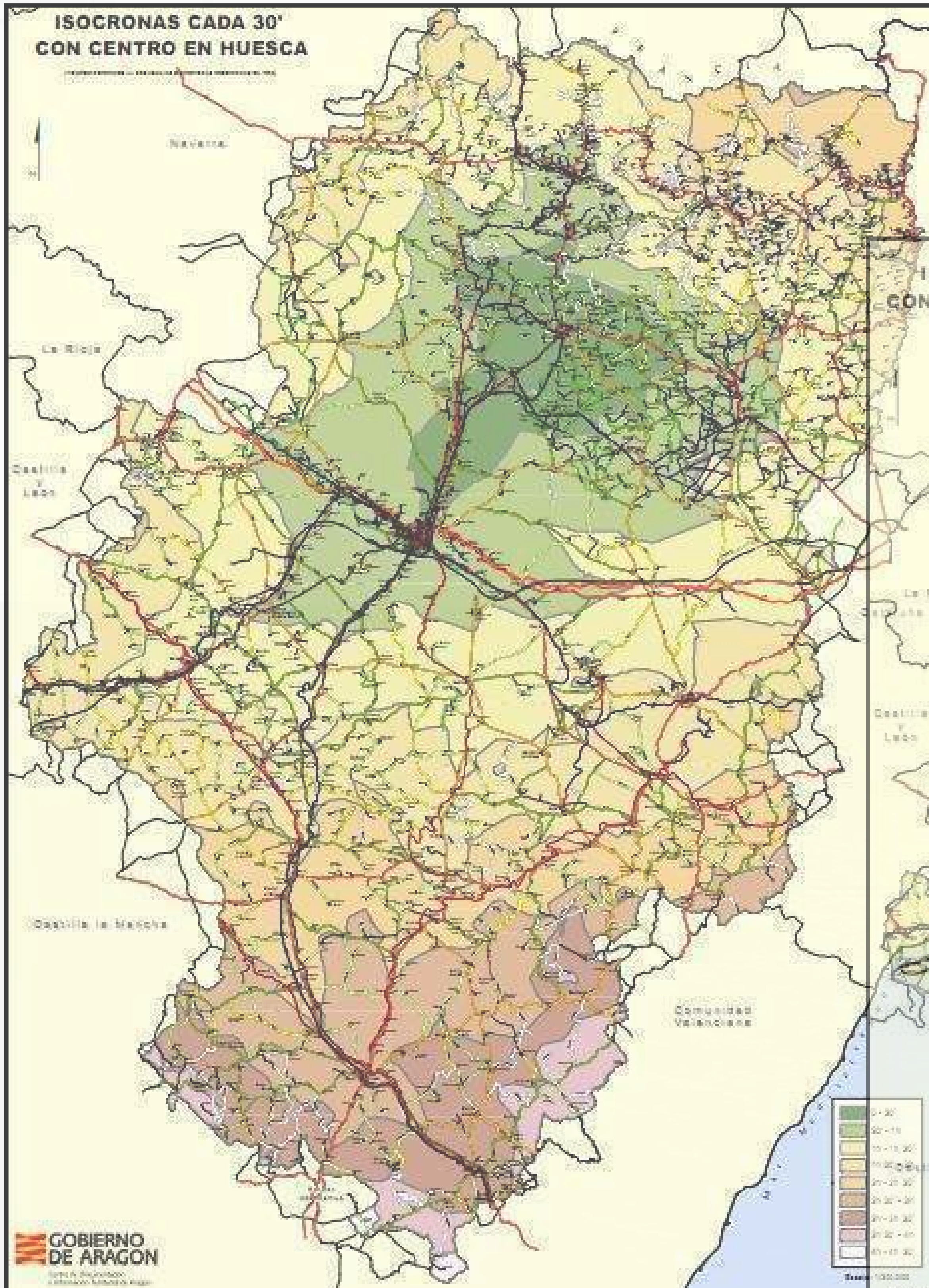
El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)

El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)

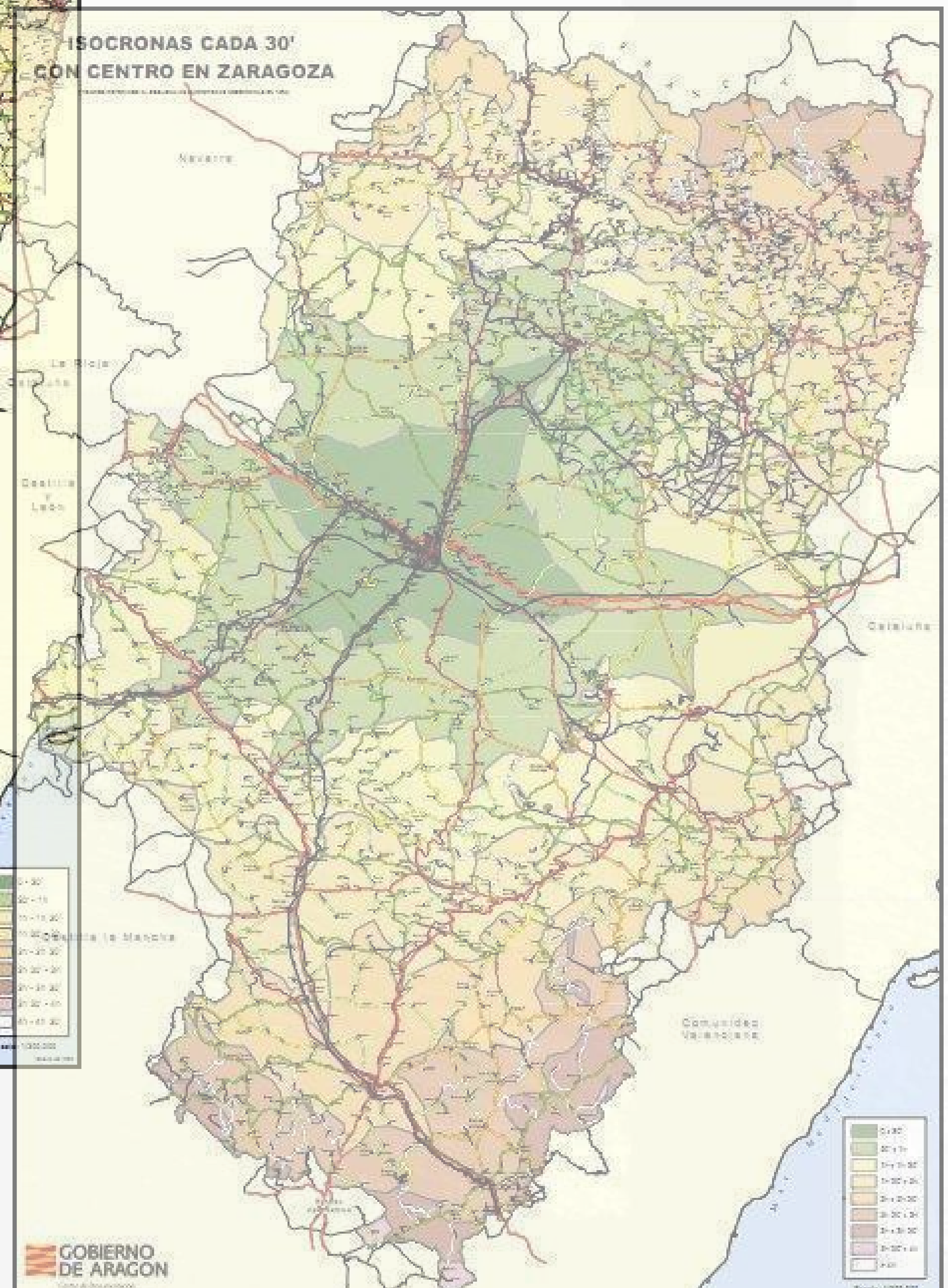


(Huesca)

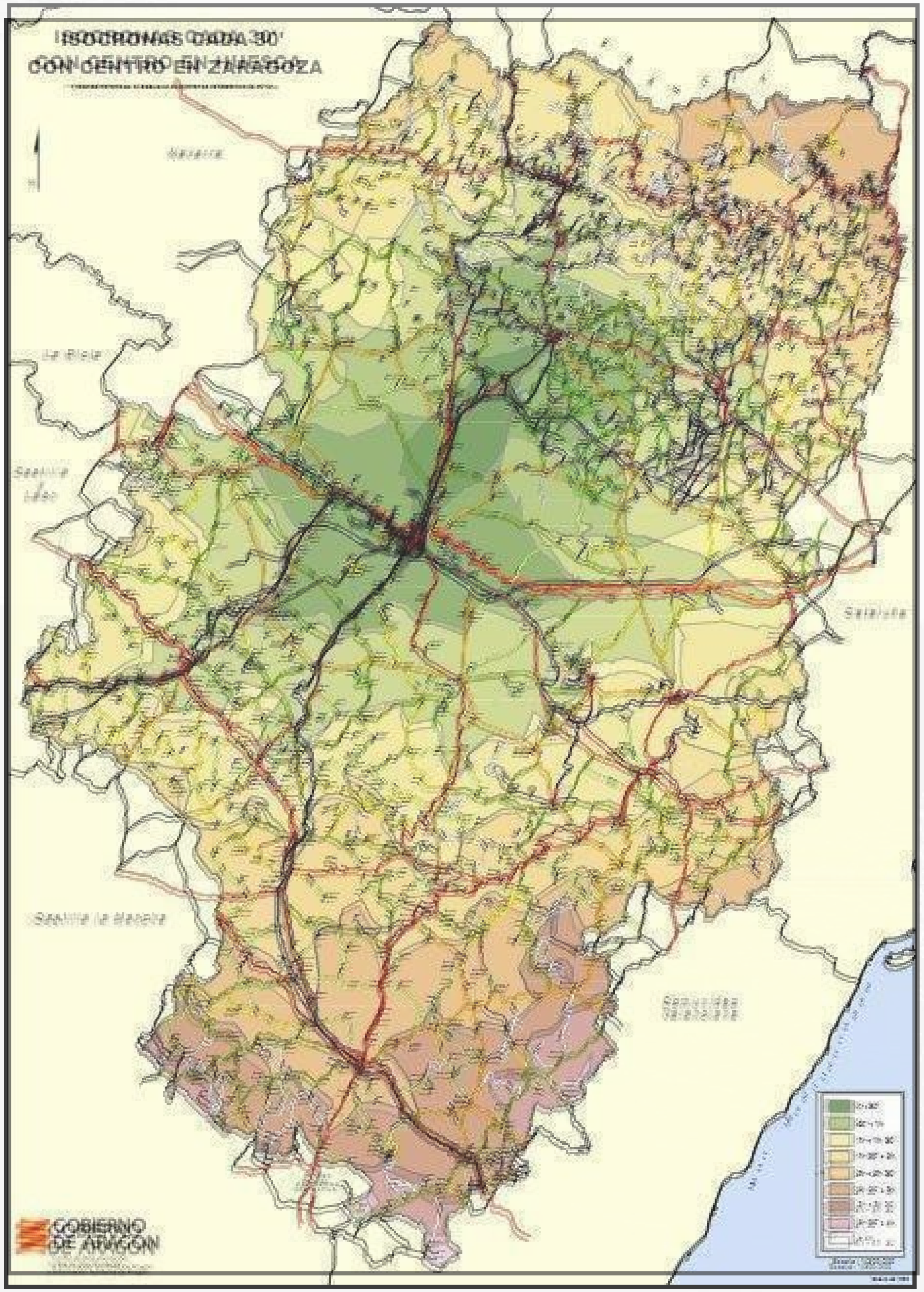
El orden $\sqsubseteq^{W}$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



(Huesca)



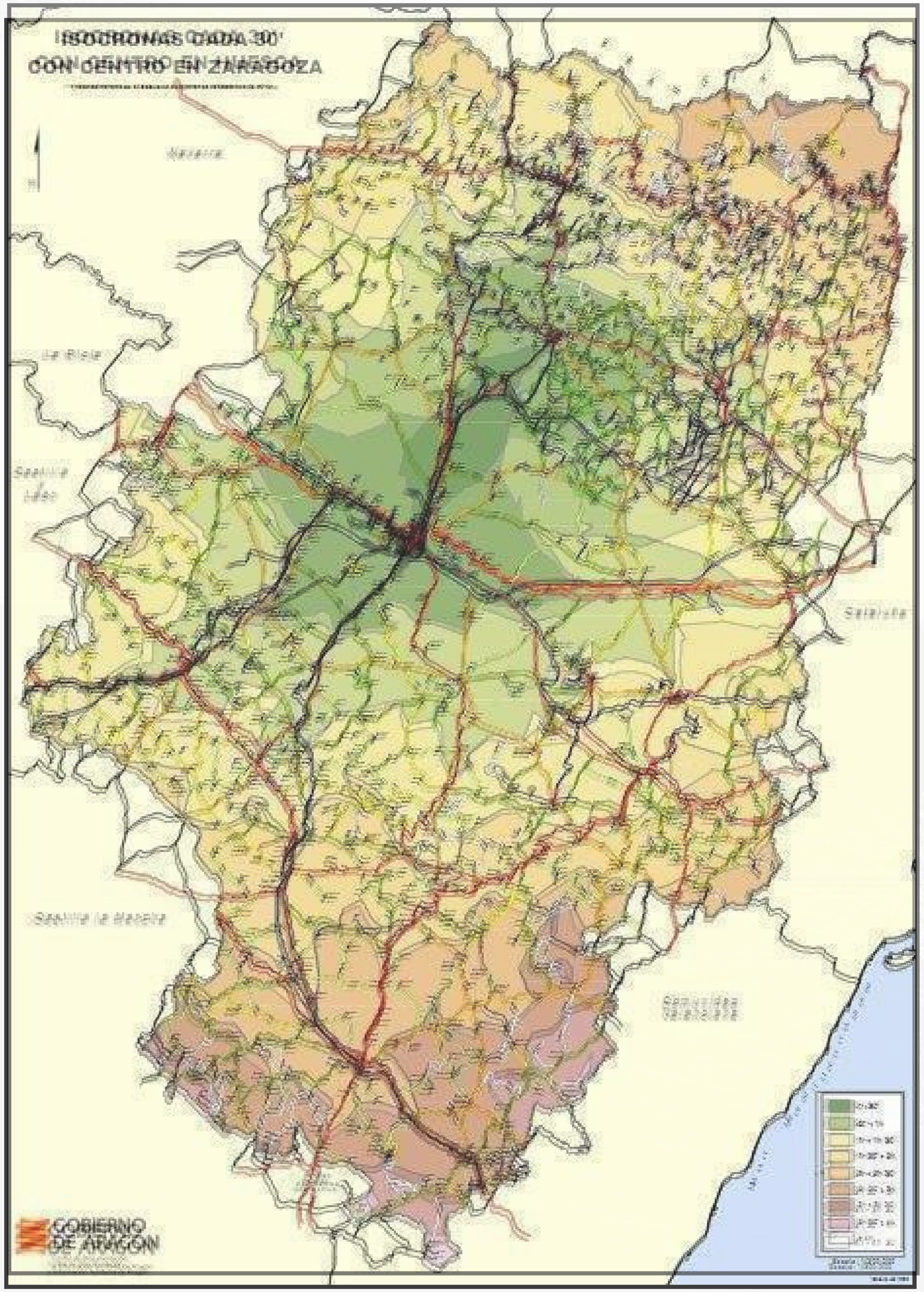
El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)

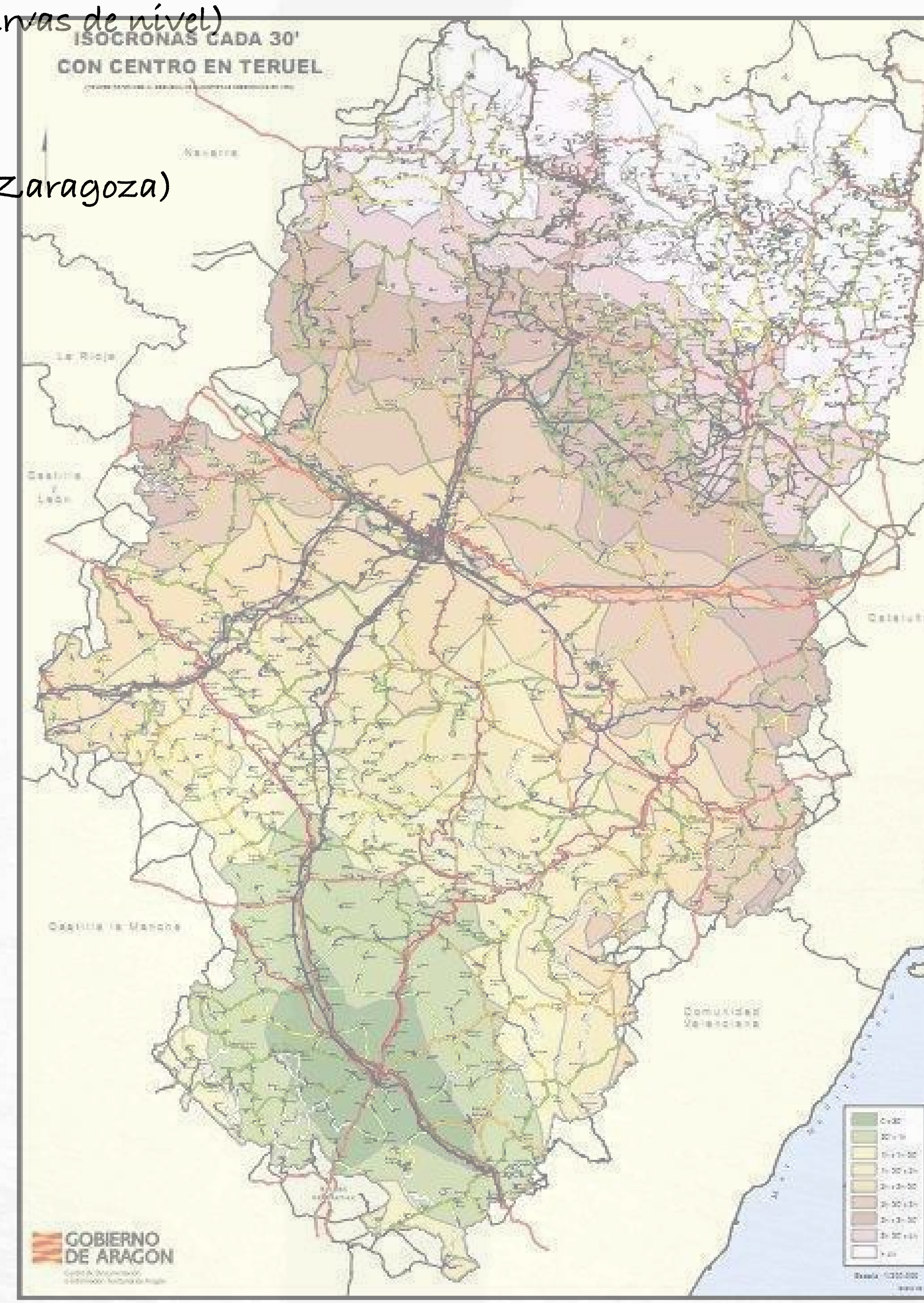


(Huesca) +(Zaragoza)

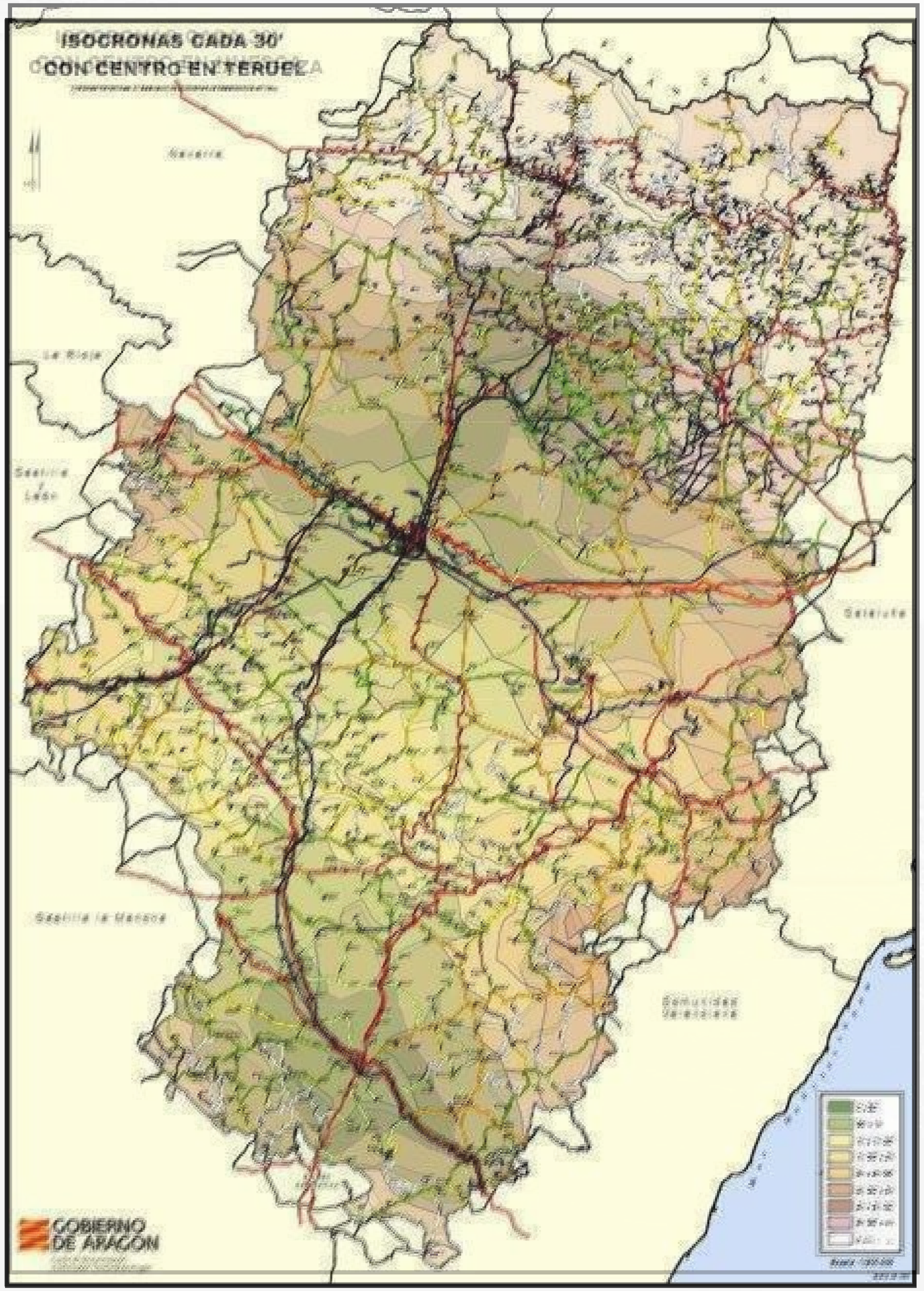
El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)

(Huesca) +(Zaragoza)



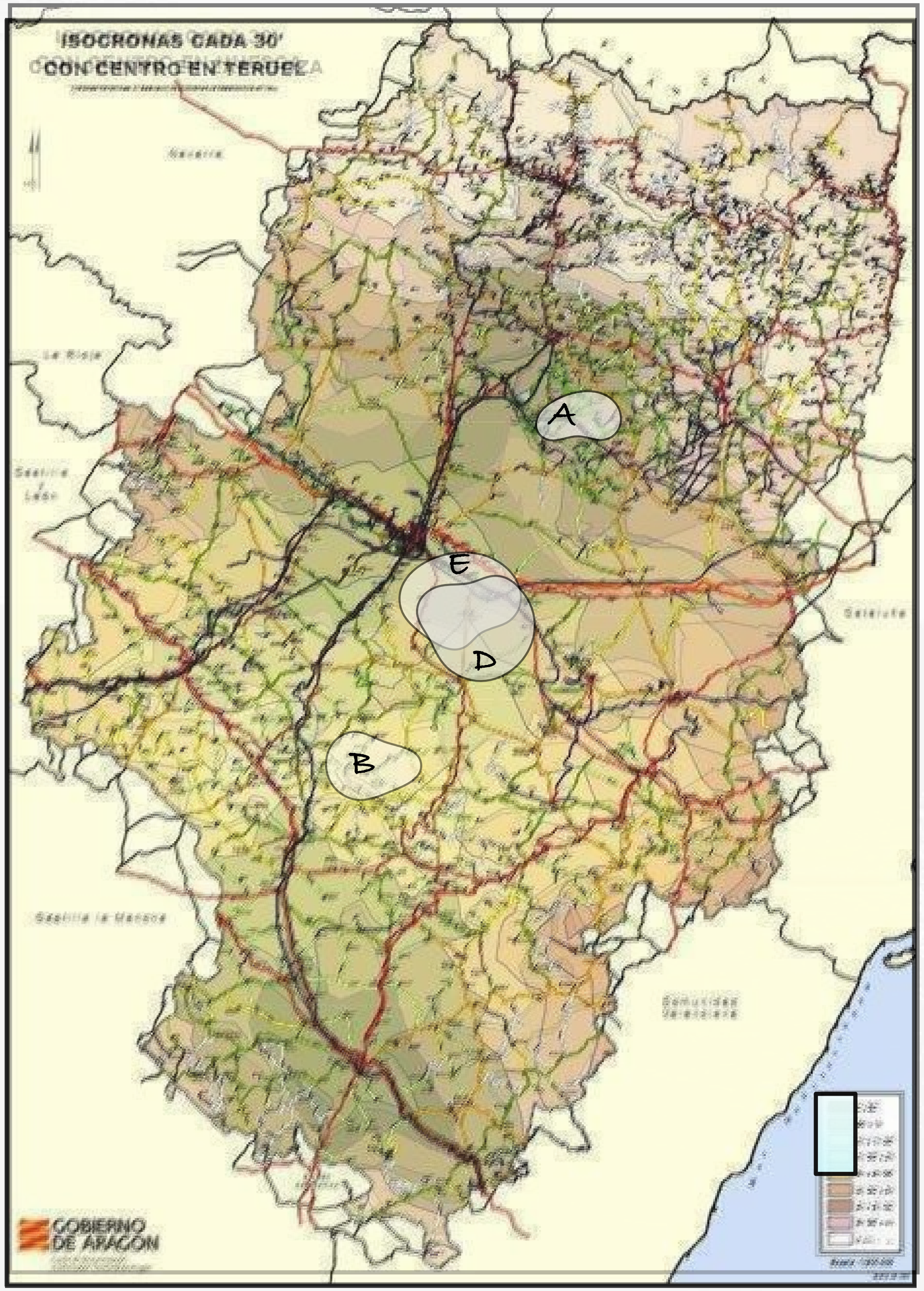


El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



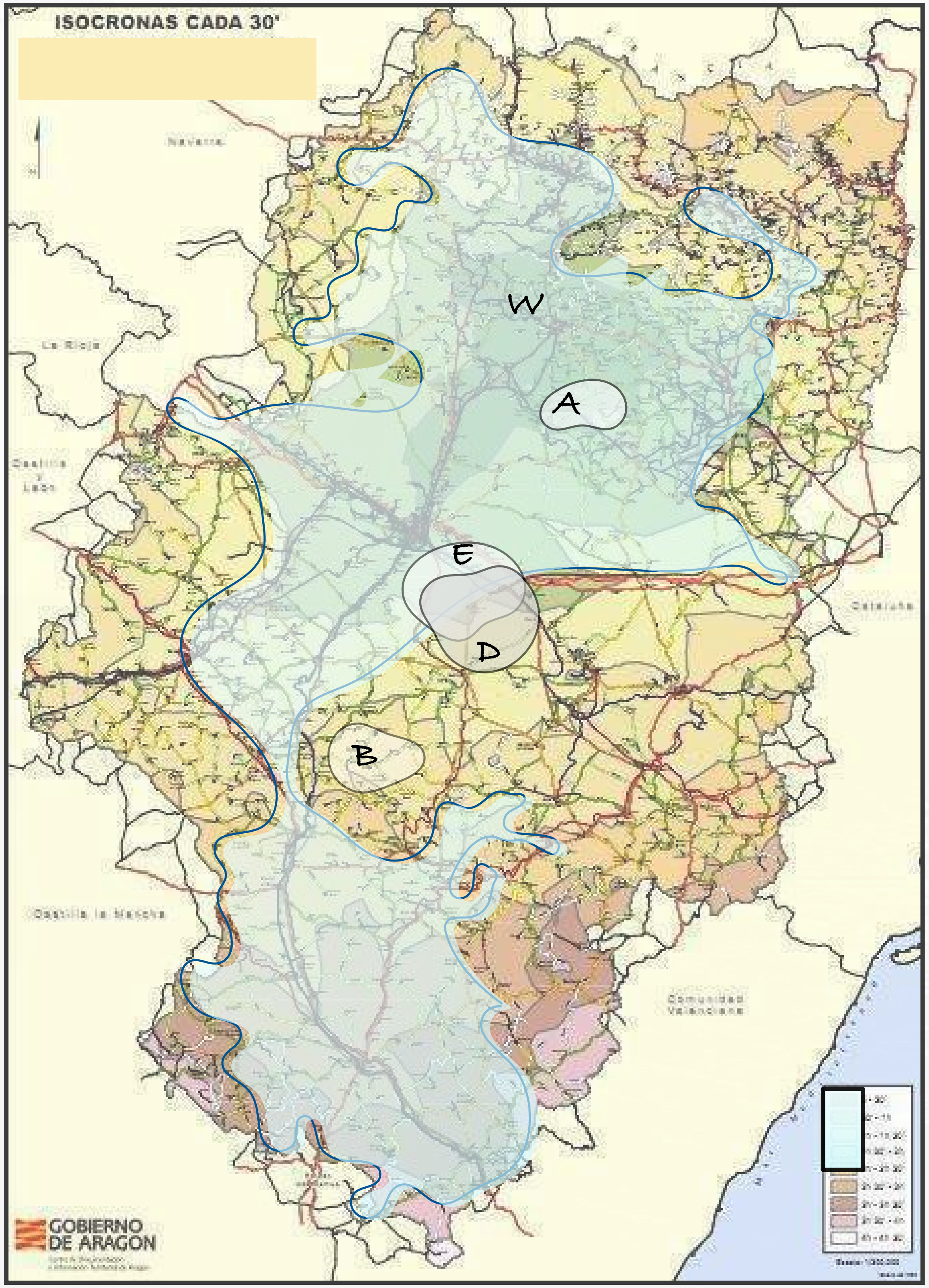
(Huesca) +(Zaragoza) +(Teruel)

El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



(Huesca) +(Zaragoza) +(Teruel)

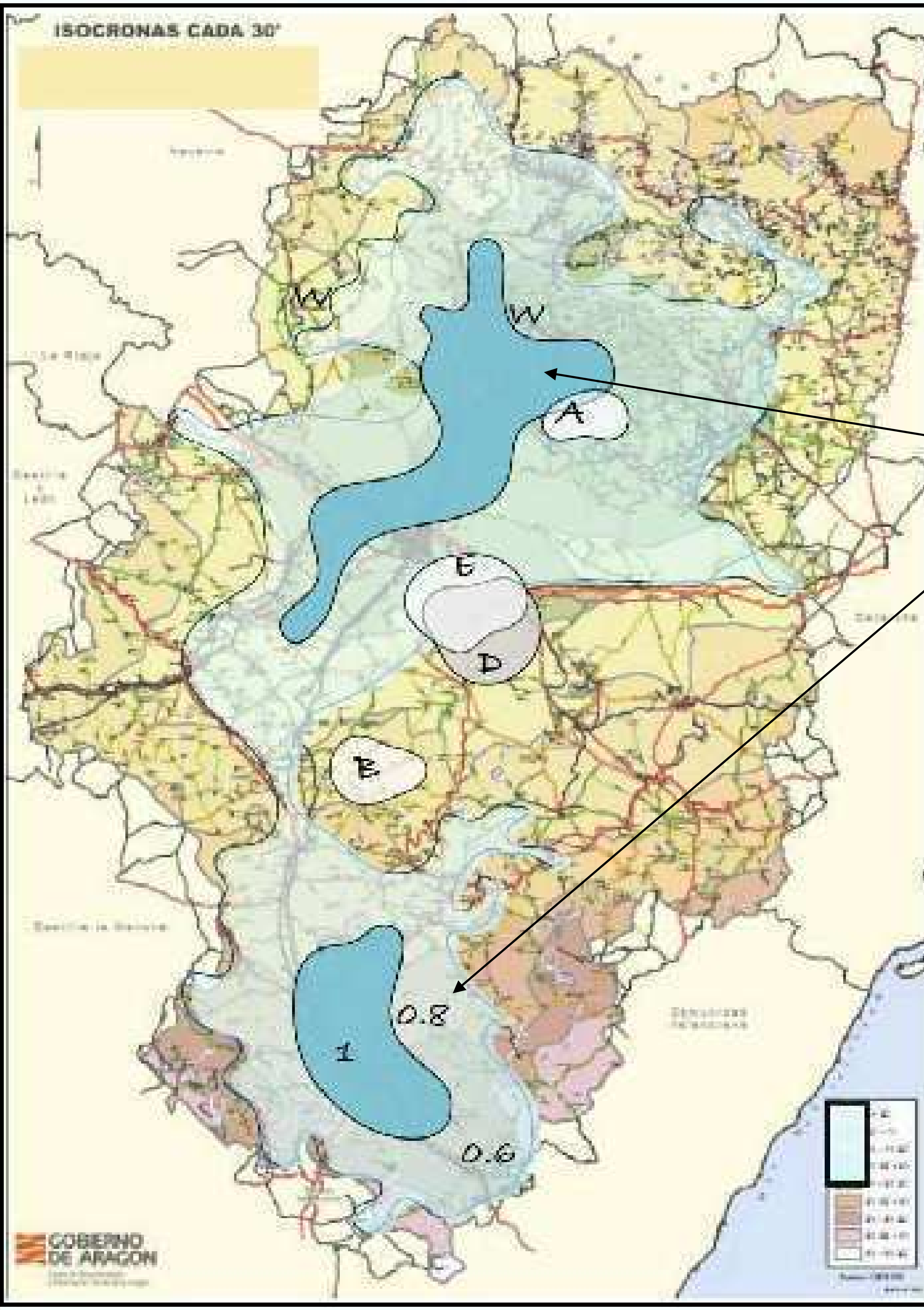
El orden $\sqsubseteq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



(Huesca) +(Zaragoza) +(Teruel)

$E \sqsubseteq^W D$

El orden $\leq^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



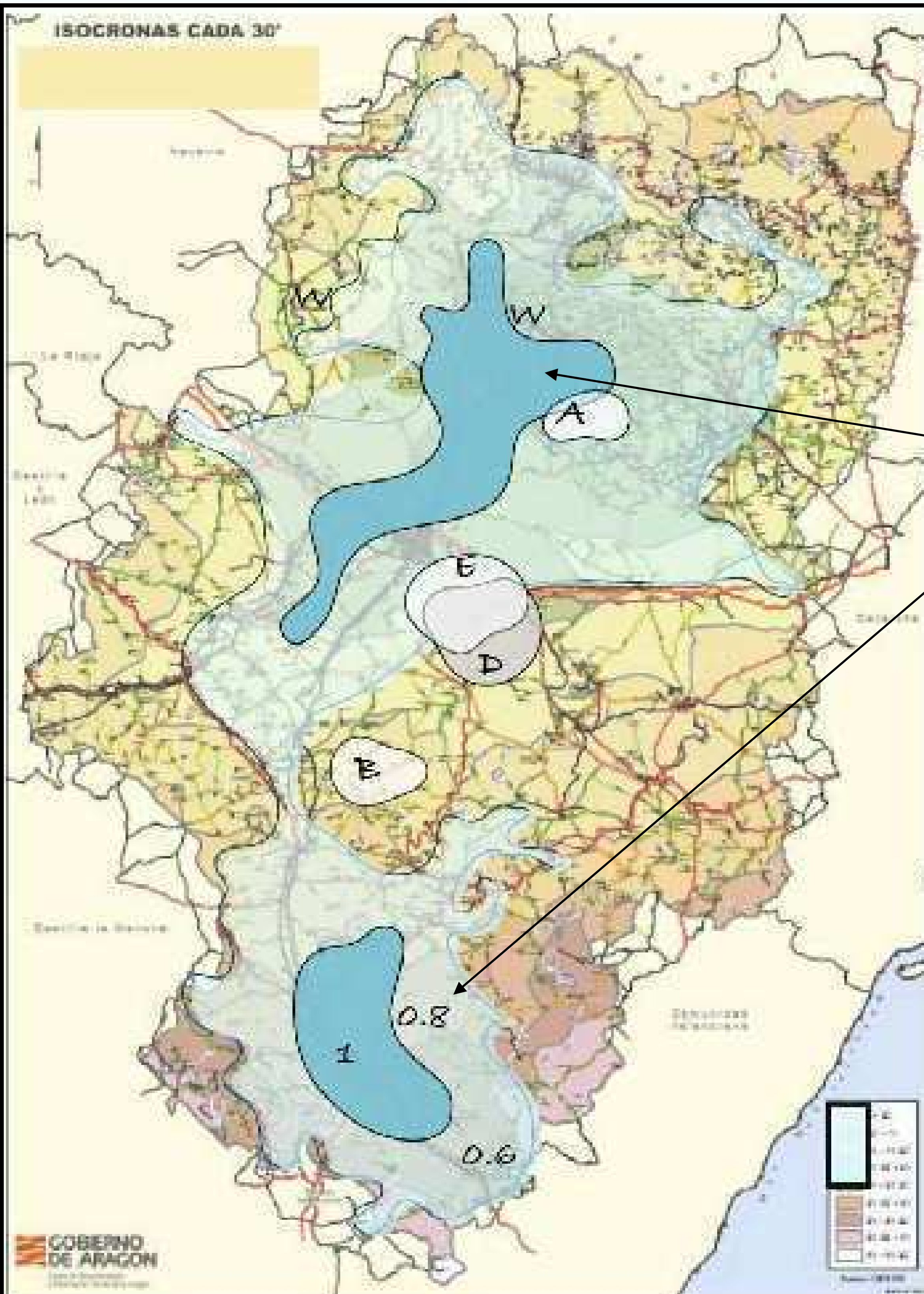
Ordenación por zonas de accesos por carretera a servicios como hospitalización, administración, hipermercados,...

W : subconjunto borroso definido utilizando las isócronas

W subconjunto L-borroso

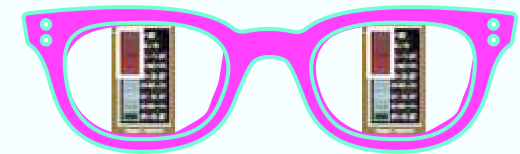
Una agregación de la información de los tres mapas.

El orden $\sqsubset^W$ en mapas de isolíneas (curvas de nivel)



Ordenación por zonas de accesos por carretera a servicios como hospitalización, administración, hipermercados,...

$E \sqsubset^W D$, $A \sqsubset^W B$, etc.



W : subconjunto borroso definido utilizando las isócronas

W subconjunto L-borroso

Una agregación de la información de los tres mapas.

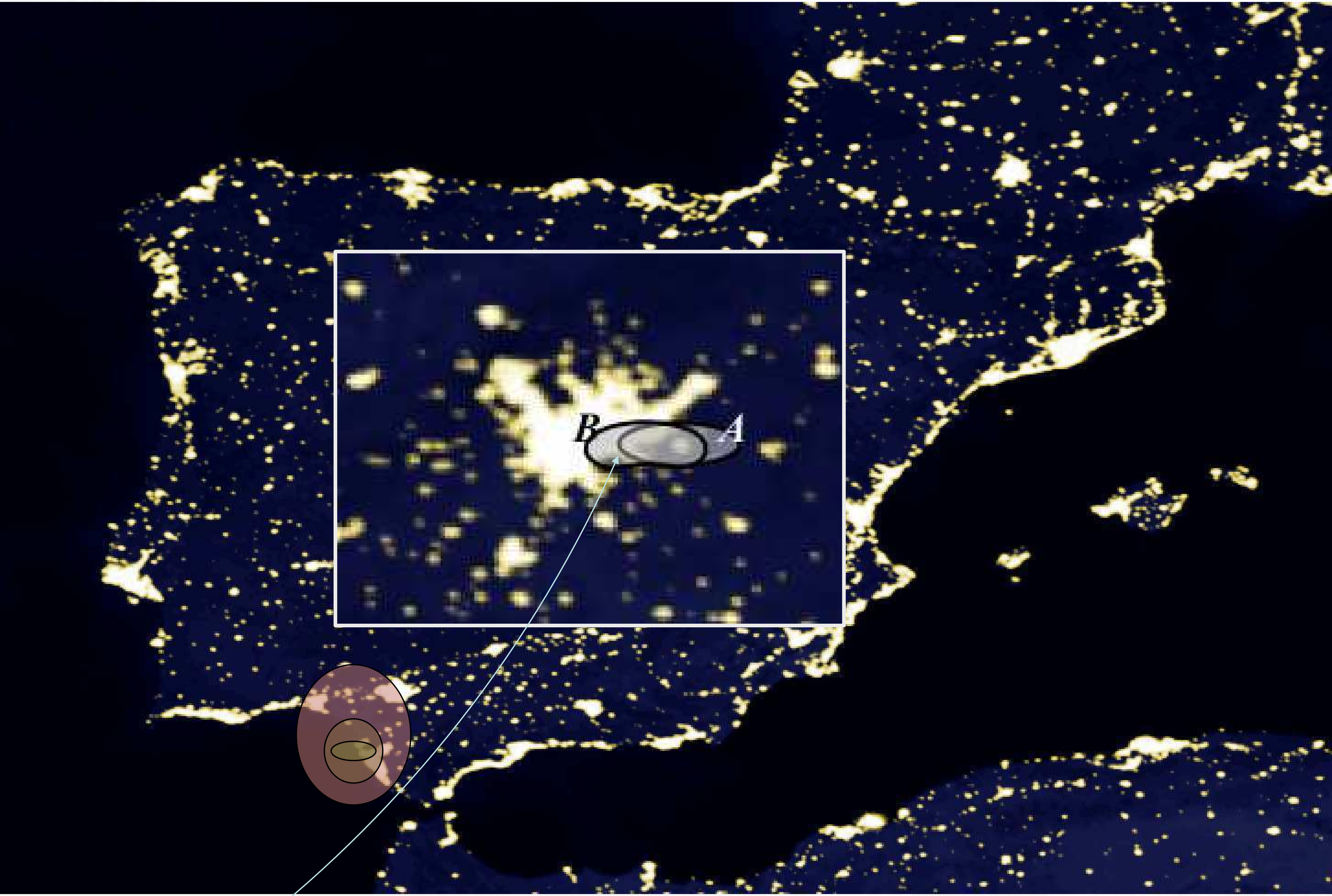
Ejemplo

La contaminación lumínica como zona de riesgo W^c.

***W^c*: zona con poca contaminación lumínica (en negro y en azul).**

Clasificación de zonas, $A, B, \ldots$ según la contaminación.

W^c: zona con poca contaminación lumínica (en negro y en azul).



$B \sqsubseteq^{W} A$ (ó $A \sqsubseteq^{W^c} B$): *"A es una zona con menos contaminación lumínica que B".*

Una posible aplicación de los órdenes de actividad en el marco de la Extracción de Conocimiento a partir de datos: Procesos de "gentrificación"

GENTRIFICACIÓN

Soho centro de West End en Londres.

Edificios de inicios del siglo XX deteriorados junto a una torre de lofts recién construidos en la Colonia Roma de la Ciudad de México.

Gentrificado: artistas y bohemios han ocupado Bedford-Stuyvesant, Nueva York.

(Wikipedia)

Gentrificación, proveniente del inglés gentry (alta burguesía). Este término fue utilizado por primera vez por la socióloga Ruth Glass en 1964 al estudiar los cambios sociales que se presentaban en Londres con relación al territorio.

Se trata, por tanto, de un proceso de transformación de un espacio urbano deteriorado -o en declive- a partir de la reconstrucción -o rehabilitación edificatoria con mayores alturas que las preexistentes- que provoca un aumento de los alquileres o del coste habitacional en estos espacios. Esto provoca que los residentes tradicionales abandonen el barrio -y se sitúen en espacios más periféricos-, lo que produce que este "nuevo" espacio vaya a ser ocupado por clases sociales con mayor capacidad económica que les permita aportar estos nuevos costes.

Este proceso, tiene especial relevancia en los últimos años en los países capitalistas y principalmente en ciudades con importante potencial turistico y relevancia económica.

En ocasiones este proceso también se utiliza para analizar esta situación respecto usos comerciales o de servicios. Por ejemplo, la construcción de centros comerciales o tiendas pertenecientes a grandes cadenas relegando a los pequeños negocios.

La gentrificación no se depara en los aspectos físicos únicamente, sino que involucra una serie de cambios en la conformación de la población y se caracteriza por el desplazamiento de cierto estrato social por un estrato superior.

1 Etimología del término

El término es un neologismo que procede del inglés. Deriva de *gentry*, una clase social histórica inglesa de composición mixta entre la baja y media nobleza que viene a ser equivalente a la hidalguía española, y los propietarios de tierra plebeyos.

Para españolizar el término, se ha propuesto «elitización», «**aristocratización**» o «**aburguesamiento**»,[1] aunque, de acuerdo con Fundéu, algunas de estas alternativas propuestas, como «aburguesamiento» o «aristocratización», «no recogen los matices de este proceso», como tampoco lo hace el término «**recualificación social**».[2]

GENTRIFICACIÓN

Soho centro de West End en Londres.

Edificios de inicios del siglo XX deteriorados junto a una torre de lofts recién construidos en la Colonia Roma de la Ciudad de México.

Gentrificado: artistas y bohemios han ocupado Bedford-Stuyvesant, Nueva York.

(Wikipedia)

Gentrificación, proveniente del inglés gentry (alta burguesía). Este término fue utilizado por primera vez por la socióloga Ruth Glass en 1964 al estudiar los cambios sociales que se presentaban en Londres con relación al territorio.

Se trata, por tanto, de un proceso de transformación de un espacio urbano deteriorado -o en declive- a partir de la reconstrucción -o rehabilitación edificatoria con mayores alturas que las preexistentes- que provoca un aumento de los alquileres o del coste habitacional en estos espacios. Esto provoca que los residentes tradicionales abandonen el barrio -y se sitúen en espacios más periféricos-, lo que produce que este "nuevo" espacio vaya a ser ocupado por clases sociales con mayor capacidad económica que les permita aportar estos nuevos costes.

Este proceso, tiene especial relevancia en los últimos años en los países capitalistas y principalmente en ciudades con importante potencial turistico y relevancia económica.

En ocasiones este proceso también se utiliza para analizar esta situación respecto usos comerciales o de servicios. Por ejemplo, la construcción de centros comerciales o tiendas pertenecientes a grandes cadenas relegando a los pequeños negocios.

La gentrificación no se depara en los aspectos físicos únicamente, sino que involucra una serie de cambios en la conformación de la población y se caracteriza por el desplazamiento de cierto estrato social por un estrato superior.

1 Etimología del término

El término es un neologismo que procede del inglés. Deriva de *gentry*, una clase social histórica inglesa de composición mixta entre la baja y media nobleza que viene a ser equivalente a la hidalguía española, y los propietarios de tierra plebeyos.

Para españolizar el término, se ha propuesto «elitización», «**aristocratización**» o «**aburguesamiento**»,[1] aunque, de acuerdo con Fundéu, algunas de estas alternativas propuestas, como «aburguesamiento» o «aristocratización», «no recogen los matices de este proceso», como tampoco lo hace el término «**recualificación social**».[2]

2 Origen del fenómeno

La gentrificación comienza cuando un grupo de personas de un cierto nivel económico *descubren* un barrio de gente pobre que, a pesar de estar degradado y depreciado comercialmente, ofrece una buena relación entre la calidad y el precio y deciden instalarse en él, aprovechando las oportunidades de compras de los precios.

Estos barrios suelen estar situados cerca del centro de la ciudad o contar con determinadas ventajas, como el estar situados cerca de polos de empleo, etc.

2.1 Proceso netamente urbano

Es un fenómeno netamente urbano y situado en la etapa histórica del posfordismo,[3] a pesar de que puedan existir procesos semejantes en otros ámbitos espaciales y temporales.

2.2 Desplazamiento de las clases populares

El efecto más notorio de la gentrificación es el desplazamiento de las clases populares.

Las clases populares pueden reducir su número en la zona por el envejecimiento de la población, a partir de desalojos por las condiciones ruinosas de un edificio, o por terminación de un contrato de alquiler y ausencia de una oferta de alquileres en la zona para este grupo social.

Los desplazamientos voluntarios suelen deberse al rechazo por la situación de degradación del caserío, por el pago de incentivos a cambio de su abandono a inquilinos con contratos blindados, o por la compraventa de la propiedad.

Una vez realizado este desplazamiento, se revaloriza el preciado suelo, comúnmente residencial, a través de la rehabilitación del edificio (recalificado habitualmente como residencia de alto nivel) o de la construcción de viviendas de nueva planta.

A esta expulsión progresiva de la población se le une la incapacidad de los desalojados o de jóvenes emancipados, originarios del barrio, de pagar una vivienda en él, como consecuencia de la revalorización y el aumento de los precios en relación a la vivienda.

GENTRIFICACIÓN (continuación)

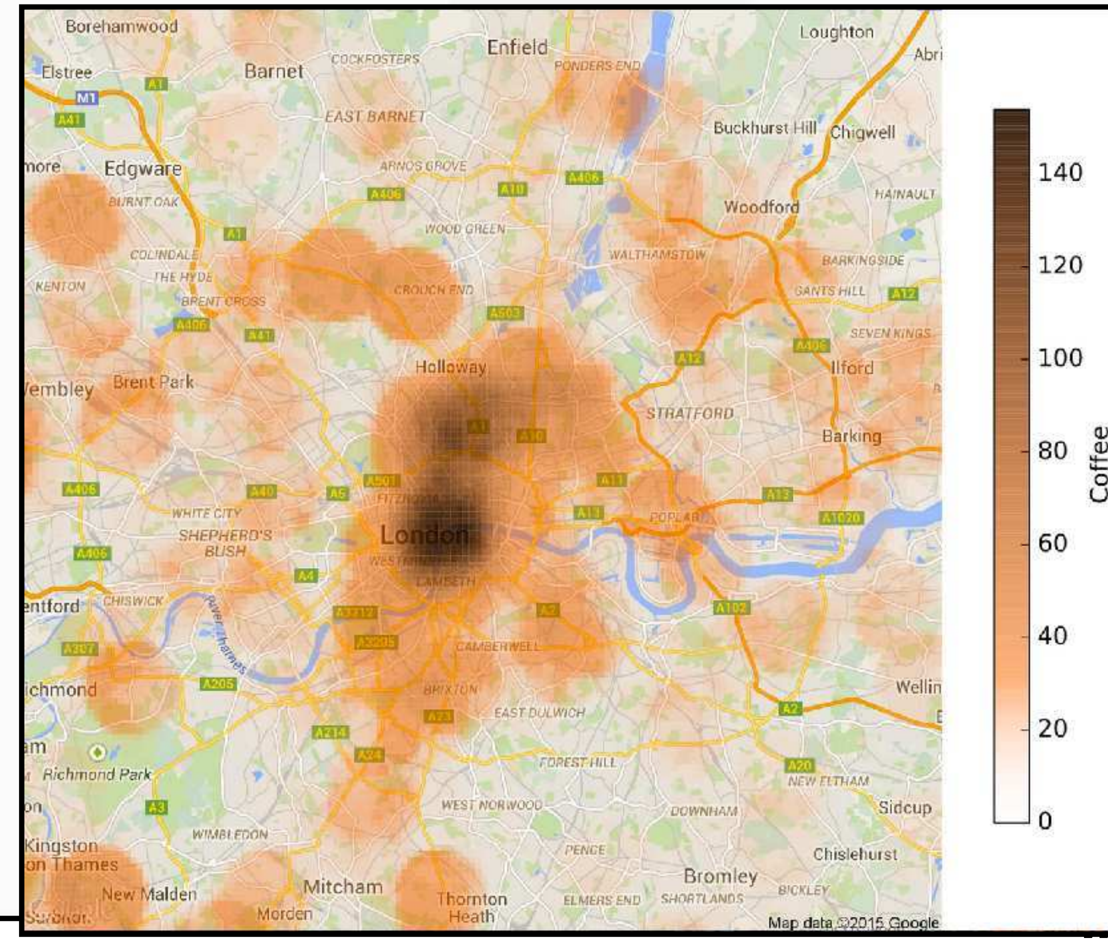
En Londres hay un método mucho más simple para determinar qué áreas están experimentando la gentrificación. El "método de pollo frito" compara la densidad de las cafeterías en un barrio con la densidad de las tiendas de pollo frito. Si un barrio tiene una mayor densidad de cafeterías que tiendas de pollo frito y el costo de la propiedad en el barrio está por debajo de la media de Londres, entonces el barrio está en el proceso de gentrification.

El "Fried Chicken Method" fue inventado por Sam Floy. En **cómo saber si donde usted vive es "para arriba y venir": el pollo frito contra las tiendas de café** Floy compara mapas del calor de las tiendas del pollo del café y del pollo para identificar las áreas con más cafeterías. A continuación, superpone estas áreas en un mapa de calor valor de la propiedad con el fin de identificar cuáles de estas áreas se encuentran en partes de Londres, donde es relativamente más barato comprar la propiedad.

GENTRIFICACIÓN (continuación)

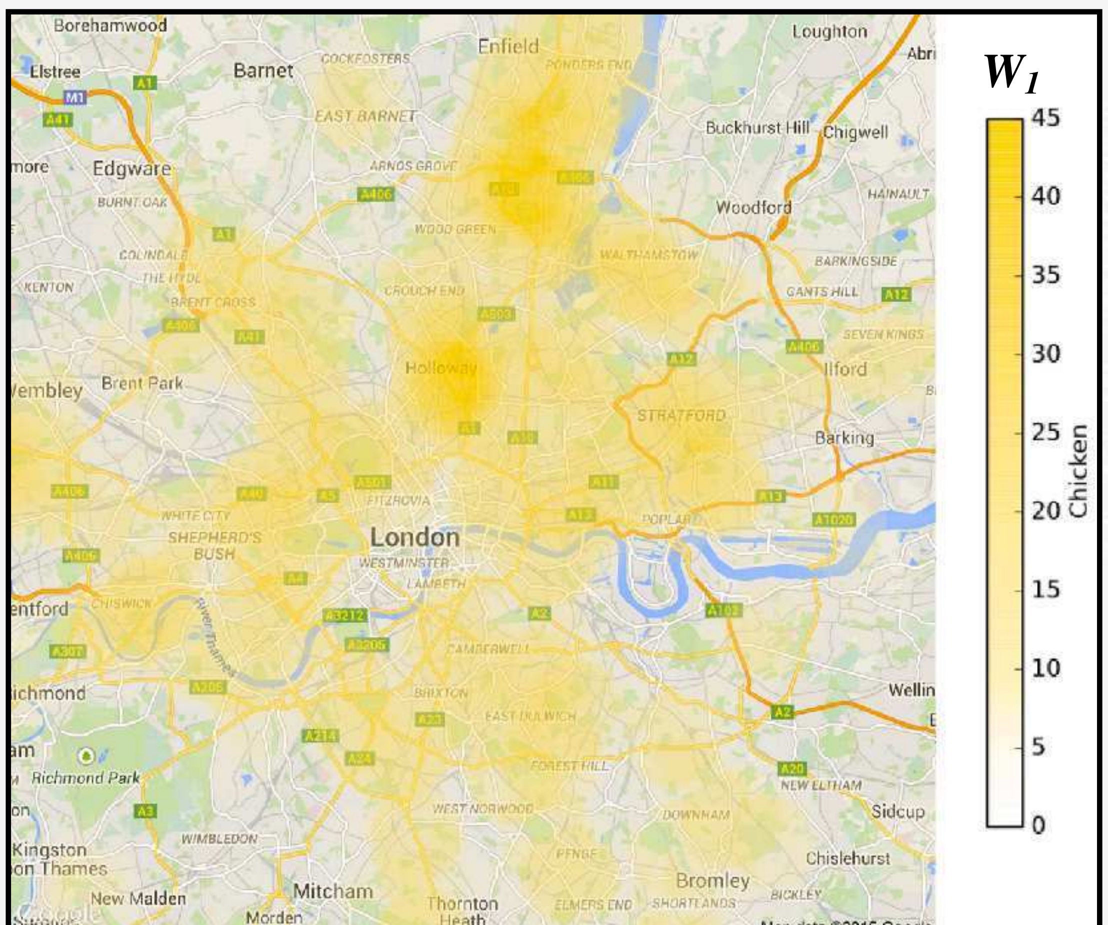
En Londres hay un método mucho más simple para determinar qué áreas están experimentando la gentrificación. El "método de pollo frito" compara la densidad de las cafeterías en un barrio con la densidad de las tiendas de pollo frito. Si un barrio tiene una mayor densidad de cafeterías que tiendas de pollo frito y el costo de la propiedad en el barrio está por debajo de la media de Londres, entonces el barrio está en el proceso de gentrification.

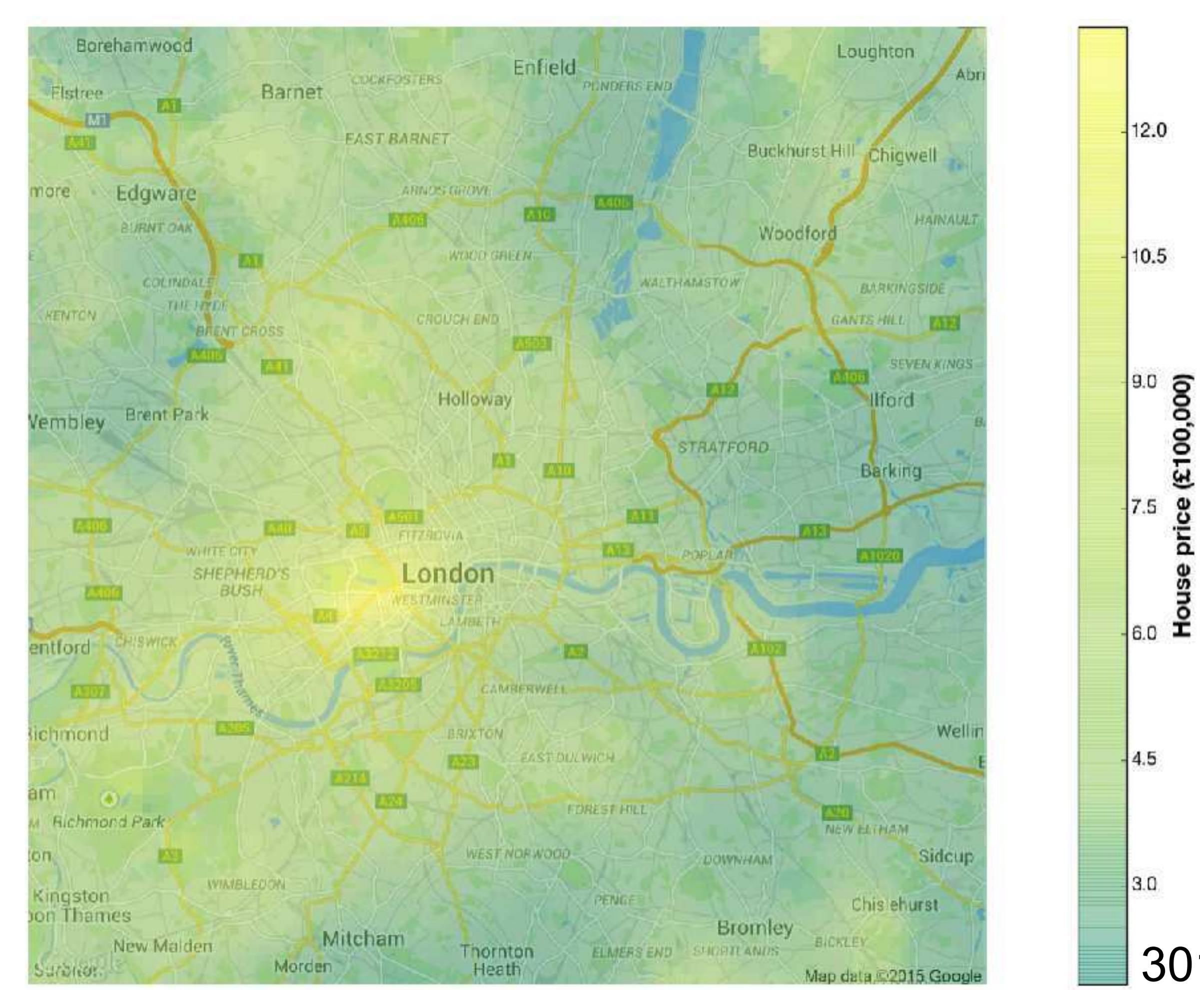
El "Fried Chicken Method" fue inventado por Sam Floy. En **cómo saber si donde usted vive es "para arriba y venir": el pollo frito contra las tiendas de café** Floy compara mapas del calor de las tiendas del pollo del café y del pollo para identificar las áreas con más cafeterías. A continuación, superpone estas áreas en un mapa de calor valor de la propiedad con el fin de identificar cuáles de estas áreas se encuentran en partes de Londres, donde es relativamente más barato comprar la propiedad.



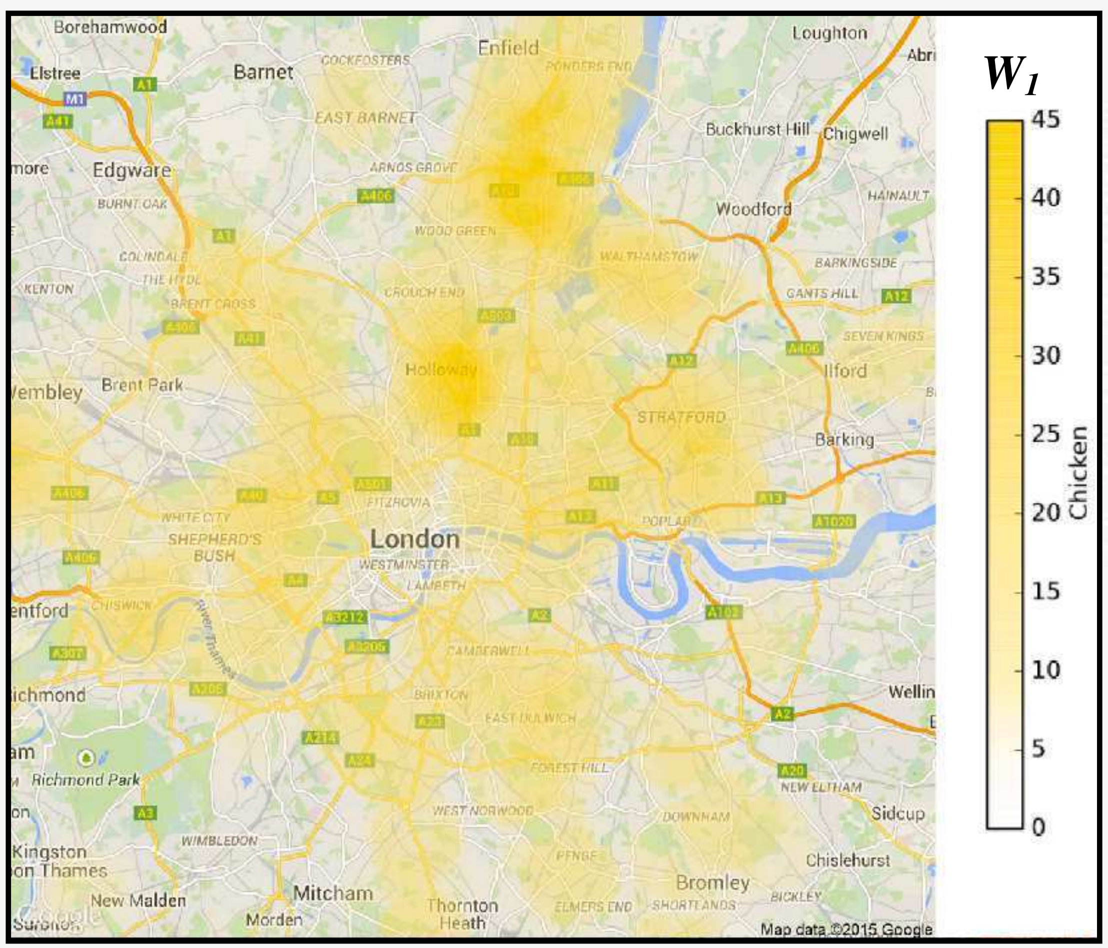
Cómo saber si donde usted vive es "up and coming": pollo frito vs tiendas de café

Con la ayuda de científicos de datos, tres "heatmaps" de Londres fueron creados para visualizar dónde estaban las tiendas de café, pollos y casas caras en la ciudad.





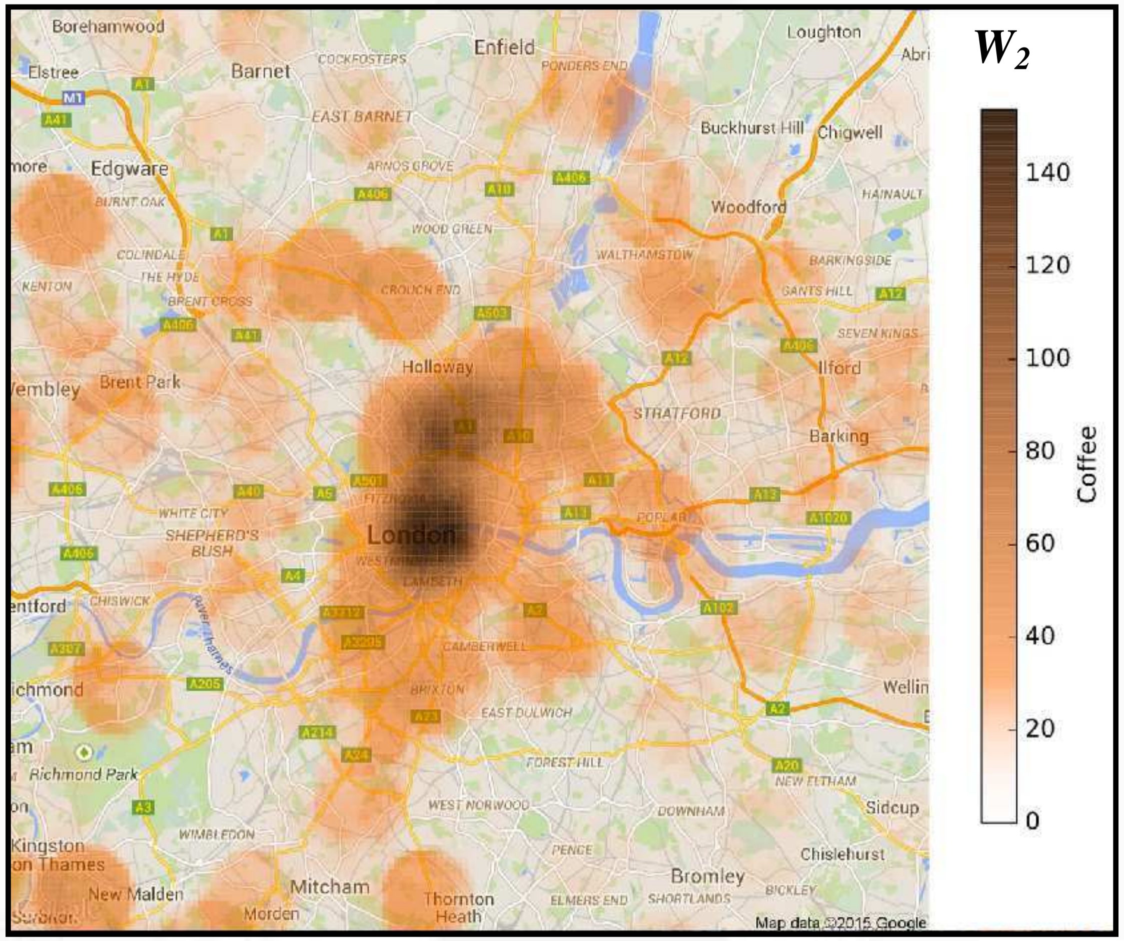
Esto muestra partes de la ciudad con la mayor densidad de tiendas de pollo frito. Holloway está particularmente a la altura de las cosas, mientras que Canary Wharf tiene poco que ofrecer ...

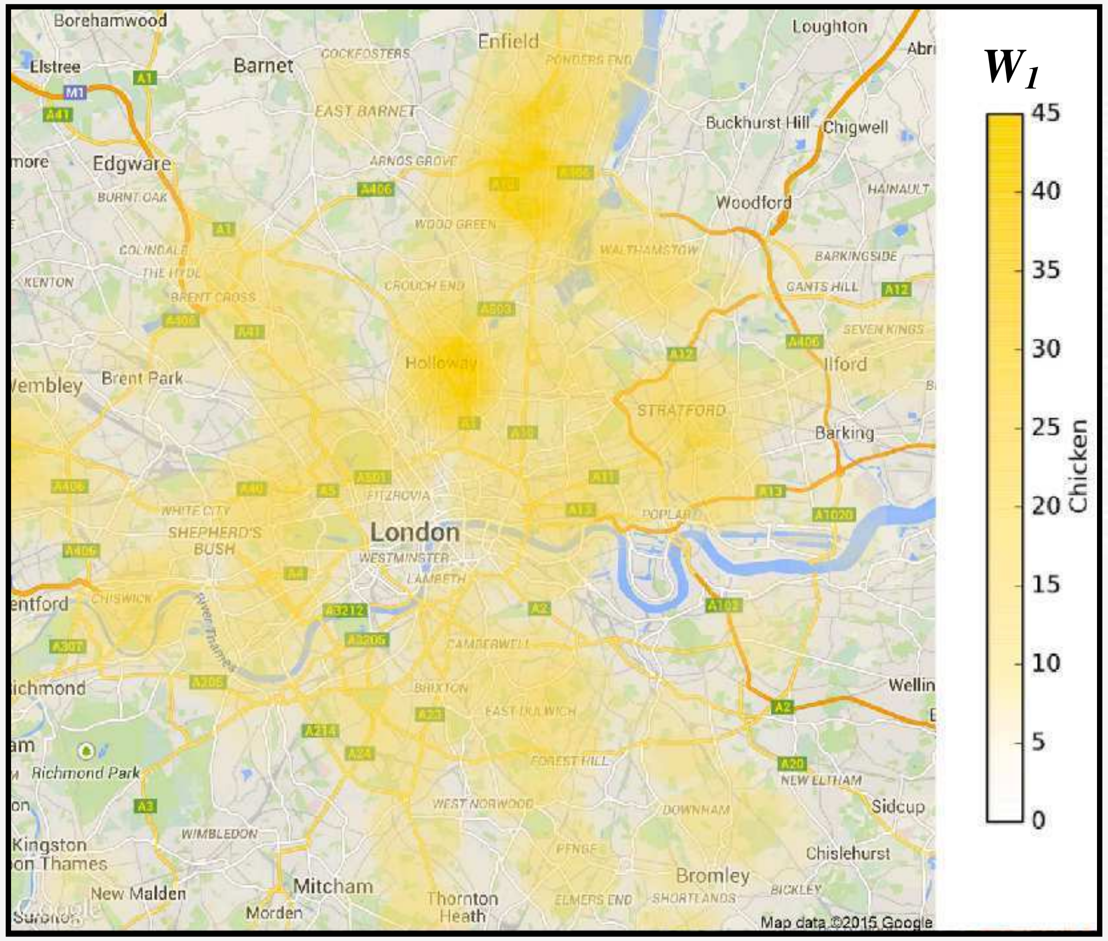


GENTRIFICACIÓN (continuación)

Esto muestra partes de la ciudad con la mayor densidad de tiendas de pollo frito. Holloway está particularmente a la altura de las cosas, mientras que Canary Wharf tiene poco que ofrecer ...

Westminster y Hampstead han evolucionado para servir más macchiatos que sus vecinos en Kilburn y Stratford.



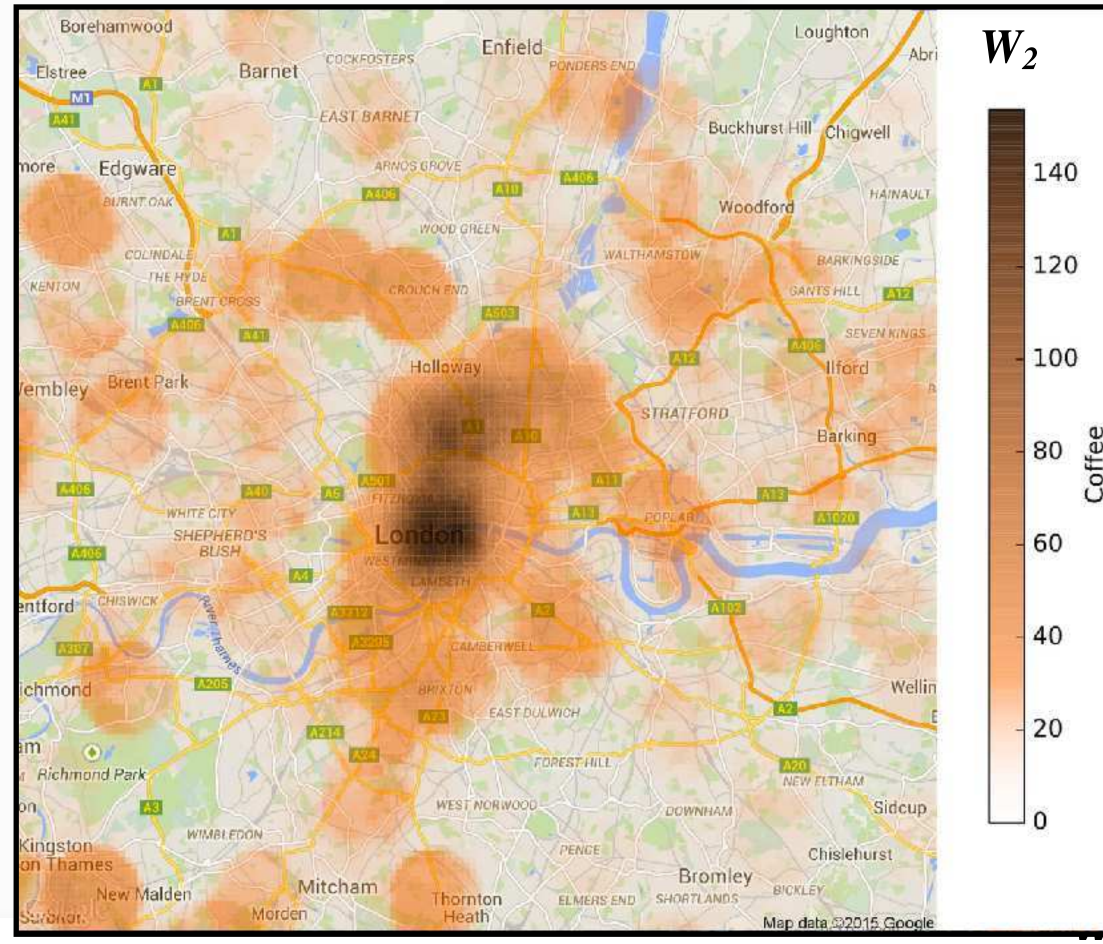


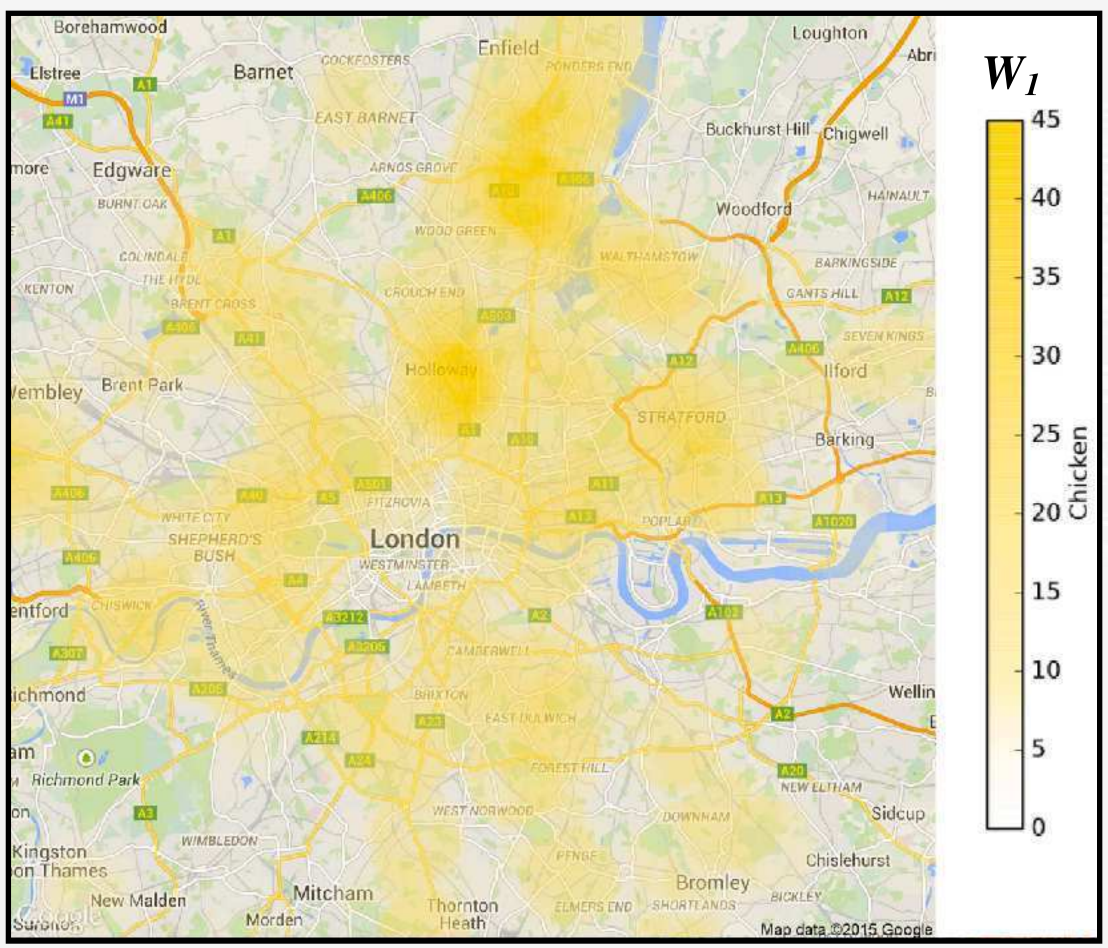
GENTRIFICACIÓN (continuación)

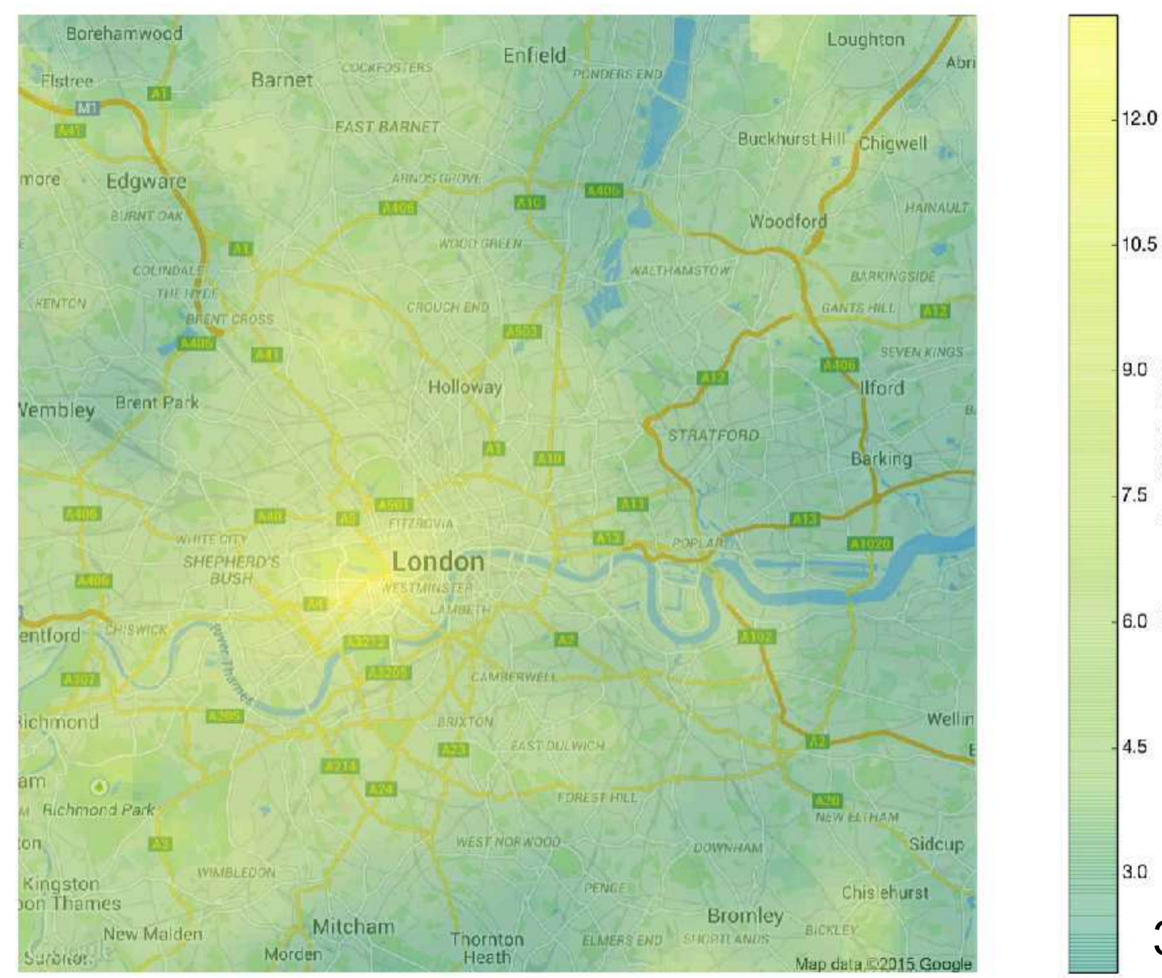
Esto muestra partes de la ciudad con la mayor densidad de tiendas de pollo frito. Holloway está particularmente a la altura de las cosas, mientras que Canary Wharf tiene poco que ofrecer ...

Westminster y Hampstead han evolucionado para servir más macchiatos que sus vecinos en Kilburn y Stratford.

Las áreas más brillantes corresponden a más ceros en la hipoteca Kensington es el faro.







GENTRIFICACIÓN (continuación)

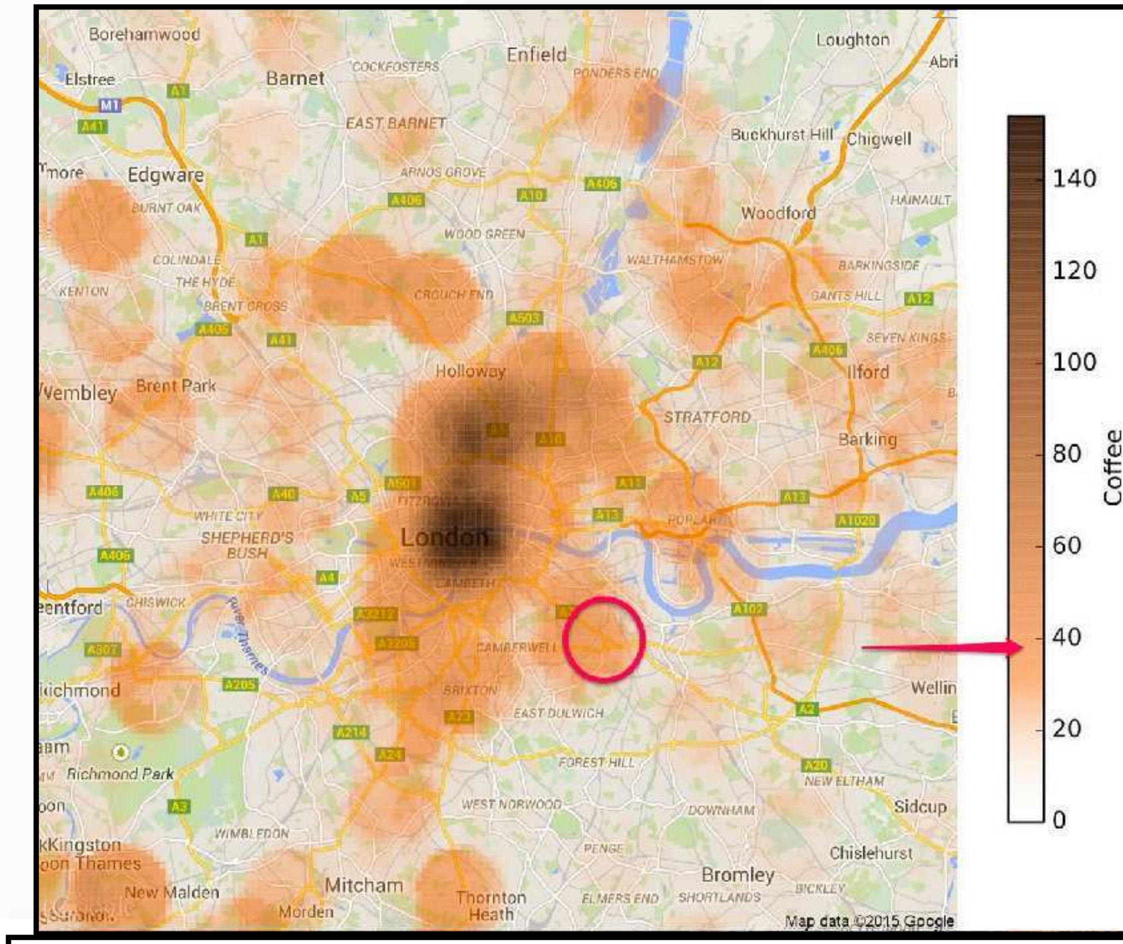
Esto muestra partes de la ciudad con la mayor densidad de tiendas de pollo frito. Holloway está particularmente a la altura de las cosas, mientras que Canary Wharf tiene poco que ofrecer ...

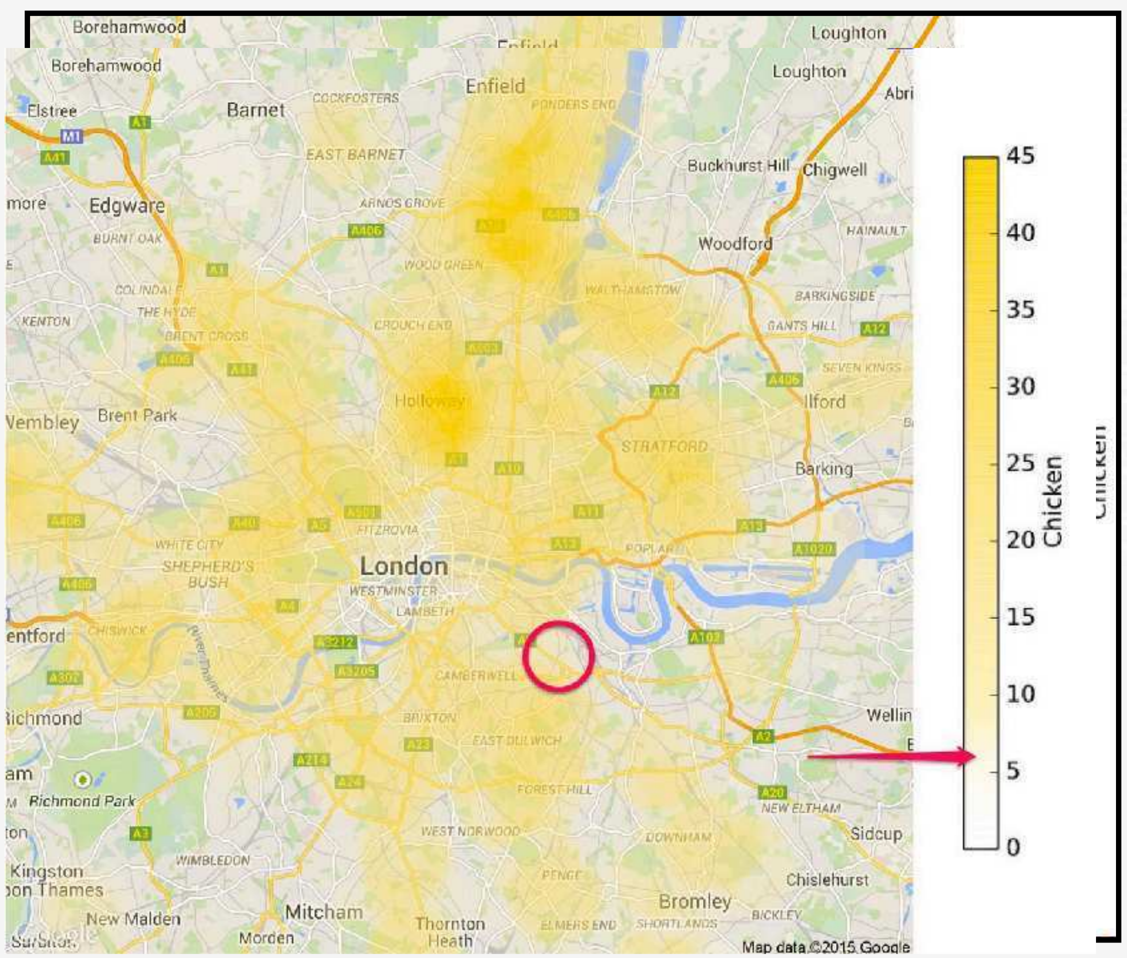
Westminster y Hampstead han evolucionado para servir más macchiatos que sus vecinos en Kilburn y Stratford.

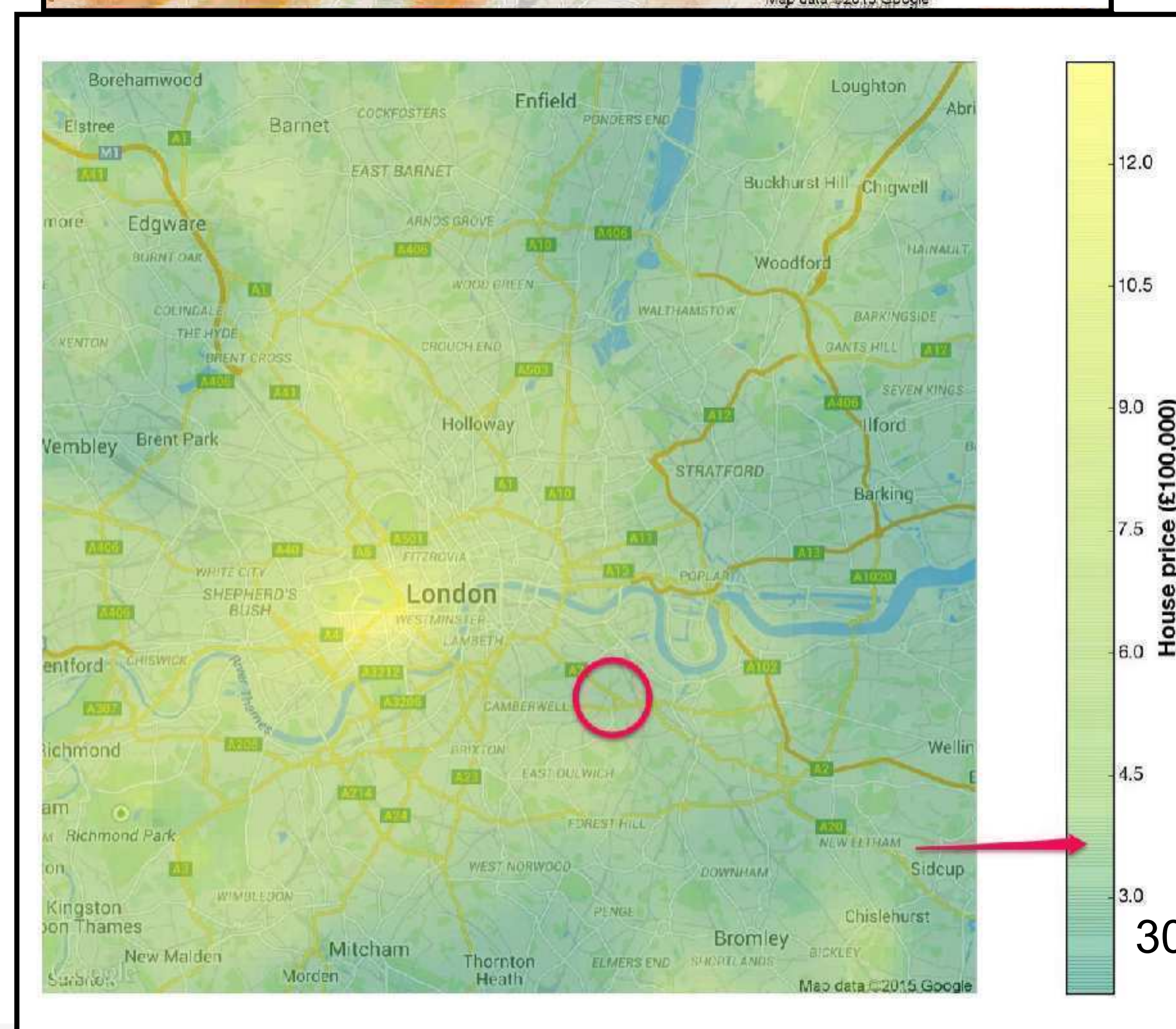
Las áreas más brillantes corresponden a más ceros en la hipoteca Kensington es el faro.

- Alta densidad de cafeterías
- Baja densidad de tiendas de pollo
- Low precios de inmuebles

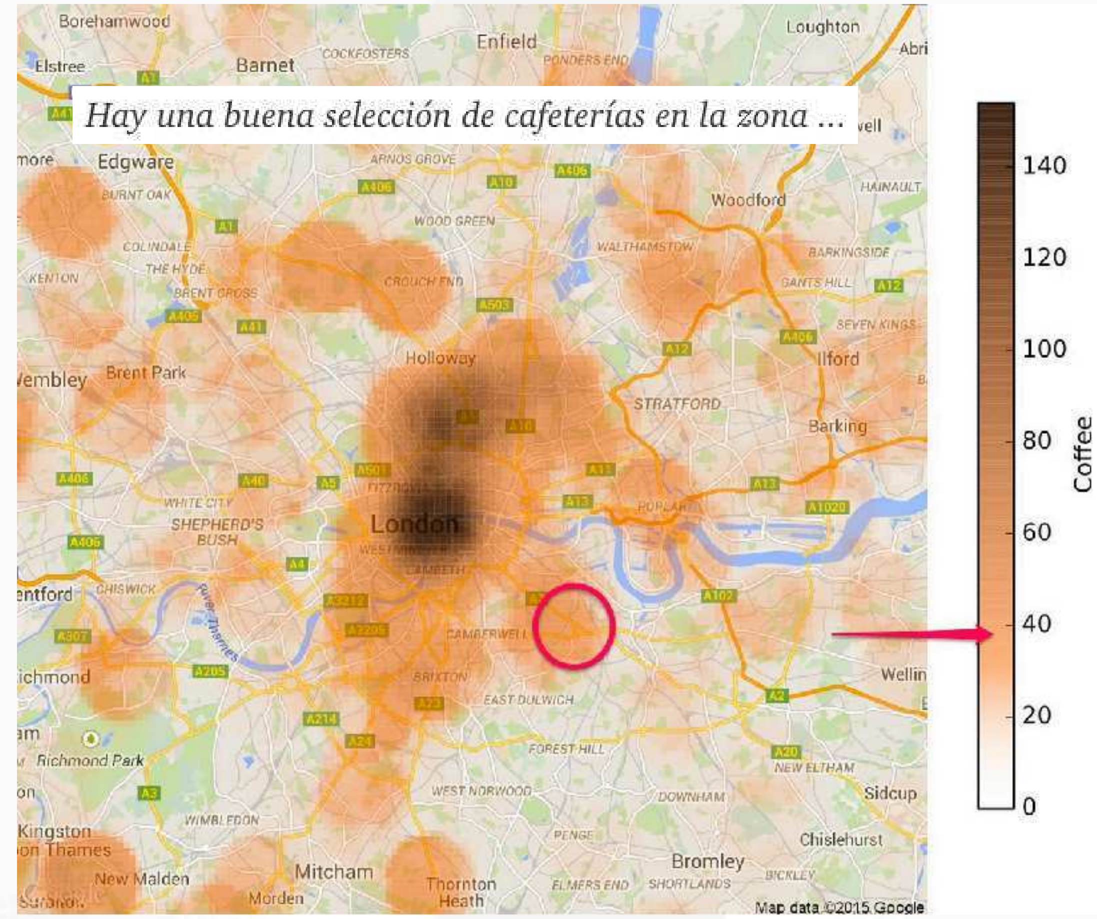
Constituirán la "perspectiva" W

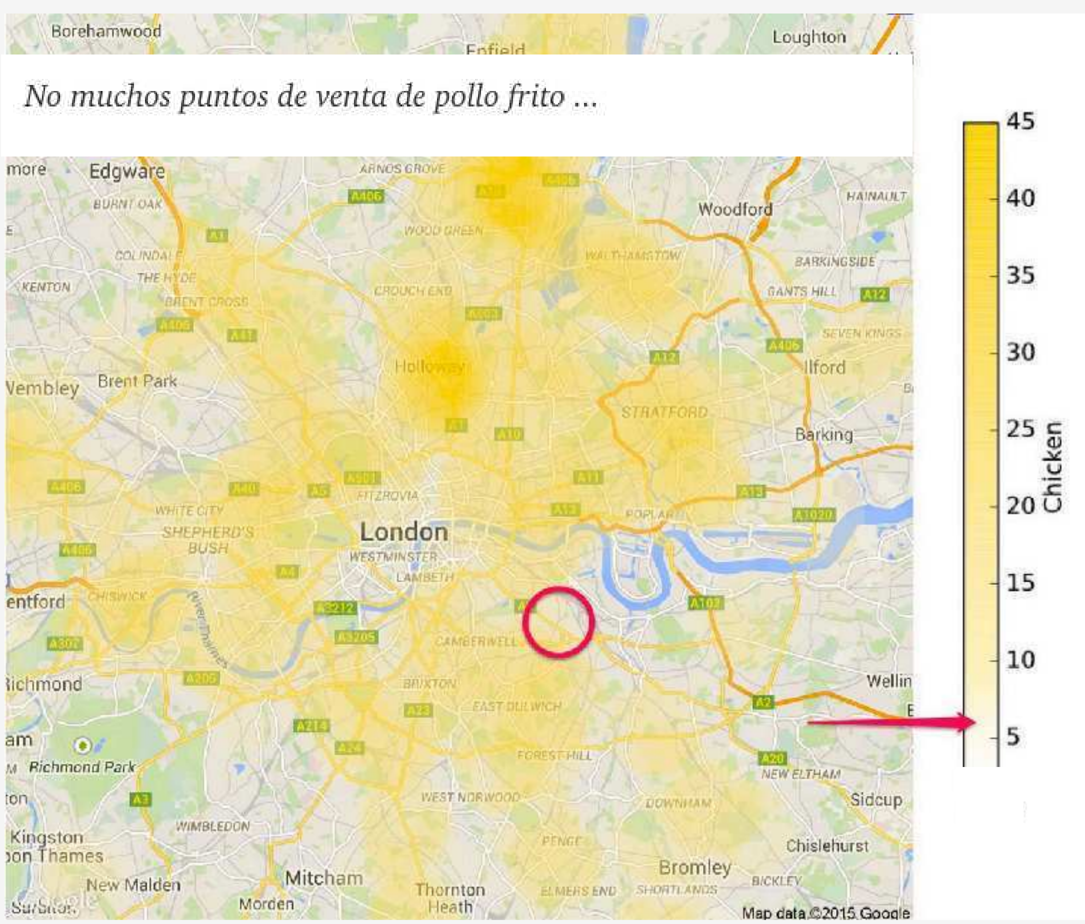


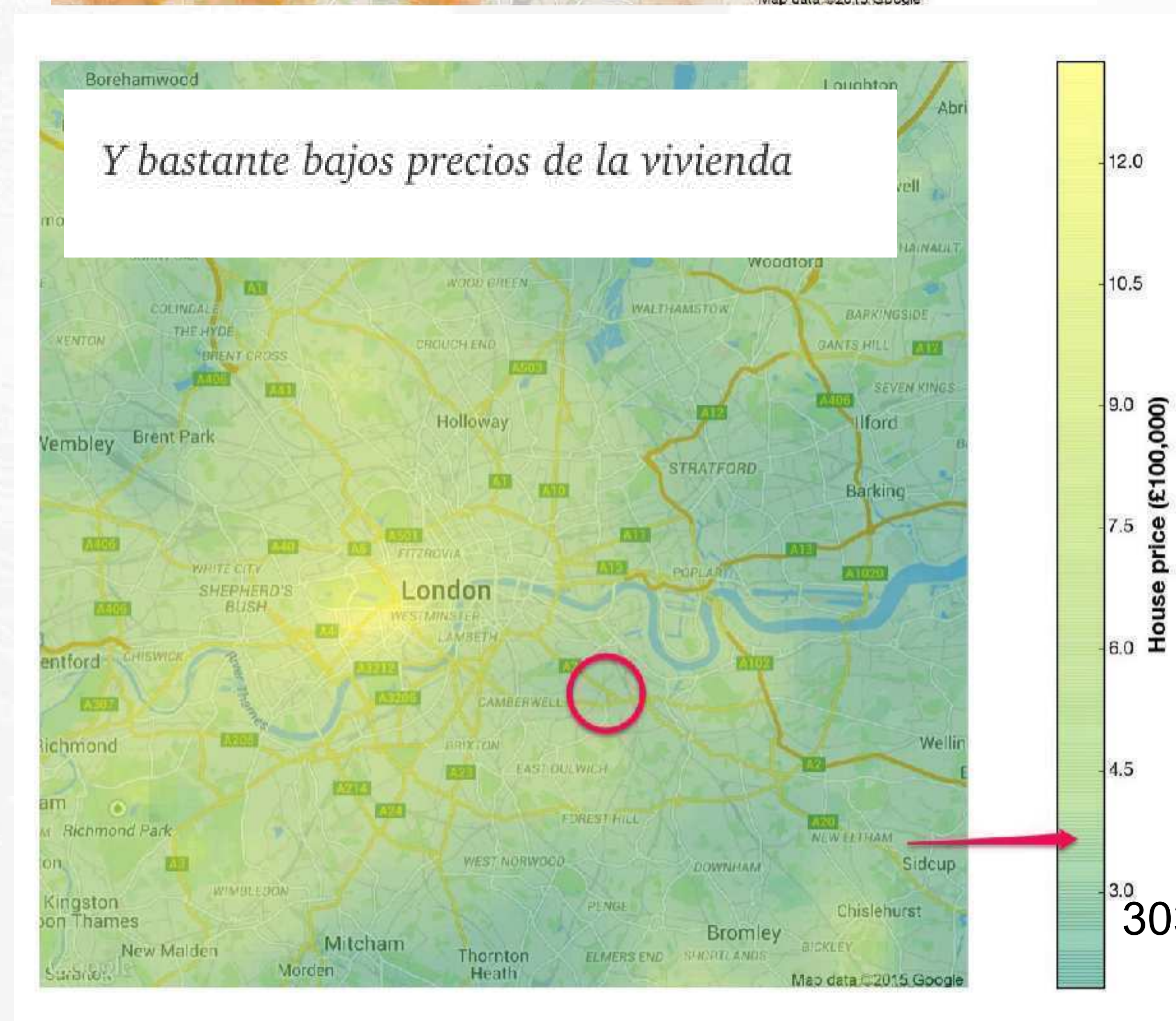




GENTRIFICACIÓN (continuación)



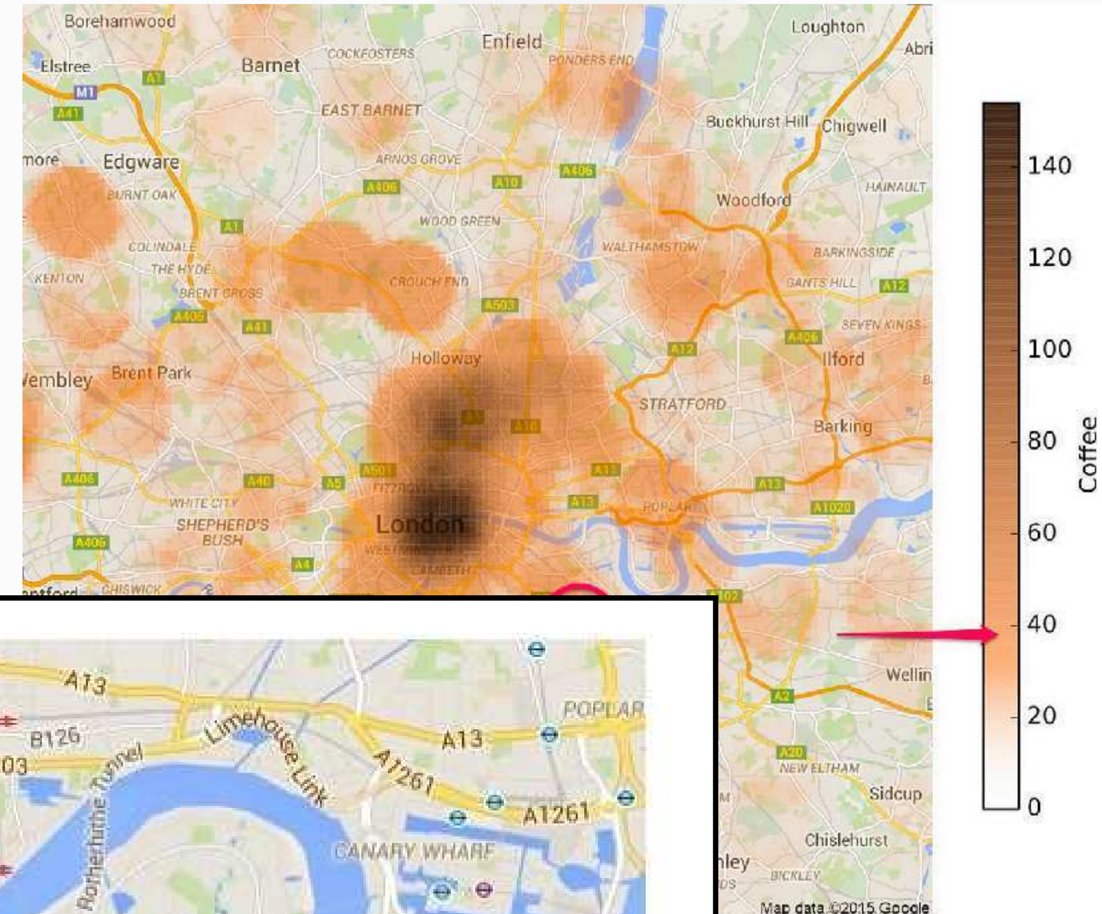


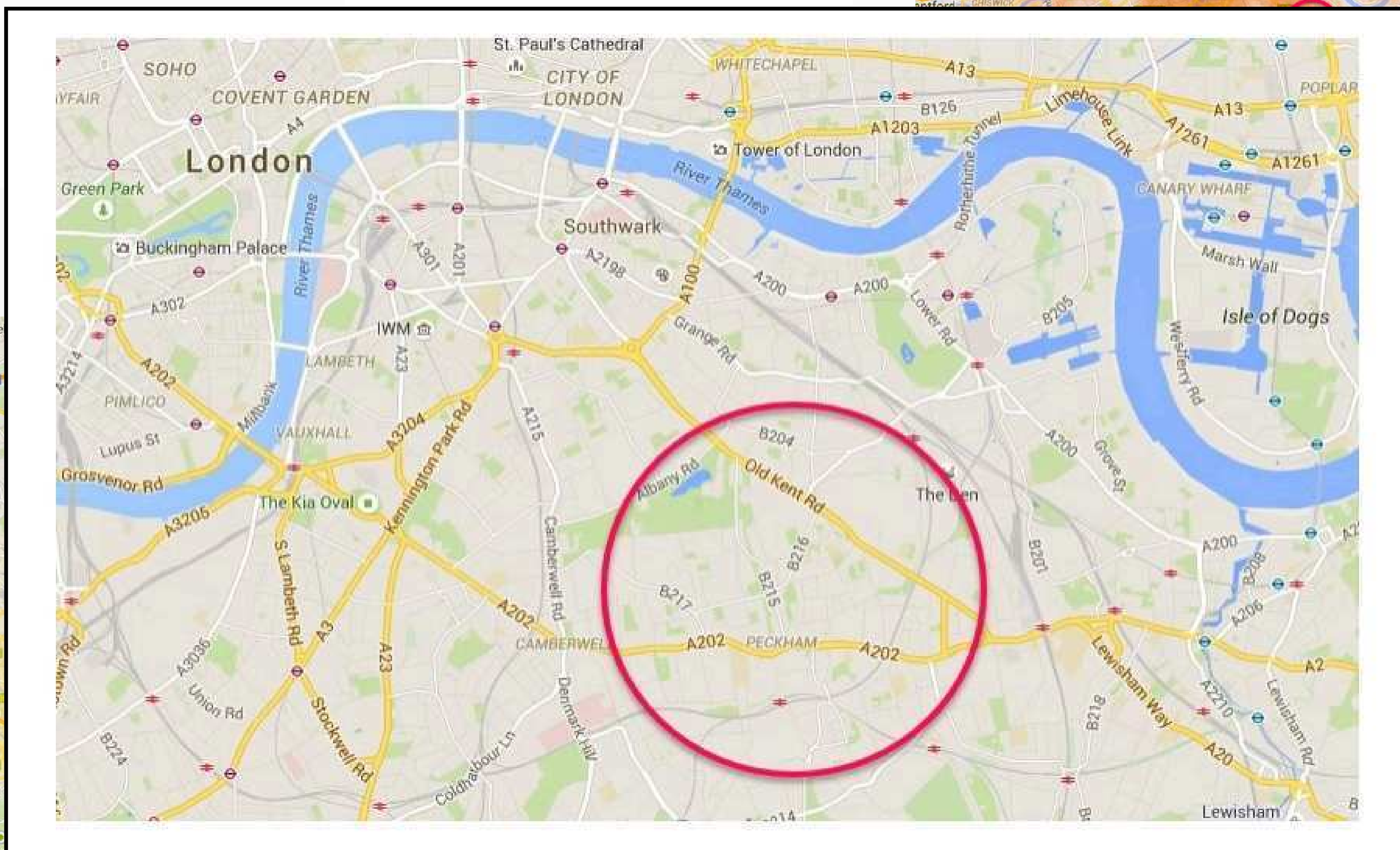


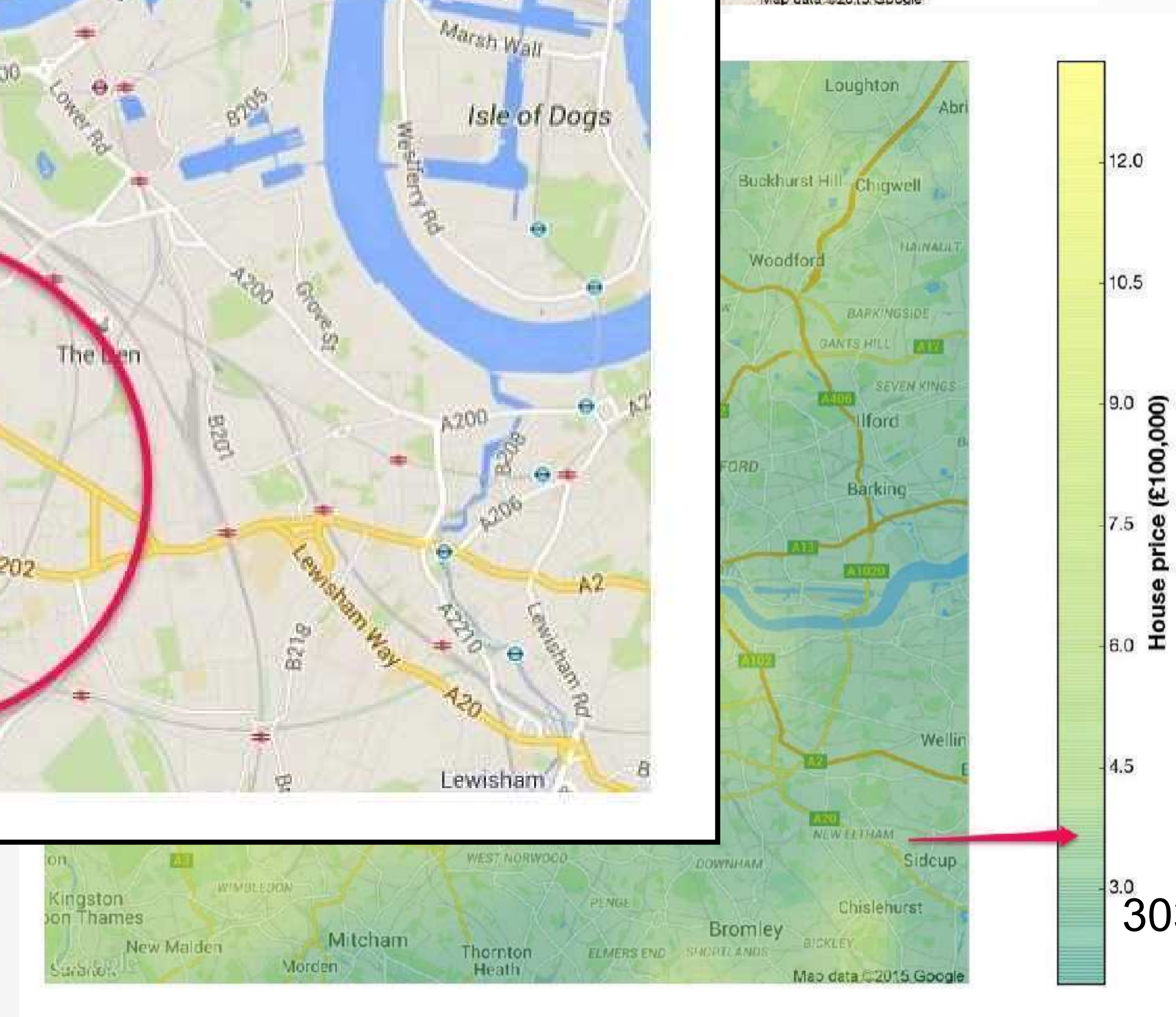
GENTRIFICACIÓN (continuación)

Y los resultados dicen ...

¡Muévete a Peckham!



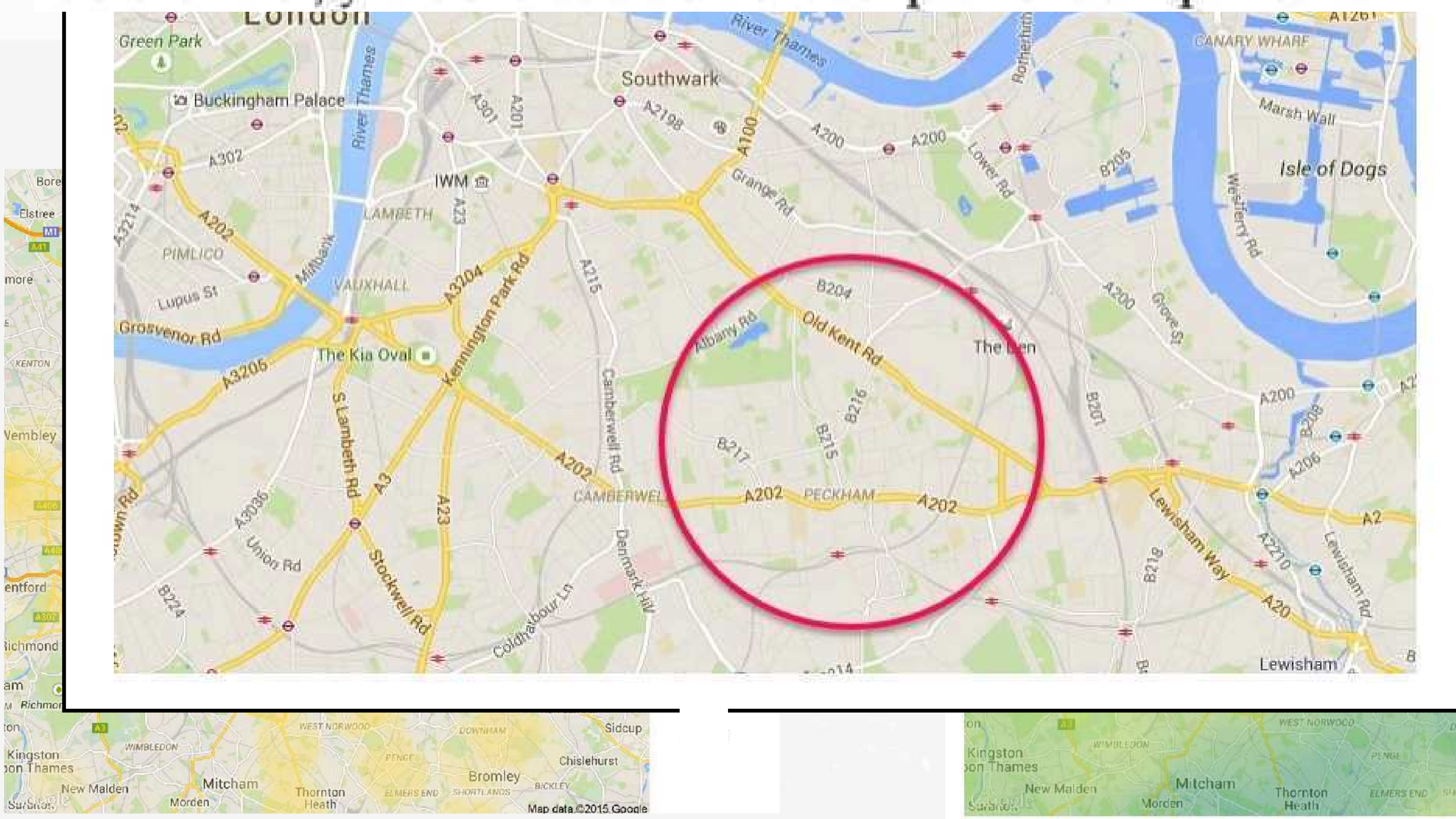


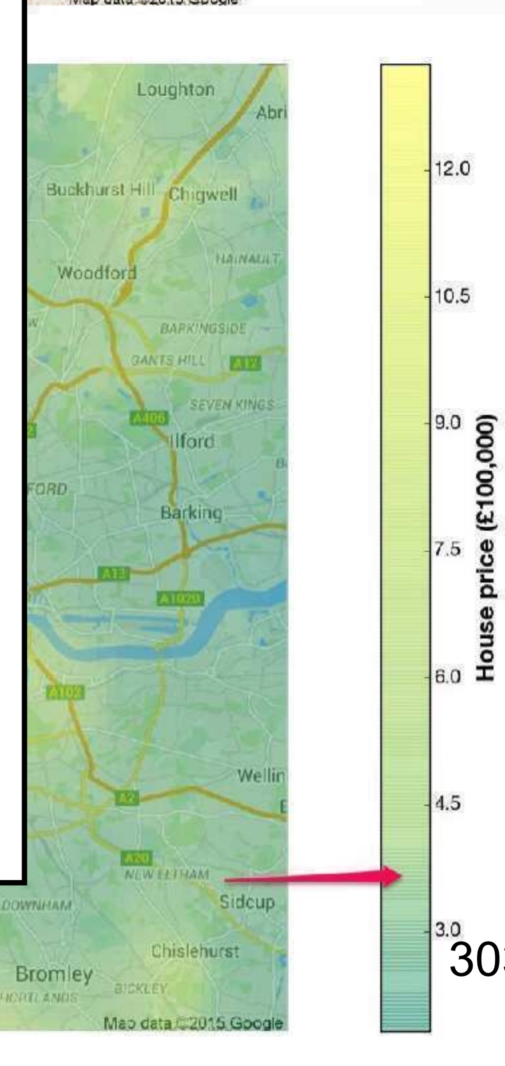


GENTRIFICACIÓN (continuación)

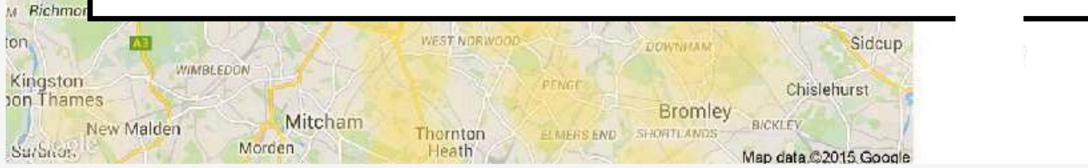
En la actualidad, están en estudio

talleres de reparación de bicicletas, las fluctuaciones en el **precio de calle de cilantro** , y la **densidad de tiendas que venden quinoa** ...





En la actualidad, están en estudio **talleres de** reparación de bicicletas, las fluctuaciones en el **precio de calle de cilantro** , y la **densidad de tiendas que venden quinoa** ...



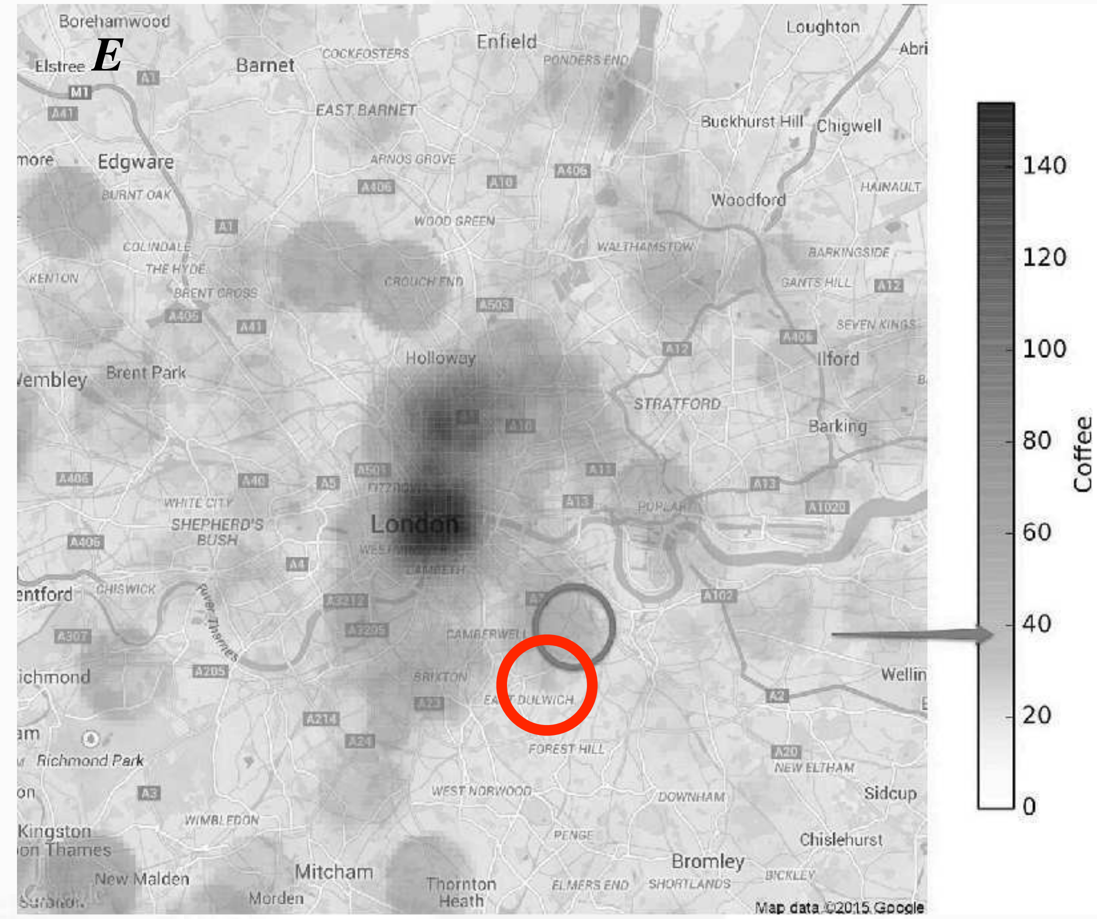
Objetivo: incorporación de los órdenes de actividad $\sqsubseteq^W$ y las nul-normas $\sqcap^W$ en el análisis de estos procesos de gentrificación:

¿GENTRIFICACIÓN Y ORDEN DE ACTIVIDAD?

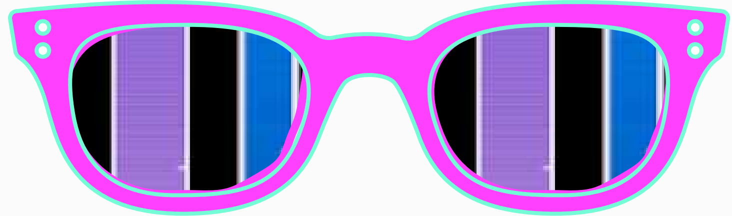
Inf-semirretículos:

$$(P(E), \sqsubseteq^W)$$

$$(L(E), \sqsubseteq^W)$$



¿GENTRIFICACIÓN Y ORDEN DE ACTIVIDAD?



Inf-semirretículos:

$(P(E), \sqsubseteq^W)$

$(L(E), \sqsubseteq^W)$

?

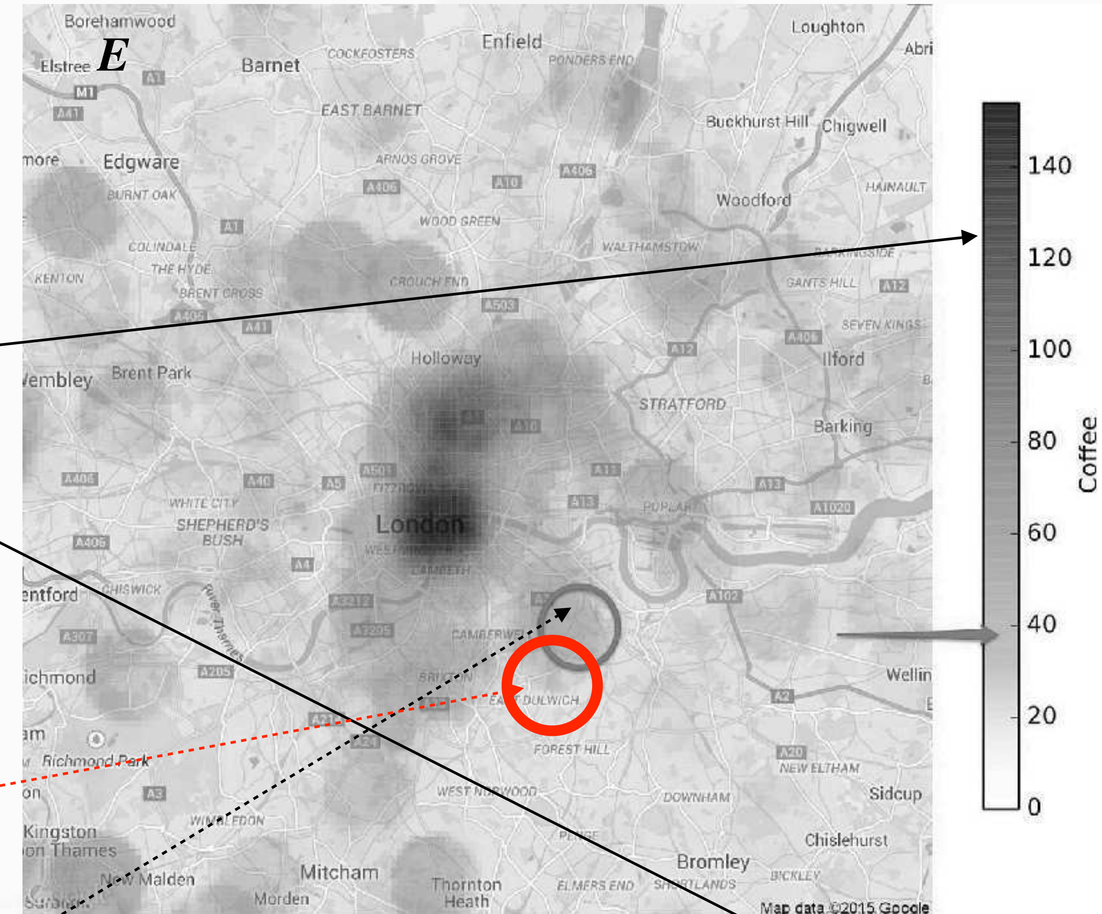
(tema abierto)

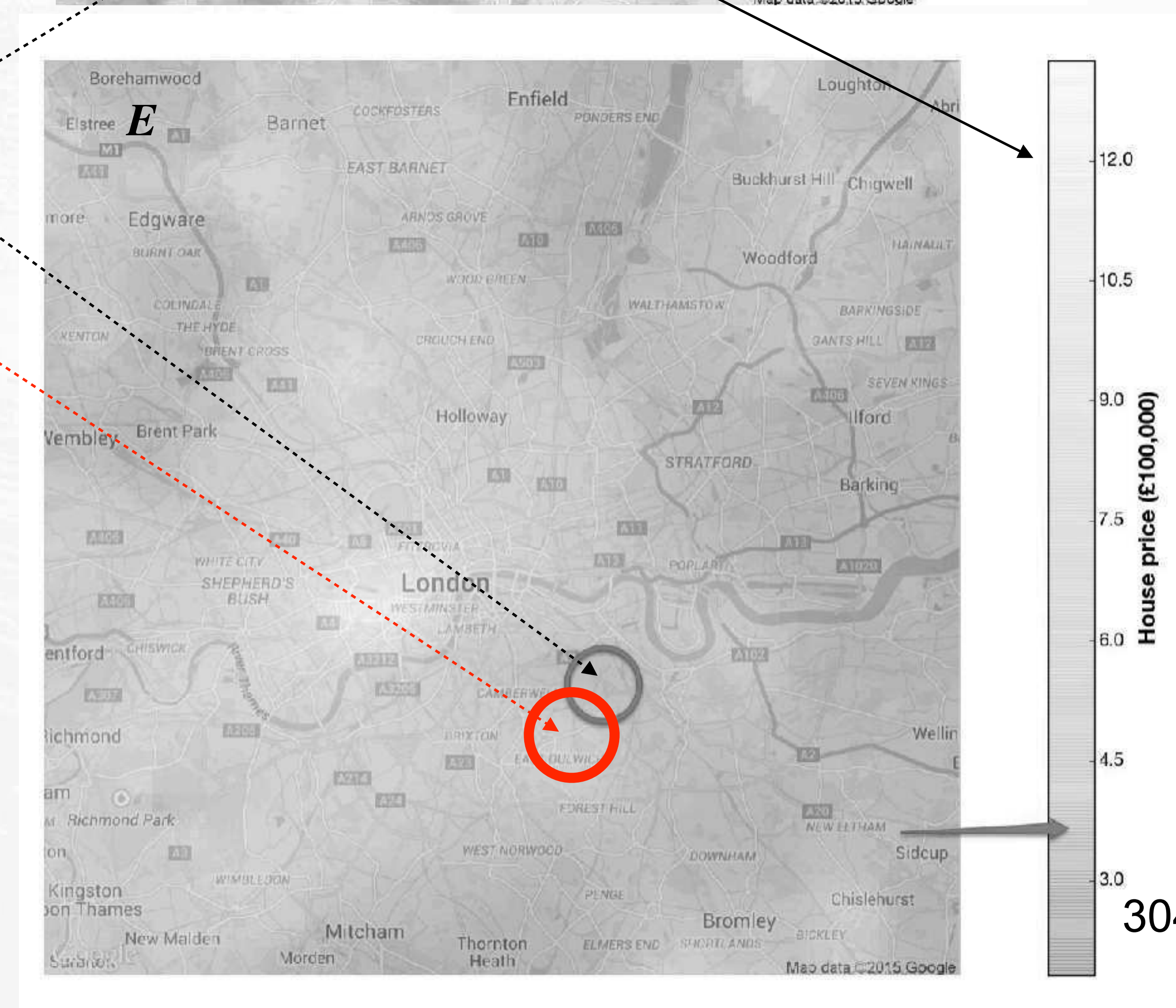
$A \sqsubseteq^W B, B \sqsubseteq^W A, A \not\sqsubseteq^W B, \ldots$ *etc*

W

B

A



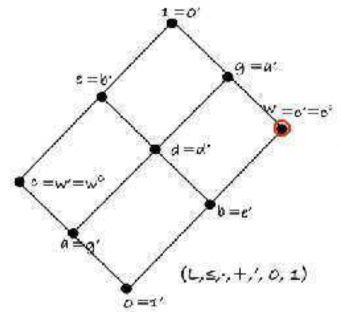


Morfología Matemática en $(\mathcal{P}(X),\sqsubseteq^{W})$: filtros “w-morfológicos”.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.



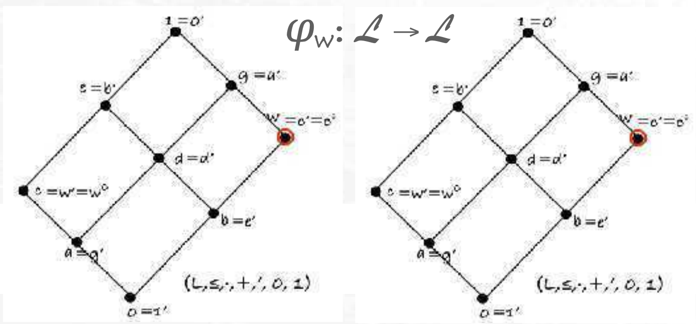
<u>Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$</u>

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^{\,2} = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

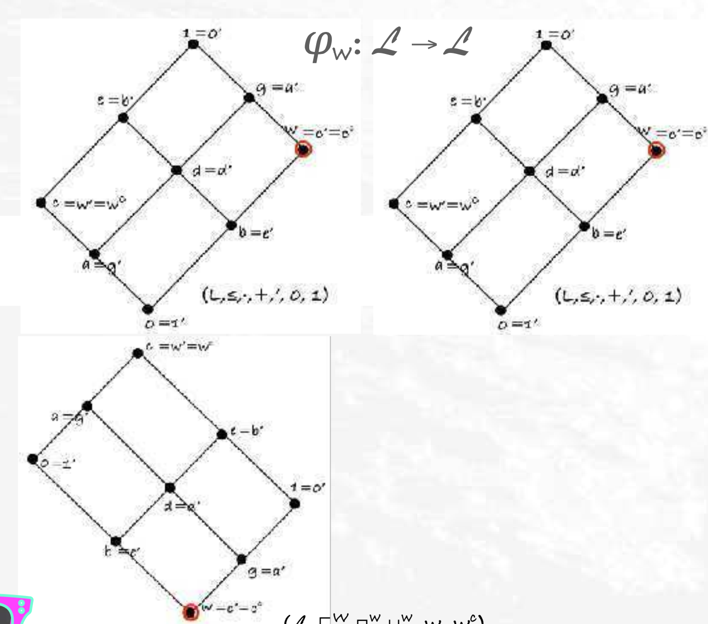
Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

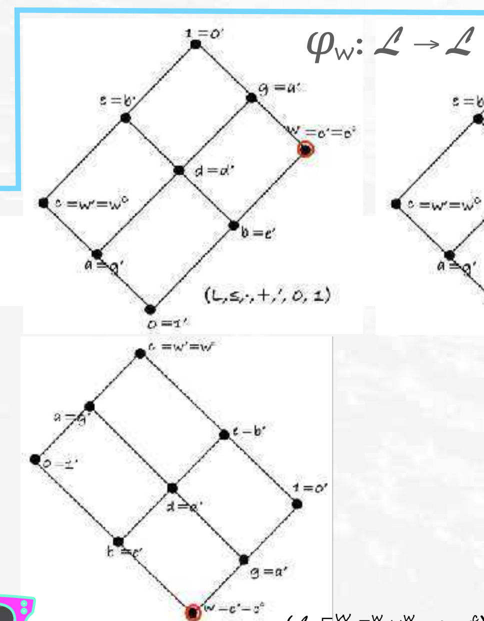
Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \; \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

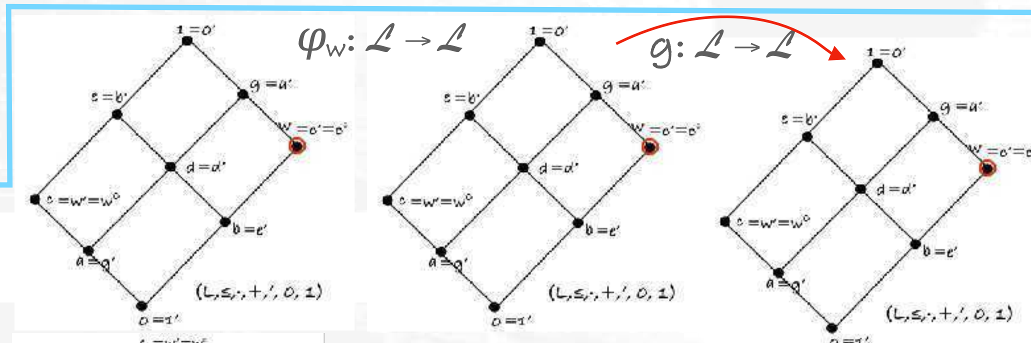
Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

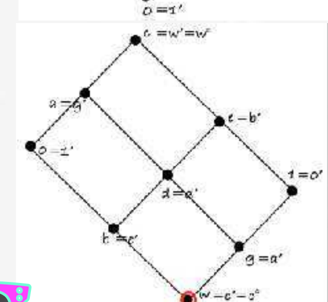
Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w : (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \ \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.



Definición. Sea $g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.



$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

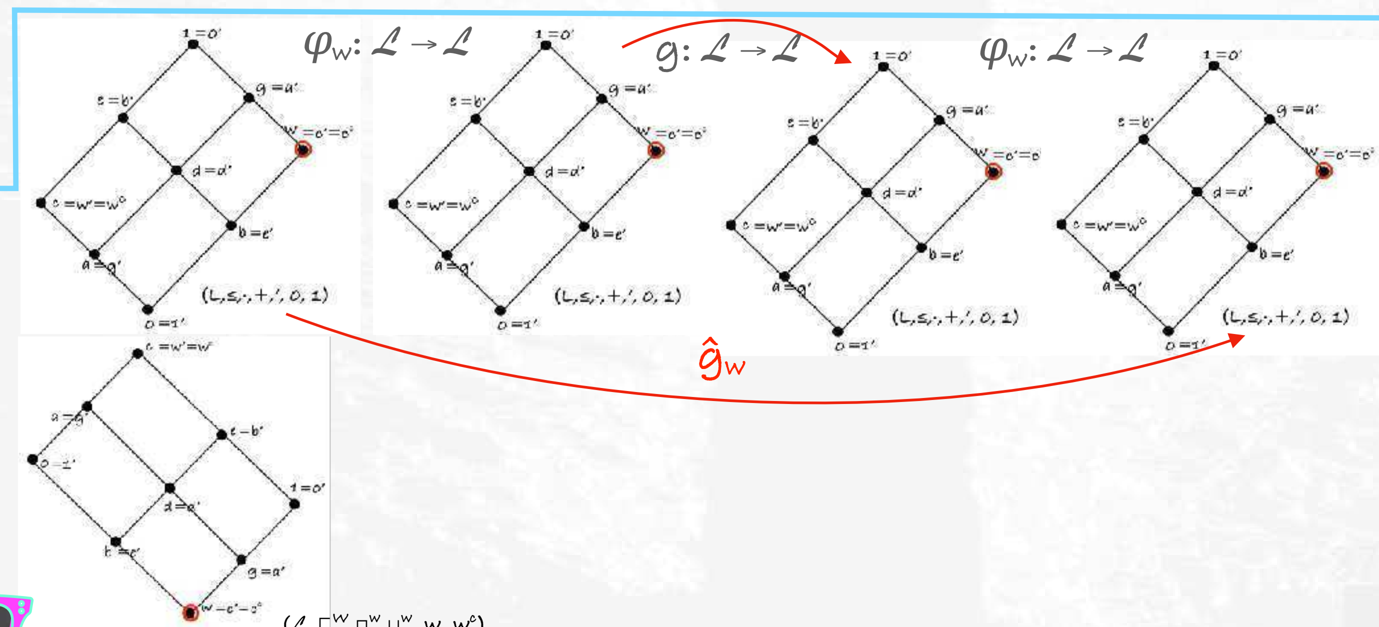
Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \; \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.



Definición. Sea $g: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Definimos la aplicación asociada $\hat{g}_w: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ mediante: $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, es decir

$\hat{g}_w(x) = \varphi_w(g(\varphi_w(x))) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^{\,2} = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

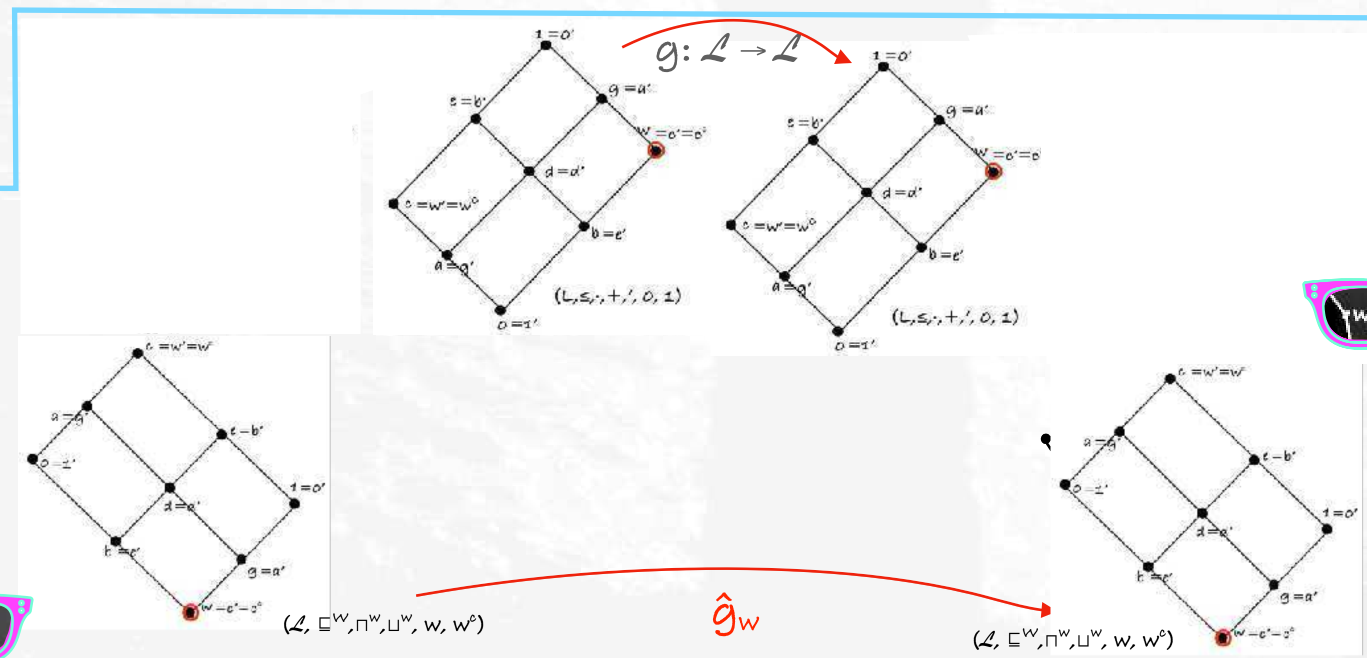
$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \;\forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.

<u>Definición</u>. Sea $g: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Definimos la aplicación asociada $\hat{g}_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mediante:

$\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, es decir

$\hat{g}_w(x) = \varphi_w(g(\varphi_w(x))) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.



Hay propiedades de g en el álgebra $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ que $\hat{g}_{w}$ también verifica, ahora en el álgebra $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^{c}), ')$:

Hay propiedades de g en el álgebra $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ que $\hat{g}_w$ también verifica, ahora en el álgebra $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

Proposición. Se verifica: (*)

(1) Si g es isótona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es isótona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \leq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(t))$.

(2) Si g es antítona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es antítona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \geq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsupseteq^w \hat{g}_w(t))$. (Siendo $(a \sqsupseteq^w b) \Leftrightarrow (b \sqsubseteq^w a)$).

(3) Si $g(0)=0$ entonces $\hat{g}_w(w)=w$ y si $g(1)=1$ entonces $\hat{g}_w(w^c)=w^c$.

(4) Si $g(\inf M)=\inf g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcap^w M) = \sqcap^w \hat{g}_w(M)$, siendo $f(M)=\{f(m) \,/\, m \in M\}$.

(5) Si $g(\sup M)=\sup g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcup^w M) = \sqcup^w \hat{g}_w(M)$.

(*) (Algunas ya demostradas y otras inmediatas)

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Hay propiedades de g en el álgebra $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ que $\hat{g}_w$ también verifica, ahora en el álgebra $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

Proposición. Se verifica: (*)

(1) Si g es isótona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es isótona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \leq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(t))$.

(2) Si g es antítona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es antítona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \geq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsupseteq^w \hat{g}_w(t))$. (Siendo $(a \sqsupseteq^w b) \Leftrightarrow (b \sqsubseteq^w a)$).

(3) Si $g(0)=0$ entonces $\hat{g}_w(w)=w$ y si $g(1)=1$ entonces $\hat{g}_w(w^c)=w^c$.

(4) Si $g(\inf M)=\inf g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcap^w M) = \sqcap^w \hat{g}_w(M)$, siendo $f(M)=\{f(m) \,/\, m\in M\}$.

(5) Si $g(\sup M)=\sup g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcup^w M) = \sqcup^w \hat{g}_w(M)$.

Otras propiedades que comparten g y $\hat{g}_w$:

Proposición. Se verifica: (*)

(6) Si $g(x) \leq x$, entonces $\hat{g}_w(x) \sqsubseteq^w x$.

(7) Si $x \leq g(x)$, entonces $x \sqsubseteq^w \hat{g}_w(x)$.

(8) Si $g^2(x) \leq g(x)$, entonces $\hat{g}_w{}^2(x) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(x)$ y si $g^2(x) = g(x)$ entonces $\hat{g}_w{}^2(x) = \hat{g}_w(x)$.

(9) Si $g(x') = (g(x))'$, entonces $\hat{g}_w(x') = (\hat{g}_w(x))'$.

(10) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_w$ también lo es y para las inversas se verifica $(\widehat{g^{-1}})_w = \hat{g}_w{}^{-1}$.

(11) Si $x = g(x)$ entonces $\varphi_w(x) = \hat{g}_w(\varphi_w(x))$, en particular: $((0=g(0)) \Rightarrow (w=\hat{g}_w(w)))$.

(12) Si $g(x\cdot y)=g(x)\cdot g(y)$ entonces $\hat{g}_w(x \sqcap^w y) = \hat{g}_w(x) \sqcap^w \hat{g}_w(y)$.

(13) Si $g(x+y)=g(x)+g(y)$ entonces $\hat{g}_w(x \sqcup^w y) = \hat{g}_w(x) \sqcup^w \hat{g}_w(y)$.

(14) Si $g(x\cdot y)=g(x)$ entonces $\hat{g}(\varphi_w(x) \sqcap^w \varphi_w(y)) = \hat{g}(\varphi_w(x))$.

(*) (Algunas ya demostradas y otras inmediatas)

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

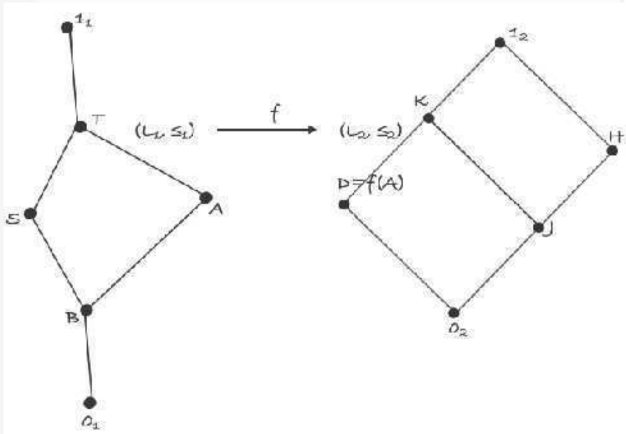
Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \rightarrow L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Una aplicación $f: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un <u>filtro morfológico</u> si:

(1f) es isótona: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$, (2f) es idempotente: $f^2(x) = f(x) \;\; \forall x \in \mathcal{L}$.

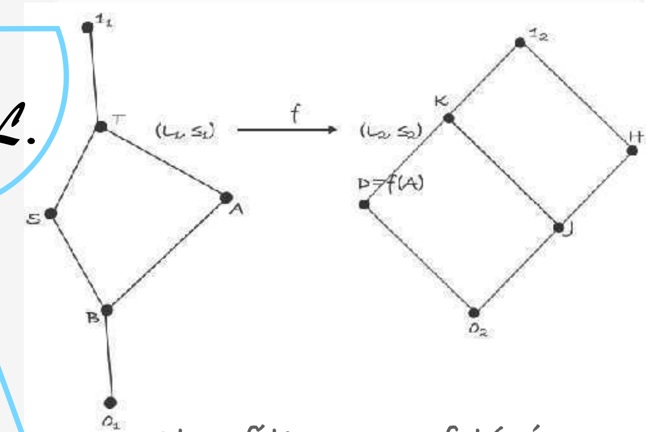
Un aplicación $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>apertura morfológica</u> si:

(1a) Es un filtro morfológico, (2a) es anti-extensiva: $\gamma(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

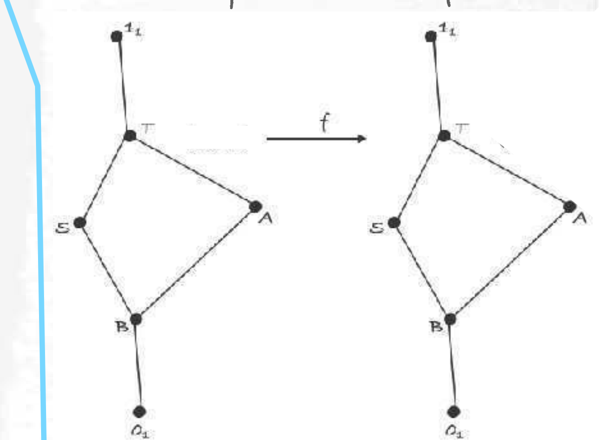
Una aplicación $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>cierre morfológico</u> si:

(1c) Es un filtro morfológico, (2c) es extensiva: $x \leq \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1),(L_2,\leq_2),\ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



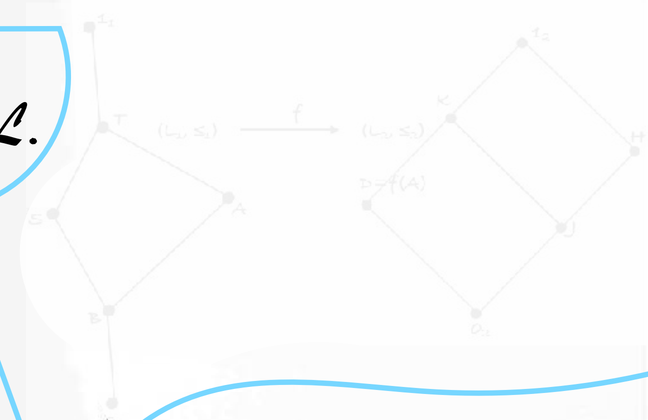
Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \to L$



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1),(L_2,\leq_2),\ldots$ Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Una aplicación $f: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un <u>filtro morfológico</u> si:

(1f) es isótona: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$, (2f) es idempotente: $f^2(x) = f(x) \ \forall x \in \mathcal{L}$.

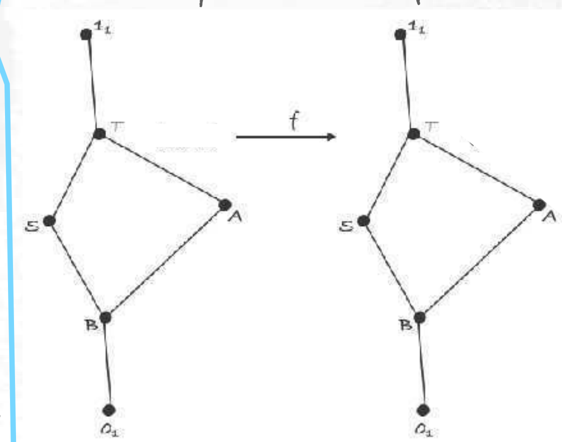
Un aplicación $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>apertura morfológica</u> si:

(1a) Es un filtro morfológico, (2a) es anti-extensiva: $\gamma(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Una aplicación $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>cierre morfológico</u> si:

(1c) Es un filtro morfológico, (2c) es extensiva: $x \leq \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \to L$



Sea $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ una negación fuerte en $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$. Se verifica: (*)

(a) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica, entonces la aplicación $\delta_\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\delta_\xi(x) = (\xi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una dilatación morfológica.

(b) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica, entonces la aplicación $\xi_\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\xi_\delta(x) = (\delta(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una erosión morfológica.

(c) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica, entonces la aplicación $\phi_\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\phi_\gamma(x) = (\gamma(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es un cierre morfológico.

(d) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico, entonces la aplicación $\gamma_\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\gamma_\phi(x) = (\phi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una apertura morfológica.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:
(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:
(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

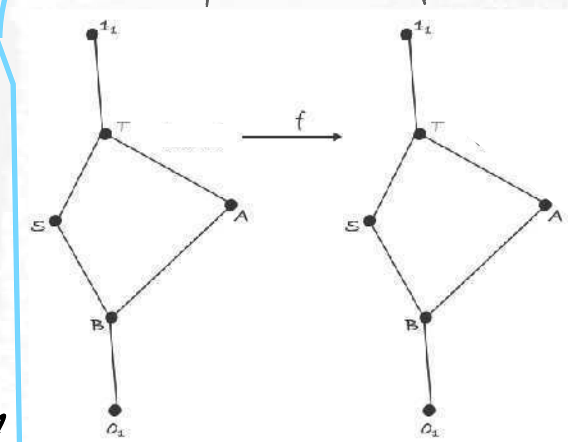
Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1), (L_2,\leq_2), \ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \to Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.

Una aplicación $f: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un <u>filtro morfológico</u> si:
(1f) es isótona: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$, (2f) es idempotente: $f^2(x) = f(x) \ \forall x \in \mathcal{L}$.

Un aplicación $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>apertura morfológica</u> si:
(1a) Es un filtro morfológico, (2a) es anti-extensiva: $\gamma(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Una aplicación $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>cierre morfológico</u> si:
(1c) Es un filtro morfológico, (2c) es extensiva: $x \leq \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \to L$



Sea $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ una negación fuerte en $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$. Se verifica: (*)

(a) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica, entonces la aplicación $\delta_\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\delta_\xi(x) = (\xi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una dilatación morfológica.

(b) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica, entonces la aplicación $\xi_\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\xi_\delta(x) = (\delta(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una erosión morfológica.

(c) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica, entonces la aplicación $\phi_\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\phi_\gamma(x) = (\gamma(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es un cierre morfológico.

(d) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico, entonces la aplicación $\gamma_\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\gamma_\phi(x) = (\phi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una apertura morfológica.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

Como consecuencia de una proposición anterior y de las definiciones de operadores morfológicos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Se verifica: (*)

(1) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\xi}_w = \varphi_w \circ \xi \circ \varphi_w$ es erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(2) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\delta}_w = \varphi_w \circ \delta \circ \varphi_w$ es dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(3) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\gamma}_w = \varphi_w \circ \gamma \circ \varphi_w$ es apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(4) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\phi}_w = \varphi_w \circ \phi \circ \varphi_w$ es cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(*) (Véase transparencias siguientes)

Operadores morfológicos en $(\mathcal{P}(R^2),\sqsubseteq^W)$ o en $(\mathcal{P}(Z^2),\sqsubseteq^W)$ obtenidos mediante "perspectivas" W.

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq,\wedge,\vee, 0, 1),')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X),^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=R^2$ o de $X=Z^2$ (aquí el operador + se utiliza para la suma usual $x+y$ de puntos del plano R^2 o Z^2, y el operador - tanto para la diferencia $x-y$ como para el opuesto $-x$ de $x\in\mathcal{P}(X)$).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in\mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) =\{x\in X \,/\, (\check{B})_x\subseteq A\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$,

siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s\in S\}$ y $N_x=\{n+x \,/\, n\in N\}$.

(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) =\{x\in X \,/\, B_x\cap A\neq\varnothing\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B=\delta_B\circ\xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B=\xi_B\circ\delta_B$.

(*) (Véase transparencias siguientes)

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Como consecuencia de una proposición anterior y de las definiciones de operadores morfológicos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Se verifica:

(1) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w'=w^c$, entonces $\hat{\xi}_w=\varphi_w \circ \xi \circ \varphi_w$ es erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(2) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w'=w^c$, entonces $\hat{\delta}_w=\varphi_w \circ \delta \circ \varphi_w$ es dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(3) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w'=w^c$, entonces $\hat{\gamma}_w=\varphi_w \circ \gamma \circ \varphi_w$ es apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(4) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w'=w^c$, entonces $\phi_w=\varphi_w \circ \phi \circ \varphi_w$ es cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1), ')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X), ^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí el operador + se utiliza para la suma usual $x+y$ de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{Z}^2$, y el operador - tanto para la diferencia $x-y$ como para el opuesto $-x$ de $x \in \mathcal{P}(X)$).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B \in \mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x \in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,
siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s \in S\}$ y $N_x = \{n+x \,/\, n \in N\}$.

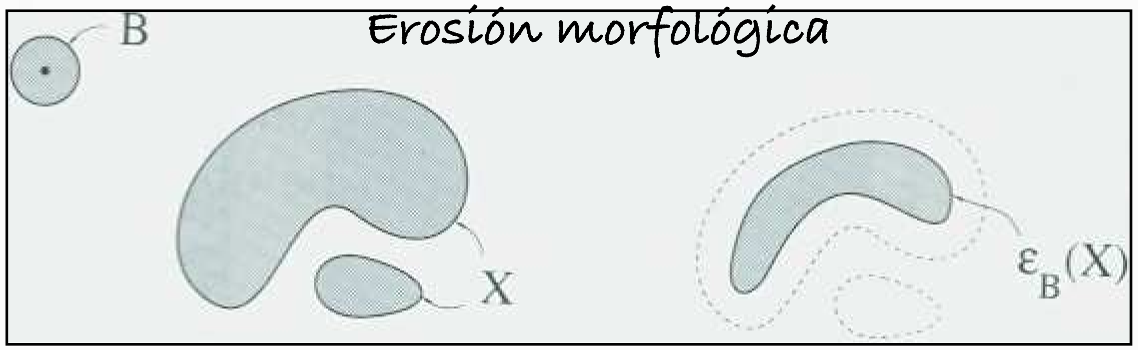
(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x \in X \,/\, B_x \cap A \neq \emptyset\}$ $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

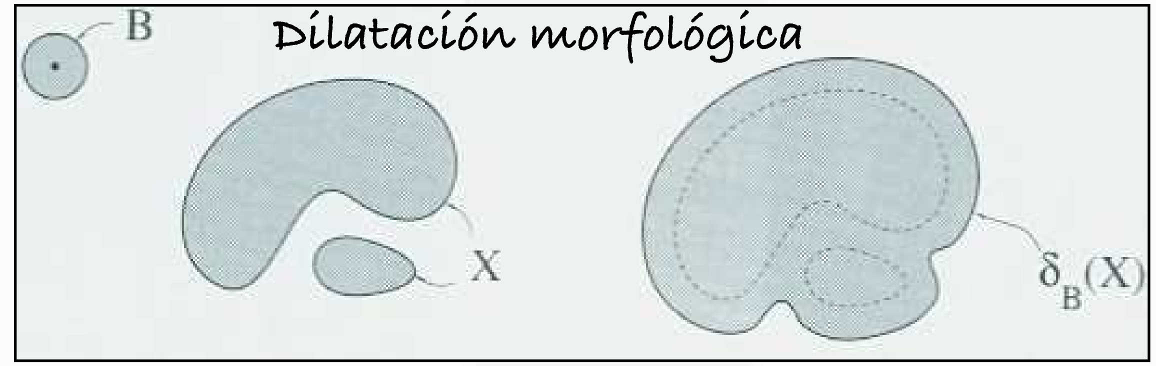
(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B = \delta_B \circ \xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B = \xi_B \circ \delta_B$.

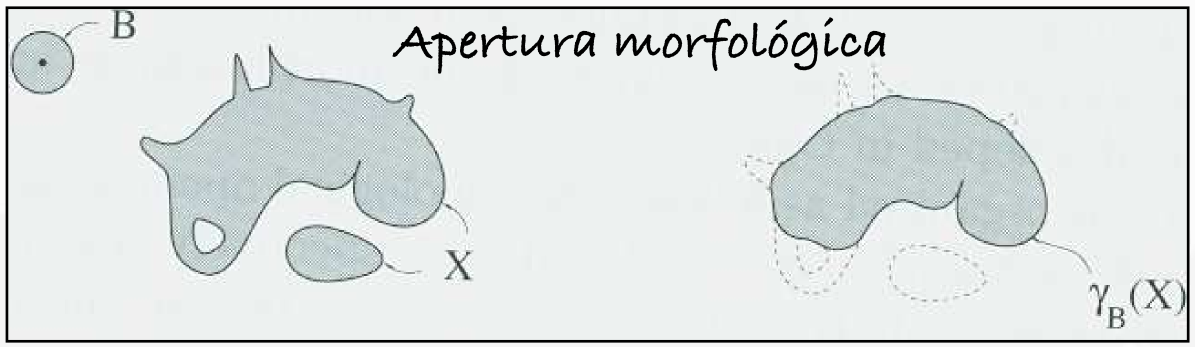
(*) (Véase transparencias siguientes)

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$





Ejemplo de los efectos de la erosión, la dilatación y los filtros morfológicos apertura y cierre en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$



Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1), ')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí el operador + se utiliza para la suma usual $x+y$ de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{Z}^2$, y el operador - tanto para la diferencia $x-y$ como para el opuesto $-x$ de $x\in\mathcal{P}(X)$).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in\mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$,
siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s\in S\}$ y $N_x=\{n+x \,/\, n\in N\}$.

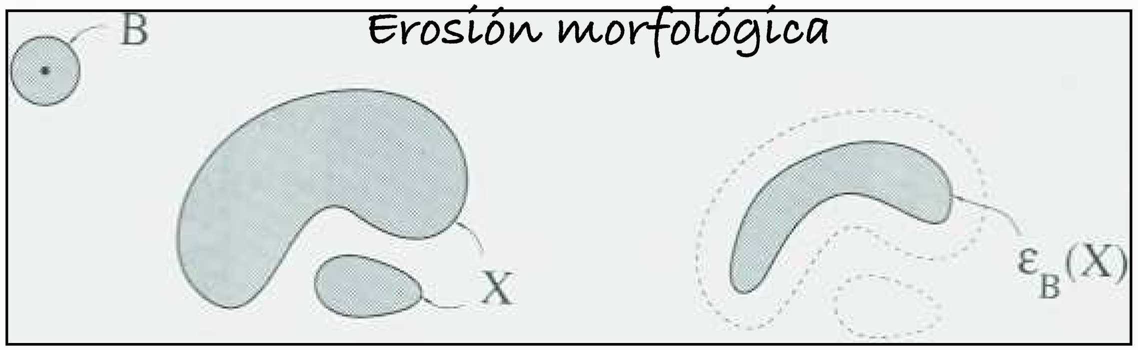
(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x\in X \,/\, B_x\cap A\neq\varnothing\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$.

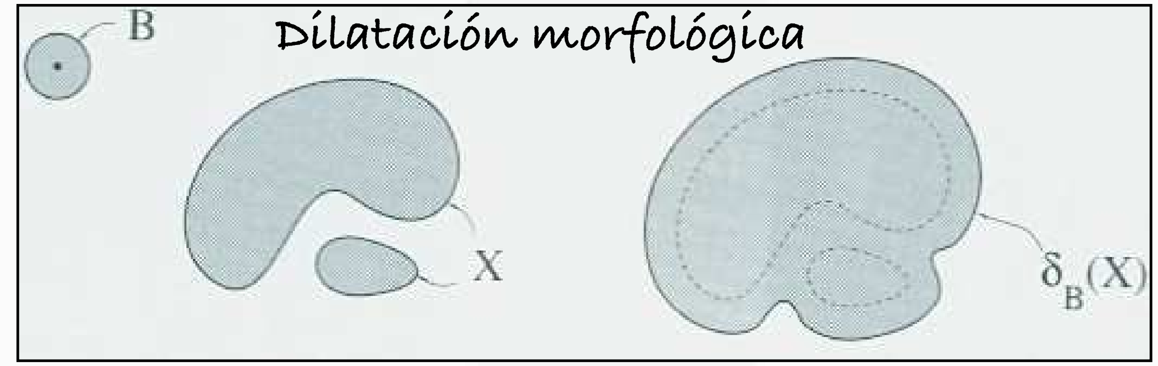
(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B=\delta_B\circ\xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B=\xi_B\circ\delta_B$.

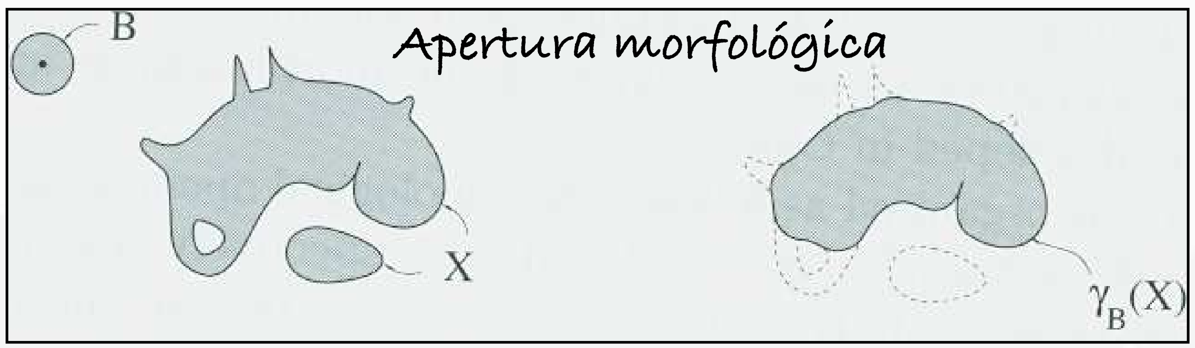
(*) (Véase transparencias siguientes)

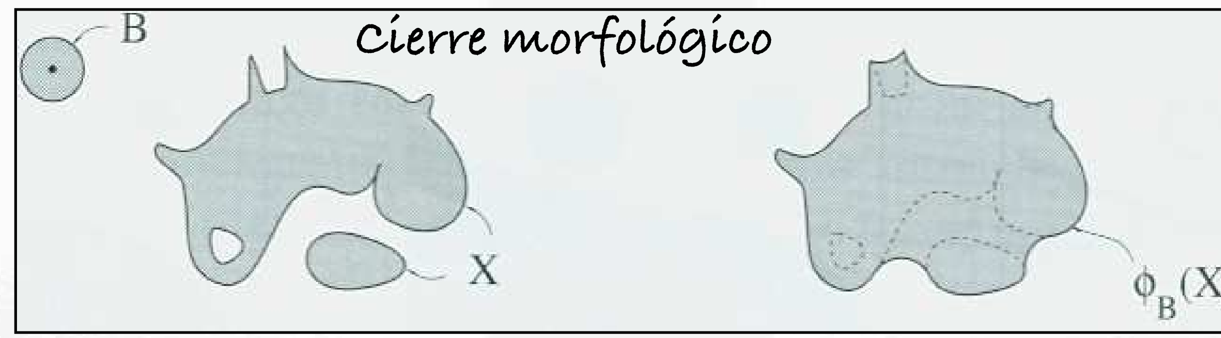
Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$





Ejemplo de los efectos de la erosión, la dilatación y los filtros morfológicos apertura y cierre en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$





Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1), ')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí el operador + se utiliza para la suma usual $x+y$ de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{Z}^2$, y el operador - tanto para la diferencia $x-y$ como para el opuesto $-x$ de $x\in\mathcal{P}(X)$).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in\mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$,
siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s\in S\}$ y $N_x=\{n+x \,/\, n\in N\}$.

(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x\in X \,/\, B_x\cap A\neq\varnothing\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B=\delta_B\circ\xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B=\xi_B\circ\delta_B$.

(*) (Véase transparencias siguientes)

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Teorema. Se verifica: (*)

(1) Si $\xi_B: P(X) \to P(X)$ es la erosión morfológica por B en $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$ y $W\in P(X)$ entonces la erosión morfológica $(\hat{\xi}_B)_W: P(X) \to P(X)$ en $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ^c)$ es tal que

$$(\hat{\xi}_B)_W(A) = (\varphi_W \circ \xi_B \circ \varphi_W)(A) = \varphi_W(\{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq \varphi_W(A)\} = \varphi_W(\{x\in X \,/\, \varphi_W((\check{B})_x) \sqsubseteq^W A\}) =$$
$$= (\{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq (A\Delta W)\})\Delta W = (\{x\in X \,/\, [((\check{B})_x)\Delta W] \sqsubseteq^W A\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

(2) Análogamente, para la dilatación, si $\delta_B: P(X) \to P(X)$ es la dilatación por B, entonces:

$$(\hat{\delta}_B)_W(A) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W)(A) = \varphi_W(\{x\in X \,/\, B_x \cap \varphi_W(A) \neq \varnothing\}) = \varphi_W(\{x\in X \,/\, \varphi_W(B_x) \sqcap^W A \neq W\}) =$$
$$= (\{x\in X \,/\, B_x \cap \varphi_W(A) \neq \varnothing\})\Delta W = (\{x\in X \,/\, \varphi_W(B_x) \sqcap^W A \neq W\})\Delta W \quad \forall A\in P(X).$$

(3) La apertura: $\gamma^* = (\delta_B)_W \circ (\xi_B)_W = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) \circ (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \xi_B \circ \varphi_W) = \varphi_W \circ \gamma_B \circ \varphi_W \triangleq (\gamma_B)_W$

(4) El cierre: $\phi^* = (\xi_B)_W \circ (\delta_B)_W = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) \circ (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \xi_B \circ \varphi_W) = \varphi_W \circ \phi_B \circ \varphi_W \triangleq (\phi_B)_W$

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee, 0, 1), ')$ el Álgebra de Boole $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí el operador + se utiliza para la suma usual $x+y$ de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{Z}^2$, y el operador - tanto para la diferencia $x-y$ como para el opuesto $-x$ de $x\in P(X)$).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in P(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A\in P(X)$,

siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s\in S\}$ y $N_x = \{n+x \,/\, n\in N\}$.

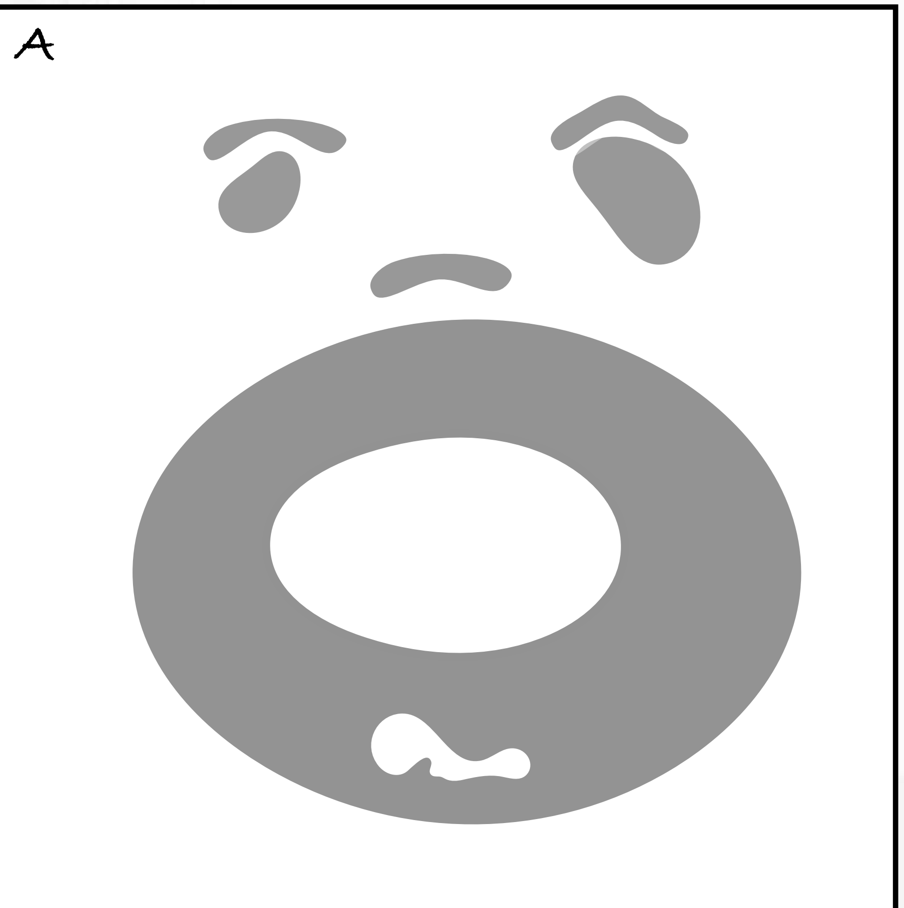
(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x\in X \,/\, B_x\cap A \neq \varnothing\}$ $\forall A\in P(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B = \delta_B \circ \xi_B$.

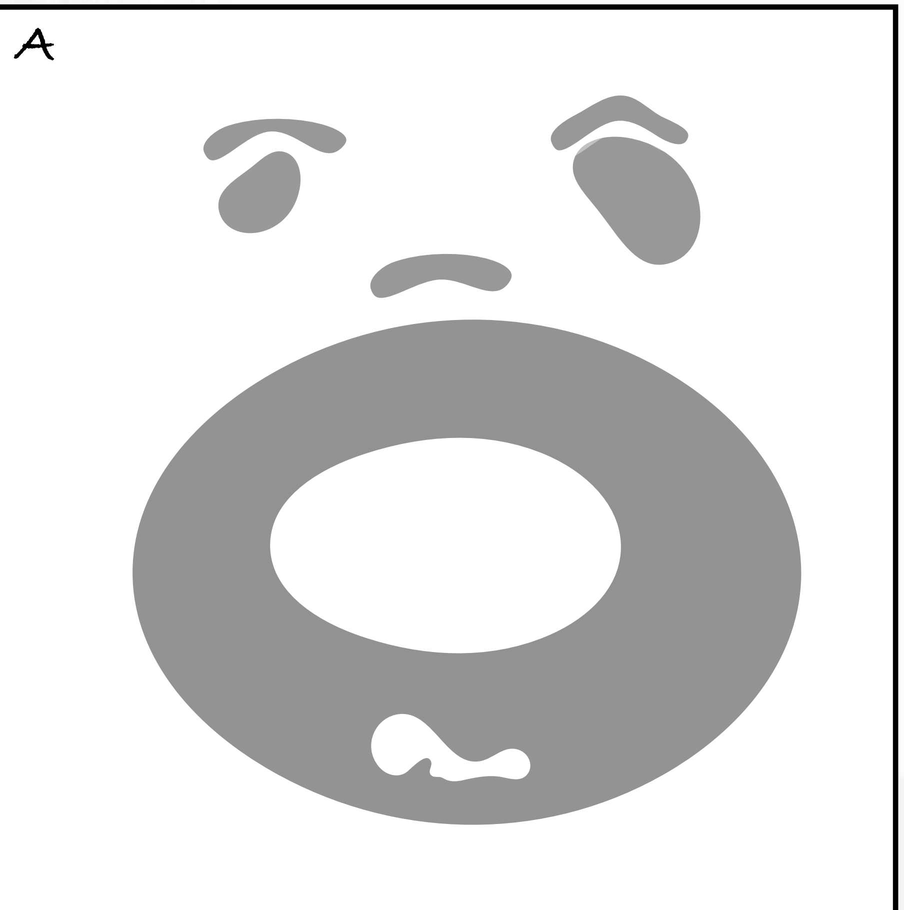
(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B = \xi_B \circ \delta_B$.

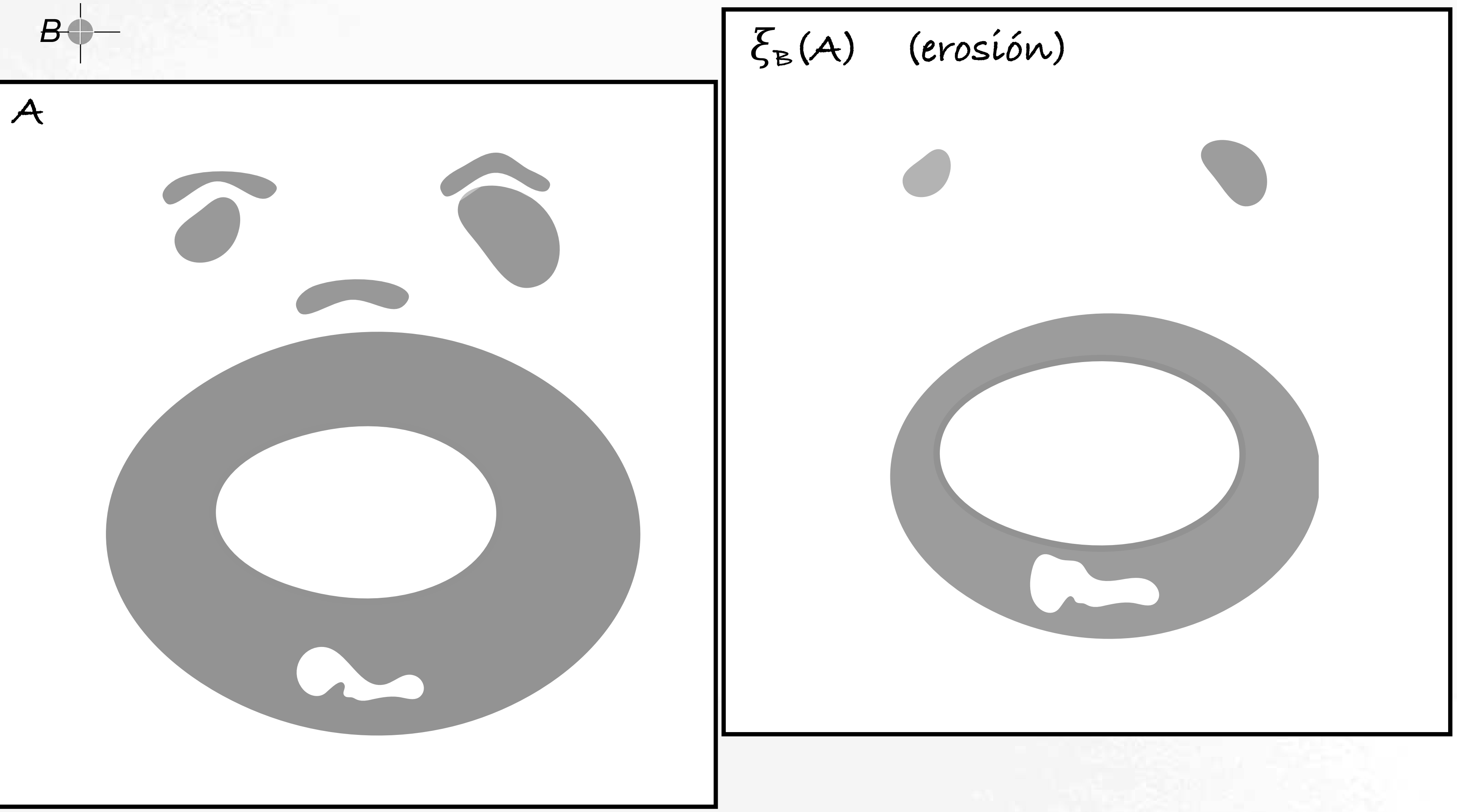
(*) (Véase transparencias siguientes)

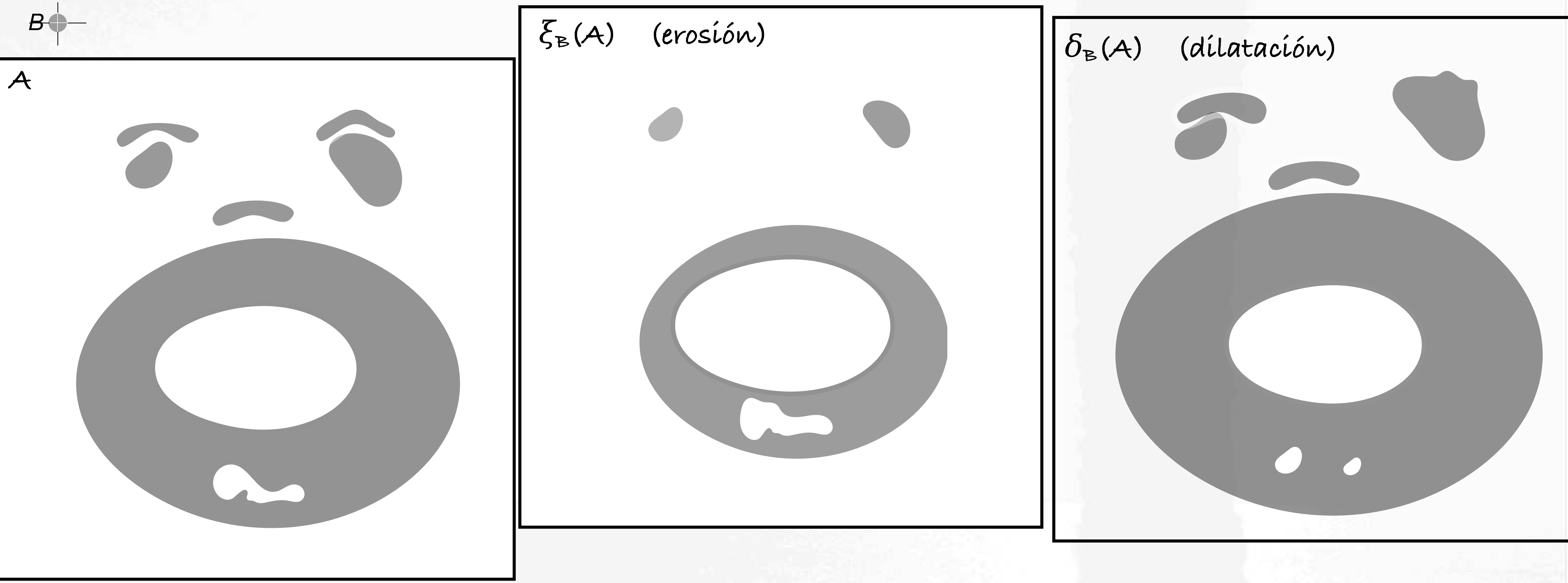
Ejemplo de los efectos de los w-filtros morfológicos apertura y cierre en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \sqsubseteq^{w})$


A

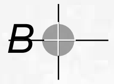
B



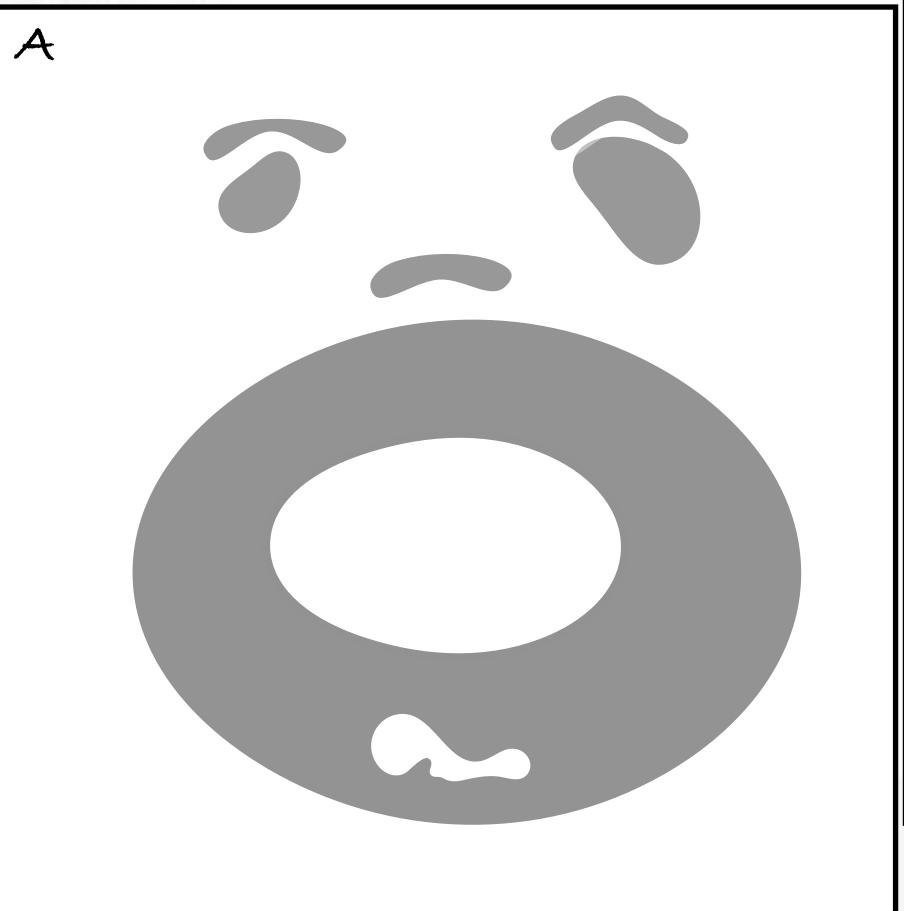

B
A
$\xi_B(A)$ (erosión)

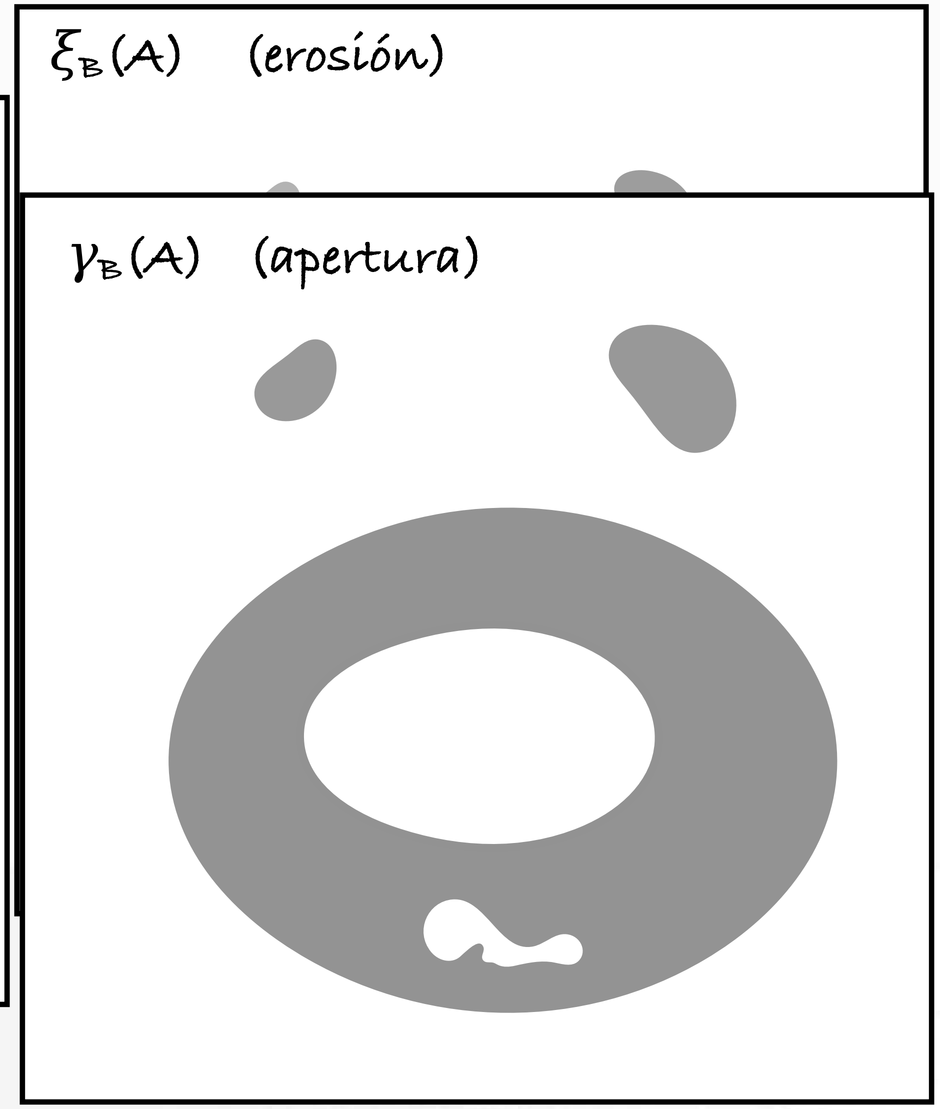


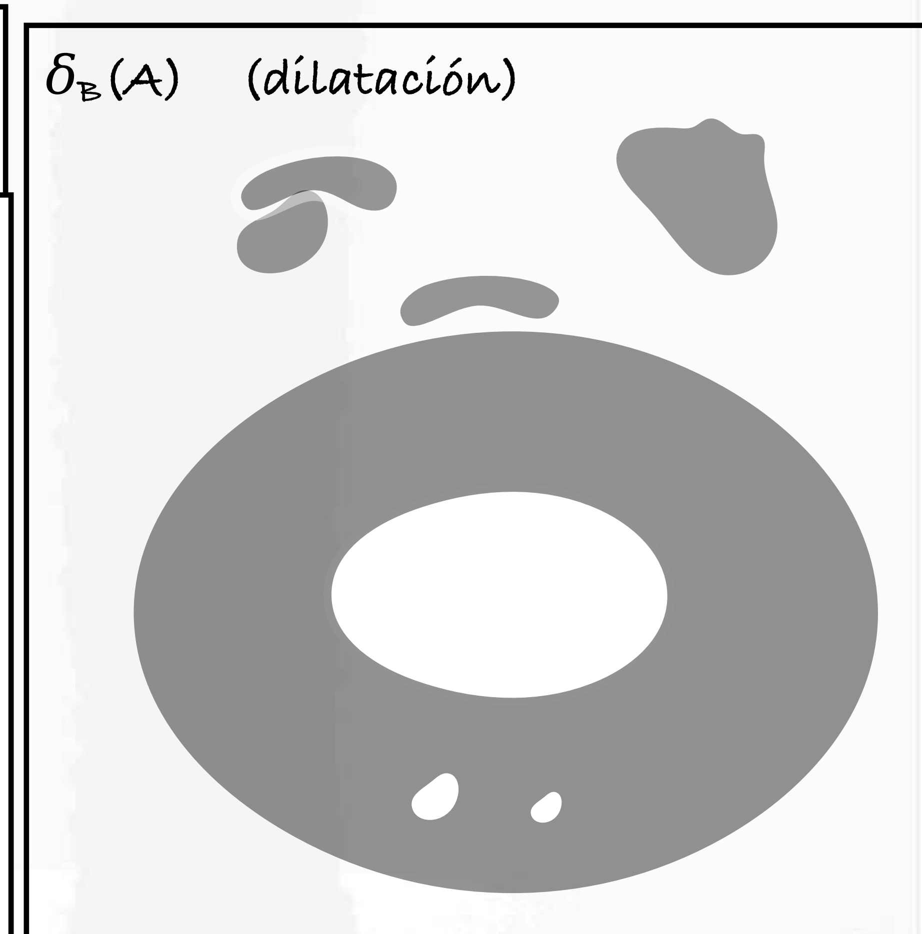
B
A
$\xi_B(A)$ (erosión)
$\delta_B(A)$ (dilatación)



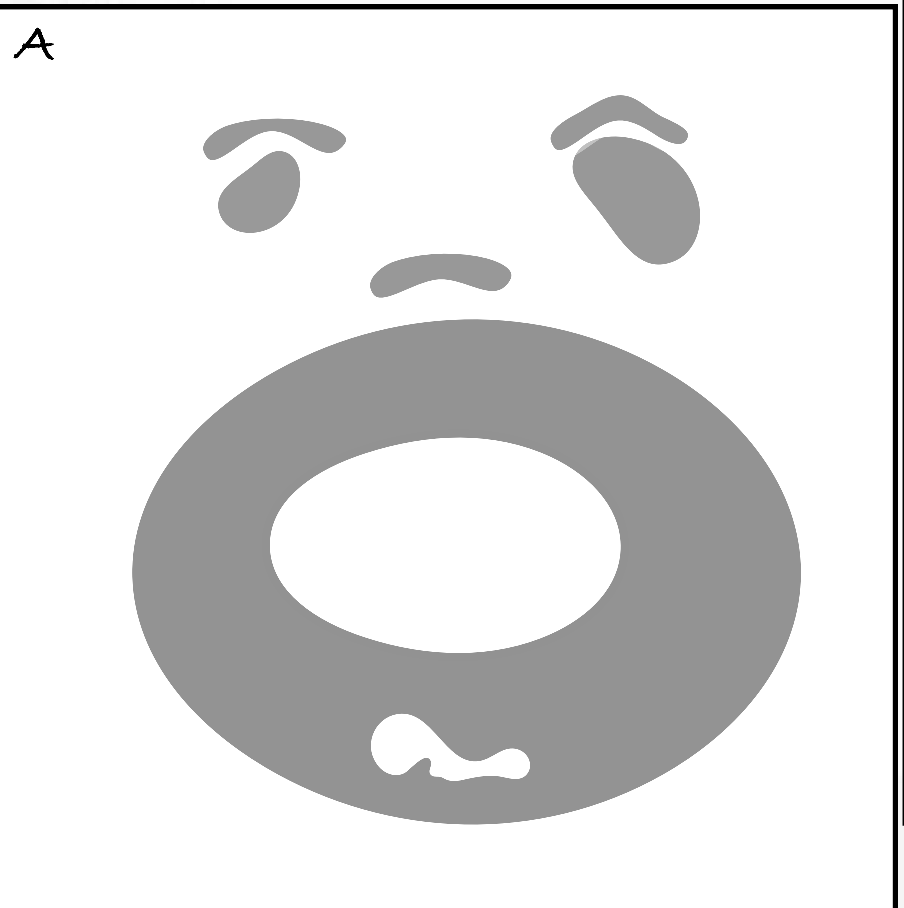
Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

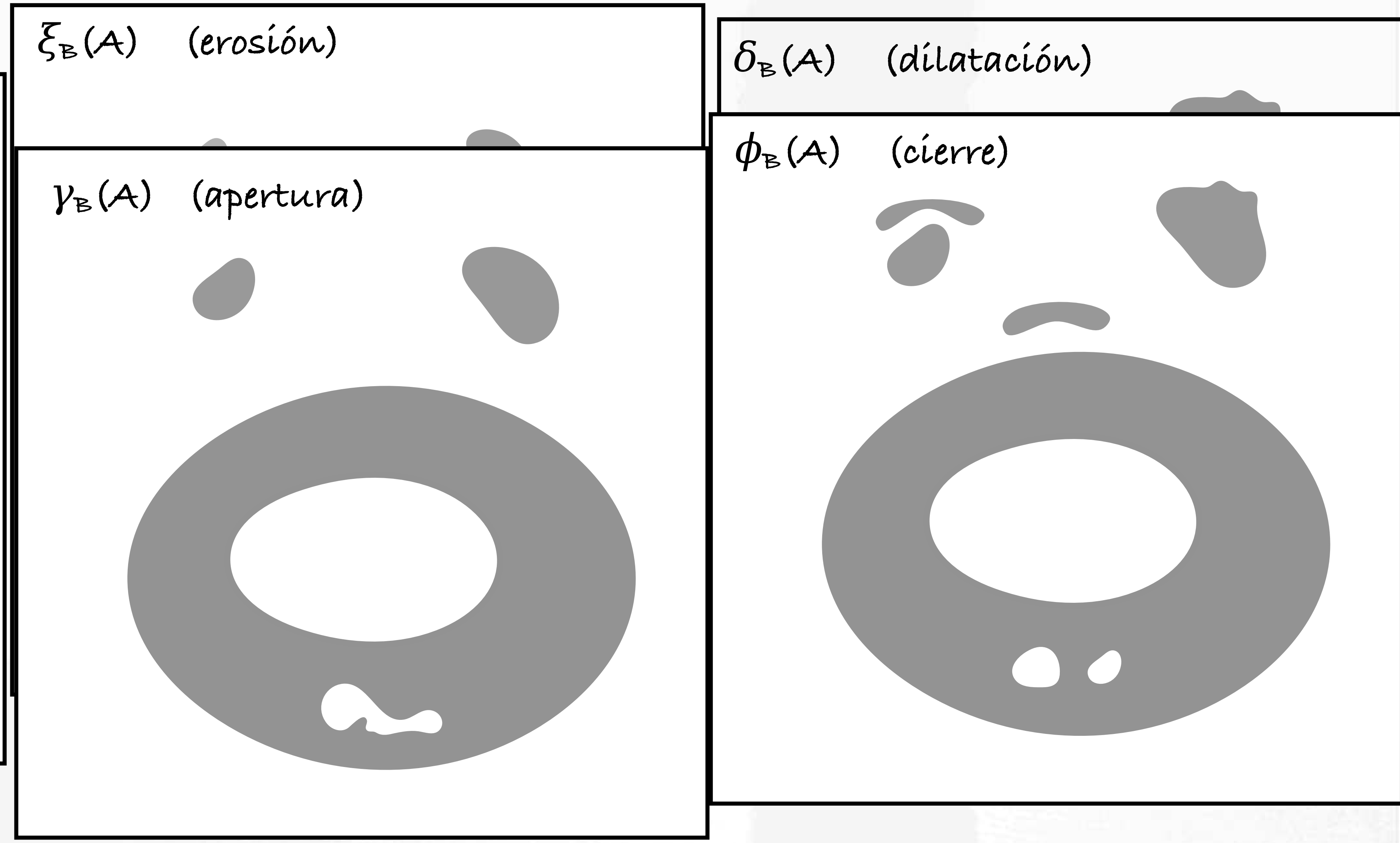




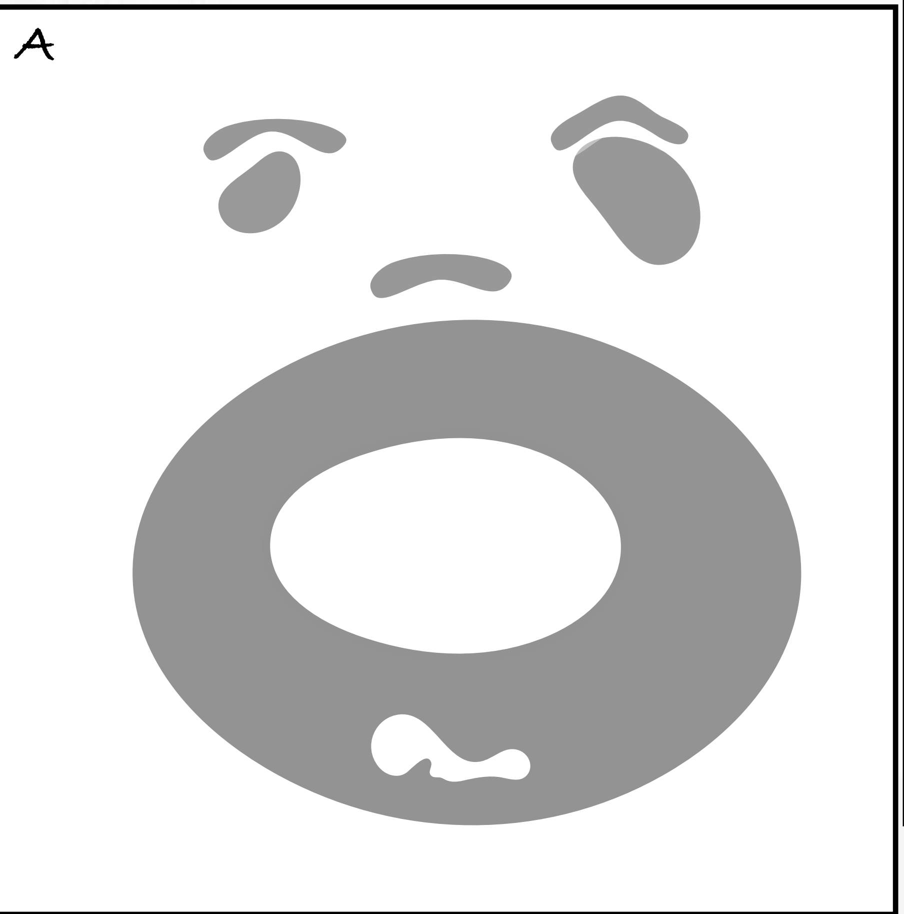


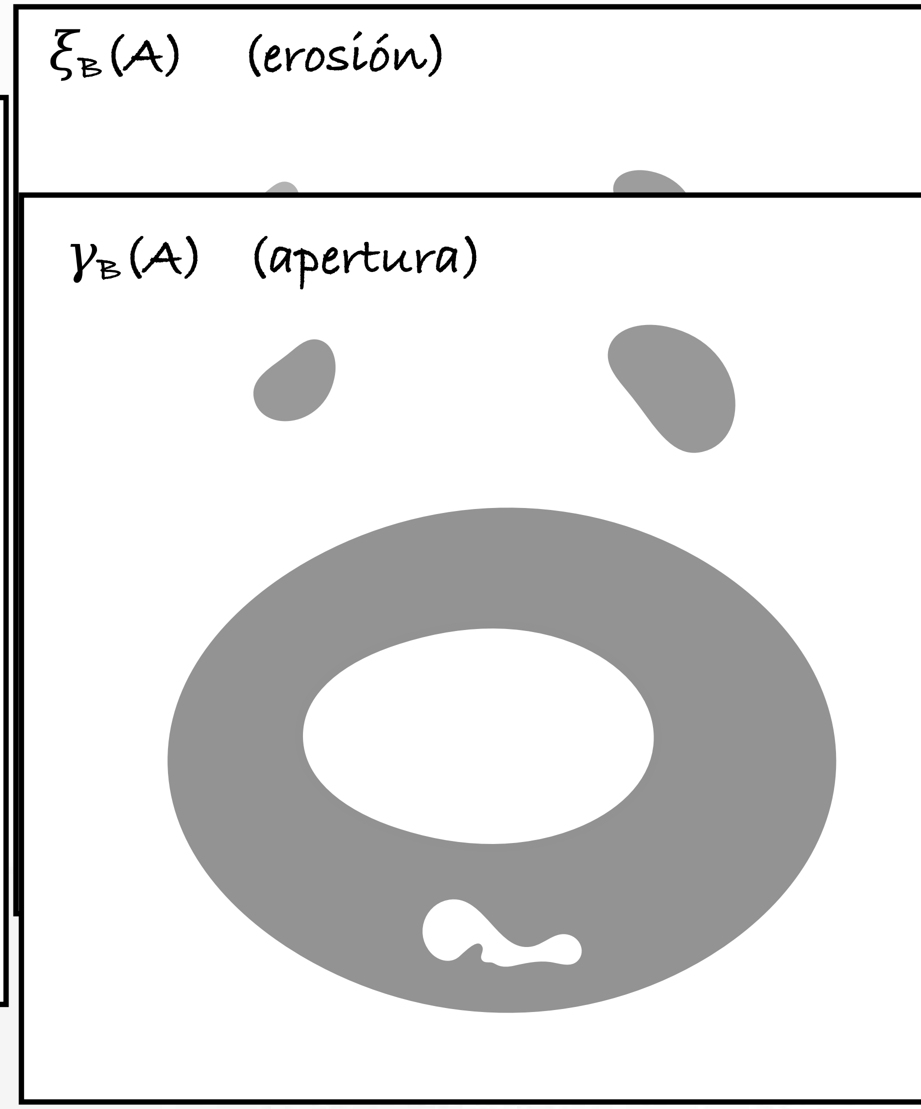
B Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$

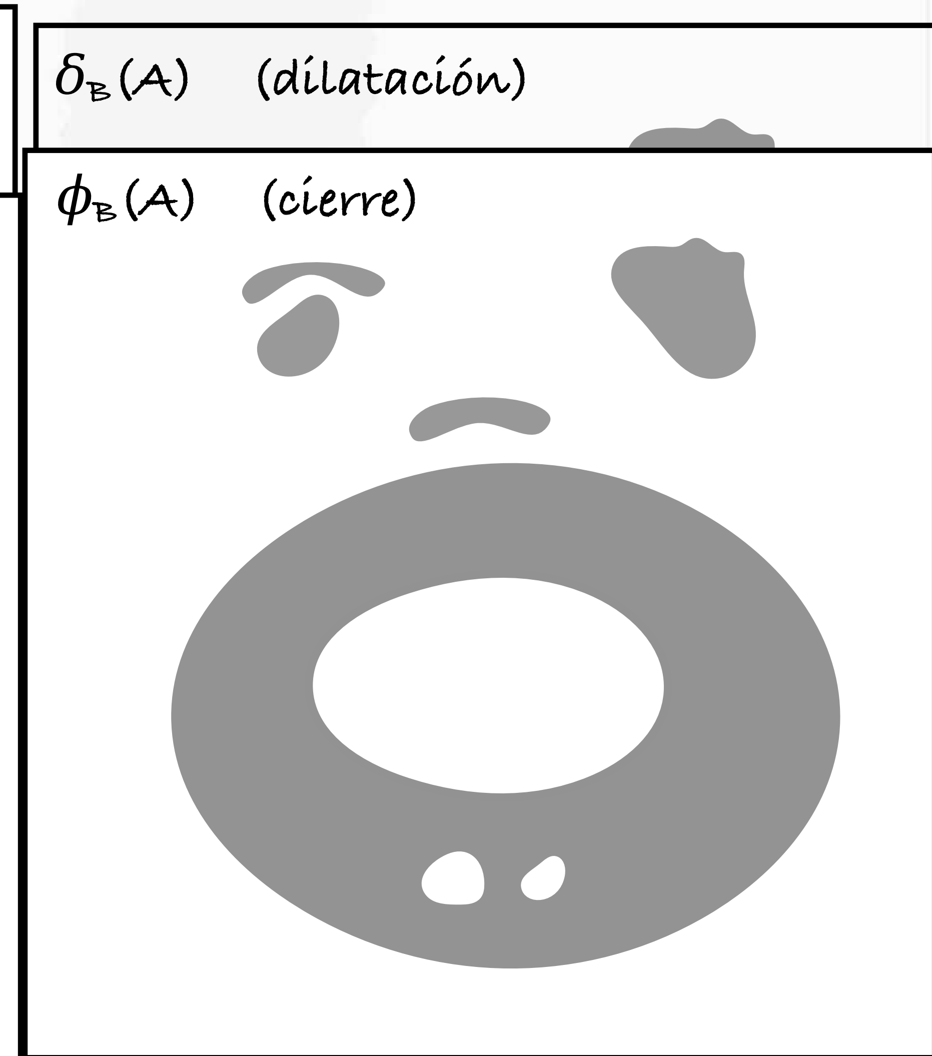




Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$







$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A)$,

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A)$,

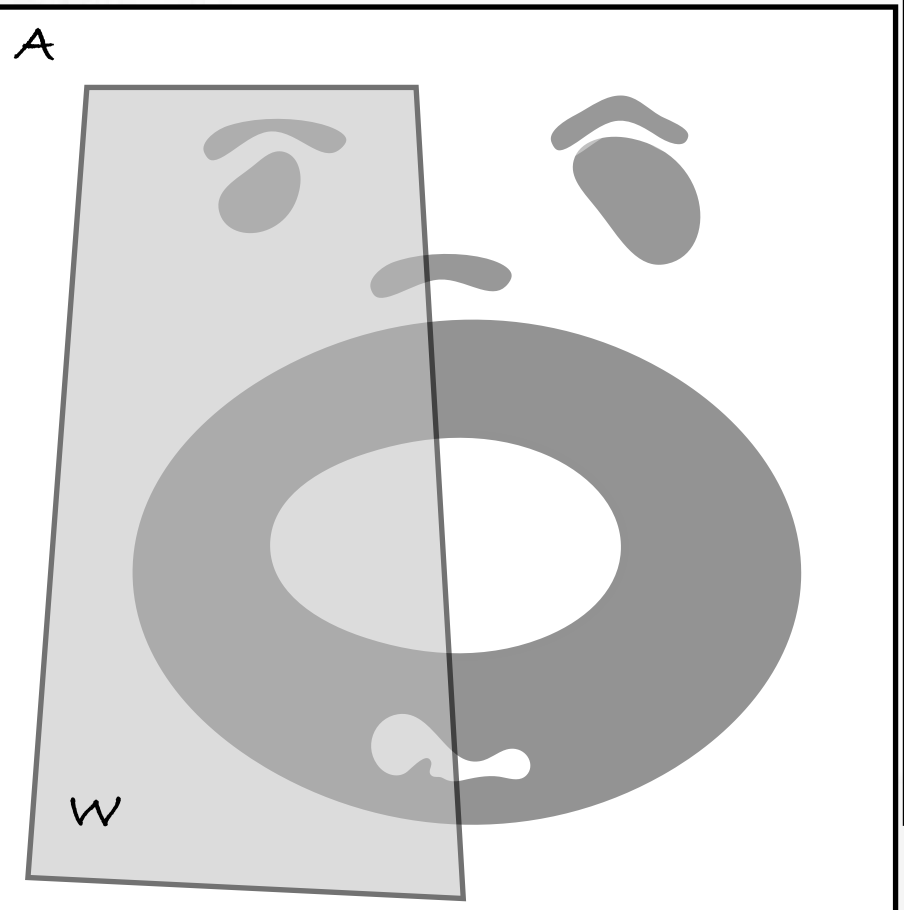
$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

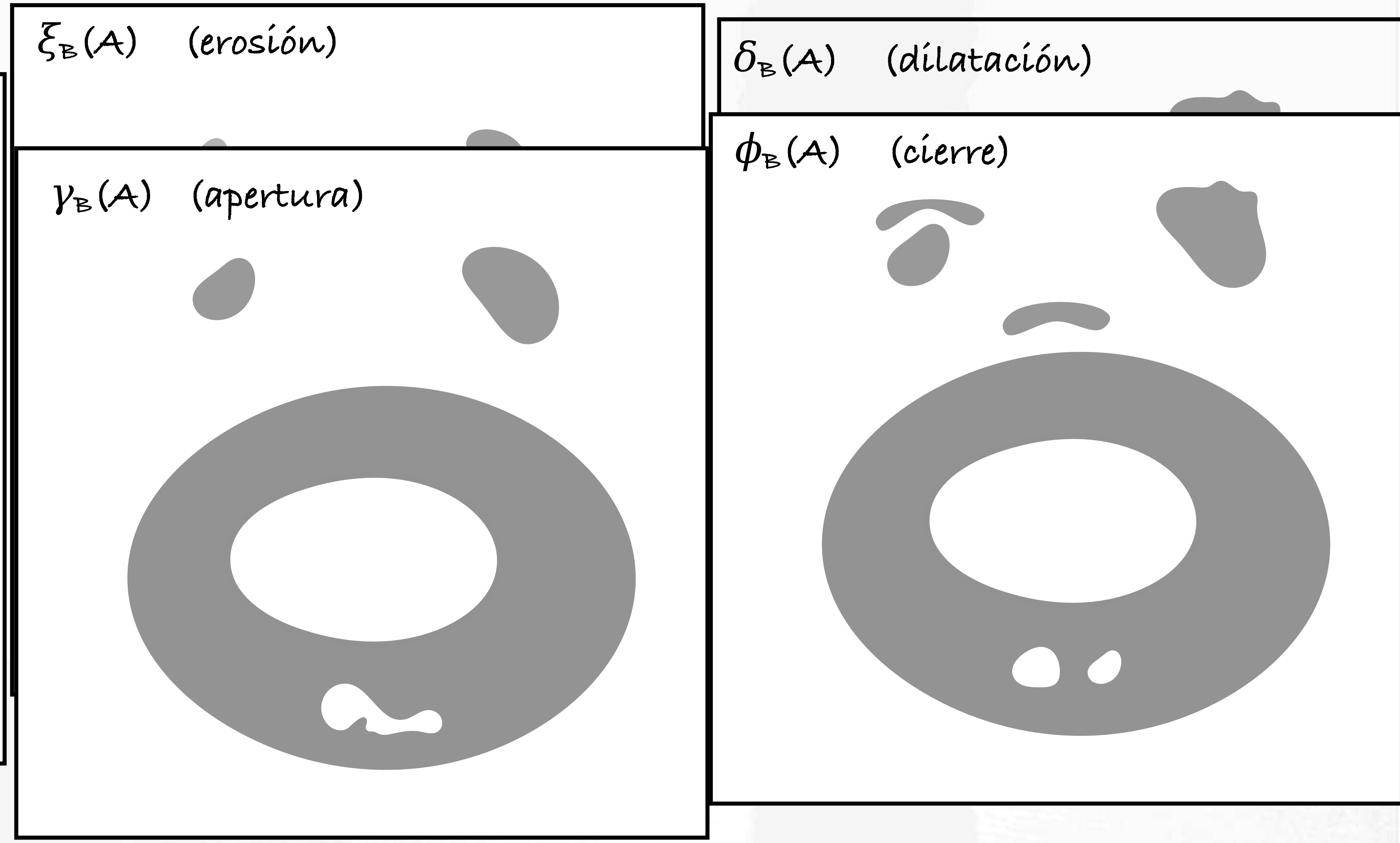
$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\ \&$

$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))]$.

B

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$





$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$

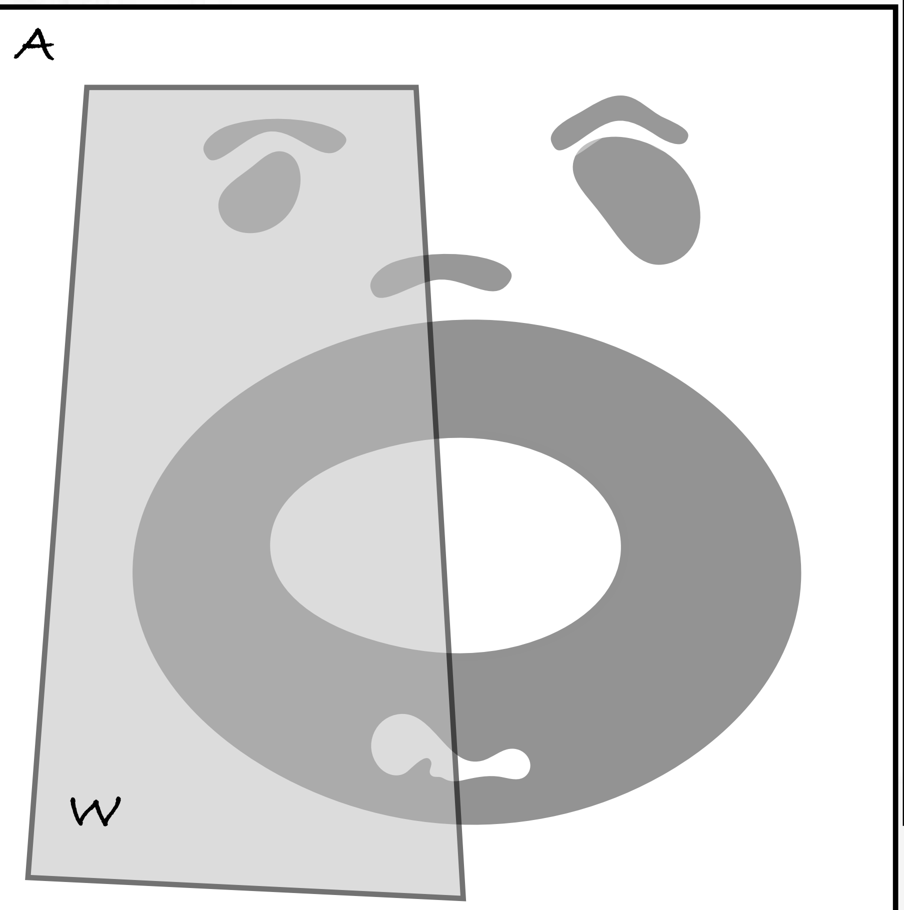
$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)\ .$

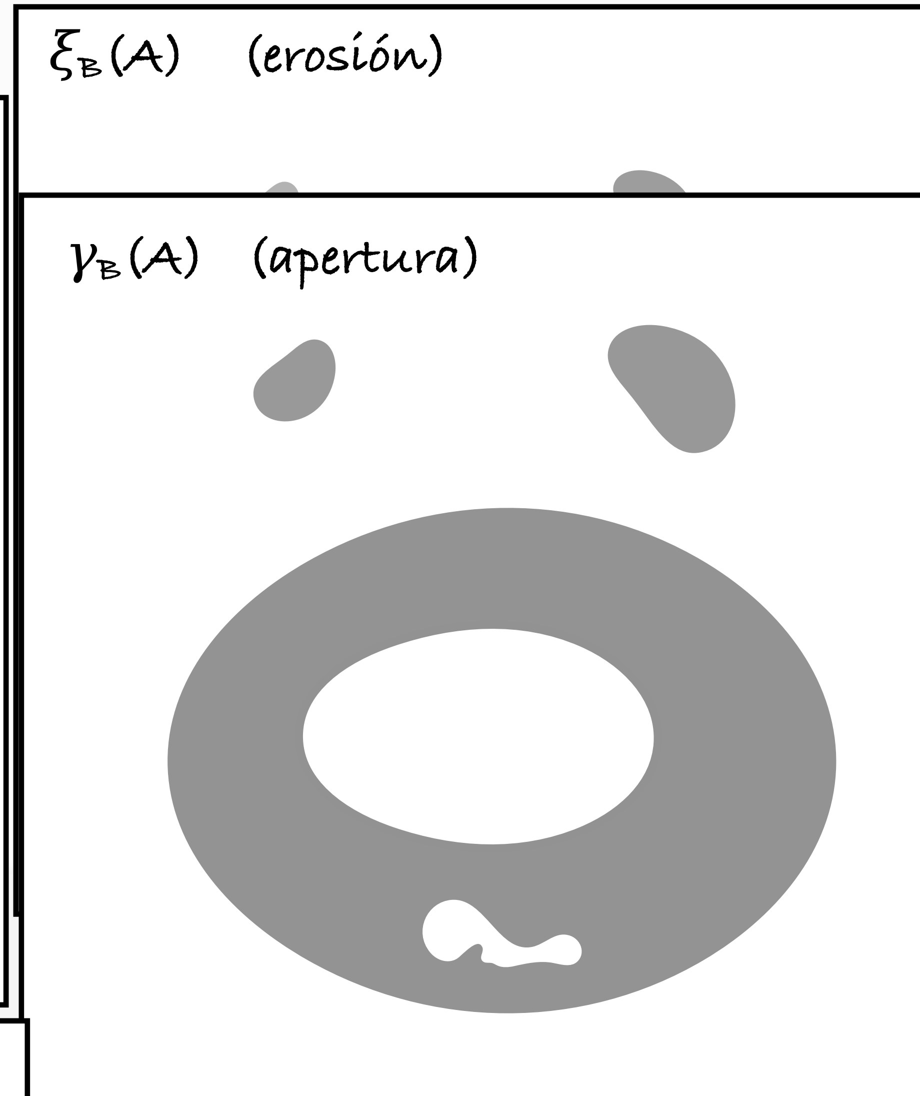
$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\ \&$

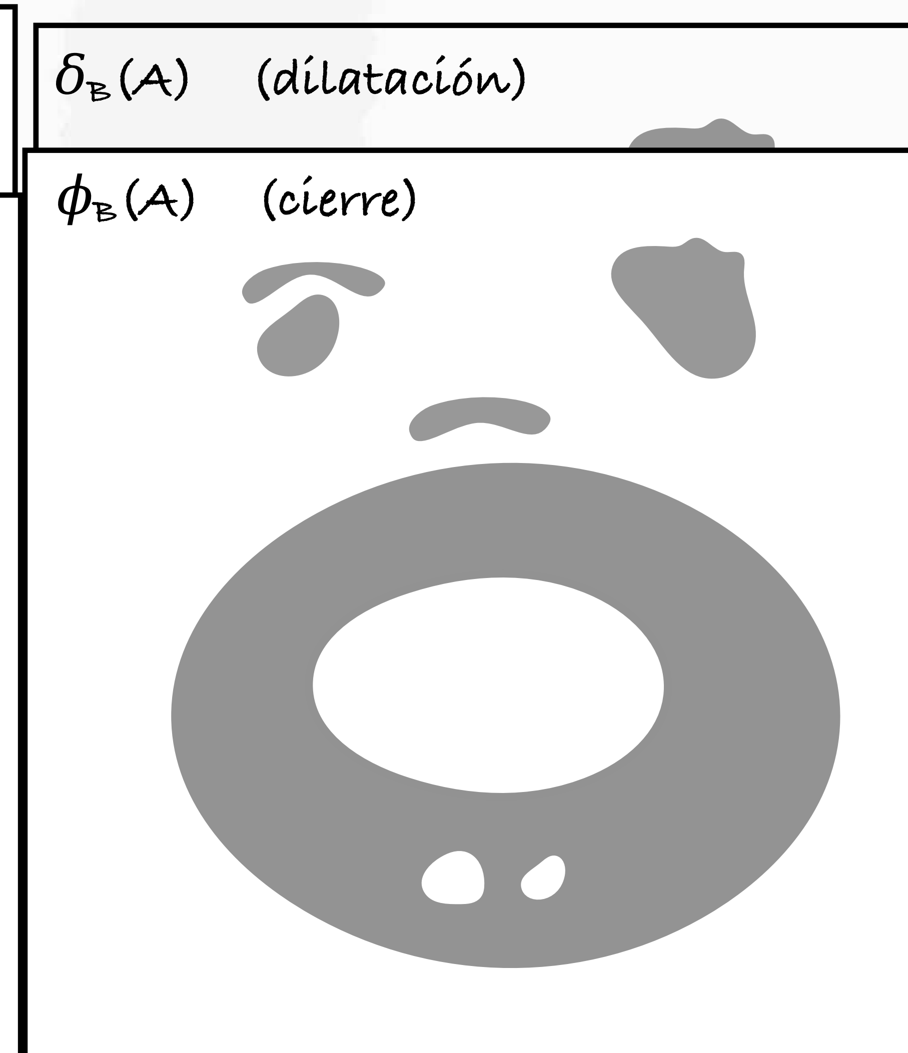
$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$

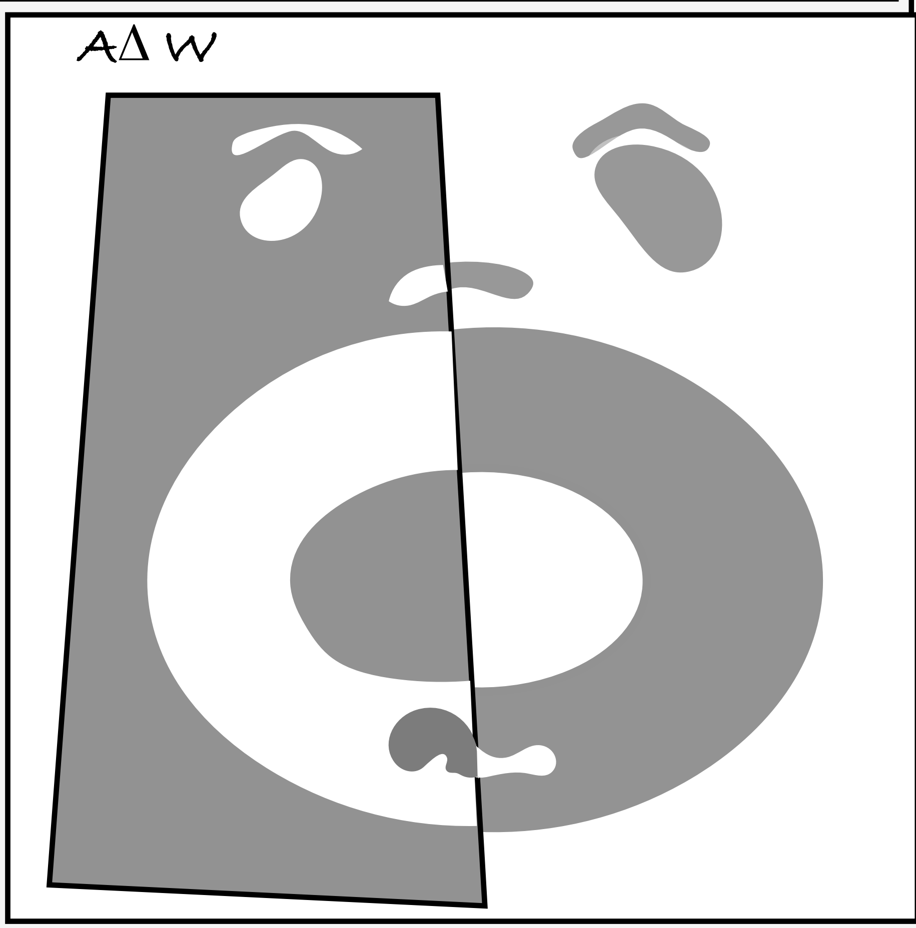
B

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

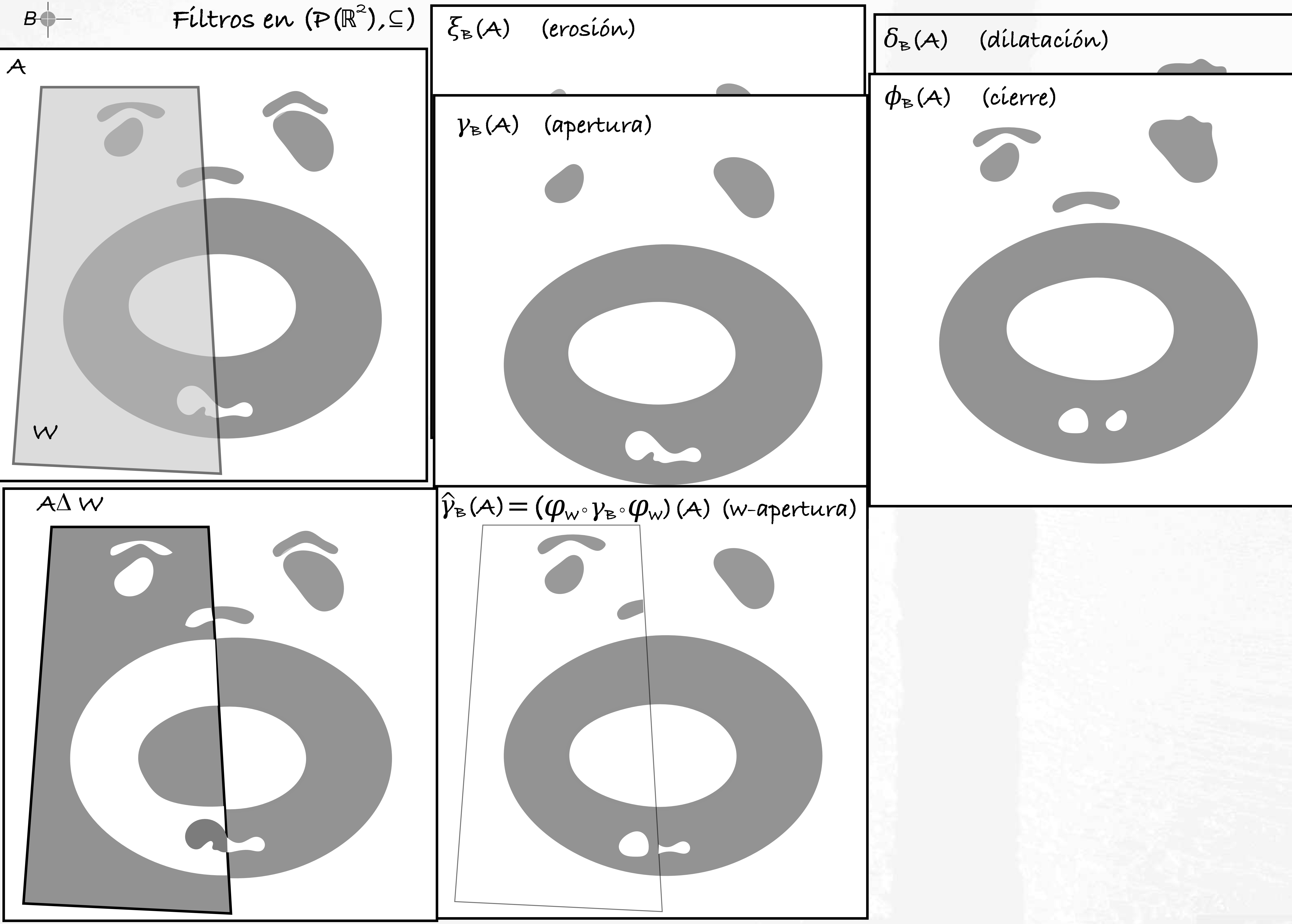






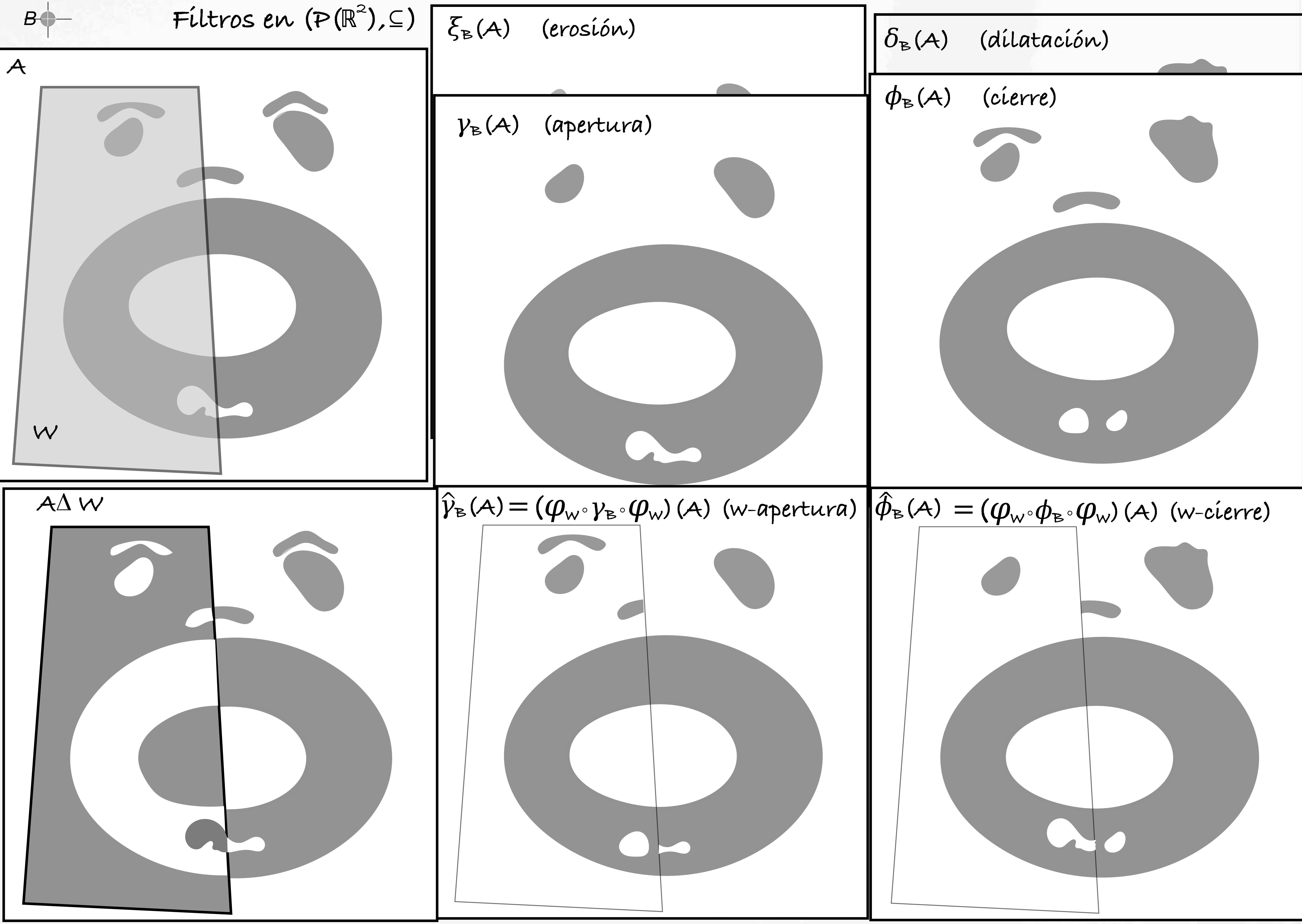


Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

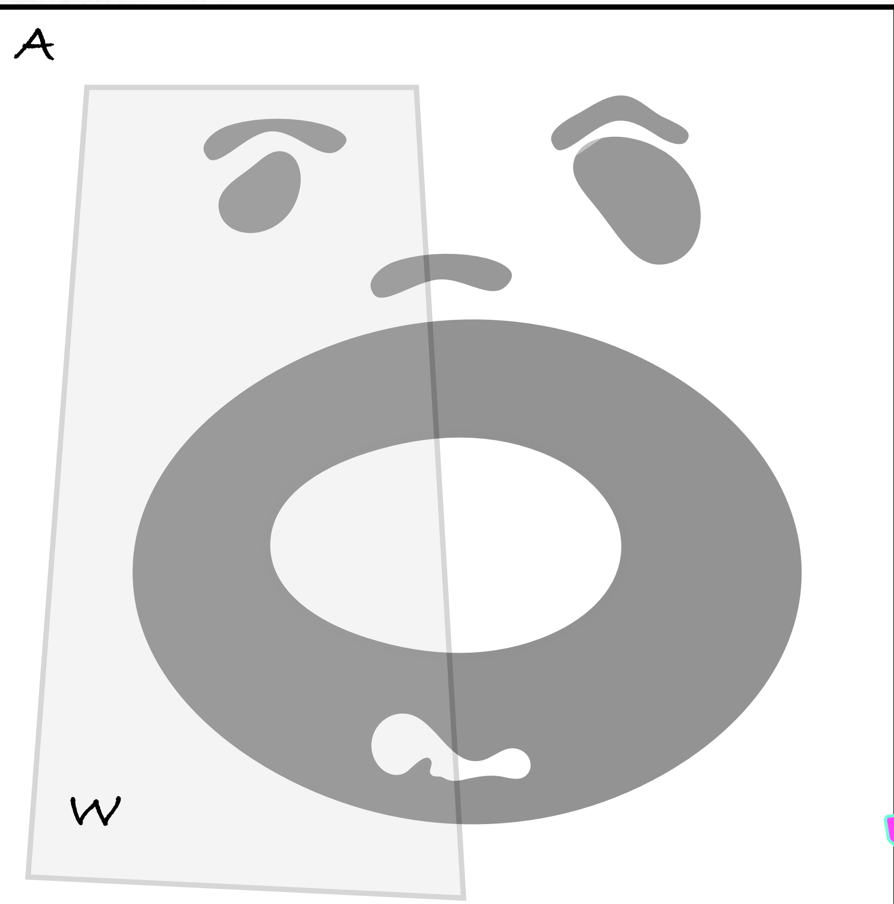


W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

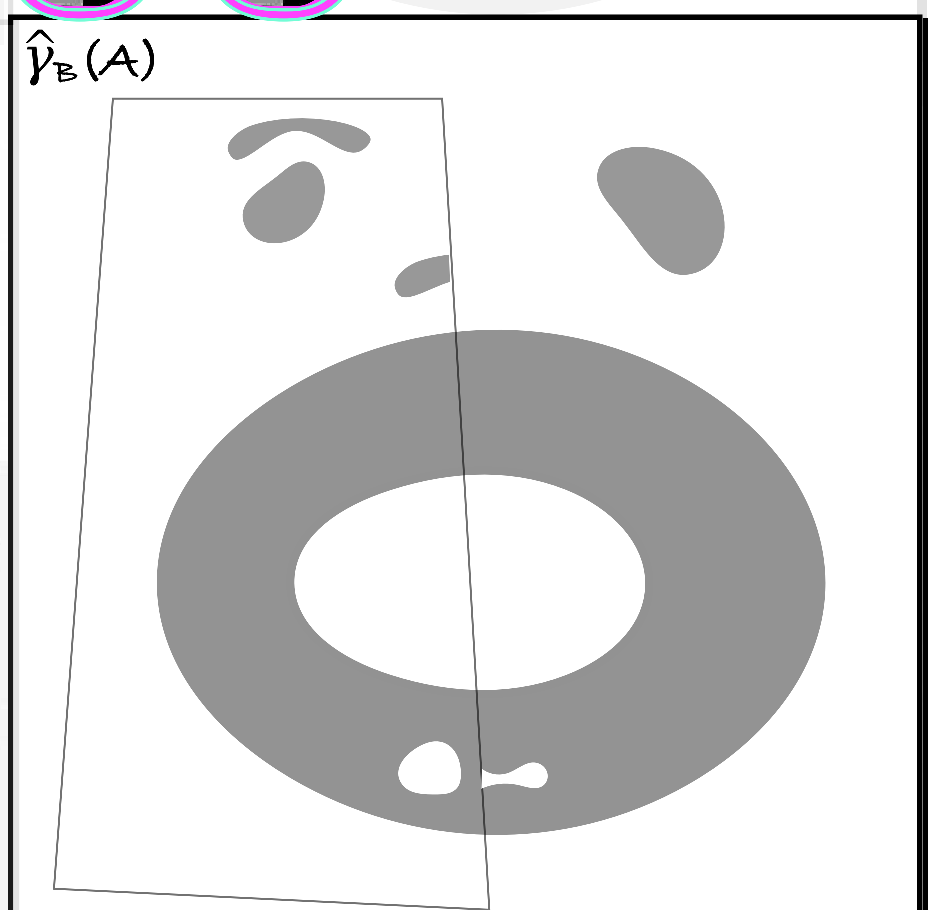


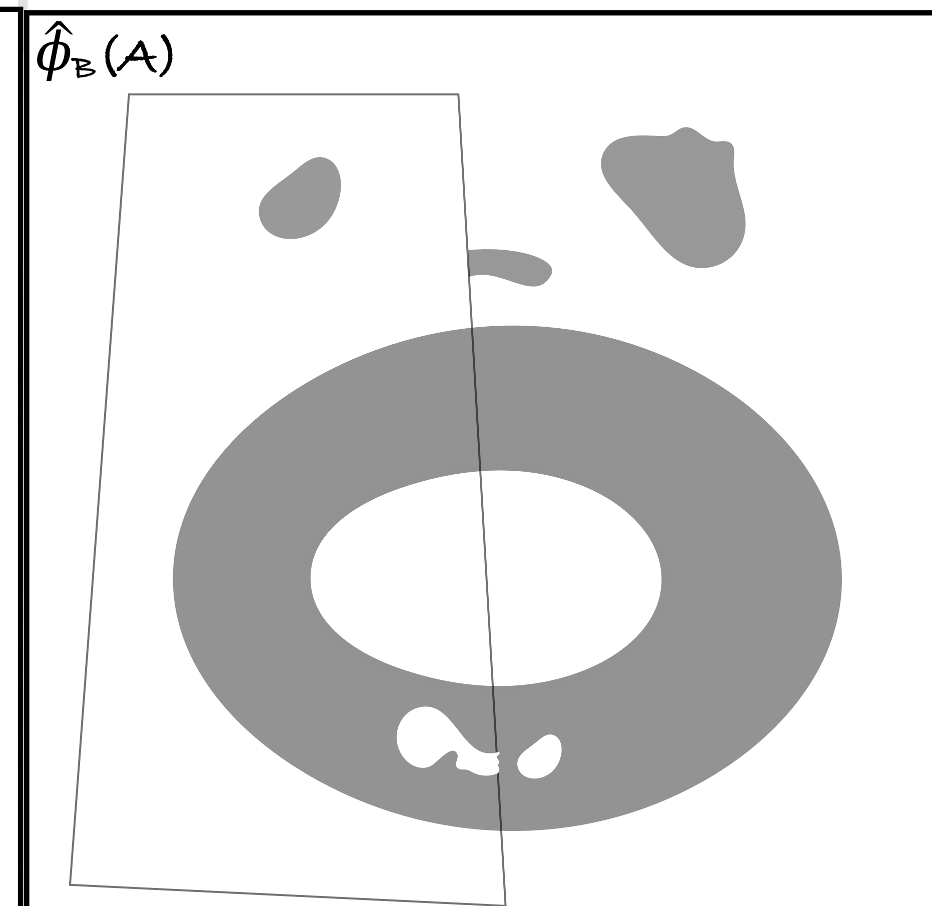
W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$



$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A)$,
$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A)$,
$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.
$(A \subseteq C)\Rightarrow[(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\,\&$
$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))]$.

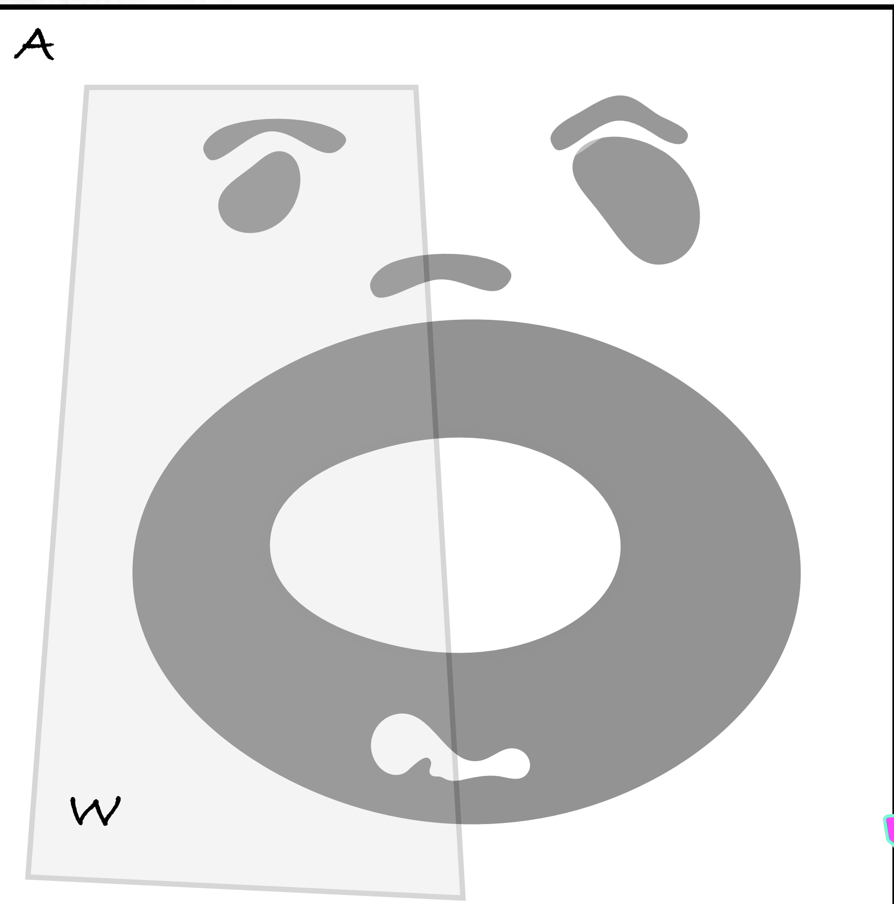
$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A)$,
$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A)$,
$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.
$(A \sqsubseteq^W C)\Rightarrow[(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\,\&$
$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))]$.

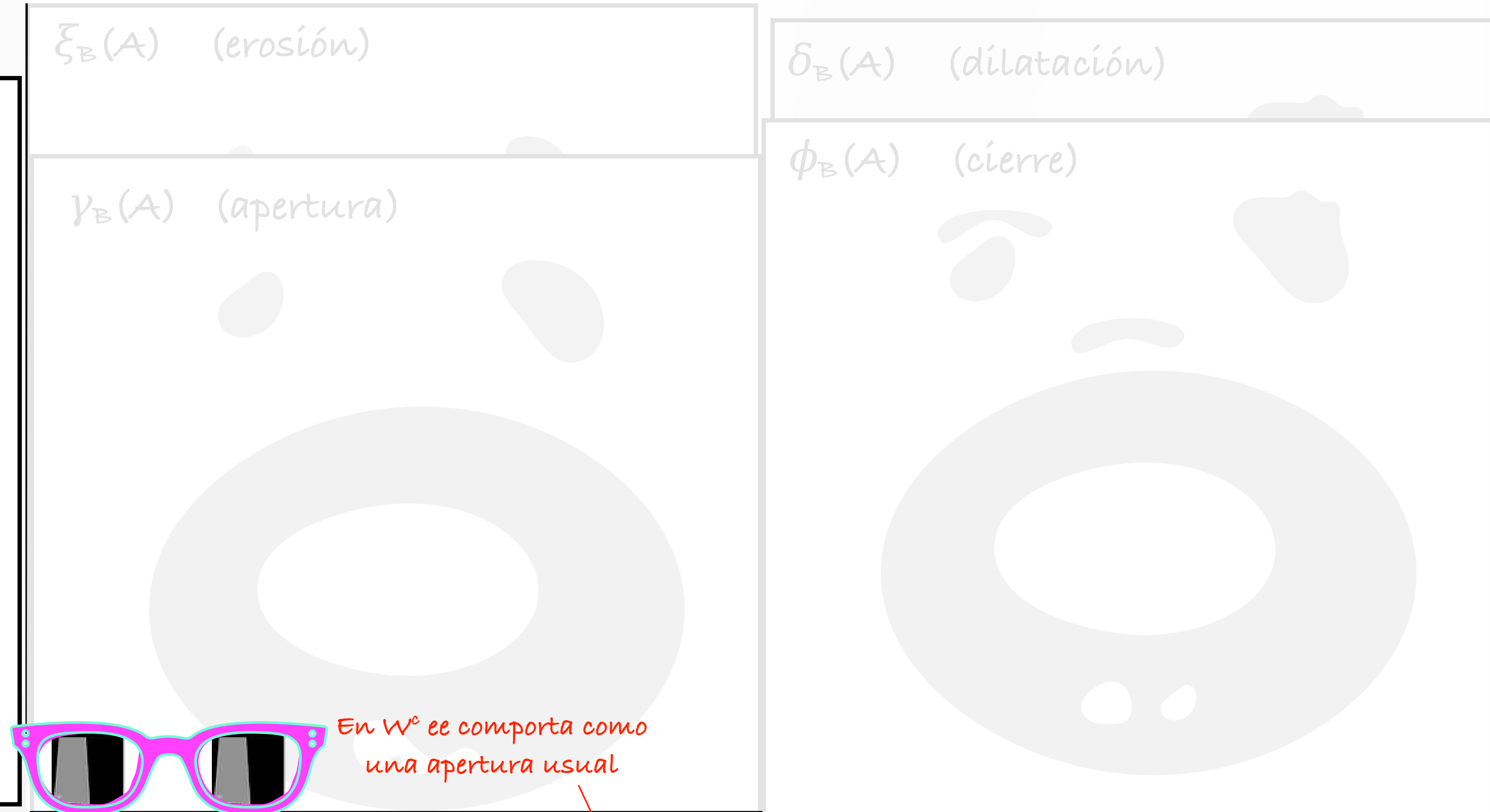




W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

B Fíltros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$





En W^c ee comporta como una apertura usual

$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A)$,

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A)$,

$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\,\&$

$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))]$.

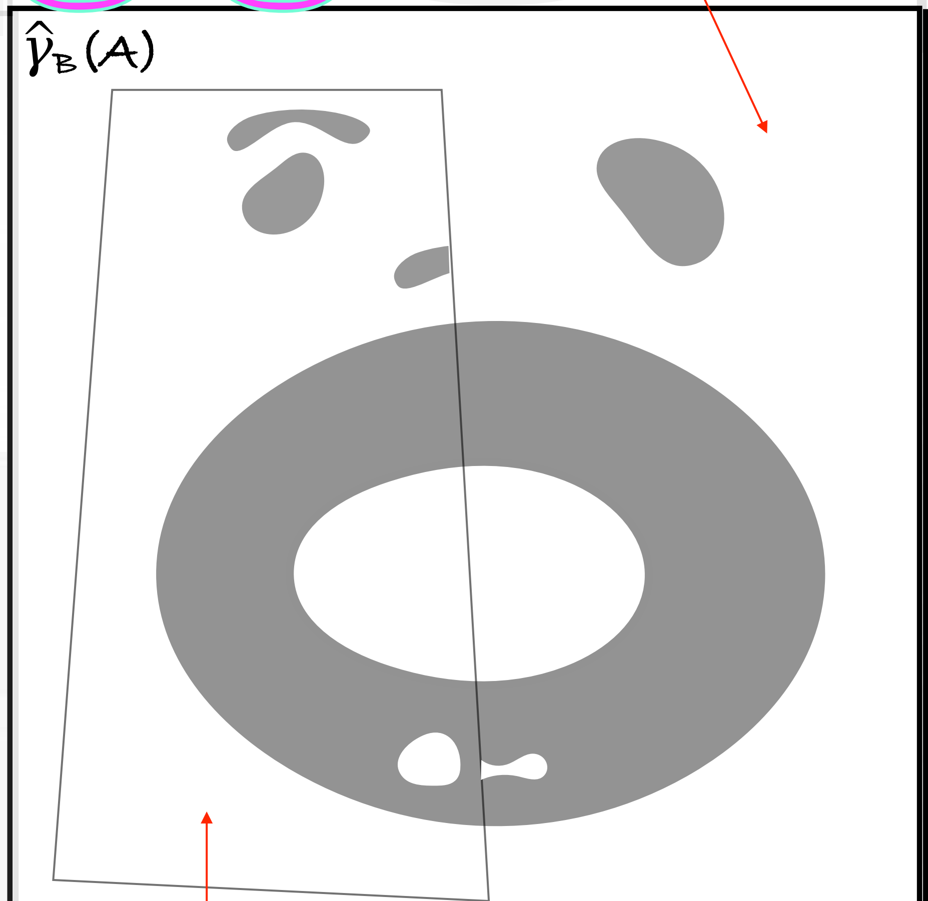
$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A)$,

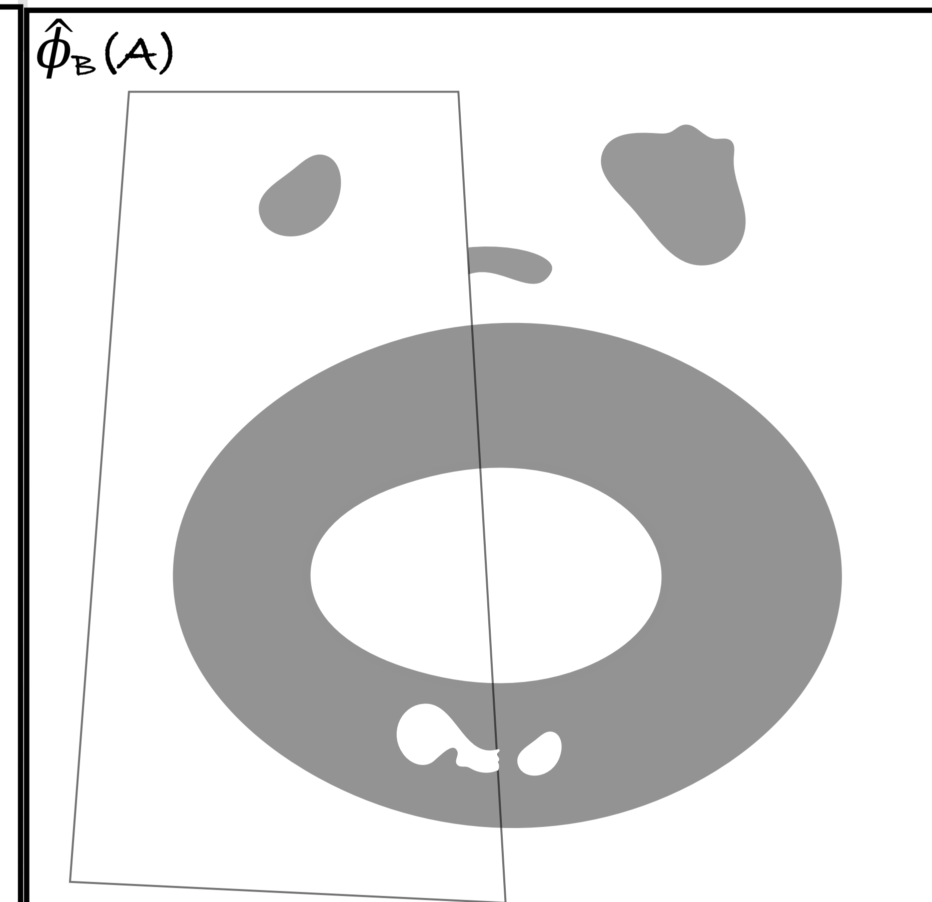
$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A)$,

$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

$(A \sqsubseteq^W C) \Rightarrow [(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\,\&$

$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))]$.

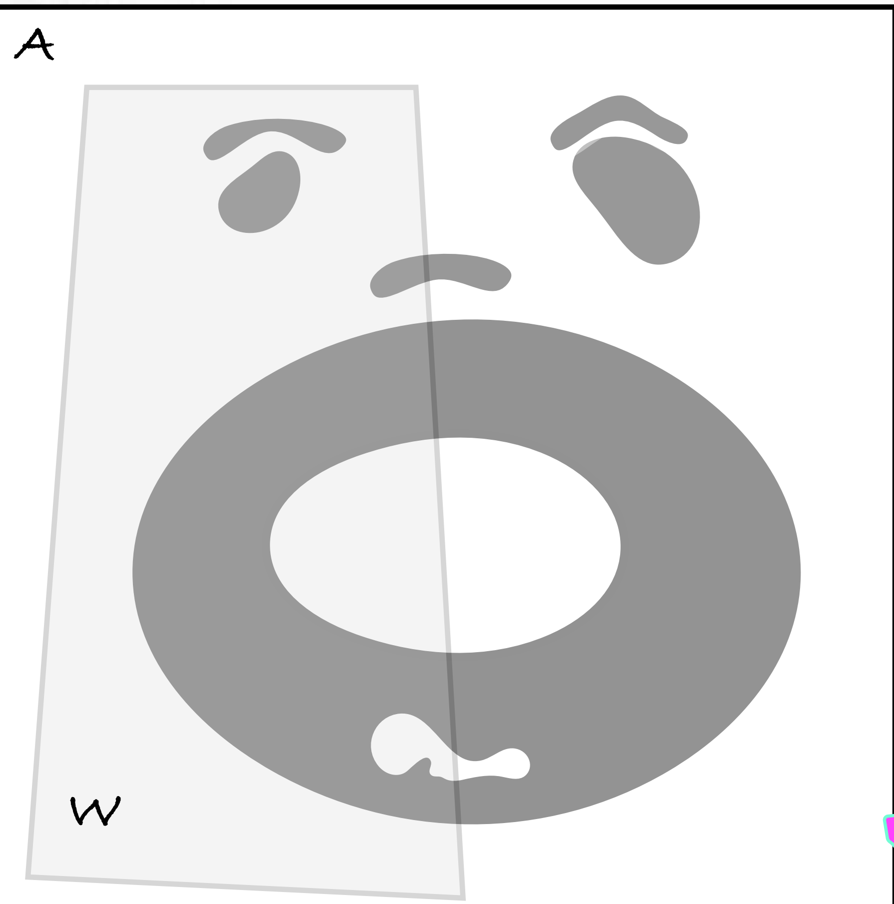


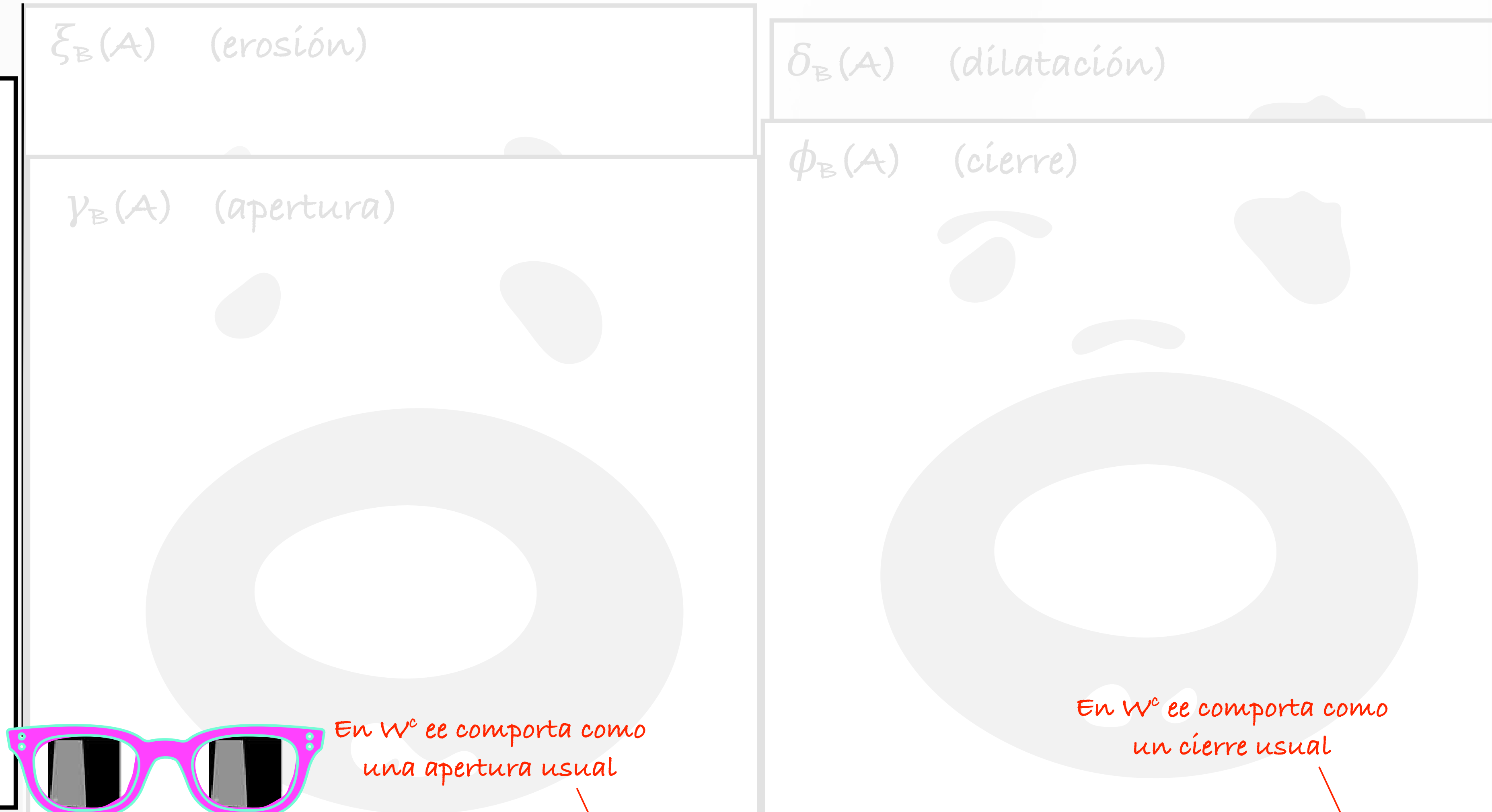


En W ee comporta como un cierre usual

W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

B Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$





$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A)$,

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A)$,

$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\,\&$

$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))]$.

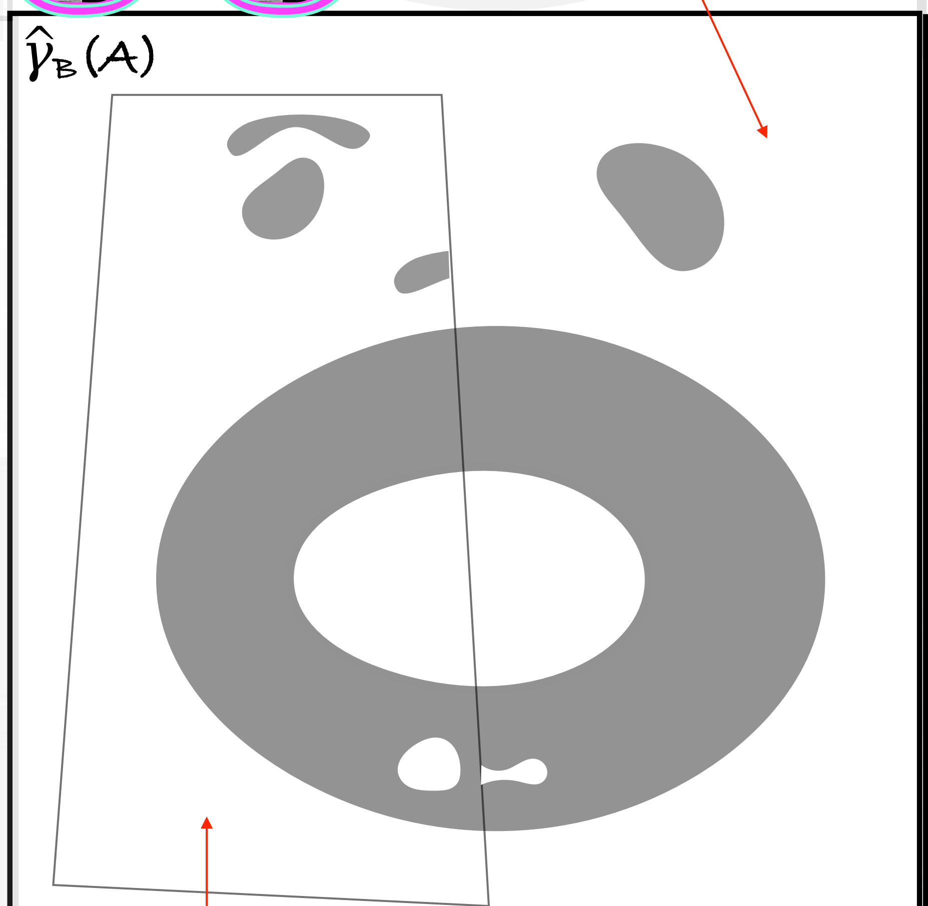
$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A)$,

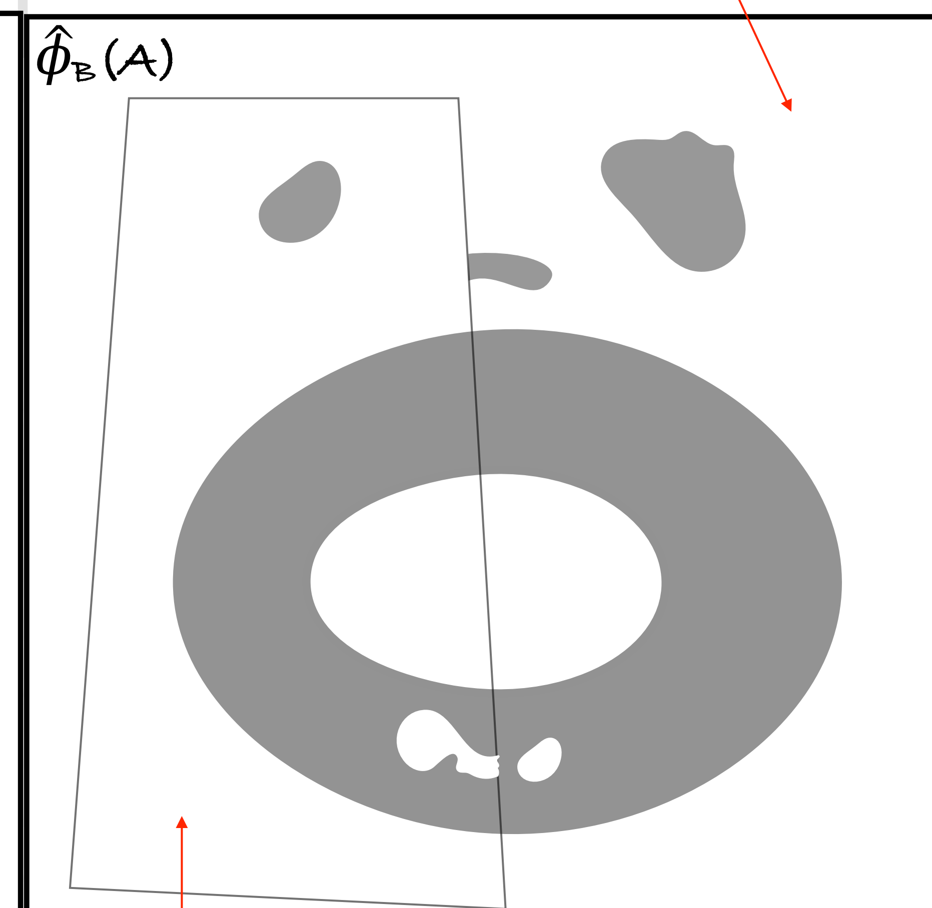
$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A)$,

$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

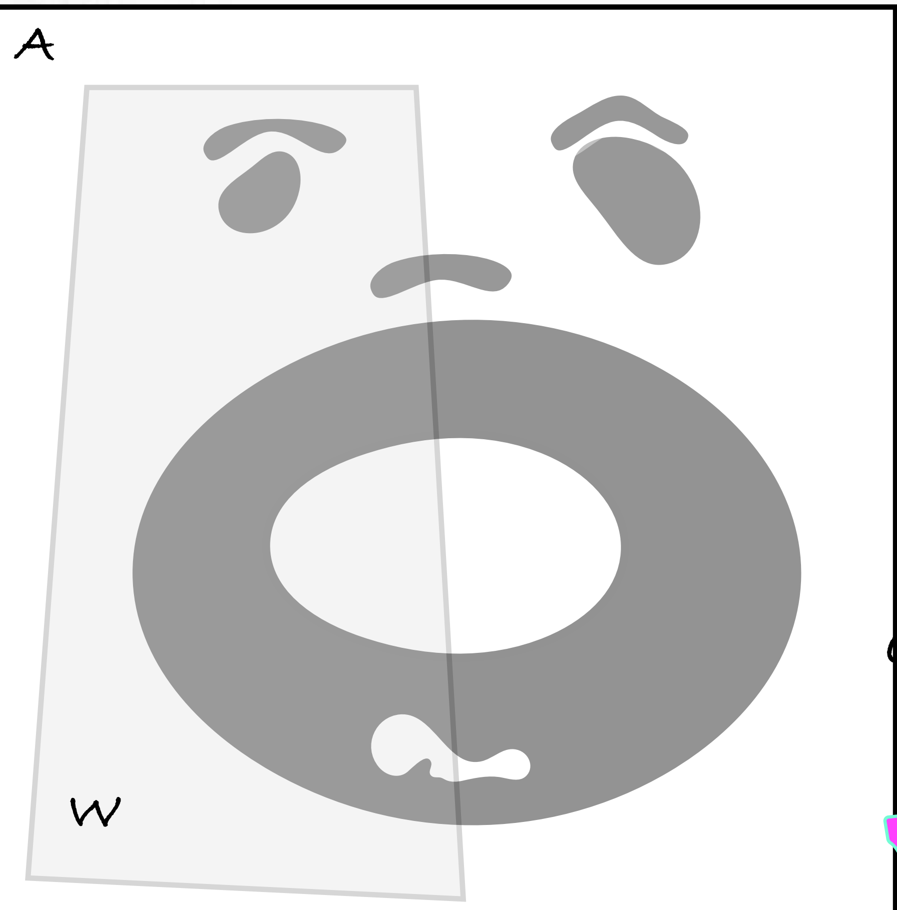
$(A \sqsubseteq^W C) \Rightarrow [(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\,\&$

$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))]$.





W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$



(1) En el álgebra $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$, los operadores $\hat{\gamma}_B$ y $\hat{\phi}_B$ son pues filtros básicos usuales, con características conocidas y con experiencia en el tipo de aplicaciones prácticas en las que se han utilizado con resultados eficientes.

(2) Aunque no son filtros morfológicos en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$, tienen una característica interesante y sugerente en esta última: su efecto sobre una imagen responde al esquema

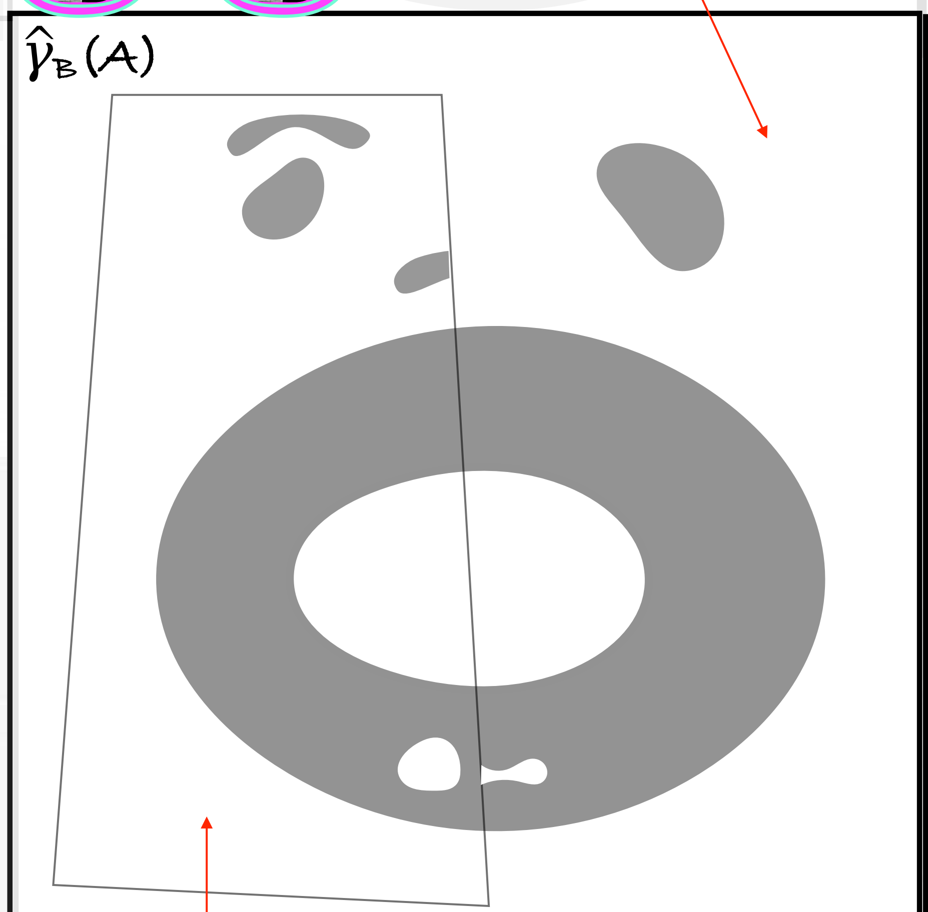
(filtro-sobre W, filtro-dual sobre W^c);

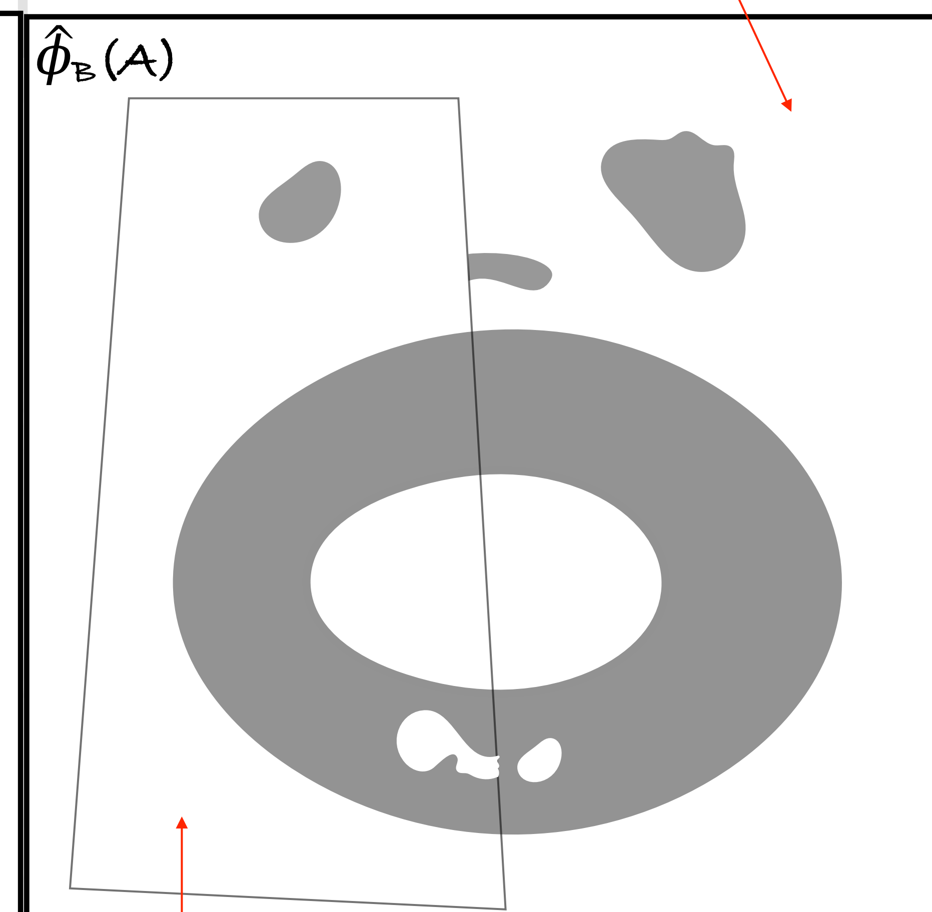
(¿Filtros con efecto "sal-pimienta?)

características que pueden constituir una ampliación del conjunto de herramientas eficientes usuales de la Morfología Matemática.

En W^c ee comporta como una apertura usual

En W^c ee comporta como un cierre usual





$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A)$,

$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A)$,

$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

$(A \sqsubseteq^W C)\Rightarrow[(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\,\&$

$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))]$.

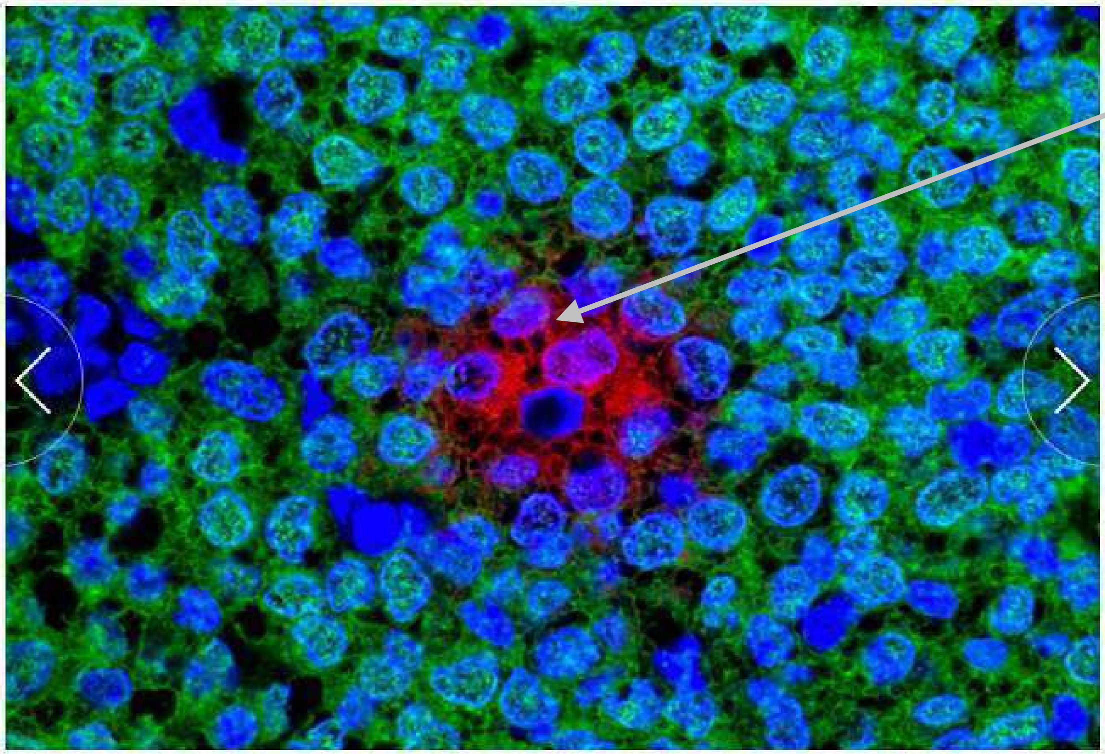
En W ee comporta como un cierre usual

En W ee comporta como una apertura usual

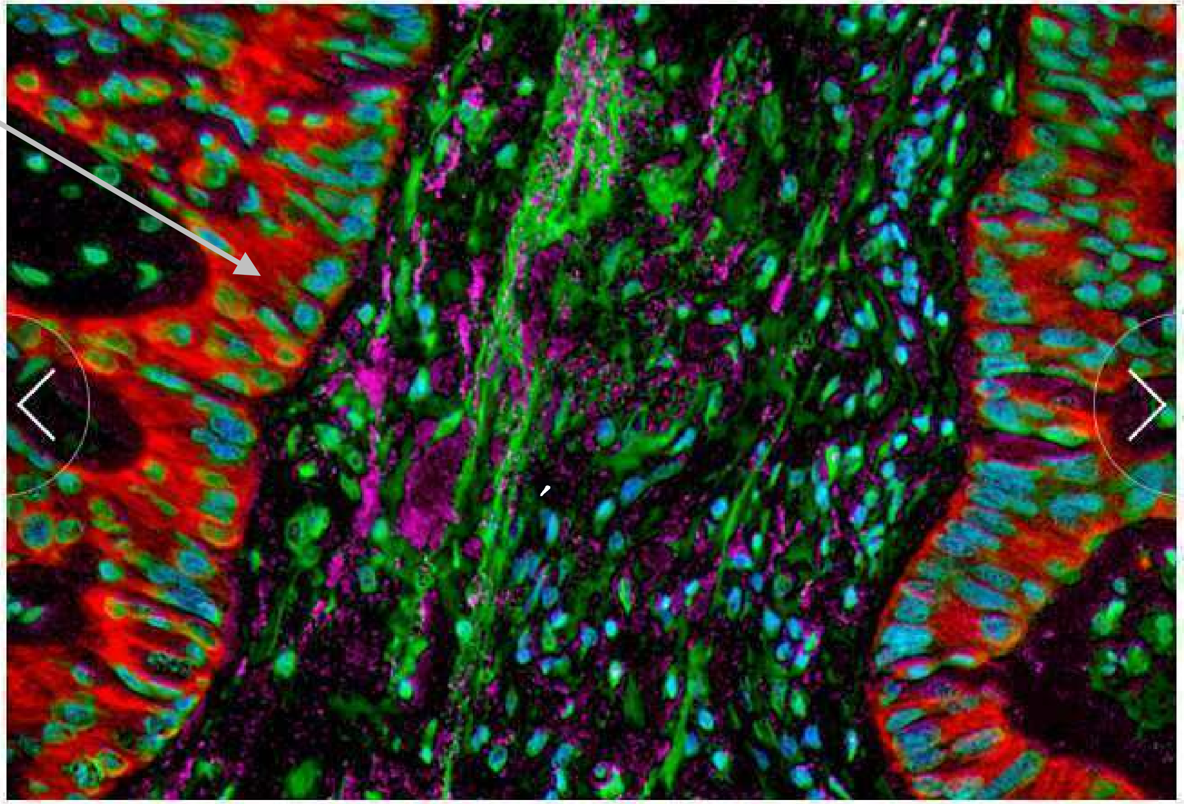
W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

‘Ordenes de actividad en el tratamiento de imágenes médicas

W (rojo)

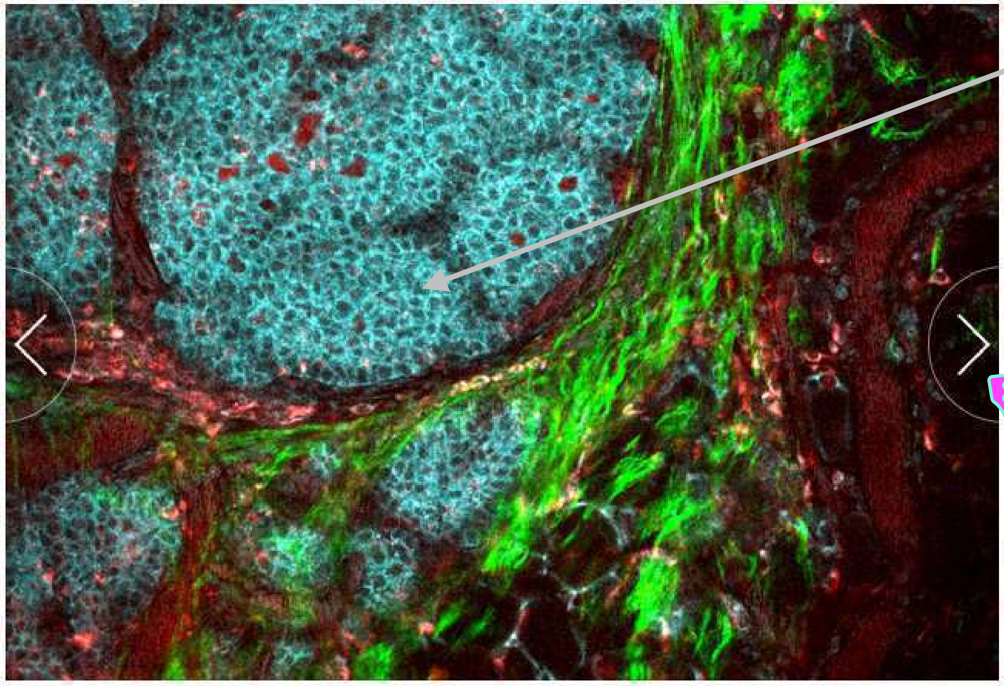


Los tumores humanos a menudo contienen células cancerosas de proliferación lenta con resistencia al tratamiento. Esta imagen muestra un conglomerado de células de cáncer de mama (rojo) de ciclos lentos (con baja expresión de *AKT* y alta expresión de *Hes-1*) en un tumor de mama primario humano ER+ (núcleos celulares en azul; células cancerosas de ciclos rápidos, con alta expresión de *AKT*, en verde). Las células cancerosas entran en un estado de baja expresión de *AKT* en respuesta a una menor interacción de la integrina beta-1 de la superficie celular con la matriz extracelular. Las células cancerosas con baja expresión de *AKT* dentro de tumores de cáncer de mama invasivos persisten después de la quimioterapia combinada y contribuyen al avance del tumor.



Como se muestra aquí, el cáncer de pulmón se acompaña de una gran reacción desmoplástica de estroma (la "cercanía") en la que el tejido conjuntivo asociado al tumor se engrosa de un modo similar a las cicatrices. El cáncer está en rojo; los núcleos celulares en cian; el estroma y la desmoplasia en verde; y un marcador específico del estroma activo en púrpura.

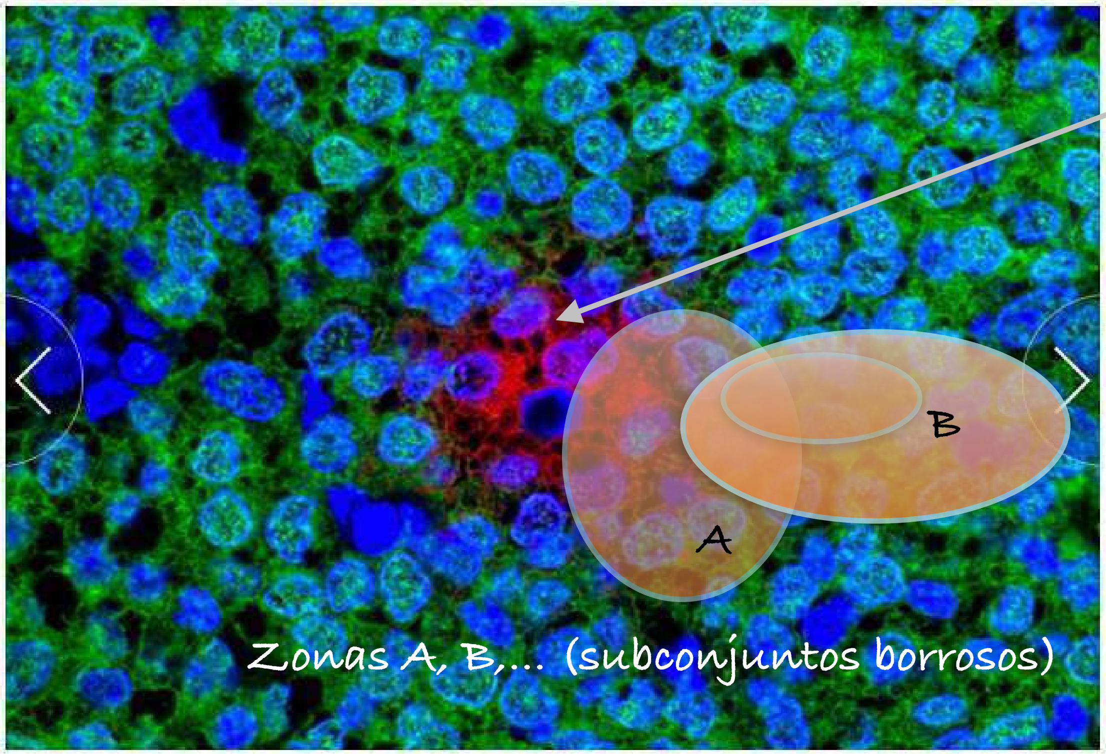
W (cian)



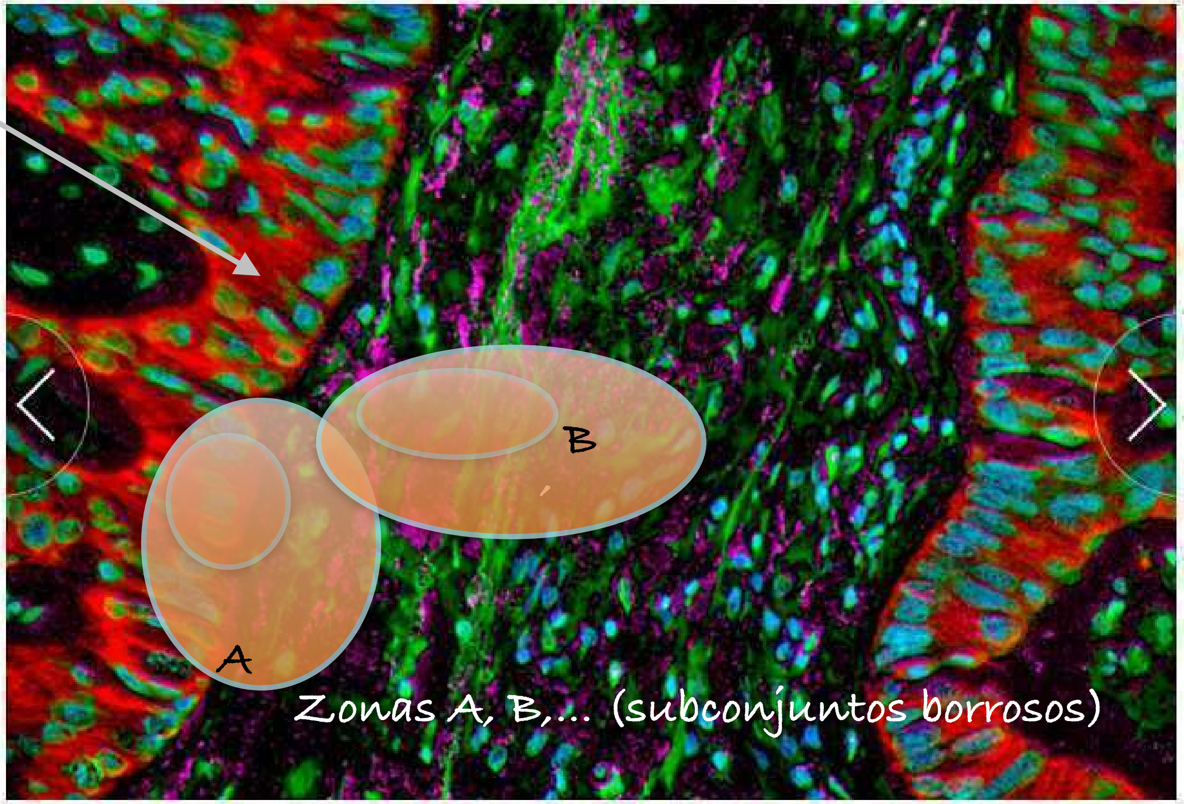
Esta imagen de un tumor de cáncer de mama y su microambiente se obtuvo de un modelo de ratón vivo utilizando microscopia multifotónica y fluorescencia endógena. Es decir, se obtuvo la imagen sin fluoróforos, tinciones o colorantes, utilizando sólo los co-factores metabólicos de NADH y FAD, que ya están en el interior de las células, junto con la segunda generación armónica para visualizar colágeno. Esta técnica tiene importante potencial clínico para los pacientes que necesitan imágenes sin marcador y puede dar por resultado diagnósticos y tratamientos más eficaces. Se muestran las células tumorales en cian, los macrófagos en rojo y las fibras de colágeno en verde.

W (púrpura)

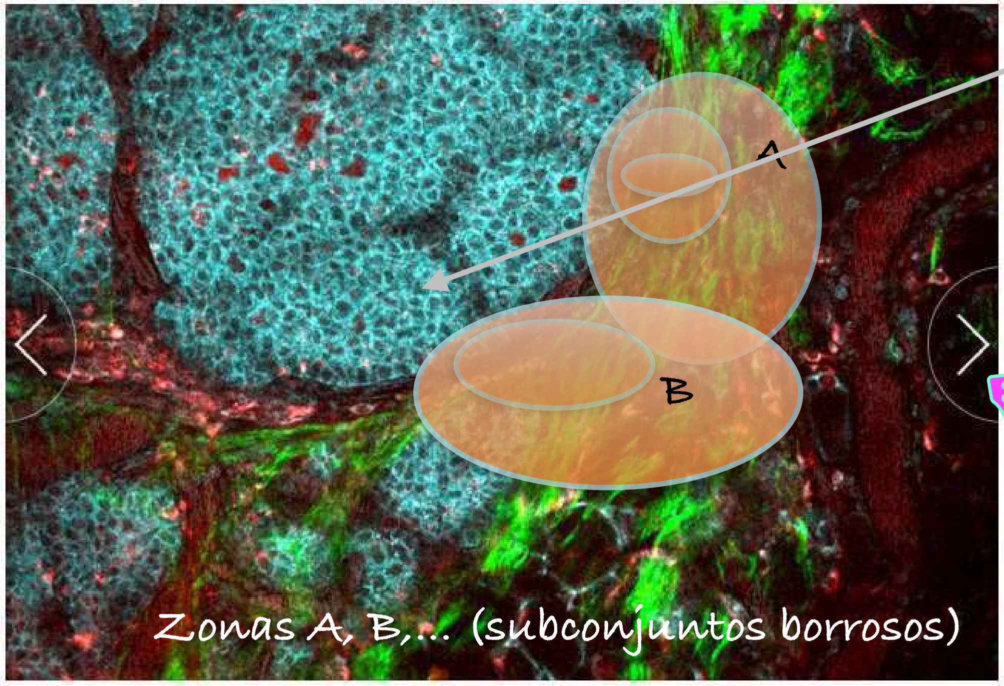
En esta imagen de un modelo de ratón sujeto a técnicas de ingeniería genética, el cáncer de pulmón impulsado por el oncogén *KRAS* se muestra en púrpura. Un determinante clave de muchos tipos de cáncer, el gen *KRAS* representa una diana promisoria para los nuevos tratamientos del cáncer.



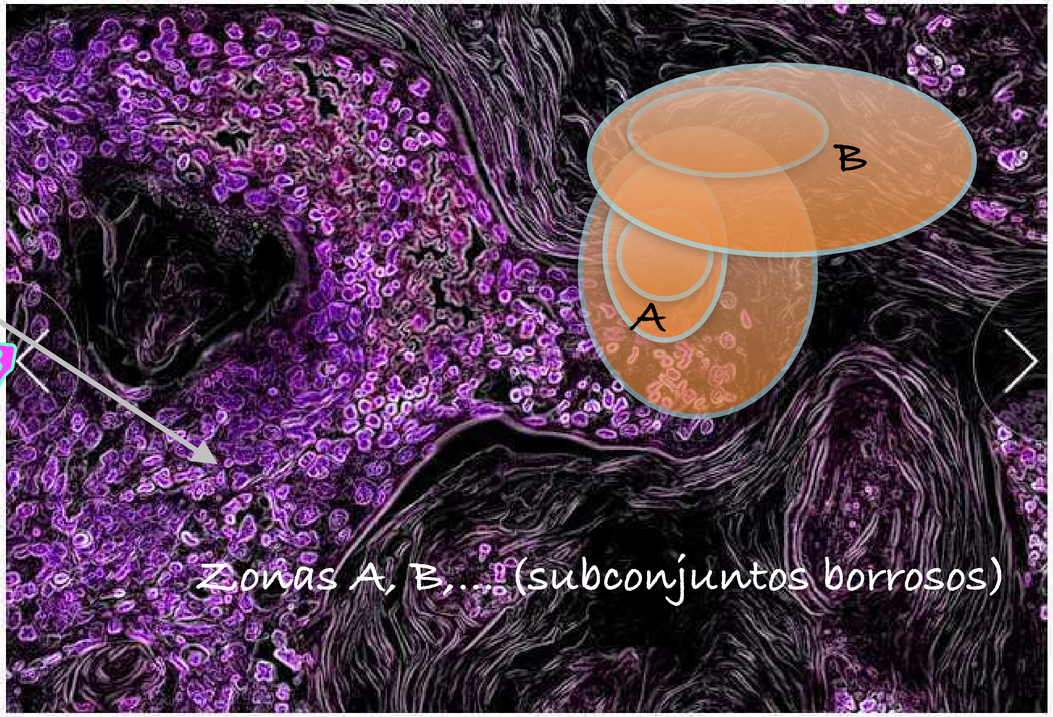
Los tumores humanos a menudo contienen células cancerosas de proliferación lenta con resistencia al tratamiento. Esta imagen muestra un conglomerado de células de cáncer de mama (rojo) de ciclos lentos (con baja expresión de *AKT* y alta expresión de *Hes-1*) en un tumor de mama primario humano ER+ (núcleos celulares en azul; células cancerosas de ciclos rápidos, con alta expresión de *AKT*, en verde). Las células cancerosas entran en un estado de baja expresión de *AKT* en respuesta a una menor interacción de la integrina beta-1 de la superficie celular con la matriz extracelular. Las células cancerosas con baja expresión de *AKT* dentro de tumores de cáncer de mama invasivos persisten después de la quimioterapia combinada y contribuyen al avance del tumor.



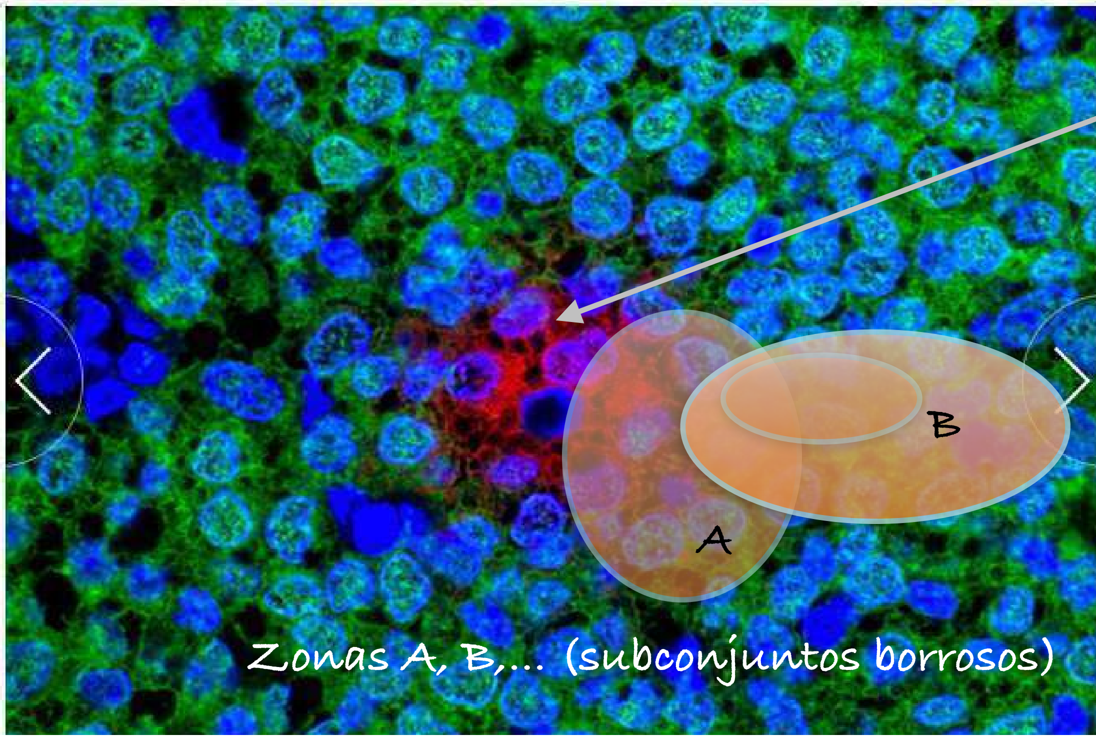
Como se muestra aquí, el cáncer de pulmón se acompaña de una gran reacción desmoplástica de estroma (la "cercanía") en la que el tejido conjuntivo asociado al tumor se engrosa de un modo similar a las cicatrices. El cáncer está en rojo; los núcleos celulares en cian; el estroma y la desmoplasia en verde; y un marcador específico del estroma activo en púrpura.

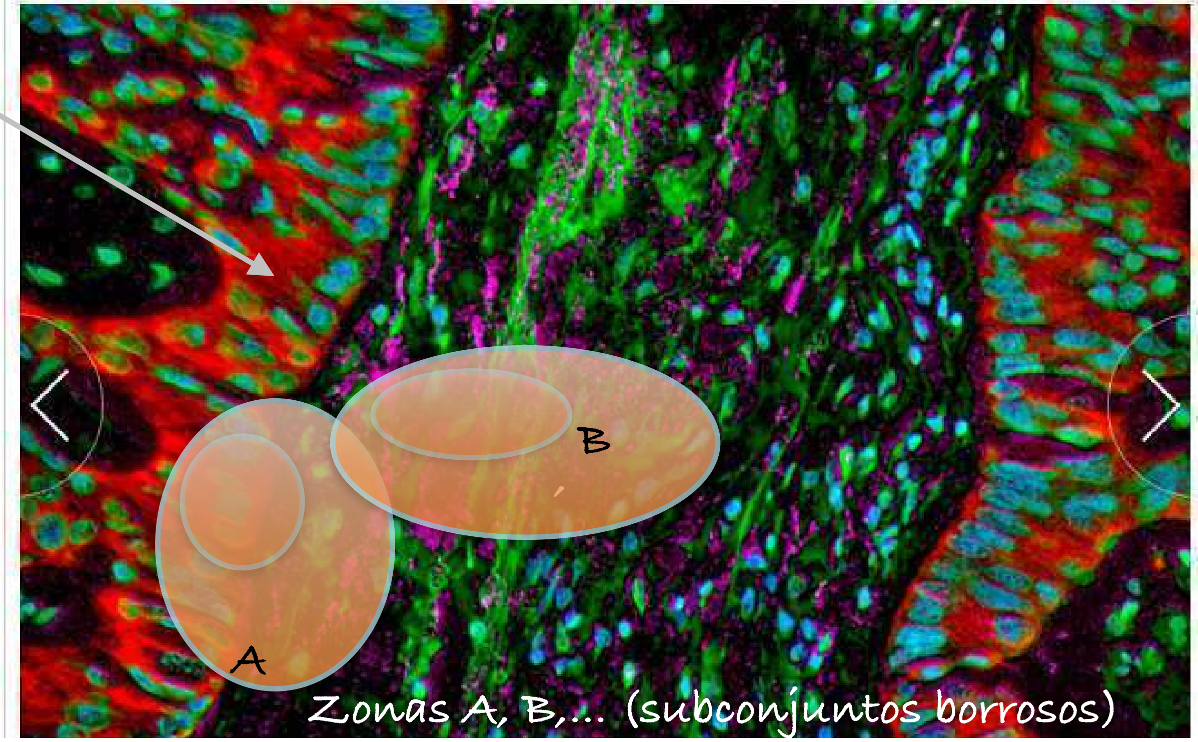


Esta imagen de un tumor de cáncer de mama y su microambiente se obtuvo de un modelo de ratón vivo utilizando microscopia multifotónica y fluorescencia endógena. Es decir, se obtuvo la imagen sin fluoróforos, tinciones o colorantes, utilizando sólo los co-factores metabólicos de NADH y FAD, que ya están en el interior de las células, junto con la segunda generación armónica para visualizar colágeno. Esta técnica tiene importante potencial clínico para los pacientes que necesitan imágenes sin marcador y puede dar por resultado diagnósticos y tratamientos más eficaces. Se muestran las células tumorales en cian, los macrófagos en rojo y las fibras de colágeno en verde.

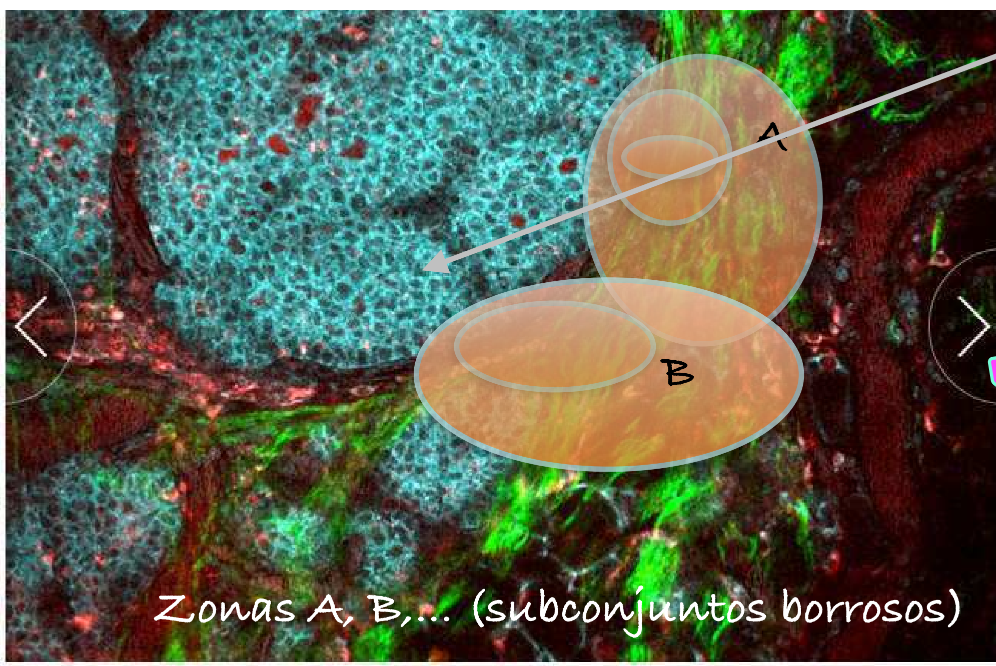


En esta imagen de un modelo de ratón sujeto a técnicas de ingeniería genética, el cáncer de pulmón impulsado por el oncogén *KRAS* se muestra en púrpura. Un determinante clave de muchos tipos de cáncer, el gen *KRAS* representa una diana promisoria para los nuevos tratamientos del cáncer.

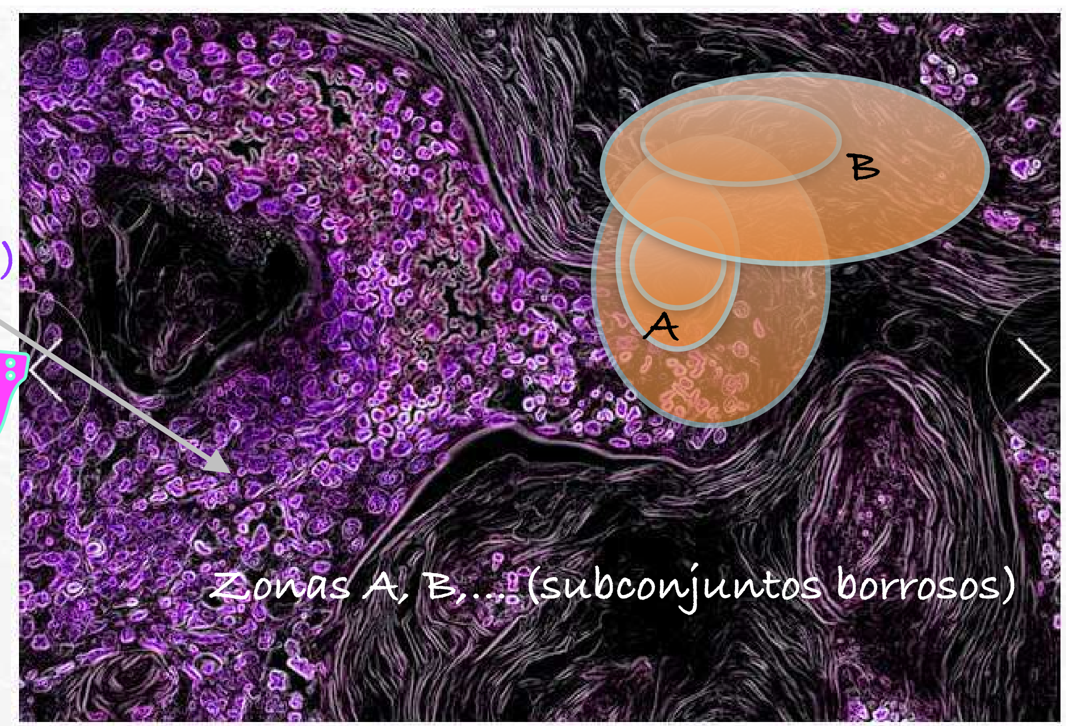




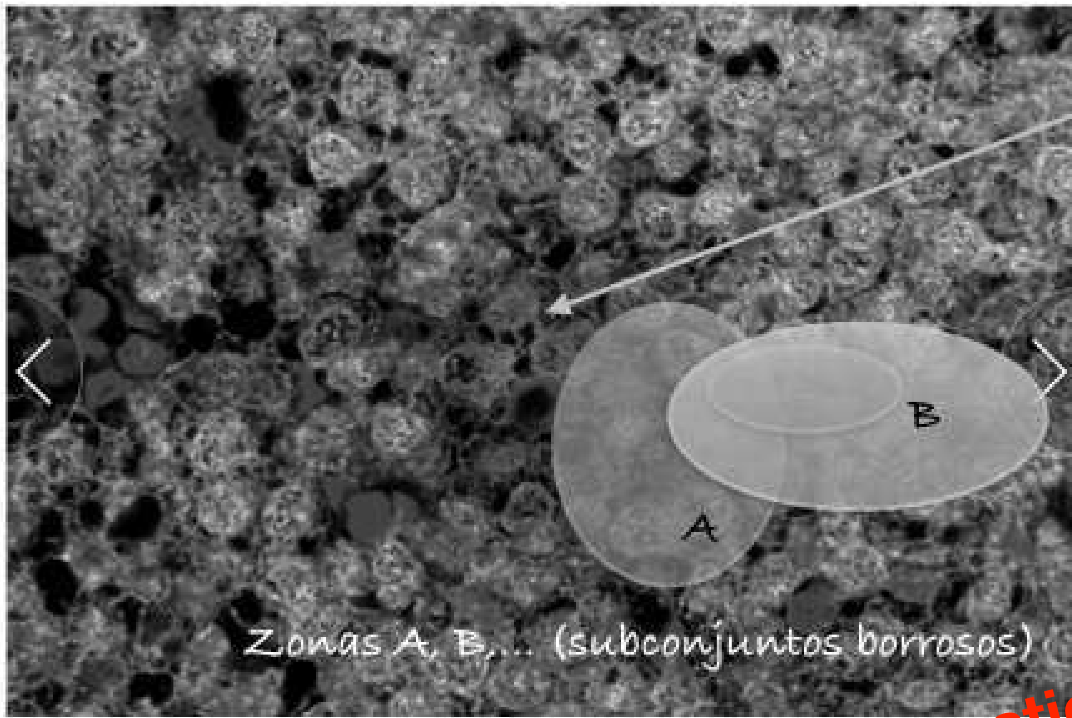
Si el análisis de este tipo de imágenes, (en las que aparece una <u>zona distinguida</u> W), está fundamentalmente dirigido a la comparación de partes A, B,... de la misma; en lugar de la inclusión usual $A \subseteq B$,..., parece que aporta más información el uso los órdenes de actividad: $M \sqsubseteq^{W} N$,..., como herramienta de comparación de zonas próximas a W, que la interesecan, etc.



Esta imagen de un tumor de cáncer de mama y su microambiente se obtuvo de un modelo de ratón vivo utilizando microscopia multifotónica y fluorescencia endógena. Es decir, se obtuvo la imagen sin fluoróforos, tinciones o colorantes, utilizando sólo los co-factores metabólicos de NADH y FAD, que ya están en el interior de las células, junto con la segunda generación armónica para visualizar colágeno. Esta técnica tiene importante potencial clínico para los pacientes que necesitan imágenes sin marcador y puede dar por resultado diagnósticos y tratamientos más eficaces. Se muestran las células tumorales en cian, los macrófagos en rojo y las fibras de colágeno en verde.



En esta imagen de un modelo de ratón sujeto a técnicas de ingeniería genética, el cáncer de pulmón impulsado por el oncogén *KRAS* se muestra en púrpura. Un determinante clave de muchos tipos de cáncer, el gen *KRAS* representa una diana promisoria para los nuevos tratamientos del cáncer.

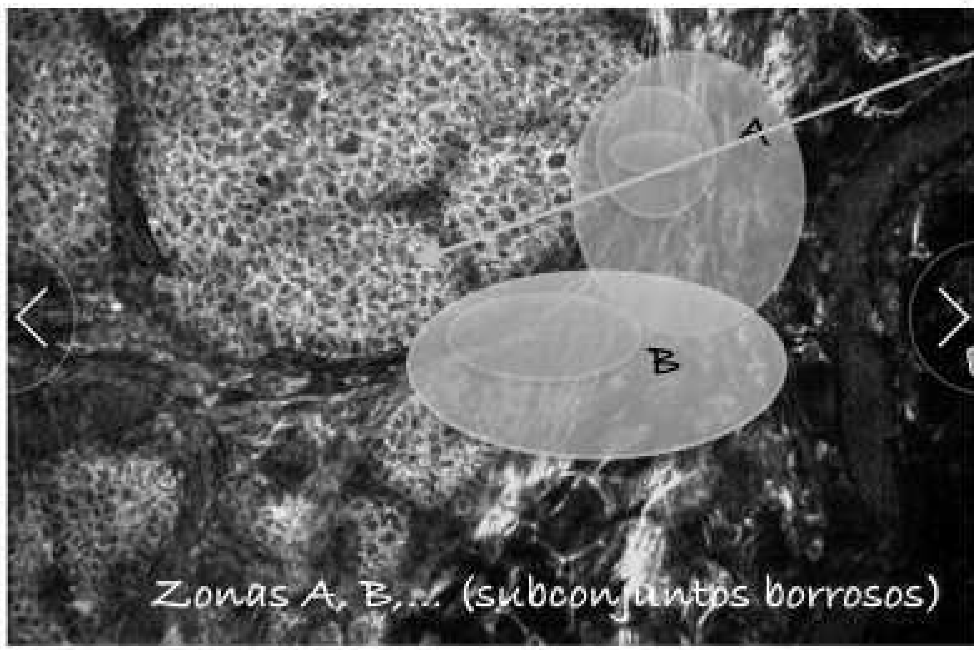


W (rojo)

Cuestión abierta

Si el análisis de este tipo de imágenes, (en las que aparece una zona distinguida W), está fundamentalmente dirigido a la comparación de partes A, B,... de la misma; en lugar de la inclusión usual A⊆B,..., parece que aporta más información el uso los órdenes de actividad: $M \sqsubseteq^{W} N$,..., como herramienta de comparación de zonas próximas a W, que la interesecan, etc.

W (cian)



Esta imagen de un tumor de cáncer de mama y su microambiente se obtuvo de un modelo de ratón vivo utilizando microscopia multifotónica y fluorescencia endógena. Es decir, se obtuvo la imagen sin fluoróforos, tinciones o colorantes, utilizando sólo los co-factores metabólicos de NADH y FAD, que ya están en el interior de las células, junto con la segunda generación armónica para visualizar colágeno. Esta técnica tiene importante potencial clínico para los pacientes que necesitan imágenes sin marcador y puede dar por resultado diagnósticos y tratamientos más eficaces. Se muestran las células tumorales en cian, los macrófagos en rojo y las fibras de colágeno en verde.

W (púrpura)

En esta imagen de un modelo de ratón sujeto a técnicas de ingeniería genética, el cáncer de pulmón impulsado por el oncogén *KRAS* se muestra en púrpura. Un determinante clave de muchos tipos de cáncer, el gen *KRAS* representa una diana promisoria para los nuevos tratamientos del cáncer.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

(1) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\xi}_w = \varphi_w \circ \xi \circ \varphi_w$ es erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(2) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\delta}_w = \varphi_w \circ \delta \circ \varphi_w$ es dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(3) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\gamma}_w = \varphi_w \circ \gamma \circ \varphi_w$ es apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(4) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\phi}_w = \varphi_w \circ \phi \circ \varphi_w$ es cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

Operadores morfológicos en $(L^{\mathbb{R}^2}, \sqsubseteq^W)$ o en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^W)$ obtenidos mediante "perspectivas" W.

Operadores morfológicos en $(L^{\mathbb{R}^2},\sqsubseteq^W)$ o en $(L^{\mathbb{Z}^2},\sqsubseteq^W)$ obtenidos mediante "perspectivas" W.

Ejemplo: Consideremos un álgebra $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', (*, \rightarrow_*))$ determinada por un retículo distributivo con negación fuerte y con un par residuado $(*, \rightarrow_*)$.

Sea el álgebra correspondiente $(L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ', R, (\circ, \triangleright))$ de los subconjuntos L-borrosos de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ junto con una relación $R \in L^{X \times X}$ y las operaciones:

$$(R \circ A)(y) = \sup_L\{R(y,x) * A(x) \,/\, x \in X\} \text{ y } (R \triangleright A)(y) = \inf_L\{R(y,x) \rightarrow_* A(x) \,/\, x \in X\} \ \forall y \in X,\ \forall A \in L^X.$$

Operadores morfológicos en $(L^{\mathbb{R}^2}, \sqsubseteq^W)$ o en $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^W)$ obtenidos mediante "perspectivas" W.

Ejemplo: Consideremos un álgebra $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', (*, \rightarrow_*))$ determinada por un retículo distributivo con negación fuerte y con un par residuado $(*, \rightarrow_*)$.

Sea el álgebra correspondiente $(L^X, \leq, \cdot, +, \emptyset, X), ', R, (\circ, \triangleright))$ de los subconjuntos L-borrosos de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ junto con una relación $R \in L^{X \times X}$ y las operaciones:

$$(R \circ A)(y) = \sup_L\{R(y,x) * A(x) \;/\; x \in X\} \text{ y } (R \triangleright A)(y) = \inf_L\{R(y,x) \rightarrow_* A(x) \;/\; x \in X\} \;\forall y \in X,\ \forall A \in L^X.$$

En este caso, los operadores morfológicos erosión $\xi_R : L^X \rightarrow L^X$ y dilatación $\delta_R : L^X \rightarrow L^X$ asociados al elemento estructurante R, vienen dados por:

$$\boxed{\xi_R = R^{op} \triangleright A, \quad \delta_R = R \circ A \quad \forall A \in L^X}$$

Ejemplo: Consideremos un álgebra $(L, \le, \cdot, +, 0, 1), ', (*, \rightarrow_*))$ determinada por un retículo distributivo con negación fuerte y con un par residuado $(*, \rightarrow_*)$.

Sea el álgebra correspondiente $(L^X, \le, \cdot, +, \varnothing, X), ', R, (\circ, \rhd))$ de los subconjuntos L-borrosos de $X=R^2$ o de $X=Z^2$ junto con una relación $R \in L^{X \times X}$ y las operaciones:

$(R \circ A)(y) = \sup_L\{R(y,x) * A(x) \,/\, x \in X\}$ y $(R \rhd A)(y) = \inf_L\{R(y,x) \rightarrow_* A(x) \,/\, x \in X\}$ $\forall y \in X$, $\forall A \in L^X$.

En este caso, los operadores morfológicos erosión $\xi_R: L^X \rightarrow L^X$ y dilatación $\delta_R: L^X \rightarrow L^X$ asociados al elemento estructurante R, vienen dados por:

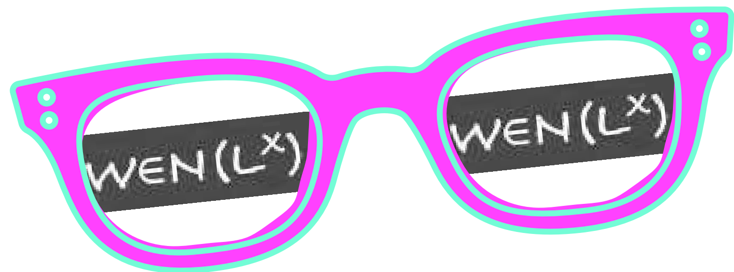
$$\boxed{\xi_R = R^{op} \rhd A\,,\ \ \delta_R = R \circ A \quad \forall A \in L^X}$$

Y si $W \in N(L^X)$ es un nítido que proporciona una "perspectiva" en L^X, las correspondientes extensiones $(\hat{\xi}_R)_W$ y $(\hat{\delta}_R)_W$ de esos operadores a $((L^X, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ son:

$$\boxed{(\hat{\xi}_R)_W = \varphi_W(R^{op} \rhd \varphi_W(A)) = [R^{op} \rhd (A \triangle W)] \triangle W,\ \ (\hat{\delta}_R)_W = \varphi_W(R \circ \varphi_W(A)) = [R \circ (A \Delta W)] \Delta W}$$

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

$$\boxed{\xi_R = R^{op} \rhd A\,,\;\; \delta_R = R \circ A \quad \forall A \in L^X}$$



$$\boxed{(\hat{\xi}_R)_W = \varphi_W(R^{op} \rhd \varphi_W(A)) = [R^{op} \rhd (A \triangle W)] \triangle W, \;\; (\hat{\delta}_R)_W = \varphi_W(R \circ \varphi_W(A)) = [R \circ (A \triangle W)] \triangle W}$$

Ejemplo: Consideremos un álgebra $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', (*, \rightarrow_*))$ determinada por un retículo distributivo con negación fuerte y con un par residuado $(*, \rightarrow_*)$.

Sea el álgebra correspondiente $(L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ', R, (\circ, \rhd))$ de los subconjuntos L-borrosos de $X = R^2$ o de $X = Z^2$ junto con una relación $R \in L^{X \times X}$ y las operaciones:

$$(R \circ A)(y) = \sup_L \{R(y,x) * A(x) \,/\, x \in X\} \text{ y } (R \rhd A)(y) = \inf_L \{R(y,x) \rightarrow_* A(x) \,/\, x \in X\} \;\; \forall y \in X,\; \forall A \in L^X.$$

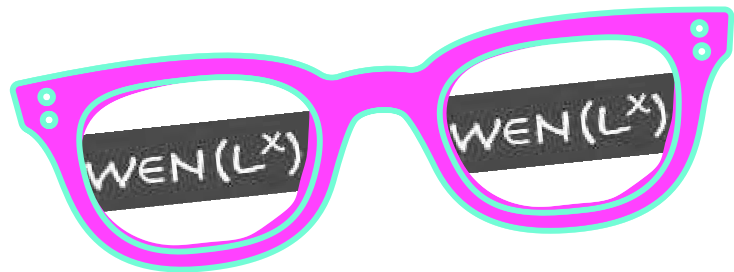
En este caso, los operadores morfológicos erosión $\xi_R : L^X \rightarrow L^X$ y dilatación $\delta_R : L^X \rightarrow L^X$ asociados al elemento estructurante R, vienen dados por:

Y si $W \in N(L^X)$ es un nítido que proporciona una "perspectiva" en L^X, las correspondientes extensiones $(\hat{\xi}_R)_W$ y $(\hat{\delta}_R)_W$ de esos operadores a $((L^X, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ son:

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

(¡Cuestión abierta!)

$$\boxed{\xi_R = R^{op} \rhd A\,,\quad \delta_R = R \circ A \qquad \forall A \in L^X}$$



$$\boxed{(\hat{\xi}_R)_W = \varphi_W(R^{op} \rhd \varphi_W(A)) = [R^{op} \rhd (A \triangle W)] \triangle W,\quad (\hat{\delta}_R)_W = \varphi_W(R \circ \varphi_W(A)) = [R \circ (A \Delta W)] \Delta W}$$

<u>Ejemplo</u>: Consideremos un álgebra $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ', (*, \rightarrow_*))$ determinada por un retículo distributivo con negación fuerte y con un par residuado $(*, \rightarrow_*)$.

Sea el álgebra correspondiente $(L^X, \leq, \cdot, +, \varnothing, X), ', R, (\circ, \rhd))$ de los subconjuntos L-borrosos de $X = R^2$ o de $X = Z^2$ junto con una relación $R \in L^{X \times X}$ y las operaciones:

$$(R \circ A)(y) = \sup_L\{R(y,x) * A(x) \;/\; x \in X\} \text{ y } (R \rhd A)(y) = \inf_L\{R(y,x) \rightarrow_* A(x) \;/\; x \in X\} \;\; \forall y \in X,\; \forall A \in L^X.$$

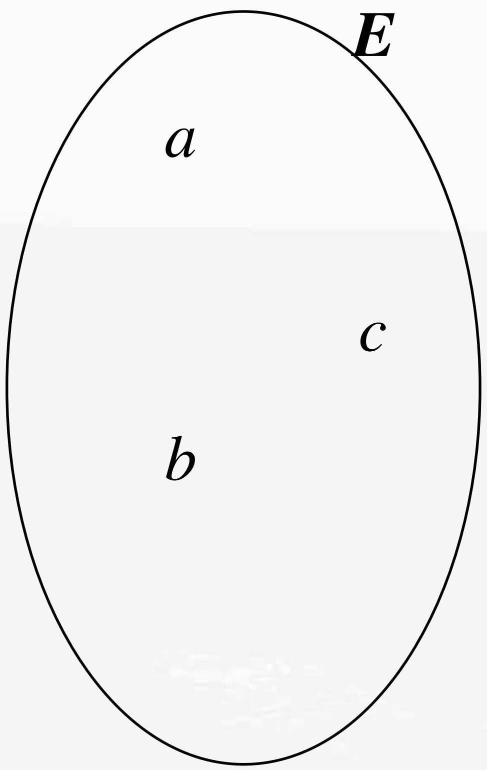
En este caso, los operadores morfológicos erosión $\xi_R: L^X \rightarrow L^X$ y dilatación $\delta_R: L^X \rightarrow L^X$ asociados al elemento estructurante R, vienen dados por:

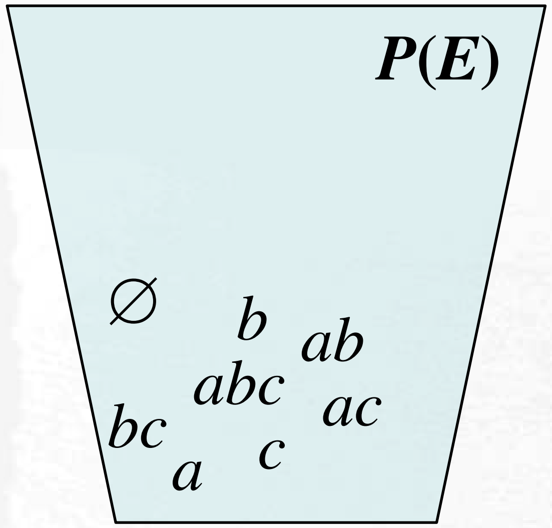
Y si $W \in N(L^X)$ es un nítido que proporciona una "perspectiva" en L^X, las correspondientes extensiones $(\hat{\xi}_R)_W$ y $(\hat{\delta}_R)_W$ de esos operadores a $((L^X, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ')$ son:

Relación entre los órdenes de actividad y las funciones de medida

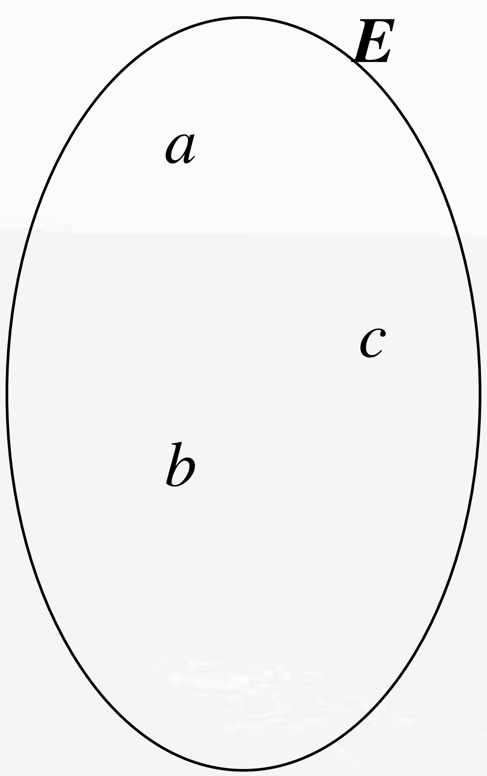
Introducción: ejemplo

A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.



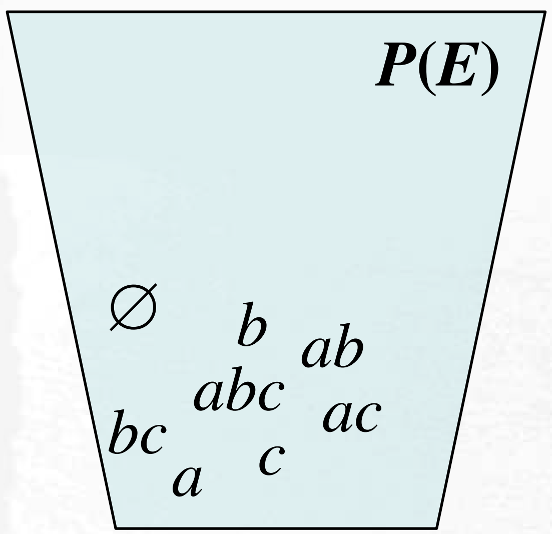


A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.



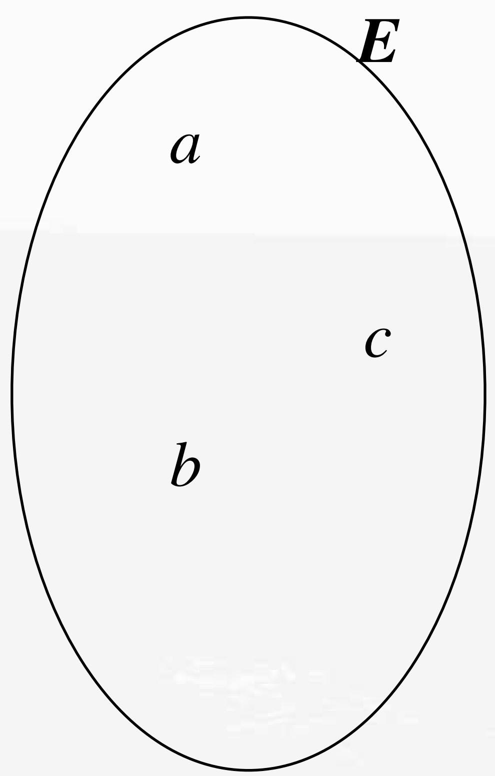
$abc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$\varnothing \longrightarrow 0$ Peor resultado



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA

A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.

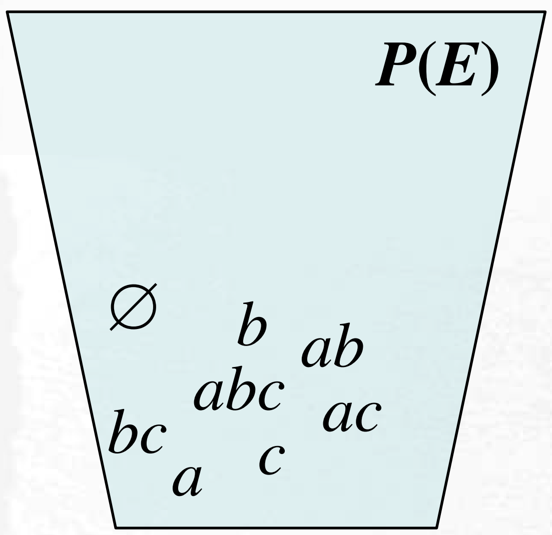


$abc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$ab \quad ac \quad bc \longrightarrow 2$

$a \quad b \quad c \longrightarrow 1$

$\varnothing \longrightarrow 0$ Peor resultado

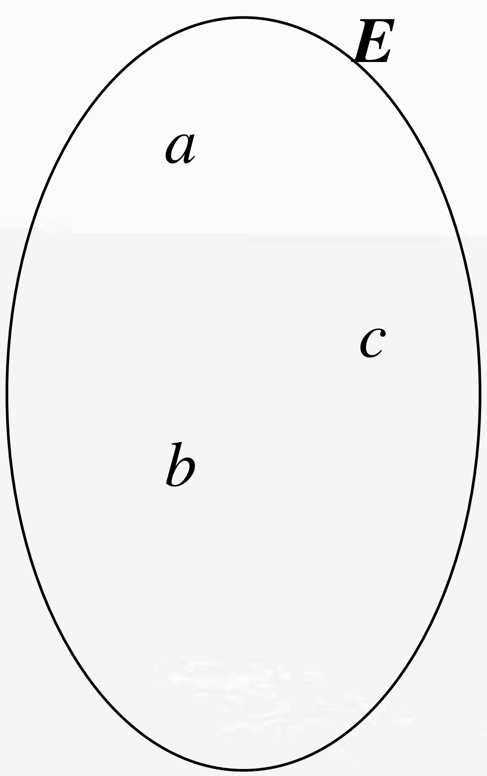


$A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$

$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$

$(E, (P(E), \subseteq), v)$ espacio de medida

A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.

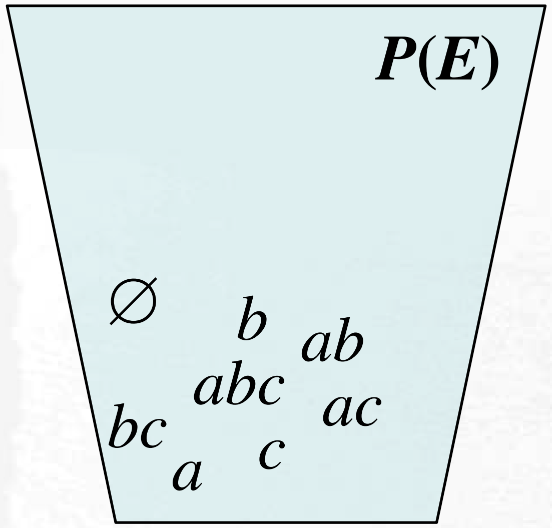


$abc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$ab \quad ac \quad bc \longrightarrow 2$

$a \quad b \quad c \longrightarrow 1$

$\varnothing \longrightarrow 0$ Peor resultado



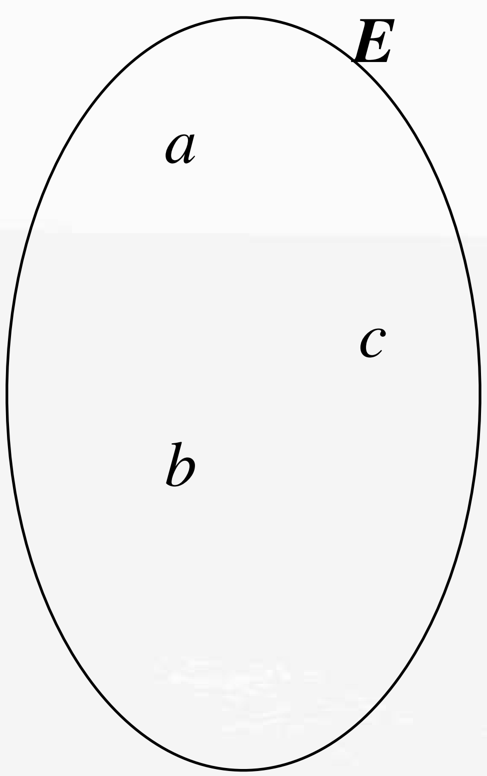
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA

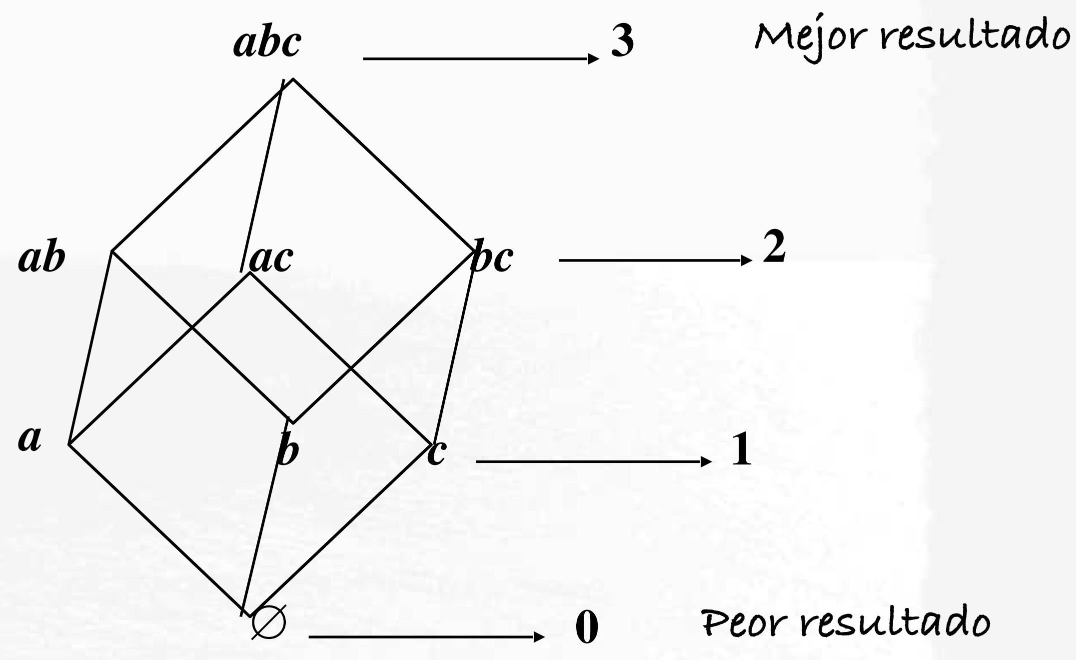
A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.

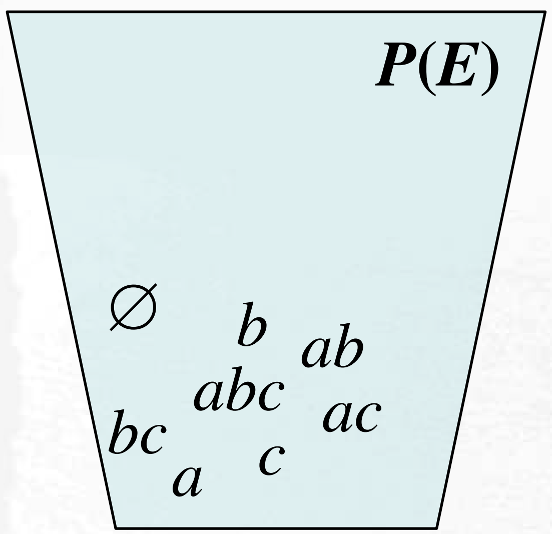
$$A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$$

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$$

$(E, (P(E), \subseteq), v)$ espacio de medida







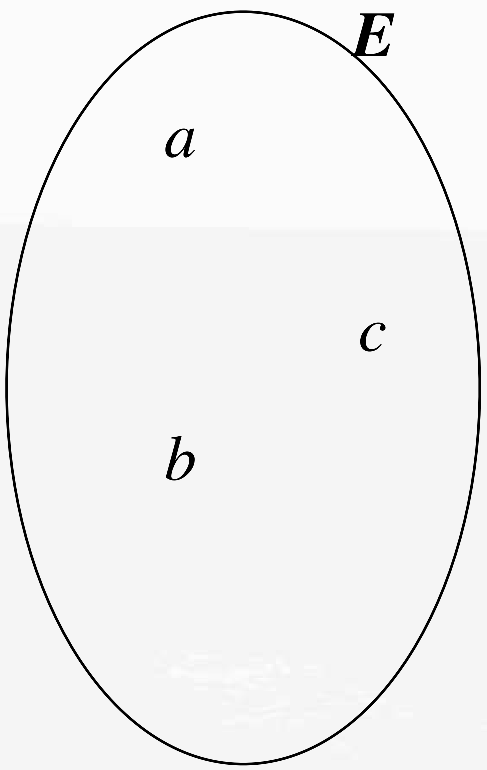
- $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^{c}, \emptyset, E), {}^{c})$

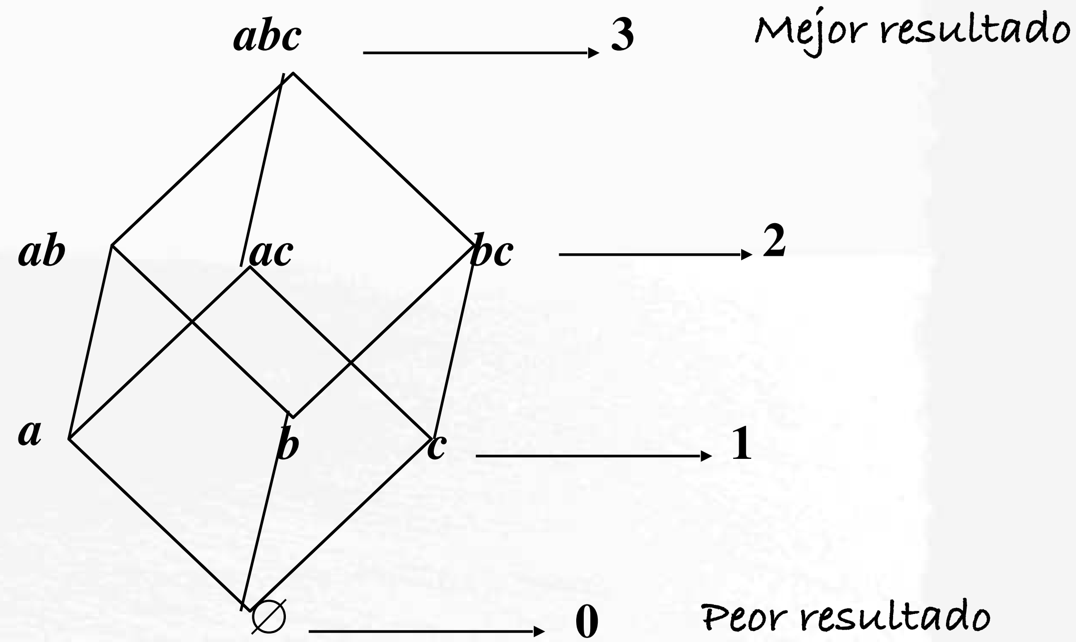
A cada subconjunto A se le asigna un valor: $v(A) = |A|$.
Cada jugador extrae un ítem, anota su valor y lo devuelve.
El proceso se repite hasta que uno de ellos alcance o supere un valor establecido.

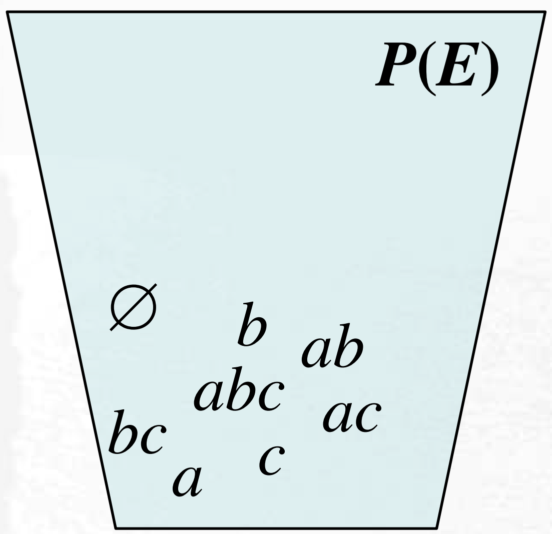
$$A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$$

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$$

$(E, (P(E), \subseteq), v)$ espacio de medida

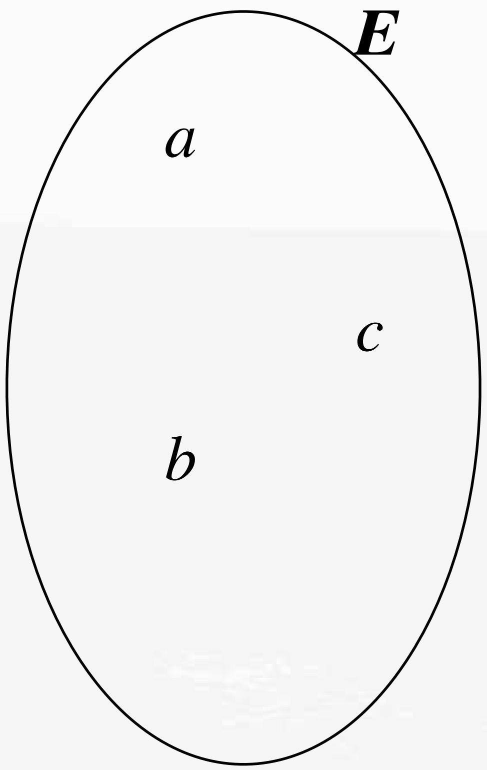


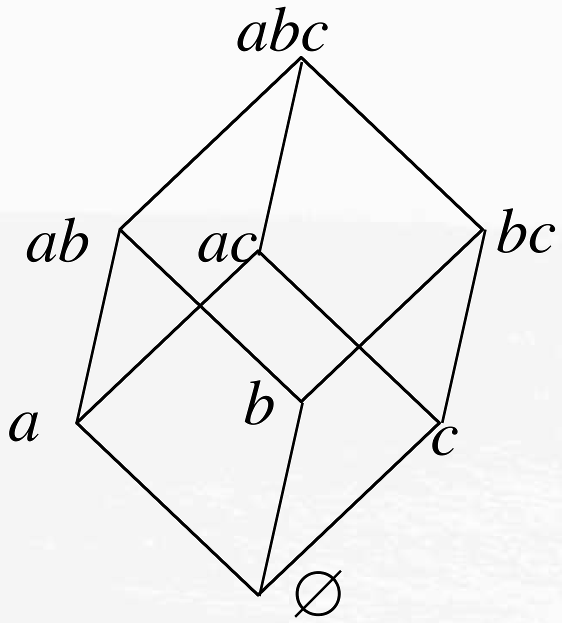


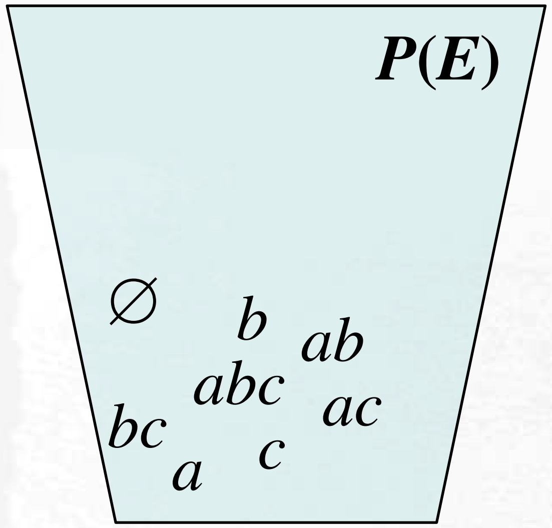


- $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, {}^{c}, \varnothing, E), {}^{c})$

Como el juego parece demasiado simple,
proponemos cambiar las reglas del juego:


E
a
c
b


abc
ab
ac
bc
a
b
c
∅


P(E)
∅
b
ab
abc
ac
bc
a
c

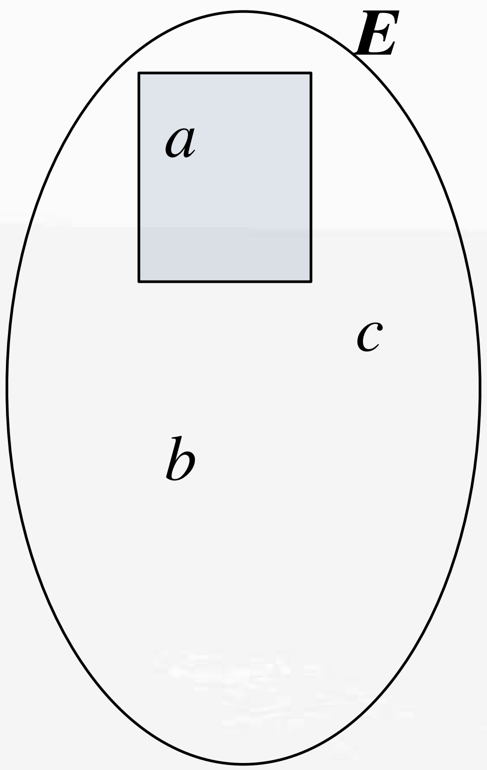
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

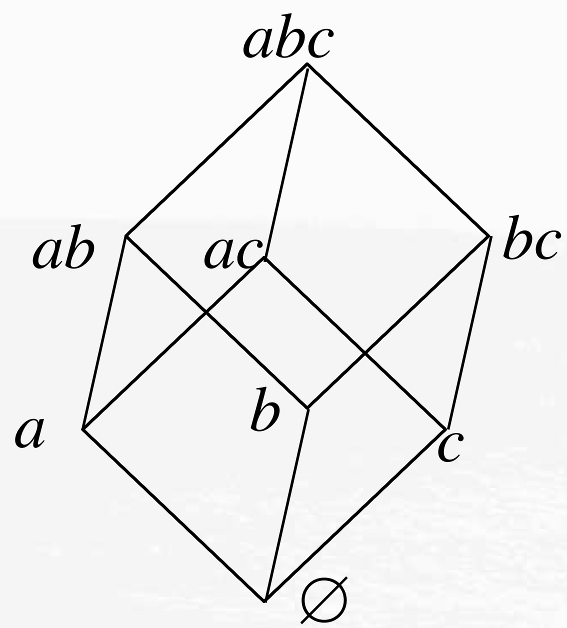
A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

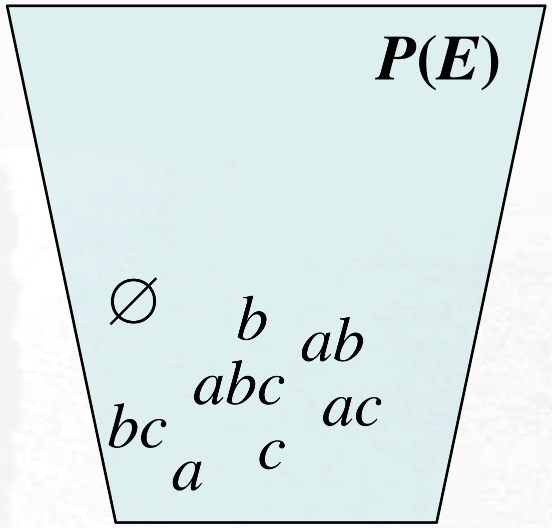
$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$(v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|)$







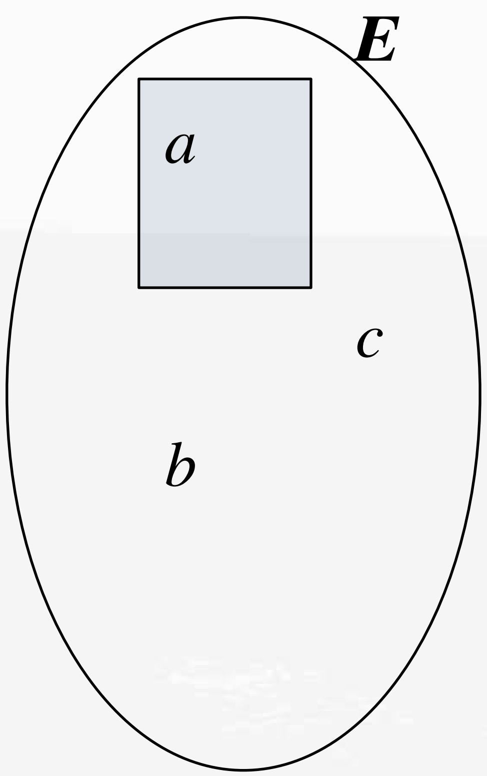
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

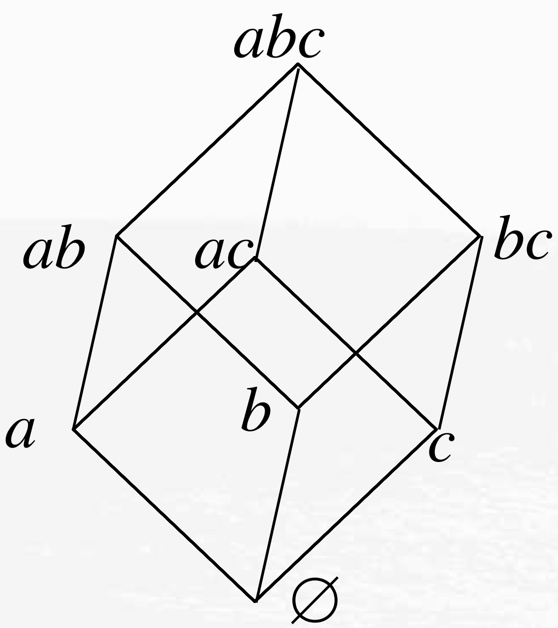
A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$(v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|)$



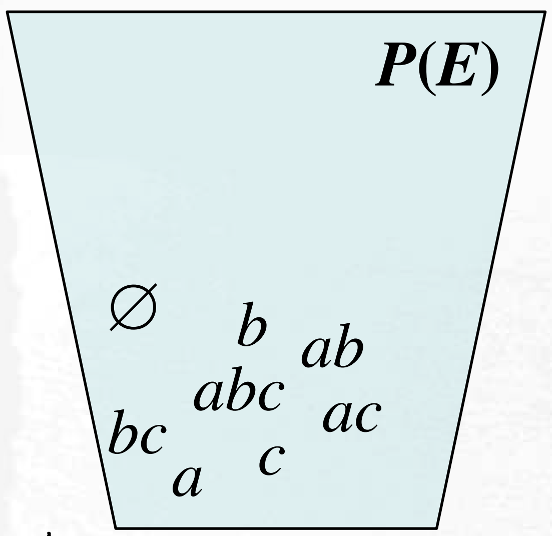


$bc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$abc \quad b \quad c \longrightarrow 2$

$ab \quad ac \quad \varnothing \longrightarrow 1$

$a \longrightarrow 0$ Peor resultado



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$(v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|)$

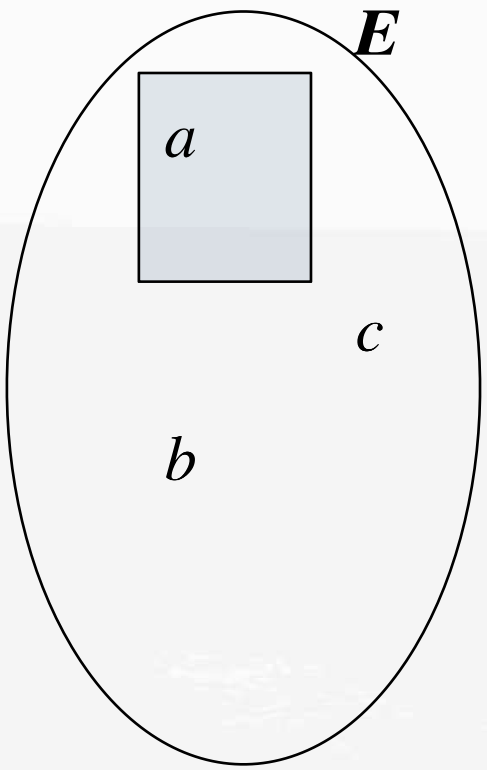
¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

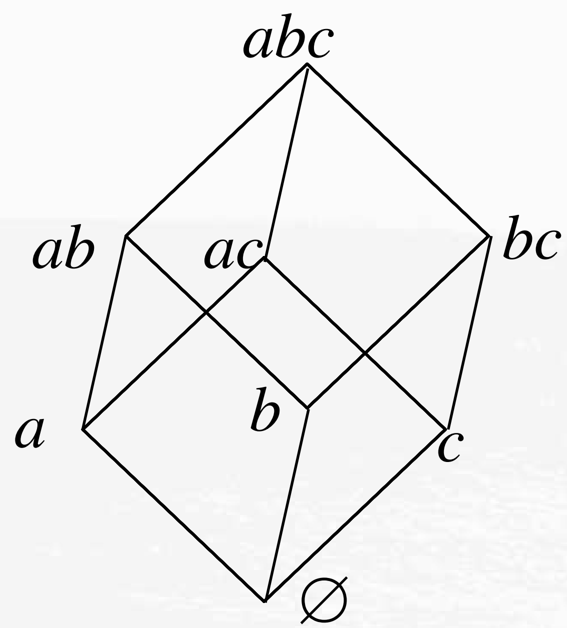
(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ?B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

$v_a(A \sqcup ?B) + v_a(A \sqcap ?B) = v_a(A) + v_a(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?





abc ab

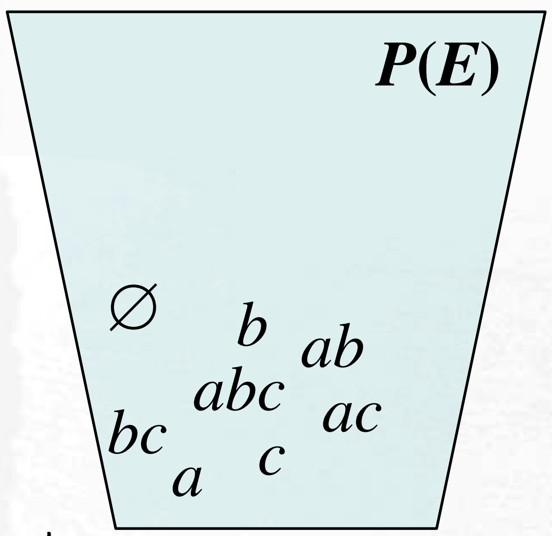
$\sqsubseteq ?$

bc $\longrightarrow$ 3 Mejor resultado

b ac c $\longrightarrow$ 2

∅ $\longrightarrow$ 1

a $\longrightarrow$ 0 Peor resultado



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

($v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|$)

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

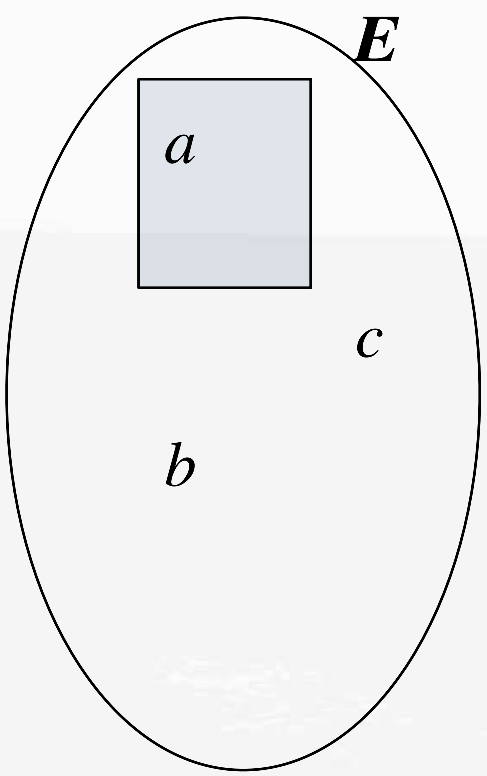
$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

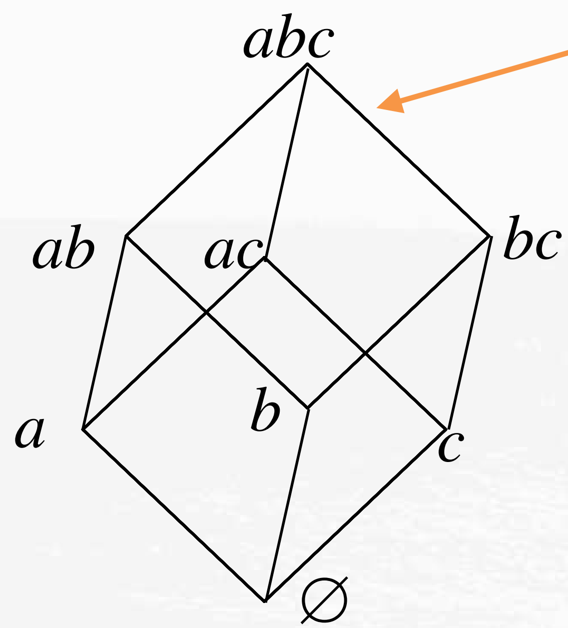
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

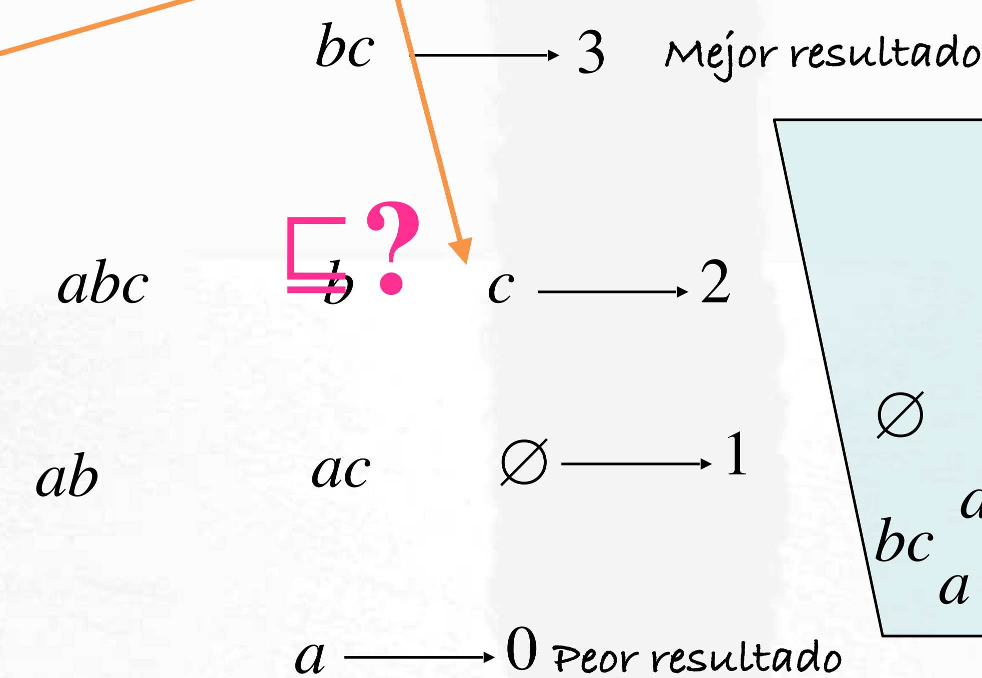
¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

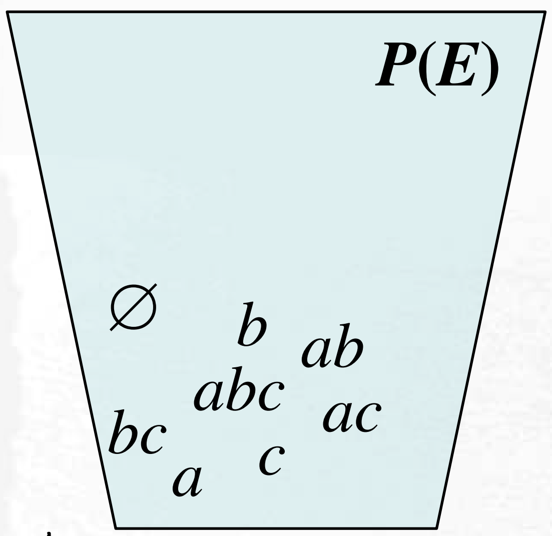
---

Ok $v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

($v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|$)

(${v_a}$ como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que v_a sea un tipo de "medida"?,

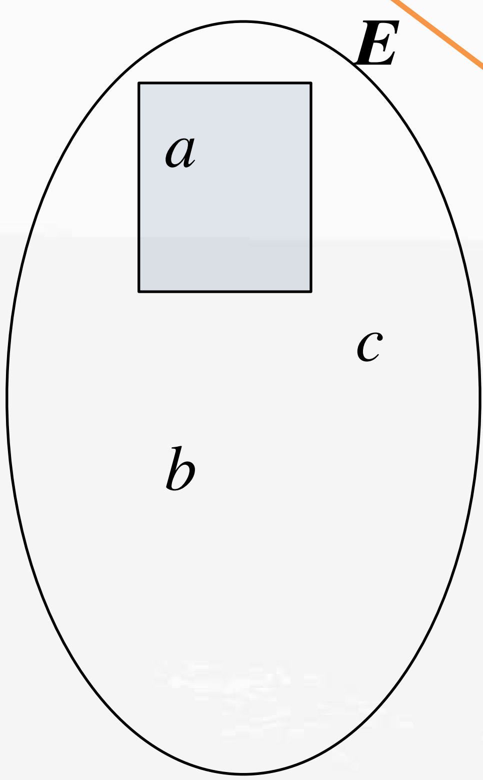
---

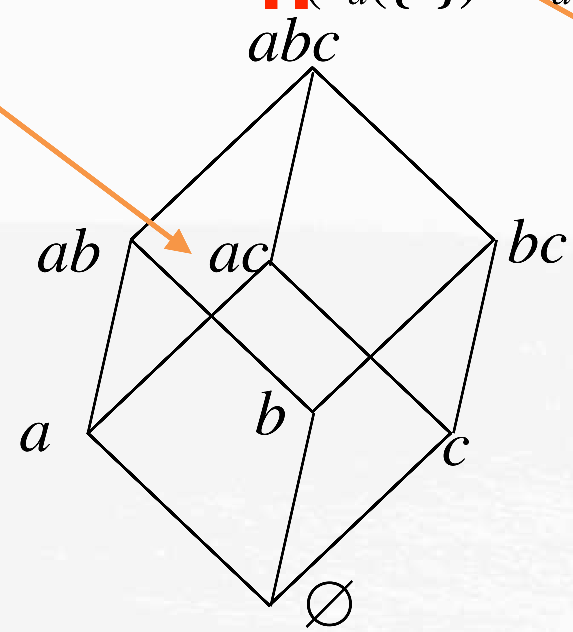
$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$

¡¡La inclusión usual no es válida!!

$(\{c\} \subseteq \{a,c\})\ \&(v_a(\{c\}) = 2)\&(v_a(\{a,c\}) = 1)$

!! $(v_a(\{c\}) \not\leq v_a(\{a,c\}))$





abc

ab

$\sqsubseteq ?$ b

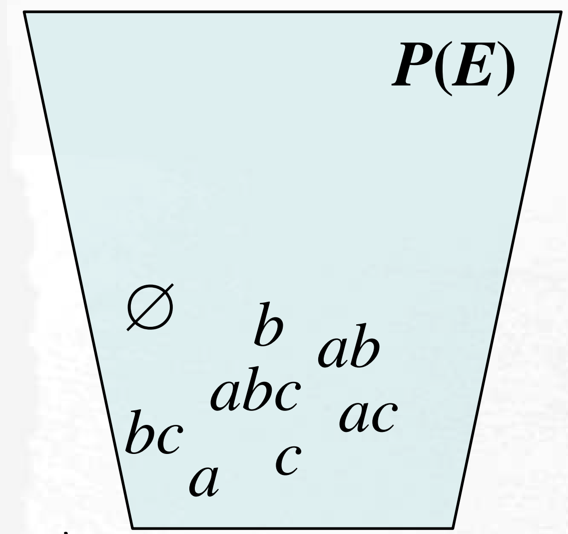
ac

$bc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$c \longrightarrow 2$

$\varnothing \longrightarrow 1$

$a \longrightarrow 0$ Peor resultado



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$(v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|)$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

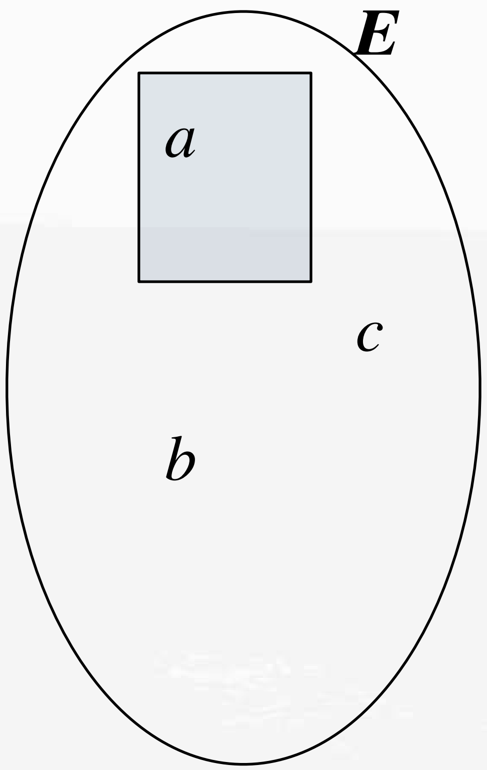
$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

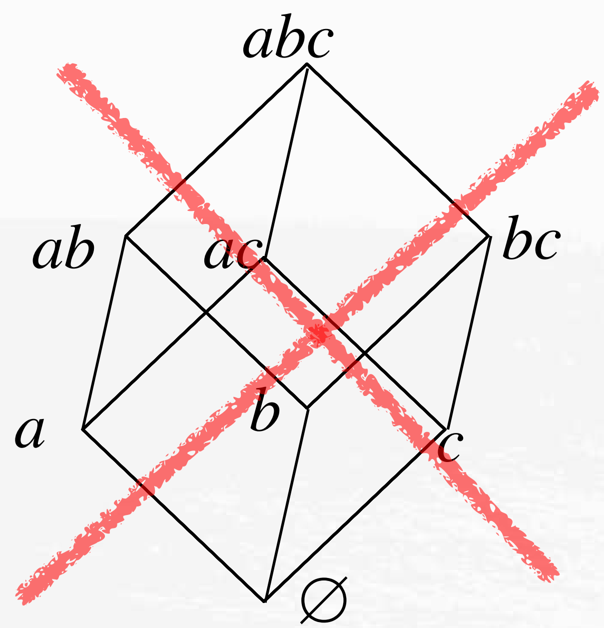
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

¡¡La inclusión usual no es válida!!

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$





$bc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

$\sqsubseteq ?$

abc

ab

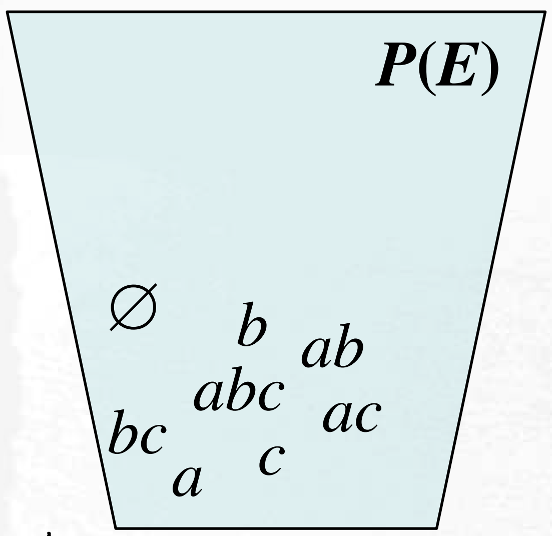
ac

b

$c \longrightarrow 2$

$\varnothing \longrightarrow 1$

$a \longrightarrow 0$ Peor resultado



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(\ v_a(A) = |A \triangle \{a\}}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|\ )$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ?B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

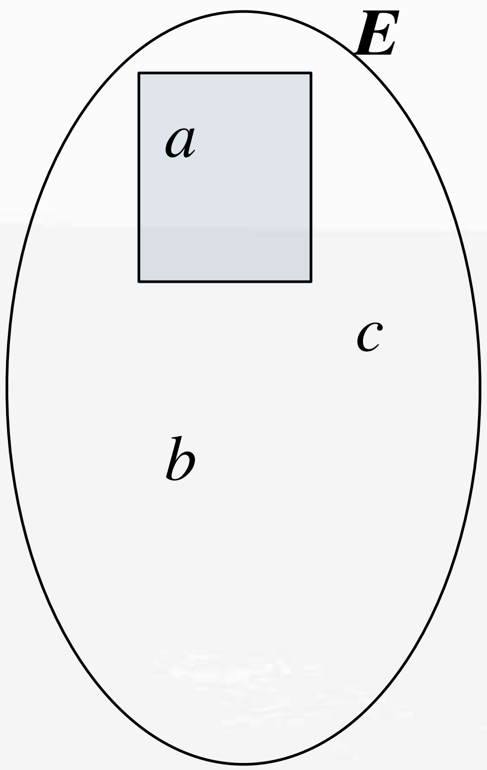
$v_a(A \sqcup ?B) + v_a(A \sqcap ?B) = v_a(A) + v_a(B)$

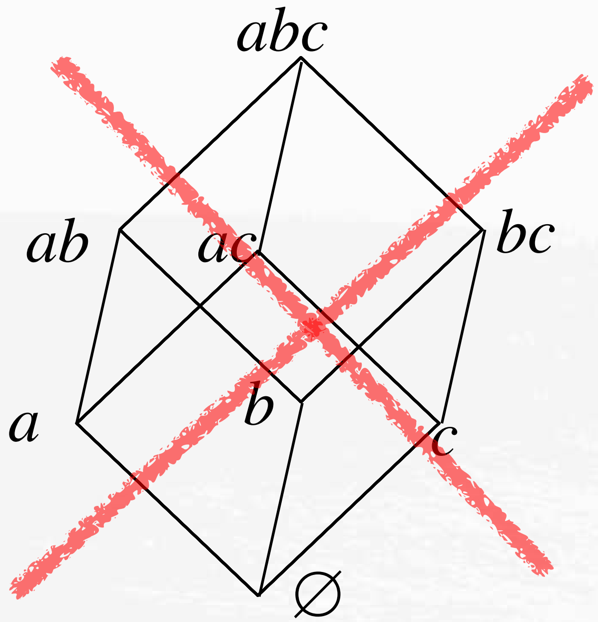
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

¡¡La inclusión usual no es válida!!

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$



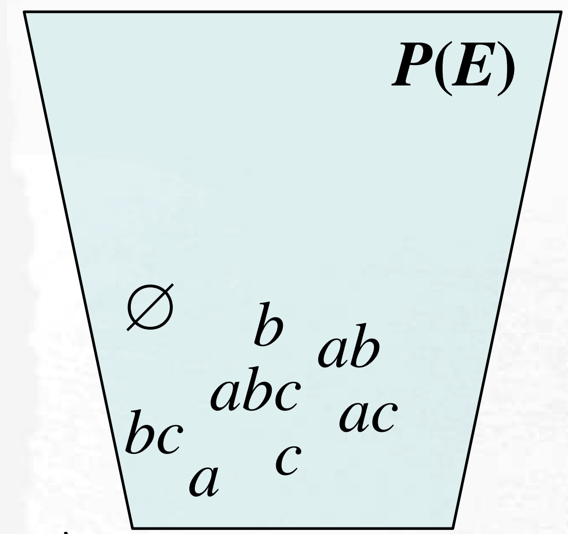


$bc \longrightarrow 3$ Mejor resultado

abc $\sqsubseteq ?$ b $c \longrightarrow 2$

ab   ac $\varnothing \longrightarrow 1$

$a \longrightarrow 0$ Peor resultado



$\sqsubseteq ?$ $\boxed{A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow [(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]}$

$\Leftrightarrow (A\ \Delta \{a\}) \subseteq (B\ \Delta \{a\}) \Leftrightarrow$

$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})]$ & $[(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$

$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(\ v_a(A) = |A \triangle \{a\}|} = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|\ )$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ?B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

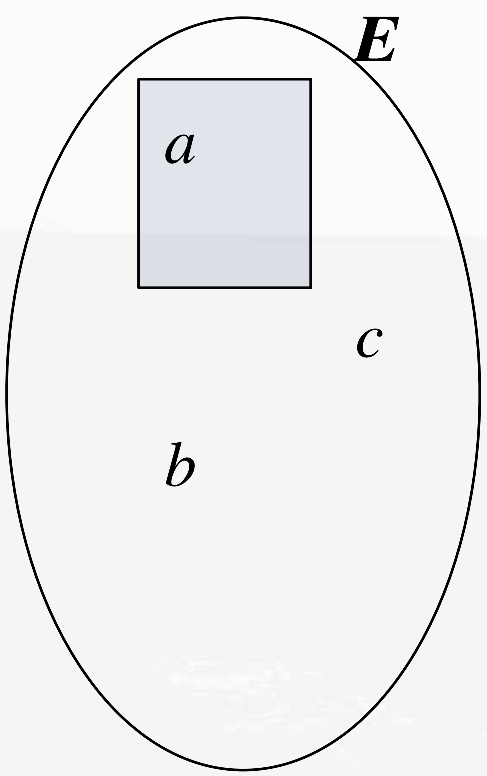
$v_a(A \sqcup ?B) + v_a(A \sqcap ?B) = v_a(A) + v_a(B)$

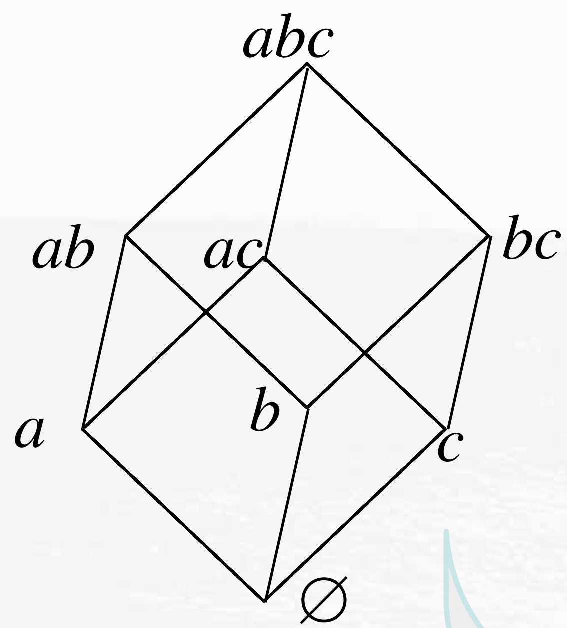
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

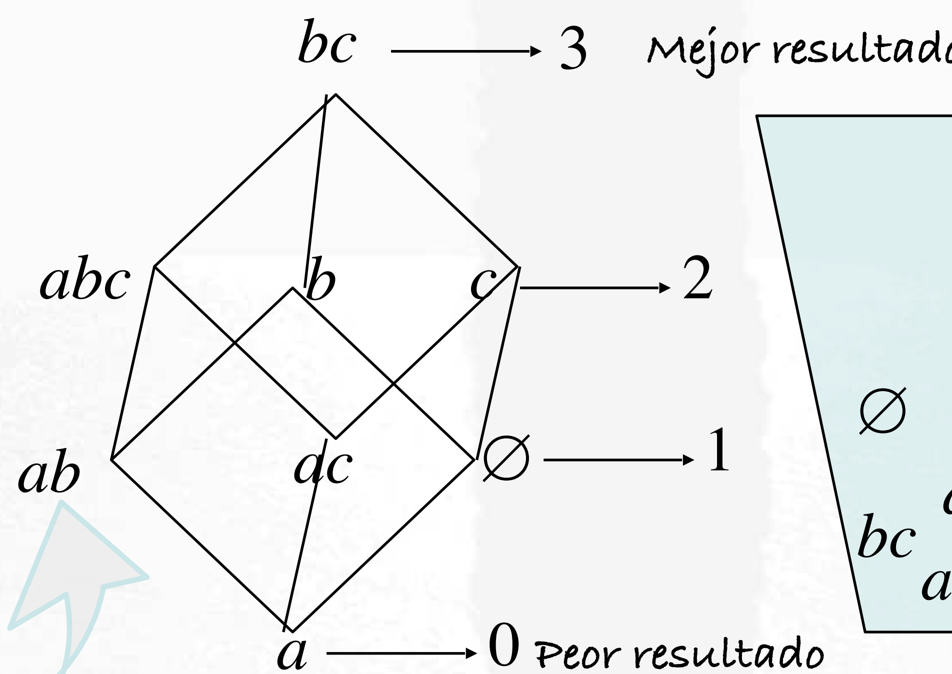
¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que v_a sea un tipo de "medida"?,

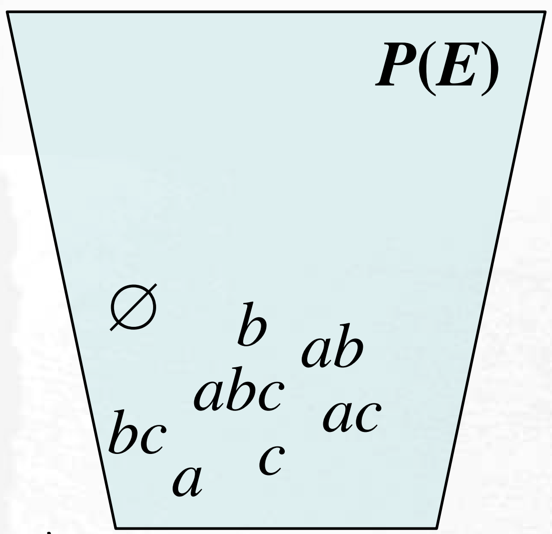
¡¡La inclusión usual no es válida!!

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a\}}, \sqcap^{\{a\}}\ \sqcup^{\{a\}}, \{a\}, \{a\}^c), {}^c)$

$\sqsubseteq ?$

$A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow$
$[(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]$

$\Leftrightarrow (A\ \Delta \{a\}) \subseteq (B\ \Delta \{a\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})]\ \&\ [(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(v_a(A) = |A \triangle \{a\}|} = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|)$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \leq v_a(B)$

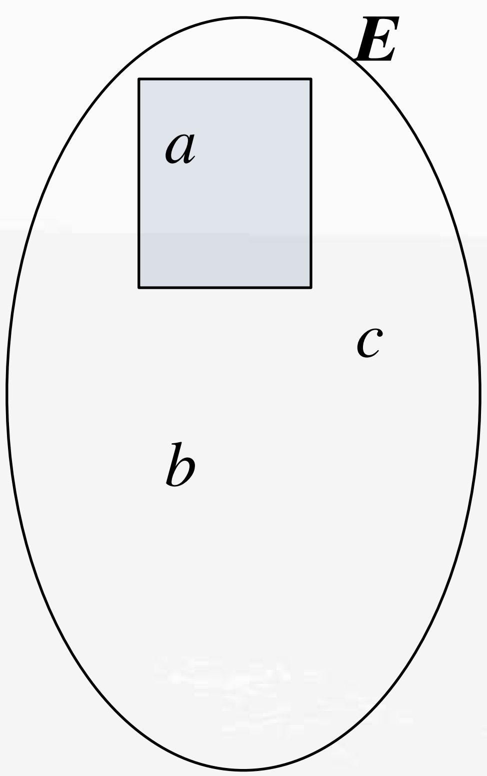
$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

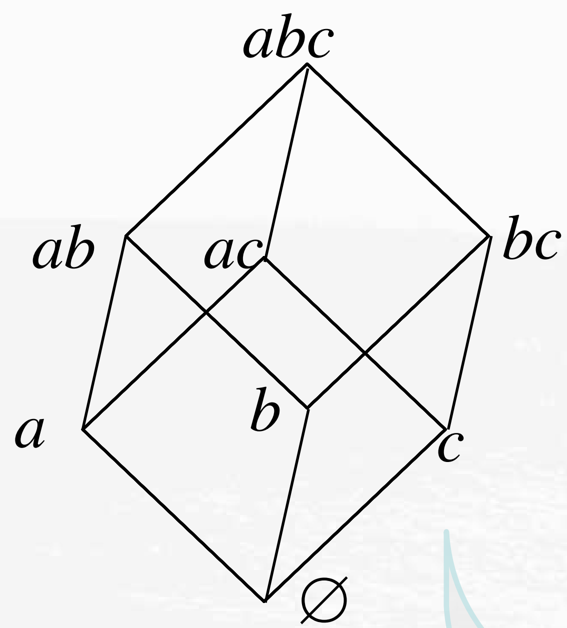
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

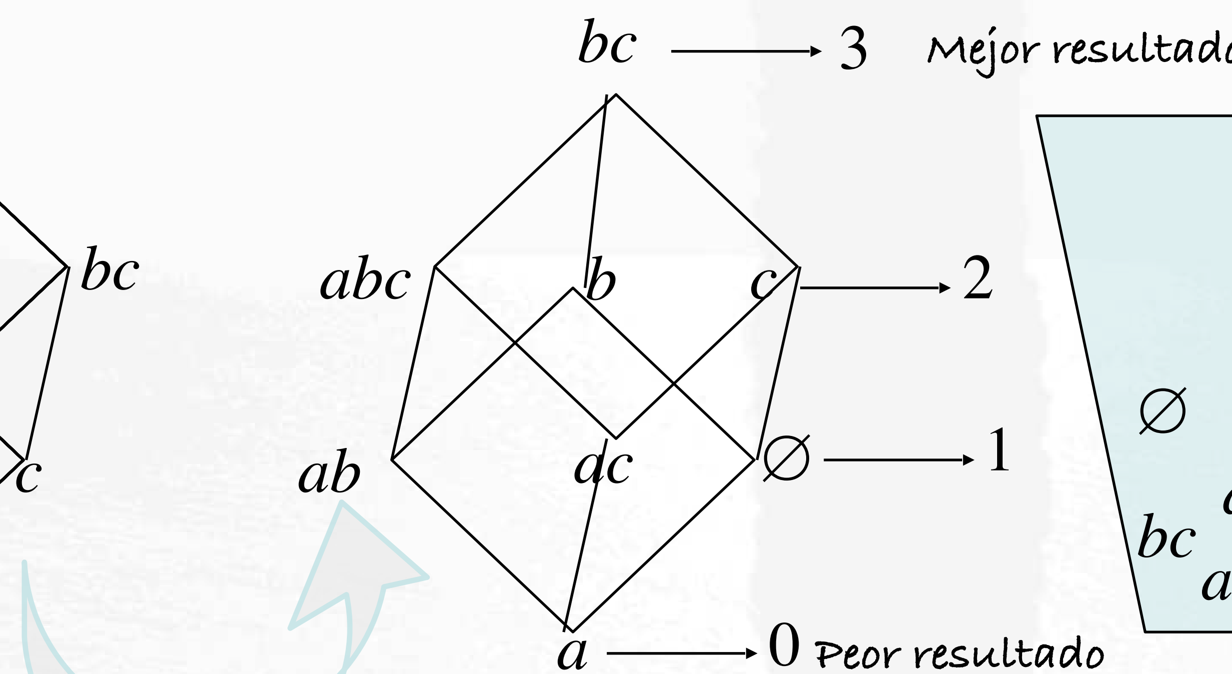
¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

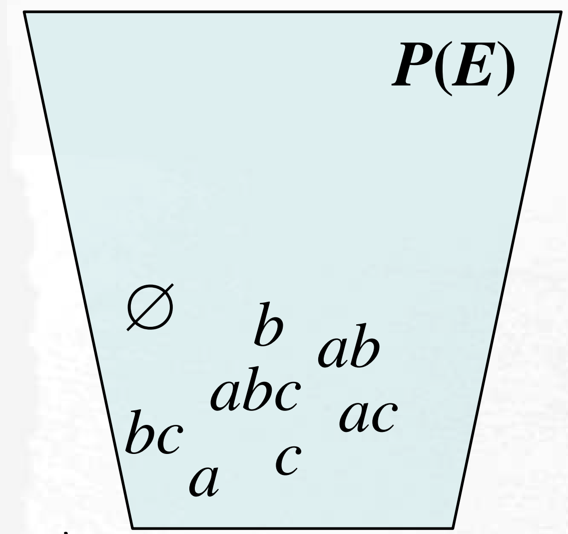
¡¡La inclusión usual no es válida!!

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









- $\boxed{((P(E), \sqsubseteq^{\{a\}}, \sqcap^{\{a\}} \sqcup^{\{a\}}, \{a\}, \{a\}^c), {}^c)}$

$\sqsubseteq ?$

$A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow$
$[(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]$

$\sqcup ?, \sqcap ?$

- $A \sqcap^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\}]$
- $A \sqcup^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\}^c] = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{b, c\}]$

$\Leftrightarrow (A \,\Delta \{a\}) \subseteq (B \,\Delta \{a\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})] \,\&\, [(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

- Átomos en $(P(E), \sqsubseteq^{\{a\}})$: $\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \emptyset \}$

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A)$ = $|A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A)$ = $|A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(\ v_a(A) = |A \triangle \{a\}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|\ )}$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

$A \sqsubseteq ?B \Rightarrow v_a(A) \le v_a(B)$

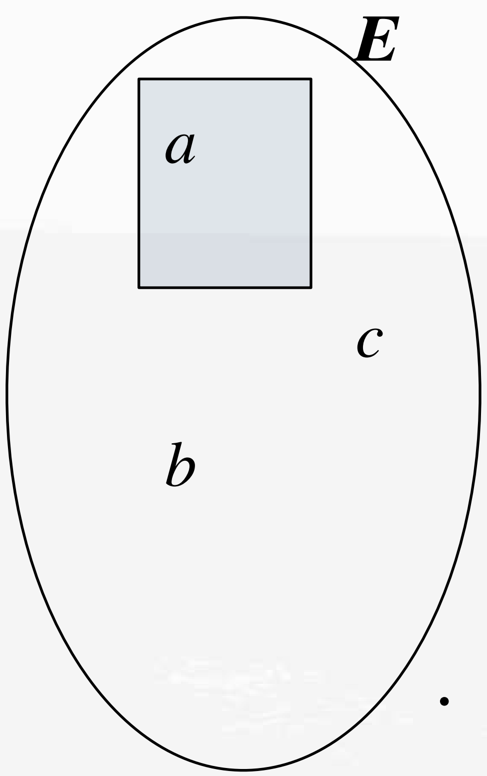
$v_a(A \sqcup ?B) + v_a(A \sqcap ?B) = v_a(A) + v_a(B)$

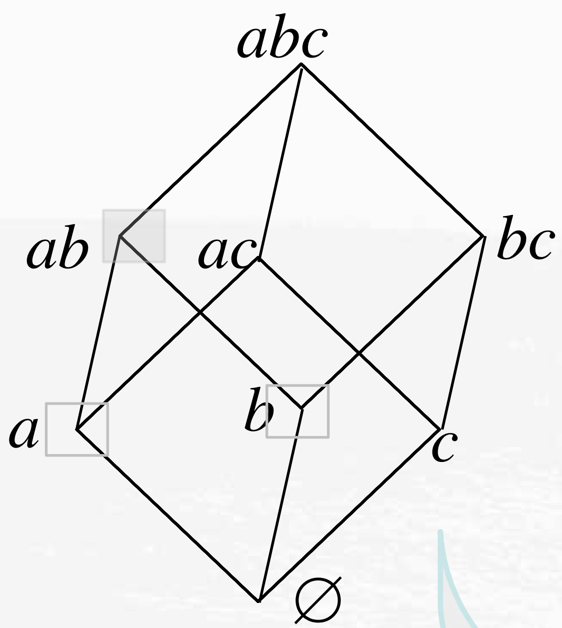
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

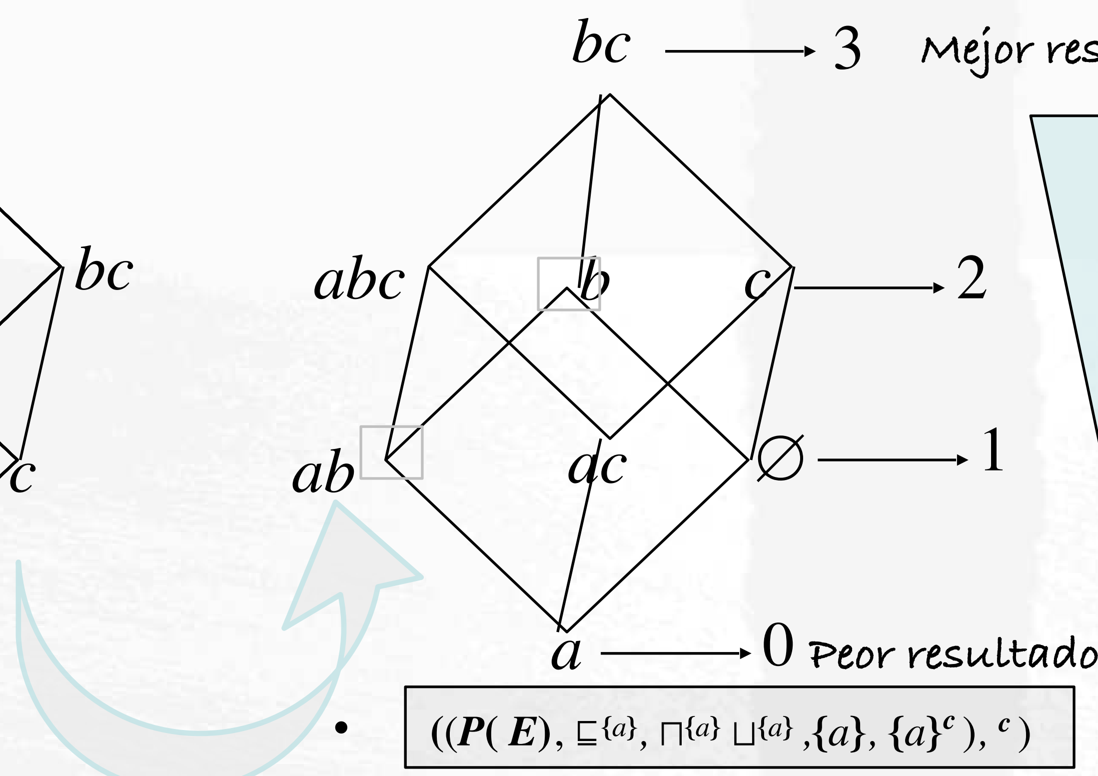
¡¡La inclusión usual no es válida!!

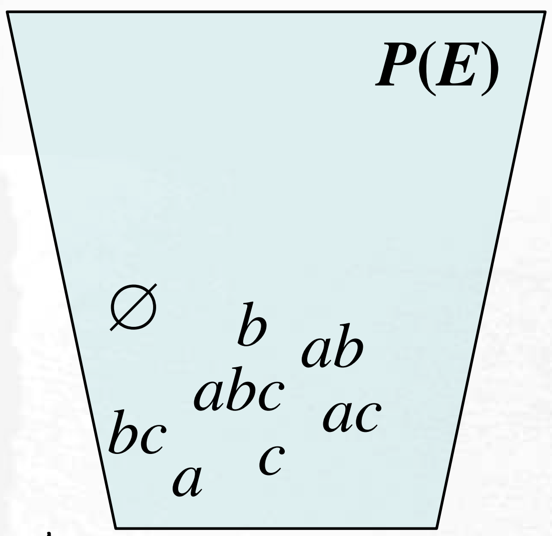
¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









- $\{a, b\}$ separa $\{a\}$ de $\{b\}$

- $\boxed{((P(E), \sqsubseteq^{\{a\}}, \sqcap^{\{a\}}\ \sqcup^{\{a\}}, \{a\}, \{a\}^c), {}^c)}$

$\sqsubseteq ?$ $\boxed{A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow [(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]}$

$\sqcup ?, \sqcap ?$

- $A \sqcap^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\})]$
- $A \sqcup^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\}^c] = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{b, c\}]$

$\Leftrightarrow (A\ \Delta \{a\}) \subseteq (B\ \Delta \{a\}) \Leftrightarrow$

$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})]\ \&\ [(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$

$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

Centro o mediana

$m(\{a\}, \{b\}, \{a, b\}) = \{b\} \sqcap^{\{a\}} \{a, b\} = \{a, b\}$

- Átomos en $(P(E), \sqsubseteq^{\{a\}})$: $\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \varnothing \}$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(\ v_a(A) = |A \triangle \{a\}}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|\ )$

¿Existen relaciones alternativas para la inclusión y operaciones alternativas a la unión e intersección tales que hagan que va sea un tipo de "medida"?,

¡¡La inclusión usual no es válida!!

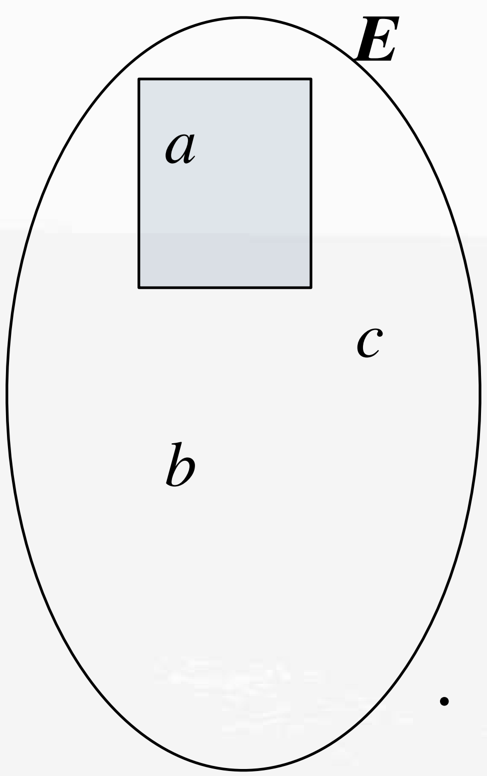
(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

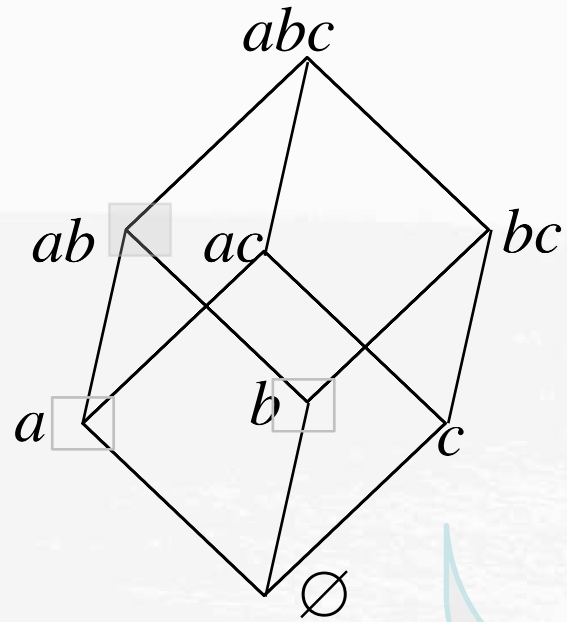
$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \le v_a(B)$

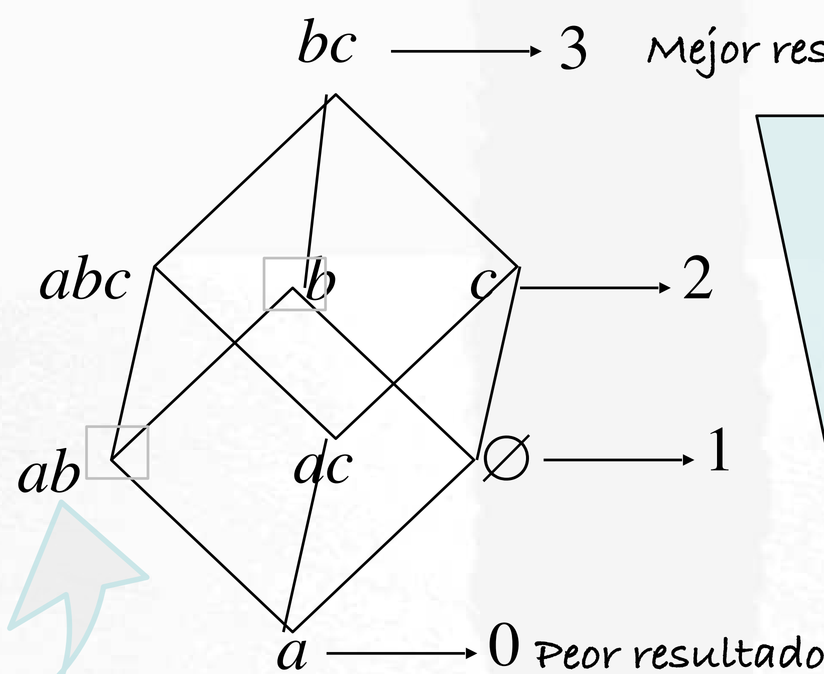
$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

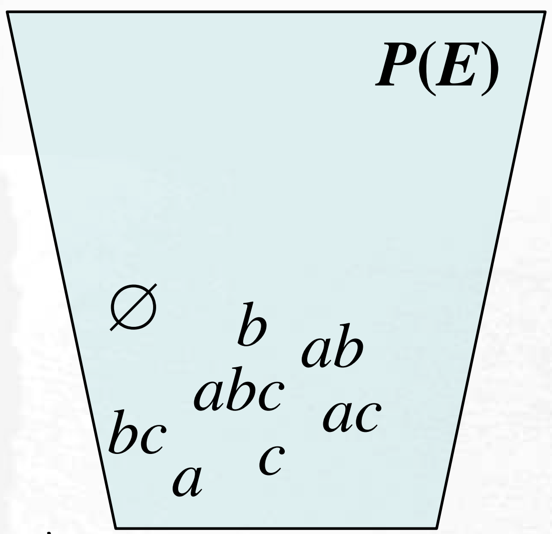
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









- $\{a, b\}$ separa $\{a\}$ de $\{b\}$
- $\boxed{((P(E), \sqsubseteq^{\{a\}}, \sqcap^{\{a\}} \sqcup^{\{a\}}, \{a\}, \{a\}^c), {}^c)}$

$\sqsubseteq ?$ $\boxed{A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow [(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]}$

$\sqcup ?, \sqcap ?$

- $A \sqcap^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\})]$
- $A \sqcup^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\}^c] = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{b, c\}]$

$\Leftrightarrow (A\ \Delta \{a\}) \subseteq (B\ \Delta \{a\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})]\ \&\ [(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

Centro o mediana

$m(\{a\}, \{b\}, \{a, b\}) = \{b\} \sqcap^{\{a\}} \{a, b\} = \{a, b\}$

Volvemos a cambiar las reglas del juego:

- Átomos en $(P(E), \sqsubseteq^{\{a\}})$: $\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \varnothing\}$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

A cada subconjunto A se le asigna un valor v_a :

$v_a(A) = |A| + 1$ si a no está en A. (Se favorece la ausencia de a)

$v_a(A) = |A| - 1$ si a está en A. (Se penaliza la presencia de a)

$\boxed{(\ v_a(A) = |A \triangle \{a\}}| = |A \cup \{a\}| - |A \cap \{a\}|\ )$

(v_a como función cardinal condicionado por $\{a\}$)

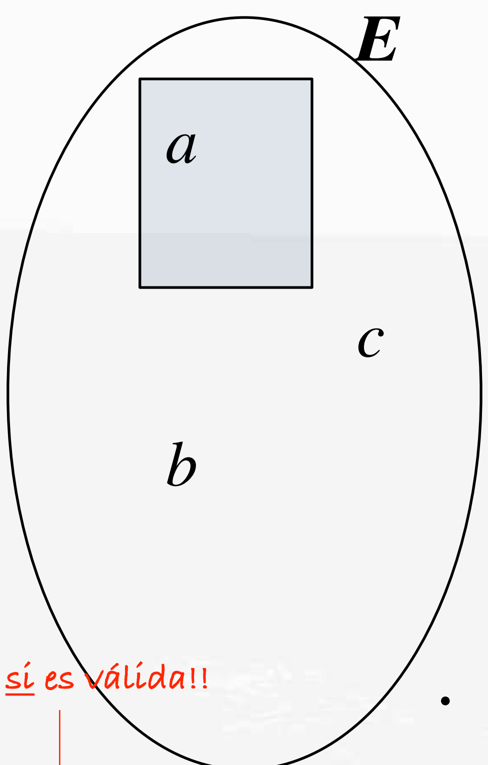
$A \sqsubseteq ? B \Rightarrow v_a(A) \le v_a(B)$

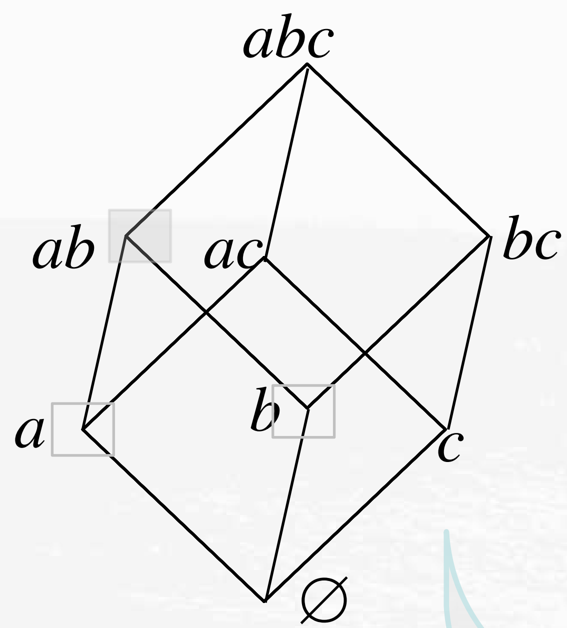
$v_a(A \sqcup ? B) + v_a(A \sqcap ? B) = v_a(A) + v_a(B)$

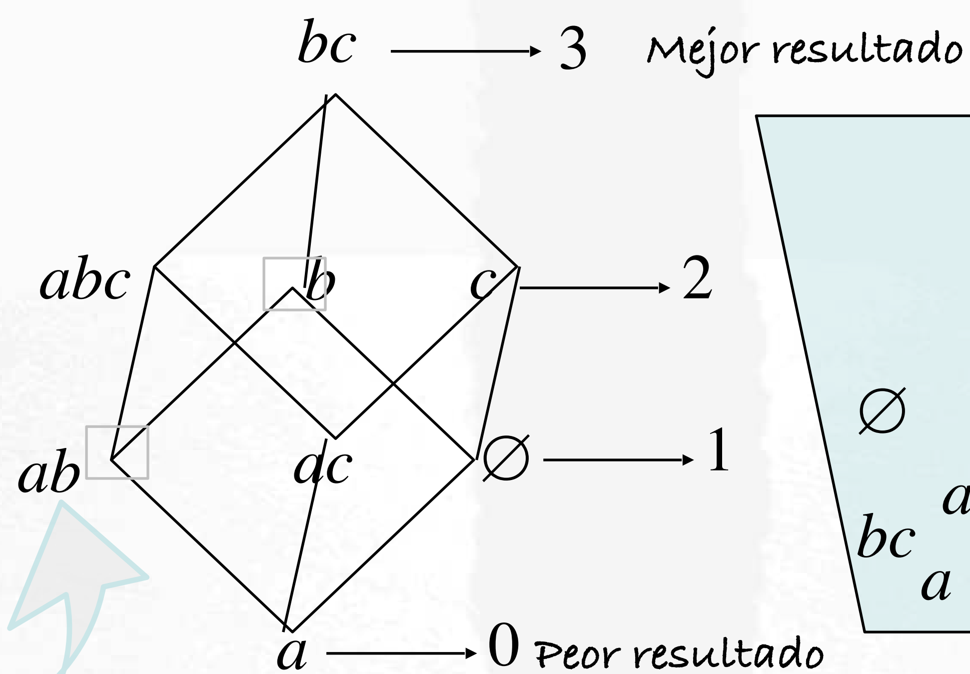
$(E, (P(E), \sqsubseteq ?), v_a)$ espacio de medida?

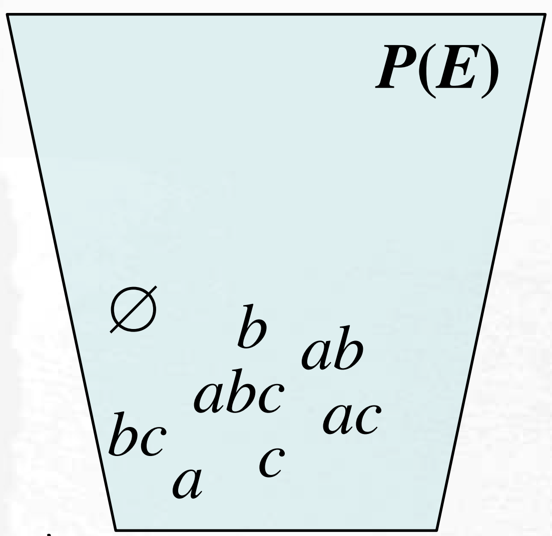
¡¡La inclusión usual no es válida!!

$v_a(A \cup B) + v_a(A \cap B) = v_a(A) + v_a(B)$









¡¡Ésta sí es válida!!

- $\{a, b\}$ separa $\{a\}$ de $\{b\}$

- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a\}}, \sqcap^{\{a\}} \sqcup^{\{a\}}, \{a\}, \{a\}^c), ^c)$

$\sqsubseteq ?$

$A \sqsubseteq^{\{a\}} B \Leftrightarrow$
$[(A \cup \{a\}) - (A \cap \{a\})] \subseteq [(B \cup \{a\}) - (B \cap \{a\})]$

$\sqcup ?, \sqcap ?$

- $A \sqcap^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\})]$
- $A \sqcup^{\{a\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a\}^c] = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{b, c\}]$

$\Leftrightarrow (A\ \Delta \{a\}) \subseteq (B\ \Delta \{a\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a\}) \supseteq (B \cap \{a\})]\ \&\ [(A \cup \{a\}) \subseteq (B \cup \{a\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a\})$ "orden de actividad"

Centro o mediana

$m(\{a\}, \{b\}, \{a, b\}) = \{b\} \sqcap^{\{a\}} \{a, b\} = \{a, b\}$

Volvemos a cambiar las reglas del juego:

- Átomos en $(P(E), \sqsubseteq^{\{a\}})$: $\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \varnothing \}$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

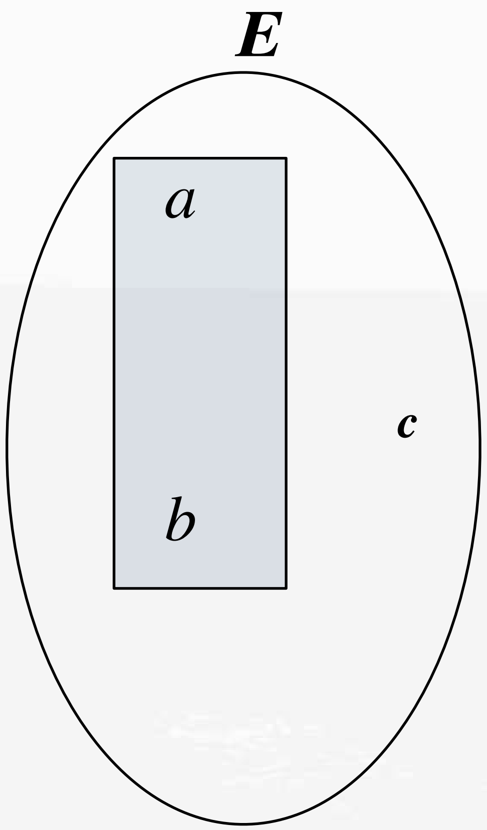
$v_{ab}(A) = |A| + 2$ sí ni a y ni b están en A.

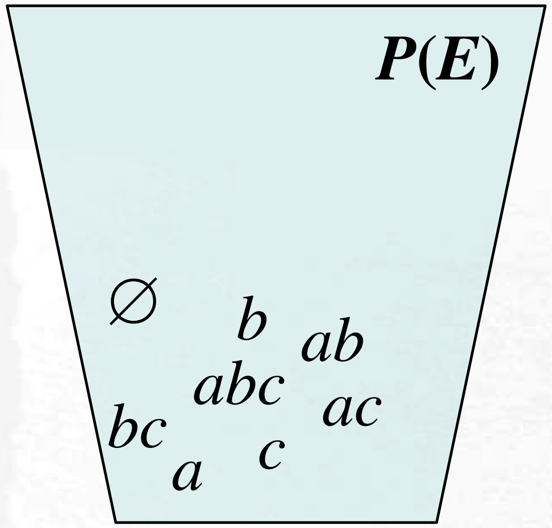
$v_{ab}(A) = |A|$ sí a está en A y b no está en A.

$v_{ab}(A) = |A|$ sí b está en A y a no está en A.

$v_{ab}(A) = |A| - 2$ sí a y b están en A.

($v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|$)





ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

$v_{ab}(A)= |A| + 2$ sí ni a y ni b están en A.

$v_{ab}(A)= |A|$ sí a está en A y b no está en A.

$v_{ab}(A)= |A|$ sí b está en A y a no está en A.

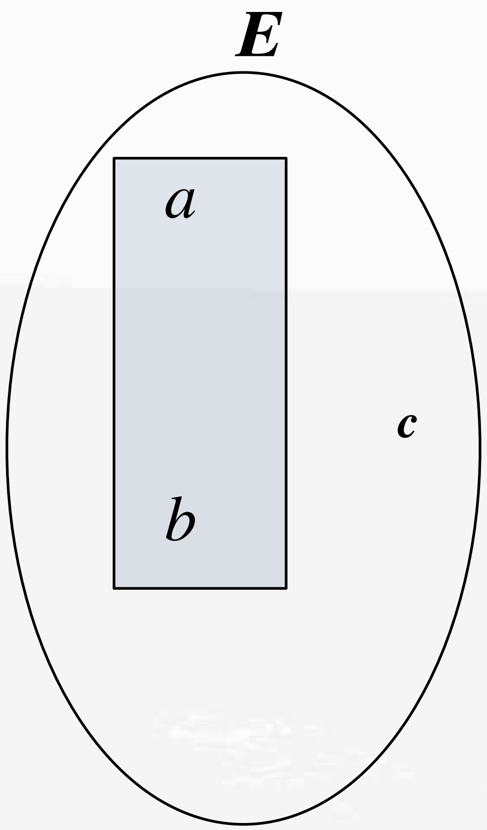
$v_{ab}(A)= |A| - 2$ sí a y b están en A.

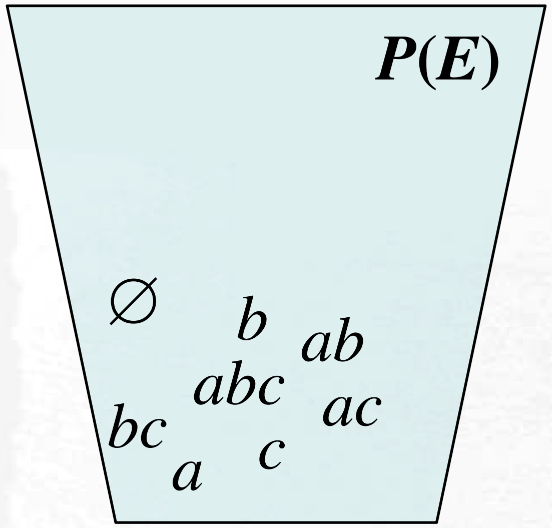
($v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|$)

$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Rightarrow v_{ab}(A) \leq v_{ab}(B)$

$v_{ab}(A \sqcup^{\{a, b\}} B) + v_{ab}(A \sqcap^{\{a, b\}} B) = v_{ab}(A) + v_{ab}(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}), v_{ab})$ espacio de medida?





$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Leftrightarrow$

$[(A \cup \{a, b\}) - (A \cap \{a, b\})] \subseteq [(B \cup \{a, b\}) - (B \cap \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(A \,\Delta \{a, b\}) \subseteq (B \,\Delta \{a, b\}) \Leftrightarrow$

$[(A \cap \{a, b\}) \supseteq (B \cap \{a, b\})]$ & $[(A \cup \{a, b\}) \subseteq (B \cup \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(B \cap \{a, b\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a, b\})$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

$v_{ab}(A) = |A| + 2$ si ni a y ni b están en A.

$v_{ab}(A) = |A|$ si a está en A y b no está en A.

$v_{ab}(A) = |A|$ si b está en A y a no está en A.

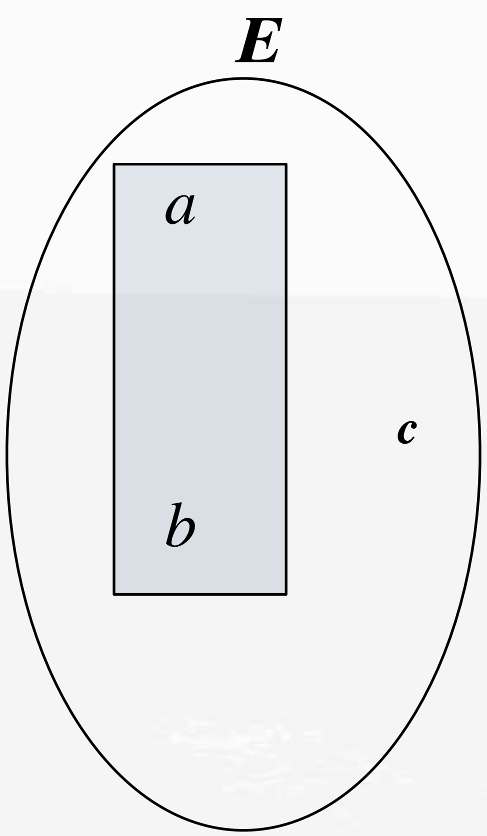
$v_{ab}(A) = |A| - 2$ si a y b están en A.

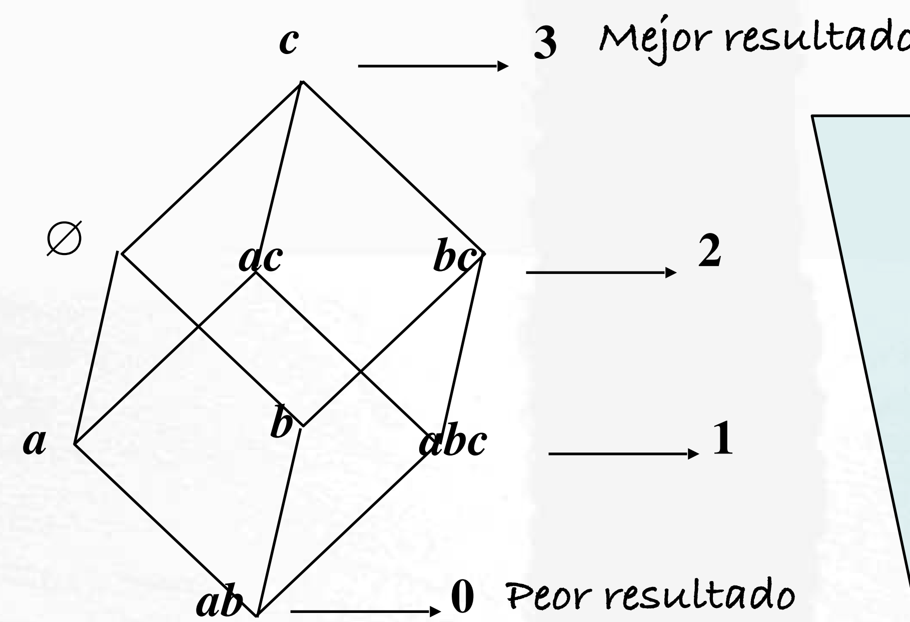
$(v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|)$

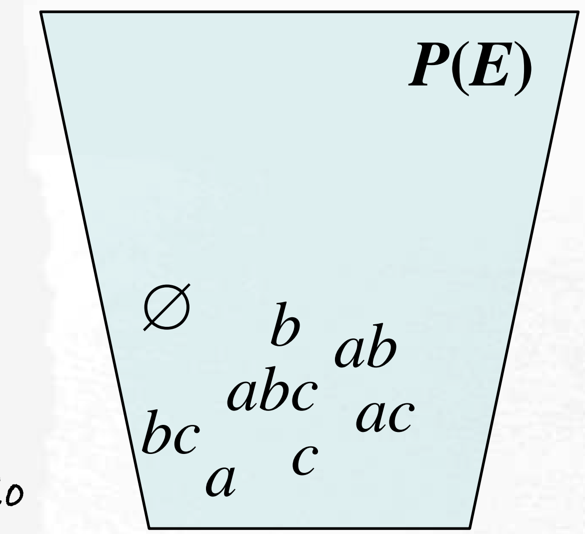
$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Rightarrow v_{ab}(A) \leq v_{ab}(B)$

$v_{ab}(A \sqcup^{\{a, b\}} B) + v_{ab}(A \sqcap^{\{a, b\}} B) = v_{ab}(A) + v_{ab}(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}), v_{ab})$ espacio de medida?







- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}, \sqcap^{\{a, b\}}, \sqcup^{\{a, b\}}, \{a, b\}, \{a, b\}^c), {}^c)$

$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Leftrightarrow$

$[(A \cup \{a, b\}) - (A \cap \{a, b\})] \subseteq [(B \cup \{a, b\}) - (B \cap \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(A \,\Delta \{a, b\}) \subseteq (B \,\Delta \{a, b\}) \Leftrightarrow$

$[(A \cap \{a, b\}) \supseteq (B \cap \{a, b\})]$ & $[(A \cup \{a, b\}) \subseteq (B \cup \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(B \cap \{a, b\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a, b\})$

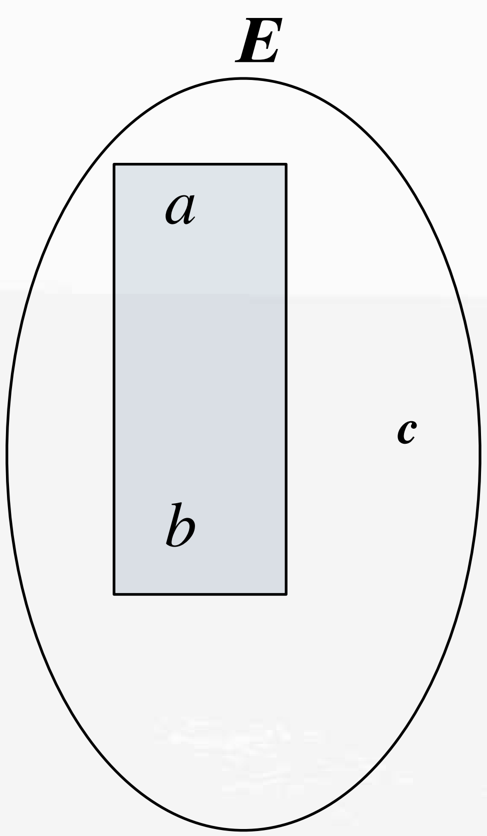
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

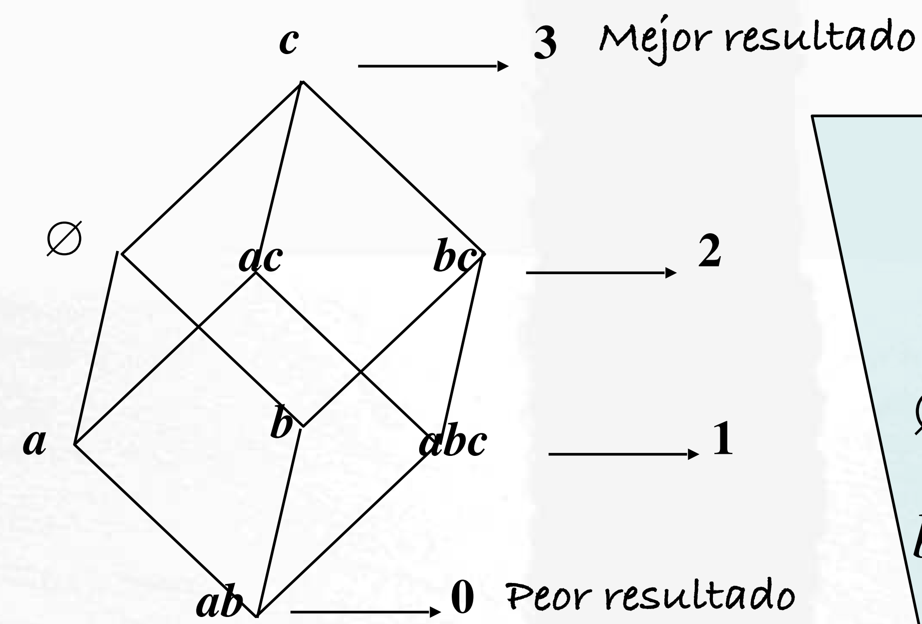
$v_{ab}(A) = |A| + 2$ si ni a y ni b están en A.
$v_{ab}(A) = |A|$ si a está en A y b no está en A.
$v_{ab}(A) = |A|$ si b está en A y a no está en A.
$v_{ab}(A) = |A| - 2$ si a y b están en A.
$(v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|)$

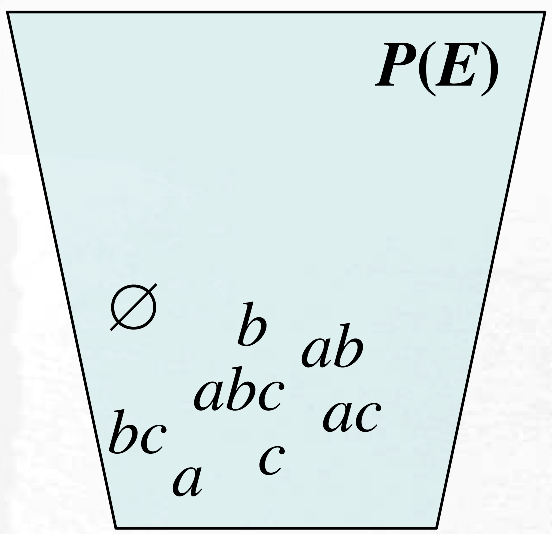
$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Rightarrow v_{ab}(A) \leq v_{ab}(B)$

$v_{ab}(A \sqcup^{\{a, b\}} B) + v_{ab}(A \sqcap^{\{a, b\}} B) = v_{ab}(A) + v_{ab}(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}), v_{ab})$ espacio de medida?







- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}, \sqcap^{\{a, b\}}, \sqcup^{\{a, b\}}, \{a, b\}, \{a, b\}^c), {}^c)$

$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Leftrightarrow$
$[(A \cup \{a, b\}) - (A \cap \{a, b\})] \subseteq [(B \cup \{a, b\}) - (B \cap \{a, b\})] \Leftrightarrow$
$(A \Delta \{a, b\}) \subseteq (B \Delta \{a, b\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a, b\}) \supseteq (B \cap \{a, b\})] \;\&\; [(A \cup \{a, b\}) \subseteq (B \cup \{a, b\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a, b\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a, b\})$

- $A \sqcap^{\{a, b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\}]$
- $A \sqcup^{\{a, b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\}^c)] = A \sqcap^{\{c\}} B$

Complementación: la misma ^{c} que en $(P(E), \subseteq)$

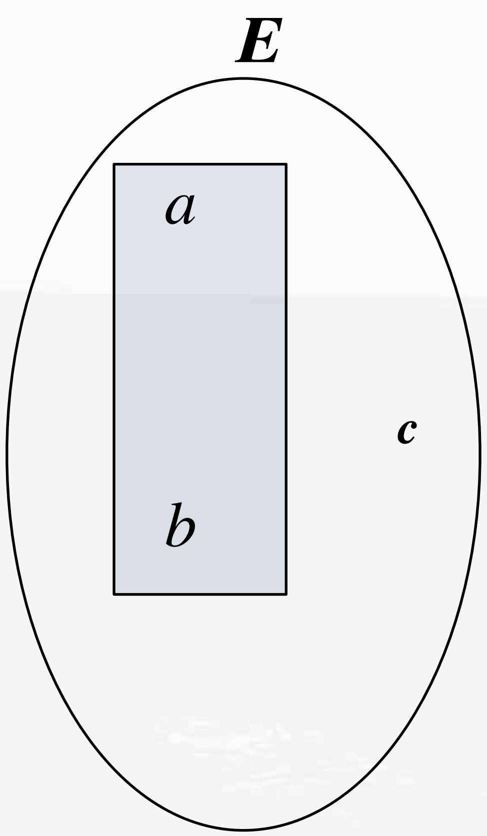
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

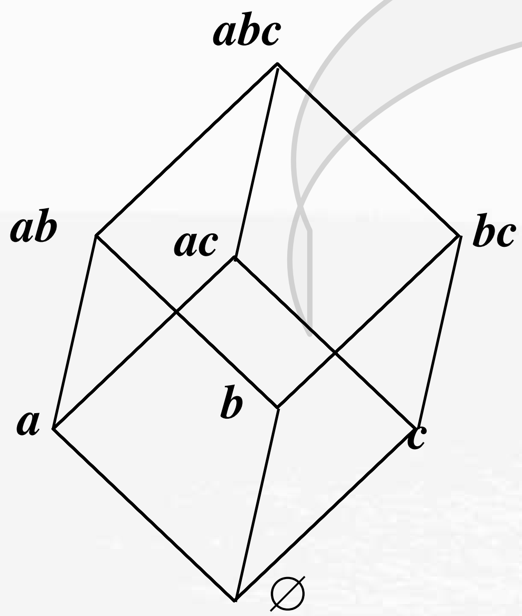
$v_{ab}(A) = |A| + 2$ si ni a y ni b están en A.
$v_{ab}(A) = |A|$ si a está en A y b no está en A.
$v_{ab}(A) = |A|$ si b está en A y a no está en A.
$v_{ab}(A) = |A| - 2$ si a y b están en A.
($v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|$)

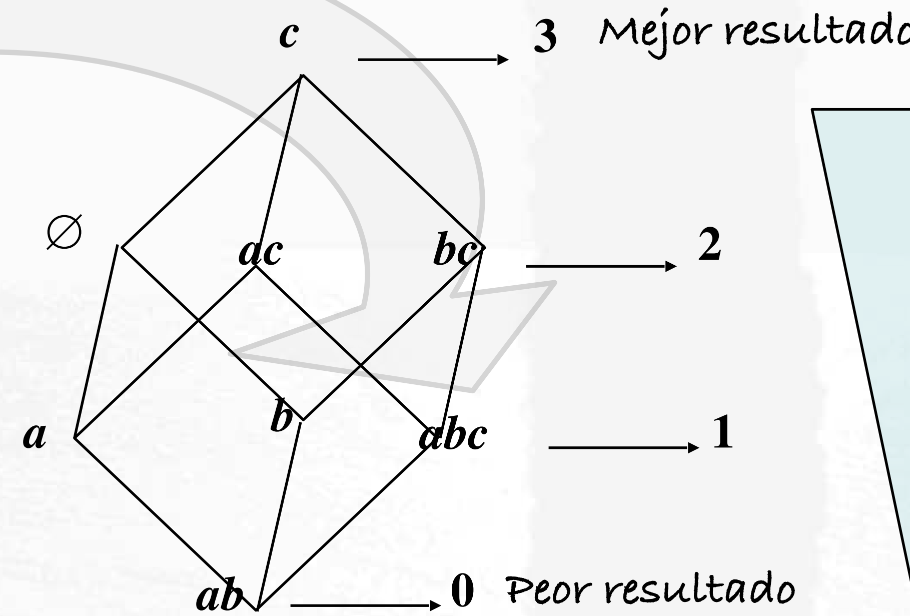
$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Rightarrow v_{ab}(A) \leq v_{ab}(B)$

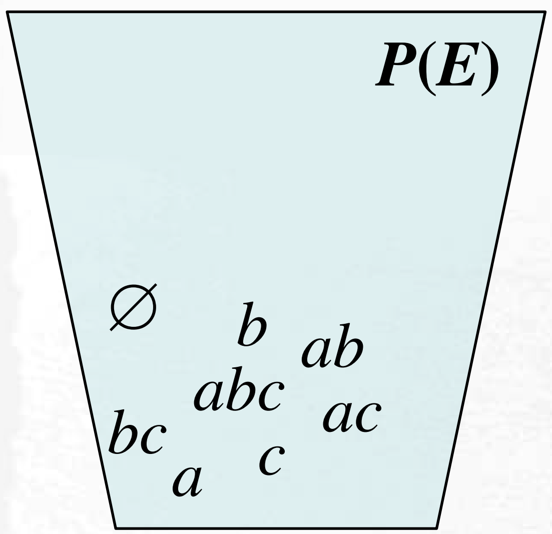
$v_{ab}(A \sqcup^{\{a, b\}} B) + v_{ab}(A \sqcap^{\{a, b\}} B) = v_{ab}(A) + v_{ab}(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}), v_{ab})$ espacio de medida?









- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a, b\}}, \sqcap^{\{a, b\}}, \sqcup^{\{a, b\}}, \{a, b\}, \{a, b\}^c), {}^c)$

$A \sqsubseteq^{\{a, b\}} B \Leftrightarrow$
$[(A \cup \{a, b\}) - (A \cap \{a, b\})] \subseteq [(B \cup \{a, b\}) - (B \cap \{a, b\})] \Leftrightarrow$
$(A \,\Delta\, \{a, b\}) \subseteq (B \,\Delta\, \{a, b\}) \Leftrightarrow$
$[(A \cap \{a, b\}) \supseteq (B \cap \{a, b\})]$ & $[(A \cup \{a, b\}) \subseteq (B \cup \{a, b\})] \Leftrightarrow$
$(B \cap \{a, b\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a, b\})$

- $A \sqcap^{\{a, b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\})]$
- $A \sqcup^{\{a, b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\}^c)] = A \sqcap^{\{c\}} B$

Complementación: la misma ^{c} que en $(P(E), \subseteq)$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

$v_{ab}(A) = |A| + 2$ si ni a y ni b están en A.

$v_{ab}(A) = |A|$ si a está en A y b no está en A.

$v_{ab}(A) = |A|$ si b está en A y a no está en A.

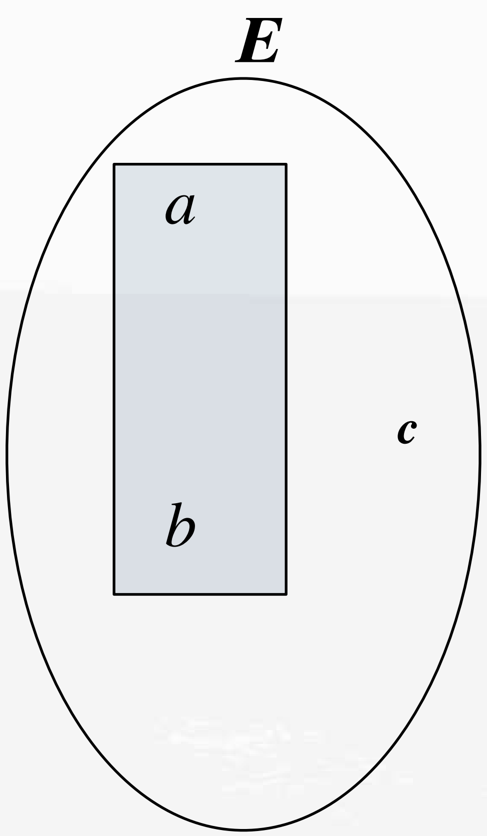
$v_{ab}(A) = |A| - 2$ si a y b están en A.

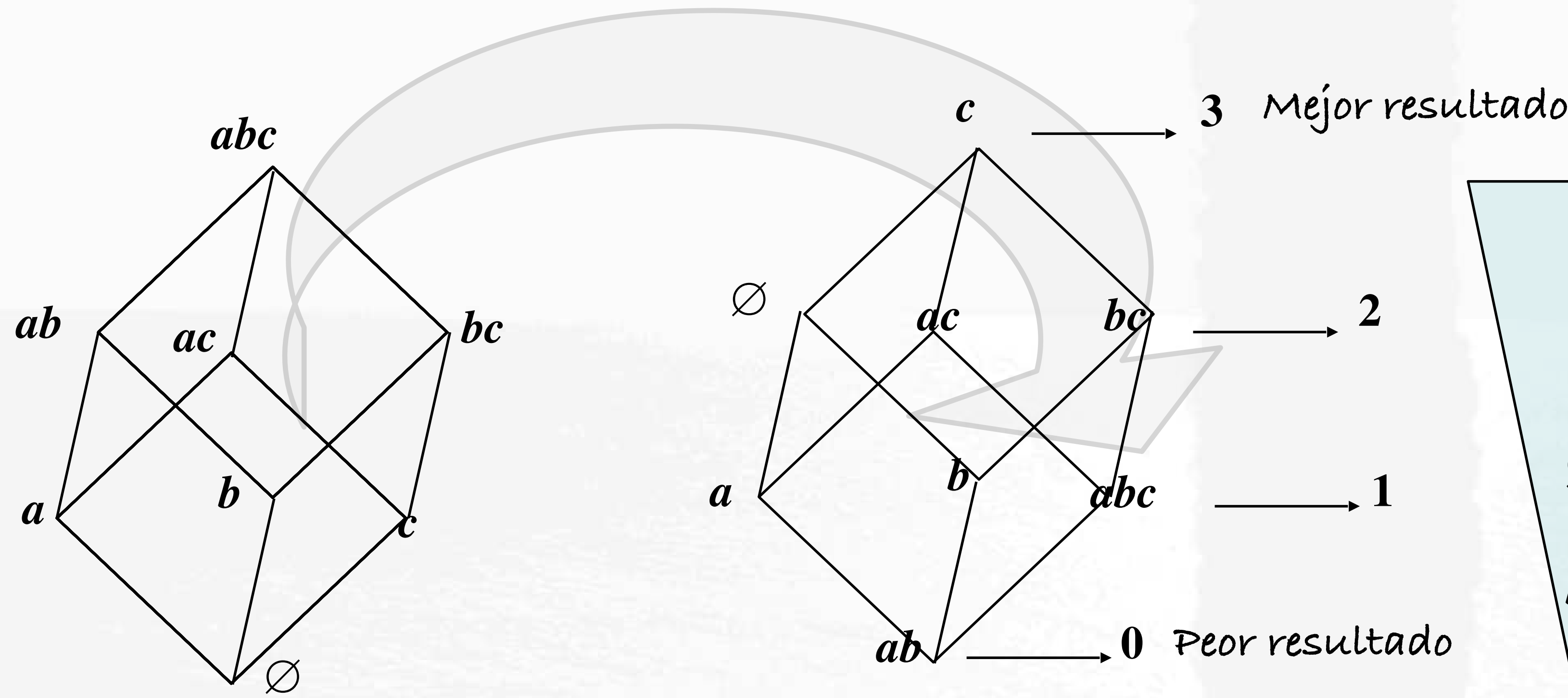
($v_{ab}(A) = |A \triangle \{a, b\}| = |A \cup \{a, b\}| - |A \cap \{a, b\}|$)

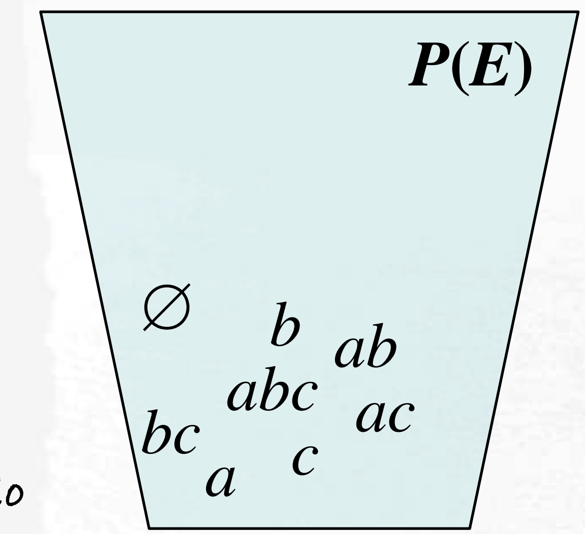
$A \sqsubseteq^{\{a,b\}} B \Rightarrow v_{ab}(A) \leq v_{ab}(B)$

$v_{ab}(A \sqcup^{\{a,b\}} B) + v_{ab}(A \sqcap^{\{a,b\}} B) = v_{ab}(A) + v_{ab}(B)$

$(E, (P(E), \sqsubseteq^{\{a,b\}}), v_{ab})$ espacio de medida?







- $((P(E), \sqsubseteq^{\{a,b\}}, \sqcap^{\{a,b\}}, \sqcup^{\{a,b\}}, \{a, b\}, \{a, b\}^c), {}^c)$

$A \sqsubseteq^{\{a,b\}} B \Leftrightarrow$

$[(A \cup \{a, b\}) - (A \cap \{a, b\})] \subseteq [(B \cup \{a, b\}) - (B \cap \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(A \ \Delta \{a, b\}) \subseteq (B \ \Delta \{a, b\}) \Leftrightarrow$

$[(A \cap \{a, b\}) \supseteq (B \cap \{a, b\})] \ \& \ [(A \cup \{a, b\}) \subseteq (B \cup \{a, b\})] \Leftrightarrow$

$(B \cap \{a, b\}) \subseteq A \subseteq (B \cup \{a, b\})$

- $A \sqcap^{\{a,b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\})]$
- $A \sqcup^{\{a,b\}} B = (A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap \{a, b\}^c)] = A \sqcap^{\{c\}} B$

Complementación: la misma ^{c} que en $(P(E), \subseteq)$

En general:

w-medidas

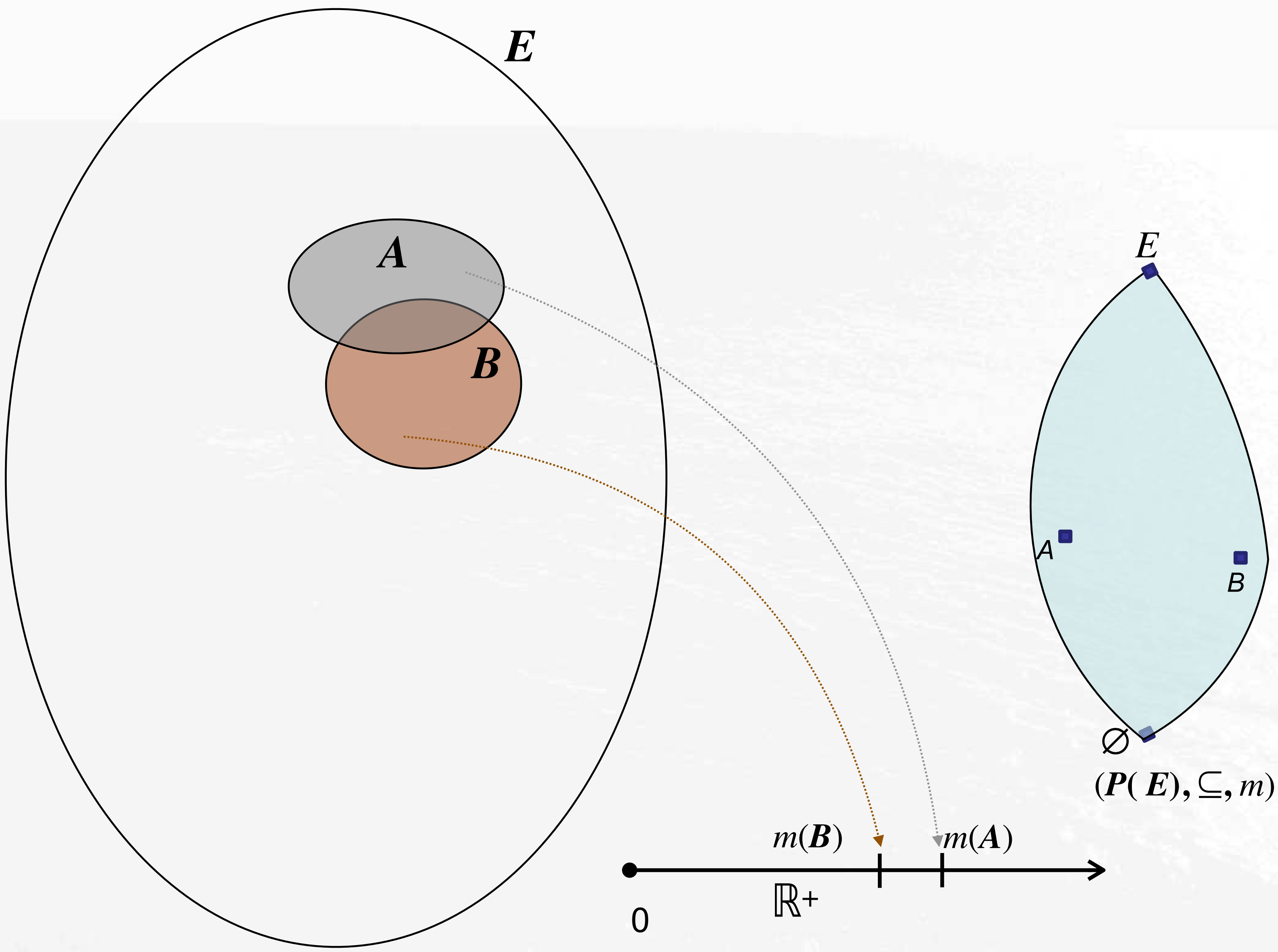
ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$.

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B) \ \forall (A, B)$

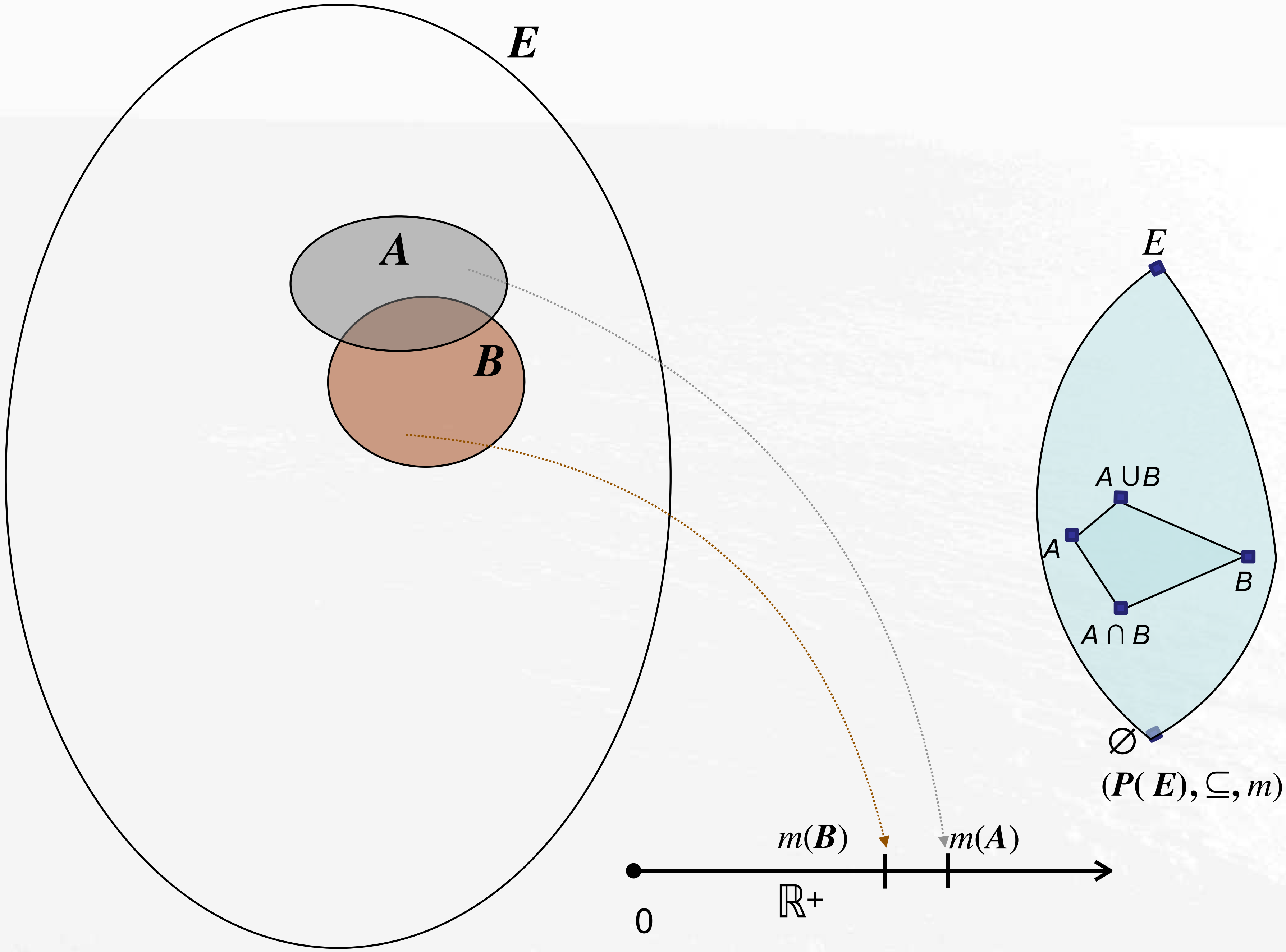


Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$.

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)\ \forall (A,B)$

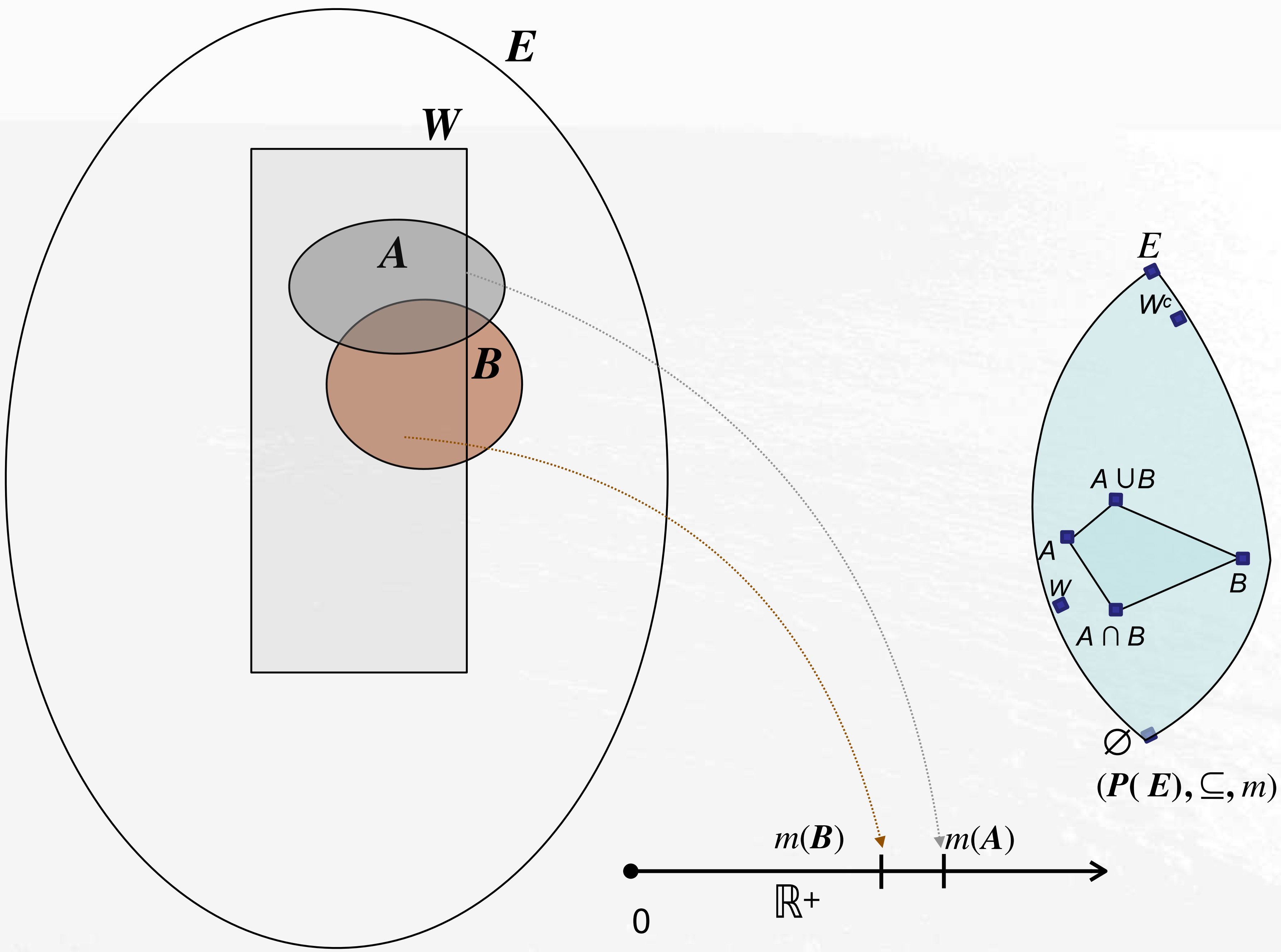


Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$.

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B) \ \forall (A,B)$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^{W})$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,
$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B) \;\forall (A,B)$

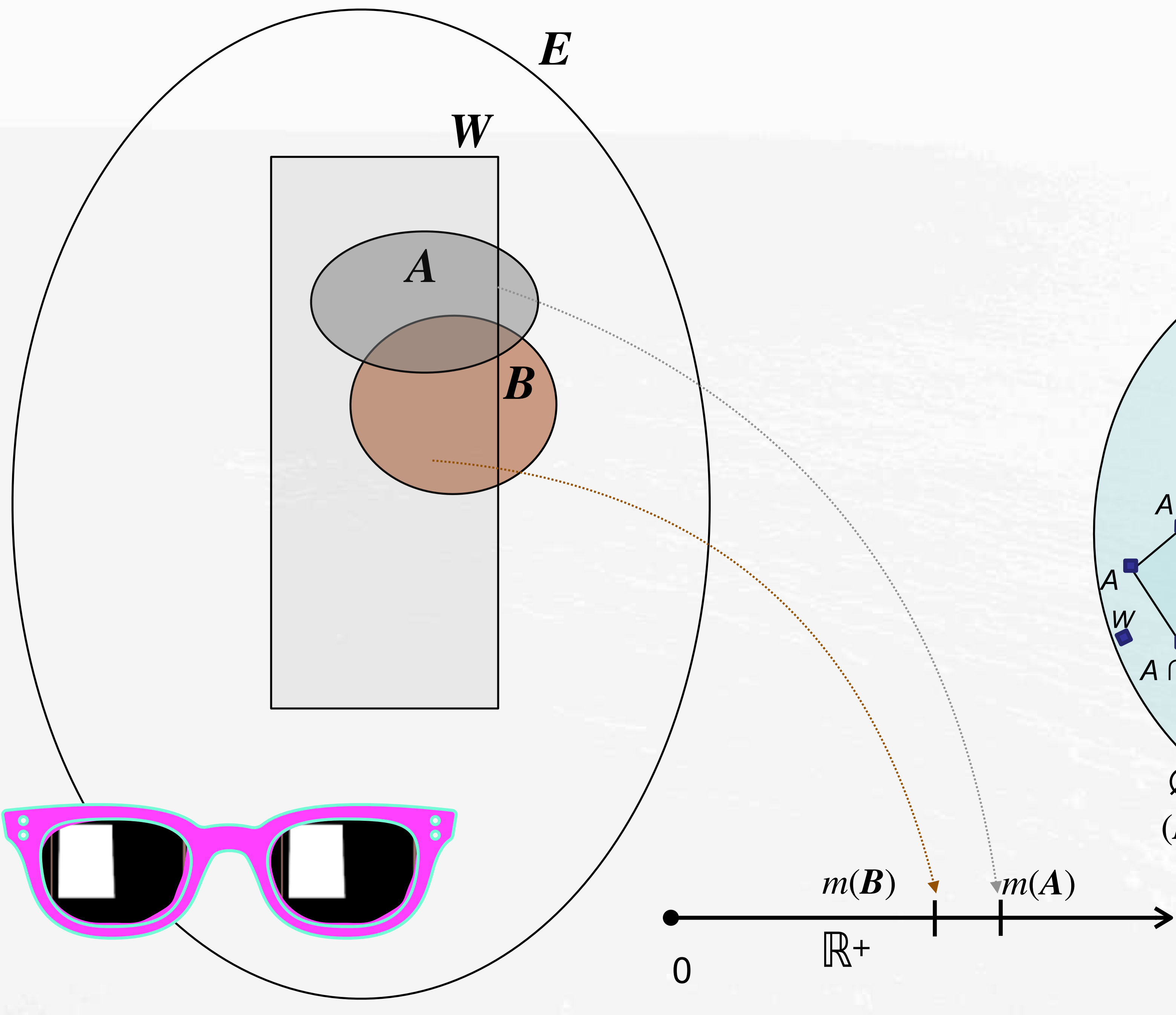
Sea $\boxed{m\colon P(E) \to \mathbb{R}^{+} \text{ una medida en } (P(E), \subseteq)}$.

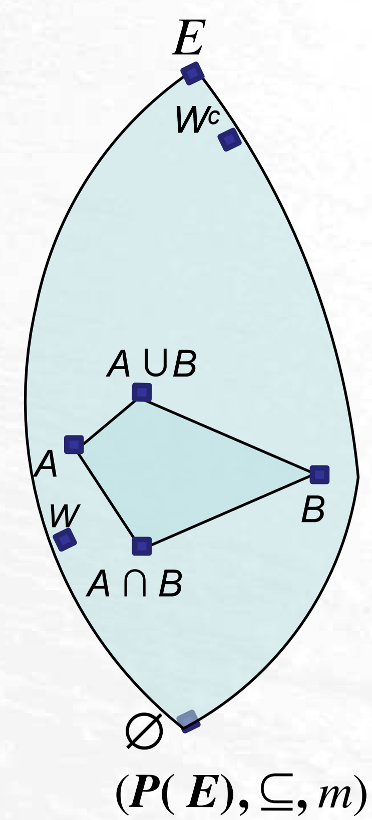
Para $W \in P(E)$ sea $\boxed{\widehat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^{+} \text{ definida mediante } \widehat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w}$, es decir, tal que $\widehat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^{W} B \Rightarrow \widehat{m}_W(A) \leq \widehat{m}_W(B)$.

Y además: $\widehat{m}_W(A \sqcap^{W} B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^{W} B) = \widehat{m}_W(A \cap B) + \widehat{m}_W(A \cup B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)$,

Nota. Más general: $\boxed{\widehat{m}_W(A \sqcap^{S} B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^{S} B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4}$.

(*) (Proposición en la siguiente transparencia)





ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea $\boxed{m: P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ una medida en } (P(E), \subseteq)}$.

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)\ \forall (A,B)$

Para $W \in P(E)$ sea $\boxed{\widehat{m}_W : P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ definida mediante } \widehat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w}$, es decir, tal que $\widehat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Rightarrow \widehat{m}_W(A) \leq \widehat{m}_W(B)$.

Y además: $\widehat{m}_W(A \sqcap^W B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^W B) = \widehat{m}_W(A \cap B) + \widehat{m}_W(A \cup B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)$,

Nota. Más general: $\boxed{\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4}$.

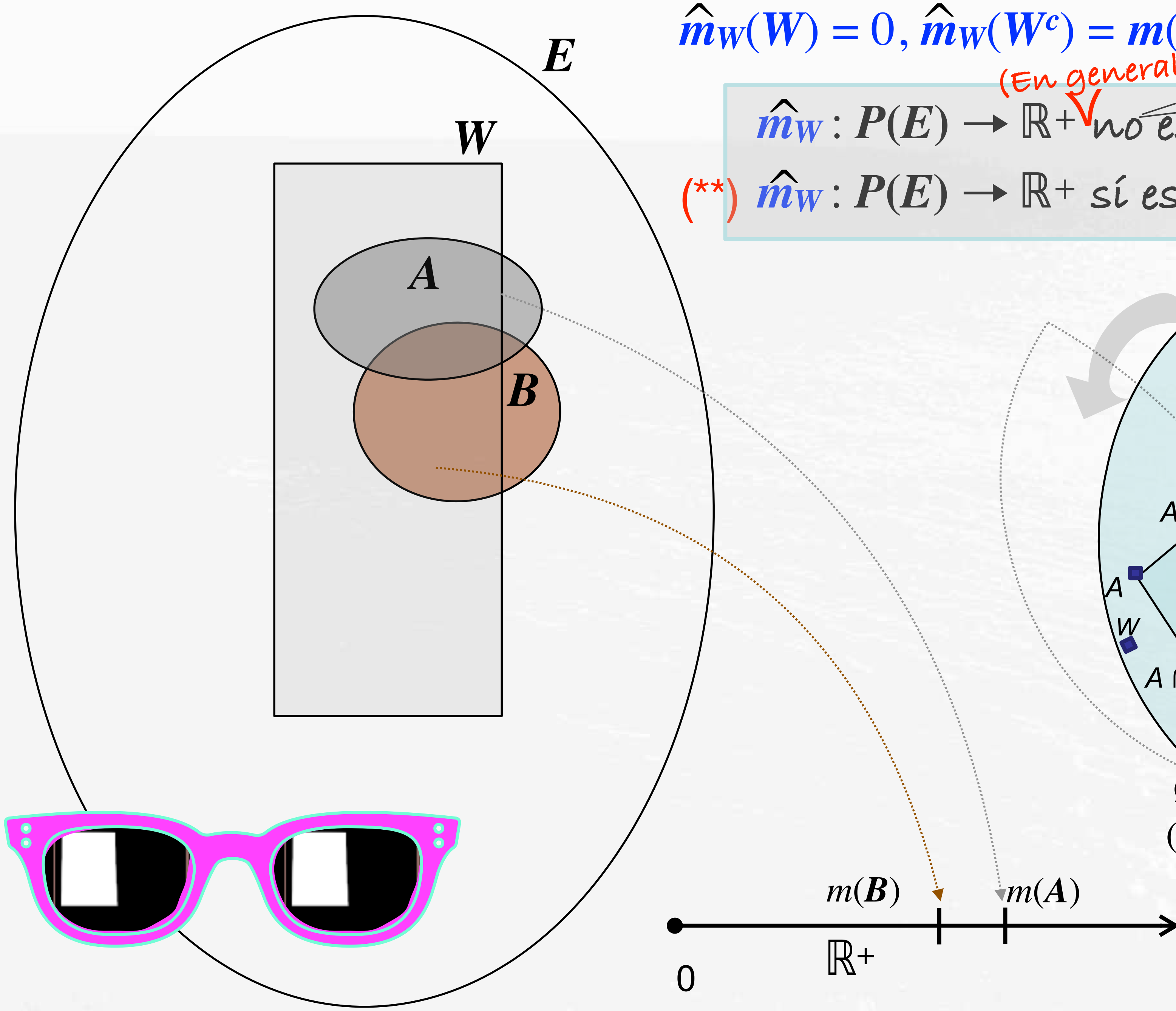
(*) (Proposición en la siguiente transparencia)

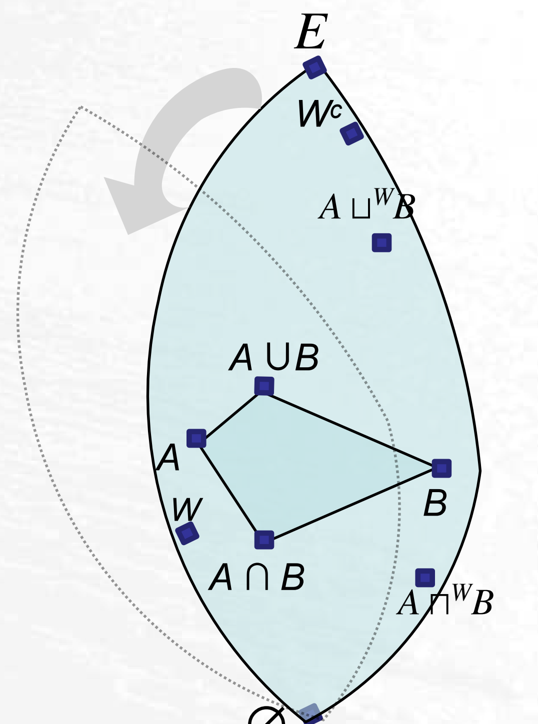
$\widehat{m}_W(W) = 0,\ \widehat{m}_W(W^c) = m(E),\ \widehat{m}_W(\varnothing) = m(W),\ \widehat{m}_W(E) = m(W^c)$.

(En general)

$\widehat{m}_W : P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ no es medida en $(P(E), \subseteq)$.

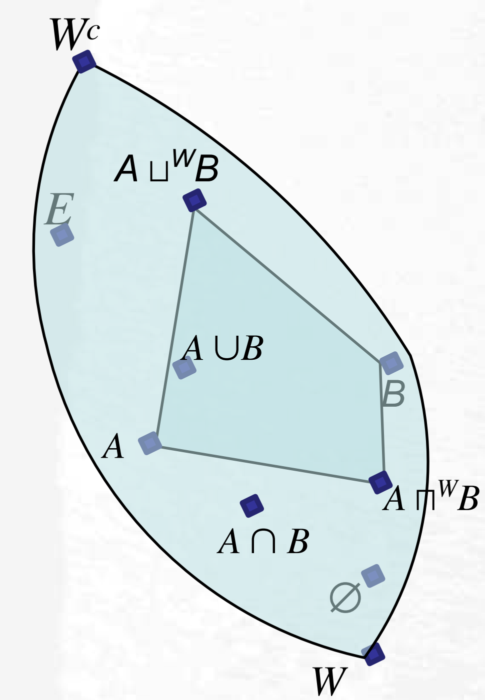
(**) $\widehat{m}_W : P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sí es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$





$(P(E), \subseteq, m)$

$(P(E), \subseteq, \widehat{m}_W)$



$(P(E), \sqsubseteq^W, \widehat{m}_W)$

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3275606

ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea $\boxed{m: P(E) \to \mathbb{R}^+ \text{ una medida en } (P(E), \subseteq).}$

Se verifica: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$,

$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B) \ \forall (A,B)$

Para $W \in P(E)$ sea $\boxed{\widehat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+ \text{ definida mediante } \widehat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w}$, es decir, tal que $\widehat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Rightarrow \widehat{m}_W(A) \leq \widehat{m}_W(B)$.

Y además: $\widehat{m}_W(A \sqcap^W B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^W B) = \widehat{m}_W(A \cap B) + \widehat{m}_W(A \cup B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)$,

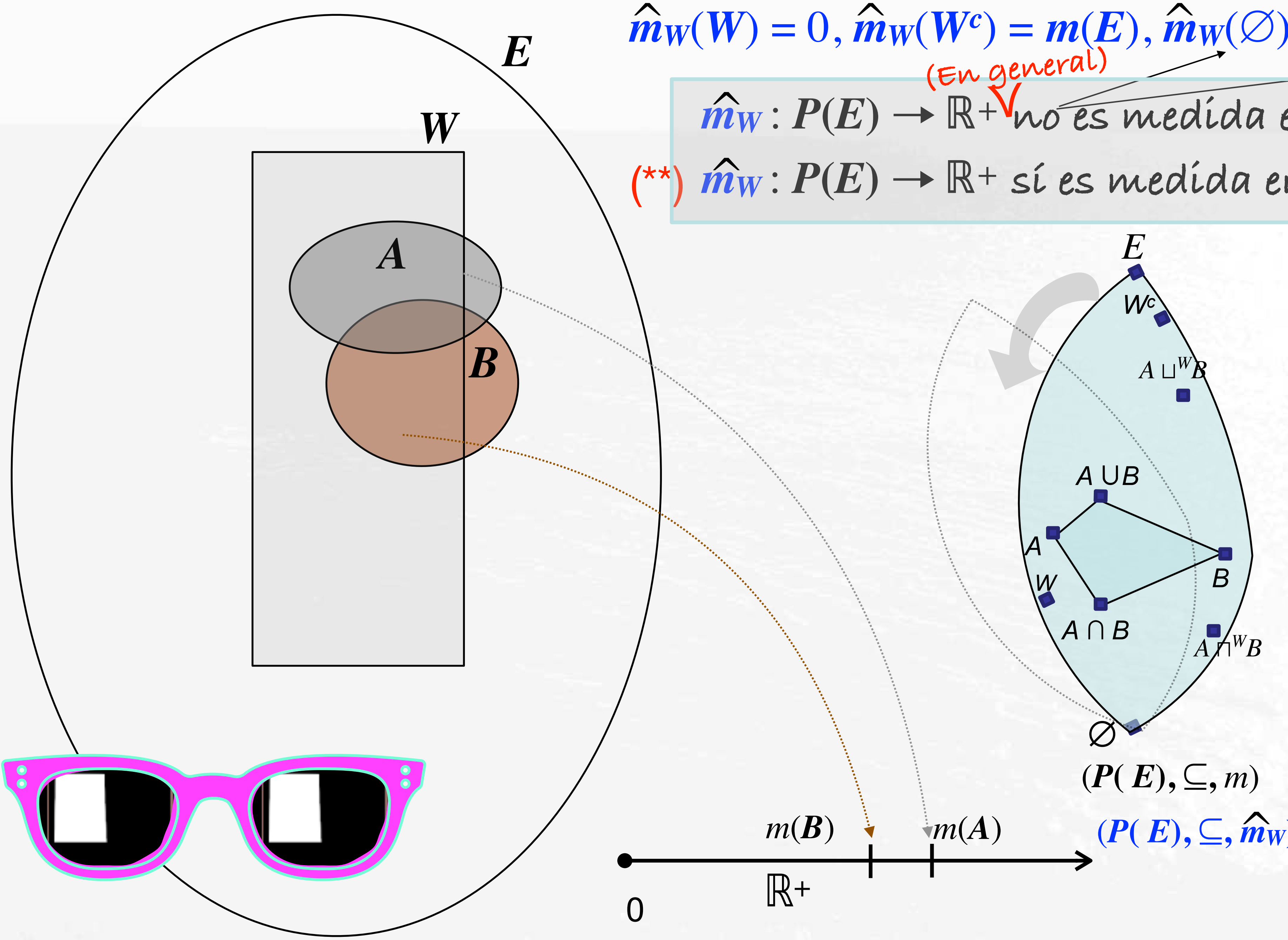
Nota. Más general: $\boxed{\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.}$ (*) (Proposición en la siguiente transparencia)

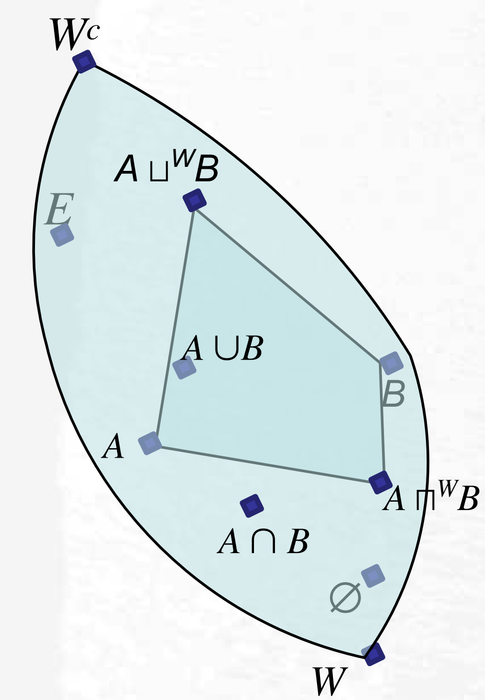
$\widehat{m}_W(W) = 0$, $\widehat{m}_W(W^c) = m(E)$, $\widehat{m}_W(\varnothing) = m(W)$, $\widehat{m}_W(E) = m(W^c)$.

(En general)

$\widehat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ no es medida en $(P(E), \subseteq)$. ¿w-medida?

(**) $\widehat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ sí es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$





$(P(E), \sqsubseteq^W, \widehat{m}_W)$

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3275606

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si m: $P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E), \subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E),\subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0\circ m\circ\varphi_w = m\circ\varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W,S,A,B) \in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W) .$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W) .$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E),\subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0\circ m\circ\varphi_w = m\circ\varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B)\quad \forall (W,S,A,B)\in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)\,.$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)\,.$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = 2\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cap B)\cap W^c) +$$

$$2\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cap B^c\cap W)$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si m: $P(E) \to \mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E), \subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \triangle W] =$

$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S^c \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$

$$\underline{m[(A \cap B) \cap W^c]} + \underline{m[(A \cup B) \cap S^c \cap W^c]} - \underline{m(A \cap B \cap S^c \cap W^c)} +$$

$$\underline{m[(A^c \cup B^c) \cap S \cap W]} + \underline{m(A^c \cap B^c \cap W)} - \underline{m(A^c \cap B^c \cap S \cap W)}\ .$$

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \triangle W] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$

$$\underline{m(A \cap B \cap W^c)} + \underline{m[(A \cup B) \cap S \cap W^c]} - \underline{m(A \cap B \cap S \cap W^c)} +$$

$$\underline{m[(A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W]} + \underline{m(A^c \cap B^c \cap W)} - \underline{m(A^c \cap B^c \cap S^c \cap W)}\ .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = 2 \cdot \underline{m(A \cap B \cap W^c)} + \underline{m[(A \cup B) \cap W^c]} - \underline{m(A \cap B) \cap W^c)} +$$

$$2 \cdot \underline{m(A^c \cap B^c \cap W)} + \underline{m[(A^c \cup B^c) \cap W]} - \underline{m(A^c \cap B^c \cap W)}$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E), \subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \triangle W] =$

$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S^c \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$

$$m[(A \cap B) \cap W^c] + m[(A \cup B) \cap S^c \cap W^c] - m(A \cap B \cap S^c \cap W^c) +$$

$$m[(A^c \cup B^c) \cap S \cap W] + m(A^c \cap B^c \cap W) - m(A^c \cap B^c \cap S \cap W) .$$

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \triangle W] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$

$$m(A \cap B \cap W^c) + m[(A \cup B) \cap S \cap W^c] - m(A \cap B \cap S \cap W^c) +$$

$$m[(A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W] + m(A^c \cap B^c \cap W) - m(A^c \cap B^c \cap S^c \cap W) .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \cancel{2} \cdot m(A \cap B \cap W^c) + m[(A \cup B) \cap W^c] - m(A \cancel{\cap B}) \cap W^c) +$$

$$\cancel{2} \cdot m(A^c \cap B^c \cap W) + m[(A^c \cup B^c) \cap W] - m(A^c \cancel{\cap B^c} \cap W)$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E),\subseteq)$ y $\hat{m}_W: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w = m\circ\varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)\quad \forall (W,S,A,B)\in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W) .$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W) .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cancel{\cap B)}\cap W^c) +$$

$$\cancel{2}\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) = m(A\cap B\cap W^c) +$$

$$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) - m(A\cap B\cap W^c) + m(A^c\cap B^c\cap W) + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap W)$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m\colon P(E)\to\mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E),\subseteq)$ y $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0\circ m\circ\varphi_w = m\circ\varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W,S,A,B)\in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\,\triangle\, W] =$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)\,.$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\,\triangle\, W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)\,.$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cancel{\cap B})\cap W^c) +$$

$$\cancel{2}\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) \;=\; m(A\cancel{\cap B}\cap W^c) +$$

$$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) - m(A\cap\cancel{B}\cap W^c) + m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) - m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W)$$

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ los órdenes de actividad asociados a los subconjuntos W y S de E. Si $m: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es una medida en $(P(E),\subseteq)$ y $\hat{m}_W: P(E)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W = \varphi_0\circ m\circ\varphi_w = m\circ\varphi_w$ asociada al Álgebra de Boole $(P(E),\sqsubseteq^W)$, entonces se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W,S,A,B)\in P(E)^4.$$

Demostración. $\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)\,.$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)\cup(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c)\cup((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W)\cup(A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)\,.$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cancel{\cap B})\cap W^c) +$$

$$\cancel{2}\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) \;=\; m(A\cancel{\cap B}\cap W^c) +$$

$$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) - m(A\cancel{\cap B}\cap W^c) + m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) - m(A^c\cancel{\cap B^c}\cap W) \;=$$

$$m[(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)] + m[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)] = m(A\triangle W) + m(B\triangle W) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B).\blacksquare$$

Una versión más general de la proposición anterior :

Supremo en L^E

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1),')\to\mathbb{R}^+$ tal que $m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2$.

Suma en $[0,+\infty[$

Sea una función m: $(L^E, \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A \cdot B) + m(A+B) = m(A) + m(B)}^{(*)}$ $\forall (A, B) \in (L^E)^2$.

<u>Proposición</u>. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c = W'$, $S^c = S'$). Si m: $(L^E, \leq) \rightarrow \mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\widehat{m}_W : (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\widehat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$ asociada al retículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)} \quad \forall (W, S) \in (N(L^E))^2 \quad \forall (A, B) \in (L^E)^2.$$

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1),')\rightarrow\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B) + m(A+B) = m(A) + m(B)}^{(*)}$ $\forall(A,B)\in(L^E)^2$.

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\leq)\rightarrow\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\rightarrow\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

Demostración. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)\overset{\text{Supremo en }L^E}{+}(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$

$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\overset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$

$$m[(A\cdot B)\cdot W^c]+m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)+$$

$$m[(A'+B')\cdot S\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)\,.$$

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1,')\to\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)}^{(*)}$ $\forall\,(A,B)\in(L^E)^2$.

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\leq)\to\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

Demostración. Se verifica:

Supremo en L^E

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]+m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Suma en $[0,+\infty[$

$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B)\cdot W^c]+m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)\,.$$

Por otra parte: $\hat{m}_W(A\sqcap^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\triangle W]=$

$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Supremo en L^E

$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)]+m[(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Suma en $[0,+\infty[$

$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S^c\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m(A\cdot B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot S\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S^c\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S^c\cdot W)\,.$$

Sea una función $m:(L^E,\le,\cdot,+,0,1,')\to\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)}^{(*)}$ $\forall\,(A,B)\in(L^E)^2$.

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\le)\to\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

Demostración. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)\overset{\text{Supremo en }L^E}{+}(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\overset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$\underline{m[(A\cdot B)\cdot W^c]}+\underline{m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]}-\underline{m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)}+$$
$$\underline{m[(A'+B')\cdot S\cdot W]}+\underline{m(A'\cdot B'\cdot W)}-\underline{m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)}\ .$$

Por otra parte: $\hat{m}_W(A\sqcap^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\triangle W]=$

$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)\overset{\text{Supremo en }L^E}{+}(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\overset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S^c\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$\underline{m(A\cdot B\cdot W^c)}+\underline{m[(A+B)\cdot S\cdot W^c]}-\underline{m(A\cdot B\cdot S\cdot W^c)}+$$
$$\underline{m[(A'+B')\cdot S^c\cdot W]}+\underline{m(A'\cdot B'\cdot W)}-\underline{m(A'\cdot B'\cdot S^c\cdot W)}\ .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=2\overset{\text{Producto en }[0,+\infty[}{\cdot}\,\underline{m(A\overset{\text{ínfimo en }L^E}{\cdot}B\cdot W^c)}+\underline{m[(A+B)\cdot W^c]}\ \underline{-m(A\cdot B)\cdot W^c)+}$$
$$2\cdot\underline{m(A'\cdot B'\cdot W)}+\underline{m[(A'+B')\cdot W]}-\underline{m(A'\cdot B'\cdot W)}$$

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1),')\to\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)}^{(*)}$ $\forall\,(A,B)\in(L^E)^2$.

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\leq)\to\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

Demostración. Se verifica:

Supremo en L^E

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]+m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Suma en $[0,+\infty[$

$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B)\cdot W^c]+m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)\;.$$

Por otra parte: $\hat{m}_W(A\sqcap^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\triangle W]=$
$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Supremo en L^E

$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)]+m[(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$

Suma en $[0,+\infty[$

$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S^c\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m(A\cdot B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot S\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S^c\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S^c\cdot W)\;.$$

Luego,

Producto en $[0,+\infty[$ ínfimo en L^E

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\cancel{2}\cdot m(A\cdot B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot W^c]-m(A\cdot \cancel{B)\cdot W^c})+$$
$$\cancel{2}\cdot m(A'\cdot B'\cdot W)+m[(A'+B')\cdot W]-m(A'\cdot \cancel{B'}\cdot W)$$

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1,{}')\to\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)}^{(*)}$ $\forall\,(A,B)\in(L^E)^2$.

<u>Proposición</u>. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\leq)\to\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

<u>Demostración</u>. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)\overset{\text{Supremo en }L^E}{+}(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\overset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B)\cdot W^c]+m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)\,.$$

Por otra parte: $\hat{m}_W(A\sqcap^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\triangle W]=$
$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)\overset{\text{Supremo en }L^E}{+}(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\overset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S^c\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m(A\cdot B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot S\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S^c\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S^c\cdot W)\,.$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\cancel{2}\overset{\text{Producto en }[0,+\infty[}{\cdot}\,m(A\overset{\text{ínfimo en }L^E}{\cdot}B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot W^c]-m(A\cdot \cancel{B)\cdot W^c})+$$
$$\cancel{2}\cdot m(A'\cdot B'\cdot W)+m[(A'+B')\cdot W]-m(A'\cancel{\cdot B'}\cdot W)\;=\;m(A\cdot B\cdot W^c)+$$
$$m(A\cdot W^c)+m(B\cdot W^c)-m(A\cdot B\cdot W^c)+m(A'\cdot B'\cdot W)+m(A'\cdot W)+m(B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot W)$$

Sea una función $m:(L^E,\leq,\cdot,+,0,1,')\to\mathbb{R}^+$ tal que $\boxed{m(A\cdot B)+m(A+B)=m(A)+m(B)}^{(*)}$ $\forall\,(A,B)\in(L^E)^2$.

Proposición. Sean $\sqsubseteq^W$ y $\sqsubseteq^S$ órdenes de actividad asociados a W y S pertenecientes a $N(L^E)$, (es decir tales que $W^c=W'$, $S^c=S'$). Si $m:(L^E,\leq)\to\mathbb{R}^+$ verifica (*) y $\hat{m}_W:(L^E,\sqsubseteq^W)\to\mathbb{R}^+$ es la correspondiente función $\hat{m}_W=\varphi_0\circ m\circ\varphi_w=m\circ\varphi_w$ asociada al retículo $(L^E,\sqsubseteq^W)$, entonces:

$$\boxed{\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B)}\quad\forall(W,S)\in(N(L^E))^2\quad\forall(A,B)\in(L^E)^2.$$

Demostración. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)\overset{\text{Supremo en } L^E}{+}(S^c\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\triangle W]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)+(((A'+B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S^c\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\underset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'\cdot B')\cdot(S+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S^c\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B)\cdot W^c]+m[(A+B)\cdot S^c\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S^c\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S\cdot W)\,.$$

Por otra parte: $\hat{m}_W(A\sqcap^S B)=\hat{m}_W[(A\cdot B)+(S\cdot(A+B))]=m[((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\triangle W]=$

$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)\underset{\text{Supremo en } L^E}{+}(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(((A\cdot B)+(S\cdot(A+B)))\cdot W^c)]\underset{\text{Suma en }[0,+\infty[}{+}m[(((A'+B')\cdot(S^c+(A'\cdot B')))\cdot W)]=$$
$$m[(A\cdot B\cdot W^c)+((A+B)\cdot S\cdot W^c)]+m[((A'+B')\cdot S^c\cdot W)+(A'\cdot B'\cdot W)]=$$
$$m(A\cdot B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot S\cdot W^c]-m(A\cdot B\cdot S\cdot W^c)+$$
$$m[(A'+B')\cdot S^c\cdot W]+m(A'\cdot B'\cdot W)-m(A'\cdot B'\cdot S^c\cdot W)\,.$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B)+\hat{m}_W(A\sqcup^S B)=\cancel{2}\overset{\text{Producto en }[0,+\infty[}{\cdot}\,m(A\overset{\text{ínfimo en } L^E}{\cdot}B\cdot W^c)+m[(A+B)\cdot W^c]-\cancel{m(A\cdot B\cdot W^c)}+$$
$$\cancel{2}\cdot m(A'\cdot B'\cdot W)+m[(A'+B')\cdot W]-\cancel{m(A'\cdot B'\cdot W)}\;=\;\cancel{m(A\cdot B\cdot W^c)}+$$
$$m(A\cdot W^c)+m(B\cdot W^c)-\cancel{m(A\cdot B\cdot W^c)}+\cancel{m(A'\cdot B'\cdot W)}+m(A'\cdot W)+m(B'\cdot W)-\cancel{m(A'\cdot B'\cdot W)}\;=$$
$$m[(A\cdot W^c)+(A'\cdot W)]+m[(B\cdot W^c)+(B'\cdot W)]=m(A\triangle W)+m(B\triangle W)=\hat{m}_W(A)+\hat{m}_W(B).\blacksquare$$

Orden de actividad y cardinalidad de subconjuntos borrosos

Hemos mencionado la definición de cardinal borrosos:

Sea E un referencial de cardinal finito: $|E|<+\infty$, sea $([0,1]^E, \leq),')$ el retículo de sus subconjuntos borrosos con una negación fuerte y sea $\|.\|:[0,1]^E \rightarrow [0,+\infty]$ la aplicación "cardinal borroso" tal que, (si $\sum$ representa la "suma" usual en $[0,+\infty[$), viene dada por

$$\|A\| = \sum_{x\in E} A(x) = \sum_{x\in Sop(A)} A(x) \quad \forall A\in[0,1]^E.$$

Suma en $[0,+\infty[$

Es una aplicación entre retículos (concretamente entre el retículo $([0,1]^E, \leq)$ y la cadena $([0,+\infty], \leq)$). Si $W\in[0,1]^E$ es nítido entonces $\|A\| = |A|$.

Hemos mencionado la definición de cardinal borrosos:

Sea E un referencial de cardinal finito: $|E|<+\infty$, sea $([0,1]^E, \leq), ')$ el retículo de sus subconjuntos borrosos con una negación fuerte y sea $\|.\|:[0,1]^E \rightarrow [0,+\infty]$ la aplicación "cardinal borroso" tal que, (si $\sum$ representa la "suma" usual en $[0,+\infty[$), viene dada por

$$\|A\| = \sum_{x\in E} A(x) = \sum_{x\in Sop(A)} A(x) \quad \forall A\in[0,1]^E.$$

Suma en $[0,+\infty[$

Es una aplicación entre retículos (concretamente entre el retículo $([0,1]^E, \leq)$ y la cadena $([0,+\infty], \leq)$). Si $W\in[0,1]^E$ es nítido entonces $\|A\|=|A|$.

<u>Definición</u>. Sea E un referencial finito y sean $0\in[0,1]$ y W un nítido de E, $(W^c=W')$. Llamaremos "w-cardinalidad" $\|\hat{A}\|_{(W,0)}$ de $A\in[0,1]^E$ a la extensión de $\|A\|$ desde la perspectiva de W. Es decir:

$$\|\hat{A}\|_{(W,0)} = \|A\Delta W\|\Delta 0 = \|A\Delta W\| = \|A\cdot W^c + A'\cdot W\| = \|A\cdot W^c\| + \|A'\cdot W\| = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W} A'(x).$$

Supremo en $[0,1]^E$ Suma en $[0,+\infty[$

<u>Nota1</u>. Si $':[0,1]\rightarrow[0,1]$ es la negación de Zadeh tal que $s'=1-s$ $\forall s\in[0,1]$ entonces:

$$\|\hat{A}\|_{(W,0)} = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W}(1-A(x)) = \sum_{x\in W^c} A(x) + |W| - \sum_{x\in W} A(x)) = \|A\| + |W| - 2\sum_{x\in W} A(x)).$$

Hemos mencionado la definición de cardinal borrosos:

Sea E un referencial de cardinal finito: $|E|<+\infty$, sea $([0,1]^E, \leq),')$ el retículo de sus subconjuntos borrosos con una negación fuerte y sea $\|.\|:[0,1]^E \to [0,+\infty]$ la aplicación "cardinal borroso" tal que, (si $\sum$ representa la "suma" usual en $[0,+\infty[$), viene dada por

$$\|A\| = \underset{\text{Suma en } [0,+\infty[}{\sum_{x\in E}} A(x) = \sum_{x\in Sop(A)} A(x) \quad \forall A\in[0,1]^E.$$

Es una aplicación entre retículos (concretamente entre el retículo $([0,1]^E, \leq)$ y la cadena $([0,+\infty], \leq)$). Si $W\in[0,1]^E$ es nítido entonces $\|A\|=|A|$.

<u>Definición</u>. Sea E un referencial finito y sean $o\in[0,1]$ y W un nítido de E, $(w^c=w')$. Llamaremos "w-cardinalidad" $\|\hat{A}\|_{(w,o)}$ de $A\in[0,1]^E$ a la extensión de $\|A\|$ desde la perspectiva de W. Es decir:

$$\|\hat{A}\|_{(w,o)} = \|A\Delta W\|\Delta o = \|A\Delta W\| = \|A\cdot W^c \underset{\text{Supremo en } [0,1]^E}{+} A'\cdot W\| = \|A\cdot W^c\| \underset{\text{Suma en } [0,+\infty[}{+} \|A'\cdot W\| = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W} A'(x).$$

<u>Nota1</u>. Si $':[0,1]\to[0,1]$ es la negación de Zadeh tal que $s'=1-s \quad \forall s\in[0,1]$ entonces:

$$\|\hat{A}\|_{(w,o)} = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W}(1-A(x)) = \sum_{x\in W^c} A(x) + |W| - \sum_{x\in W} A(x)) = \|A\| + |W| - 2\sum_{x\in W} A(x)).$$

<u>Nota2</u>. Se verifica : $\boxed{\|A \hat{\sqcup}^W B\|_{(w,o)} + \|A \hat{\sqcap}^W B\|_{(w,o)} = \|\hat{A}\|_{(w,o)} + \|\hat{B}\|_{(w,o)}}$ $\forall W\in\{0,1\}^E \quad \forall (A,B)\in[0,1]^E \times [0,1]^E$

$\boxed{(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\|\hat{A}\|_{(w,o)} \leq \|\hat{B}\|_{(w,o)})}$ $\boxed{\|\hat{A}^c\|_{(w,o)} = |E| - \|\hat{A}\|_{(w,o)}}$ $\forall A\in[0,1]^E$

$$\boxed{\|\hat{W}\|_{(w,o)} = 0, \ \|\hat{W}^c\|_{(w,o)} = |E|}$$

Hemos mencionado la definición de cardinal borrosos:

Sea E un referencial de cardinal finito: $|E|<+\infty$, sea $([0,1]^E, \leq),')$ el retículo de sus subconjuntos borrosos con una negación fuerte y sea $\|.\|:[0,1]^E \to [0,+\infty]$ la aplicación "cardinal borroso" tal que, (si $\sum$ representa la "suma" usual en $[0,+\infty[$), viene dada por

$$\|A\| = \sum_{x\in E} A(x) = \sum_{x\in Sop(A)} A(x) \quad \forall A\in[0,1]^E.$$

Suma en $[0,+\infty[$

Es una aplicación entre retículos (concretamente entre el retículo $([0,1]^E, \leq)$ y la cadena $([0,+\infty], \leq)$). Si $W\in[0,1]^E$ es nítido entonces $\|A\|=|A|$.

<u>Definición</u>.Sea E un referencial finito y sean $o\in[0,1]$ y W un nítido de E, $(W^c=W')$. Llamaremos "w-cardinalidad" $\|\widehat{A}\|_{(w,o)}$ de $A\in[0,1]^E$ a la extensión de $\|A\|$ desde la perspectiva de W. Es decir:

$$\|\widehat{A}\|_{(w,o)} = \|A\Delta W\|\Delta o = \|A\Delta W\| = \|A\cdot W^c + A'\cdot W\| = \|A\cdot W^c\| + \|A'\cdot W\| = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W} A'(x).$$

Supremo en $[0,1]^E$ Suma en $[0,+\infty[$

<u>Nota1</u>. Si $':[0,1]\to[0,1]$ es la negación de Zadeh tal que $s'=1-s$ $\forall s\in[0,1]$ <u>entonces:</u>

$$\|\widehat{A}\|_{(w,o)} = \sum_{x\in W^c} A(x) + \sum_{x\in W}(1-A(x)) = \sum_{x\in W^c} A(x) + |W| - \sum_{x\in W} A(x)) = \|A\| + |W| - 2\sum_{x\in W} A(x)).$$

<u>Nota2</u>. Se verifica : $\|\widehat{A\sqcup^W B}\|_{(w,o)} + \|\widehat{A\sqcap^W B}\|_{(w,o)} = \|\widehat{A}\|_{(w,o)} + \|\widehat{B}\|_{(w,o)}$ $\forall W\in\{0,1\}^E$ $\forall (A,B)\in[0,1]^E X[0,1]^E$

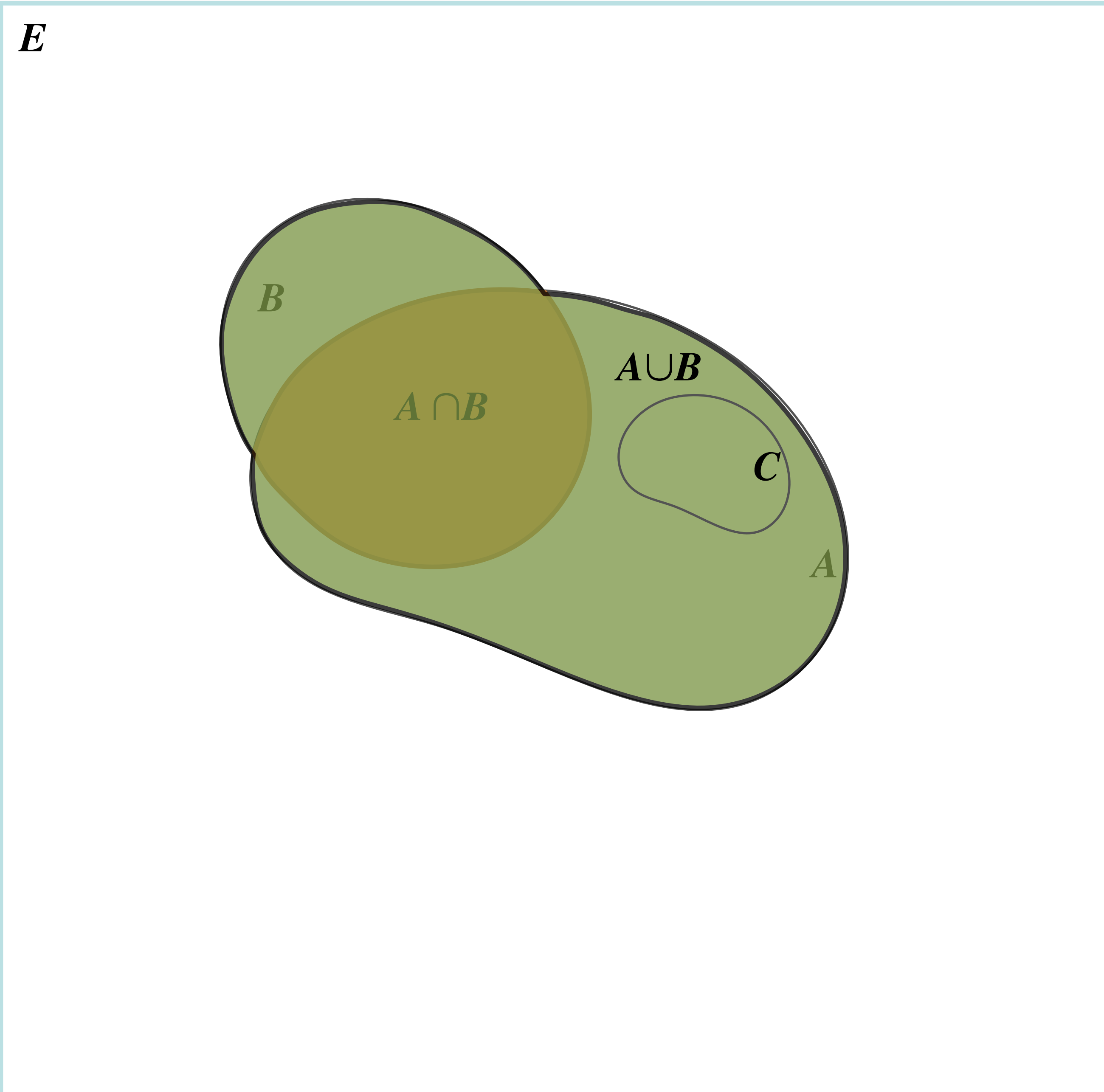
$$\boxed{(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\|\widehat{A}\|_{(w,o)} \leq \|\widehat{B}\|_{(w,o)})} \qquad \boxed{\|\widehat{A^c}\|_{(w,o)} = |E| - \|\widehat{A}\|_{(w,o)}}\ \forall A\in[0,1]^E$$

$$\boxed{\|\widehat{W}\|_{(w,o)} = 0,\ \|\widehat{W^c}\|_{(w,o)} = |E|}$$

<u>Nota2'</u>. Más general : $\boxed{\|\widehat{A\sqcup^S B}\|_{(w,o)} + \|\widehat{A\sqcap^S B}\|_{(w,o)} = \|\widehat{A}\|_{(w,o)} + \|\widehat{B}\|_{(w,o)}}$ $\forall (A,B)\in[0,1]^E X[0,1]^E$ $\forall (W,S)\in\{0,1\}^E X\{0,1\}^E$
(véase la transparencia anterior).

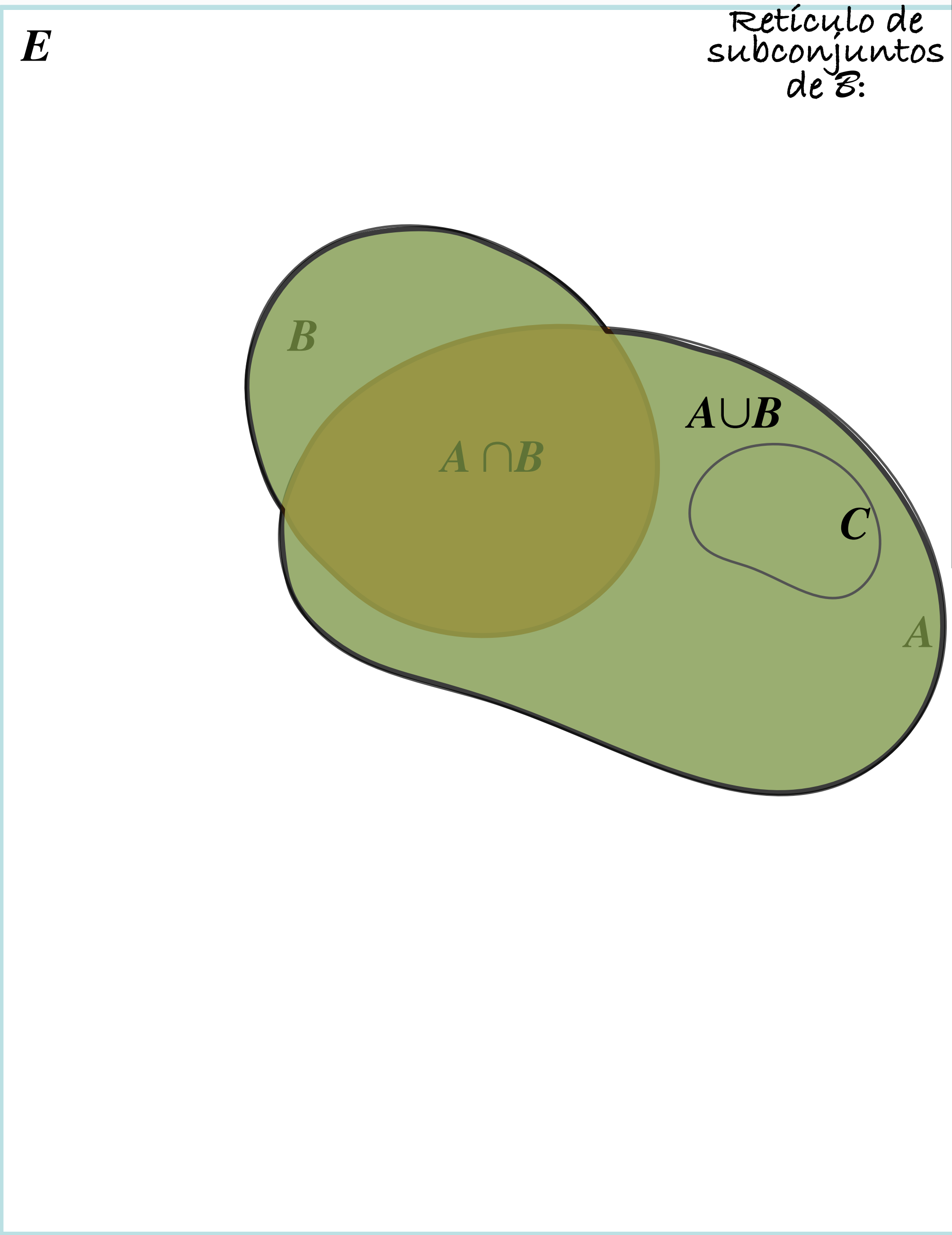
Ejemplos: Órdenes de actividad y probabilidad (1)

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C,\ldots$ de E con área

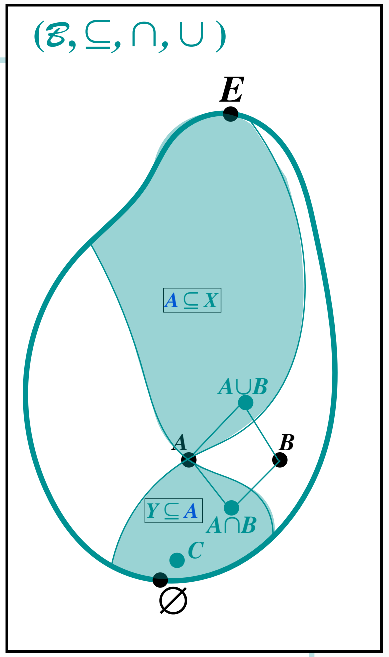


Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área

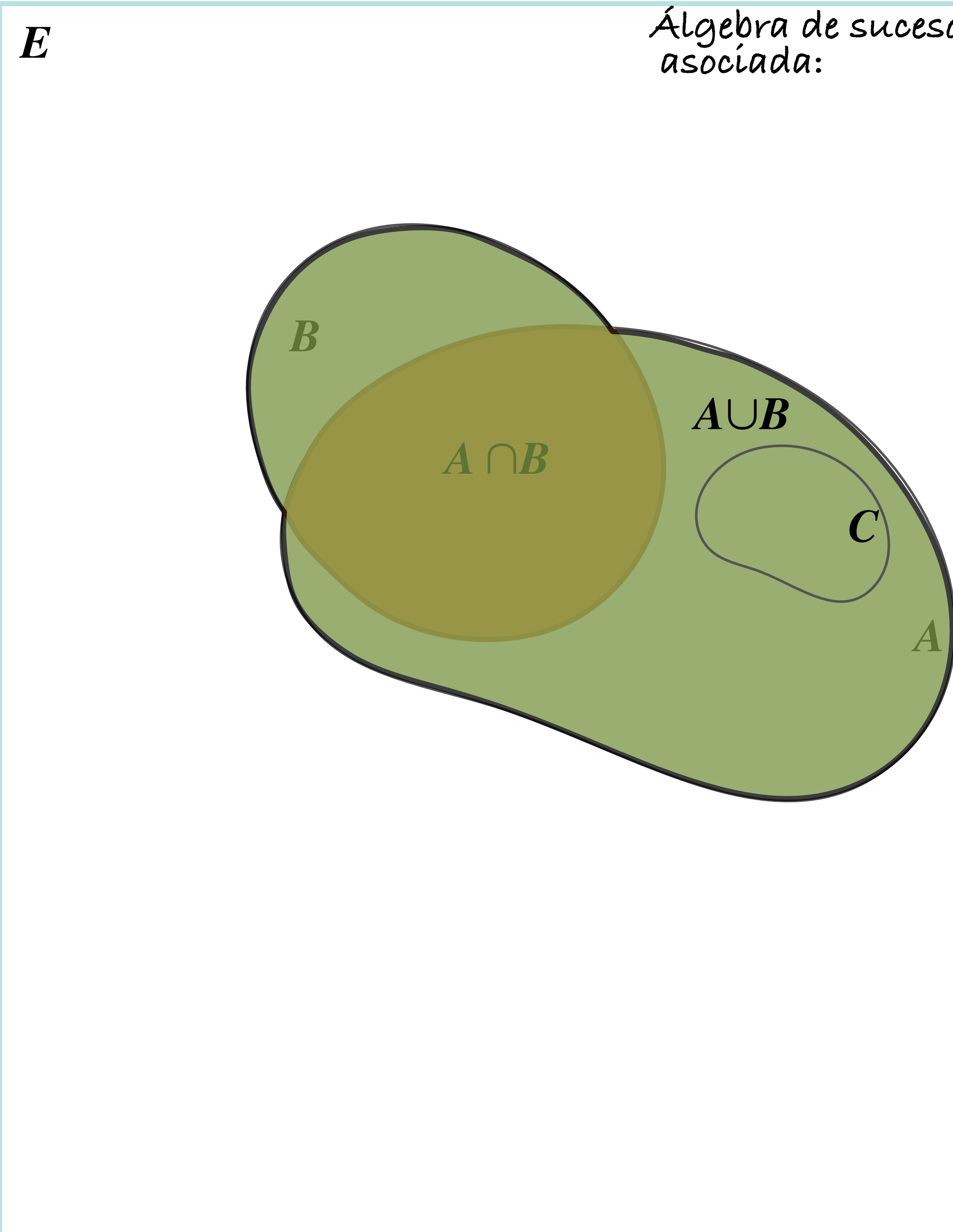


Retículo de subconjuntos de $\mathcal{B}$:

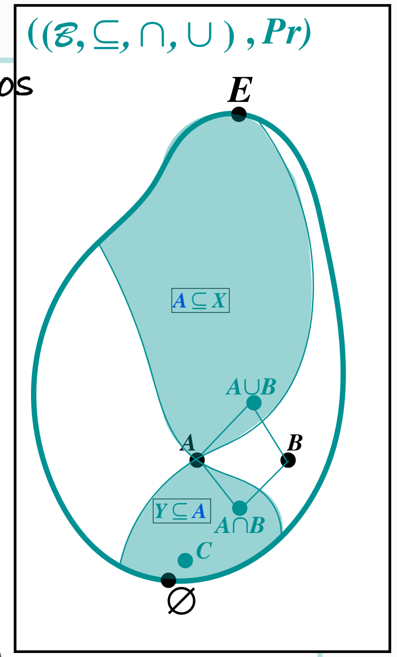


ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área , y sea
la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A",
$Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...



Álgebra de sucesos asociada:

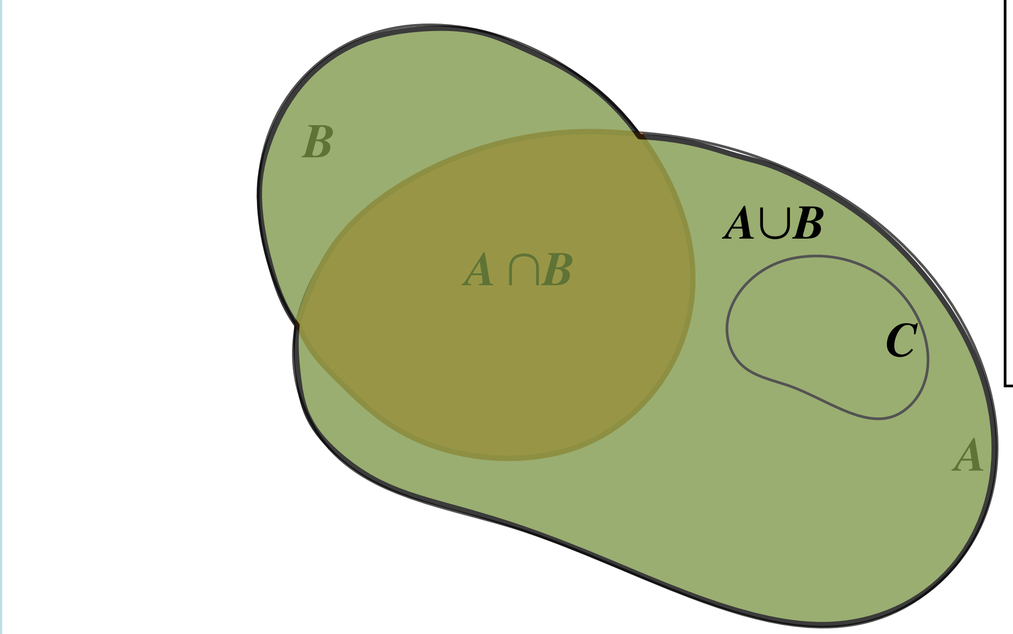


ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

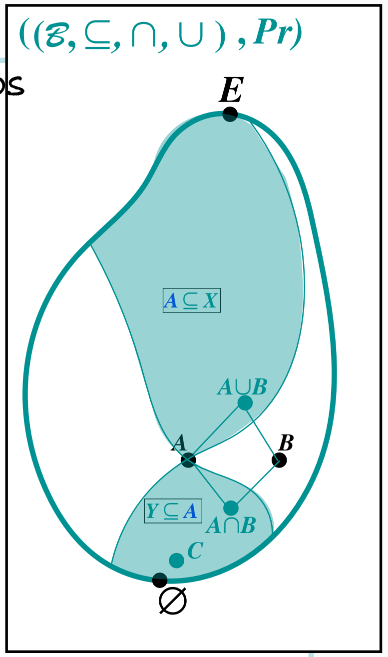
$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...



Álgebra de sucesos asociada:



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

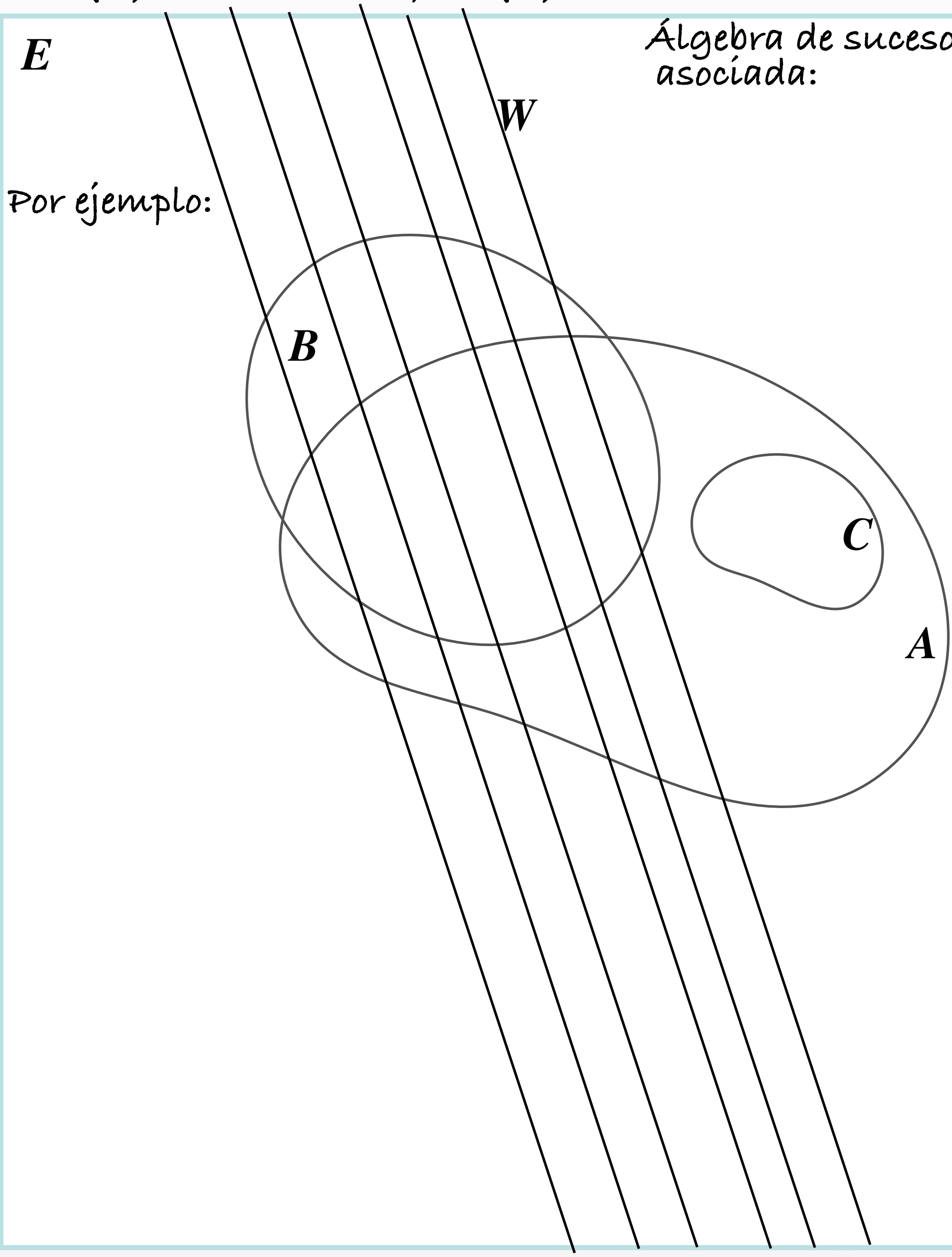
Consideremos el referencial $\boldsymbol{E}$: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C},\ldots$ de $\boldsymbol{E}$ con área , y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(\boldsymbol{A})$ = "área de $\boldsymbol{A}$", $Pr(\boldsymbol{B})$ = "área de $\boldsymbol{B}$", $Pr(\boldsymbol{C})$ = "área de $\boldsymbol{C}$"...

$$(\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}) \Rightarrow (Pr(\boldsymbol{C}) \leq Pr(\boldsymbol{A}))$$

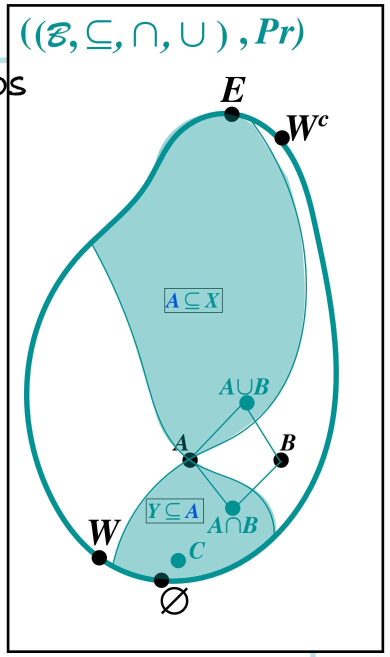
$$Pr(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) + Pr(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = Pr(\boldsymbol{A}) + Pr(\boldsymbol{B}) \quad \forall(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$$

Sea $\boldsymbol{W}$ tal que $Pr(\boldsymbol{W}) = 0$

Por ejemplo:



Álgebra de sucesos asociada:



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C,\ldots$ de E con área , y sea
la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A",
$Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

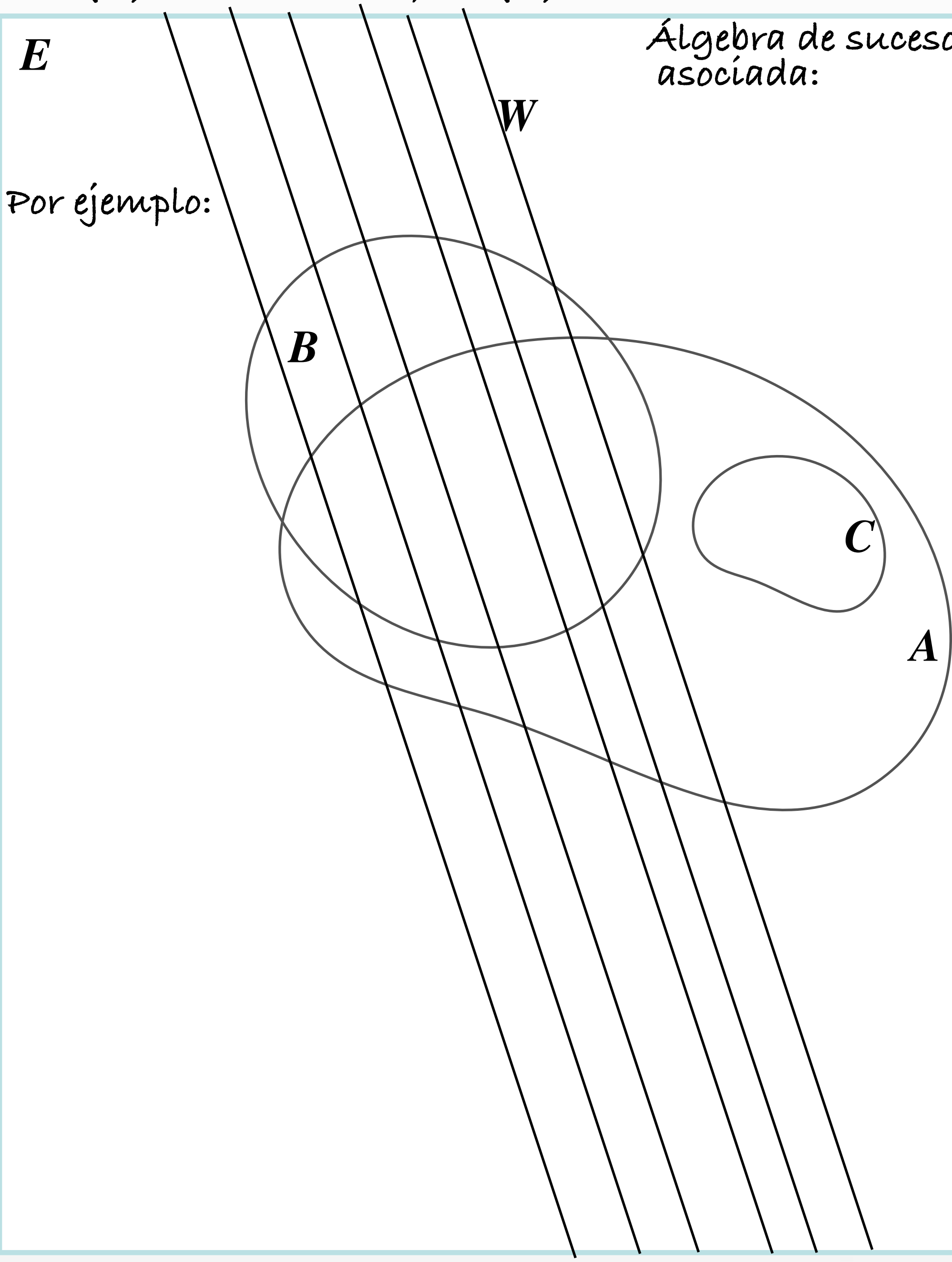
$$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$$

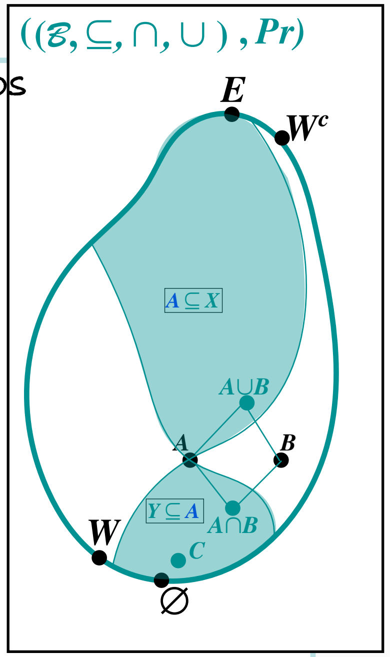
Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$$

Por ejemplo:



Álgebra de sucesos asociada:



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

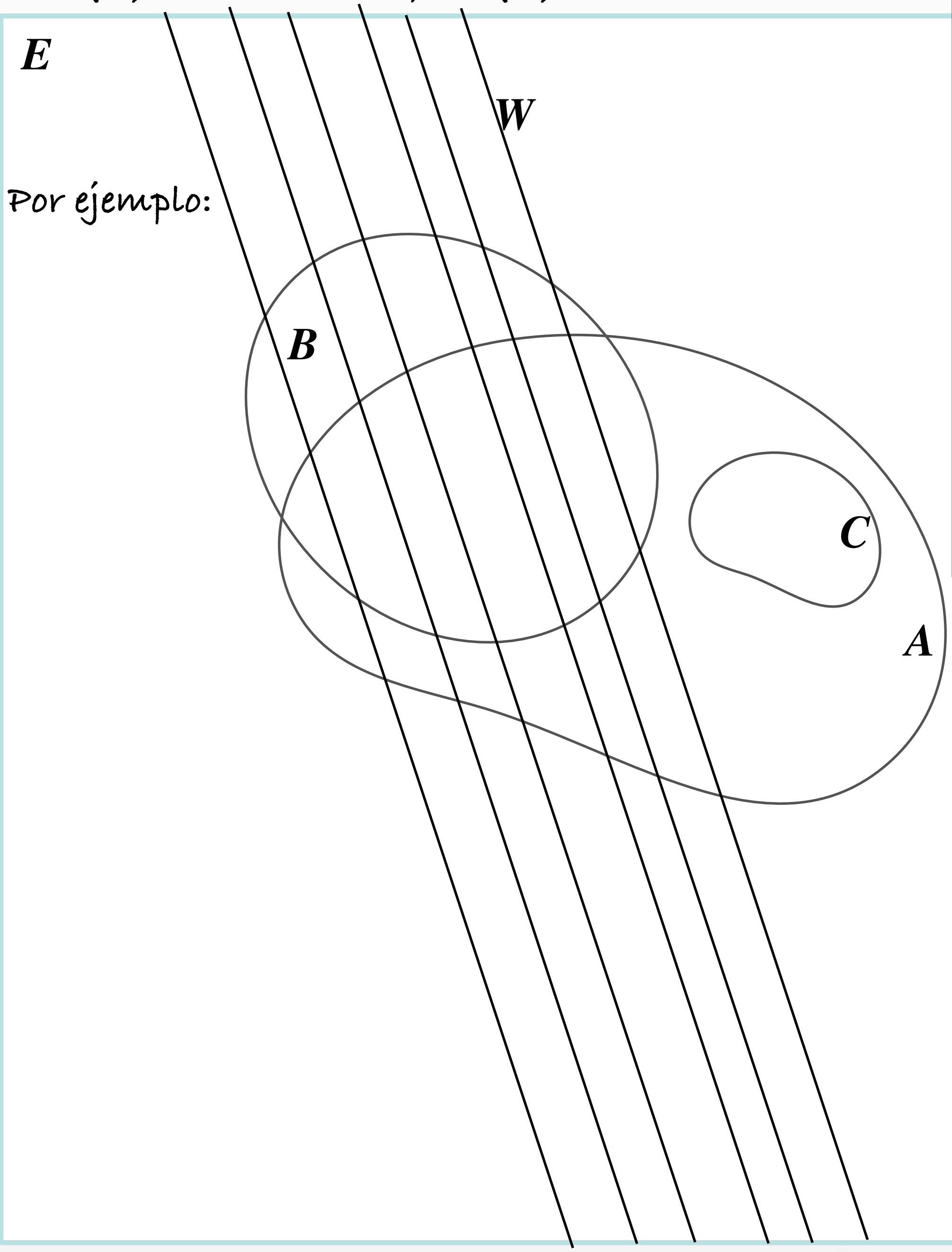
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área , y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A",
$Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

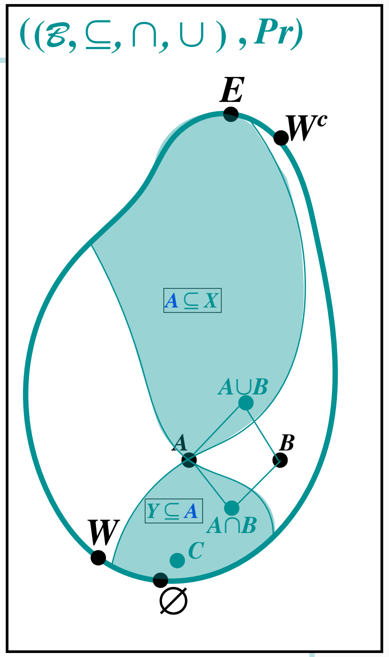
$$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$$

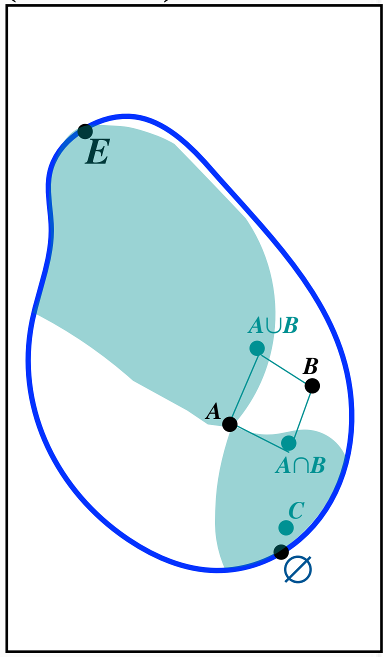
Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$$





Utilizando el elemento distinguido W, un "giro" en la presentación del dibujo que representa el álgebra...



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

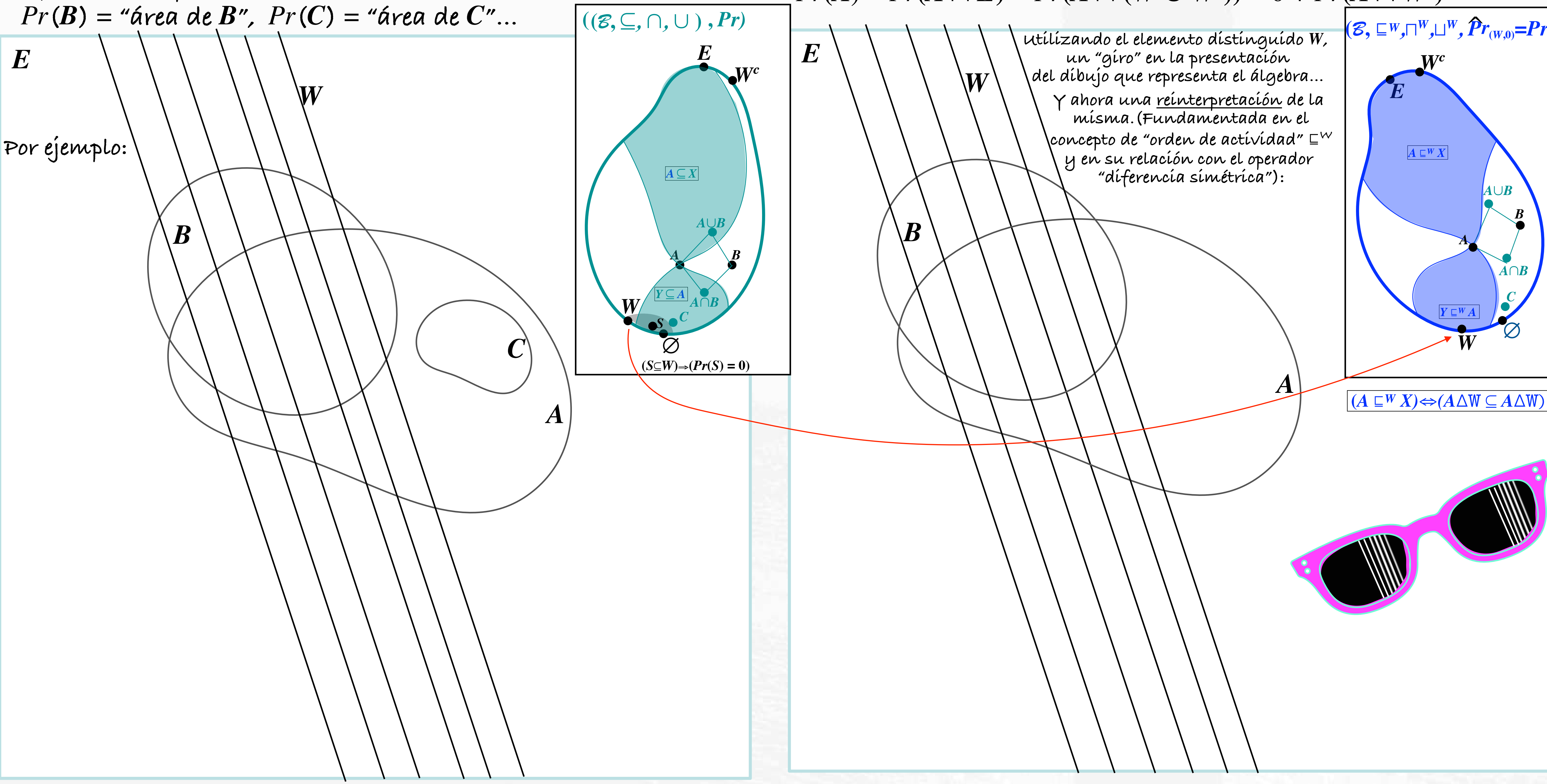
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

$$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$$

Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

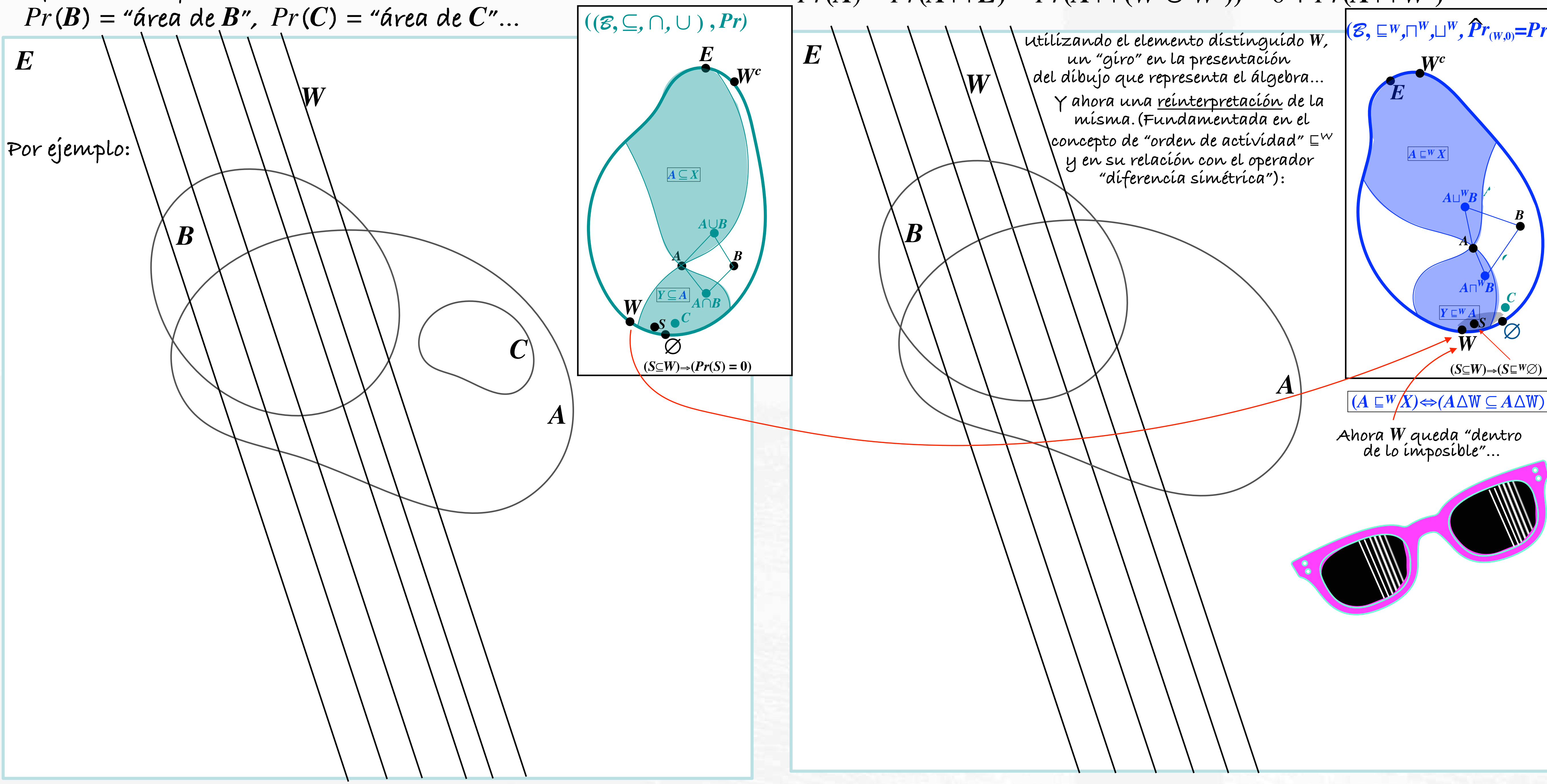
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C,\ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$

Sea W tal que $Pr(W) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

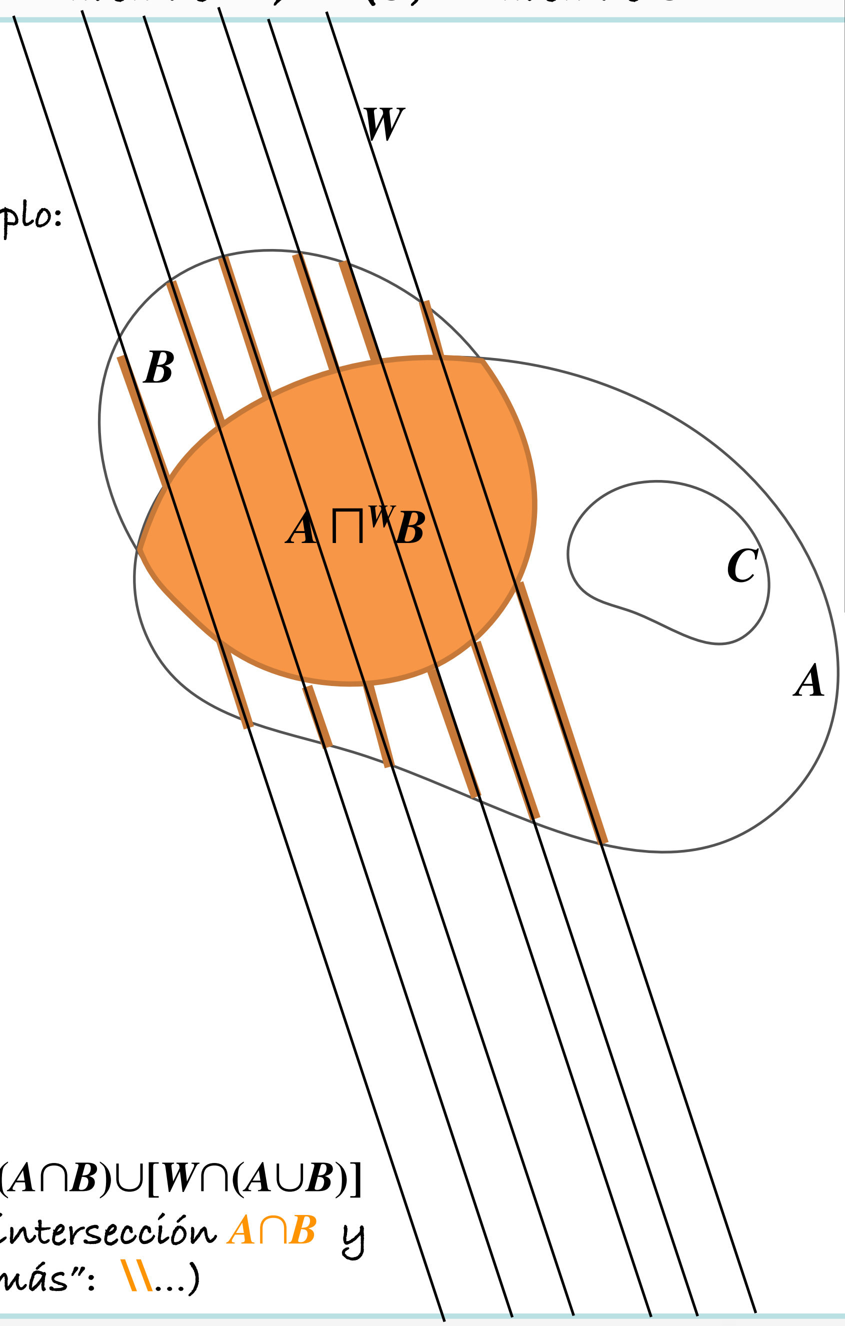
$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

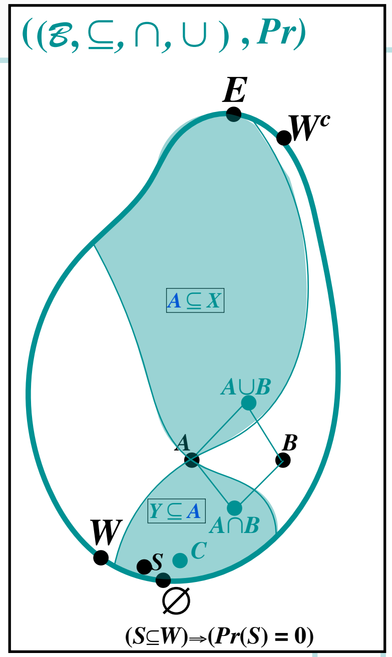
$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$

Sea W tal que $Pr(W) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

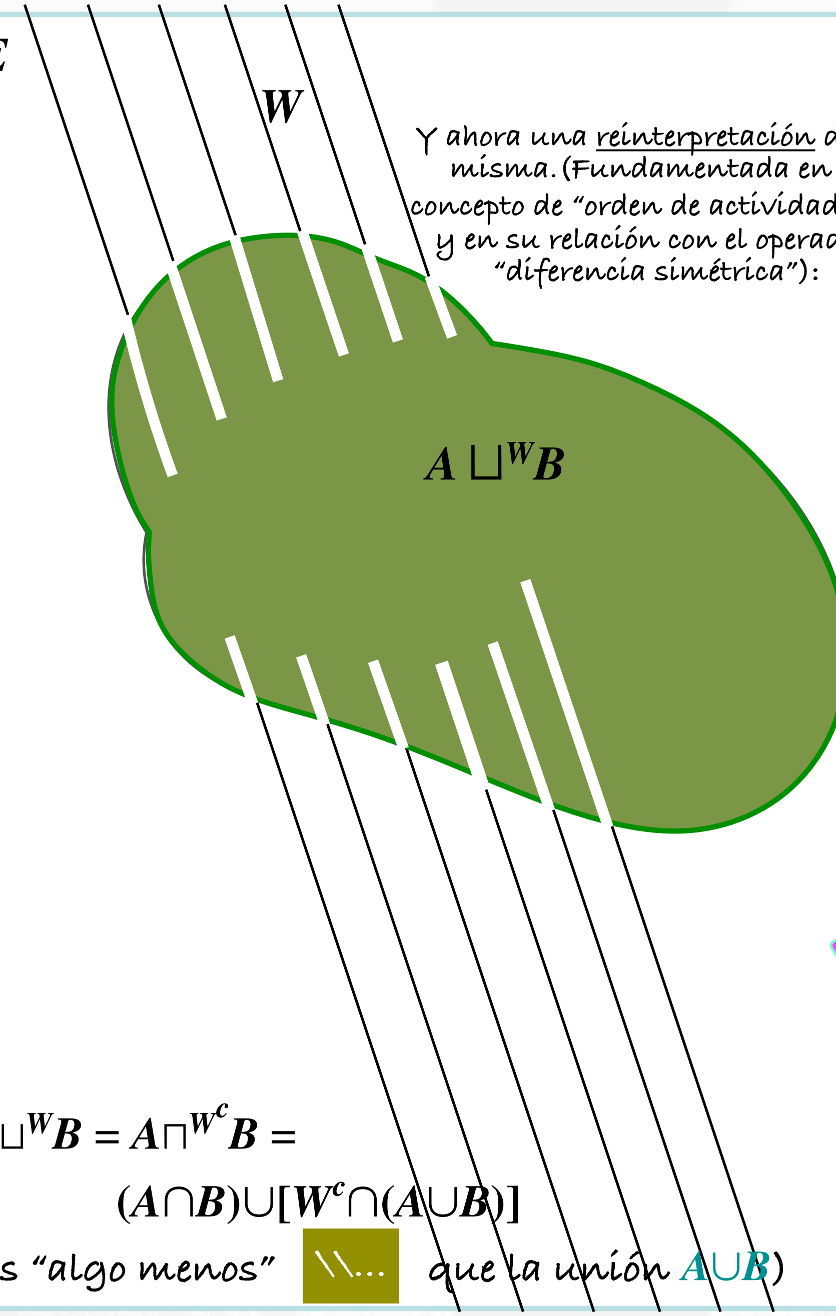
$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$

Por ejemplo:

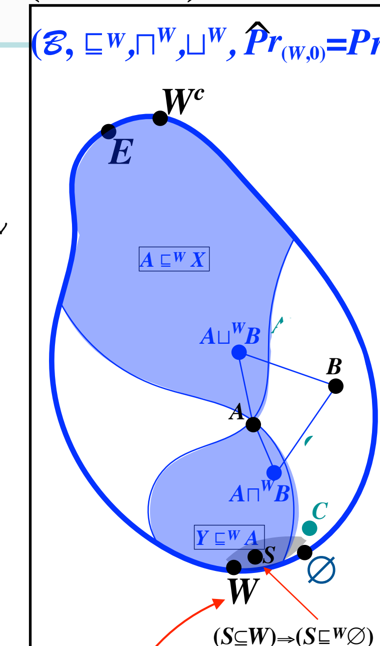




$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$
(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\...)



Y ahora una reinterpretación de la misma. (Fundamentada en el concepto de "orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ y en su relación con el operador "diferencia simétrica"):



$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$

Ahora W queda "dentro de lo imposible"...

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

(Es "algo menos" \\... que la unión $A \cup B$)

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área , y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

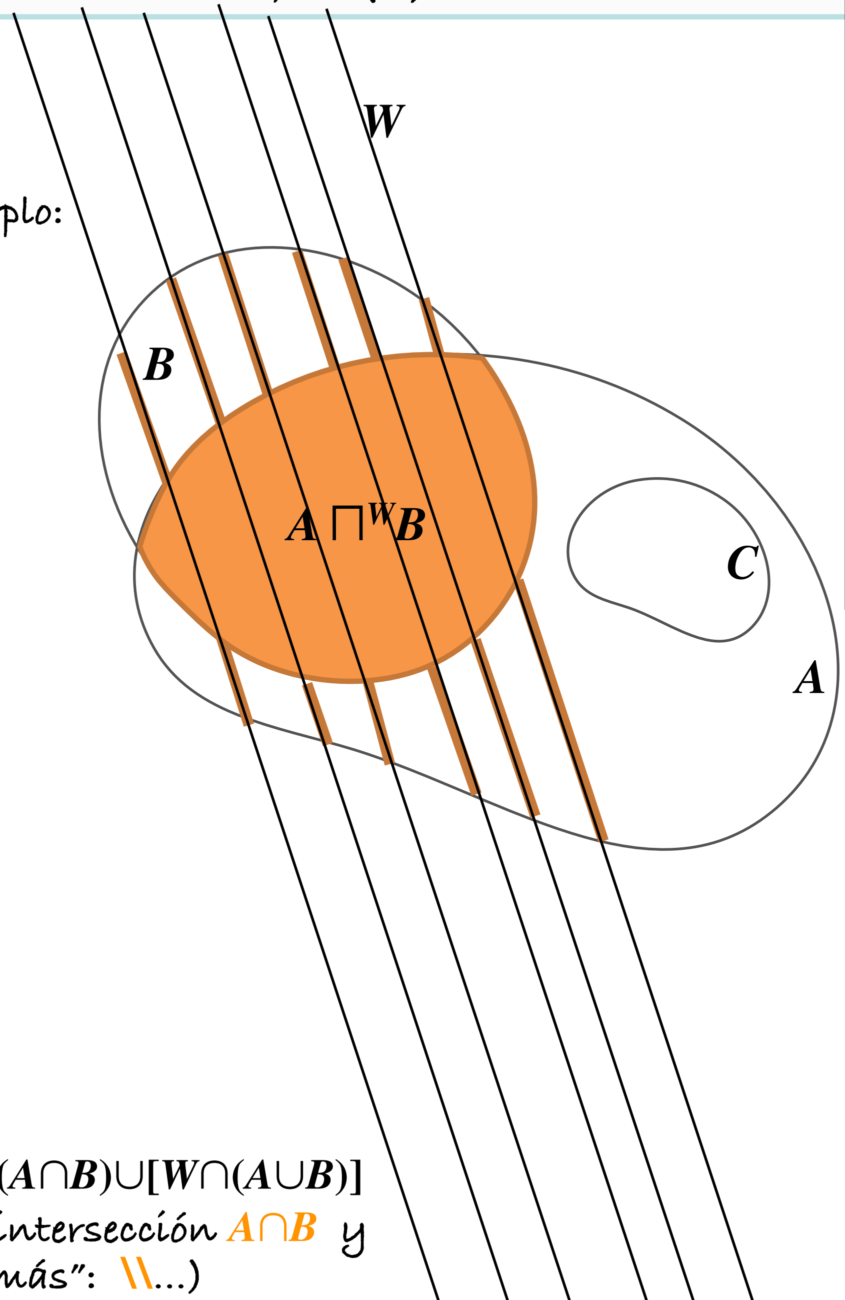
$$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$$

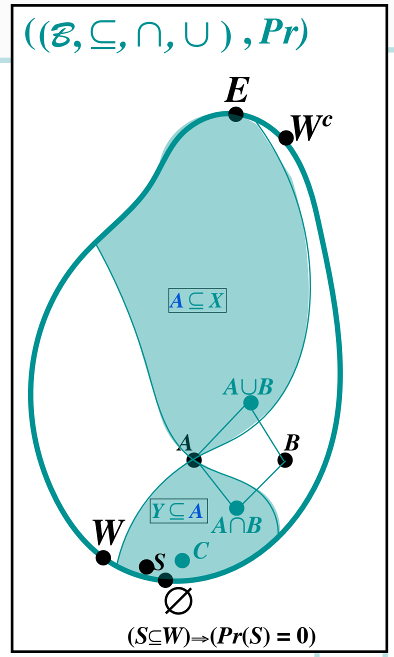
$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$$

Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

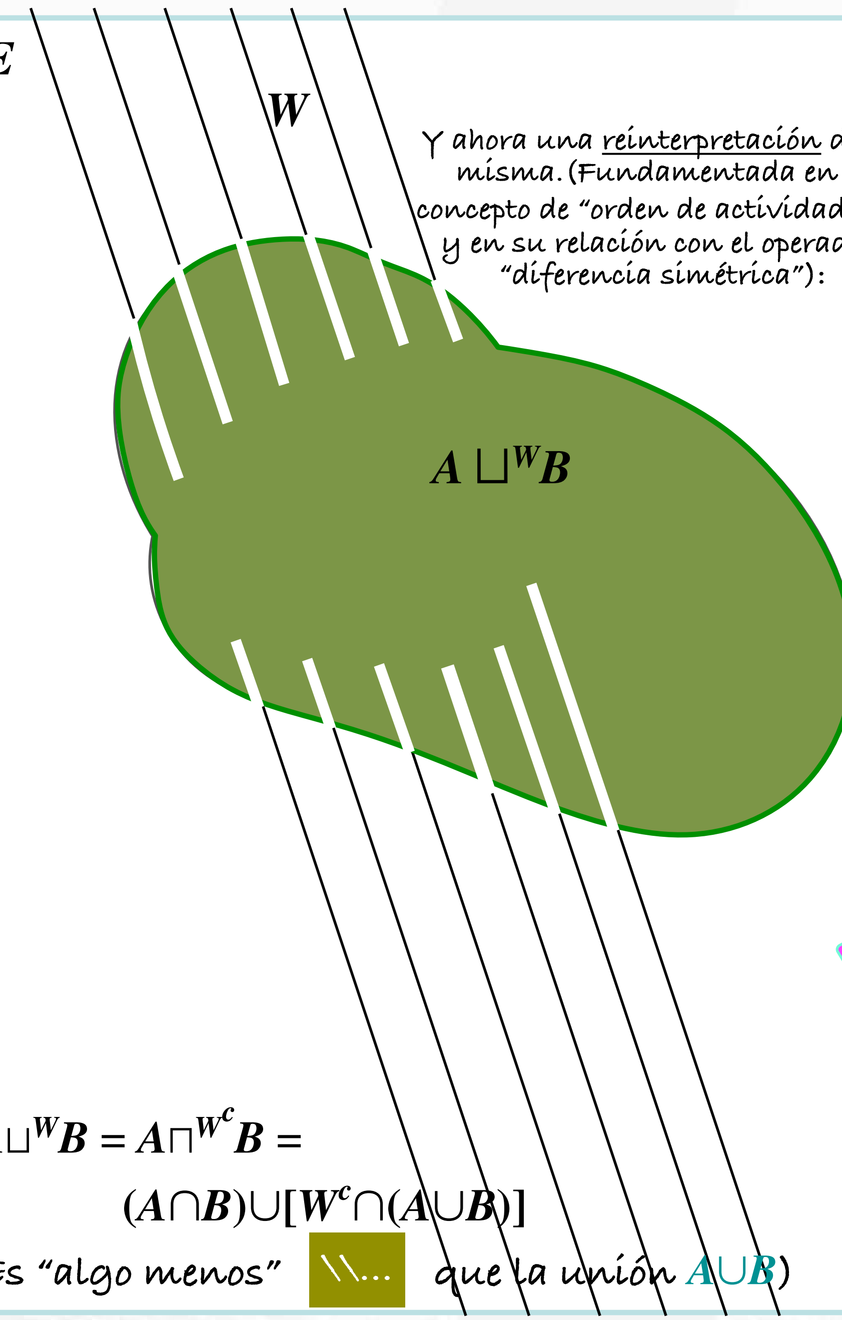
$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$$

Por ejemplo:

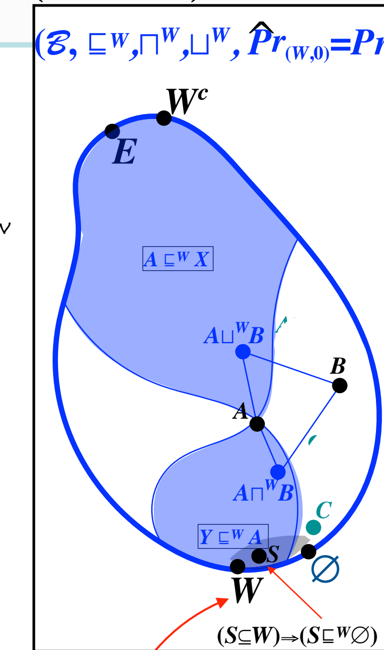




$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$
(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\\\...)



Y ahora una reinterpretación de la misma. (Fundamentada en el concepto de "orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ y en su relación con el operador "diferencia simétrica"):



$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$

Ahora W queda "dentro de lo imposible"...

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$
$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$
(Es "algo menos" \\\\... que la unión $A \cup B$)

La w- extensión asociada a (W,0) es $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W)$, es decir

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

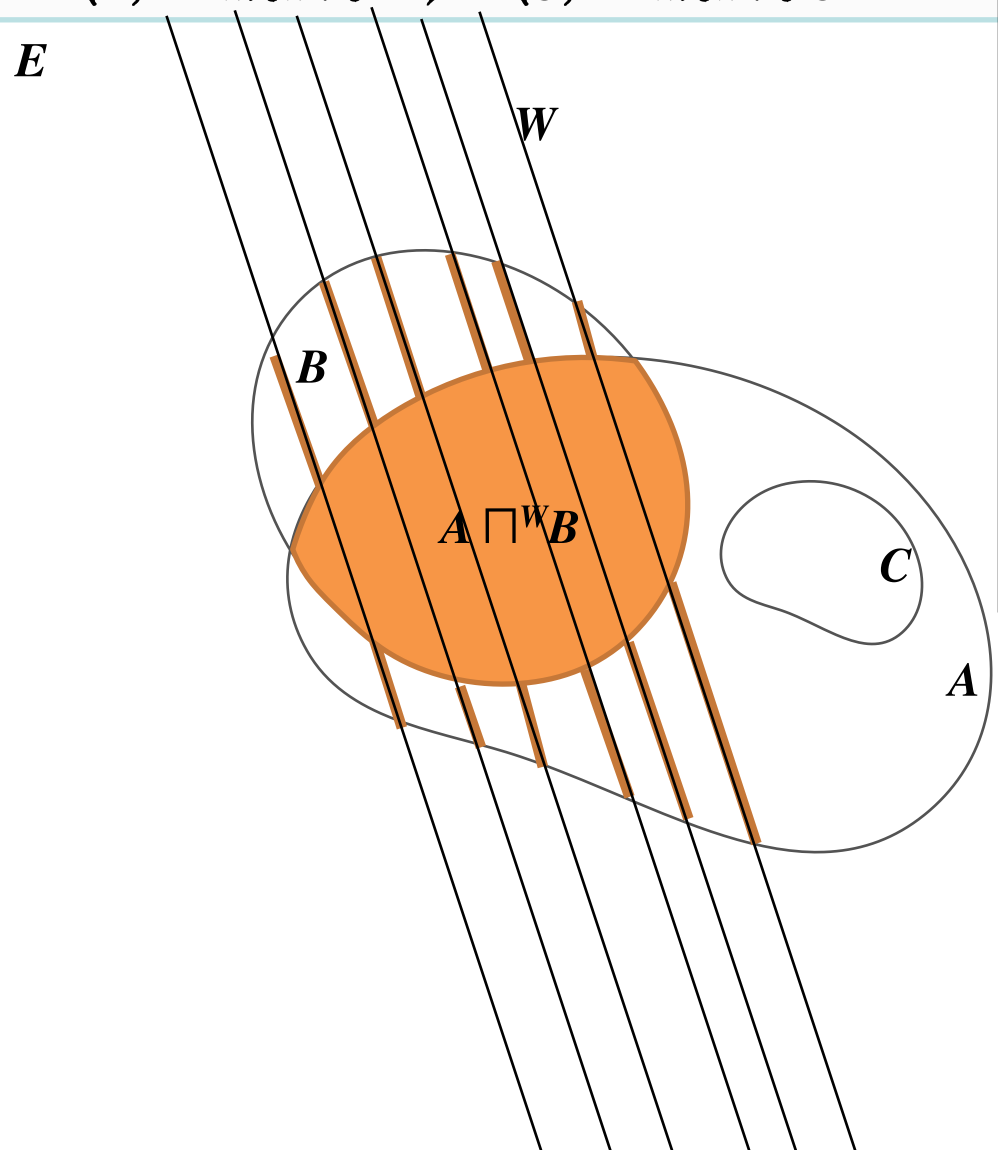
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

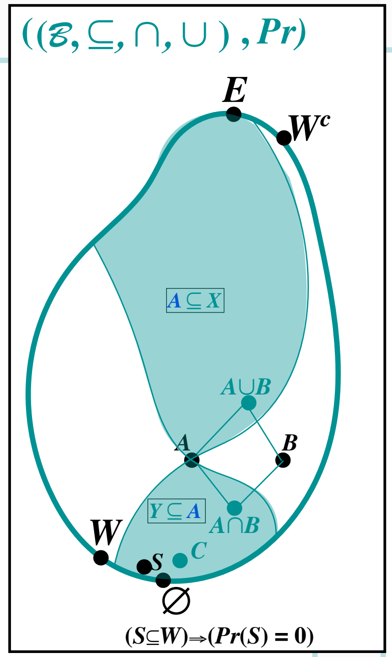
$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

$\boxed{Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)}$ $\forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

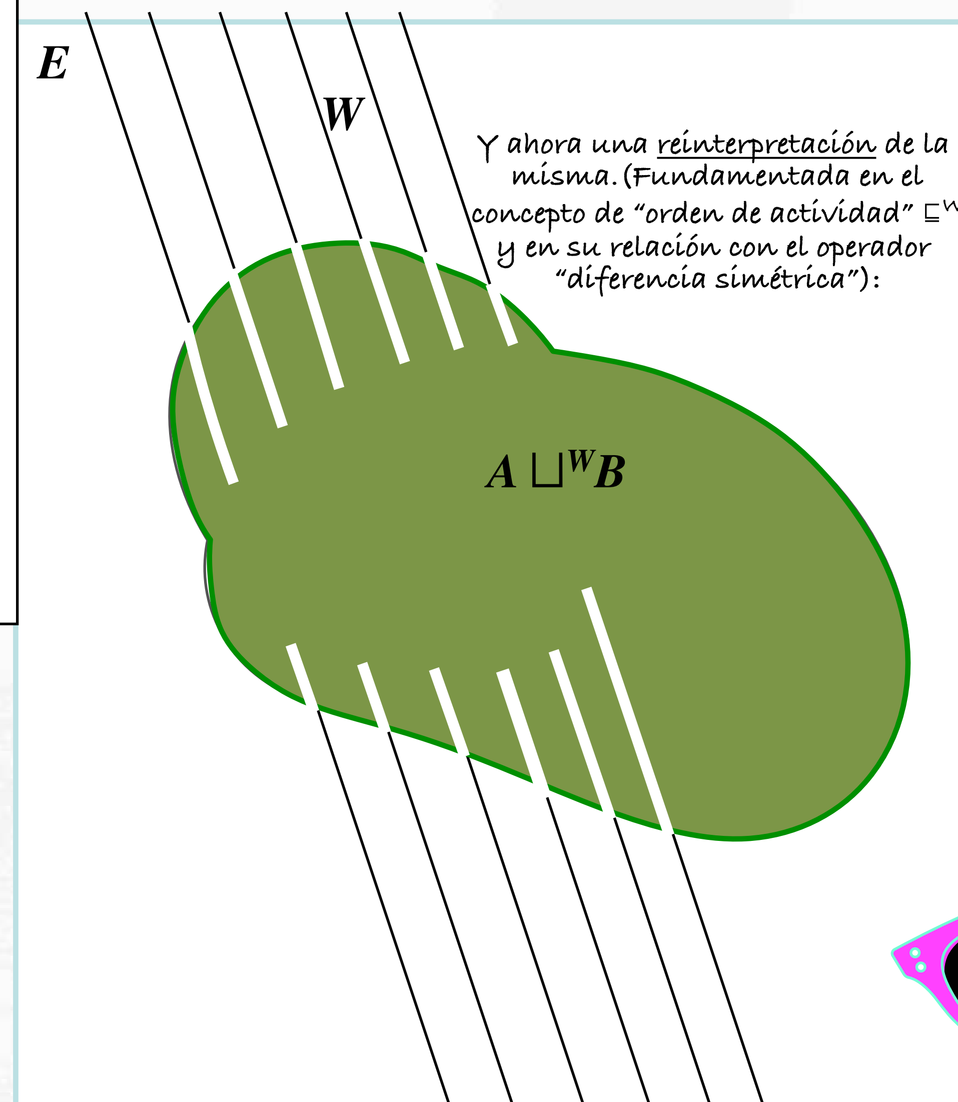
Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$

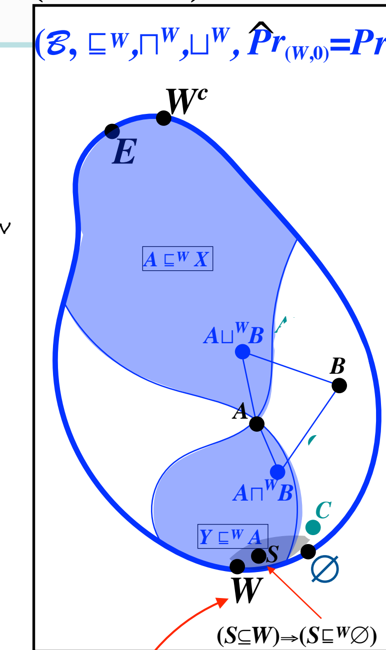




$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$
(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\\...)



Y ahora una reinterpretación de la misma. (Fundamentada en el concepto de "orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ y en su relación con el operador "diferencia simétrica"):



$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$

Ahora W queda "dentro de lo imposible"...

$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$
$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$
(Es "algo menos" \\\... que la unión $A \cup B$)

La w- extensión asociada a (W,0) es $\hat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W)$, es decir

$$\hat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Luego en este caso particular, también: $\boxed{Pr(A \sqcup^W B) + Pr(A \sqcap^W B) = Pr(A) + Pr(B)}$ $\forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Es decir: $\hat{Pr}_{(W,0)} = Pr : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de sucesos $(\mathcal{B}, \subseteq)$
$Pr = \hat{Pr}_{(W,0)} : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(\mathcal{B}, \sqsubseteq^W)$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

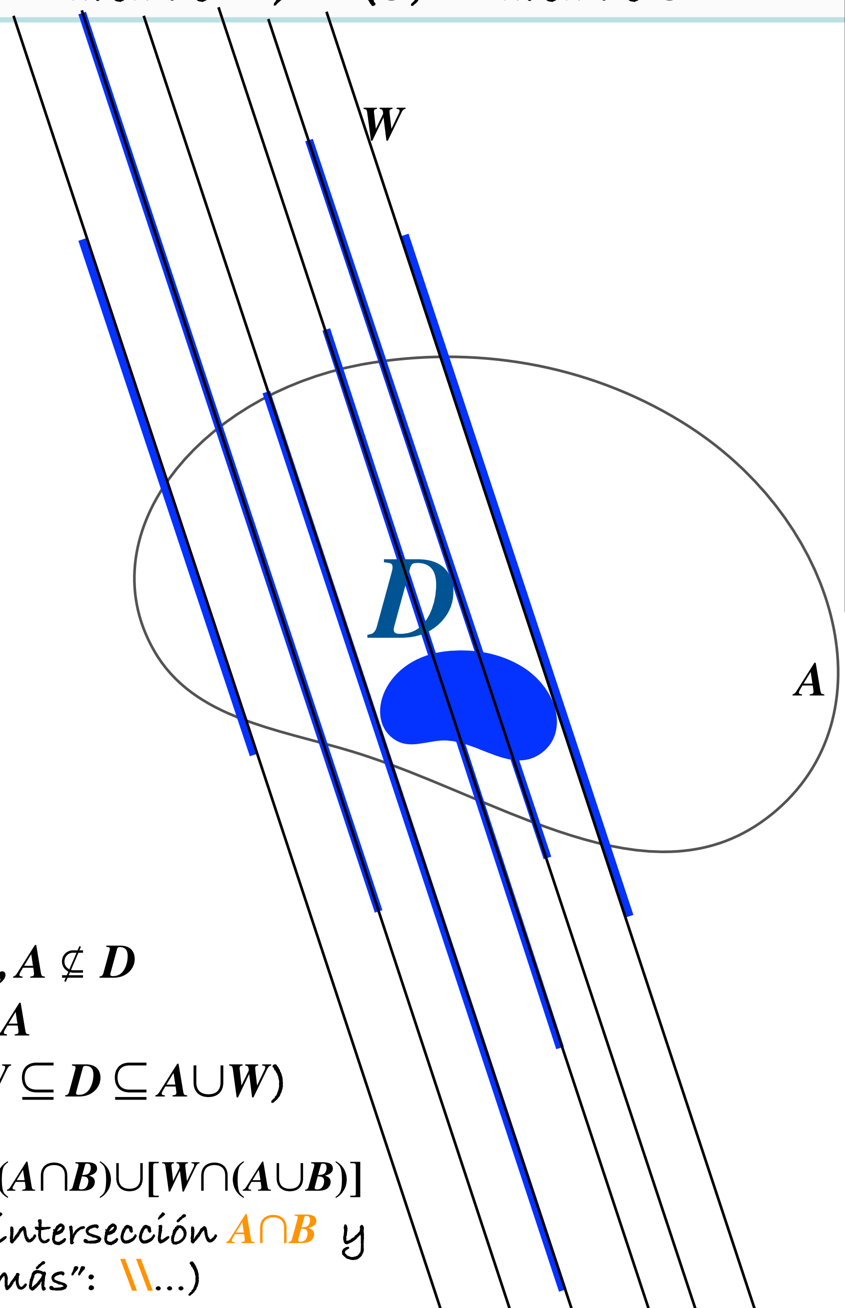
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

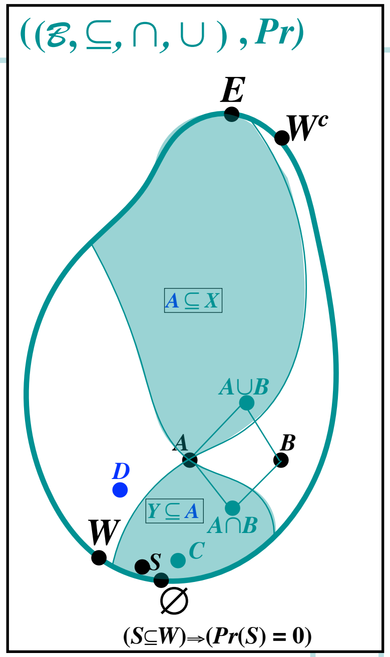
$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

$\boxed{Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)}$ $\forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$





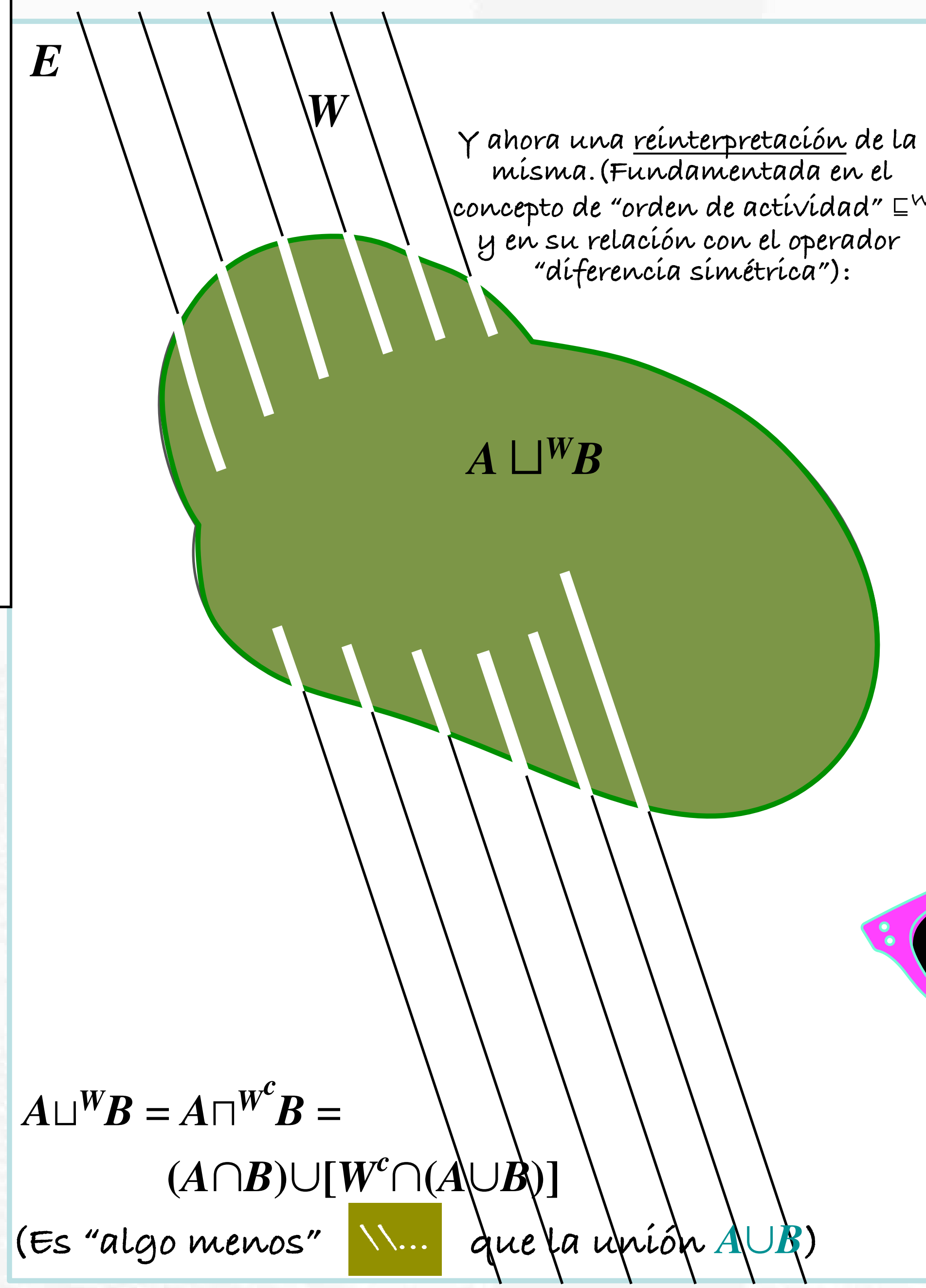
$D \not\subseteq A, A \not\subseteq D$

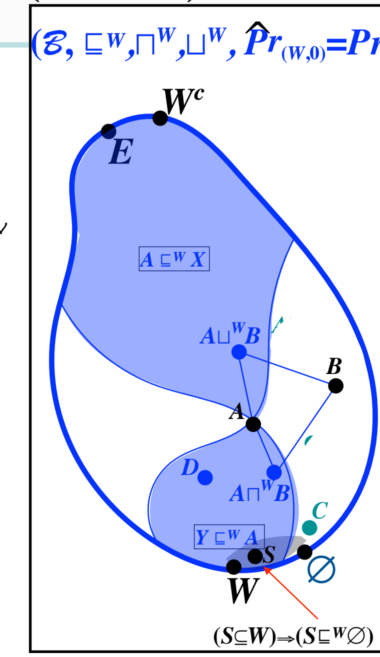
$D \sqsubseteq^W A$

$(A \cap W \subseteq D \subseteq A \cup W)$

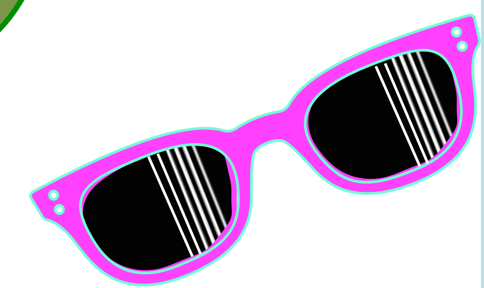
$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\...)





$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$



$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

(Es "algo menos" \\... que la unión $A \cup B$)

La W- extensión asociada a (W,0) es $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W)$, es decir

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Luego en este caso particular, también: $\boxed{Pr(A \sqcup^W B) + Pr(A \sqcap^W B) = Pr(A) + Pr(B)}$ $\forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Es decir: $\widehat{Pr}_{(W,0)} = Pr : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de sucesos $(\mathcal{B}, \subseteq)$

$Pr = \widehat{Pr}_{(W,0)} : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(\mathcal{B}, \sqsubseteq^W)$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

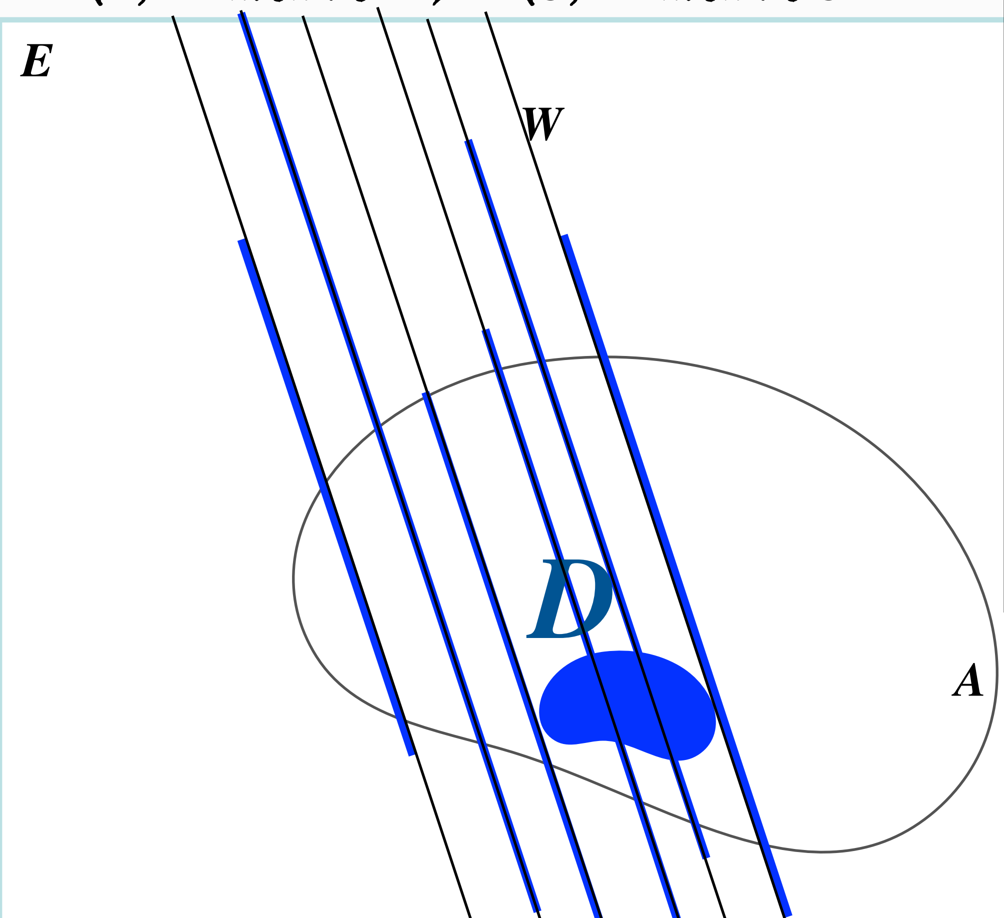
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área, y sea la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A", $Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

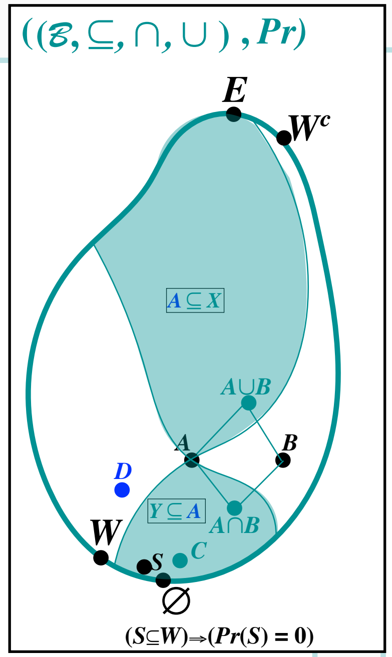
$$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$$

Sea W tal que $Pr(W) = 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$$





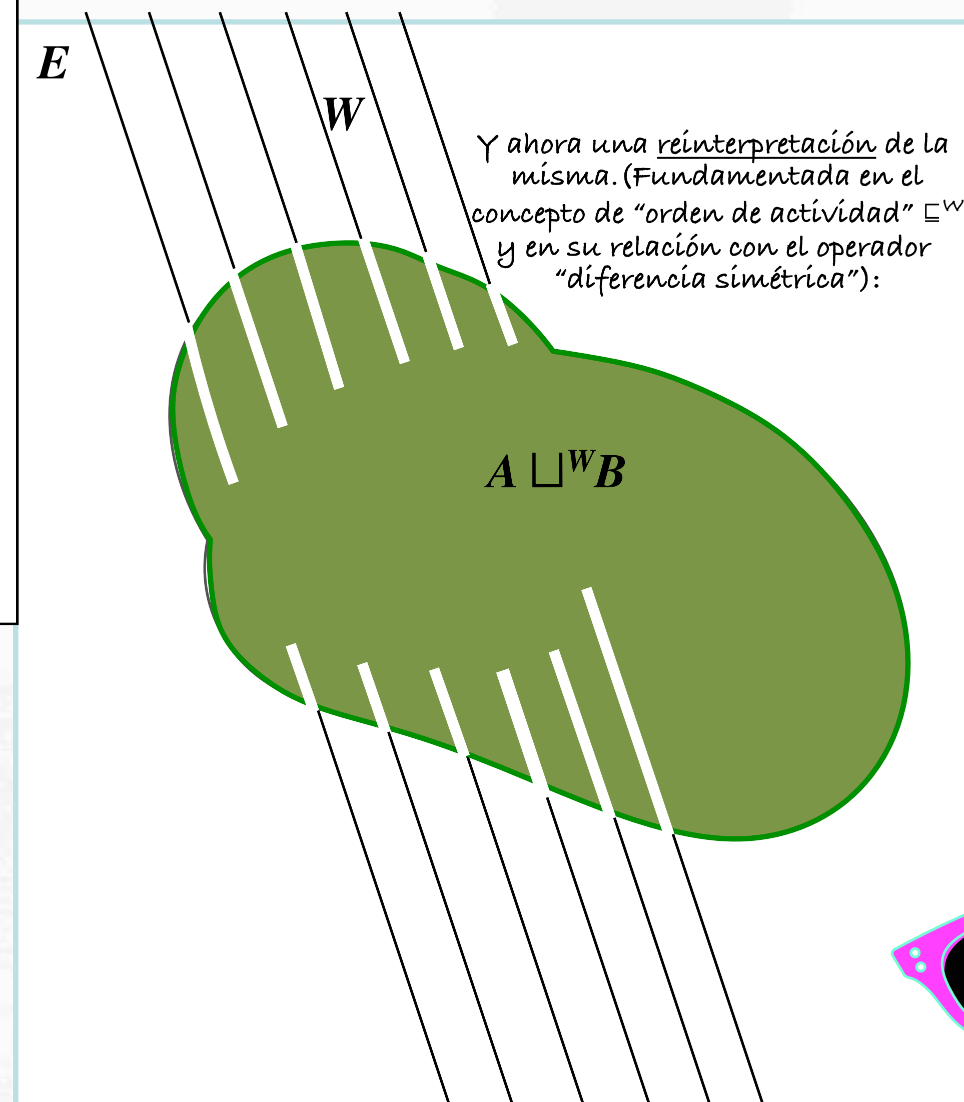
$D \not\subseteq A, A \not\subseteq D$

$D \sqsubseteq^W A$

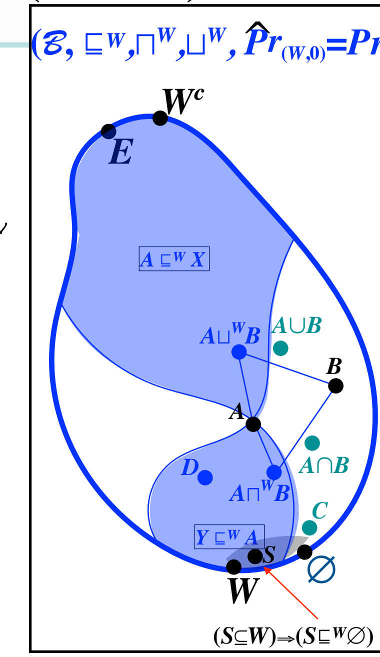
$(A \cap W \subseteq D \subseteq A \cup W)$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

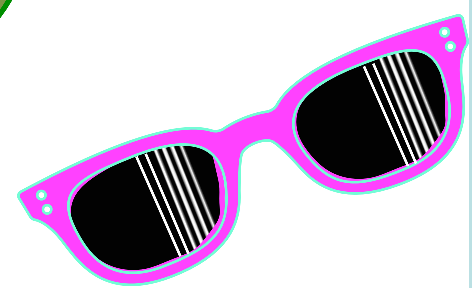
(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\\\...)



Y ahora una reinterpretación de la misma. (Fundamentada en el concepto de "orden de actividad" $\sqsubseteq^W$ y en su relación con el operador "diferencia simétrica"):



$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$



$A \sqcup^W B = A \sqcap^{W^c} B =$

$(A \cap B) \cup [W^c \cap (A \cup B)]$

(Es "algo menos" \\\\... que la unión $A \cup B$)

La w- extensión asociada a (W,0) es $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W)$, es decir

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Luego en este caso particular, también: $\boxed{Pr(A \sqcup^W B) + Pr(A \sqcap^W B) = Pr(A) + Pr(B)}$ $\forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Es decir: $\widehat{Pr}_{(W,0)} = Pr : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de sucesos $(\mathcal{B}, \subseteq)$

$Pr = \widehat{Pr}_{(W,0)} : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(\mathcal{B}, \sqsubseteq^W)$

En general: $(D \sqsubseteq^W A) \Rightarrow (\widehat{Pr}_{(W,0)}(D) \leq \widehat{Pr}_{(W,0)}(A))$. Luego en este caso particular: $\boxed{(D \sqsubseteq^W A) \Rightarrow (Pr(D) \leq Pr(A))}$.

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

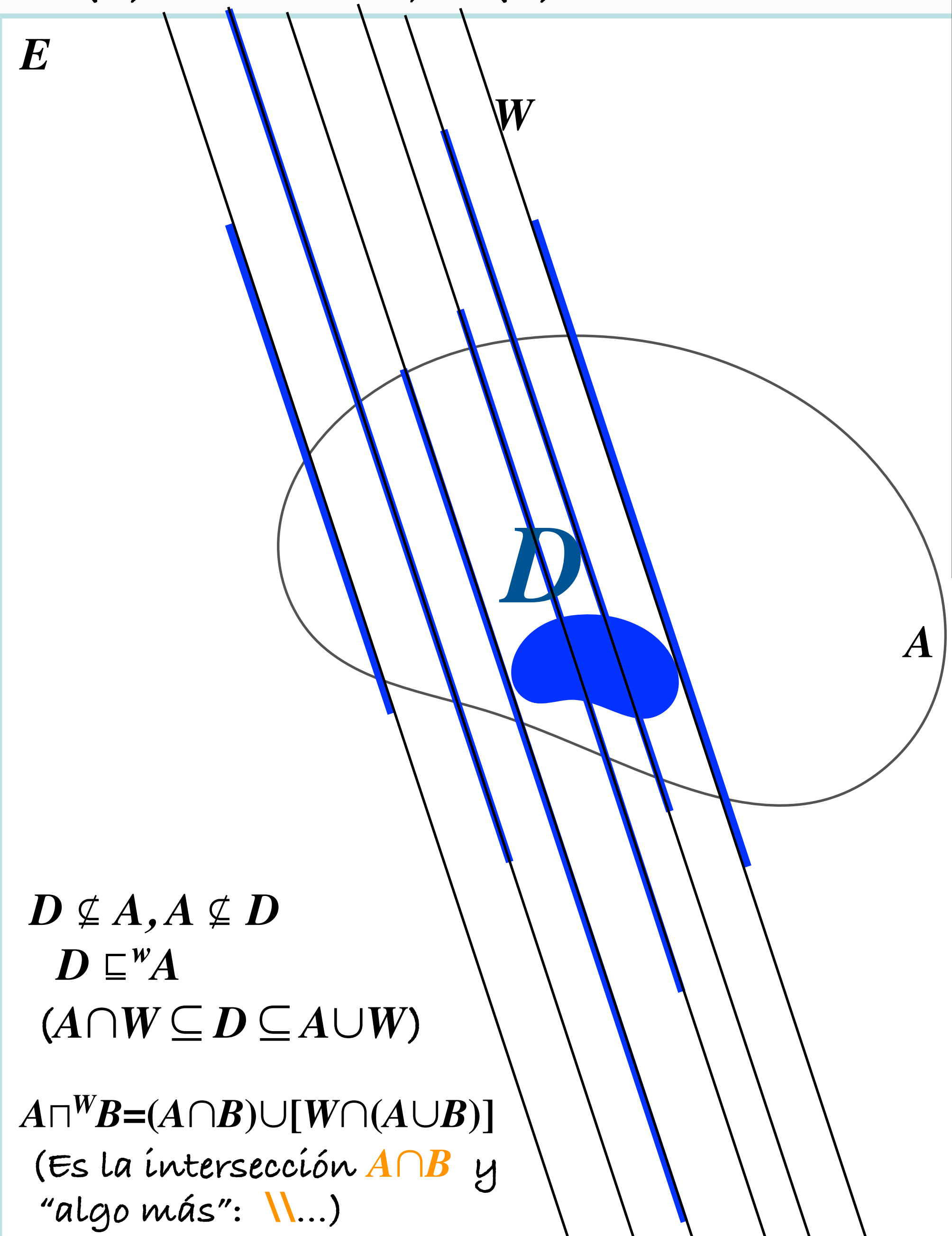
Consideremos el referencial E: "Un cuadrado de área 1 en el plano".
Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, C, \ldots$ de E con área , y sea
la función de probabilidad en $\mathcal{B}$: $Pr(A)$ = "área de A",
$Pr(B)$ = "área de B", $Pr(C)$ = "área de C"...

$(C \subseteq A) \Rightarrow (Pr(C) \leq Pr(A))$

$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) \quad \forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Sea W tal que $Pr(W) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}$ se verifica $Pr(A \cap W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = 0 + Pr(A \cap W^c)$



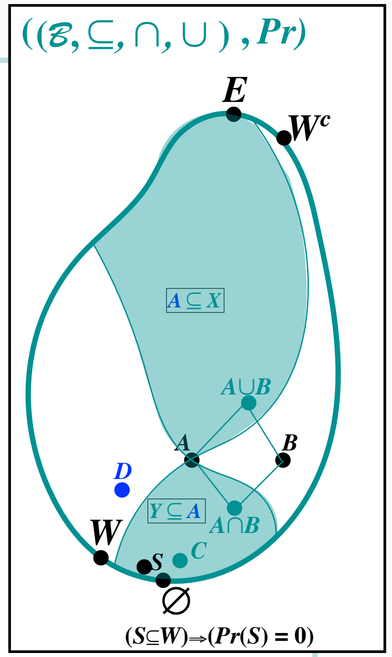
$D \not\subseteq A, A \not\subseteq D$

$D \sqsubseteq^W A$

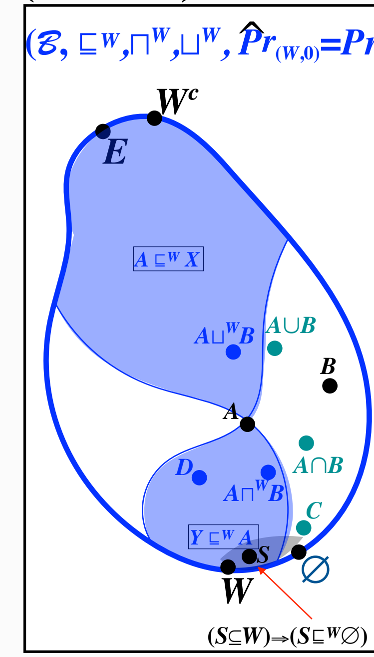
$(A \cap W \subseteq D \subseteq A \cup W)$

$A \sqcap^W B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)]$

(Es la intersección $A \cap B$ y "algo más": \\...)



En conclusión, aunque con inclusiones y operaciones asociadas distintas, las Álgebras de Sucesos $(\mathcal{B}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, ^c, Pr_{(W,0)} = Pr)$ y $(\mathcal{B}, \subseteq, \cap, \cup, ^c, Pr)$ parecen equivalentes.



$(A \sqsubseteq^W X) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq A \Delta W)$

La W- extensión asociada a (W,0) es $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W)$, es decir

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Luego en este caso particular, también: $\boxed{Pr(A \sqcup^W B) + Pr(A \sqcap^W B) = Pr(A) + Pr(B)} \quad \forall (A,B) \in \mathcal{B} X \mathcal{B}$

Es decir: $\widehat{Pr}_{(W,0)} = Pr : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de sucesos $(\mathcal{B}, \subseteq)$

$Pr = \widehat{Pr}_{(W,0)} : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(\mathcal{B}, \sqsubseteq^W)$

En general: $(D \sqsubseteq^W A) \Rightarrow (\widehat{Pr}_{(W,0)}(D) \leq \widehat{Pr}_{(W,0)}(A))$. Luego en este caso particular: $\boxed{(D \sqsubseteq^W A) \Rightarrow (Pr(D) \leq Pr(A))}$.

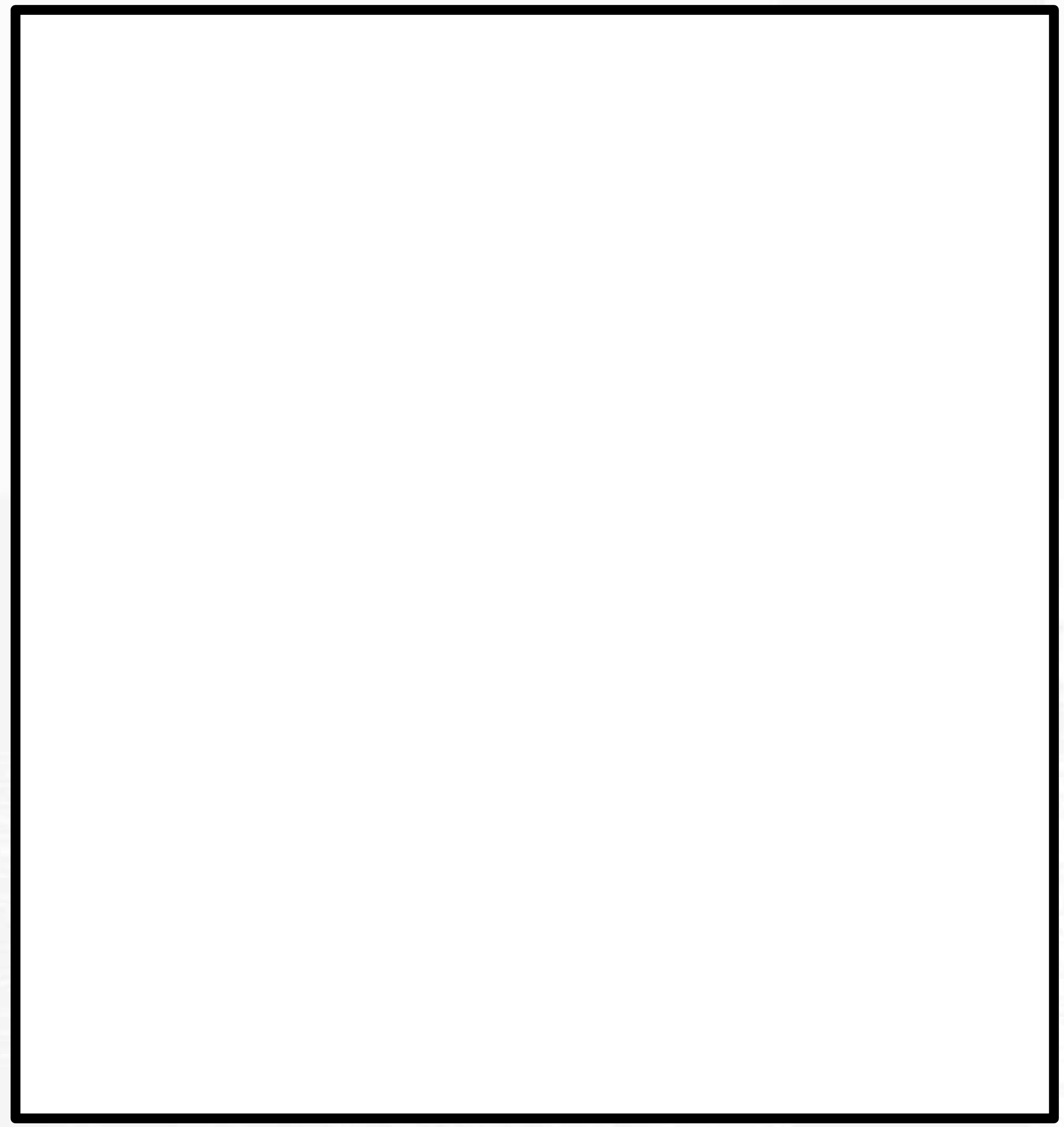
Aunque en realidad, E y W son imágenes digitalizadas y W no tiene área nula (y en consecuencia $Pr(W) \neq 0$):

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

$\boldsymbol{E}$ cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(\boldsymbol{E}) = 1.000$

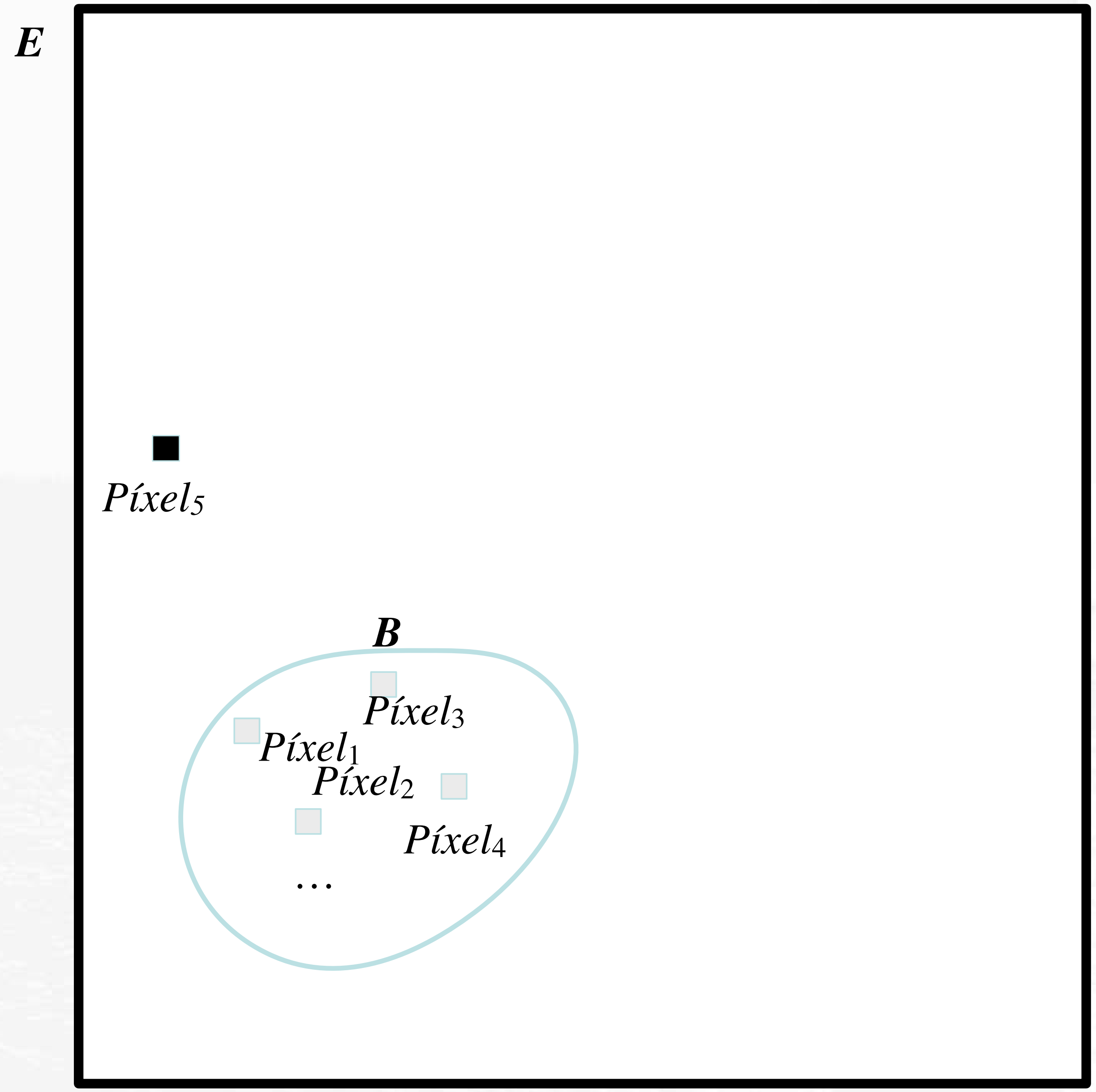
$\boldsymbol{E}$



E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$



E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

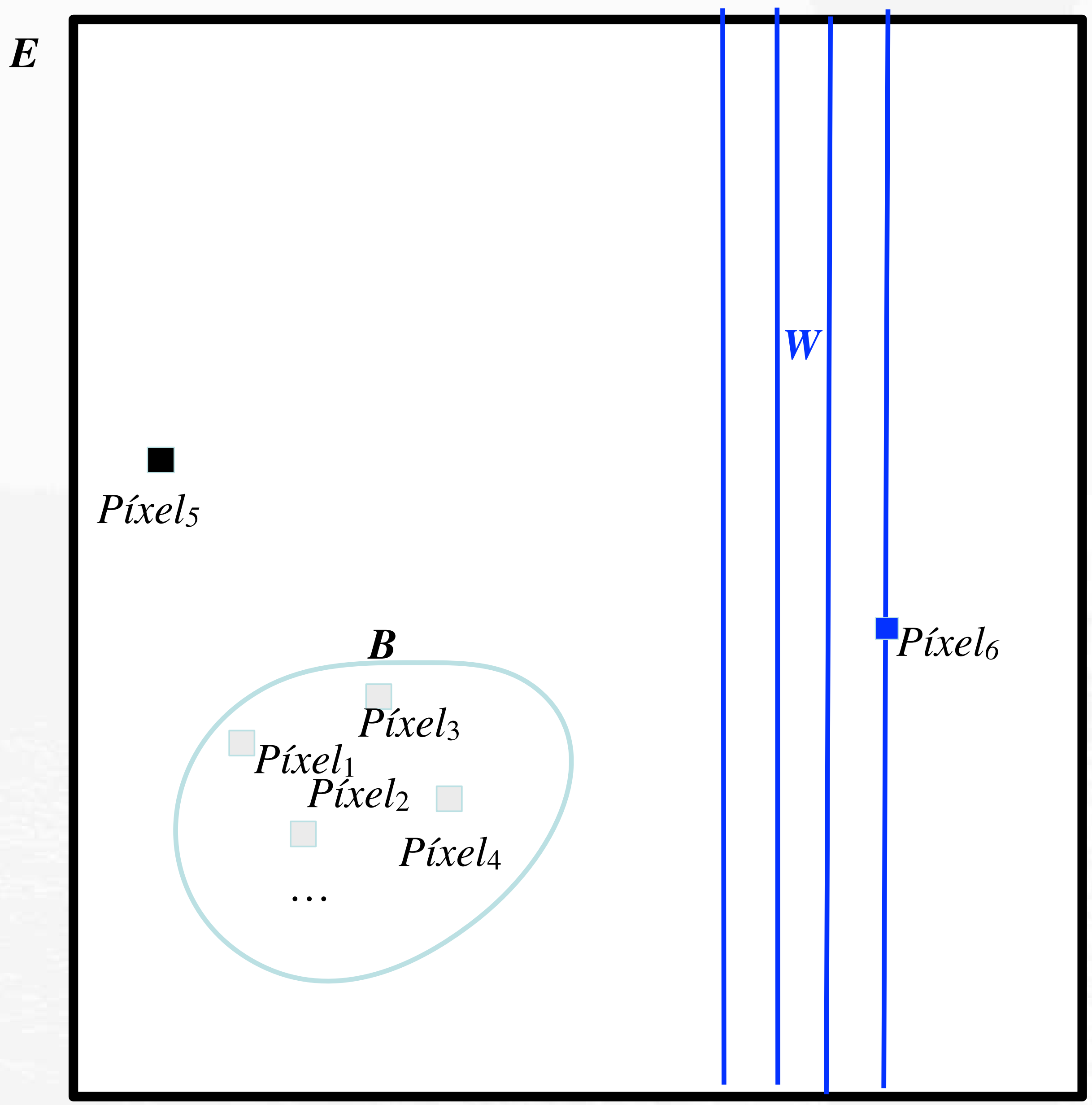
Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$$

$$Pr(W^c) = 0.996$$

Si B es subconjunto de E: $$Pr(B) = \frac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$$



E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

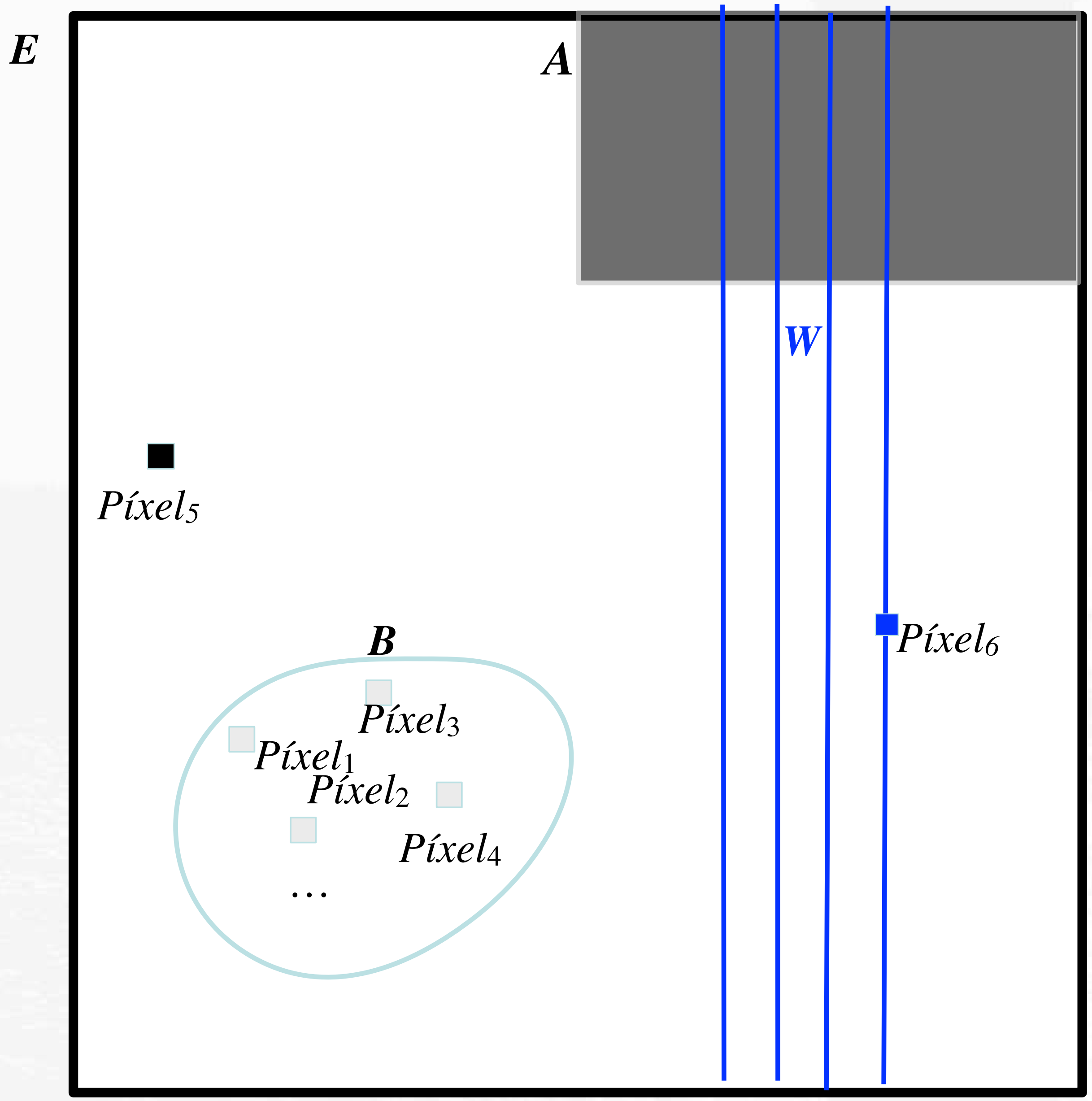
$$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$$

$Pr(W^c) = 0.996$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

$Pr(A) = 0.125$

A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles



Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

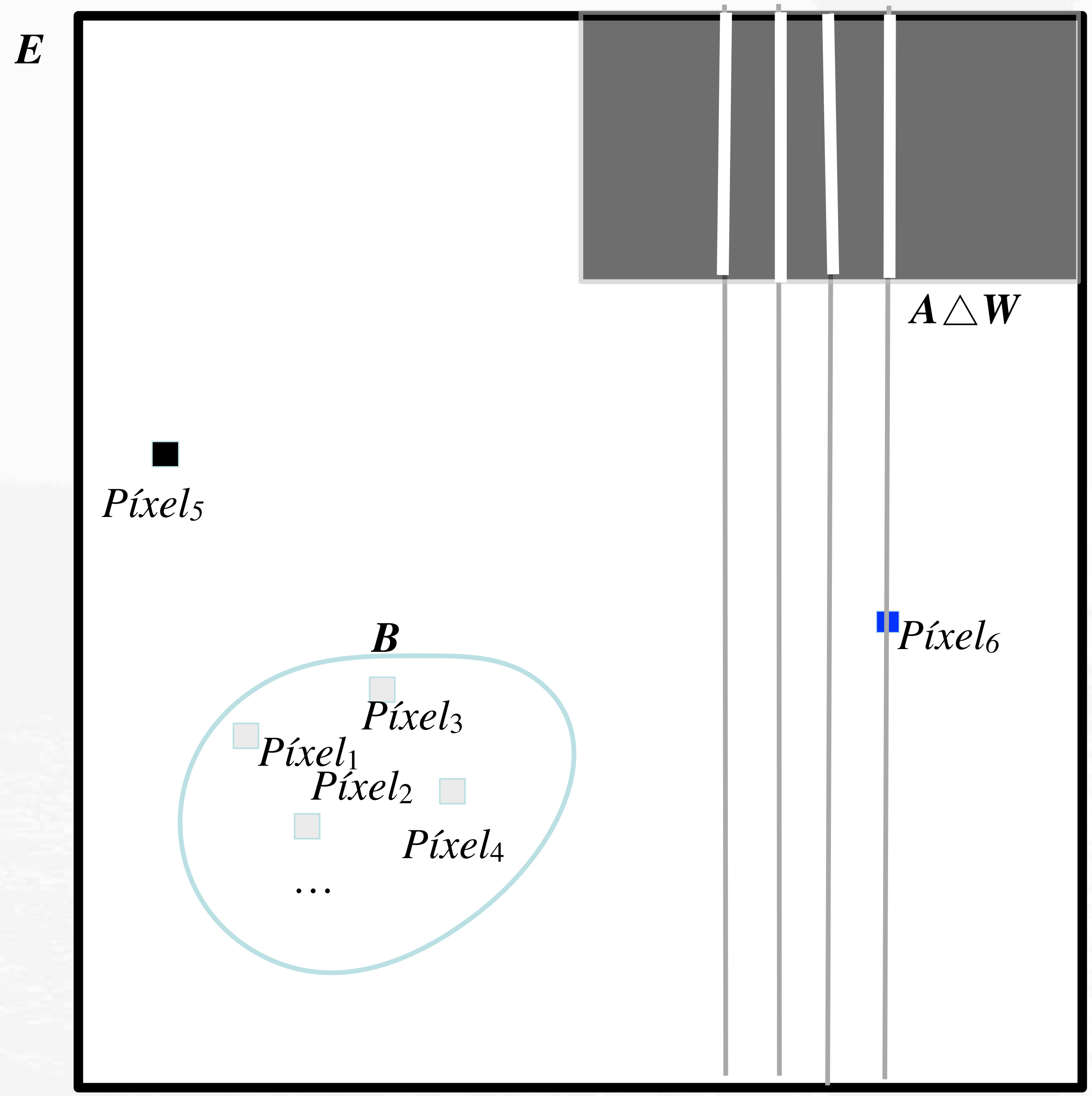
A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$

$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = 0{,}127 > Pr(A)$

$Pr(W) = \dfrac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(W^c) = 0.996$



Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$:
"Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$

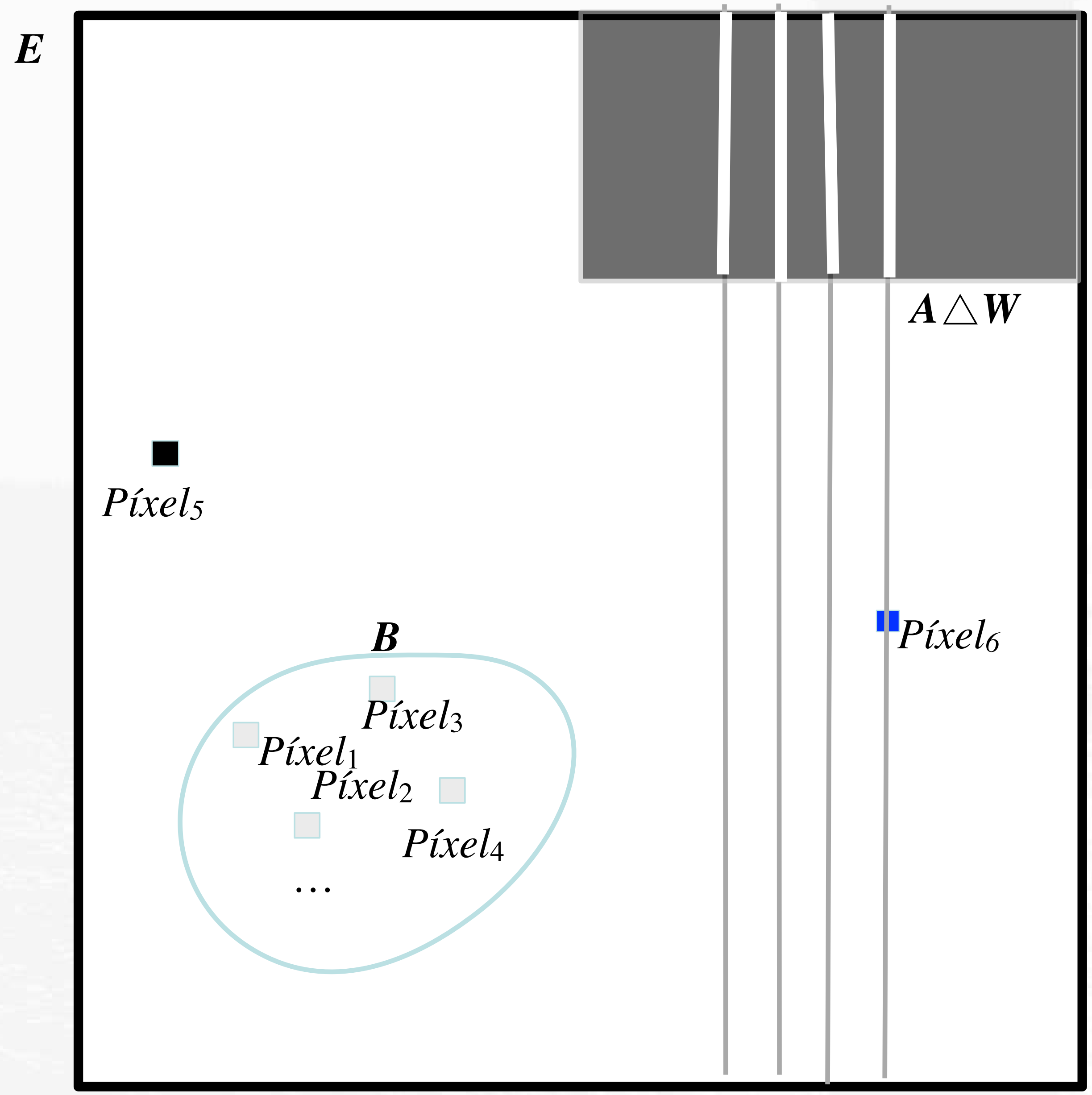
A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$

$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = 0{,}127 > Pr(A)$

$$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$$

$$Pr(W^c) = 0.996$$



Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$: "Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \neq Pr(A)$$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

$\boldsymbol{E}$ cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(\boldsymbol{E}) = 1.000$

$\boldsymbol{W}$ subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

Si $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de $\boldsymbol{E}$: $Pr(\boldsymbol{B}) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

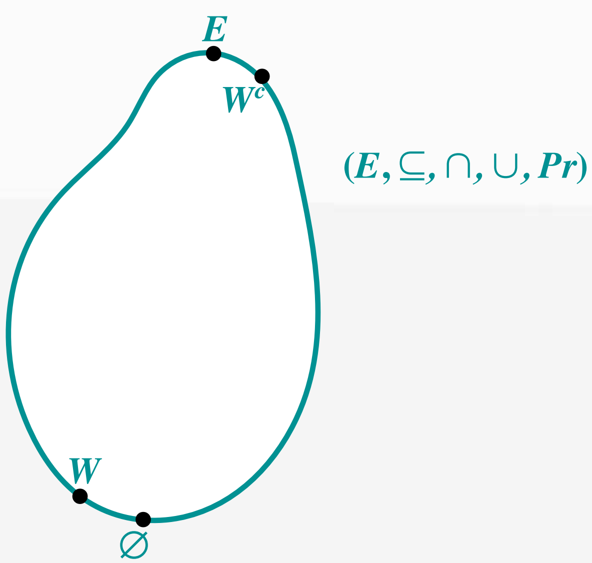
$\boldsymbol{A}$ subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

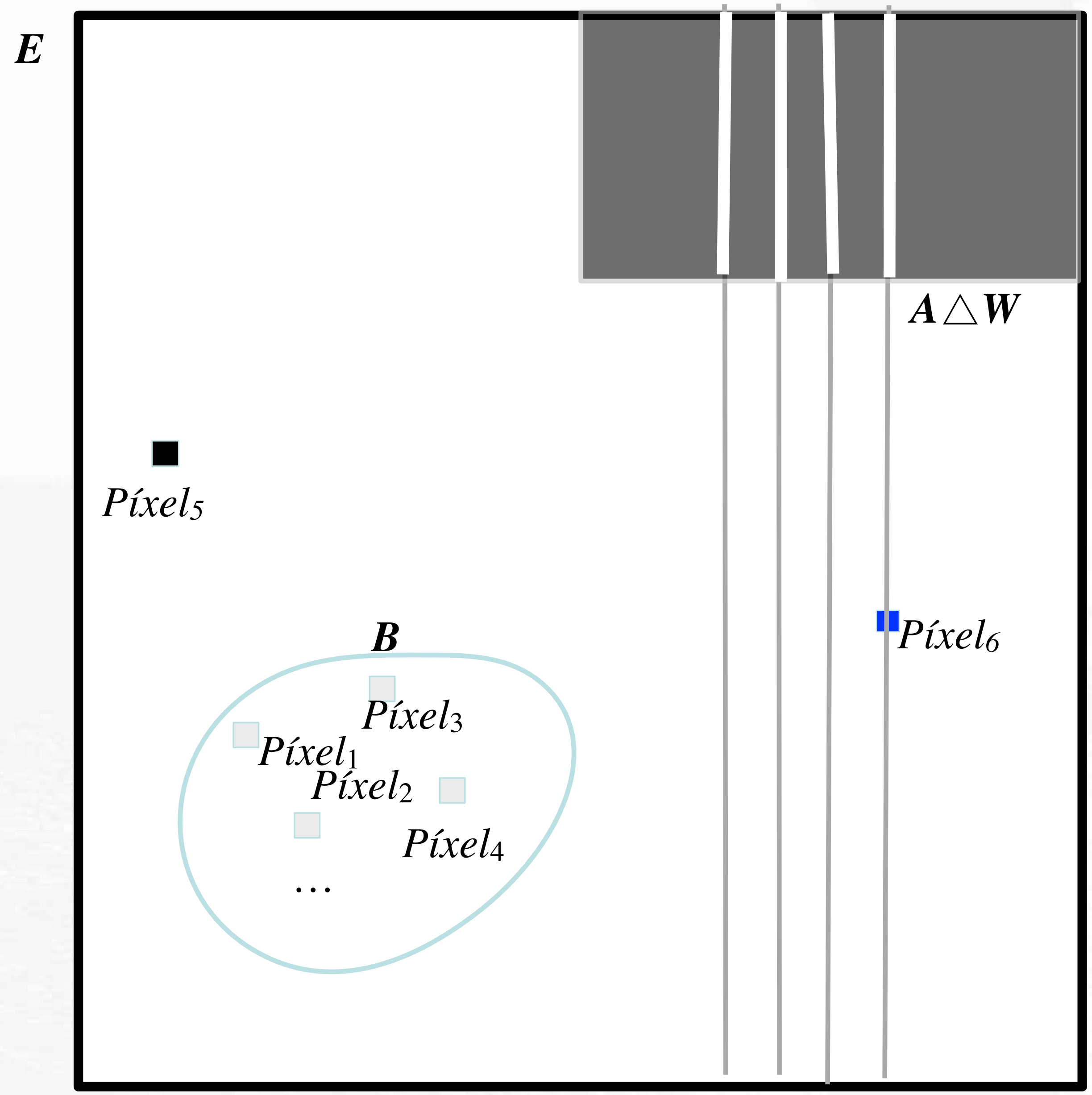
$Pr(\mathbf{A}) = 0.125$

$\widehat{Pr}_{(\mathbf{W},0)}(\mathbf{A}) = Pr(\mathbf{A} \triangle \mathbf{W}) = 0{,}127 > Pr(\mathrm{A})$

$Pr(\mathbf{W}) = \dfrac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(\mathbf{W}^c) = 0.996$





Subconjunto diferencia simétrica $\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}$:
"Una visión de $\boldsymbol{A}$ desde la perspectiva que proporciona $\boldsymbol{W}$".

$$\widehat{Pr}_{(\mathbf{W},0)}(\mathbf{A}) = Pr(\mathbf{A} \triangle \mathbf{W}) \triangle \mathbf{0} = Pr(\mathbf{A} \triangle \mathbf{W}) = Pr((\mathbf{A} \cap \mathbf{W}^c) \cup (\mathbf{A}^c \cap \mathbf{W})) \neq Pr(\mathbf{A})$$

$\boldsymbol{Pr} : \boldsymbol{P(E)} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(\boldsymbol{P(E)}, \subseteq)$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

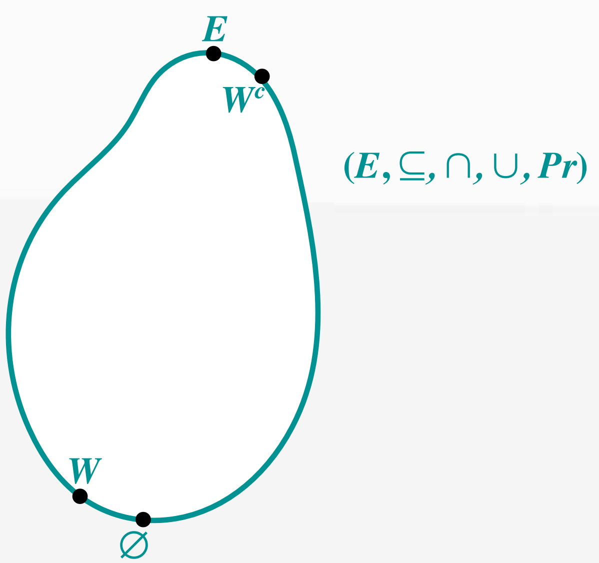
$Pr(A) = 0.125$

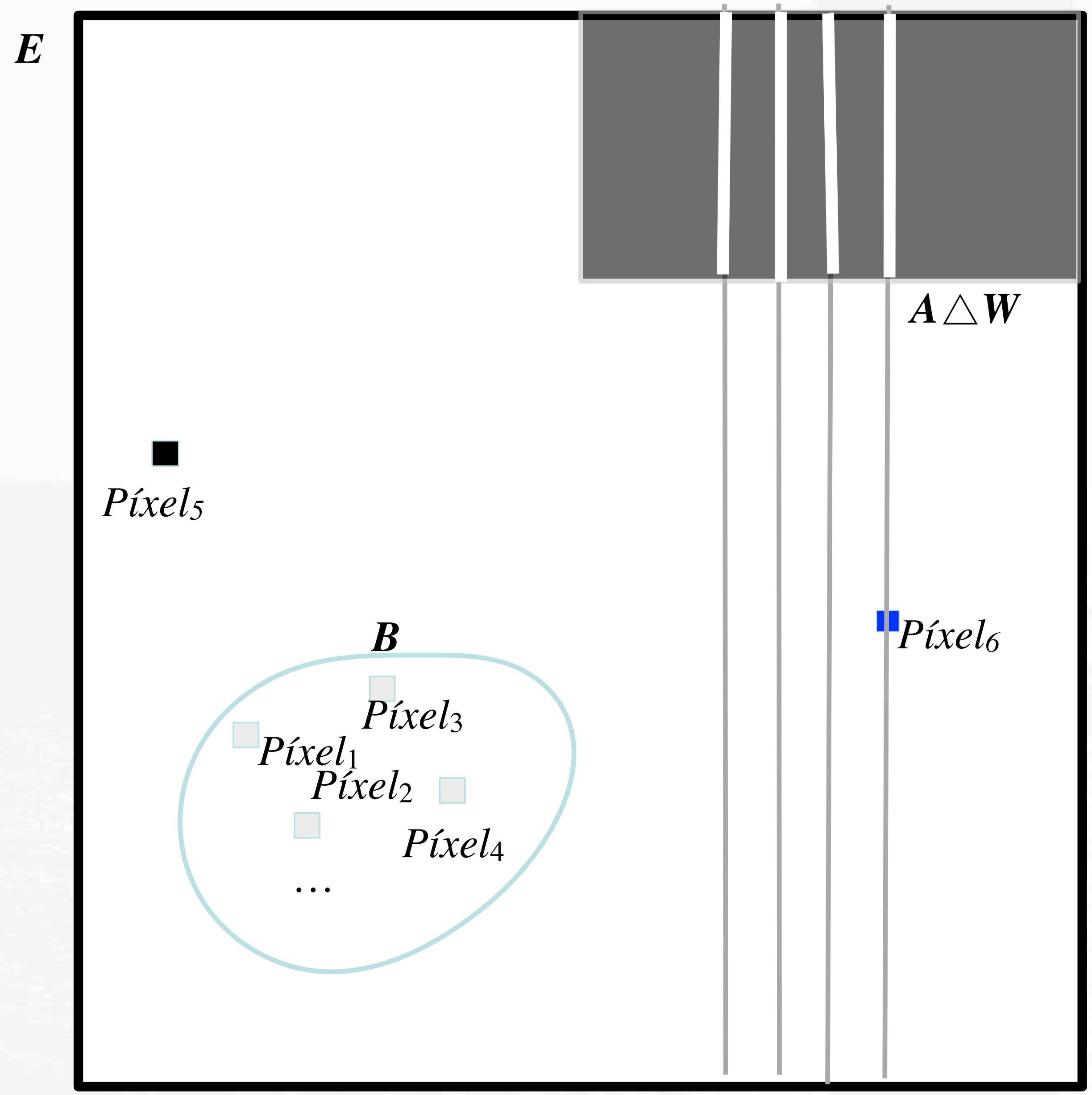
$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = 0{,}127 > Pr(A)$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

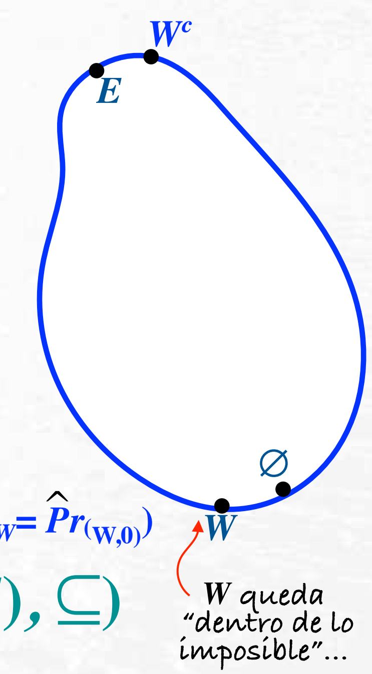
$Pr(W) = \dfrac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(W^c) = 0.996$





Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$: "Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".



$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \neq Pr(A)$$

$Pr : P(E) \to [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

$\widehat{Pr}_{(W,0)} : P(E) \to [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3275606

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$$Pr(W) = \frac{4\text{x}10^3}{10^6} = 0.004$$

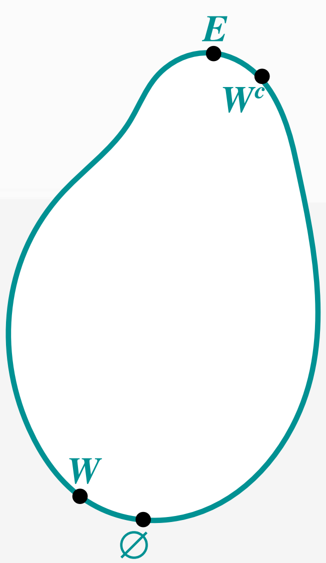
$Pr(W^c) = 0.996$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

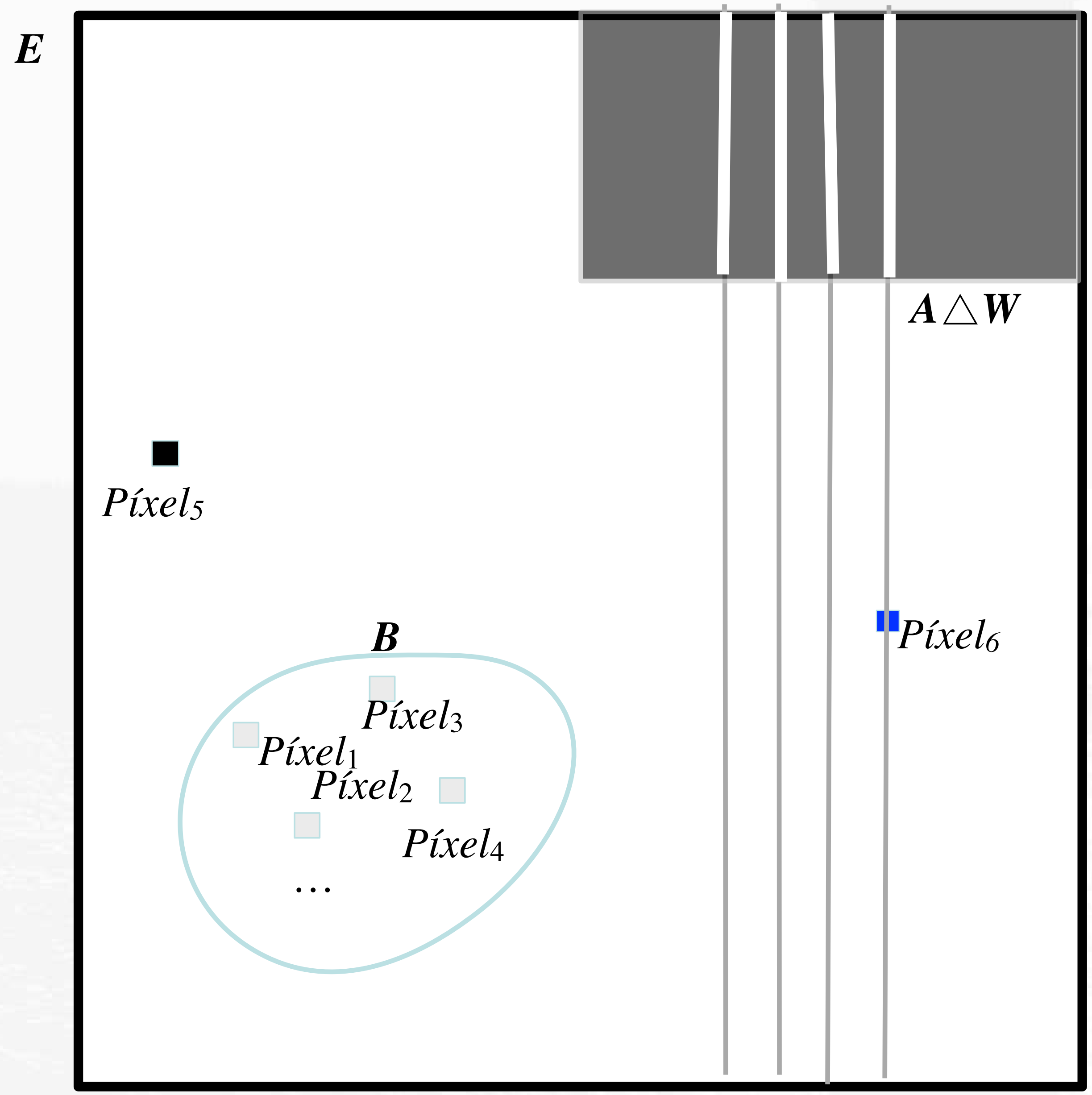
$Pr(A) = 0.125$

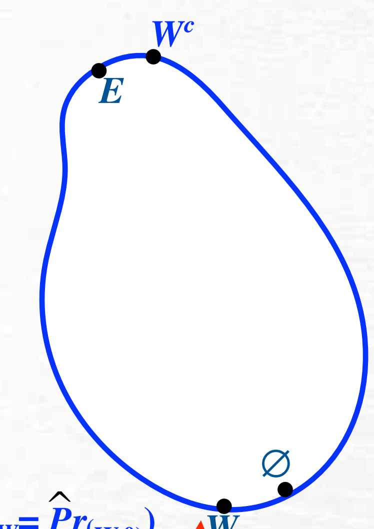
A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = 0{,}127 > Pr(A)$



$(E, \subseteq, \cap, \cup, Pr)$





$(E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, m_W = \widehat{Pr}_{(W,0)})$

W queda "dentro de lo imposible"...

Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$: "Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \neq Pr(A)$$

$Pr : P(E) \to [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

$\widehat{Pr}_{(W,0)} : P(E) \to [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

¿Podemos llamarla w-probabilidad?

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3275606

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$$

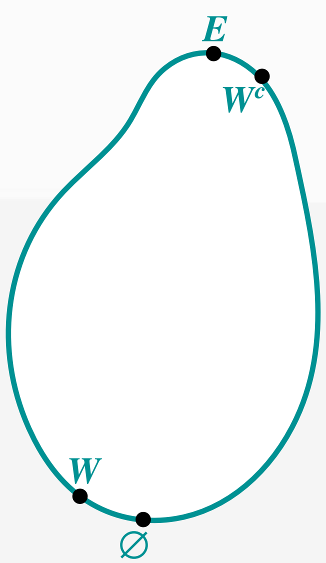
$Pr(W^c) = 0.996$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$

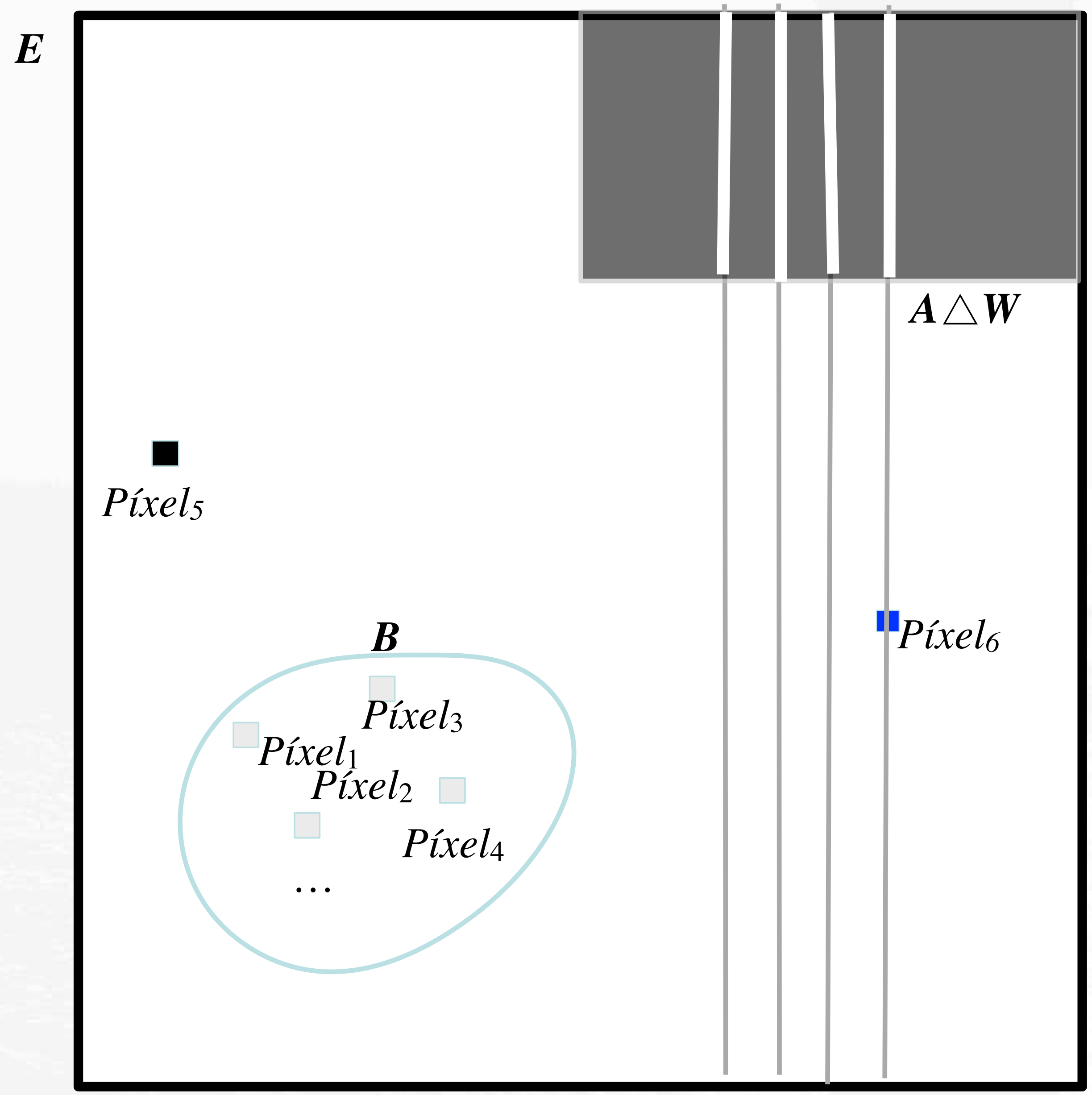
A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$

$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) =$ $0{,}127 > Pr(A)$

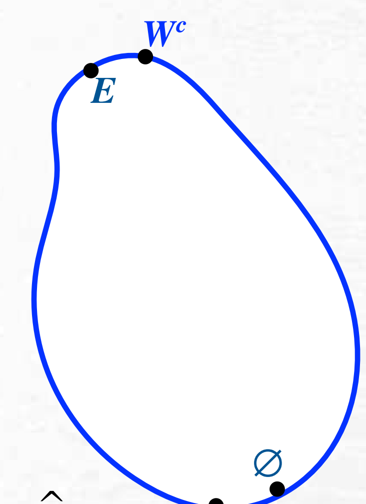


$(E, \subseteq, \cap, \cup, Pr)$



El suceso B representado en E verifica $B \cap W = \varnothing$, es decir $B \subseteq W^c$, luego $\widehat{Pr}_{(W,0)}(B) = Pr(B \triangle W) =$ $Pr(B \cap W^c) + Pr(B^c \cap W) =$ $Pr(B) + Pr(W) > Pr(B)$.

Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$: "Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".



$(E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, m_W = \widehat{Pr}_{(W,0)})$

W queda "dentro de lo imposible"...

$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle \mathbf{0} = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \neq Pr(A)$$

$Pr : P(E) \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

$\widehat{Pr}_{(W,0)} : P(E) \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

¿Podemos llamarla w-probabilidad?

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices
AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009);
https://doi.org/10.1063/1.3275606

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

Normalizamos para que $Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

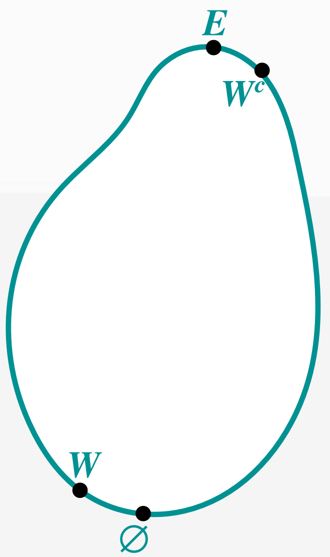
$Pr(W^c) = 0.996$

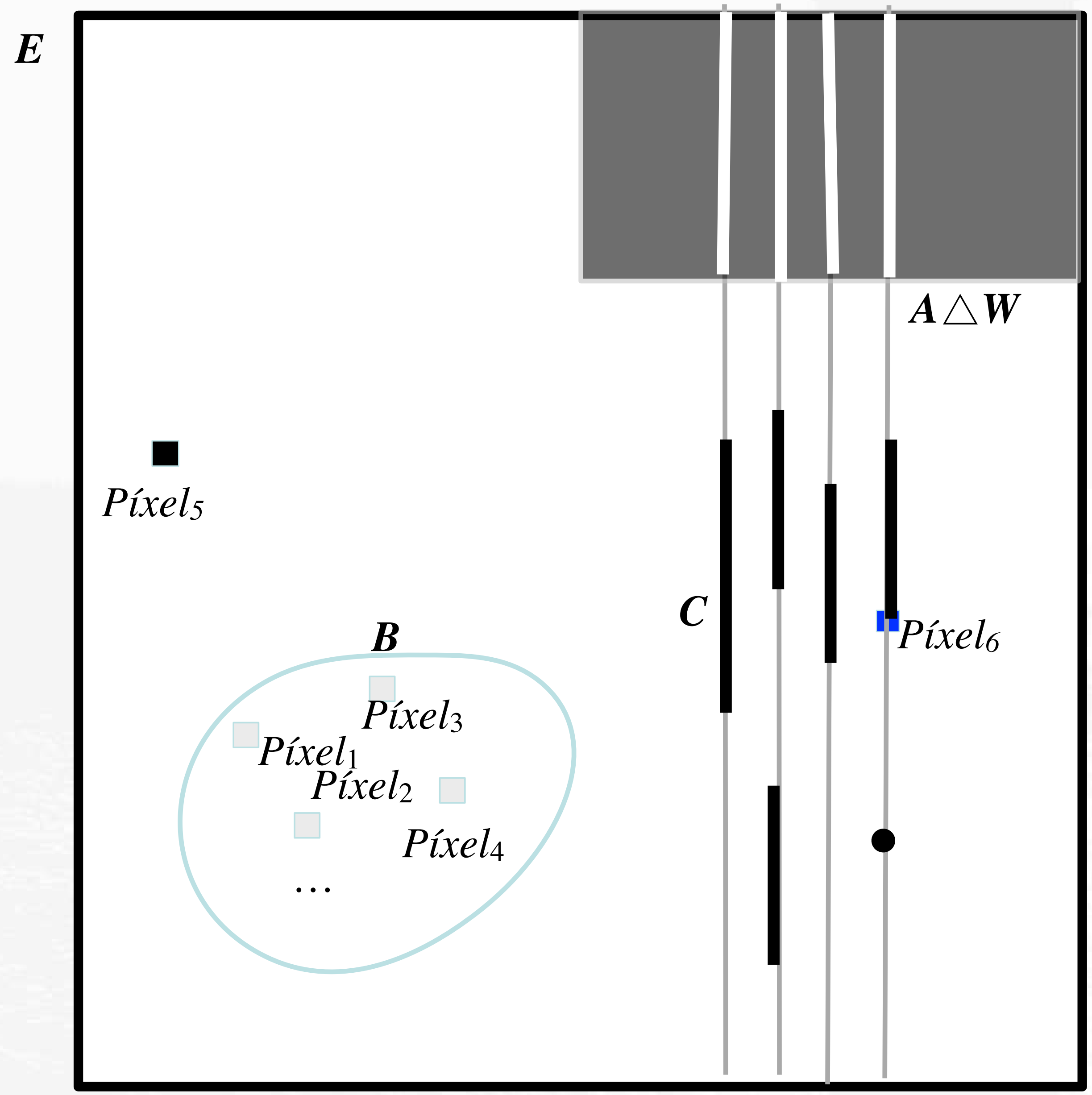
Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \frac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$

A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$

$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) = 0{,}127 > Pr(A)$

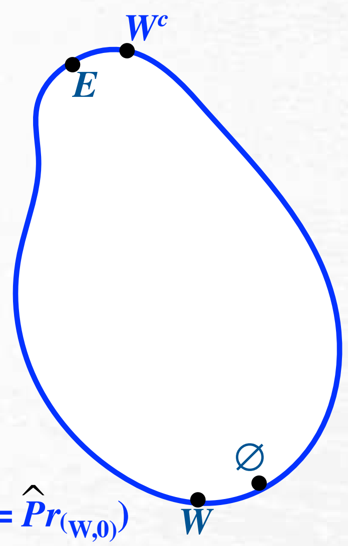




El suceso B representado en E verifica $B \cap W = \varnothing$, es decir $B \subseteq W^c$, luego $\widehat{Pr}_{(W,0)}(B) = Pr(B \triangle W) = Pr(B \cap W^c) + Pr(B^c \cap W) = Pr(B) + Pr(W) > Pr(B)$.

El suceso C verifica $C \subseteq W$, luego $\widehat{Pr}_{(W,0)}(C) = Pr(C \triangle W) = Pr(C \cap W^c) + Pr(C^c \cap W) = Pr(W - C) = Pr(W) - Pr(C)$.

Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$: "Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".



$$\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \triangle W) \triangle 0 = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \neq Pr(A)$$

$Pr : P(E) \to [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

$\widehat{Pr}_{(W,0)} : P(E) \to [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

¿Podemos llamarla w-probabilidad?

(**) Kevin H. Knuth (2009). Measuring on Lattices AIP Conference Proceedings **1193**, 132 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3275606

Ejemplos: Órdenes de actividad y probabilidad (2)

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento

$U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

Puede ocurrir:

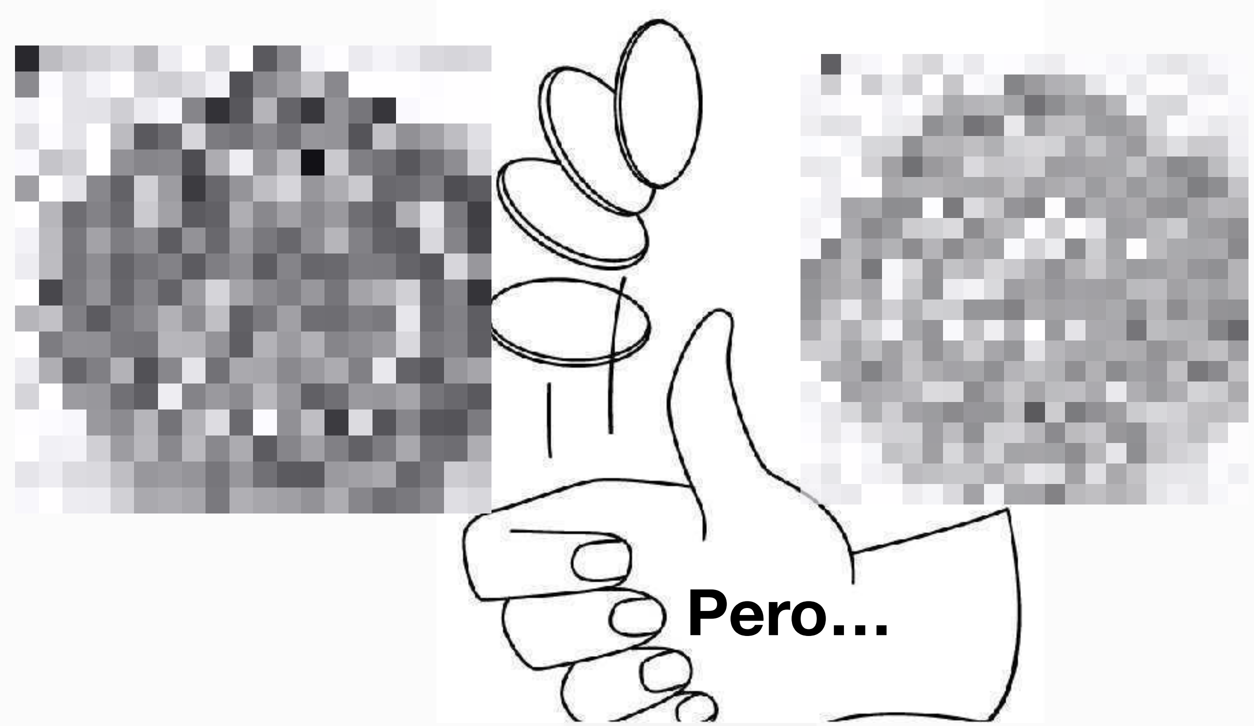
https://youtu.be/HH7tTR2Nv5E

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$



Puede ocurrir:

https://youtu.be/HH7tTR2Nv5E

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

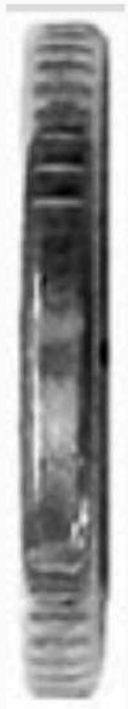
{} suceso: obtener cara en un lanzamiento

{} suceso: obtener cruz en un lanzamiento

$U=$ {{},{}}

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E=$ {{},{},{|}}



El árbitro sigue un protocolo <u>necesario para comenzar</u>:

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

$\{\ \}$ suceso: obtener cara en un lanzamiento

$\{\ \}$ suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

$\{\ |\ \}$ suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E=\{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprobables:

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Según la experiencia: $\xi \approx 1/6000$)

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (asociado al protocolo), " lanzar una moneda <u>hasta</u> obtener cara o cruz".

El árbitro sigue un protocolo <u>necesario para comenzar</u>:

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U = \{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprobables:

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

y $Pr(\{|\}) = \xi$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Según la experiencia: $\xi \approx 1/6000$)

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (asociado al protocolo), " lanzar una moneda <u>hasta</u> obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ ),\ (\ ),\ (|\ ),\ (|\ ),\ (||\ ),\ (||\ ),\ \ldots,\ (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E_1), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$ $\quad Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los <u>sucesos importantes</u> son los asociados al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir cara o cruz. (Y si es posible, con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ),\ (|\ ),\ (||\ ),\ \ldots\}$ $\quad + = \{(\ ),\ (|\ ),\ (||\ ),\ \ldots\}$

El árbitro sigue un protocolo __necesario para comenzar__:

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U = \{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprobables:

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Según la experiencia: $\xi \approx 1/6000$)

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (asociado al protocolo), " lanzar una moneda __hasta__ obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ ),(\ ),(|\ ),(|\ ),(||\ ),(||\ ),\ldots,(|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E_1), \subseteq, \cap, \cup, {}^c, \varnothing, E)$ $\quad Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los __sucesos importantes__ son los asociados al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir cara o cruz. (Y si es posible, con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ),(|\ ),(||\ ),\ldots\}$ $\quad + = \{(\ ),(|\ ),(||\ ),\ldots\}$ $\quad E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+\xi+\xi^2+\xi^3+\cdots) = \alpha/(1-\xi) = \alpha/2\alpha = 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un único lanzamiento, por lo que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado "canto":

$$W = \{(|\ ),(|\ ),(||\ ),(||\ ),\ldots,(|||\ldots)\}.$$

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

$U = \{\{|\}, \{\ \}\}$

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \}, \{\ \}, \{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

$W_1 = \{(||| \dots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ ), \dots, (|\ ), (||\ ), (||\ ), \dots, (||| \dots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \dots\}$ $(||\ ), \dots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(||| \dots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ $= 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \dots, (||| \dots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento

$U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E=\{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

$W_1 = \{(|||\ \ldots\ )\}$

("La pesadilla del árbitro")

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\ \{\ \}\ ) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$y\ Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ... ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ \ldots, (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ ... $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i ... dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car ... con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \ldots\}$ ... $(||\ ), \ldots\}$ $\quad E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+\xi+\xi^2+\xi^3+$ ... $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un ... que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado ... $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

y $Pr(\{|\}) = \xi$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

$W_1 = \{(|||\ \ldots\ )\}$

("La pesadilla del árbitro")

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ ), \ldots, (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \ldots\}$ $(||\ ), \ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+ \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado

$W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

$W_1 = \{(|||\ \dots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\ \{\ \}\ ) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ... ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ \ \dots, (|\ \ ), (||\ \ ), (||\ \ ), \dots, (|||\dots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ ... $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i ... dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car ... con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ \ ), (|\ \ ), (||\ \ ), \dots\}$ ... $(||\ \ ), \dots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(||||\dots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+\xi+\xi^2+\xi^3+$ ... $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í ... que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado ... $W = \{(|\ \ ), (|\ \ ), (||\ \ ), (||\ \ ), \dots, (|||\dots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U = \{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$W_1 = \{(|||| \ldots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ \ , (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\emptyset) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \ldots\}$ $(||\ ), \ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ $= 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un i que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

$U = \{ \{ \}, \{ \} \}$

Espacio de eventos: $E = \{ \{ \}, \{ \}, \{ | \} \}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\{ \}) = Pr(\{ \}) = \alpha$$

$$\text{y } Pr(\{ | \}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

$W_1 = \{(|||| \ldots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ldots , (| \ ), (|| \ ), (|| \ ), \ldots, (||| \ldots) \}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (| \ ), (|| \ ), \ldots\}$ $(|| \ ), \ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||| \ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ $= 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(| \ ), (| \ ), (|| \ ), (|| \ ), \ldots, (||| \ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento

{ | } suceso obtener canto en un lanzamientc

$U = \{\{\ \}, \{\ \}\}$

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \}, \{\ \}, \{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

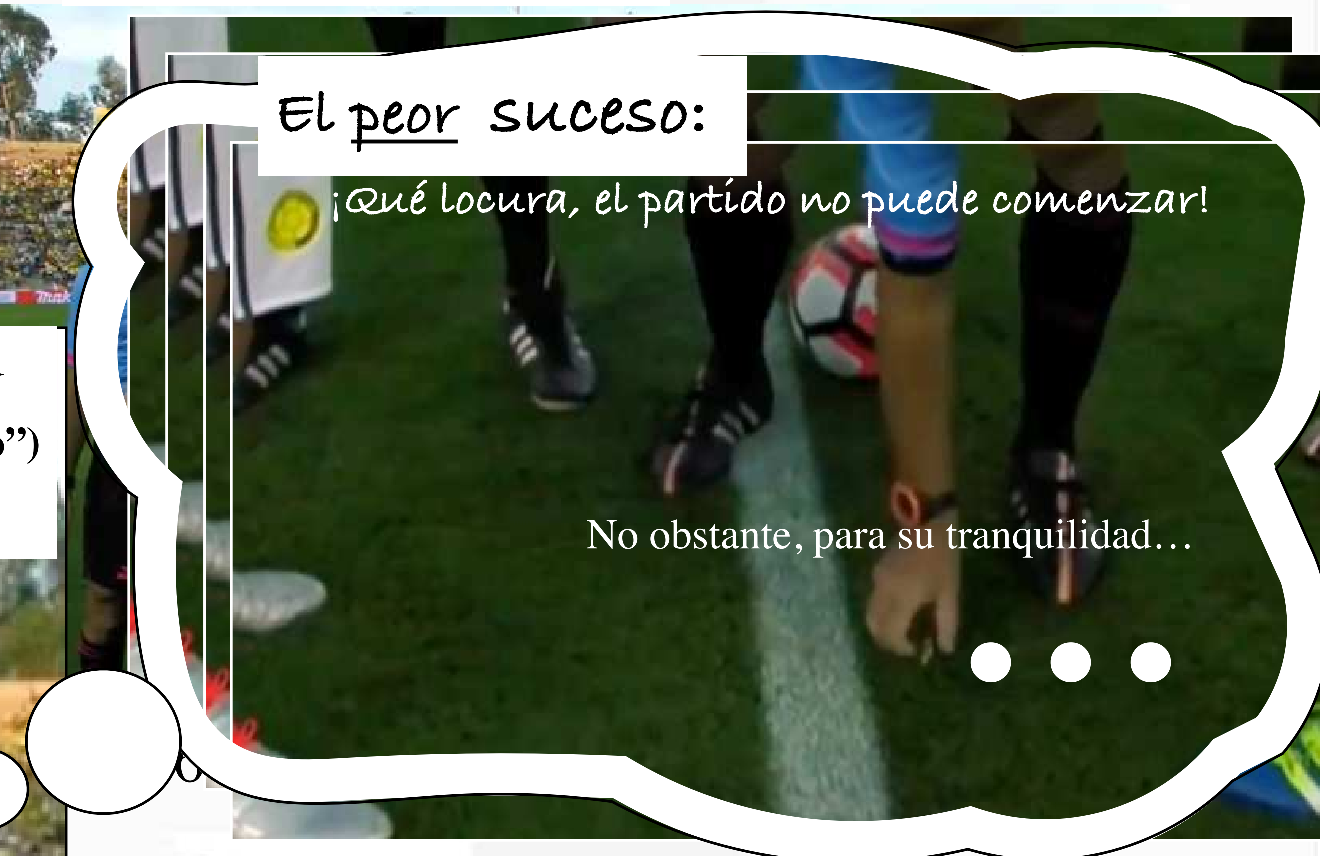
y $Pr(\{|\}) = \xi$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

$W_1 = \{(|||| \dots)\}$

("La pesadilla del árbitro")



Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ \ ,\ (|\ ),\ (||\ ),\ (||\ ),\ \dots,\ (|||\dots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \dots\}$ $(||\ ), \dots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\dots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+\xi+\xi^2+\xi^3+$ $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado

$W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \dots, (|||\dots)\}$.

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U = \{\{\ \}, \{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \}, \{\ \}, \{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$$

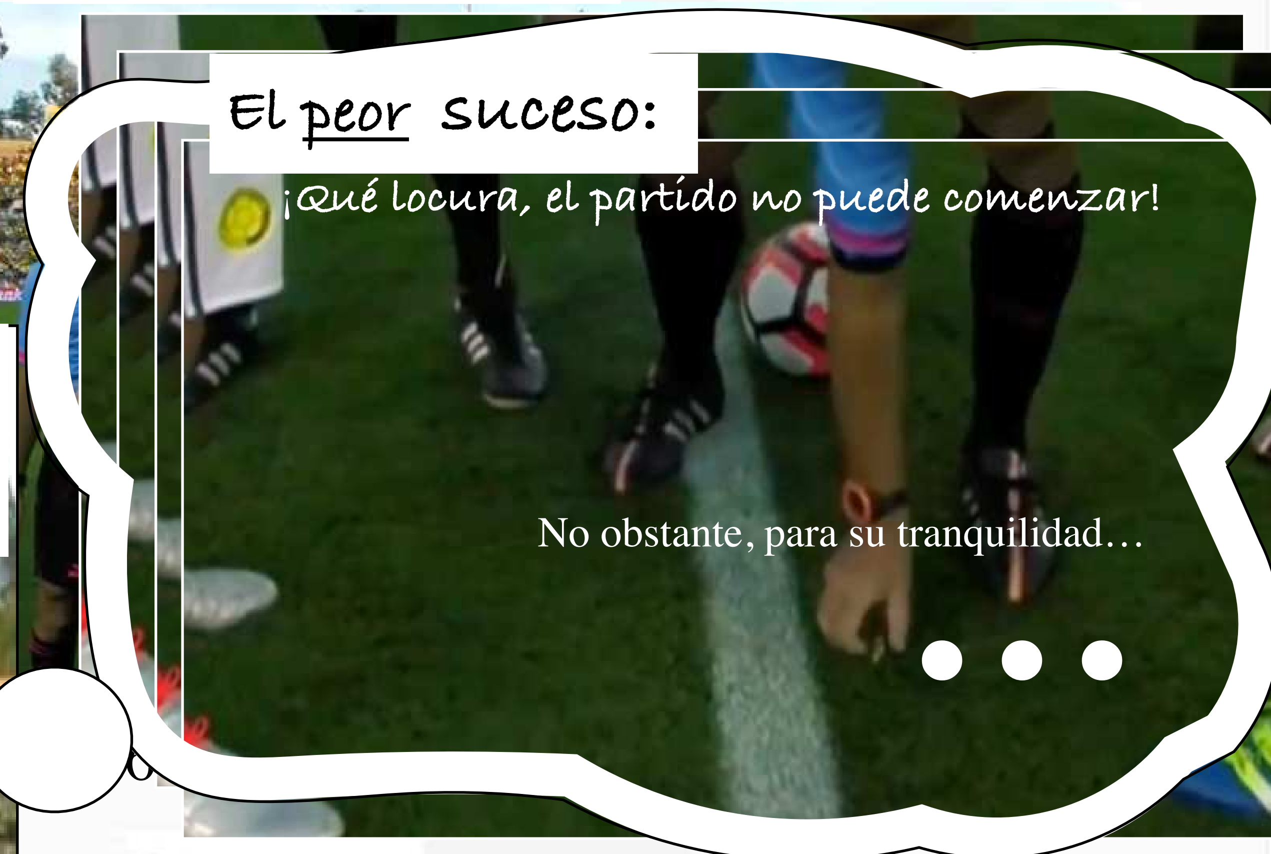
$$\text{y } Pr(\{|\}) = \xi$$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$

$W_1 = \{(|||\ \ldots\ )\}$

("La pesadilla del árbitro")



Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ ), \ldots, (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \ldots\}$ $(||\ ), \ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ $= 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$.

Afortunadamente:

$$Pr_1(W_1) = Pr_1(\{(|||\ \ldots\ )\}) = 0 \ !!!$$

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamientc

$W_1 = \{(|||| \ldots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

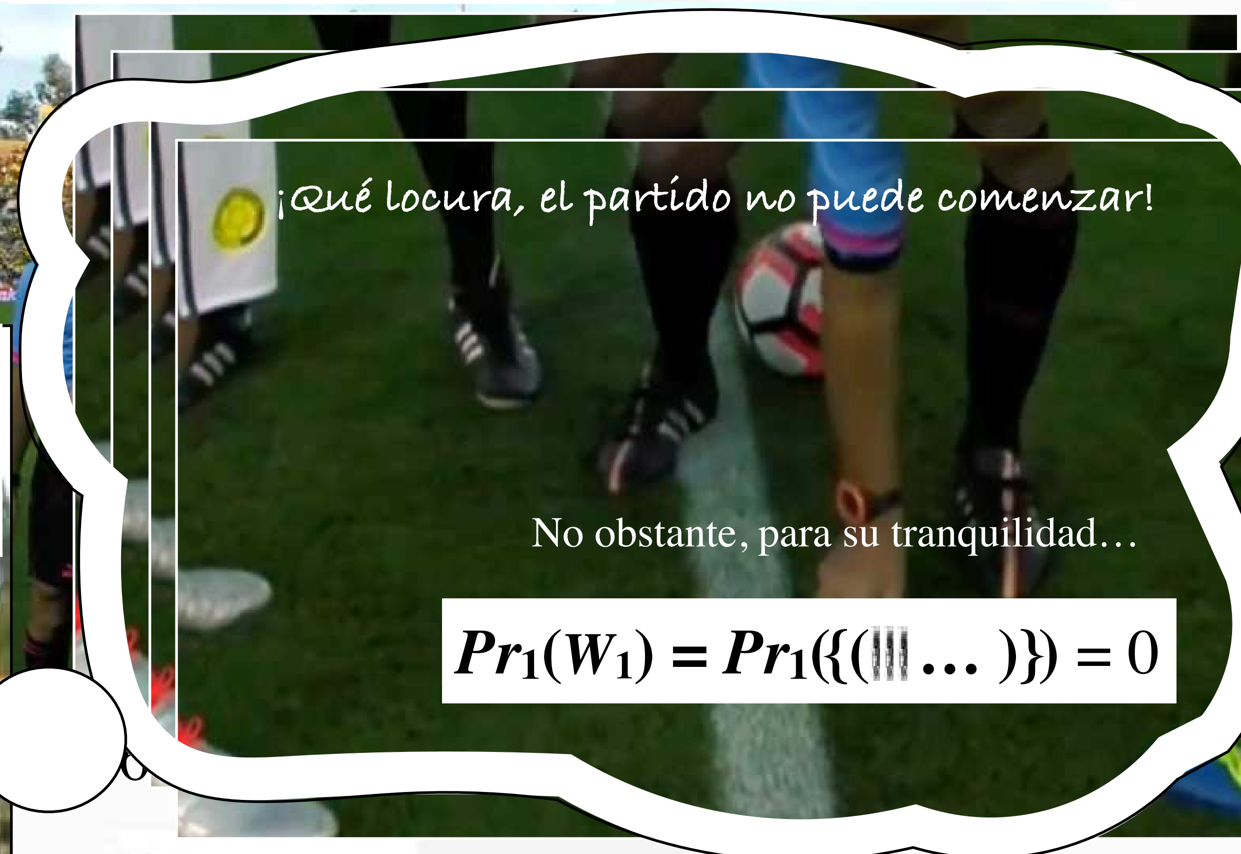
Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$

y $Pr(\{|\}) = \xi$

ξ es tal que $0< \xi < \alpha < 1/2$. (Segú



$$2\alpha + \xi = 1$$

Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ \ ,\ (|\ ),\ (||\ ),\ (||\ ),\ \ldots,\ (|||\ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ),\ (|\ ),\ (||\ )\ ,\ldots\}$ $(||\ ),\ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+ \xi + \xi^2+ \xi^3+$ $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(|\ ),\ (|\ ),\ (||\ ),(||\ ),\ \ldots,\ (|||\ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U = \{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E = \{\{\ \},\{\ \},\{|\}\}$

$W_1 = \{(||| \ldots)\}$

("La pesadilla del árbitro")

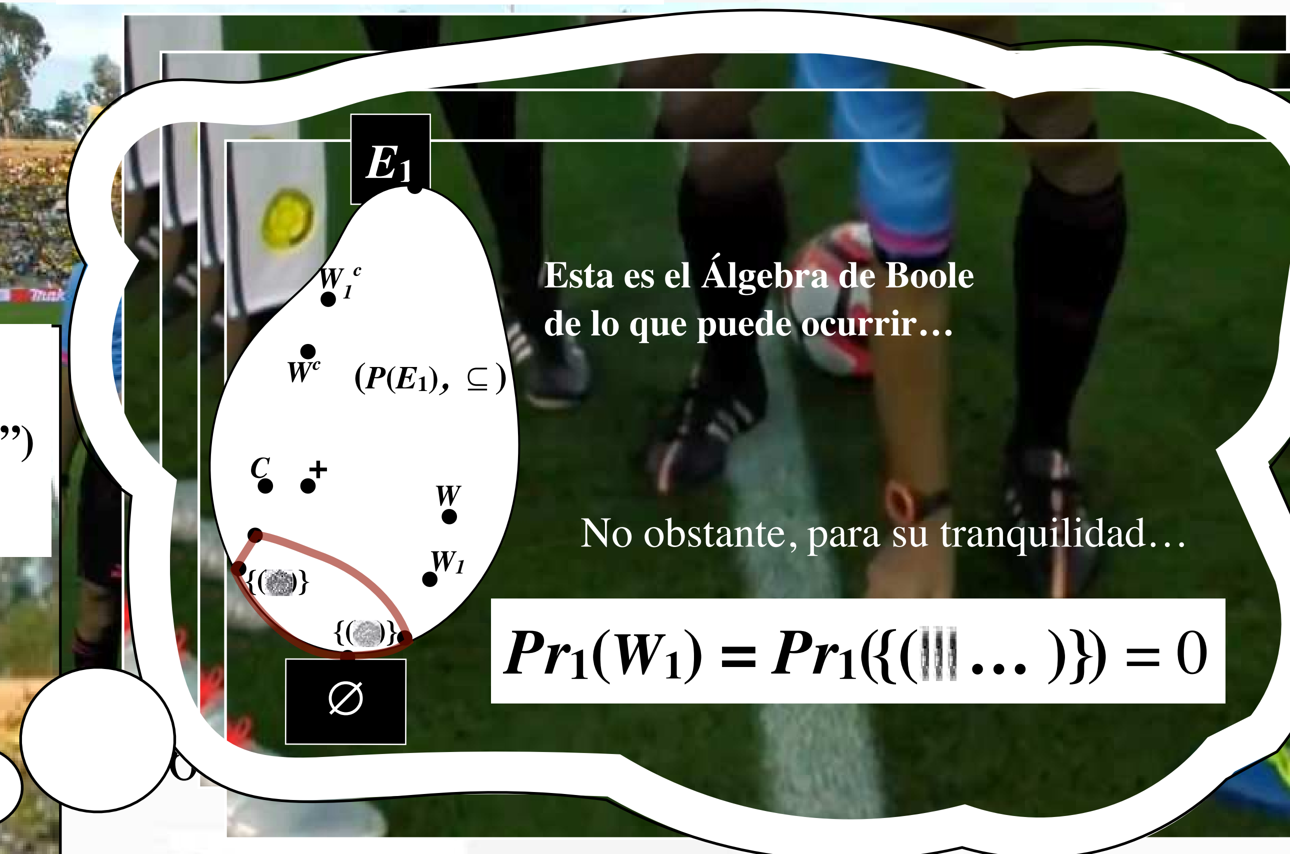
Suponiendo que "cara" y "cruz" son equiprob

$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) = \alpha$

y $Pr(\{|\}) = \xi$

ξ es tal que $0 < \xi < \alpha < 1/2$. (Segú

$$2\alpha + \xi = 1$$



Interés del árbitro: experimento aleatorio, (aso … ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de eventos: $E_1 = \{(\ $ … $, (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (||| \ldots)\}$

Álgebra de sucesos asociada: $(P(E$ … $Pr_1(\emptyset) = 0$

Desde el punto de vista práctico, los sucesos i … dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir: lanzamientos sucesivos hasta conseguir car … con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), (||\ ), \ldots\}$ … $(||\ ), \ldots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(||| \ldots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 +$ … $= 1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

Lo deseable sería cumplir el protocolo con un … que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado por uplas que comienzan por algún resultado … $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (||| \ldots)\}$.

Álgebras de sucesos asociadas a lanzamiento de monedas

Experiencia: "lanzar una moneda normal al aire una vez".

{ } suceso: obtener cara en un lanzamiento

{ } suceso: obtener cruz en un lanzamiento $U=\{\{\ \},\{\ \}\}$

{ | } suceso obtener canto en un lanzamiento

Espacio de eventos: $E=\{\{\ \},\{\ \},$

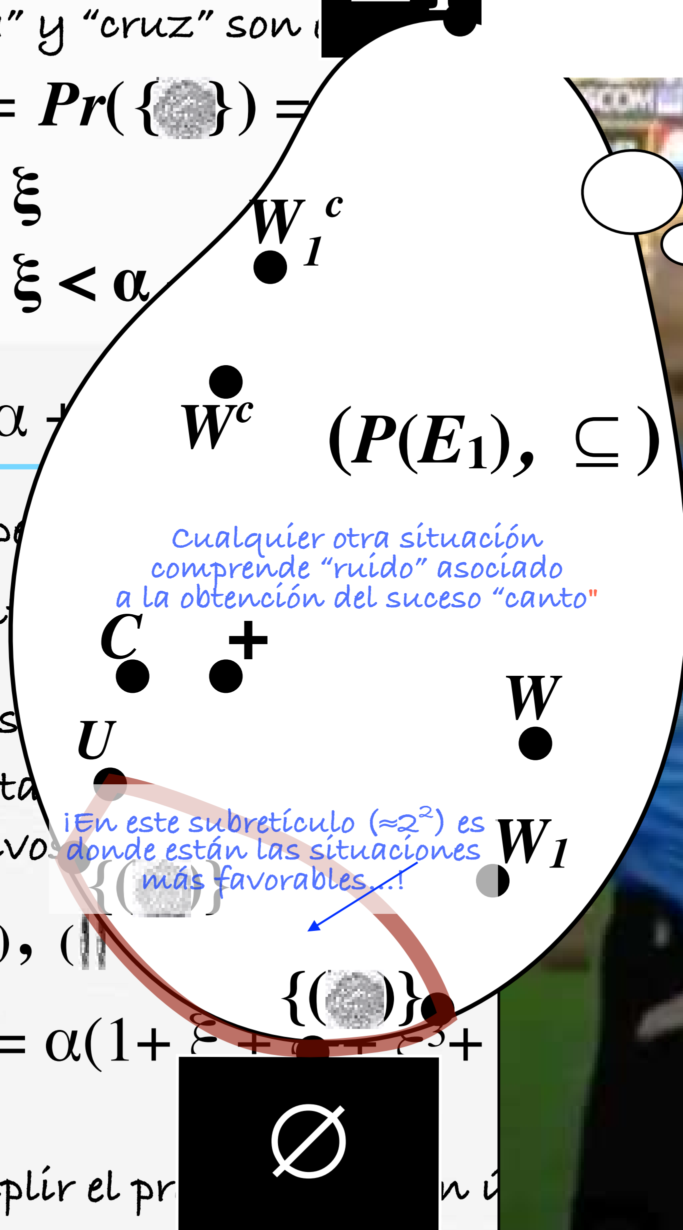
Suponiendo que "cara" y "cruz" son

$Pr(\{\ \}) = Pr(\{\ \}) =$

y $Pr(\{|\}) = \xi$

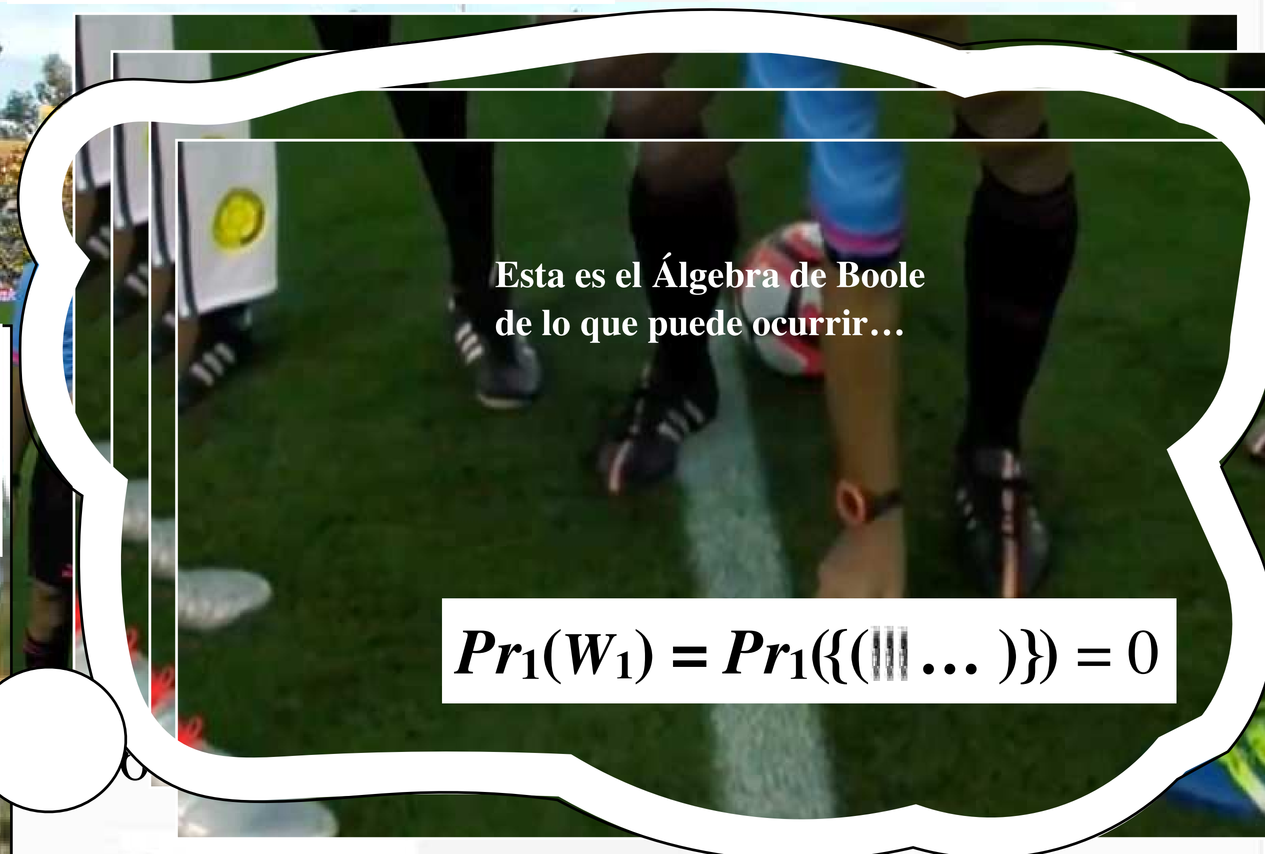
ξ es tal que $0 < \xi < \alpha$

$2\alpha +$



$W_1 = \{(|||\ \dots)\}$

("La pesadilla del árbitro")



Interés del árbitro: exp ar una moneda hasta obtener cara o cruz".

Nuevo espacio de even , (|), (||), (||), …, (||| …) }

Álgebra de sucesos $Pr_1(\varnothing) = 0$

Desde el punto de vista dos al protocolo necesario para comenzar el partido; es decir:

lanzamientos sucesivo con el mínimo "ruido" asociado a la obtención de "canto").

$C = \{(\ ), (|\ ), ($ $(||\ ), \dots\}$ $E_1 = C \cup + \cup \{(|||\dots)\}$

$Pr_1(C) = Pr_1(+) = \alpha(1+\xi+$ $=1/2$ (independiente de los valores α y ξ).

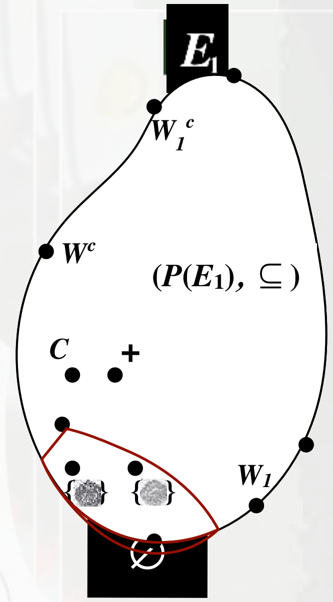
Lo deseable sería cumplir el pr n í que el suceso W "no deseado" más amplio estaría formado

por uplas que comienzan por algún resultado $W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \dots, (|||\ \dots)\}$.

Álgebra de sucesos $((\mathcal{P}(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E_1,{}^c),Pr_1)$

$W = \{ (|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

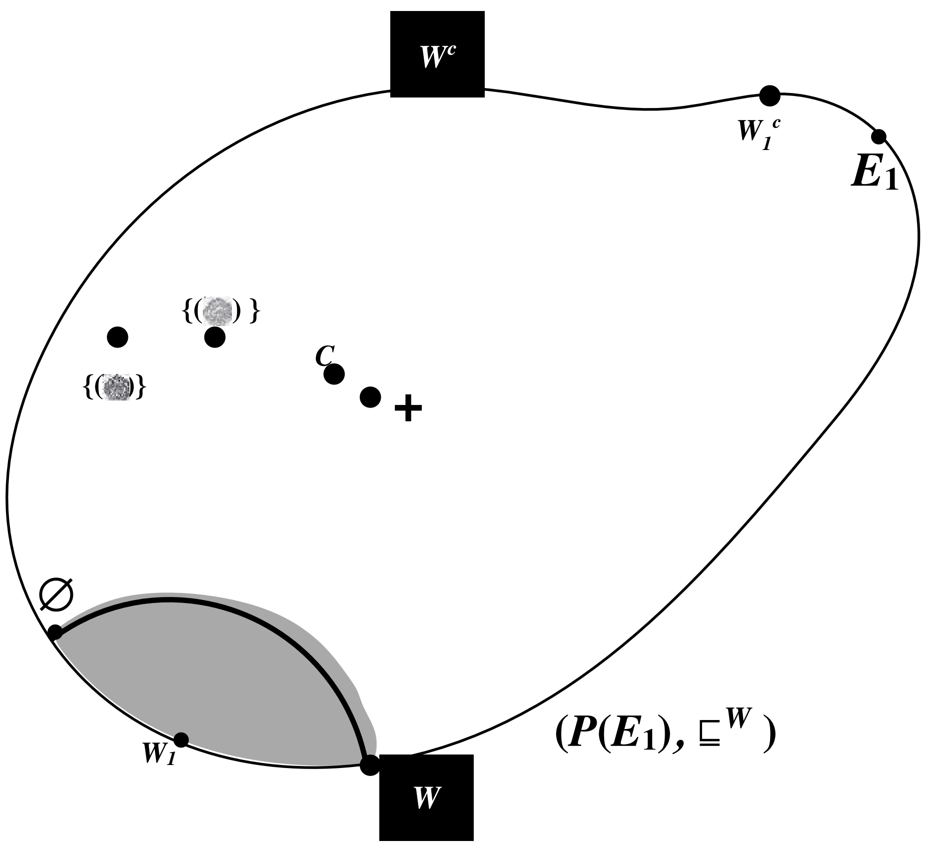
¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES !



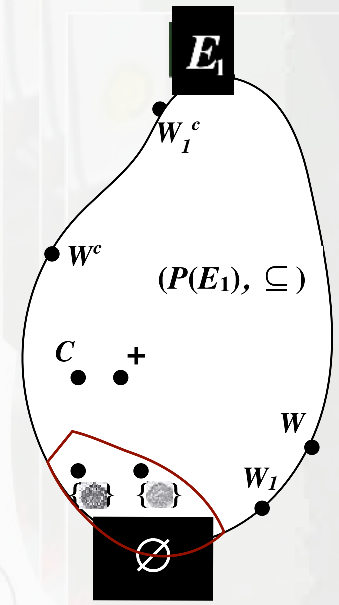
Con el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, ésto se consigue…

$W = \{ (| \ ), (| \ ), (|| \ ), (|| \ ), \ldots, (||| \ldots)\}$ Hecho

¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES ! ☺



Álgebra de sucesos $((P(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E_1,{}^c),Pr_1)$



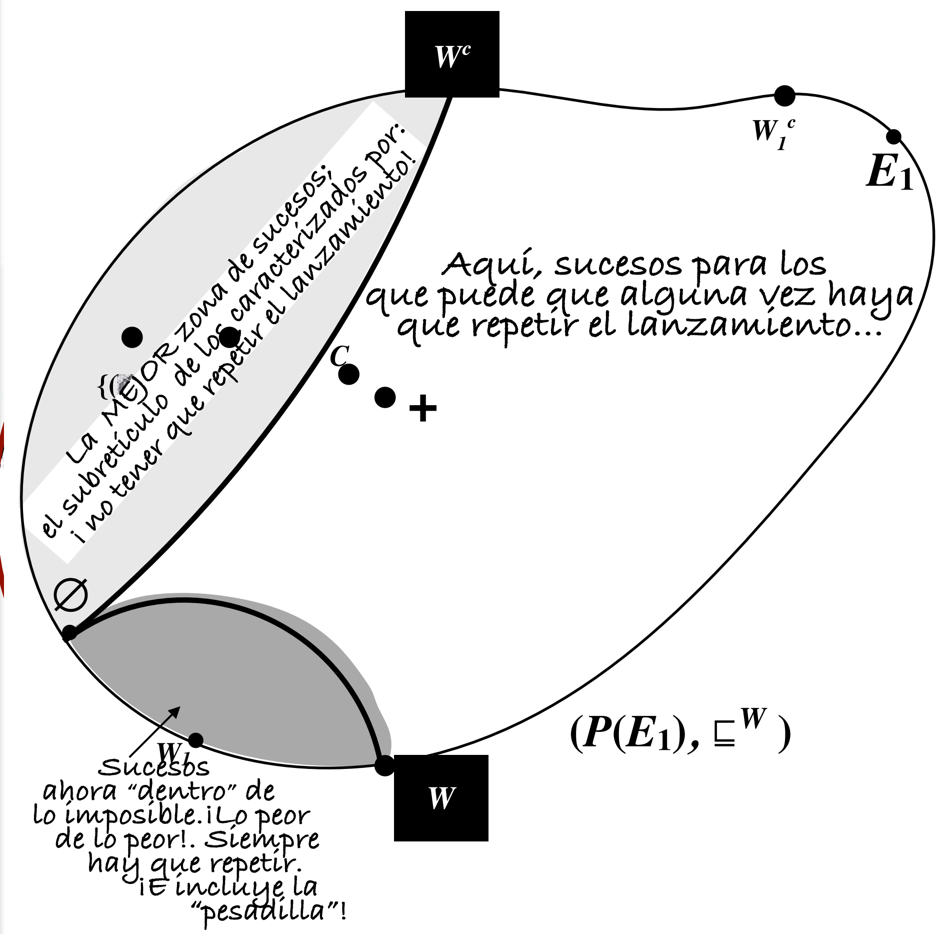
Álgebra de sucesos $((\mathcal{P}(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E_1,{}^c),Pr_1)$

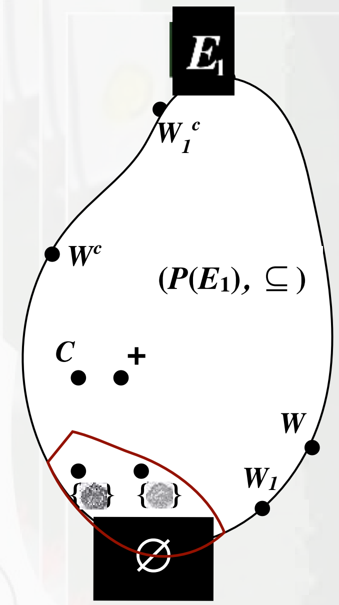
Con el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, ésto se consigue...

$W = \{(| \ldots), (| \ldots), (|| \ldots), (|| \ldots), \ldots (||| \ldots)\}$

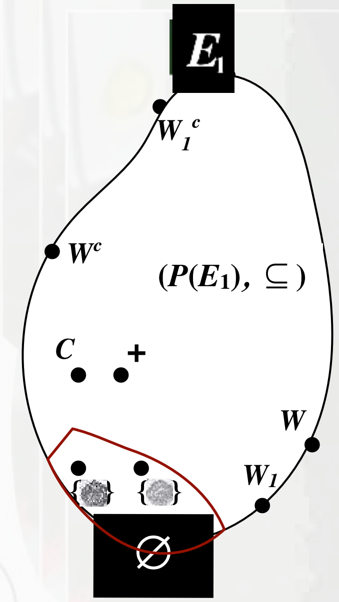
¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES ! ☺

Hecho





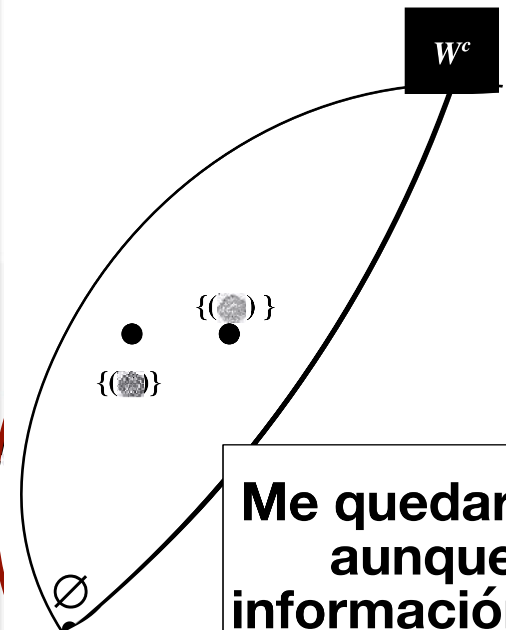
Álgebra de sucesos $((\mathcal{P}(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E_1,{}^c),Pr_1)$



$$\boxed{\widehat{Pr}_{1(w,0)}(A) = Pr_1(A\Delta W)\Delta 0 = Pr_1(A\Delta W)}$$

$W = \{(|\,\cdot), (|\,\cdot), (||\,\cdot), (||\,\cdot), \ldots, (|||\ldots)\}$

¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES !



Me quedaría sólo con esta zona, aunque se pierda mucha información y se modifique otra:

Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({(||)}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(w,0)}$:

$Pr_1(W^c)=1\text{-}\xi\,,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(W^c)=1$

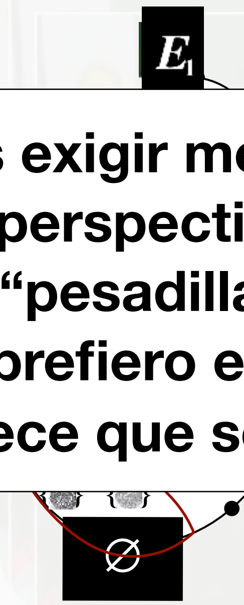
$Pr_1(\varnothing)=0\,,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\varnothing)=\xi$

$Pr_1(\{\cdot\})=(1\text{-}\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{\cdot\})=(1+\xi)/2$

$Pr_1(\{\cdot\})=(1\text{-}\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{\cdot\})=(1+\xi)/2$

Álgebra de sucesos $((\mathcal{P}(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E_1,{}^c),Pr_1)$

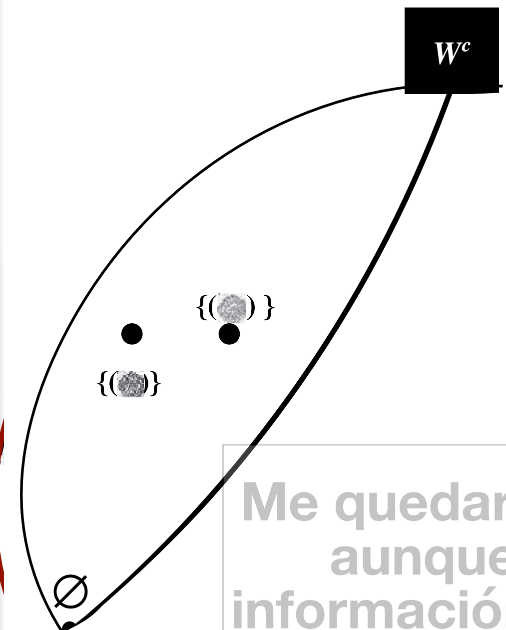
$$\widehat{Pr}_{1(w,0)}(A) = Pr_1(A\Delta W)\Delta 0 = Pr_1(A\Delta W)$$



Podemos exigir menos. Consideraremos sólo una perspectiva <u>que evite</u> lo peor de lo peor: ¡ la "pesadilla" $W_1 = \{(|||\ldots)\}$!
(Aunque prefiero el anterior asociado a W, este caso parece que se ajusta más a la experiencia).

$W = \{(|\,\cdot\,), (|\,\cdot\,), (||\,\cdot\,), (||\,\cdot\,), \ldots, (|||\ldots)\}$

¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES !



Me quedaría sólo con esta zona, aunque se pierda mucha información y se modifique otra:

Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:

Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({(||)}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(w,0)}$:

$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(W^c)=1$

$Pr_1(\varnothing)=0,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\varnothing)=\xi$

$Pr_1(\{(\cdot)\})=(1-\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\cdot)\})=(1+\xi)/2$

$Pr_1(\{(\cdot)\})=(1-\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\cdot)\})=(1+\xi)/2$

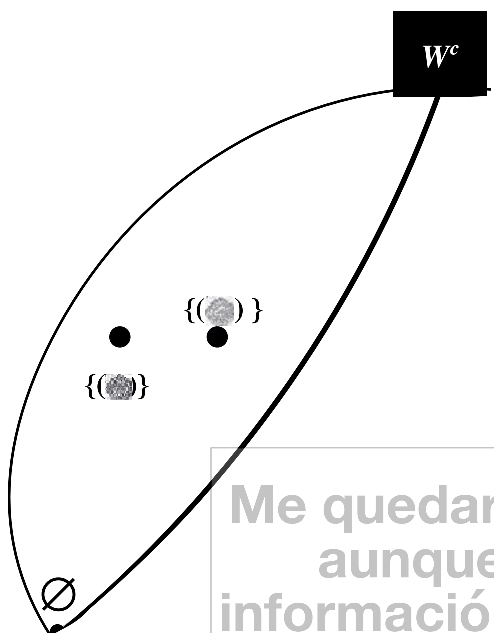
Álgebras de sucesos

Experiencia lanzar una moneda normal al aire una vez.

$$\boxed{\widehat{Pr}_{1(w,0)}(A) = Pr_1(A\Delta W)\Delta 0 = Pr_1(A\Delta W)}$$

$W = \{(|\ ), (|\ ), (||\ ), (||\ ), \ldots, (|||\ldots)\}$

¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES !



Me quedaría sólo con esta zona, aunque se pierda mucha información y se modifique otra:

Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({(||)}), etc...

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(w,0)}$:

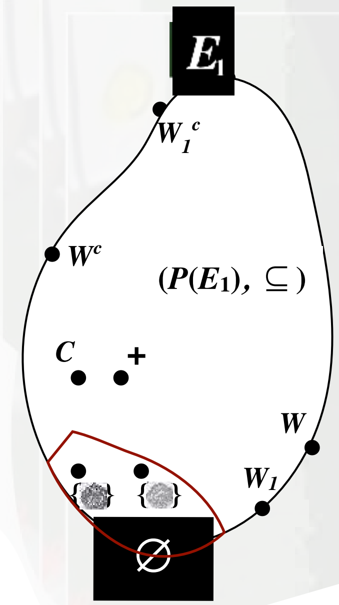
$$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\emptyset)=0,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\emptyset)=\xi$$

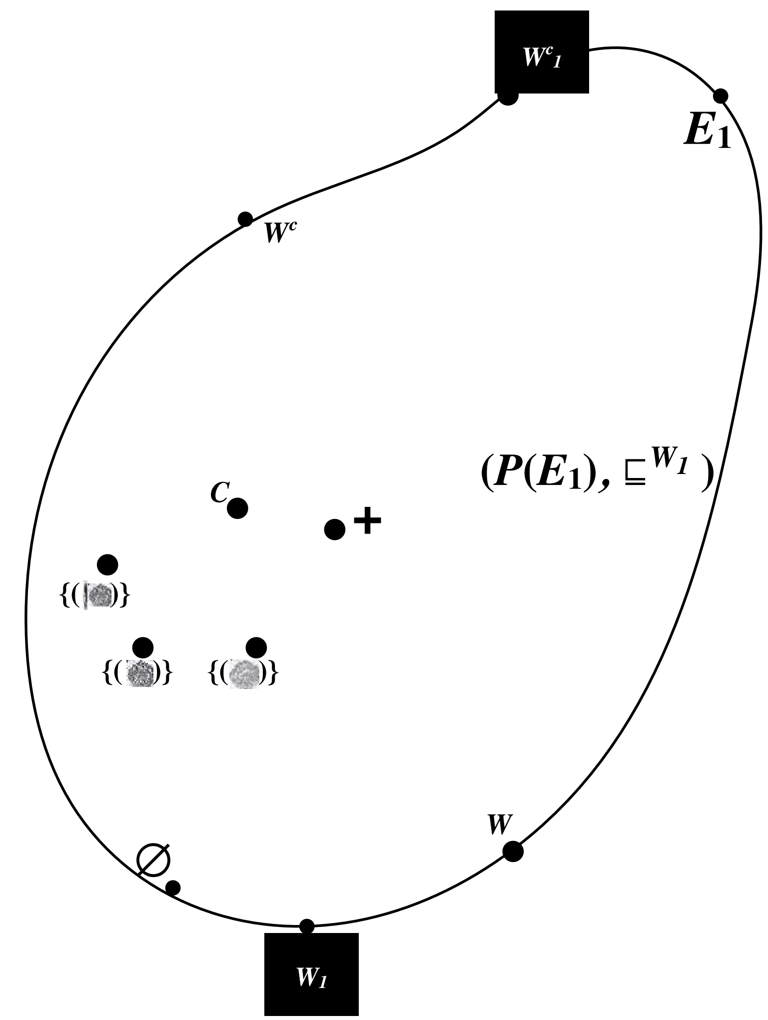
$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

Álgebra de sucesos $((\mathcal{P}(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E_1,^c),Pr_1)$



Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



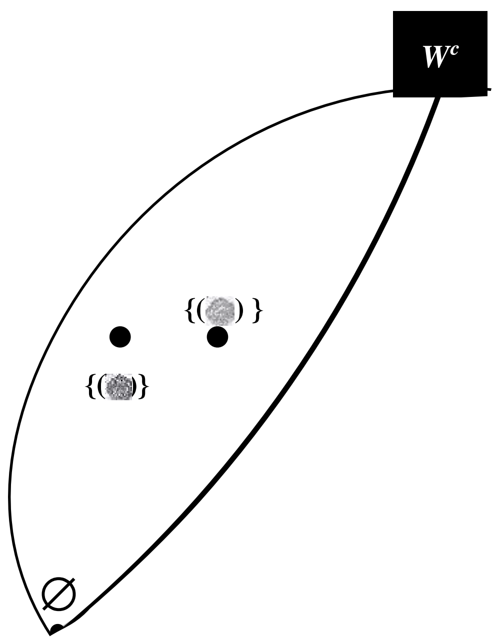
Álgebras de sucesos

Experiencia lanzar una moneda normal al aire una vez.

$$\widehat{Pr}_{1(w,0)}(A) = Pr_1(A \Delta W)\Delta 0 = Pr_1(A \Delta W)$$

W = {(|), (|), (||), (||), ..., (||| ...)}

¡ Cómo me gustaría que este suceso y todos los contenidos en él, fuesen todos: IMPOSIBLES !



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : “obtener cara en el tercer lanzamiento” ({(||)}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(w,0)}$:

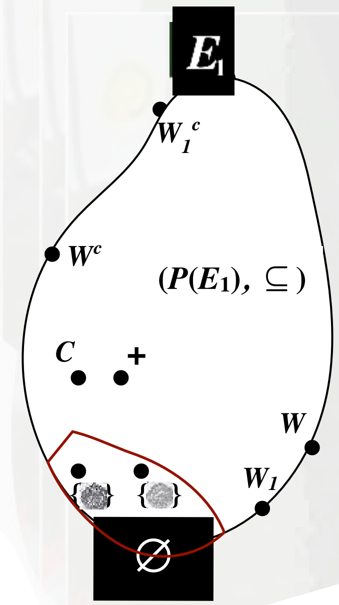
$$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\varnothing)=0,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\varnothing)=\xi$$

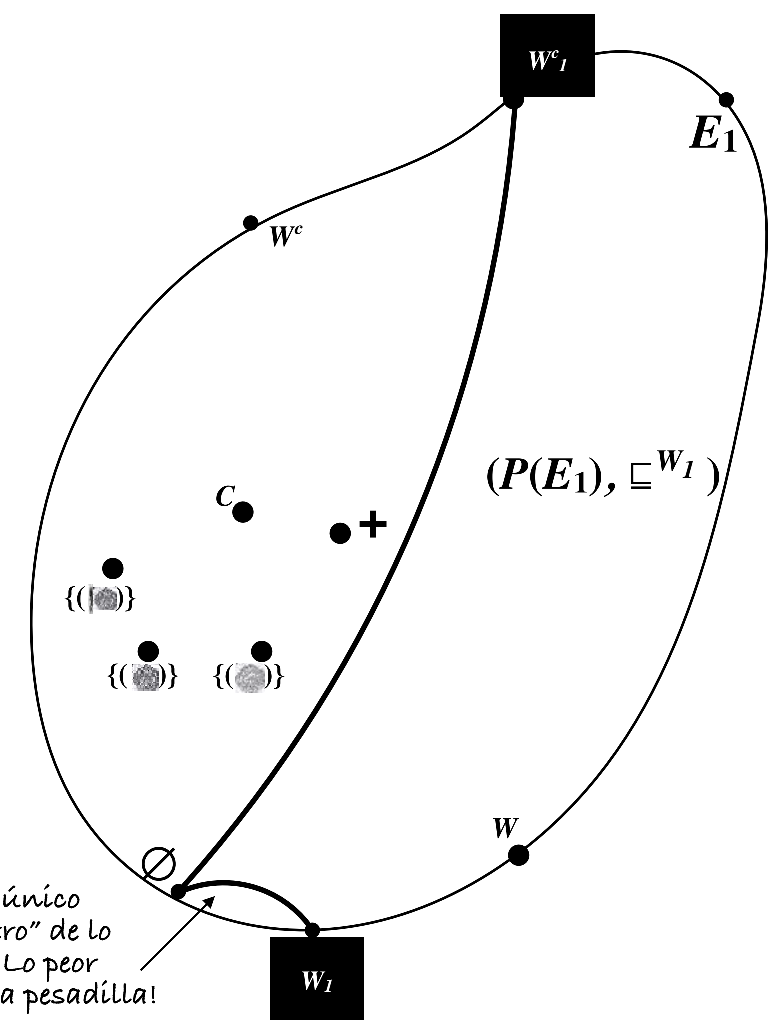
$$Pr_1(\{(\bullet)\})=(1-\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\bullet)\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\bullet)\})=(1-\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\bullet)\})=(1+\xi)/2$$

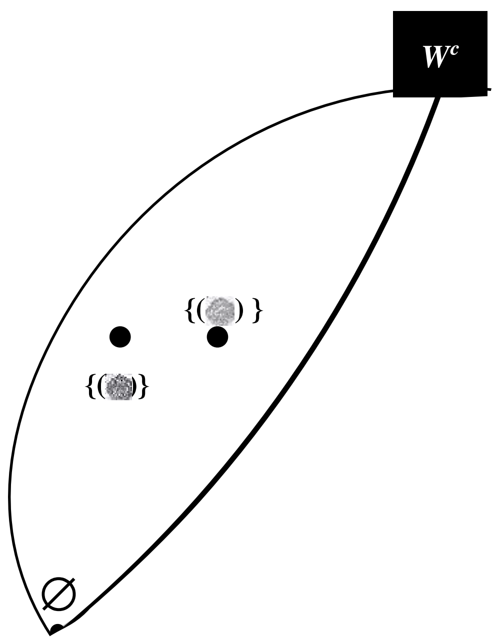
Álgebra de sucesos $((P(E_1),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E_1,^c),Pr_1)$



Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



Ahora un único suceso “dentro” de lo imposible:¡Lo peor de lo peor: la pesadilla!



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : “obtener cara en el tercer lanzamiento” ({(||)}), etc…

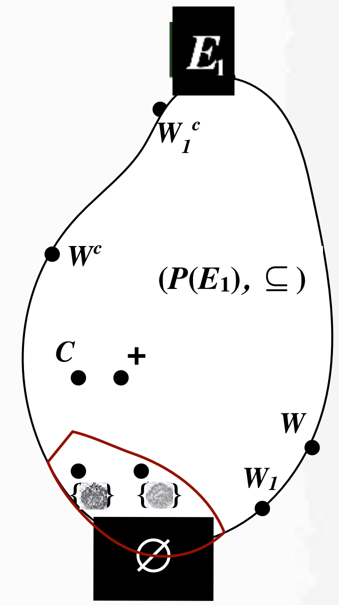
Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\hat{Pr}_{1(w,0)}$:

$Pr_1(W^c)=1-\xi$, $\hat{Pr}_{1(w,0)}(W^c)=1$

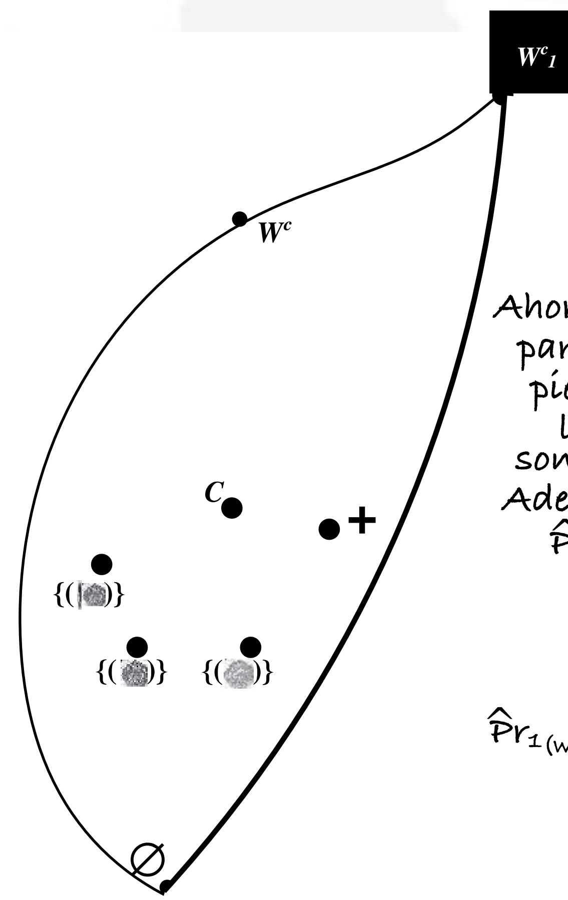
$Pr_1(\varnothing)=0$, $\hat{Pr}_{1(w,0)}(\varnothing)=\xi$

$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \hat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$

$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \hat{Pr}_{1(w,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$

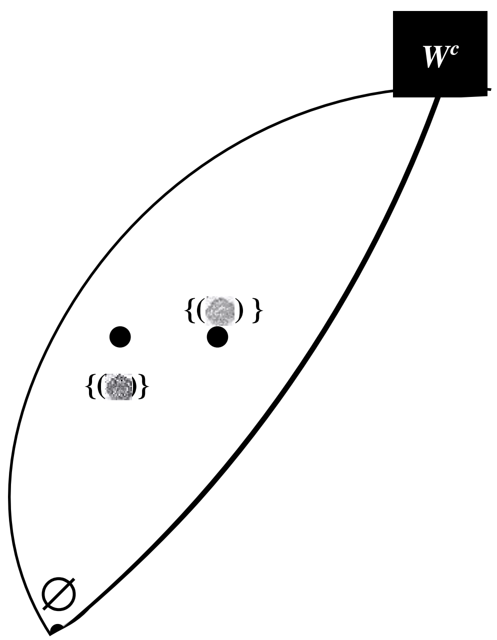


Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



Ahora, si prescindimos de esta parte, la información que se pierde no es relevante, pues los sucesos suprimidos son los que contienen a W_1. Además, la medida asociada $\hat{Pr}_{1(W_1,0)}$ no aporta nueva información, pues $Pr_1(W_1)=0$ y en consecuencia $\hat{Pr}_{1(W_1,0)}(A)=Pr_1(A)\ \forall A\in P(E_1)$.

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^{W}, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({(||)}), etc...

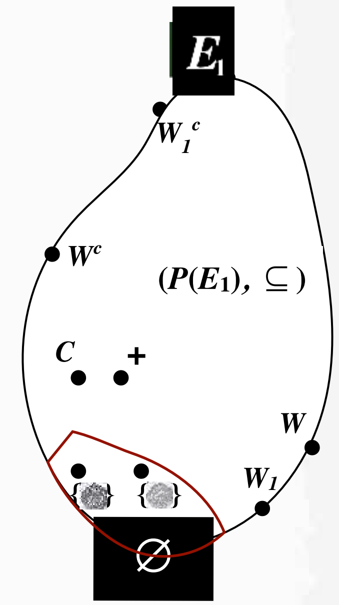
Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(W,0)}$:

$$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1$$

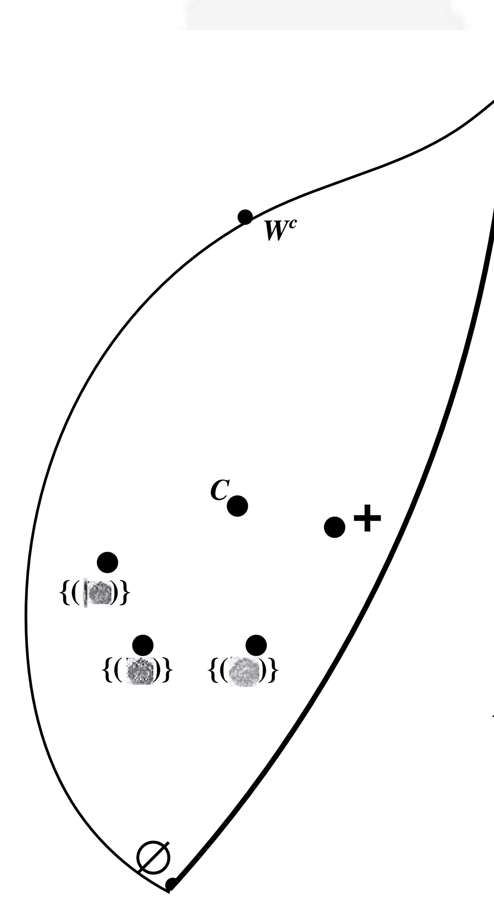
$$Pr_1(\varnothing)=0,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(\varnothing)=\xi$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$



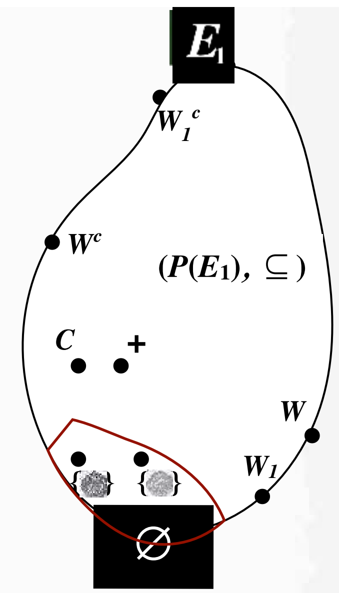
Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



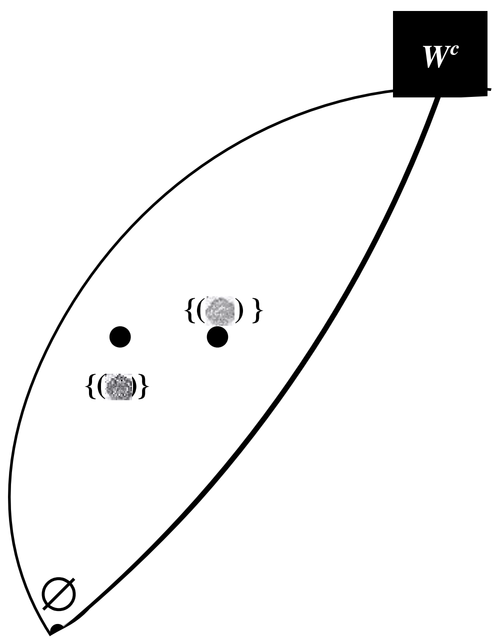
Ahora, si prescindimos de esta parte, la información que se pierde no es relevante, pues los sucesos suprimidos son los que contienen a W_1. Además, la medida asociada $\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}$ no aporta nueva información, pues $Pr_1(W_1)=0$ y en consecuencia

$\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(A)=Pr_1(A)\ \forall A\in P(E_1)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A \sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .



¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \hat{P}r_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({( )}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\hat{P}r_{1(W,0)}$:

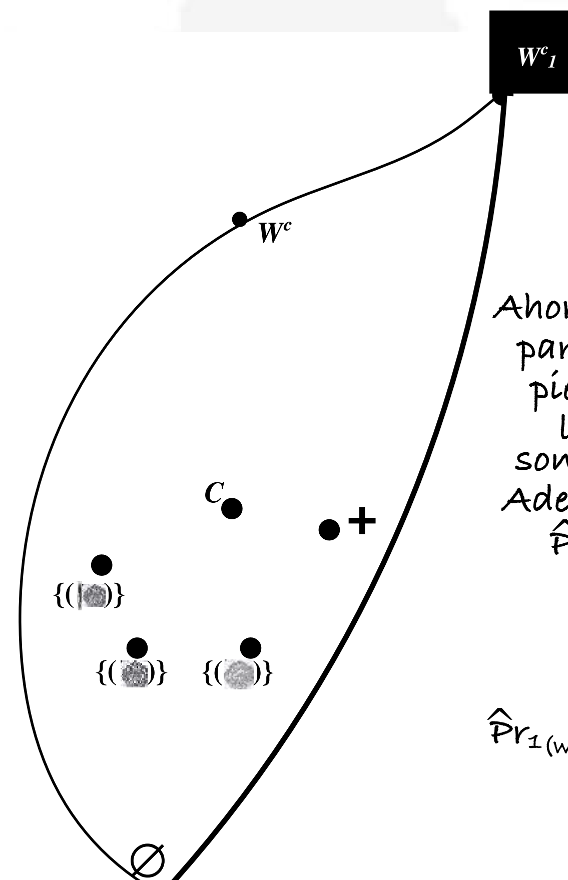
$$Pr_1(W^c)=1-\xi, \quad \hat{P}r_{1(W,0)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\varnothing)=0, \quad \hat{P}r_{1(W,0)}(\varnothing)=\xi$$

$$Pr_1(\{( )\})=(1-\xi)/2, \hat{P}r_{1(W,0)}(\{( )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{( )\})=(1-\xi)/2, \hat{P}r_{1(W,0)}(\{( )\})=(1+\xi)/2$$

Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:

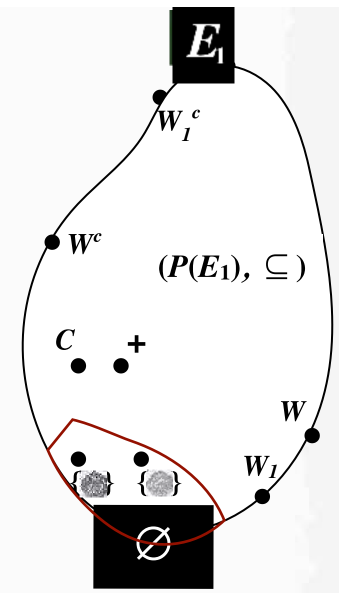


Ahora, si prescindimos de esta parte, la información que se pierde no es relevante, pues los sucesos suprimidos son los que contienen a W_1. Además, la medida asociada $\hat{P}r_{1(W_1,0)}$ no aporta nueva información, pues $Pr_1(W_1)=0$ y en consecuencia

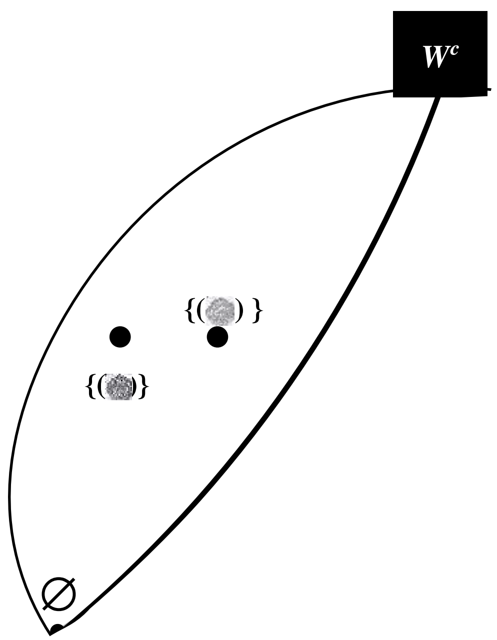
$\hat{P}r_{1(W_1,0)}(A)=Pr_1(A)\ \forall A \in P(E_1)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\,\&\,(B\not\sqsubseteq^W A)$?



¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({(||)}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(W,0)}$:

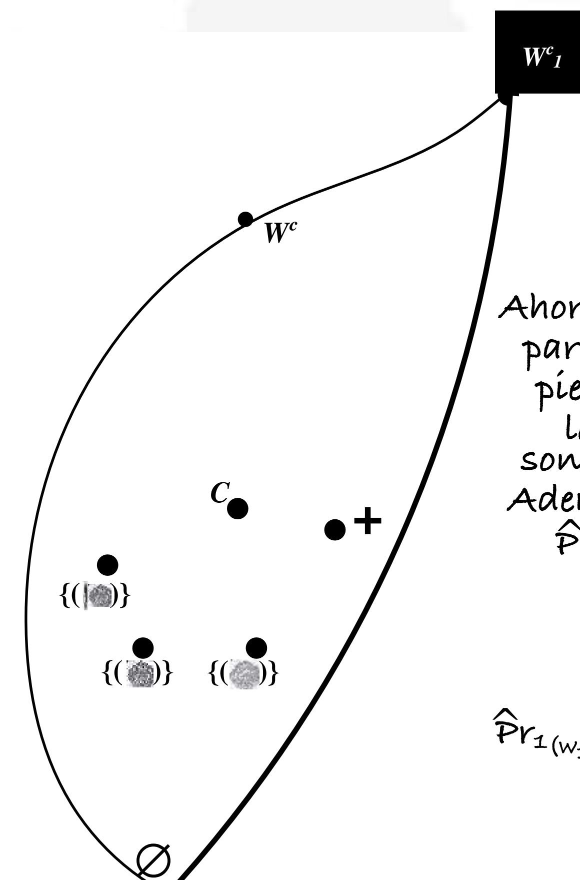
$$Pr_1(W^c)=1-\xi\,,\ \ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\varnothing)=0\,,\ \ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(\varnothing)=\xi$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2,\widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2,\widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



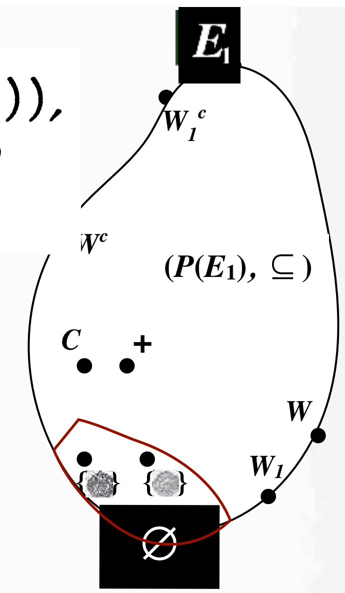
Ahora, si prescindimos de esta parte, la información que se pierde no es relevante, pues los sucesos suprimidos son los que contienen a W_1. Además, la medida asociada $\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}$ no aporta nueva información, pues $Pr_1(W_1)=0$ y en consecuencia

$\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(A)=Pr_1(A)\ \forall A\in P(E_1)$.

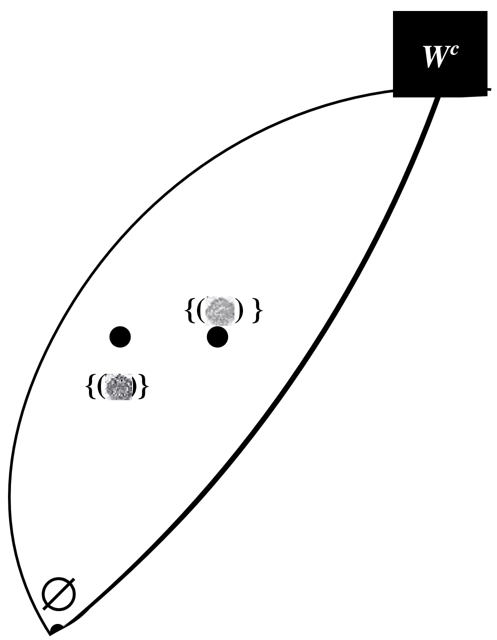
(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso “más denostado” W, B es el más alejado, luego si W representa “lo peor”, entonces: “ el suceso B es preferible al suceso A” .

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\&(B\not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,0)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$), tal que $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).



¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : “obtener cara en el tercer lanzamiento” ({(||)}), etc…

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(W,0)}$:

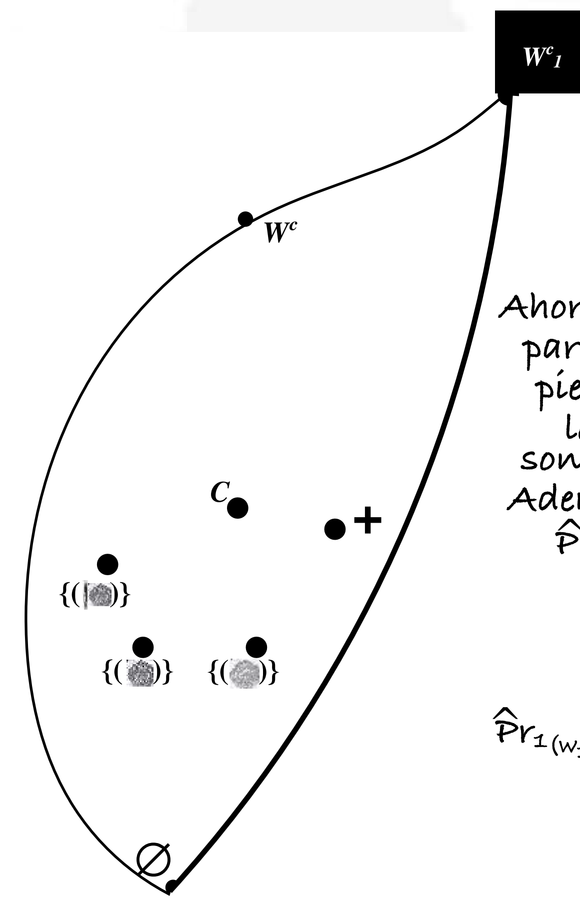
$Pr_1(W^c)=1-\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1$

$Pr_1(\varnothing)=0$, $\widehat{Pr}_{1(W,0)}(\varnothing)=\xi$

$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2$, $\widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$

$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2$, $\widehat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$

Ahora, con el orden de actividad $\sqsubseteq^{W_1}$:



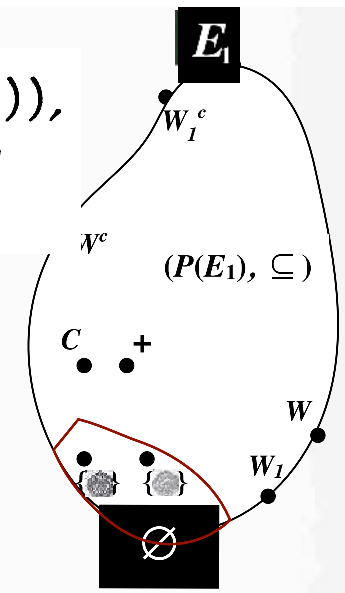
Ahora, si prescindimos de esta parte, la información que se pierde no es relevante, pues los sucesos suprimidos son los que contienen a W_1. Además, la medida asociada $\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}$ no aporta nueva información, pues $Pr_1(W_1)=0$ y en consecuencia

$\widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(A)=Pr_1(A)\ \forall A\in P(E_1)$.

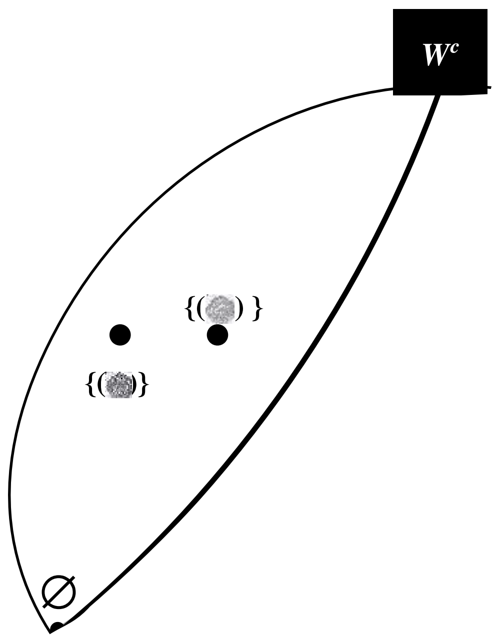
(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\&(B\not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\hat{Pr}_{(W,0)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$), tal que $\hat{Pr}_{(W,0)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).



¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \hat{Pr}_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({( )}), etc...

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\hat{Pr}_{1(W,0)}$:

$$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \ \hat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\varnothing)=0,\ \ \hat{Pr}_{1(W,0)}(\varnothing)=\xi$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \hat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1-\xi)/2, \hat{Pr}_{1(W,0)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

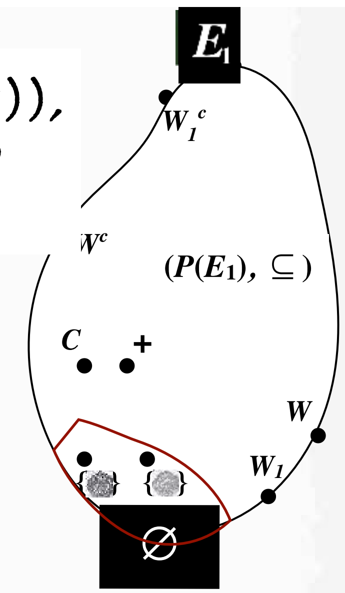
$$(B>_w A)\Leftrightarrow(\hat{Pr}_{(W,0)}(A)\le\hat{Pr}_{(W,0)}(B))\Leftrightarrow(Pr(A\Delta W)\le Pr(A\Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

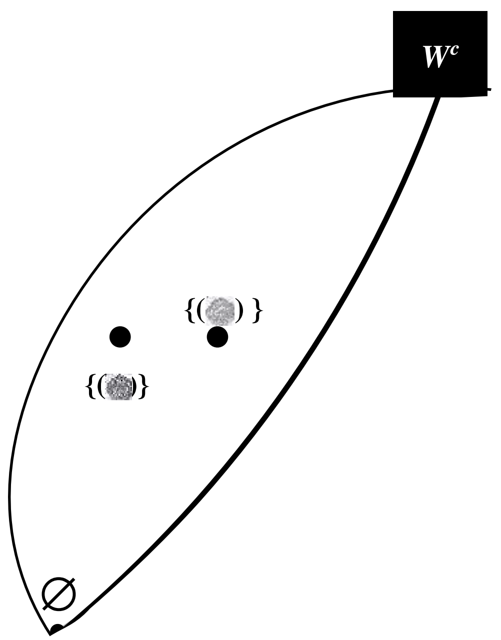
(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\,\&\,(B\not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,O)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$), tal que $\widehat{Pr}_{(W,O)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).



¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



Se pierde algún suceso cuya consideración parece razonable ,tal como : "obtener cara en el tercer lanzamiento" ({( )}), etc...

Hay diferencias entre la probabilidad Pr1 y la medida $\widehat{Pr}_{1(W,O)}$:

$$Pr_1(W^c)=1\text{-}\xi,\quad \widehat{Pr}_{1(W,O)}(W^c)=1$$

$$Pr_1(\varnothing)=0,\quad \widehat{Pr}_{1(W,O)}(\varnothing)=\xi$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1\text{-}\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(W,O)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

$$Pr_1(\{(\ )\})=(1\text{-}\xi)/2,\ \widehat{Pr}_{1(W,O)}(\{(\ )\})=(1+\xi)/2$$

<u>Definición</u>. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B>_w A)\Leftrightarrow(\widehat{Pr}_{(W,O)}(A)\le\widehat{Pr}_{(W,O)}(B))\Leftrightarrow(Pr(A\Delta W)\le Pr(A\Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

<u>Nota</u>. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A\sqsubseteq^W B)\Leftrightarrow(A\Delta W\subseteq B\Delta W)\Rightarrow(\widehat{Pr}_{1(W,O)}(A)\le\widehat{Pr}_{1(W,O)}(B))$.

Por lo tanto: $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(B>_w A)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A \sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

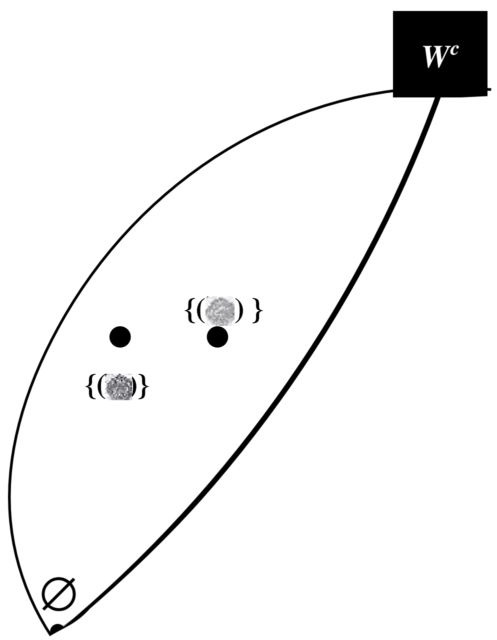
c ≡ "cara"
+ ≡ "cruz"
| ≡ "canto"

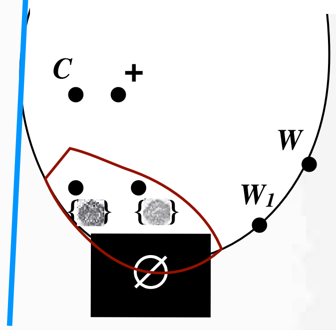
(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A \not\sqsubseteq^W B) \& (B \not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,0)}$, ($Pr(M \Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) = Pr(A \Delta W)$ $\forall A \in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W) \neq 0$).

E_1={ (c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),...,(|||...) }
W={ (|c),(|+),(||c),(||+),...,(|||...) }
W^c={ (c),(+) }
W_1={ (|||...) }
W_1^c={(c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),... }

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?





<u>Definición</u>. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B >_w A) \Leftrightarrow (\widehat{Pr}_{(W,0)}(A) \leq \widehat{Pr}_{(W,0)}(B)) \Leftrightarrow (Pr(A \Delta W) \leq Pr(A \Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

<u>Nota</u>. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq B \Delta W) \Rightarrow (\widehat{Pr}_{1(W,0)}(A) \leq \widehat{Pr}_{1(W,0)}(B))$.

Por lo tanto: $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B >_w A)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A \sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

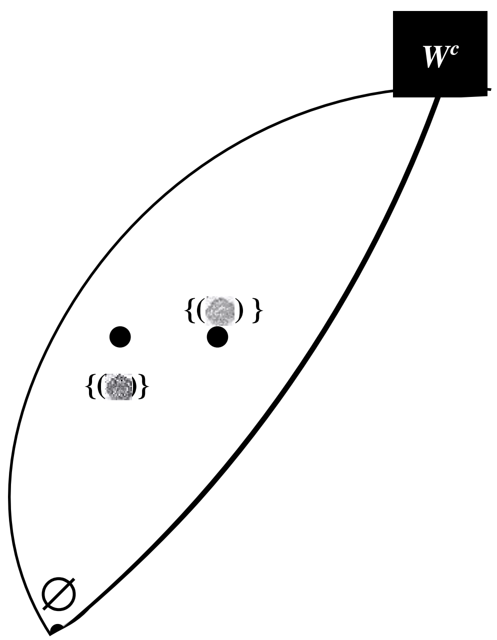
$c \equiv$ "cara"
$+ \equiv$ "cruz"
$| \equiv$ "canto"

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A \not\sqsubseteq^W B) \& (B \not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,O)}$, ($Pr(M \Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\widehat{Pr}_{(W,O)}(A) = Pr(A \Delta W)$ $\forall A \in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W) \neq 0$).

$E_1 = \{ (c), (+), (|c), (|+), (||c), (||+), \ldots, (|||\ldots) \}$
$W = \{ (|c), (|+), (||c), (||+), \ldots, (|||\ldots) \}$
$W^c = \{ (c), (+) \}$
$W_1 = \{ (|||\ldots) \}$
$W_1{}^c = \{ (c), (+), (|c), (|+), (||c), (||+), \ldots \}$
$Pr_1(E_1) = 1$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(E_1) = 1 - \xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(E_1) = 1$
$Pr_1(W) = \xi$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W) = 0$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W) = \xi$
$Pr_1(W^c) = 1 - \xi$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W^c) = 1$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W^c) = 1 - \xi$
$Pr_1(W_1) = 0$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W_1) = \xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1) = 0$
$Pr_1(W_1{}^c) = 1$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W_1{}^c) = 1 - \xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1{}^c) = 1$

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B >_w A) \Leftrightarrow (\widehat{Pr}_{(W,O)}(A) \leq \widehat{Pr}_{(W,O)}(B)) \Leftrightarrow (Pr(A \Delta W) \leq Pr(A \Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

Nota. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq B \Delta W) \Rightarrow (\widehat{Pr}_{1(W,O)}(A) \leq \widehat{Pr}_{1(W,O)}(B))$.

Por lo tanto: $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B >_w A)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A \sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

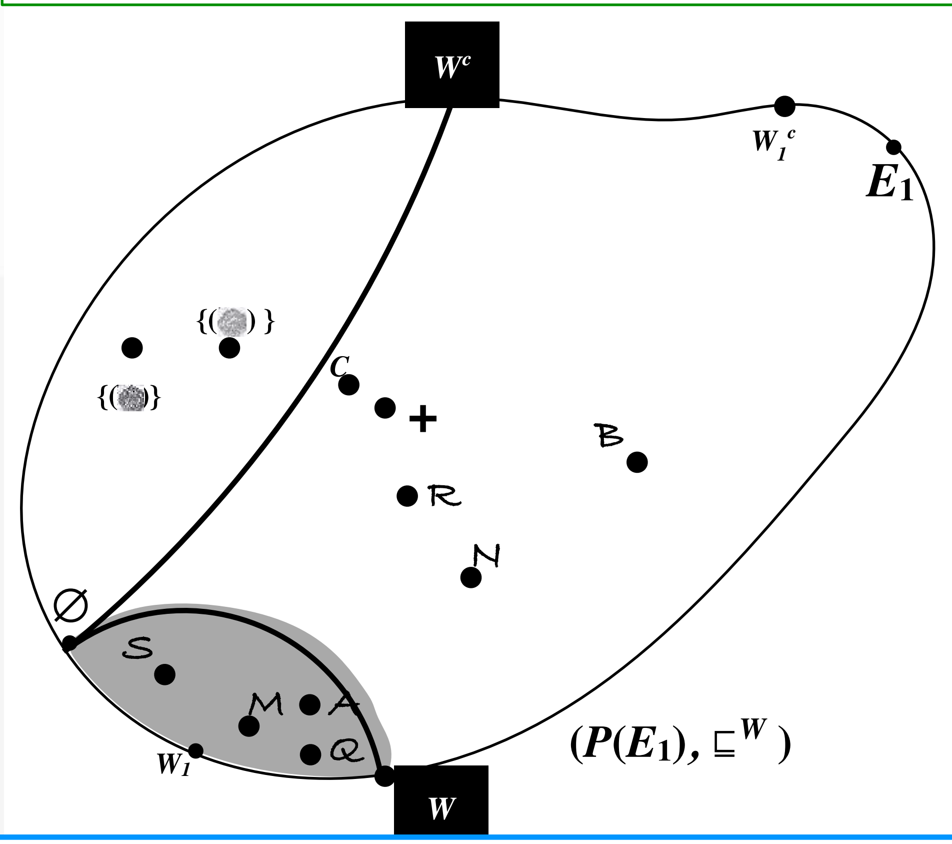
$C \equiv$ "cara"
$+ \equiv$ "cruz"
$| \equiv$ "canto"

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A \not\sqsubseteq^W B) \& (B \not\sqsubseteq^W A)$?

Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,O)}$, ($Pr(M \Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\widehat{Pr}_{(W,O)}(A) = Pr(A \Delta W)$ $\forall A \in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W) \neq 0$).

$E_1 = \{ (C),(+),(|C),(|+),(||C),(||+),\ldots,(|||\ldots) \}$
$W = \{ (|C),(|+),(||C),(||+),\ldots,(|||\ldots) \}$
$W^c = \{ (C),(+) \}$
$W_1 = \{ (|||\ldots) \}$
$W_1^c = \{(C),(+),(|C),(|+),(||C),(||+),\ldots \}$
$Pr_1(E_1)=1$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(E_1)=1-\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(E_1)=1$
$Pr_1(W)=\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W)=0$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W)=\xi$
$Pr_1(W^c)=1-\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W^c)=1$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W^c)=1-\xi$
$Pr_1(W_1)=0$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W_1)=\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1)=0$
$Pr_1(W_1^c)=1$, $\widehat{Pr}_{1(W,O)}(W_1^c)=1-\xi$, $\widehat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1^c)=1$

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, ^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



$A=\{(|C), (||C),(||+)\}$; $B=\{ (C),(||C),(|||C) \}$
$A^c=\{ (C),(+),(|+),(|||C),(|||+),\ldots,(|||\ldots) \}$
$B^c=\{(+),(|C),(|+),(||+),(|||+),(||||C),\ldots,(|||\ldots)\}$
C$=\{ (C),(|C),(||C),\ldots \}$; **+**$=\{ (+),(|+),(||+),\ldots \}$
C$^c=\{(+),(|+),(||+),\ldots,(|||\ldots) \}$
+$^c=\{(C),(|C),(||C),\ldots,(|||\ldots) \}$
$N=\{(C),(+),(|C),(||+),(||||C),(||||+),\ldots \}$
$M=\{(|C),(|+),(|||C),(|||+),(|||||C),(|||||+),\ldots \}$
$S=\{(||C),(||+),(|||C),(|||+),(||||C),(||||+),\ldots \}$
$R=\{(C), (+),(|C),(|+)\}$
$Q=\{(|C),(|+),(||C),(||+),(|||C),(|||+),\ldots\}$

Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B >_w A) \Leftrightarrow (\widehat{Pr}_{(W,O)}(A) \leq \widehat{Pr}_{(W,O)}(B)) \Leftrightarrow (Pr(A \Delta W) \leq Pr(A \Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

Nota. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A \sqsubseteq^W B) \Leftrightarrow (A \Delta W \subseteq B \Delta W) \Rightarrow (\widehat{Pr}_{1(W,O)}(A) \leq \widehat{Pr}_{1(W,O)}(B))$.

Por lo tanto: $(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (B >_w A)$.

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

C ≡ "cara"
\+ ≡ "cruz"
| ≡ "canto"

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\&(B\not\sqsubseteq^W A)$?

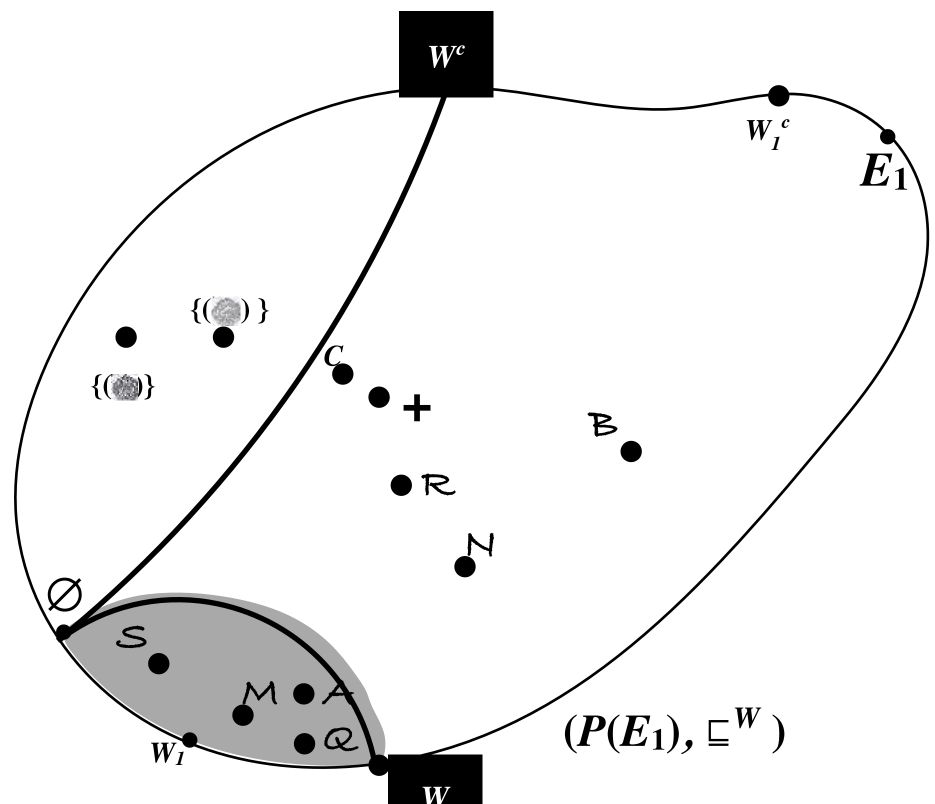
Veamos que la medida $\hat{Pr}_{(W,O)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\hat{Pr}_{(W,O)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).

E_1={ (C),(+),(|C),(|+),(||C),(||+),...,(|||...) }
W={ (|C),(|+),(||C),(||+),...,(|||...) }
W^c={ (C),(+) }
W_1={ (|||...) }
W_1^c={(C),(+),(|C),(|+),(||C),(||+),... }

$Pr(\{(C)\})=Pr(\{(+)\})=(1-\xi)/2$
$Pr(\{(C)\}\Delta W)=Pr(\{(+)\}\Delta W)=(1+\xi)/2$

$Pr_1(E_1)=1,\ \hat{Pr}_{1(W,O)}(E_1)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,O)}(E_1)=1$
$Pr_1(W)=\xi,\ \hat{Pr}_{1(W,O)}(W)=0,\ \hat{Pr}_{1(W_1,O)}(W)=\xi$
$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W,O)}(W^c)=1,\ \hat{Pr}_{1(W_1,O)}(W^c)=1-\xi$
$Pr_1(W_1)=0,\ \hat{Pr}_{1(W,O)}(W_1)=\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1)=0$
$Pr_1(W_1^c)=1,\ \hat{Pr}_{1(W,O)}(W_1^c)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,O)}(W_1^c)=1$

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \hat{Pr}_{1(W,0)})$?



A={(|C), (||C),(||+)}; B={ (C),(|C),(|||C) }
A^c={ (C),(+),(|+),(|||C),(|||+),...,(|||...) }
B^c={(+),(|C),(|+),(||+),(|||+),(||||C),...,(|||...)}
C={ (C),(|C),(||C),... }; **+**={ (+),(|+),(||+),... }
$\mathbf{C}^c$={(+),(|+),(||+),...,(|||...) }
$\mathbf{+}^c$={(C),(|C),(||C),...,(|||...) }
N={(C),(+),(|C),(||+),(||||C),(|||||+),... }
M={(|C),(|+),(|||C),(|||+),(|||||C),(|||||+),... }
S={(||C),(||+),(|||C),(|||+),(||||C),(||||+),... }
R={(C), (+),(|C),(|+)}
Q={(|C),(|+),(||C),(||+),(|||C),(|||+),...}

Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B>_w A)\Leftrightarrow(\hat{Pr}_{(W,O)}(A)\le\hat{Pr}_{(W,O)}(B))\Leftrightarrow(Pr(A\Delta W)\le Pr(A\Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

Nota. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A\sqsubseteq^W B)\Leftrightarrow(A\Delta W\subseteq B\Delta W)\Rightarrow(\hat{Pr}_{1(W,O)}(A)\le\hat{Pr}_{1(W,O)}(B))$.

Por lo tanto: $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(B>_w A)$.

Ejemplos. AΔW={(|||C),(|||+),...,(|||...) }, $Pr(A\Delta W)=\xi^3$.

BΔW={ (C),(|C),(|+),(||+),(|||+),(||||C),...,(|||...) },
$Pr(B\Delta W)=(2\xi^4-\xi^3-\xi^2+2)/2$

CΔW={ (C),(|C),(|+),(||+),(|||+),... }, $Pr(\mathbf{C}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

+ΔW={ (+),(|+),(|C),(||C),(|||C),... }, $Pr(\mathbf{+}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

NΔW={ (C),(+),(|C),(|||C),(|||+),(|||...) }, $Pr(N\Delta W)=(1-\xi)(1+\xi^3)$

MΔW={(||C),(||+),(|||...) }, $Pr(M\Delta W)=\xi^2(1-\xi)$

SΔW={(|C),(|+),(|||...) }, $Pr(S\Delta W)=\xi(1-\xi)$

RΔW={ (C),(+),(||C),(||+),...,(|||...) }, $Pr(R\Delta W)=1-\xi+\xi^2$

QΔW={(|||...) }, $Pr(Q\Delta W)=0$

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

c ≡ "cara"
+ ≡ "cruz"
| ≡ "canto"

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\&(B\not\sqsubseteq^W A)$?

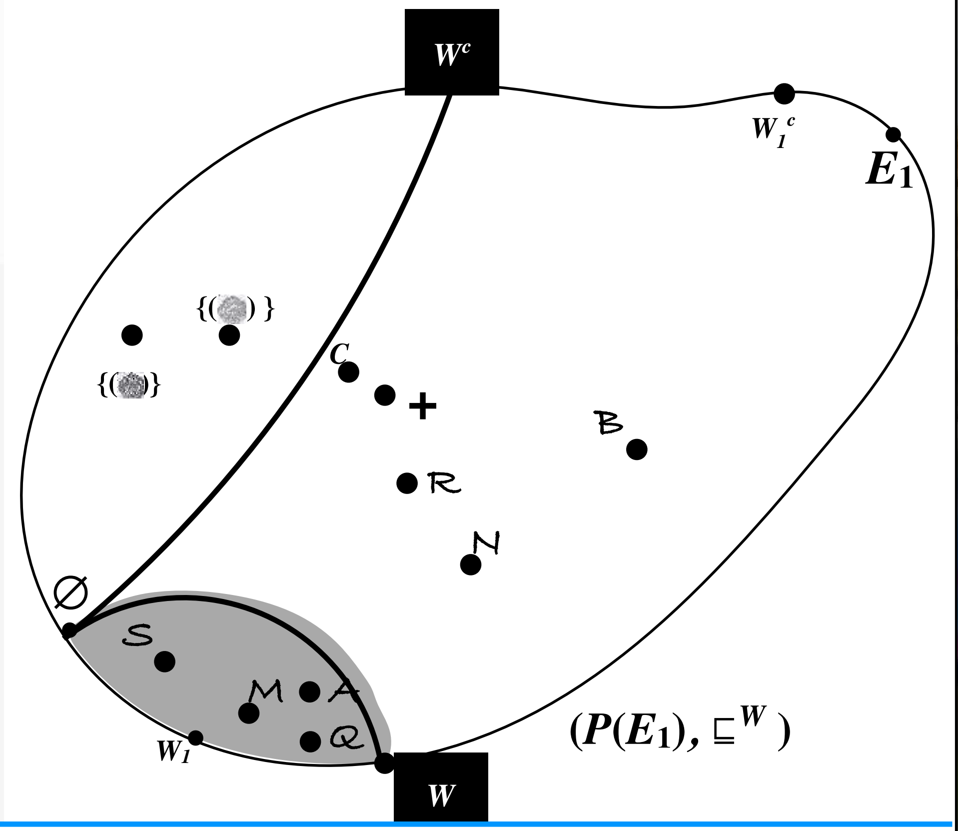
Veamos que la medida $\hat{Pr}_{(W,0)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\hat{Pr}_{(W,0)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, {}^c), \hat{Pr}_{1(W,0)})$?

$E_1=\{ (c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),\dots,(|||\dots) \}$
$W=\{ (|c),(|+),(||c),(||+),\dots,(|||\dots) \}$
$W^c=\{ (c),(+) \}$
$W_1=\{ (|||\dots) \}$
$W_1^c=\{(c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),\dots \}$

$Pr(\{(c)\})=Pr(\{(+)\})=(1-\xi)/2$
$Pr(\{(c)\}\Delta W)=Pr(\{(+)\}\Delta W)=(1+\xi)/2$

$Pr_1(E_1)=1,\ \hat{Pr}_{1(W,0)}(E_1)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,0)}(E_1)=1$
$Pr_1(W)=\xi,\ \hat{Pr}_{1(W,0)}(W)=0,\ \hat{Pr}_{1(W_1,0)}(W)=\xi$
$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1,\ \hat{Pr}_{1(W_1,0)}(W^c)=1-\xi$
$Pr_1(W_1)=0,\ \hat{Pr}_{1(W,0)}(W_1)=\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,0)}(W_1)=0$
$Pr_1(W_1^c)=1,\ \hat{Pr}_{1(W,0)}(W_1^c)=1-\xi,\ \hat{Pr}_{1(W_1,0)}(W_1^c)=1$



$A=\{(|c),\ (||c),(||+)\};\ B=\{ (c),(|c),(|||c) \}$
$A^c=\{ (c),(+),(|+),(|||c),(|||+),\dots,(|||\dots) \}$
$B^c=\{(+),(|c),(|+),(||+),(|||+),(||||c),\dots,(|||\dots)\}$
$\mathbf{C}=\{ (c),(|c),(||c),\dots \};\ \mathbf{+}=\{ (+),(|+),(||+),\dots \}$
$\mathbf{C}^c=\{(+),(|+),(||+),\dots,(|||\dots) \}$
$\mathbf{+}^c=\{(c),(|c),(||c),\dots,(|||\dots) \}$
$N=\{(c),(+),(|c),(||+),(||||c),(|||||+),\dots \}$
$M=\{(|c),(|+),(|||c),(|||+),(|||||c),(|||||+),\dots \}$
$S=\{(||c),(||+),(|||c),(|||+),(||||c),(||||+),\dots \}$
$R=\{(c),\ (+),(|c),(|+)\}$
$Q=\{(|c),(|+),(||c),(||+),(|||c),(|||+),\dots\}$

Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$(B>_w A)\Leftrightarrow(\hat{Pr}_{(W,0)}(A)\leq\hat{Pr}_{(W,0)}(B))\Leftrightarrow(Pr(A\Delta W)\leq Pr(A\Delta W))$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

Nota. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A\sqsubseteq^W B)\Leftrightarrow(A\Delta W\subseteq B\Delta W)\Rightarrow(\hat{Pr}_{1(W,0)}(A)\leq\hat{Pr}_{1(W,0)}(B))$.

Por lo tanto: $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(B>_w A)$.

Ejemplos. $A\Delta W=\{(|||c),(|||+),\dots,(|||\dots) \},\ Pr(A\Delta W)=\xi^3$.

$B\Delta W=\{ (c),(|c),(|+),(||+),(|||+),(||||c),\dots,(|||\dots) \}$,
$Pr(B\Delta W)=(2\xi^4-\xi^3-\xi^2+2)/2$

$\mathbf{C}\Delta W=\{ (c),(|c),(|+),(||+),(|||+),\dots \},\ Pr(\mathbf{C}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

$\mathbf{+}\Delta W=\{ (+),(|+),(|c),(||c),(|||c),\dots \},\ Pr(\mathbf{+}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

$N\Delta W=\{ (c),(+),(|c),(|||c),(|||+),(|||\dots) \},\ Pr(N\Delta W)=(1-\xi)(1+\xi^3)$

$M\Delta W=\{(||c),(||+),(|||\dots) \},\ Pr(M\Delta W)=\xi^2(1-\xi)$

$S\Delta W=\{(|c),(|+),(|||\dots) \},\ Pr(S\Delta W)=\xi(1-\xi)$

$R\Delta W=\{ (c),(+),(||c),(||+),\dots,(|||\dots) \},\ Pr(R\Delta W)=1-\xi+\xi^2$

$Q\Delta W=\{(|||\dots) \},\ Pr(Q\Delta W)=0$

Para $\xi\leq 0.352$ se verifica:
$1=Pr(W^c\Delta W)>Pr(B\Delta W)>Pr(R\Delta W)>Pr(\{(c)\}\Delta W)>Pr(N\Delta W)>$
$Pr(\mathbf{C}\Delta W)=Pr(\mathbf{+}\Delta W)>Pr(S\Delta W)>Pr(M\Delta W)>Pr(A\Delta W)>Pr(Q\Delta W)=0$

(1) El orden parcial $\sqsubseteq^W$ ya aporta información cuando se puede comparar sucesos, pues: $A\sqsubseteq^W B$ indica que, desde la perspectiva del suceso "más denostado" W, B es el más alejado, luego si W representa "lo peor", entonces: " el suceso B es preferible al suceso A" .

$c \equiv$ "cara"
$+ \equiv$ "cruz"
$| \equiv$ "canto"

(2) Pero ¿qué se puede decir en el caso $(A\not\sqsubseteq^W B)\,\&\,(B\not\sqsubseteq^W A)$?

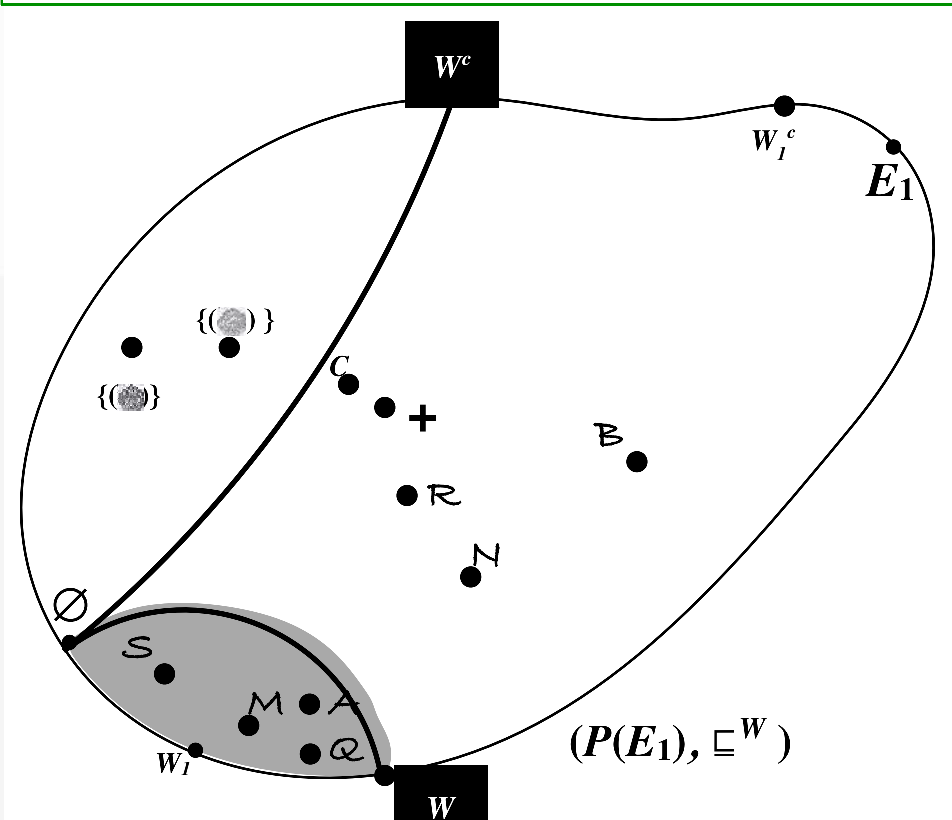
Veamos que la medida $\widehat{Pr}_{(W,0)}$, ($Pr(M\Delta N)$ es semidistancia $d(M,N)$) tal que $\widehat{Pr}_{(W,0)}(A)=Pr(A\Delta W)\ \forall A\in P(E)$, puede interpretarse como elemento de comparación es este caso. (No trivial si $Pr(W)\neq 0$).

$E_1=\{(c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),\ldots,(|||\ldots)\}$
$W=\{(|c),(|+),(||c),(||+),\ldots,(|||\ldots)\}$
$W^c=\{(c),(+)\}$
$W_1=\{(|||\ldots)\}$
$W_1^c=\{(c),(+),(|c),(|+),(||c),(||+),\ldots\}$

$Pr(\{(c)\})=Pr(\{(+)\})=(1-\xi)/2$
$Pr(\{(c)\}\Delta W)=Pr(\{(+)\}\Delta W)=(1+\xi)/2$

$Pr_1(E_1)=1,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(E_1)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(E_1)=1$
$Pr_1(W)=\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W)=0,\ \widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(W)=\xi$
$Pr_1(W^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W^c)=1,\ \widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(W^c)=1-\xi$
$Pr_1(W_1)=0,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W_1)=\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(W_1)=0$
$Pr_1(W_1^c)=1,\ \widehat{Pr}_{1(W,0)}(W_1^c)=1-\xi,\ \widehat{Pr}_{1(W_1,0)}(W_1^c)=1$

¿Qué tipo de información parece que aportan las Álgebra del tipo $((P(E), \sqsubseteq^W, W, W^c, ^c), \widehat{Pr}_{1(W,0)})$?



$A=\{(|c),(||c),(||+)\};\ B=\{(c),(|c),(|||c)\}$
$A^c=\{(c),(+),(|+),(|||c),(|||+),\ldots,(|||\ldots)\}$
$B^c=\{(+),(|c),(|+),(||+),(|||+),(||||c),\ldots,(|||\ldots)\}$
$\mathbf{C}=\{(c),(|c),(||c),\ldots\};\ \mathbf{+}=\{(+),(|+),(||+),\ldots\}$
$\mathbf{C}^c=\{(+),(|+),(||+),\ldots,(|||\ldots)\}$
$\mathbf{+}^c=\{(c),(|c),(||c),\ldots,(|||\ldots)\}$
$N=\{(c),(+),(|c),(||+),(||||c),(|||||+),\ldots\}$
$M=\{(|c),(|+),(|||c),(|||+),(|||||c),(|||||+),\ldots\}$
$S=\{(||c),(||+),(|||c),(|||+),(||||c),(||||+),\ldots\}$
$R=\{(c),(+),(|c),(|+)\}$
$Q=\{(|c),(|+),(||c),(||+),(|||c),(|||+),\ldots\}$

Definición. Llamaremos w-preferencia a la relación $>_w$ tal que:

$$(B>_w A)\Leftrightarrow(\widehat{Pr}_{(W,0)}(A)\leq\widehat{Pr}_{(W,0)}(B))\Leftrightarrow(Pr(A\Delta W)\leq Pr(A\Delta W))$$

la relación $>_w$ es un preorden en $P(E)$.

Nota. la información que proporciona $>_w$ es coherente con la del orden $\sqsubseteq^W$, ya que $(A\sqsubseteq^W B)\Leftrightarrow(A\Delta W\subseteq B\Delta W)\Rightarrow(\widehat{Pr}_{1(W,0)}(A)\leq\widehat{Pr}_{1(W,0)}(B))$.

Por lo tanto: $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(B>_w A)$.

Ejemplos. $A\Delta W=\{(|||c),(|||+),\ldots,(|||\ldots)\},\ Pr(A\Delta W)=\xi^3$.

$B\Delta W=\{(c),(|c),(|+),(||+),(|||+),(||||c),\ldots,(|||\ldots)\}$,
$Pr(B\Delta W)=(2\xi^4-\xi^3-\xi^2+2)/2$

$\mathbf{C}\Delta W=\{(c),(|c),(|+),(||+),(|||+),\ldots\},\ Pr(\mathbf{C}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

$\mathbf{+}\Delta W=\{(+),(|+),(|c),(||c),(|||c),\ldots\},\ Pr(\mathbf{+}\Delta W)=(1+\xi-\xi^2)/2$

$N\Delta W=\{(c),(+),(|c),(|||c),(|||+),(|||\ldots)\},\ Pr(N\Delta W)=(1-\xi)(1+\xi^3)$

$M\Delta W=\{(||c),(||+),(|||\ldots)\},\ Pr(M\Delta W)=\xi^2(1-\xi)$

$S\Delta W=\{(|c),(|+),(|||\ldots)\},\ Pr(S\Delta W)=\xi(1-\xi)$

$R\Delta W=\{(c),(+),(||c),(||+),\ldots,(|||\ldots)\},\ Pr(R\Delta W)=1-\xi+\xi^2$

$Q\Delta W=\{(|||\ldots)\},\ Pr(Q\Delta W)=0$

Para $\xi\leq 0.352$ se verifica:
$1=Pr(W^c\Delta W)>Pr(B\Delta W)>Pr(R\Delta W)>Pr(\{(c)\}\Delta W)>Pr(N\Delta W)>$
$Pr(\mathbf{C}\Delta W)=Pr(\mathbf{+}\Delta W)>Pr(S\Delta W)>Pr(M\Delta W)>Pr(A\Delta W)>Pr(Q\Delta W)=0$

Luego una cadena de preferencias sería la siguiente:

$\boxed{W^c>_w B>_w R>_w [\{(c)\}\equiv_w\{(+)\}]>_w N>_w [\mathbf{C}\equiv_w\mathbf{+}]>_w S>_w M>_w A>_w Q}$

Una reflexión sugerida por el ejemplo anterior…

Una reflexión sugerida por el ejemplo anterior…

El ejemplo anecdótico utilizado en las transparencias anteriores sugiere una posibilidad interesante quizá más rigurosa; *¿puede que en alguna situación asociada a una experiencia aleatoria estemos trabajando con Álgebras de Sucesos $\mathcal{B} \subseteq P(E)$ que no reflejan exactamente las condiciones asociadas a ese experimento*?

(Por ejemplo si estamos intentando modelizar un experimento complejo en el que es difícil o imposible comprender todas las ocurrencias; o si hay un aspecto dinámico en el experimento, de forma que con posterioridad aparezcan nuevos resultados; o si trabajamos con demasiada simplificación por falta de medios; o si decidimos prescindir de sucesos muy muy raros con probabilidad prácticamente cero,… etc).

Una reflexión sugerida por el ejemplo anterior…

El ejemplo anecdótico utilizado en las transparencias anteriores sugiere una posibilidad interesante quizá más rigurosa; *¿puede que en alguna situación asociada a una experiencia aleatoria estemos trabajando con Álgebras de Sucesos $\mathcal{B} \subseteq P(E)$ que no reflejan exactamente las condiciones asociadas a ese experimento*?

(Por ejemplo si estamos intentando modelizar un experimento complejo en el que es difícil o imposible comprender todas las ocurrencias; o si hay un aspecto dinámico en el experimento, de forma que con posterioridad aparezcan nuevos resultados; o si trabajamos con demasiada simplificación por falta de medios; o si decidimos prescindir de sucesos muy muy raros con probabilidad prácticamente cero,… etc).

¿Tiene alguna utilidad en estas situaciones la consideración de los órdenes parciales $\sqsubseteq^W$ y las "*w*-extensiones" $\hat{\boldsymbol{Pr}}_{(\mathbf{W},\mathbf{0})}$ de funciones de probabilidad $\boldsymbol{Pr}$?

Cuestión abierta

Una reflexión sugerida por el ejemplo anterior…

El ejemplo anecdótico utilizado en las transparencias anteriores sugiere una posibilidad interesante quizá más rigurosa; *¿puede que en alguna situación asociada a una experiencia aleatoria estemos trabajando con Álgebras de Sucesos $\mathcal{B} \subseteq P(E)$ que no reflejan exactamente las condiciones asociadas a ese experimento*?

(Por ejemplo si estamos intentando modelizar un experimento complejo en el que es difícil o imposible comprender todas las ocurrencias; o si hay un aspecto dinámico en el experimento, de forma que con posterioridad aparezcan nuevos resultados; o si trabajamos con demasiada simplificación por falta de medios; o si decidimos prescindir de sucesos muy muy raros con probabilidad prácticamente cero,… etc).

¿Tiene alguna utilidad en estas situaciones la consideración de los órdenes parciales $\sqsubseteq^W$ y las "*w*-extensiones" $\hat{\boldsymbol{Pr}}_{(\mathbf{W},\mathbf{0})}$ de funciones de probabilidad $\boldsymbol{Pr}$?

Cuestión abierta

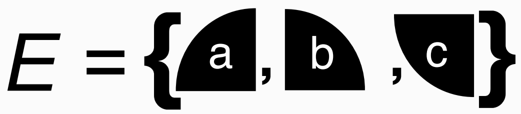
Ilustramos esta idea con otro ejemplo simple.

Ejemplos: Órdenes de actividad y probabilidad (3)

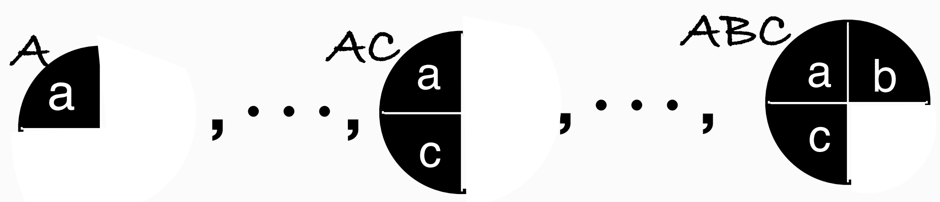
Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio sin ningún tipo de ruido, ni de interferencia, etc.

$$E = \{a, b, c\}$$

Supongamos que E = {a,b,c} es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio <u>sin ningún tipo de ruido</u>, ni de interferencia, etc.



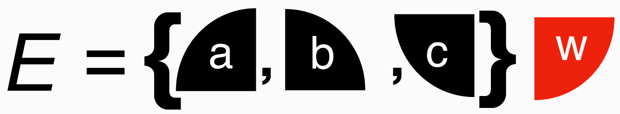
Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



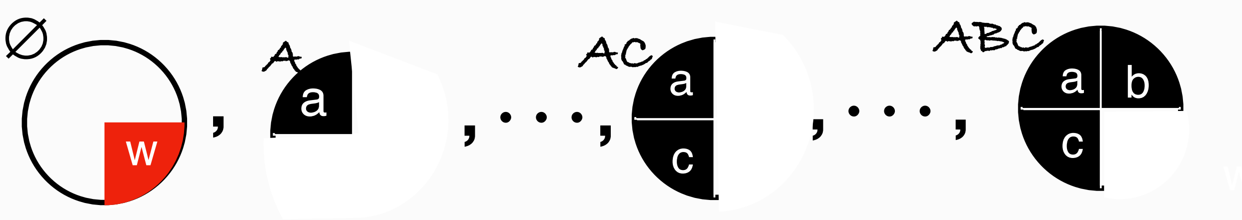
Supongamos que E = {a,b,c} es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio <u>sin ningún tipo de ruido</u>, ni de interferencia, etc.

(por ahora no se contempla)

Por ejemplo:
Evento W: "recibir ruido"

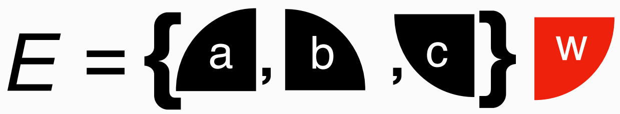


Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



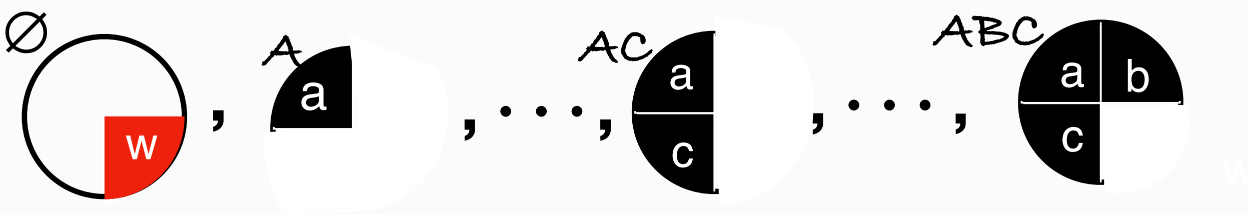
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **W**∉E con lo que: ∅≡ (que ocurra "**W**").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio sin ningún tipo de ruido, ni de interferencia, etc.



Por ejemplo:
Evento W: "recibir ruido"

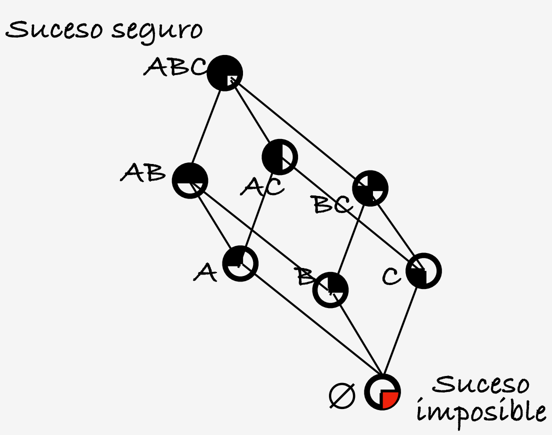
Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b")
C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"),
AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $\mathbf{W} \notin E$ con lo que: $\varnothing \equiv$ (que ocurra "**W**").

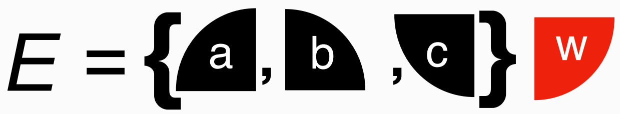
Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\varnothing, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\varnothing^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,
$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \varnothing$

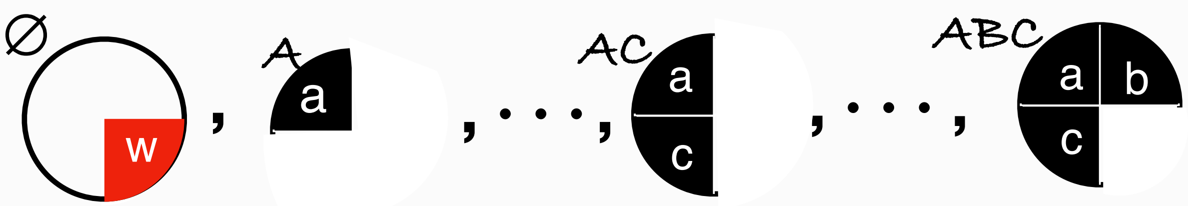


Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio sin ningún tipo de ruido, ni de interferencia, etc.

Por ejemplo:
Evento W:"recibir ruido"



Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b")
C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"),
AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



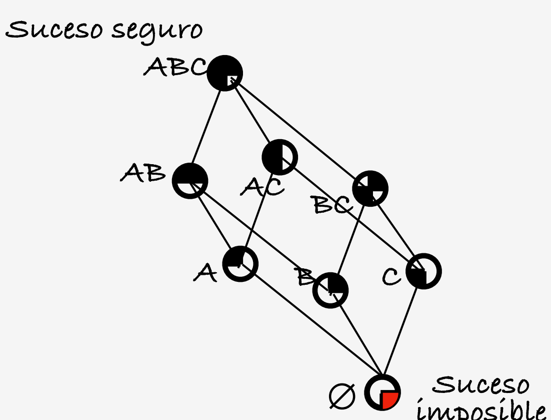
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **W**$\notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\varnothing, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\varnothing^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,

$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \varnothing$



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E, {}^c), pr)$

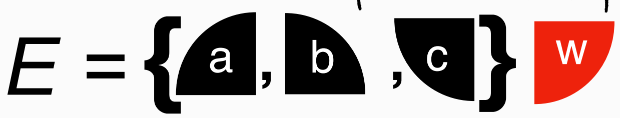
(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad pr: $E \rightarrow [0,1]$:

$pr(\varnothing) = 0$, $pr(A) = pr(B) = pr(C) = 1/3$,

$pr(AB) = pr(AC) = pr(BC) = 2/3$, $pr(ABC) = 1$

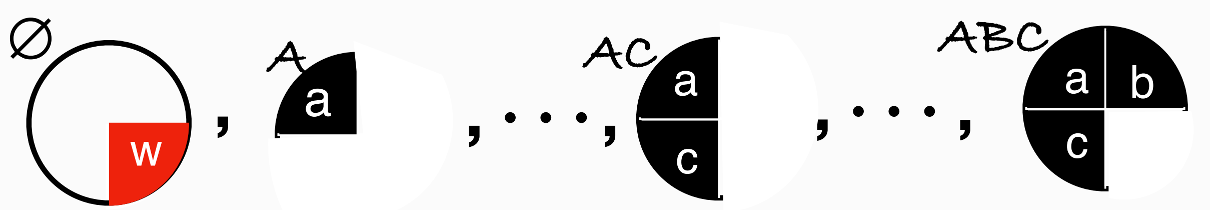
Supongamos que E = {a,b,c} es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

Modoficamos el espacio de eventos:



Evento W:"recibir ruido"

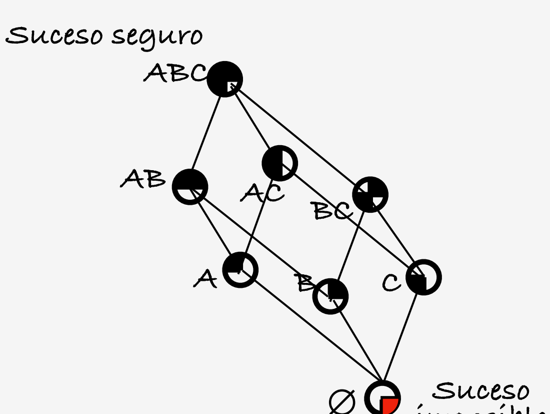
Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡ (que ocurra "W").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)$ = {∅,A,B,C,AB,AC,BC,ABC} con la inclusión ⊆ , y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:
$\varnothing^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$
$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\varnothing$



$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,{}^c),pr)$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad pr: $E \to [0,1]$:

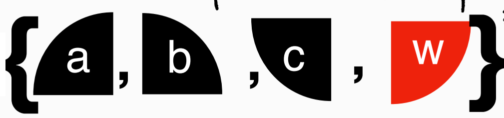
$pr(\varnothing)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

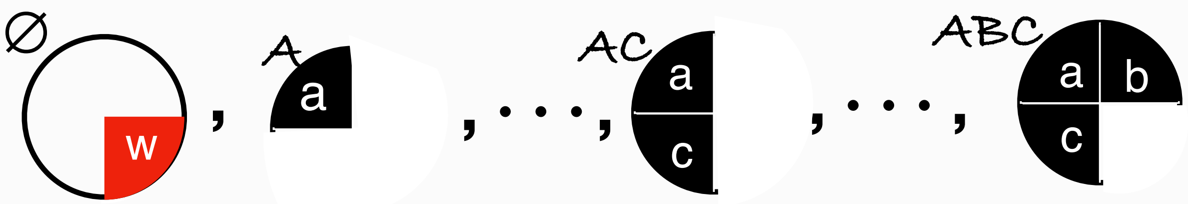
(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡ (" recibir ruido").

Supongamos que E = {a,b,c} es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

Modoficamos el espacio de eventos:

E+w=  Evento w:"recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

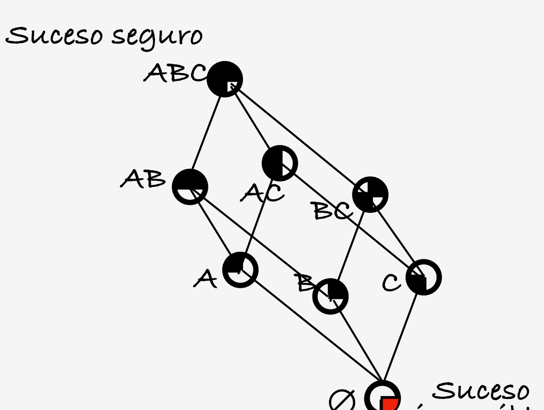
Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b")
C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"),
AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **w**$\notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)$ = {∅,A,B,C,AB,AC,BC,ABC} con la inclusión ⊆ , y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:
∅^{c}=ABC, A^c=B, B^c=AC, C^c=AB,
AB^c=C, AC^c=B, BC^c=A, ABC^c=∅



((P(E),⊆,∩,∪,∅,E,^{c}),pr)

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad pr: $E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

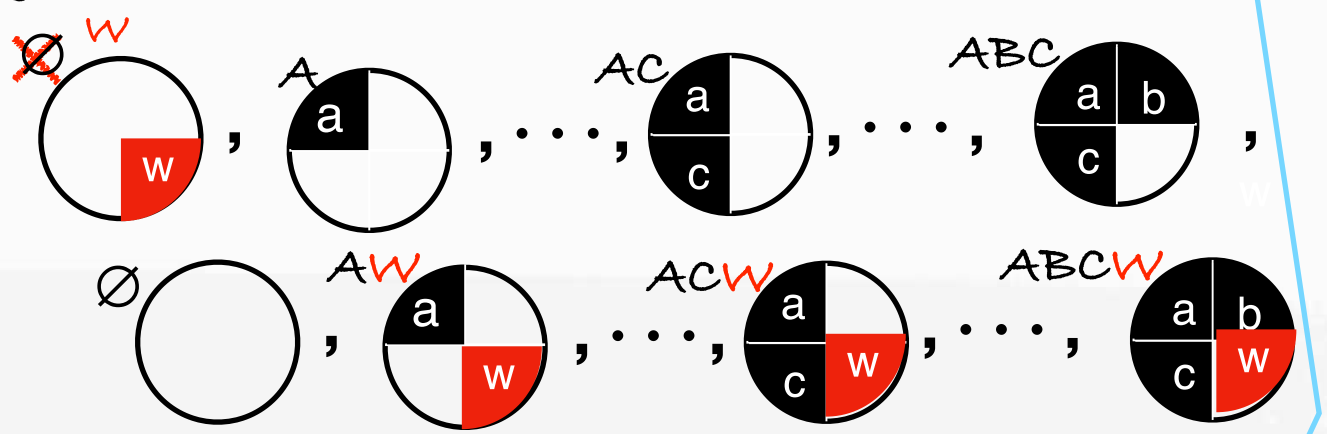
$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡(" recibir ruido").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+W=$ {a, b, c, w} Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

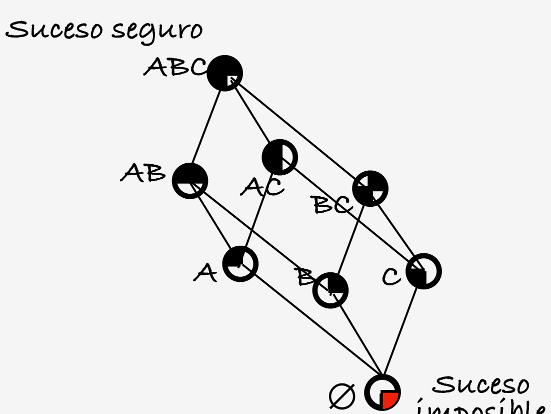
Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **W**$\notin$E con lo que: ∅≡ (que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\varnothing,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\varnothing^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$
$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\varnothing$



$((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c),pr)$

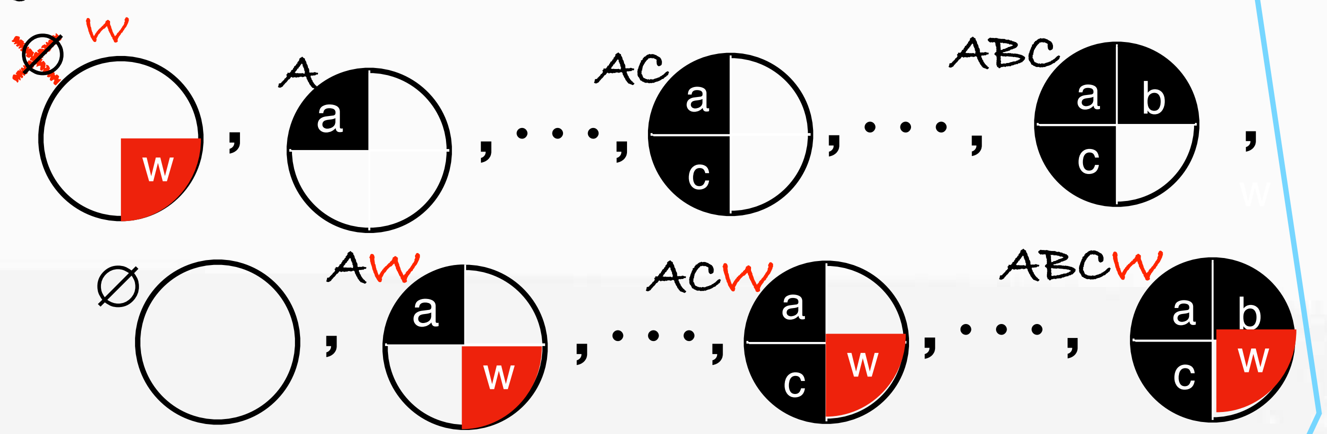
(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:
$pr(\varnothing)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$
$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡ (" recibir ruido").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

$E+W = \{$ a, b, c, w $\}$ Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon > 0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b") C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"), AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



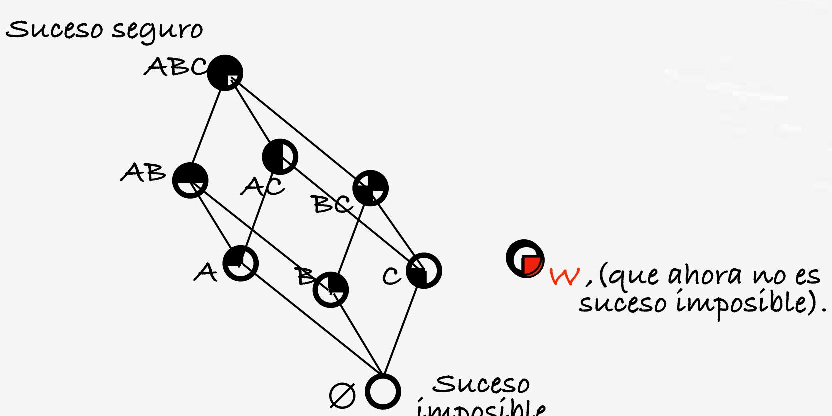
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡ (que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,

$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \emptyset$



$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E, ^c), pr)$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset) = 0$, $pr(A) = pr(B) = pr(C) = 1/3$,

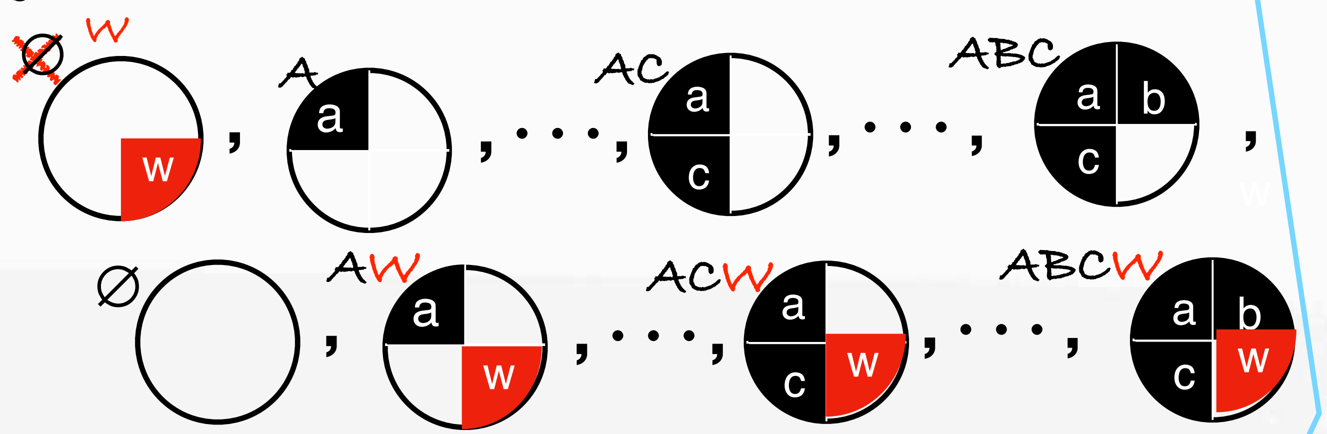
$pr(AB) = pr(AC) = pr(BC) = 2/3$, $pr(ABC) = 1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡ (" recibir ruido").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio [illegible], ni de interferencia, etc.

$E+w= \{a, b, c, w\}$ Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

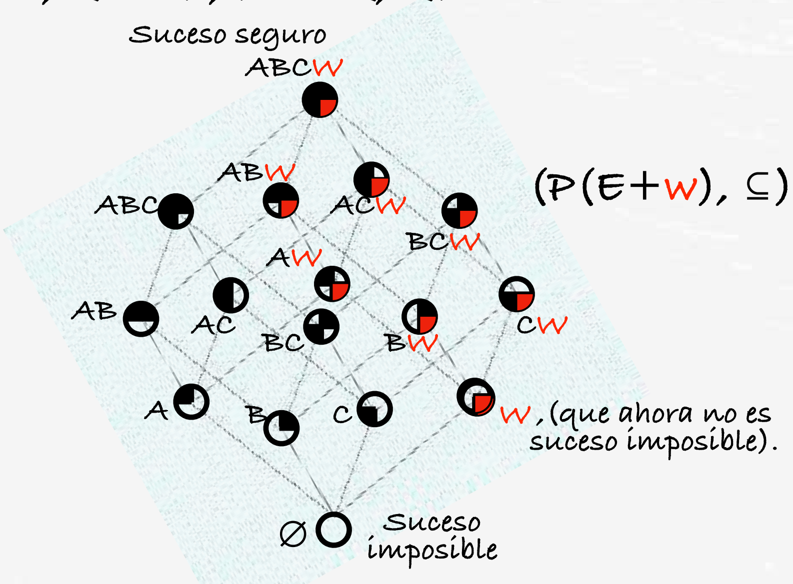
Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡ (que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\varnothing, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\varnothing^c=ABC$, $A^c=B$, $B^c=AC$, $C^c=AB$,
$AB^c=C$, $AC^c=B$, $BC^c=A$, $ABC^c=\varnothing$



(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\varnothing)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

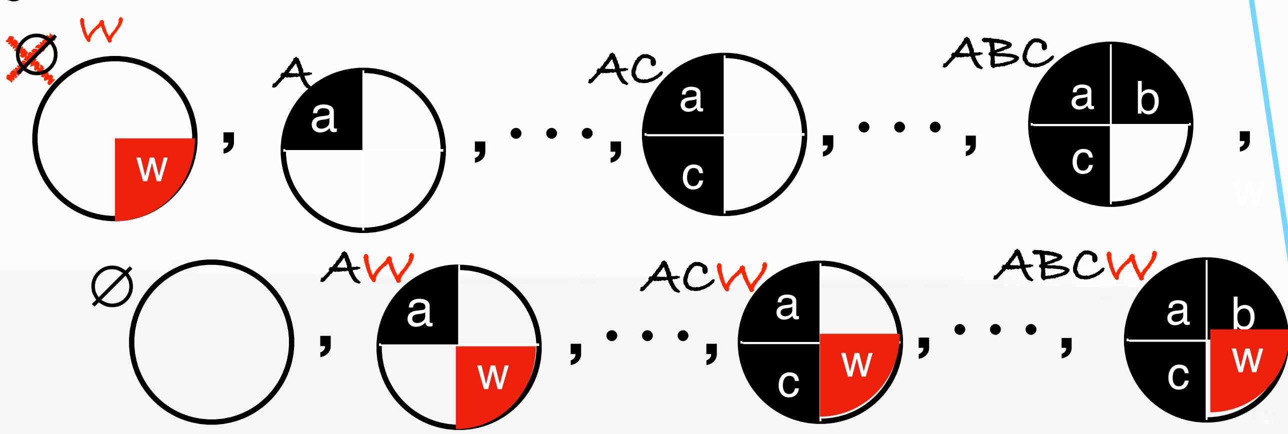
$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡ (" recibir ruido").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w= \{a, b, c, w\}$ Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

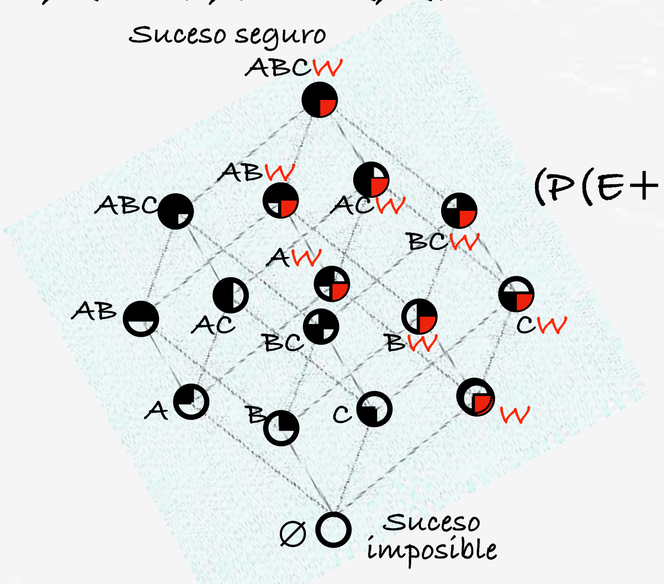
Sucesos: A≡ (recepción de "a"), B≡ (recepción de "b")
C≡ (recepción de "c"), AB≡ (recepción de "a" ó "b"),
AC≡ (recepción de "a" ó "c"), BC≡ (recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡ (que ocurra "W").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\emptyset^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,
$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \emptyset$



$(P(E+w), \subseteq)$

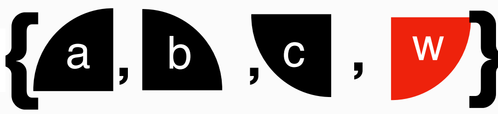
(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

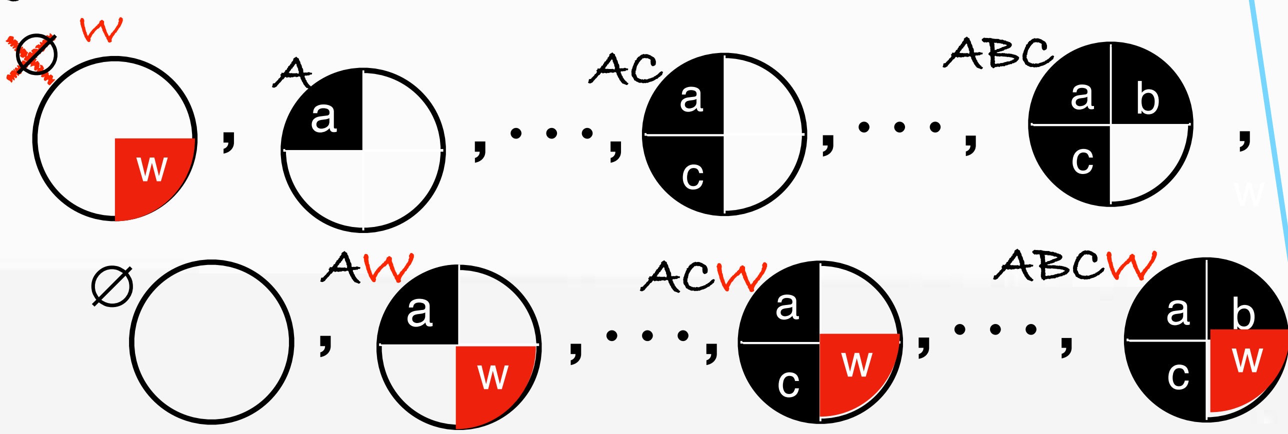
(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡ (" recibir ruido").

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=$ 

Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



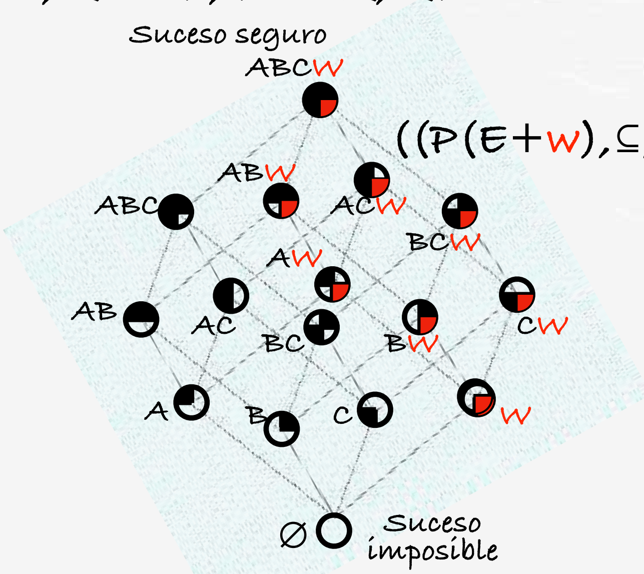
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $w \notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "w").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$

$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\emptyset$



$((P(E+w),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E+w,{}^c),pr_1)$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡(" recibir ruido").

Ahora, bajo la hipótesis de que w es independiente de los otros sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+w \to [0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

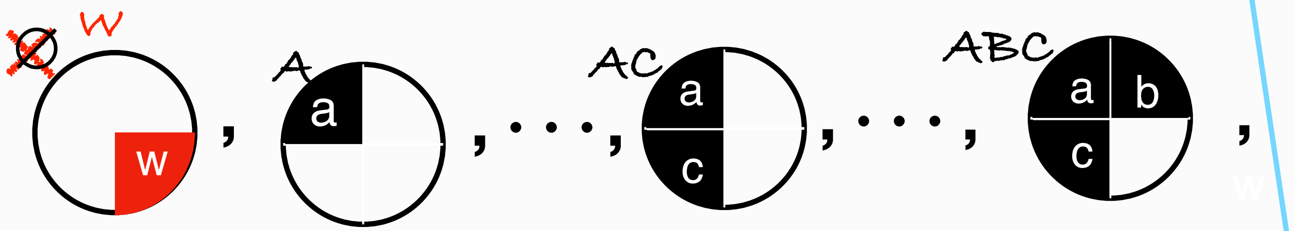
$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

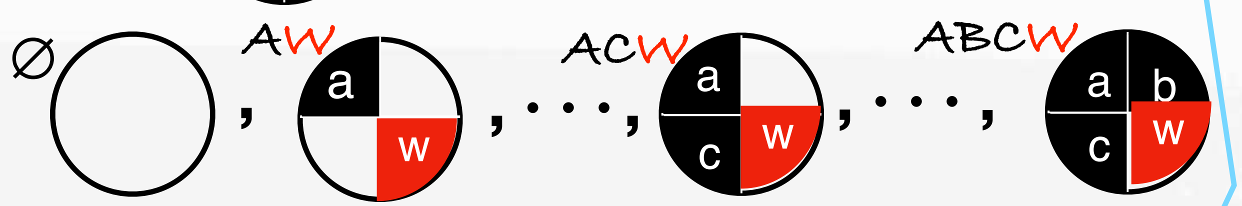
$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCw)=1$

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w= \{$ a, b, c, w $\}$ Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):





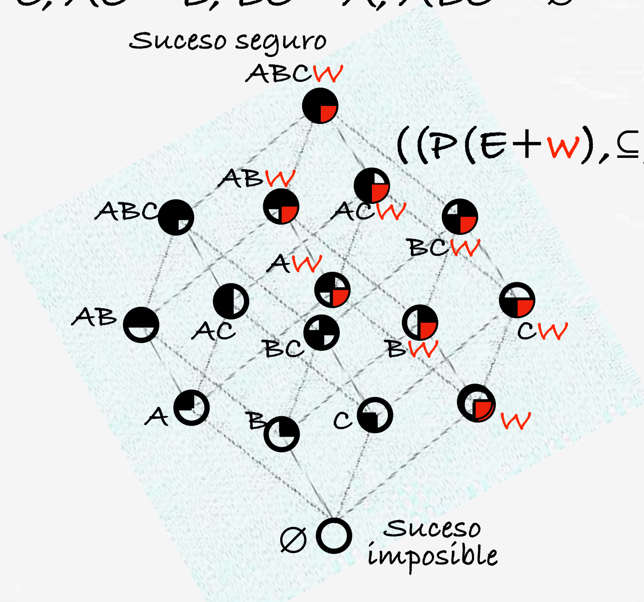
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "W").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)= \{\emptyset,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC$, $A^c=B$, $B^c=AC$, $C^c=AB$,

$AB^c=C$, $AC^c=B$, $BC^c=A$, $ABC^c=\emptyset$



$((P(E+w),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E+w,{}^c),pr1)$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡(" recibir ruido").

Ahora, bajo la hipótesis de que W es independiente de los otros sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W \to [0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(W)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,

$pr_1(AW)=pr_1(BW)=pr_1(CW)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

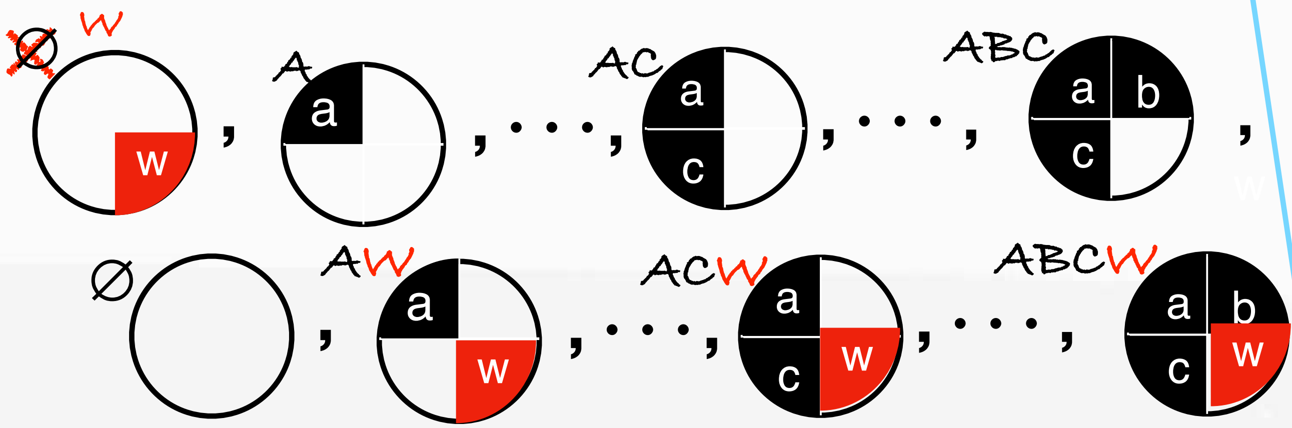
$pr_1(ABW)=pr_1(ACW)=pr_1(BCW)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCW)=1$

(iv) Introducimos en P(E+W) una <u>valoración asociada al evento</u> W: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w = \{a, b, c, w\}$ Evento W:"recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



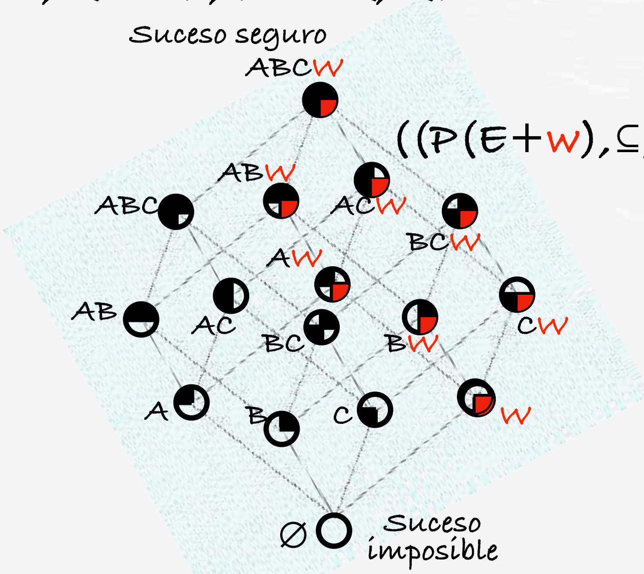
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "W").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\varnothing, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\varnothing^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,

$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \varnothing$



(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\varnothing)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡(" recibir ruido").

Ahora, bajo la hipótesis de que W es independiente de los otros sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W \to [0,1]$:

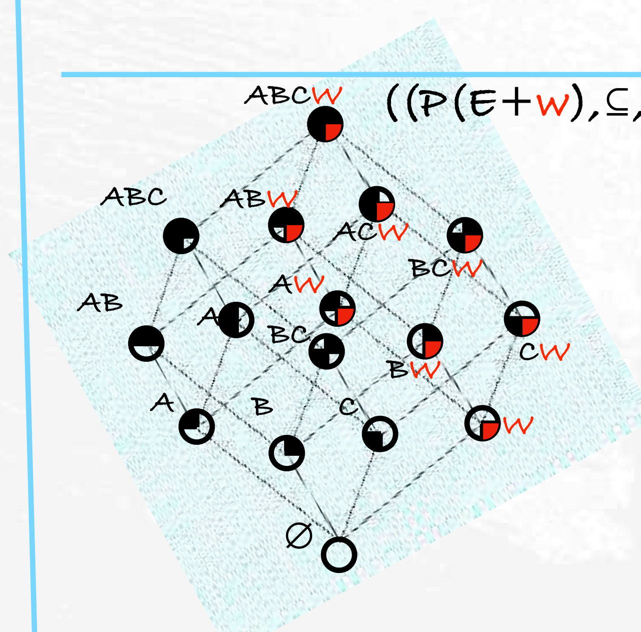
$pr_1(\varnothing)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(W)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,

$pr_1(AW)=pr_1(BW)=pr_1(CW)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABW)=pr_1(ACW)=pr_1(BCW)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCW)=1$

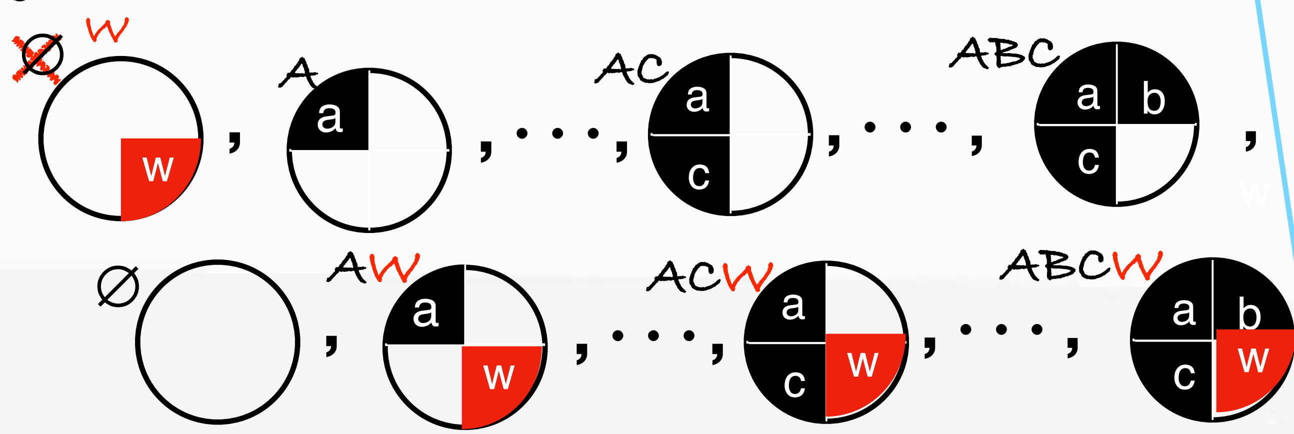
(iv) Introducimos en P(E+W) una valoración asociada al evento W: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.



Supongamos que $E=\{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=\{a, b, c, w\}$ Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

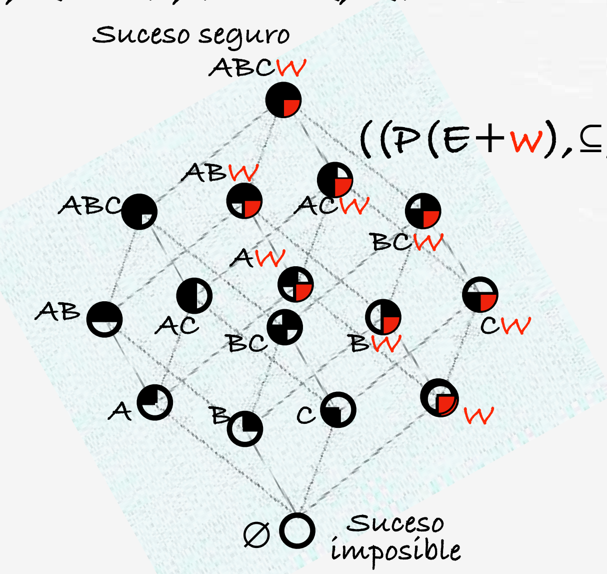
Sucesos: $A\equiv$(recepción de "a"), $B\equiv$(recepción de "b")
$C\equiv$(recepción de "c"), $AB\equiv$(recepción de "a" ó "b"),
$AC\equiv$(recepción de "a" ó "c"), $BC\equiv$(recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro $ABC\equiv$(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $w\notin E$ con lo que: $\varnothing\equiv$(que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\varnothing,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\varnothing^c=ABC$, $A^c=B$, $B^c=AC$, $C^c=AB$,
$AB^c=C$, $AC^c=B$, $BC^c=A$, $ABC^c=\varnothing$



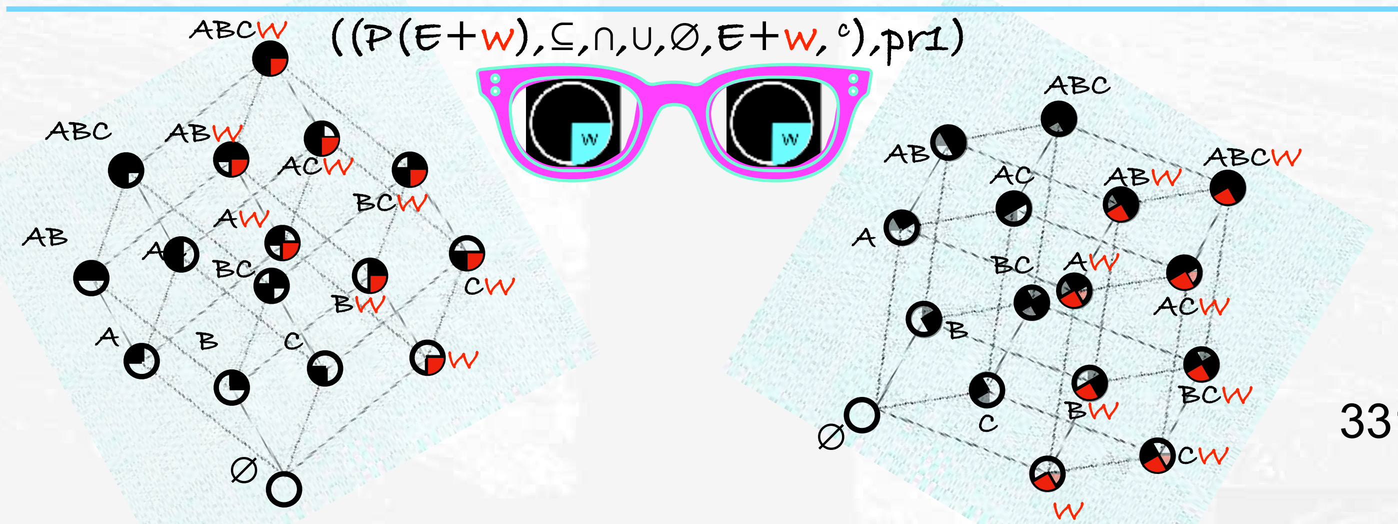
(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E\to[0,1]$:
$pr(\varnothing)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,
$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento $W\equiv$(" recibir ruido").

Ahora, bajo la hipótesis de que w es independiente de los otros sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+w\to[0,1]$:
$pr_1(\varnothing)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(w)=\varepsilon$
$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,
$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$
$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+w)$ una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.
La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:
$(Bw)\sqsubseteq^w B$, $(Cw)\sqsubseteq^w(ACw)$, $(Cw)\sqsubseteq^w(BC)$, $B\sqsubseteq^w(BC)$, etc,...

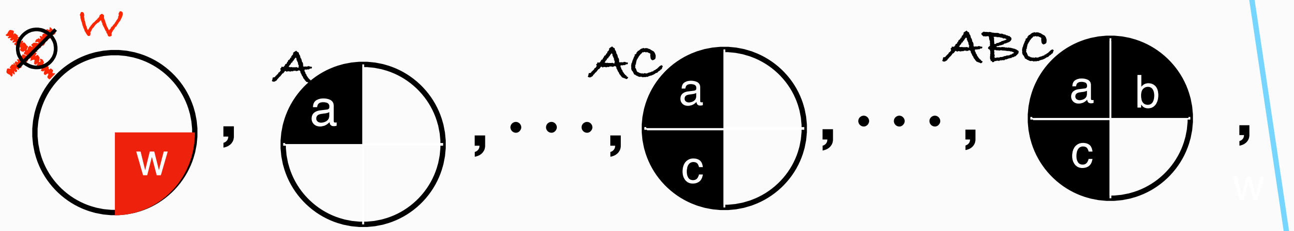
((P(E+w),⊆,∩,∪,∅,E+w,ᶜ),pr1)



Supongamos que $E=\{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=\{$ a, b, c, w $\}$ Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



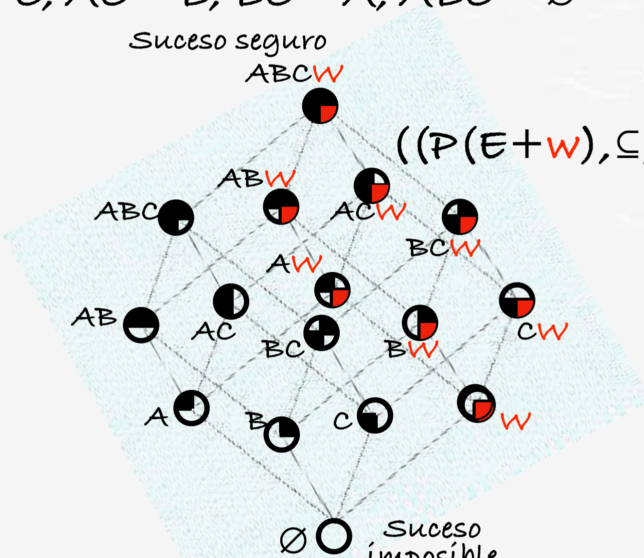
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **W**$\notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\varnothing,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión ⊆, y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:

$\varnothing^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$

$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\varnothing$



(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E\to[0,1]$:

$pr(\varnothing)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

(iii) Pero supongamos que en repeticiones de la experiencia, SI que ocurre el evento W≡(" recibir ruido").

Ahora, bajo la hipótesis de que W es independiente de los otros sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W\to[0,1]$:

$pr_1(\varnothing)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(W)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

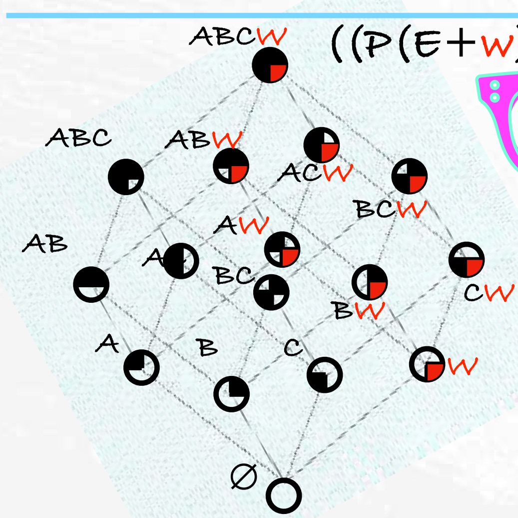
$pr_1(AW)=pr_1(BW)=pr_1(CW)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

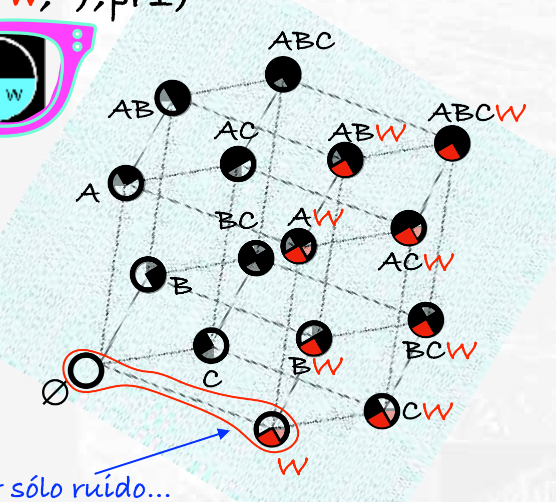
$pr_1(ABW)=pr_1(ACW)=pr_1(BCW)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCW)=1$

(iv) Introducimos en P(E+w) una <u>valoración asociada al evento W</u>: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

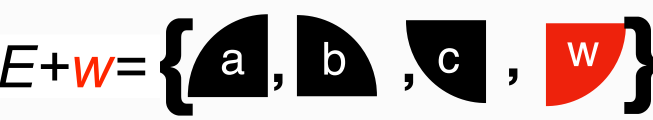
La relación $\sqsubseteq^W$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

$(BW)\sqsubseteq^W B,\ (CW)\sqsubseteq^W(ACW),\ (CW)\sqsubseteq^W(BC),\ B\sqsubseteq^W(BC)$, etc,...



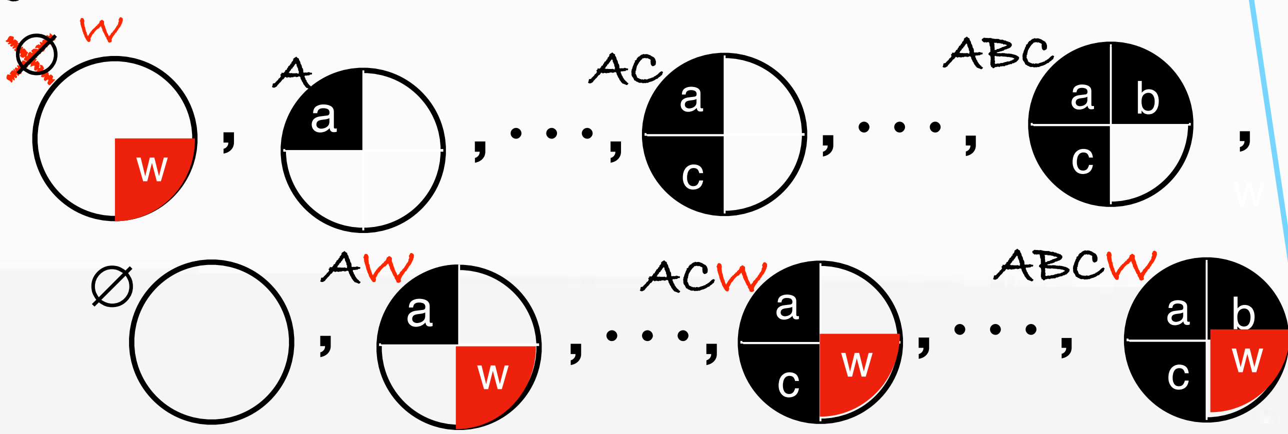


Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.



Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon > 0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

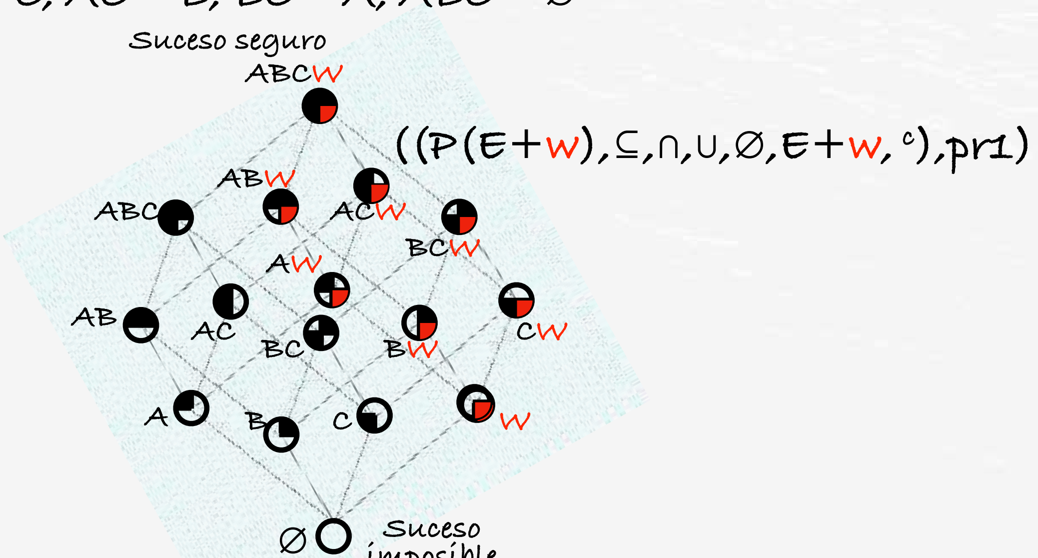
Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b")
C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"),
AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"),
y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **W**$\notin E$ con lo que: $\emptyset$≡(que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:
$\emptyset^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,
$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \emptyset$

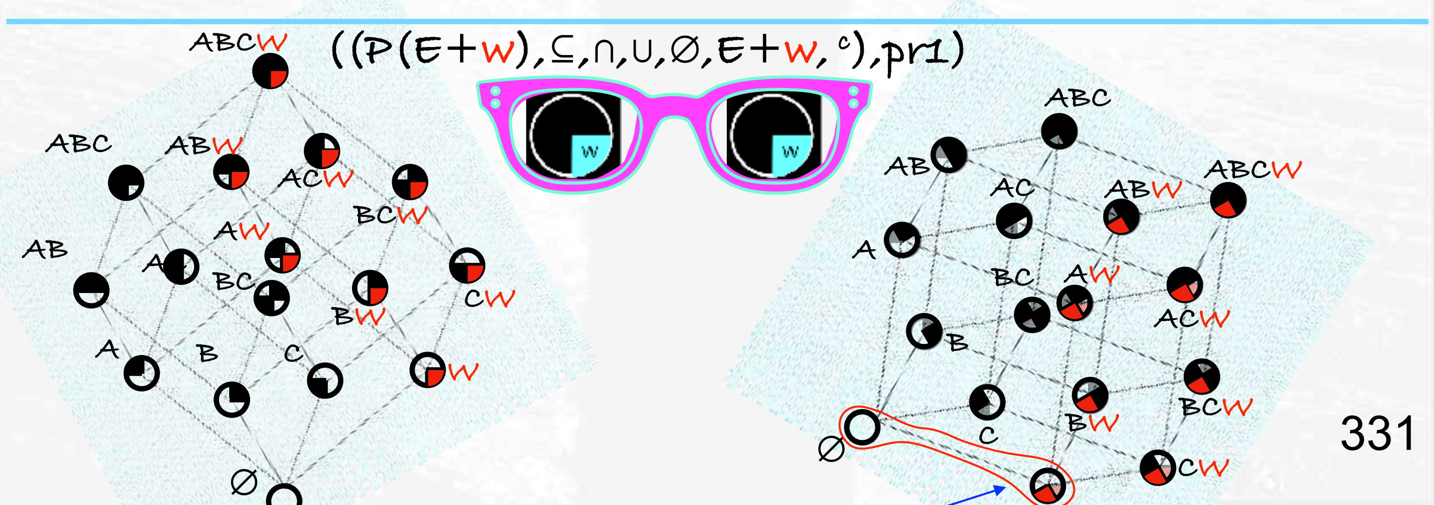


(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:
$pr(\emptyset) = 0$, $pr(A) = pr(B) = pr(C) = 1/3$,
$pr(AB) = pr(AC) = pr(BC) = 2/3$, $pr(ABC) = 1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1(w,0)}(A) = pr_1(A \Delta W) \Delta 0 = pr_1(A \Delta W)}$$

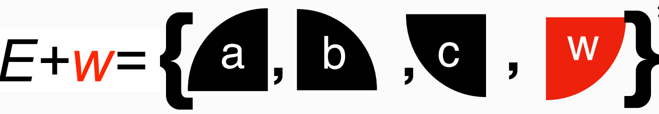
sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W \to [0,1]$:
$pr_1(\emptyset) = 0$, $pr_1(A) = pr_1(B) = pr_1(C) = (1-\varepsilon)/3$, $pr_1(W) = \varepsilon$
$pr_1(AB) = pr_1(AC) = pr_1(BC) = 2(1-\varepsilon)/3$,
$pr_1(AW) = pr_1(BW) = pr_1(CW) = (1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC) = (1-\varepsilon)$
$pr_1(ABW) = pr_1(ACW) = pr_1(BCW) = (2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCW) = 1$

(iv) Introducimos en P(E+W) una <u>valoración asociada al evento W</u>: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.
La relación $\sqsubseteq^W$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:
$(BW) \sqsubseteq^W B$, $(CW) \sqsubseteq^W (ACW)$, $(CW) \sqsubseteq^W (BC)$, $B \sqsubseteq^W (BC)$, etc,...



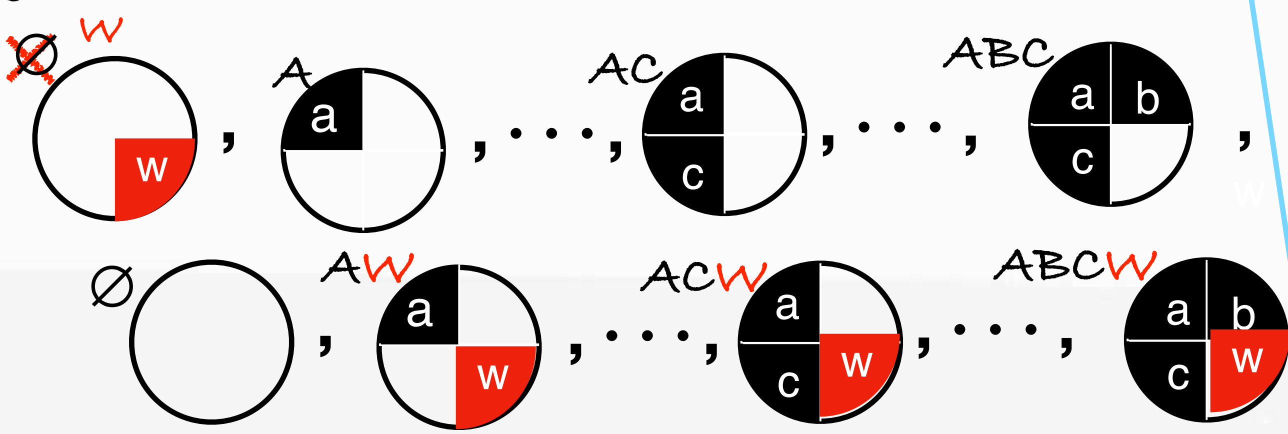
"Parece <u>imposible</u>" recibir sólo ruido...

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.



Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



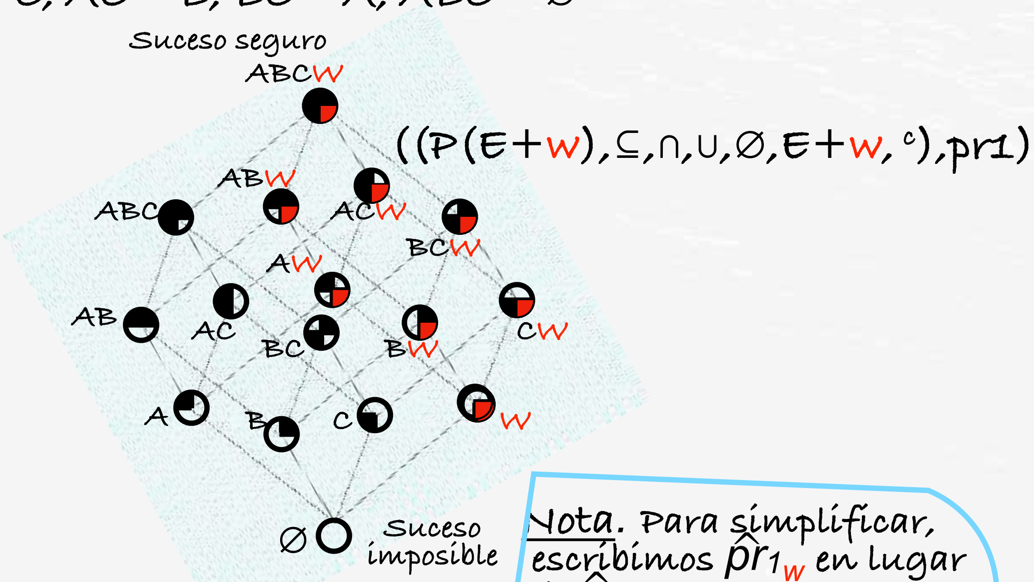
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **w**∉E con lo que: Ø≡(que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\emptyset,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión ⊆, y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC$, $A^c=B$, $B^c=AC$, $C^c=AB$,

$AB^c=C$, $AC^c=B$, $BC^c=A$, $ABC^c=\emptyset$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}_{1_w}$ en lugar de $\hat{pr}_{1(w,0)}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1(w,0)}(A) = pr_1(A\Delta w)\Delta 0 = pr_1(A\Delta w)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+w \to [0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,

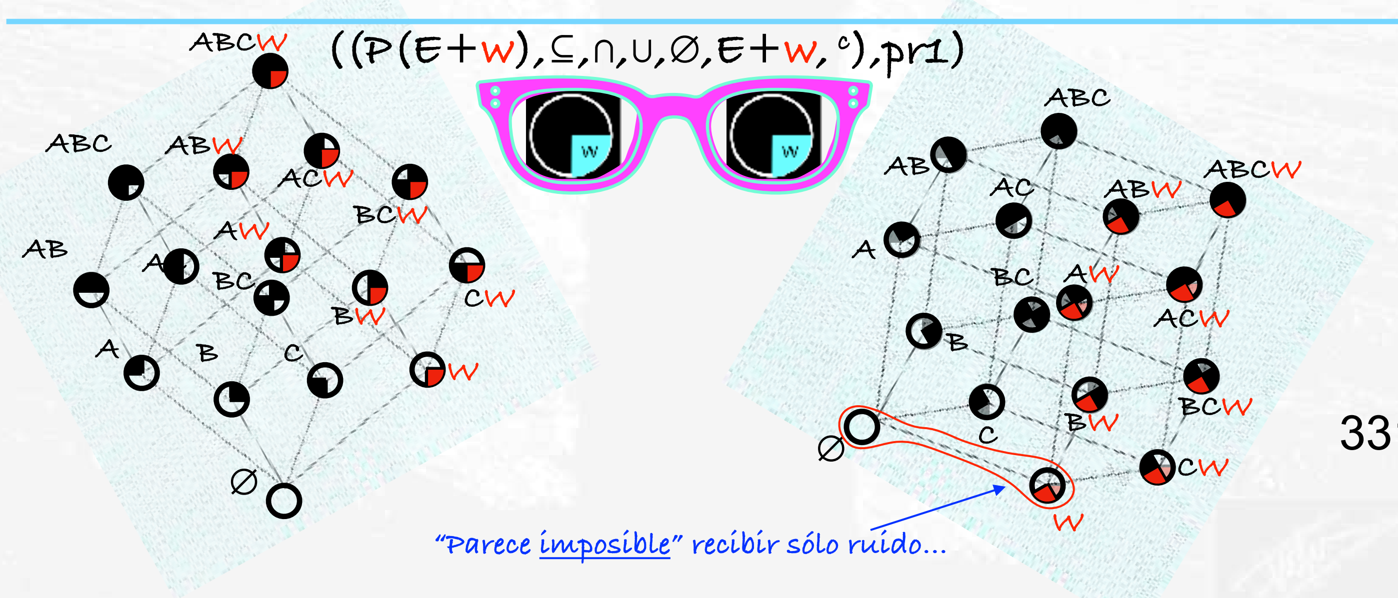
$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCw)=1$

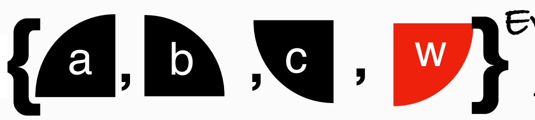
(iv) Introducimos en P(E+w) una <u>valoración asociada al evento w</u>: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

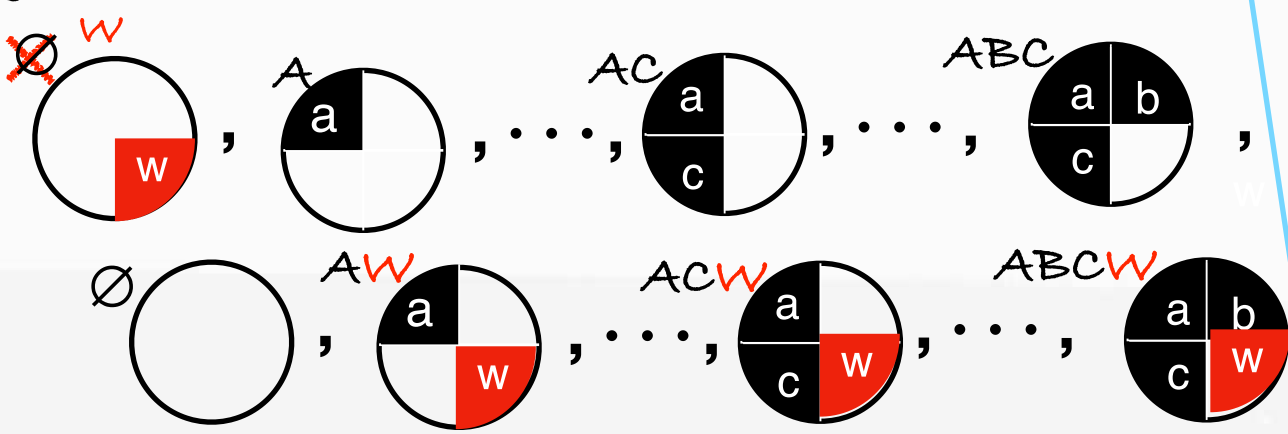
$(Bw) \sqsubseteq^w B$, $(Cw) \sqsubseteq^w (ACw)$, $(Cw) \sqsubseteq^w (BC)$, $B \sqsubseteq^w (BC)$, etc,...



Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

$E+W=$  Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



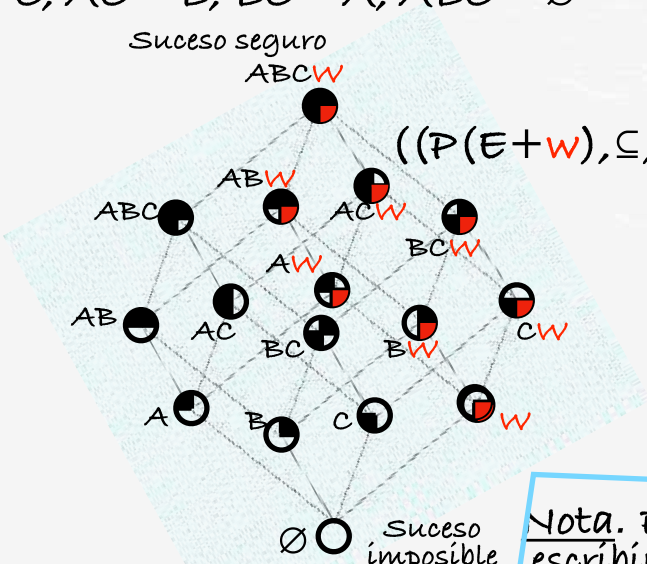
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $W \notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "W").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión ⊆, y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC$, $A^c=B$, $B^c=AC$, $C^c=AB$,

$AB^c=C$, $AC^c=B$, $BC^c=A$, $ABC^c=\emptyset$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}_{1_W}$ en lugar de $\hat{pr}_{1_{(W,0)}}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1_{(W,0)}}(A) = pr_1(A \Delta W)\Delta 0 = pr_1(A \Delta W)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W \to [0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(W)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,

$pr_1(AW)=pr_1(BW)=pr_1(CW)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

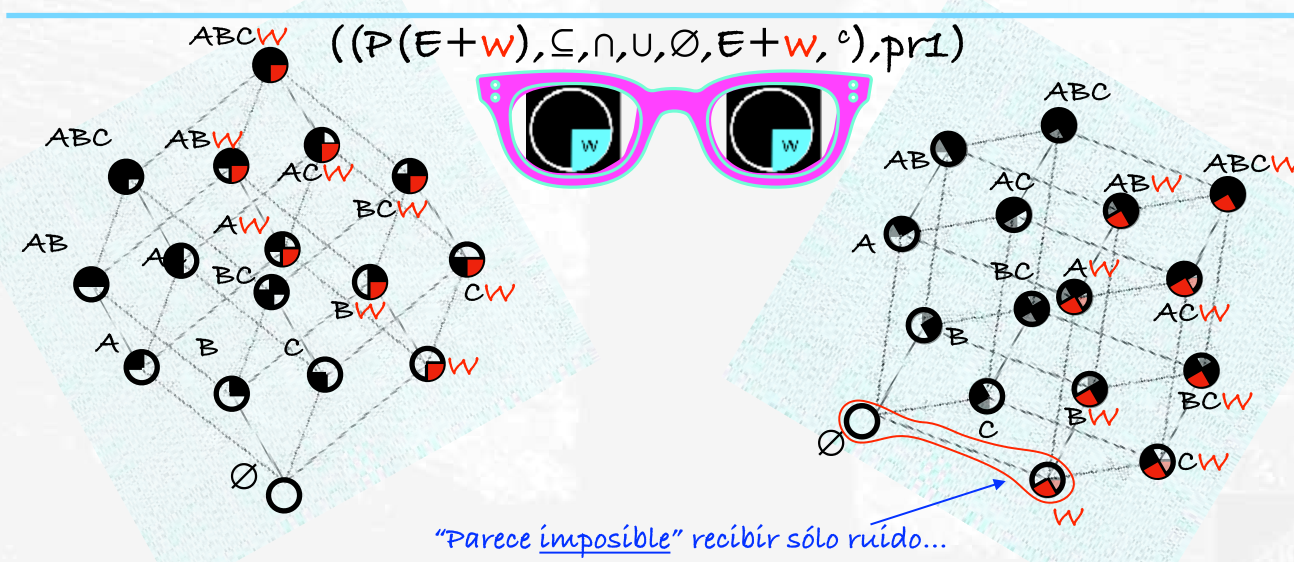
$pr_1(ABW)=pr_1(ACW)=pr_1(BCW)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCW)=1$

(iv) Introducimos en P(E+W) una valoración asociada al evento W: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^W$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

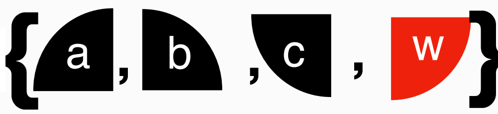
$(BW) \sqsubseteq^W B$, $(CW) \sqsubseteq^W (ACW)$, $(CW) \sqsubseteq^W (BC)$, $B \sqsubseteq^W (BC)$, etc,...

$\hat{pr}_{1_W}(M)=pr_1(M\Delta W)=pr_1((M\cap W^c)\cup(M^c\cap W))=pr_1(M\cap W^c)+pr_1(M^c\cap W))$:

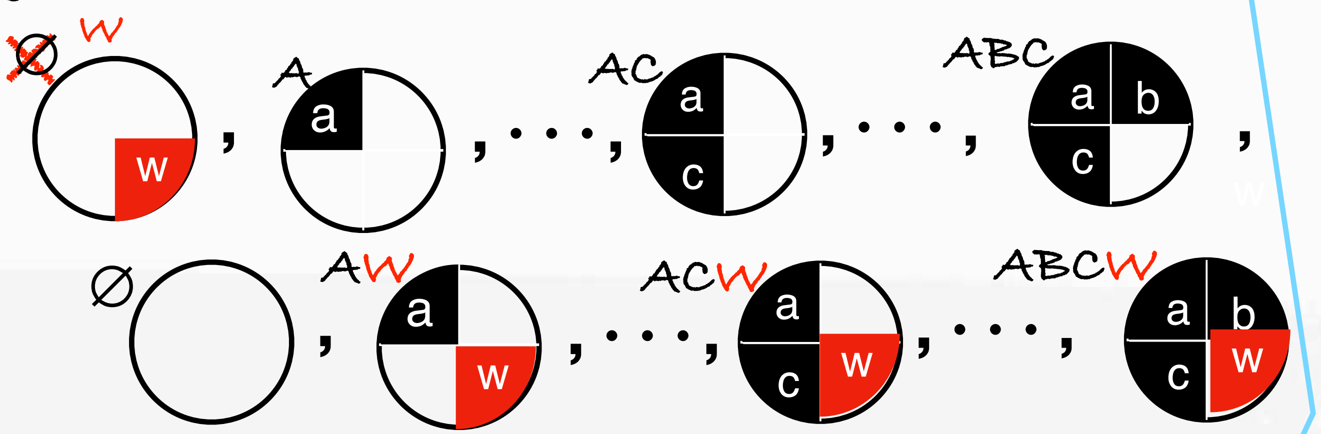


"Parece imposible" recibir sólo ruido...

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=$  Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: $A\equiv$(recepción de "a"), $B\equiv$(recepción de "b") $C\equiv$(recepción de "c"), $AB\equiv$(recepción de "a" ó "b"), $AC\equiv$(recepción de "a" ó "c"), $BC\equiv$(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro $ABC\equiv$(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



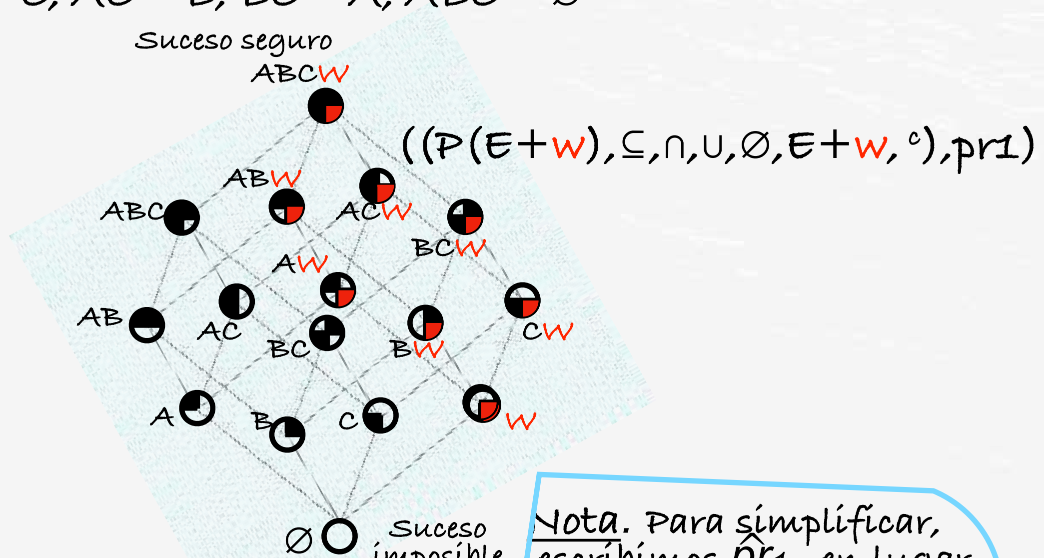
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $w\notin E$ con lo que: $\emptyset\equiv$(que ocurra "w").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\emptyset,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$

$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\emptyset$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}1_w$ en lugar de $\hat{pr}1_{(w,0)}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E\to[0,1]$:

$pr(\emptyset)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}1_{(w,0)}(A)=pr_1(A\Delta w)\Delta 0=pr_1(A\Delta w)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+w\to[0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+w)$ una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

$(Bw)\sqsubseteq^w B,\ (Cw)\sqsubseteq^w(ACw),\ (Cw)\sqsubseteq^w(BC),\ B\sqsubseteq^w(BC)$, etc,...

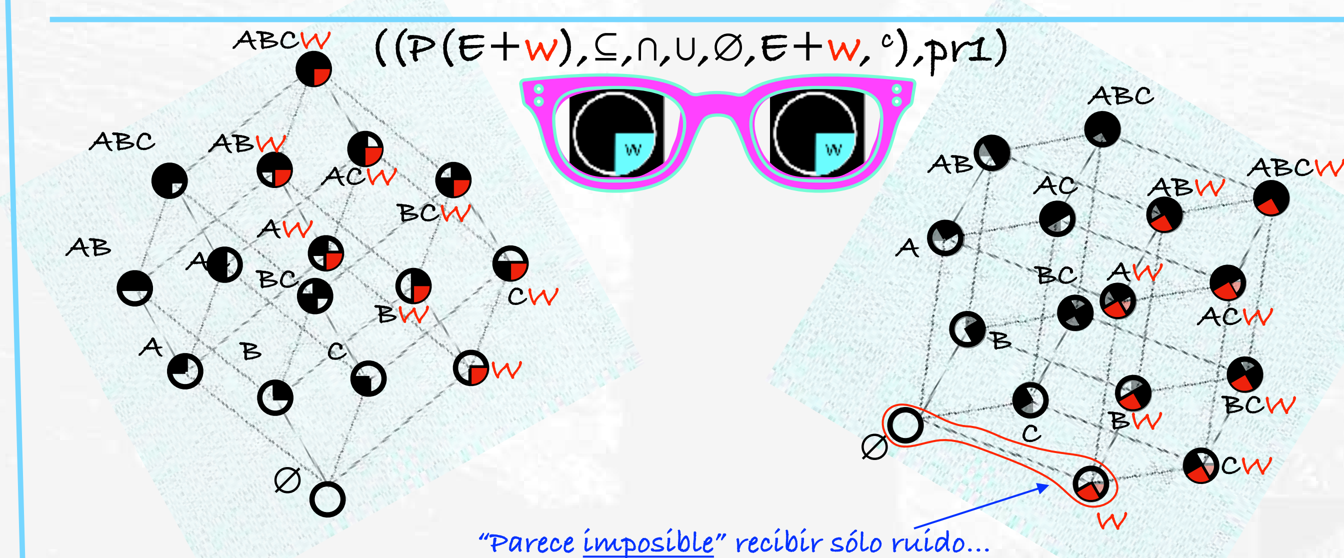
$\hat{pr}1_w(M)=pr_1(M\Delta w)=pr_1((M\cap w^c)\cup(M^c\cap w))=pr_1(M\cap w^c)+pr_1(M^c\cap w))$:

$\hat{pr}1_w(\emptyset)=\varepsilon,\ \hat{pr}1_w(A)=\hat{pr}1_w(B)=\hat{pr}1_w(C)=(1+2\varepsilon)/3,$

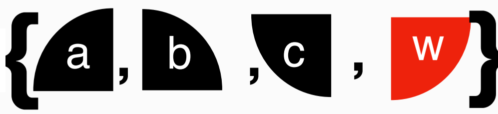
$\hat{pr}1_w(AB)=\hat{pr}1_w(AC)=\hat{pr}1_w(BC)=(2+\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABC)=1$

$\hat{pr}1_w(w)=0,\ \hat{pr}1_w(Aw)=\hat{pr}1_w(Bw)=\hat{pr}1_w(Cw)=(1-\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}1_w(ABw)=\hat{pr}1_w(ACw)=\hat{pr}1_w(BCw)=2(1-\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABCw)=(1-\varepsilon)$

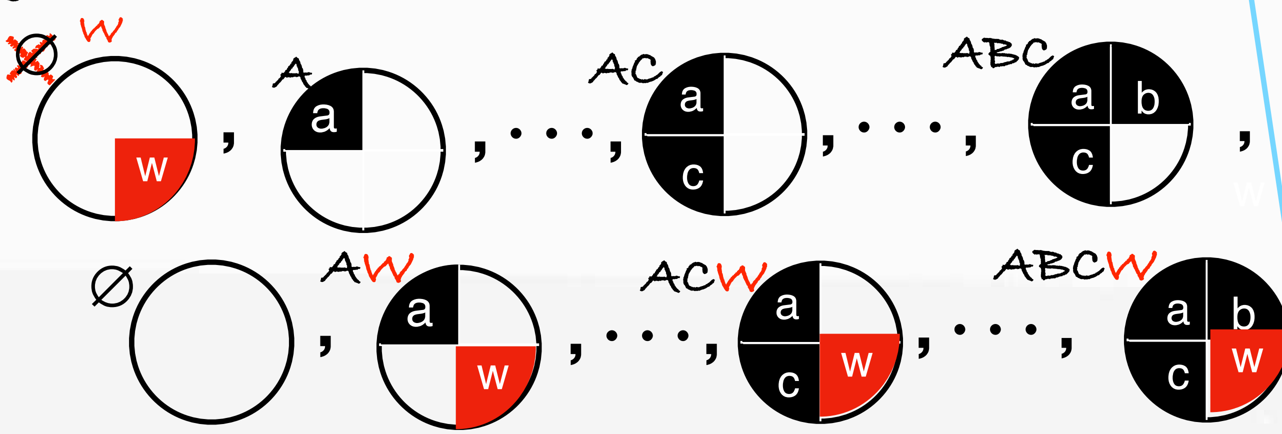


Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~[illegible]~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=$ 

Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



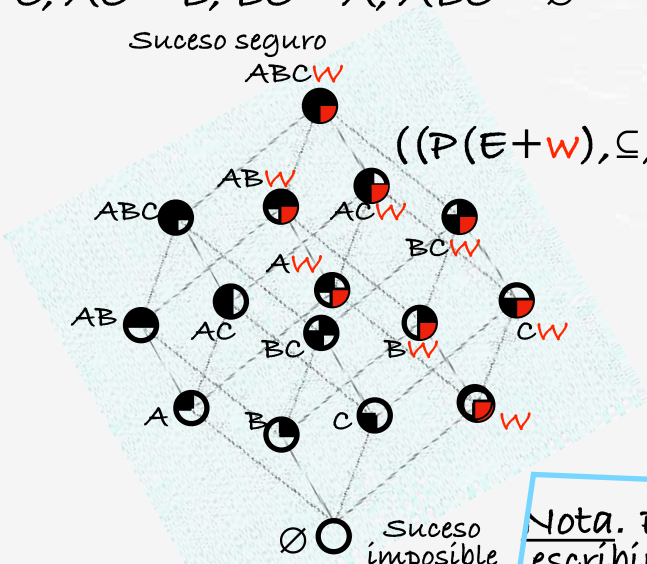
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $\mathbf{w} \notin E$ con lo que: $\emptyset \equiv$ (que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E) = \{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c = ABC$, $A^c = B$, $B^c = AC$, $C^c = AB$,

$AB^c = C$, $AC^c = B$, $BC^c = A$, $ABC^c = \emptyset$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}_{1_w}$ en lugar de $\hat{pr}_{1_{(w,0)}}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \rightarrow [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0$, $pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3$,

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3$, $pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1_{(w,0)}}(A) = pr_1(A\Delta w)\Delta 0 = pr_1(A\Delta w)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+w \rightarrow [0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0$, $pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3$, $pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3$,

$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3$, $pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3$, $pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+w)$ una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

$(Bw) \sqsubseteq^w B$, $(Cw) \sqsubseteq^w (ACw)$, $(Cw) \sqsubseteq^w (BC)$, $B \sqsubseteq^w (BC)$, etc,...

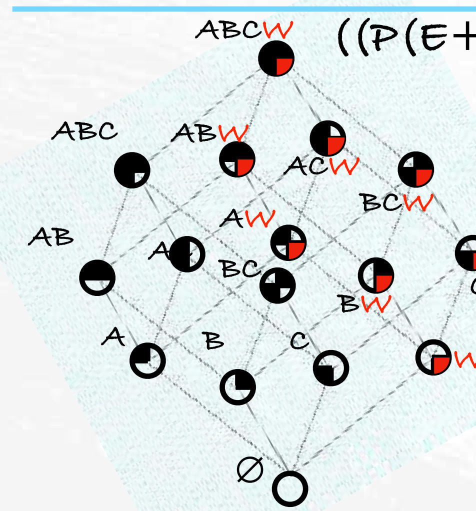
$\hat{pr}_{1_w}(M)=pr_1(M\Delta w)=pr_1((M\cap w^c)\cup(M^c\cap w))=pr_1(M\cap w^c)+pr_1(M^c\cap w))$:

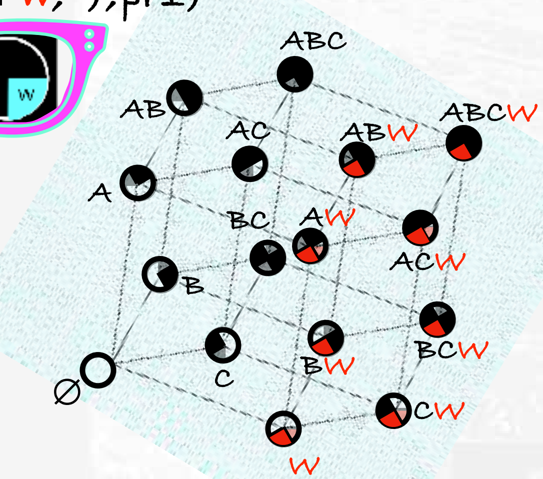
$\hat{pr}_{1_w}(\emptyset)=\varepsilon$, $\hat{pr}_{1_w}(A)=\hat{pr}_{1_w}(B)=\hat{pr}_{1_w}(C)=(1+2\varepsilon)/3$,

$\hat{pr}_{1_w}(AB)=\hat{pr}_{1_w}(AC)=\hat{pr}_{1_w}(BC)=(2+\varepsilon)/3$, $\hat{pr}_{1_w}(ABC)=1$

$\hat{pr}_{1_w}(w)=0$, $\hat{pr}_{1_w}(Aw)=\hat{pr}_{1_w}(Bw)=\hat{pr}_{1_w}(Cw)=(1-\varepsilon)/3$,

$\hat{pr}_{1_w}(ABw)=\hat{pr}_{1_w}(ACw)=\hat{pr}_{1_w}(BCw)=2(1-\varepsilon)/3$, $\hat{pr}_{1_w}(ABCw)=(1-\varepsilon)$



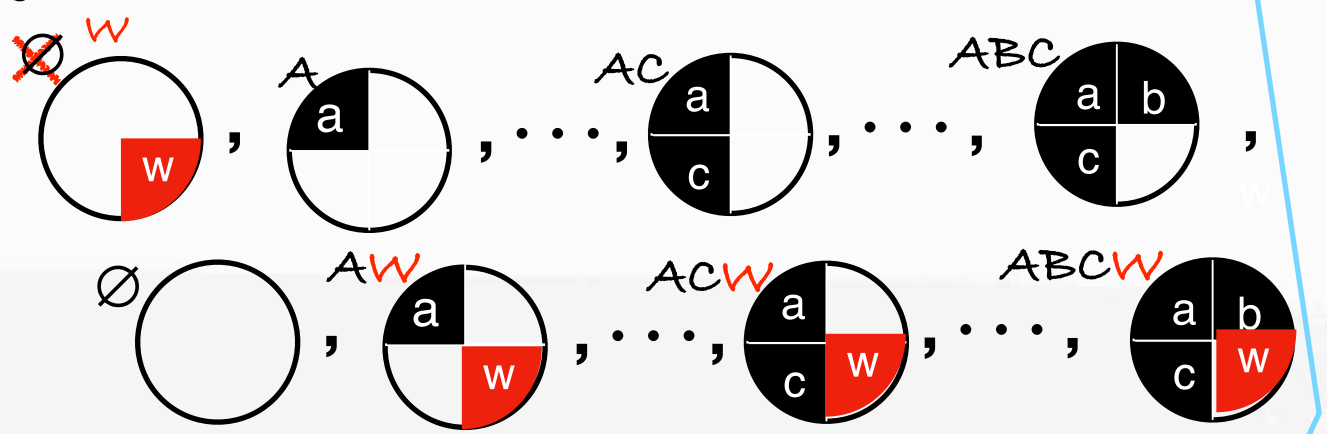


$((P(E+w),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,\emptyset,E+w,{}^c),\hat{pr}_{1_w}))$

Supongamos que E = {a,b,c} es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

E+w= {a, b, c, w} Evento w:"recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

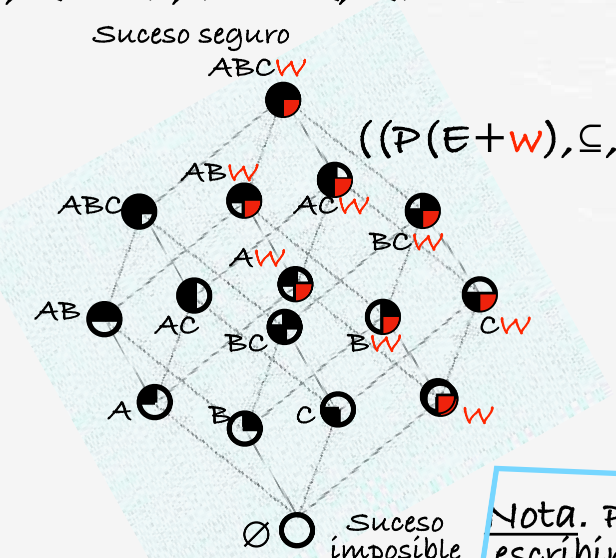
Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento **w**∉E con lo que: ∅≡(que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)$ = {∅,A,B,C,AB,AC,BC,ABC} con la inclusión ⊆, y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:
∅ᶜ=ABC, Aᶜ=B, Bᶜ=AC, Cᶜ=AB,
ABᶜ=C, ACᶜ=B, BCᶜ=A, ABCᶜ=∅



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}1_w$ en lugar de $\hat{pr}1_{(w,0)}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad pr: E →[0,1]:

$pr(\emptyset)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

$$\hat{pr}1_{(w,0)}(A) = pr_1(A\Delta w)\Delta 0 = pr_1(A\Delta w)$$

sucesos, aparece la función de probabilidad pr_1: E+w→[0,1]:

$pr_1(\emptyset)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en P(E+w) una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.
La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:
(Bw) $\sqsubseteq^w$B, (Cw) $\sqsubseteq^w$(ACw), (Cw) $\sqsubseteq^w$(BC), B $\sqsubseteq^w$(BC), etc,...

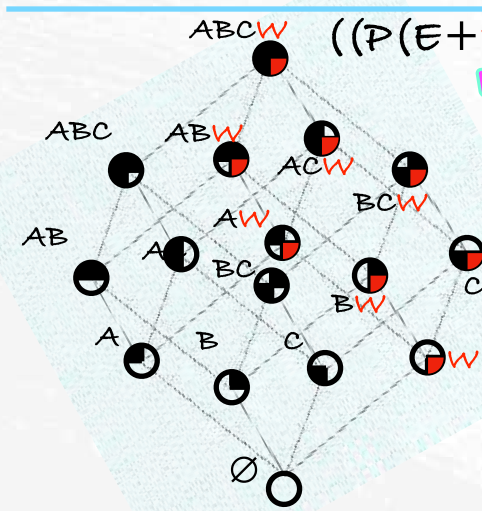
$\hat{pr}1_w(M)=pr_1(M\Delta w)=pr_1((M\cap w^c)\cup(M^c\cap w))=pr_1(M\cap w^c)+pr_1(M^c\cap w))$:

$\hat{pr}1_w(\emptyset)=\varepsilon,\ \hat{pr}1_w(A)=\hat{pr}1_w(B)=\hat{pr}1_w(C)=(1+2\varepsilon)/3,$

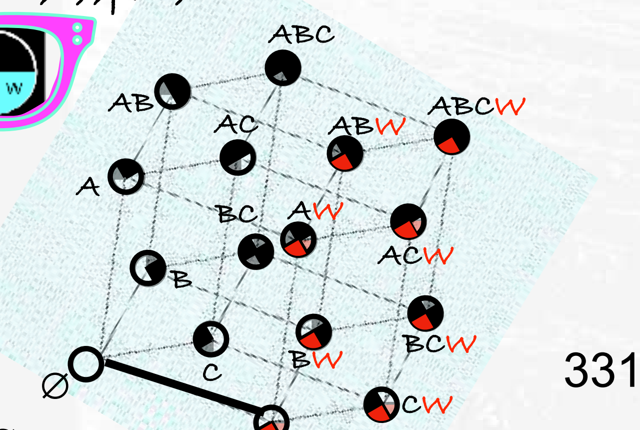
$\hat{pr}1_w(AB)=\hat{pr}1_w(AC)=\hat{pr}1_w(BC)=(2+\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABC)=1$

$\hat{pr}1_w(w)=0,\ \hat{pr}1_w(Aw)=\hat{pr}1_w(Bw)=\hat{pr}1_w(Cw)=(1-\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}1_w(ABw)=\hat{pr}1_w(ACw)=\hat{pr}1_w(BCw)=2(1-\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABCw)=(1-\varepsilon)$



((P(E+w),⊆,∩,∪,∅,E+w,ᶜ),pr1)



w $\sqsubseteq^w$∅

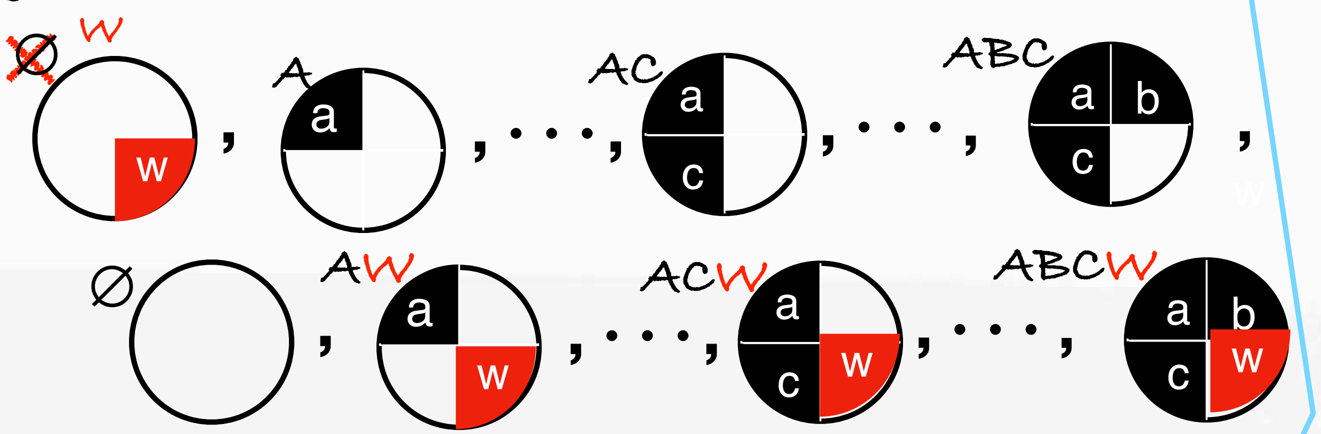
w, (que ahora está incluido en el suceso imposible).

((P(E+w),$\sqsubseteq^w$,$\sqcap^w$,$\sqcup^w$,∅,E+w,ᶜ),$\hat{pr}1_w$))

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

$E+w=\{$ a , b , c , w $\}$ Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

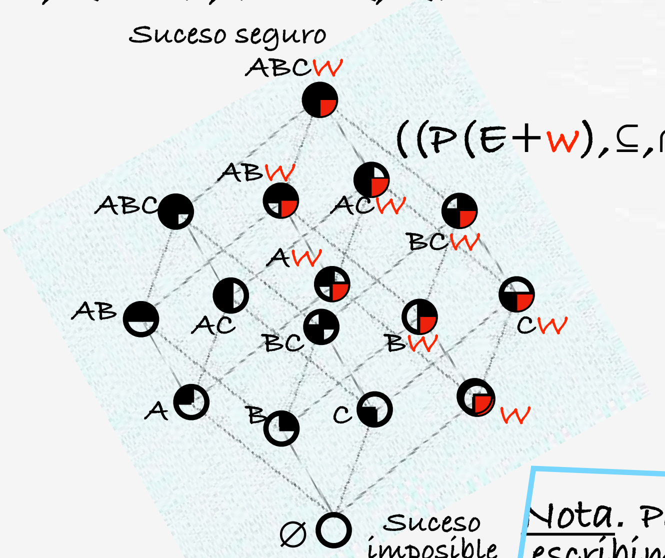
Sucesos: A≡(recepción de "a"), B≡(recepción de "b") C≡(recepción de "c"), AB≡(recepción de "a" ó "b"), AC≡(recepción de "a" ó "c"), BC≡(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro ABC≡(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $w \notin E$ con lo que: ∅≡(que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\varnothing,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión ⊆, y las operaciones usuales ∩, ∪ y la complementación:
$\varnothing^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$
$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\varnothing$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}1_w$ en lugar de $\hat{pr}1_{(w,0)}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad pr: $E\to[0,1]$:

$pr(\varnothing)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}1_{(w,0)}(A)=pr_1(A\Delta w)\Delta 0=pr_1(A\Delta w)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad pr_1: $E+w\to[0,1]$:

$pr_1(\varnothing)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+w)$ una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.
La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:
$(Bw)\sqsubseteq^w B,\ (Cw)\sqsubseteq^w(ACw),\ (Cw)\sqsubseteq^w(BC),\ B\sqsubseteq^w(BC)$, etc,...

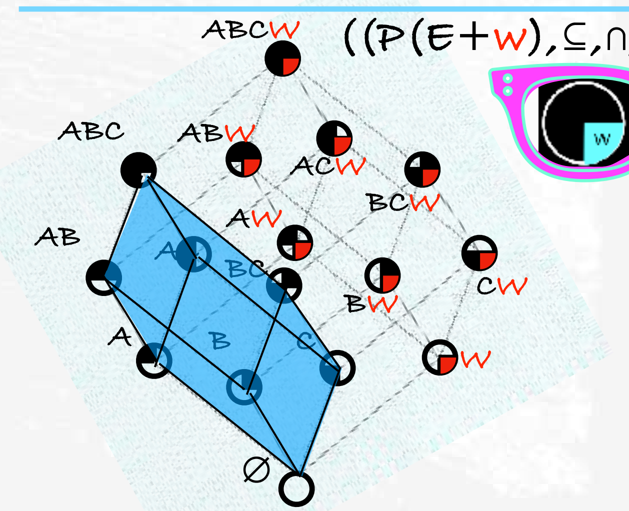
$\hat{pr}1_w(M)=pr_1(M\Delta w)=pr_1((M\cap w^c)\cup(M^c\cap w))=pr_1(M\cap w^c)+pr_1(M^c\cap w))$:

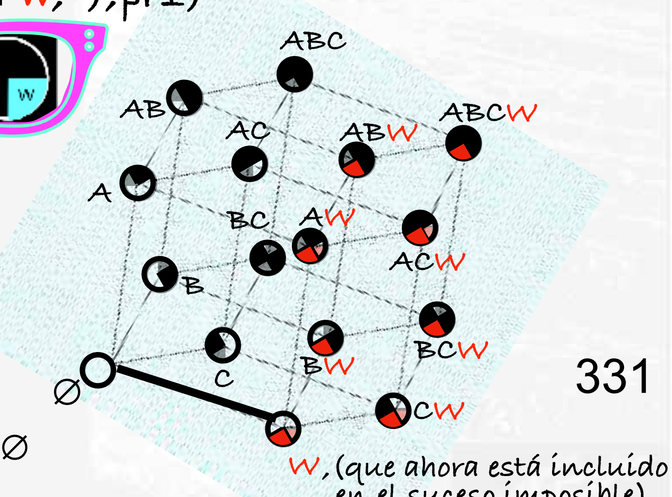
$\hat{pr}1_w(\varnothing)=\varepsilon,\ \hat{pr}1_w(A)=\hat{pr}1_w(B)=\hat{pr}1_w(C)=(1+2\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}1_w(AB)=\hat{pr}1_w(AC)=\hat{pr}1_w(BC)=(2+\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABC)=1$

$\hat{pr}1_w(w)=0,\ \hat{pr}1_w(Aw)=\hat{pr}1_w(Bw)=\hat{pr}1_w(Cw)=(1-\varepsilon)/3,$

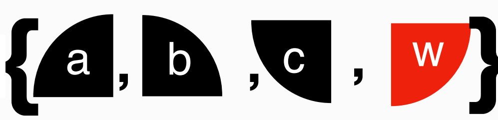
$\hat{pr}1_w(ABw)=\hat{pr}1_w(ACw)=\hat{pr}1_w(BCw)=2(1-\varepsilon)/3,\ \hat{pr}1_w(ABCw)=(1-\varepsilon)$



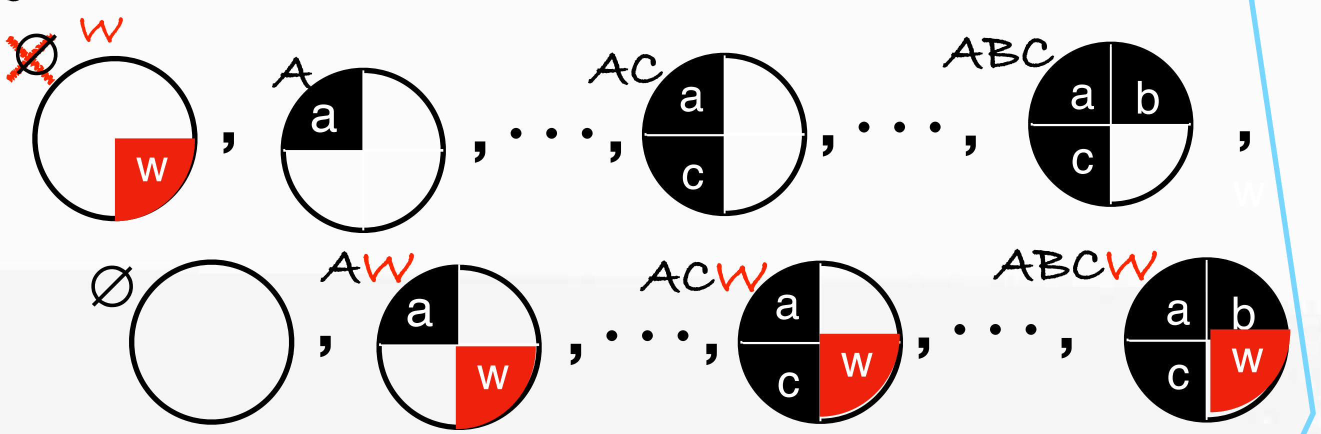


$((P(E+w),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,\varnothing,E+w,{}^c),\hat{pr}1_w))$

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio [illegible], ni de interferencia, etc.

$E+W=$  Evento W: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: $A\equiv$(recepción de "a"), $B\equiv$(recepción de "b") $C\equiv$(recepción de "c"), $AB\equiv$(recepción de "a" ó "b"), $AC\equiv$(recepción de "a" ó "c"), $BC\equiv$(recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro $ABC\equiv$(recepción de "a" ó "b" ó "c"):



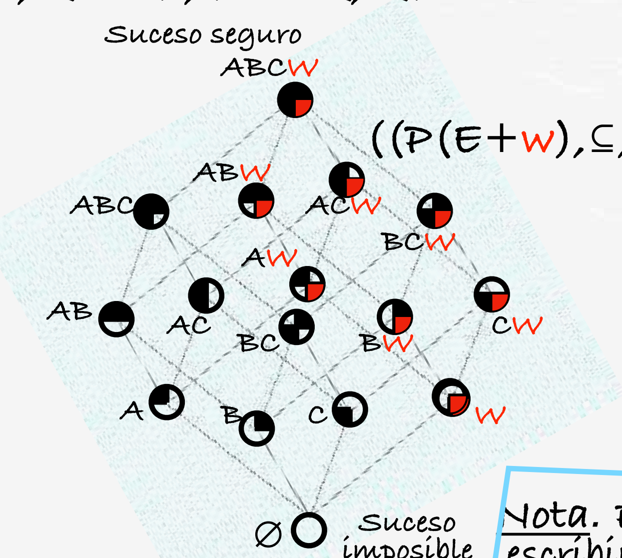
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $\mathbf{W}\notin E$ con lo que: $\varnothing\equiv$(que ocurra "**W**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)=\{\varnothing,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\varnothing^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$

$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\varnothing$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}_{1_W}$ en lugar de $\hat{pr}_{1(W,0)}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E\to[0,1]$:

$pr(\varnothing)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1(W,0)}(A)=pr_1(A\Delta W)\Delta 0=pr_1(A\Delta W)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad $pr_1: E+W\to[0,1]$:

$pr_1(\varnothing)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(W)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

$pr_1(AW)=pr_1(BW)=pr_1(CW)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABW)=pr_1(ACW)=pr_1(BCW)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCW)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+W)$ una valoración asociada al evento W: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^W$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

$(BW)\sqsubseteq^W B,\ (CW)\sqsubseteq^W(ACW),\ (CW)\sqsubseteq^W(BC),\ B\sqsubseteq^W(BC)$, etc,...

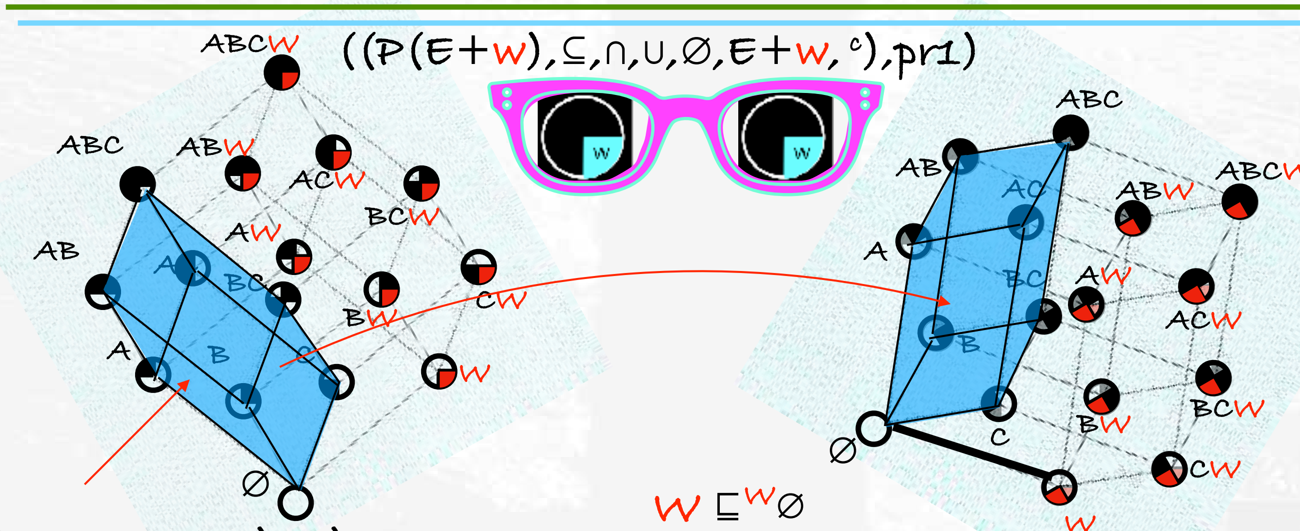
$\hat{pr}_{1_W}(M)=pr_1(M\Delta W)=pr_1((M\cap W^c)\cup(M^c\cap W))=pr_1(M\cap W^c)+pr_1(M^c\cap W))$:

$\hat{pr}_{1_W}(\varnothing)=\varepsilon,\ \hat{pr}_{1_W}(A)=\hat{pr}_{1_W}(B)=\hat{pr}_{1_W}(C)=(1+2\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}_{1_W}(AB)=\hat{pr}_{1_W}(AC)=\hat{pr}_{1_W}(BC)=(2+\varepsilon)/3,\ \hat{pr}_{1_W}(ABC)=1$

$\hat{pr}_{1_W}(W)=0,\ \hat{pr}_{1_W}(AW)=\hat{pr}_{1_W}(BW)=\hat{pr}_{1_W}(CW)=(1-\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}_{1_W}(ABW)=\hat{pr}_{1_W}(ACW)=\hat{pr}_{1_W}(BCW)=2(1-\varepsilon)/3,\ \hat{pr}_{1_W}(ABCW)=(1-\varepsilon)$

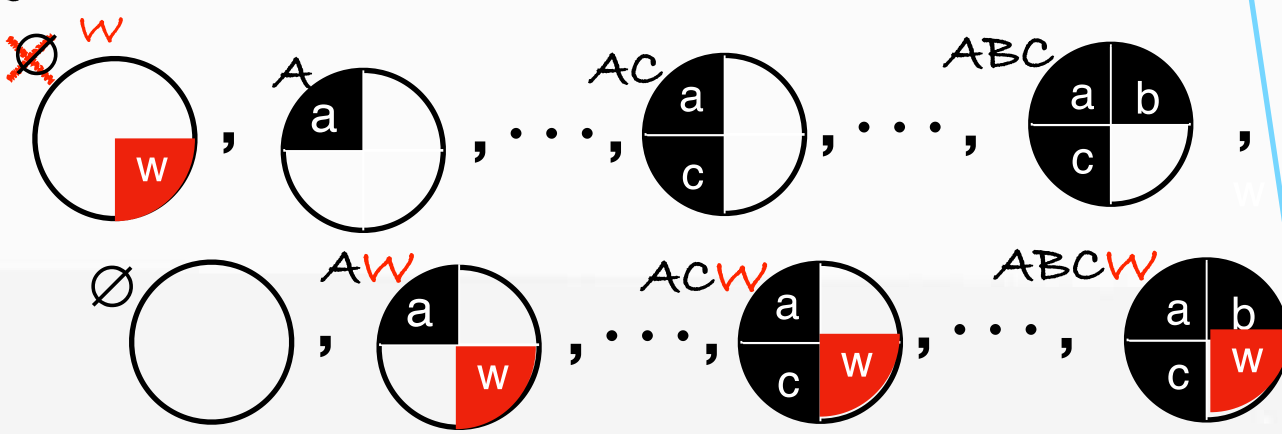


$((P(E+W),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,\varnothing,E+W,^c),\hat{pr}_{1_W}))$

Supongamos que $E = \{a,b,c\}$ es el espacio de eventos asociados al experimento aleatorio de recibir tres tipos de mensajes, en principio ~~sin ningún tipo de ruido~~, ni de interferencia, etc.

$E+w= \{a, b, c, w\}$ Evento w: "recibir ruido", (raro, con una probabilidad $\varepsilon>0$ pero muy pequeña: $\varepsilon << 1/3$).

Sucesos: $A\equiv$ (recepción de "a"), $B\equiv$ (recepción de "b") $C\equiv$ (recepción de "c"), $AB\equiv$ (recepción de "a" ó "b"), $AC\equiv$ (recepción de "a" ó "c"), $BC\equiv$ (recepción de "b" ó "c"), y el suceso seguro $ABC\equiv$ (recepción de "a" ó "b" ó "c"):



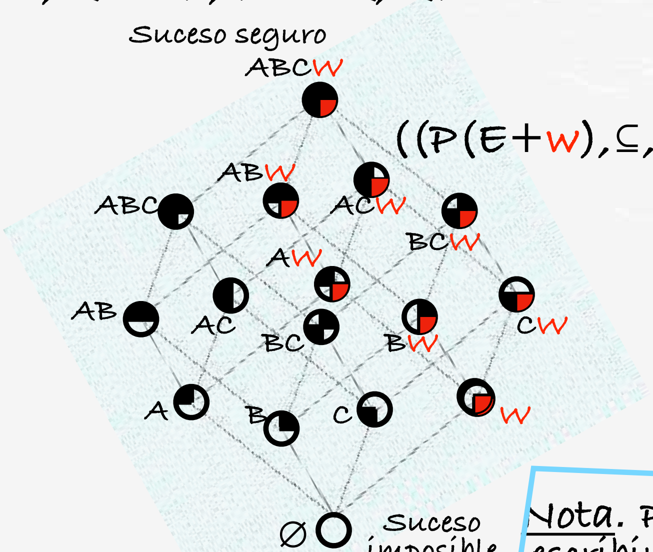
Finalmente, puede definirse el suceso imposible mediante un evento $w \notin E$ con lo que: $\emptyset\equiv$ (que ocurra "**w**").

Álgebra de sucesos asociada a E:

(i) $P(E)= \{\emptyset,A,B,C,AB,AC,BC,ABC\}$ con la inclusión $\subseteq$, y las operaciones usuales $\cap$, $\cup$ y la complementación:

$\emptyset^c=ABC,\ A^c=B,\ B^c=AC,\ C^c=AB,$

$AB^c=C,\ AC^c=B,\ BC^c=A,\ ABC^c=\emptyset$



Nota. Para simplificar, escribimos $\hat{pr}_{1_w}$ en lugar de $\hat{pr}_{1_{(w,0)}}$

(ii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que los sucesos elementales son equiprobables e independientes dos a dos, en consecuencia obtenemos la probabilidad $pr: E \to [0,1]$:

$pr(\emptyset)=0,\ pr(A)=pr(B)=pr(C)=1/3,$

$pr(AB)=pr(AC)=pr(BC)=2/3,\ pr(ABC)=1$

$$\boxed{\hat{pr}_{1_{(w,0)}}(A) = pr_1(A\Delta w)\Delta 0 = pr_1(A\Delta w)}$$

sucesos, aparece la función de probabilidad pr_1: $E+w\to[0,1]$:

$pr_1(\emptyset)=0,\ pr_1(A)=pr_1(B)=pr_1(C)=(1-\varepsilon)/3,\ pr_1(w)=\varepsilon$

$pr_1(AB)=pr_1(AC)=pr_1(BC)=2(1-\varepsilon)/3,$

$pr_1(Aw)=pr_1(Bw)=pr_1(Cw)=(1+2\varepsilon)/3,\ pr_1(ABC)=(1-\varepsilon)$

$pr_1(ABw)=pr_1(ACw)=pr_1(BCw)=(2+\varepsilon)/3,\ pr_1(ABCw)=1$

(iv) Introducimos en $P(E+w)$ una valoración asociada al evento w: "Propuesta de ordenación de mensajes con el siguiente criterio: (a). La ausencia de ruido tiene un aspecto positivo y (b) La presencia de ruido en los eventos lo tiene negativo.

La relación $\sqsubseteq^w$ parece una candidata apropiada para representar esta situación:

$(Bw) \sqsubseteq^w B,\ (Cw) \sqsubseteq^w (ACw),\ (Cw) \sqsubseteq^w (BC),\ B \sqsubseteq^w (BC)$, etc,...

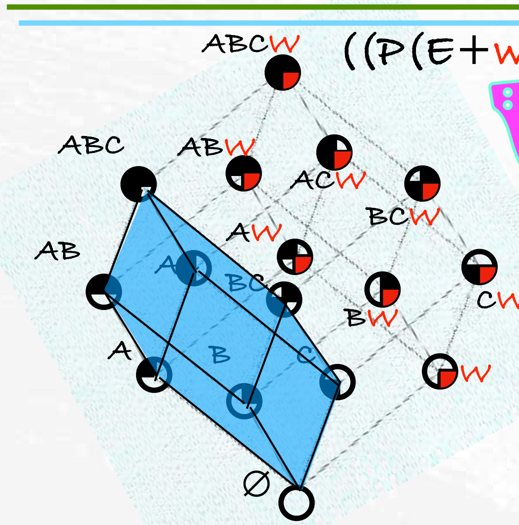
$\hat{pr}_{1_w}(M)=pr_1(M\Delta w)=pr_1((M\cap w^c)\cup(M^c\cap w))=pr_1(M\cap w^c)+pr_1(M^c\cap w))$:

$\hat{pr}_{1_w}(\emptyset)=\varepsilon,\ \hat{pr}_{1_w}(A)=\hat{pr}_{1_w}(B)=\hat{pr}_{1_w}(C)=(1+2\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}_{1_w}(AB)=\hat{pr}_{1_w}(AC)=\hat{pr}_{1_w}(BC)=(2+\varepsilon)/3,\ \hat{pr}_{1_w}(ABC)=1$

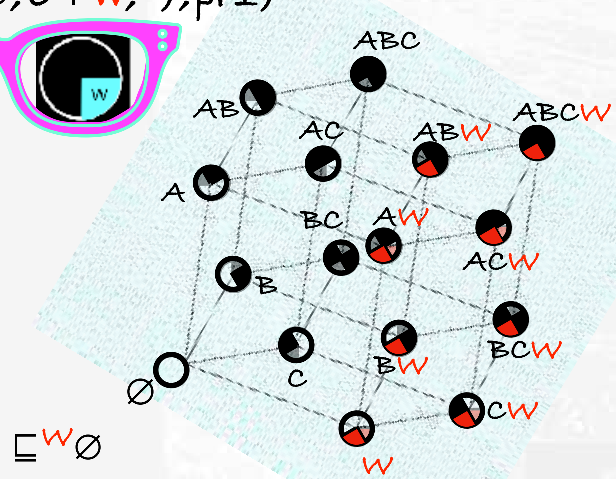
$\hat{pr}_{1_w}(w)=0,\ \hat{pr}_{1_w}(Aw)=\hat{pr}_{1_w}(Bw)=\hat{pr}_{1_w}(Cw)=(1-\varepsilon)/3,$

$\hat{pr}_{1_w}(ABw)=\hat{pr}_{1_w}(ACw)=\hat{pr}_{1_w}(BCw)=2(1-\varepsilon)/3,\ \hat{pr}_{1_w}(ABCw)=(1-\varepsilon)$



((P(E),⊆,∩,∪,∅,E,ᶜ),pr)

((P(E+w),⊆,∩,∪,∅,E+w,ᶜ),pr1)



$w \sqsubseteq^w \emptyset$

$((P(E+w),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,\emptyset,E+w,{}^c),\hat{pr}_{1_w}))$

Órdenes de actividad y probabilidad condicionada.
(Una definición de "w-probabilidad condicionada")

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador “diferencia simétrica”.

Sea $m: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$.

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".

Sea $m: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$:

$$m_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m_{[A]}(B) = m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".

Sea $m: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^c)$:

$$m_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m_{[A]}(B) = m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Esta nueva medida "$m_{[A]}$" resulta ser una probabilidad. En el caso en que "m" también lo sea, ($m\equiv Pr$), en la bibliografía especializada la nueva probabilidad "$Pr_{[A]}$" aparece con el nombre de "Probabilidad condicionada". (En este caso, se representa el valor "$Pr_{[A]}(B)$" mediante "$Pr(B/A)$"). Además, si $Pr(B/A)=Pr(B)$, los sucesos A y B son independientes y verifican la igualdad que los caracteriza: $Pr(B\cap A) = Pr(A)\cdot Pr(B)$.

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".
Sea $m: P(E)\to\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$:

$$m_{[A]}:P(E)\to\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m_{[A]}(B) = m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Esta nueva medida "$m_{[A]}$" resulta ser una probabilidad. En el caso en que "m" también lo sea, ($m\equiv Pr$), en la bibliografía especializada la nueva probabilidad "$Pr_{[A]}$" aparece con el nombre de "Probabilidad condicionada". (En este caso, se representa el valor "$Pr_{[A]}(B)$" mediante "$Pr(B/A)$").
Además, si $Pr(B/A)=Pr(B)$, los sucesos A y B son independientes y verifican la igualdad que los caracteriza: $Pr(B\cap A) = Pr(A)\cdot Pr(B)$.
Sea W un subconjunto en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ y sea $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$ el Álgebra de Boole isomorfa a la anterior y asociada a la "perspectiva W".

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".
Sea $m: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$:

$$m_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m_{[A]}(B)= m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Esta nueva medida "$m_{[A]}$" resulta ser una probabilidad. En el caso en que "m" también lo sea, ($m\equiv Pr$), en la bibliografía especializada la nueva probabilidad "$Pr_{[A]}$" aparece con el nombre de "Probabilidad condicionada". (En este caso, se representa el valor "$Pr_{[A]}(B)$" mediante "$Pr(B/A)$").
Además, si $Pr(B/A)=Pr(B)$, los sucesos A y B son independientes y verifican la igualdad que los caracteriza: $Pr(B\cap A)= Pr(A)\cdot Pr(B)$.
Sea W un subconjunto en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ y sea $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$ el Álgebra de Boole isomorfa a la anterior y asociada a la "perspectiva W".

Por analogía, a cualquier "w-medida" $m^*: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ en $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$ y a cualquier $A\in P(E)$ tal que $m^*(A)\neq 0$, se le puede asociar la correspondiente "w-medida condicionada":

$$m^*_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m^*_{[A]}(B)= m^*(B\sqcap^W A)/m^*(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^{c})$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".

Sea $m: P(E)\to\mathbb{R}^{+}$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^{c})$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^{c})$:

$$m_{[A]}:P(E)\to\mathbb{R}^{+} \text{ tal que } m_{[A]}(B)= m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Esta nueva medida "$m_{[A]}$" resulta ser una probabilidad. En el caso en que "m" también lo sea, ($m\equiv Pr$), en la bibliografía especializada la nueva probabilidad "$Pr_{[A]}$" aparece con el nombre de "Probabilidad condicionada". (En este caso, se representa el valor "$Pr_{[A]}(B)$" mediante "$Pr(B/A)$"). Además, si $Pr(B/A)=Pr(B)$, los sucesos A y B son independientes y verifican la igualdad que los caracteriza: $Pr(B\cap A)= Pr(A)\cdot Pr(B)$.

Sea W un subconjunto en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E,^{c})$ y sea $(P(E),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W}, W, W^{c}, ^{c})$ el Álgebra de Boole isomorfa a la anterior y asociada a la "perspectiva W".

Por analogía, a cualquier "w-medida" $m^{*}: P(E)\to\mathbb{R}^{+}$ en $(P(E),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W}, W, W^{c}, ^{c})$ y a cualquier $A\in P(E)$ tal que $m^{*}(A)\neq 0$, se le puede asociar la correspondiente "w-medida condicionada":

$$m^{*}_{[A]}:P(E)\to\mathbb{R}^{+} \text{ tal que } m^{*}_{[A]}(B)= m^{*}(B\sqcap^{W}A)/m^{*}(A) \quad \forall B\in P(E).$$

(Que podríamos llamar "w-probabilidad", pues $m^{*}_{[A]}(W^{c})=1$). Además, si m^{*} es también una "w-probabilidad", ($m^{*}=Pr^{*}$), escribimos: $Pr^{*}_{[A]}(B)= Pr^{*}(B/A)= Pr^{*}(B\sqcap^{W}A)/Pr^{*}(A) \quad \forall B\in P(E)$).

Sea E finito no vacío y sea $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ el Álgebra de Boole correspondiente junto con el operador "diferencia simétrica".

Sea $m: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$.

Si $A\in P(E)$ es tal que $m(A)\neq 0$, entonces se define una nueva medida en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$:

$$m_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m_{[A]}(B)= m(B\cap A)/m(A) \quad \forall B\in P(E).$$

Esta nueva medida "$m_{[A]}$" resulta ser una probabilidad. En el caso en que "m" también lo sea, ($m\equiv Pr$), en la bibliografía especializada la nueva probabilidad "$Pr_{[A]}$" aparece con el nombre de "Probabilidad condicionada". (En este caso, se representa el valor "$Pr_{[A]}(B)$" mediante "$Pr(B/A)$").
Además, si $Pr(B/A)=Pr(B)$, los sucesos A y B son independientes y verifican la igualdad que los caracteriza: $Pr(B\cap A)= Pr(A)\cdot Pr(B)$.
Sea W un subconjunto en $(P(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,^c)$ y sea $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$ el Álgebra de Boole isomorfa a la anterior y asociada a la "perspectiva W".

Por analogía, a cualquier "w-medida" $m^*: P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ en $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$ y a cualquier $A\in P(E)$ tal que $m^*(A)\neq 0$, se le puede asociar la correspondiente "w-medida condicionada":

$$m^*_{[A]}:P(E)\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ tal que } m^*_{[A]}(B)= m^*(B\sqcap^W A)/m^*(A) \quad \forall B\in P(E).$$

(Que podríamos llamar "w-probabilidad", pues $m^*_{[A]}(W^c)=1$). Además, si m^* es también una "w-probabilidad", ($m^*=Pr^*$), escribimos: $Pr^*_{[A]}(B)= Pr^*(B/A)= Pr^*(B\sqcap^W A)/Pr^*(A) \quad \forall B\in P(E)$).
Esta asociación es válida para cualquier medida m^* en $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W, W, W^c, ^c)$, luego lo será en el siguiente caso:

(Continúa)

(Continuación)

Si $m: \mathcal{P}(E)\to\mathbb{R}^+$ una medida en $(\mathcal{P}(E),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,E,{}^c)$ y $m_{(W,O)}$ es la correspondiente "w-extensión"

$$\hat{m}_{(W,O)}: \mathcal{P}(E)\to\mathbb{R}^+ \text{ tal que: } \hat{m}_{(W,O)}(B)=m(B\Delta W)\ \forall B\in\mathcal{P}(E),$$

que es una "w-medida", (concretamente "w-probabilidad"), en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$.

Si $m: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E, ^c)$ y $m_{(w,0)}$ es la correspondiente "w-extensión"

$$\hat{m}_{(w,0)}: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+ \text{ tal que: } \hat{m}_{(w,0)}(B) = m(B\Delta W) \;\; \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

que es una "w-medida", (concretamente "w-probabilidad"), en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c, ^c)$.

Sea $A \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\hat{m}_{(w,0)}(A) \neq 0$, (es decir, $m(A\Delta W) \neq 0$), entonces la correspondiente "w-probabilidad condicionada" $(\hat{m}_{(w,0)})_{[A]}: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ es tal que:

$$(\hat{m}_{(w,0)})_{[A]}(B) = \hat{m}_{(w,0)}(B \sqcap^w A)/\hat{m}_{(w,0)}(A) = m[(B \sqcap^w A)\Delta W]/m(A\Delta W) \;\; \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

(que si "$m \equiv Pr$" es una probabilidad, re-escribimos:

Si $m(A\Delta W) \neq 0$, (y en consecuencia $A \neq W$),

$$(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}(B) = \boxed{\hat{P}r_{(w,0)}(B/A) = \hat{P}r_{(w,0)}(B \sqcap^w A)/\hat{P}r_{(w,0)}(A) = Pr[(B \sqcap^w A)\Delta W]/Pr(A\Delta W)} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

(Continuación)

Si $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E, {}^c)$ y $m_{(W,O)}$ es la correspondiente "W-extensión"

$$\hat{m}_{(W,O)}: P(E) \to \mathbb{R}^+ \text{ tal que: } \hat{m}_{(W,O)}(B) = m(B \Delta W) \ \ \forall B \in P(E),$$

que es una "W-medida", (concretamente "W-probabilidad"), en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$.

Sea $A \in P(E)$ tal que $\hat{m}_{(W,O)}(A) \neq 0$, (es decir, $m(A \Delta W) \neq 0$), entonces la correspondiente "W-probabilidad condicionada" $(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]}: P(E) \to \mathbb{R}^+$ es tal que:

$$(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]}(B) = \hat{m}_{(W,O)}(B \sqcap^W A) / \hat{m}_{(W,O)}(A) = m[(B \sqcap^W A) \Delta W] / m(A \Delta W) \ \ \forall B \in P(E),$$

(que si "$m \equiv Pr$" es una probabilidad, re-escribimos:

Si $m(A \Delta W) \neq 0$, (y en consecuencia $A \neq W$),

$$(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}(B) = \boxed{\hat{Pr}_{(W,O)}(B/A) = \hat{Pr}_{(W,O)}(B \sqcap^W A) / \hat{Pr}_{(W,O)}(A) = Pr[(B \sqcap^W A) \Delta W] / Pr(A \Delta W)} \ \ \forall B \in P(E),$$

Como: $m[(B \sqcap^W A) \Delta W] / m(B \Delta W) = m[(B \Delta W) \cap (A \Delta W)] / m(A \Delta W) = \hat{m}_{[A \Delta W]}(B \Delta W) = (\widehat{m_{[A \Delta W]}})_{(W,O)}(B)$,

concluimos que si $m(A \Delta W) \neq 0$ entonces $(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]} = (\widehat{m_{[A \Delta W]}})_{(W,O)}$.

(Continuación)

Si $m: P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E, ^c)$ y $m_{(w,o)}$ es la correspondiente "w-extensión"

$$\hat{m}_{(w,o)}: P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que: } \hat{m}_{(w,o)}(B) = m(B \Delta W) \ \forall B \in P(E),$$

que es una "w-medida", (concretamente "w-probabilidad"), en $(P(E), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c, ^c)$.

Sea $A \in P(E)$ tal que $\hat{m}_{(w,o)}(A) \neq 0$, (es decir, $m(A \Delta W) \neq 0$), entonces la correspondiente "w-probabilidad condicionada" $(\hat{m}_{(w,o)})_{[A]}: P(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es tal que:

$$(\hat{m}_{(w,o)})_{[A]}(B) = \hat{m}_{(w,o)}(B \sqcap^w A) / \hat{m}_{(w,o)}(A) = m[(B \sqcap^w A) \Delta W] / m(A \Delta W) \quad \forall B \in P(E),$$

(que si "$m \equiv Pr$" es una probabilidad, re-escribimos:

Si $m(A \Delta W) \neq 0$, (y en consecuencia $A \neq W$),

$$(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]}(B) = \boxed{\hat{P}r_{(w,o)}(B/A) = \hat{P}r_{(w,o)}(B \sqcap^w A) / \hat{P}r_{(w,o)}(A) = Pr[(B \sqcap^w A) \Delta W] / Pr(A \Delta W)} \quad \forall B \in P(E),$$

Como: $m[(B \sqcap^w A) \Delta W] / m(B \Delta W) = m[(B \Delta W) \cap (A \Delta W)] / m(A \Delta W) = \hat{m}_{[A \Delta W]}(B \Delta W) = (\widehat{m_{[A \Delta W]}})_{(w,o)}(B)$,

concluimos que si $m(A \Delta W) \neq 0$ entonces $(\hat{m}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{m_{[A \Delta W]}})_{(w,o)}$.

En el caso de m una probabilidad ("$m \equiv Pr$") la expresión anterior es:

Si $Pr(A \Delta W) \neq 0$: $(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]}(B) = (\widehat{Pr_{[A \Delta W]}})(B \Delta W) = Pr[(B \Delta W) \cap (A \Delta W)] / Pr(A \Delta W)$.

Si $m: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una medida en $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E, ^c)$ y $m_{(W,O)}$ es la correspondiente "W-extensión"

$$\hat{m}_{(W,O)}: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que: } \hat{m}_{(W,O)}(B) = m(B\Delta W) \ \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

que es una "W-medida", (concretamente "W-probabilidad"), en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$.

Sea $A \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\hat{m}_{(W,O)}(A) \neq 0$, (es decir, $m(A\Delta W) \neq 0$), entonces la correspondiente "W-probabilidad condicionada" $(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]}: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es tal que:

$$(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]}(B) = \hat{m}_{(W,O)}(B \sqcap^W A)/\hat{m}_{(W,O)}(A) = m[(B \sqcap^W A)\Delta W]/m(A\Delta W) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

(que si "$m \equiv Pr$" es una probabilidad, re-escribimos:

Si $m(A\Delta W) \neq 0$, (y en consecuencia $A \neq W$),

$$(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}(B) = \boxed{\hat{Pr}_{(W,O)}(B/A) = \hat{Pr}_{(W,O)}(B \sqcap^W A)/\hat{Pr}_{(W,O)}(A) = Pr[(B \sqcap^W A)\Delta W]/Pr(A\Delta W)} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

Como: $m[(B \sqcap^W A)\Delta W]/m(B\Delta W) = m[(B\Delta W) \cap (A\Delta W)]/m(A\Delta W) = \hat{m}_{[A\Delta W]}(B\Delta W) = (\widehat{m_{[A\Delta W]}})_{(W,O)}(B)$,

concluimos que si $m(A\Delta W) \neq 0$ entonces $(\hat{m}_{(W,O)})_{[A]} = (\widehat{m_{[A\Delta W]}})_{(W,O)}$.

En el caso de m una probabilidad ("$m \equiv Pr$") la expresión anterior es:

Si $Pr(A\Delta W) \neq 0$: $(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}(B) = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})(B\Delta W) = Pr[(B\Delta W) \cap (A\Delta W)]/Pr(A\Delta W)$.

Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W) \neq 0$, la "W-probabilidad condicionada" en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(W,O)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(W,O)},$$

que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W) \neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

Si $m: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E, ^c)$ y $m_{(w,o)}$ es la correspondiente "w-extensión"

$\hat{m}_{(w,o)}: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ tal que ... $\forall B \in \mathcal{P}(E)$,

que es una "w-medida", (concretame ... $\sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$.

Sea $A \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\hat{m}_{(w,o)}(A) \neq 0$, (es ... $) \neq 0)$, entonces la correspondiente "w-probabilidad condicionada" $(m_{(w,o)})_{[A]}: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ es tal que:

$$(\hat{m}_{(w,o)})_{[A]}(B) = \hat{m}_{(w,o)}(B \sqcap^W A)/\hat{m}_{(w,o)}(A) = m[(B \sqcap^W A)\Delta W]/m(A \Delta W) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

(que si "$m \equiv Pr$" es una probabilidad, re-escribimos:

Si $m(A\Delta W) \neq 0$, (y en consecuencia $A \neq W$),

$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}(B) = \boxed{\hat{Pr}_{(w,o)}(B/A) = \hat{Pr}_{(w,o)}(B \sqcap^W A)/\hat{Pr}_{(w,o)}(A) = Pr[(B \sqcap^W A)\Delta W]/Pr(A\Delta W)} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E),$$

Como: $m[(B \sqcap^W A)\Delta W]/m(B\Delta W) = m[(B\Delta W) \cap (A \Delta W)]/m(A\Delta W) = \hat{m}_{[A\Delta W]}(B\Delta W) = (\widehat{m_{[A\Delta W]}})_{(w,o)}(B)$,

concluimos que si $m(A\Delta W) \neq 0$ entonces $(\hat{m}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{m_{[A\Delta W]}})_{(w,o)}$.

En el caso de m una probabilidad ("$m \equiv Pr$") la expresión anterior es:

Si $Pr(A\Delta W) \neq 0$: $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}(B) = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})(B\Delta W) = Pr[(B\Delta W) \cap (A\Delta W)]/Pr(A\Delta W)$.

Un esquema de los elementos
que intervienen en el cálculo de
la "w-probabilidad condicionada"
$(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)$:

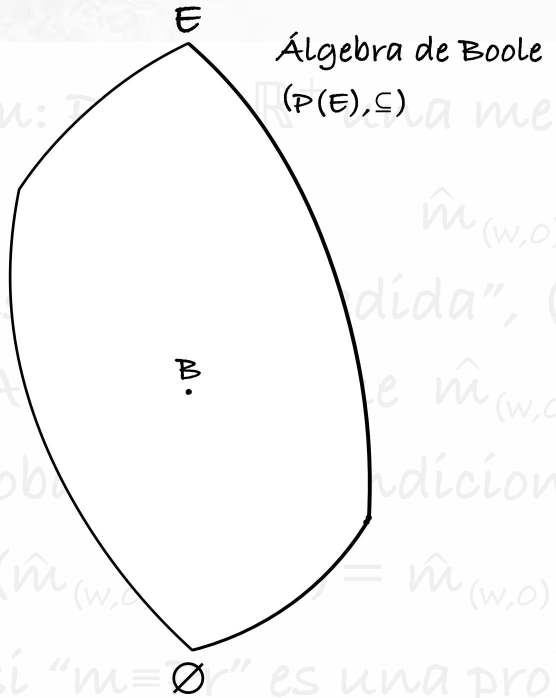
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W) \neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

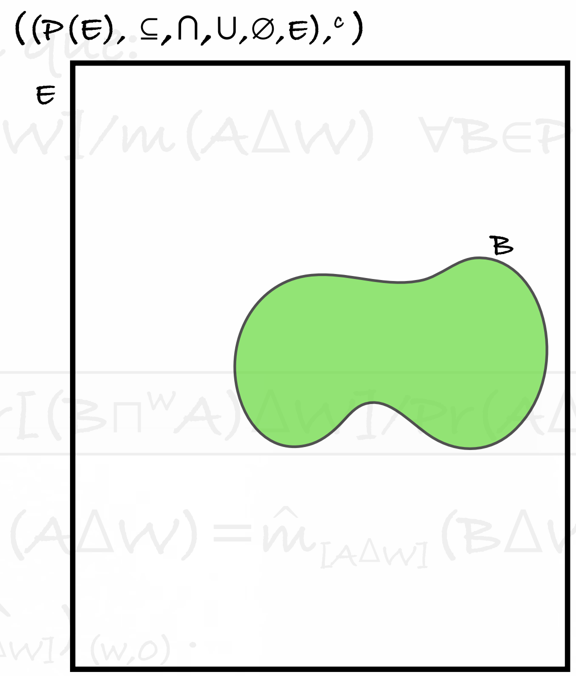
$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)},$$

que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W) \neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)$:



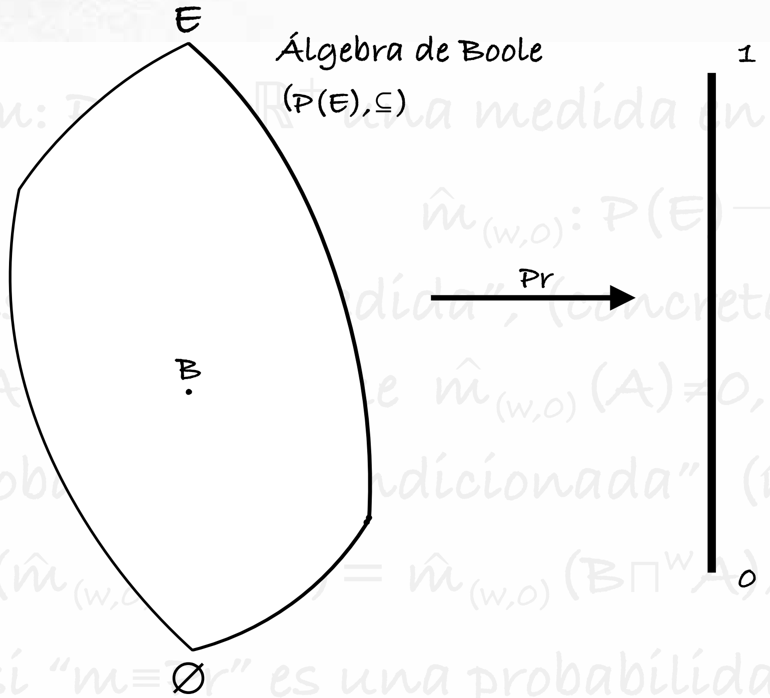
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

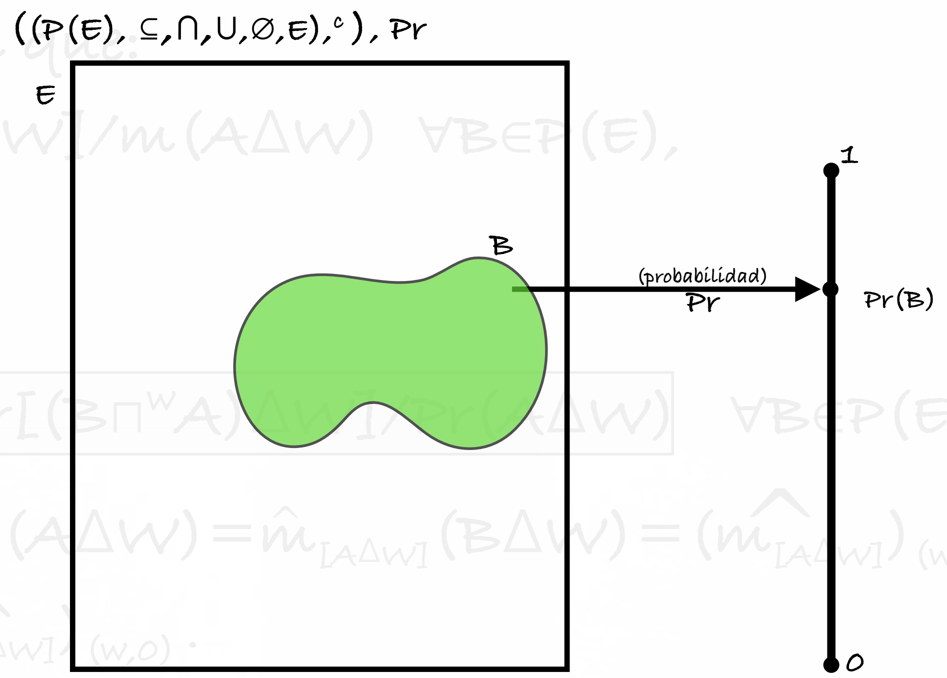
$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)} \text{ ,}$$

que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,o)})(B/A)$:



Estamos en condiciones de dar la siguiente:

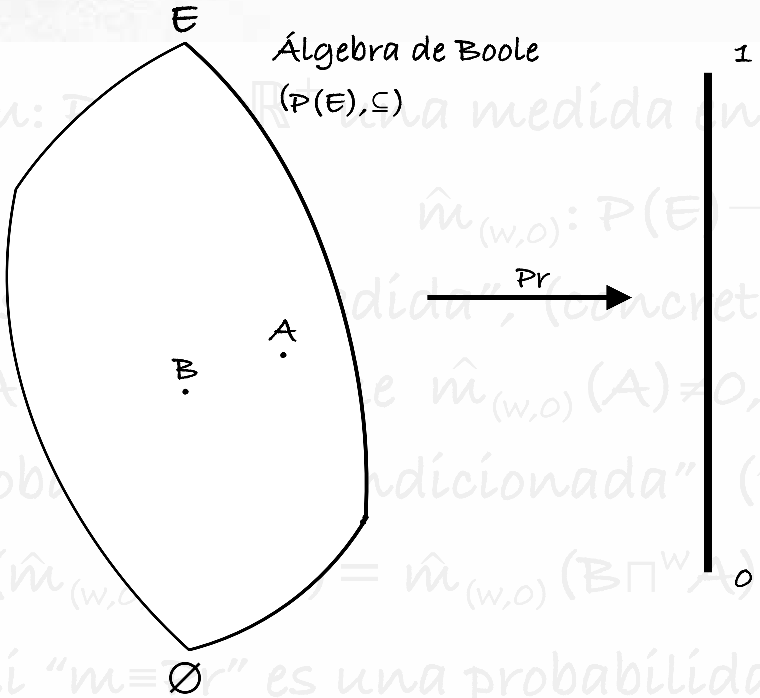
<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W) \neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)}\ ,$$

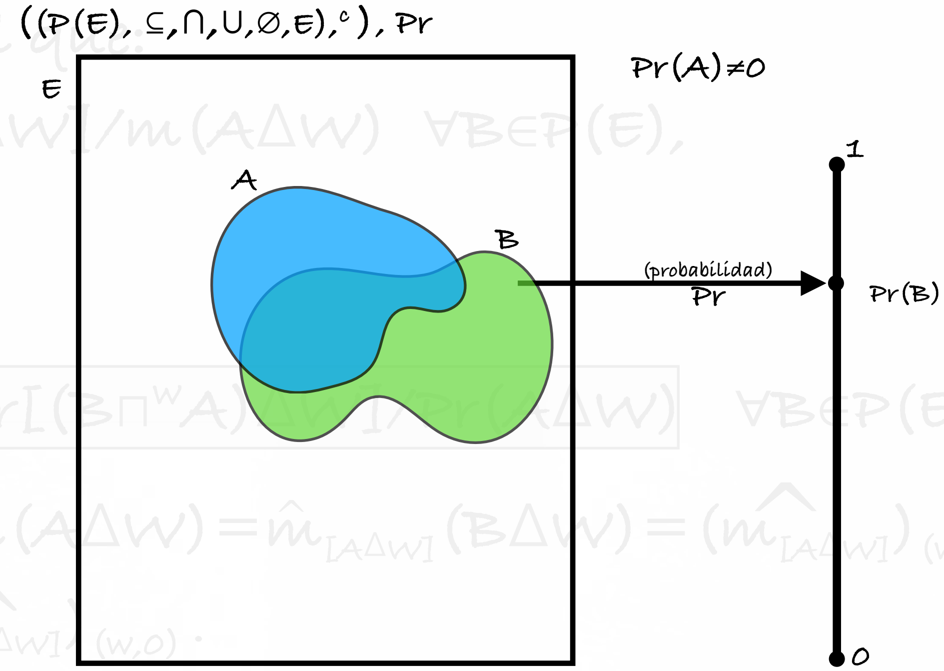
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W) \neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

(Continuación)



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)$:



Estamos en condiciones de dar la siguiente:

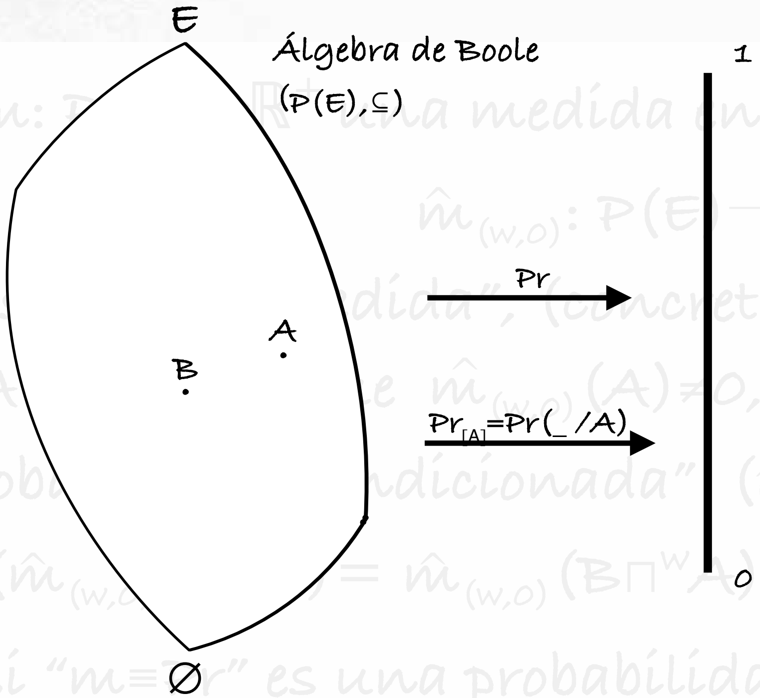
<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)} ,$$

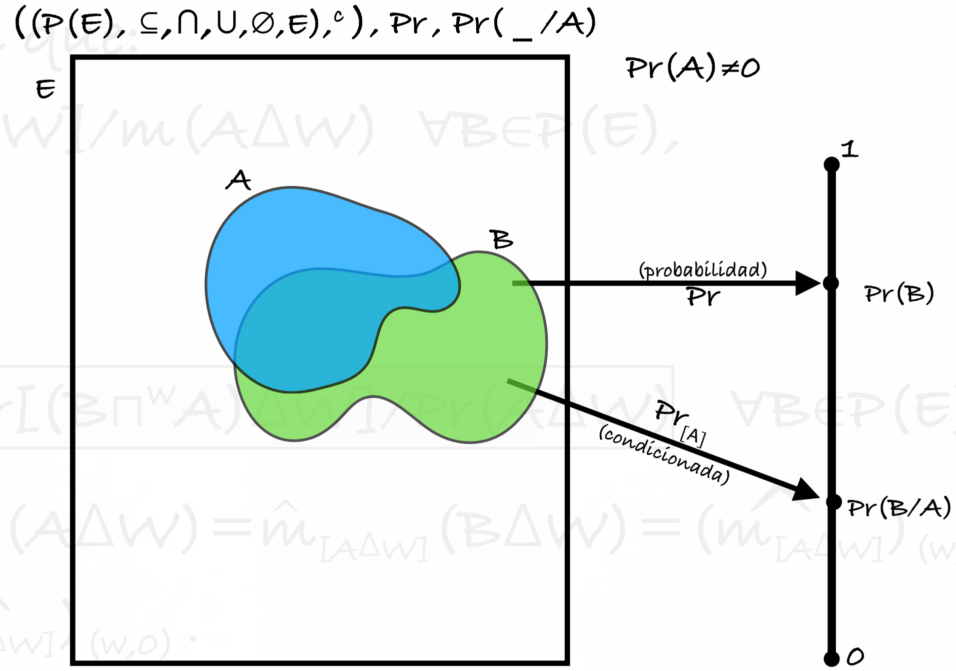
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

(Continuación)



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)$:



Estamos en condiciones de dar la siguiente:

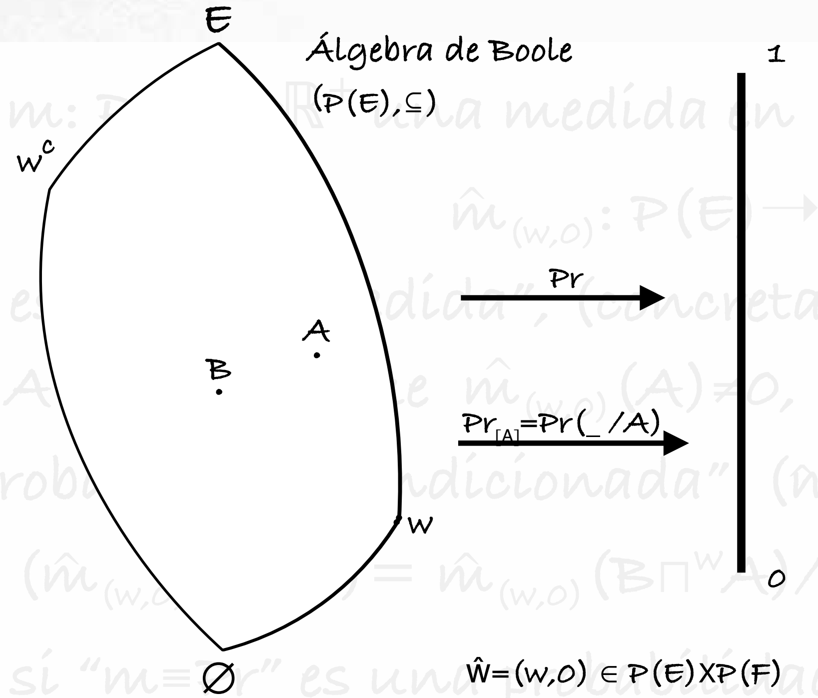
<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W},W,W^{c},{}^{c})$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,0)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}=(\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,0)},$$

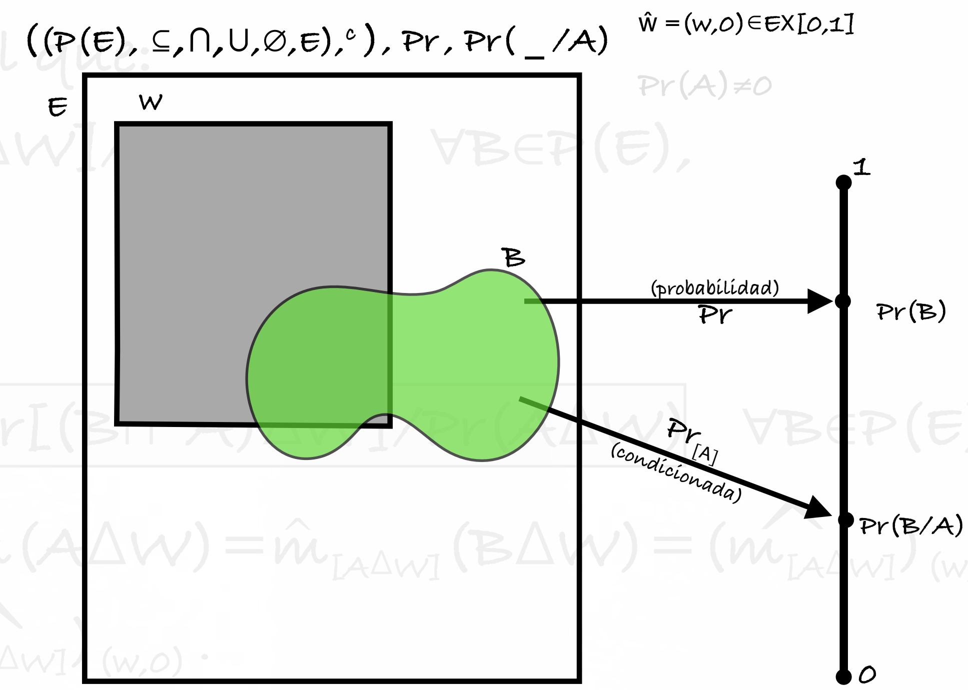
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)=Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

(Continuación)



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A)$:



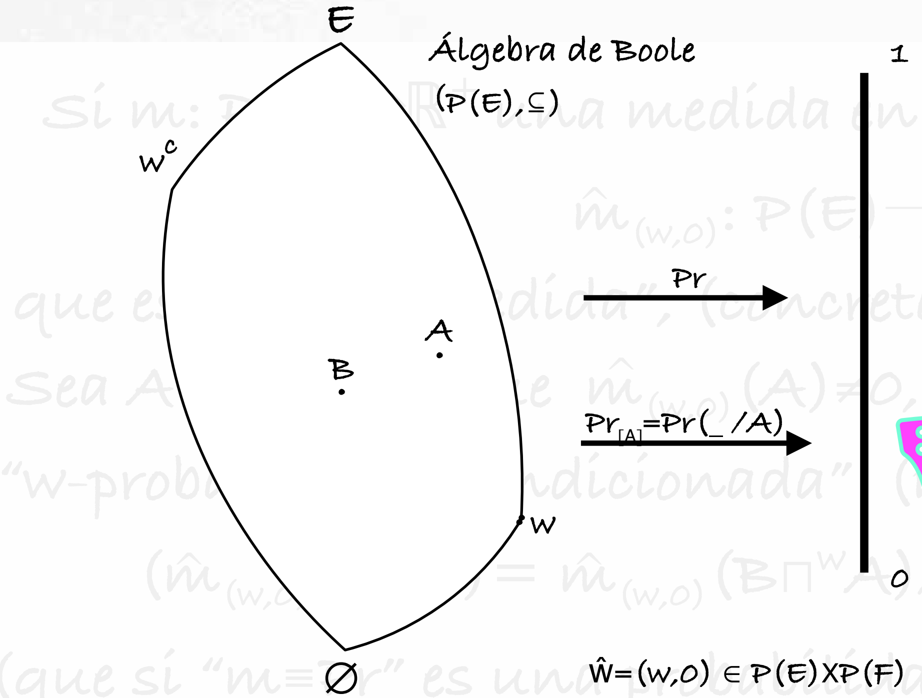
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

Definición. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(W,O)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}$ que verifica:

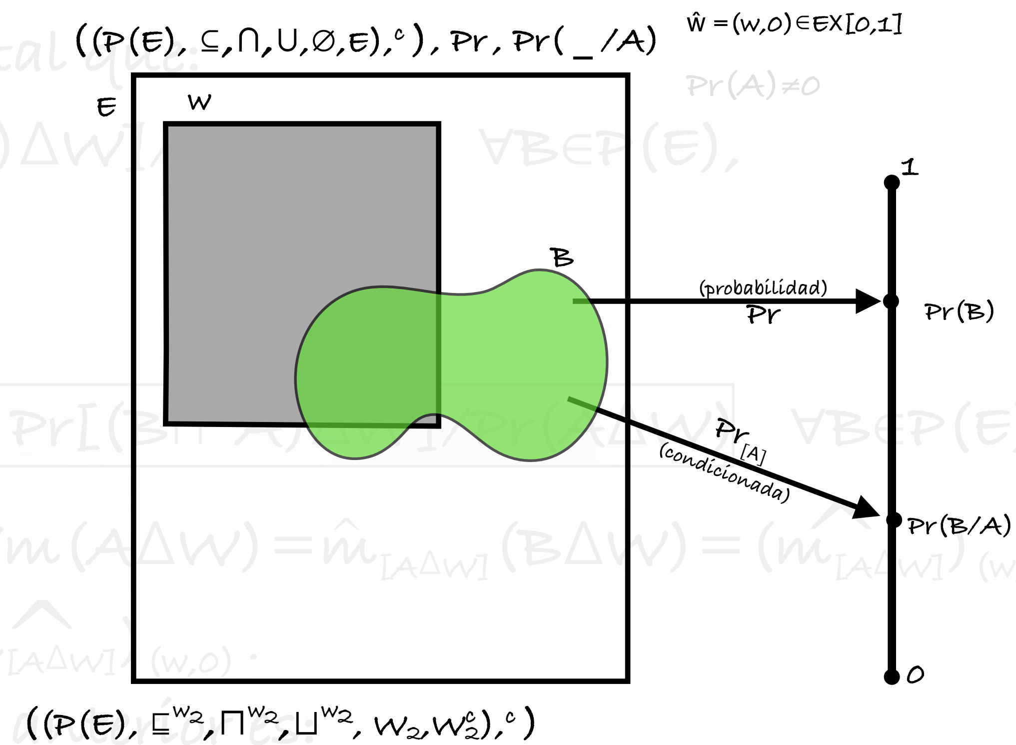
$$(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(W,O)},$$

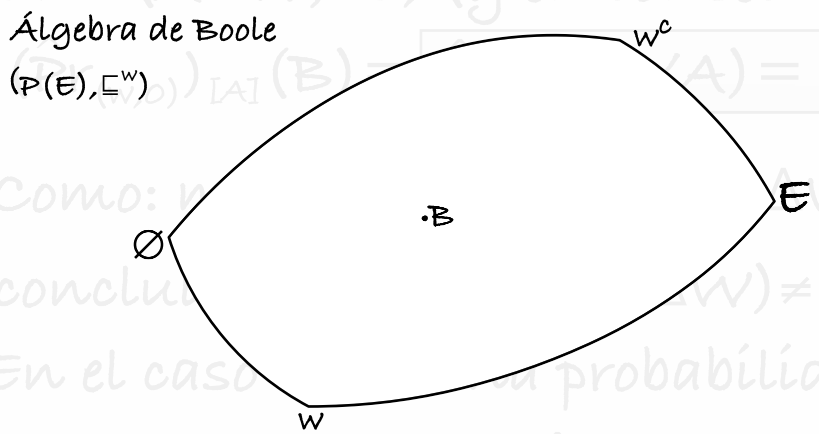
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)$:





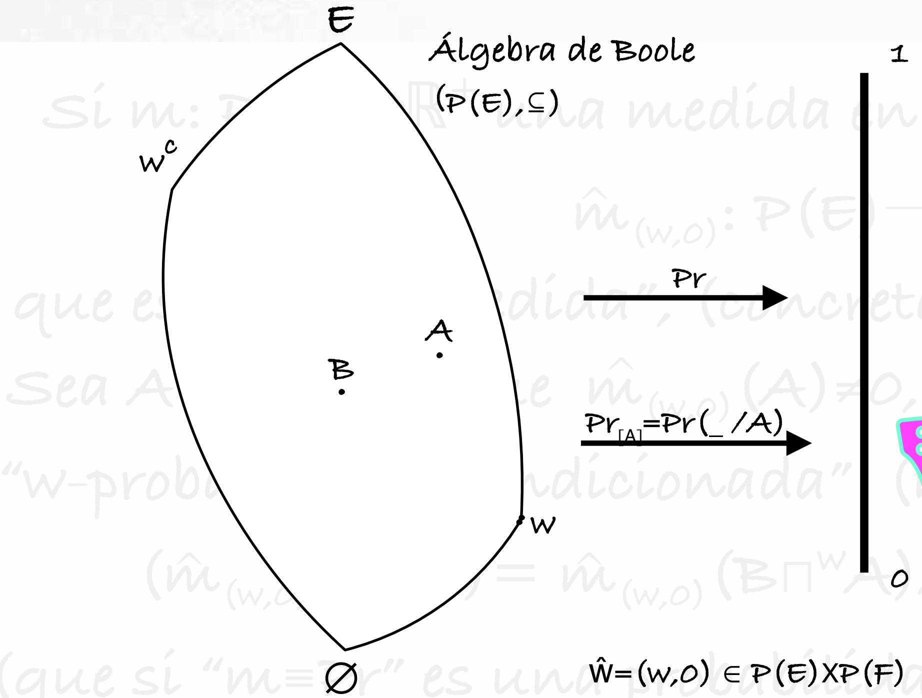
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c,{}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

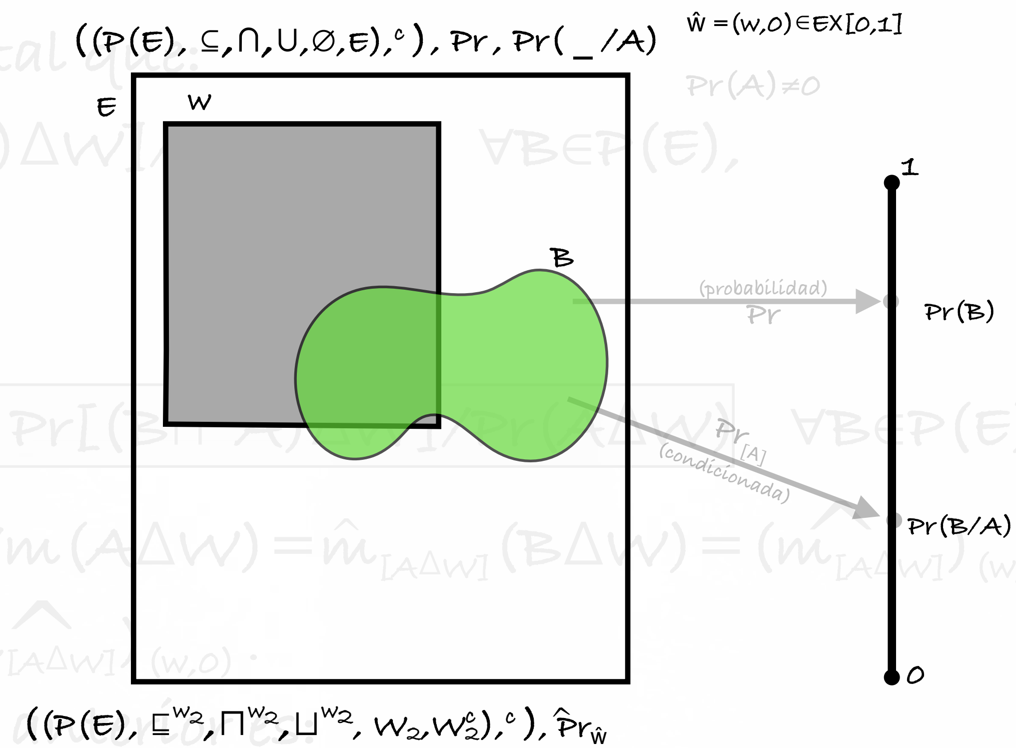
$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}=(\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)},$$

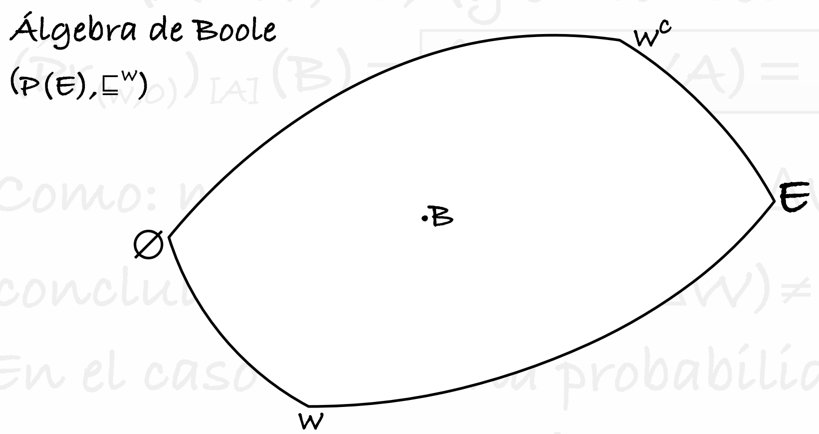
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)=Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)$:





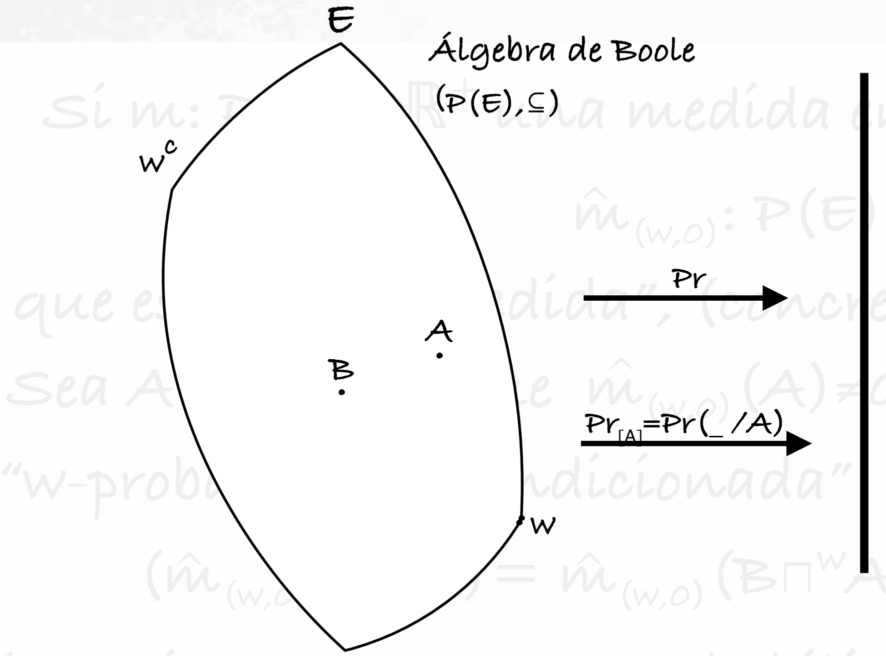
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

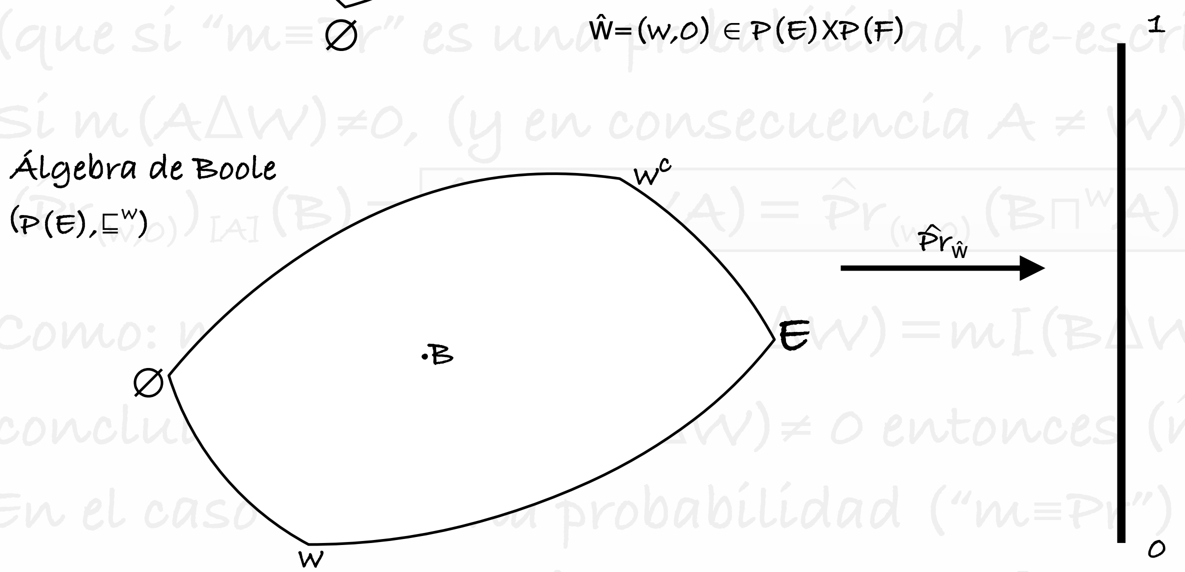
<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c,^c)$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,0)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}=\widehat{(Pr_{[A\Delta W]})}_{(w,0)}\ ,$$

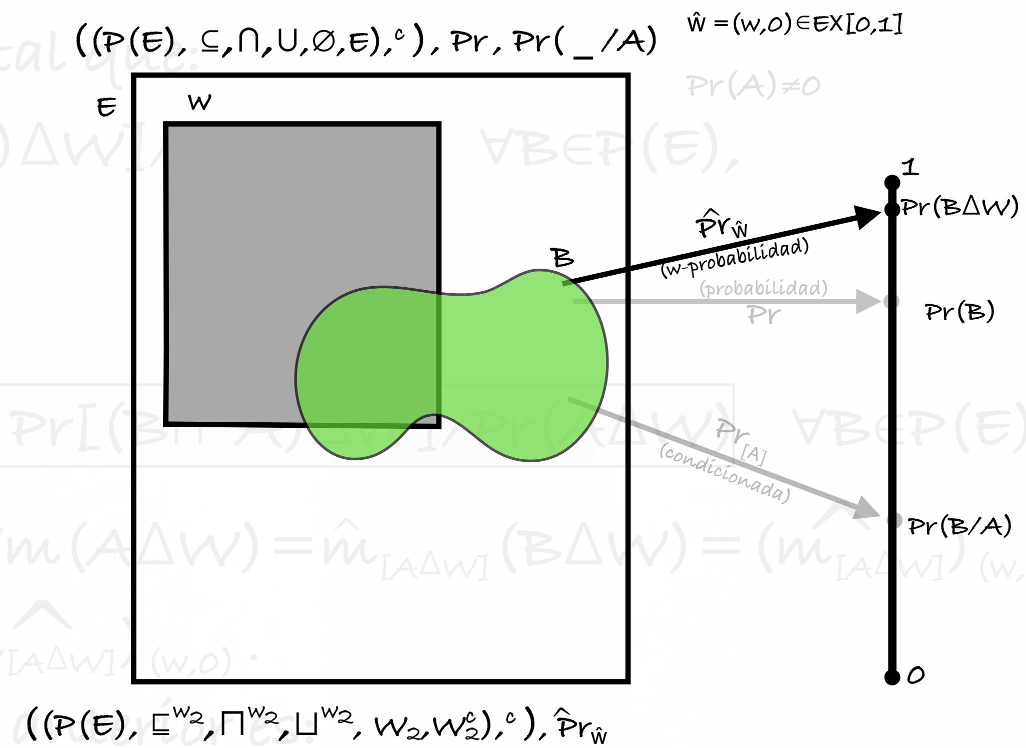
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)=Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$





Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A)$:



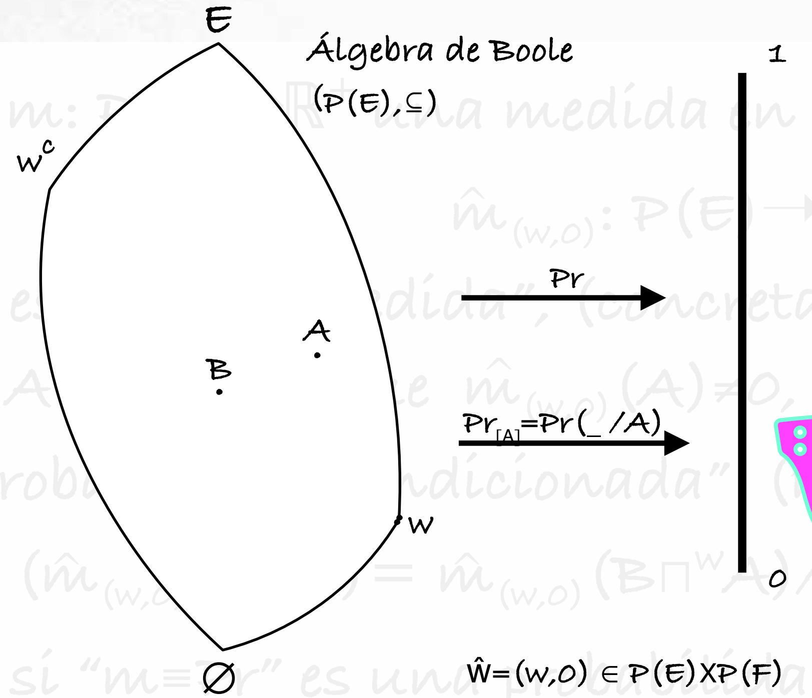
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(W,O)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]}$ que verifica:

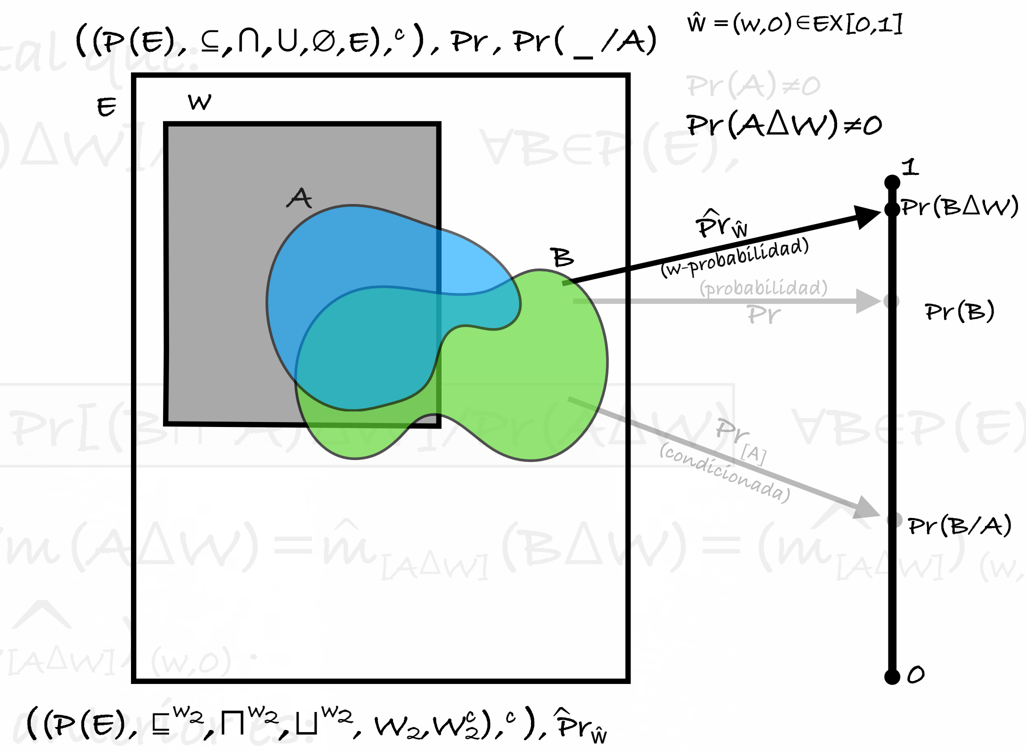
$$(\hat{Pr}_{(W,O)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(W,O)}\,,$$

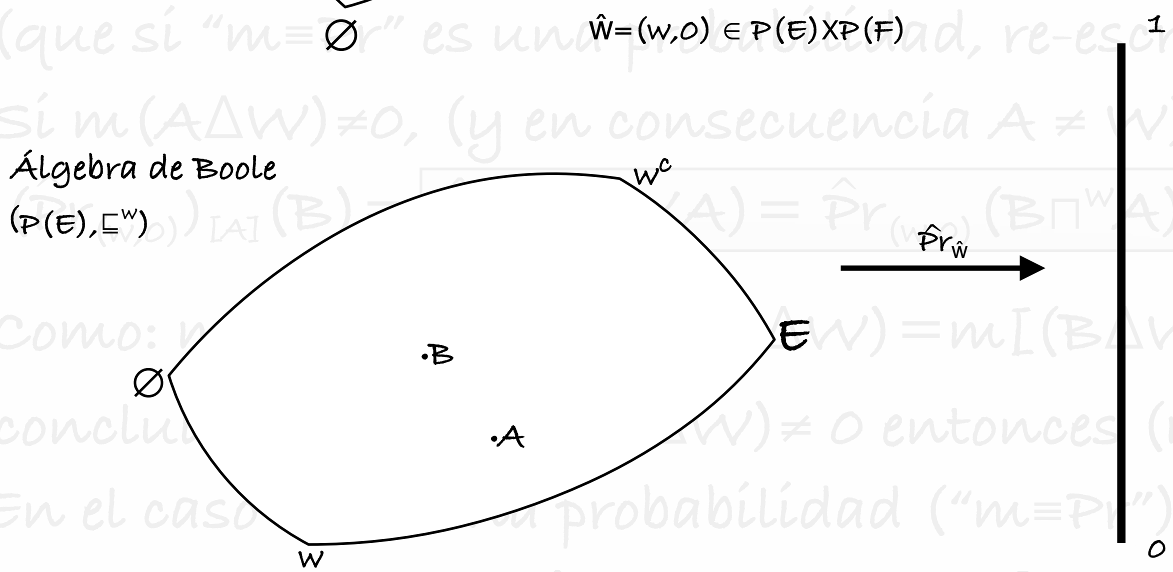
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)$:





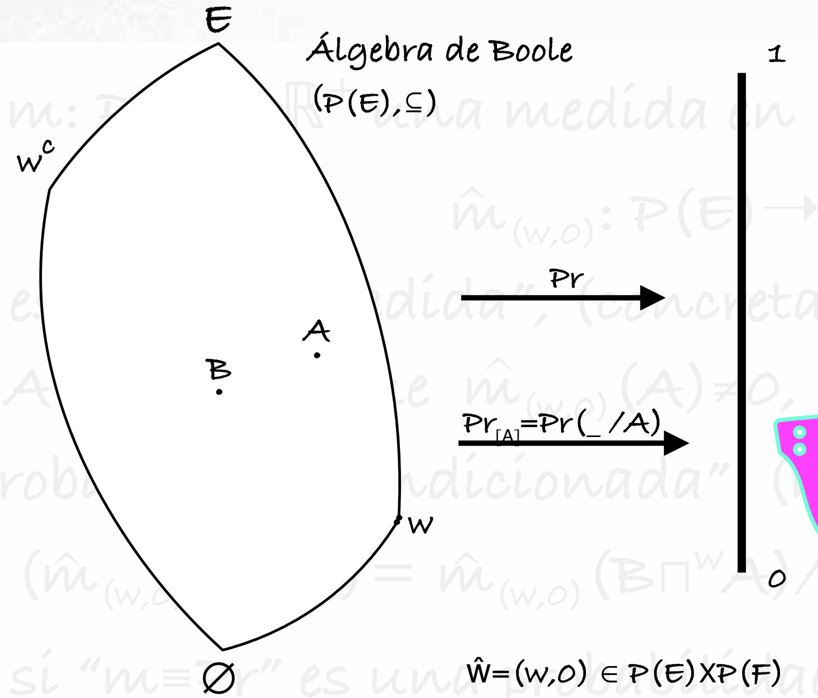
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, ^c)$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,0)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}$ que verifica:

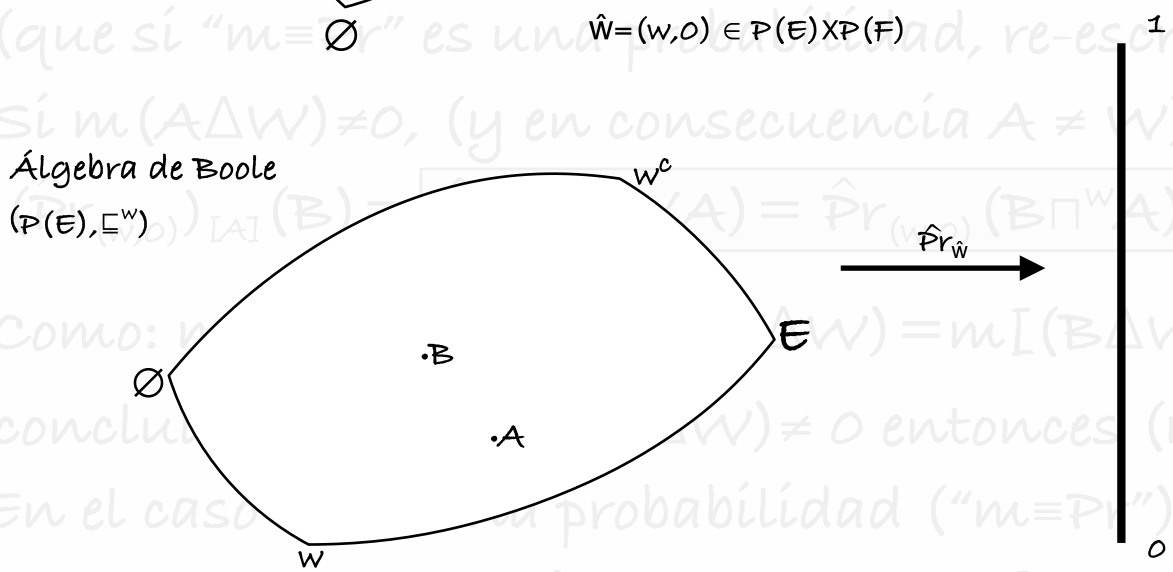
$$(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,0)}\ ,$$

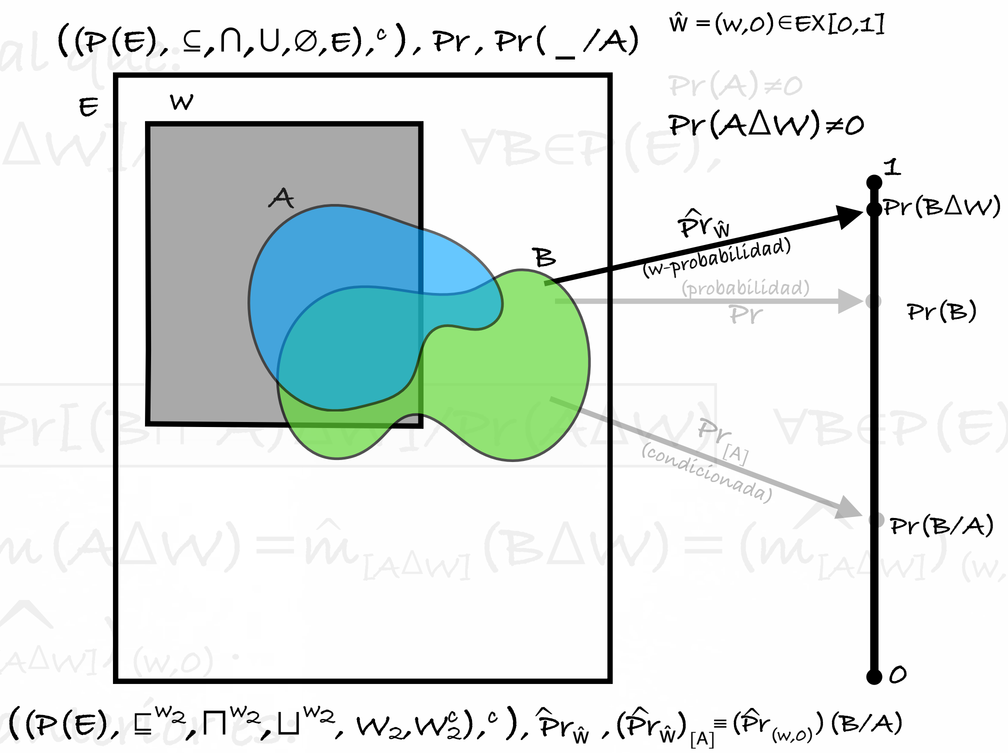
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,0)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)$:





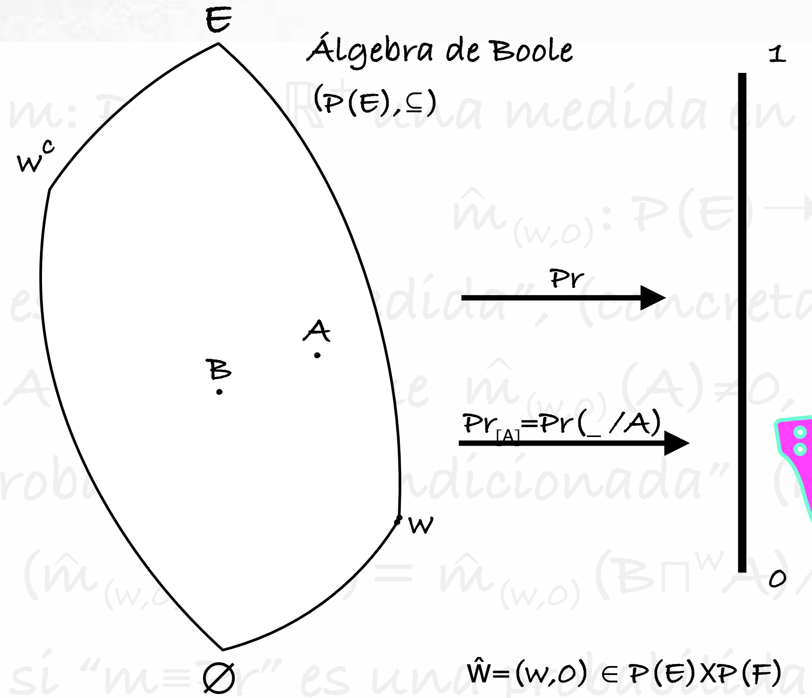
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

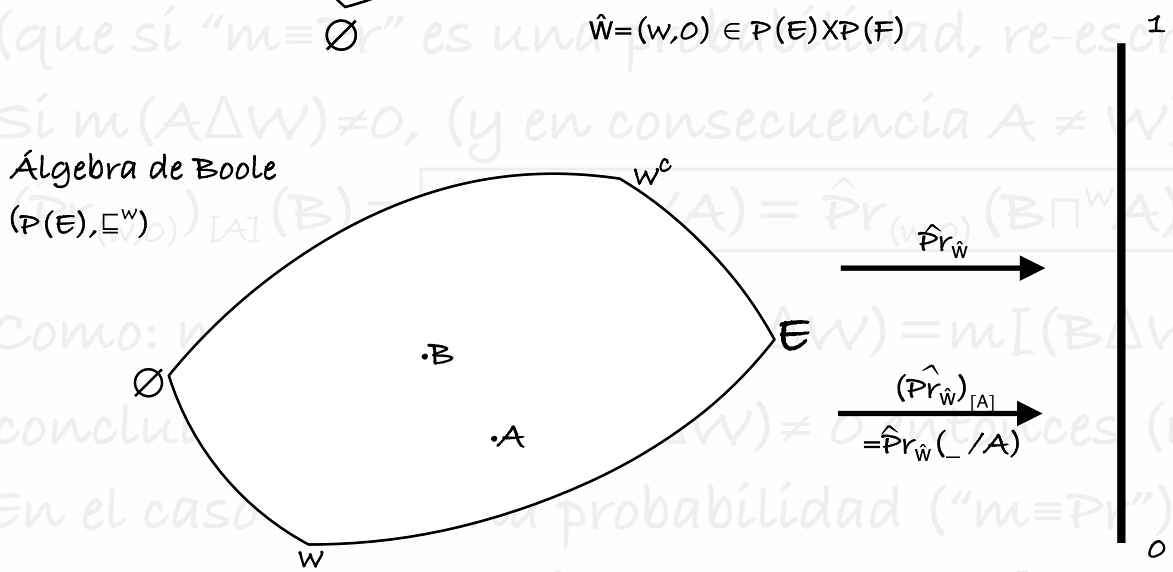
$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)} \,,$$

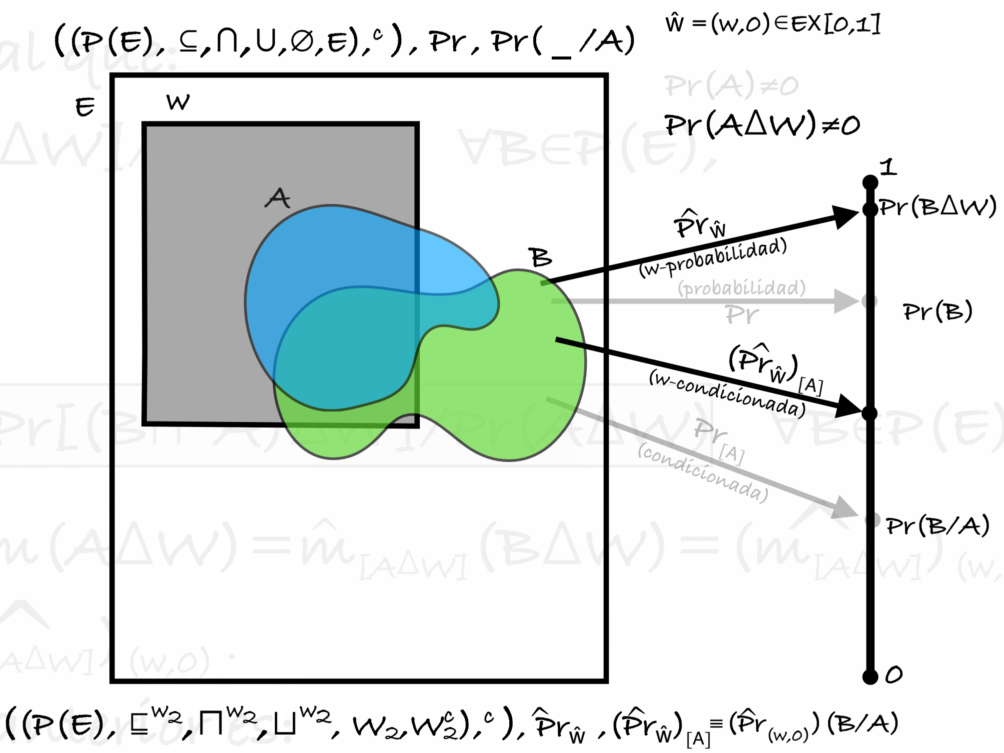
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la “w-probabilidad condicionada” $(\hat{Pr}_{(w,0)})(B/A)$:





Estamos en condiciones de dar la siguiente:

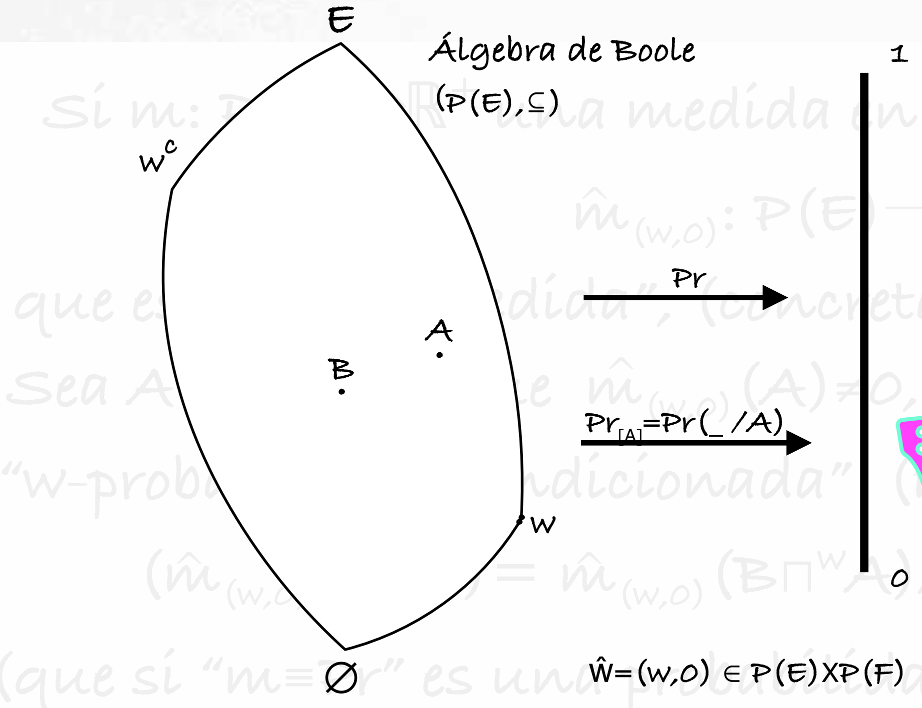
<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la “w-probabilidad condicionada” en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,0)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,0)})_{[A]}$ que verifica:

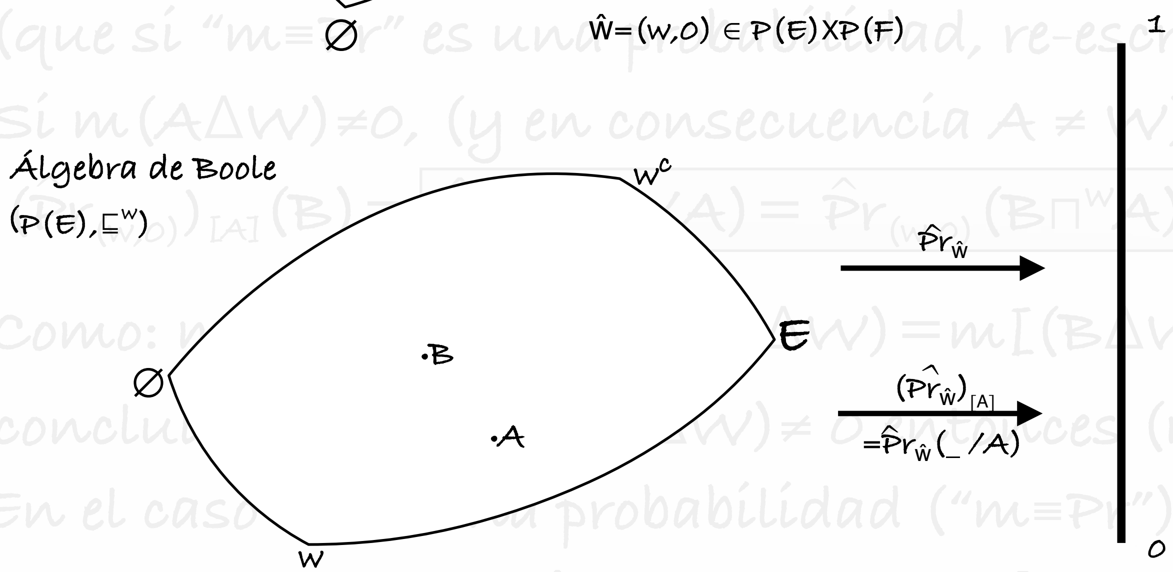
$$(\hat{Pr}_{(w,0)})_{[A]}=(\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,0)}\ ,$$

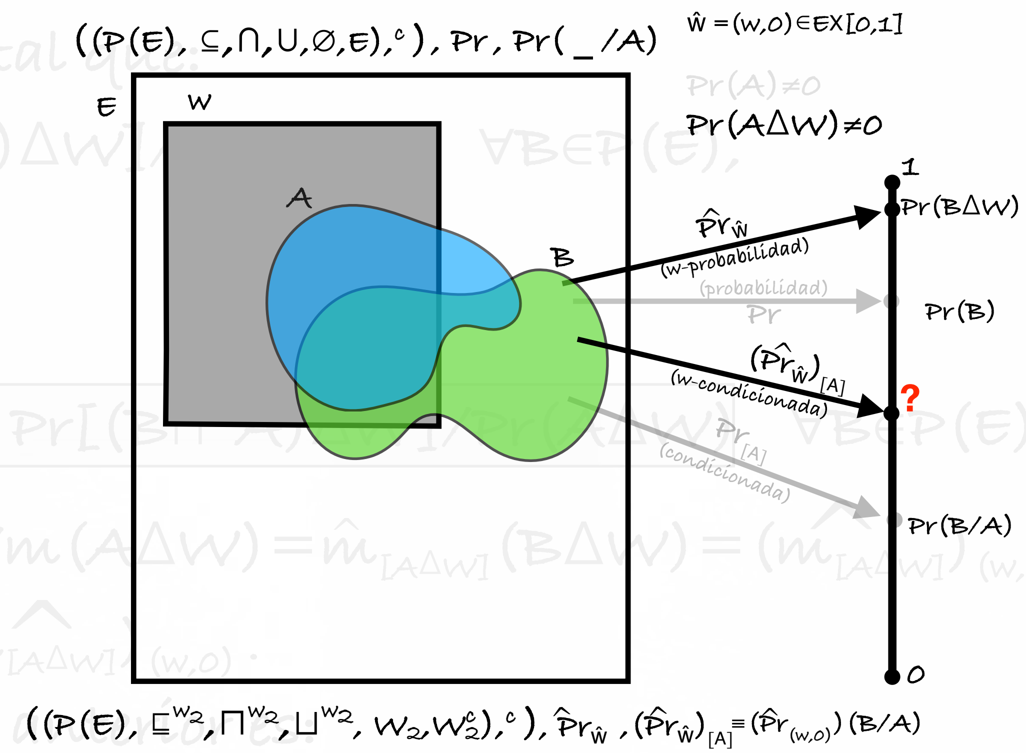
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,0)})(B/A)=Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,0)})(B/A)$:







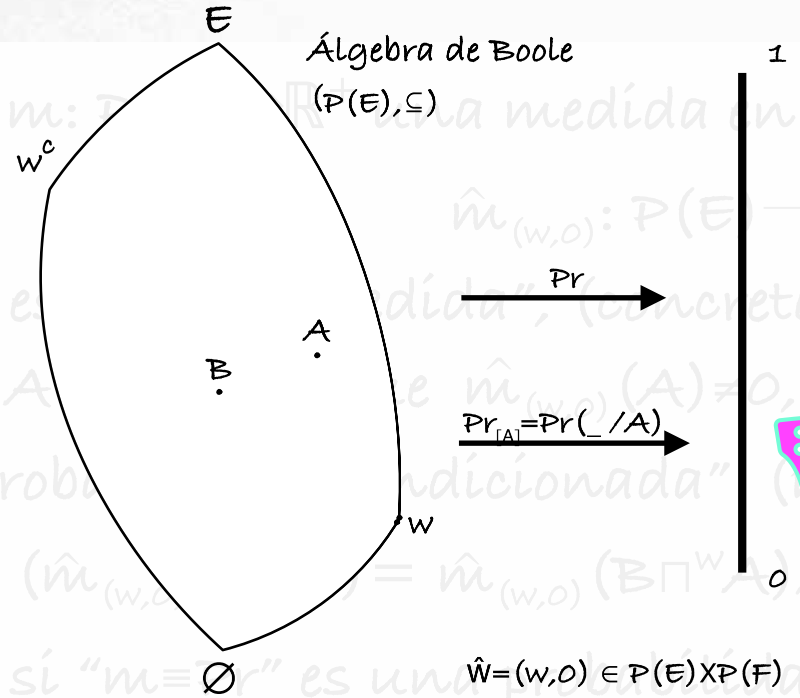
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,0)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]}$ que verifica:

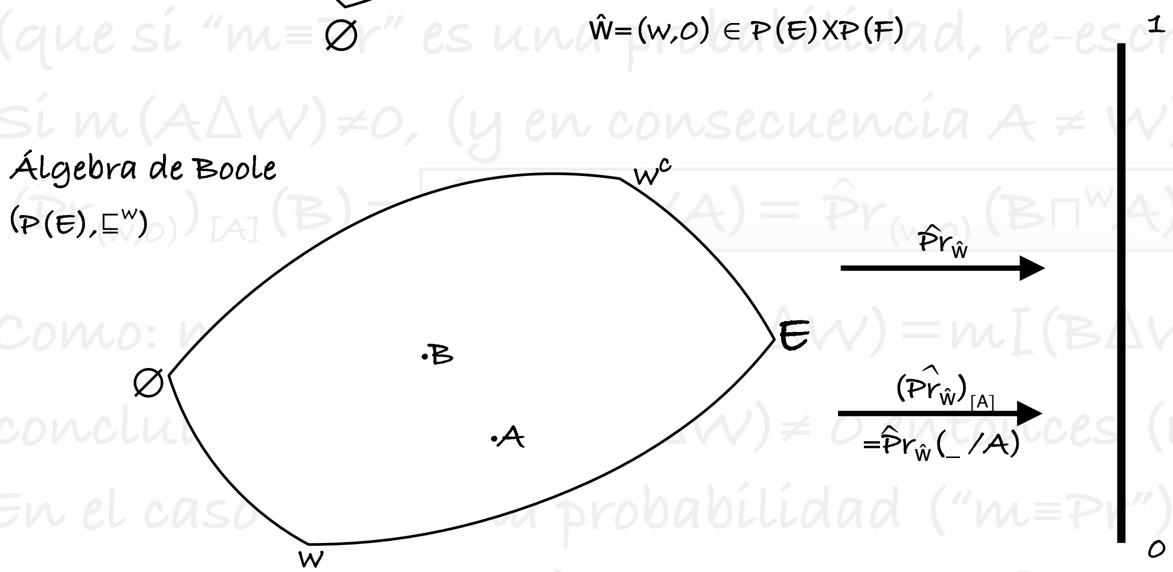
$$(\hat{P}r_{(w,0)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,0)}\ ,$$

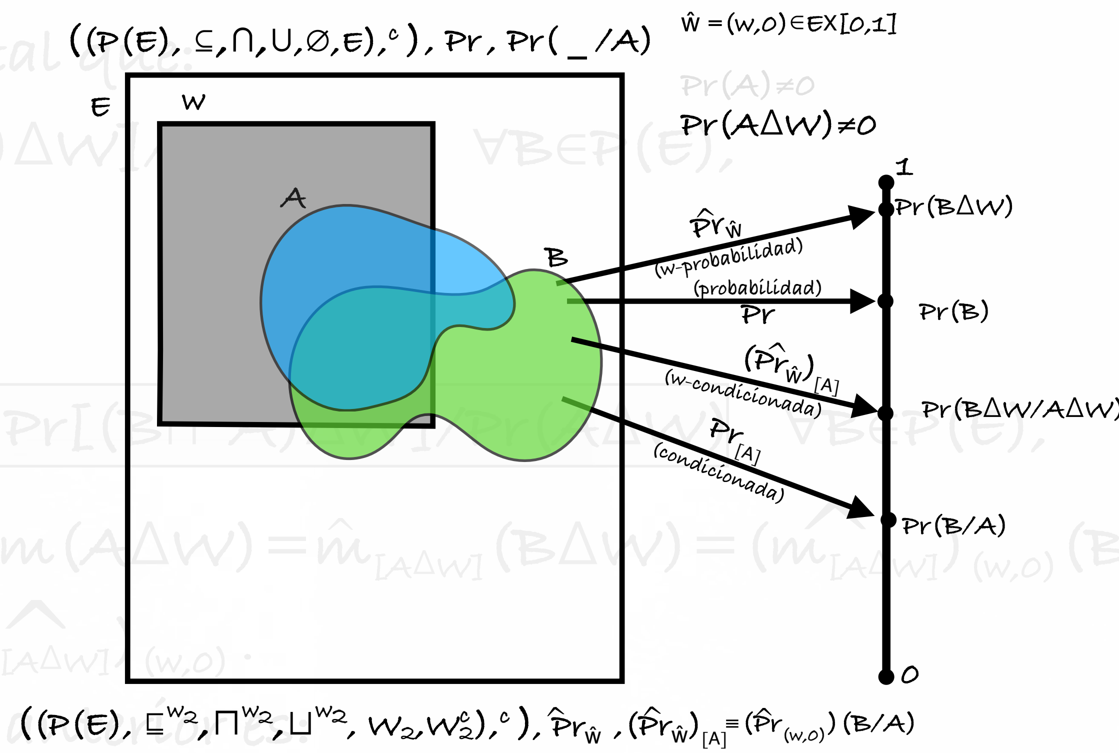
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,0)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Un esquema de los elementos que intervienen en el cálculo de la "w-probabilidad condicionada" $(\hat{P}r_{(w,o)})(B/A)$:





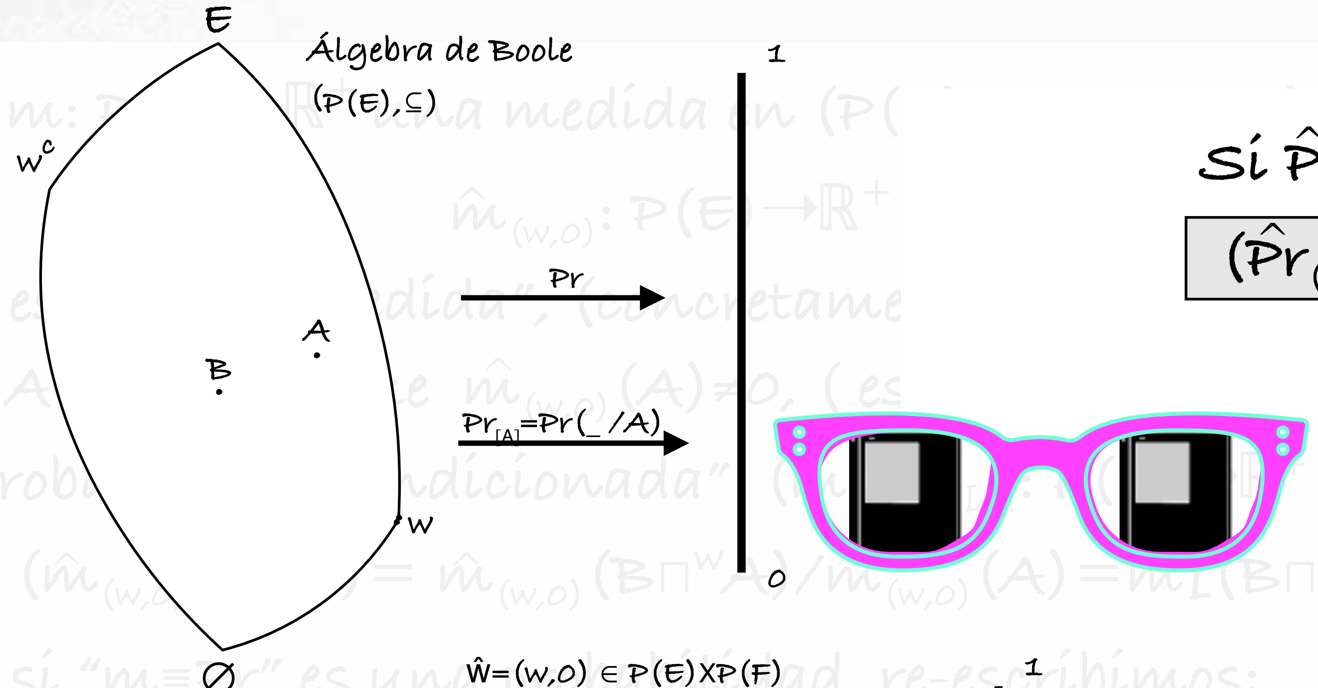
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

<u>Definición</u>. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c, {}^c)$ asociada a $(\hat{P}r_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{P}r_{(w,o)})_{[A]} = (\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)} \,,$$

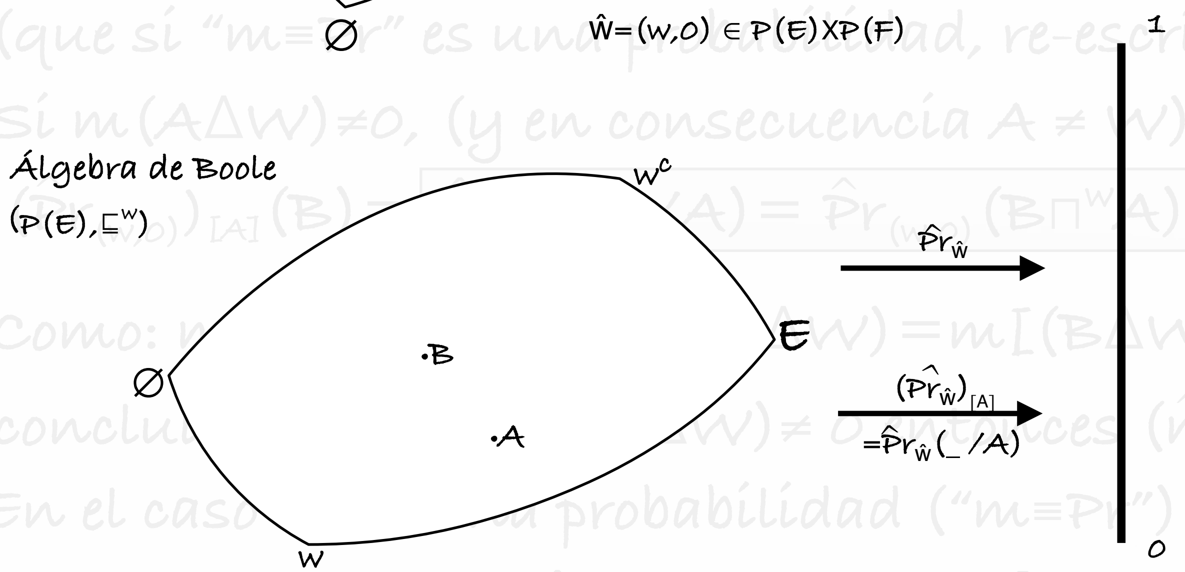
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

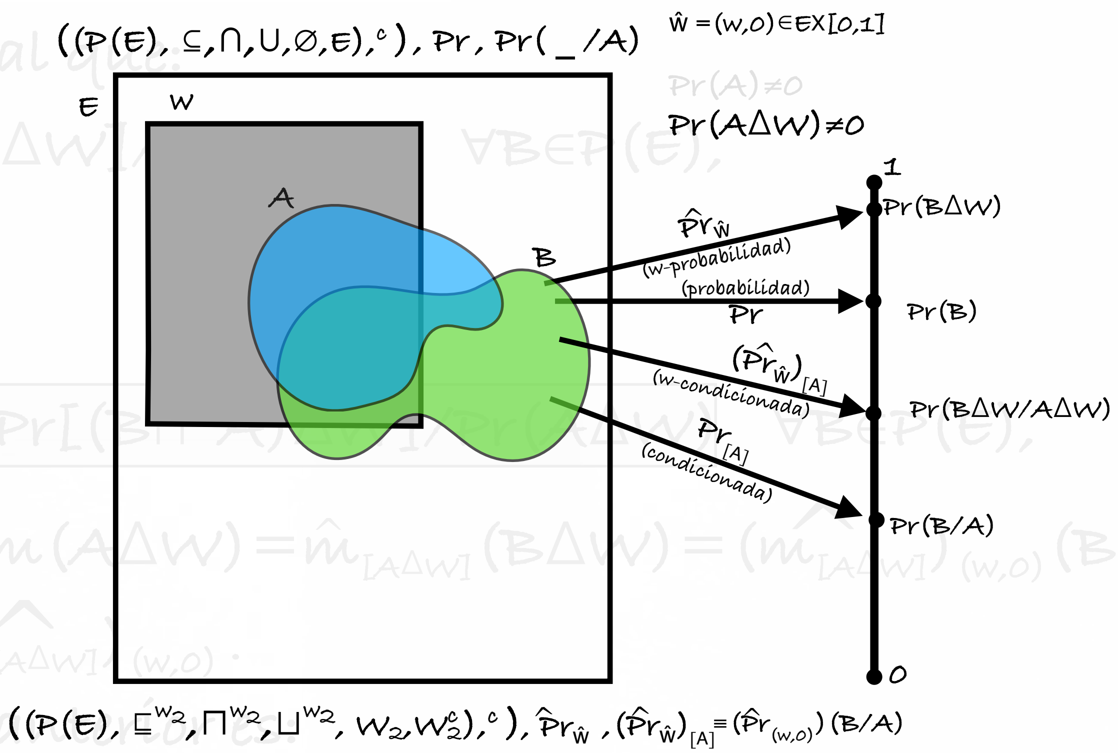
$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{P}r_{(w,o)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Si $\hat{Pr}_{(w,o)}(A)\neq 0$ (y en consecuencia $A\neq W$):

$$\boxed{(\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)=\hat{Pr}_{(w,o)}(B\sqcap^{W}A)/\hat{Pr}_{(w,o)}(A)]}$$





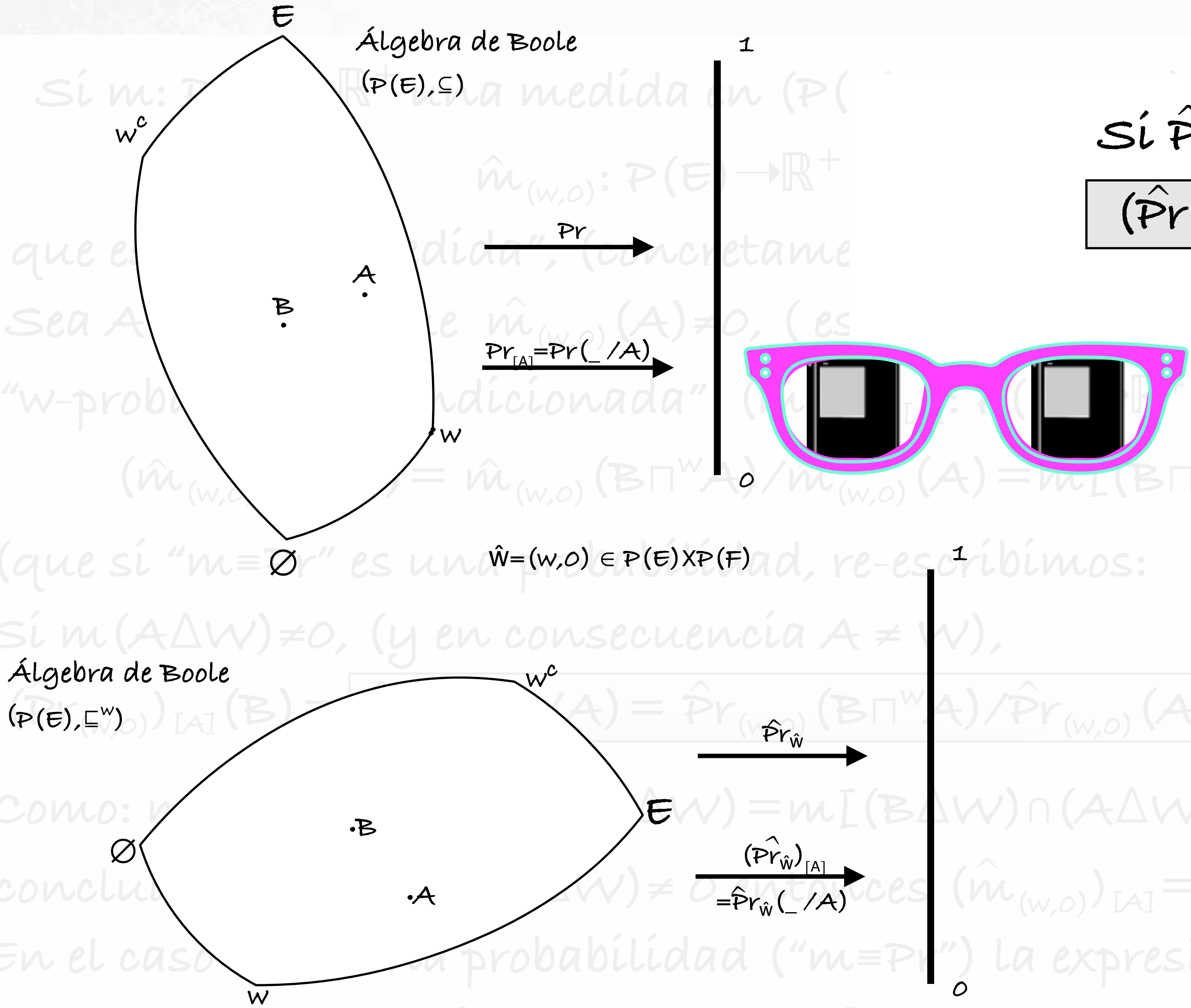
Estamos en condiciones de dar la siguiente:

Definición. Si $Pr(A\Delta W)\neq 0$, la "w-probabilidad condicionada" en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{W},\sqcap^{W},\sqcup^{W},W,W^{c},^{c})$ asociada a $(\hat{Pr}_{(w,o)})$ es la nueva función $(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}$ que verifica:

$$(\hat{Pr}_{(w,o)})_{[A]}=(\widehat{Pr_{[A\Delta W]}})_{(w,o)},$$

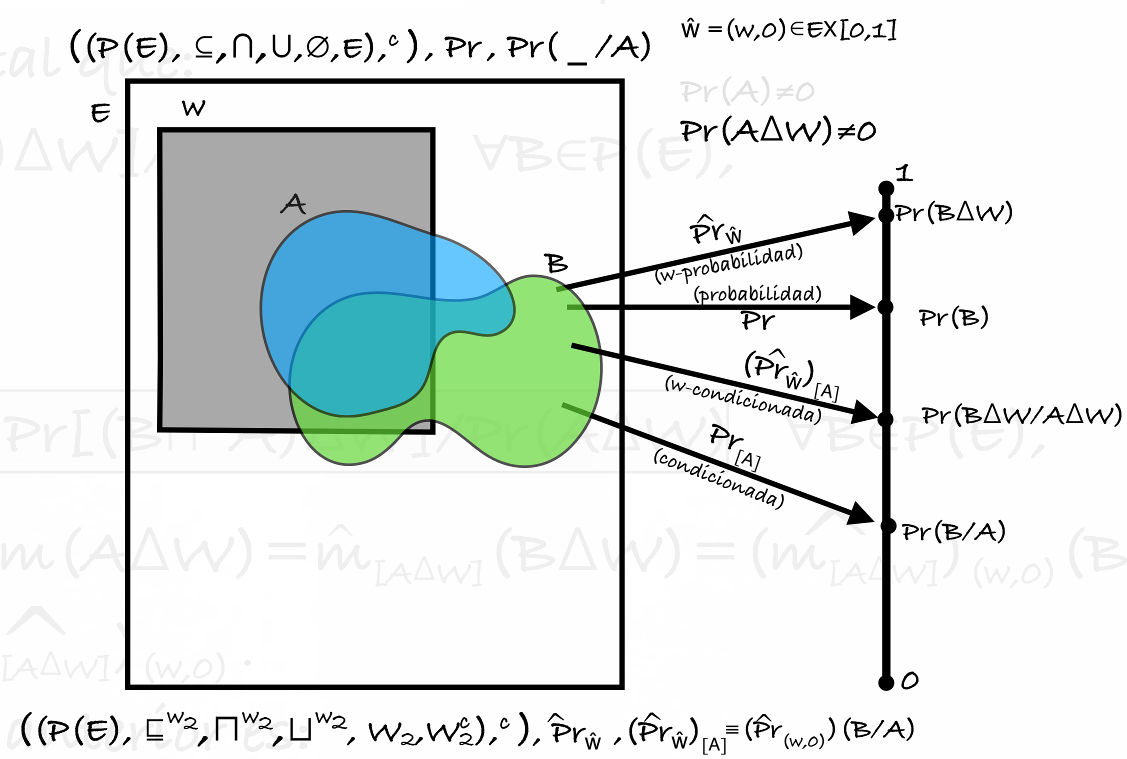
que finalmente escribimos con la notación usual para la probabilidad condicionada:

$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W)\neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(w,o)})(B/A)=Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$



Si $\hat{Pr}_{(W,O)}(A) \neq 0$ (y en consecuencia $A \neq W$):

$$\boxed{(\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A) = \hat{Pr}_{(W,O)}(B \sqcap^W A) / \hat{Pr}_{(W,O)}(A)]}$$



Nota. Cuestiones abiertas: ¿Definiciones de "W-independencia", "W- probabilidad total", Bayes,... etc, en $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W, ^c)$)?

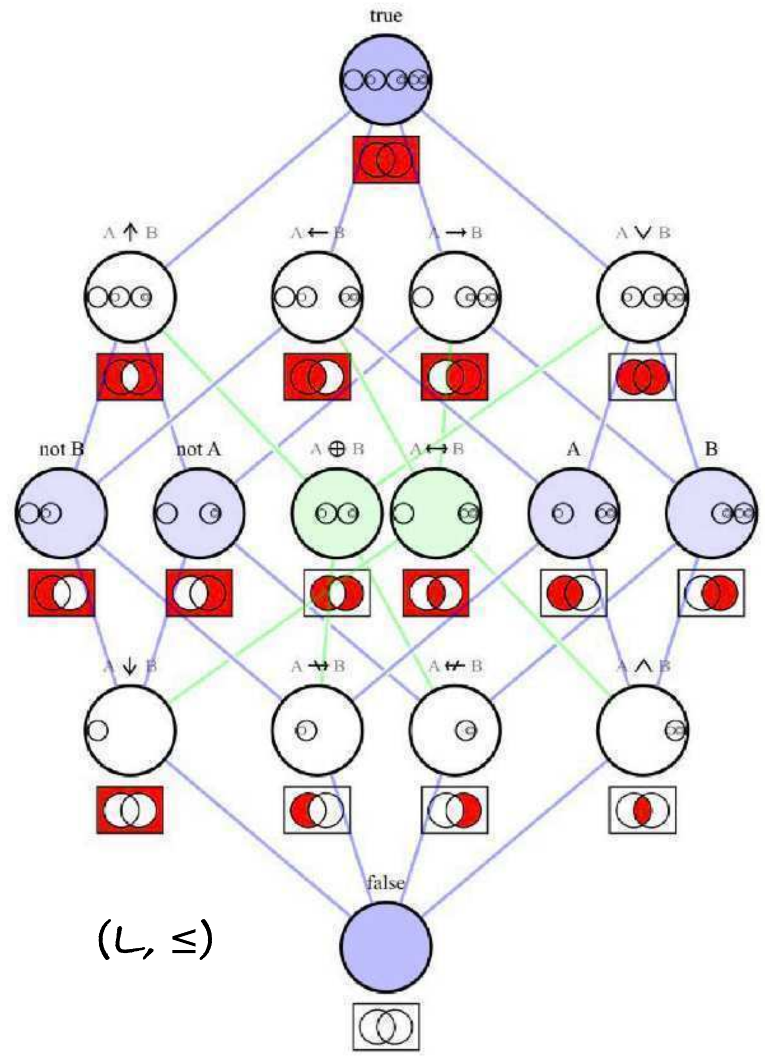
$$\boxed{\text{Si } Pr(A\Delta W) \neq 0 \text{ entonces } (\hat{Pr}_{(W,O)})(B/A) = Pr[(B\Delta W)/(A\Delta W)]}$$

Ejemplos:
Orden de actividad y matemáticas discretas.

Ejemplo 1

Conectivos lógicos:

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1
false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



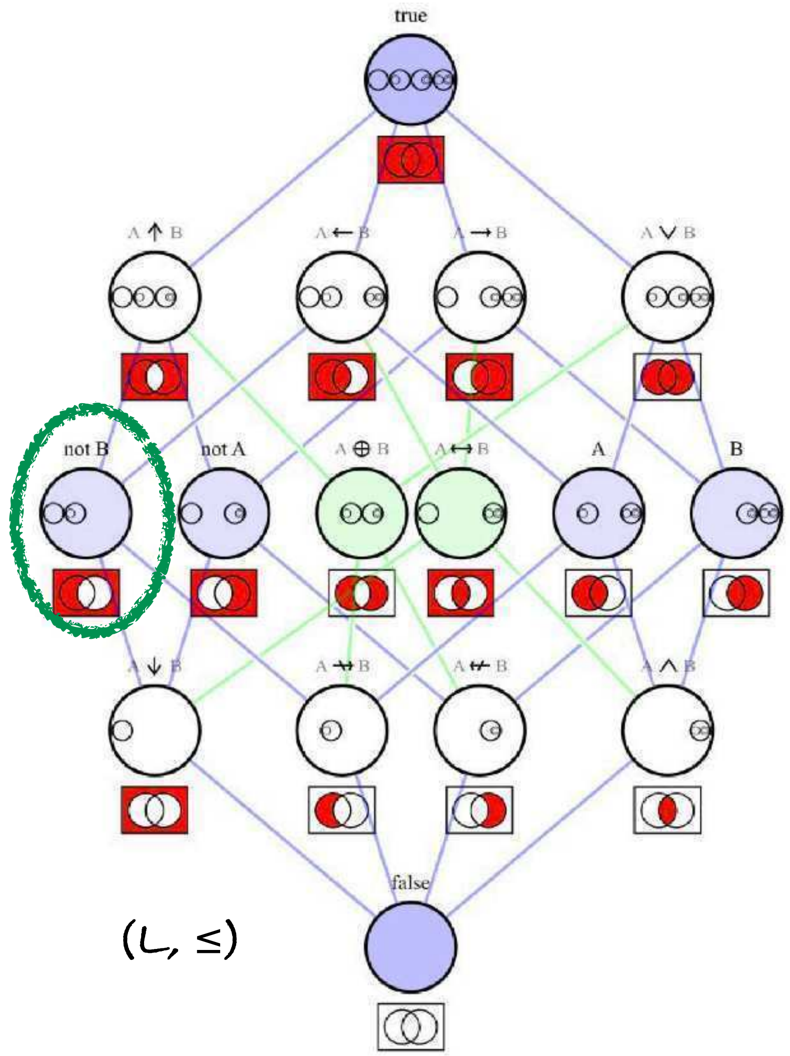
$(L, \leq)$

Álgebra de Boole

Conectivos lógicos:

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



$(L, \leq)$

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

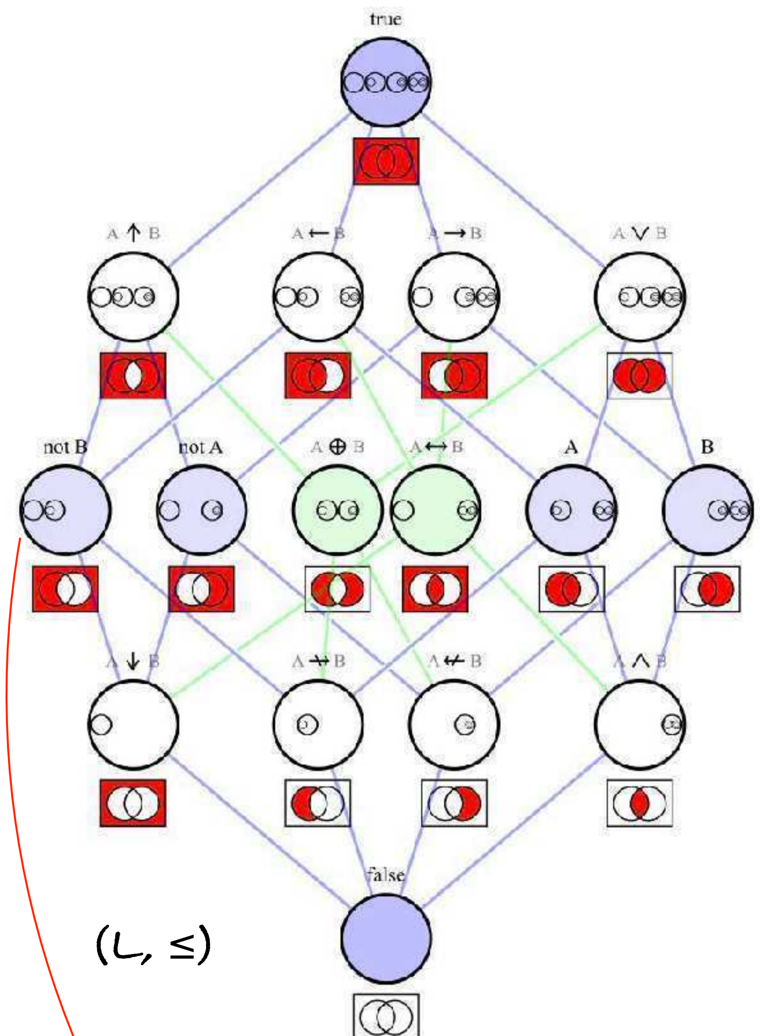
Conectivos lógicos:

Álgebra de Boole

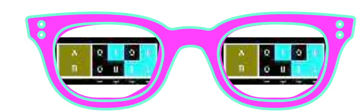
Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

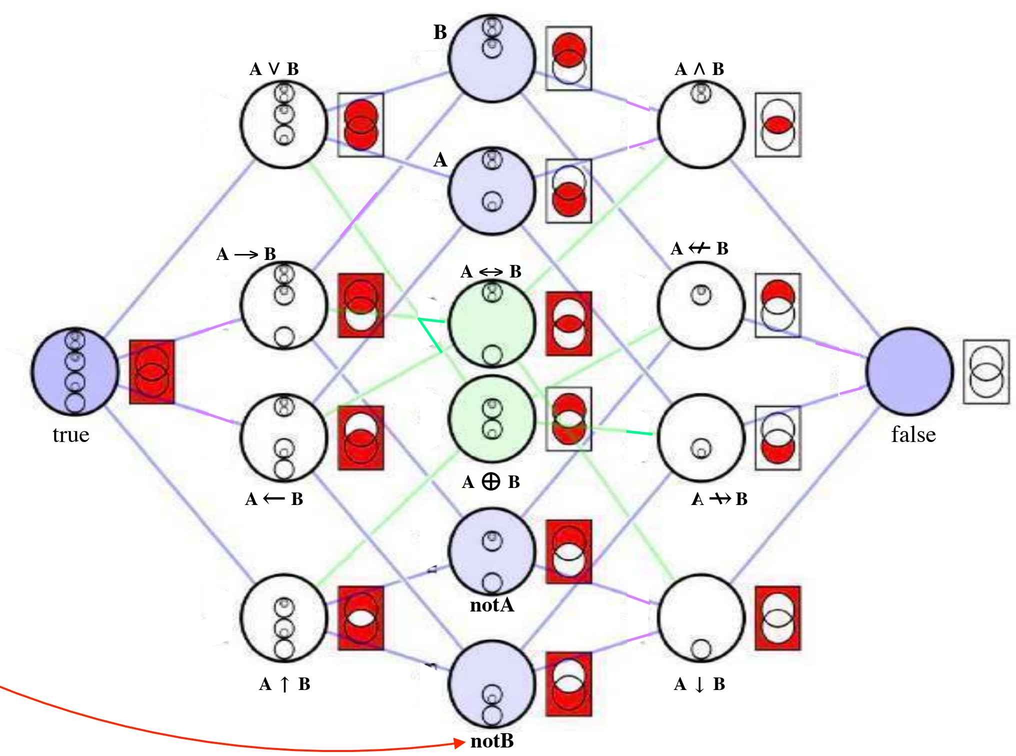
$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$

	A	0	1	0	1
	B	0	0	1	1
false		0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$		0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$		0	0	1	0
B		0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$		0	1	0	0
A		0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$		0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$		0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$		1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$		1	0	0	1
$\bar{A}$		1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$		1	0	1	1
$\bar{B}$		1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$		1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$		1	1	1	0
true		1	1	1	1



$(L, \leq)$





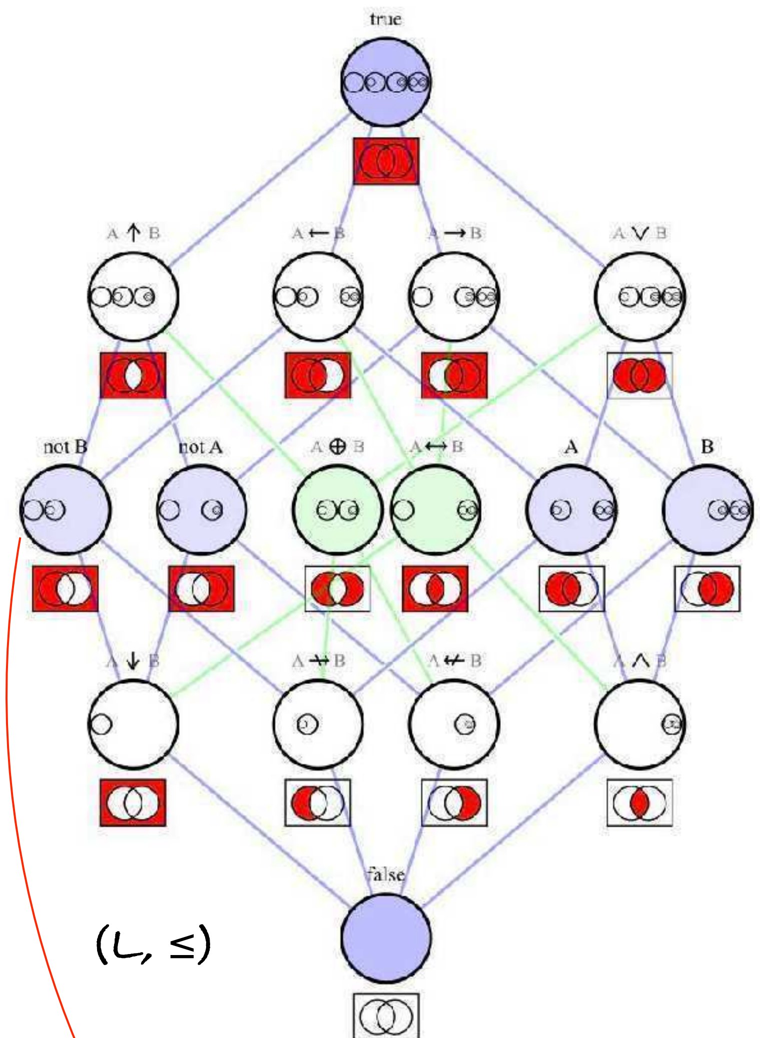
$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Álgebra de Boole

Conectivos lógicos:

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

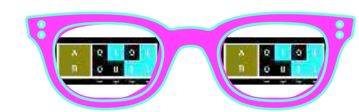
false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1

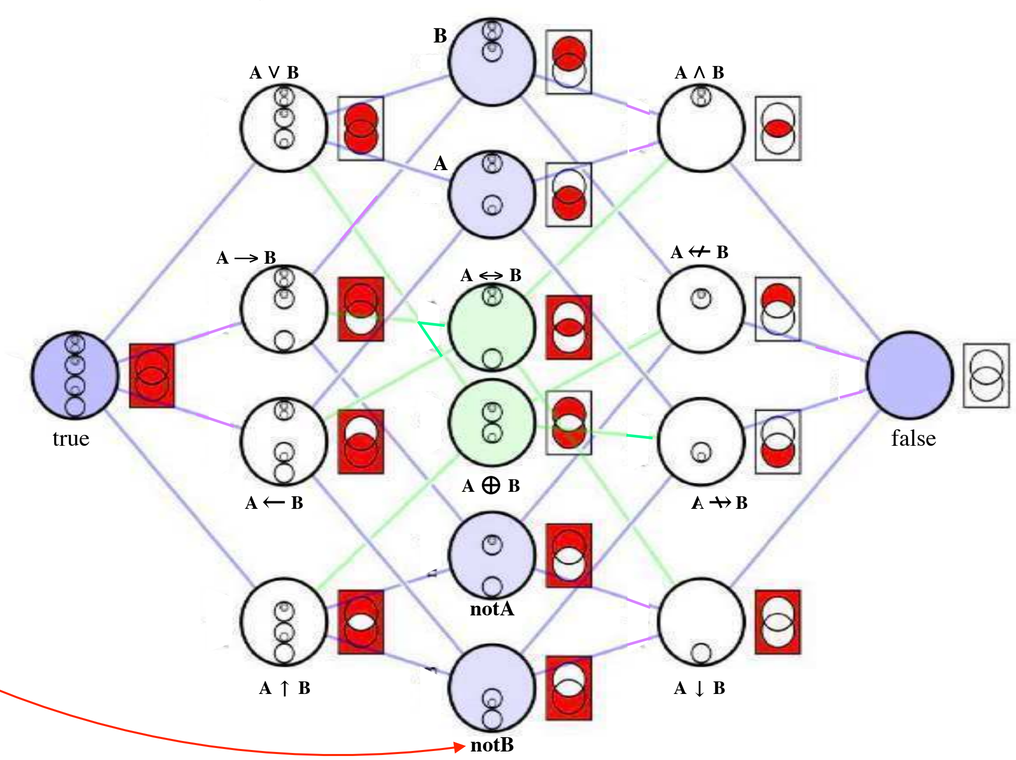


$(L, \leq)$

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$





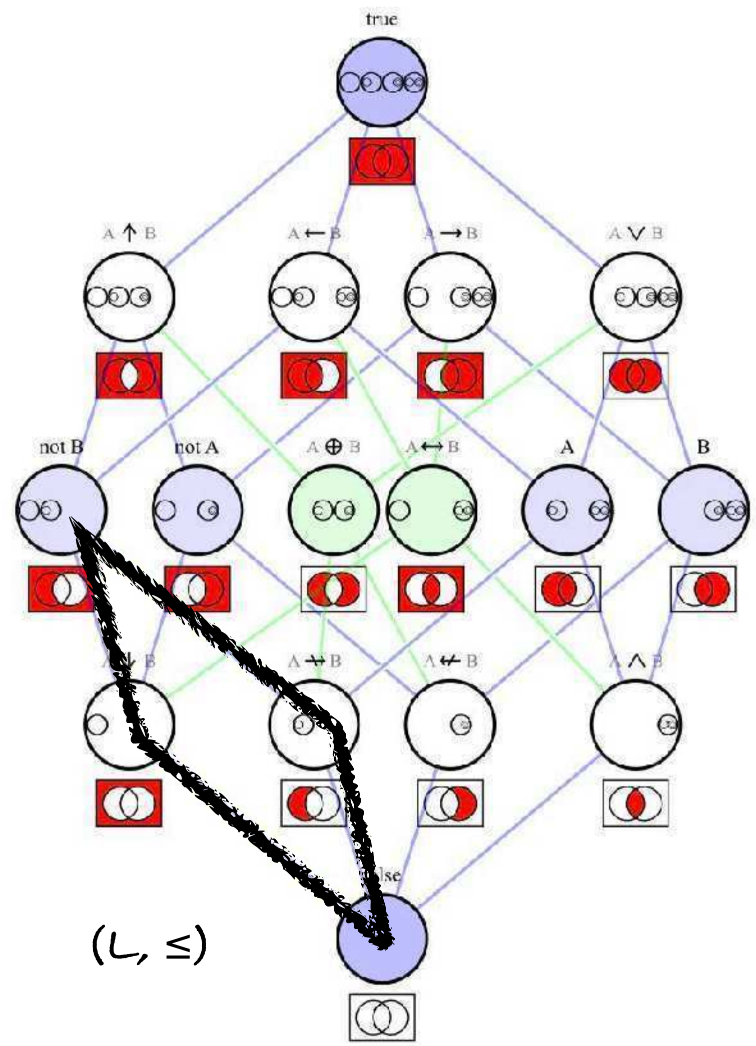
$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Conectivos lógicos:

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1

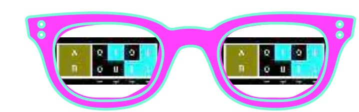
Álgebra de Boole

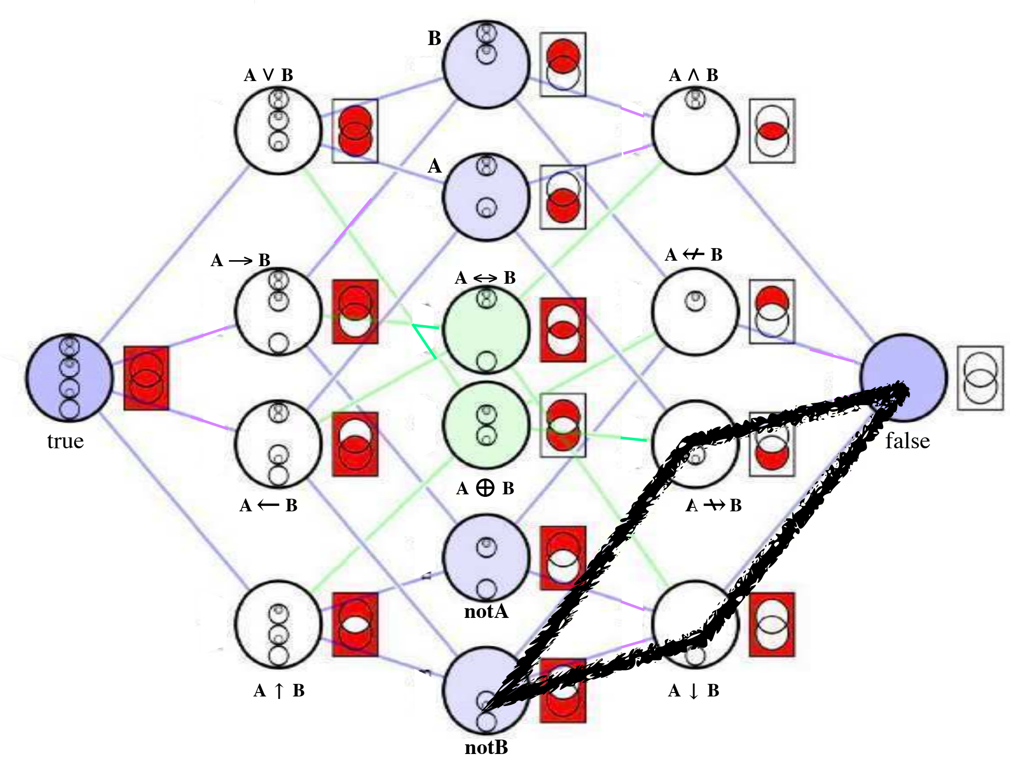


$(L, \leq)$

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$





$(L, \sqsubseteq^{notB})$

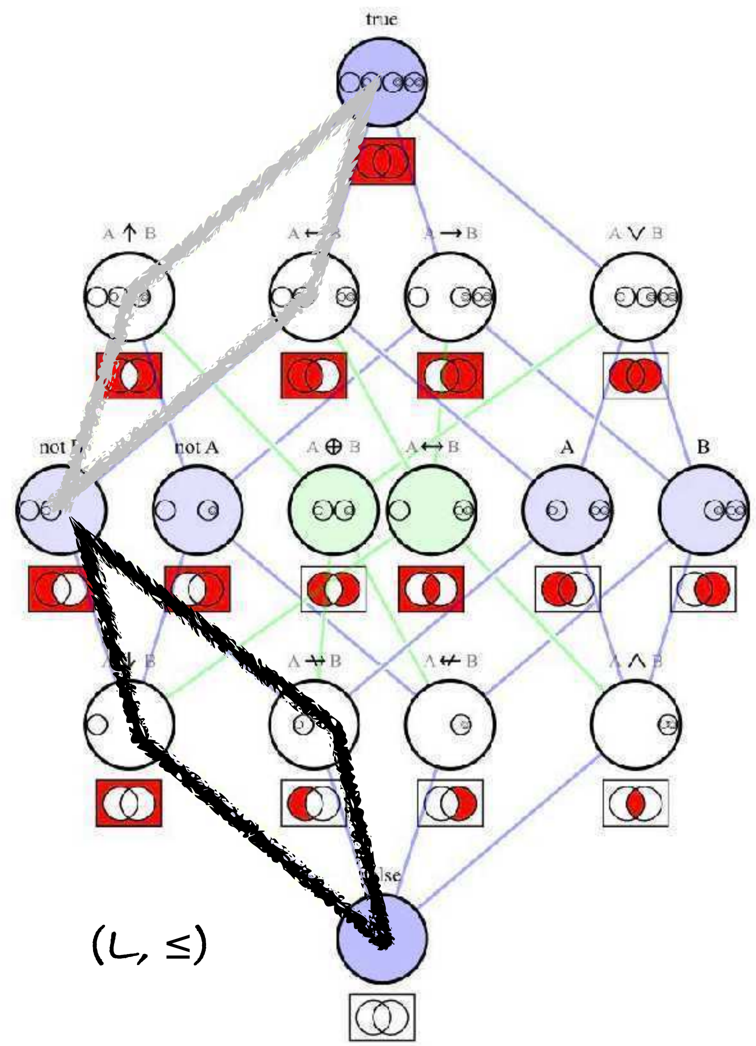
Conectivos lógicos:

Álgebra de Boole

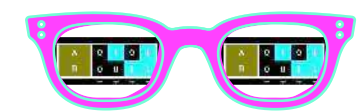
Por ejemplo, desde la “perspectiva” notB :

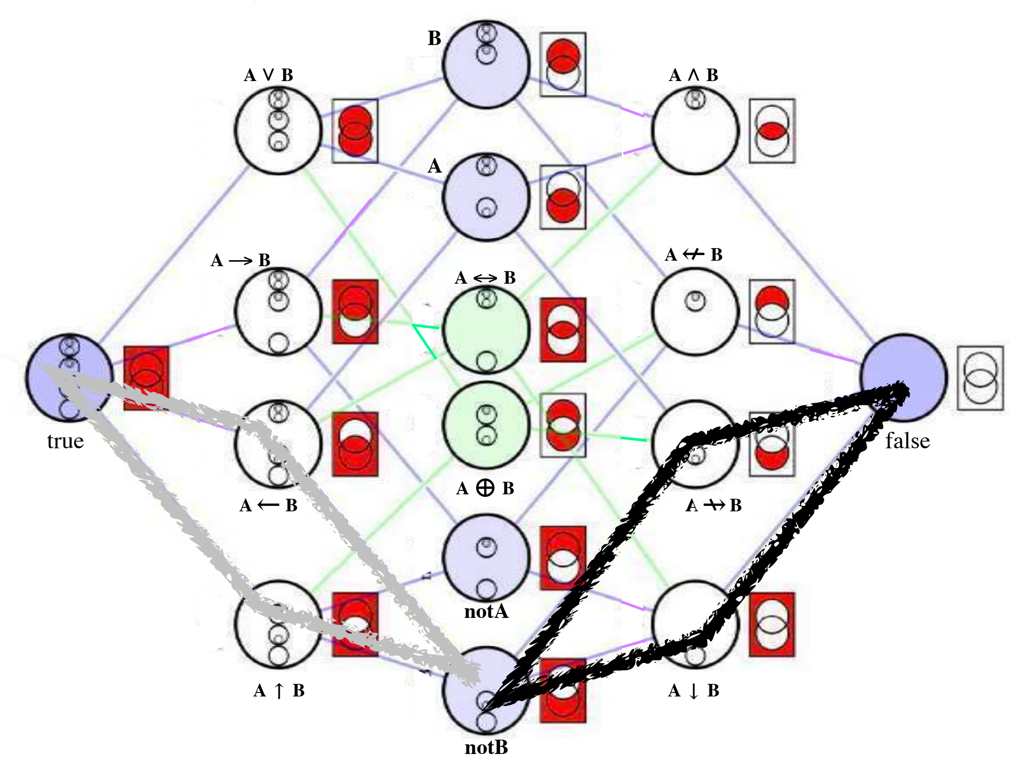
$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1
false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



(L, ≤)





$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Conectivos lógicos:

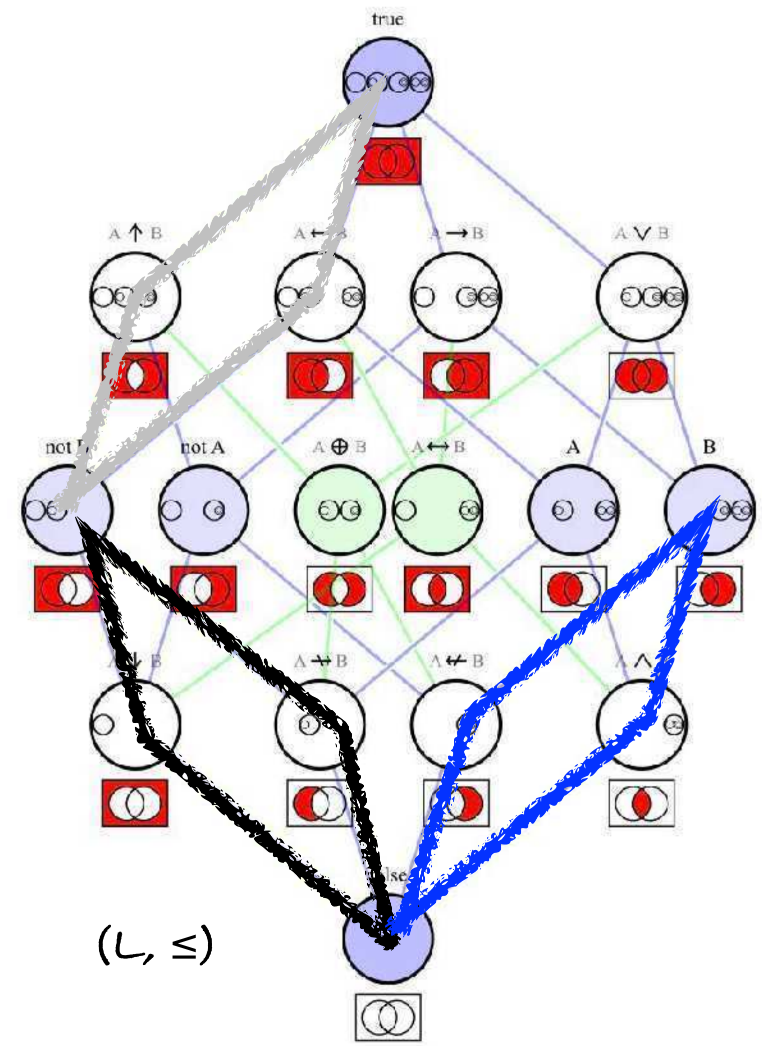
Álgebra de Boole

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

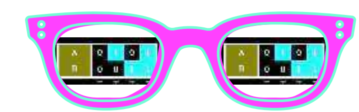
$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$

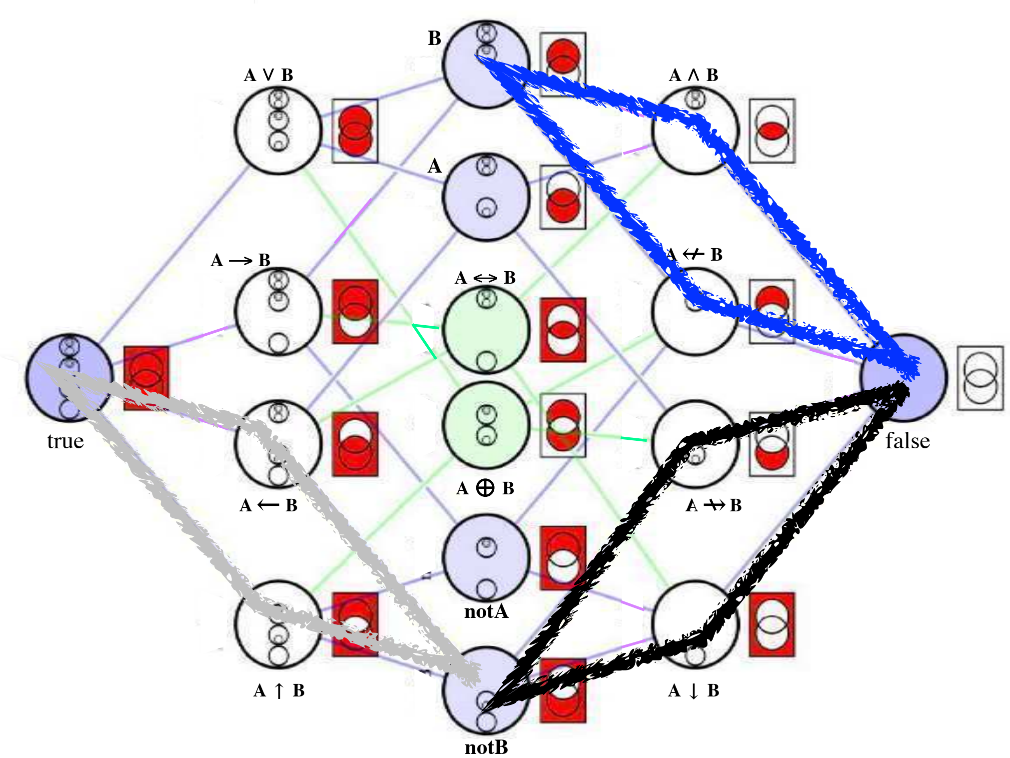
A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



$(L, \leq)$





$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Conectivos lógicos:

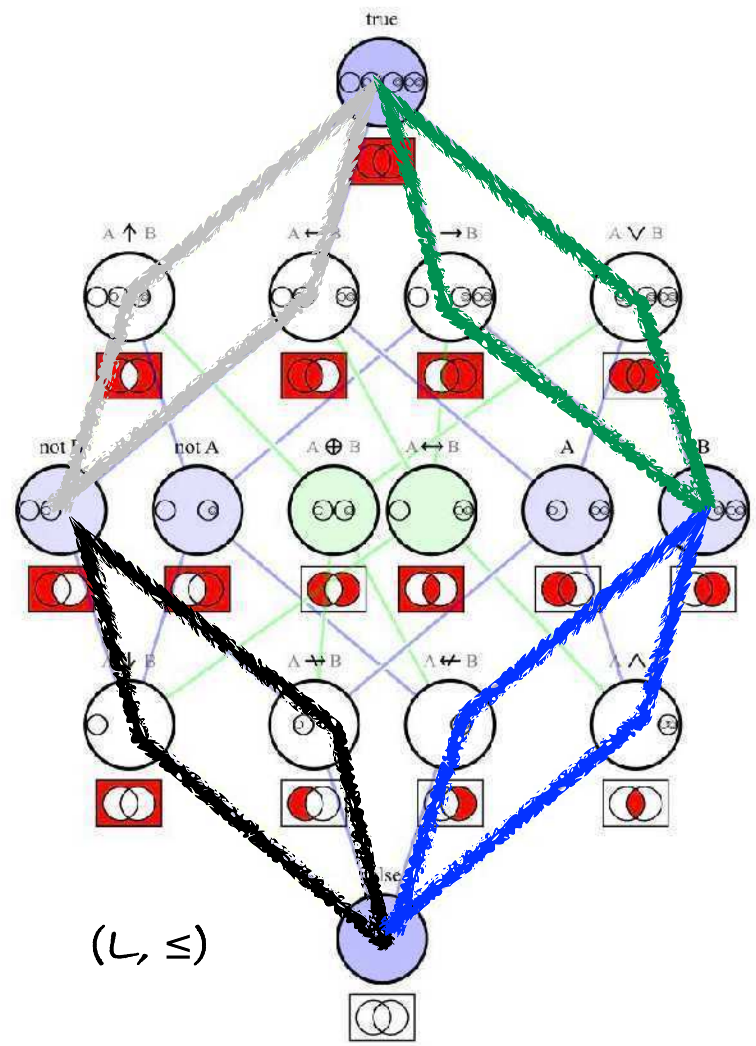
Álgebra de Boole

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

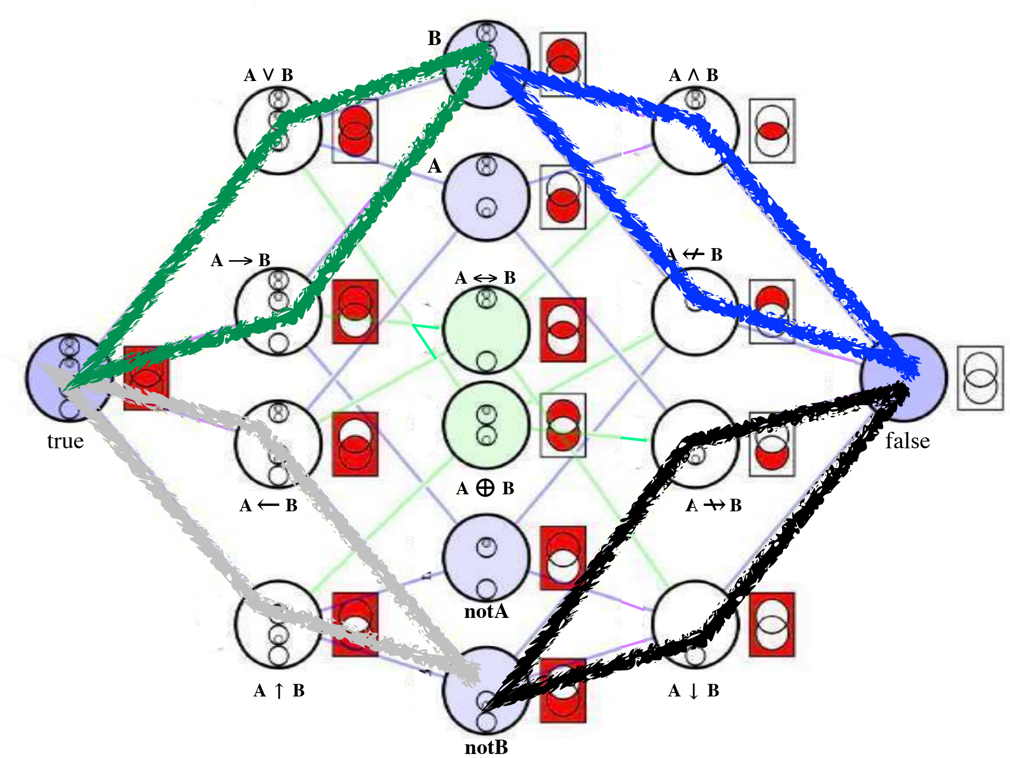
$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



$(L, \leq)$



$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Conectivos lógicos:

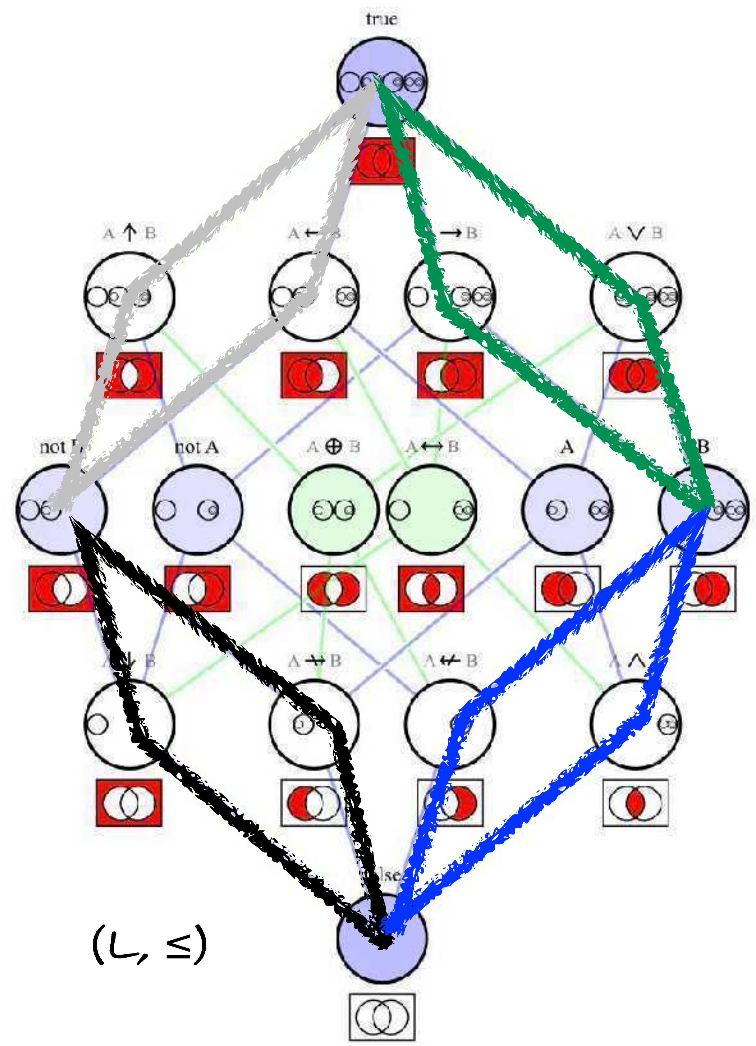
Álgebra de Boole

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

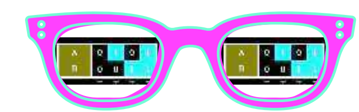
$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \leq M \leq (notB \vee N))$$

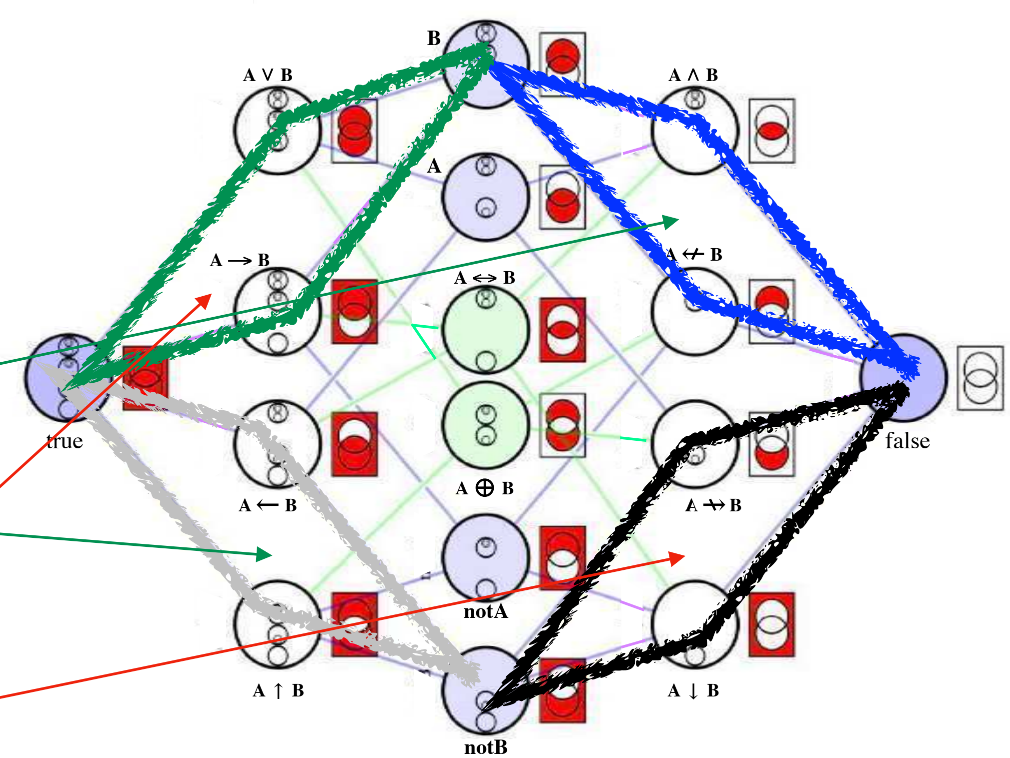
A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1



$(L, \leq)$





Aquí, el orden $\sqsubseteq^{notB}$ coincide con el orden $\leq$:
$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow (M \leq N)$

Aquí, el orden $\sqsubseteq^{notB}$ coincide con dual del orden $\leq$:
$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow (M \geq N)$

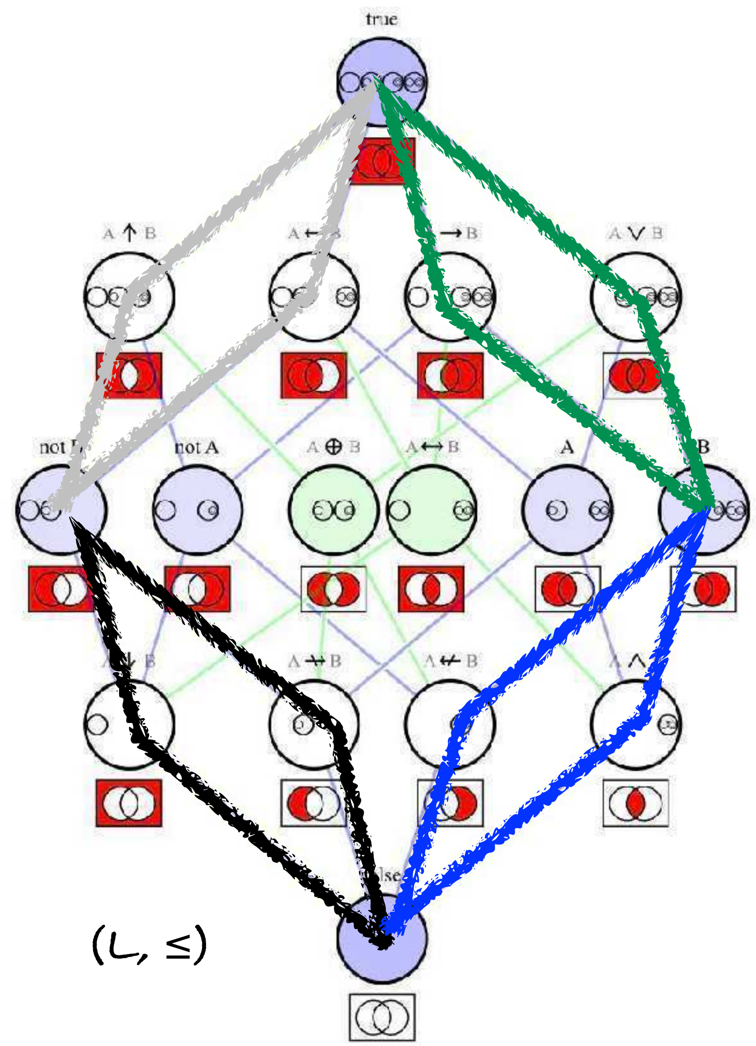
$(L, \sqsubseteq^{notB})$

Conectivos lógicos:

A	0	1	0	1
B	0	0	1	1

false	0	0	0	0
$A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow B \Leftrightarrow A \nrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow \bar{B}$	0	0	0	1
$A \nleftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow A \downarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow \bar{B}$	0	0	1	0
B	0	0	1	1
$A \nrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \downarrow B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \nleftarrow \bar{B}$	0	1	0	0
A	0	1	0	1
$A \oplus B \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \oplus \bar{B}$	0	1	1	0
$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \bar{B}$	0	1	1	1
$A \downarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \nrightarrow B \Leftrightarrow A \nleftarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	1	0	0	0
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \oplus B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	0	1	0
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \Leftrightarrow A \uparrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{B}$	1	1	0	0
$A \leftarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow B \Leftrightarrow A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	1	1	0	1
$A \uparrow B \Leftrightarrow \bar{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	1	1	1	0
true	1	1	1	1

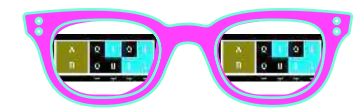
Álgebra de Boole

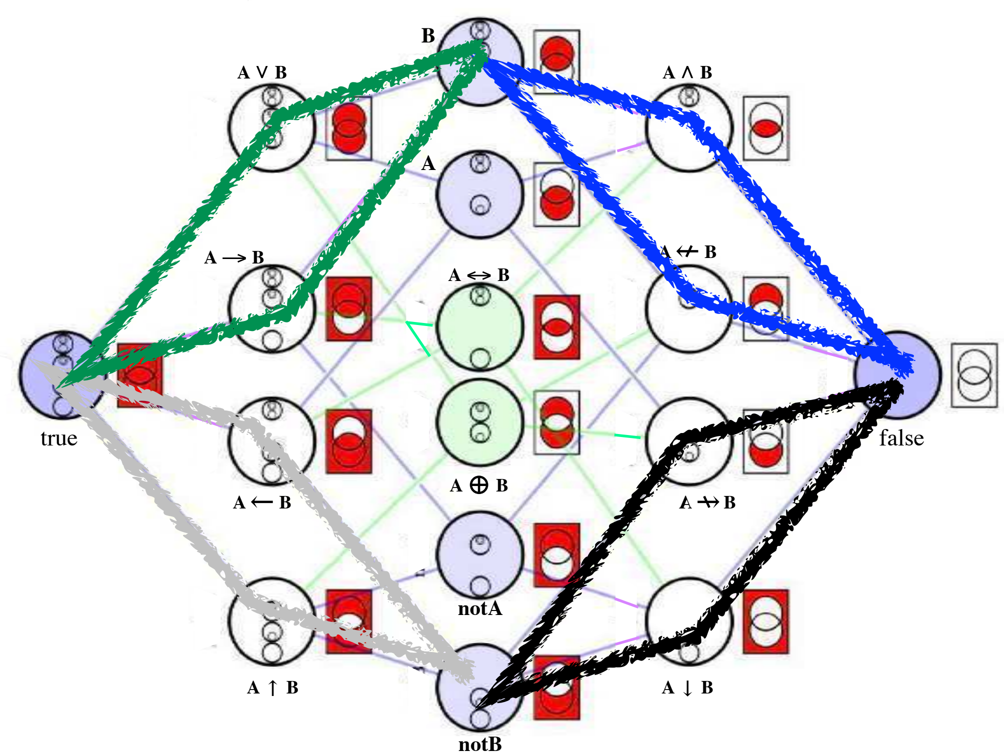


$(L, \le)$

Por ejemplo, desde la "perspectiva" notB :

$$(M \sqsubseteq^{notB} N) \Leftrightarrow ((notB \wedge N) \le M \le (notB \vee N))$$

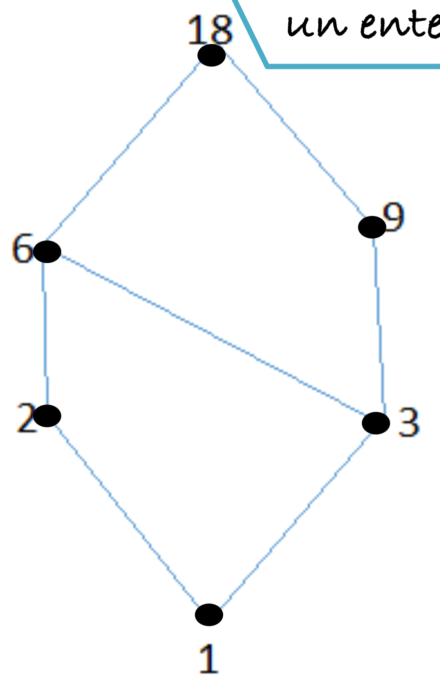




$(L, \sqsubseteq^{notB})$

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados $(\mathbf{Dn}, \sqsubseteq^w)$ asociados a elementos w del retículo $(\mathbf{Dn}, d)$ de divisores de un entero natural positivo $\mathbf{n}$:

$a \sqsubseteq^w b \Leftrightarrow$ [("mcd (b,w)" es divisor de "a") & ("mcm (b,w)" es múltiplo de "a").



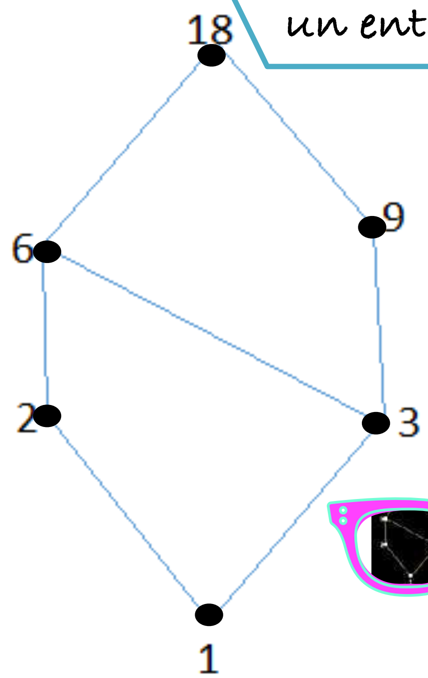
Retículo distributivo $(\mathbf{D18}, d)$

$D18 = D(2{\cdot}3^2)$

$(3d6, 3d9, 2d6, \ldots, \text{etc})$

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados $(\mathbf{Dn}, \sqsubseteq^{w})$ asociados a elementos w del retículo $(\mathbf{Dn}, d)$ de divisores de un entero natural positivo $\mathbf{n}$:

$a \sqsubseteq^{w} b \Leftrightarrow$ [(“mcd(b,w)” es divisor de “a”) & (“mcm(b,w)” es múltiplo de “a”).

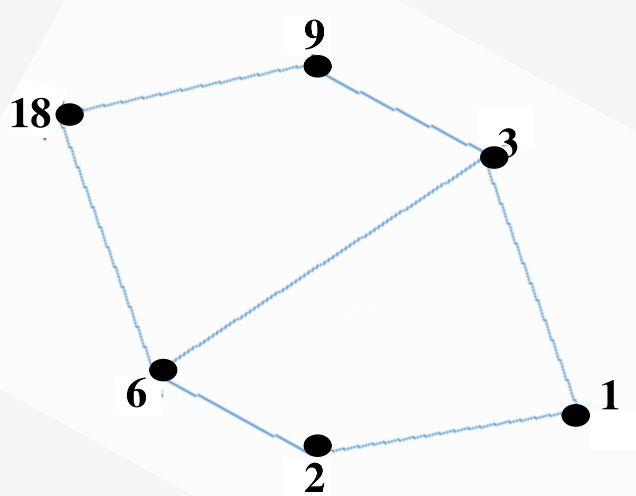


Retículo distributivo (**D18**, d)

D18 $= \mathbf{D}(2{\cdot}3^2)$

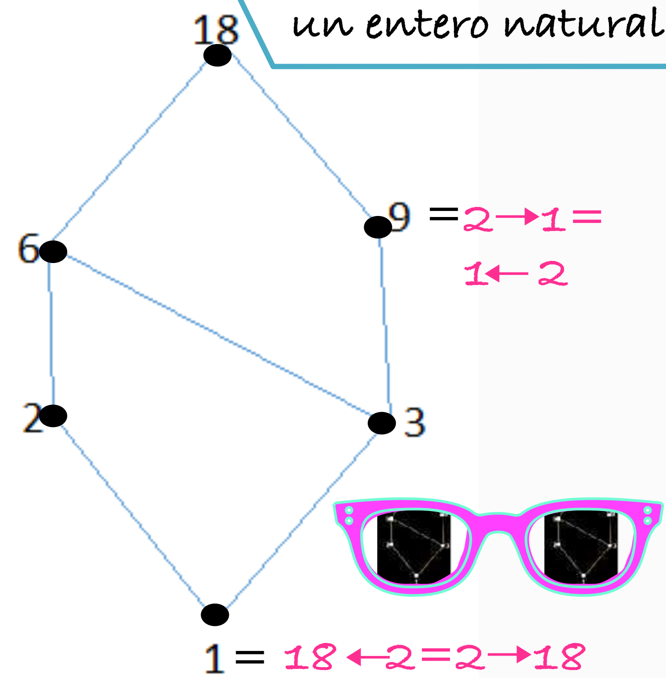
(3*d*6, 3*d*9, 2*d*6,…, etc)

“**2** complementado: $2^c = 9$”



Retículo distributivo ($\mathbf{D18}, \sqsubseteq^{2}$)

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados $(\mathbf{Dn}, \sqsubseteq^{w})$ asociados a elementos w del retículo $(\mathbf{Dn}, d)$ de divisores de un entero natural positivo $\mathbf{n}$: $a \sqsubseteq^{w} b \Leftrightarrow$ [("mcd (b,w)" es divisor de "a") & ("mcm (b,w)" es múltiplo de "a").

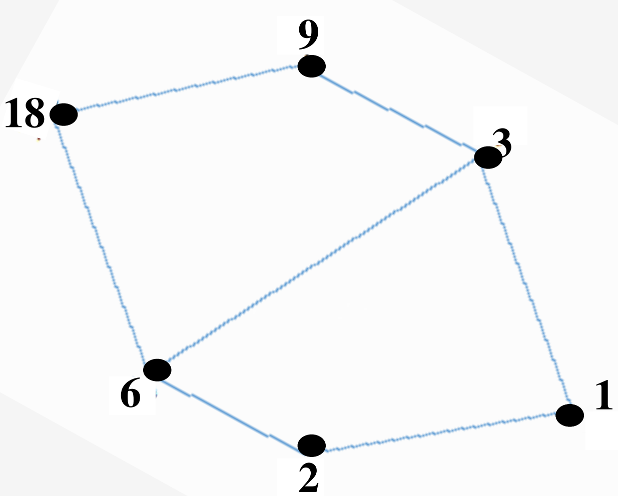


Retículo distributivo (**D18**, d)

D18 = D($2{\cdot}3^2$)

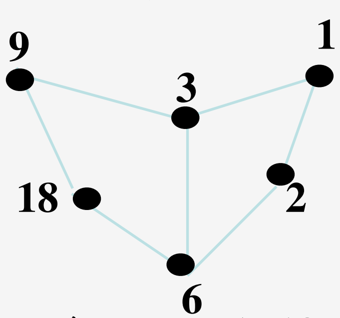
(**3d6, 3d9, 2d6,…, etc**)

"**2** complementado: $2^c = 9$"

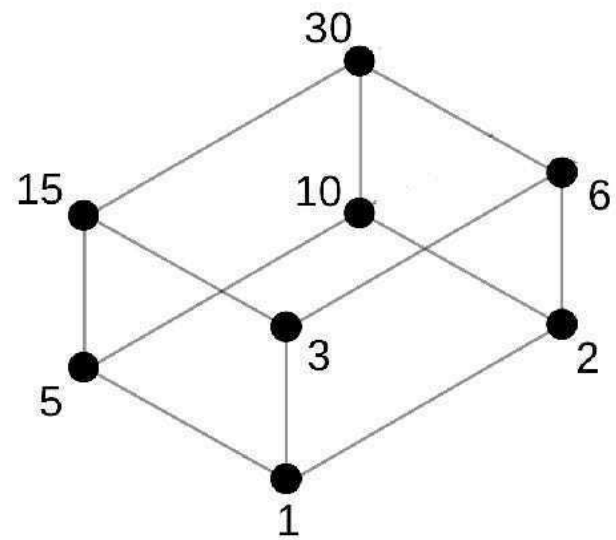


Retículo distributivo (**D18**, $\sqsubseteq^2$)

"**6** no complementado".



Inf-semiretículo (**D18**, $\sqsubseteq^6$)



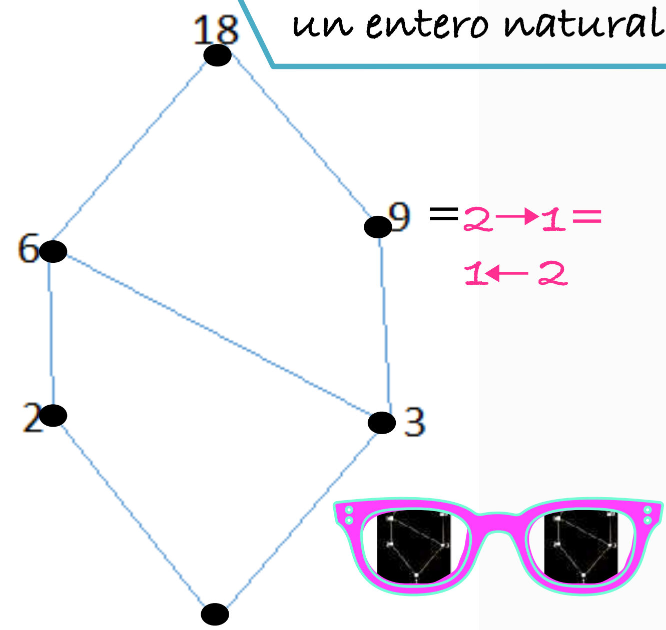
Álgebra de Boole (**D30**, d)
D30 = D($2{\cdot}3{\cdot}5$)

(**3d6, 3d15, 5d15,…, etc**)

• • •

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados ($\mathbf{Dn}, \sqsubseteq^w$) asociados a elementos w del retículo ($\mathbf{Dn}, d$) de divisores de un entero natural positivo **n**:

$a \sqsubseteq^w b \Leftrightarrow [$(“mcd(b,w)” es divisor de “a”) & (“mcm(b,w)” es múltiplo de “a”).



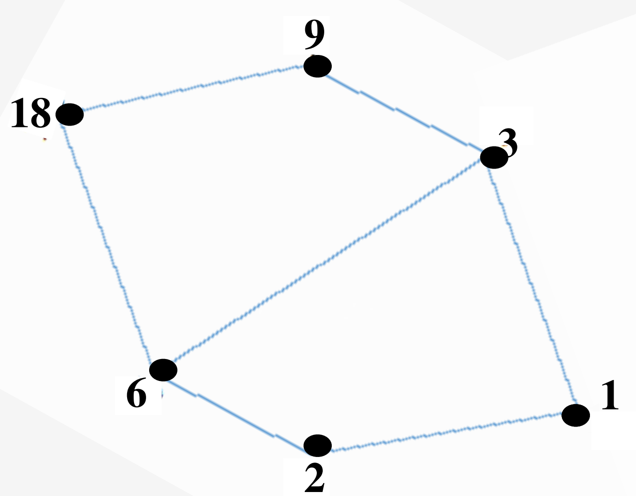
1 = 18 ←2 = 2 →18

Retículo distributivo (**D18**, d)

D18 = D($2{\cdot}3^2$)

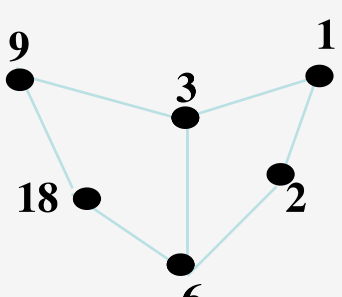
(**3*d*6, 3*d*9, 2*d*6,…, etc**)

“**2** complementado: $2^c = 9$”

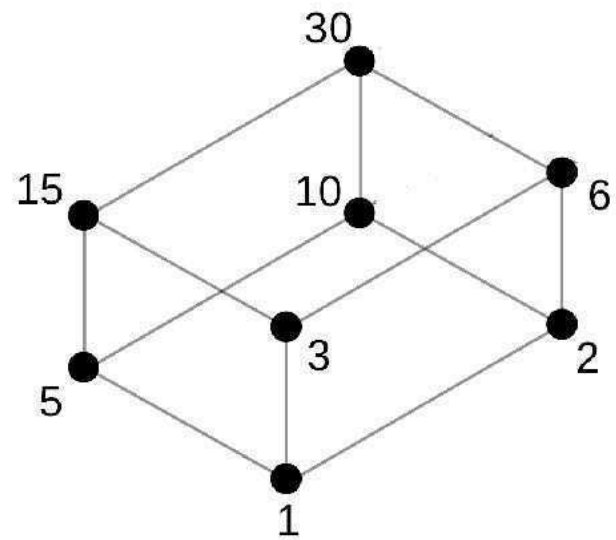


Retículo distributivo (**D18**, $\sqsubseteq^2$)

“**6** no complementado”.



Inf-semiretículo (**D18**, $\sqsubseteq^6$)

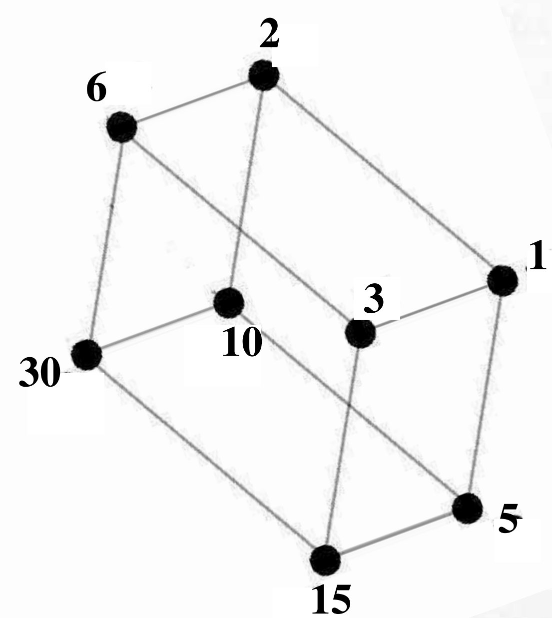


Álgebra de Boole (**D30**, d)

D30 = D(2·3·5)

(**3*d*6, 3*d*15, 5*d*15,…, etc**)

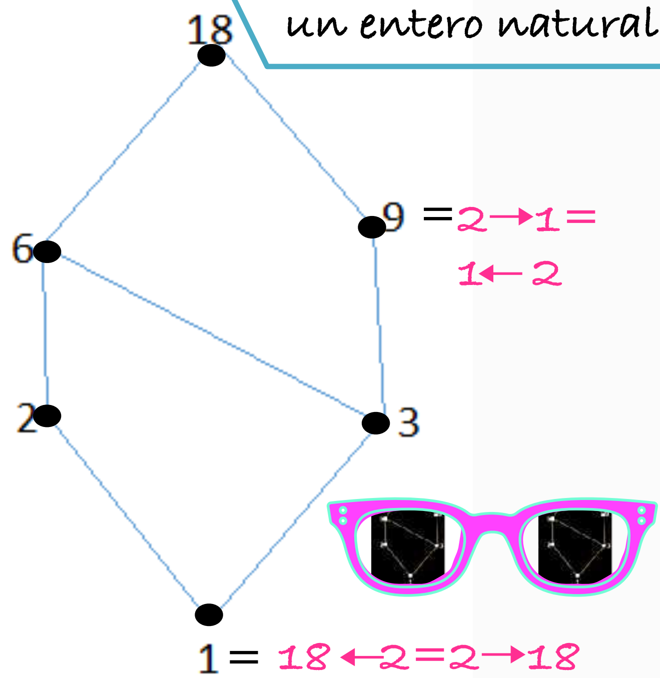
“**15** complementado: $15^c = 2$”



Álgebra de Boole (**D30**, $\sqsubseteq^{15}$)

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados ($\mathbf{Dn}$, $\sqsubseteq^w$) asociados a elementos w del retículo ($\mathbf{Dn}$, d) de divisores de un entero natural positivo $\mathbf{n}$:

$a \sqsubseteq^w b \Leftrightarrow$ [("mcd (b,w)" es divisor de "a") & ("mcm (b,w)" es múltiplo de "a").

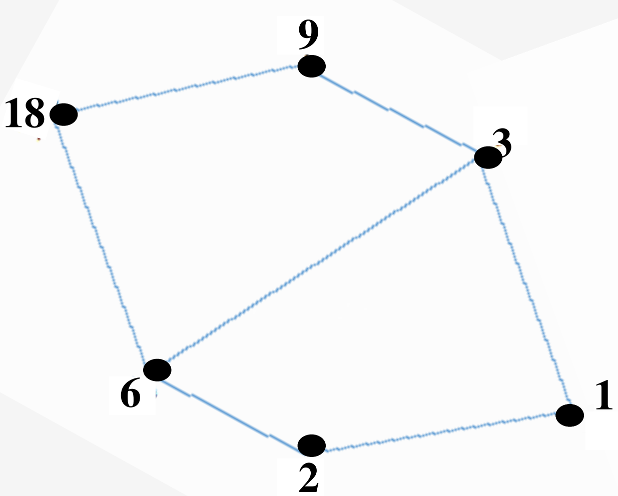


Retículo distributivo (**D18**, d)

D18 = D($2{\cdot}3^2$)

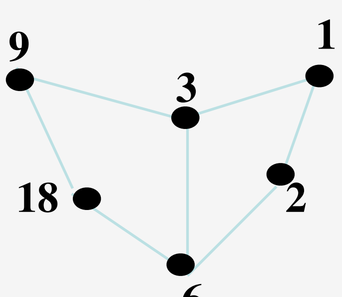
(**3*d*6, 3*d*9, 2*d*6,…, etc**)

"**2** complementado: 2^c = **9**"

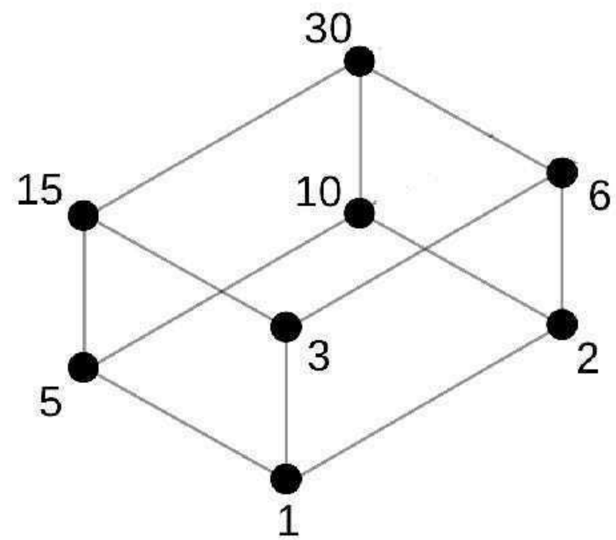


Retículo distributivo (**D18**, $\sqsubseteq^2$)

"**6** no complementado".



Inf-semiretículo (**D18**, $\sqsubseteq^6$)

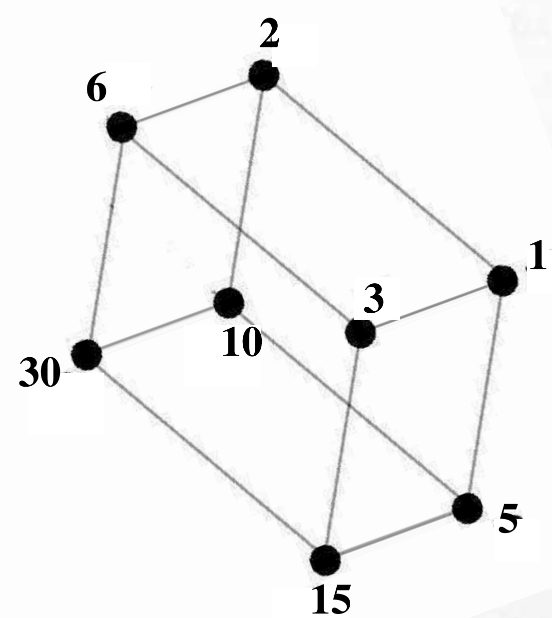


Álgebra de Boole (**D30**, d)

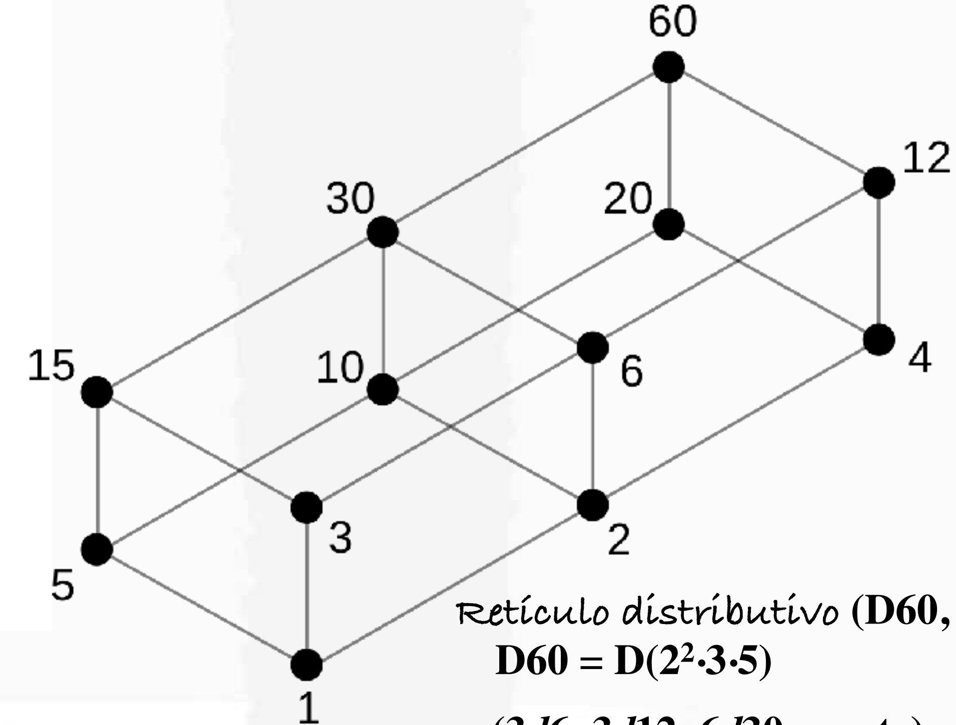
D30 = D(2·3·5)

(**3*d*6, 3*d*15, 5*d*15,…, etc**)

"**15** complementado: 15^c = **2**"



Álgebra de Boole (**D30**, $\sqsubseteq^{15}$)

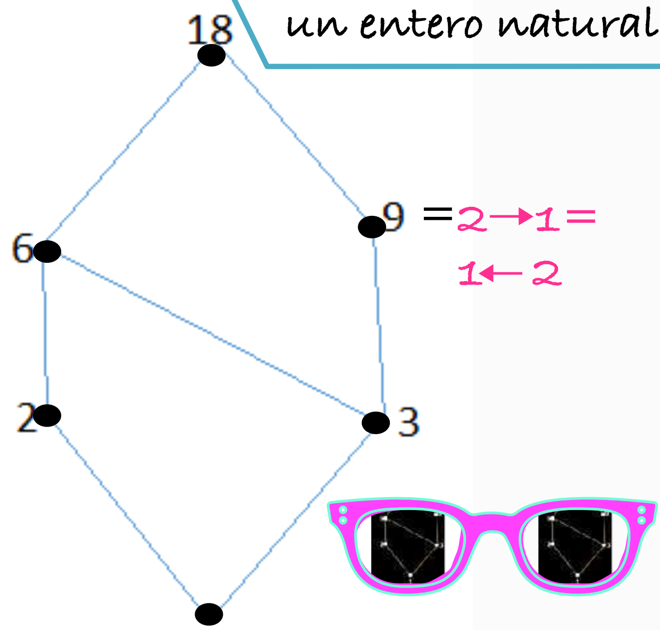


Retículo distributivo (**D60**, d)

D60 = D($2^2{\cdot}3{\cdot}5$)

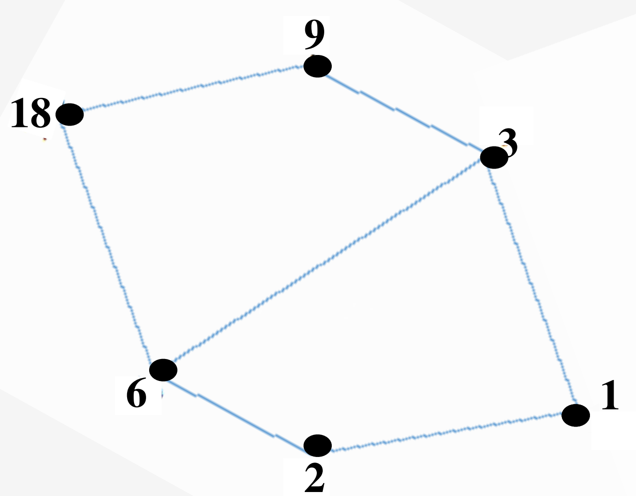
(**3*d*6, 3*d*12, 6*d*30,…, etc**)

EJEMPLO 2 Conjuntos ordenados ($\mathbf{Dn}, \sqsubseteq^w$) asociados a elementos w del retículo ($\mathbf{Dn}, d$) de divisores de un entero natural positivo $\mathbf{n}$: $a \sqsubseteq^w b \Leftrightarrow$ [(“mcd (b,w)” es divisor de “a”) & (“mcm (b,w)” es múltiplo de “a”).



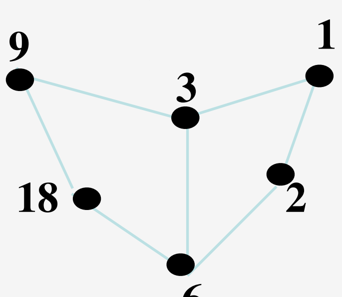
Retículo distributivo (**D18**, d)
D18 = $\mathbf{D}(2{\cdot}3^2)$
(3*d*6, 3*d*9, 2*d*6,…, etc)

“2 complementado: $\mathbf{2^c = 9}$**”**

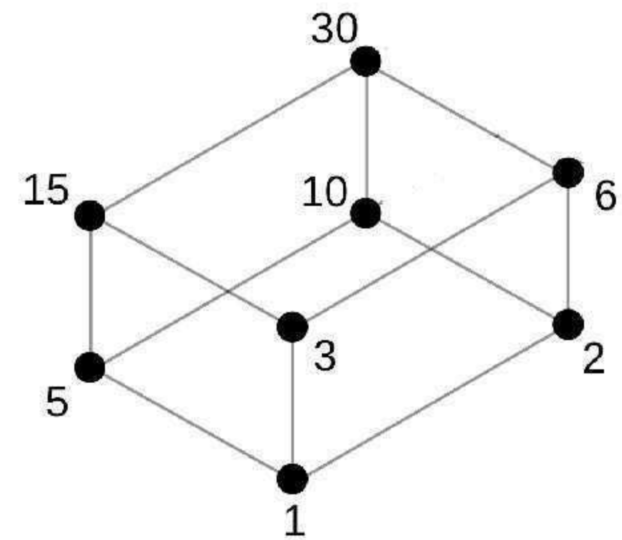


Retículo distributivo (**D18**, $\sqsubseteq^2$)

“6 no complementado**”.**



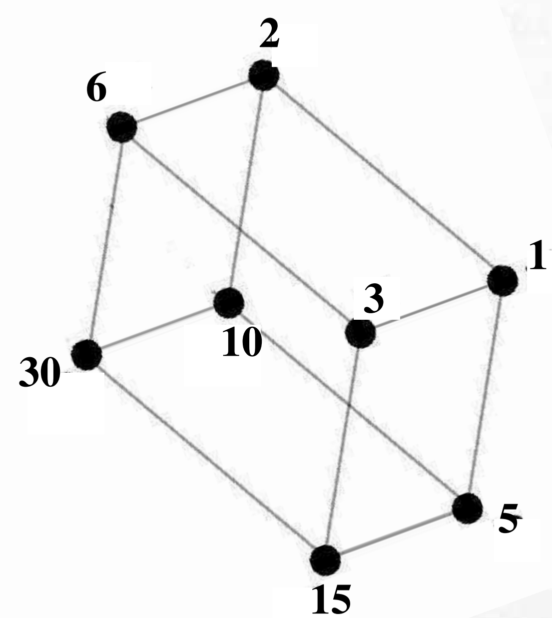
Inf-semiretículo (**D18**, $\sqsubseteq^6$)



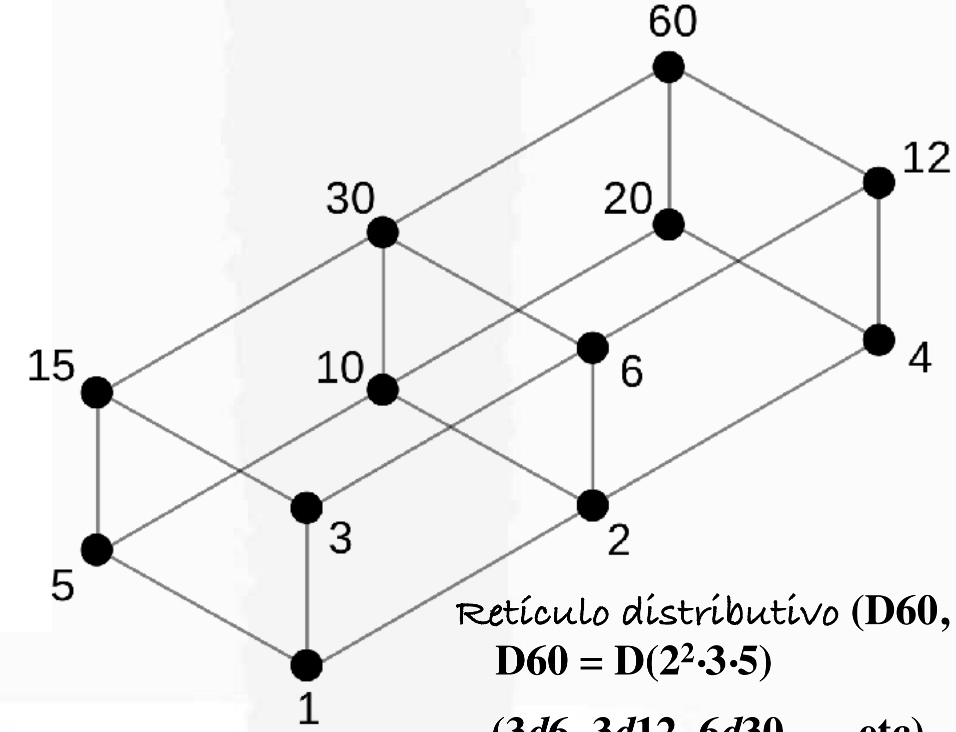
Álgebra de Boole (**D30**, d)
D30 = D(2·3·5)

(3*d*6, 3*d*15, 5*d*15,…, etc)

“15 complementado: $\mathbf{15^c = 2}$**”**



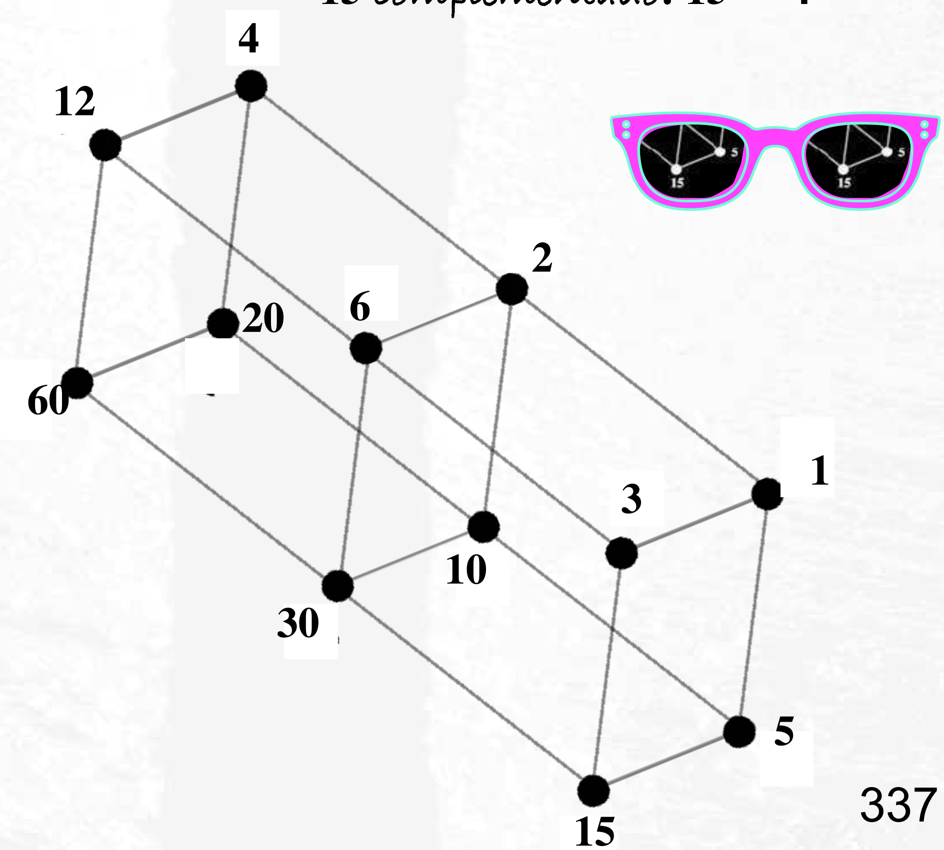
Álgebra de Boole (**D30**, $\sqsubseteq^{15}$)



Retículo distributivo (**D60**, d)
D60 = $\mathbf{D(2^2{\cdot}3{\cdot}5)}$

(3*d*6, 3*d*12, 6*d*30,…, etc)

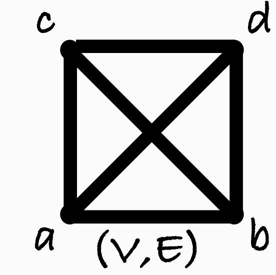
“15 complementado: $\mathbf{15^c = 4}$**”**

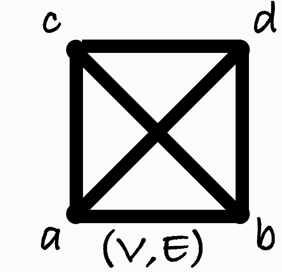


Retículo distributivo (**D60**, $\sqsubseteq^{15}$)

Ejemplo 3

Orden de actividad entre subgrafos de un grafo no dirigido simple completo.

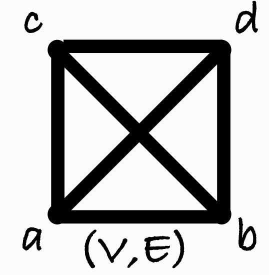

c
d
a
(V,E)
b

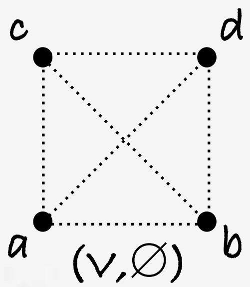


$A \subseteq E, B \subseteq E$:

$(V,A) \leq (V,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

Subgrafos de (*V*,*E*)

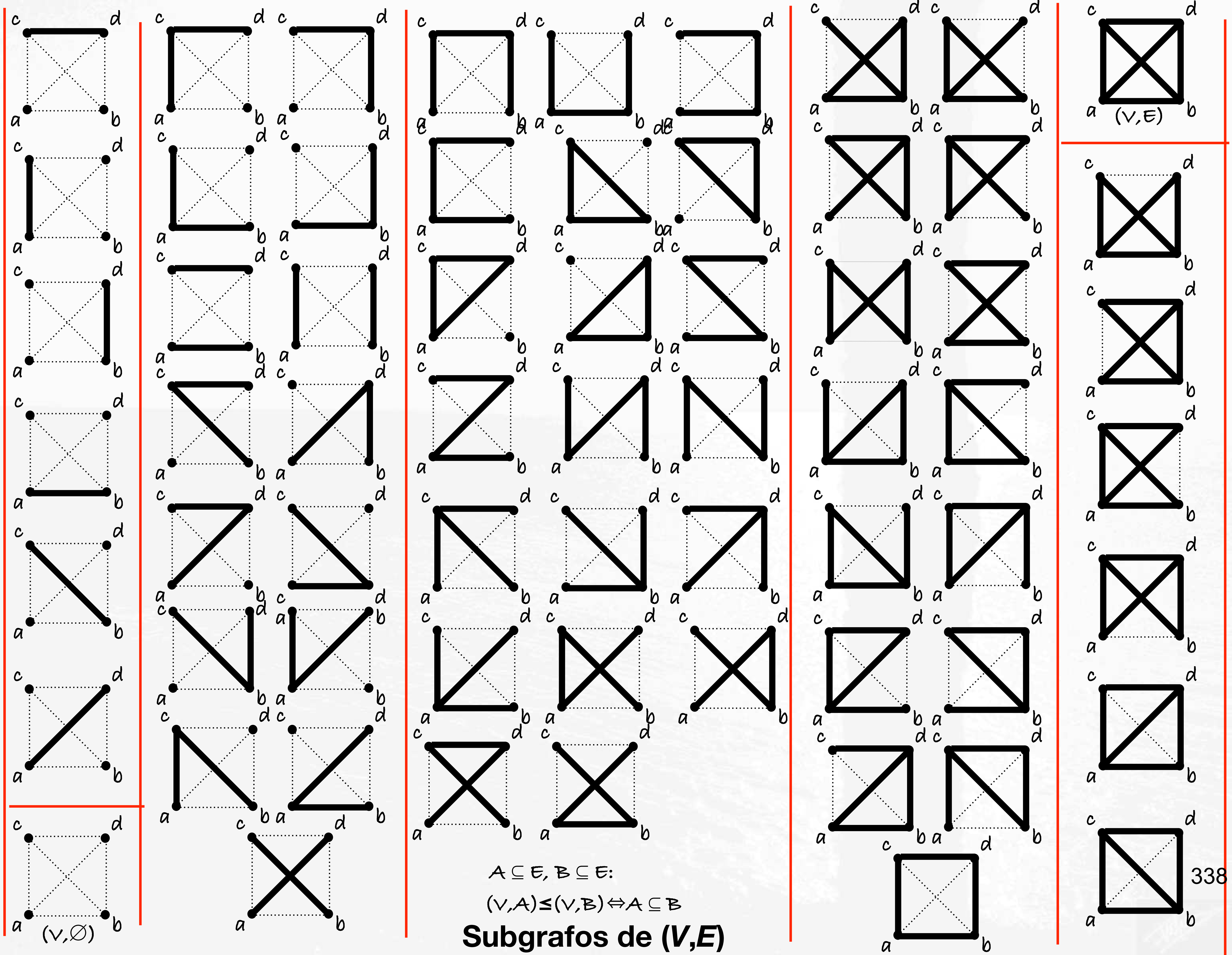




$A \subseteq E,\ B \subseteq E$:

$(V,A) \leq (V,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

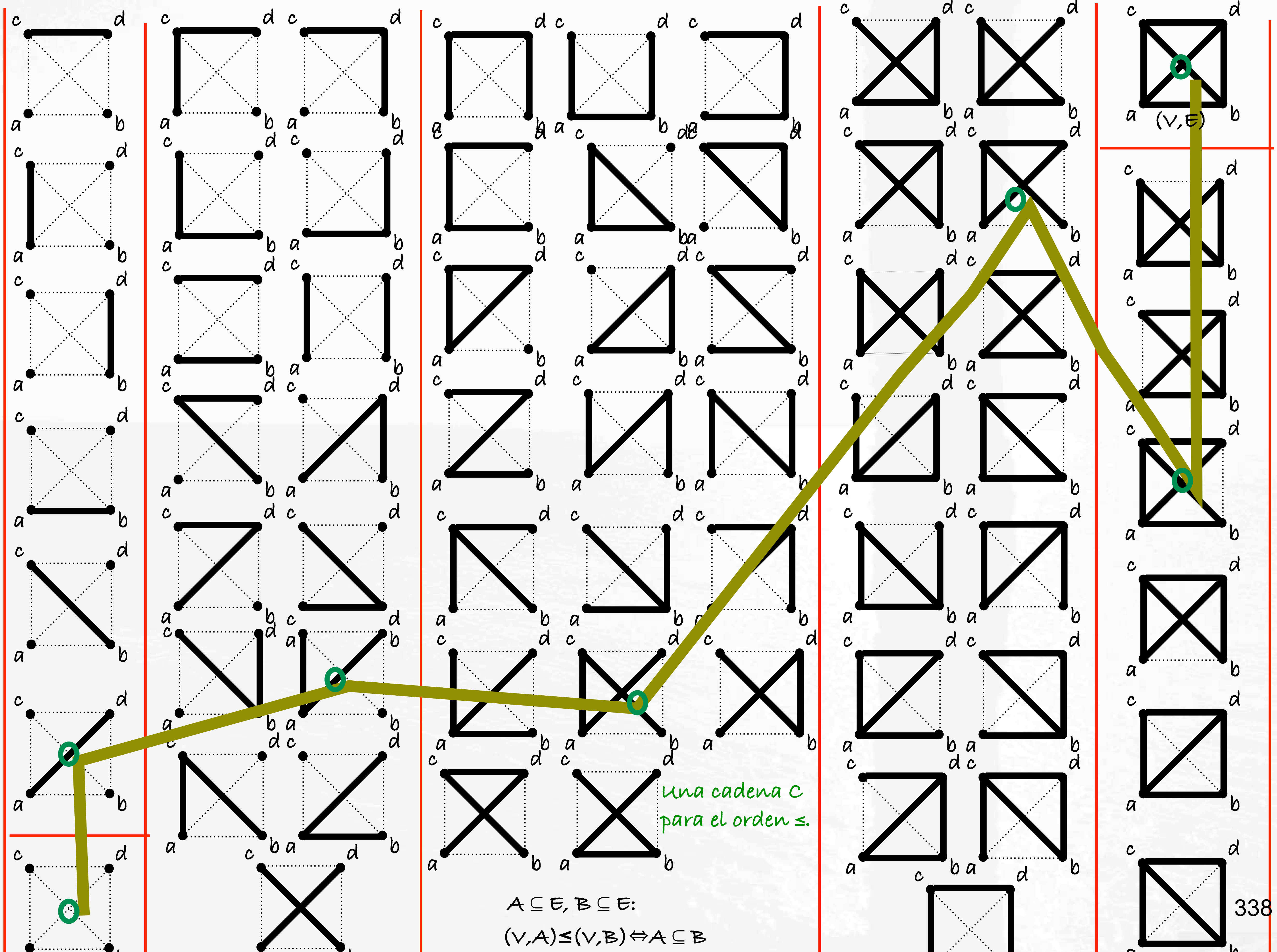
Subgrafos de (*V*,*E*)



$A \subseteq E$, $B \subseteq E$:

$(V,A) \leq (V,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

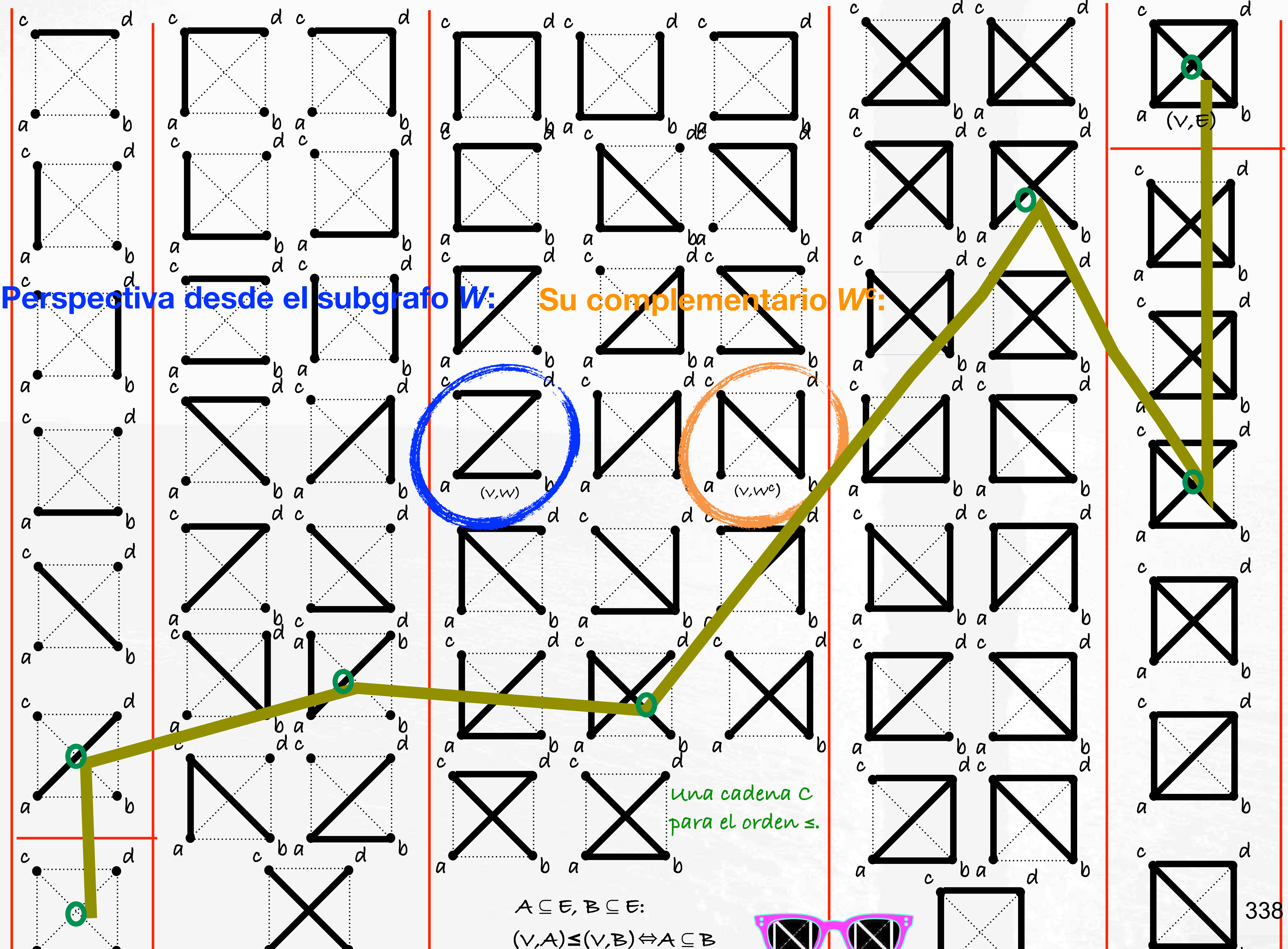
Subgrafos de (*V*,*E*)



Subgrafos de (*V*,*E*)

Perspectiva desde el subgrafo W:

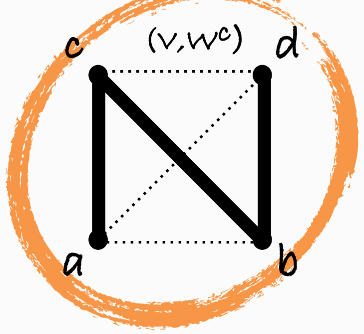
Su complementario W^c:

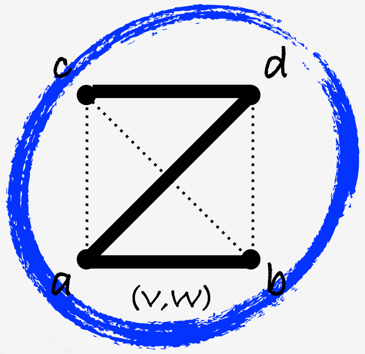


$A \subseteq E$, $B \subseteq E$:

$(V,A) \leq (V,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

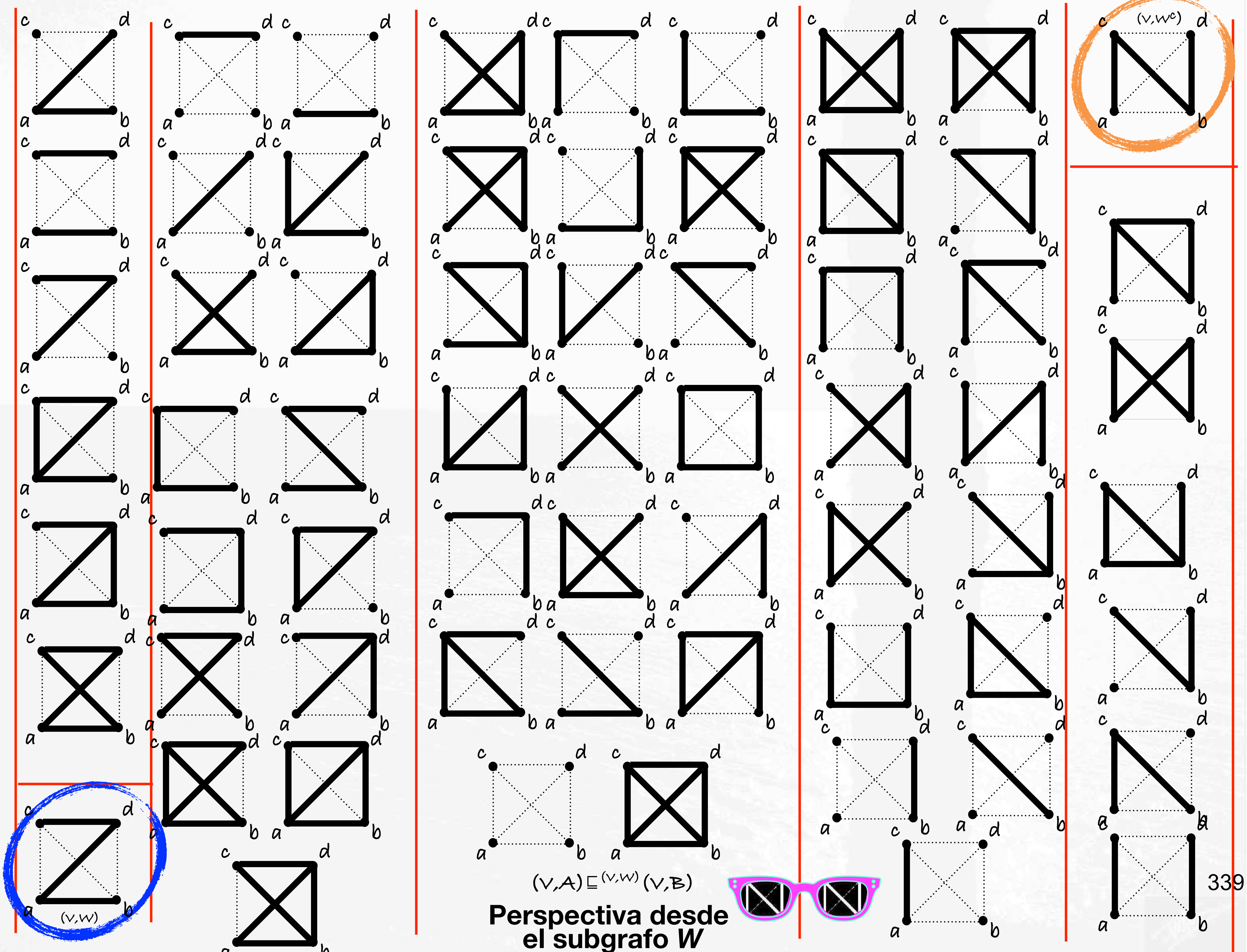
Subgrafos de (*V*,*E*)





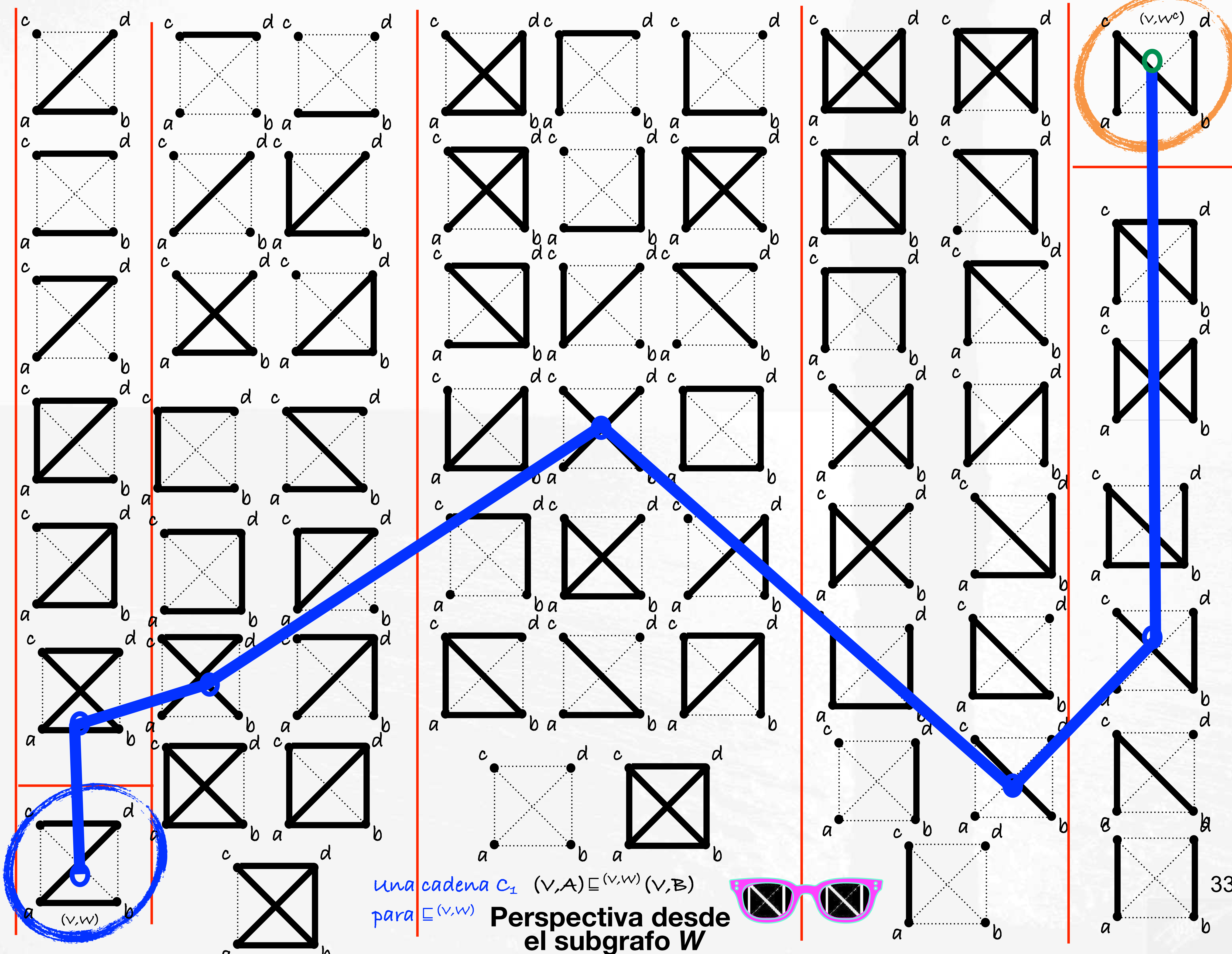
$(V,A) \sqsubseteq^{(V,W)} (V,B)$

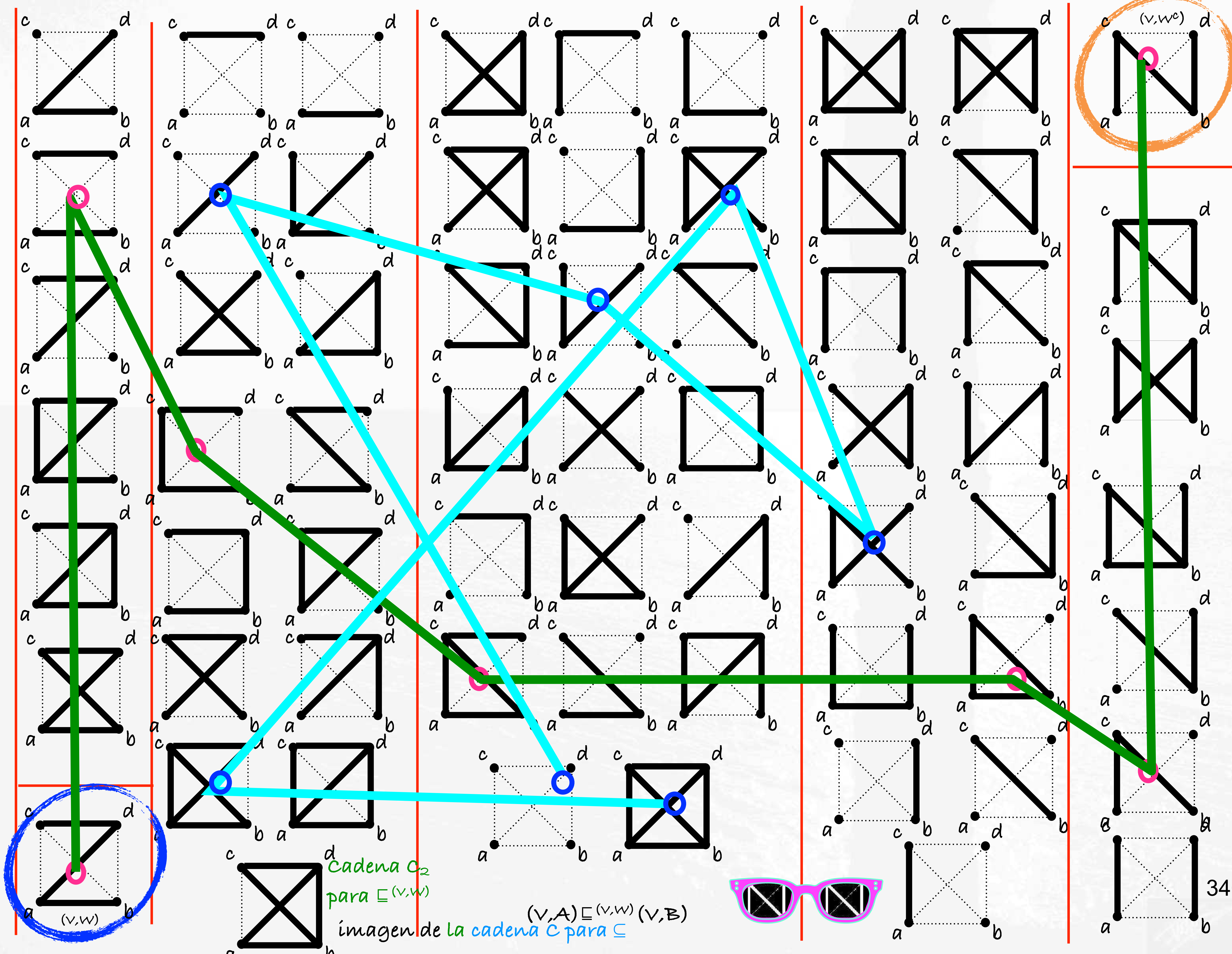
Perspectiva desde el subgrafo *W*

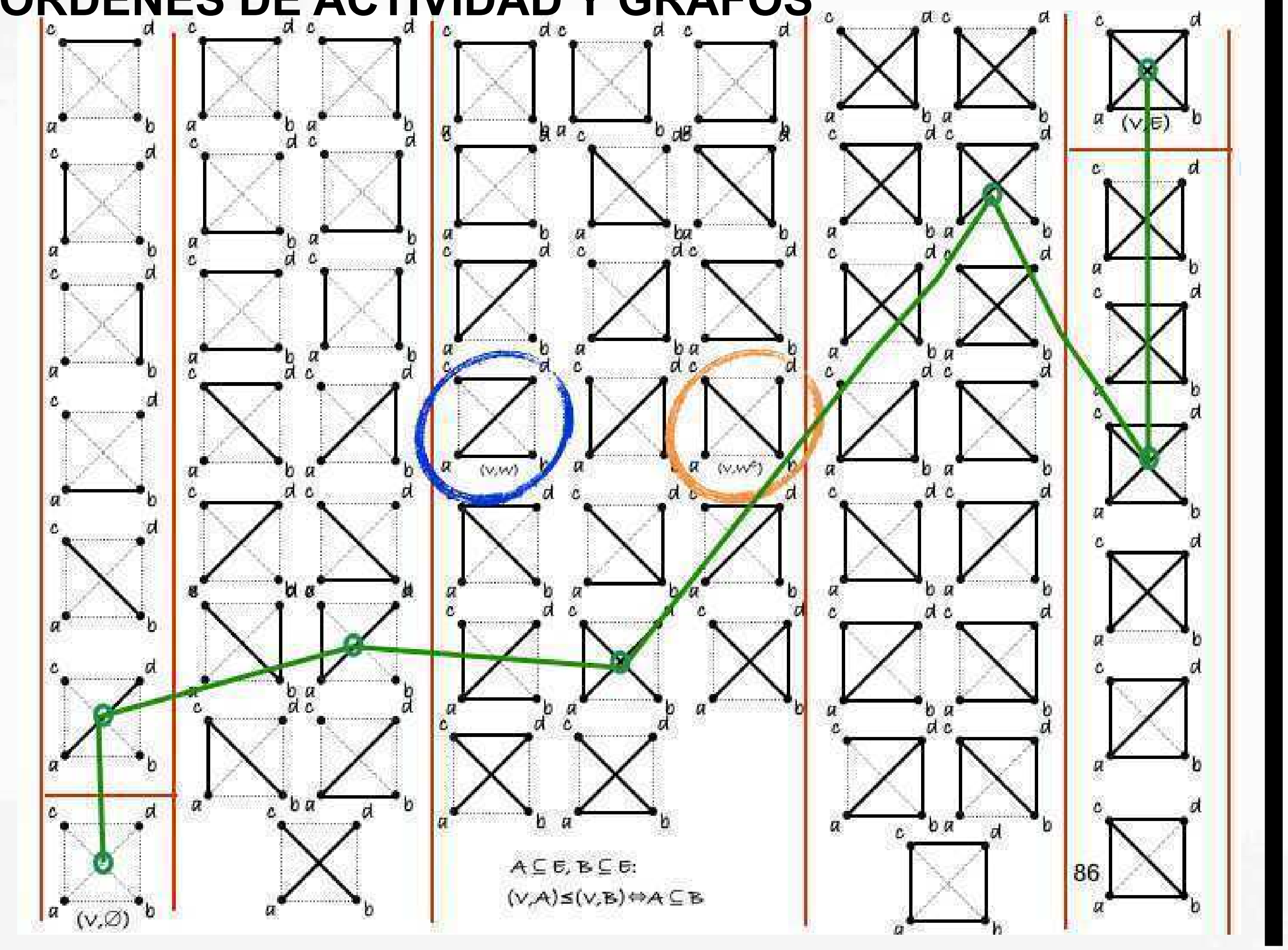


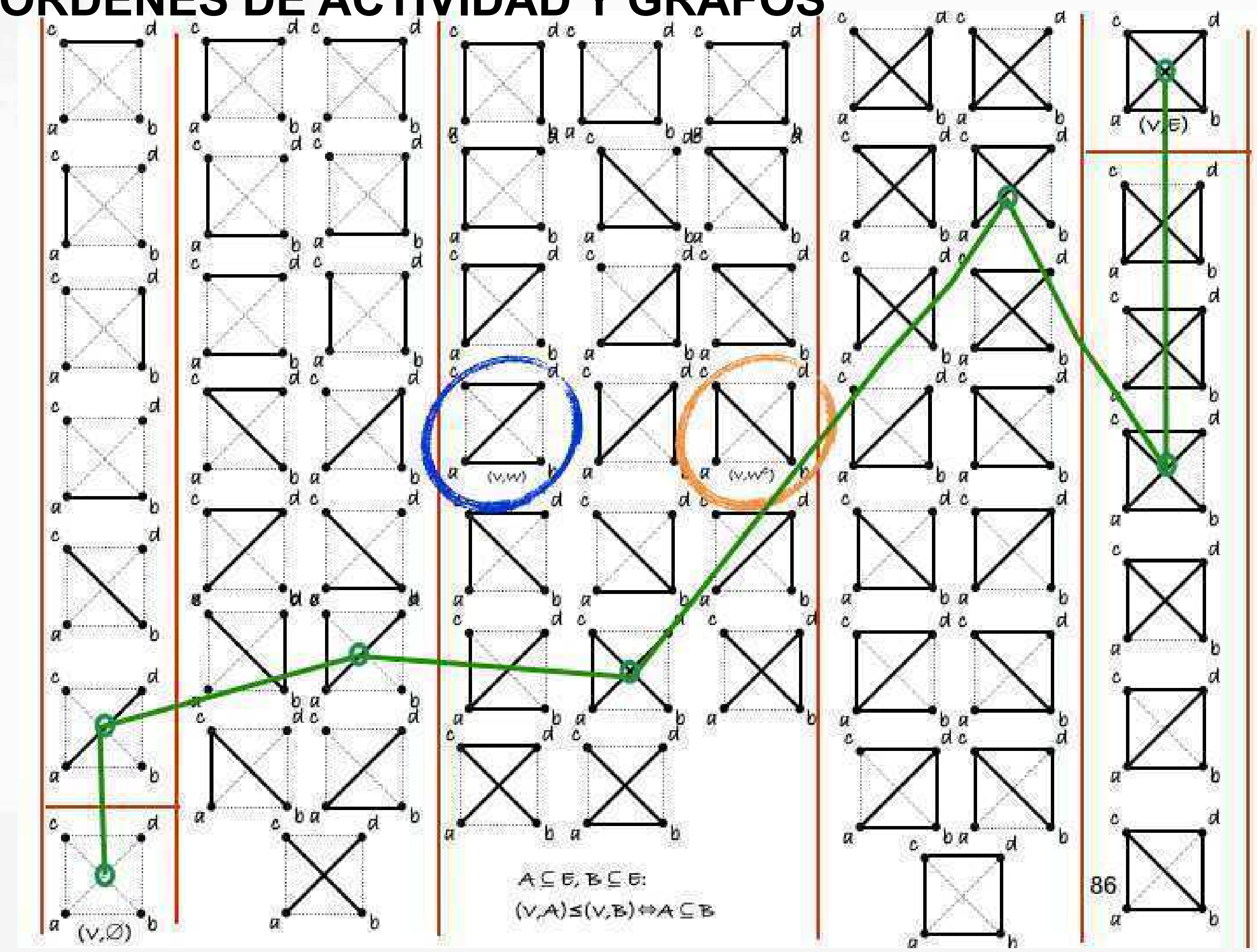
$(V,A) \sqsubseteq^{(V,W)} (V,B)$

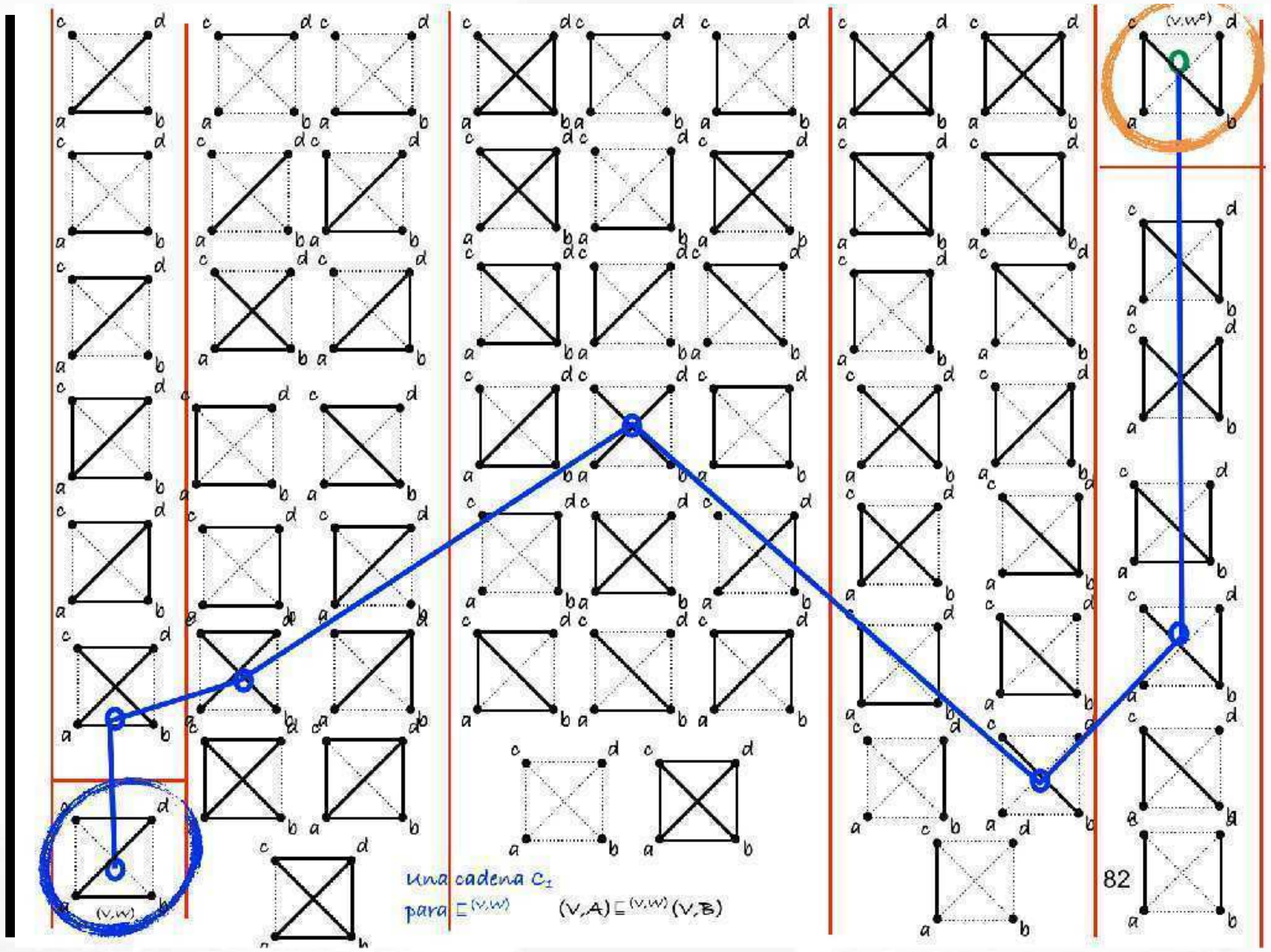
Perspectiva desde el subgrafo *W*

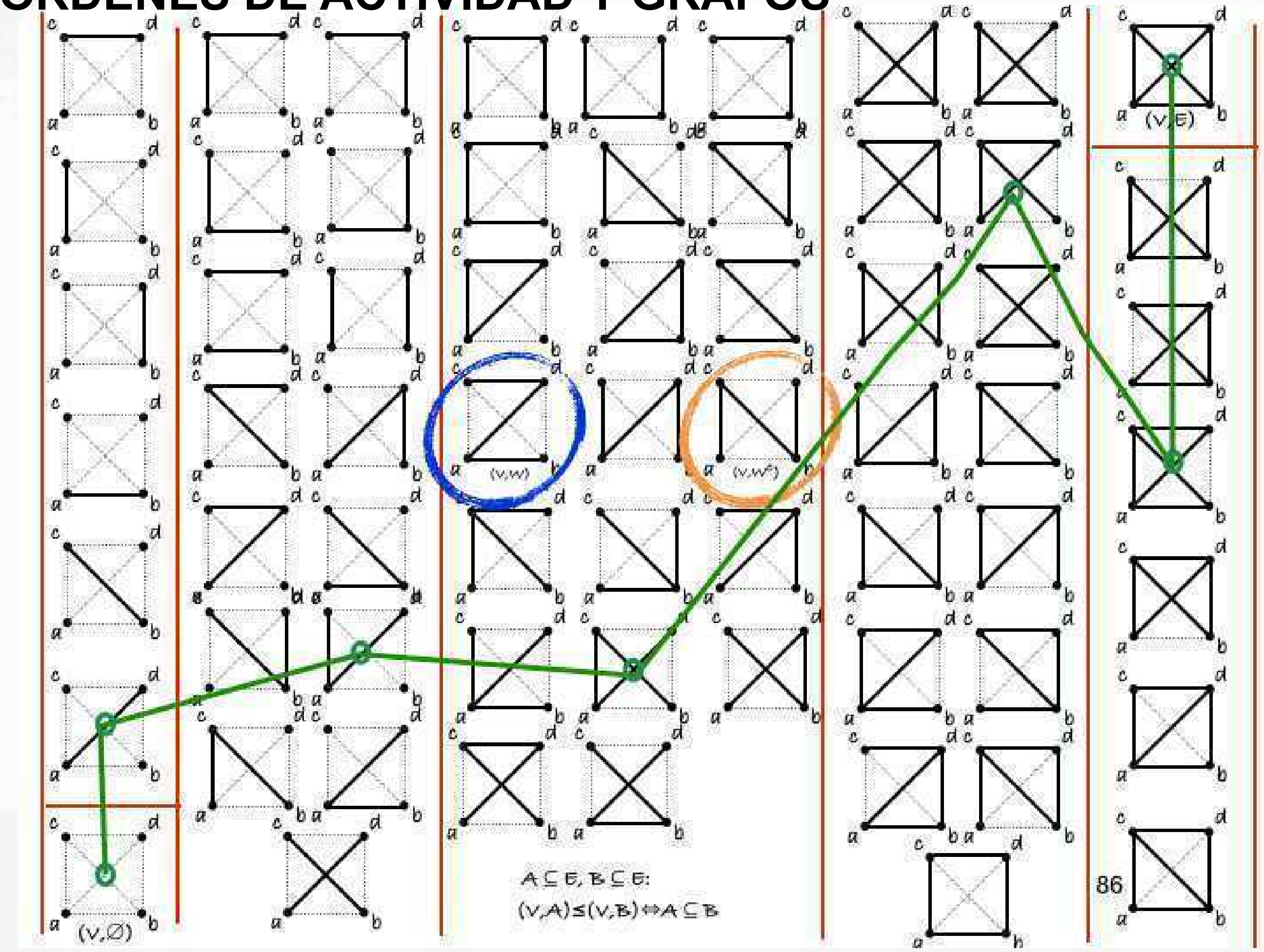

(V,W^c)
(V,W)
una cadena C_1 $(V,A) \sqsubseteq^{(V,W)} (V,B)$
para $\sqsubseteq^{(V,W)}$
Perspectiva desde
el subgrafo *W*

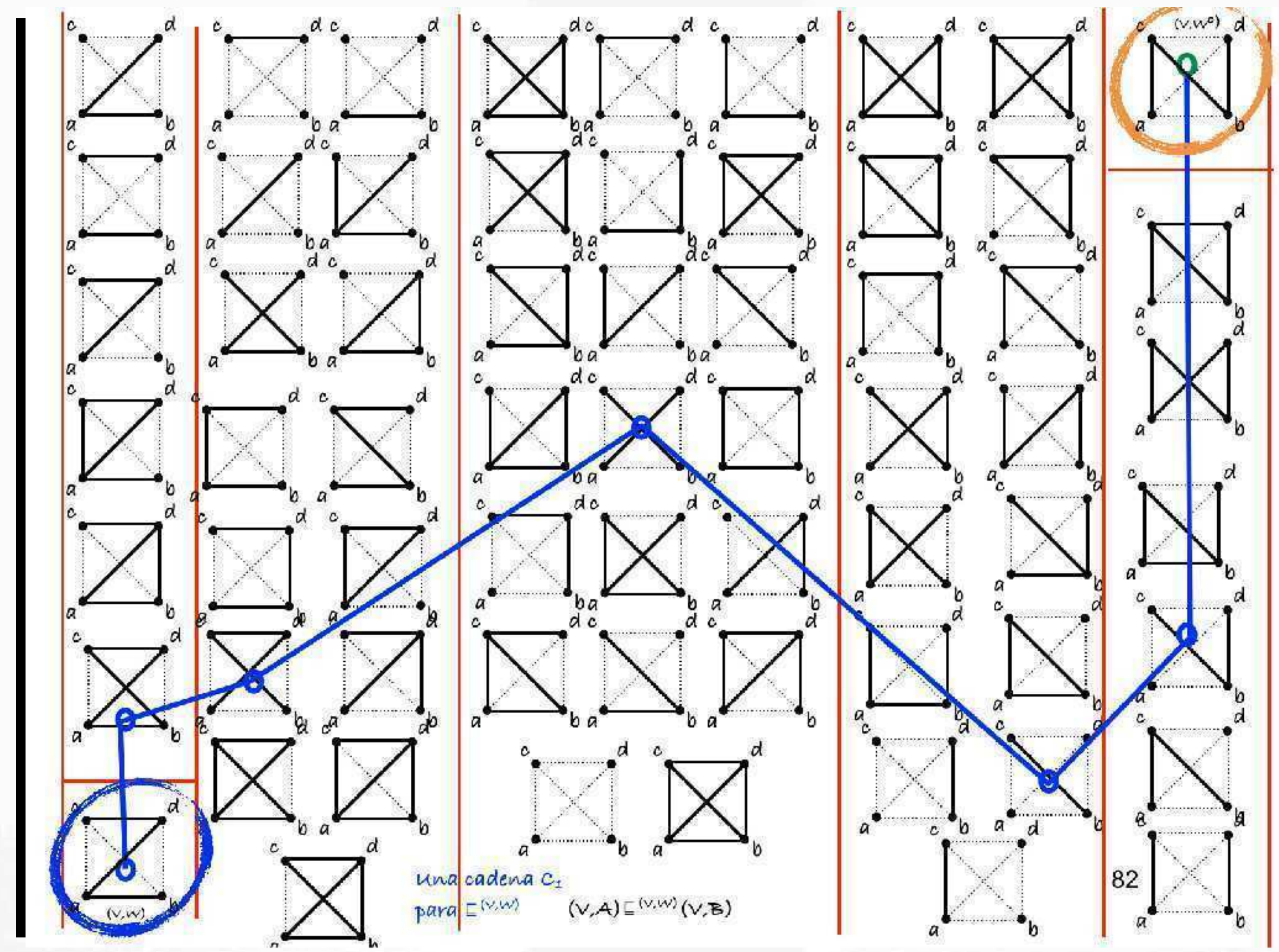

(v,w)
(v,w^c)
cadena C_2
para $\sqsubseteq^{(v,w)}$
$(v,A) \sqsubseteq^{(v,w)} (v,B)$
imagen de la cadena C para ⊆


(V,∅)
(V,W)
(V,W^c)
(V,E)
A ⊆ E, B ⊆ E:
(V,A)≤(V,B)⇔A ⊆ B
86


(V,∅)
(V,W)
(V,W^c)
(V,E)
A ⊆ E, B ⊆ E:
(V,A) ≤ (V,B) ⇔ A ⊆ B
86


(V,W)
(V,W^c)
Una cadena C₁
para ⊑^(V,W)
(V,A) ⊑^(V,W) (V,B)
82

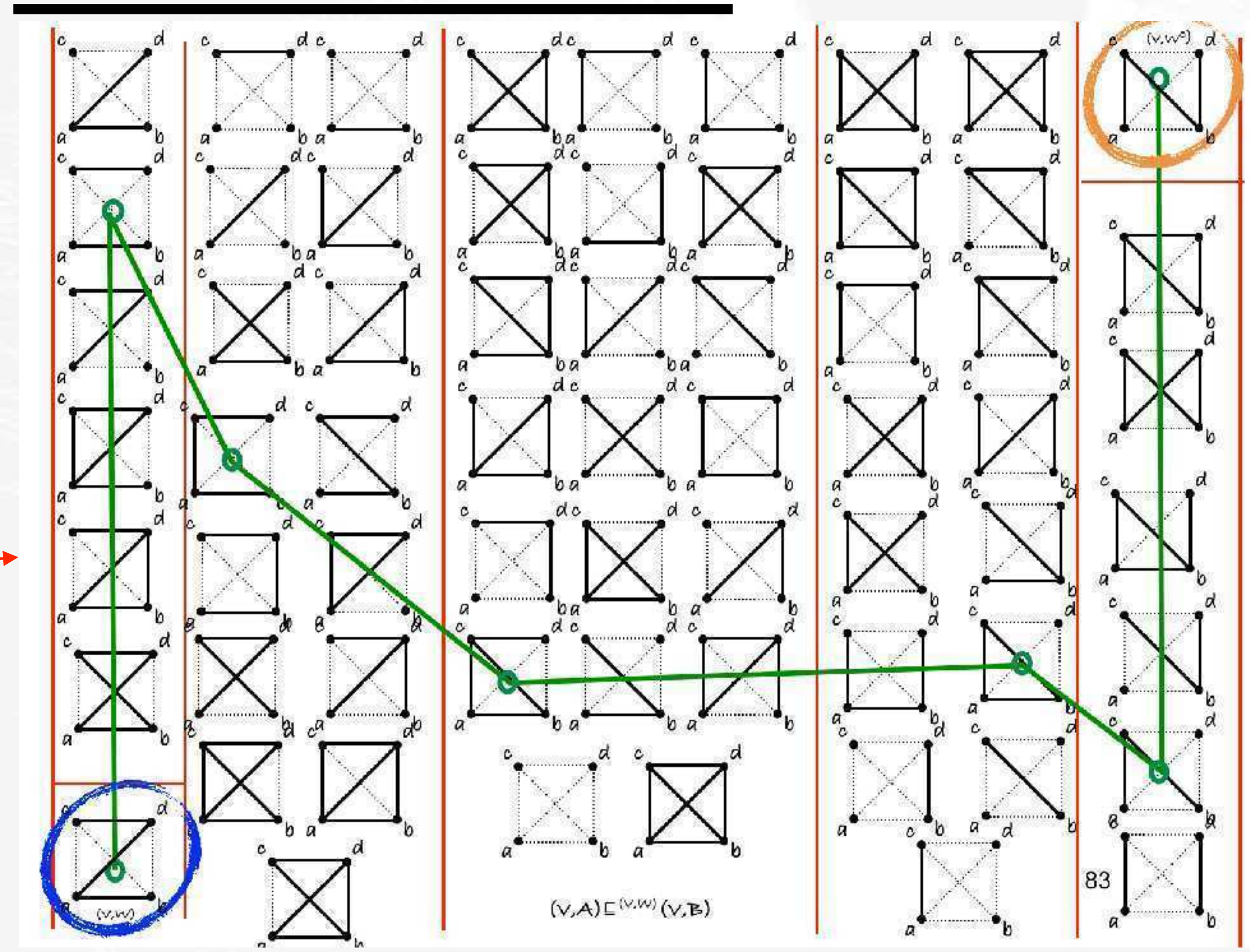




cadena C_2 para $\sqsubseteq^{(V,W)}$, que es imagen mediante el isomorfismo

$(V,A) \longrightarrow (V,A)\,\Delta\,(V,W)$, de la

cadena C para el orden $\subseteq$.



Relación de los órdenes de actividad con pares residuados

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall \alpha \in L$ y $\forall M \subseteq L$: $\alpha \cdot \sup M = \sup(\alpha \cdot M)$ y $\alpha + \inf M = \inf(\alpha + M)$. (*)

(*) Nota. Si $*$ es una ley interna en L y si $x \in L$, $M \subseteq L$, entonces $x*M = \{x*m \ / \ m \in M\} \subseteq L$ si $M \neq \emptyset$ y $x*\emptyset = \emptyset$.

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall\alpha\in L$ y $\forall M\subseteq L$: $\alpha\cdot \sup M=\sup(\alpha\cdot M)$ y $\alpha+\inf M=\inf(\alpha+M)$. (*)

<u>Proposición</u>. Si $':L\to L$ es una negación fuerte en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y es Broweriano, entonces también es dual-Broweriano.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $(L,\leq)$ es Broweriano, $(\alpha\cdot \sup K=\sup(\alpha\cdot K)\ \forall\alpha\in L$ y $\forall K\subseteq L)$.
Sea $M\subseteq L$. Entonces $(\alpha+\inf M)=(\alpha+\inf M)''=(\alpha'\cdot \sup M')'=(\sup(\alpha'\cdot M'))'=\inf(\alpha'\cdot M')'=\inf(\alpha+M)$.∎

(*) <u>Nota</u>. Si $*$ es una ley interna en L y si $x\in L$, $M\subseteq L$, entonces $x*M=\{x*m\ /\ m\in M\}\subseteq L$ si $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

OPERADORES "RESIDUO" ASOCIADOS A LOS OPERADORES ÍNFIMO Y *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$

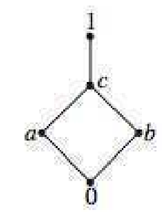
Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall \alpha \in L$ y $\forall M \subseteq L$: $\alpha \cdot \sup M = \sup(\alpha \cdot M)$ y $\alpha + \inf M = \inf(\alpha + M)$. (*)

Proposición. Si $':L \to L$ es una negación fuerte en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y es Broweriano, entonces también es dual-Broweriano.

Sea $\to_{\cdot}$ el residuo de $(\cdot)$

Implicación residual asociada a la operación inf $(\cdot)$ en L:
$x \to_{\cdot} y = \sup[z \,/\, x \cdot z \leq y\}$

Example 3.5 Consider the following example of residuated lattice from Iorgulescu (2008): $\mathcal{I} = \{0, a, b, c, 1\}$, with the bounded lattice structure given by the Hasse diagram below, $\odot = \cdot$ and the implication given by the following table:



$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Iorgulescu A (2008) Algebras of logic as BCK algebras. Editura ASE, Bucharest

Demostración. Supongamos que $(L, \leq)$ es Broweriano, $(\alpha \cdot \sup K = \sup(\alpha \cdot K)\ \forall \alpha \in L$ y $\forall K \subseteq L)$.

Sea $M \subseteq L$. Entonces $(\alpha + \inf M) = (\alpha + \inf M)'' = (\alpha' \cdot \sup M')' = (\sup(\alpha' \cdot M'))' = \inf(\alpha' \cdot M')' = \inf(\alpha + M)$. ∎

(*) Nota. Si $*$ es una ley interna en L y si $x \in L$, $M \subseteq L$, entonces $x * M = \{x * m \,/\, m \in M\} \subseteq L$ si $M \neq \emptyset$ y $x * \emptyset = \emptyset$.

OPERADORES "RESIDUO" ASOCIADOS A LOS OPERADORES ÍNFIMO Y *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall \alpha \in L$ y $\forall M \subseteq L$: $\alpha \cdot \sup M = \sup(\alpha \cdot M)$ y $\alpha + \inf M = \inf(\alpha + M)$. (*)

Sea $\xrightarrow{\cdot}$ el residuo de $(\cdot)$

Implicación residual asociada a la operación inf $(\cdot)$ en L:
$x \xrightarrow{\cdot} y = \sup[z \,/\, x \cdot z \leq y\}$

Example 3.5 Consider the following example of residuated lattice from Iorgulescu (2008): $I = \{0, a, b, c, 1\}$, with the bounded lattice structure given by the Hasse diagram below, $\odot = \cdot$ and the implication given by the following table:

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Iorgulescu A (2008) Algebras of logic as BCK algebras. Editura ASE, Bucharest

Proposición. Si $':L \to L$ es una negación fuerte en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y es Broweriano, entonces también es dual-Broweriano.

Demostración. Supongamos que $(L, \leq)$ es Broweriano, $(\alpha \cdot \sup K = \sup(\alpha \cdot K)\ \forall \alpha \in L$ y $\forall K \subseteq L)$.
Sea $M \subseteq L$. Entonces $(\alpha + \inf M) = (\alpha + \inf M)'' = (\alpha' \cdot \sup M')' = (\sup(\alpha' \cdot M'))' = \inf(\alpha' \cdot M')' = \inf(\alpha + M)$. ∎

Definición. Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo Broweriano con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $\omega \in L$ con complemento ω^c tal que $\omega^c = \omega'$. Definimos el operador $\rightsquigarrow_\omega : L X L \to L$ como la "w-extensión" del residuo $\xrightarrow{\cdot} : L X L \to L$ de el operador ínfimo $(\cdot)$ en L:

$$(x \rightsquigarrow_\omega y) = [x(\hat{\xrightarrow{\cdot}})_\omega y] = [(x \triangle \omega) \xrightarrow{\cdot} (y \triangle \omega)] \triangle \omega \quad \forall (x,y) \in L X L$$

(*) Nota. Si $*$ es una ley interna en L y si $x \in L$, $M \subseteq L$, entonces $x * M = \{x * m \,/\, m \in M\} \subseteq L$ si $M \neq \emptyset$ y $x * \emptyset = \emptyset$.

OPERADORES "RESIDUO" ASOCIADOS A LOS OPERADORES ÍNFIMO Y *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$

Sea $\rightarrow\!.$ el residuo de $(\cdot)$

Implicación residual asociada a la operación inf $(\cdot)$ en L:
$x \rightarrow\!. \, y = \sup[z \,/\, x\cdot z \leq y\}$

Example 3.5 Consider the following example of residuated lattice from Iorgulescu (2008): $I = \{0, a, b, c, 1\}$, with the bounded lattice structure given by the Hasse diagram below, $\odot =$. and the implication given by the following table:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Iorgulescu A (2008) Algebras of logic as BCK algebras. Editura ASE, Bucharest

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall\alpha\in L$ y $\forall M\subseteq L$: $\alpha\cdot\sup M=\sup(\alpha\cdot M)$ y $\alpha+\inf M=\inf(\alpha+M)$. (*)

<u>Proposición</u>. Si $':L\rightarrow L$ es una negación fuerte en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y es Broweriano, entonces también es dual-Broweriano.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $(L,\leq)$ es Broweriano, $(\alpha\cdot\sup K=\sup(\alpha\cdot K)\ \forall\alpha\in L$ y $\forall K\subseteq L)$.
Sea $M\subseteq L$. Entonces $(\alpha+\inf M)=(\alpha+\inf M)''=(\alpha'\cdot\sup M')'=(\sup(\alpha'\cdot M'))'=\inf(\alpha'\cdot M')'=\inf(\alpha+M)$.∎

<u>Definición</u>. Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo Broweriano con una negación fuerte $':L\rightarrow L$. Sea $\omega\in L$ con complemento ω^c tal que $\omega^c=\omega'$. Definimos el operador $\rightsquigarrow_{\omega}: L\times L\rightarrow L$ como la "w-extensión" del residuo $\rightarrow\!.: L\times L\rightarrow L$ de el operador ínfimo $(\cdot)$ en L:

$$(x \rightsquigarrow_{\omega} y)=[x(\hat{\rightarrow}.)_{\omega}\, y]=[(x\triangle\omega)\rightarrow\!.(y\triangle\omega)]\triangle\omega \quad \forall(x,y)\in L\times L$$

<u>Proposición</u>. El operador $(\rightsquigarrow_{\omega})$ es la implicación residuada del correspondiente ínfimo $\sqcap^{\omega}$ del retículo $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \sqcup^{\omega}, \omega, \omega^c)$.

(*) <u>Nota</u>. Si $*$ es una ley interna en L y si $x\in L$, $M\subseteq L$, entonces $x*M=\{x*m \,/\, m\in M\}\subseteq L$ si $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

OPERADORES "RESIDUO" ASOCIADOS A LOS OPERADORES ÍNFIMO Y *W*-ÍNFIMO $\sqcap^{\omega}$

Sea $\rightarrow.$ el residuo de $(\cdot)$

Implicación residual asociada a la operación inf $(\cdot)$ en L:
$x \rightarrow. y = \sup[z \,/\, x\cdot z \leq y\,\}$

Example 3.5 Consider the following example of residuated lattice from Iorgulescu (2008): $T = \{0, a, b, c, 1\}$, with the bounded lattice structure given by the Hasse diagram below, $\odot =$ and the implication given by the following table:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Iorgulescu A (2008) Algebras of logic as BCK algebras. Editura ASE, Bucharest

Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo completo Broweriano y dual-Broweriano, (es decir tal que, $\forall\alpha\in L$ y $\forall M\subseteq L$: $\alpha\cdot\sup M=\sup(\alpha\cdot M)$ y $\alpha+\inf M=\inf(\alpha+M)$. (*)

<u>Proposición</u>. Si $':L\rightarrow L$ es una negación fuerte en $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ y es Broweriano, entonces también es dual-Broweriano.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $(L,\leq)$ es Broweriano, ($\alpha\cdot\sup K=\sup(\alpha\cdot K)$ $\forall\alpha\in L$ y $\forall K\subseteq L$).
Sea $M\subseteq L$. Entonces $(\alpha+\inf M)=(\alpha+\inf M)''=(\alpha'\cdot\sup M')'=(\sup(\alpha'\cdot M'))'=\inf(\alpha'\cdot M')'=\inf(\alpha+M)$.∎

<u>Definición</u>. Sea $(L, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ un retículo Broweriano con una negación fuerte $':L\rightarrow L$. Sea $\omega\in L$ con complemento ω^c tal que $\omega^c=\omega'$. Definimos el operador $\rightsquigarrow_{\omega}: L\text{X}L\rightarrow L$ como la "w-extensión" del residuo $\rightarrow. : L\text{X}L\rightarrow L$ de el operador ínfimo $(\cdot)$ en L:

$$(x \rightsquigarrow_{\omega} y)=[x(\hat{\rightarrow}.)_{\omega}y]=[(x\triangle\omega)\rightarrow.(y\triangle\omega)]\triangle\omega \quad \forall(x,y)\in L\text{X}L$$

<u>Proposición</u>. El operador $(\rightsquigarrow_{\omega})$ es la implicación residuada del correspondiente ínfimo $\sqcap^{\omega}$ del retículo $(L, \sqsubseteq^{\omega}, \sqcap^{\omega}, \sqcup^{\omega}, \omega, \omega^c)$.

<u>Demostración</u>. Se deduce de la siguiente cadena de equivalencias:

$[(x\rightsquigarrow_{\omega}y)\sqsubseteq^{\omega}k]\Leftrightarrow[(((x\triangle\omega)\rightarrow.(y\triangle\omega))\triangle\omega)\sqsubseteq^{\omega}k]\Leftrightarrow[((x\triangle\omega)\rightarrow.(y\triangle\omega))\triangle\omega\triangle\omega\leq(k\triangle\omega)]\Leftrightarrow$

$[((x\triangle\omega)\rightarrow.(y\triangle\omega))\leq(k\triangle\omega)]\Leftrightarrow[(x\triangle\omega)\cdot(k\triangle\omega)\leq(y\triangle\omega)]\Leftrightarrow[((x\sqcap^{\omega}k)\triangle\omega)\leq(y\triangle\omega)]\Leftrightarrow$

$[(x\sqcap^{\omega}k)\sqsubseteq^{\omega}y]$, que demuestra que el par $(\sqcap^{\omega}, \rightsquigarrow_{\omega})$ es residuado en $(L, \sqsubseteq^{\omega})$.∎

(*) <u>Nota</u>. Si $*$ es una ley interna en L y si $x\in L$, $M\subseteq L$, entonces $x*M=\{x*m \,/\, m\in M\}\subseteq L$ si $M\neq\emptyset$ y $x*\emptyset=\emptyset$.

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica △", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia △ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

0. Preliminares: Negaciones en retículos, Diferencia Simétrica, Subconjuntos Borrosos. Uninormas, nulnormas, Morfología Matemática.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A)\&(A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden, que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g\colon E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, … y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,…), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,…).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

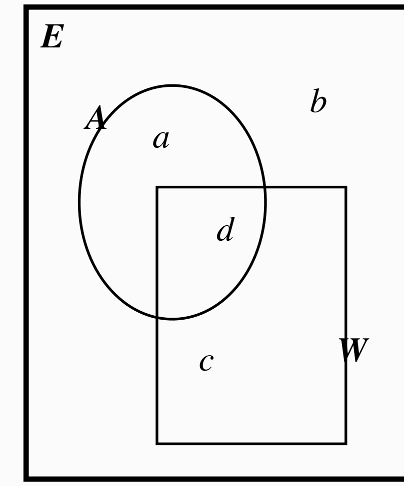
5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

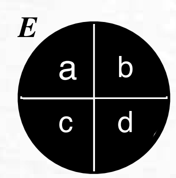
Conclusiones y algunas cuestiones

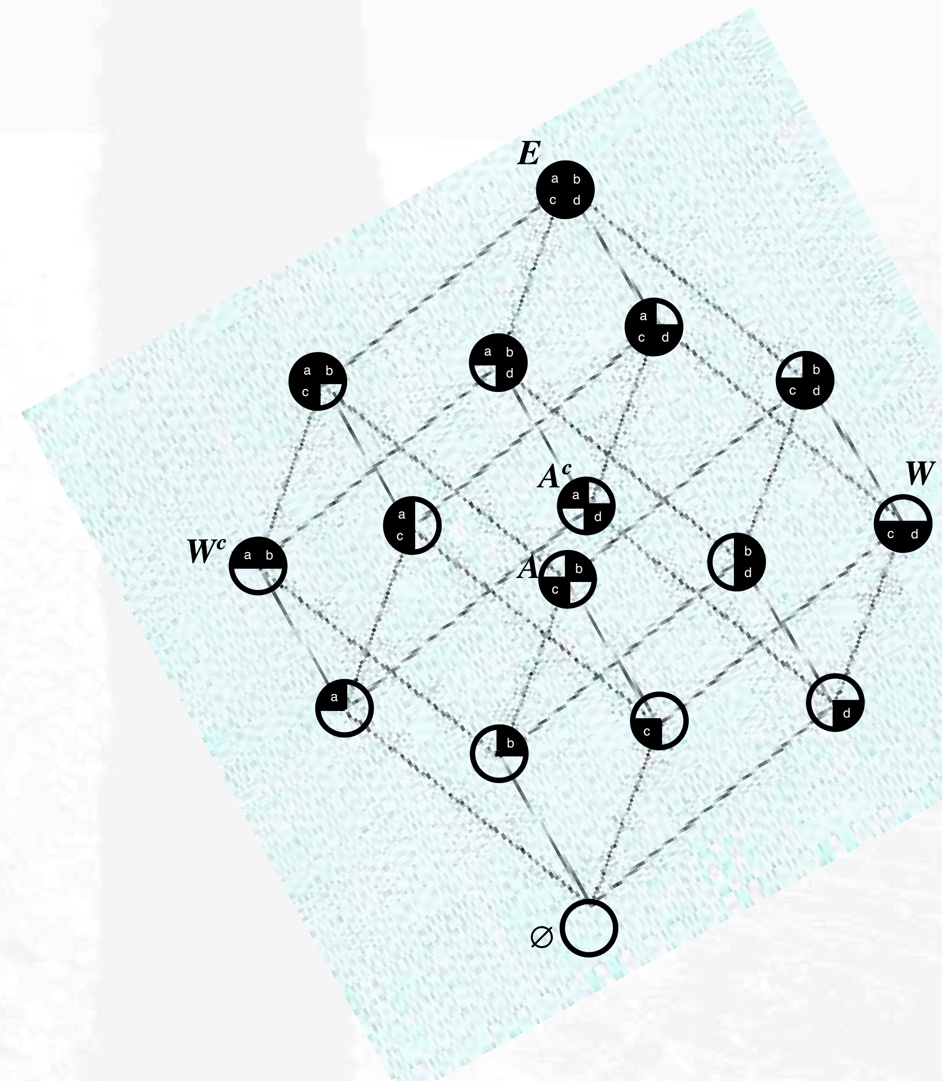
Ejemplo: w-topologías sobre referenciales finitos asociadas al orden $\sqsubseteq^{w}$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

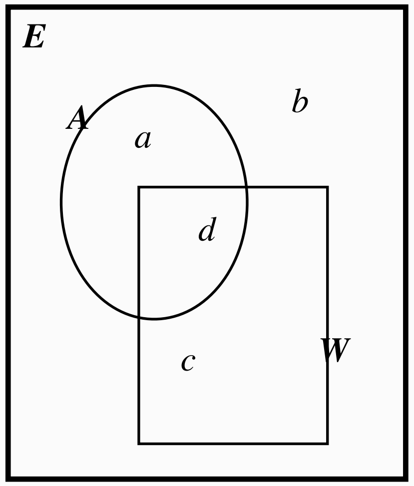






W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

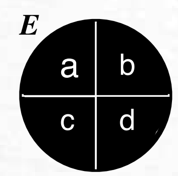
Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^{c})$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

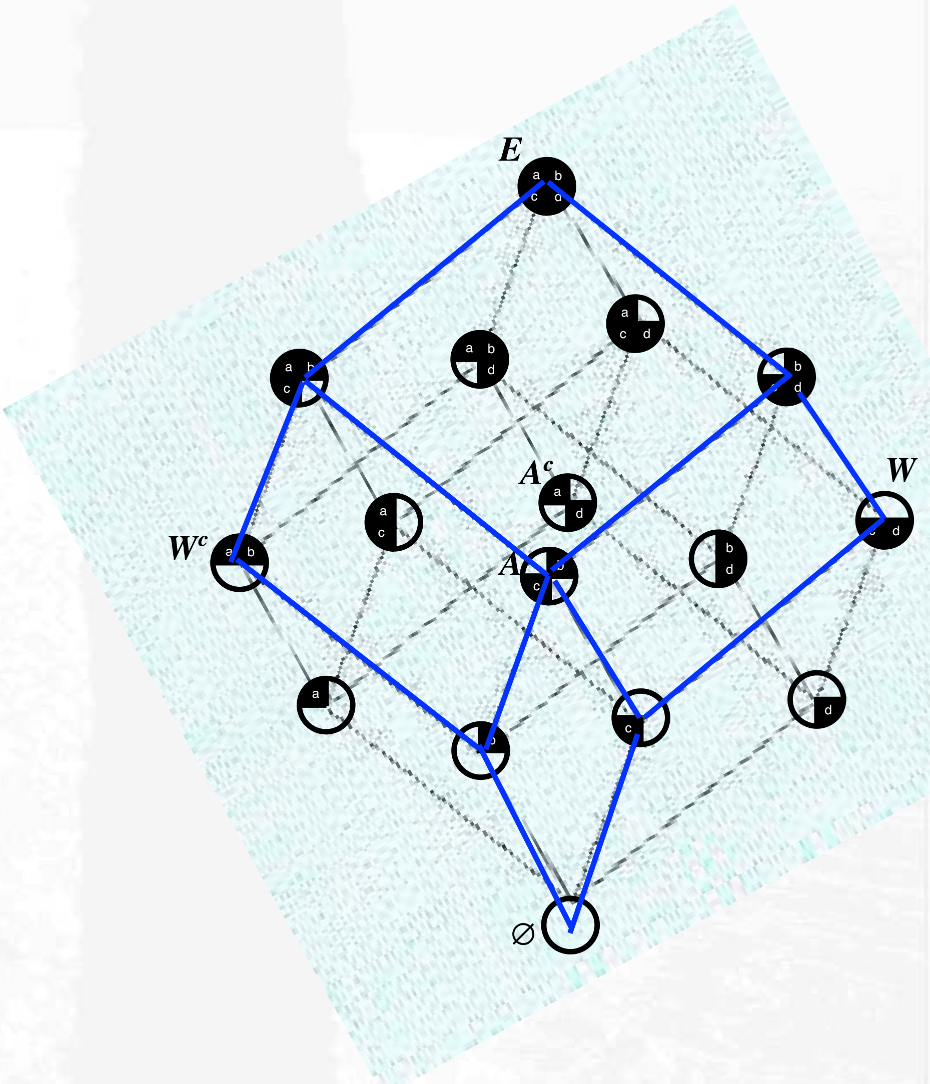


Sea $\mathfrak{I} \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\} \subseteq \mathfrak{I}$ y cerrada para la unión e intersección: $(A, B) \in \mathfrak{I}^2 \Longrightarrow (A \cap B \in \mathfrak{I}) \& (A \cup B \in \mathfrak{I})$,

(es decir, en este caso, $(\mathfrak{I}, \subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E), \subseteq)$).

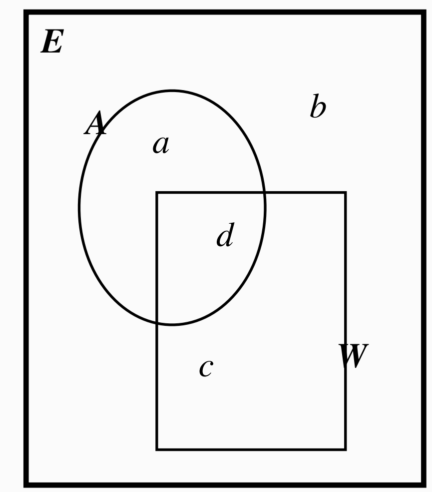




W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \bigcap, \bigcup, \varnothing, E), {}^{c})$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{ \varnothing, A, W, W^c, A \cap W, A \cap W^c, A \cup W, A \cup W^c, E \}$

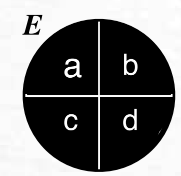


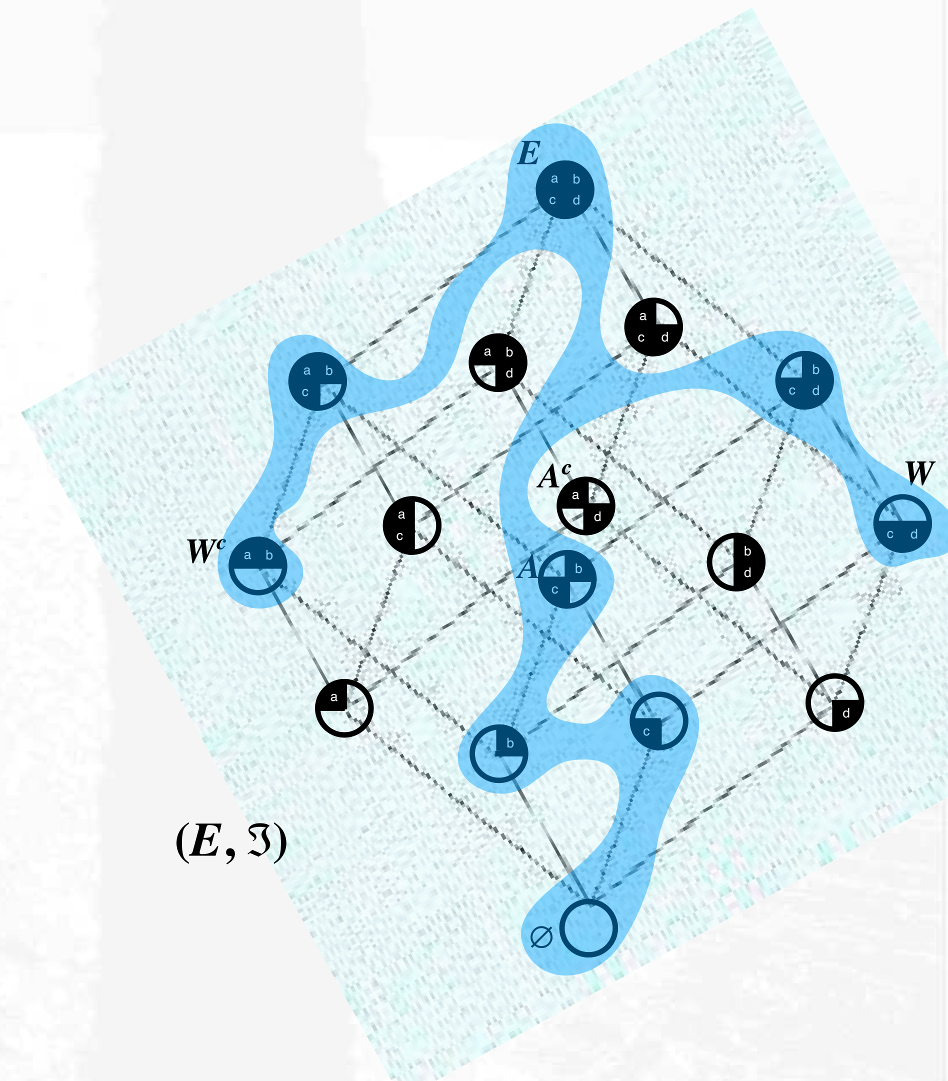
Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\} \subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A, B) \in \Im^2 \Longrightarrow (A \bigcap B \in \Im) \& (A \bigcup B \in \Im)$,

(es decir, en este caso, $(\Im, \subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E), \subseteq)$).

Sea $(E, \Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\bigcap$ y $\bigcup$.



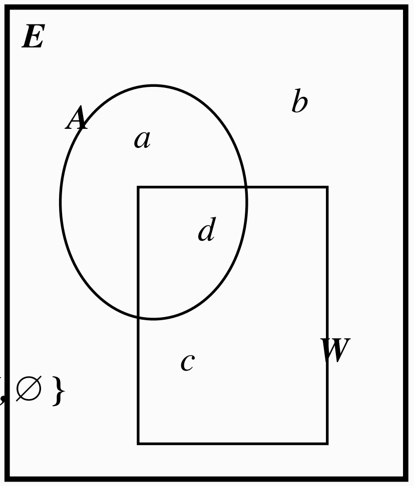


$(E, \Im)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E),{}^{c})$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im=\{\varnothing,A,W,W^c,A\cap W,A\cap W^c,A\cup W,A\cup W^c,E\}$



Sea $\Im\subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

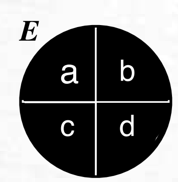
$\{\varnothing,E\}\subseteq\Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A,B)\in\Im^2\Longrightarrow(A\cap B\in\Im)\&(A\cup B\in\Im)$,

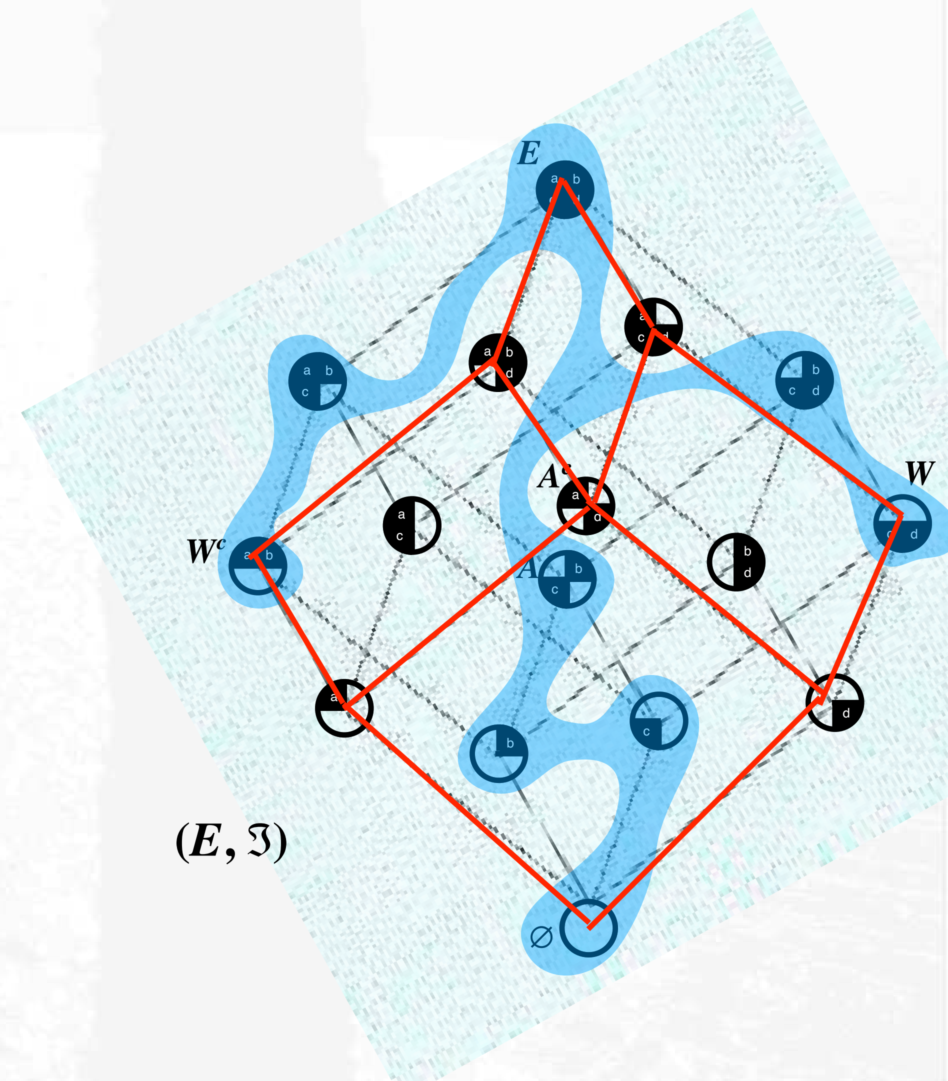
(es decir, en este caso, $(\Im,\subseteq)$ es un $\{\varnothing,E\}$-subretículo del retículo $(P(E),\subseteq)$).

Sea $(E,\Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^*=\{A^c\,/A\in\Im\}$.

$\Im^*=\{E,A^c,W^c,W,A^c\cup W^c,A^c\cup W,A^c\cap W^c,A^c\cap W,\varnothing\}$





$(E,\Im)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{\varnothing, A, W, W^c, A\cap W, A\cap W^c, A\cup W, A\cup W^c, E\}$

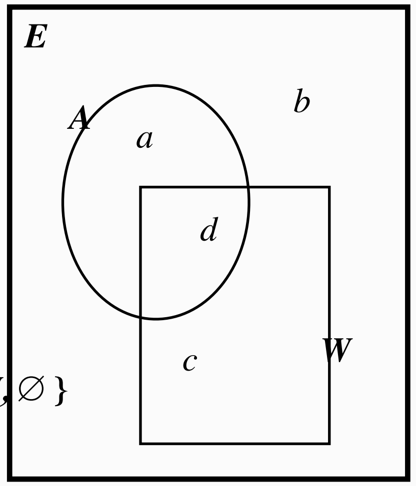
Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\} \subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A, B) \in \Im^2 \Longrightarrow (A\cap B \in \Im) \& (A \cup B \in \Im)$,

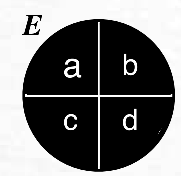
(es decir, en este caso, $(\Im, \subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E), \subseteq)$).

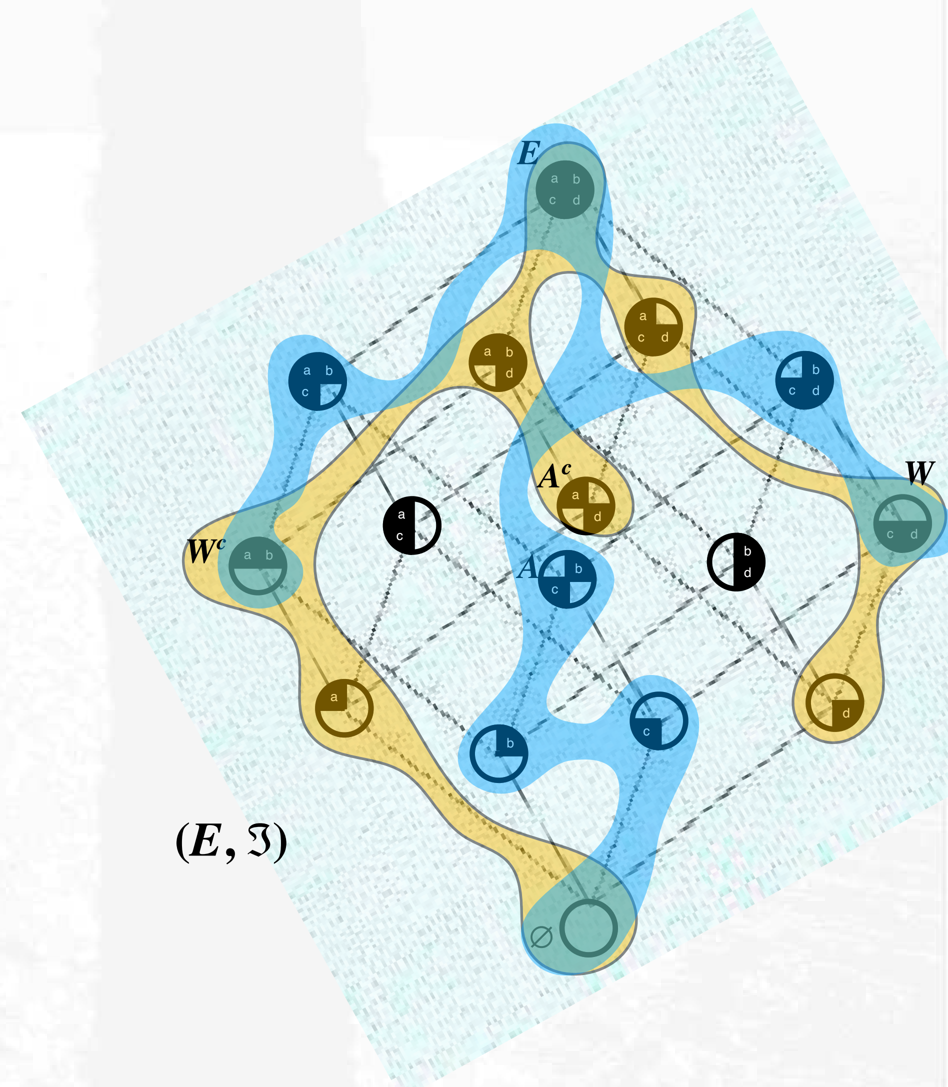
Sea $(E, \Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^* = \{A^c / A \in \Im\}$.



$\Im^* = \{E, A^c, W^c, W, A^c\cup W^c, A^c\cup W, A^c\cap W^c, A^c\cap W, \varnothing\}$



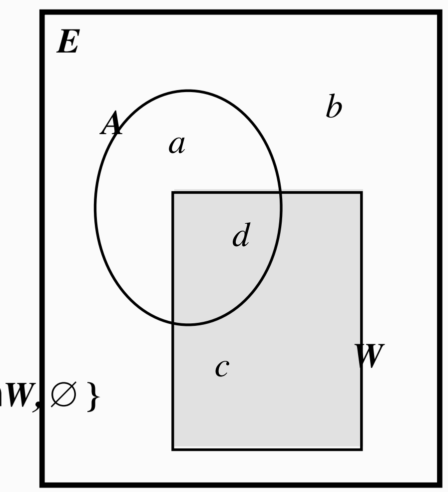


$(E, \Im)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,E),{}^{c})$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{\varnothing, A, W, W^c, A\cap W, A\cap W^c, A\cup W, A\cup W^c, E\}$



Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que $\{\varnothing, E\}\subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A,B)\in\Im^2 \Longrightarrow (A\cap B\in\Im)\&(A\cup B\in\Im)$,

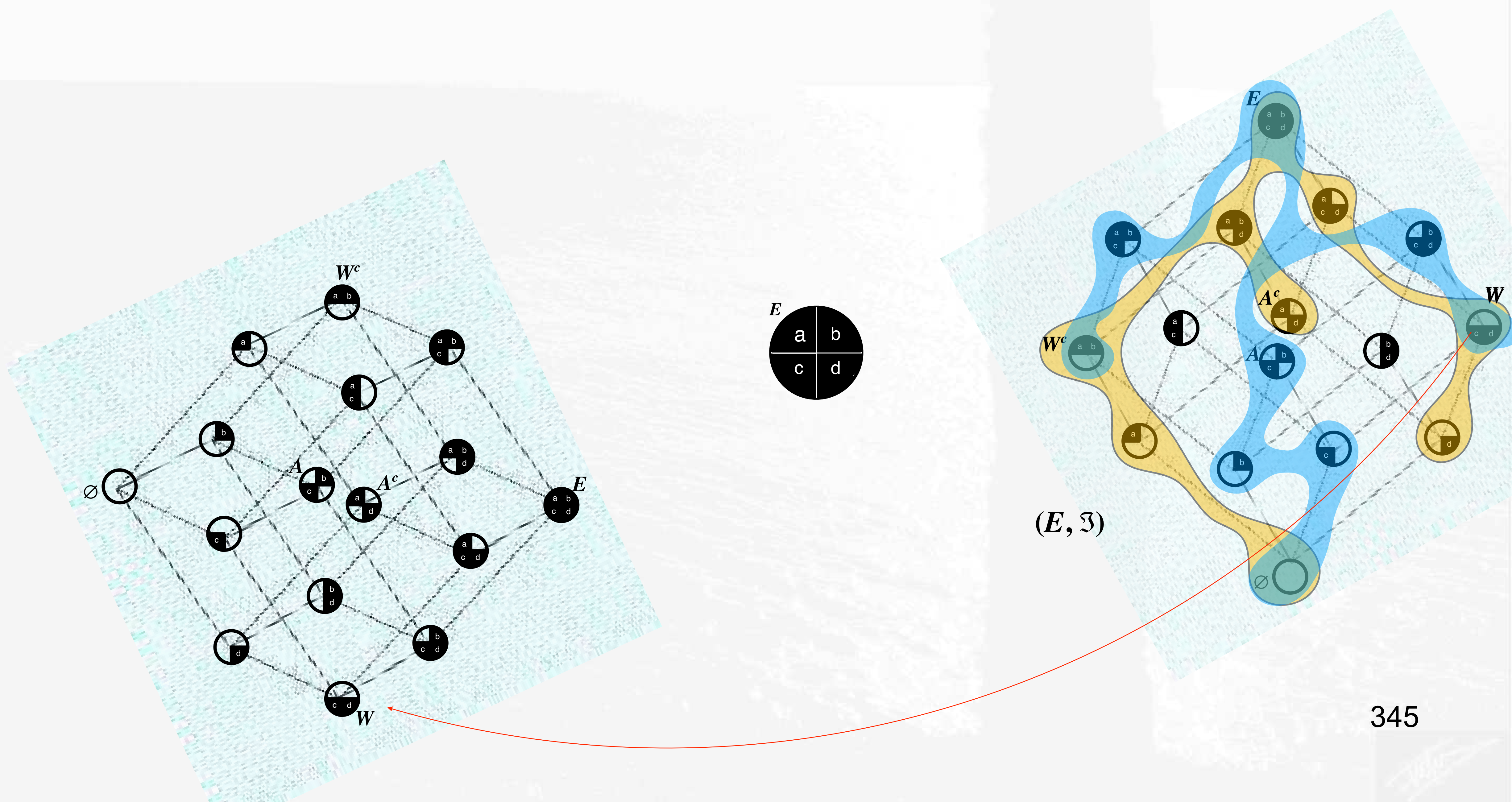
(es decir, en este caso, $(\Im,\subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E),\subseteq)$).

Sea $(E,\Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^* = \{A^c / A \in \Im\}$.

Sea W un subconjunto abierto y cerrado (clopen subset): $W \in \Im\cap\Im^*$ y sea $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$ el álgebra de Boole asociada a W.

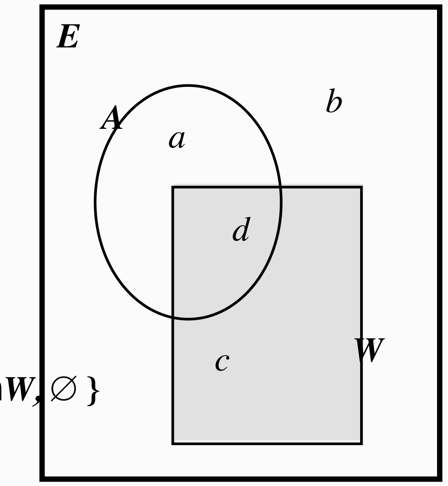
$\Im^* = \{E, A^c, W^c, W, A^c\cup W^c, A^c\cup W, A^c\cap W^c, A^c\cap W, \varnothing\}$



W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E), {}^c)$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{ \varnothing, A, W, W^c, A\cap W, A\cap W^c, A\cup W, A\cup W^c, E \}$



Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\} \subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A, B) \in \Im^2 \Longrightarrow (A \cap B \in \Im) \& (A \cup B \in \Im)$,

(es decir, en este caso, $(\Im, \subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E), \subseteq)$).

Sea $(E, \Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^* = \{A^c / A \in \Im\}$.

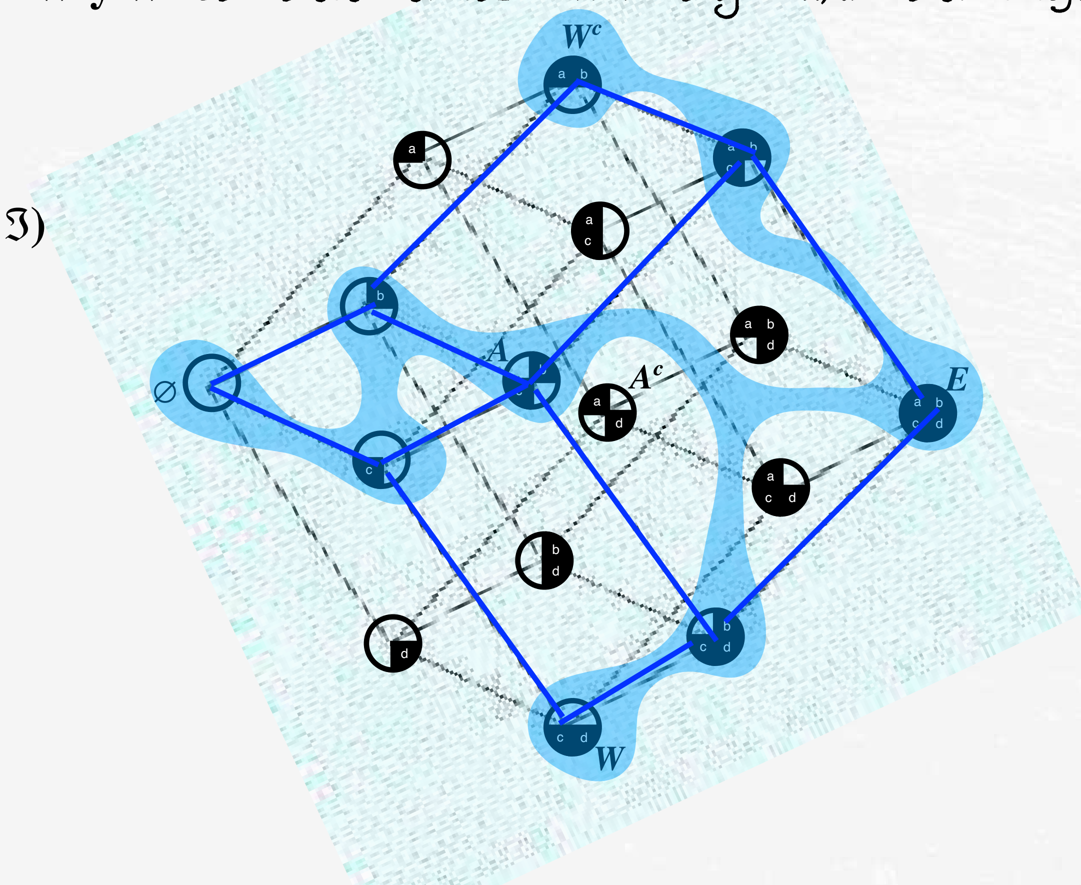
Sea W un subconjunto abierto y cerrado (clopen subset): $W \in \Im \cap \Im^*$ y sea $(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$ el álgebra de Boole asociada a W.

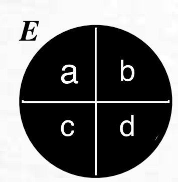
$\Im^* = \{ E, A^c, W^c, W, A^c\cup W^c, A^c\cup W, A^c\cap W^c, A^c\cap W, \varnothing \}$

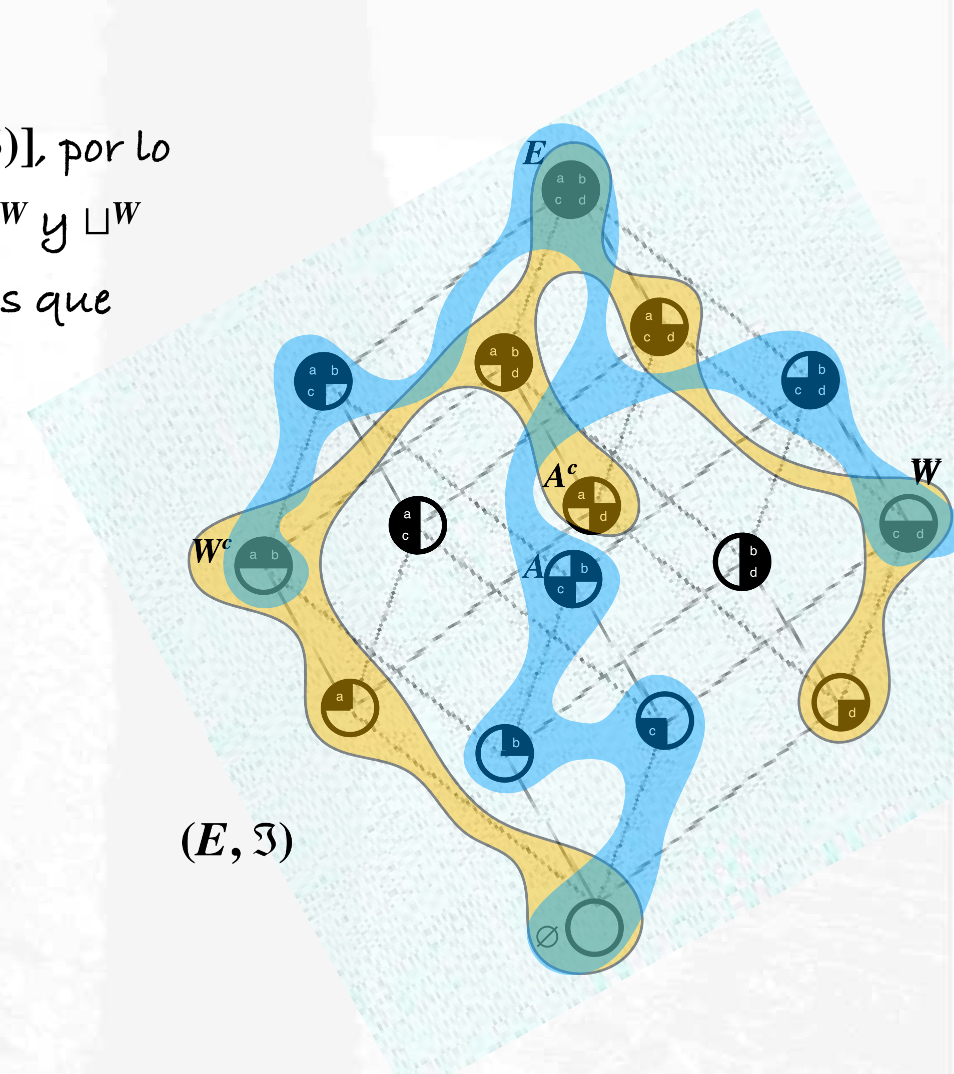
De las expresiones $A \sqcap^W B = (A\cap B)\cup\big(W\cap(A\cup B)\big)$ y $A \sqcup^W B = (A\cap B)\cup\big(W^c\cap(A\cup B)\big)$ se deduce que la familia $\Im$ de abiertos es tal que:

$\{W, W^c\} \subseteq \Im$ y es cerrada para $\sqcap^W$ y para $\sqcup^W$: $(A,B) \in \Im^2 \Longrightarrow [(A \sqcap^W B \in \Im) \& (A \sqcup^W B \in \Im)]$, por lo que podemos considerar un nuevo sistema $(E_W, \Im)$ asociado ahora a las operaciones $\sqcap^W$ y $\sqcup^W$ como otro tipo de espacio topológico (w-topología). Con los mismos abiertos y cerrados que $(E, \Im)$ y con W y W^c como elementos mínimo y máximo en lugar de $\varnothing$ y E).

$(E_W, \Im)$





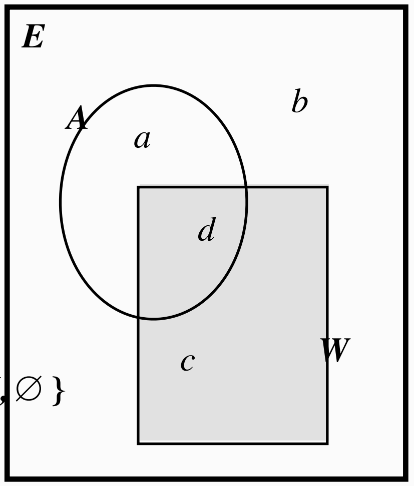


$(E, \Im)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E), \subseteq, \bigcap, \bigcup, \varnothing, E), {}^c)$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{\varnothing, A, W, W^c, A\cap W, A\cap W^c, A\cup W, A\cup W^c, E\}$



Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\} \subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A, B) \in \Im^2 \Longrightarrow (A \bigcap B \in \Im) \& (A \bigcup B \in \Im)$,

(es decir, en este caso, $(\Im, \subseteq)$ es un $\{\varnothing, E\}$-subretículo del retículo $(P(E), \subseteq)$).

Sea $(E, \Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\bigcap$ y $\bigcup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^* = \{A^c / A \in \Im\}$.

Sea W un subconjunto abierto y cerrado (clopen subset): $W \in \Im \cap \Im^*$ y sea

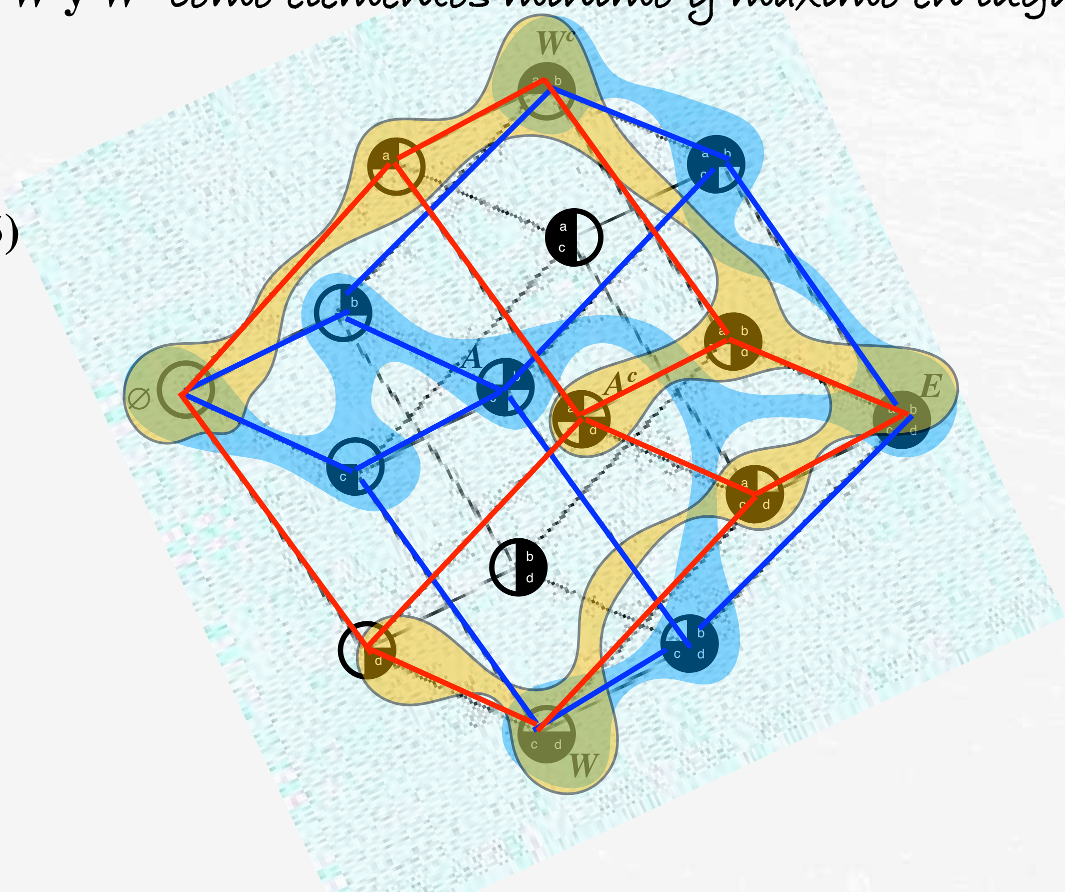
$\Im^* = \{E, A^c, W^c, W, A^c\cup W^c, A^c\cup W, A^c\cap W^c, A^c\cap W, \varnothing\}$

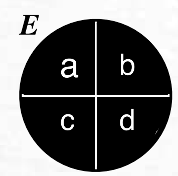
$(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, {}^c, W, W^c)$ el álgebra de Boole asociada a W.

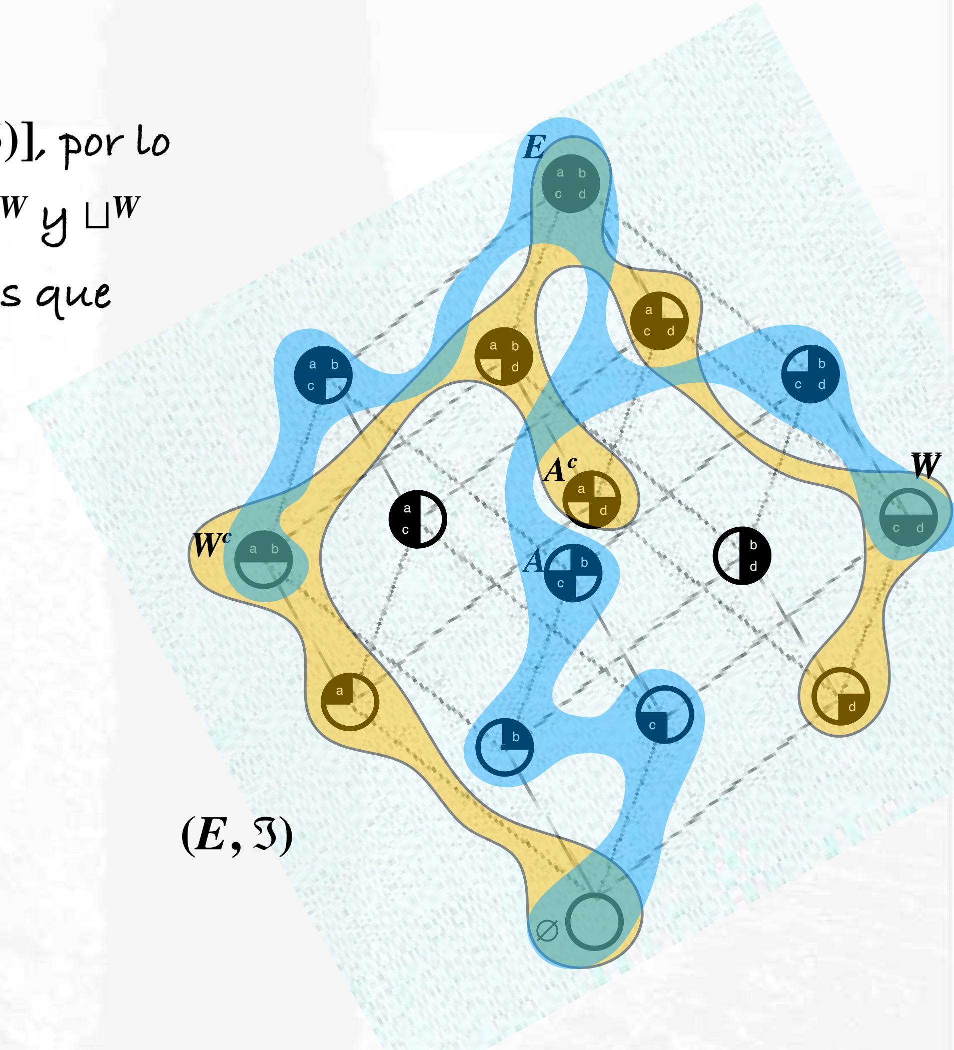
De las expresiones $A \sqcap^W B = (A\cap B)\cup\big(W\cap(A\cup B)\big)$ y $A \sqcup^W B = (A\cap B)\cup\big(W^c\cap(A\cup B)\big)$ se deduce que la familia $\Im$ de abiertos es tal que:

$\{W, W^c\} \subseteq \Im$ y es cerrada para $\sqcap^W$ y para $\sqcup^W$: $(A,B) \in \Im^2 \Longrightarrow [(A \sqcap^W B \in \Im) \& (A \sqcup^W B \in \Im)]$, por lo que podemos considerar un nuevo sistema $(E_W, \Im)$ asociado ahora a las operaciones $\sqcap^W$ y $\sqcup^W$ como otro tipo de espacio topológico (w-topología). Con los mismos abiertos y cerrados que $(E, \Im)$ y con W y W^c como elementos mínimo y máximo en lugar de $\varnothing$ y E).

$(E_W, \Im)$





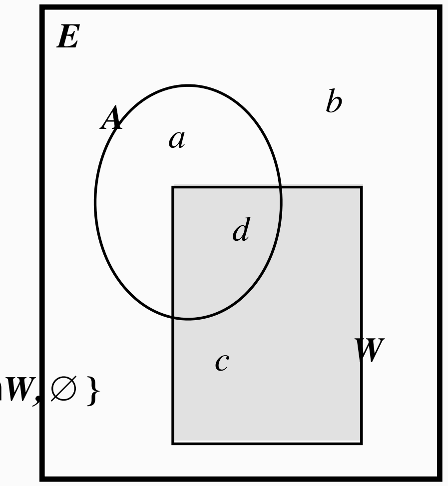


$(E, \Im)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Sea E un referencial finito no vacío y $((P(E),\subseteq,\cap,\ \cup,\varnothing,E),\ ^c)$ el sistema algebraico del álgebra de Boole de sus subconjuntos junto con la operación complementación.

$\Im = \{\varnothing, A, W, W^c, A\cap W, A\cap W^c, A\cup W, A\cup W^c, E\}$



Sea $\Im \subseteq P(E)$ una familia de subconjuntos (abiertos) tal que

$\{\varnothing, E\}\subseteq \Im$ y cerrada para la unión e intersección: $(A,B)\in\Im^2 \Longrightarrow (A\cap B\in\Im)\&(A\cup B\in\Im)$,

(es decir, en este caso, $(\Im,\subseteq)$ es un $\{\varnothing,E\}$-subretículo del retículo $(P(E),\subseteq)$).

Sea $(E,\Im)$ el espacio topológico finito asociado a la familia $\Im$ y a las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Consideremos la familia de cerrados: $\Im^* = \{A^c / A\in\Im\}$.

Sea W un subconjunto abierto y cerrado (clopen subset): $W\in\Im\cap\Im^*$ y sea

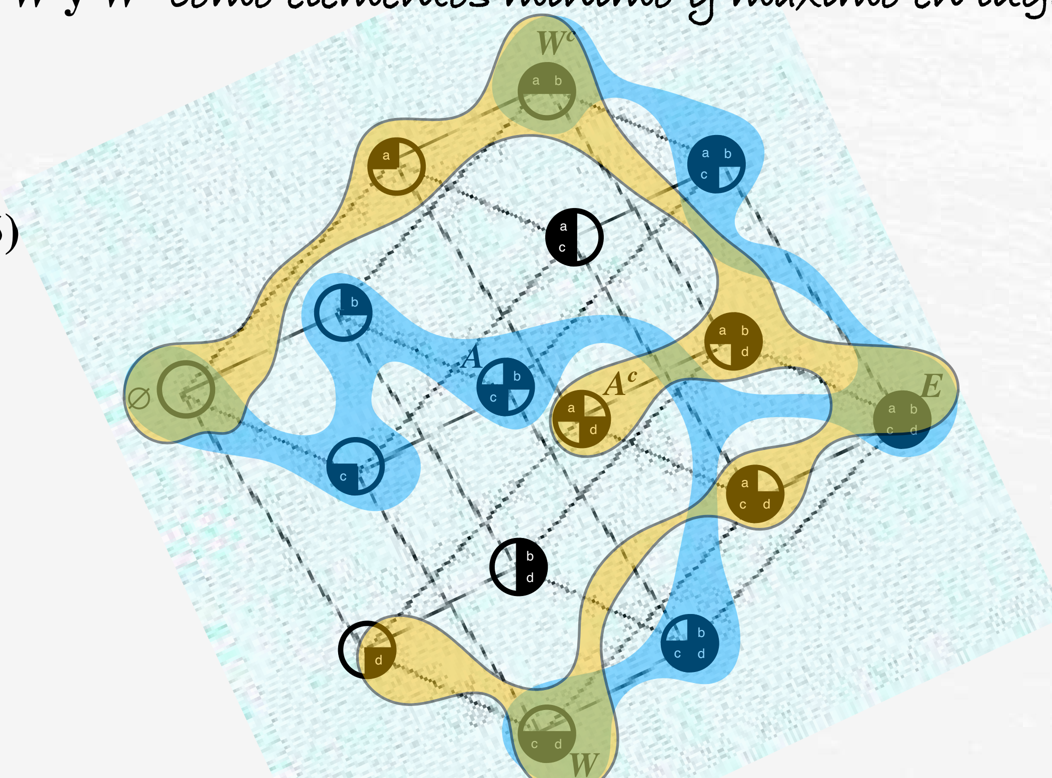
$(P(E),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,{}^c,W,W^c)$ el álgebra de Boole asociada a W.

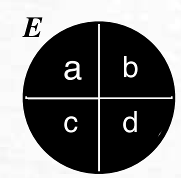
$\Im^* = \{E, A^c, W^c, W, A^c\cup W^c, A^c\cup W, A^c\cap W^c, A^c\cap W, \varnothing\}$

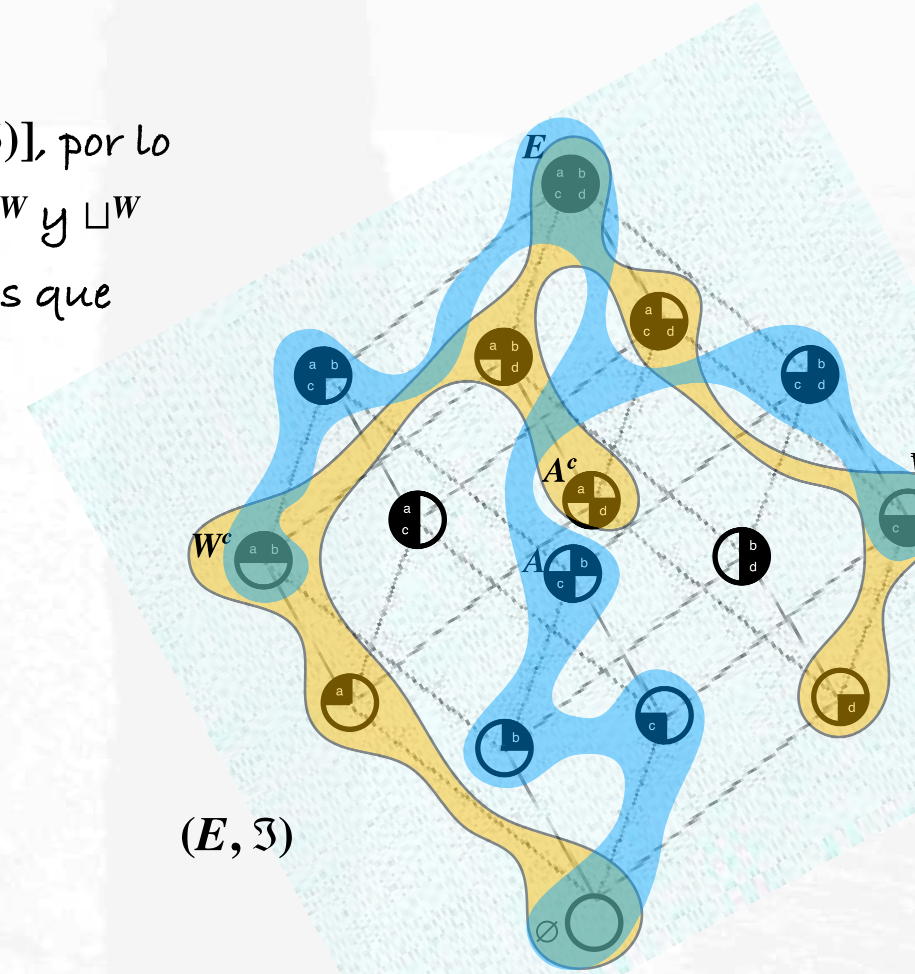
De las expresiones $A\sqcap^W B = (A\cap B)\cup\big(W\cap(A\cup B)\big)$ y $A\sqcup^W B = (A\cap B)\cup\big(W^c\cap(A\cup B)\big)$ se deduce que la familia $\Im$ de abiertos es tal que:

$\{W, W^c\}\subseteq\Im$ y es cerrada para $\sqcap^W$ y para $\sqcup^W$: $(A,B)\in\Im^2 \Longrightarrow [(A\sqcap^W B\in\Im)\&(A\sqcup^W B\in\Im)]$, por lo que podemos considerar un nuevo sistema $(E_W,\Im)$ asociado ahora a las operaciones $\sqcap^W$ y $\sqcup^W$ como otro tipo de espacio topológico (w-topología). Con los mismos abiertos y cerrados que $(E,\Im)$ y con W y W^c como elementos mínimo y máximo en lugar de $\varnothing$ y E).

$(E_W,\Im)$



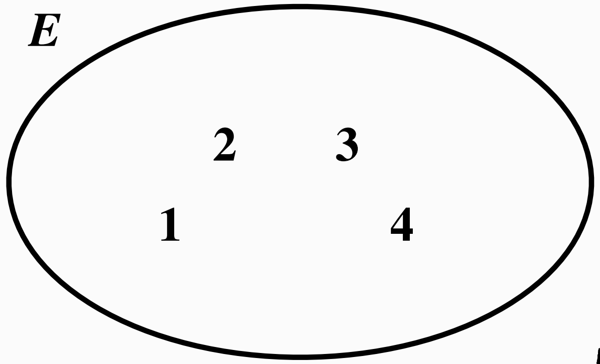




$(E,\Im)$

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

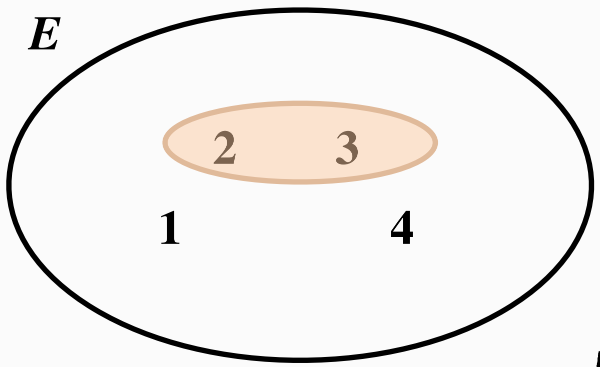


Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

La familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

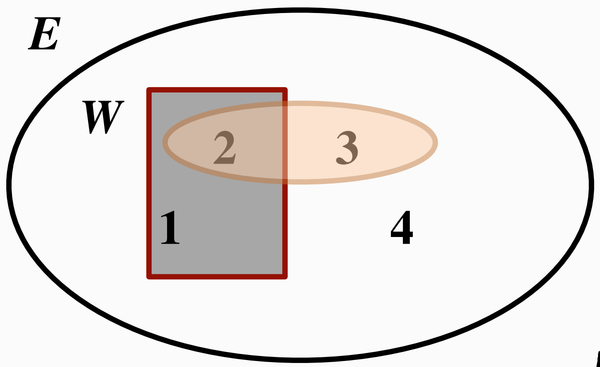
La familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

En el espacio topológico $((E, \subseteq, \cap, \cup), \Im)$ se verifica: $Int(23) = 3, Cl(23) = 234.$ $\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big).$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad P(E) = \{\ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\ \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{\ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\ \}$

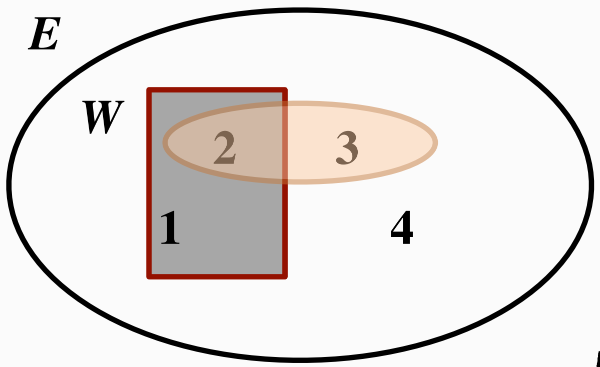
La familia de cerrados es $\Im^* = \{\ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\ \}$

En el espacio topológico $((E, \subseteq, \cap, \cup), \Im)$ se verifica: $Int(23) = 3$, $Cl(23) = 234$. $\quad \big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$.

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 12$, la inclusión $\sqsubseteq^{12}$ y sus operaciones asociadas $\sqcap^{12}$, $\sqcup^{12}$.

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

La familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

En el espacio topológico $((E, \subseteq, \cap, \cup), \Im)$ se verifica: $Int(23) = 3, Cl(23) = 234.$ $\quad$ $\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big).$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 12$, la inclusión $\sqsubseteq^{12}$ y sus operaciones asociadas $\sqcap^{12}$, $\sqcup^{12}$.

Se verifica: $A \sqsubseteq^{12} B \Leftrightarrow ((12 \cap B) \subseteq A \subseteq (12 \cup B))$

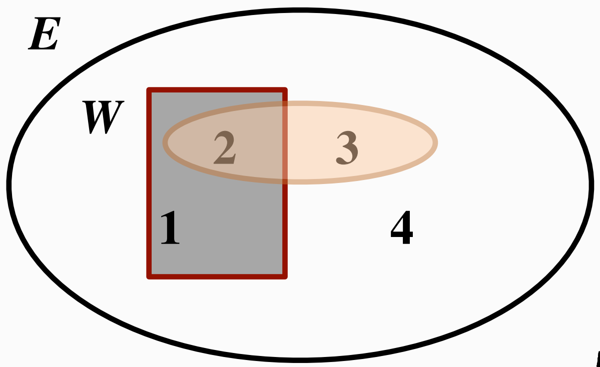
$$A \sqcap^{12} B = (A \cap B) \cup \big(12 \cap (A \cup B)\big)$$

$$A \sqcup^{12} B = (A \cap B) \cup \big(34 \cap (A \cup B)\big)$$

$$12 \sqsubseteq^{12} A \sqsubseteq^{12} 34 \qquad \forall A \in P(E)$$

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

La familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

En el espacio topológico $((E, \subseteq, \cap, \cup), \Im)$ se verifica: $Int(23) = 3, Cl(23) = 234.$ $\quad \big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big).$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 12,$ la inclusión $\sqsubseteq^{12}$ y sus operaciones asociadas $\sqcap^{12}, \sqcup^{12}$.

Se verifica: $A \sqsubseteq^{12} B \Leftrightarrow ((12 \cap B) \subseteq A \subseteq (12 \cup B))$

$$A \sqcap^{12} B = (A \cap B) \cup \big(12 \cap (A \cup B)\big)$$

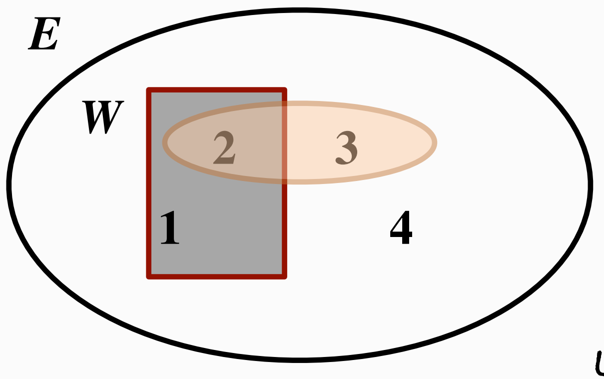
$$A \sqcup^{12} B = (A \cap B) \cup \big(34 \cap (A \cup B)\big)$$

$$12 \sqsubseteq^{12} A \sqsubseteq^{12} 34 \qquad \forall A \in P(E)$$

En el espacio "12-topológico" $((E, \sqsubseteq^{12}, \sqcup^{12}, \sqcap^{12}), \Im)$ (P(E) con distinta inclusión, distintas operaciones unión e intersección, aunque la misma familia de abiertos $\Im$):

Ejemplo

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

La familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

En el espacio topológico $((E, \subseteq, \cap, \cup), \Im)$ se verifica: $Int(23) = 3, Cl(23) = 234.$ $\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big).$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 12$, la inclusión $\sqsubseteq^{12}$ y sus operaciones asociadas $\sqcap^{12}, \sqcup^{12}$.

Se verifica: $A \sqsubseteq^{12} B \Leftrightarrow ((12 \cap B) \subseteq A \subseteq (12 \cup B))$

$$A \sqcap^{12} B = (A \cap B) \cup \big(12 \cap (A \cup B)\big)$$

$$A \sqcup^{12} B = (A \cap B) \cup \big(34 \cap (A \cup B)\big)$$

$$12 \sqsubseteq^{12} A \sqsubseteq^{12} 34 \quad \forall A \in P(E)$$

En el espacio "12-topológico" $((E, \sqsubseteq^{12}, \sqcup^{12}, \sqcap^{12}), \Im)$ (P(E) con distinta inclusión, distintas operaciones unión e intersección, aunque la misma familia de abiertos $\Im$):

Los operadores "12-interior" y "12-clausura" son tales que: $Int_{12}(23) = 123$, $Cl_{12}(23) = 234.$ $\big(Int_{12}(23) \sqsubseteq^{12} 23 \sqsubseteq^{12} Cl_{12}(23)\big).$

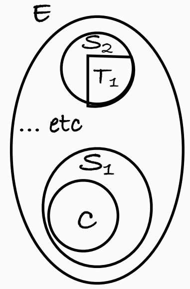
Ejemplo: w-topologías sobre referenciales finitos asociados a los isomorfismos φ_w

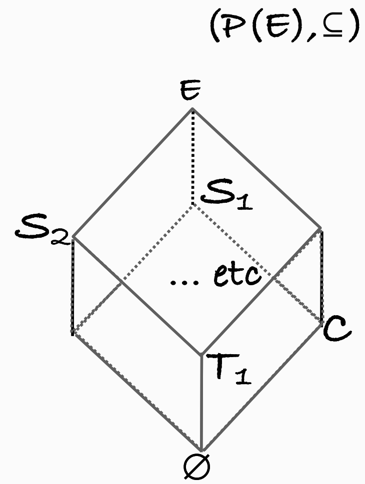
Ejemplo: w-topologías sobre referenciales finitos asociadas al orden $\sqsubseteq^w$

Definición de "w-topología" en $(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ^c)$ utilizando el concepto de marco (frame) y el orden $\sqsubseteq^w$.

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

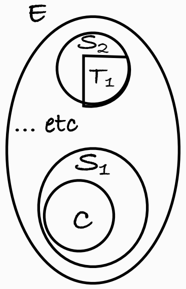


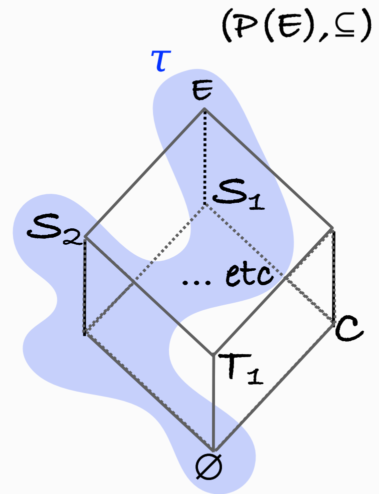


Espacio topológico (E, τ):

$E \neq \emptyset$, $\tau \subseteq P(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \tau$,

(τ conjunto de abiertos).





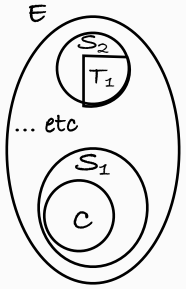
$S_j \in \tau \quad \forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \in \tau$

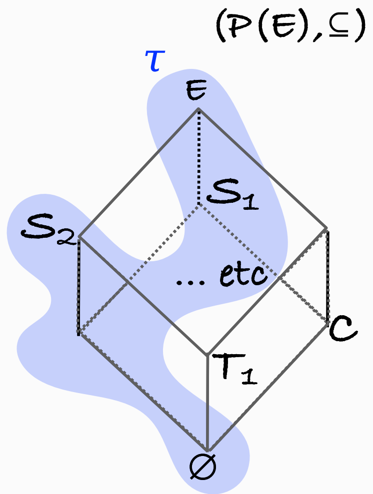
$(S_1 \in \tau) \,\&\, (S_2 \in \tau) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \tau$

$x \in E$ es interior a $A \in P(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \tau : x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Espacio topológico (E, τ):
$E \neq \emptyset$, $\tau \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \tau$,
(τ conjunto de abiertos).





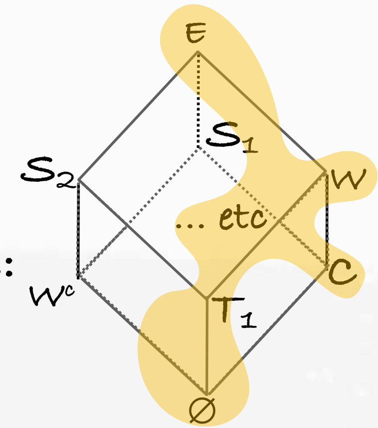
$S_j \in \tau \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \tau$

$(S_1 \in \tau) \& (S_2 \in \tau) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \tau$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \tau : x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x \text{ es interior a } A\}$

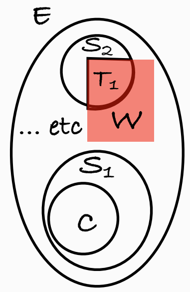
Cerrados:

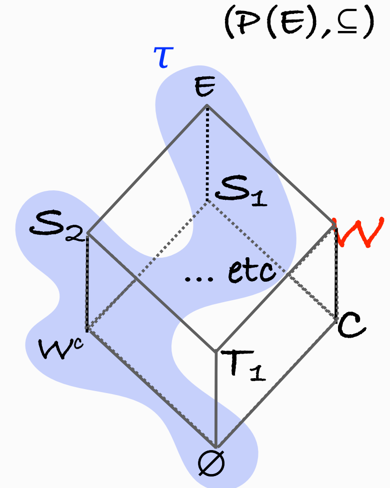


Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





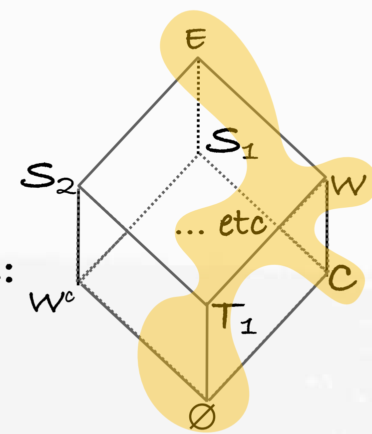
$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

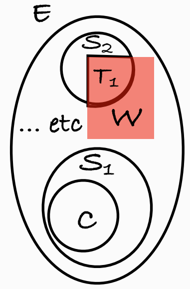
Cerrados:

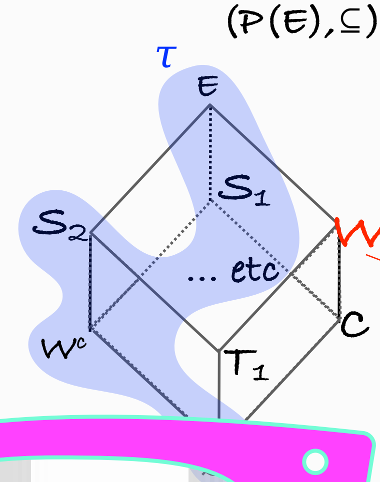


Espacio topológico (E, τ):

$E \neq \varnothing$, $\tau \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \tau$,

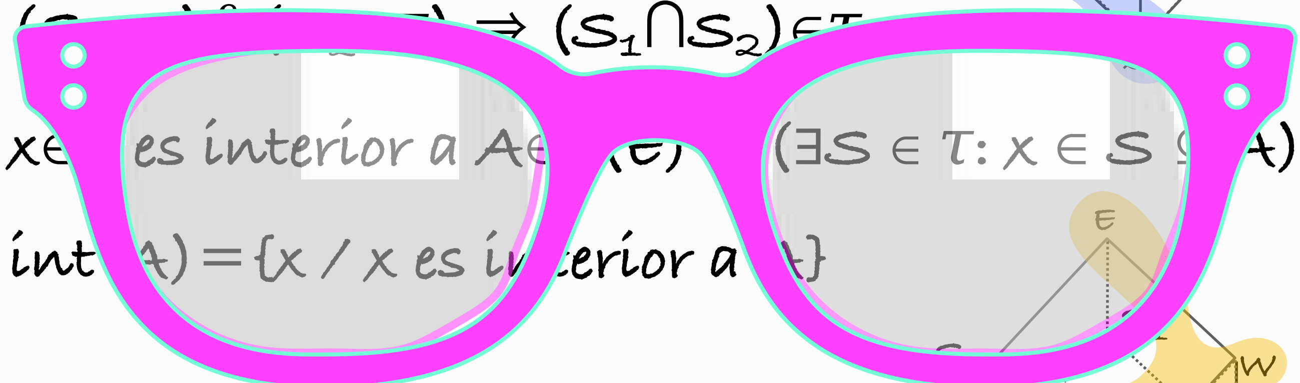
(τ conjunto de abiertos).





$S_j \in \tau \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \tau$

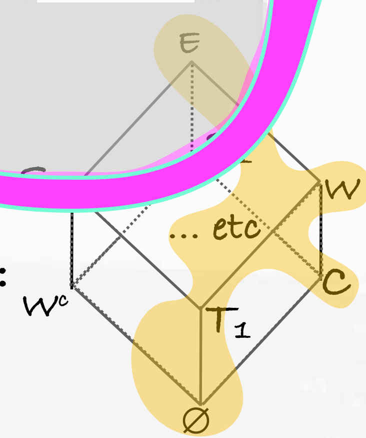
$\Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \tau$

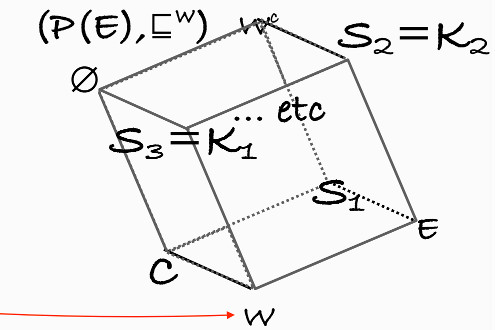


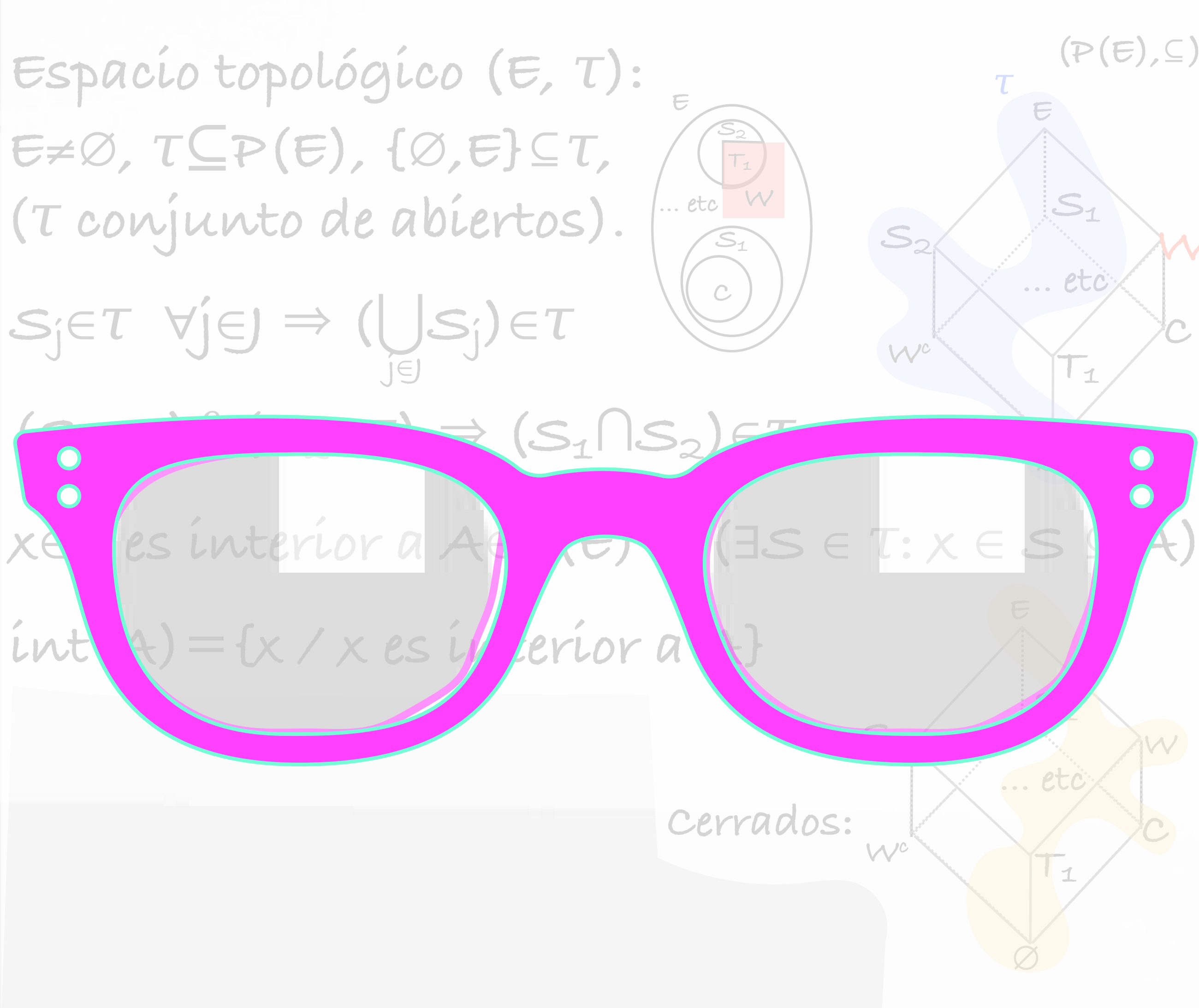
$x \in E$ es interior a $A \in P(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \tau: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Cerrados:





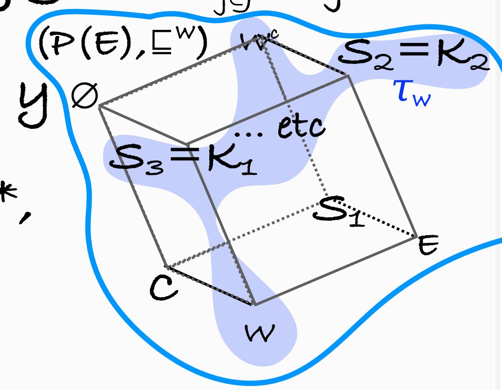


Sea $E\neq\emptyset$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J)\Rightarrow(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)\in\mathcal{T}^*$,

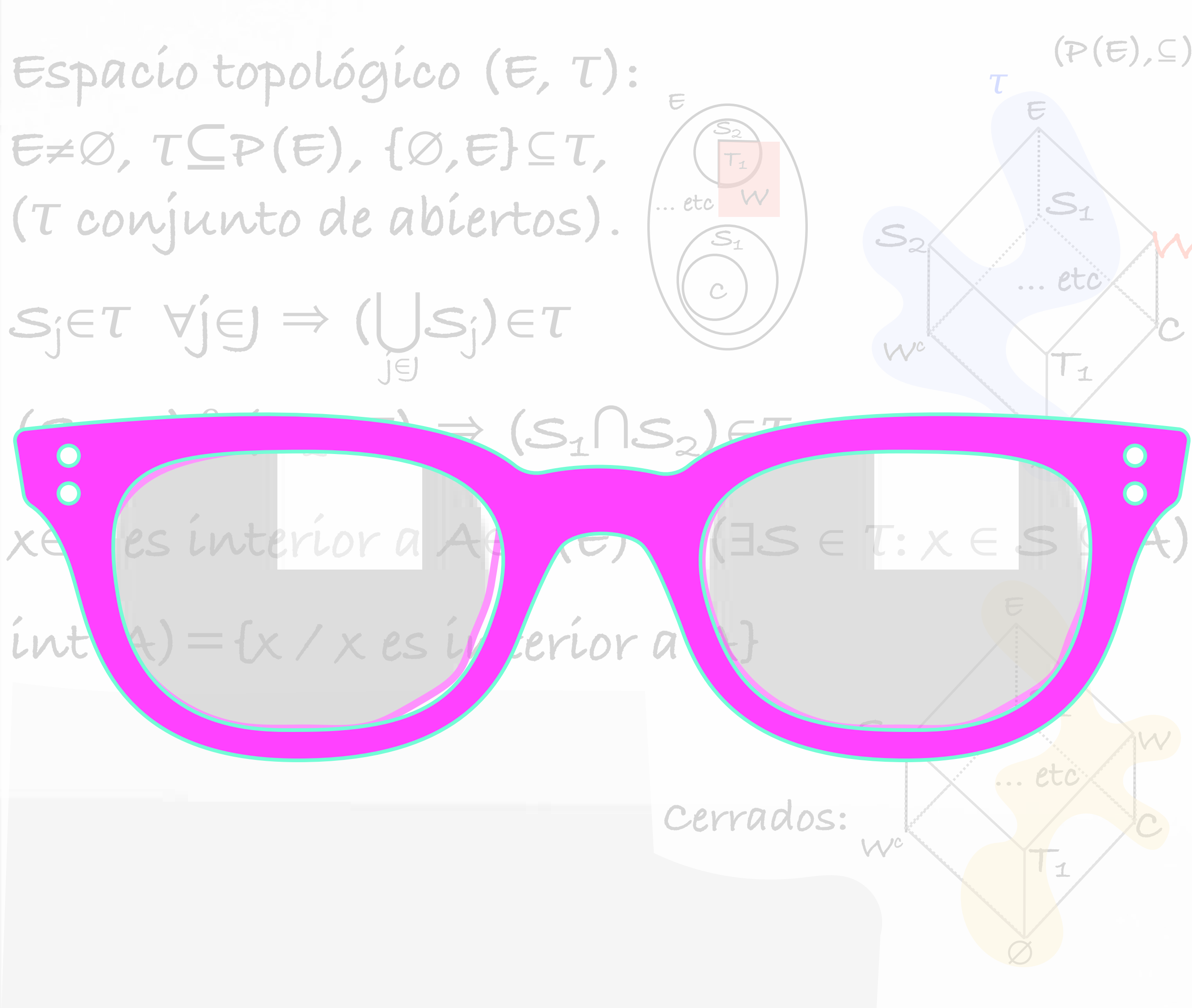
(3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*)\Rightarrow(K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y

(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K,K_j\in\mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)



(1) Topología sin puntos

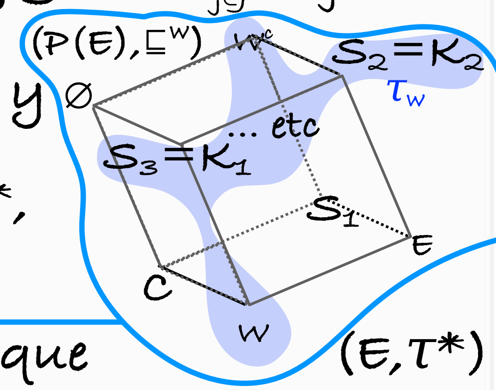


Sea $E\neq\emptyset$ y $W\in P(E)$. En $(P(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $T^*\subseteq P(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq T^*$, (2) $(K_j\in T^*\ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)\in T^*$,

(3) $(K_1\in T^*)\,\&\,(K_2\in T^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in T^*$ y

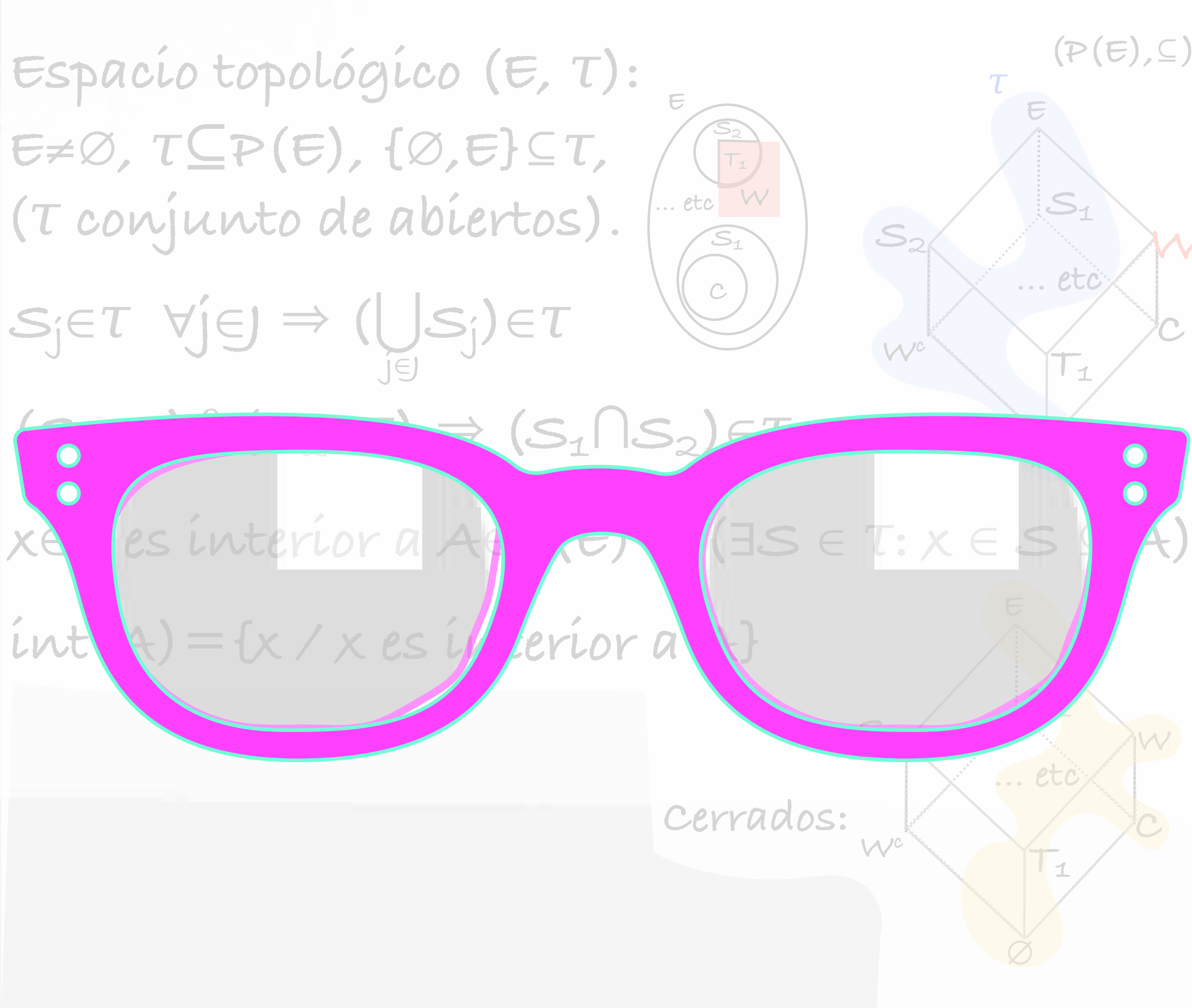
(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K, K_j\in T^*$,

es decir, T^* es un <u>marco</u> (frame). (1)



Diremos que T^* es una "<u>w-topología</u>"; que es un "<u>espacio w-topológico</u>" y que $K\in T^*$ es <u>w-abierto.</u>

(1) Topología sin puntos

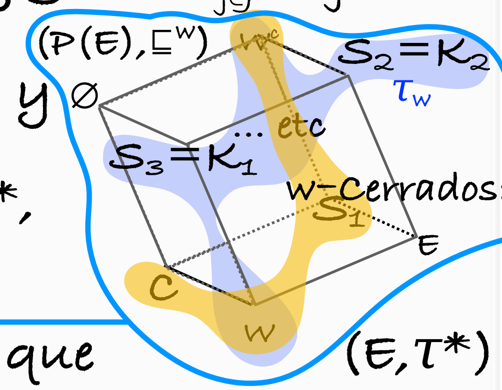


Sea $E\neq\emptyset$ y $W\in P(E)$. En $(P(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $T^*\subseteq P(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq T^*$, (2) $(K_j\in T^*\ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)\in T^*$,

(3) $(K_1\in T^*)\,\&\,(K_2\in T^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in T^*$ y

(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \forall K,K_j\in T^*$,

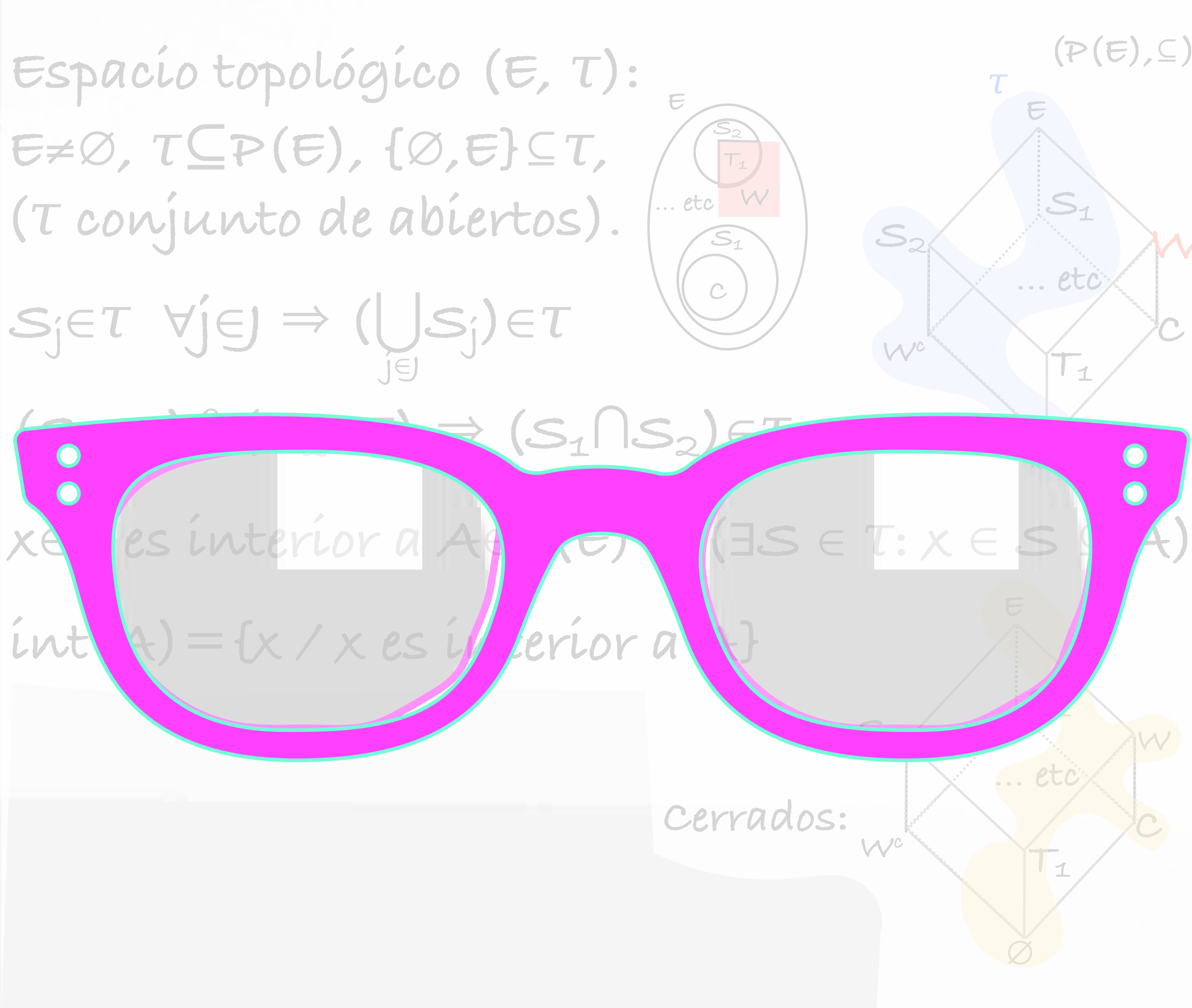
es decir, T^* es un marco (frame). (1)



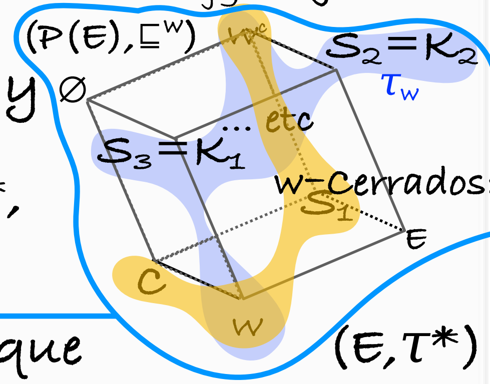
Diremos que T^* es una "w-topología"; que (E,T^*) es un "espacio w-topológico" y que $K\in T^*$ es w-abierto.

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

(1) Topología sin puntos



Sea $E\neq\emptyset$ y $W\in P(E)$. En $(P(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $T^*\subseteq P(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq T^*$, (2) $(K_j\in T^* \ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\sqcup^W_{j\in J} K_j)\in T^*$, (3) $(K_1\in T^*)\&(K_2\in T^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in T^*$ y (4) $K\sqcap^W(\sqcup^W_{j\in J} K_j)=\sqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)$ $\forall K,K_j\in T^*$, es decir, T^* es un marco (frame). (1)



Diremos que T^* es una "w-topología"; que (E,T^*) es un "espacio w-topológico" y que $K\in T^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in T^*/\ K\sqsubseteq^W A\}=\emptyset \\ \sqcup^W(K\in T^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A\in P(E)$

y w-cl$(A)=(\text{w-interior}(A^c))^c$ $\forall A\in P(E)$

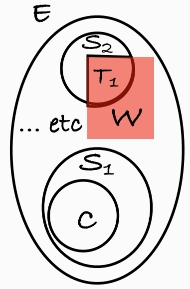
T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

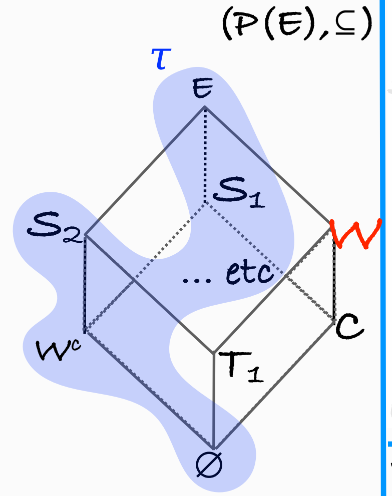
(1) Topología sin puntos

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

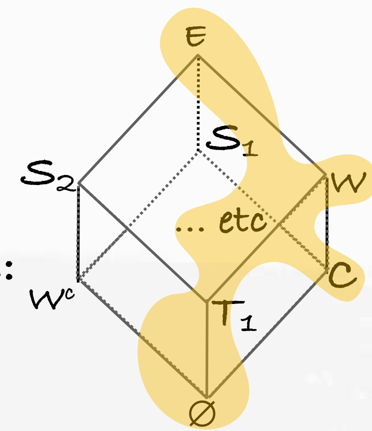
$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Marco

Cerrados:



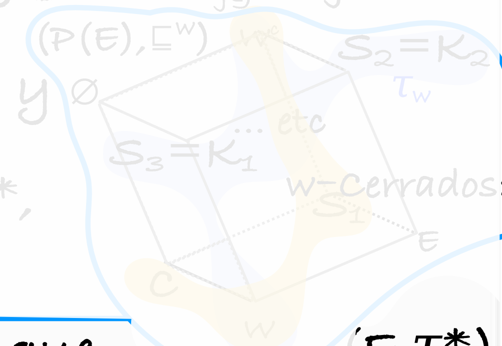
Sea $E \neq \varnothing$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$

tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \;\; \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \,\&\, (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\varnothing$

(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j \in J} (K \sqcap^W K_j) \;\; \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \bigsqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\varnothing),\; W^c = \varphi_W(E),\; \varnothing = \varphi_W(W),\; E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

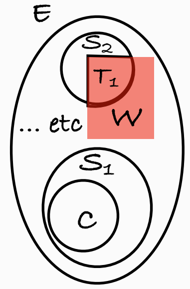
$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

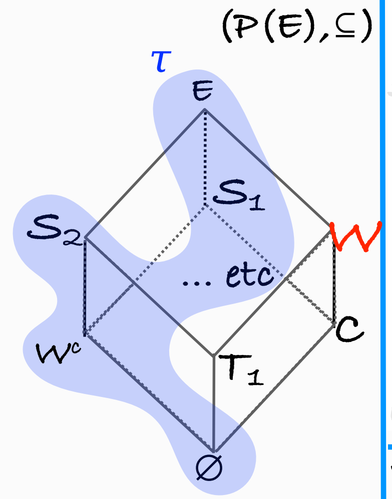
$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

Espacio topológico (E, τ):

$E \neq \varnothing$, $\tau \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \tau$,

(τ conjunto de abiertos).





$S_j \in \tau \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \tau$

$(S_1 \in \tau) \& (S_2 \in \tau) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \tau$

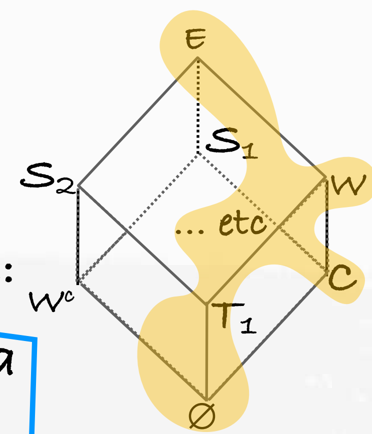
$x \in E$ es interior a $A \in P(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \tau: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\tau_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco τ_E es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \varnothing$ y $w \in P(E)$. En $(P(E), \sqsubseteq^w)$ consideremos $\tau^* \subseteq P(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \tau^*$, (2) $(K_j \in \tau^* \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^w_{j\in J} K_j) \in \tau^*$,

(3) $(K_1 \in \tau^*) \& (K_2 \in \tau^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^w K_2) \in \tau^*$ y

(4) $K \sqcap^w (\bigsqcup^w_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^w_{j\in J} (K \sqcap^w K_j) \ \forall K, K_j \in \tau^*$,

es decir, τ^* es un marco (frame). (1)

Diremos que τ^* es una "w-topología"; que (E, τ^*) es un "espacio w-topológico" y que $K \in \tau^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \tau^* / K \sqsubseteq^w A\} = \varnothing \\ \sqcup^w (K \in \tau^* / K \sqsubseteq^w A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in P(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \ \forall A \in P(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

$w \in P(E)$, Espacio w-topológico $(E, \tau_w) = (E, \varphi_w(\tau))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_w(\tau) = \{\varphi_w(S) \,/\, S \in \tau\} \subseteq P(E),$$

$$W = \varphi_w(\varnothing),\ W^c = \varphi_w(E),\ \varnothing = \varphi_w(W),\ E = \varphi_w(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\tau)$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

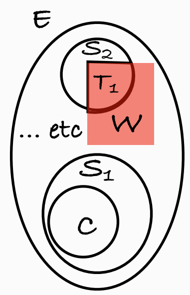
$$S_j \in \varphi_w(\tau) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^w_{j\in J} S_j) \in \tau$$

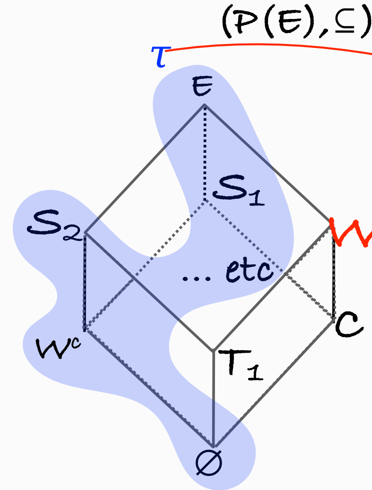
$$(S_1 \in \tau) \& (S_2 \in \tau) \Rightarrow (S_1 \sqcap^w S_2) \in \tau$$

Espacio topológico $(E,\ \mathcal{T})$:

$E\neq\varnothing$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\}\subseteq\mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$

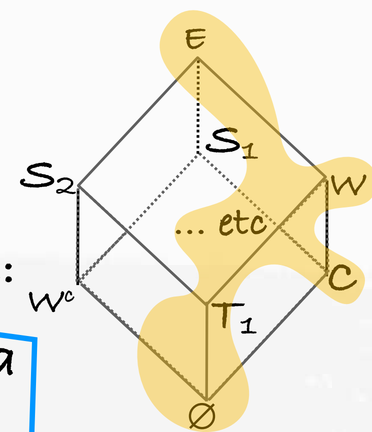
$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

$\mathrm{int}(A)=\{x\ /\ x$ es interior a $A\}$

Si $W=\varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing=\bigcup,\ \sqcap^\varnothing=\bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E=\bigcap,\ \sqcap^E=\bigcup)$.

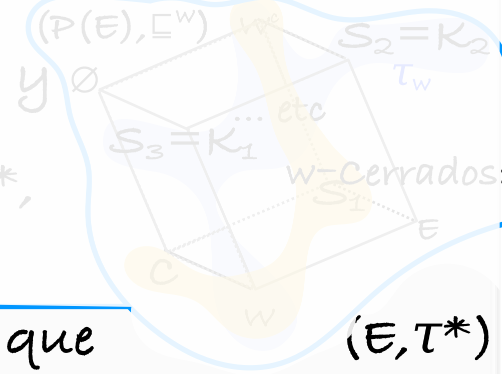
Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)\in\mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y

(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K, K_j\in\mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). [1]

En general: W-TOPOLOGÍA

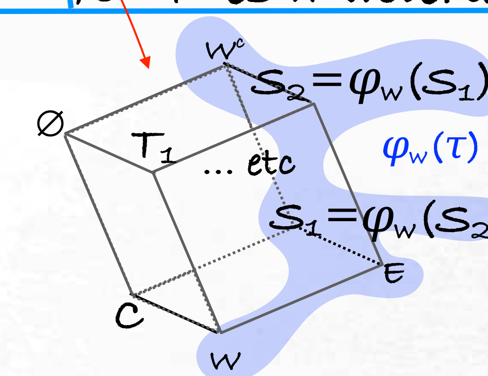


Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A)=\varnothing \\ \sqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A)=($w-interior$(A^c))^c\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E,\ \mathcal{T}_W)=(E,\ \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T})=\{\varphi_W(S)\ /\ S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E),$$

$$W=\varphi_W(\varnothing),\ W^c=\varphi_W(E),\ \varnothing=\varphi_W(W),\ E=\varphi_W(W^c),$$

$$\{W,\ W^c\}\subseteq\varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c,\ W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

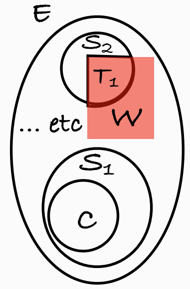
$$S_j\in\varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\textstyle\bigsqcup^W_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$$

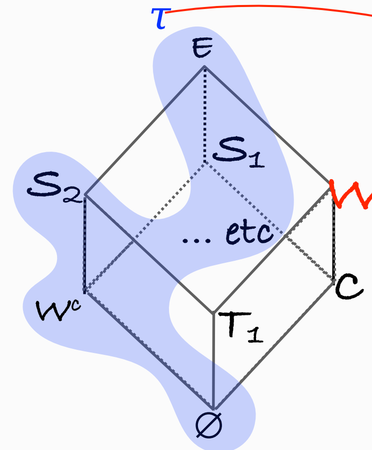
$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

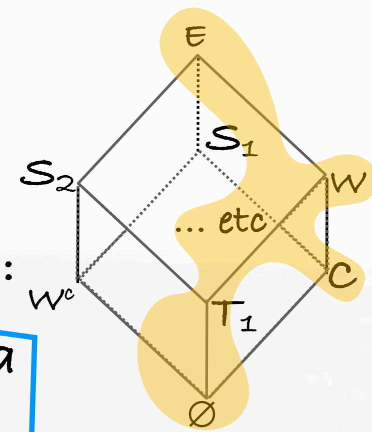
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup,\ \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap,\ \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \varnothing$ y $w \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^w)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^*\ \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^w_{j\in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$, (3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^w K_2) \in \mathcal{T}^*$ y (4) $K \sqcap^w (\bigsqcup^w_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^w_{j\in J} (K \sqcap^w K_j)\ \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$, es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)

En general: W-TOPOLOGÍA

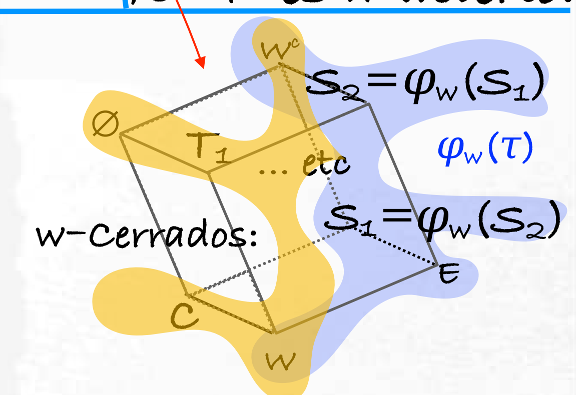
Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^w A\} = \varnothing \\ \sqcup^w (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^w A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

w-Cerrados:



$w \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w) = (E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_w(\varnothing)$, $W^c = \varphi_w(E)$, $\varnothing = \varphi_w(W)$, $E = \varphi_w(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

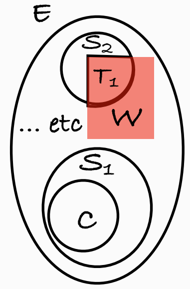
$S_j \in \varphi_w(\mathcal{T})\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^w_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

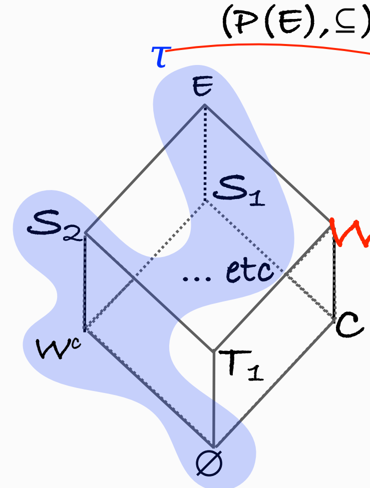
$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^w S_2) \in \mathcal{T}$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

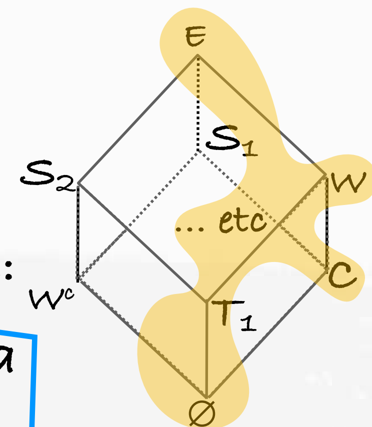
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\text{int}(A) = \{x \ / \ x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup,\ \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



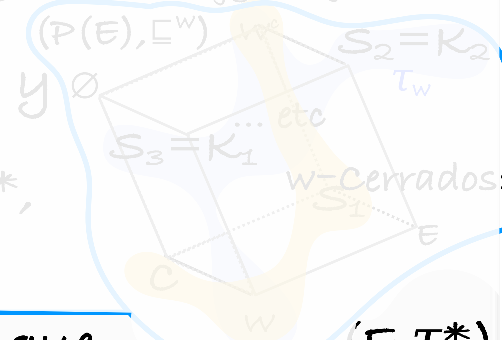
Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap,\ \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \varnothing$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \ \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\varnothing$

(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j \in J} (K \sqcap^W K_j) \ \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)



En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases} \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

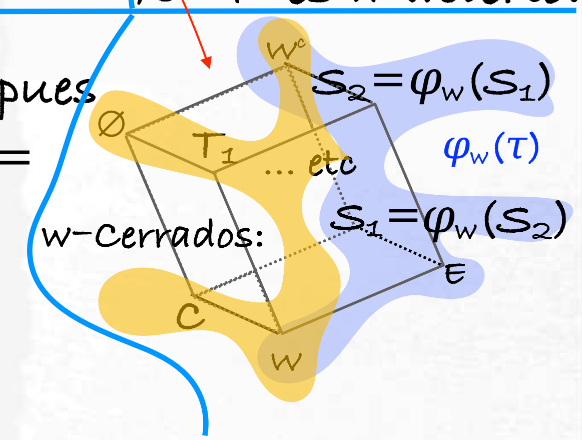
Proposición. Se verifica: (*)

(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\text{int}}_W(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W (\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(\text{int}(\varphi_W(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \ / \ S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\varnothing),\ W^c = \varphi_W(E),\ \varnothing = \varphi_W(W),\ E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

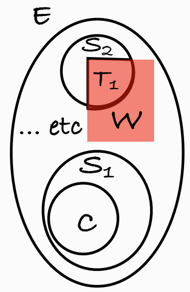
$$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

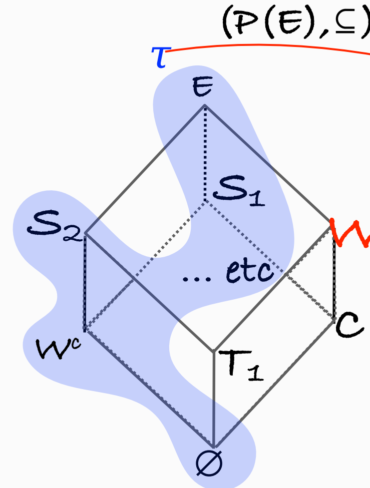
(*) (Véase transparencias siguientes)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

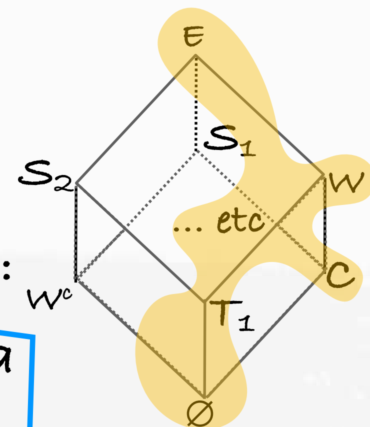
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset = \bigcup, \sqcap^\emptyset = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\emptyset),\ W^c = \varphi_W(E),\ \emptyset = \varphi_W(W),\ E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

(*) (Véase transparencias siguientes)

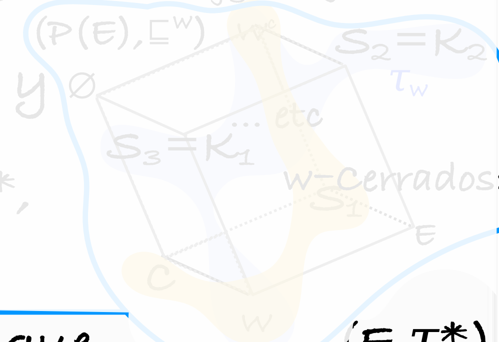
Sea $E \neq \emptyset$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \ \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\emptyset$

(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j\in J} (K \sqcap^W K_j)$ $\forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)

En general: W-TOPOLOGÍA



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

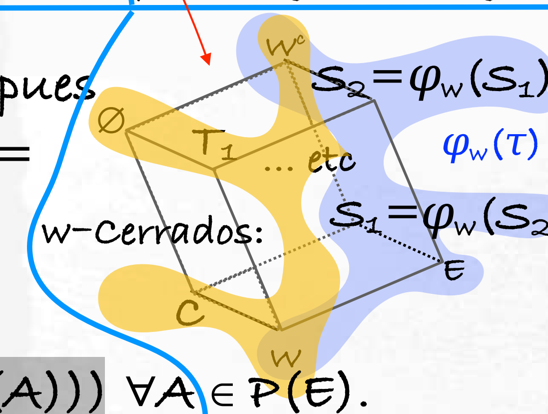
Proposición. Se verifica: (*)

(1) w-int$(A) = \widehat{int}_W(A)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

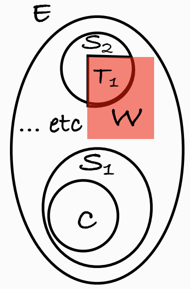
$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

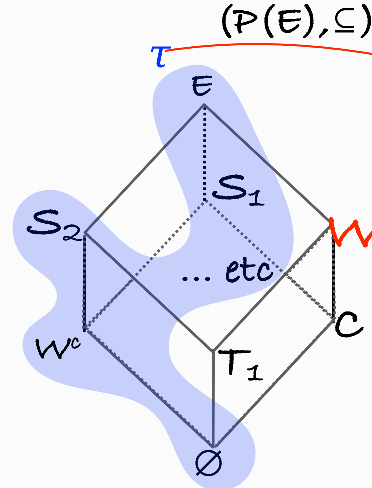
$\varphi_W(int(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.



(2) w-cl$(A) = \widehat{cl}_W(A) = \varphi_W(cl(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

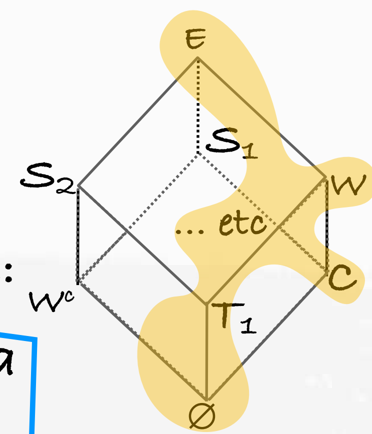
$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^{\varnothing} = \bigcup, \sqcap^{\varnothing} = \bigcap)$.

Marco

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^{E} = \bigcap, \sqcap^{E} = \bigcup)$.

Cerrados:



$w \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w) = (E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_w(\varnothing)$, $W^c = \varphi_w(E)$, $\varnothing = \varphi_w(W)$, $E = \varphi_w(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_w(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^{W}_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^{W} S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^{W} A\} = \varnothing \\ \sqcup^{W}(K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^{W} A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

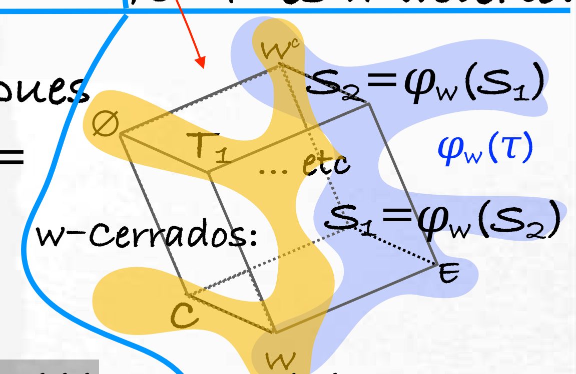
(1) w-int$(A) = \widehat{\mathrm{int}}_w(A)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^{W}(\varphi_w(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_w(S) \sqsubseteq^{W} A)) =$

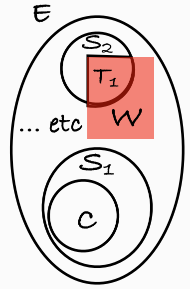
$\varphi_w([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_w(A)]) =$

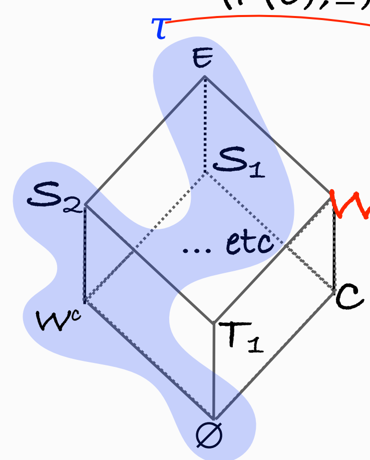
$\varphi_w(\mathrm{int}(\varphi_w(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_w(A) = \varphi_w(\mathrm{cl}(\varphi_w(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.



Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in P(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

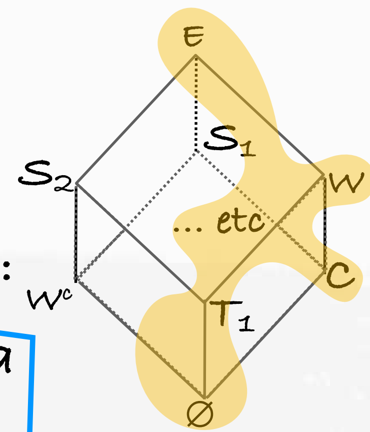
$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup,\; \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap,\; \sqcap^E = \bigcup)$.

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in P(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in P(E)$

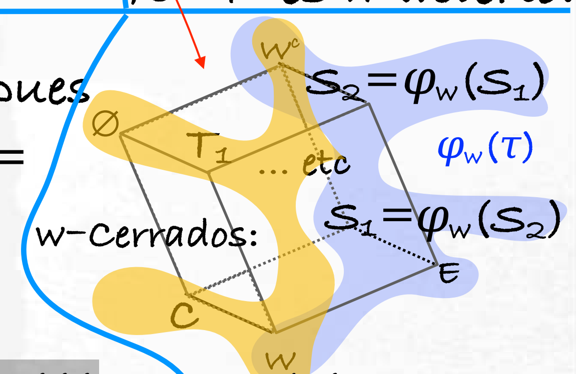
y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \;\; \forall A \in P(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

(1) w-int$(A) = \widehat{int}_W(A) \;\forall A \in P(E)$, pues
$\sqcup^W (\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$
$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$
$\varphi_W(int(\varphi_W(A))) \;\; \forall A \in P(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{cl}_W(A) = \varphi_W(cl(\varphi_W(A))) \;\; \forall A \in P(E)$.



$W \in P(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

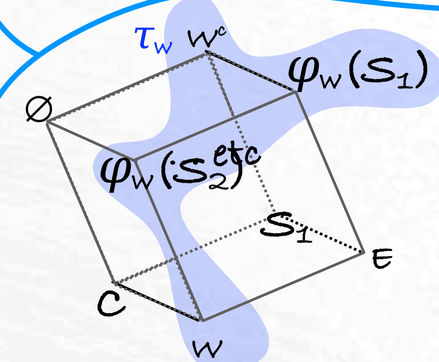
$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq P(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

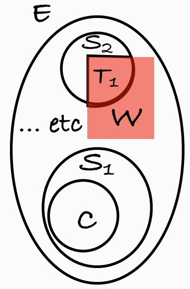
$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow \left(\sqcup^W_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

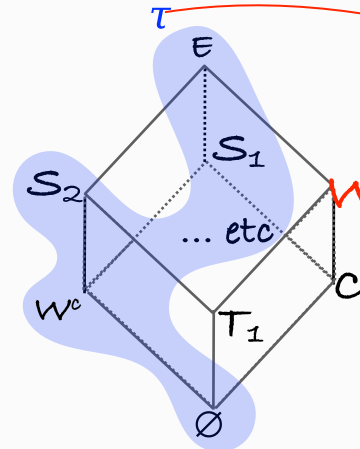
(*) (Véase transparencias siguientes)

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).



$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$



En general: W-TOPOLOGÍA

$$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$$

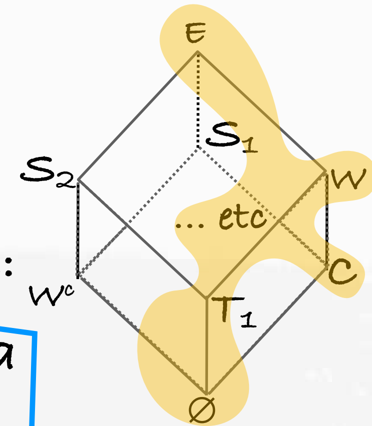
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset = \bigcup, \sqcap^\emptyset = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

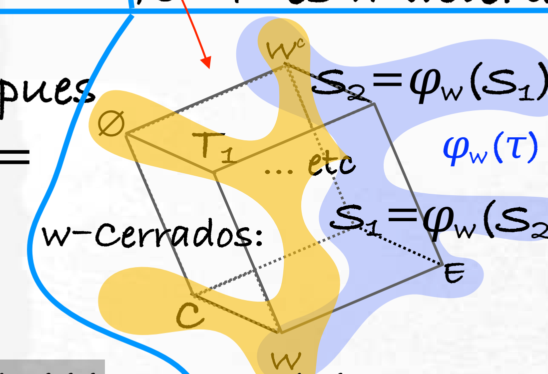
Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

(1) w-int$(A) = \widehat{int}_w(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues
$\sqcup^W(\varphi_w(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_w(S) \sqsubseteq^W A)) =$
$\varphi_w([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_w(A)]) =$
$\varphi_w(int(\varphi_w(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



(2) w-cl$(A) = \widehat{cl}_w(A) = \varphi_w(cl(\varphi_w(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

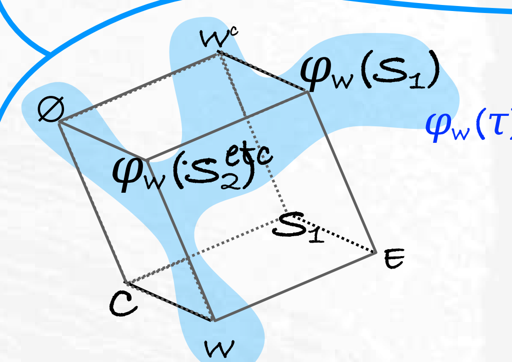
$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w) = (E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_w(\emptyset),\ W^c = \varphi_w(E),\ \emptyset = \varphi_w(W),\ E = \varphi_w(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\mathcal{T})$$



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \varphi_w(\mathcal{T})$

($\emptyset$ es w-abierto y E w-cerrado)

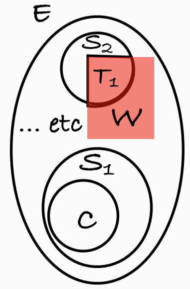
$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

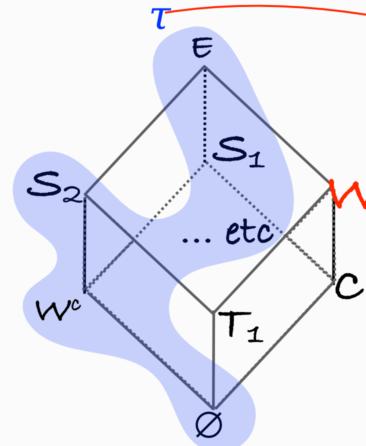
$$S_j \in \varphi_w(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow \left(\sqcup^W_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

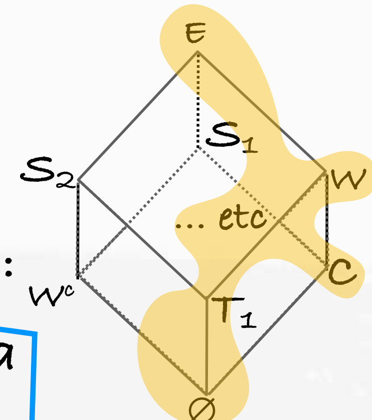
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \varnothing$ y $W \in \mathcal{P}$... tal que: (1) $\{W, W^c\}$ ... (2) ... (3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\varnothing$ ...

(4) $K \sqcap^W (\sqcup^W_{j \in J} K_j) = \sqcup^W_{j \in J} (K \sqcap^W K_j) \ \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

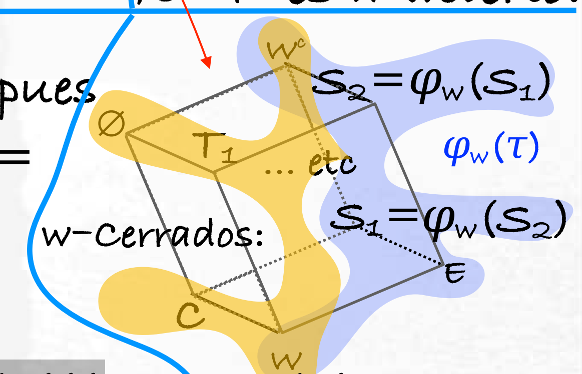
(1) w-int$(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) /\ (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S /\ (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

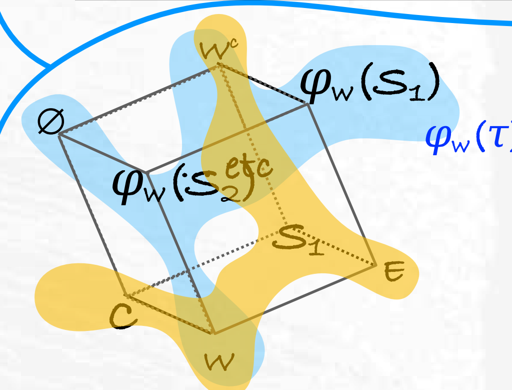
$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

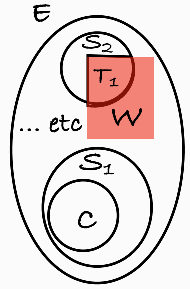
($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

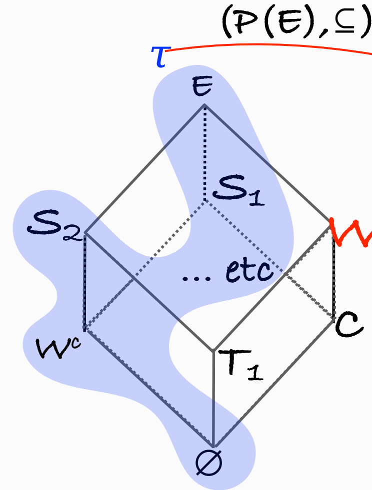
$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

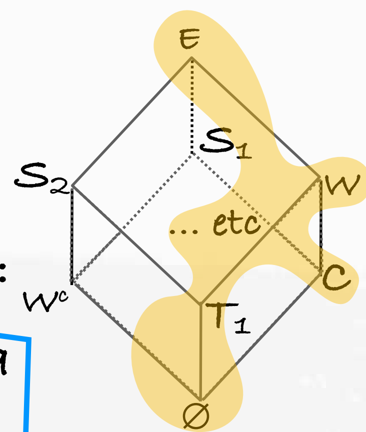
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.
Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Marco

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

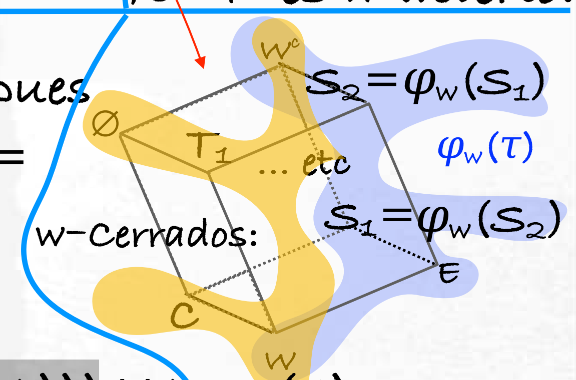
y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

(1) w-int$(A) = \widehat{int}_W(A) \;\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues
$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$
$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A))]) =$
$\varphi_W(int(\varphi_W(A))) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{cl}_W(A) = \varphi_W(cl(\varphi_W(A))) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

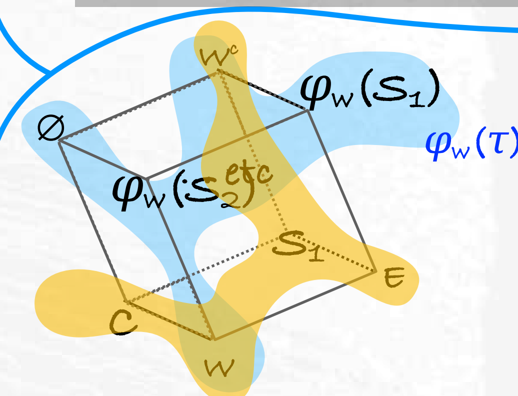
$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

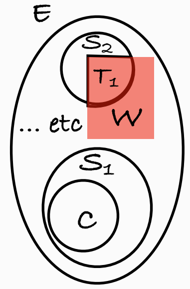
(*) (Véase transparencias siguientes)

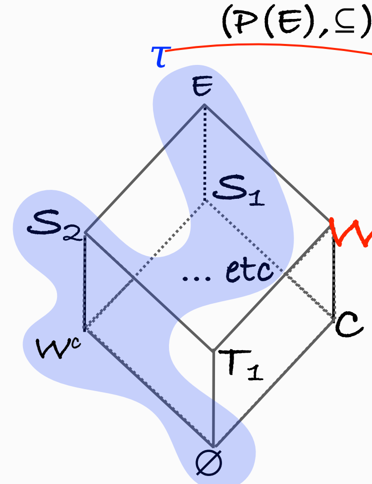


Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

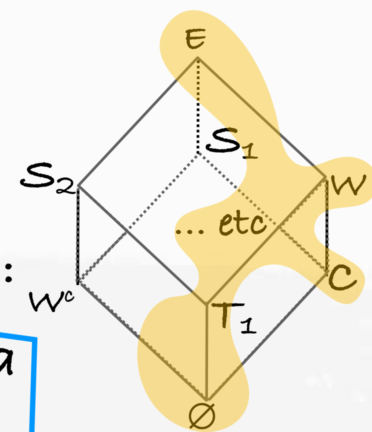
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

En general: W-TOPOLOGÍA

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

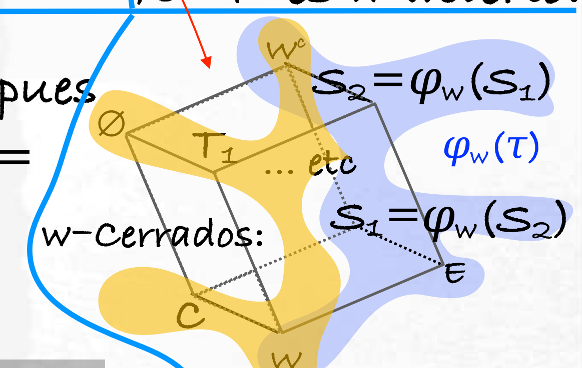
(1) w-int$(A) = \widehat{int}_w(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_w(S) /\ (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_w(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_w([\bigcup S /\ (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_w(A)]) =$

$\varphi_w(int(\varphi_w(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{cl}_w(A) = \varphi_w(cl(\varphi_w(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w) = (E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_w(\varnothing)$, $W^c = \varphi_w(E)$, $\varnothing = \varphi_w(W)$, $E = \varphi_w(W^c)$,

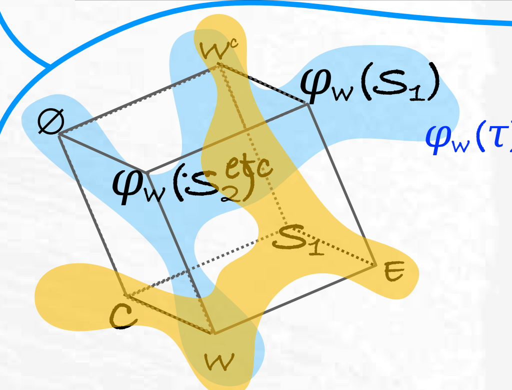
$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_w(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)

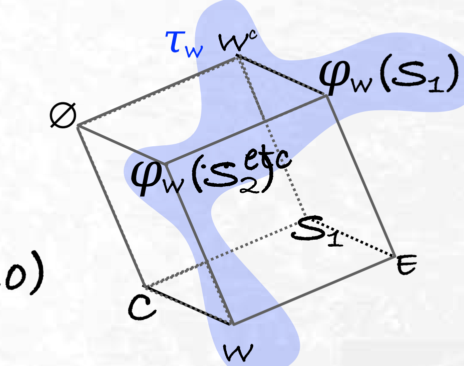


Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_w(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:
$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_w(\mathcal{T})$

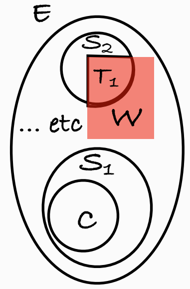
(E es w-abierto y $\varnothing$ w-cerrado)

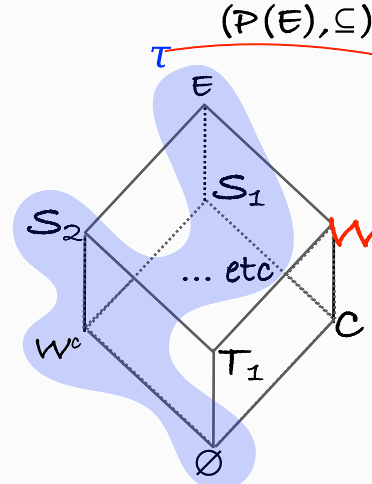


Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

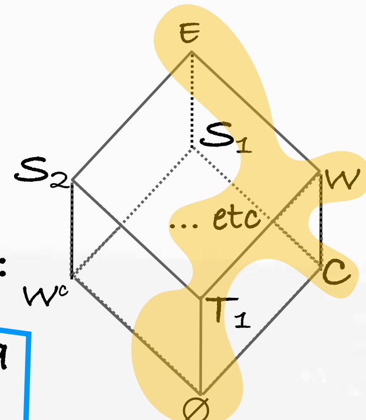
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

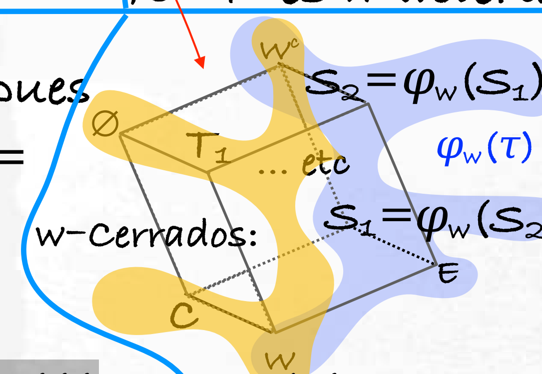
(1) w-int$(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W (\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_W(A))]) =$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

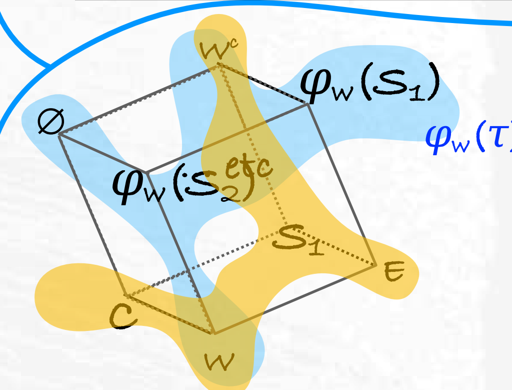
$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

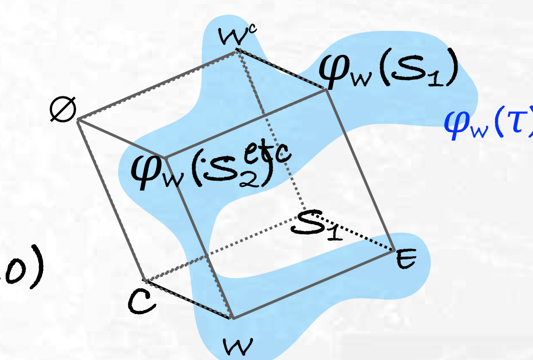
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

(∅ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:

$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_W(\mathcal{T})$

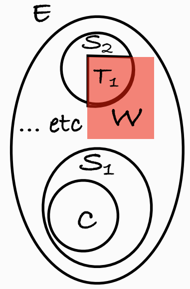
(E es w-abierto y ∅ w-cerrado)

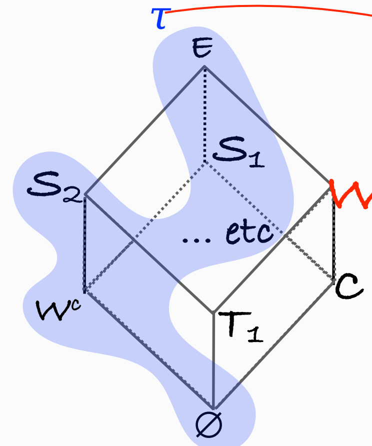


Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$





$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

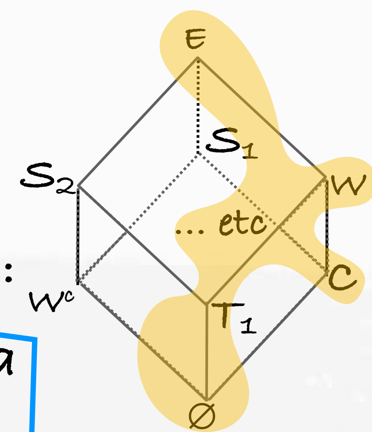
$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^{\emptyset} = \bigcup,\ \sqcap^{\emptyset} = \bigcap)$.

Marco

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^{E} = \bigcap,\ \sqcap^{E} = \bigcup)$.

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

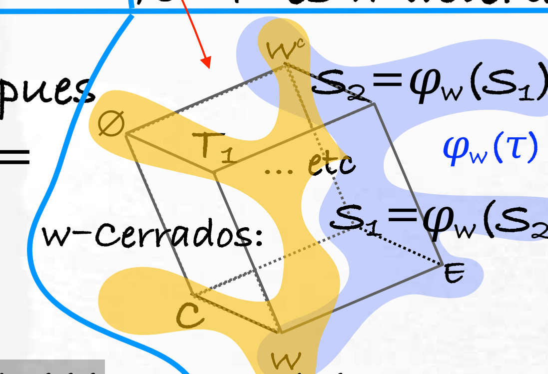
y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

(1) w-int$(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues
$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$
$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$
$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\emptyset)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\emptyset = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

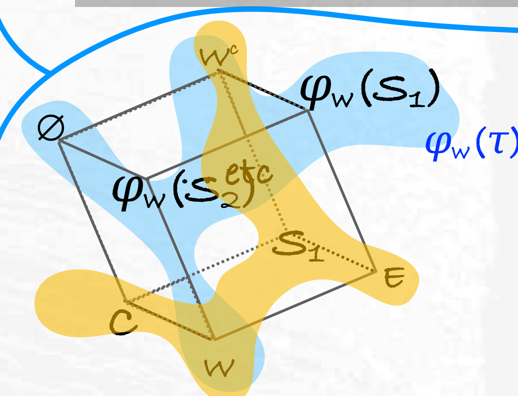
$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)

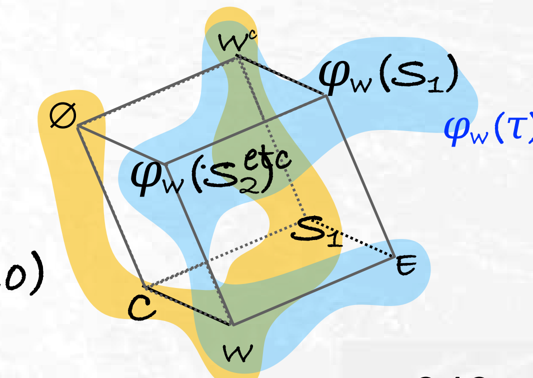


Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \varphi_W(\mathcal{T})$

($\emptyset$ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:
$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_W(\mathcal{T})$

(E es w-abierto y $\emptyset$ w-cerrado)

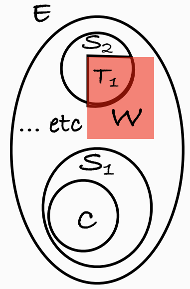


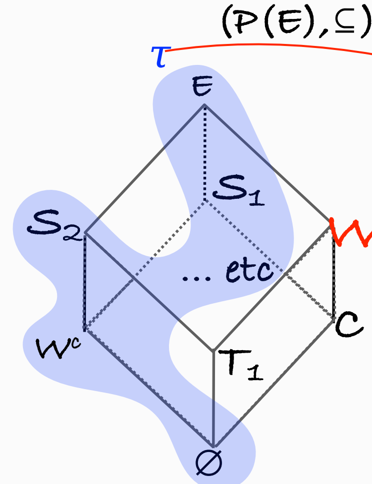
Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E\neq\emptyset$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$





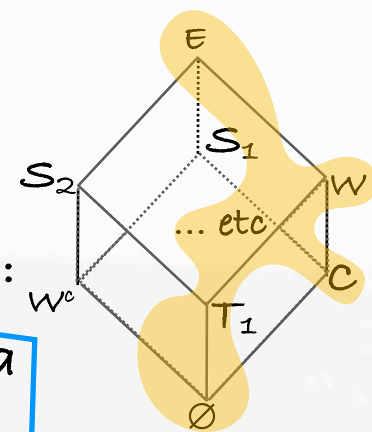
$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

$\mathrm{int}(A)=\{x\,/\,x$ es interior a $A\}$

Si $W=\emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset=\bigcup,\ \sqcap^\emptyset=\bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E=\bigcap,\ \sqcap^E=\bigcup)$.

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W\in\mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A\}=\emptyset \\ \sqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A)=($w-interior$(A^c))^c$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

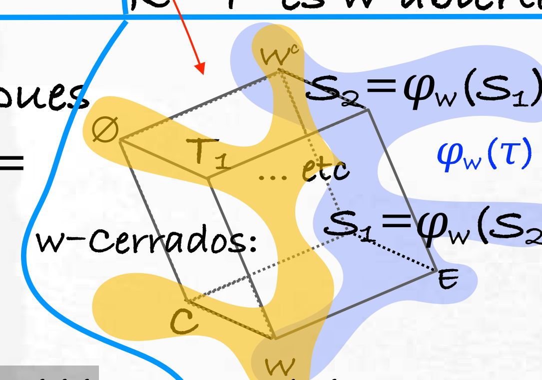
(1) w-int$(A)=\widehat{\mathrm{int}}_w(A)$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_w(S)/\ (S\in\mathcal{T})\,\&\,(\varphi_w(S)\sqsubseteq^W A))=$

$\varphi_w([\bigcup S/\ (S\in\mathcal{T})\,\&\,(S\subseteq\varphi_w(A)])=$

$\varphi_w(\mathrm{int}(\varphi_w(A)))$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A)=\widehat{\mathrm{cl}}_w(A)=\varphi_w(\mathrm{cl}(\varphi_w(A)))$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$.



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w)=(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$\varphi_w(\mathcal{T})=\{\varphi_w(S)\ /\ S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E)$,

$W=\varphi_w(\emptyset)$, $W^c=\varphi_w(E)$, $\emptyset=\varphi_w(W)$, $E=\varphi_w(W^c)$,

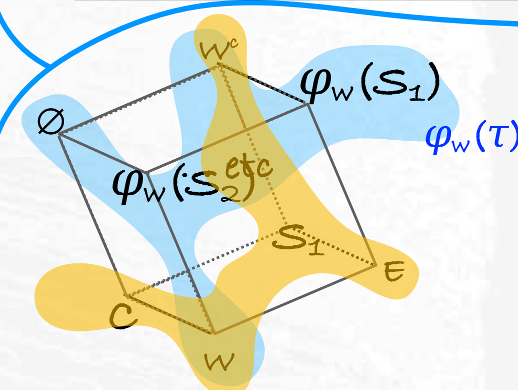
$\{W, W^c\}\subseteq\varphi_w(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j\in\varphi_w(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

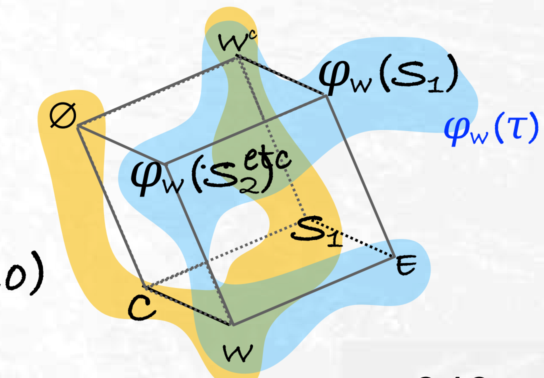
$W\in\mathcal{T} \Rightarrow \emptyset\in\varphi_w(\mathcal{T})$

($\emptyset$ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:

$W^c\in\mathcal{T} \Rightarrow E\in\varphi_w(\mathcal{T})$

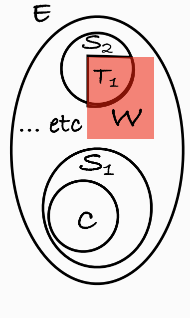
(E es w-abierto y $\emptyset$ w-cerrado)



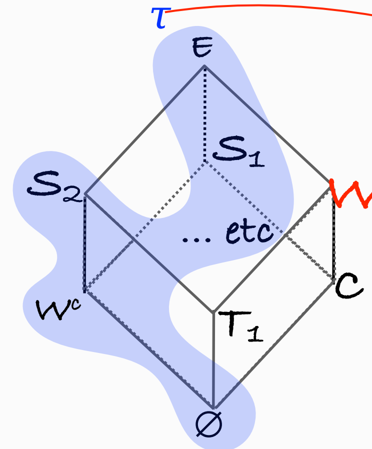
Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$



$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$



$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

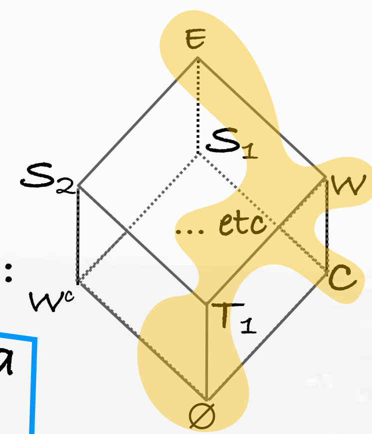
$\mathrm{int}(A) = \{x \ / \ x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \ \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \ \sqcap^E = \bigcup)$.

Marco

Cerrados:



En general: W-TOPOLOGÍA

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases} \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica: (*)

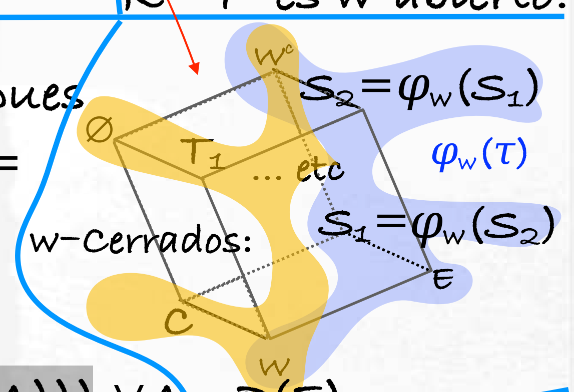
(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\mathrm{int}}_w(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_w(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_w(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_w([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_w(A)]) =$

$\varphi_w(\mathrm{int}(\varphi_w(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_w(A) = \varphi_w(\mathrm{cl}(\varphi_w(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w) = (E, \varphi_w(\mathcal{T}))$:

$\varphi_w(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(S) \ / \ S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_w(\varnothing)$, $W^c = \varphi_w(E)$, $\varnothing = \varphi_w(W)$, $E = \varphi_w(W^c)$,

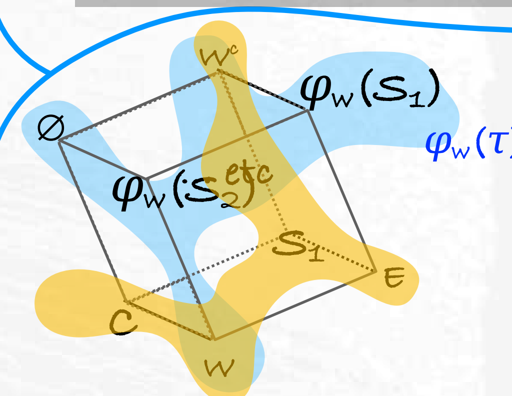
$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_w(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_w(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

(*) (Véase transparencias siguientes)

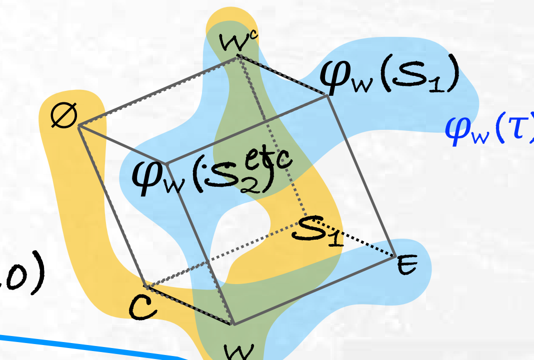


Si W es abierto en $\mathcal{T}$:
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_w(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

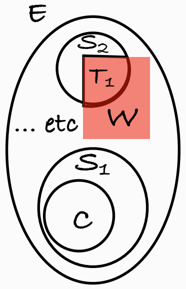
Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:
$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_w(\mathcal{T})$

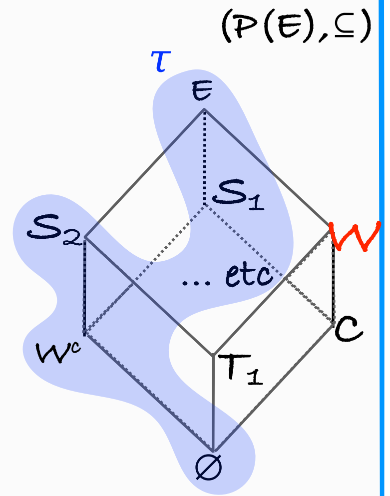
(E es w-abierto y $\varnothing$ w-cerrado)



Proposición. Se verifica: $x \in^W (\text{w-int}(A)) \Leftrightarrow$
$(x \in \mathrm{int}(\varphi_w(A))) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A) \Leftrightarrow (\exists S^* \in \mathcal{T}^*: x \in^W S^* \sqsubseteq^W A)$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





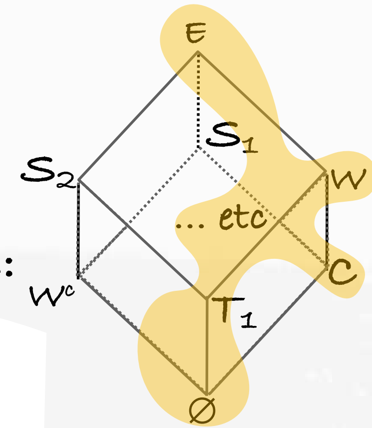
$S_j \in \mathcal{T}\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Cerrados:



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$.

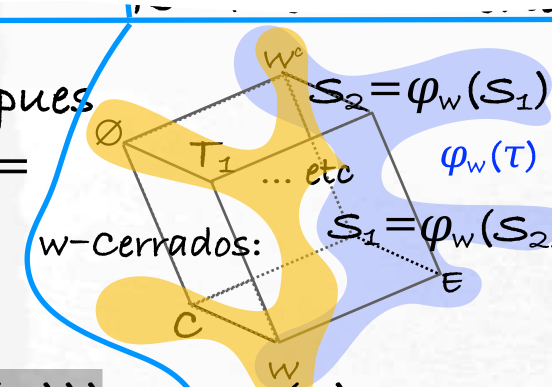
¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Proposición. Se verifica: (*)

(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues
$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T})\ \&\ (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$
$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T})\ \&\ (S \subseteq \varphi_W(A))]) =$
$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))\ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

w-Cerrados:



(*) Proposición. Se verifica: $x \in^W (\text{w-int}(A)) \Leftrightarrow$
$(x \in \mathrm{int}(\varphi_W(A))) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A) \Leftrightarrow (\exists S^* \in \mathcal{T}^*: x \in^W S^* \sqsubseteq^W A)$
$(S^* = \varphi_W(S))$

(*) (Véase transparencias siguientes)

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Sea conjunto E y un operador $\mathrm{Der}: P(E) \to P(E)$ asociado tal que:

1. $\varnothing = \mathrm{Der}(\varnothing)$,
2. $\mathrm{Der}(\mathrm{Der}(S)) \subseteq \mathrm{Der}(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $\mathrm{Der}(S) = \mathrm{Der}(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E),\ \forall x \in E$,
4. $\mathrm{Der}(S \cup T) = \mathrm{Der}(S) \cup \mathrm{Der}(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

W-Topología en términos de conjuntos derivados. W-Puntos aislados

Sea conjunto E y un operador $\mathrm{Der}:P(E)\to P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset=\mathrm{Der}(\emptyset)$,

2. $\mathrm{Der}(\mathrm{Der}(S))\subseteq \mathrm{Der}(S)\quad \forall S\in P(E)$,

3. $\mathrm{Der}(S)=\mathrm{Der}(S-\{x\})\quad \forall S\in P(E),\ \forall x\in E$,

4. $\mathrm{Der}(S\cup T)=\mathrm{Der}(S)\cup \mathrm{Der}(T)\quad \forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

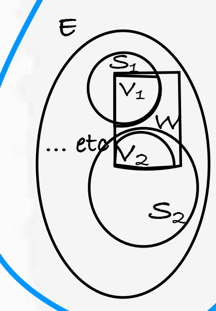
("Der" es un operador "derivado").

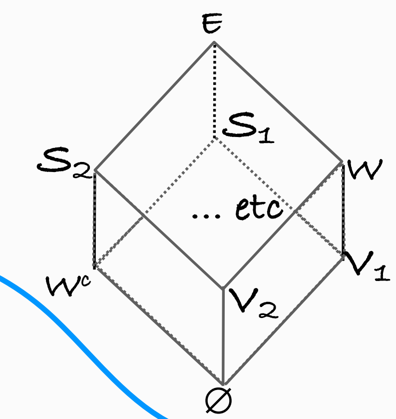
Tal operador $\mathrm{Der}:P(E)\to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V\in P(E)$ tales que $\mathrm{Der}(V))\subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $\mathrm{Der}(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T}\subseteq P(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).





Sea conjunto E y un operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset=Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S))\subseteq Der(S)\ \ \forall S\in P(E)$,
3. $Der(S)=Der(S-\{x\})\ \ \forall S\in P(E),\ \forall x\in E$,
4. $Der(S\cup T)=Der(S)\cup Der(T)\ \ \forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

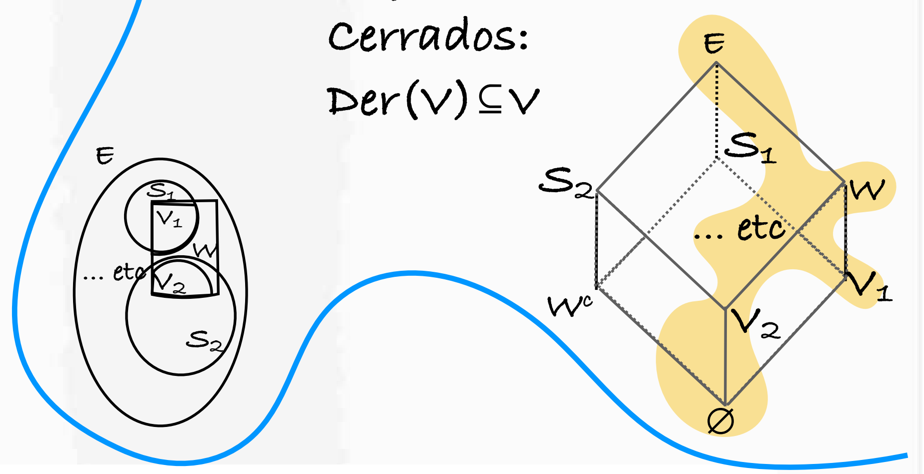
("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V\in P(E)$ tales que $Der(V))\subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, Der(S) es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

W-Topología en términos de conjuntos derivados. W-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subsetneq P(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).



Sea conjunto E y un operador $\mathrm{Der}: P(E) \rightarrow P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset = \mathrm{Der}(\emptyset)$,
2. $\mathrm{Der}(\mathrm{Der}(S)) \subseteq \mathrm{Der}(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $\mathrm{Der}(S) = \mathrm{Der}(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E), \forall x \in E$,
4. $\mathrm{Der}(S \cup T) = \mathrm{Der}(S) \cup \mathrm{Der}(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $\mathrm{Der}: P(E) \rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $\mathrm{Der}(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $\mathrm{Der}(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

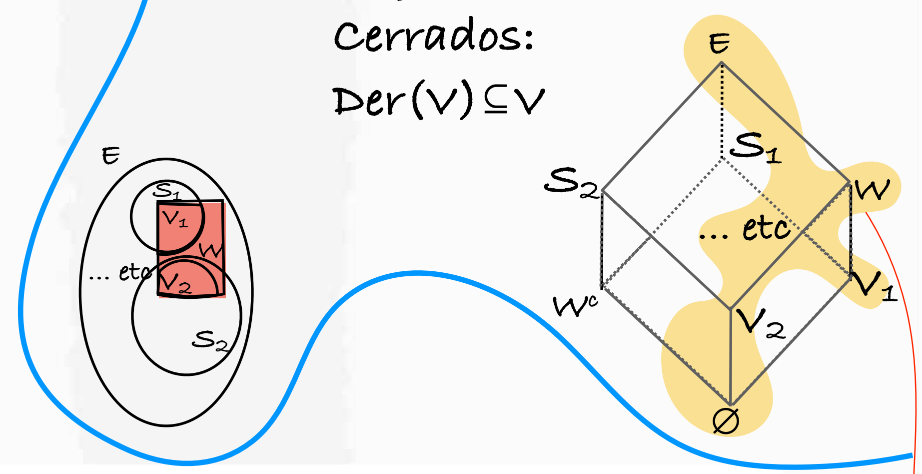
W-Topología en términos de conjuntos derivados. W-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \to P(E)$ asociado tal que:

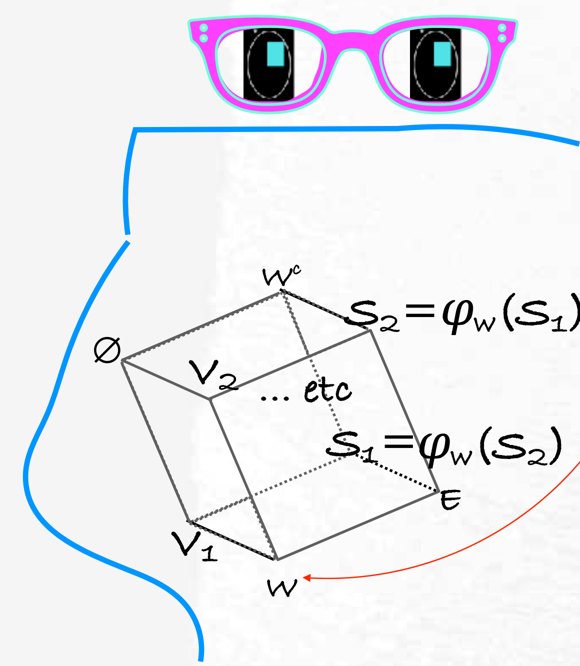
1. $\varnothing = Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E),\ \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").



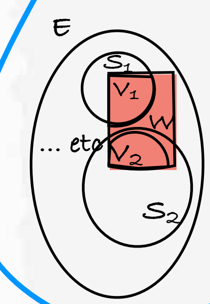
Tal operador $Der: P(E) \to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

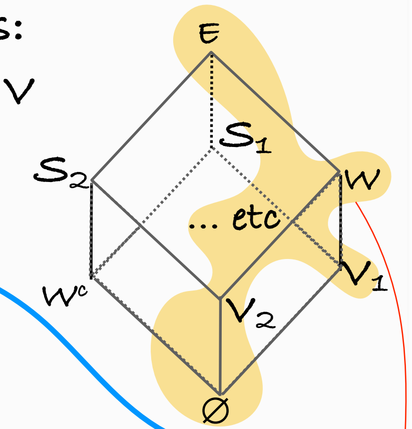


w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).



Cerrados:
$Der(V) \subseteq V$



Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \to P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset = Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S-\{x\}) \quad \forall S \in P(E),\ \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der: P(E) \to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

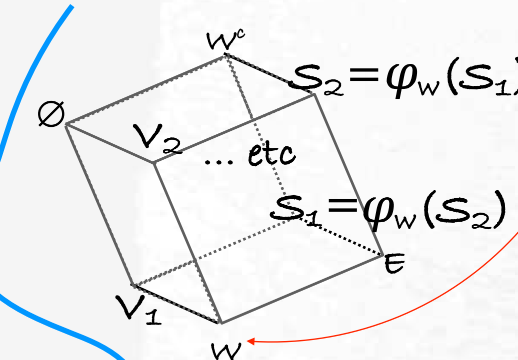
Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"

$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

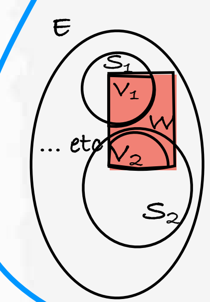
$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \ / \ Der(V) \subseteq V\}.$$

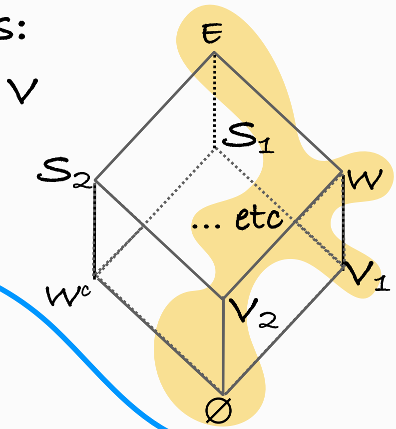


w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T}\subseteq P(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:
$Der(V)\subseteq V$





Sea conjunto E y un operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset=Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S))\subseteq Der(S)\quad \forall S\in P(E)$,
3. $Der(S)=Der(S-\{x\})\quad \forall S\in P(E),\ \forall x\in E$,
4. $Der(S\cup T)=Der(S)\cup Der(T)\quad \forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V\in P(E)$ tales que $Der(V))\subseteq V$.

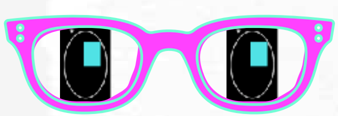
Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"

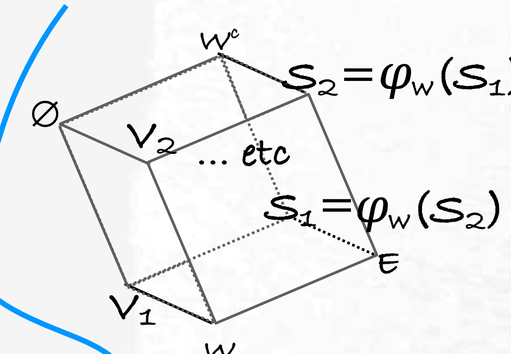
$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

$$\varphi_w(\mathcal{T}) =\{\varphi_w(V) \;/\; Der(V)\subseteq V\}.$$



T es w-cerrado $\Leftrightarrow$
$Der(T)\sqsubseteq^{w}T$.



En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

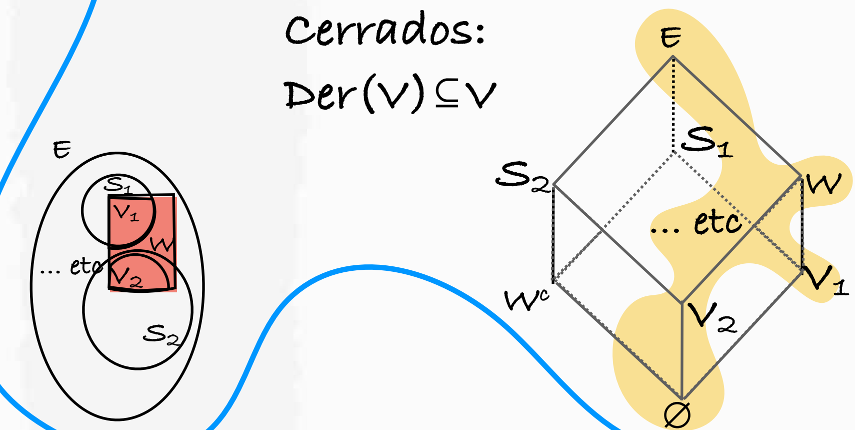
$$(w\text{-}Dev)\,(A)= \varphi_w(Dev(\varphi_w(A)))=\widehat{Dev}_w(A)\quad \forall A\in P(E),$$

es decir:

$$(w\text{-}Dev)= \varphi_w\circ Dev\circ\varphi_w \qquad y \quad \varphi_w(\mathcal{T}) =\{K \;/\; (w\text{-}Dev)\,(K)\sqsubseteq^{\omega}K\}.$$

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).



Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \to P(E)$ asociado tal que:

1. $\varnothing = Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E), \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der: P(E) \to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, Der(S) es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"

$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

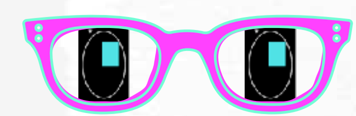
$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \;/\; Der(V) \subseteq V\}.$$

En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

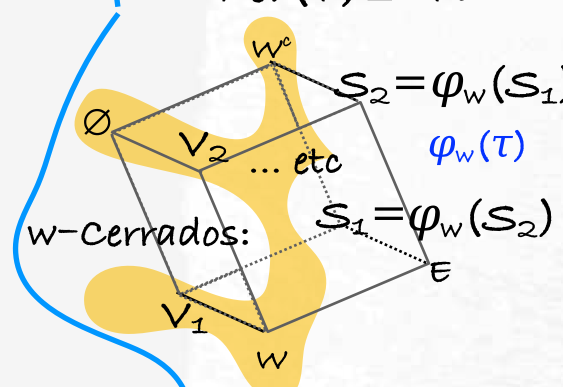
$$(w\text{-}Dev)(A) = \varphi_w(Dev(\varphi_w(A))) = \widehat{Dev}_w(A) \quad \forall A \in P(E),$$

es decir:

$$(w\text{-}Dev) = \varphi_w \circ Dev \circ \varphi_w \qquad y \quad \varphi_w(\mathcal{T}) = \{K \;/\; (w\text{-}Dev)(K) \sqsubseteq^{\omega} K\}.$$

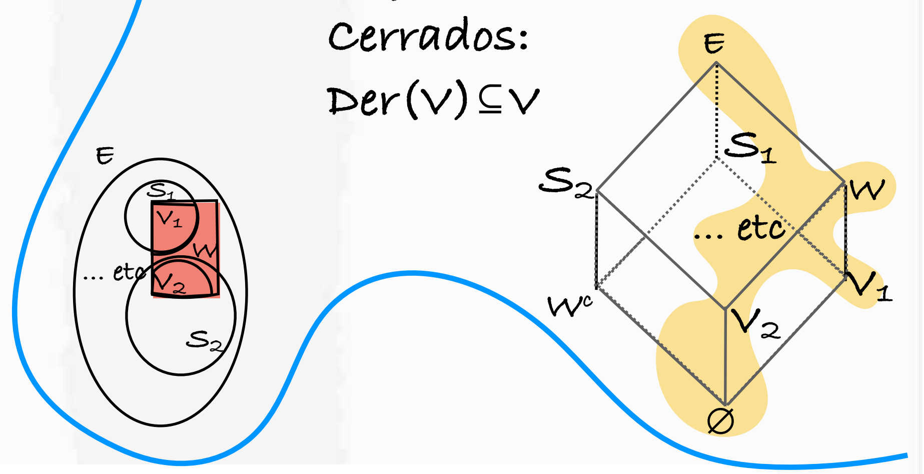


T es w-cerrado⇔ $Der(T) \sqsubseteq^{w} T$.



w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).



Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \to P(E)$ asociado tal que:

1. $\emptyset = Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S-\{x\}) \quad \forall S \in P(E), \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

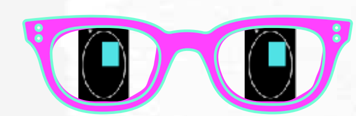
("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der: P(E) \to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

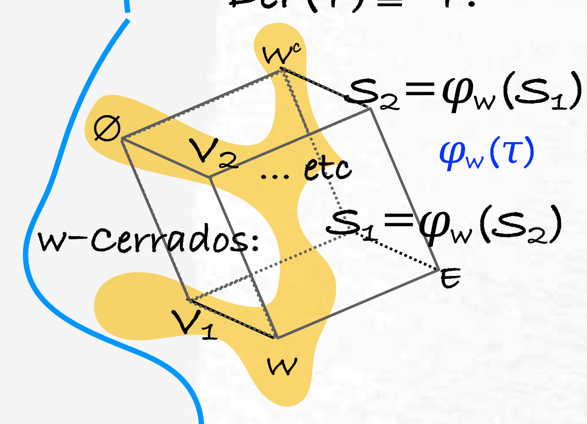
Esa topología es tal que, para todo S, Der(S) es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"
$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,
en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \,/\, Der(V) \subseteq V\}.$$



T es w-cerrado ⇔ $Der(T) \sqsubseteq^w T$.



En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

$$(w\text{-}Dev)(A) = \varphi_w(Dev(\varphi_w(A))) = \widehat{Dev}_w(A) \quad \forall A \in P(E),$$

es decir:

$$(w\text{-}Dev) = \varphi_w \circ Dev \circ \varphi_w \quad \text{y} \quad \varphi_w(\mathcal{T}) = \{K \,/\, (w\text{-}Dev)(K) \sqsubseteq^{\omega} K\}.$$

En $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ se define: $(w\text{-}Aisl)(A) = (w\text{-}Cla)(A) \sqcap^w [(w\text{-}Dev)(A)]^c \quad \forall A \in P(E)$ w-Aislado de A)

Si Aisl(A) representa el conjunto de aislados de A en $(E, \mathcal{T})$, se verifica que:

$$(w\text{-}Aisl) = \widehat{Aisl}_w = \varphi_w \circ Aisl \circ \varphi_w$$

Caracterización de funciones continuas mediante la w-topología $\varphi_w(\tau)$

Sea E un referencial, sea $g:E\rightarrow E$ una aplicación y sea $g^{-1}:P(E)\rightarrow P(E)$ su correspondiente aplicación inversa entre las partes tal que: $g^{-1}(B)=\{x\in E \,/\, f(x)\in B\} \quad \forall B\in P(E)$.

Sea E un referencial, sea $g:E \to E$ una aplicación y sea $g^{-1}:P(E) \to P(E)$ su correspondiente aplicación inversa entre las partes tal que: $g^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\} \;\; \forall B \in P(E)$.

Dado $W \in P(E)$, sea $\varphi_w:P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W) \;\; \forall A \in P(E)$.

Consideremos la aplicación $\hat{g}_w^{-1}:P(E) \to P(E)$ tal que $\hat{g}_w^{-1} = \varphi_w \circ g^{-1} \circ \varphi_w$. (la <u>w-inversa</u> de g).

(*)<u>Proposición</u>. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F}) = \{\varphi_w(F) \,/\, F \in \mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B) \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow [\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B)) \in \varphi_w(\mathcal{F})].$$

(*) (Véase transparencias siguientes)

Sea E un referencial, sea $g:E\to E$ una aplicación y sea $g^{-1}:P(E)\to P(E)$ su correspondiente aplicación inversa entre las partes tal que: $g^{-1}(B)=\{x\in E \,/\, f(x)\in B\}\ \ \forall B\in P(E)$.

Dado $W\in P(E)$, sea $\varphi_w:P(E)\to P(E)$ tal que $\varphi_w(A)= A\Delta W=(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)\ \ \forall A\in P(E)$.

Consideremos la aplicación $\hat{g}_w^{-1}:P(E)\to P(E)$ tal que $\hat{g}_w^{-1} = \varphi_w\circ g^{-1}\circ\varphi_w$. (la <u>w-inversa</u> de g).

(*)<u>Proposición</u>. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F})=\{\varphi_w(F) \,/\, F\in\mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B)\in\mathcal{F}) \Leftrightarrow [\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})].$$

<u>Corolario</u>. Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sean W un subconjunto cualquiera de E y $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ el espacio w-topológico correspondiente.
Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. La aplicación $g:(E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ es continua.
2. Para todo $V\in\varphi_w(\mathcal{T})$, el subconjunto $\hat{g}_w^{-1}(V)$ es un w-abierto de $\varphi_w(\mathcal{T})$.

Que prueba que una función continua $g:E\to E$ para la topología $\mathcal{T}$ puede caracterizarse mediante cualquier w-topología $\varphi_w(\mathcal{T})$ inducida en E; la imagen w-inversa de cualquier w-abierto también es un w-abierto.

(*) (Véase transparencias siguientes)

<u>Proposición</u>. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F})=\{\varphi_w(F)\ /\ F\in\mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B)\in\mathcal{F})\ \Leftrightarrow[\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})].$$

Proposición. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F})=\{\varphi_w(F)\ /\ F\in\mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B)\in\mathcal{F}) \Leftrightarrow [\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})].$$

Demostración. Sea B tal que $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Entonces $g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B)))\in\mathcal{F}$ y en consecuencia $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$.

Recíprocamente, si $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$ entonces $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\varphi_w(g^{-1}(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, luego existe $k\in\mathcal{F}$ tal que $\varphi_w(g^{-1}(B))=\varphi_w(k)$, luego $\varphi_w(\varphi_w(g^{-1}(B)))= \varphi_w(\varphi_w(k))$, es decir $g^{-1}(B)=k\in\mathcal{F}$. ∎

<u>Proposición</u>. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F})=\{\varphi_w(F) \,/\, F\in\mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B)\in\mathcal{F}) \Leftrightarrow [\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})].$$

<u>Demostración</u>. Sea B tal que $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Entonces $g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B)))\in\mathcal{F}$ y en consecuencia $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$.

Recíprocamente, si $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$ entonces $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\varphi_w(g^{-1}(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, luego existe $k\in\mathcal{F}$ tal que $\varphi_w(g^{-1}(B))=\varphi_w(k)$, luego $\varphi_w(\varphi_w(g^{-1}(B)))= \varphi_w(\varphi_w(k))$, es decir $g^{-1}(B)=k\in\mathcal{F}$. ∎

En consecuencia:

<u>Corolario</u>. Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sean W un subconjunto cualquiera de E y $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ el espacio w-topológico correspondiente.
Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. La aplicación $g:(E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ es continua.
2. Para todo $V\in\varphi_w(\mathcal{T})$, el subconjunto $\hat{g}_w^{-1}(V)$ es un w-abierto de $\varphi_w(\mathcal{T})$.

<u>Proposición</u>. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $P(E)$ y sea $\varphi_w(\mathcal{F})=\{\varphi_w(F)\ /\ F\in\mathcal{F}\}$. Se verifica:

$$(g^{-1}(B)\in\mathcal{F}) \Leftrightarrow [\hat{g}_w^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})].$$

<u>Demostración</u>. Sea B tal que $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Entonces $g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B)))\in\mathcal{F}$ y en consecuencia $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$.

Recíprocamente, si $\hat{g}^{-1}(\varphi_w(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$ entonces $\varphi_w(g^{-1}(\varphi_w(\varphi_w(B))))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, es decir $\varphi_w(g^{-1}(B))\in\varphi_w(\mathcal{F})$, luego existe $k\in\mathcal{F}$ tal que $\varphi_w(g^{-1}(B))=\varphi_w(k)$, luego $\varphi_w(\varphi_w(g^{-1}(B)))=\varphi_w(\varphi_w(k))$, es decir $g^{-1}(B)=k\in\mathcal{F}$. ∎

En consecuencia:

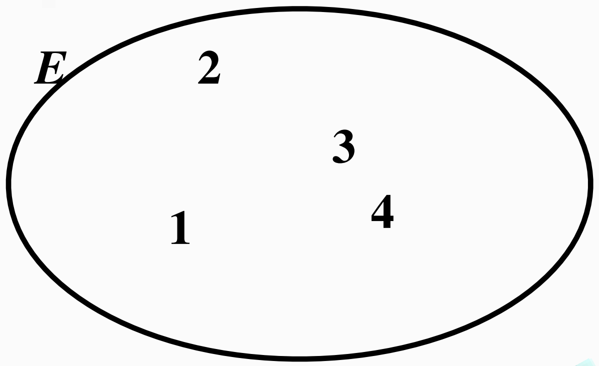
<u>Corolario</u>. Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sean W un subconjunto cualquiera de E y $(E,\varphi_w(\mathcal{T}))$ el espacio w-topológico correspondiente.
Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. La aplicación $g:(E,\mathcal{T})\rightarrow(E,\mathcal{T})$ es continua.
2. Para todo $V\in\varphi_w(\mathcal{T})$, el subconjunto $\hat{g}_w^{-1}(V)$ es un w-abierto de $\varphi_w(\mathcal{T})$.

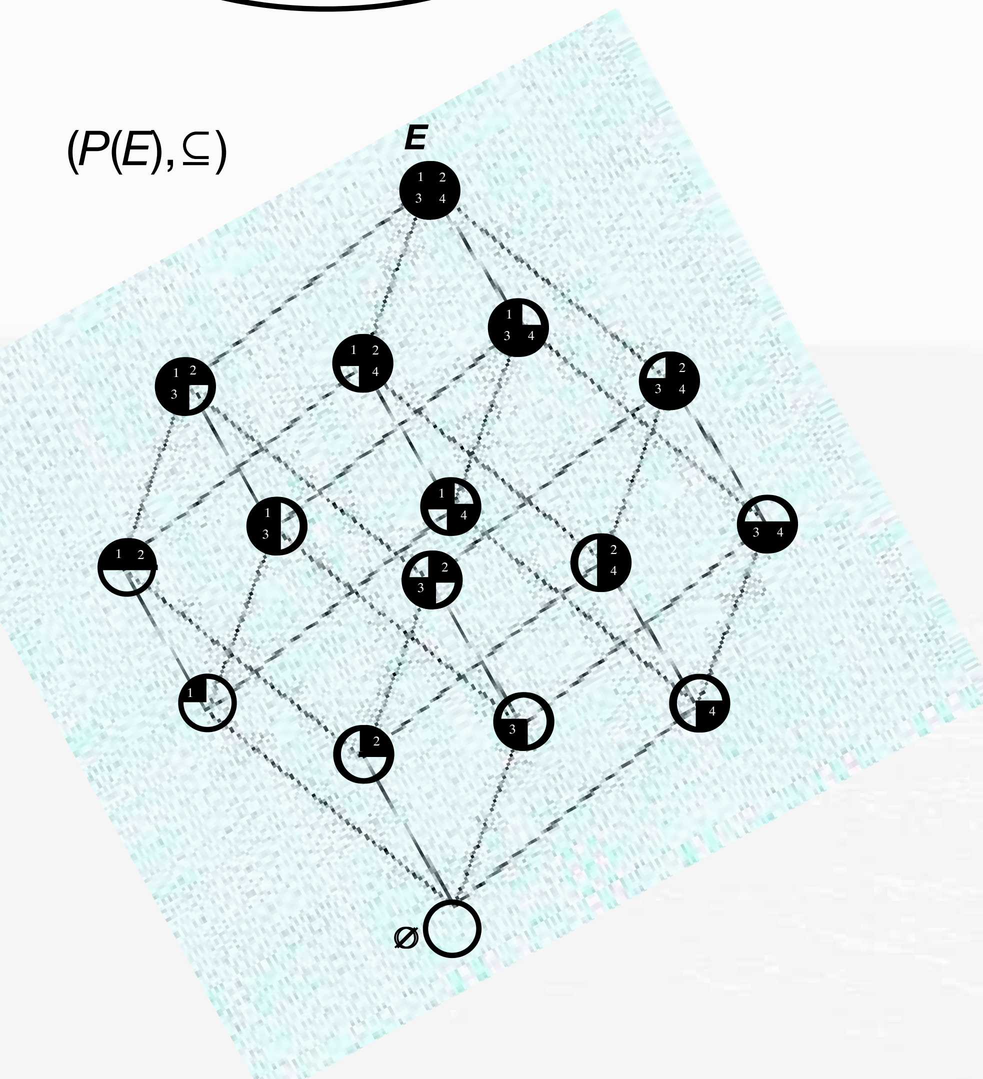
<u>Cuestión abierta</u>: w-topologías borrosas?

Ejemplo: w-topologías sobre referenciales finitos asociados a los isomorfismos φ_w

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$

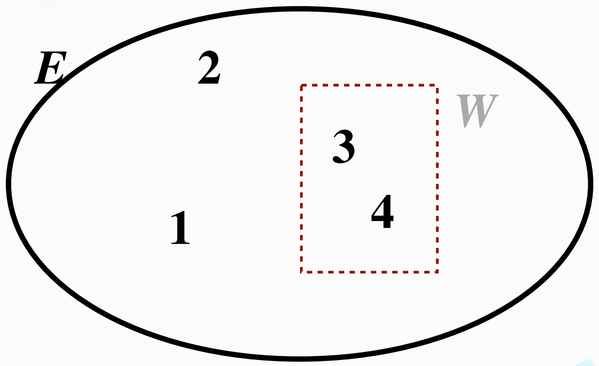


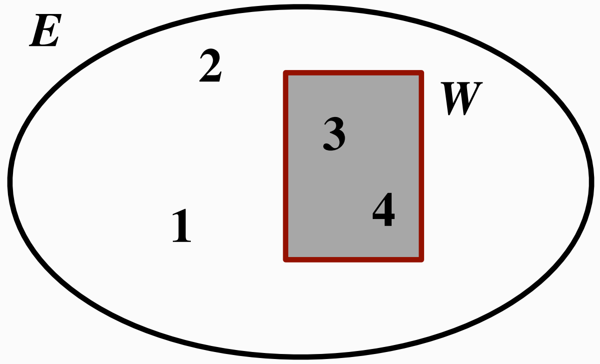
$(P(E), \subseteq)$

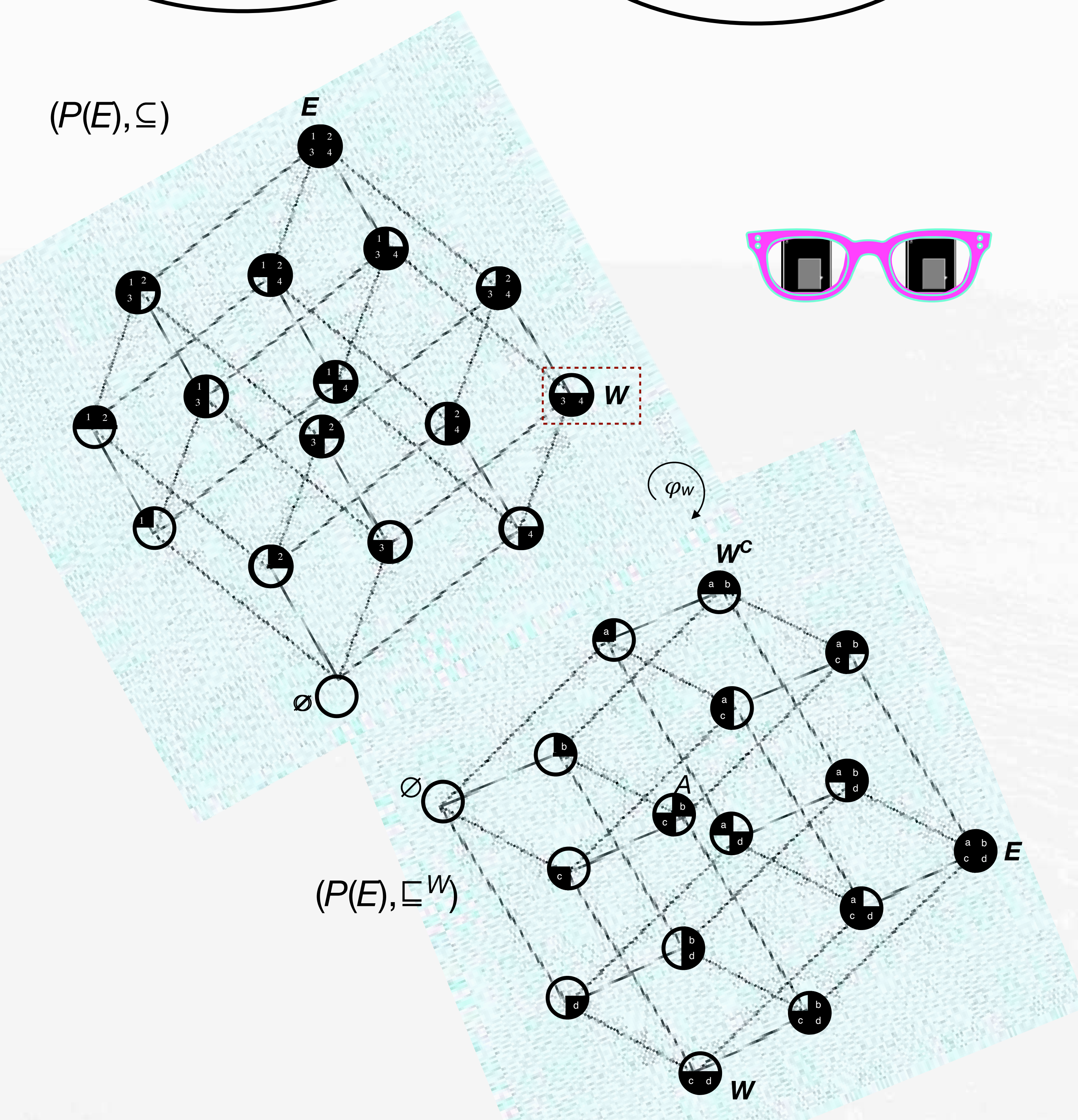


W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



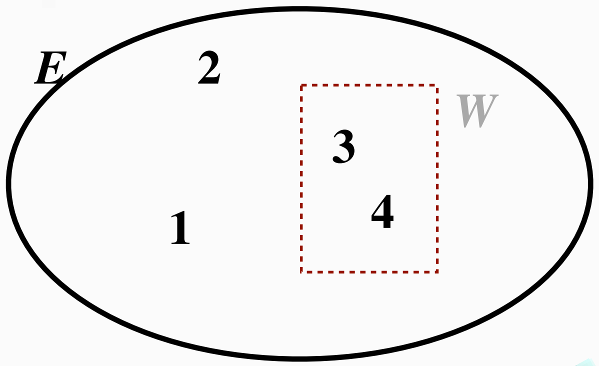


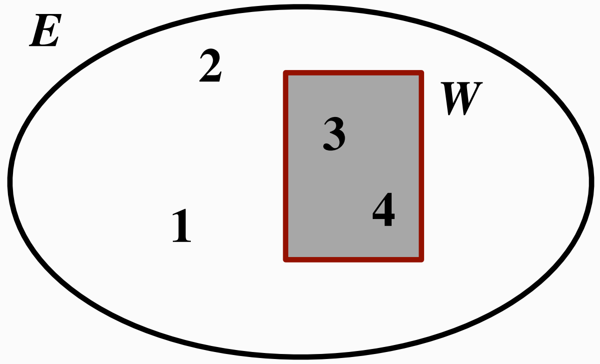


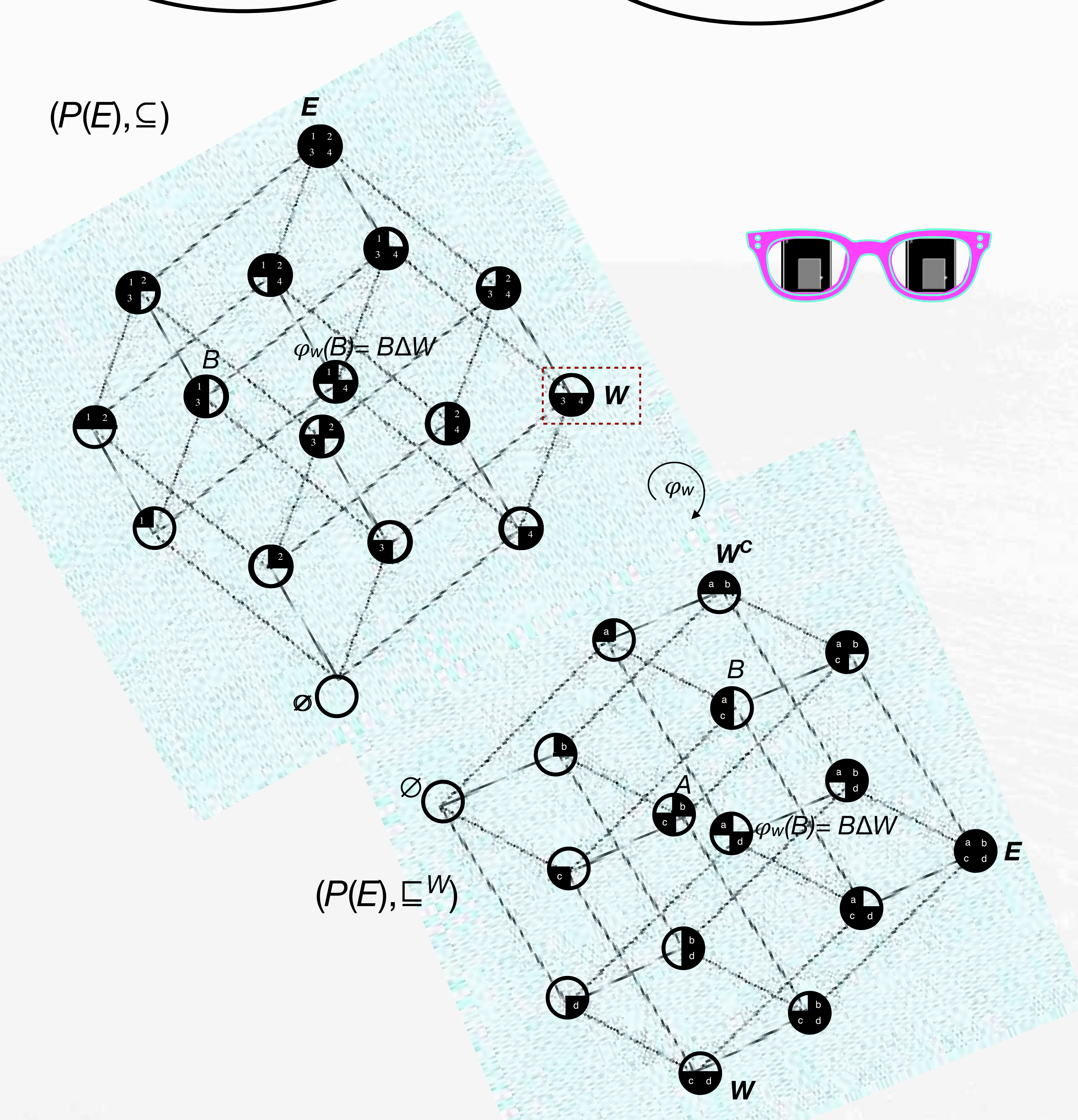
$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$





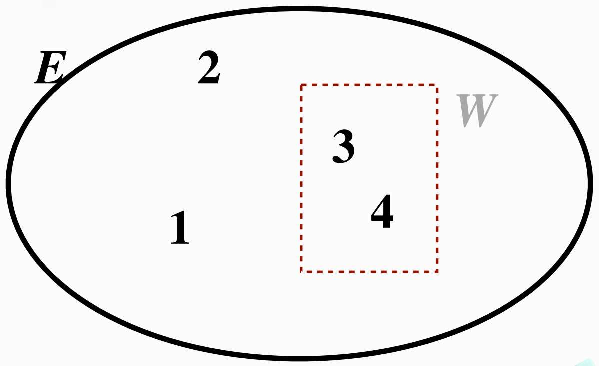


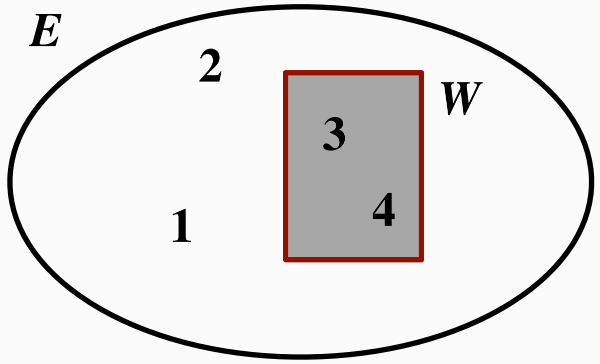
$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$

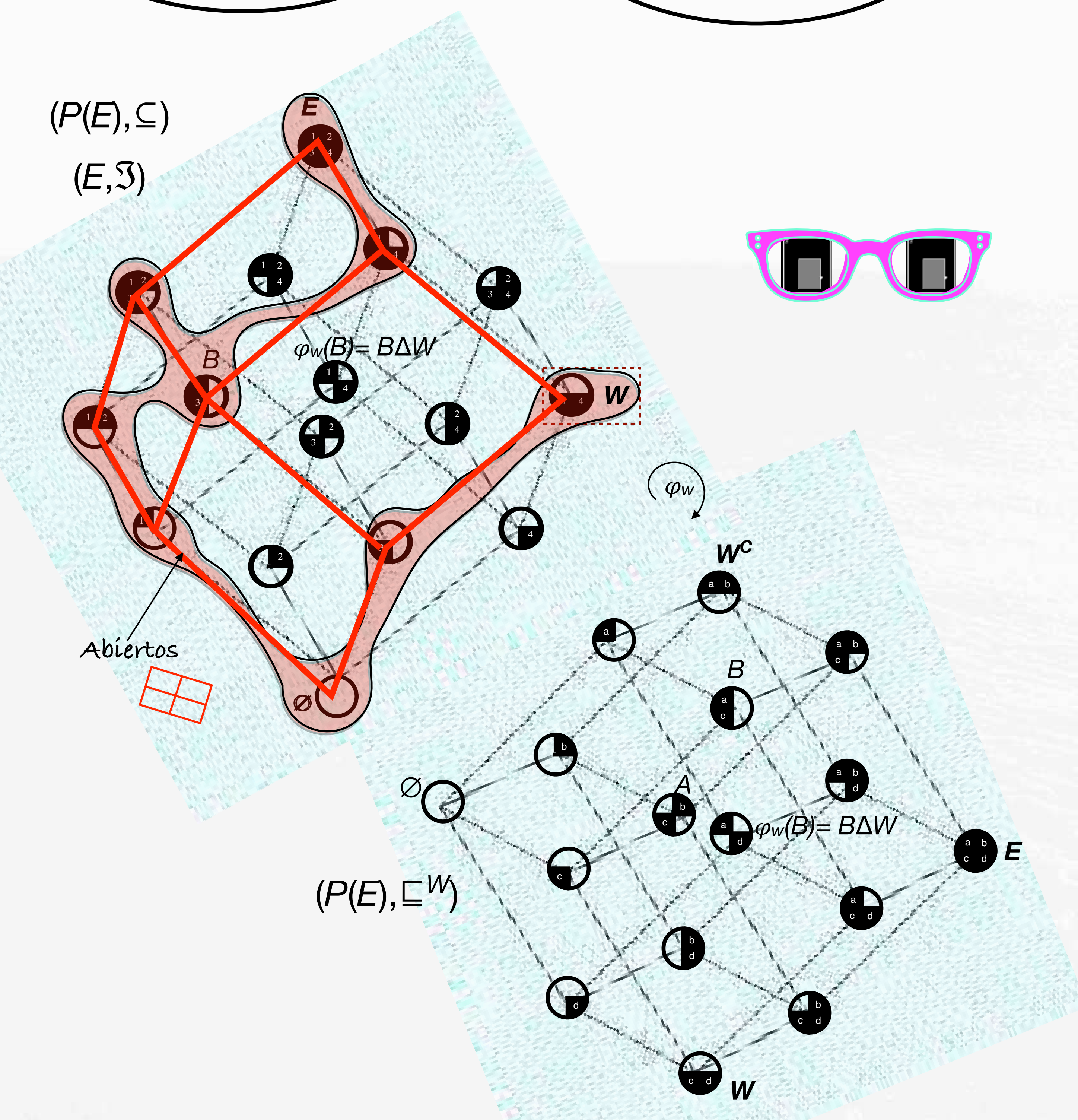




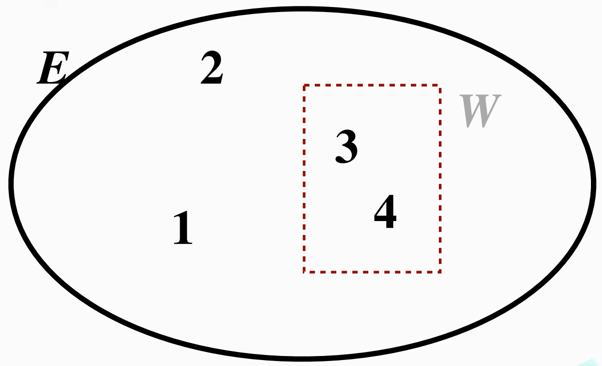
$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

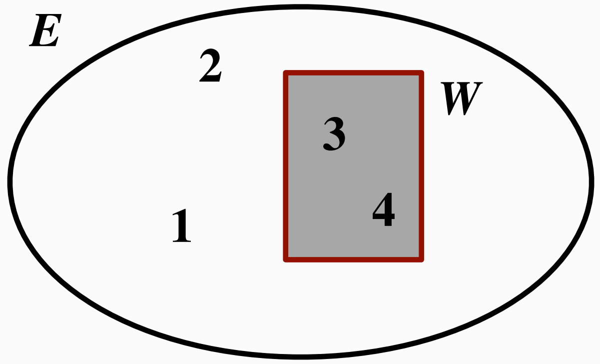
$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$



Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



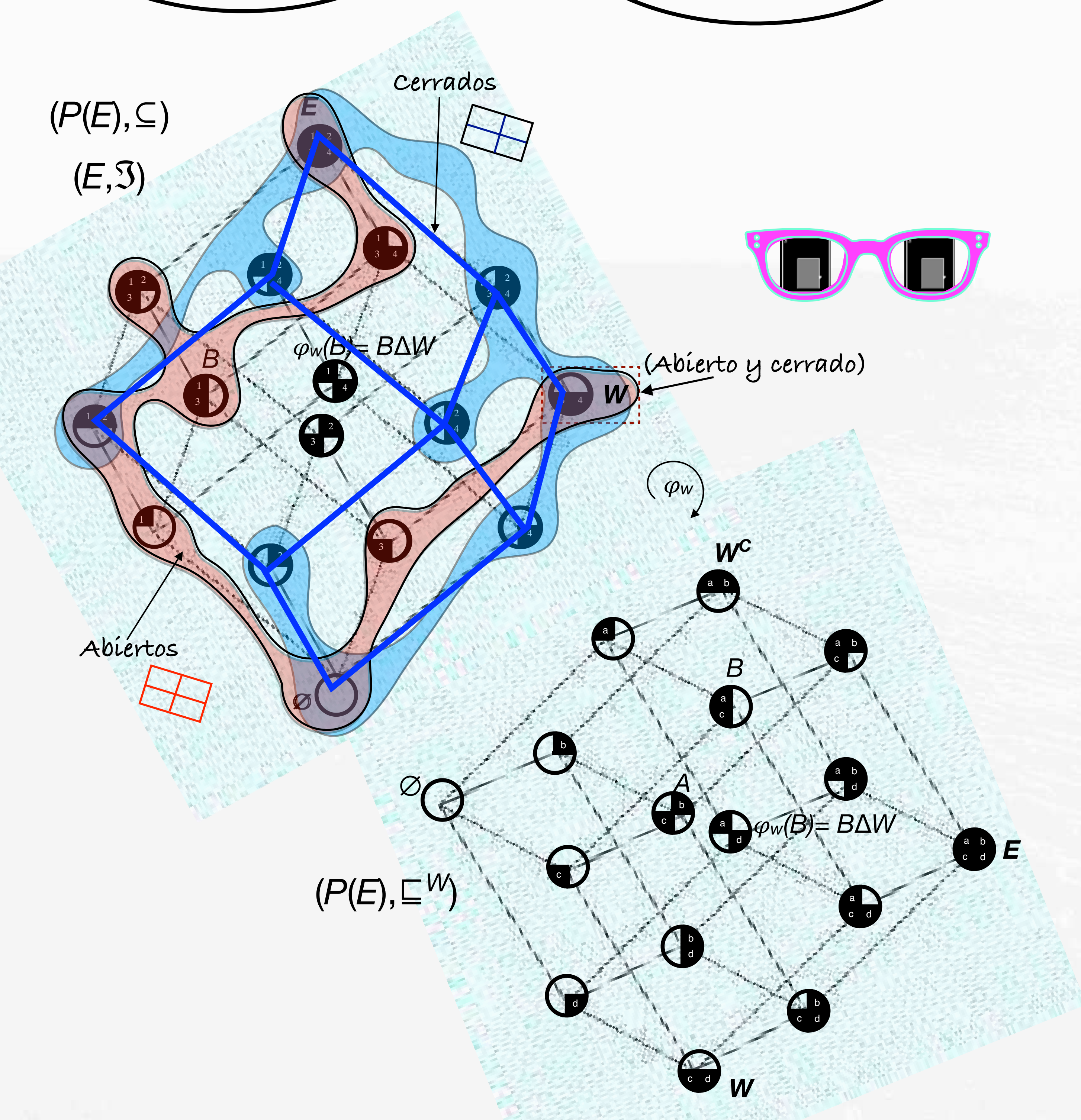


$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

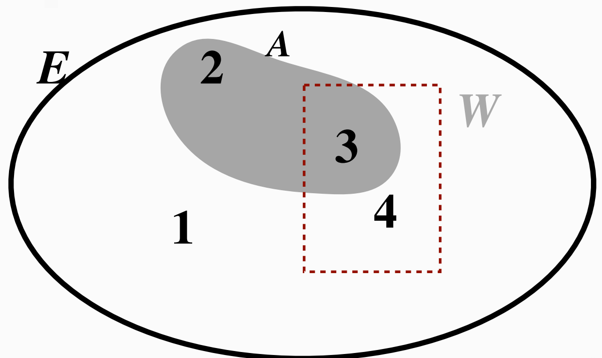
$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

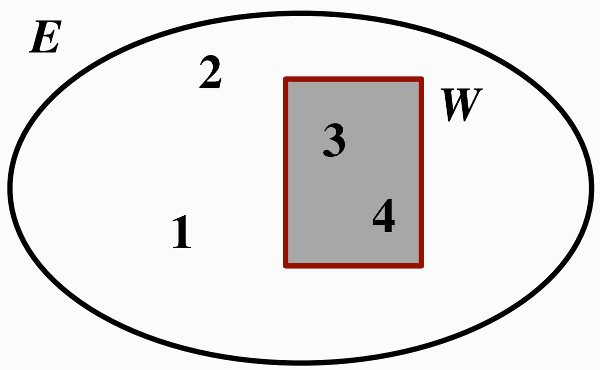
Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

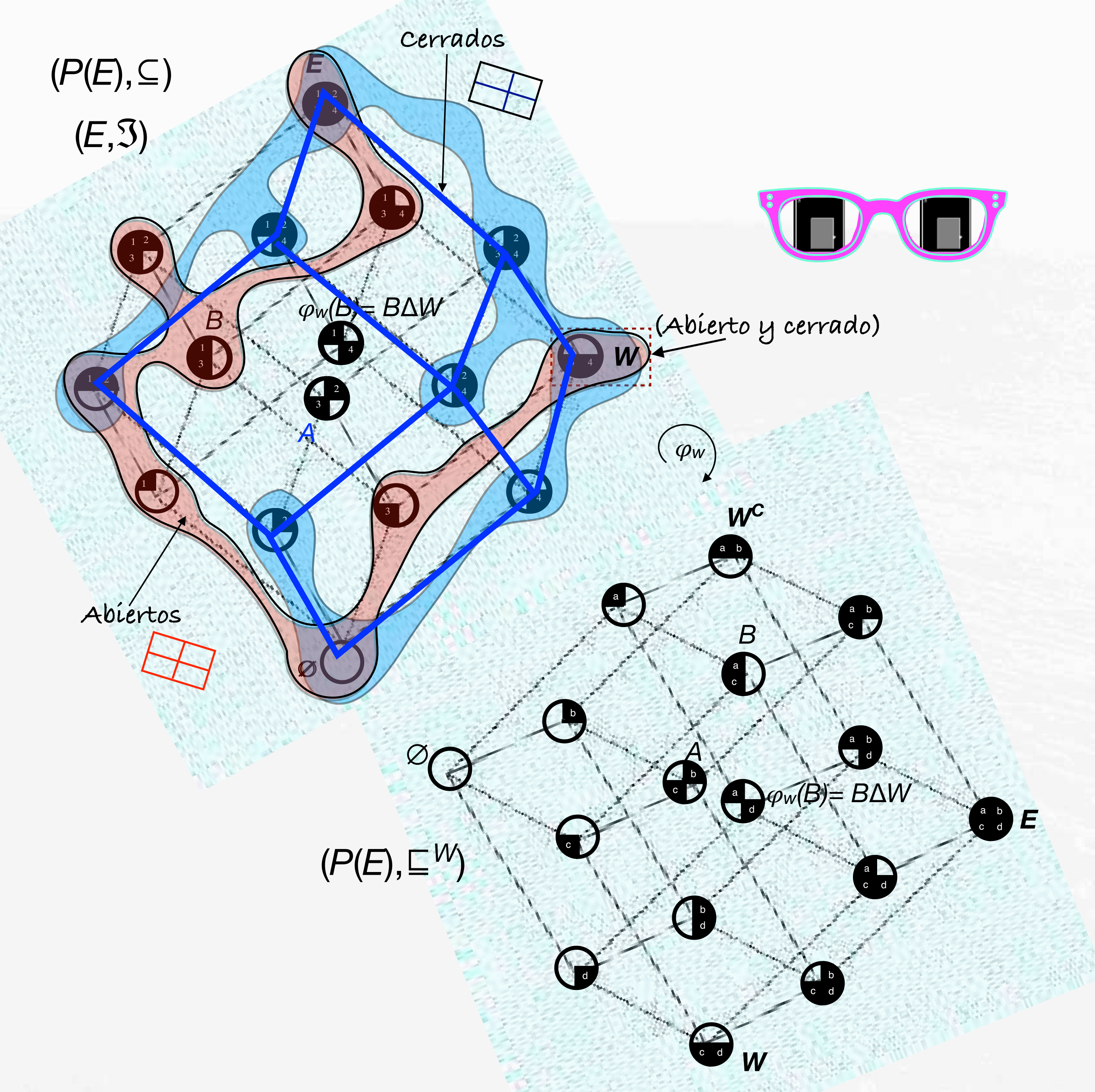


Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$

Operador topológico $g \in \{Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der\}$

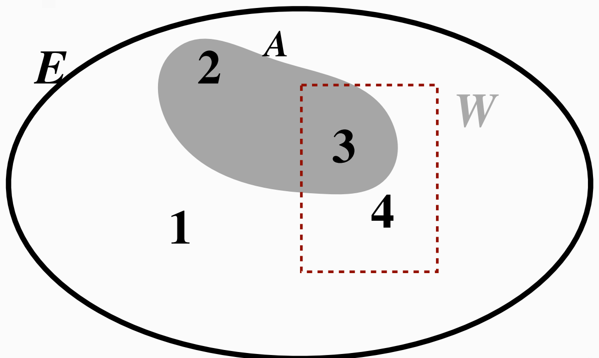
$g: P(E) \rightarrow P(E)$

P(E)

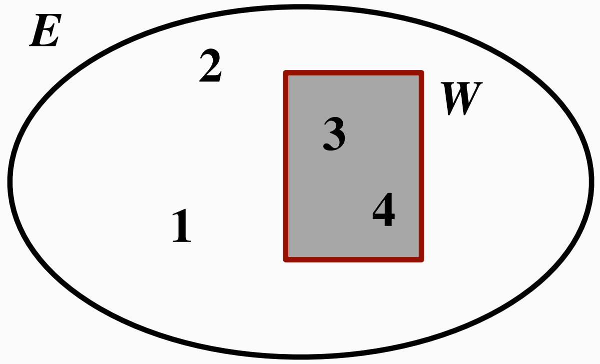
A →

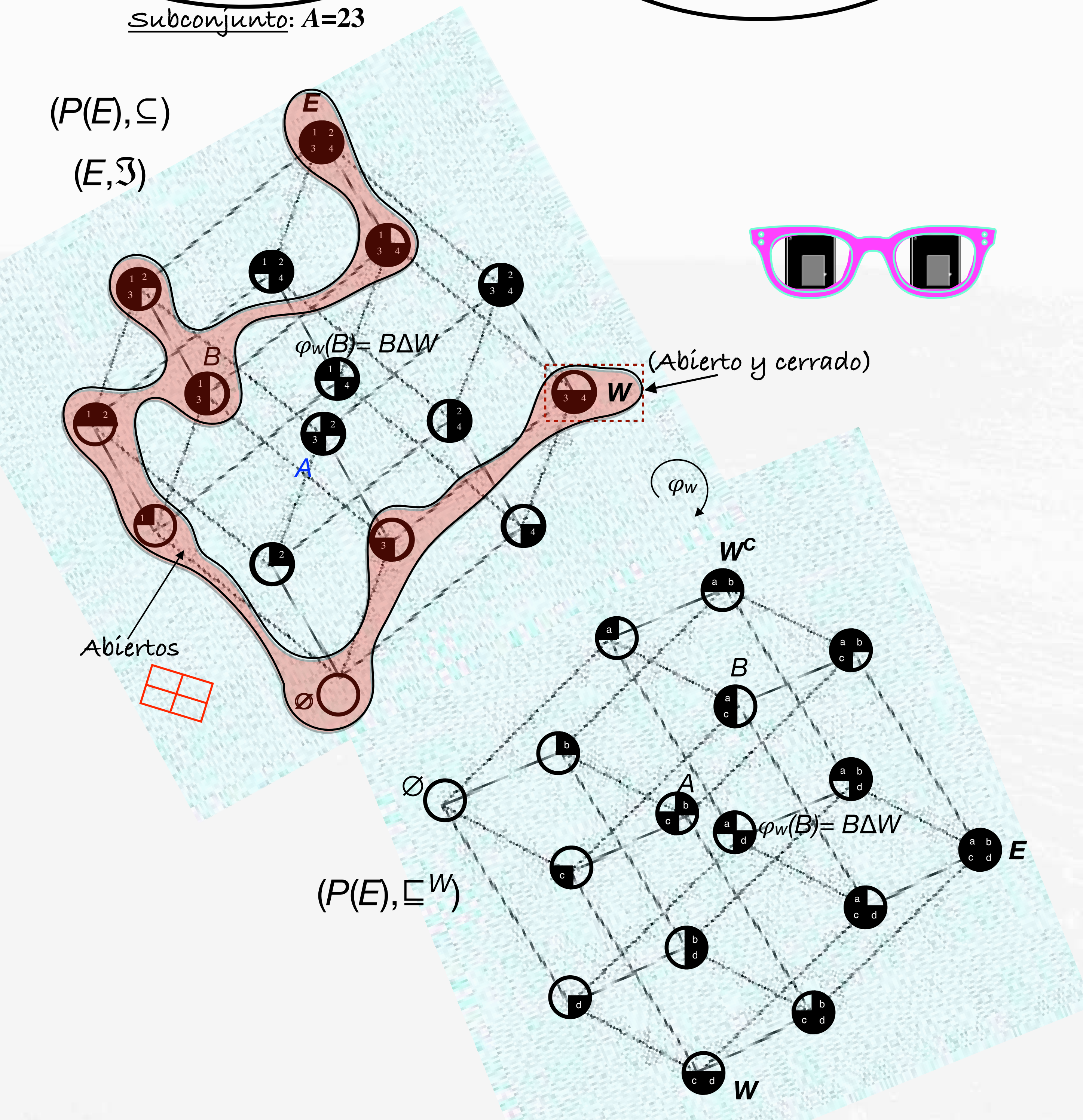
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	*E*	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	*E*	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	*E*	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	*E*	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	*E*	∅	∅	*E*	13	24

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34 \qquad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$

Operador topológico $g \in \{Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der\}$

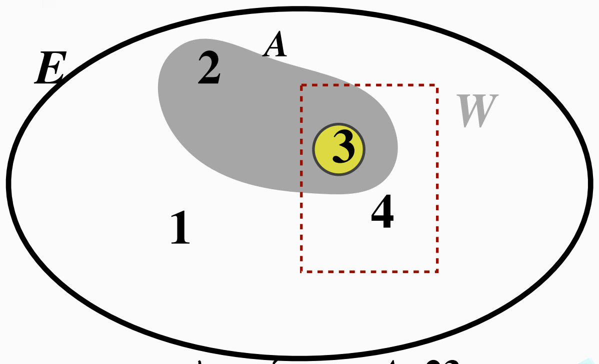
$g: P(E) \to P(E)$

P(E)

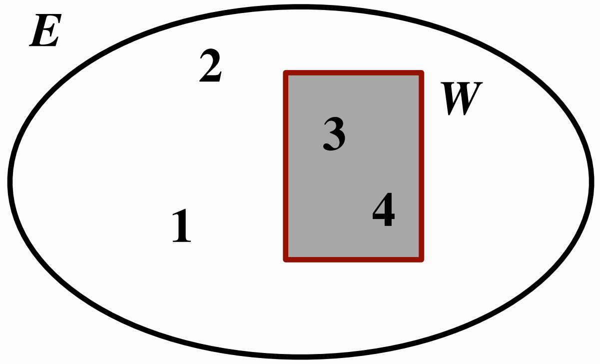
A →

	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	E	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	E	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	E	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	E	∅	∅	E	13	24

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

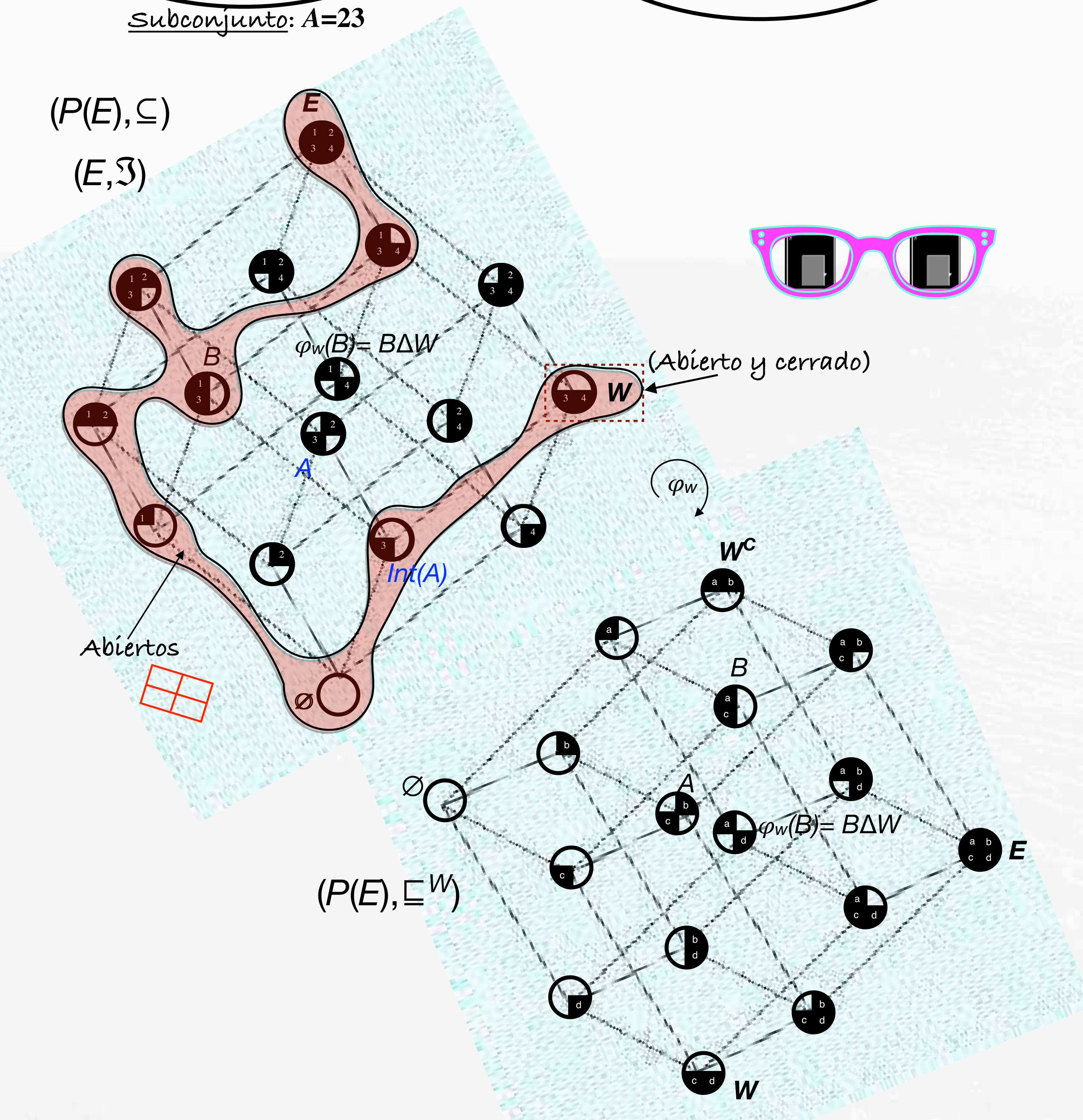
Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

$g: P(E) \to P(E)$

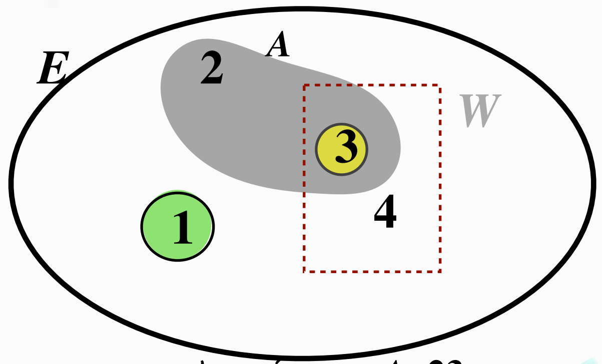
P(E)

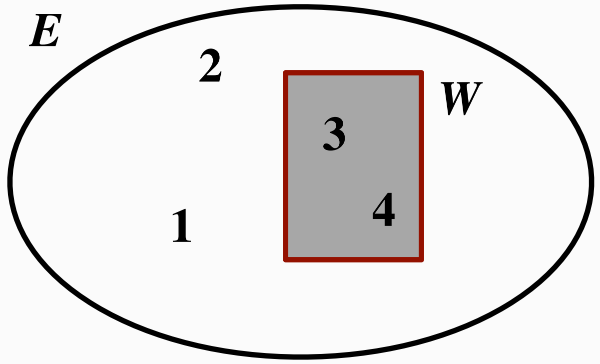
A →

	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	*E*	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	*E*	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	*E*	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	*E*	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	*E*	∅	∅	*E*	13	24

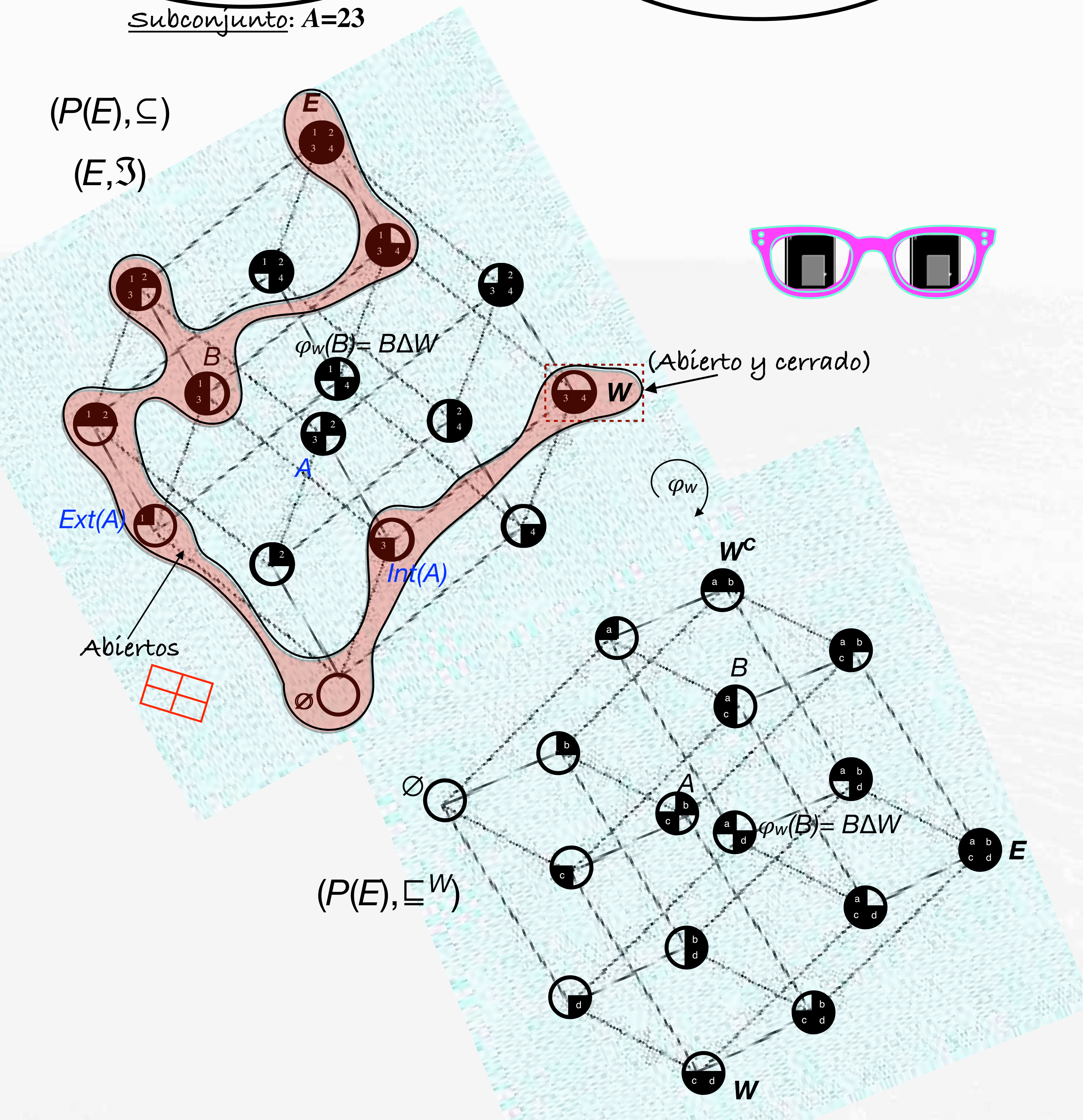


Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$





Subconjunto: A=23



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \mathfrak{I})$

Familia de cerrados: $\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Operador topológico $g \in$ { Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der }

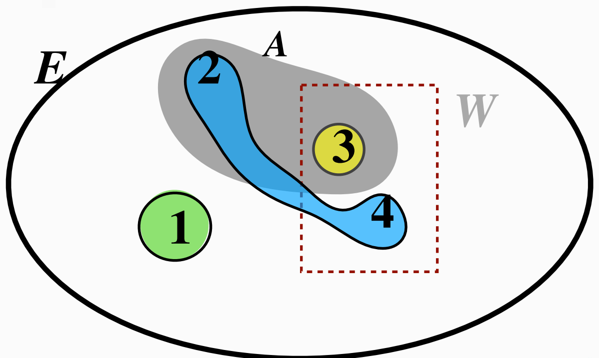
$g: P(E) \longrightarrow P(E)$

P(E)

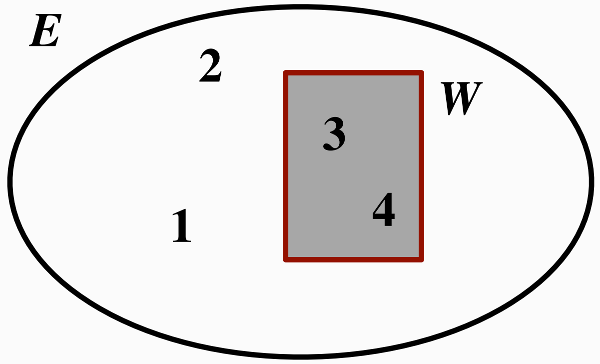
A →

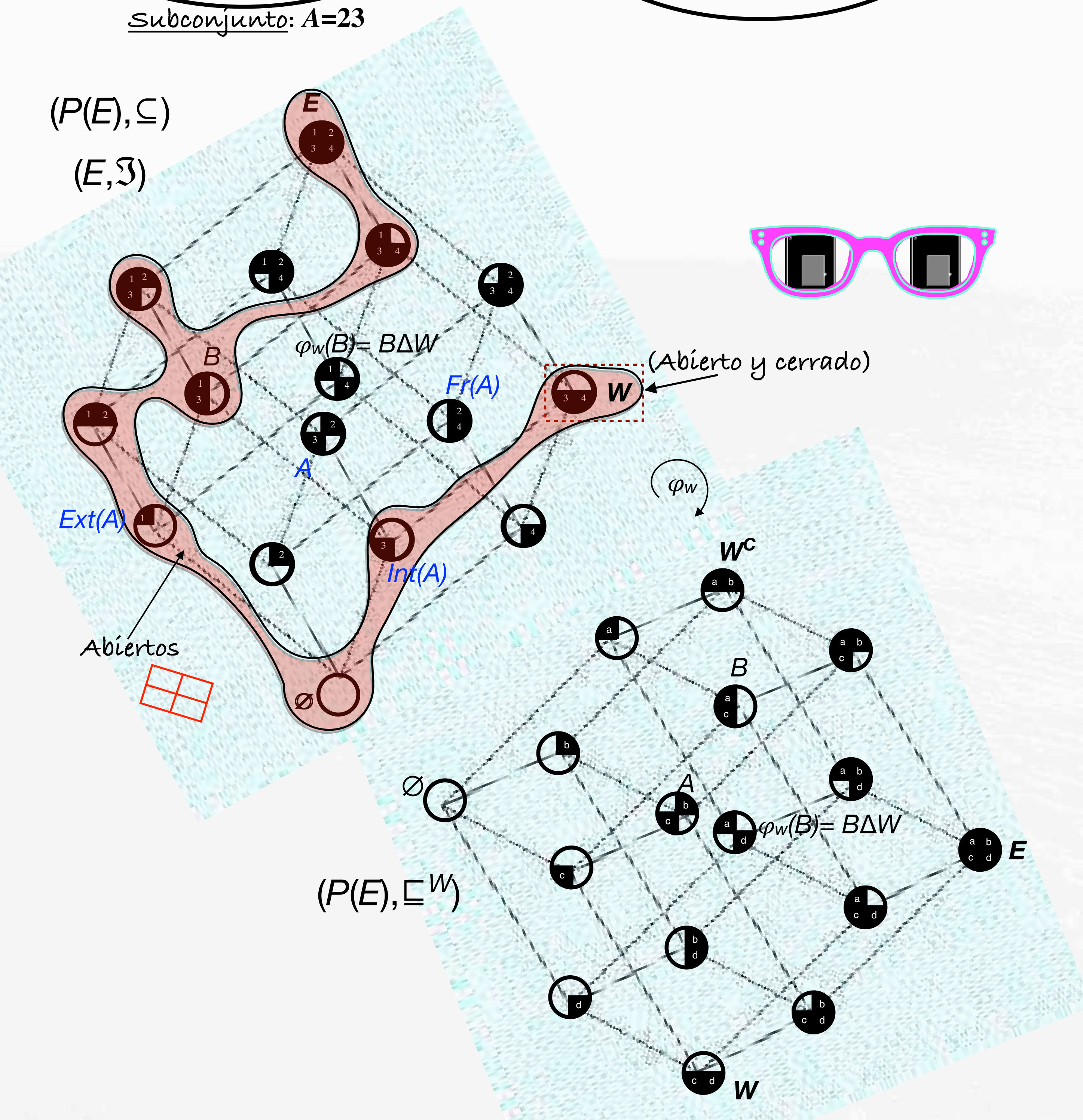
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	*E*	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	*E*	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	*E*	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	*E*	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	*E*	∅	∅	*E*	13	24

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34 \qquad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

$g: P(E) \to P(E)$

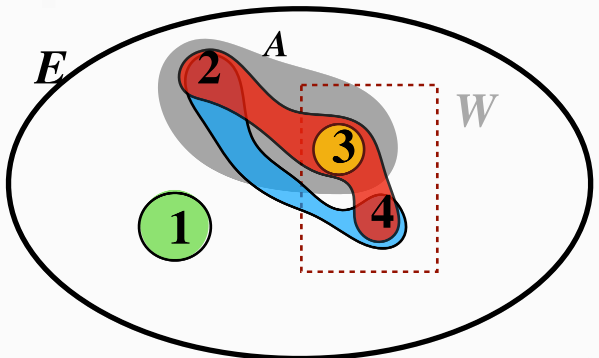
P(E)

A →

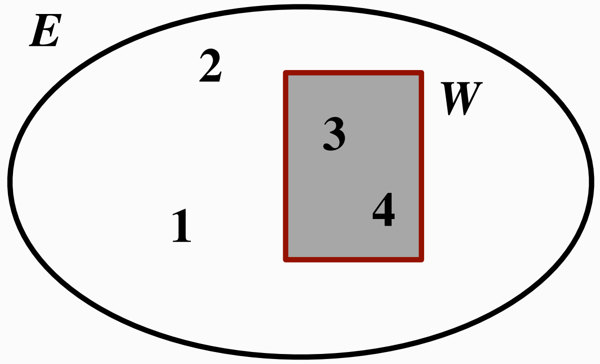
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	*E*	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	*E*	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	*E*	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	*E*	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	*E*	∅	∅	*E*	13	24

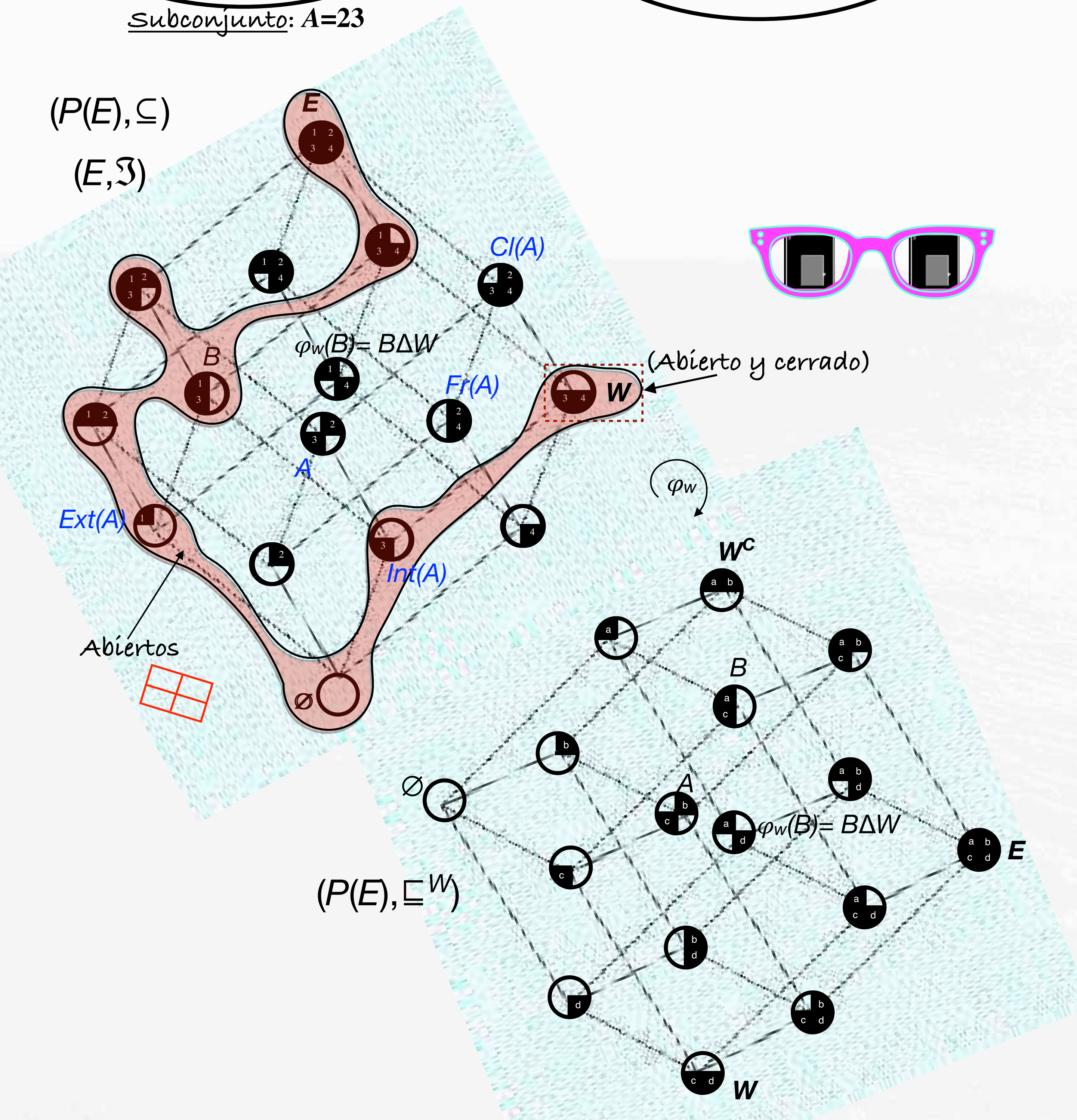
W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$

Operador topológico $g \in \{Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der\}$

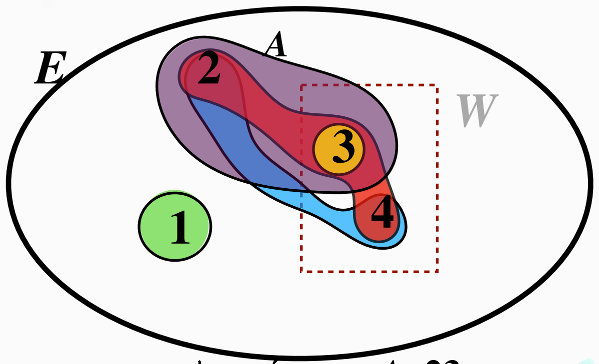
$g: P(E) \to P(E)$

P(E)

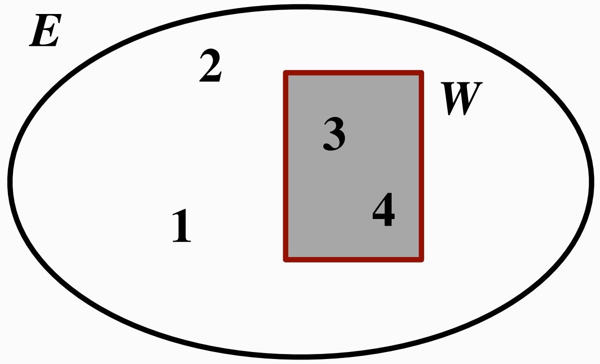
A →

	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	E	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	E	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	E	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	E	∅	∅	E	13	24

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23

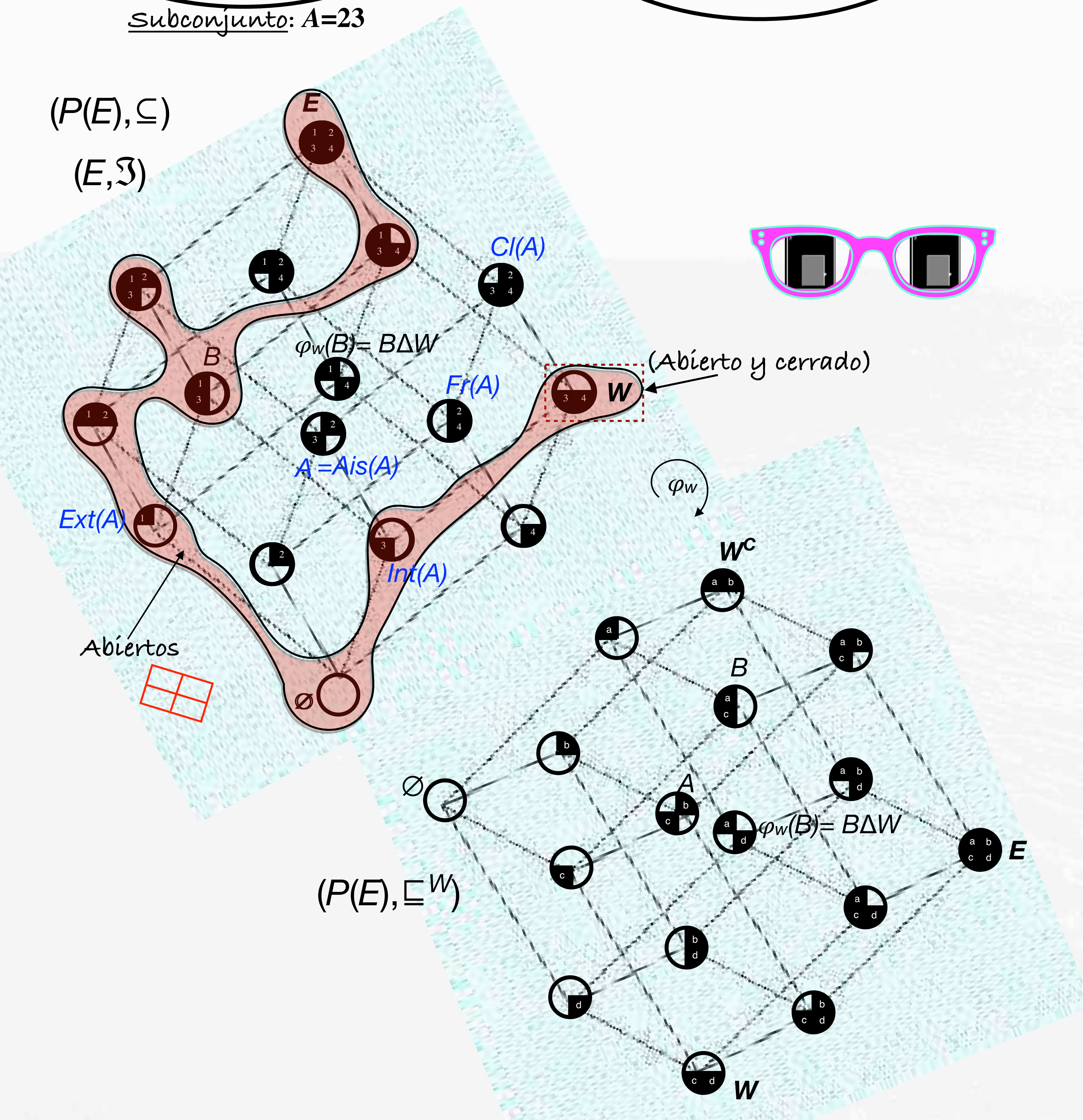


$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \mathfrak{I})$

Familia de cerrados: $\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

$g: P(E) \to P(E)$

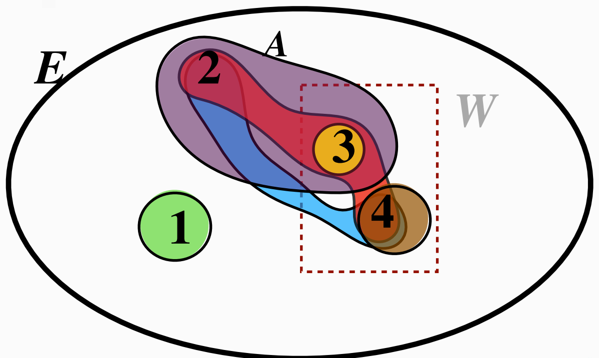
P(E)

A →

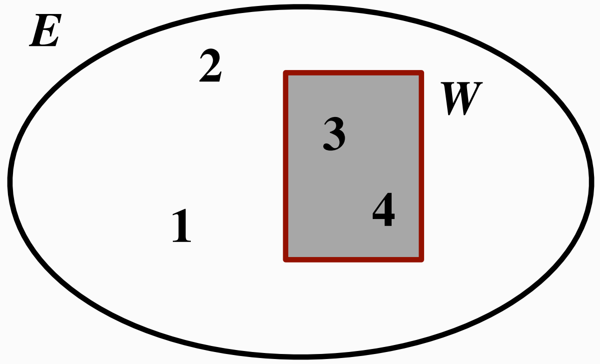
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der
$\varnothing$	$\varnothing$	E	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	1	34	2	12	1	2
2	$\varnothing$	134	2	2	2	$\varnothing$
3	3	12	4	34	3	4
4	$\varnothing$	123	4	4	4	$\varnothing$
12	12	34	$\varnothing$	12	1	2
13	13	$\varnothing$	24	E	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	$\varnothing$	13	24	24	24	$\varnothing$
34	34	12	$\varnothing$	34	3	4
123	123	$\varnothing$	4	E	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	$\varnothing$	2	E	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	E	$\varnothing$	$\varnothing$	E	13	24

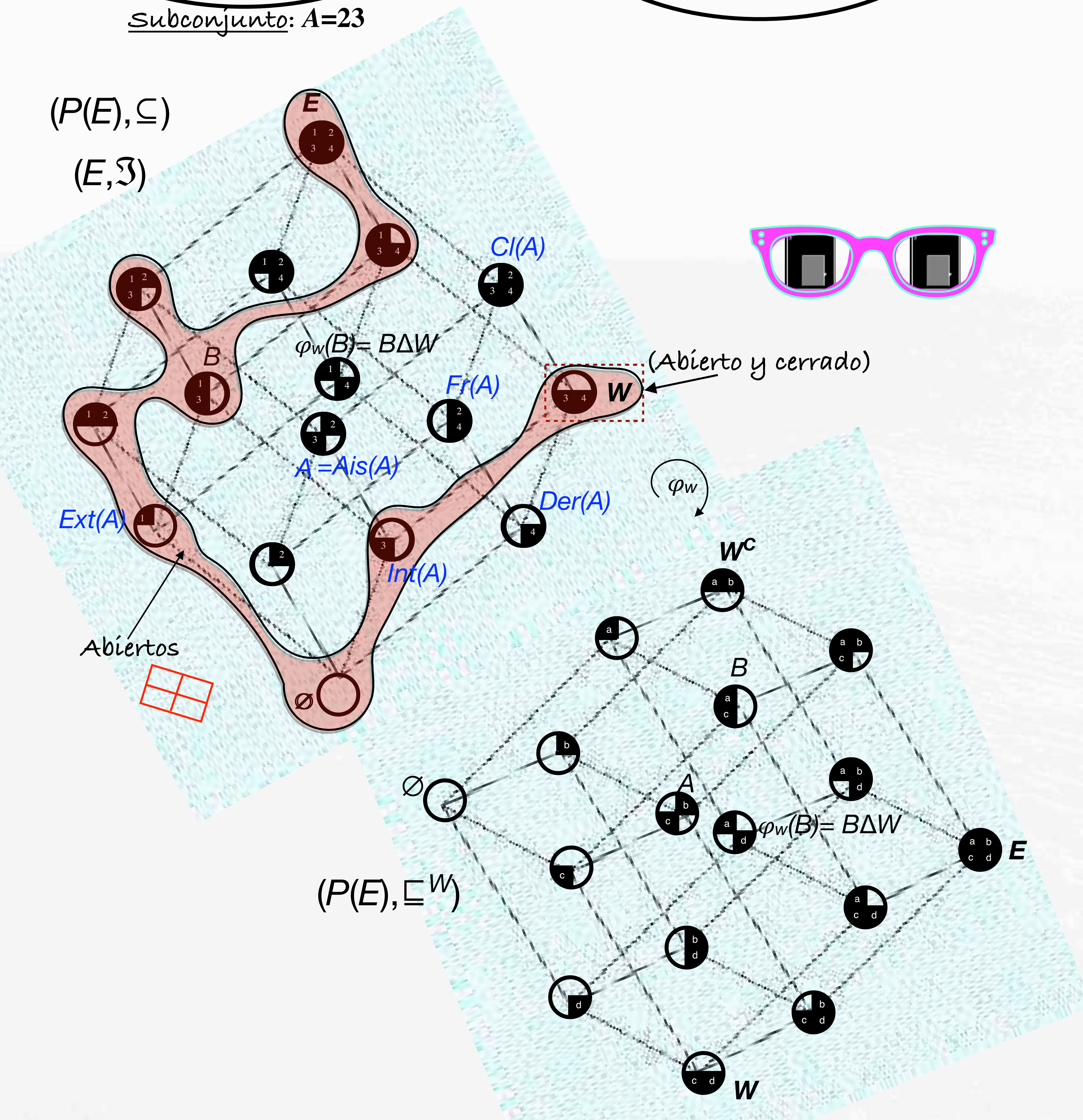
W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

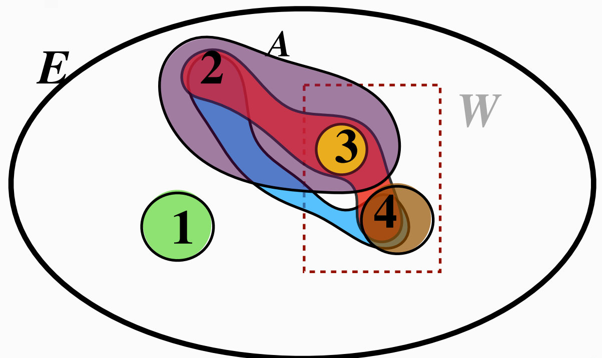
$g: P(E) \to P(E)$

P(E)

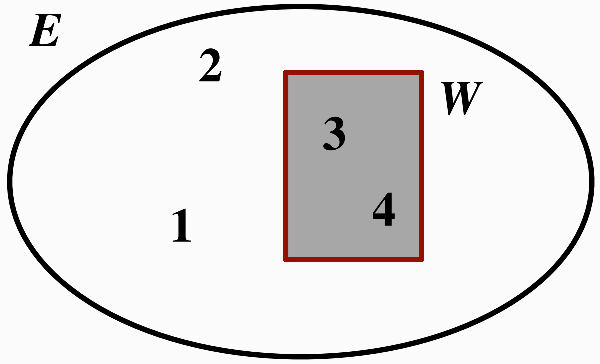
A →

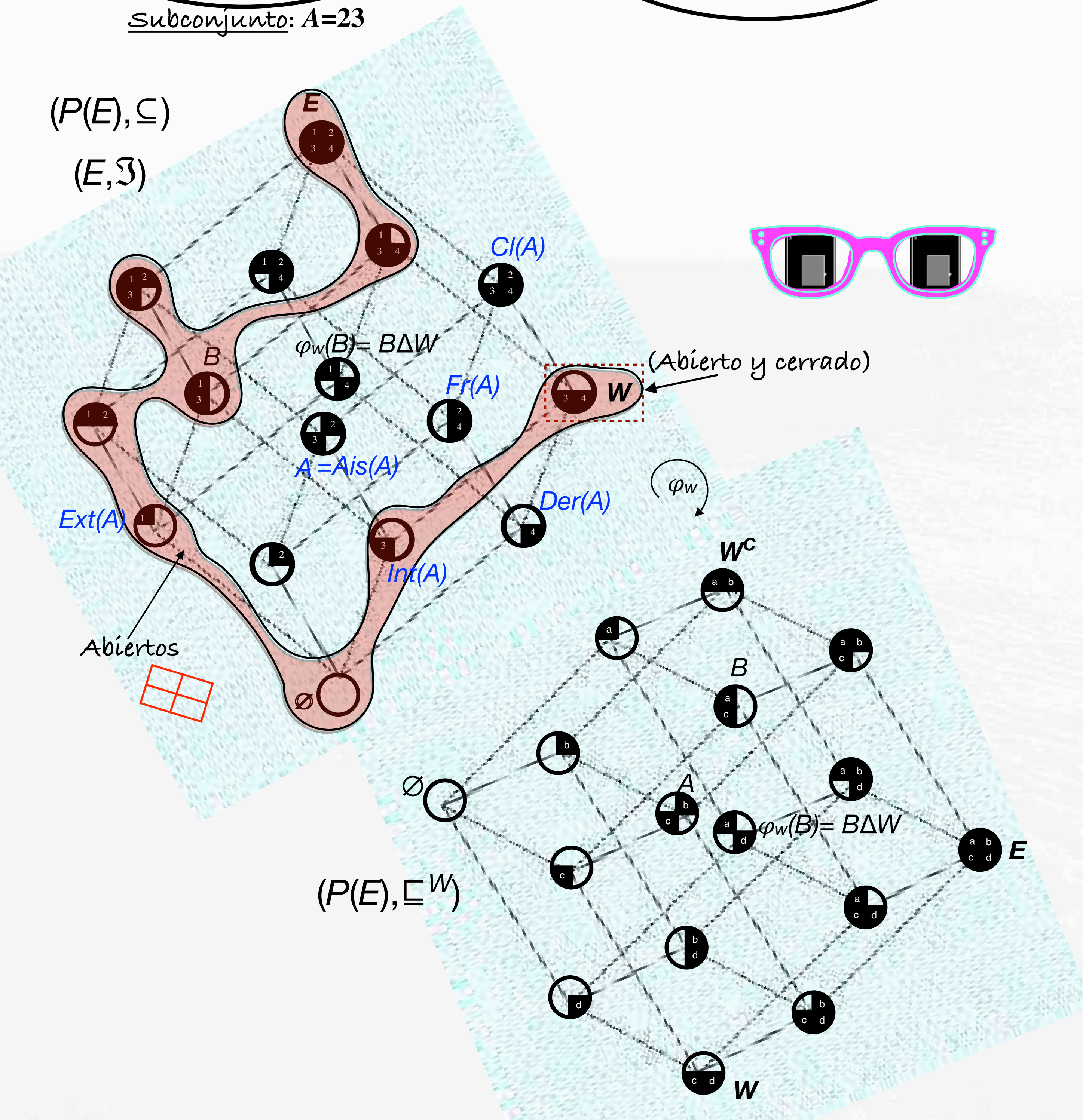
	Int	*Ext*	*Fr*	*Cl*	*Ais*	*Der*
∅	∅	*E*	∅	∅	∅	∅
1	1	34	2	12	1	2
2	∅	134	2	2	2	∅
3	3	12	4	34	3	4
4	∅	123	4	4	4	∅
12	12	34	∅	12	1	2
13	13	∅	24	*E*	1	234
14	1	3	24	124	14	2
23	3	1	24	234	23	4
24	∅	13	24	24	24	∅
34	34	12	∅	34	3	4
123	123	∅	4	*E*	13	24
124	12	3	4	124	14	2
134	134	∅	2	*E*	13	24
234	34	1	2	234	23	4
E	*E*	∅	∅	*E*	13	24

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

$g: P(E) \to P(E)$

$\varphi_w: P(E) \to P(E)$
$\varphi_w(A) = A \Delta W =$
$(A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

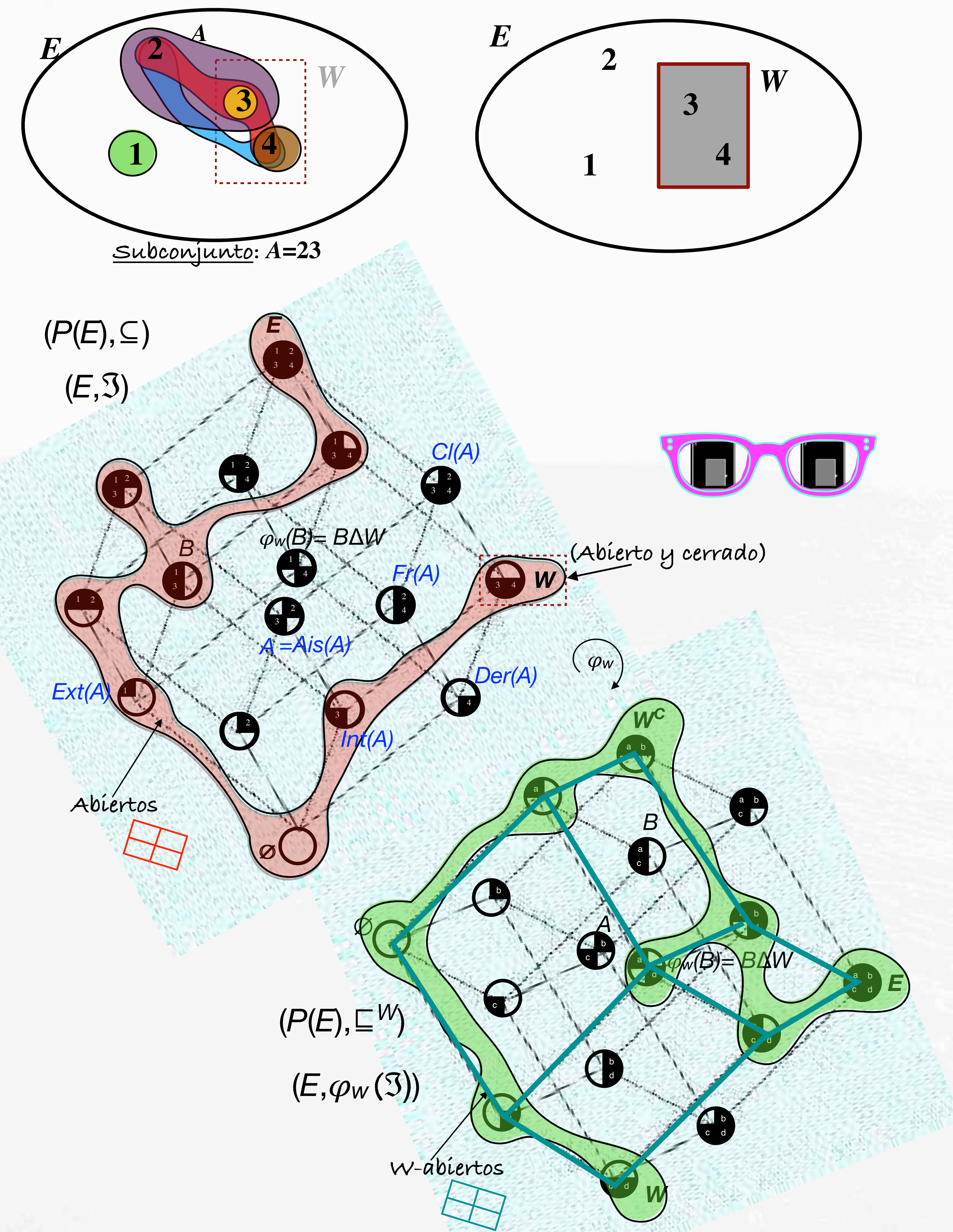
P(E)

A →

W →

	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅	34
1	1	34	2	12	1	2	134
2	∅	134	2	2	2	∅	234
3	3	12	4	34	3	4	4
4	∅	123	4	4	4	∅	3
12	12	34	∅	12	1	2	E
13	13	∅	24	E	1	234	14
14	1	3	24	124	14	2	13
23	3	1	24	234	23	4	24
24	∅	13	24	24	24	∅	23
34	34	12	∅	34	3	4	∅
123	123	∅	4	E	13	24	124
124	12	3	4	124	14	2	123
134	134	∅	2	E	13	24	1
234	34	1	2	234	23	4	2
E	E	∅	∅	E	13	24	12

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \mathfrak{I})$

Familia de cerrados: $\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\mathfrak{I}) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\mathfrak{I}))$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$

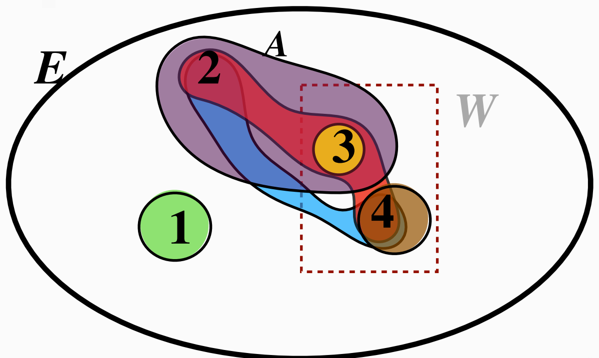
$g: P(E) \longrightarrow P(E)$

$\varphi_w: P(E) \to P(E)$
$\varphi_w(A) = A \Delta W =$
$(A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

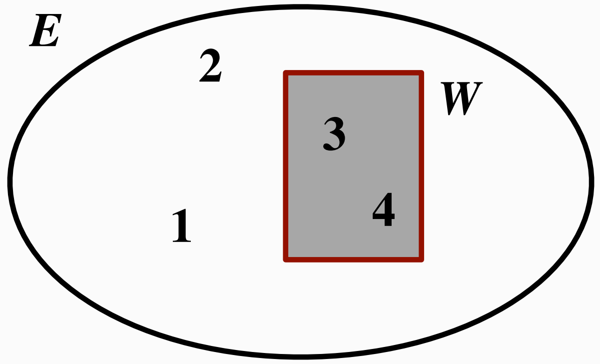
P(E)

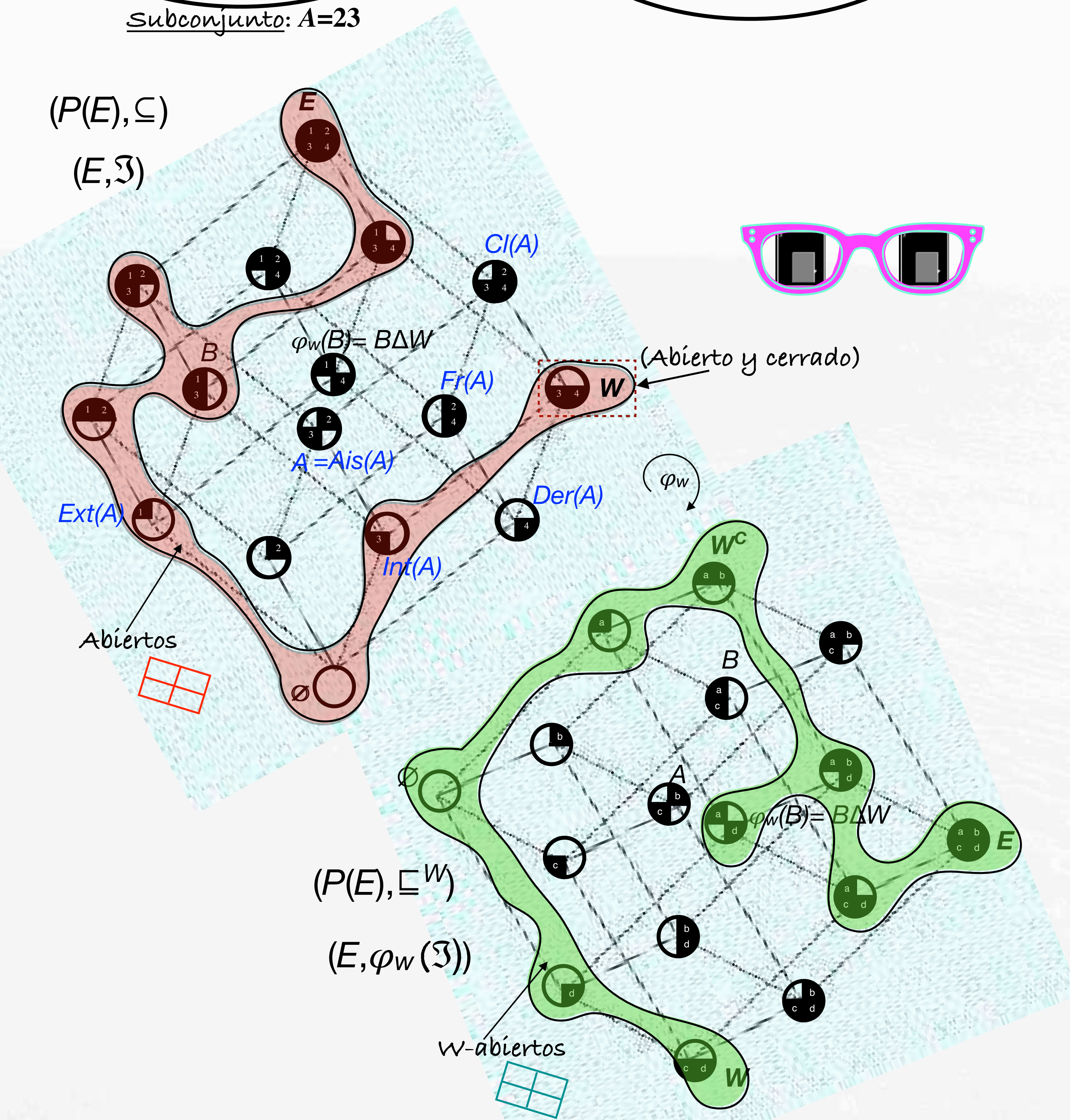
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅	34
1	1	34	2	12	1	2	134
2	∅	134	2	2	2	∅	234
3	3	12	4	34	3	4	4
4	∅	123	4	4	4	∅	3
12	12	34	∅	12	1	2	E
13	13	∅	24	E	1	234	14
14	1	3	24	124	14	2	13
A → 23	3	1	24	234	23	4	24
24	∅	13	24	24	24	∅	23
W → 34	34	12	∅	34	3	4	∅
123	123	∅	4	E	13	24	124
124	12	3	4	124	14	2	123
134	134	∅	2	E	13	24	1
234	34	1	2	234	23	4	2
E	E	∅	∅	E	13	24	12

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\Im))$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$ $\qquad$ $\hat{g}_w \in \{ \widehat{Int}_w, \widehat{Ext}_w, \widehat{Fr}_w, \widehat{Cl}_w, \widehat{Ais}_w, \widehat{Der}_w \}$

$g: P(E) \to P(E)$

$\varphi_w: P(E) \to P(E)$ $\varphi_w(A) = A\Delta W = (A\cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

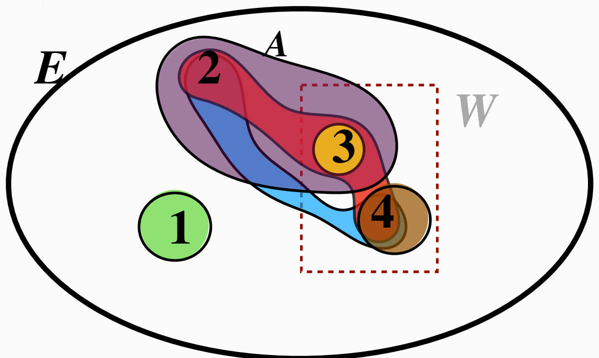
$\hat{g}_w: P(E) \to P(E)$ $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

$\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$

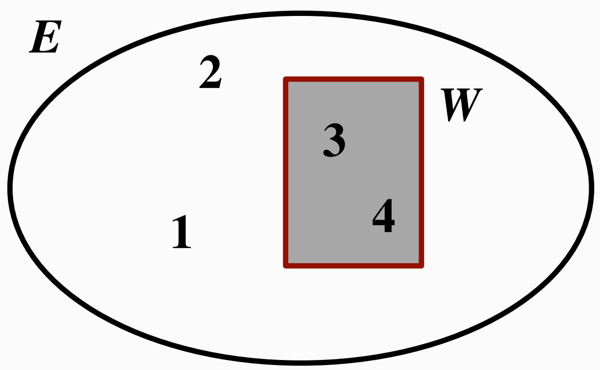
P(E)

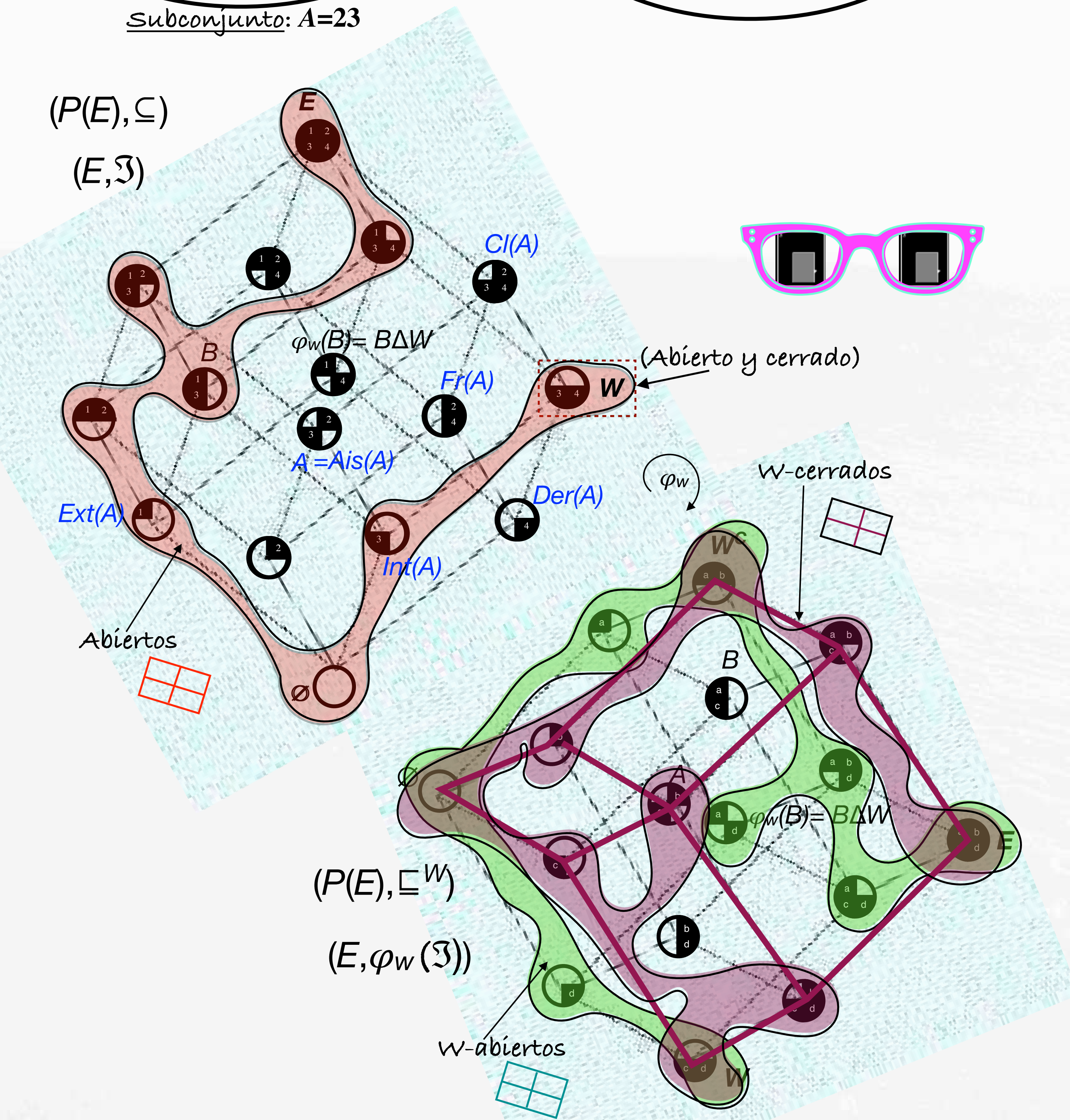
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w	$\widehat{Int}_w$	$\widehat{Ext}_w$	$\widehat{Fr}_w$	$\widehat{Cl}_w$	$\widehat{Ais}_w$	$\widehat{Der}_w$
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅	34	∅	E	34	∅	4	3
1	1	34	2	12	1	2	134	1	34	34	12	14	23
2	∅	134	2	2	2	∅	234	∅	134	34	2	24	3
3	3	12	4	34	3	4	4	34	124	3	3	3	34
4	∅	123	4	4	4	∅	3	4	E	3	∅	4	3
12	12	34	∅	12	1	2	E	12	34	34	12	14	23
13	13	∅	24	E	1	234	14	134	4	23	123	13	234
14	1	3	24	124	14	2	13	14	34	23	12	134	2
A → 23	3	1	24	234	23	4	24	34	14	23	23	23	34
24	∅	13	24	24	24	∅	23	4	134	23	2	24	3
W → 34	34	12	∅	34	3	4	∅	34	12	34	34	34	34
123	123	∅	4	E	13	24	124	E	∅	234	123	13	234
124	12	3	4	124	14	2	123	124	34	3	12	14	23
134	134	∅	2	E	13	24	1	134	∅	234	E	134	234
234	34	1	2	234	23	4	2	34	1	34	234	234	34
E	E	∅	∅	E	13	24	12	E	∅	34	E	134	234

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23





$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\mathfrak{I} = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$ Espacio topológico $(E, \mathfrak{I})$

Familia de cerrados: $\mathfrak{I}^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$

$\varphi_w(\mathfrak{I}) = \{\varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E\}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\mathfrak{I}))$

Operador topológico $g \in \{Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der\}$ $\quad \hat{g}_w \in \{\widehat{Int}_w, \widehat{Ext}_w, \widehat{Fr}_w, \widehat{Cl}_w, \widehat{Ais}_w, \widehat{Der}_w\}$

$g: P(E) \to P(E)$

$\varphi_w: P(E) \to P(E)$, $\varphi_w(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

$\hat{g}_w: P(E) \to P(E)$, $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

$\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$

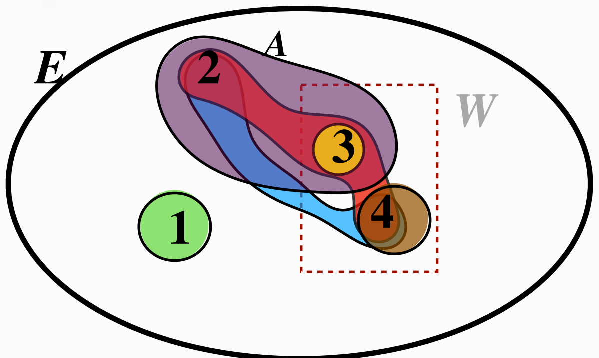
P(E)

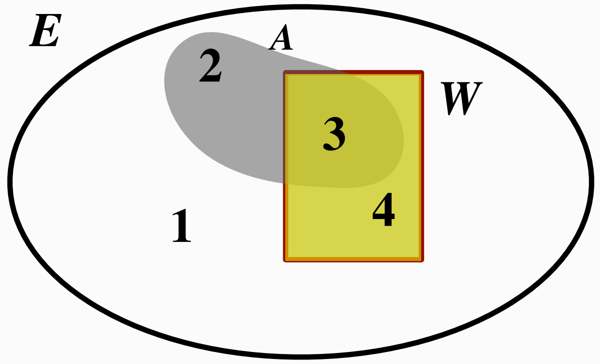
A →

W →

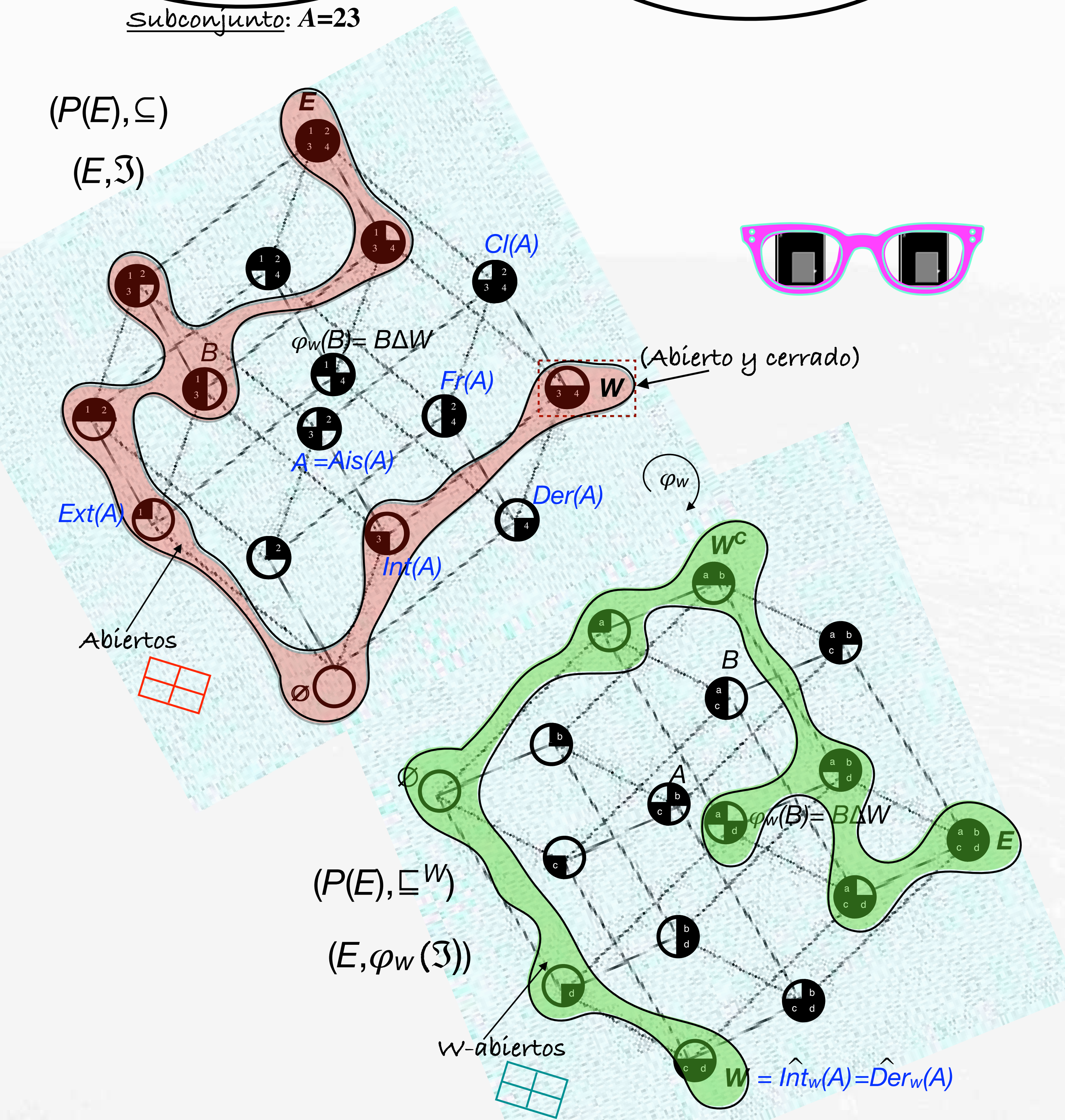
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w	$\widehat{Int}_w$	$\widehat{Ext}_w$	$\widehat{Fr}_w$	$\widehat{Cl}_w$	$\widehat{Ais}_w$	$\widehat{Der}_w$
∅	∅	E	∅	∅	∅	∅	34	∅	E	34	∅	4	3
1	1	34	2	12	1	2	134	1	34	34	12	14	23
2	∅	134	2	2	2	∅	234	∅	134	34	2	24	3
3	3	12	4	34	3	4	4	34	124	3	3	3	34
4	∅	123	4	4	4	∅	3	4	E	3	∅	4	3
12	12	34	∅	12	1	2	E	12	34	34	12	14	23
13	13	∅	24	E	1	234	14	134	4	23	123	13	234
14	1	3	24	124	14	2	13	14	34	23	12	134	2
23	3	1	24	234	23	4	24	34	14	23	23	23	34
24	∅	13	24	24	24	∅	23	4	134	23	2	24	3
34	34	12	∅	34	3	4	∅	34	12	34	34	34	34
123	123	∅	4	E	13	24	124	E	∅	234	123	13	234
124	12	3	4	124	14	2	123	124	34	3	12	14	23
134	134	∅	2	E	13	24	1	134	∅	234	E	134	234
234	34	1	2	234	23	4	2	34	1	34	234	234	34
E	E	∅	∅	E	13	24	12	E	∅	34	E	134	234

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$





Subconjunto: A=23



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

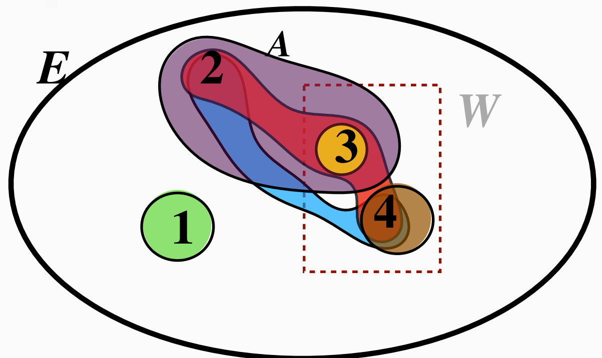
$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\Im))$

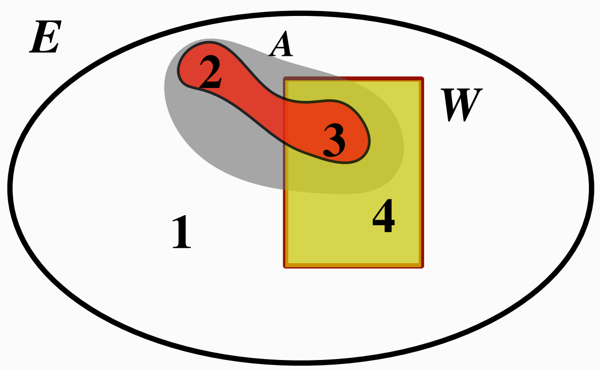
Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$ $\quad$ $\hat{g}_w \in \{ \widehat{Int}_w, \widehat{Ext}_w, \widehat{Fr}_w, \widehat{Cl}_w, \widehat{Ais}_w, \widehat{Der}_w \}$

$g: P(E) \to P(E)$ $\quad$ $\varphi_w: P(E) \to P(E)$; $\varphi_w(A) = A\Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$ $\quad$ $\hat{g}_w: P(E) \to P(E)$; $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$ $\quad$ $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$

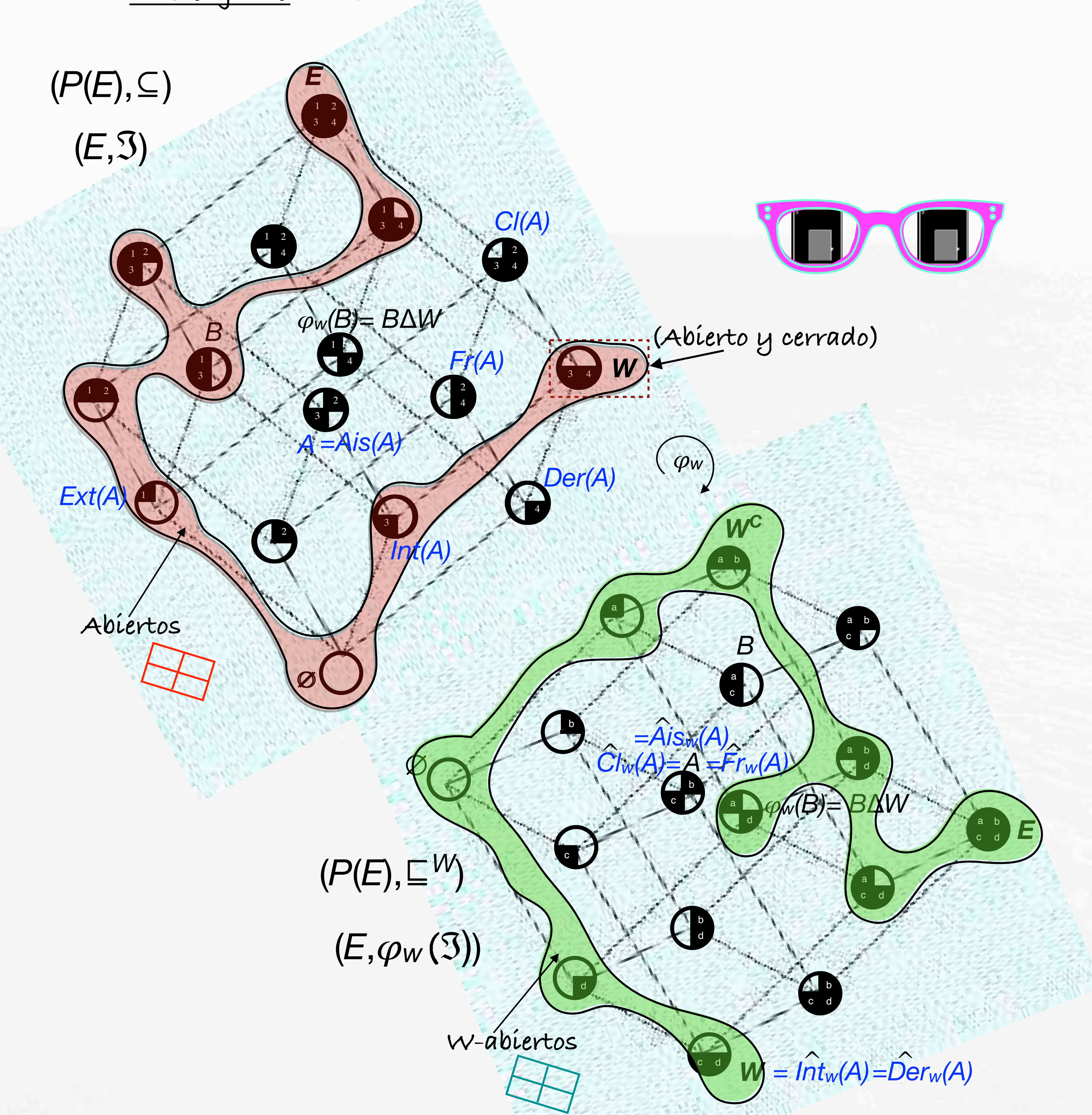
		Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w	$\widehat{Int}_w$	$\widehat{Ext}_w$	$\widehat{Fr}_w$	$\widehat{Cl}_w$	$\widehat{Ais}_w$	$\widehat{Der}_w$
	∅	∅	E	∅	∅	∅	∅	34	∅	E	34	∅	4	3
	1	1	34	2	12	1	2	134	1	34	34	12	14	23
	2	∅	134	2	2	2	∅	234	∅	134	34	2	24	3
	3	3	12	4	34	3	4	4	34	124	3	3	3	34
	4	∅	123	4	4	4	∅	3	4	E	3	∅	4	3
	12	12	34	∅	12	1	2	E	12	34	34	12	14	23
P(E)	13	13	∅	24	E	1	234	14	134	4	23	123	13	234
	14	1	3	24	124	14	2	13	14	34	23	12	134	2
A →	23	3	1	24	234	23	4	24	34	14	23	23	23	34
	24	∅	13	24	24	24	∅	23	4	134	23	2	24	3
W →	34	34	12	∅	34	3	4	∅	34	12	34	34	34	34
	123	123	∅	4	E	13	24	124	E	∅	234	123	13	234
	124	12	3	4	124	14	2	123	124	34	3	12	14	23
	134	134	∅	2	E	13	24	1	134	∅	234	E	134	234
	234	34	1	2	234	23	4	2	34	1	34	234	234	34
	E	E	∅	∅	E	13	24	12	E	∅	34	E	134	234

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$





Subconjunto: A=23



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\} \equiv 34$ $\quad (A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \mathfrak{I})$

Familia de cerrados: $\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\mathfrak{I}) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\mathfrak{I}))$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$ $\quad$ $g: P(E) \to P(E)$

$\varphi_w: P(E) \to P(E)$; $\varphi_w(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

$\hat{g}_w \in \{ \widehat{Int}_w, \widehat{Ext}_w, \widehat{Fr}_w, \widehat{Cl}_w, \widehat{Ais}_w, \widehat{Der}_w \}$ $\quad$ $\hat{g}_w: P(E) \to P(E)$; $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$ $\quad$ $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$

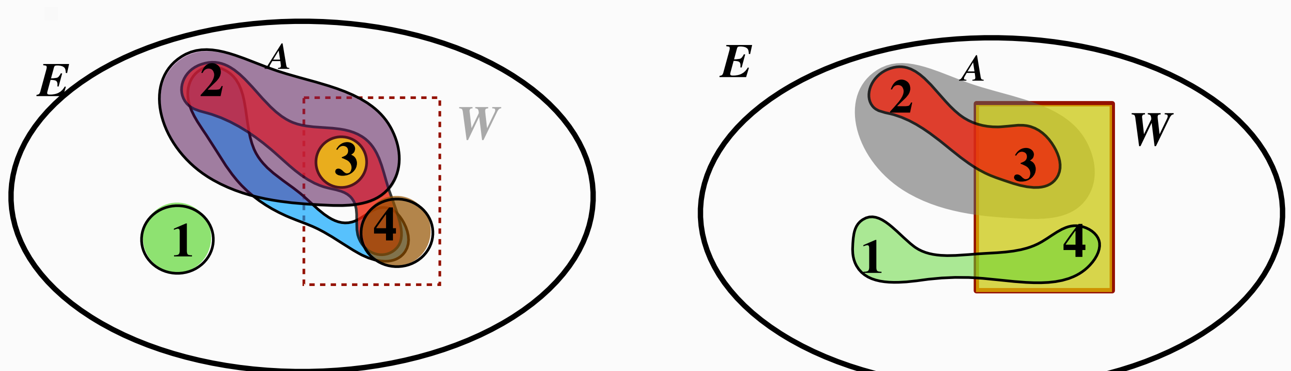
P(E)

A →

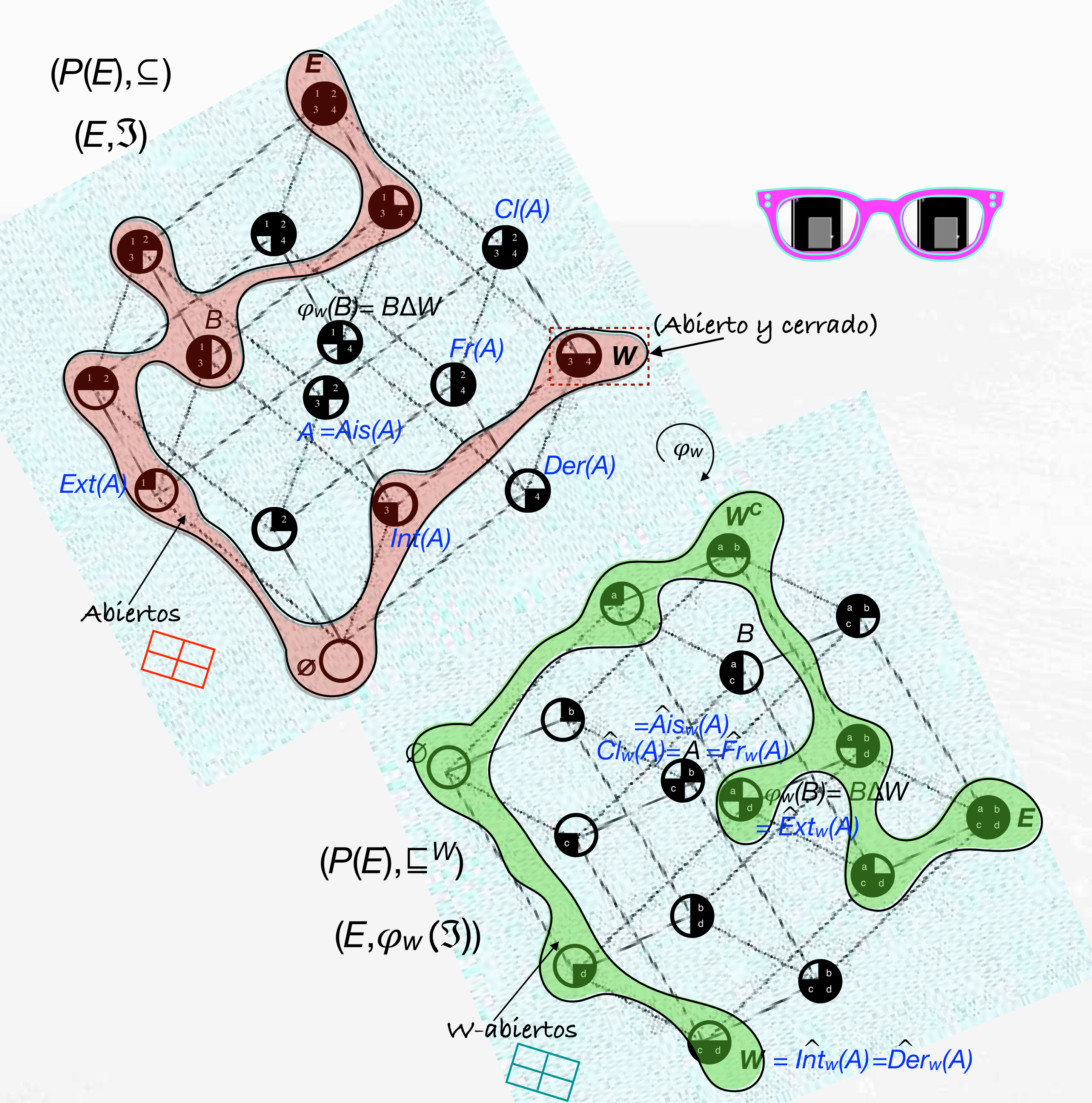
W →

	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w	$\widehat{Int}_w$	$\widehat{Ext}_w$	$\widehat{Fr}_w$	$\widehat{Cl}_w$	$\widehat{Ais}_w$	$\widehat{Der}_w$
$\varnothing$	$\varnothing$	E	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	34	$\varnothing$	E	34	$\varnothing$	4	3
1	1	34	2	12	1	2	134	1	34	34	12	14	23
2	$\varnothing$	134	2	2	2	$\varnothing$	234	$\varnothing$	134	34	2	24	3
3	3	12	4	34	3	4	4	34	124	3	3	3	34
4	$\varnothing$	123	4	4	4	$\varnothing$	3	4	E	3	$\varnothing$	4	3
12	12	34	$\varnothing$	12	1	2	E	12	34	34	12	14	23
13	13	$\varnothing$	24	E	1	234	14	134	4	23	123	13	234
14	1	3	24	124	14	2	13	14	34	23	12	134	2
23	3	1	24	234	23	4	24	34	14	23	23	23	34
24	$\varnothing$	13	24	24	24	$\varnothing$	23	4	134	23	2	24	3
34	34	12	$\varnothing$	34	3	4	$\varnothing$	34	12	34	34	34	34
123	123	$\varnothing$	4	E	13	24	124	E	$\varnothing$	234	123	13	234
124	12	3	4	124	14	2	123	124	34	3	12	14	23
134	134	$\varnothing$	2	E	13	24	1	134	$\varnothing$	234	E	134	234
234	34	1	2	234	23	4	2	34	1	34	234	234	34
E	E	$\varnothing$	$\varnothing$	E	13	24	12	E	$\varnothing$	34	E	134	234

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$



Subconjunto: A=23



$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

$W = \{3, 4\}$≡34 $(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B))$

Familia de abiertos: $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$ Espacio topológico $(E, \Im)$

Familia de cerrados: $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$ Espacio "w-topológico" $(E, \varphi_w(\Im))$

Operador topológico $g \in \{ Int, Ext, Fr, Cl, Ais, Der \}$ g: P(E)⟶P(E)

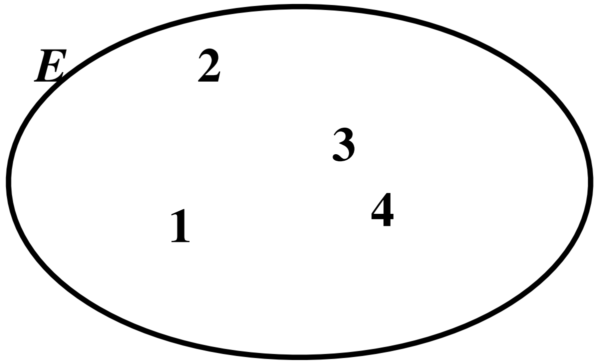
φ_w: P(E)⟶P(E) $\varphi_w(A) = A \Delta W = (A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)$

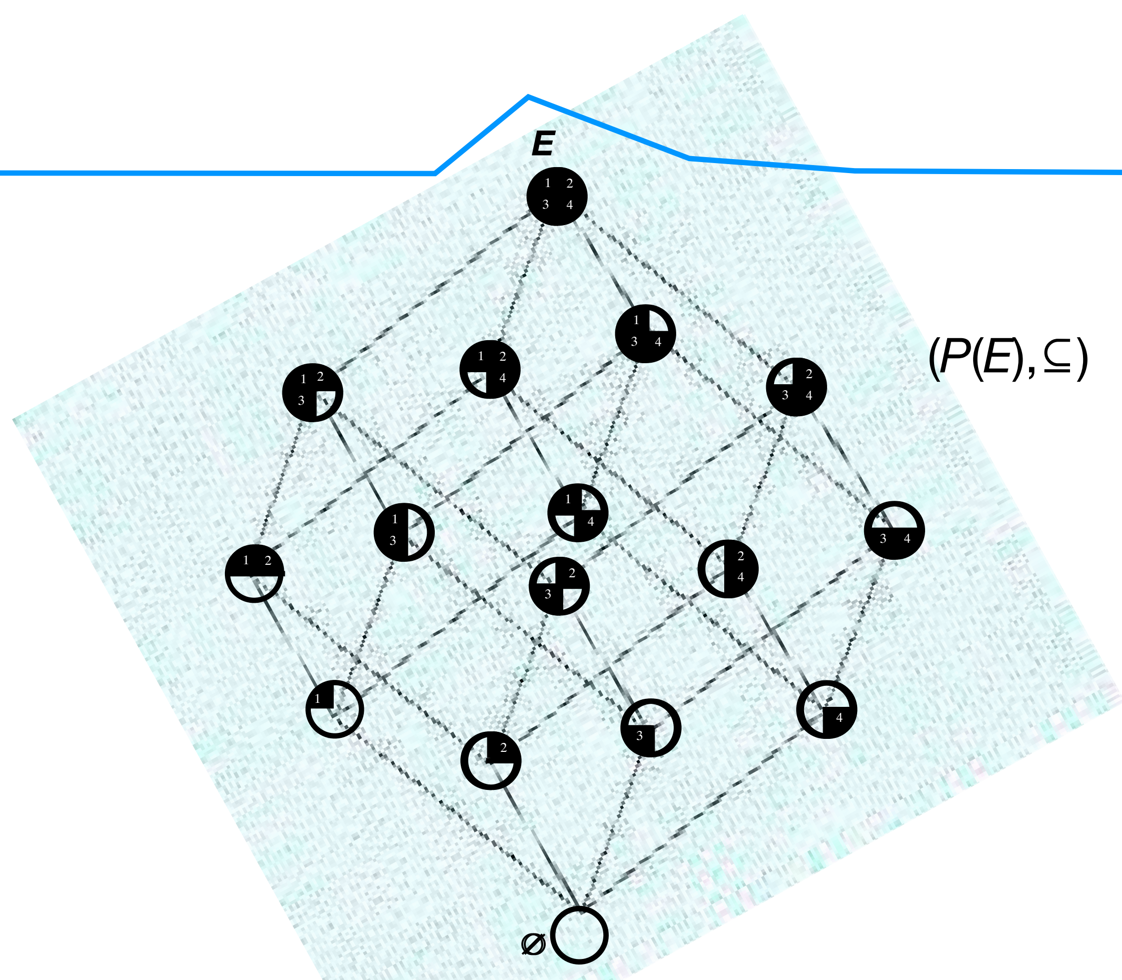
$\hat{g}_w \in \{ \widehat{Int}_w, \widehat{Ext}_w, \widehat{Fr}_w, \widehat{Cl}_w, \widehat{Ais}_w, \widehat{Der}_w \}$ $\hat{g}_w$: P(E)⟶P(E) $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$ $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$

P(E)

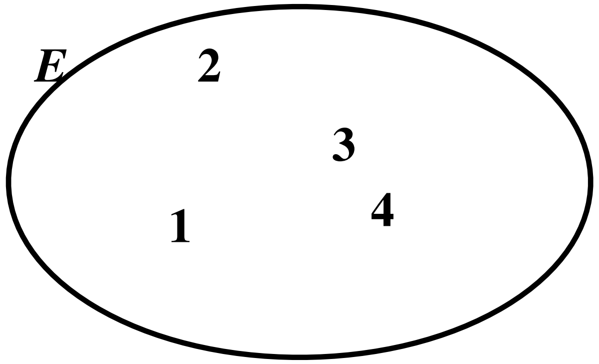
	Int	Ext	Fr	Cl	Ais	Der	φ_w	$\widehat{Int}_w$	$\widehat{Ext}_w$	$\widehat{Fr}_w$	$\widehat{Cl}_w$	$\widehat{Ais}_w$	$\widehat{Der}_w$
$\varnothing$	$\varnothing$	E	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	34	$\varnothing$	E	34	$\varnothing$	4	3
1	1	34	2	12	1	2	134	1	34	34	12	14	23
2	$\varnothing$	134	2	2	2	$\varnothing$	234	$\varnothing$	134	34	2	24	3
3	3	12	4	34	3	4	4	34	124	3	3	3	34
4	$\varnothing$	123	4	4	4	$\varnothing$	3	4	E	3	$\varnothing$	4	3
12	12	34	$\varnothing$	12	1	2	E	12	34	34	12	14	23
13	13	$\varnothing$	24	E	1	234	14	134	4	23	123	13	234
14	1	3	24	124	14	2	13	14	34	23	12	134	2
A → 23	3	1	24	234	23	4	24	34	14	23	23	23	34
24	$\varnothing$	13	24	24	24	$\varnothing$	23	4	134	23	2	24	3
W → 34	34	12	$\varnothing$	34	3	4	$\varnothing$	34	12	34	34	34	34
123	123	$\varnothing$	4	E	13	24	124	E	$\varnothing$	234	123	13	234
124	12	3	4	124	14	2	123	124	34	3	12	14	23
134	134	$\varnothing$	2	E	13	24	1	134	$\varnothing$	234	E	134	234
234	34	1	2	234	23	4	2	34	1	34	234	234	34
E	E	$\varnothing$	$\varnothing$	E	13	24	12	E	$\varnothing$	34	E	134	234

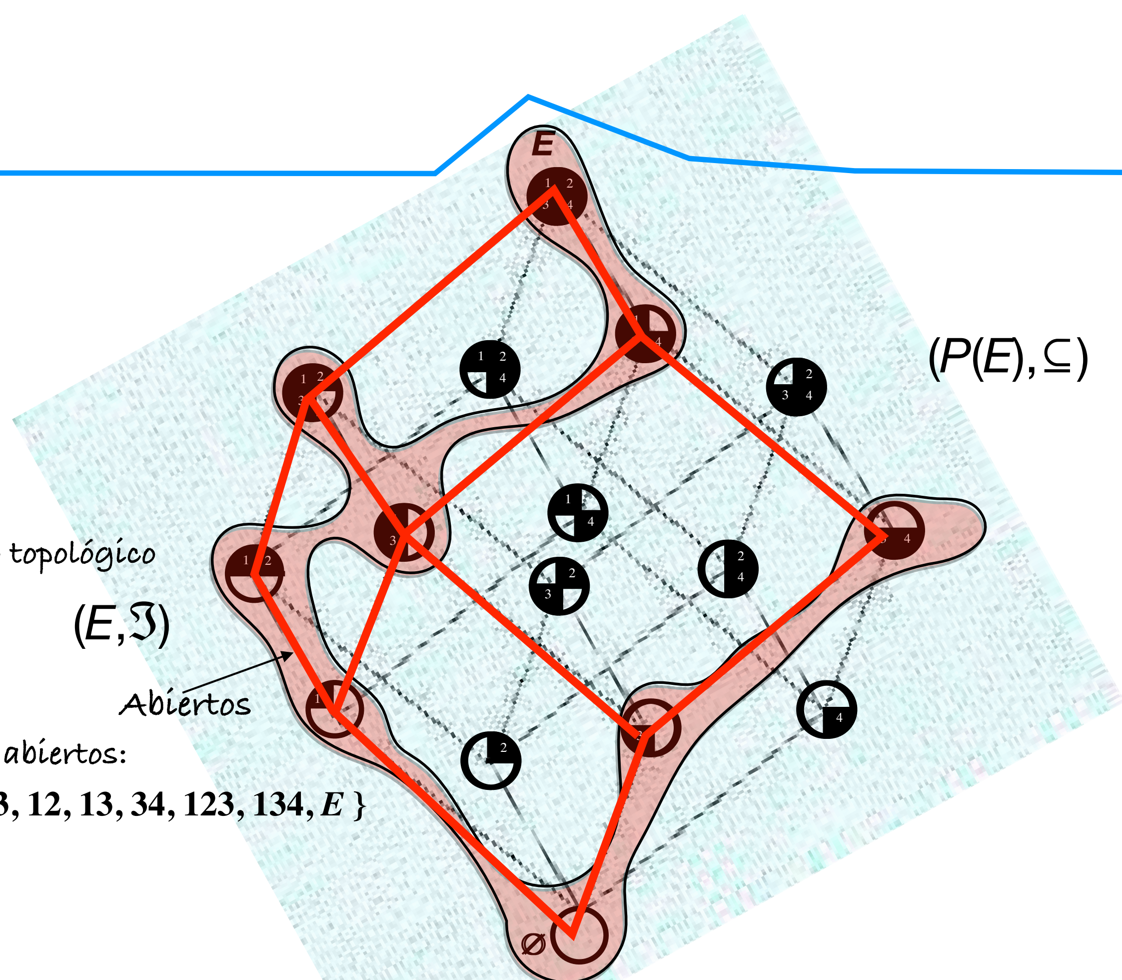
Ilustración de los efectos de operadores W-topológicos





$(P(E),\subseteq)$





$(P(E),\subseteq)$

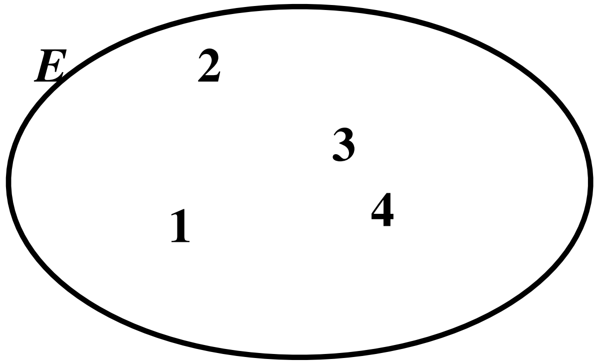
Espacio topológico

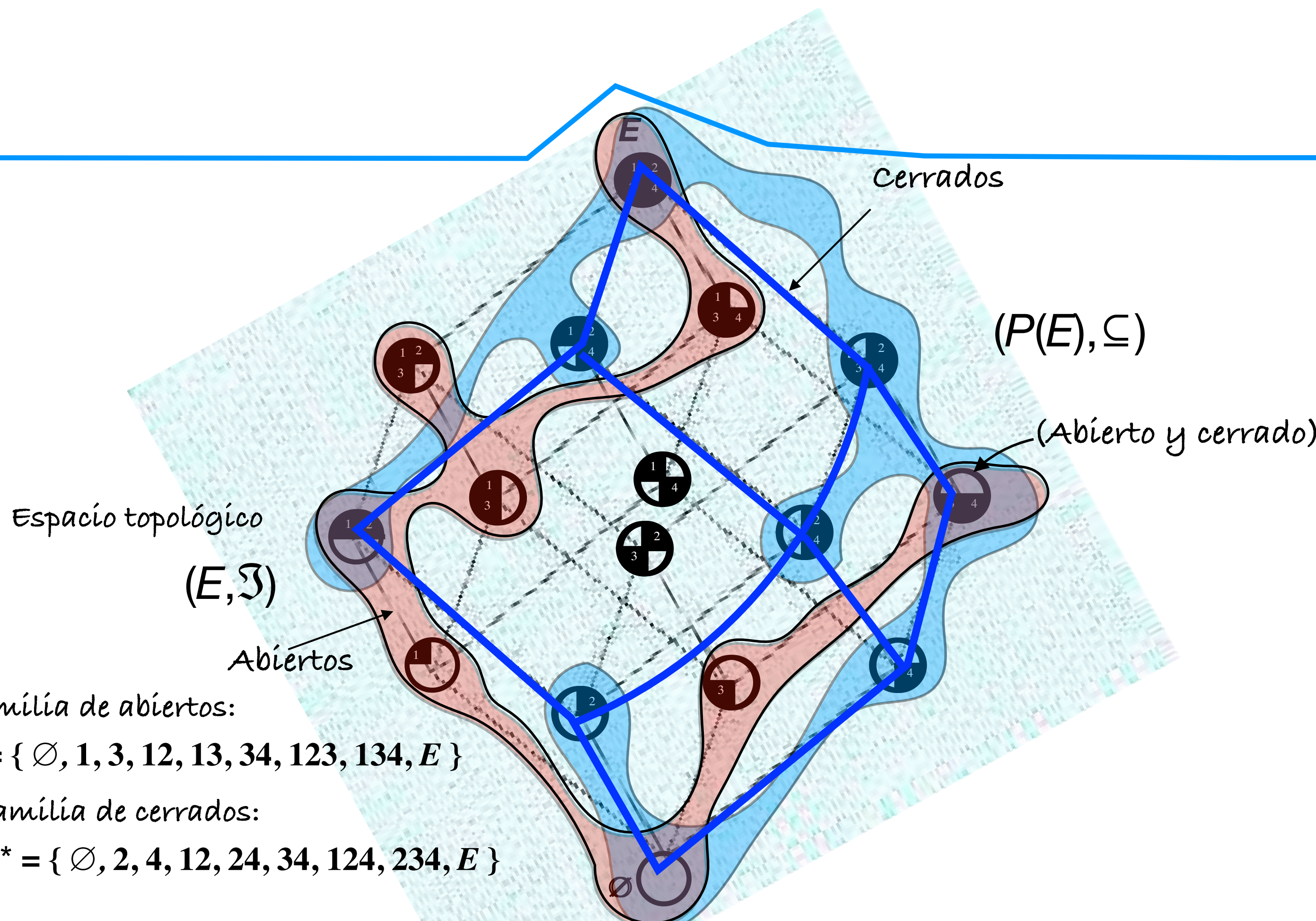
$(E,\Im)$

Abiertos

Familia de abiertos:

$\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$



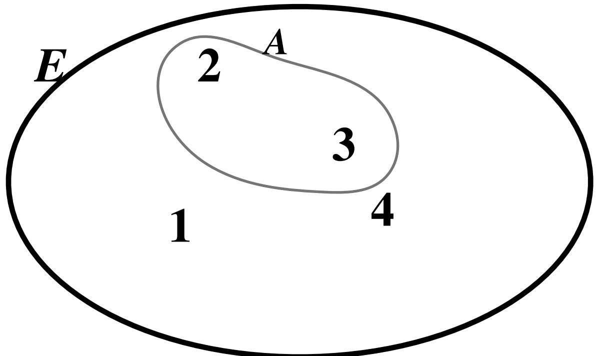


Familia de abiertos:

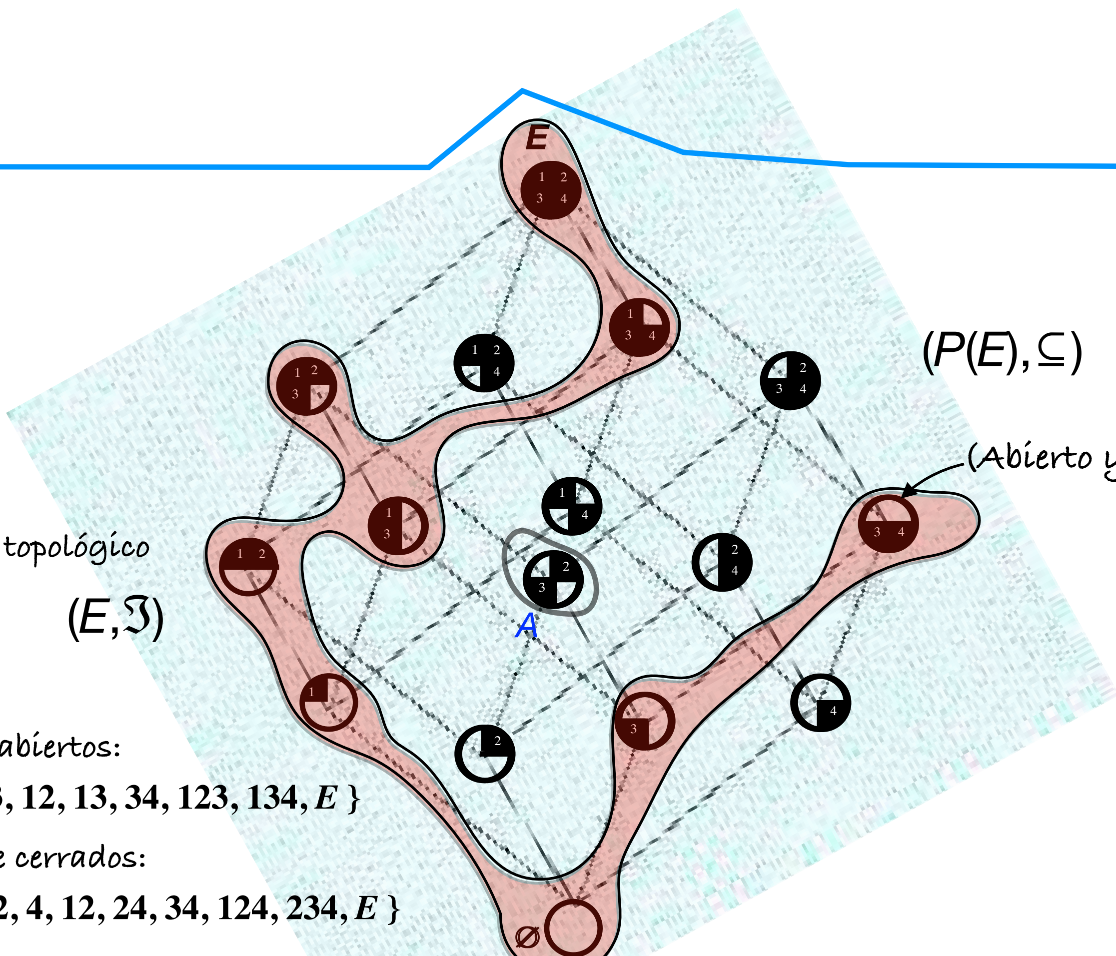
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: A=23



Espacio topológico

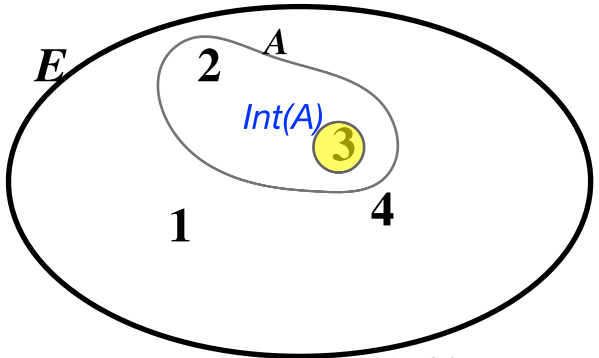
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

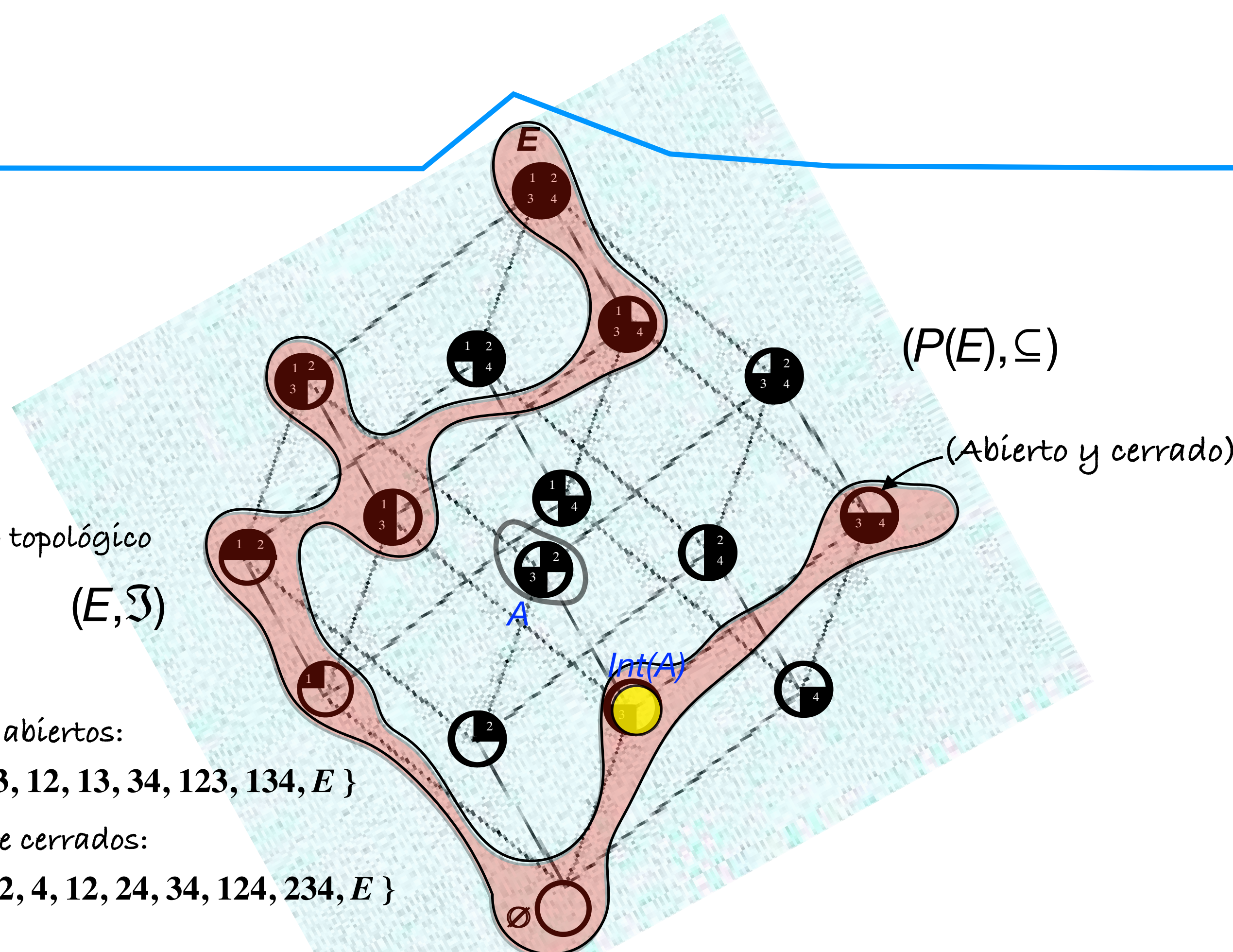
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: A=23



Espacio topológico

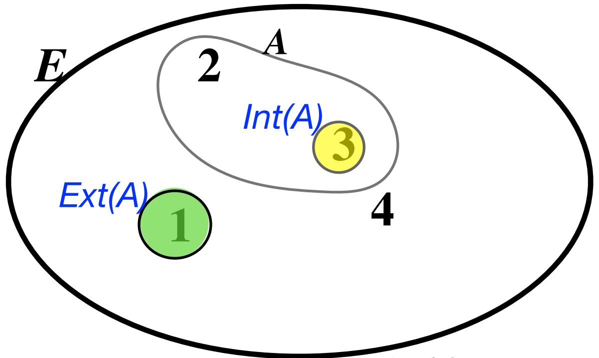
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

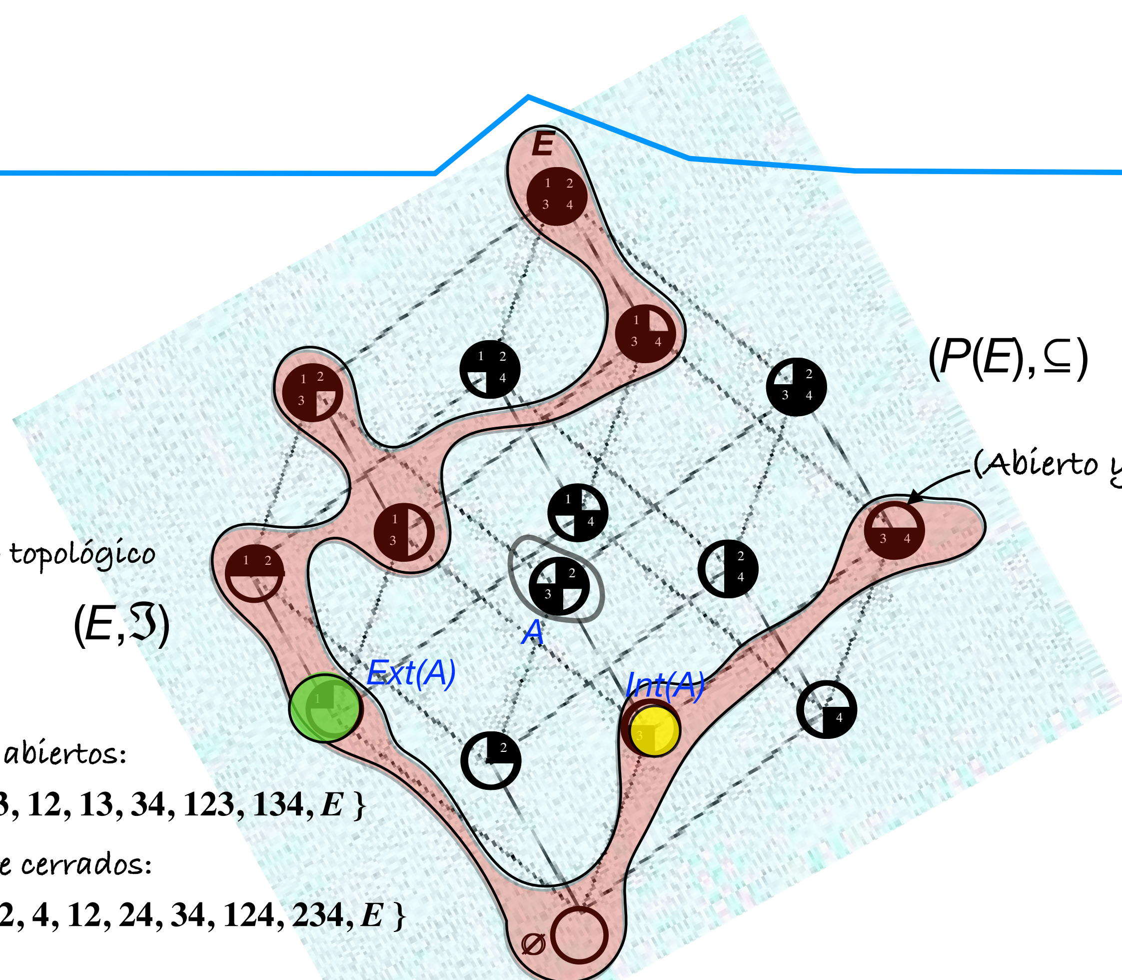
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: A=23



$(P(E),\subseteq)$

(Abierto y cerrado)

Espacio topológico

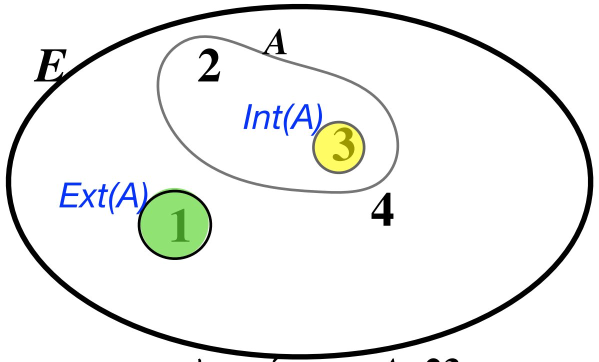
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

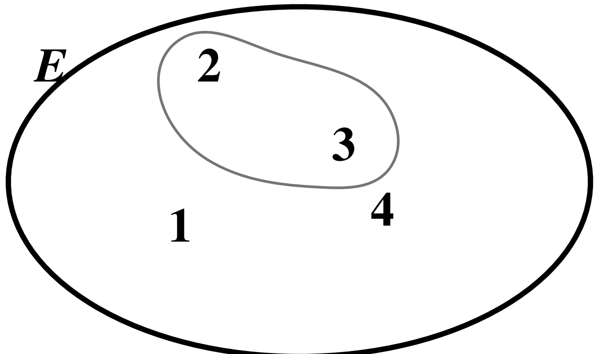
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

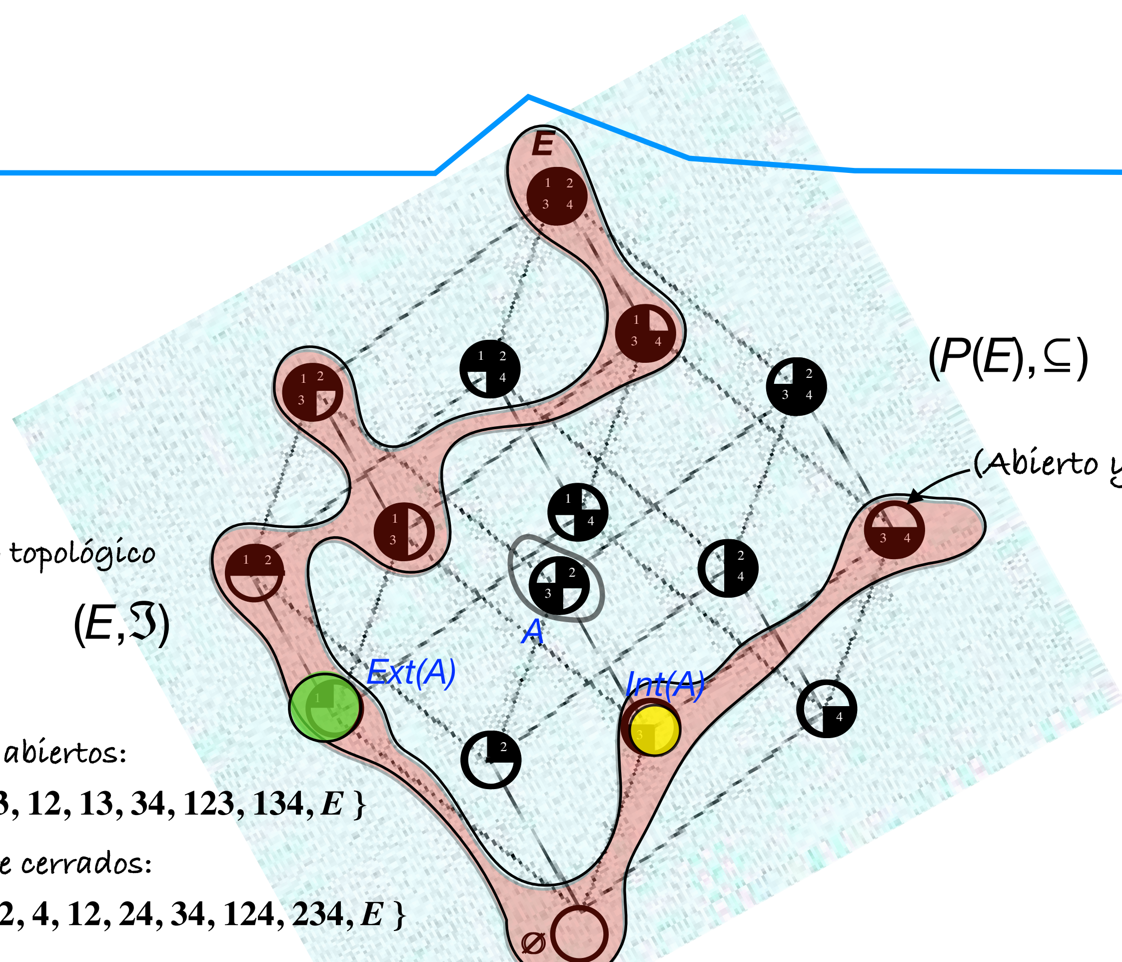
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



$(P(E),\subseteq)$

(Abierto y cerrado)

Espacio topológico

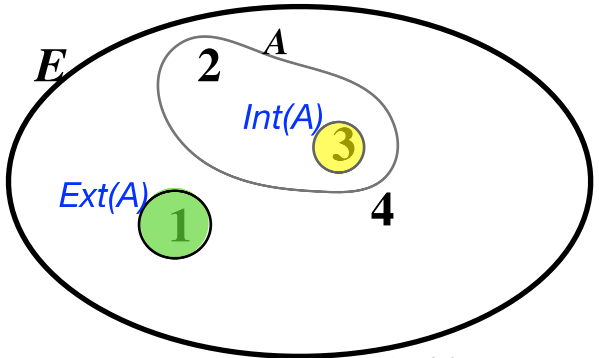
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

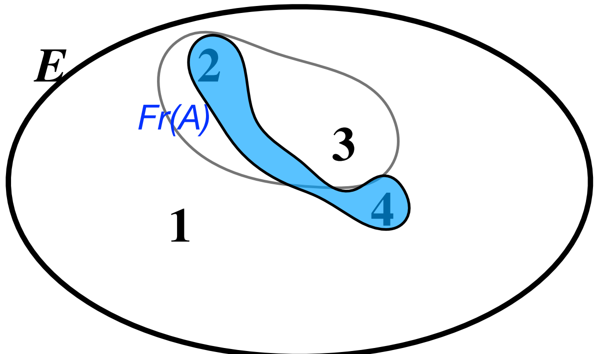
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



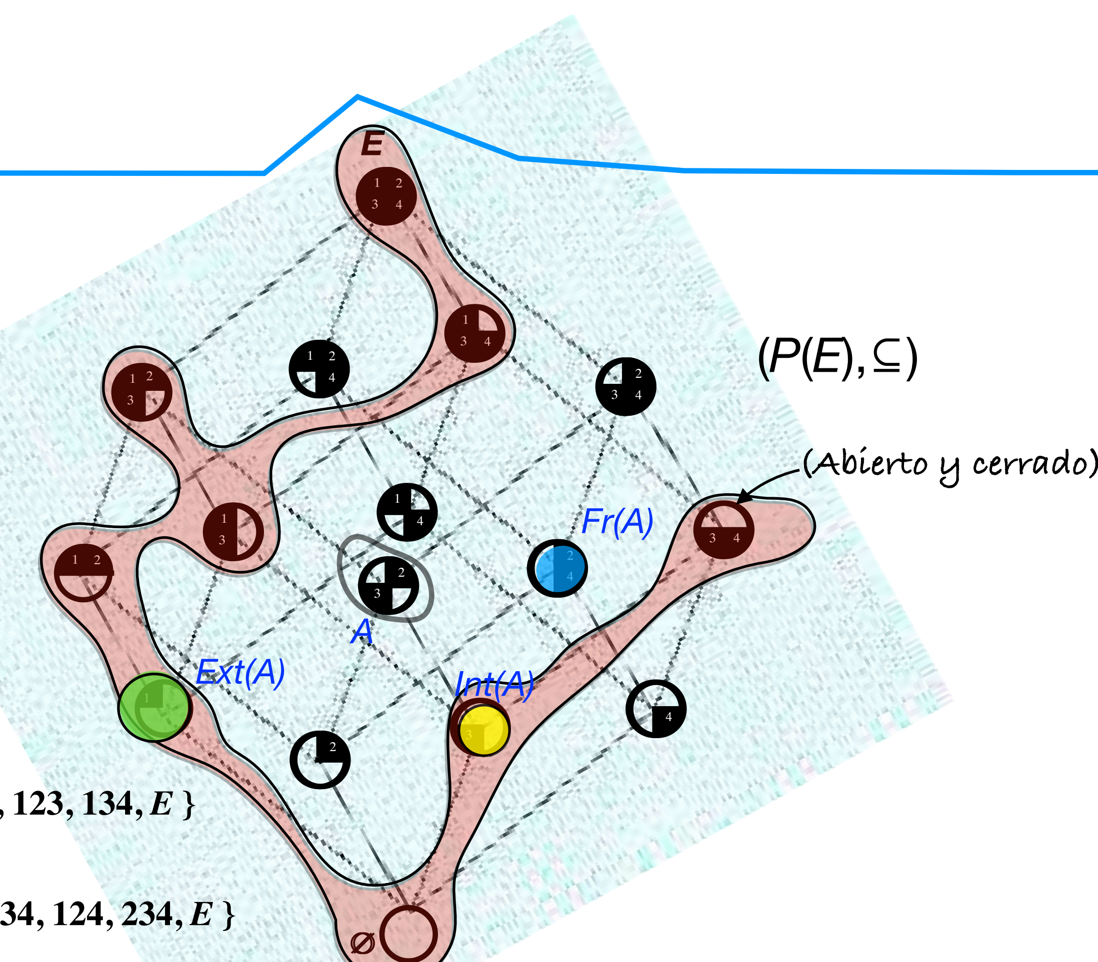
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23

Espacio topológico

$(E,\Im)$

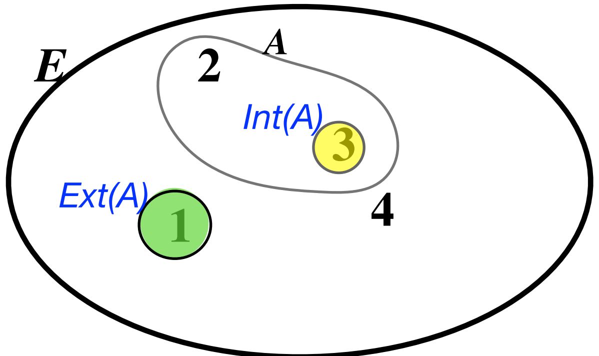


Familia de abiertos:

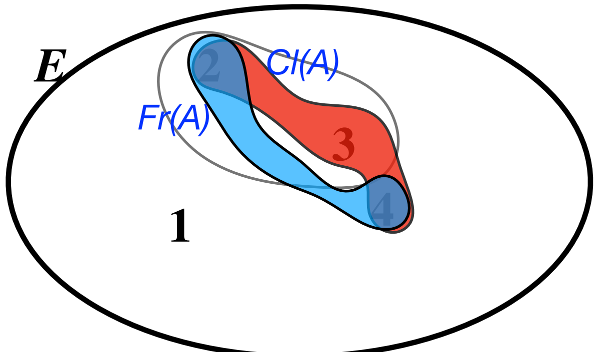
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

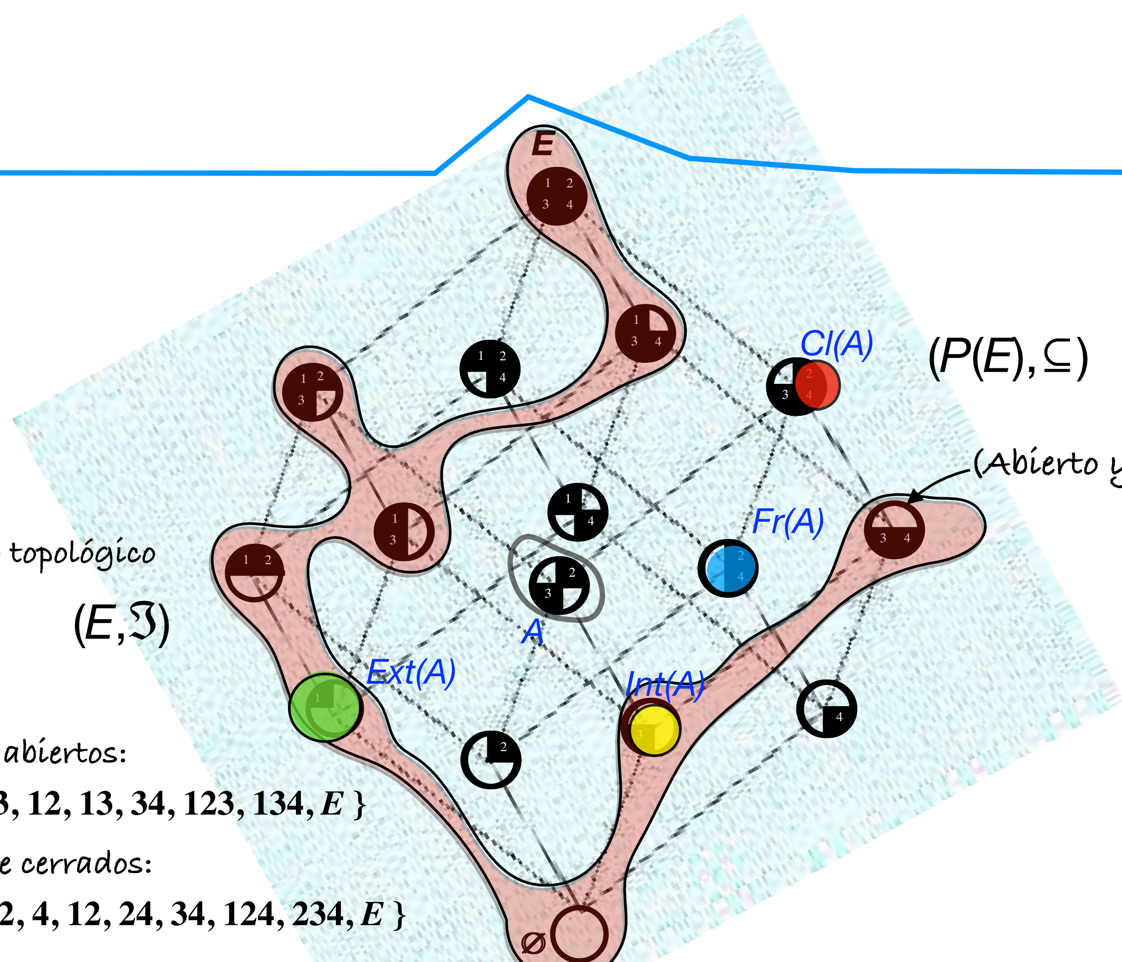
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



$(P(E),\subseteq)$

(Abierto y cerrado)

Espacio topológico

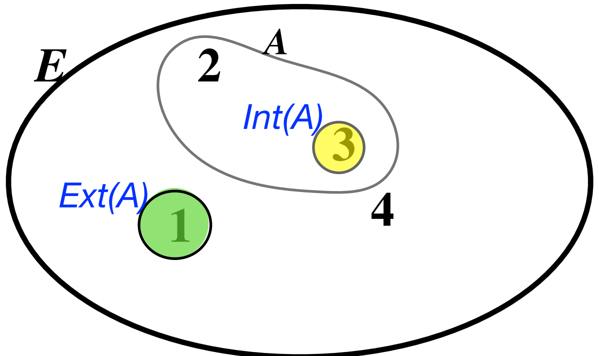
$(E,\mathfrak{I})$

Familia de abiertos:

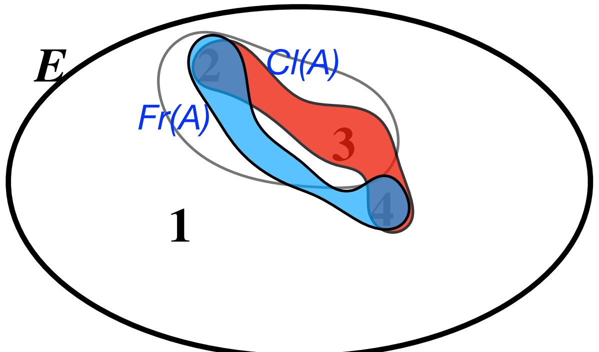
$\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

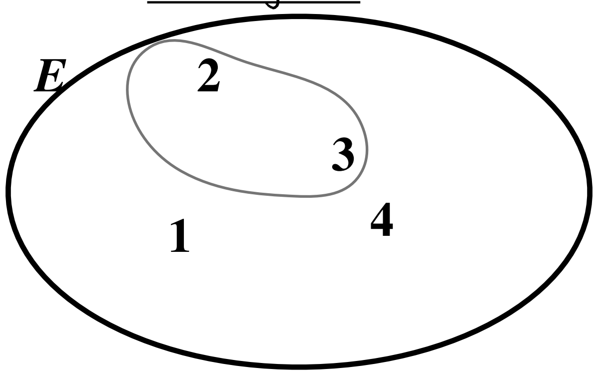
$\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



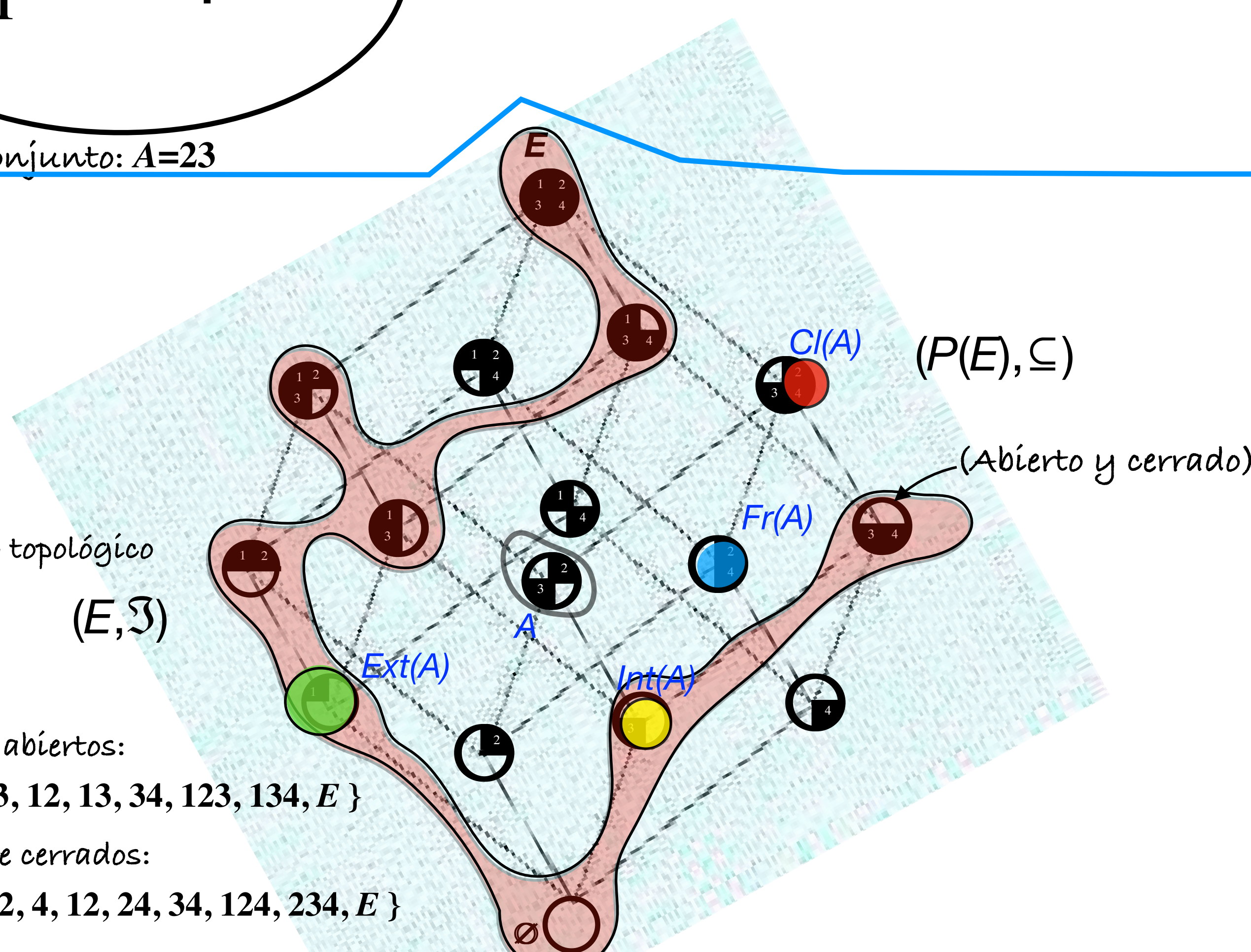
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Espacio topológico

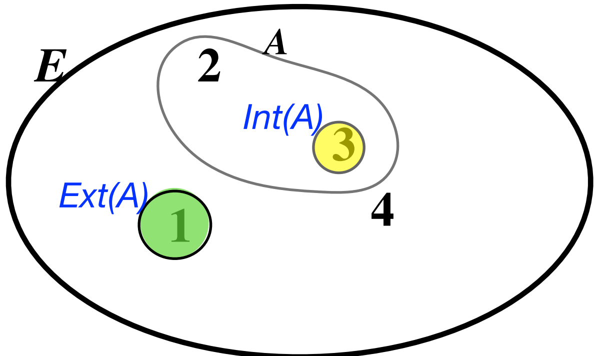
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

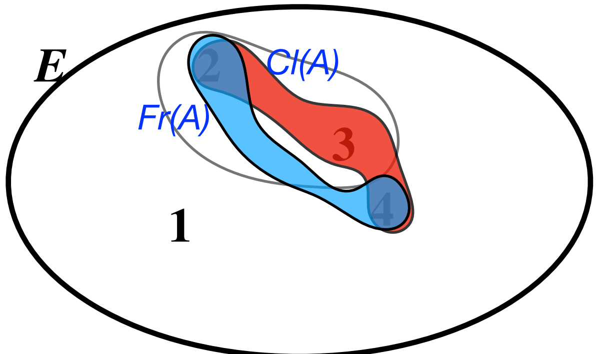
$\Im = \{\, \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \,\}$

Familia de cerrados:

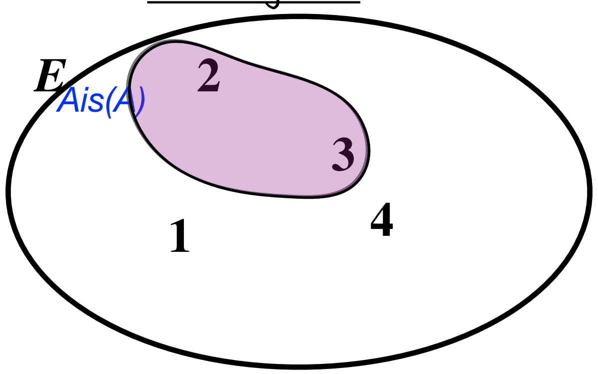
$\Im^* = \{\, \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \,\}$



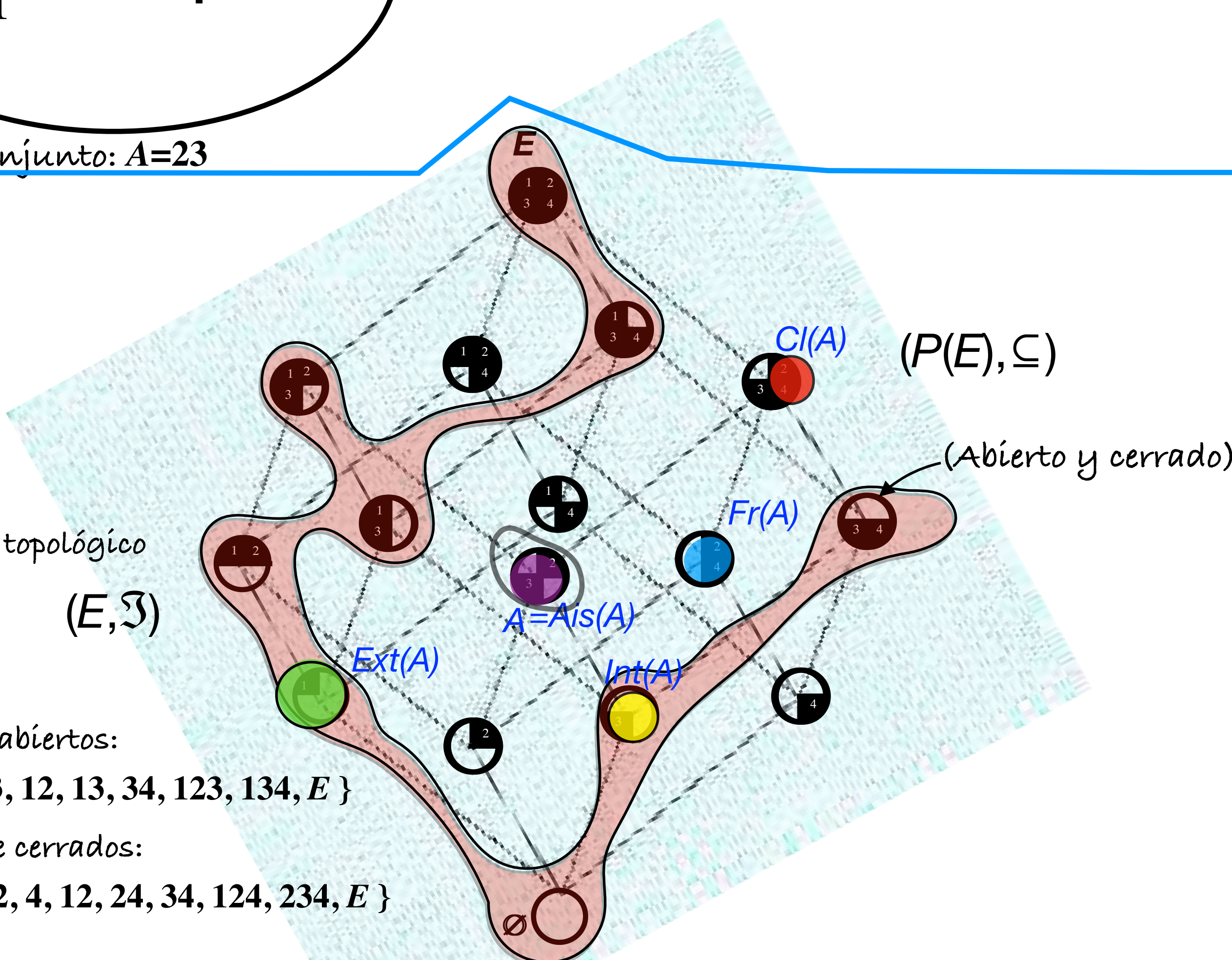
Subconjunto: *A*=23



Subconjunto: *A*=23



Subconjunto: *A*=23



Espacio topológico

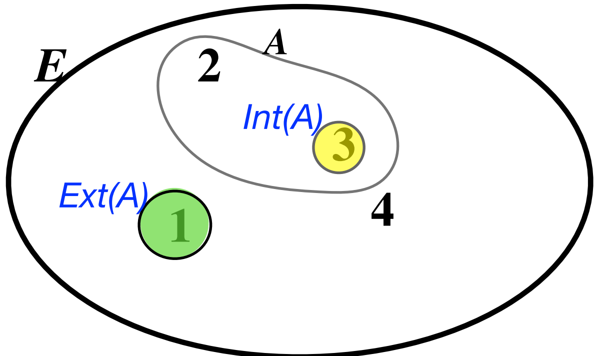
$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

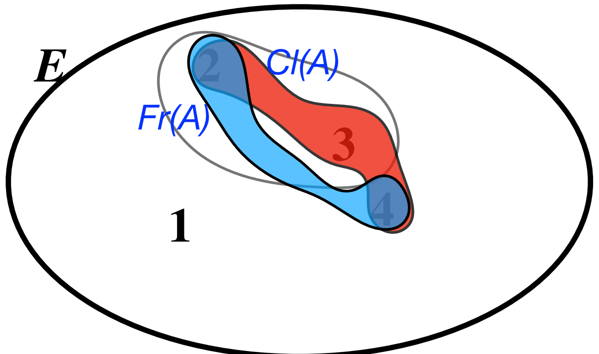
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

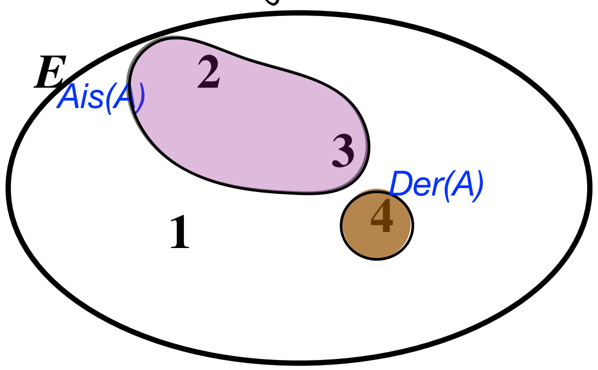
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



Subconjunto: **A=23**



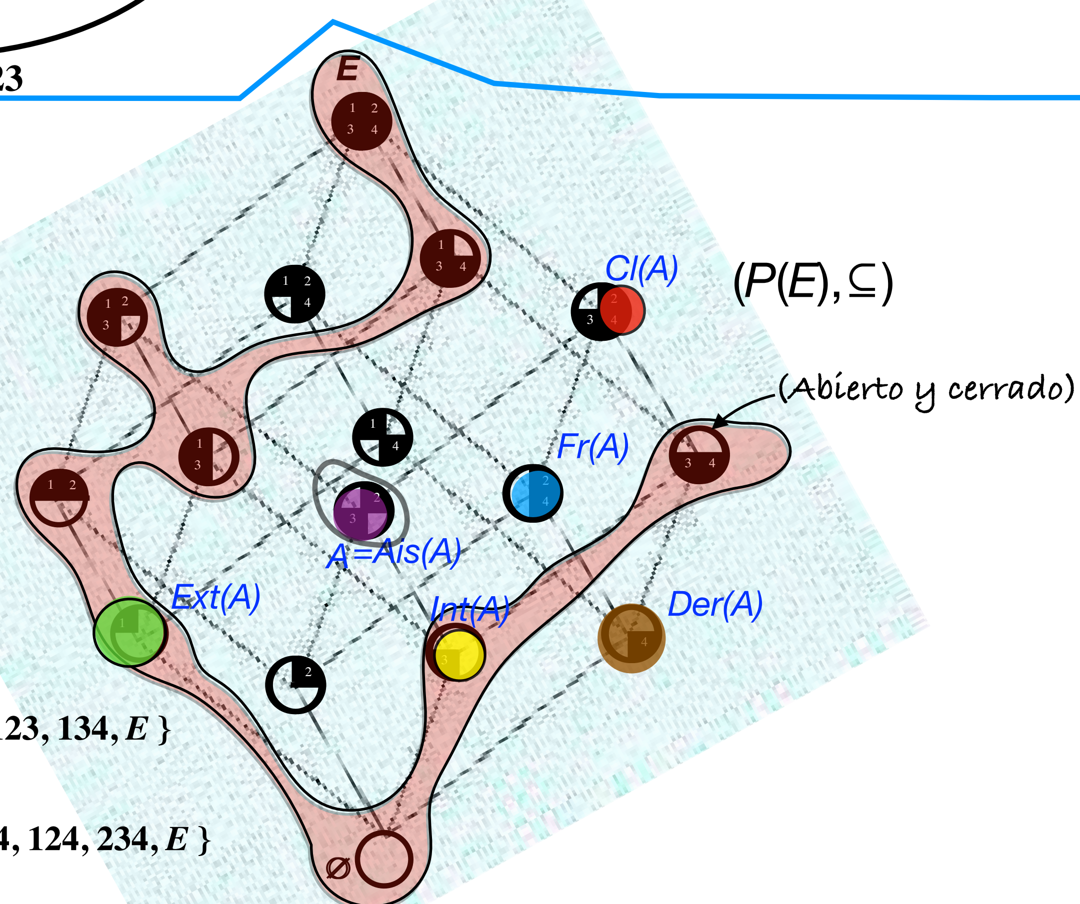
Subconjunto: **A=23**



Subconjunto: **A=23**

Espacio topológico

$(E,\Im)$

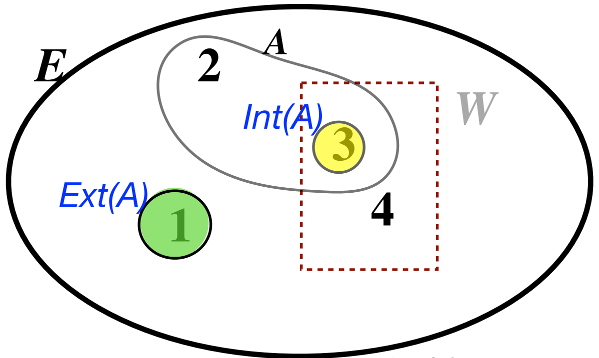


Familia de abiertos:

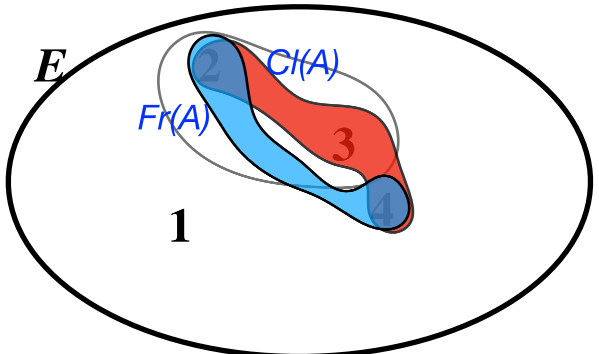
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

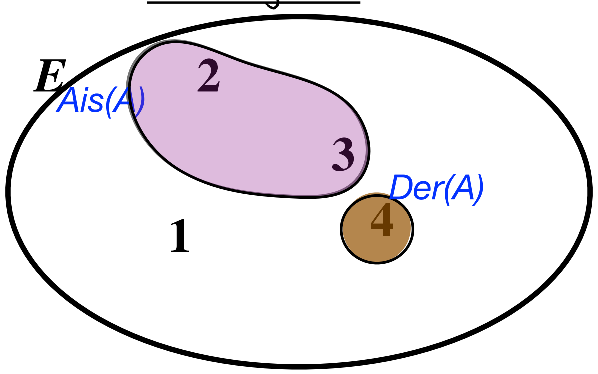
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$



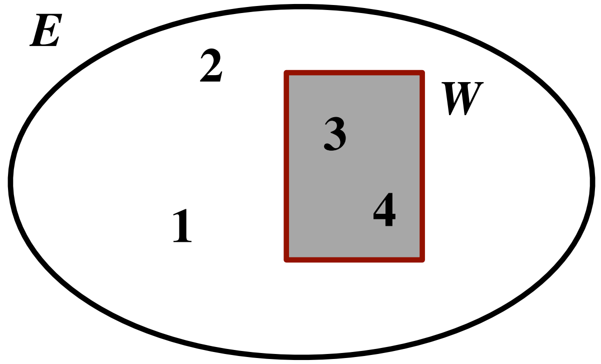
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23

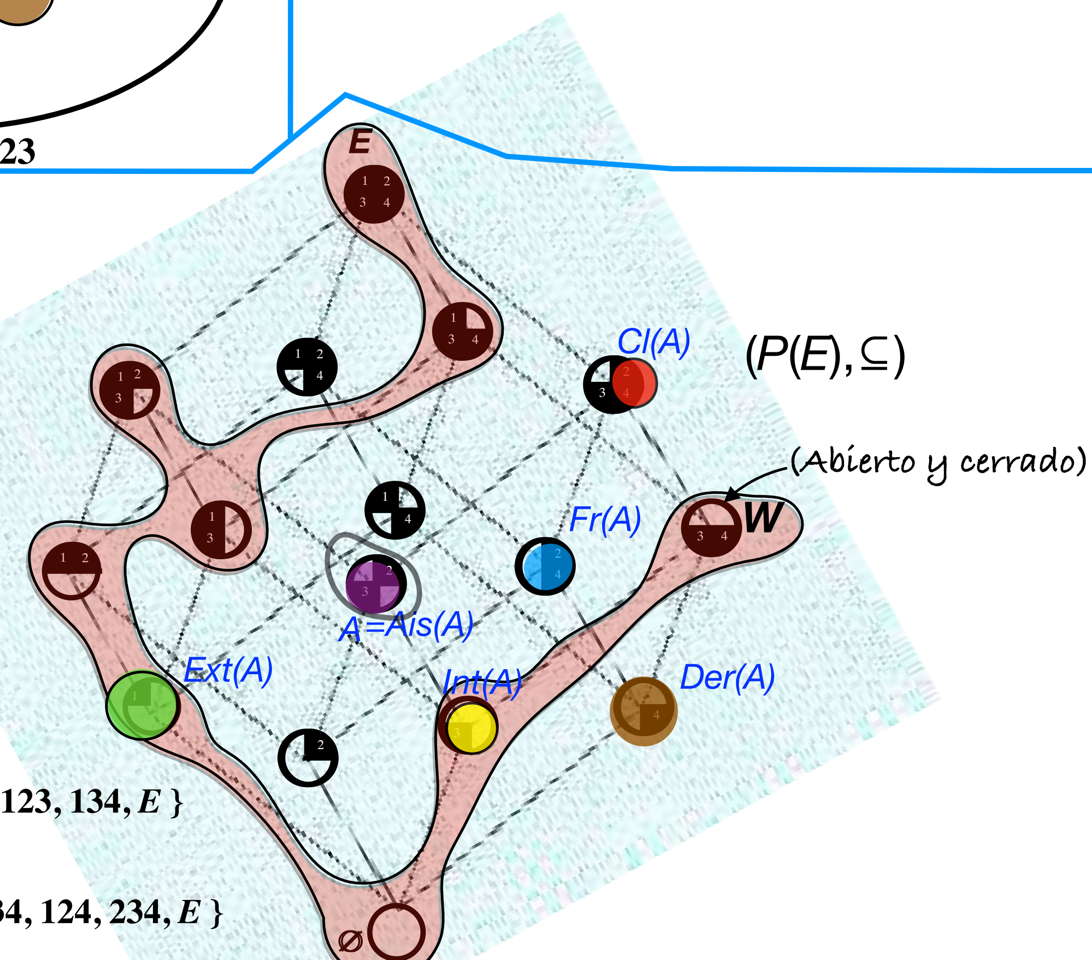


Subconjunto: A=23



Espacio topológico

$(E,\Im)$

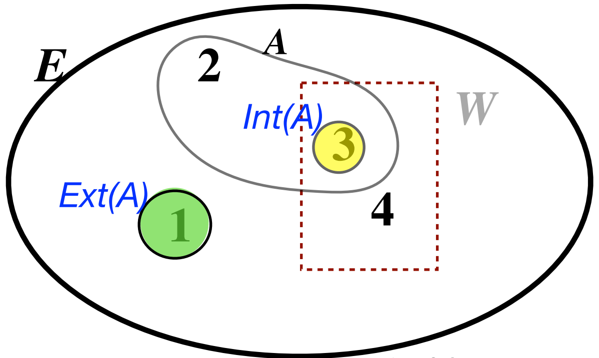


Familia de abiertos:

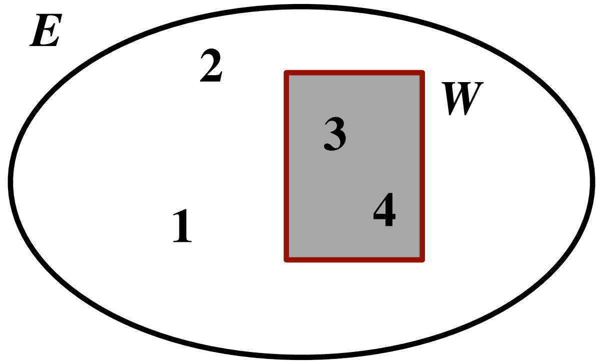
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

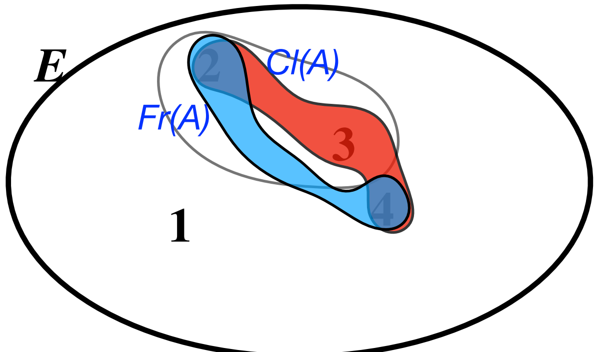
Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

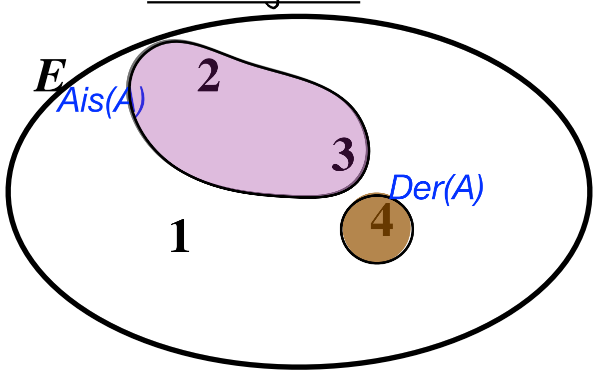


Subconjunto: A=23





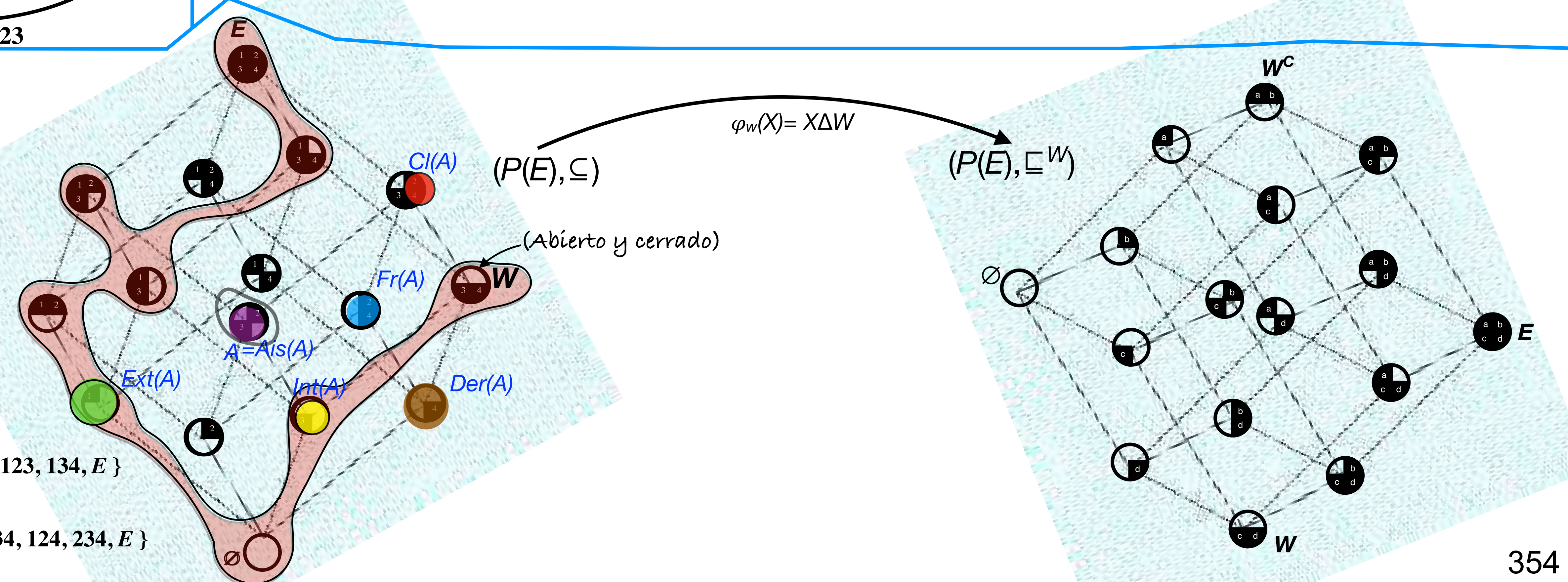
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23

Espacio topológico

$(E,\Im)$

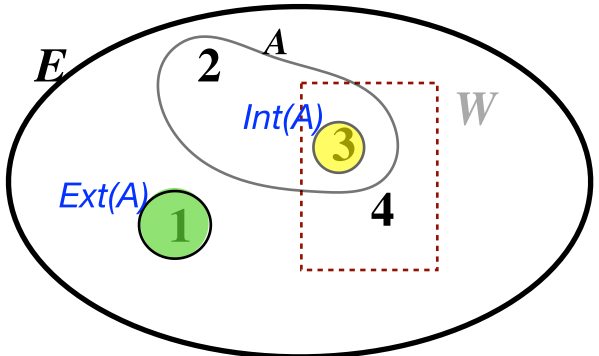


Familia de abiertos:

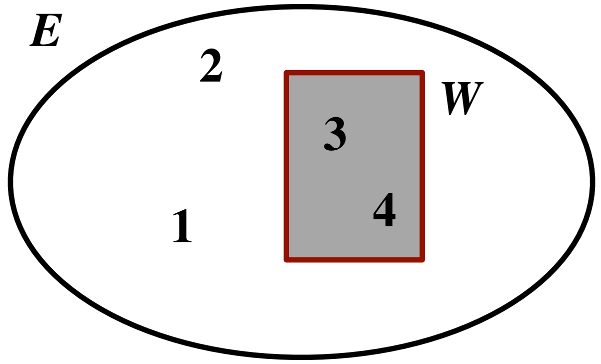
$\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

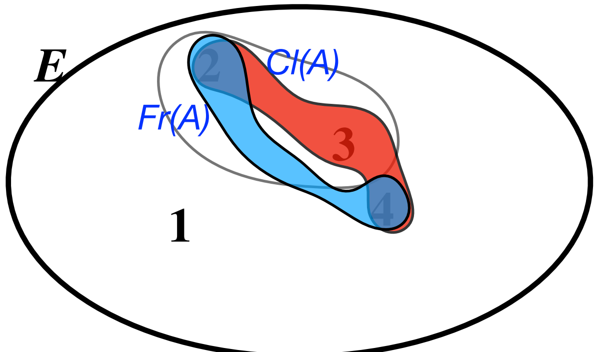
Familia de cerrados:

$\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

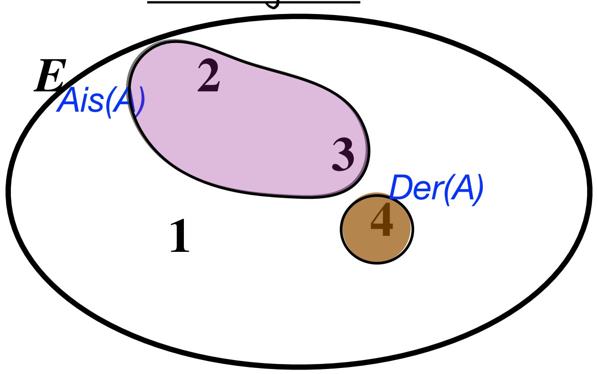


Subconjunto: **A=23**





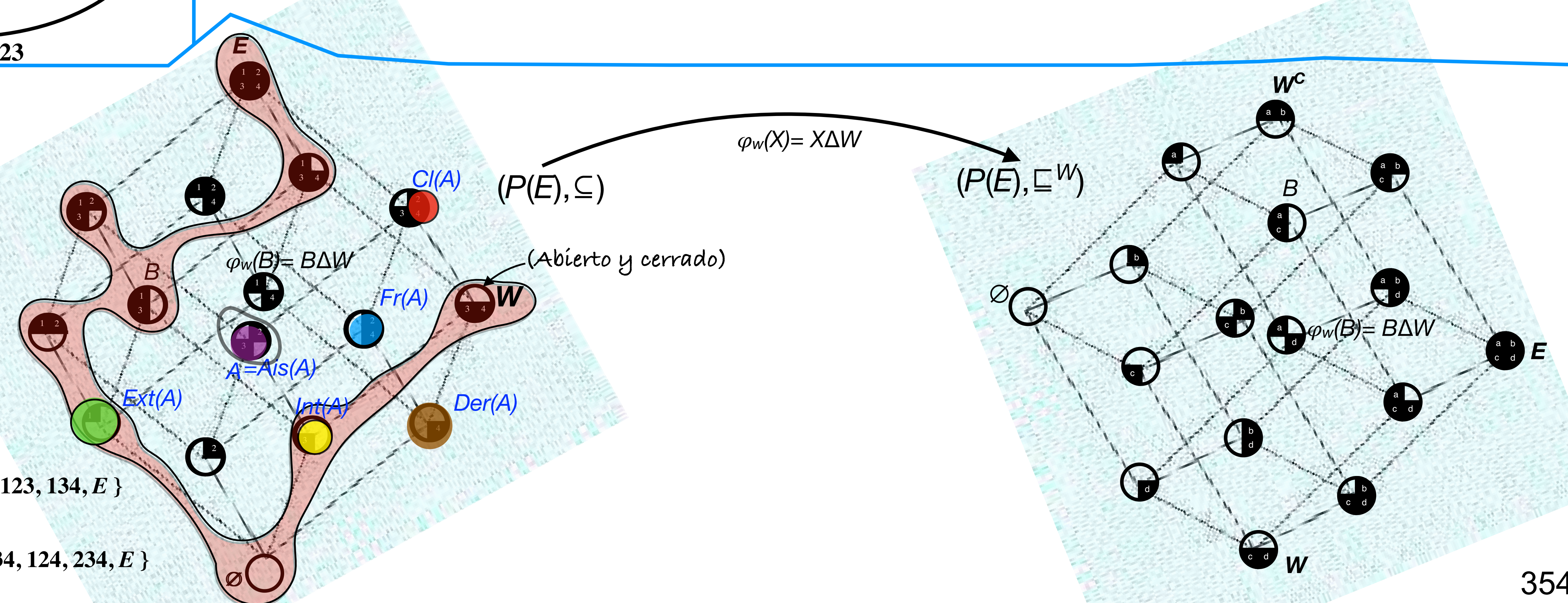
Subconjunto: **A=23**



Subconjunto: **A=23**

Espacio topológico

$(E,\Im)$

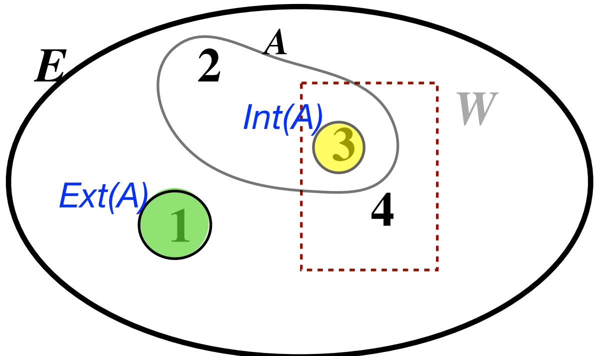


Familia de abiertos:

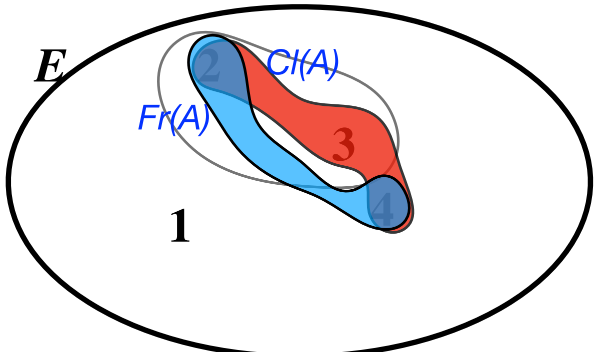
$\Im$ = { ∅, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, *E* }

Familia de cerrados:

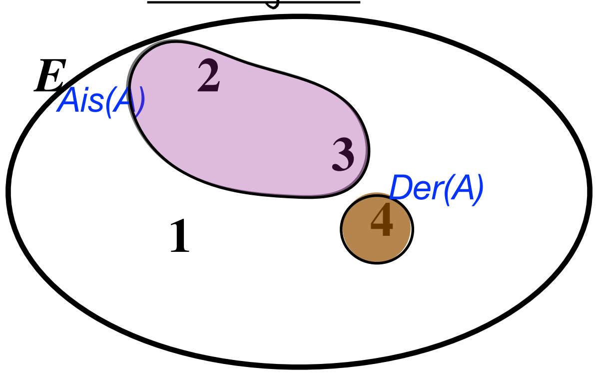
$\Im^*$ = { ∅, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, *E* }



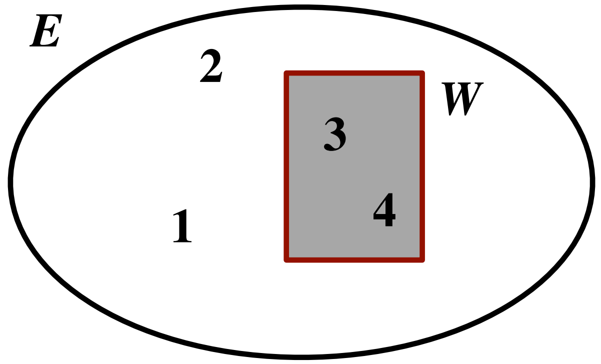
Subconjunto: A=23

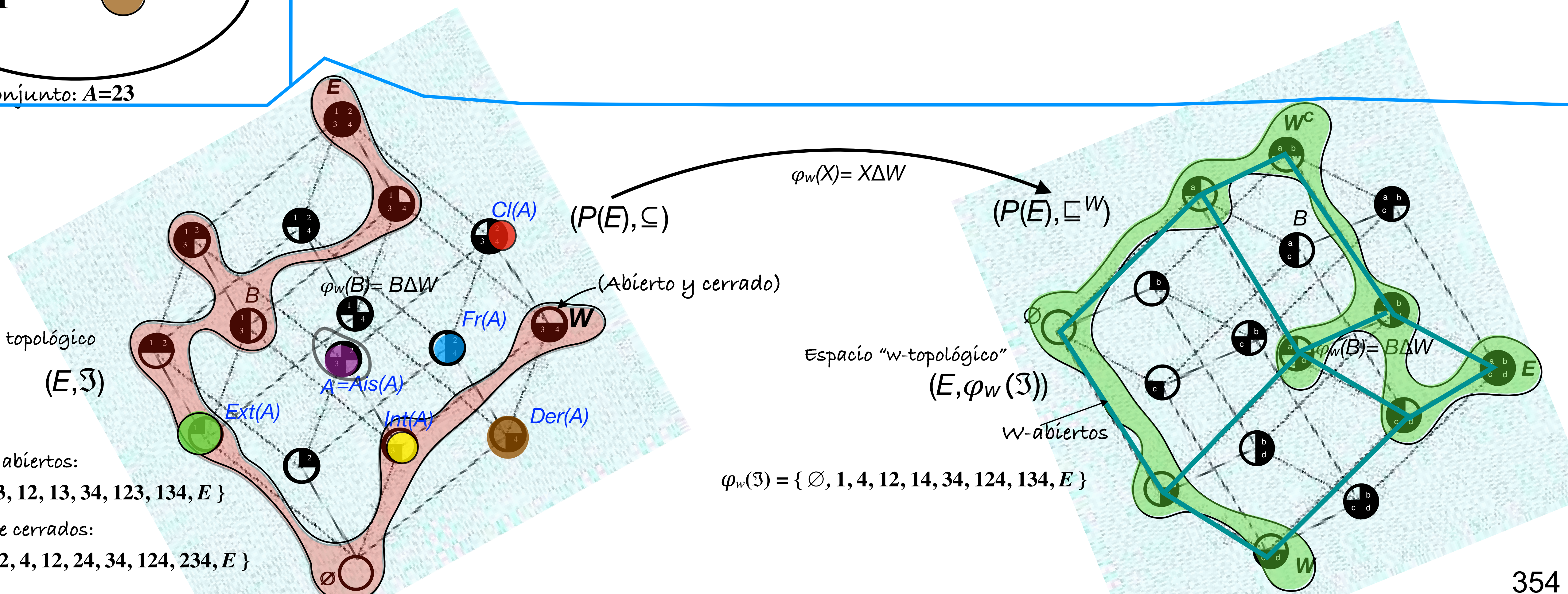


Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23





Espacio topológico

$(E, \mathfrak{I})$

Familia de abiertos:

$\mathfrak{I} = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

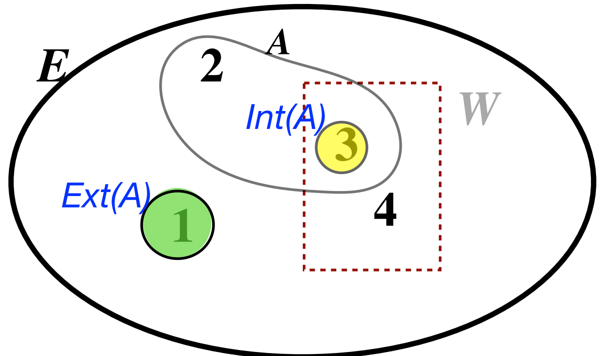
Familia de cerrados:

$\mathfrak{I}^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

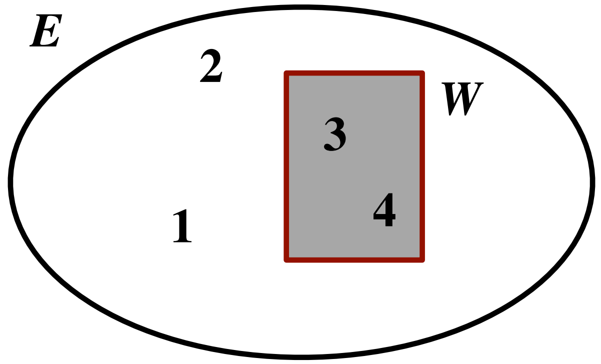
Espacio "w-topológico"

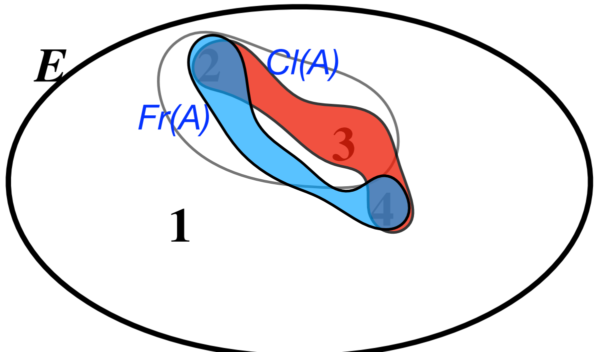
$(E, \varphi_W(\mathfrak{I}))$

$\varphi_W(\mathfrak{I}) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

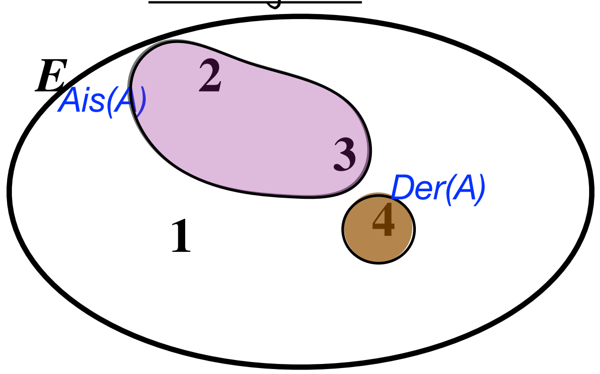


Subconjunto: **A=23**

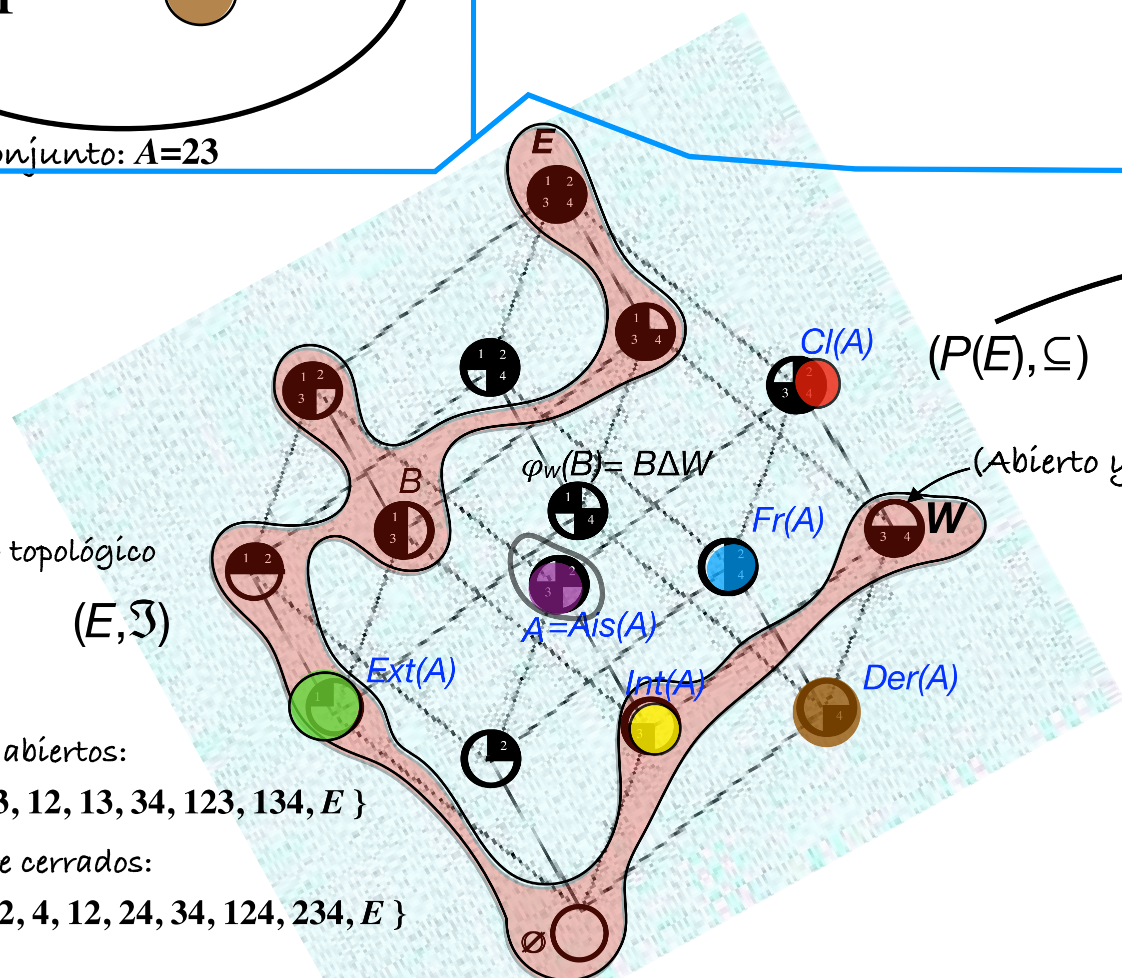




Subconjunto: **A=23**



Subconjunto: **A=23**



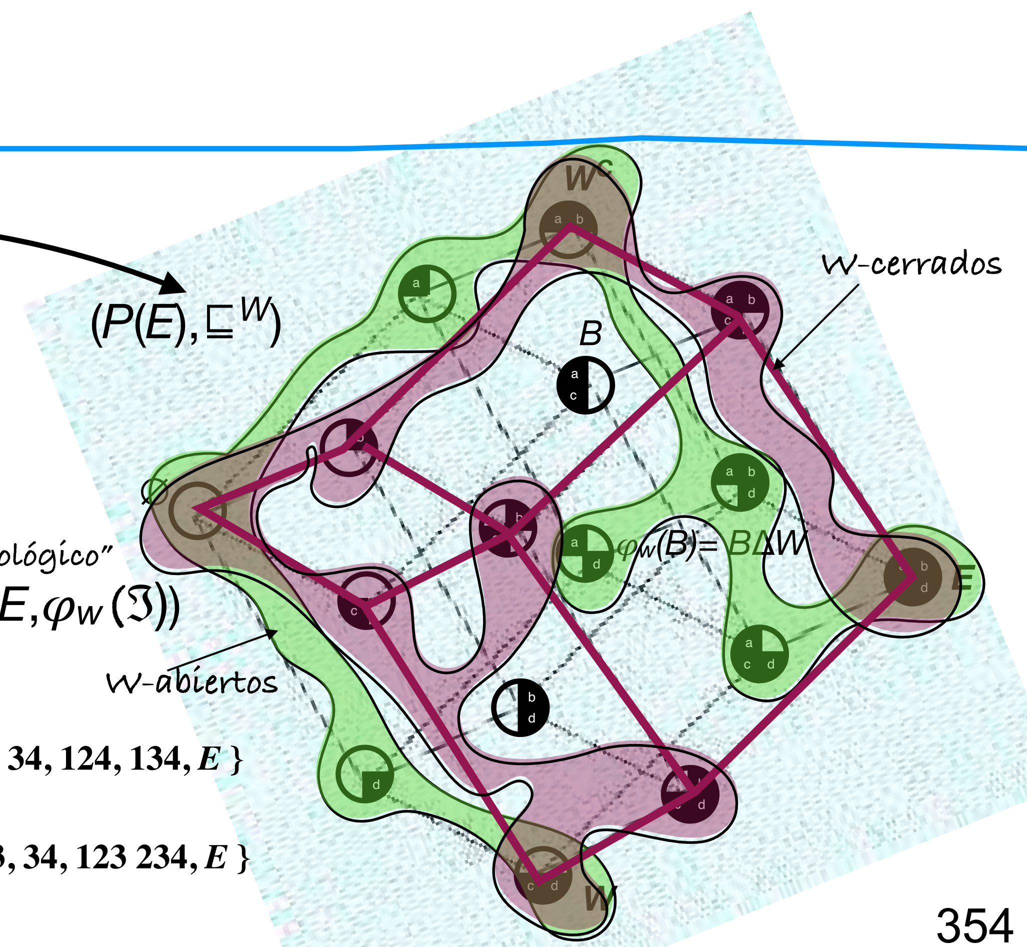
Espacio topológico

$(E,\Im)$

$\varphi_W(X)= X\Delta W$

$(P(E),\subseteq)$

$(P(E),\sqsubseteq^W)$



Espacio "w-topológico"

$(E,\varphi_W(\Im))$

Familia de abiertos:

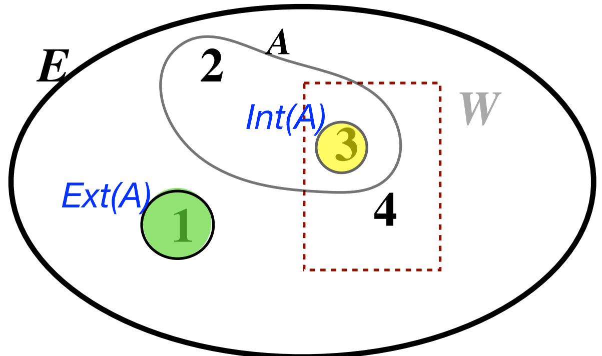
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

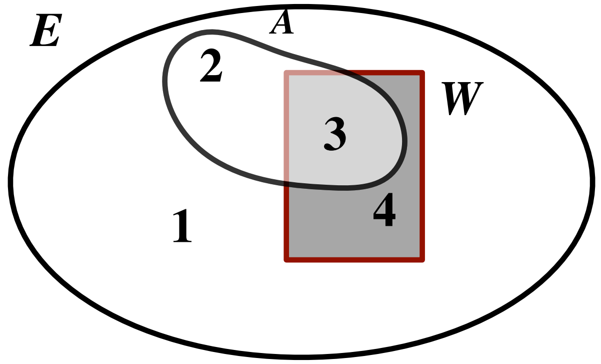
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_W(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

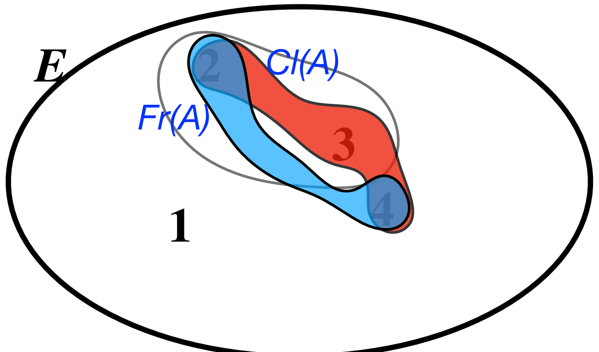
$\varphi_W(\Im)^* = \{ \varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



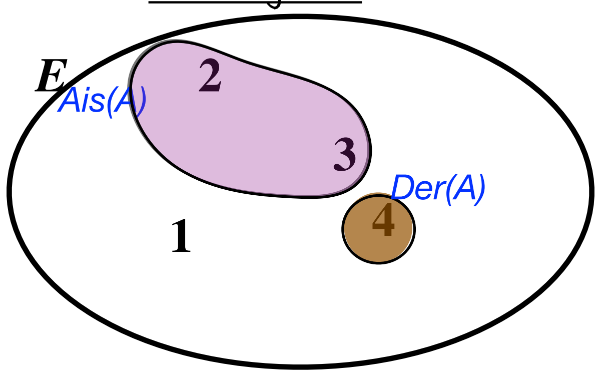
Subconjunto: A=23



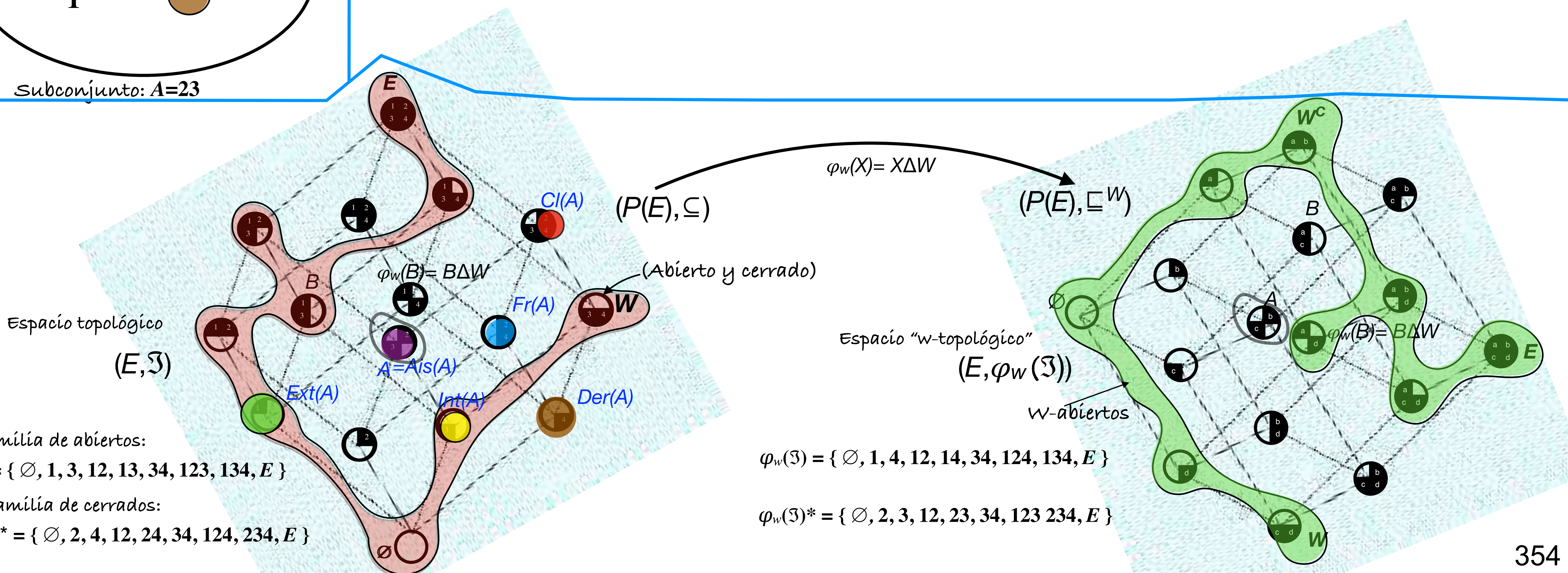
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Familia de abiertos:

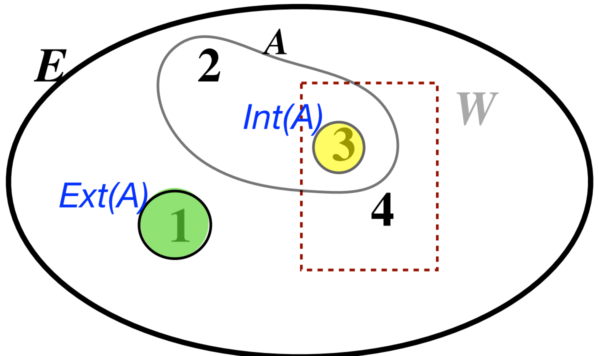
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

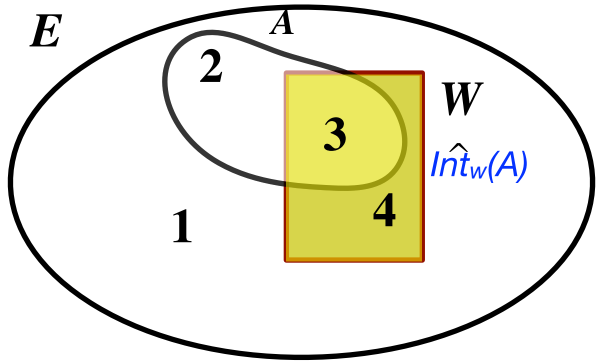
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_W(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

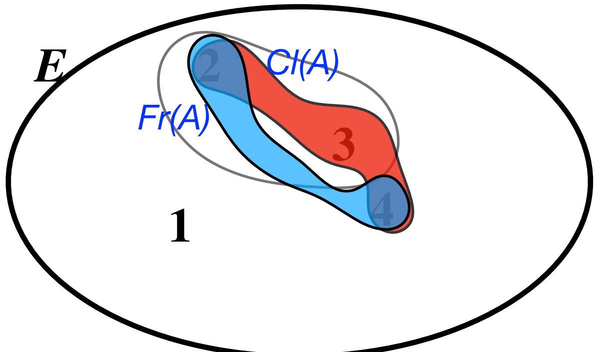
$\varphi_W(\Im)^* = \{ \varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



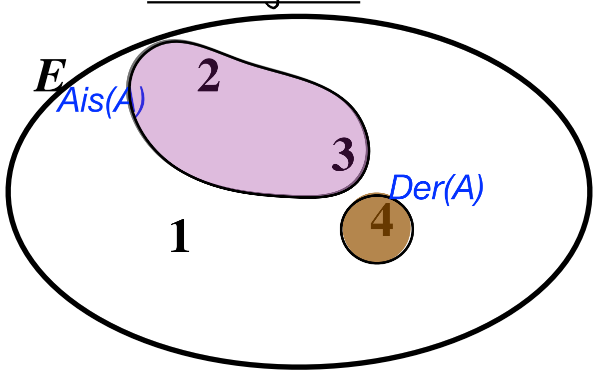
Subconjunto: A=23



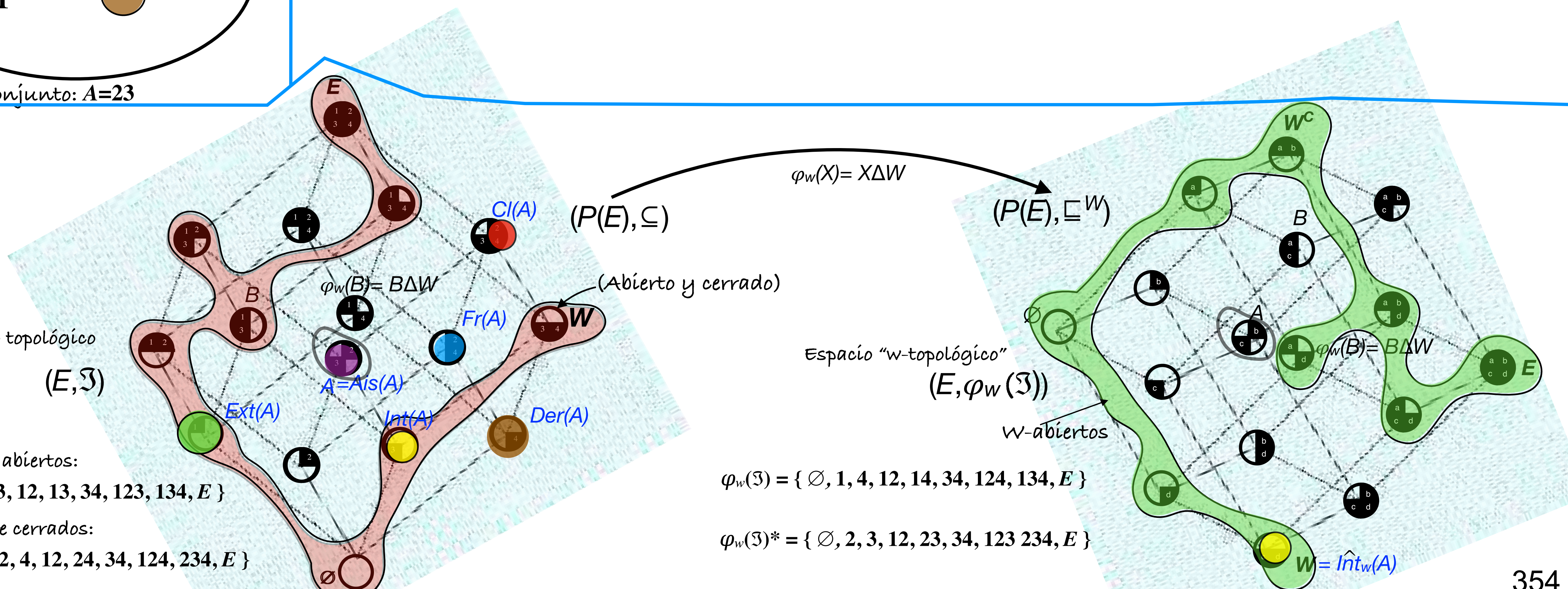
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Familia de abiertos:

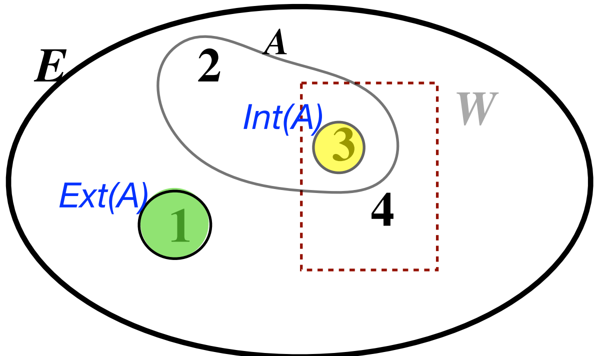
ℑ = { ∅, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, *E* }

Familia de cerrados:

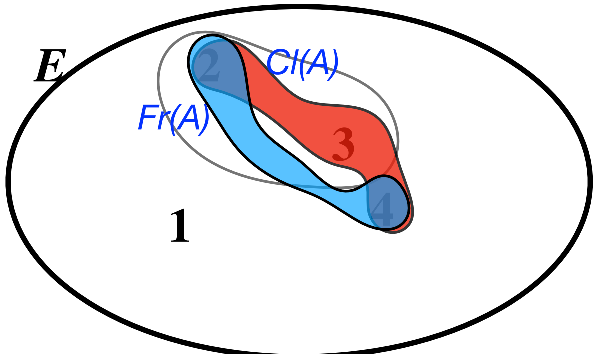
ℑ* = { ∅, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, *E* }

φ_w(ℑ) = { ∅, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, *E* }

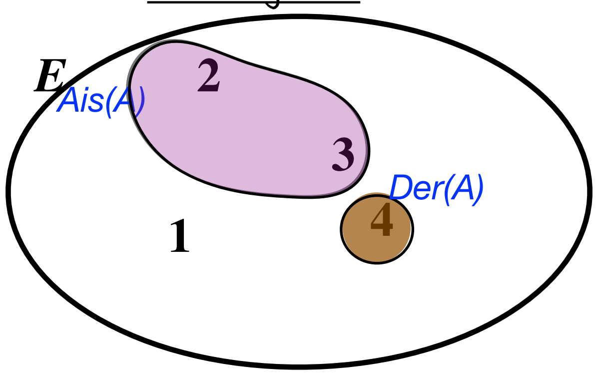
φ_w(ℑ)* = { ∅, 2, 3, 12, 23, 34, 123 234, *E* }



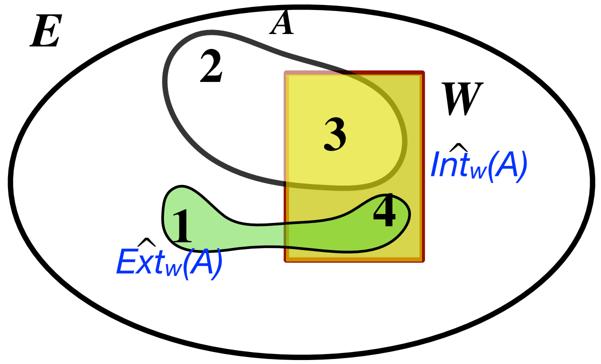
Subconjunto: $A=23$



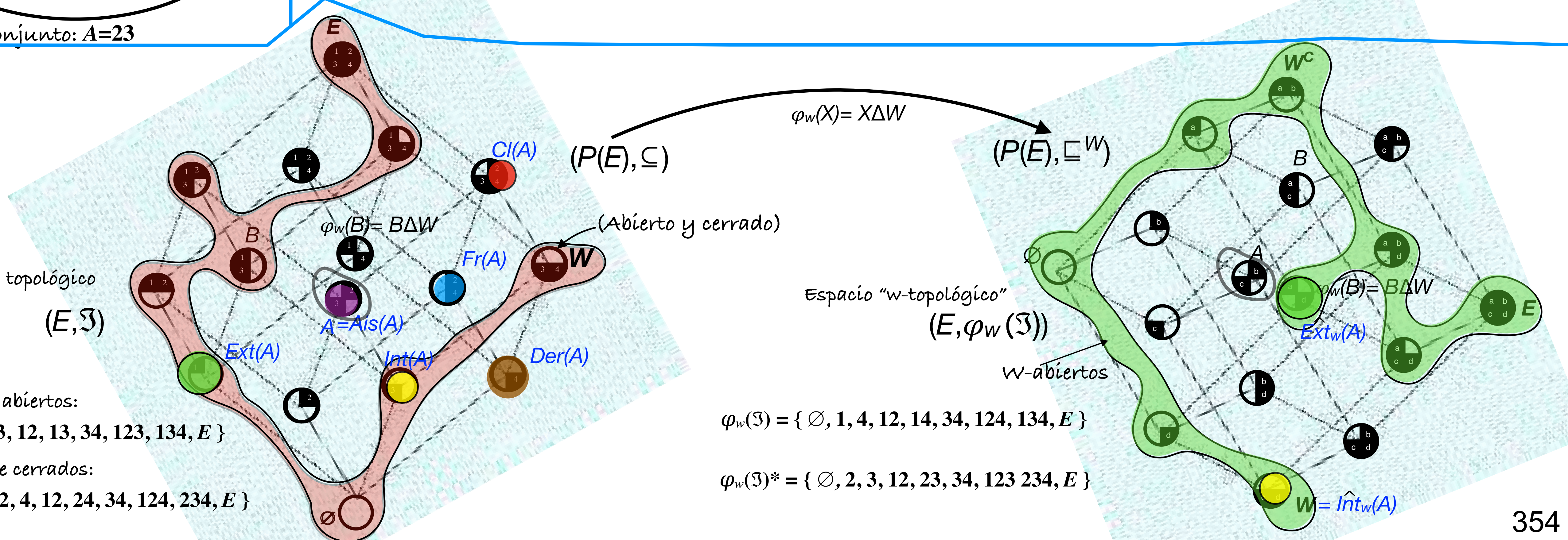
Subconjunto: $A=23$



Subconjunto: $A=23$



Subconjunto: $A=23$



Familia de abiertos:

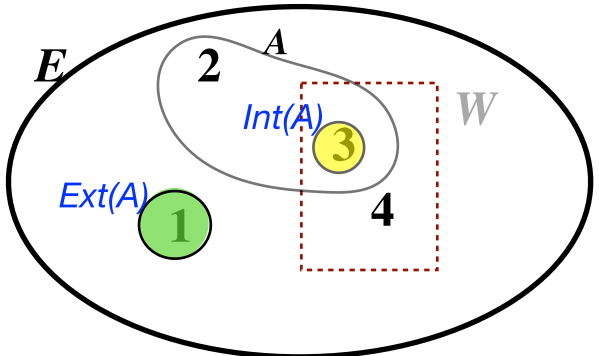
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

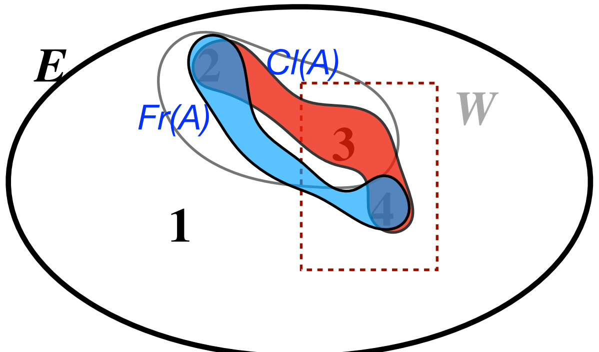
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

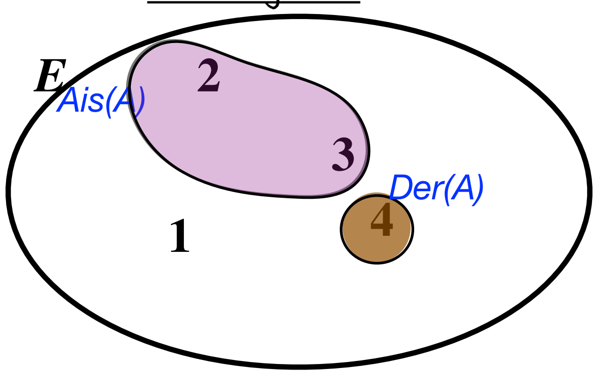
$\varphi_w(\Im)^* = \{ \varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



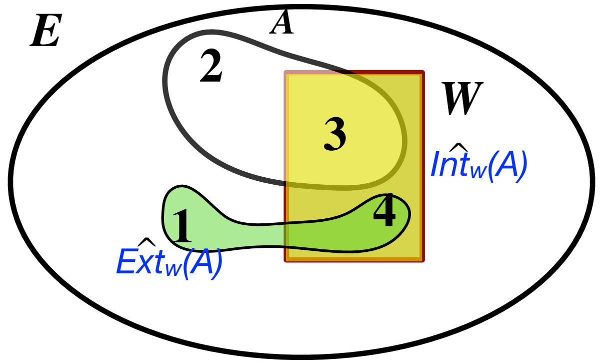
Subconjunto: A=23



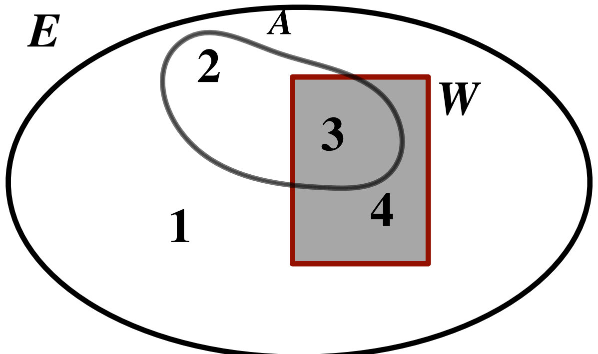
Subconjunto: A=23



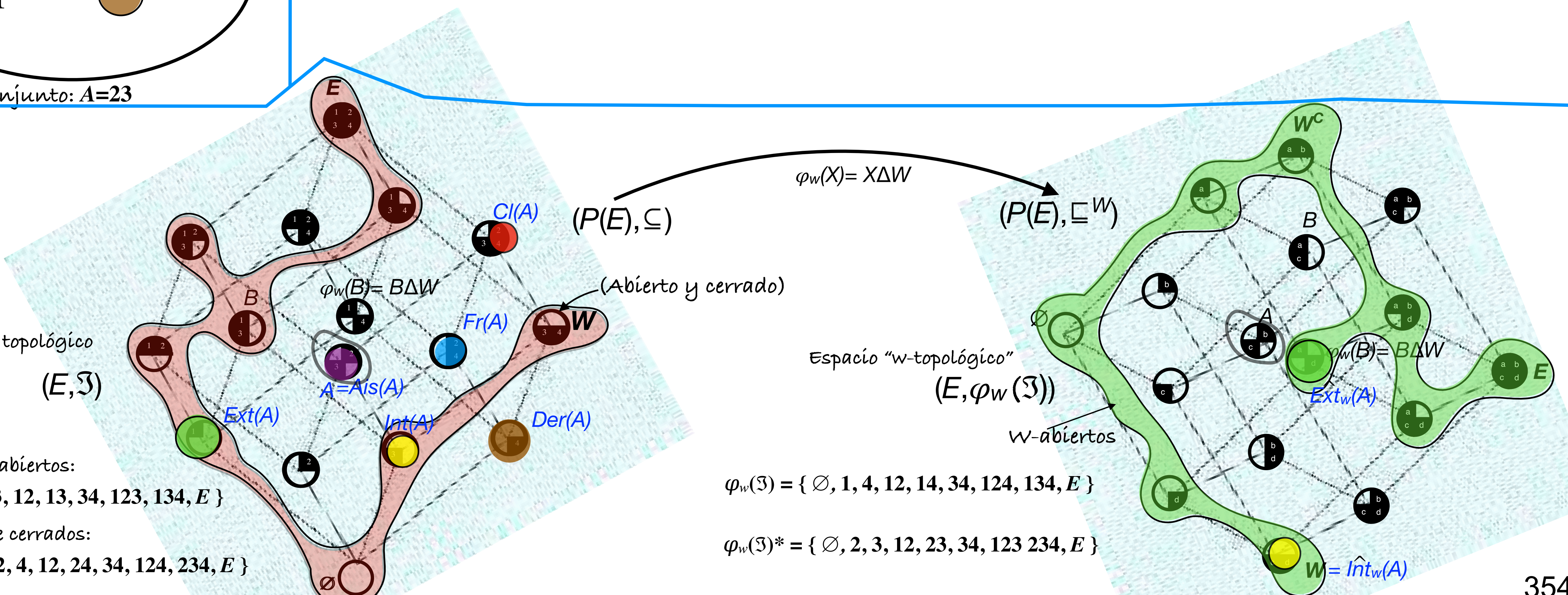
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Familia de abiertos:

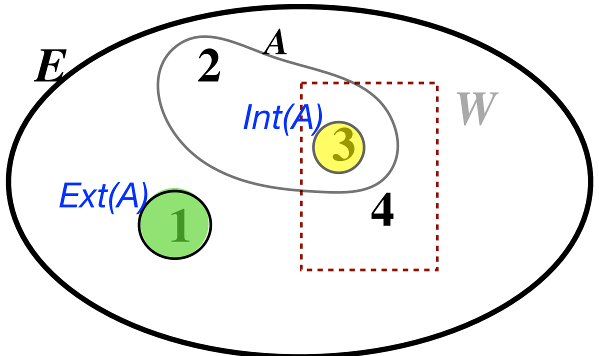
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

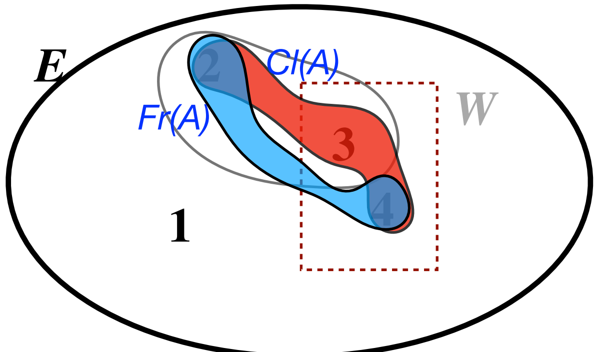
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

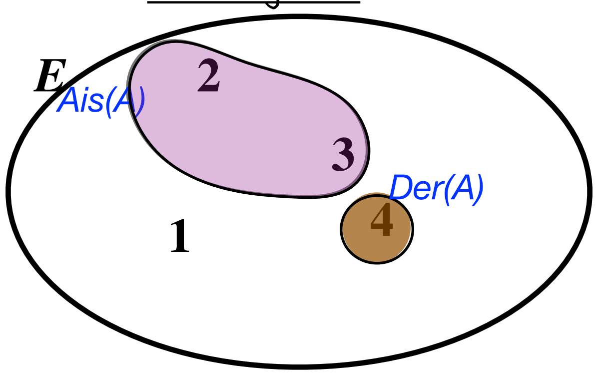
$\varphi_w(\Im)^* = \{ \varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



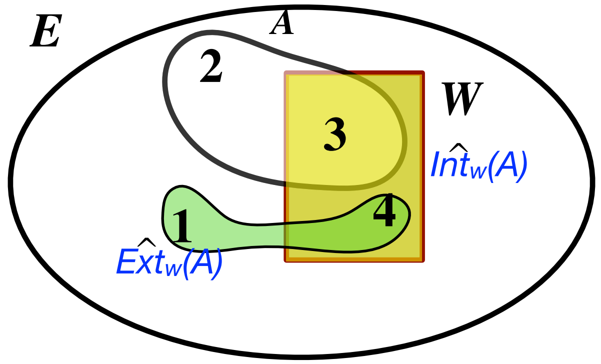
Subconjunto: A=23



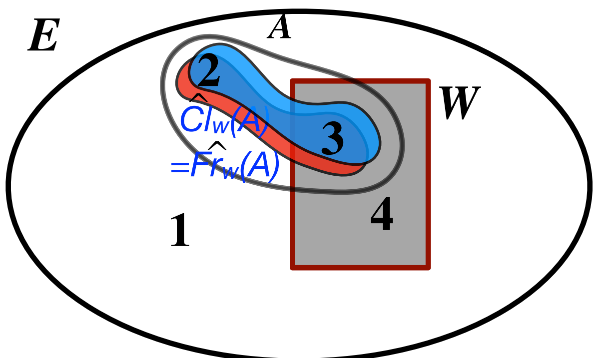
Subconjunto: A=23



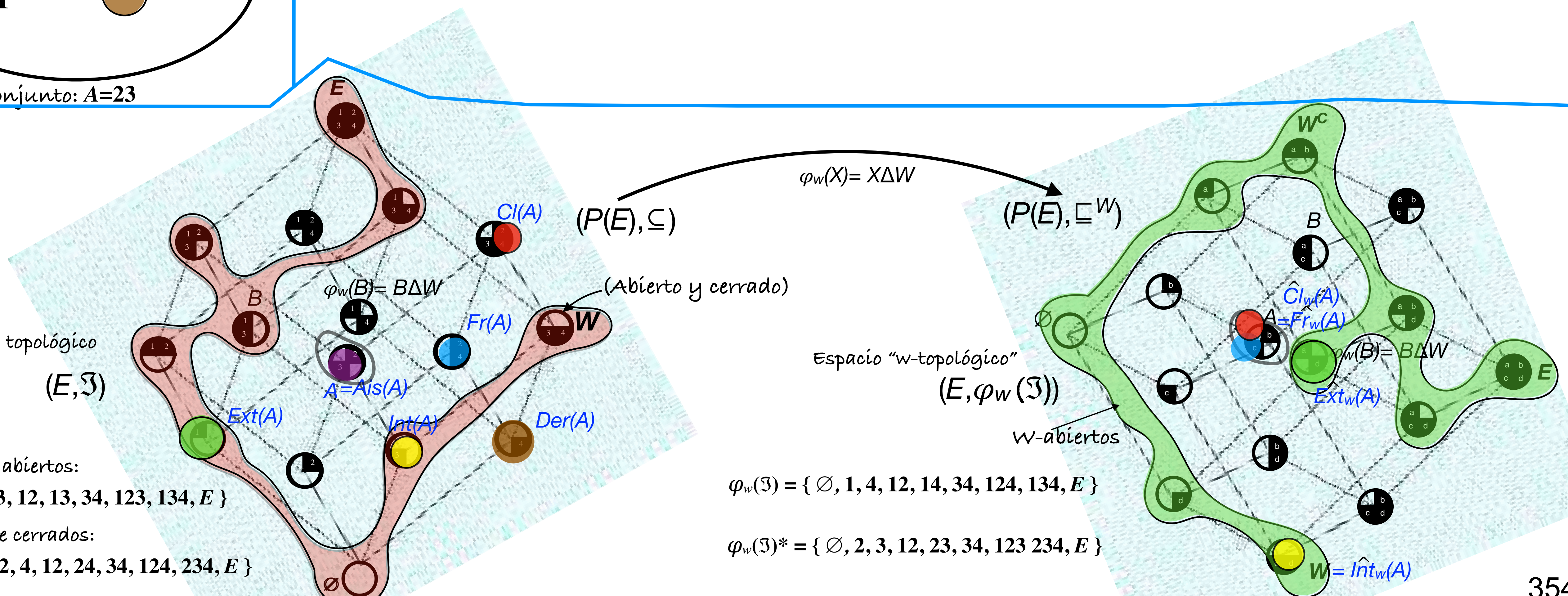
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23



Espacio topológico

$(E,\Im)$

Familia de abiertos:

$\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

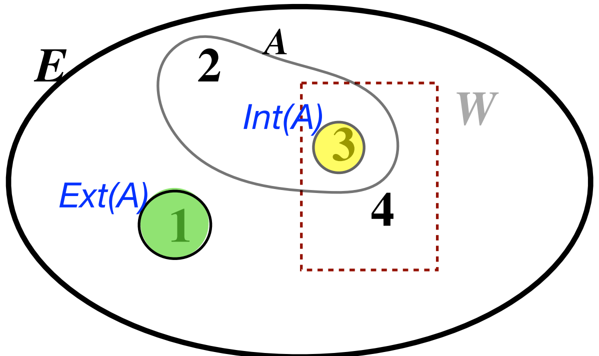
$\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

Espacio "w-topológico"

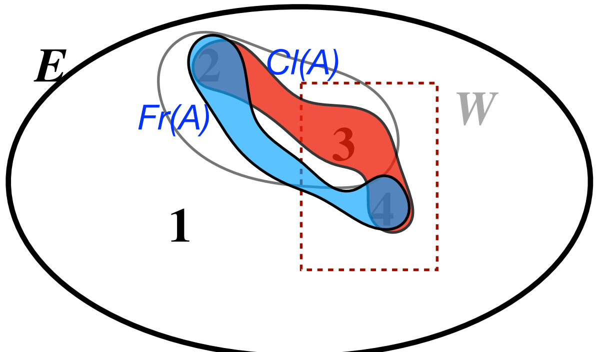
$(E,\varphi_w(\Im))$

$\varphi_w(\Im) = \{ \emptyset, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

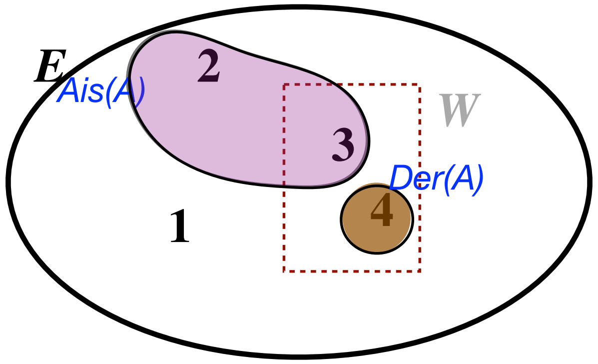
$\varphi_w(\Im)^* = \{ \emptyset, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



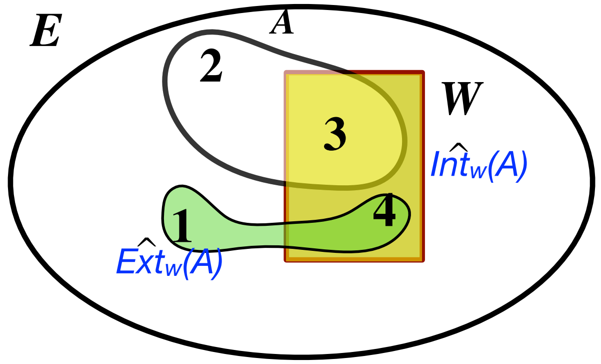
Subconjunto: *A*=23



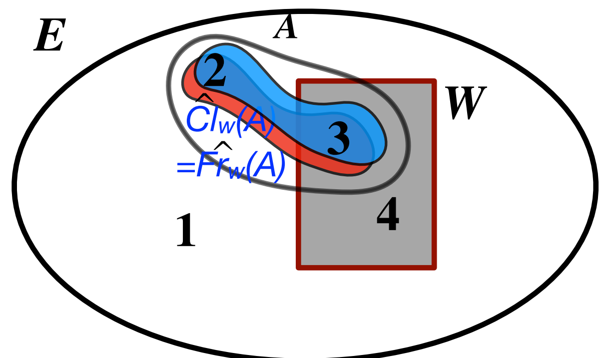
Subconjunto: *A*=23



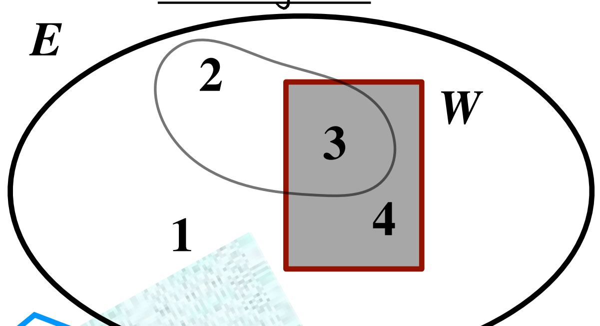
Subconjunto: *A*=23



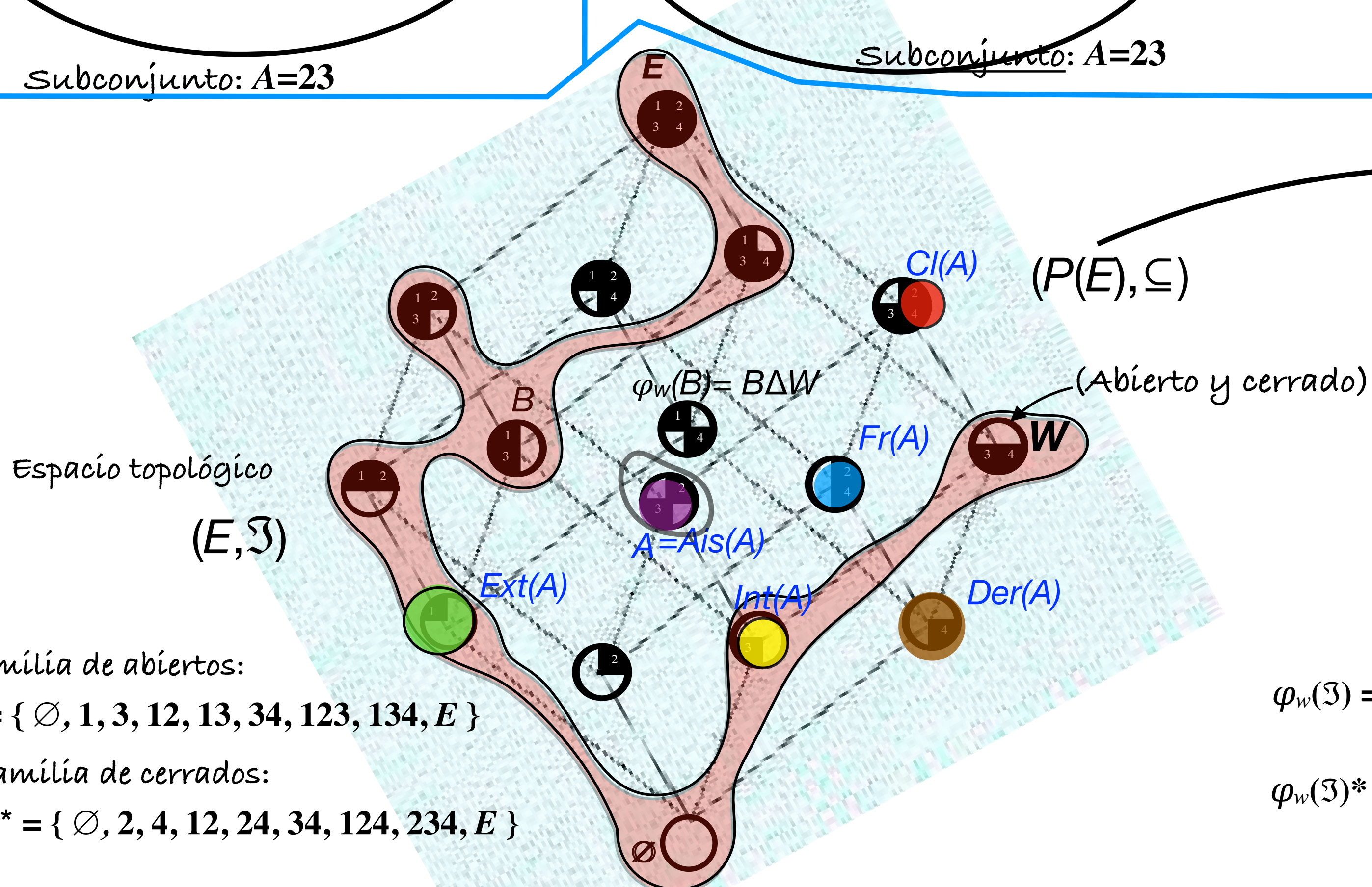
Subconjunto: *A*=23

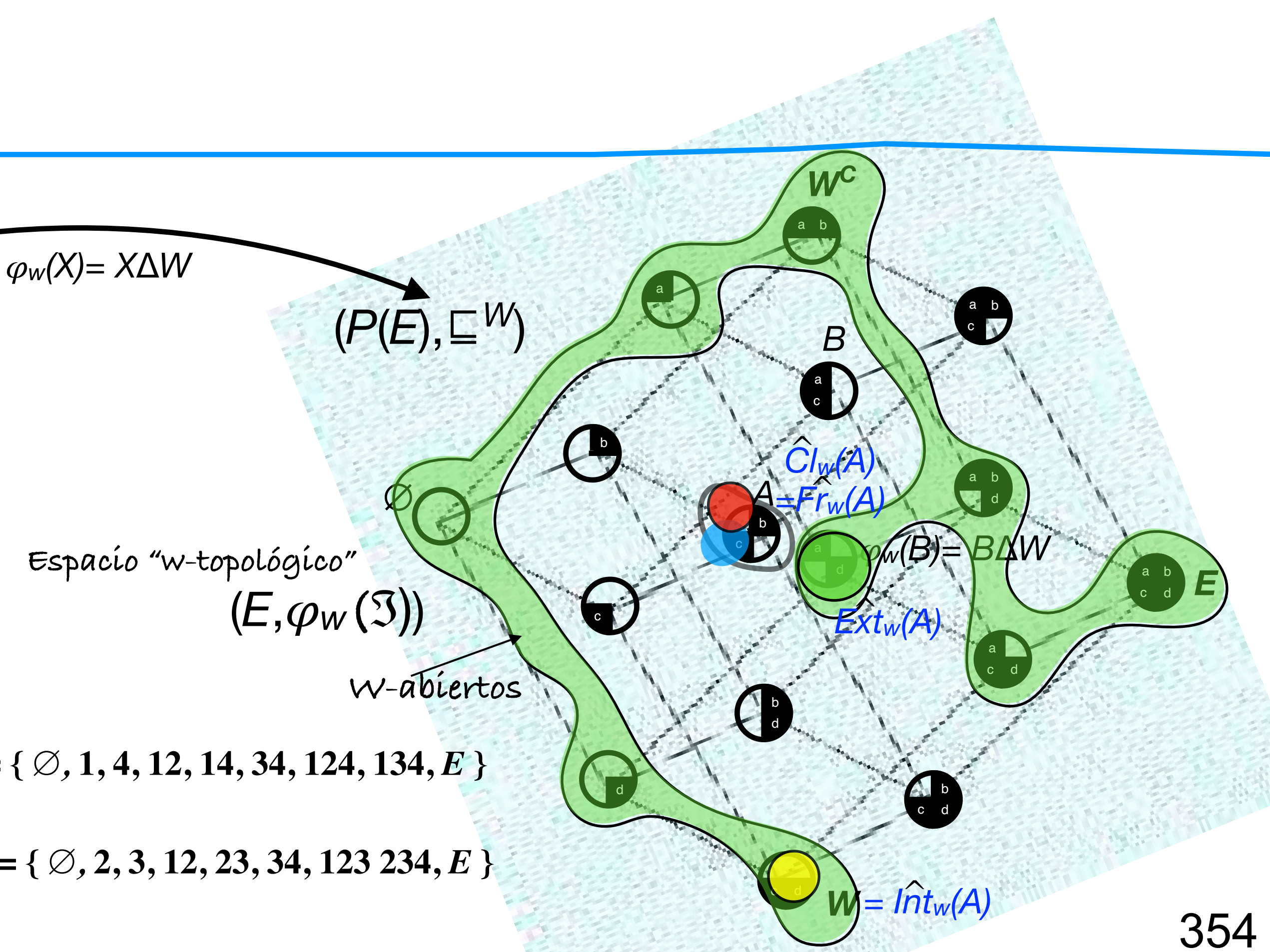


Subconjunto: *A*=23



Subconjunto: *A*=23





Familia de abiertos:

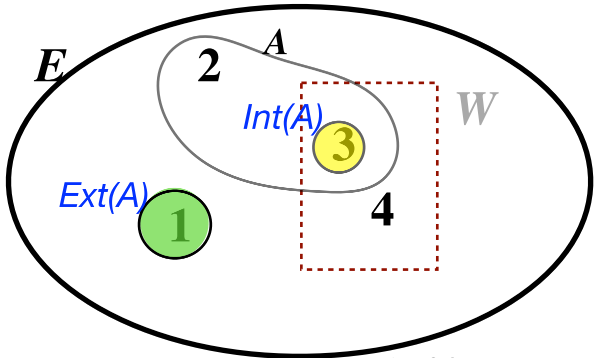
$\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$

Familia de cerrados:

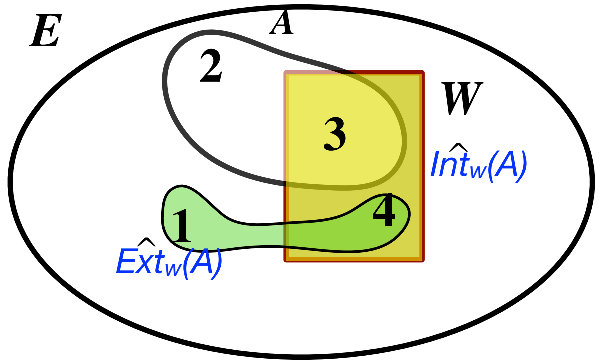
$\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$

$\varphi_w(\Im) = \{ \varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E \}$

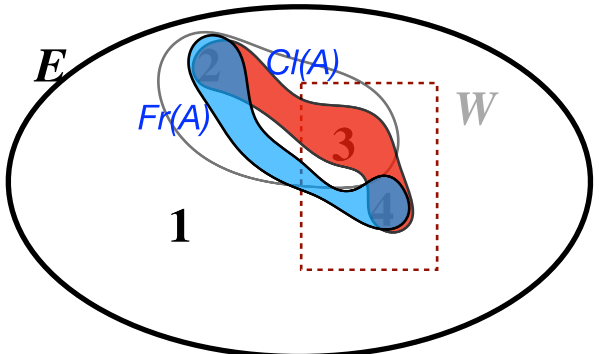
$\varphi_w(\Im)^* = \{ \varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123\ 234, E \}$



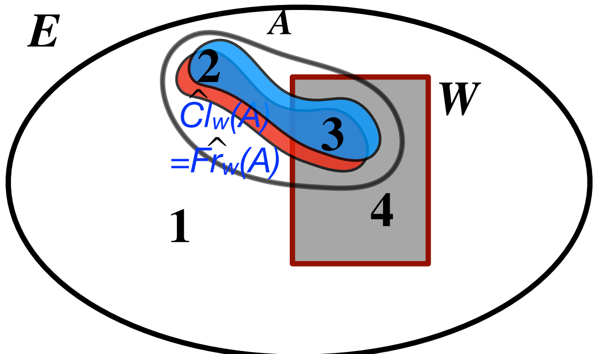
Subconjunto: A=23



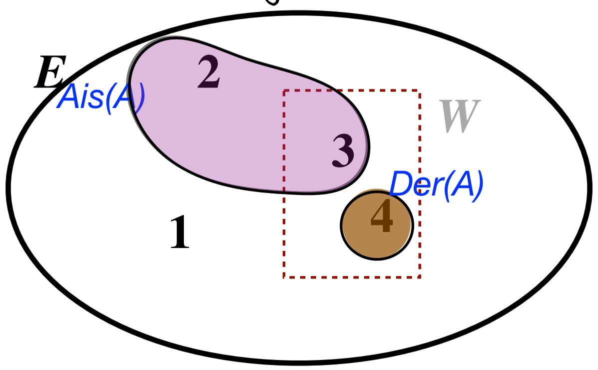
Subconjunto: A=23



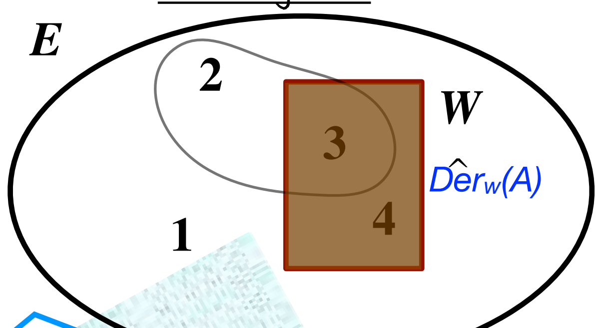
Subconjunto: A=23



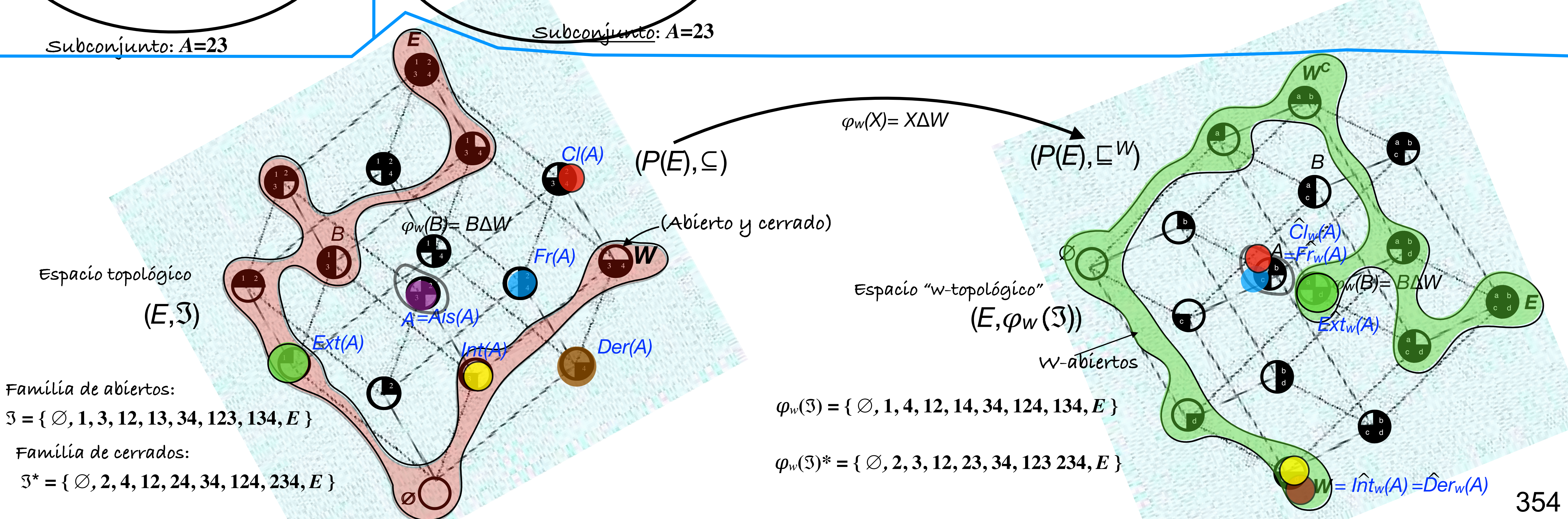
Subconjunto: A=23

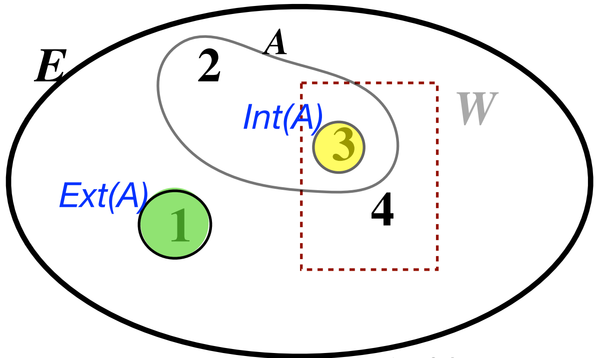


Subconjunto: A=23

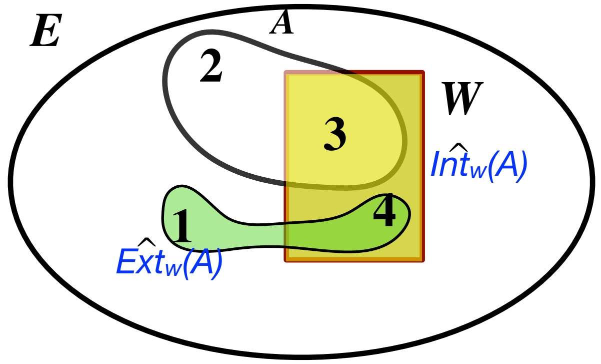


Subconjunto: A=23

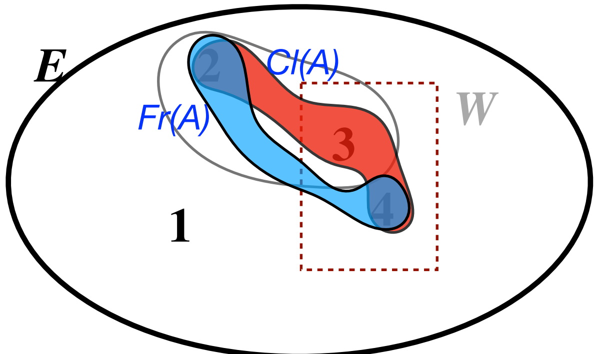




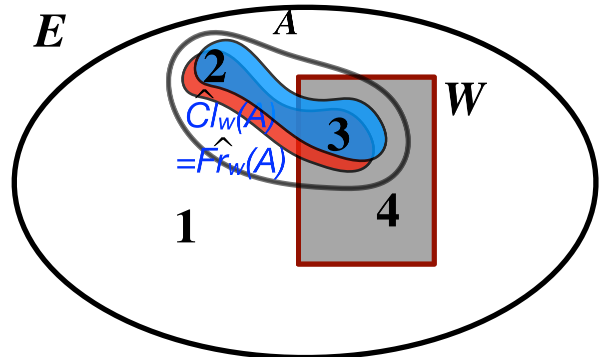
Subconjunto: A=23



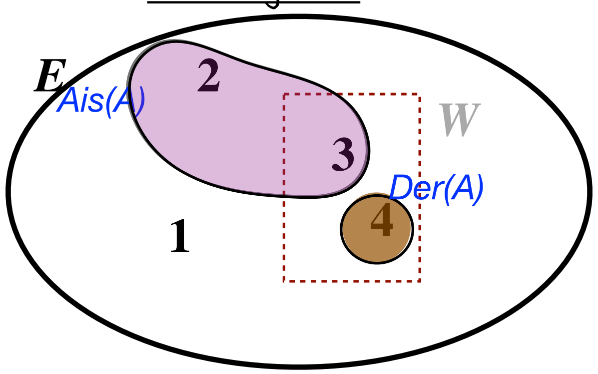
Subconjunto: A=23



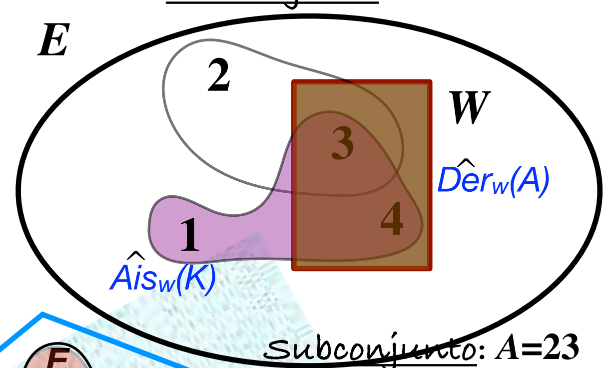
Subconjunto: A=23



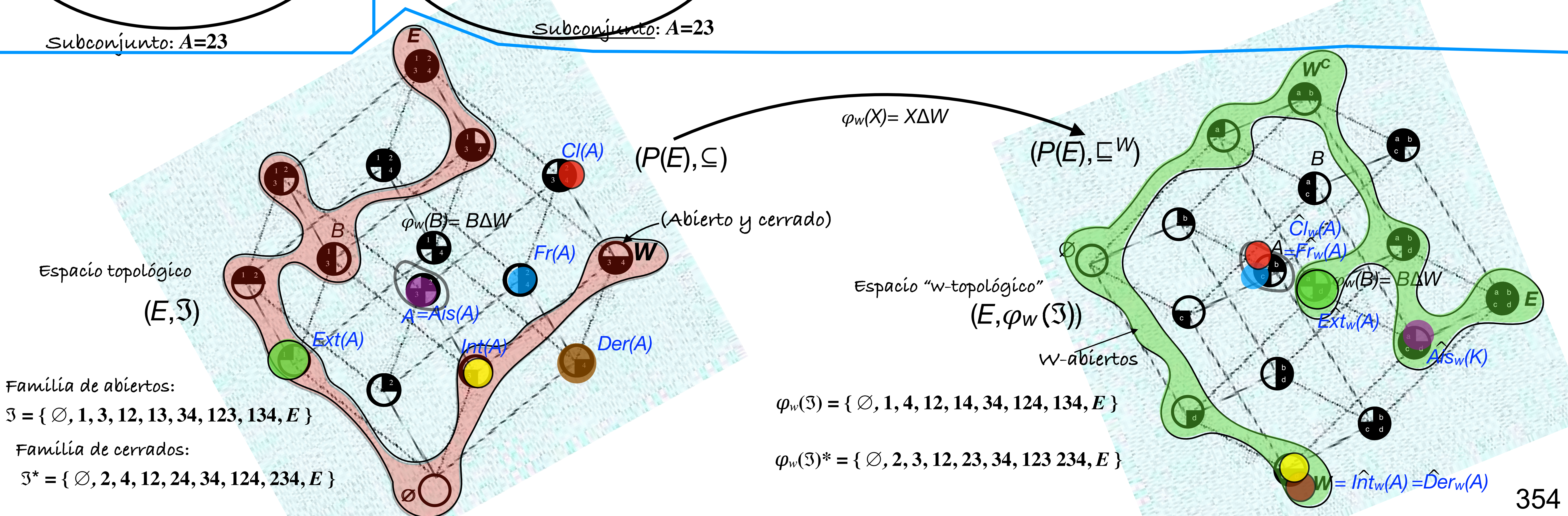
Subconjunto: A=23

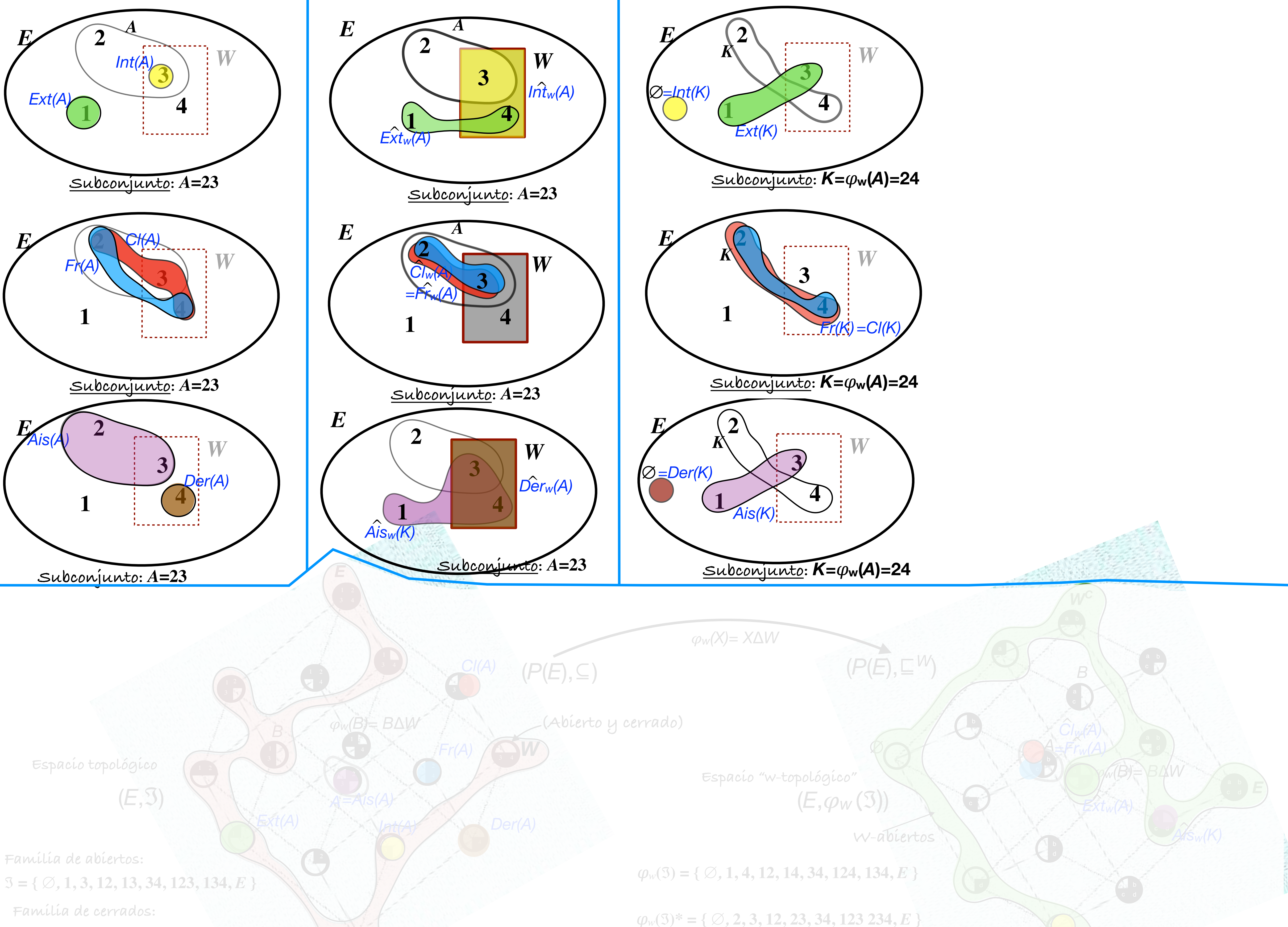


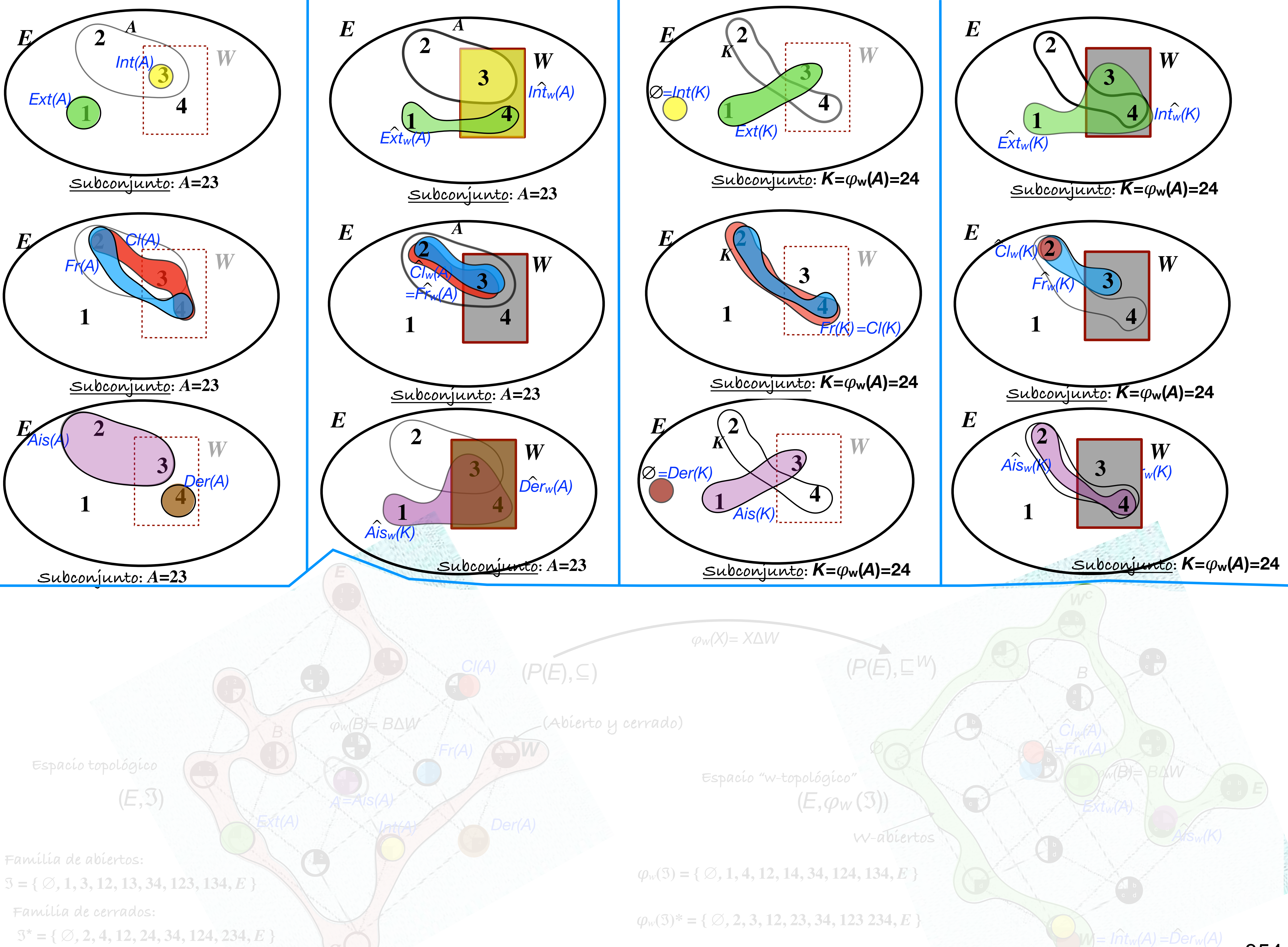
Subconjunto: A=23



Subconjunto: A=23




E
A
W
Int(A)
Ext(A)
Subconjunto: A=23
$\hat{Int}_W(A)$
$\hat{Ext}_W(A)$
K
∅=Int(K)
Ext(K)
Subconjunto: K=φw(A)=24
Cl(A)
Fr(A)
$Cl_W(A)$
$=\hat{Fr}_W(A)$
Fr(K)=Cl(K)
Ais(A)
Der(A)
$\hat{Der}_W(A)$
$\hat{Ais}_W(K)$
∅=Der(K)
Ais(K)
φw(X)= XΔW
(P(E),⊆)
$(P(E),\sqsubseteq^W)$
Espacio topológico
(E,ℑ)
Familia de abiertos:
ℑ = { ∅, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E }
Familia de cerrados:
ℑ* = { ∅, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E }
(Abierto y cerrado)
Espacio "w-topológico"
(E,φw(ℑ))
W-abiertos
φw(ℑ) = { ∅, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E }
φw(ℑ)* = { ∅, 2, 3, 12, 23, 34, 123 234, E }


Subconjunto: A=23
Subconjunto: A=23
Subconjunto: K=φw(A)=24
Subconjunto: K=φw(A)=24
Subconjunto: A=23
Subconjunto: A=23
Subconjunto: K=φw(A)=24
Subconjunto: K=φw(A)=24
Subconjunto: A=23
Subconjunto: A=23
Subconjunto: K=φw(A)=24
Subconjunto: K=φw(A)=24
Int(A)
Ext(A)
Cl(A)
Fr(A)
Ais(A)
Der(A)
∅=Int(K)
Ext(K)
Fr(K)=Cl(K)
∅=Der(K)
Ais(K)
φw(X)= XΔW
(P(E),⊆)
(P(E),⊑W)
Espacio topológico
(E,ℑ)
Espacio "w-topológico"
(E,φw(ℑ))
(Abierto y cerrado)
W-abiertos
Familia de abiertos:
ℑ = { ∅, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E }
Familia de cerrados:
ℑ* = { ∅, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E }
φw(ℑ) = { ∅, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E }
φw(ℑ)* = { ∅, 2, 3, 12, 23, 34, 123 234, E }

5. Generalización de los órdenes de actividad (I): Relaciones de actividad en un conjunto ordenado cualquiera $(P, \leq)$.

Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \;\&\; (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)],$$

siendo

$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad y \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \;\forall x \in P.$$

Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \;\&\; (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)],$$

siendo

$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad y \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \;\; \forall x \in P.$$

La relación $\sqsubseteq^{\omega}$ es un preorden en P. (Es reflexiva y transitiva).

$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta$ se interpreta en $(P, \leq)$ como "α separa ω de β".

RELACIÓN DE ACTIVIDAD EN UN CONJUNTO ORDENADO CUALQUIERA

Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

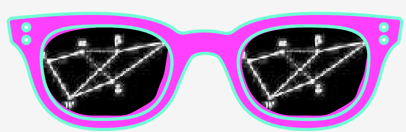
$$\boxed{\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \,\&\, (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)]},$$

siendo

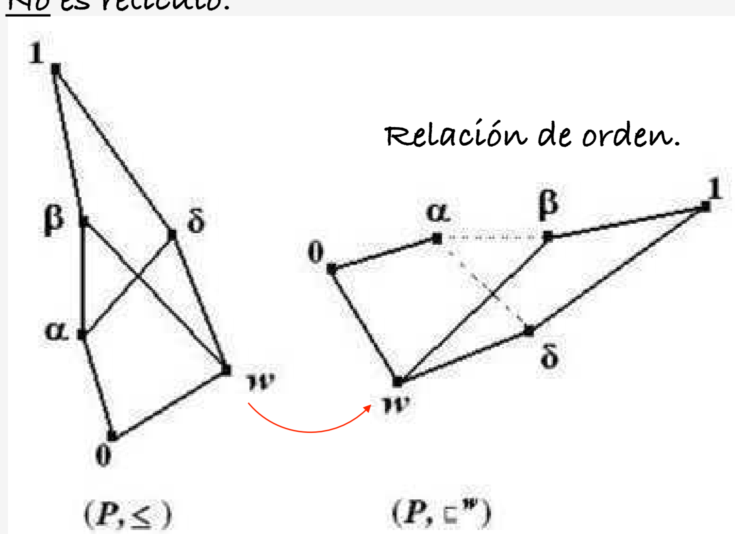
$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad y \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \; \forall x \in P.$$

La relación $\sqsubseteq^{\omega}$ es un preorden en P. (Es reflexiva y transitiva).

$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta$ se interpreta en $(P, \leq)$ como "α separa ω de β".



No es retículo.



Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

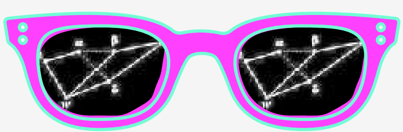
$$\boxed{\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \;\&\; (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)]},$$

siendo

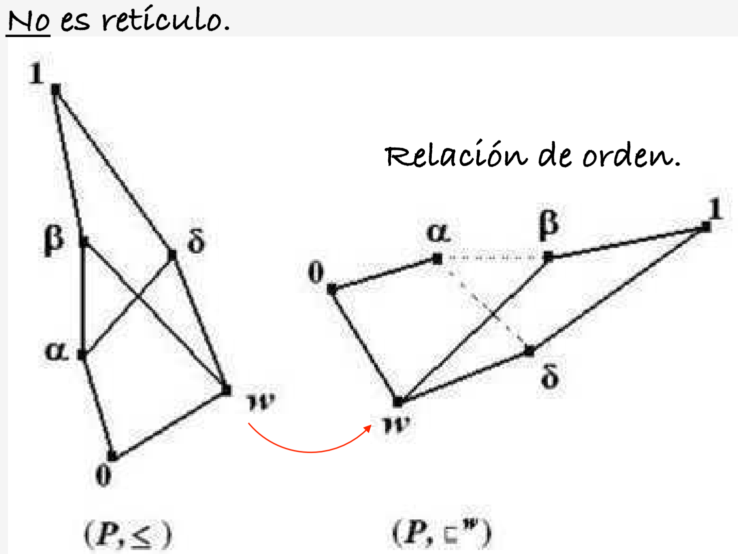
$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad y \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \; \forall x \in P.$$

La relación $\sqsubseteq^{\omega}$ es un preorden en P. (Es reflexiva y transitiva).

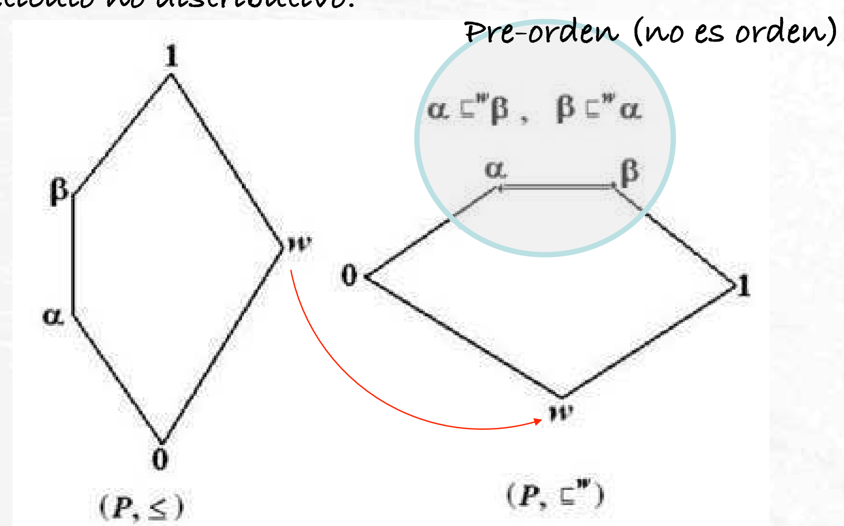
$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta$ se interpreta en $(P, \leq)$ como "α separa ω de β".



No es retículo.



Retículo no distributivo.



RELACIÓN DE ACTIVIDAD EN UN CONJUNTO ORDENADO CUALQUIERA

<u>Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$</u>.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

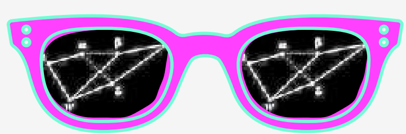
$$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \ \& \ (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)],$$

siendo

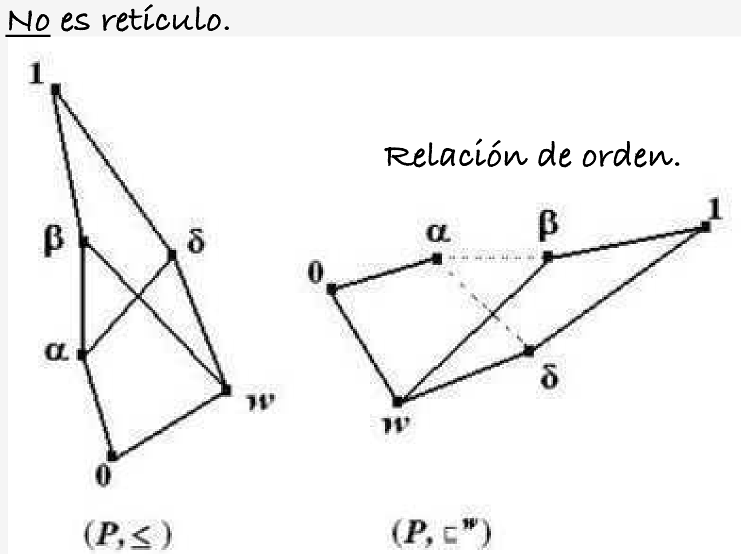
$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad \text{y} \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \ \forall x \in P.$$

La relación $\sqsubseteq^{\omega}$ es un preorden en P. (Es reflexiva y transitiva).

$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta$ se interpreta en $(P, \leq)$ como "α separa ω de β".

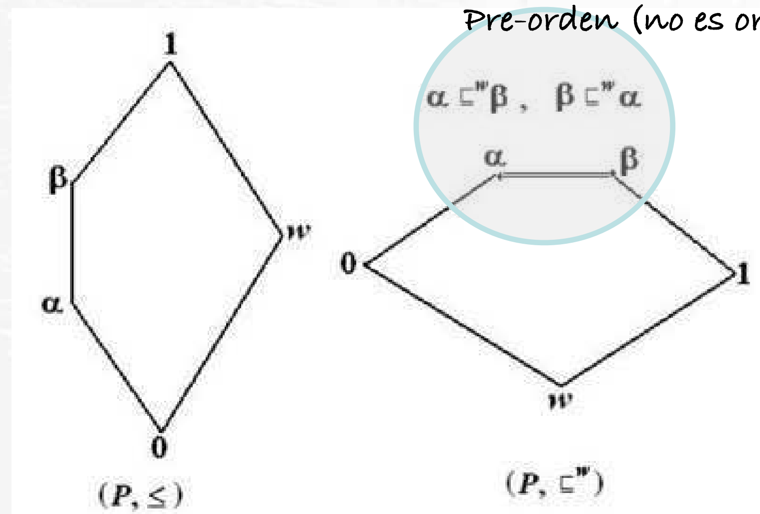


<u>No</u> es retículo.

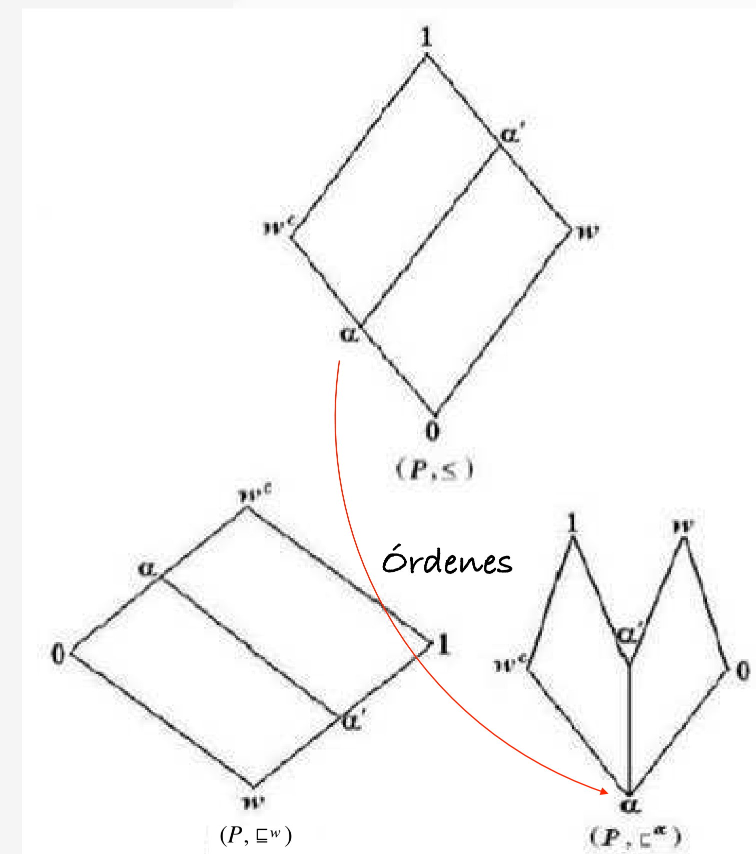


Retículo no distributivo.

Pre-orden (no es orden).



Retículo distributivo.



Retículo (en este caso isomorfo al inicial).

Inf-semirretículo.

RELACIÓN DE ACTIVIDAD EN UN CONJUNTO ORDENADO CUALQUIERA

<u>Relación de actividad en un conjunto ordenado $(P, \leq)$</u>.

Dado $\omega \in P$, se define la relación $\sqsubseteq^{\omega}$ asociada a ω y al orden $\leq$ en P:

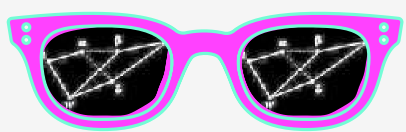
$$\boxed{\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta \Leftrightarrow [(\downarrow\beta \cap \downarrow\omega \subseteq \downarrow\alpha) \ \&\ (\uparrow\beta \cap \uparrow\omega \subseteq \uparrow\alpha)]},$$

siendo

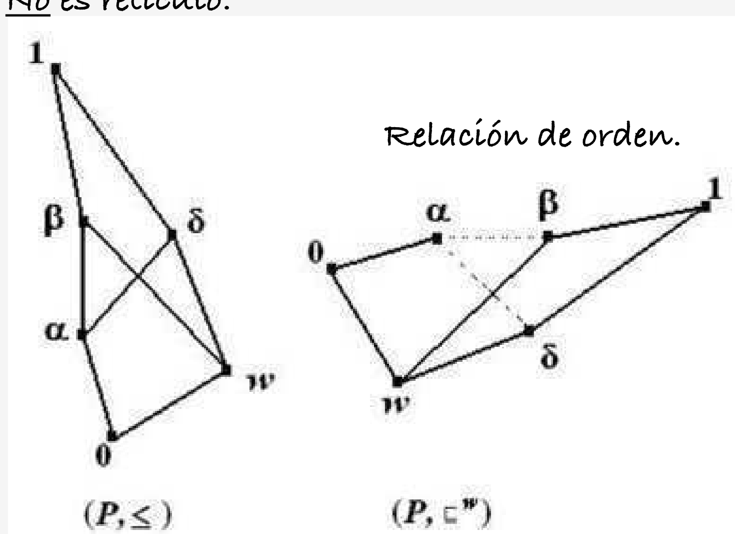
$$\downarrow x = \{s \,/\, s \leq x\} \quad y \quad \uparrow x = \{t \,/\, x \leq t\} \ \forall x \in P.$$

La relación $\sqsubseteq^{\omega}$ es un preorden en P. (Es reflexiva y transitiva).

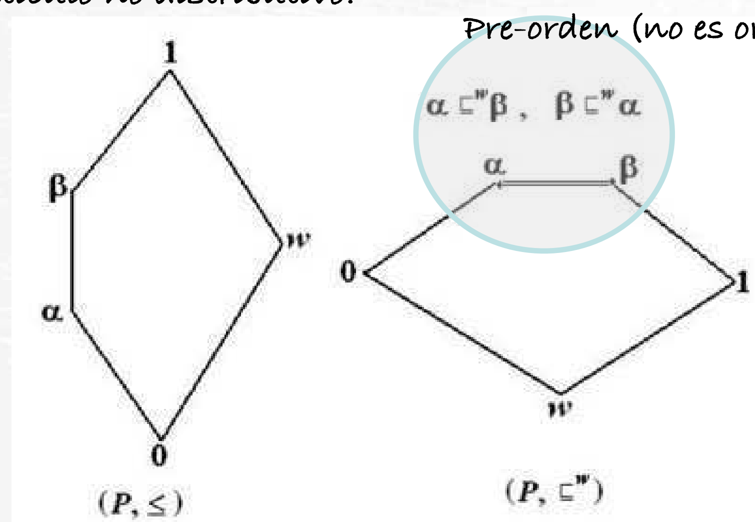
$\alpha \sqsubseteq^{\omega} \beta$ se interpreta en $(P, \leq)$ como "α separa ω de β".



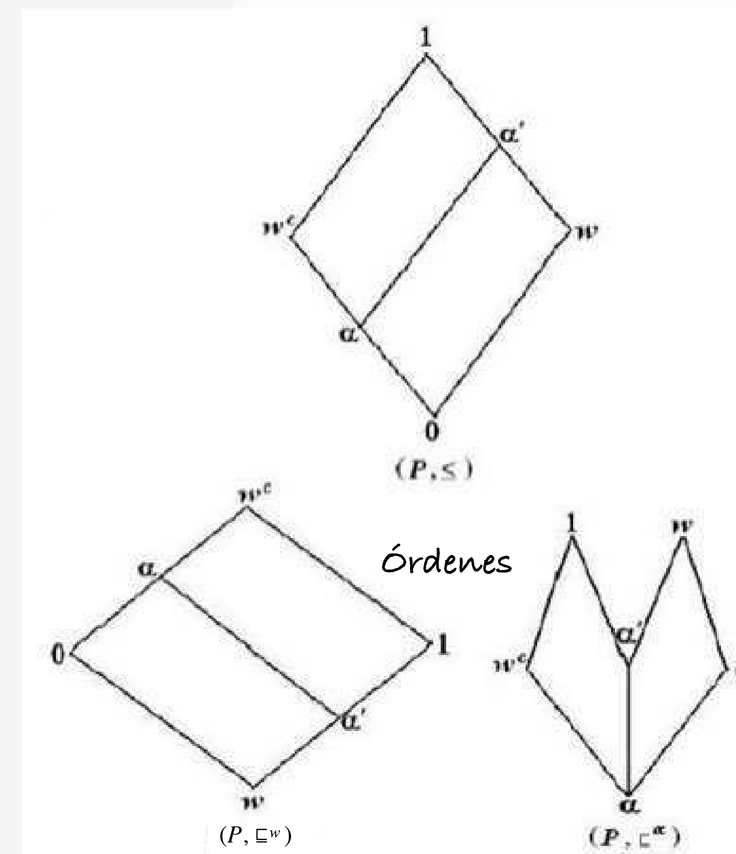
<u>No</u> es retículo.



Retículo no distributivo.



Retículo distributivo.



Retículo (en este caso isomorfo al inicial).

Inf-semirretículo.

Si $(P,\leq)$ tiene elemento mínimo 0, entonces $\sqsubseteq^{0}$ coincide con el orden $\leq$ en P.

Si tiene elemento máximo 1, entonces $\sqsubseteq^{1}$ coincide con el orden $\geq$ (dual del orden $\leq$ en P).

Generalización II:
Extensión de la relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R)

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\ \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \quad (L, \sqsubseteq^w)$$

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_\leq y \cap \uparrow_\leq w \subseteq \uparrow_\leq x) \;\&\; (\downarrow_\leq y \cap \downarrow_\leq w \subseteq \downarrow_\leq x)$$

$$\uparrow_\leq x = \{s \in L \,/\, x \leq s\},\ \downarrow_\leq x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_\geq x, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

(¡Cuestión abierta!)

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en (L, $\leq$):

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_\leq y \cap \uparrow_\leq w \subseteq \uparrow_\leq x) \;\&\; (\downarrow_\leq y \cap \downarrow_\leq w \subseteq \downarrow_\leq x)$$

$$\uparrow_\leq x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\ \downarrow_\leq x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_\geq x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R) , $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo ? $\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

(X, $\sqsubseteq_R{}^w$)

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

R: $z_3 R y$

$y R z_1$

$z_4 R y$

$z_4 R x$

$y R z_2$

$w R z_4$

$z_4 R w$

$w R z_2$

$z_7 R w$

$w R z_7$

$z_5 R x$

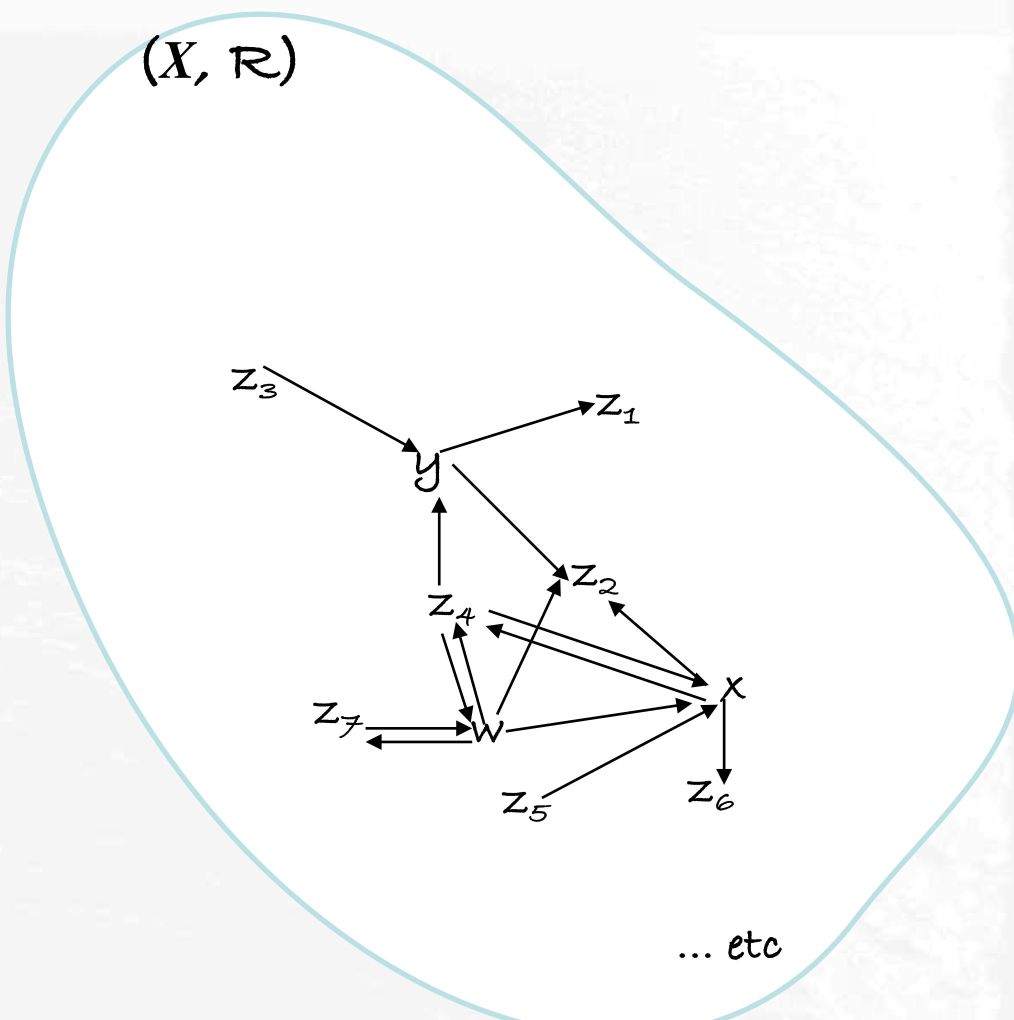
$z_5 R w$

$x R z_2$

$x R z_4$

$x R z_6$

... etc



RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NITIDOS (X, R)

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^{w} y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\; \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^{w})$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R) , $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_{R}^{w}$?

Ejemplo $\quad ?\sqsubseteq_{R}^{w} \subseteq X^2$

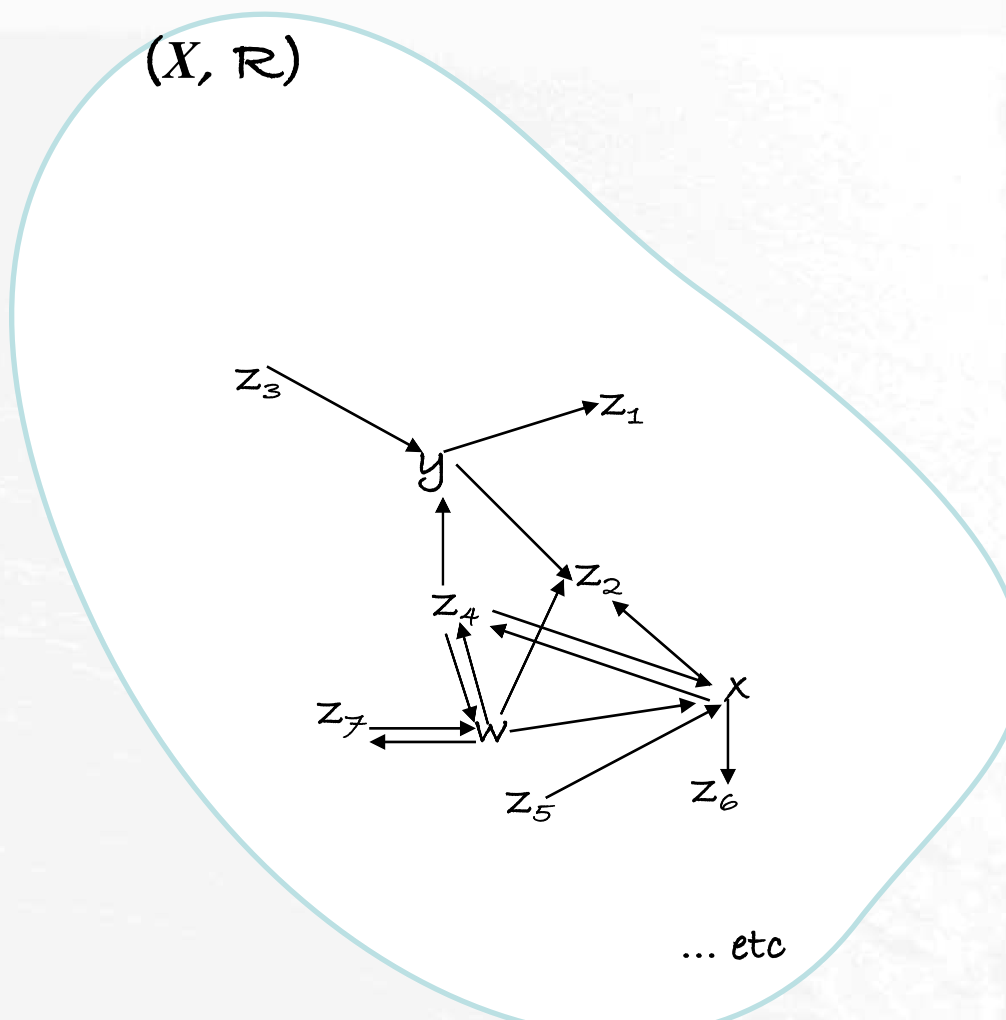
$(X, \sqsubseteq_{R}^{w})$

$$\boxed{x \sqsubseteq_{R}^{w} y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_{R} y \cap \uparrow_{R} w \subseteq \uparrow_{R} x) \;\&\; (\downarrow_{R} y \cap \downarrow_{R} w \subseteq \downarrow_{R} x)}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

R: $z_3 R y$
$y R z_1$
$z_4 R y$
$z_4 R x$
$y R z_2$
$w R z_4$
$z_4 R w$
$w R z_2$
$z_7 R w$
$w R z_7$
$z_5 R x$
$z_5 R w$
$x R z_2$
$x R z_4$
$x R z_6$
... etc



RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_\leq y \cap \uparrow_\leq w \subseteq \uparrow_\leq x) \;\&\; (\downarrow_\leq y \cap \downarrow_\leq w \subseteq \downarrow_\leq x)$$

$$\uparrow_\leq x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\ \downarrow_\leq x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_\geq x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad$ ¿$\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

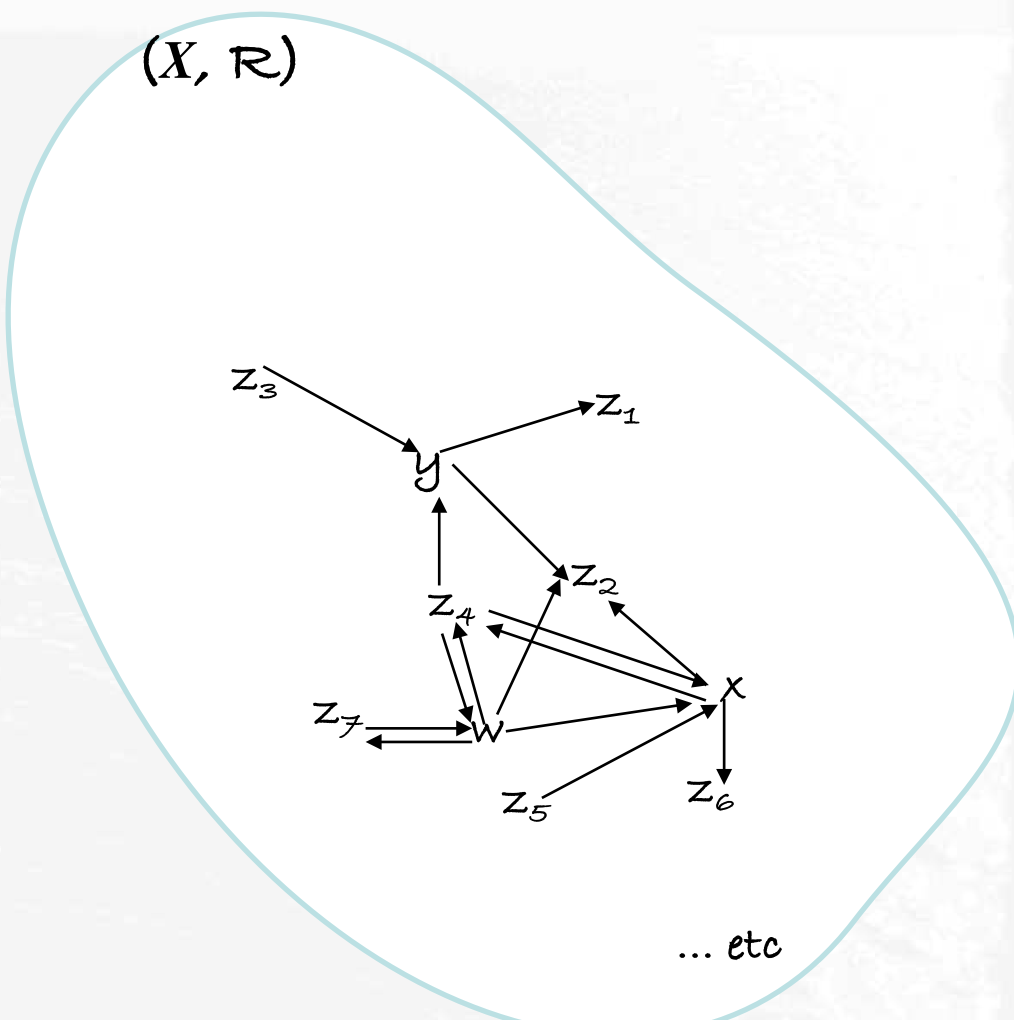
$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}\,,\ \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R:
$z_3 R y$
$y R z_1$
$z_4 R y$
$z_4 R x$
$y R z_2$
$w R z_4$
$z_4 R w$
$w R z_2$
$z_7 R w$
$w R z_7$
$z_5 R x$
$z_5 R w$
$x R z_2$
$x R z_4$
$x R z_6$
... etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \ \& \ (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \ / \ x \leq s\}, \ \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \ / \ t \leq x\} = \{t \in L \ / \ x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R^w$?

Ejemplo $\quad ?\ \sqsubseteq_R^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R^w)$

$$\boxed{x \sqsubseteq_R^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \ \& \ (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

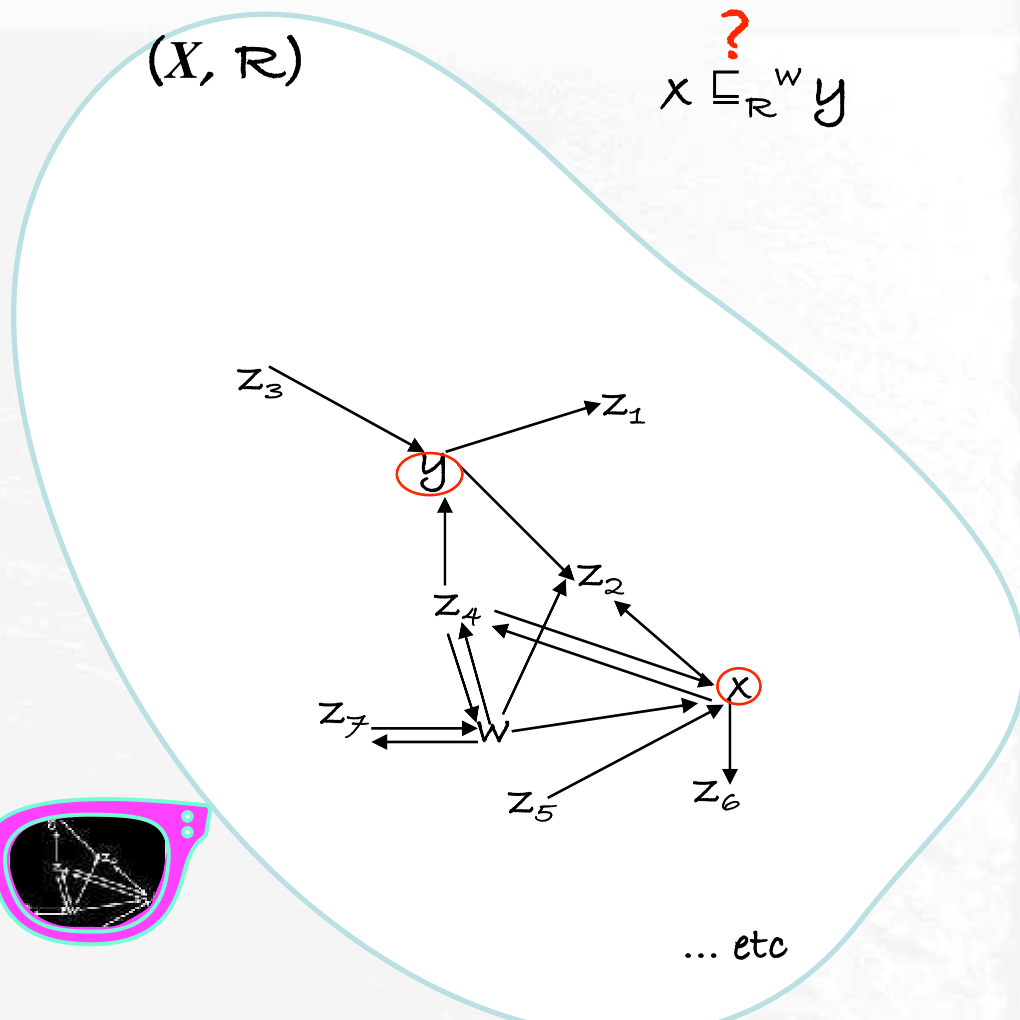
(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \ / \ xRs\}, \ \downarrow_R x = \{t \in X \ / \ tRx\} = \{t \in X \ / \ xR^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R:
$z_3 R y$
$y R z_1$
$z_4 R y$
$z_4 R x$
$y R z_2$
$w R z_4$
$z_4 R w$
$w R z_2$
$z_7 R w$
$w R z_7$
$z_5 R x$
$z_5 R w$
$x R z_2$
$x R z_4$
$x R z_6$
... etc

?
$x \sqsubseteq_R^w y$



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_\leq y \cap \uparrow_\leq w \subseteq \uparrow_\leq x) \;\&\; (\downarrow_\leq y \cap \downarrow_\leq w \subseteq \downarrow_\leq x)$$

$$\uparrow_\leq x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\; \downarrow_\leq x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_\geq x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R) , $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad$? $\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

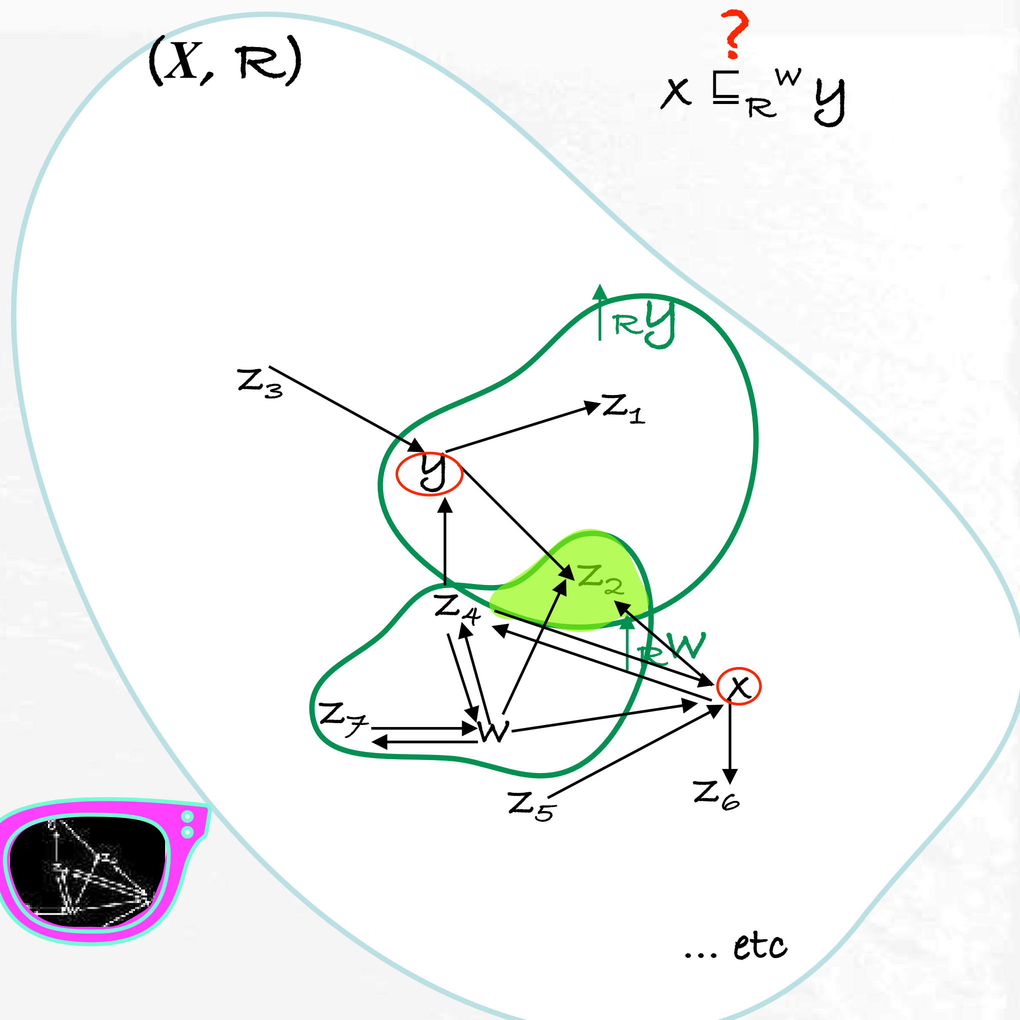
$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^w y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}\,,\; \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R: z_3Ry, yRz_1, z_4Ry, z_4Rx, yRz_2, wRz_4, z_4Rw, wRz_2, z_7Rw, wRz_7, z_5Rx, z_5Rw, xRz_2, xRz_4, xRz_6, … etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\; \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad ?\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

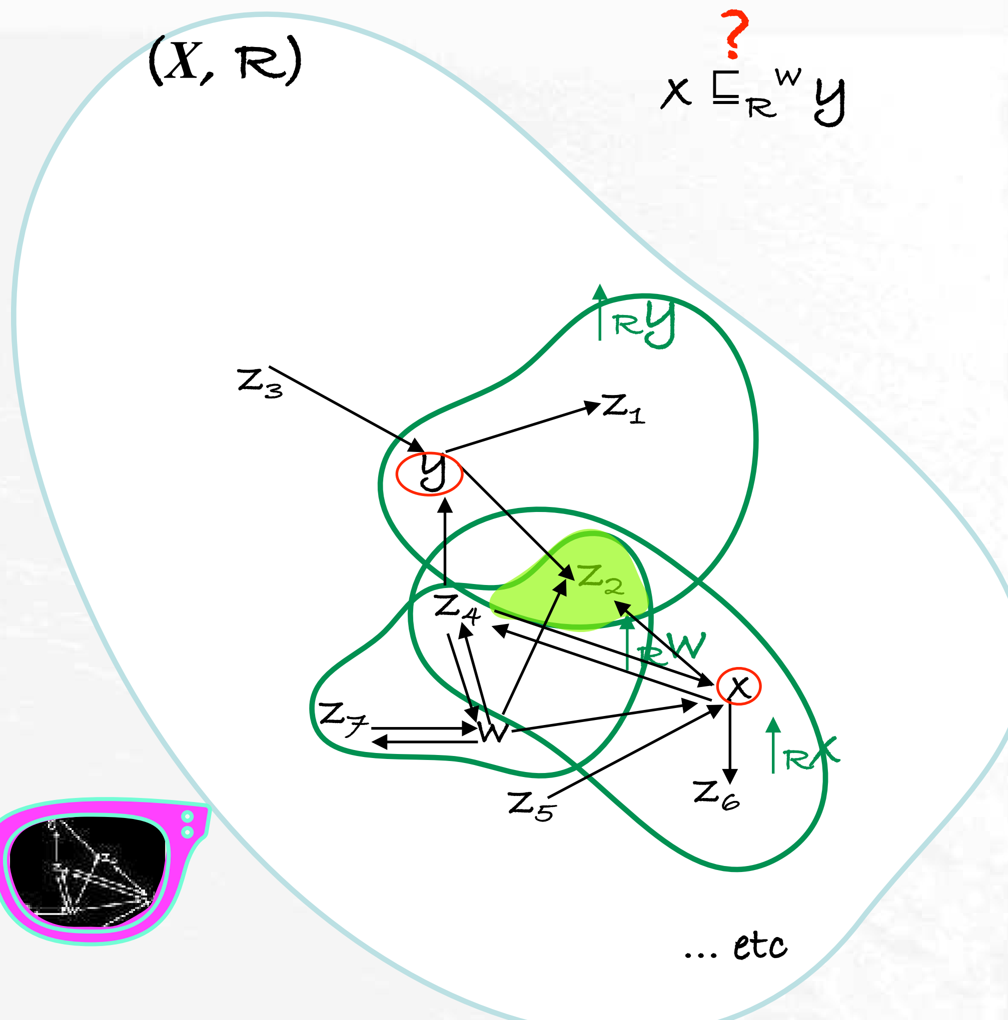
$$x \sqsubseteq_R{}^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}\,,\; \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R:
$z_3 R y$
$y R z_1$
$z_4 R y$
$z_4 R x$
$y R z_2$
$w R z_4$
$z_4 R w$
$w R z_2$
$z_7 R w$
$w R z_7$
$z_5 R x$
$z_5 R w$
$x R z_2$
$x R z_4$
$x R z_6$
... etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\; \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R) , $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad ?\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

(¡Cuestión abierta!)

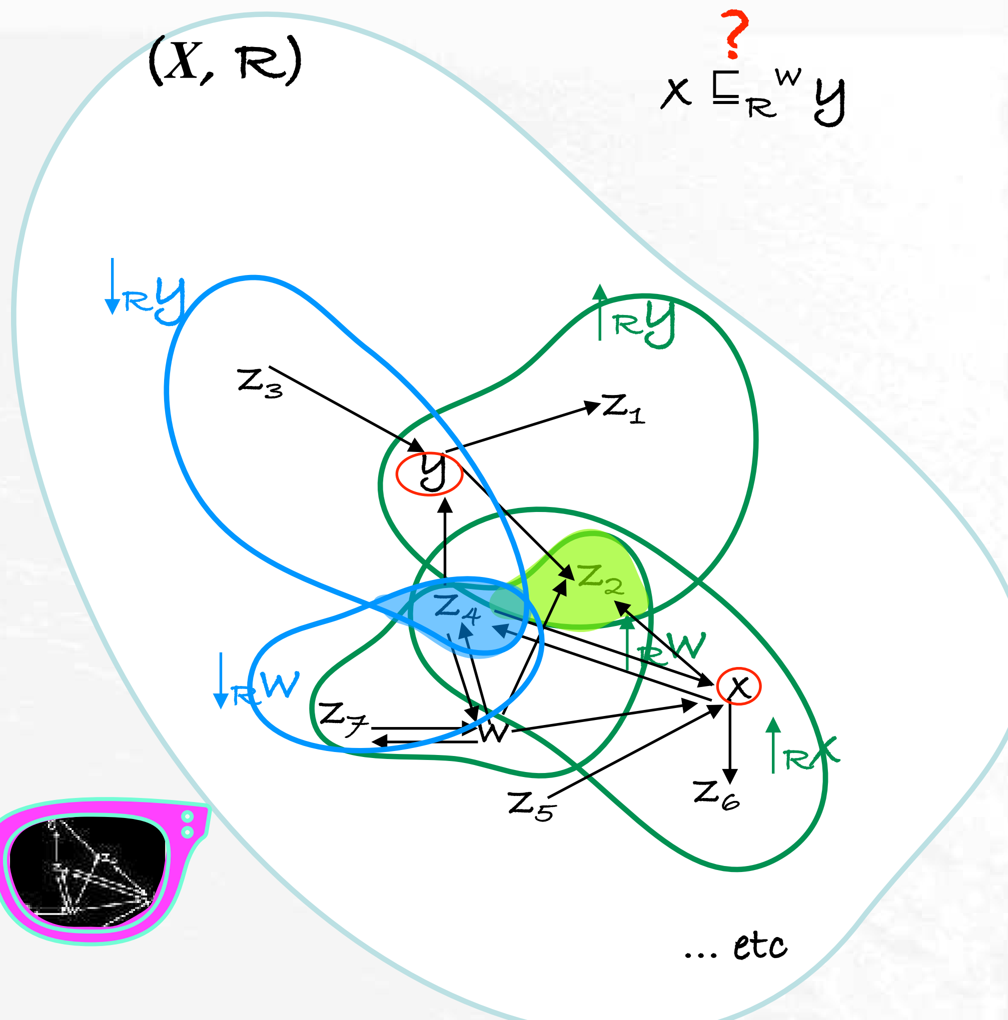
$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^w y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, x R s\}\,,\; \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, t R x\} = \{t \in X \,/\, x R^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R: z_3Ry, yRz_1, z_4Ry, z_4Rx, yRz_2, wRz_4, z_4Rw, wRz_2, z_7Rw, wRz_7, z_5Rx, z_5Rw, xRz_2, xRz_4, xRz_6, … etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_\leq y \cap \uparrow_\leq w \subseteq \uparrow_\leq x) \,\&\, (\downarrow_\leq y \cap \downarrow_\leq w \subseteq \downarrow_\leq x)$$

$$\uparrow_\leq x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\ \downarrow_\leq x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_\geq x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad$? $\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

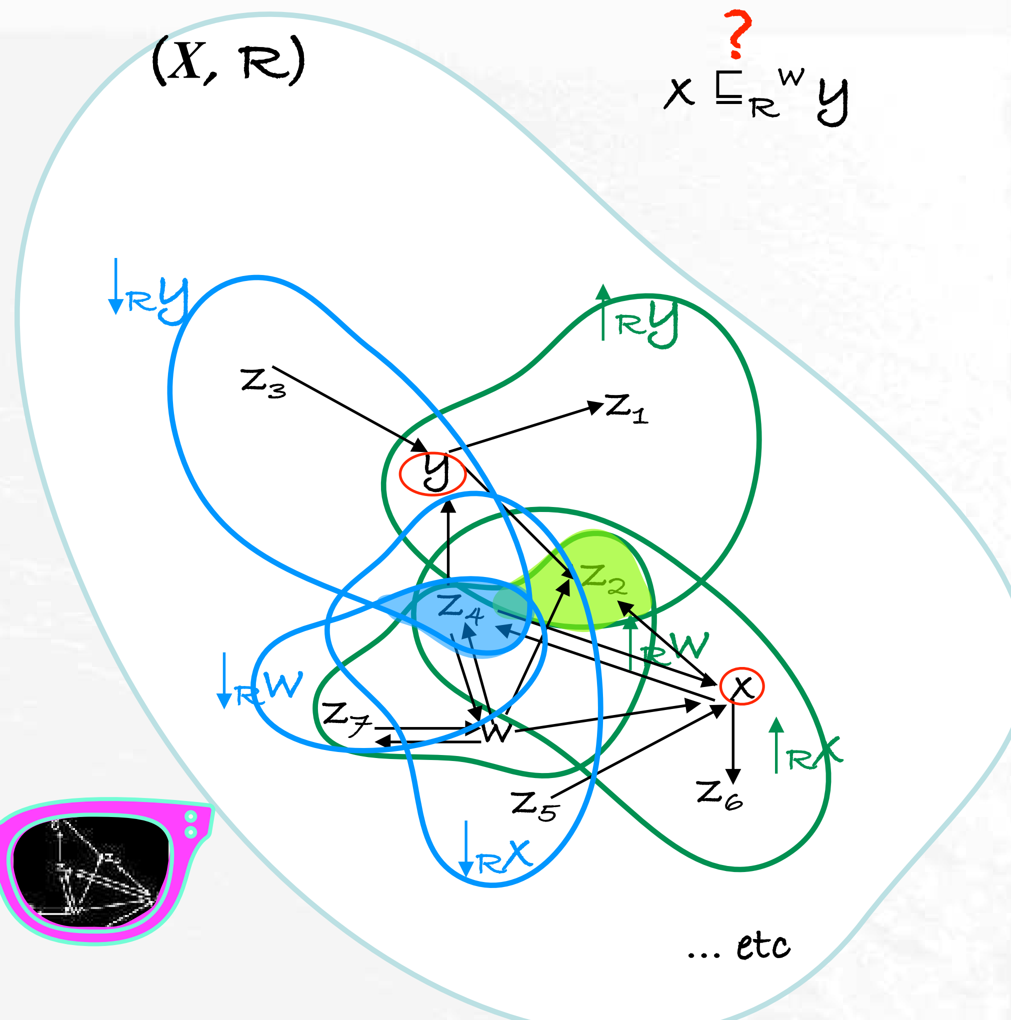
$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \,\&\, (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, x R s\}\,,\ \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, t R x\} = \{t \in X \,/\, x R^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R:
$z_3 R y$
$y R z_1$
$z_4 R y$
$z_4 R x$
$y R z_2$
$w R z_4$
$z_4 R w$
$w R z_2$
$z_7 R w$
$w R z_7$
$z_5 R x$
$z_5 R w$
$x R z_2$
$x R z_4$
$x R z_6$
... etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\} \,,\; \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x \,, \qquad (L, \sqsubseteq^w)$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^w$?

Ejemplo $\quad$? $\sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$

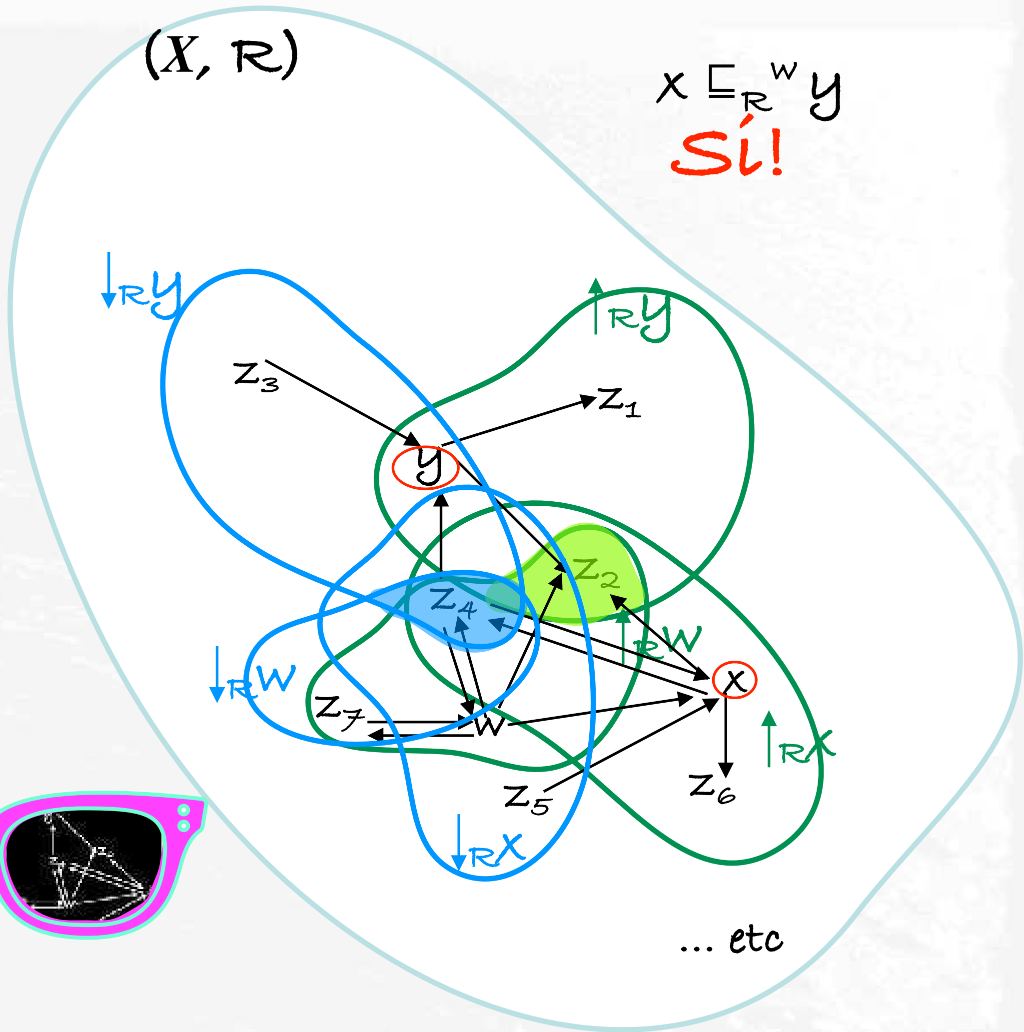
$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} \,,\; \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op} t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R: z_3Ry, yRz_1, z_4Ry, z_4Rx, yRz_2, wRz_4, z_4Rw, wRz_2, z_7Rw, wRz_7, z_5Rx, z_5Rw, xRz_2, xRz_4, xRz_6, … etc



Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x) \;\&\; (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\; \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^{w})$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^{w}$?

Ejemplo $\quad ?\sqsubseteq_R{}^{w} \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^{w})$

$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^{w} y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x) \;\&\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)}$$

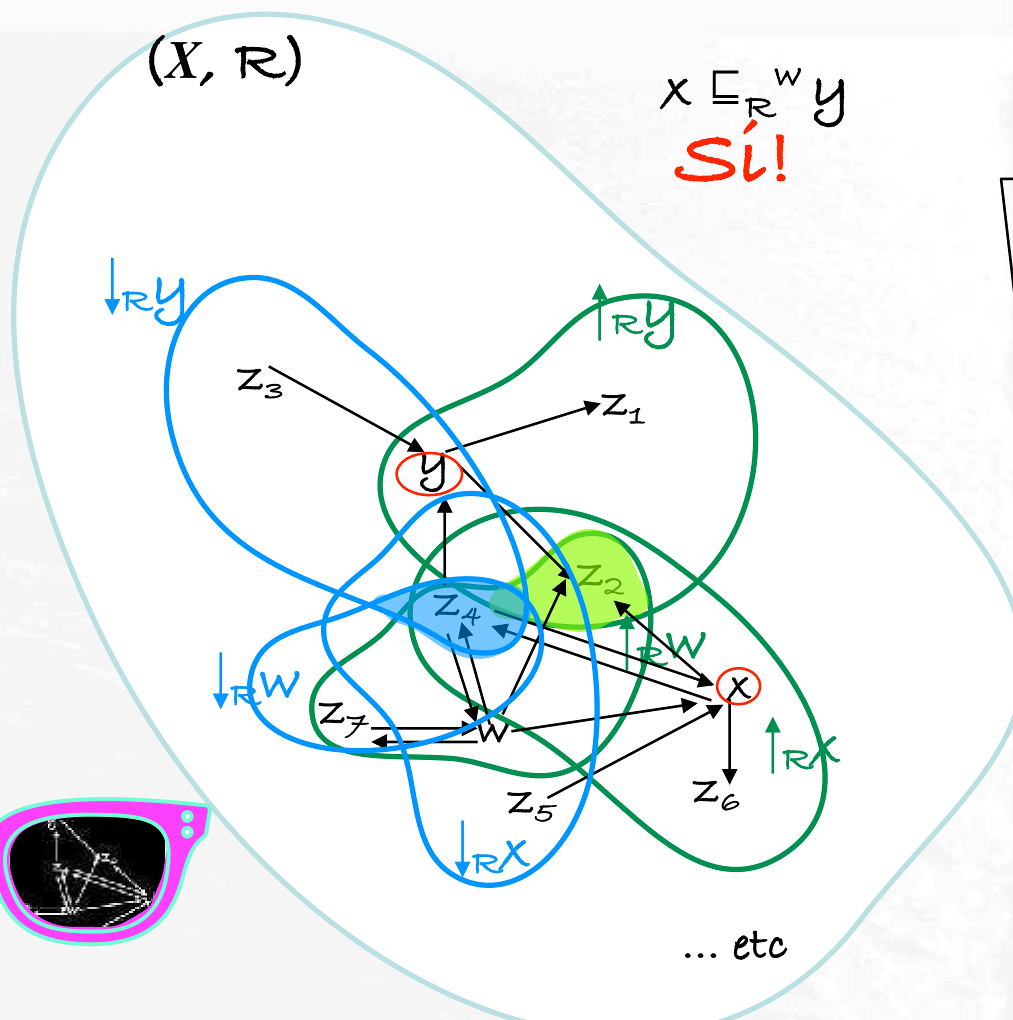
(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}\,,\; \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op}t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R:

z_3Ry
yRz_1
z_4Ry
z_4Rx
yRz_2
wRz_4
z_4Rw
wRz_2
z_7Rw
wRz_7
z_5Rx
z_5Rw
xRz_2
xRz_4
xRz_6
… etc



R simétrica:

$\uparrow_R x = \{s \in L \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in L \,/\, tRx\}$

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R nítida)

La relación de actividad en $(L, \leq)$:

$$x \sqsubseteq^{w} y \;\Leftrightarrow\; (\uparrow_{\leq} y \cap \uparrow_{\leq} w \subseteq \uparrow_{\leq} x)\ \&\ (\downarrow_{\leq} y \cap \downarrow_{\leq} w \subseteq \downarrow_{\leq} x)$$

$$\uparrow_{\leq} x = \{s \in L \,/\, x \leq s\}\,,\ \downarrow_{\leq} x = \{t \in L \,/\, t \leq x\} = \{t \in L \,/\, x \geq t\} = \uparrow_{\geq} x\,, \qquad (L, \sqsubseteq^{w})$$

Consideraremos ahora el sistema relacionar (X, R), $R \subseteq X^2$. ¿Cómo definir aquí la perspectiva $\sqsubseteq_R{}^{w}$?

Ejemplo $\qquad$ ¿$\sqsubseteq_R{}^{w} \subseteq X^2$

$(X, \sqsubseteq_R{}^{w})$

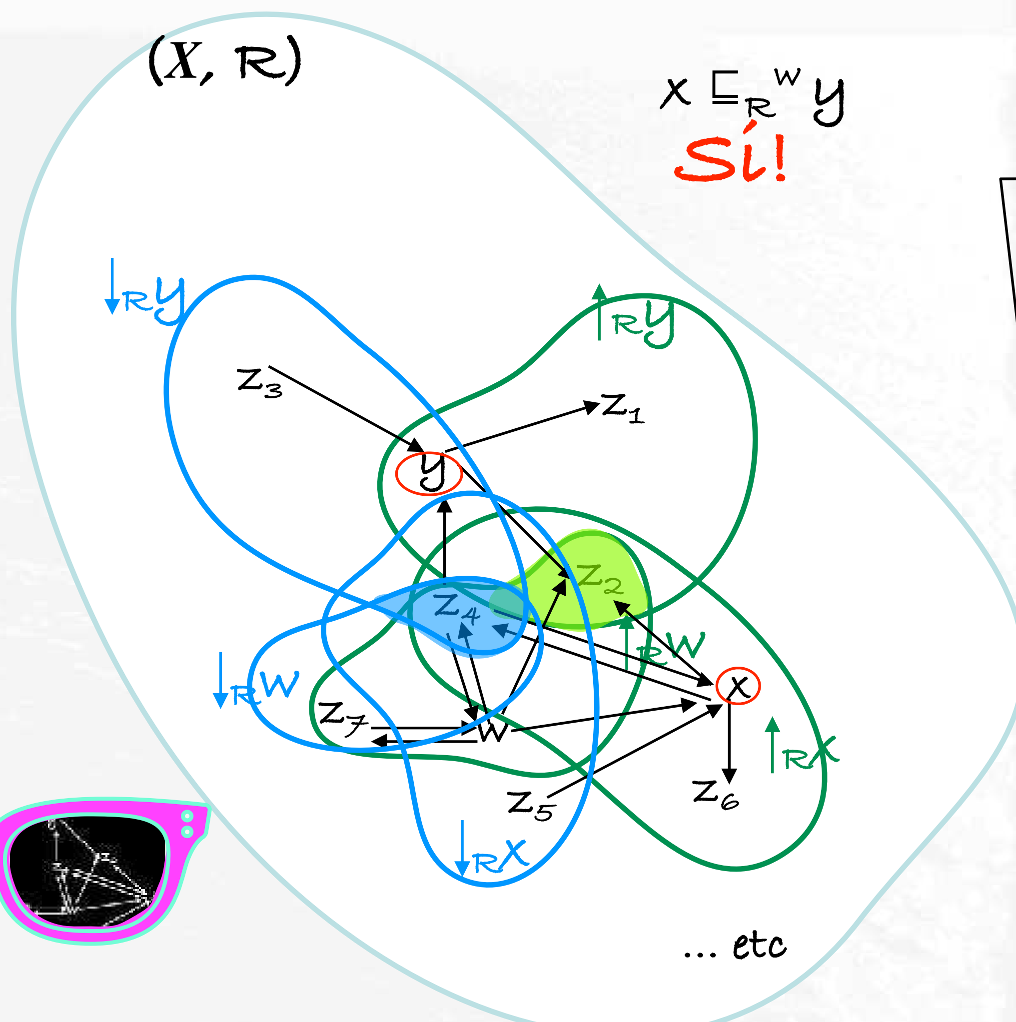
$$\boxed{x \sqsubseteq_R{}^{w} y \;\Leftrightarrow\; (\underline{\uparrow_R y \cap \uparrow_R w} \subseteq \uparrow_R x)\ \&\ (\underline{\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x})}$$

(¡Cuestión abierta!)

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}\,,\ \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\} = \{t \in X \,/\, xR^{op}t\} = \uparrow_{R^{op}} x$$

R: z_3Ry
yRz_1
z_4Ry
z_4Rx
yRz_2
wRz_4
z_4Rw
wRz_2
z_7Rw
wRz_7
z_5Rx
z_5Rw
xRz_2
xRz_4
xRz_6
... etc



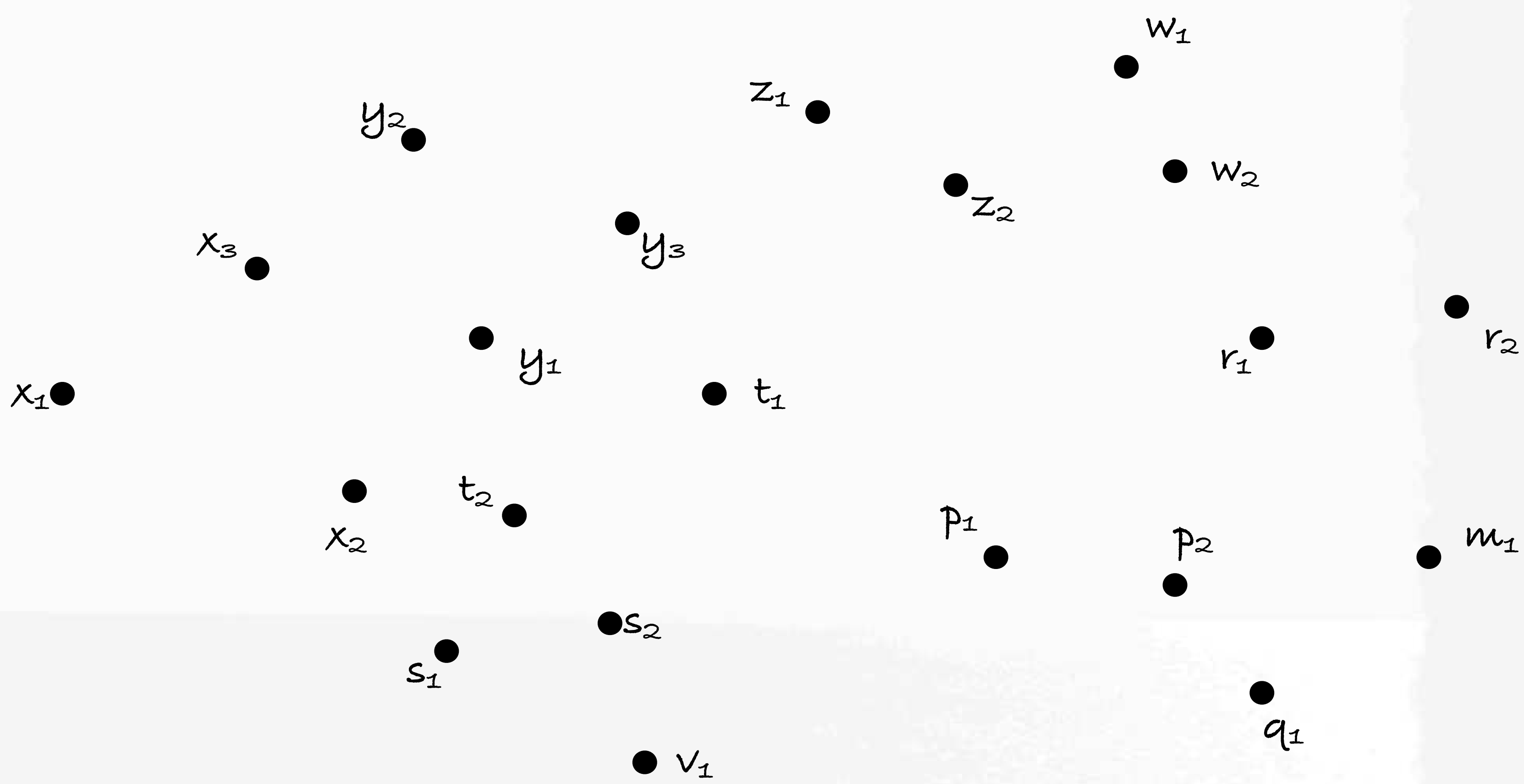
R simétrica:

$$\uparrow_R x = \{s \in L \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in L \,/\, tRx\}$$

R semejanza: $wR^2y \Longrightarrow x \sqsubseteq_R{}^{w} y \ \forall x$

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

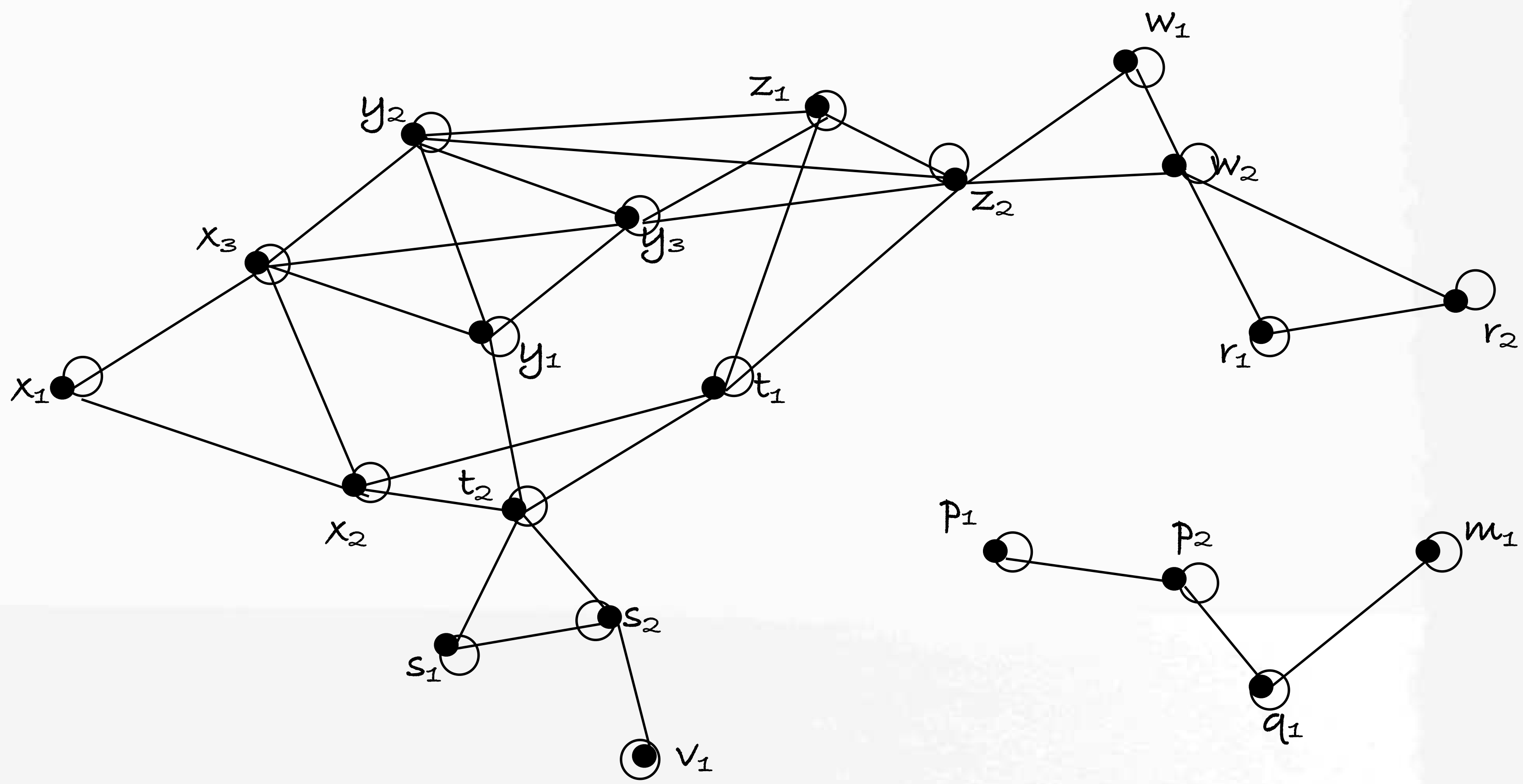
Referencial X



RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

Referencial X

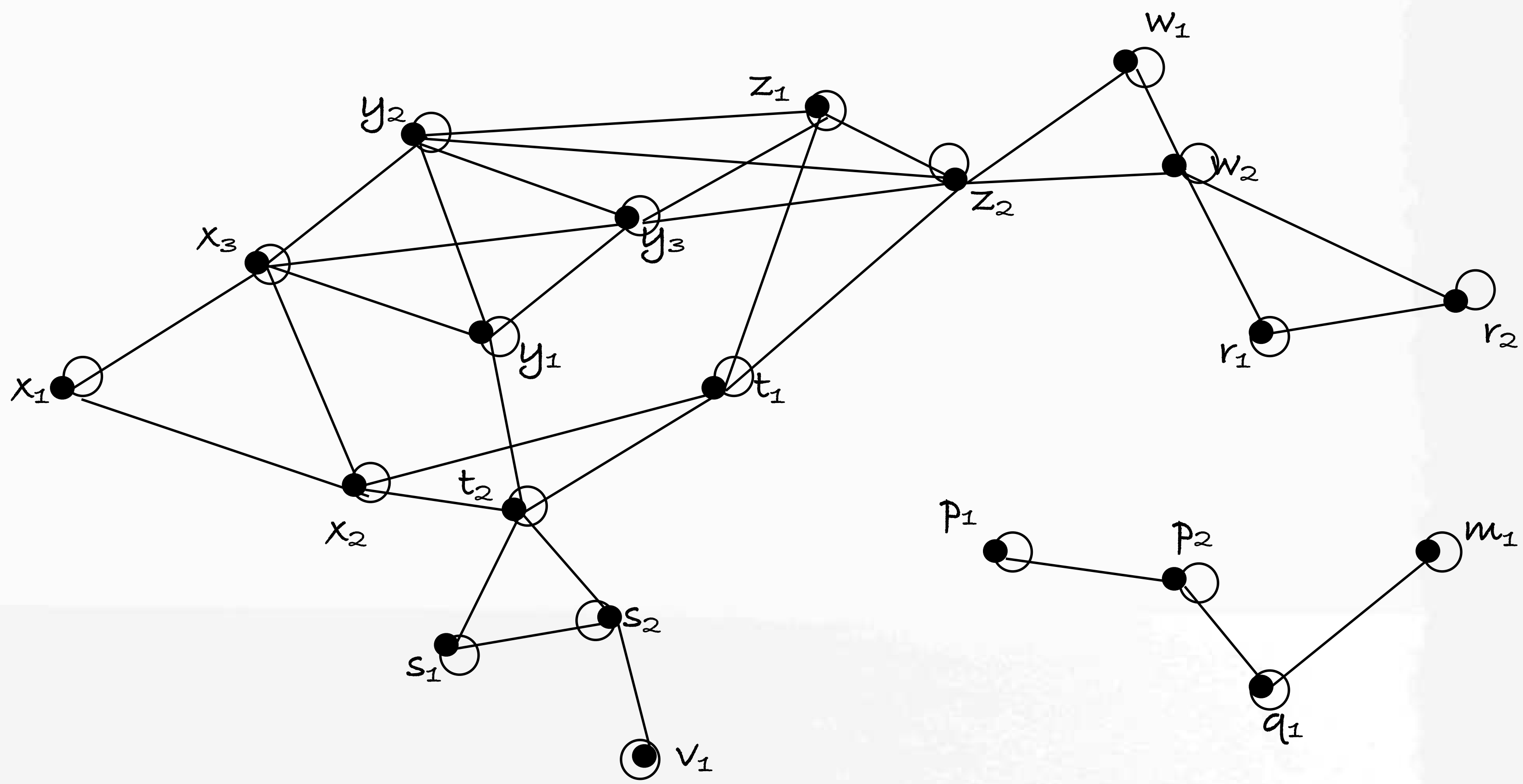
Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



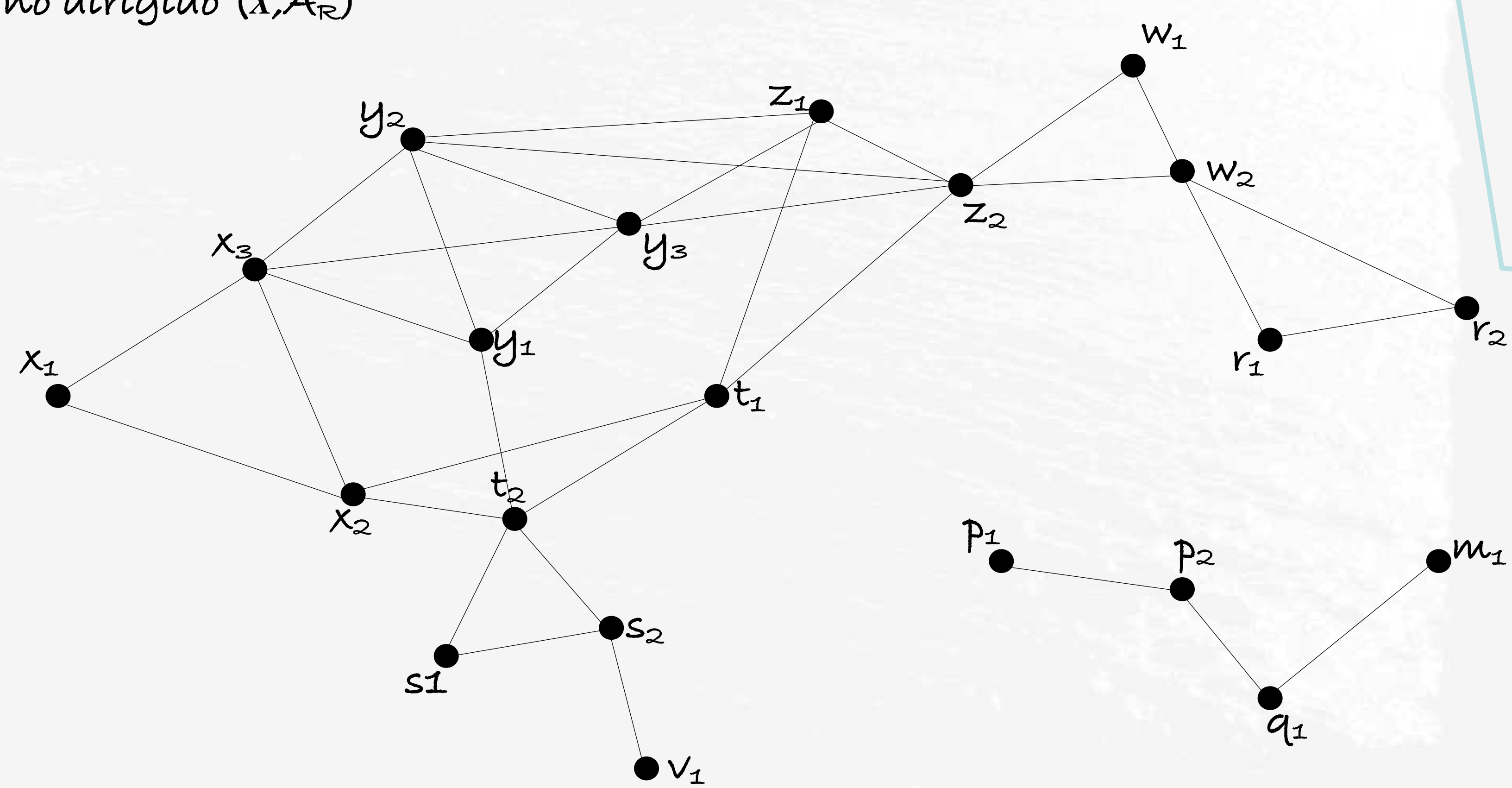
RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



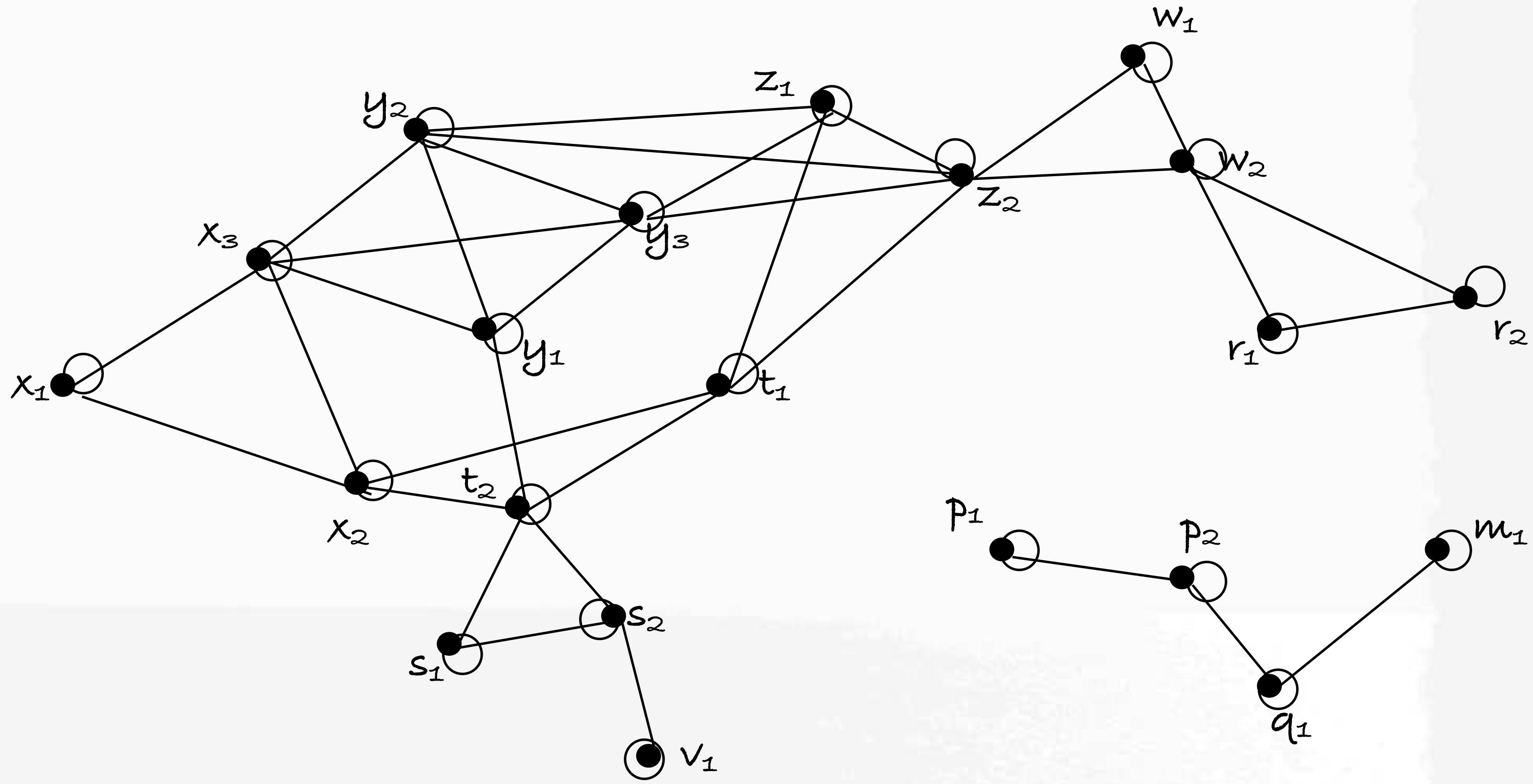
Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



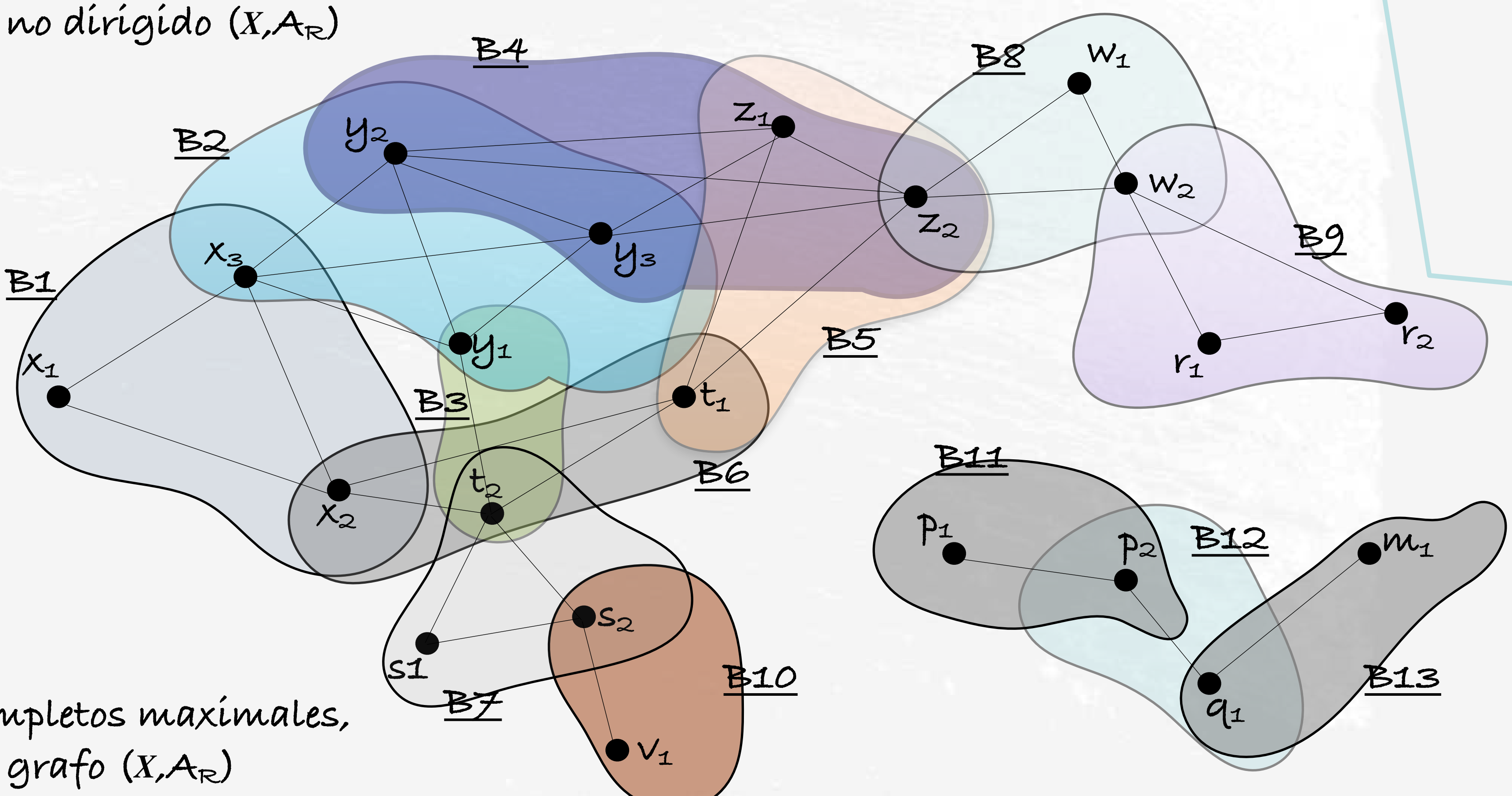
RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.

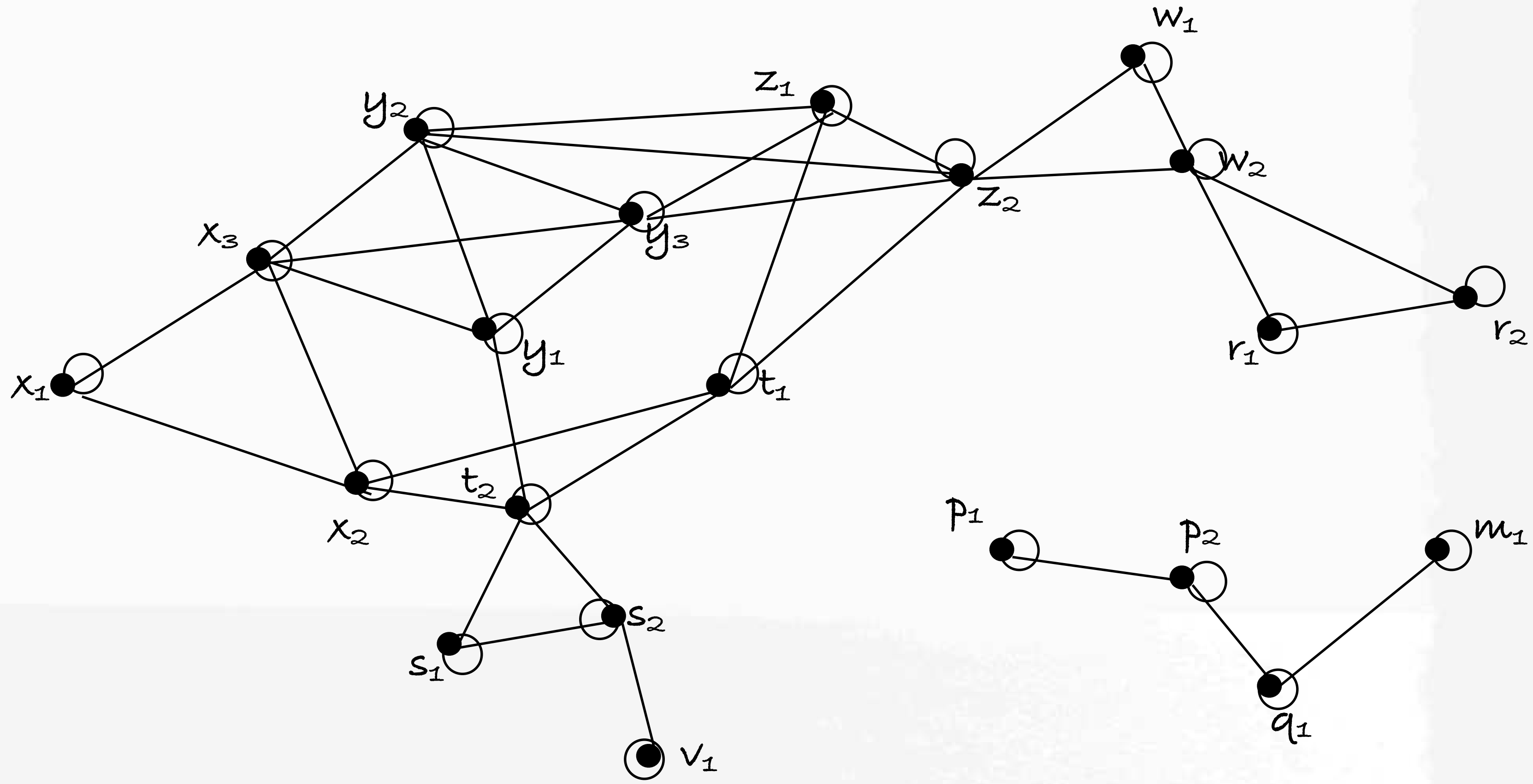


Subgrafos completos maximales, (Cliques), del grafo (X,A_R)

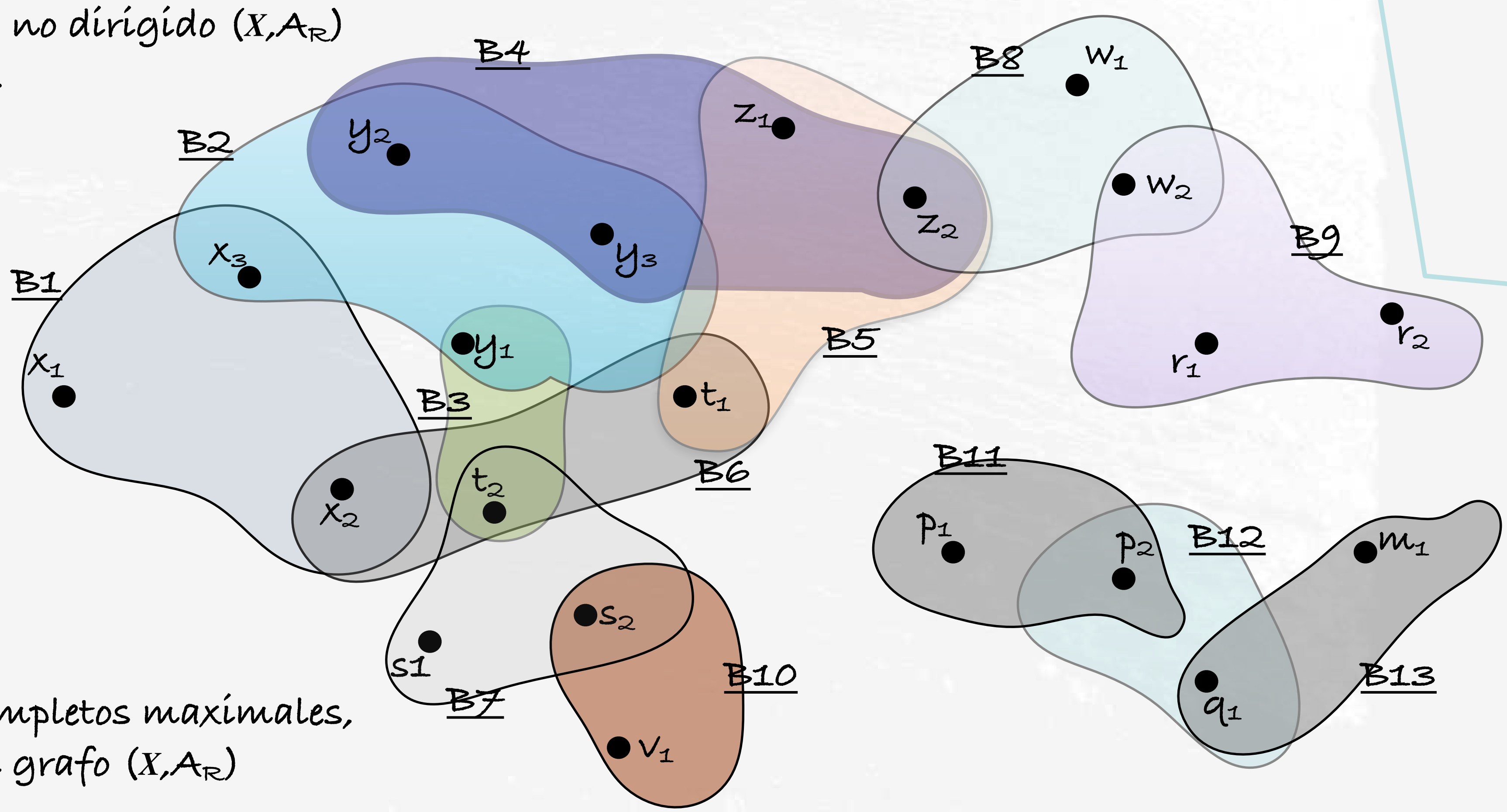
RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1,B2,..., B13

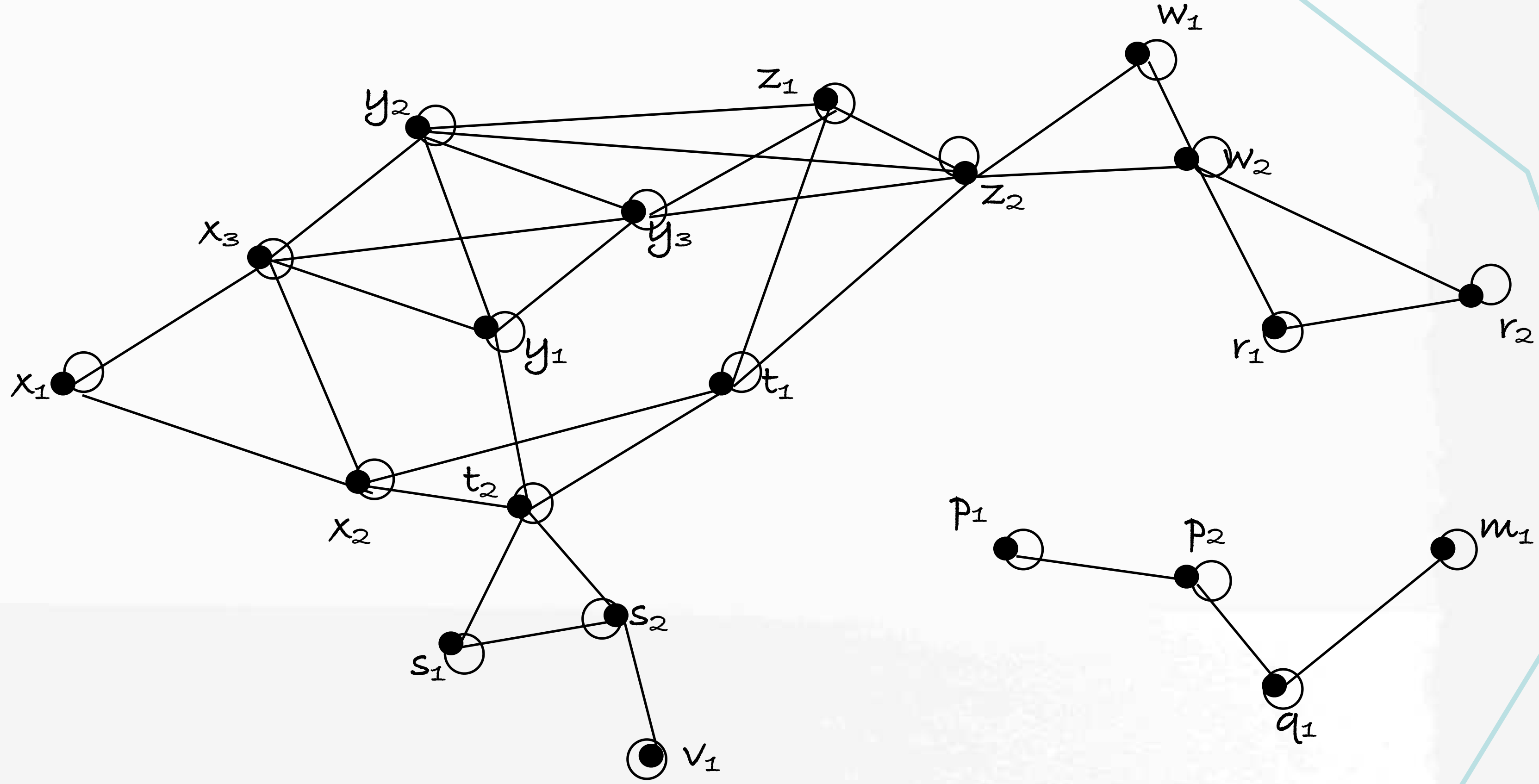
Subgrafos completos maximales, (Cliques), del grafo (X,A_R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

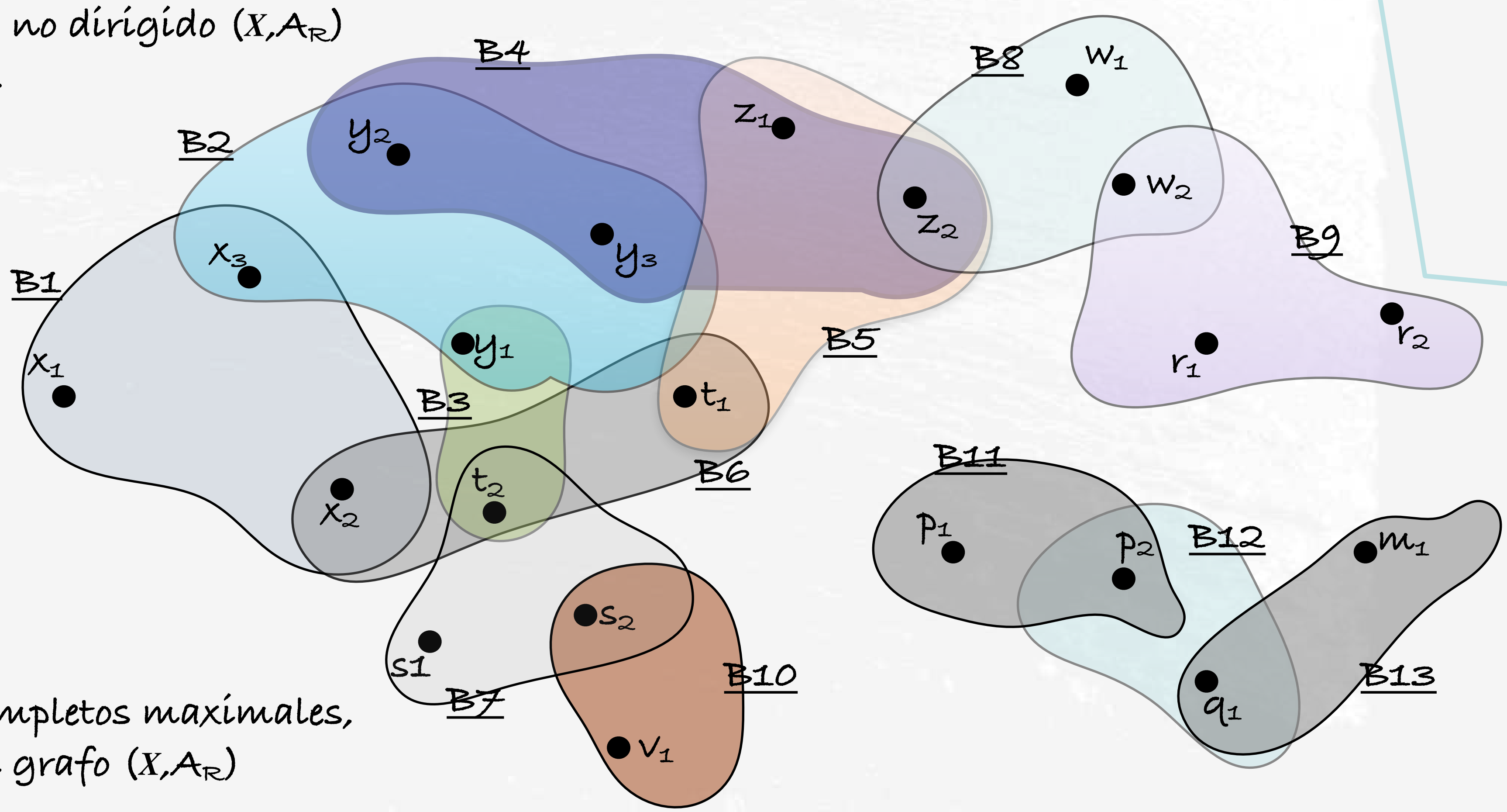
$x \sqsubseteq_R^z y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R z \subseteq \uparrow_R x)$ & $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R z \subseteq \downarrow_R x)$

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1,B2,..., B13

Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X,A_R)

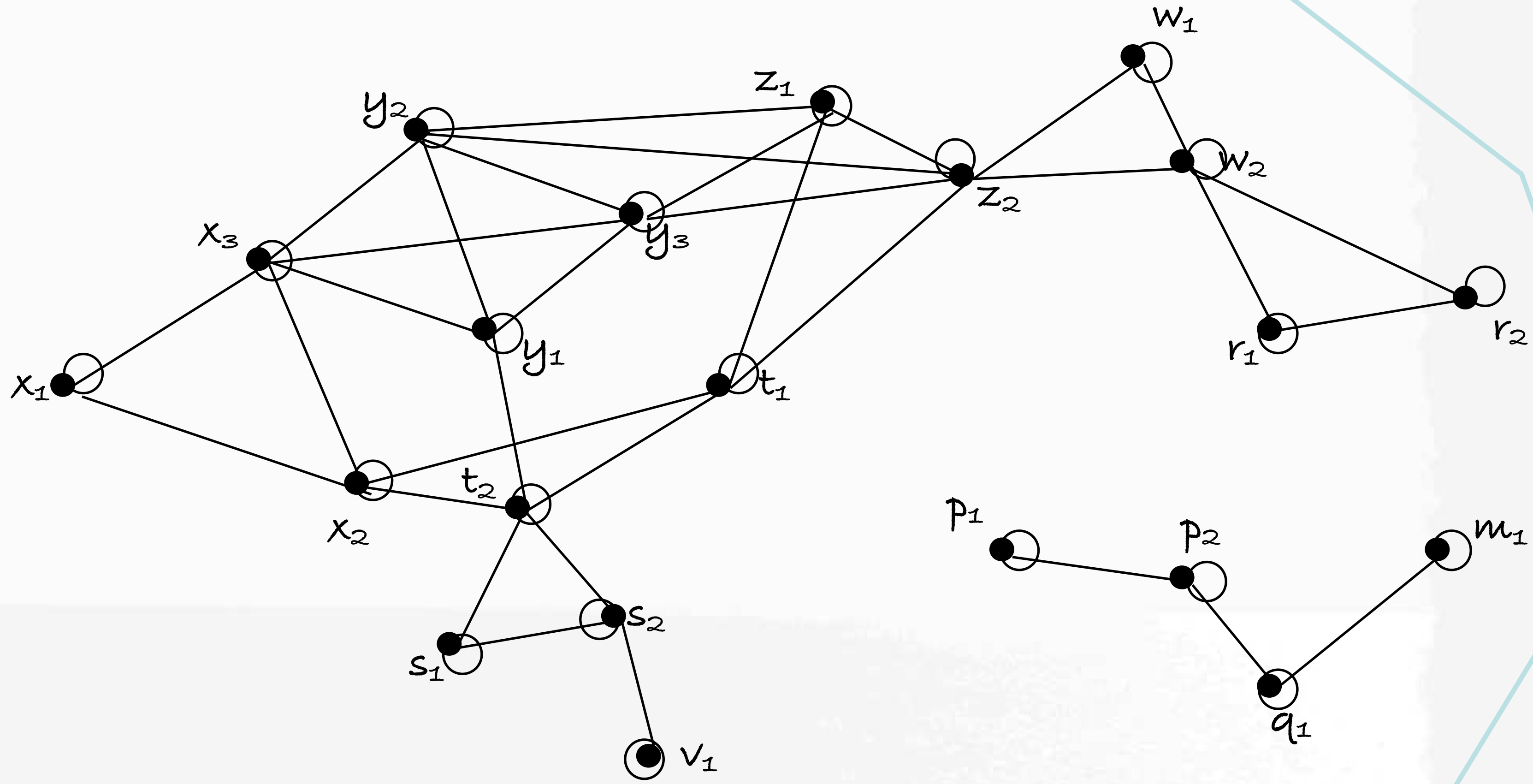
RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

$x \sqsubseteq_R^{z} y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R z \subseteq \uparrow_R x)$

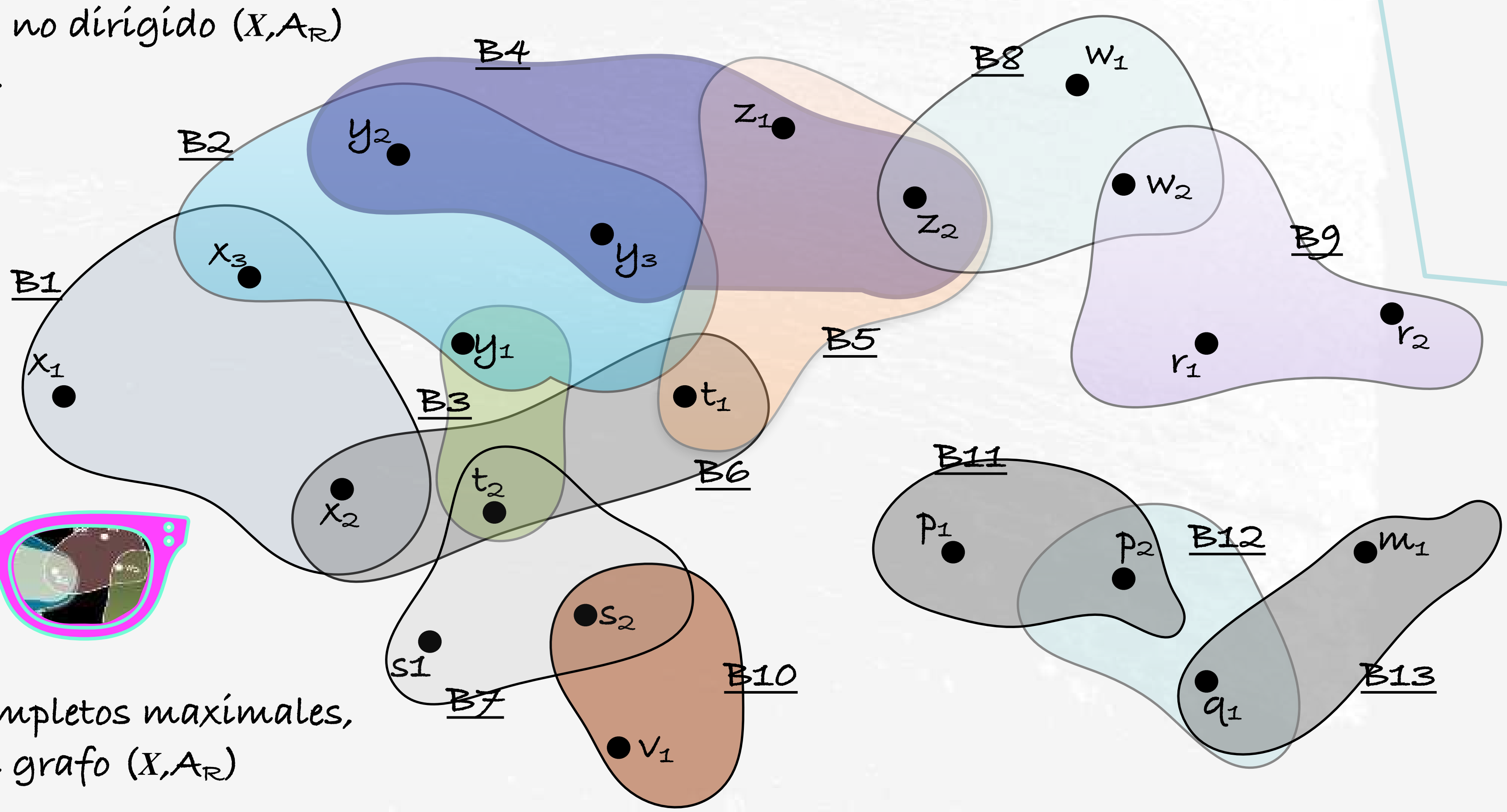
$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1, B2, ..., B13

Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X,A_R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

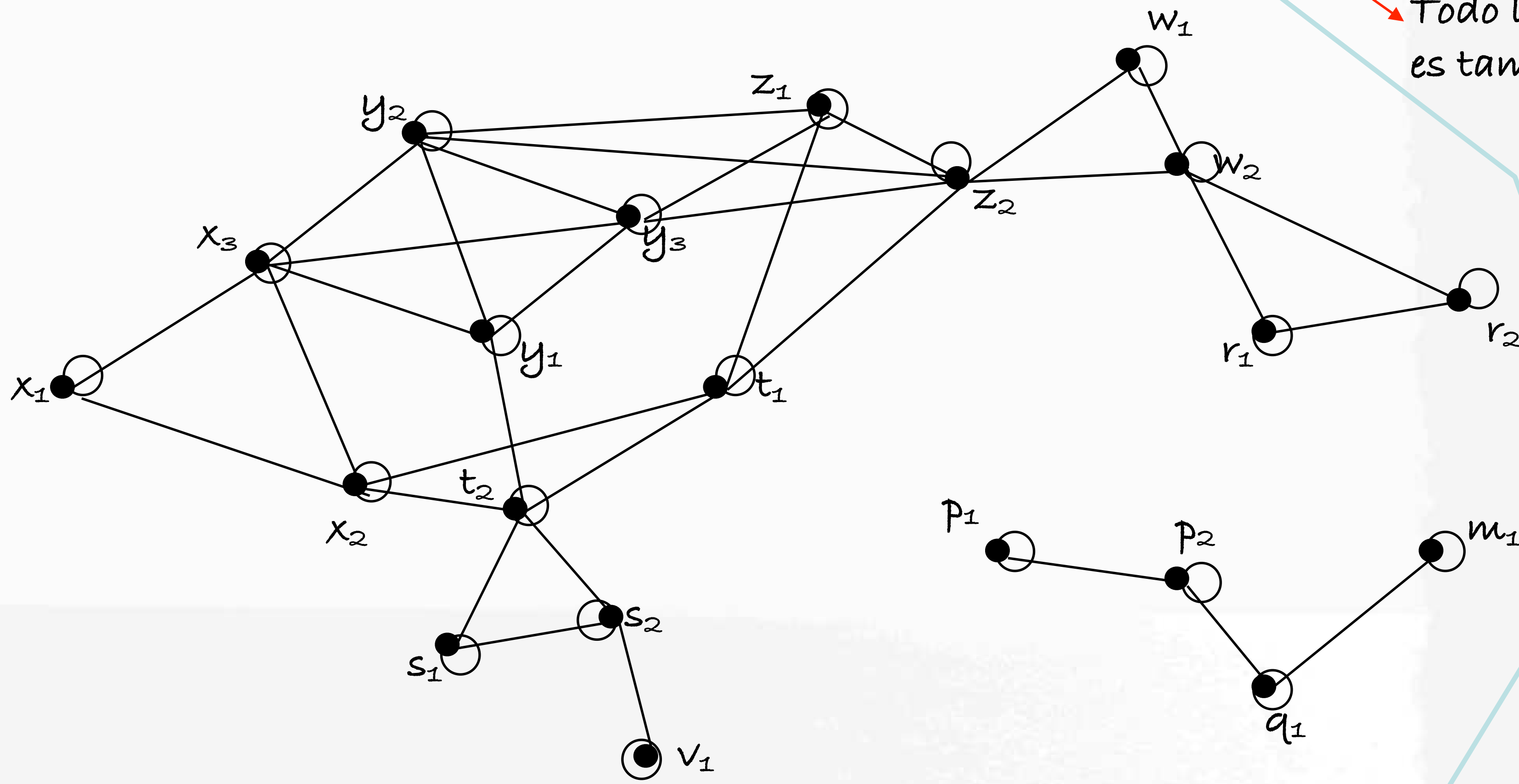
$x \sqsubseteq_R^z y \Leftrightarrow (\downarrow_R y \cap \downarrow_R z \subseteq \downarrow_R x)$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

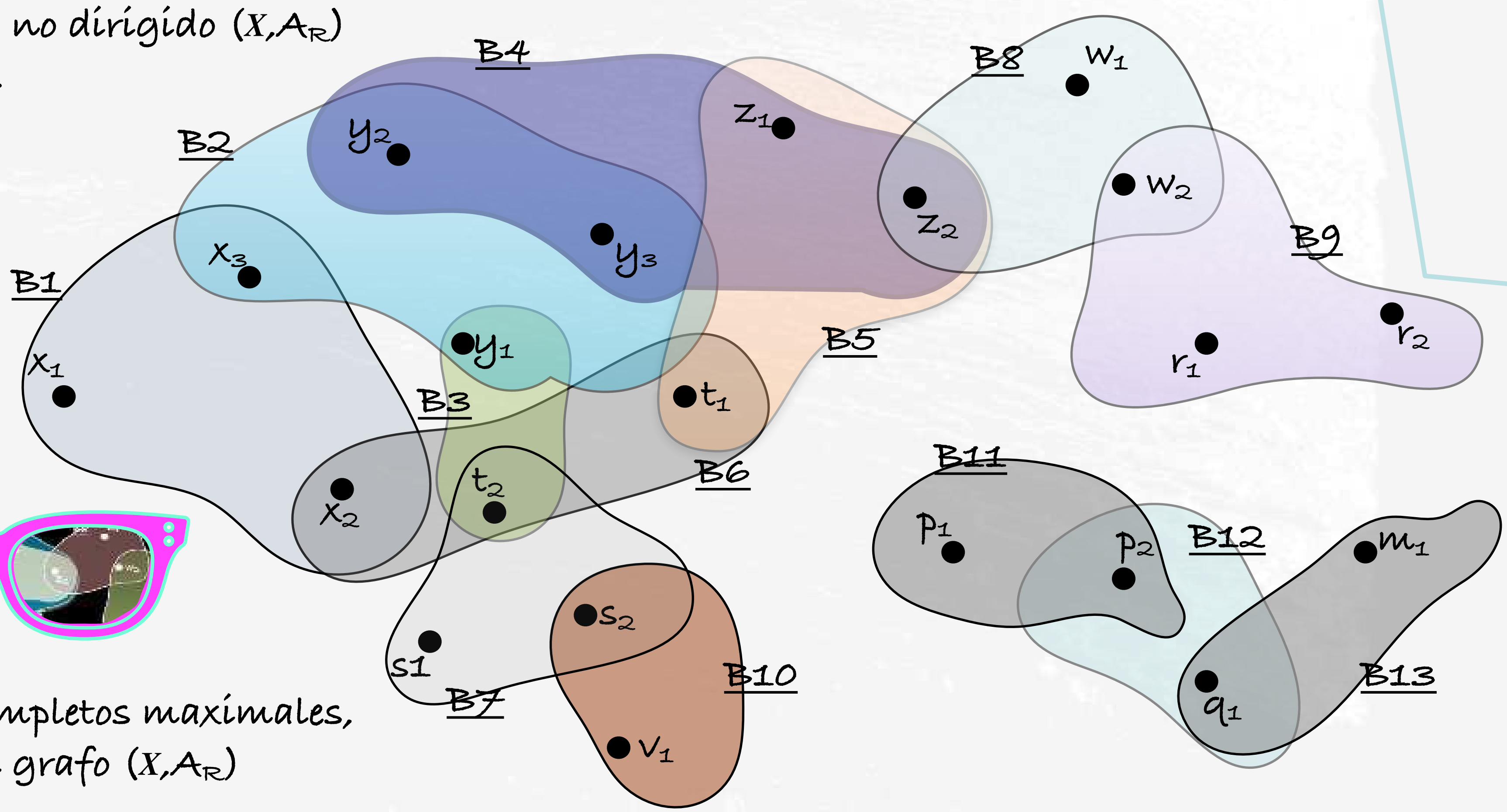
Todo lo que es semejante a "z" y a "y", es también semejante a "x".

Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.



Grafo simple, no dirigido (X, A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1, B2, ..., B13

Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X, A_R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

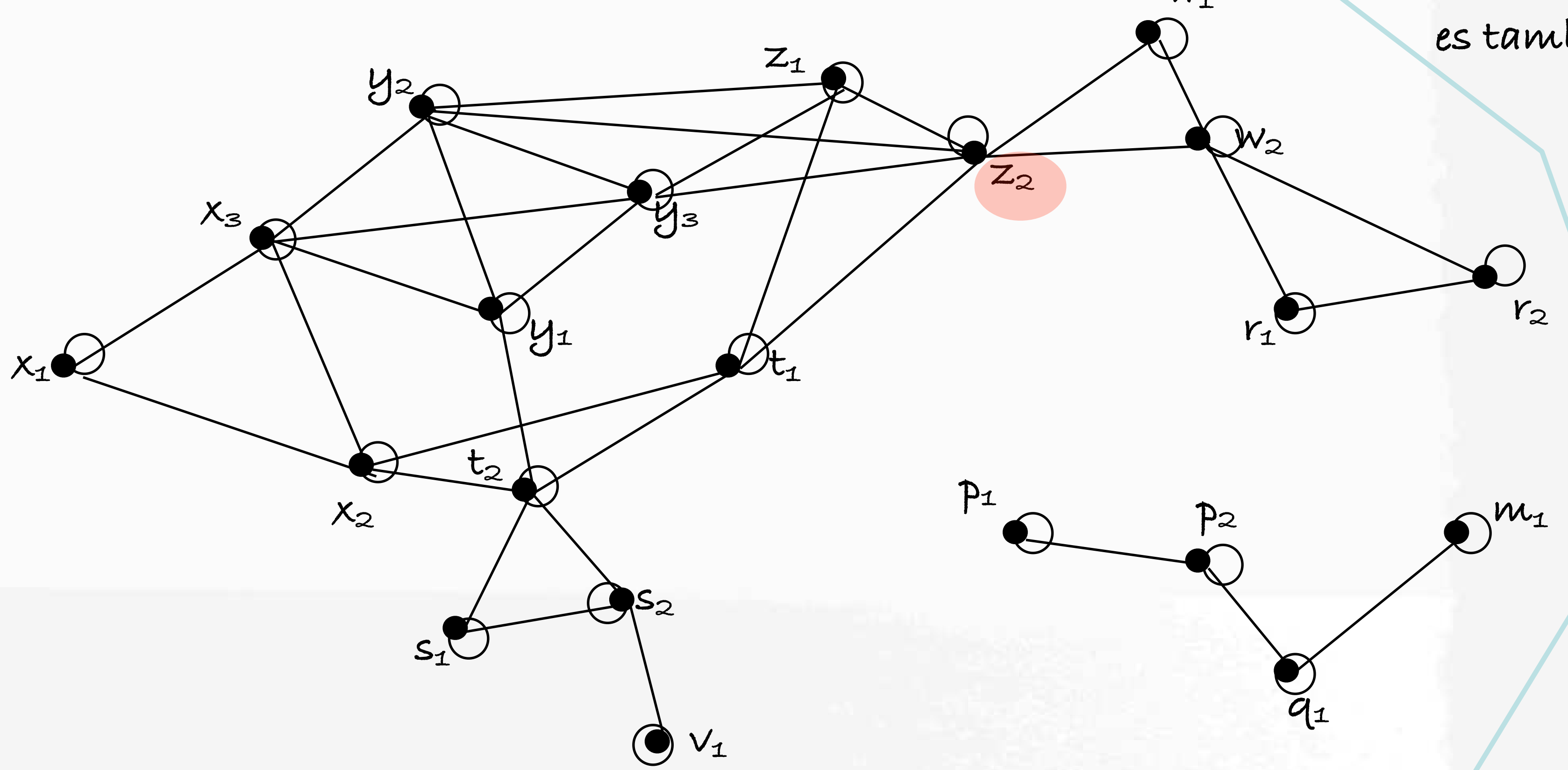
Referencial X

Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.

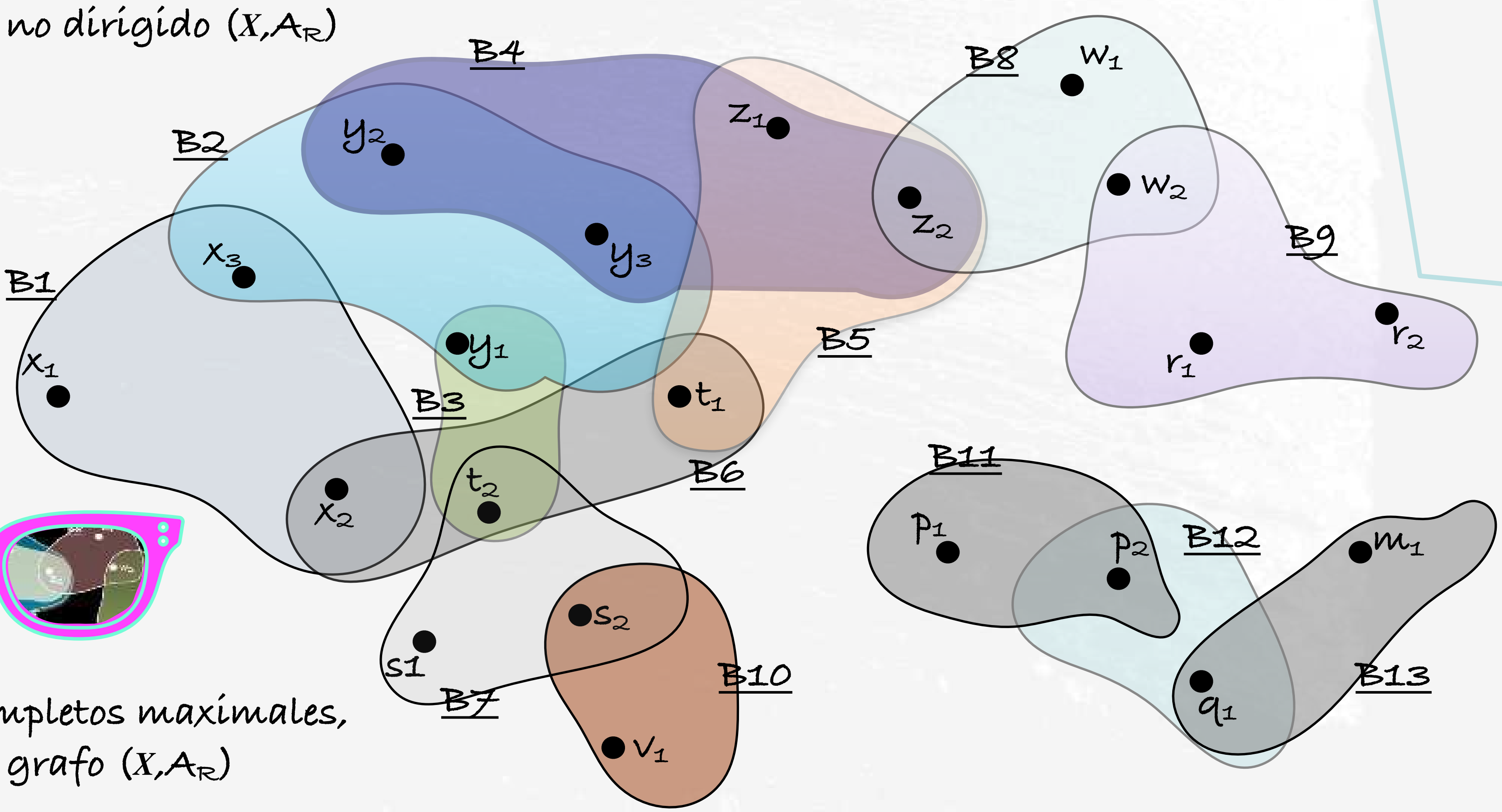
$x \sqsubseteq_R^{z} y \Leftrightarrow (\downarrow_R y \cap \downarrow_R z \subseteq \downarrow_R x)$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Todo lo que es semejante a "z" y a "y", es también semejante a "x".



Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1,B2,…, B13

Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X,A_R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

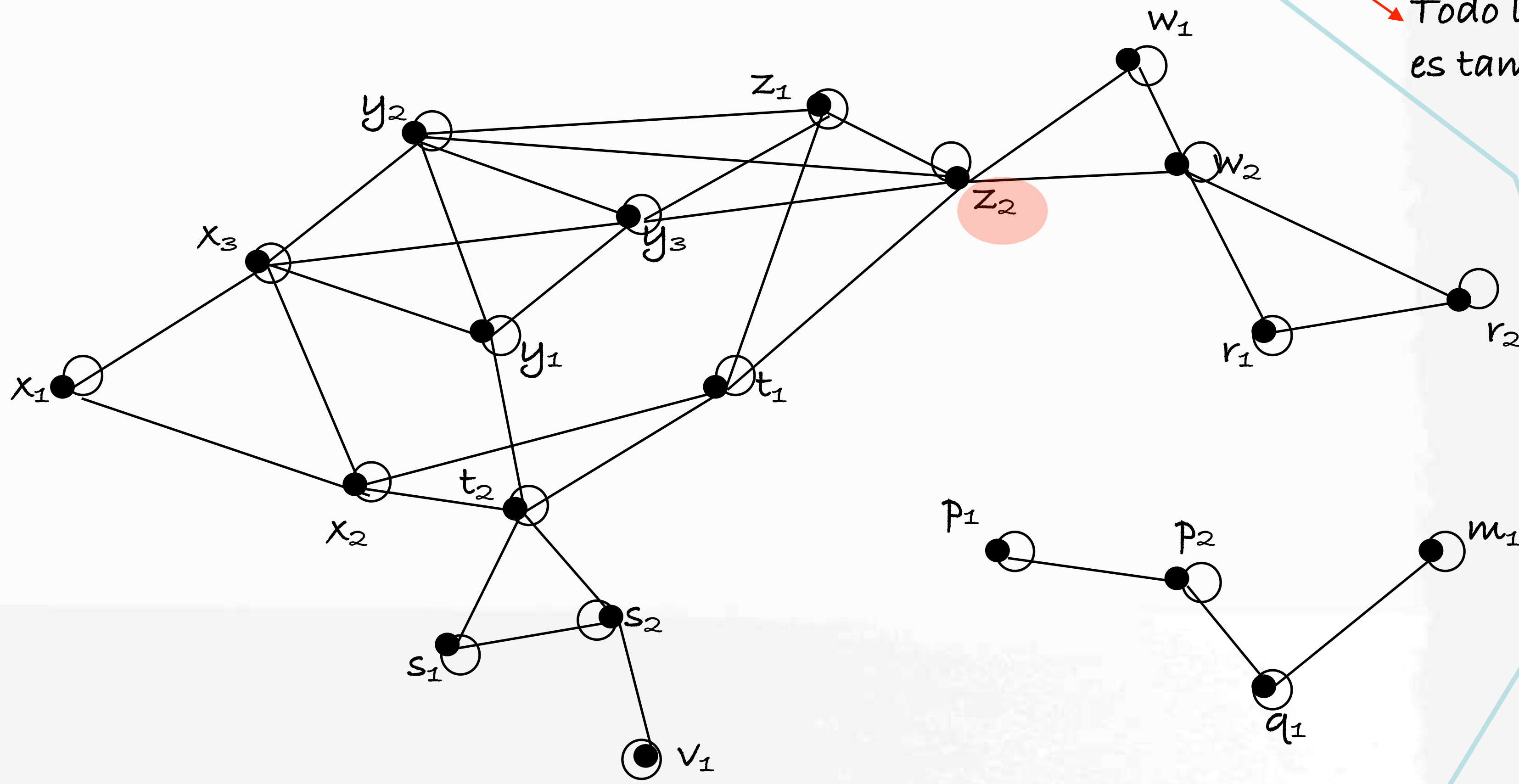
Referencial X

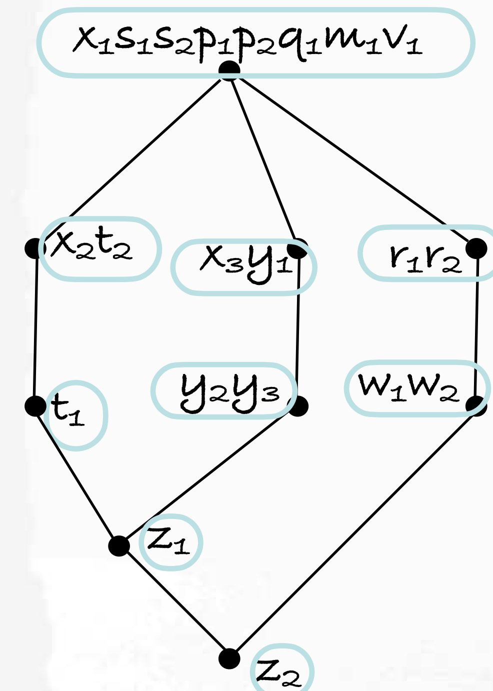
Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.

$$x \sqsubseteq_R^{z} y \Leftrightarrow (\downarrow_R y \cap \downarrow_R z \subseteq \downarrow_R x)$$

$$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$$

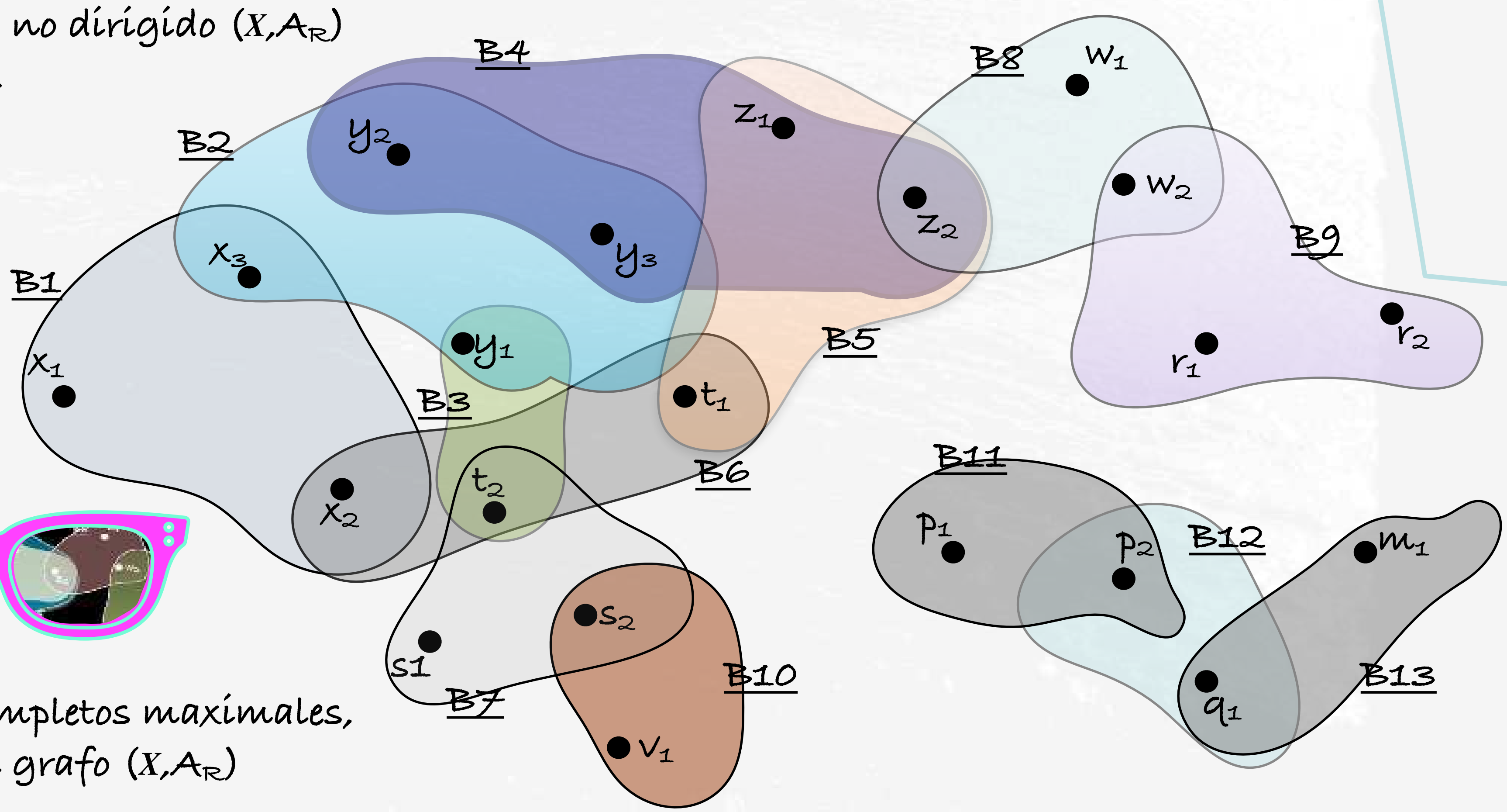
Todo lo que es semejante a "z" y a "y", es también semejante a "x".



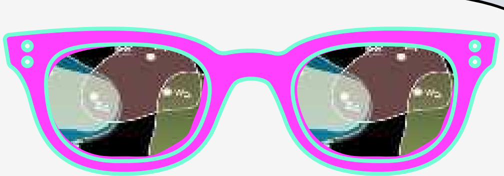


$([X], \sqsubseteq_R^{[z_2]})$

Grafo simple, no dirigido (X, A_R) asociado a R.



Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1, B2, …, B13



Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X, A_R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

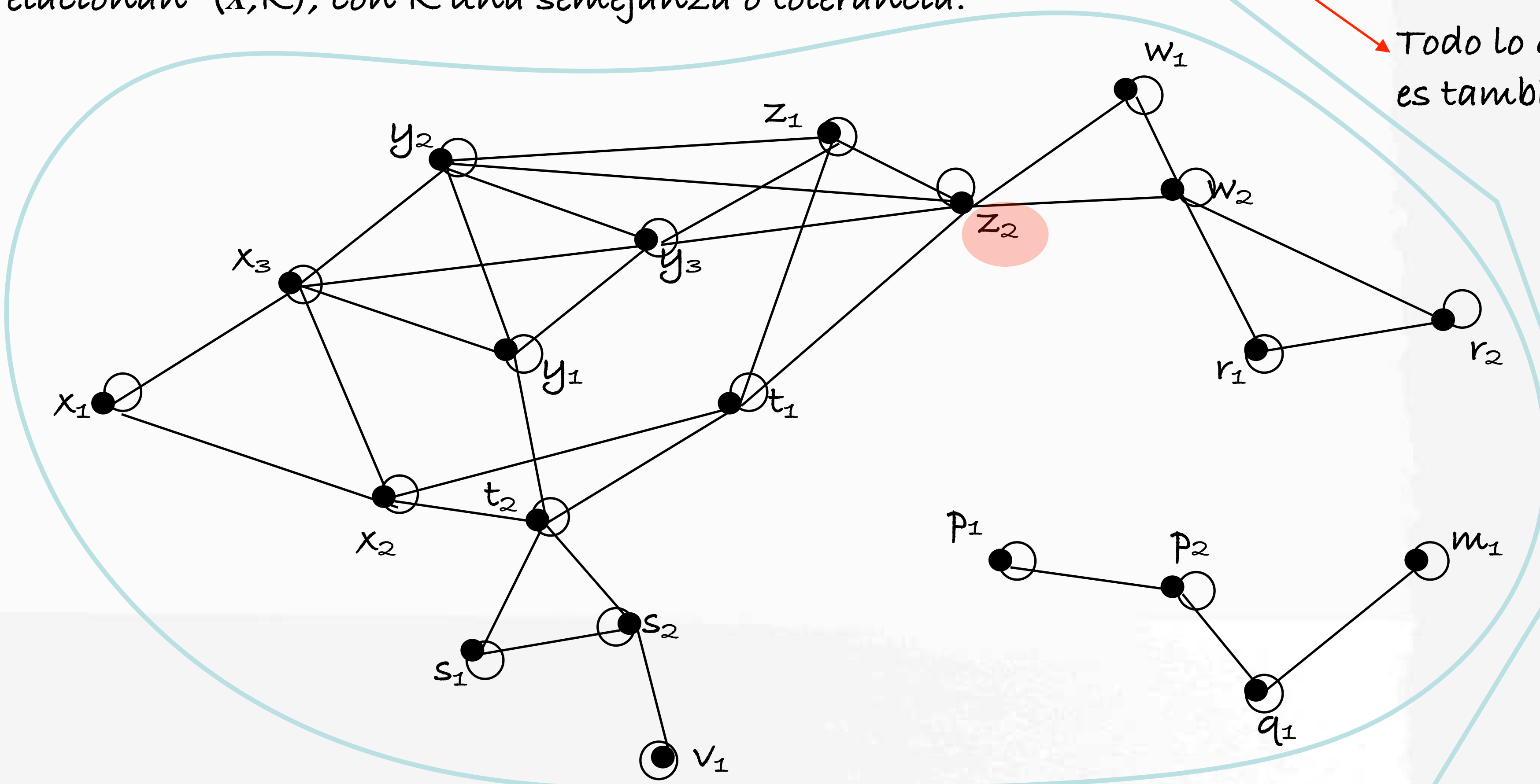
Referencial X

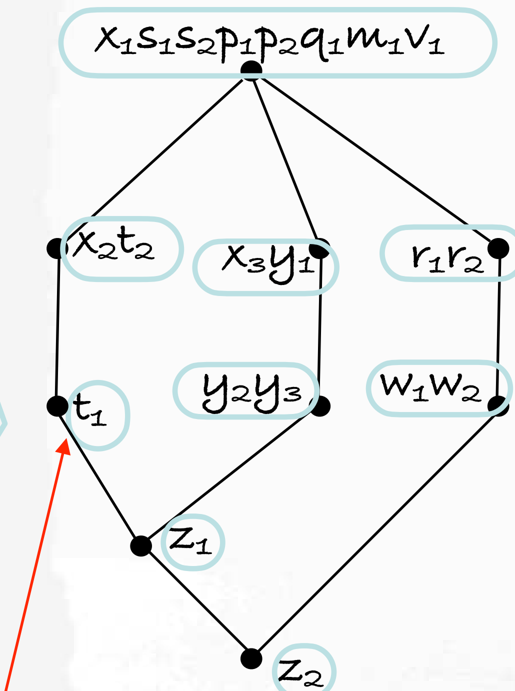
Sistema relacionan (X,R), con R una semejanza o tolerancia.

$x \sqsubseteq_R^{z} y \;\Leftrightarrow\; (\downarrow_R y \cap \downarrow_R z \subseteq \downarrow_R x)$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\} = \downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Todo lo que es semejante a "z" y a "y", es también semejante a "x".

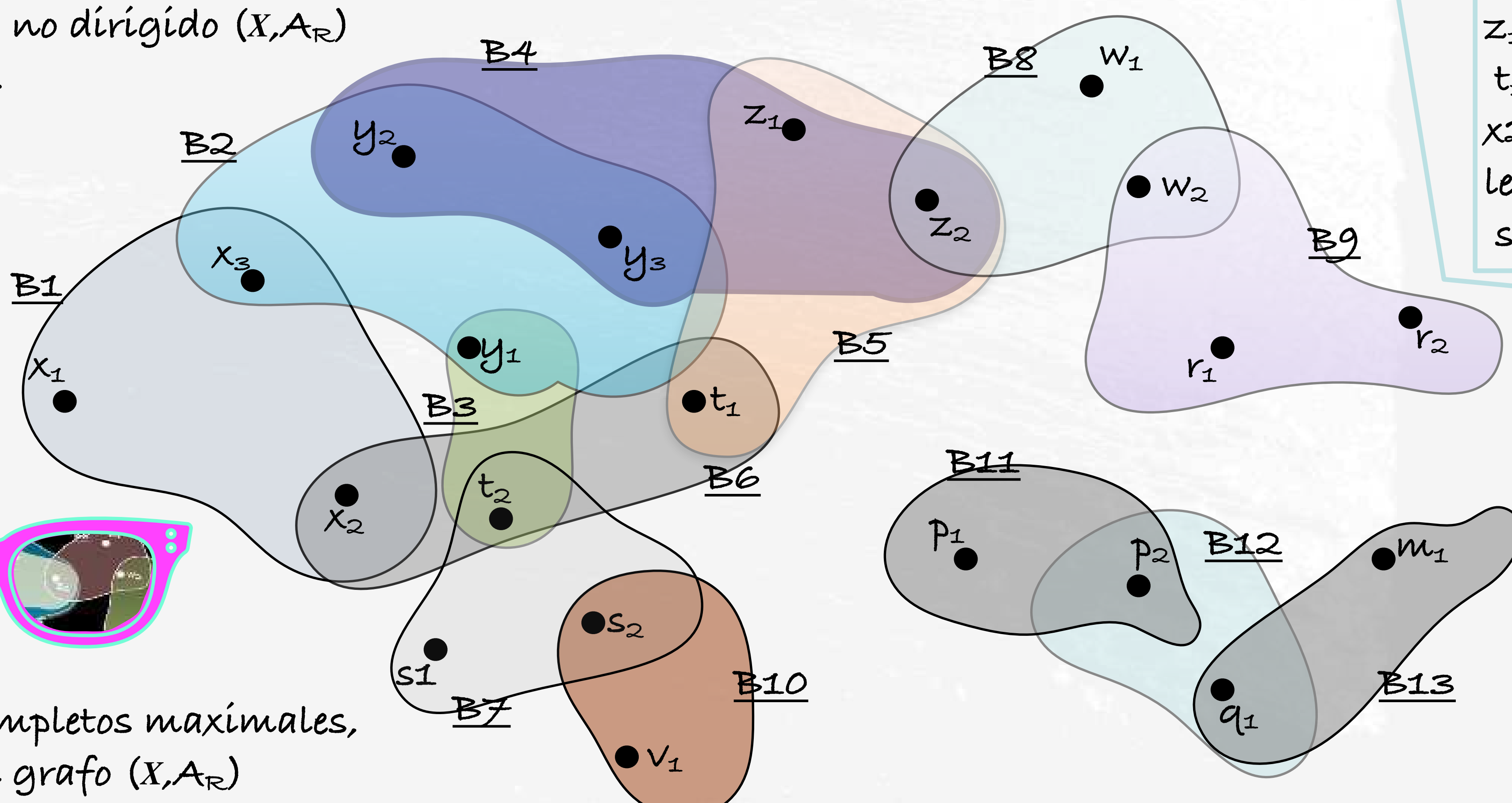




$([X], \sqsubseteq_R^{[z_2]})$

z_1 "se asemeja más" a z_2 que t_1 y este último más que x2 y t2 (dos que son equivalentes en cuanto a su semejanza con t_1).

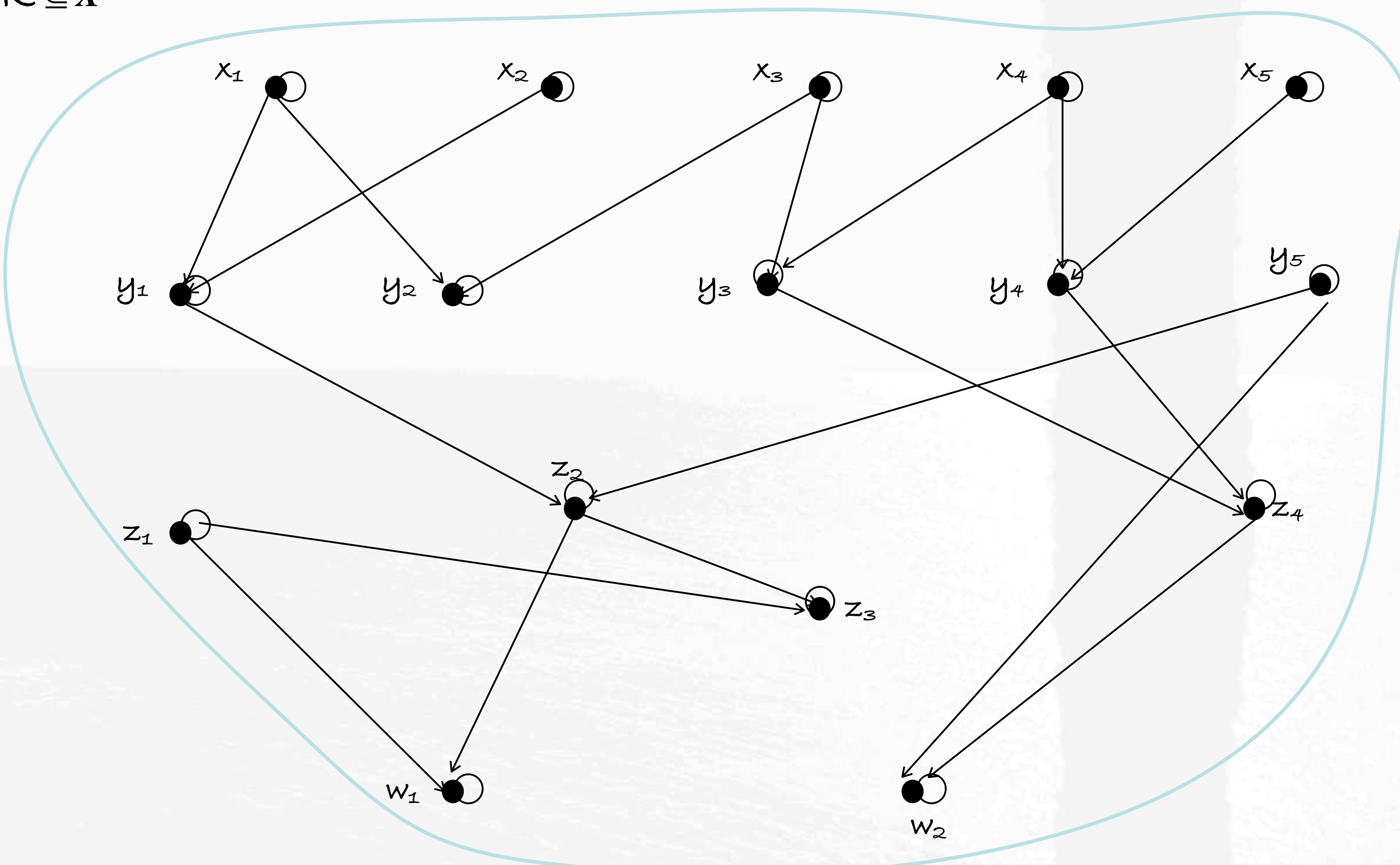
Grafo simple, no dirigido (X,A_R) asociado a R.



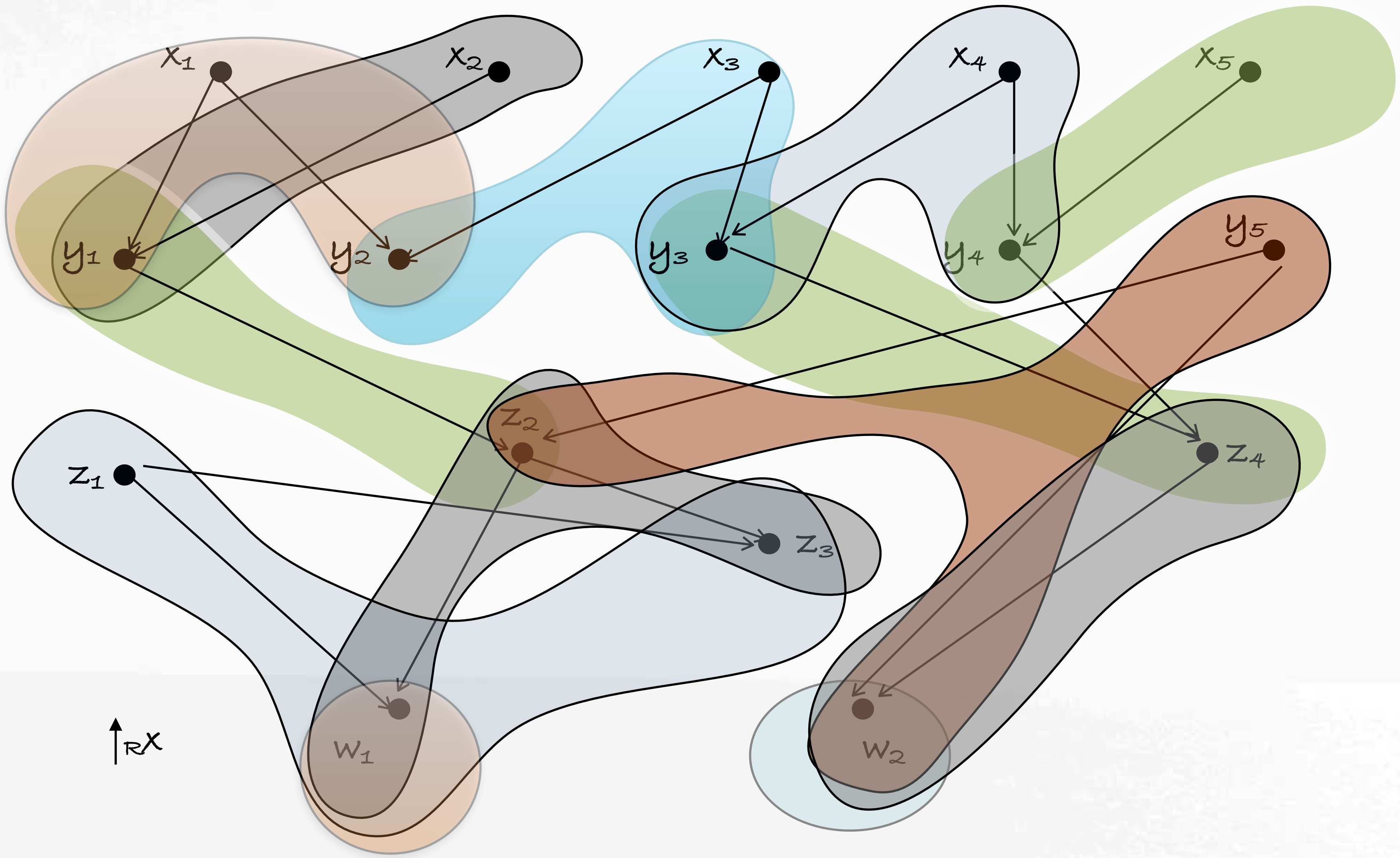
Bloques de semejanza o tolerancia asociados a R: B1,B2,..., B13

Subgrafos completos maximales, (cliques), del grafo (X,A_R)

(X, R) , $R \subseteq X^2$

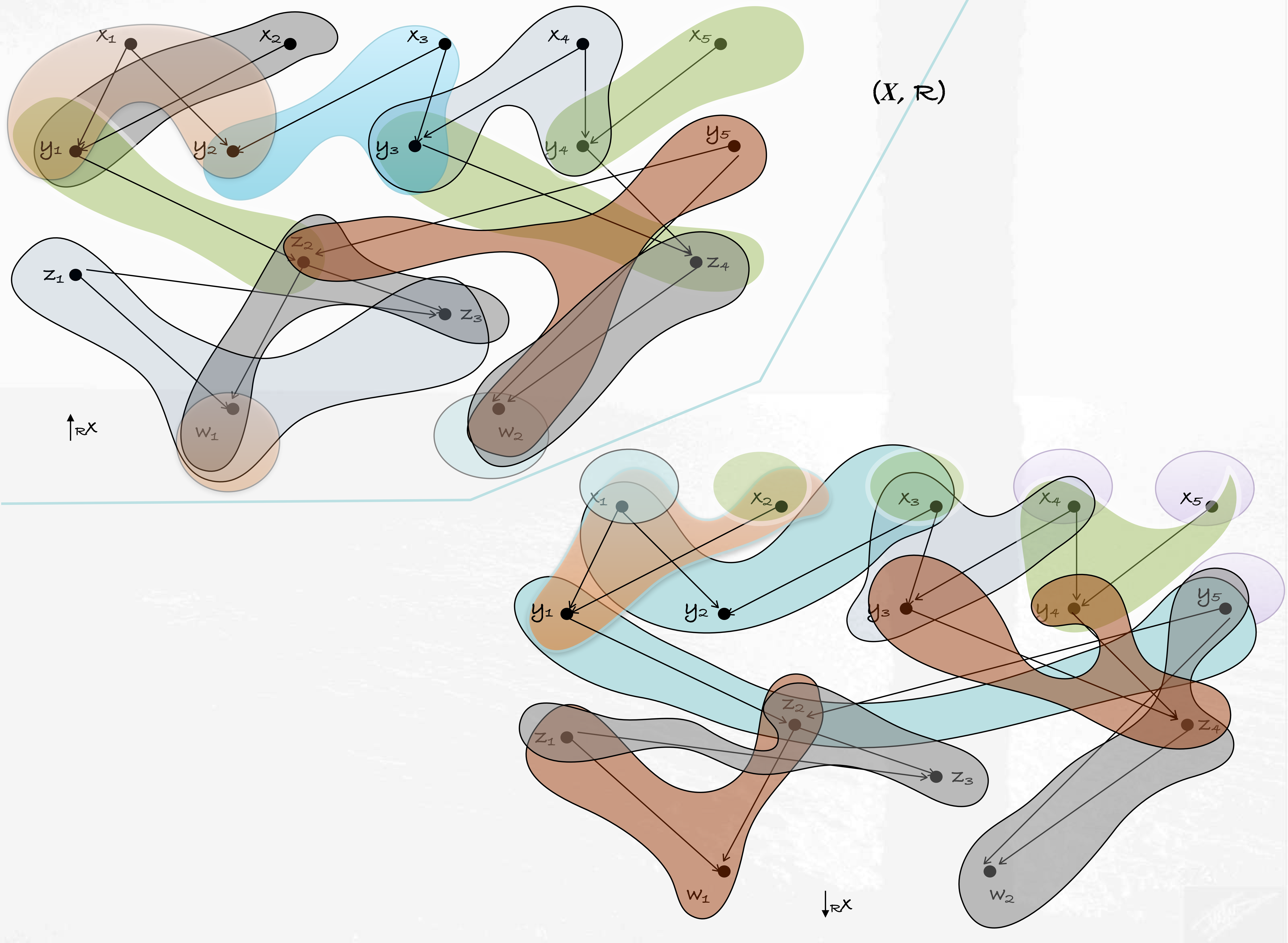


RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

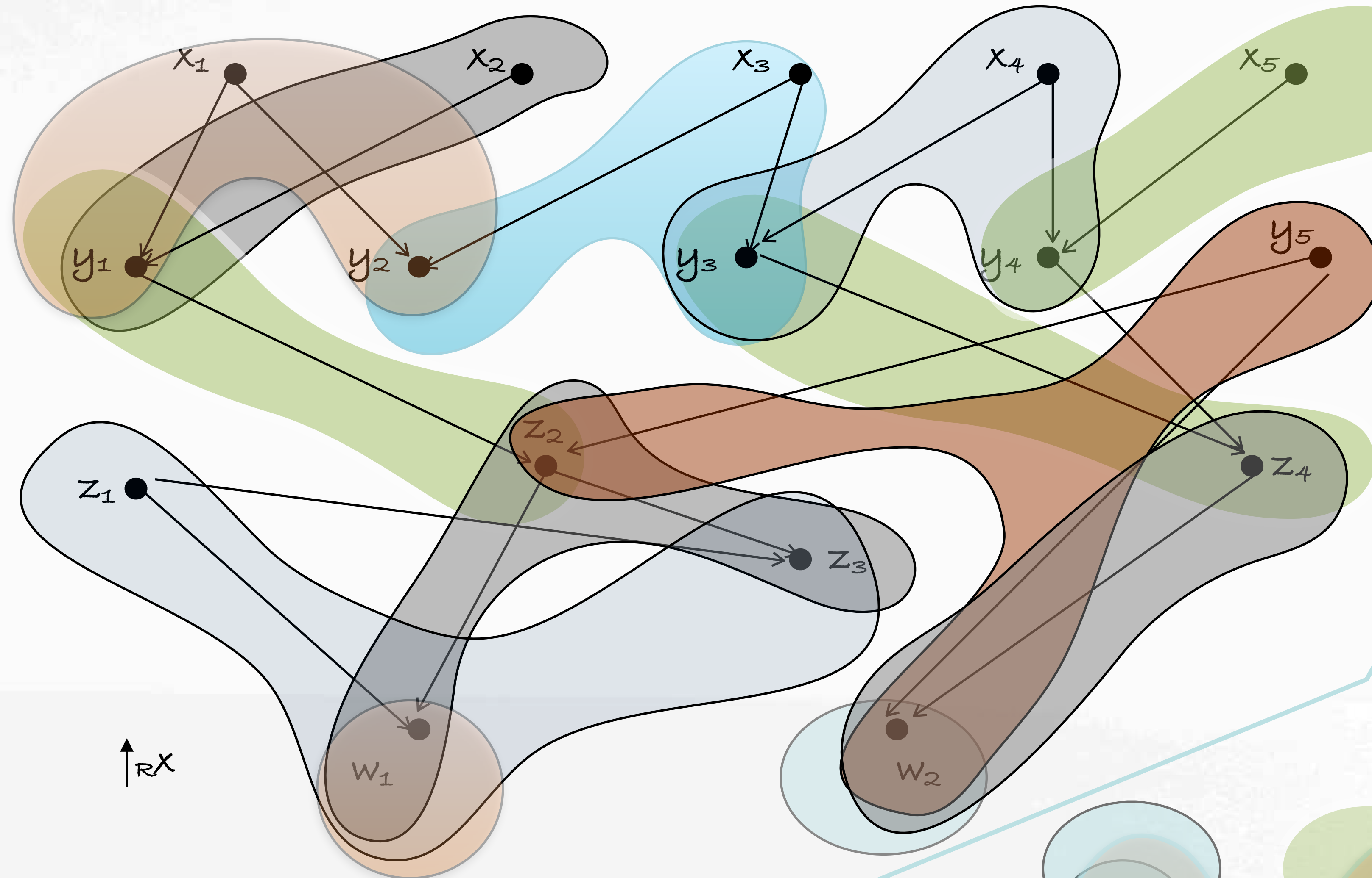


(X, R)

RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

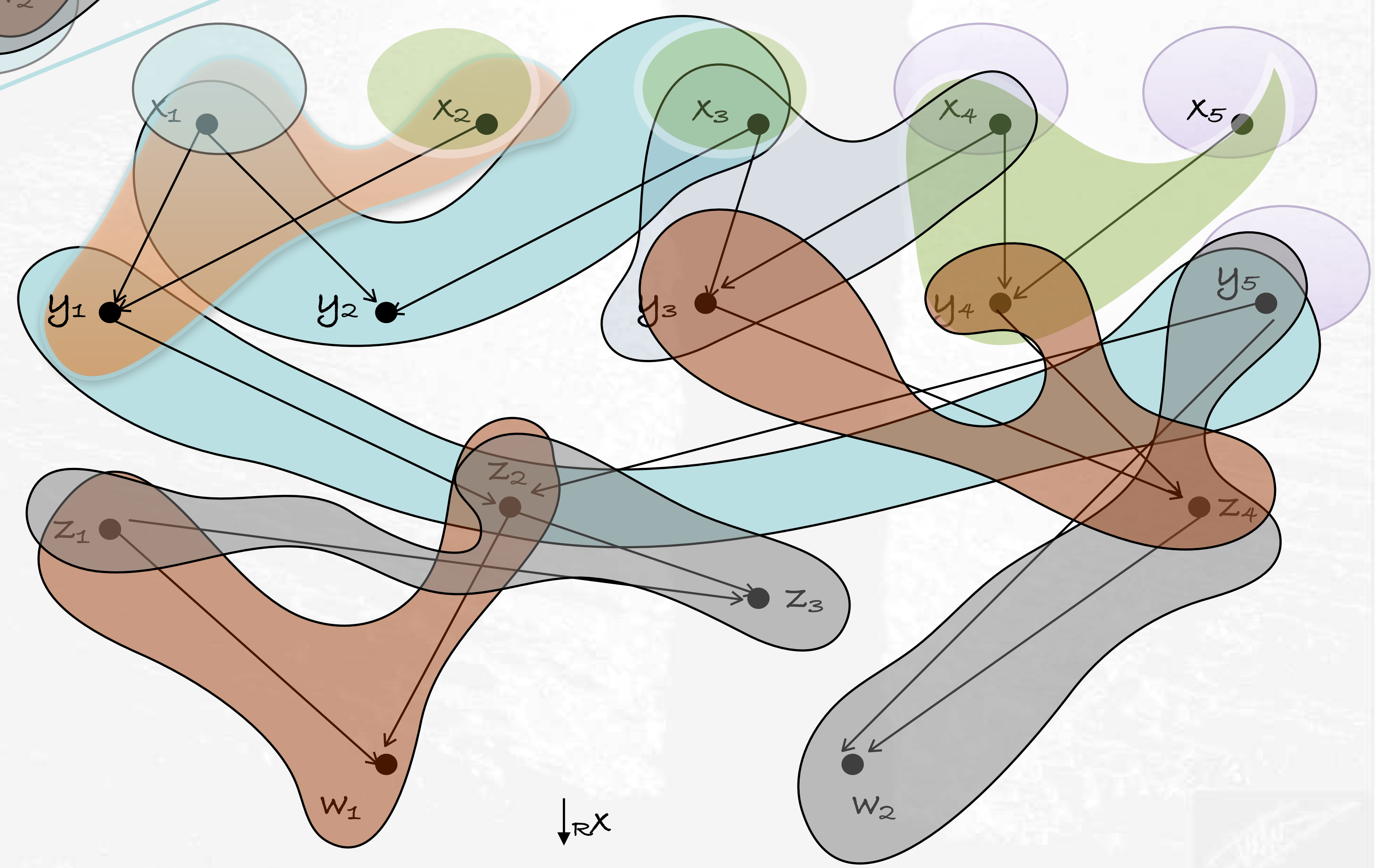


RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

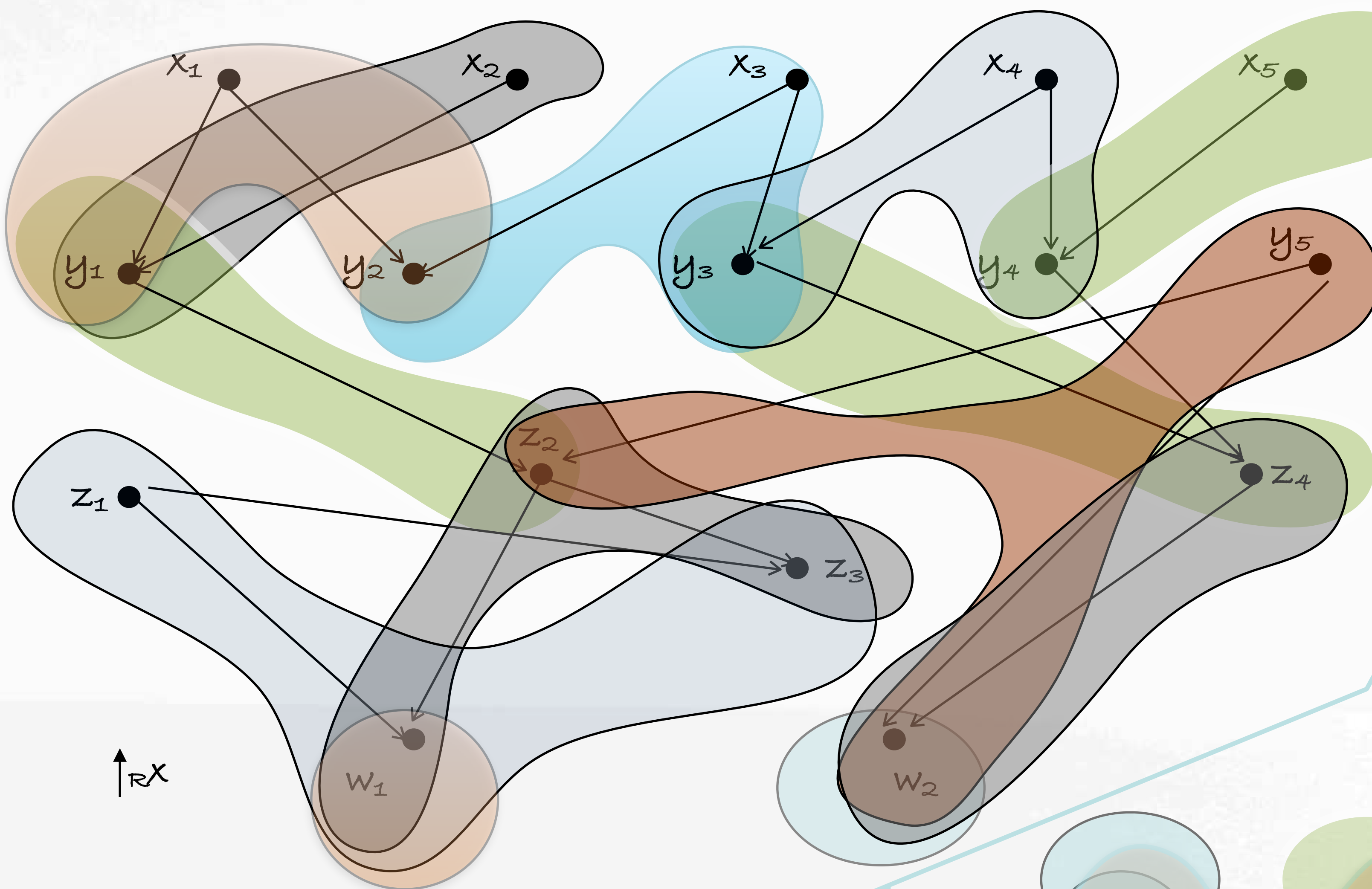


(X, R)

$x \sqsubseteq^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ & $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$

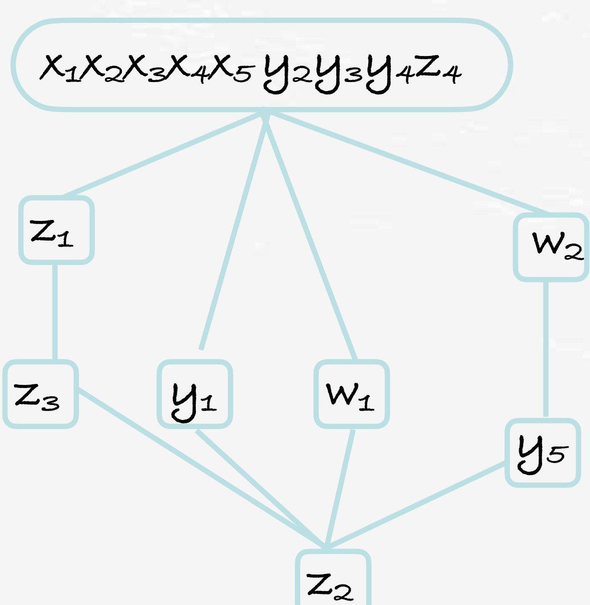


RELACIONES DE ACTIVIDAD EN SISTEMAS NÍTIDOS (X, R)

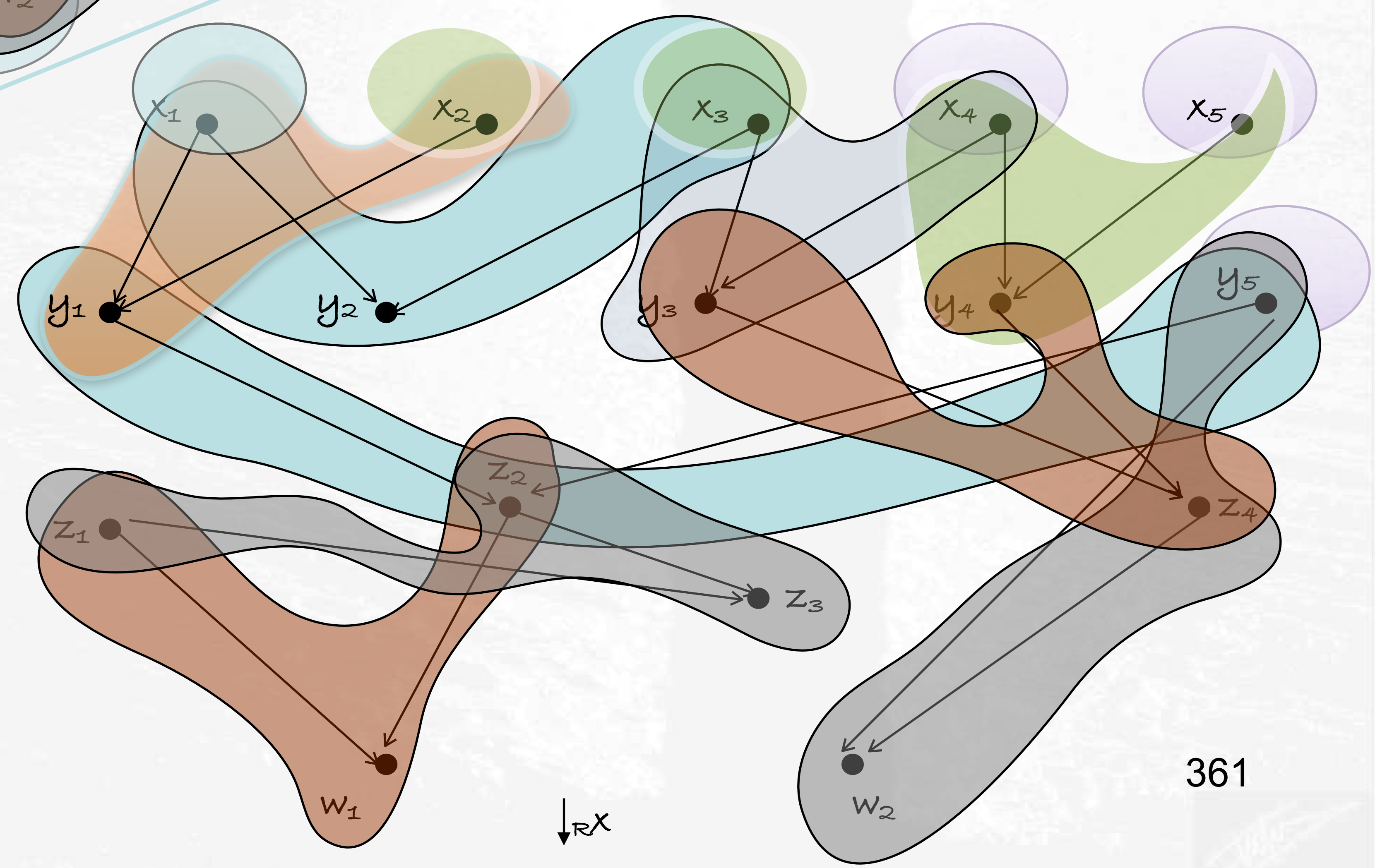


(X, R)

$x \sqsubseteq^{w} y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ & $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$



$([X], \sqsubseteq_R^{[z_2]})$



Generalización III:
Extensión de la relaciones de actividad a sistemas relacionales borrosos (X, R)

(X, R) , $R \subseteq X^2$

$x \sqsubseteq_R{}^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ **&** $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$

$(X, \sqsubseteq_R{}^w)$ $\quad \sqsubseteq_R{}^w \subseteq X^2$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}$, $\downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

(X, R) , $R \subseteq X^2$

$x \sqsubseteq_R^{w} y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ **&** $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$

$(X, \sqsubseteq_R^{w})$ $\sqsubseteq_R^{w} \subseteq X^2$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}$, $\downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R borrosa)

(X, R) , $R \subseteq X^2$

$x \sqsubseteq_R^w y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ & $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$

$(X, \sqsubseteq_R^w)$ $\quad \sqsubseteq_R^w \subseteq X^2$

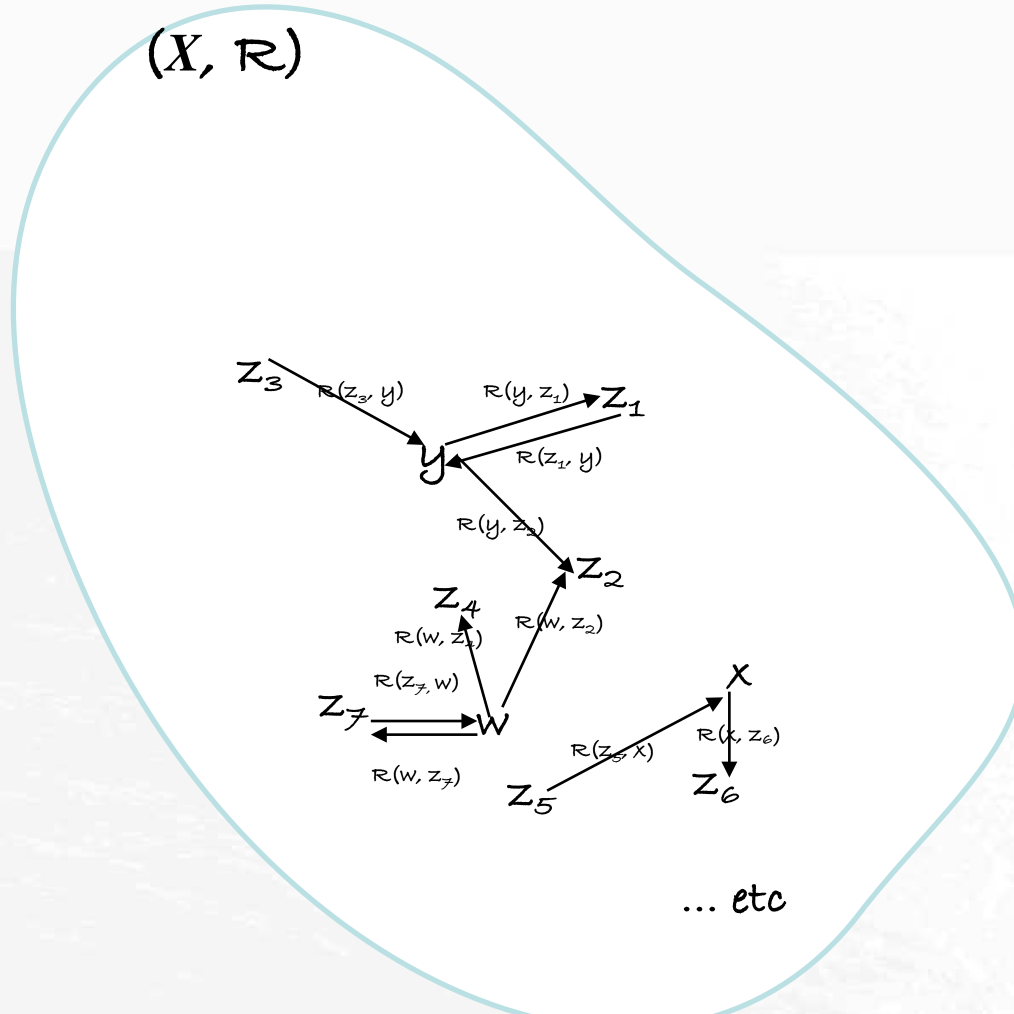
$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}$, $\downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R borrosa)

$(L, \leq, \cdot, +, 0, 1, \inf_L, \sup_L, *, \rightarrow)$ retículo completo distributivo con par residuado $(*, \rightarrow)$.

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$

(X, R) , $R \in L^{X^2}$



(X, R) , $R \subseteq X^2$

$x \sqsubseteq_R^{w} y \Leftrightarrow (\uparrow_R y \cap \uparrow_R w \subseteq \uparrow_R x)$ & $(\downarrow_R y \cap \downarrow_R w \subseteq \downarrow_R x)$

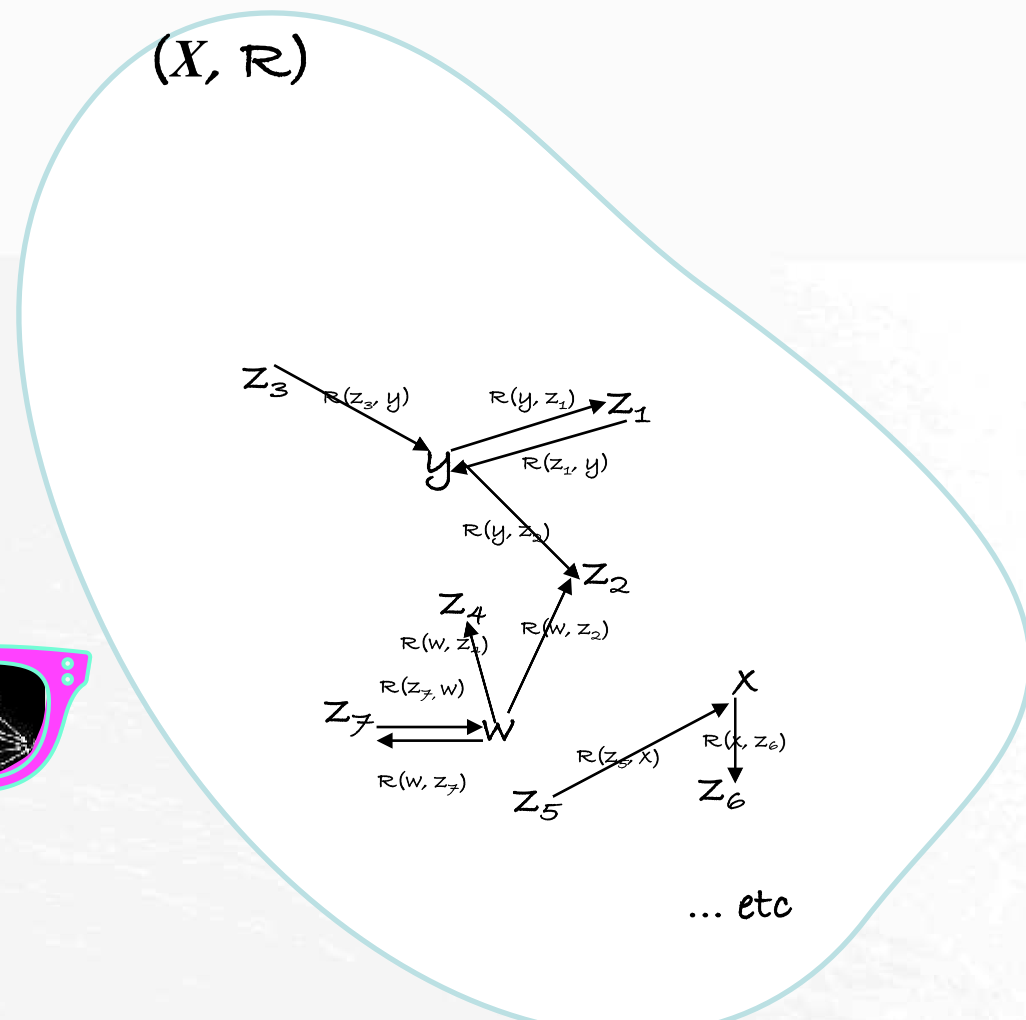
$(X, \sqsubseteq_R^{w})$ $\quad \sqsubseteq_R^{w} \subseteq X^2$

$\uparrow_R x = \{s \in X \,/\, xRs\}$, $\downarrow_R x = \{t \in X \,/\, tRx\}$

Extensión de las relaciones de actividad a sistemas relacionales (X, R) (R borrosa)

$(L, \leq, \cdot, +, 0, 1, inf_L, sup_L, *, \rightarrow)$ retículo completo distributivo con par residuado $(*, \rightarrow)$.

$X = \{x, y, w, z_1, z_2, \ldots\}$



(X, R) , $R \in L^{X^2}$

$(X, \sqsubseteq_R^{w})$ $\quad \sqsubseteq_R^{w} \in L^{X^2}$

Cuestión abierta...

$$\sqsubseteq_R^{w}(x,y) = \Big[inf_L\{\, [R(y,s) * R(w,s)] \rightarrow R(x,s) \,/\, s \in X \,\}\Big] \cdot \Big[inf_L\{\, [R(t,y) * R(t,w)] \rightarrow R(t,x) \,/\, t \in X \,\}\Big]$$

?

0. Preliminares: Orden de Actividad, Diferencia Simétrica, Uninormas y nulnormas.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío ∅, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en ∅. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g:E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

0. Preliminares: Orden de Actividad, Diferencia Simétrica, Uninormas y nulnormas.

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\emptyset$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$" , que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \emptyset$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "W" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \emptyset)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \emptyset$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su " w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \rightarrow F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas,(isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre" .
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

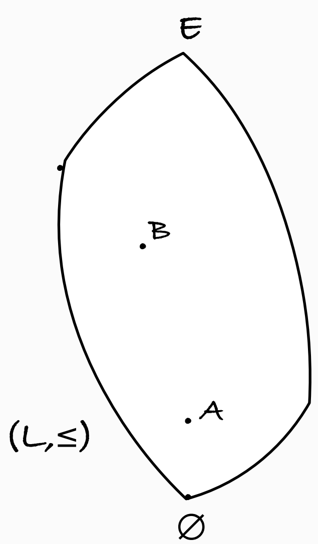
   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

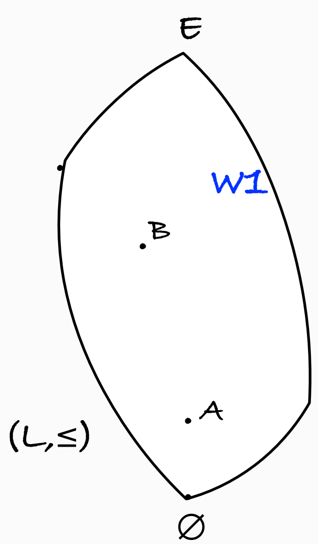
algunas cuestiones (abiertas)

Sobre los maximales de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ cuando W es un L-borroso propio (es decir, no nítido)

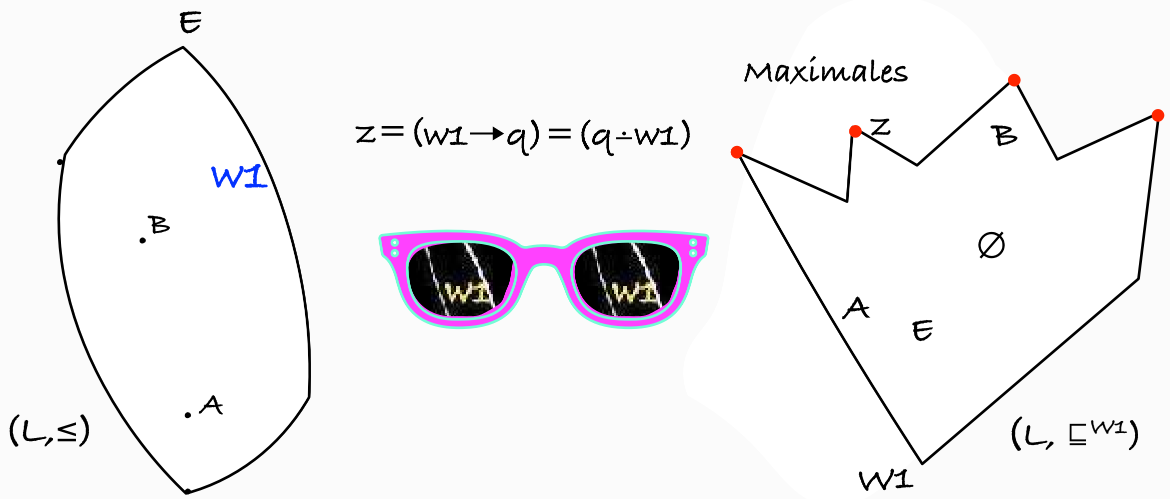
Si (L,≤) es un retículo distributivo



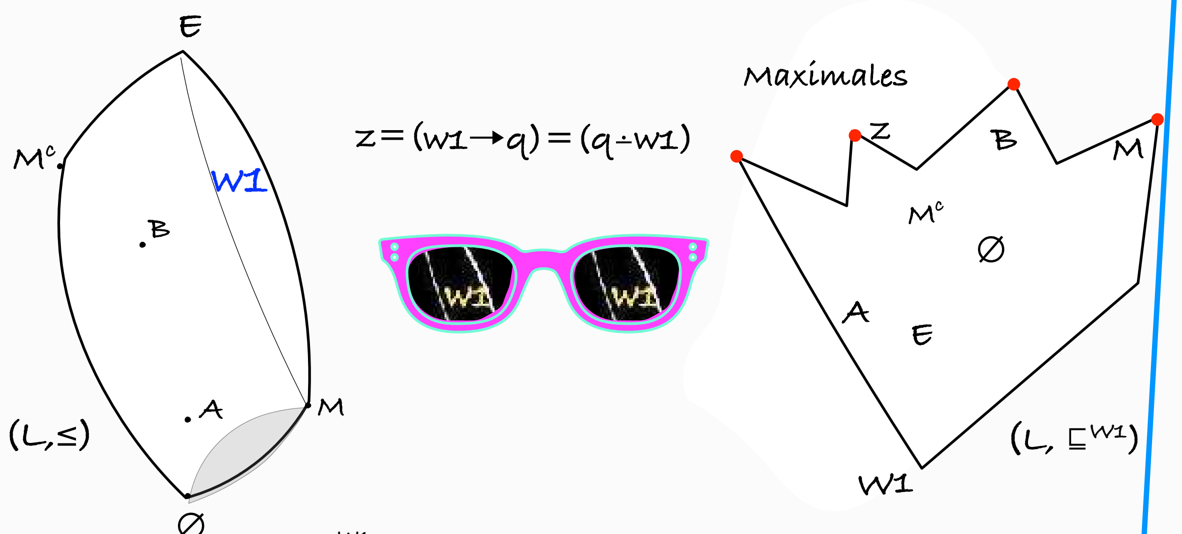
Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1 \in L$ no es nítido



Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1 \in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo $W1$. Los elementos tales que $z=(w1 \rightarrow q)=(q \div w1)$ para algún q, son maximales: $z \in Maximal(L)$.



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$, Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1\in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo $W1$. Los elementos tales que $z=(w1\rightarrow q)=(q\div w1)$ para algún q, son maximales: $z\in Maximal(L)$.



$A\sqsubseteq^{W1}B \Leftrightarrow (B\cdot W1)\leq A\leq (B+W1)$,

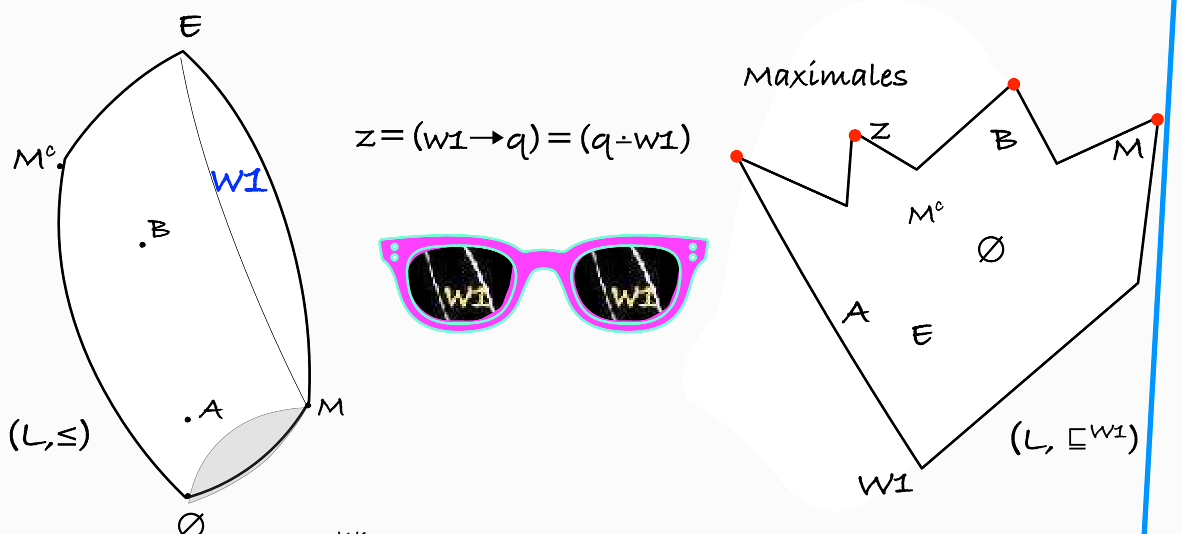
En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{X}C_s$, el subconjunto **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s)\subset \underset{s\in S}{X}C_s$ queda determinado por:

$(\mathbf{N}(L)=\{w\in L\,/\,(w \text{ es complementado})\,\&\,(w'=w^c)\}$, nítidos del retículo distributivo $(L,\leq)$)

$[(M\in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1}))\Leftrightarrow$

$[(M\in \mathbf{N}((\underset{s\in S}{X}C_s))\,\&\,((SUPP(W1))^c\subseteq M\subseteq (KER(W1))^c)]$

Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1\in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo W1. Los elementos tales que $z=(w1\rightarrow q)=(q\div w1)$ para algún q, son maximales: $z\in Maximal(L)$.



$A\sqsubseteq^{W1}B \Leftrightarrow (B\cdot W1)\leq A\leq (B+W1)$,

En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{\times} C_s$, el subconjunto **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{\times} C_s)\subset \underset{s\in S}{\times} C_s$ queda determinado por:

(**N**(L)={w∈L / (w es complementado) & (w'=w^c)}, nítidos del retículo distributivo (L,≤))

$[(M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{\times} C_s,\sqsubseteq^{W1}))\Leftrightarrow$

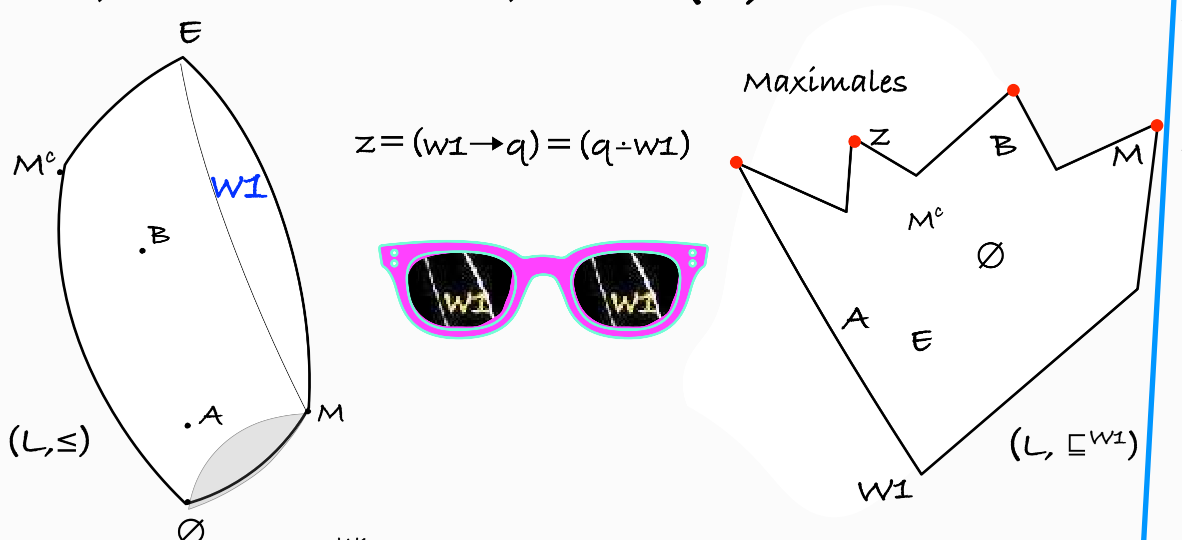
$[(M\in \mathbf{N}((\underset{s\in S}{\times} C_s))\,\&\,((SUPP(W1))^c\subseteq M\subseteq (KER(W1))^c)]$

$L=\underset{s\in S}{\times} C_s$ se expresa como unión de ideales principales:

$\underset{s\in S}{\times} C_s=\bigcup\{(\downarrow_{W1}M)\ /\ M\in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{\times} C_s,\sqsubseteq^{W1})\}$.(*)

(*) Además de W1, varios de los ideales pueden contener otros elementos de L: $W1\neq A\in[(\downarrow_{W1}M_1)\cap(\downarrow_{W1}M_2)]$, ...,etc

Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $w1 \in L$ no es nítido, entonces $(L, \sqsubseteq^{w1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo W1. Los elementos tales que $z=(w1 \rightarrow q)=(q \div w1)$ para algún q, son maximales: $z \in Maximal(L)$.



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{X} C_s$, el subconjunto **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X} C_s) \subset \underset{s\in S}{X} C_s$ queda determinado por:

$[(M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X} C_s, \sqsubseteq^{W1})) \Leftrightarrow$

$(\mathbf{N}(L)=\{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w'=w^c)\}$, nítidos del retículo distributivo $(L,\leq)$)

$[(M \in \mathbf{N}((\underset{s\in S}{X} C_s)) \,\&\, ((SUPP(W1))^c \subseteq M \subseteq (KER(W1))^c)]$

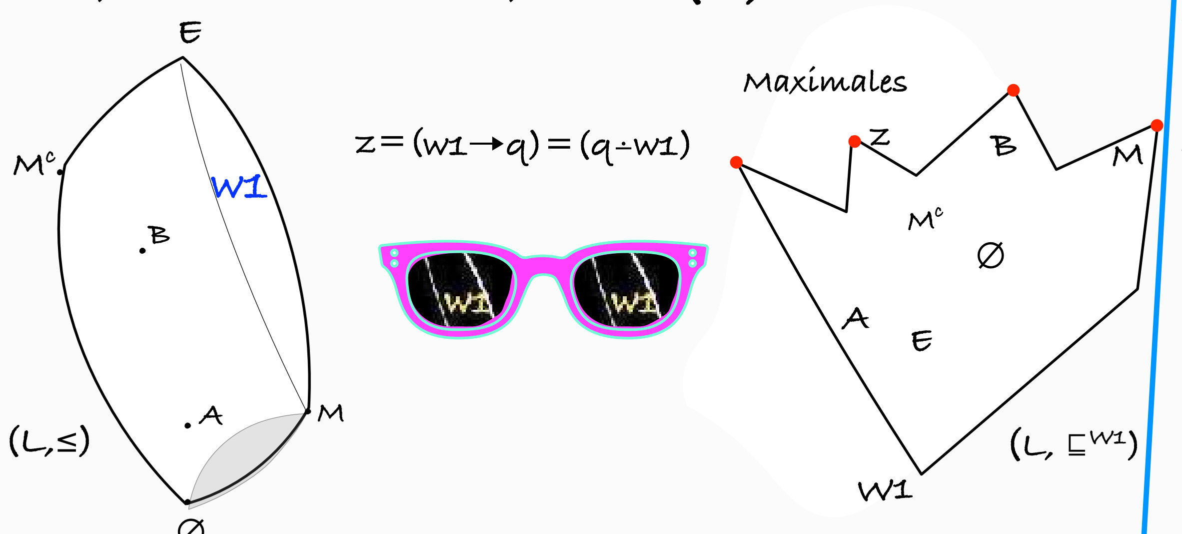
$L=\underset{s\in S}{X} C_s$ se expresa como unión de ideales principales:

$\underset{s\in S}{X} C_s = \bigcup\{(\downarrow_{w1} M) \,/\, M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X} C_s, \sqsubseteq^{W1})\}$.(*)

En este caso de producto de cadenas, si $(\downarrow N)$ representa el ideal principal $(\downarrow N)=\{B \in \underset{s\in S}{X} C_s / B \leq M\}$; si para $M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X} C_s, \sqsubseteq^{W1})$, $(\downarrow_{w1} M)$ representa el "ideal principal": $(\downarrow_{w1} M)=\{A \in \underset{s\in S}{X} C_s \,/\, A \sqsubseteq^{W1} M\}$ y si, para $\mathcal{K} \subseteq P(\underset{s\in S}{X} C_s)$, $\mathcal{K}\Delta M$ representa el subconjunto: $\mathcal{K}\Delta M=\{K\Delta M \,/\, K \in \mathcal{K}\}$, entonces

(*) Además de W1, varios de los ideales pueden contener otros elementos de L: $w1 \neq A \in [(\downarrow_{w1} M_1) \cap (\downarrow_{w1} M_2)]$, ...,etc

Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1\in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo W1. Los elementos tales que $z=(w1\rightarrow q)=(q\div w1)$ para algún q, son maximales: $z\in Maximal(L)$.



$A\sqsubseteq^{W1}B\Leftrightarrow(B\cdot W1)\leq A\leq(B+W1)$,

En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{X}C_s$, el subconjunto **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s)\subset\underset{s\in S}{X}C_s$ queda determinado por:

$[(M\in\mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1}))\Leftrightarrow$

($\mathbf{N}(L)=\{w\in L\ /\ (w$ es complementado$)\ \&\ (w'=w^c)\}$, nítidos del retículo distributivo $(L,\leq)$)

$[(M\in\mathbf{N}((\underset{s\in S}{X}C_s))\ \&\ ((SUPP(W1))^c\subseteq M\subseteq(KER(W1))^c)]$

$L=\underset{s\in S}{X}C_s$ se expresa como unión de ideales principales:

$\underset{s\in S}{X}C_s=\bigcup\{(\downarrow_{W1}M)\ /\ M\in\mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})\}$.(*)

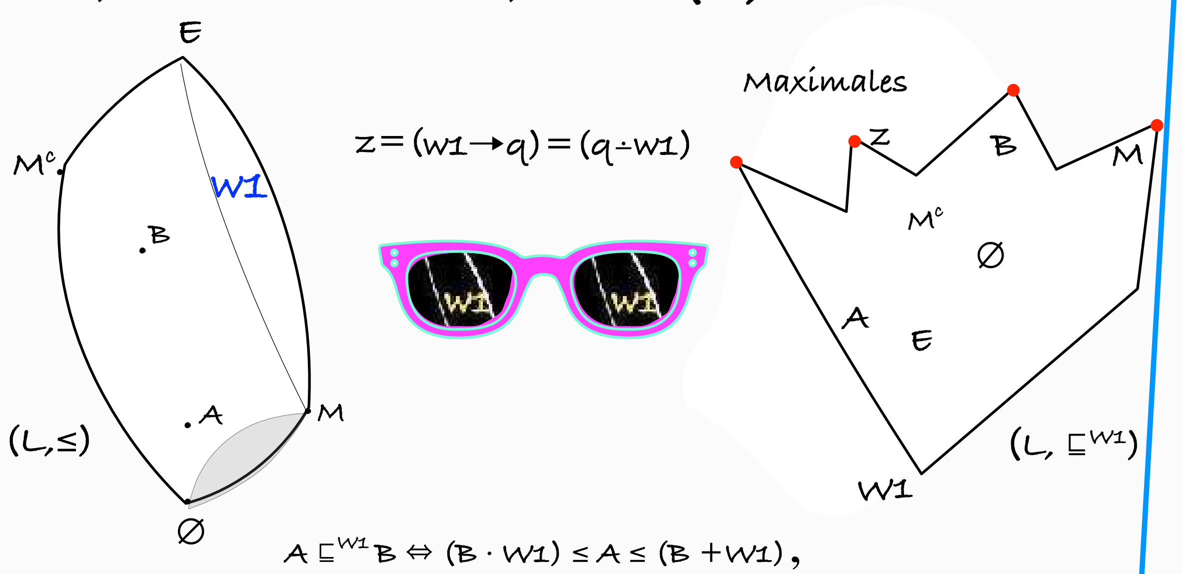
En este caso de producto de cadenas, si $(\downarrow N)$ representa el ideal principal $(\downarrow N)=\{B\in\underset{s\in S}{X}C_s/\ B\leq M\}$; si para $M\in\mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})$, $(\downarrow_{W1}M)$ representa el "ideal principal": $(\downarrow_{W1}M)=\{A\in\underset{s\in S}{X}C_s\ /\ A\sqsubseteq^{W1}M\}$ y si, para $\mathcal{K}\subseteq P(\underset{s\in S}{X}C_s)$, $\mathcal{K}\Delta M$ representa el subconjunto: $\mathcal{K}\Delta M=\{K\Delta M\ /\ K\in\mathcal{K}\}$, entonces

<u>Proposición</u>. Sólo a efectos de cómputo, (que no de estructura), $\forall M\in\mathbf{MAXIMAL}(XC_s,\sqsubseteq^{W1})$ se verifica la igualdad entre subconjuntos $(\downarrow_{W1}M)=(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M$, es decir:

$$(A\sqsubseteq^{W1}M)\Leftrightarrow(\exists S\in(\downarrow(M\Delta W1)):\ A=S\Delta M).$$

(*) Además de W1, varios de los ideales pueden contener otros elementos de L: $W1\neq A\in[(\downarrow_{W1}M_1)\cap(\downarrow_{W1}M_2)]$, ...,etc

Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1 \in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo $W1$. Los elementos tales que $z=(w1\rightarrow q)=(q \div w1)$ para algún q, son maximales: $z \in Maximal(L)$.



En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{X}C_s$, el subconjunto $\mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s) \subset \underset{s\in S}{X}C_s$ queda determinado por:

$(\mathbf{N}(L)=\{w\in L / (w \text{ es complementado}) \& (w'=w^c)\}$, nítidos del retículo distributivo $(L,\leq)$)

$[(M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})) \Leftrightarrow$

$[(M \in \mathbf{N}((\underset{s\in S}{X}C_s)) \& ((SUPP(W1))^c \subseteq M \subseteq (KER(W1))^c)]$

$L=\underset{s\in S}{X}C_s$ se expresa como unión de ideales principales:

$\underset{s\in S}{X}C_s = \bigcup\{(\downarrow_{W1}M) \;/\; M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})\}$.(*)

En este caso de producto de cadenas, si $(\downarrow N)$ representa el ideal principal $(\downarrow N)=\{B \in \underset{s\in S}{X}C_s / B\leq M\}$; si para $M \in \mathbf{MAXIMAL}(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})$, $(\downarrow_{W1}M)$ representa el "ideal principal": $(\downarrow_{W1}M)=\{A \in \underset{s\in S}{X}C_s / A\sqsubseteq^{W1}M\}$ y si, para $\mathcal{K}\subseteq P(\underset{s\in S}{X}C_s)$, $\mathcal{K}\Delta M$ representa el subconjunto: $\mathcal{K}\Delta M=\{K\Delta M / K\in\mathcal{K}\}$, entonces

<u>Proposición</u>. Sólo a efectos de cómputo, (que no de estructura), $\forall M \in \mathbf{MAXIMAL}(XC_s,\sqsubseteq^{W1})$ se verifica la igualdad entre subconjuntos $(\downarrow_{W1}M) = (\downarrow(M\Delta W1))\Delta M$, es decir:

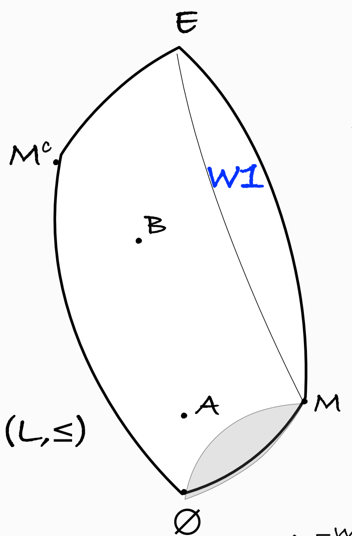
$$(A\sqsubseteq^{W1}M) \Leftrightarrow (\exists S\in(\downarrow(M\Delta W1)):\; A=S\Delta M).$$

<u>Demostración</u>.$\Rightarrow$) Sea $A\in(\downarrow_{W1}M)$. Se verifica: $(A \sqsubseteq^{W1}M) \Leftrightarrow (A \sqsubseteq^{M}W1) \Leftrightarrow (A\Delta M \leq M\Delta W1) \Leftrightarrow$ $(A\Delta M)\in(\downarrow(M\Delta W1))$, luego $A=((A\Delta M)\Delta M)\in[(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M]$.

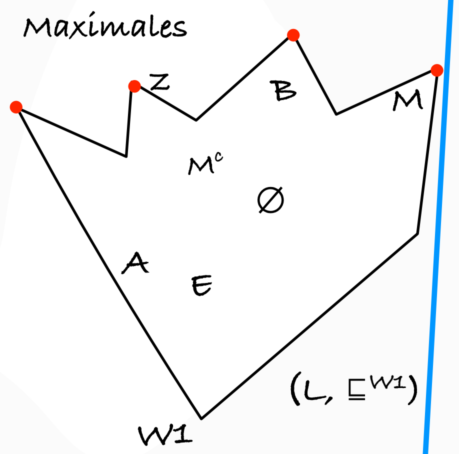
$\Leftarrow$) Sea $B\in[(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M]$. Entonces $\exists S$: $(S \leq M\Delta W1)) \& (B=S\Delta M)$, es decir $(S \leq M\Delta W1)) \& (B\Delta M=S)$, luego $(B\Delta M \leq M\Delta W1)$ que es equivalente a $(B \sqsubseteq^{M}W1)$ y finalmente a $(B \sqsubseteq^{W1}M)$ que prueba que $B\in(\downarrow_{W1}M)$.∎

(*) Además de W1, varios de los ideales pueden contener otros elementos de L: $W1\neq A\in[(\downarrow_{W1}M_1)\cap(\downarrow_{W1}M_2)]$, ...,etc

Si $(L,\leq)$ es un retículo distributivo y $W1 \in L$ no es nítido, entonces $(L,\sqsubseteq^{W1})$ es un inf-semirretículo con elemento mínimo W1. Los elementos tales que $z=(w1\rightarrow q)=(q\div w1)$ para algún q, son maximales: $z\in$Maximal(L).



$z=(w1\rightarrow q)=(q\div w1)$



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B\cdot W1)\leq A \leq (B+W1)$,

En el caso en que L es un producto de cadenas: $L=\underset{s\in S}{X}C_s$, el subconjunto **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s)\subset \underset{s\in S}{X}C_s$ queda determinado por:

$[(M \in$ **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1}))\Leftrightarrow$

(**N**$(L)=\{w\in L\,/\,(w$ es complementado$)\,\&\,(w'=w^c)\}$, nítidos del retículo distributivo $(L,\leq)$)

$[(M\in$ **N**$((\underset{s\in S}{X}C_s))\,\&\,((SUPP(W1))^c\subseteq M\subseteq(KER(W1))^c)]$

> $L=\underset{s\in S}{X}C_s$ se expresa como unión de ideales principales:
> $\underset{s\in S}{X}C_s=\bigcup\{(\downarrow_{W1}M)\ /\ M\in$ **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})\}$.(*)

En este caso de producto de cadenas, si $(\downarrow N)$ representa el ideal principal $(\downarrow N)=\{B\in\underset{s\in S}{X}C_s/\ B\leq M\}$; si para $M\in$ **MAXIMAL**$(\underset{s\in S}{X}C_s,\sqsubseteq^{W1})$, $(\downarrow_{W1}M)$ representa el "ideal principal": $(\downarrow_{W1}M)=\{A\in\underset{s\in S}{X}C_s\ /\ A\sqsubseteq^{W1}M\}$ y si, para $\mathcal{K}\subseteq P(\underset{s\in S}{X}C_s)$, $\mathcal{K}\Delta M$ representa el subconjunto: $\mathcal{K}\Delta M=\{K\Delta M\ /\ K\in\mathcal{K}\}$, entonces

<u>Proposición</u>. Sólo a efectos de cómputo, (que no de estructura), $\forall M\in$ **MAXIMAL**$(XC_s,\sqsubseteq^{W1})$ se verifica la igualdad entre subconjuntos $(\downarrow_{W1}M)=(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M$, es decir:

$$(A\sqsubseteq^{W1}M)\Leftrightarrow(\exists S\in(\downarrow(M\Delta W1)):\ A=S\Delta M).$$

<u>Demostración</u>.$\Rightarrow$) Sea $A\in(\downarrow_{W1}M)$. Se verifica: $(A\sqsubseteq^{W1}M)\Leftrightarrow(A\sqsubseteq^{M}W1)\Leftrightarrow(A\Delta M\leq M\Delta W1)\Leftrightarrow$ $(A\Delta M)\in(\downarrow(M\Delta W1))$, luego $A=((A\Delta M)\Delta M)\in[(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M]$.

$\Leftarrow$) Sea $B\in[(\downarrow(M\Delta W1))\Delta M]$. Entonces $\exists S$: $(S\leq M\Delta W1))\,\&\,(B=S\Delta M)$, es decir $(S\leq M\Delta W1))\,\&\,(B\Delta M=S)$, luego $(B\Delta M\leq M\Delta W1)$ que es equivalente a $(B\sqsubseteq^{M}W1)$ y finalmente a $(B\sqsubseteq^{W1}M)$ que prueba que $B\in(\downarrow_{W1}M)$.∎

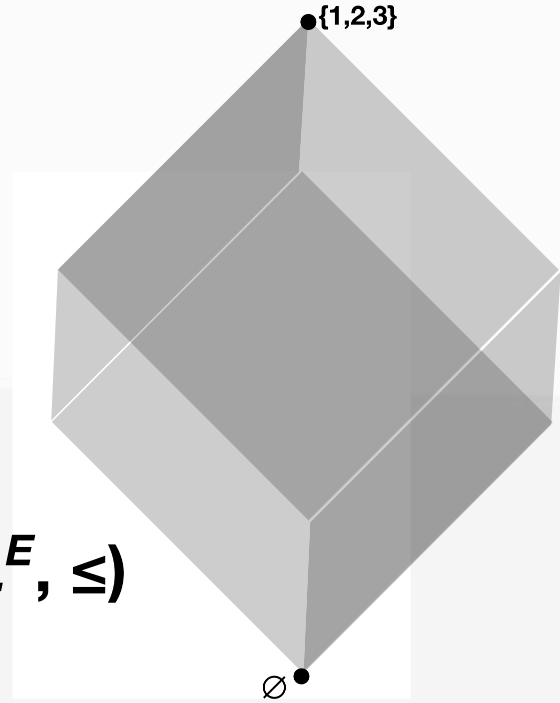
La proposición anterior junto con la unión de ideales en (*), proporcionan una estrategia para la determinación de $(L,\sqsubseteq^{W1})$ partiendo de $(L,\leq)$. (No muy eficiente, pues algunos elementos aparecen varias veces).

(*) Además de W1, varios de los ideales pueden contener otros elementos de L: $W1\neq A\in[(\downarrow_{W1}M_1)\cap(\downarrow_{W1}M_2)]$, ...,etc

Ejemplo

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$

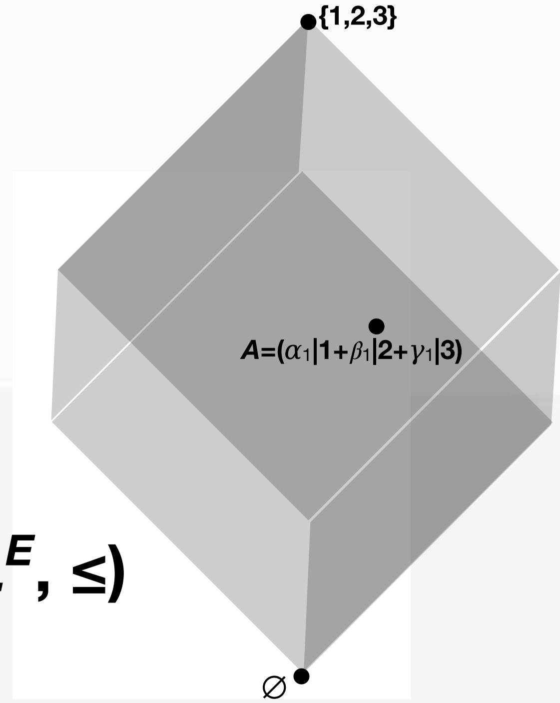
$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3, \ldots$ con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

<u>Ejemplo</u> $\boldsymbol{E = \{1, 2, 3\},\ L = [0,1],\ (L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)\ ,\ A \in L^E: A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3),\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3}$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A\leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1\leq\alpha_2)\&(\beta_1\leq\beta_2)\&(\gamma_1\leq\gamma_2)$.

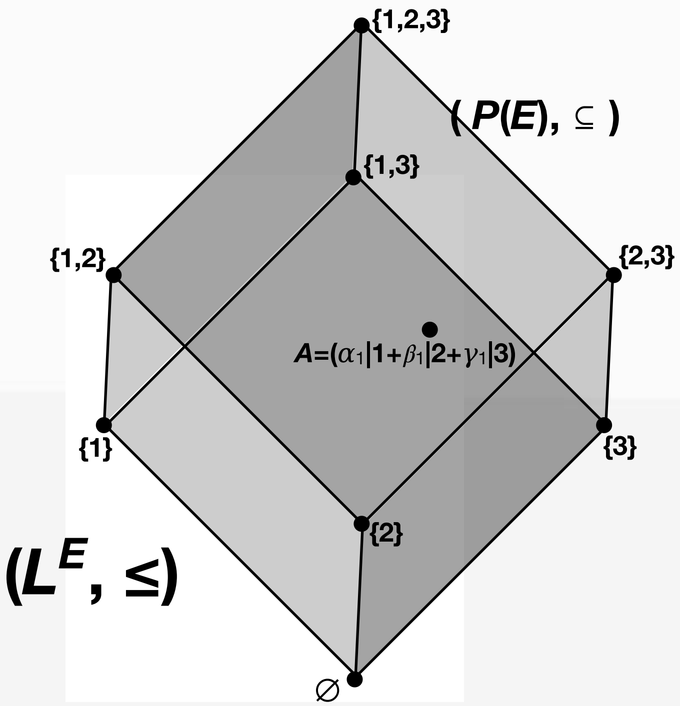


$(L^E, \leq)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

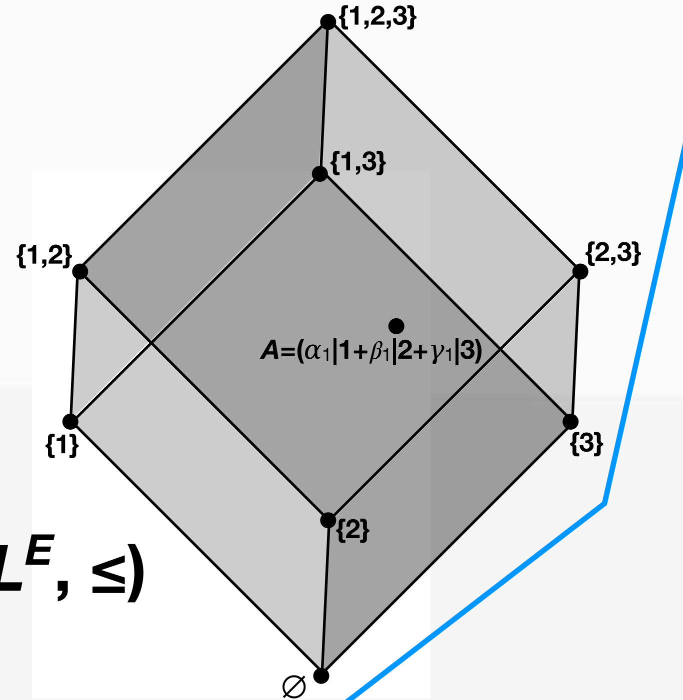
$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A\leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1\leq\alpha_2)\&(\beta_1\leq\beta_2)\&(\gamma_1\leq\gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_M \{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M).\ (*)$$

(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s\in L$

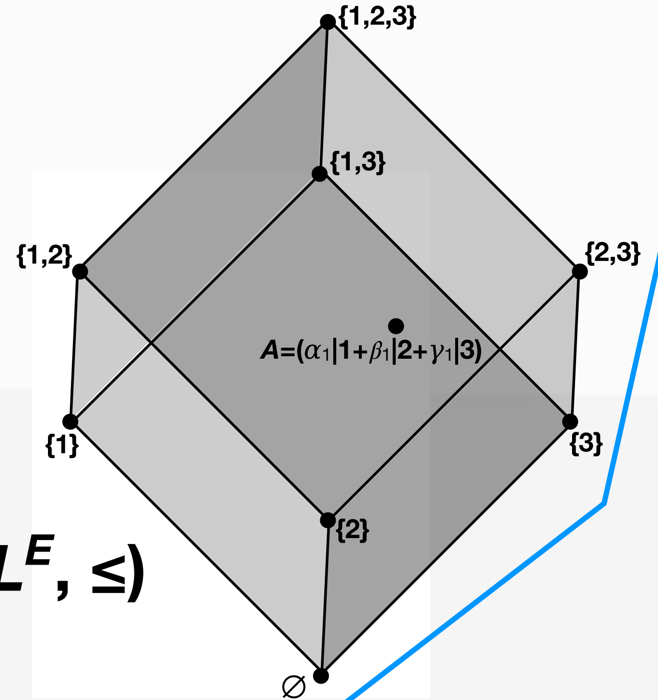
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m / s\in S\}\ \ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A\leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1\leq\alpha_2)\&(\beta_1\leq\beta_2)\&(\gamma_1\leq\gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M). \ (*)$$

$W \in L^E$, $W = (0|1 + \omega_2|2 + \omega_3|3)$

(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}$ $\forall s \in L$

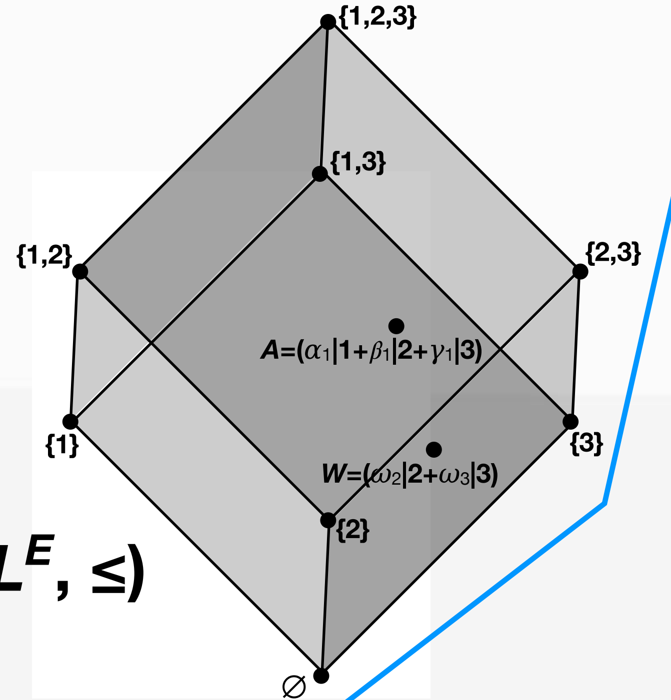
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $W = (0|1 + \omega_2|2 + \omega_3|3)$

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$

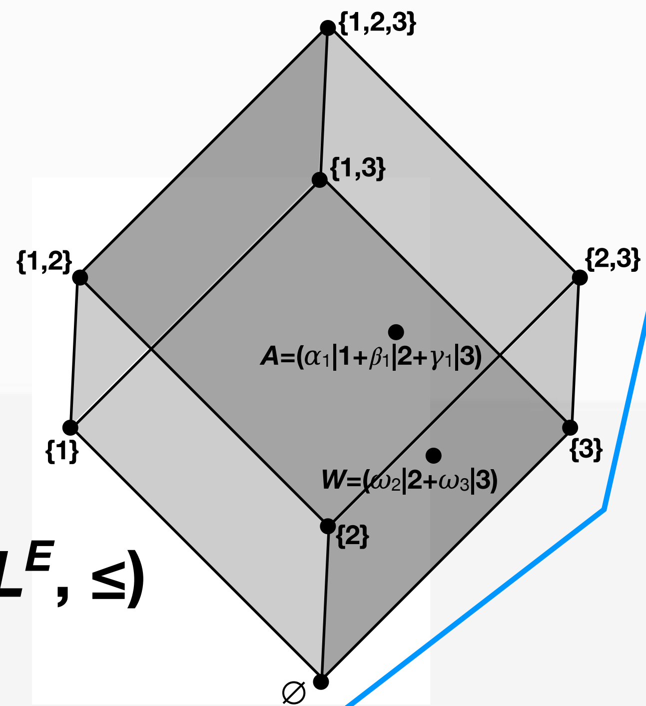
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m /\, s \in S\}\ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\quad\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\quad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{(\downarrow M) \, / \, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\}, \text{ junto con la propiedad}$$

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $\quad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \, / \, a \leq s\}$ $\forall s \in L$

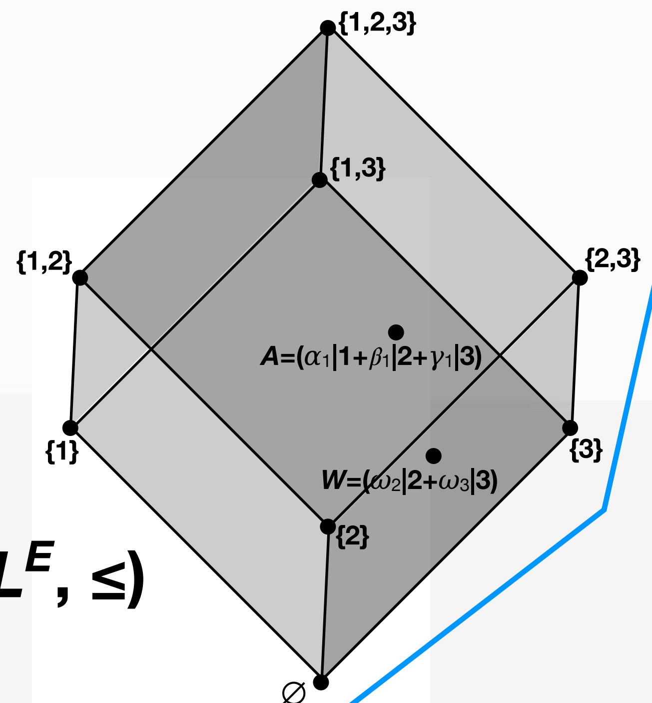
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \, / \, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S \Delta m = \{s \Delta m \, / \, s \in S\}$ $\quad\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $(SUPP(W))^c = \{1\}$.

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$

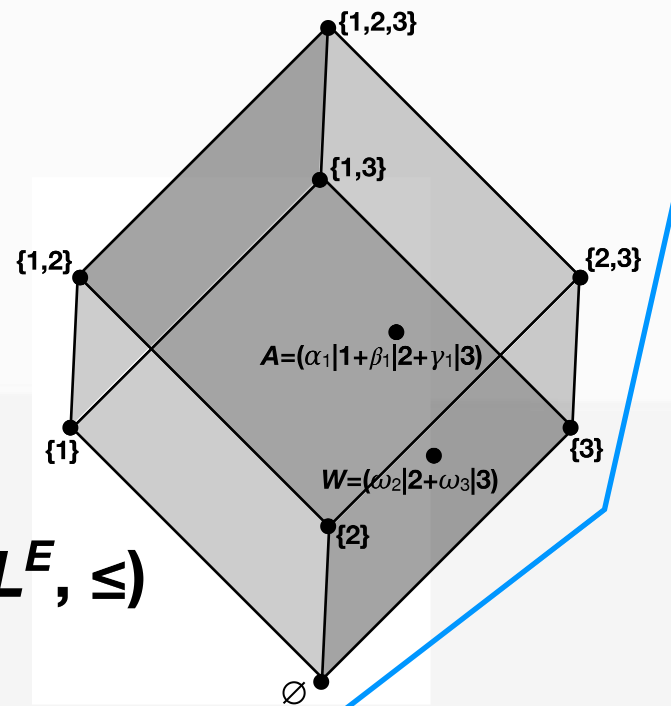
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S \Delta m = \{s \Delta m / s \in S\}\ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$L^E = \bigcup_W \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \}$, junto con la propiedad

$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $(SUPP(W))^c = \{1\}$. Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}$ $\forall s \in L$

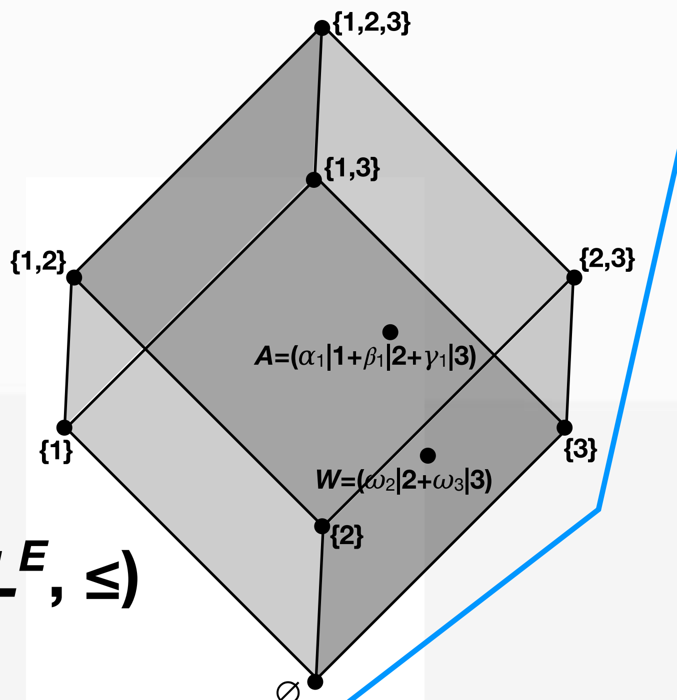
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S \Delta m = \{s \Delta m / s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \le) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \le A \le SUPP(A)$

$(L^E, \le)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \le B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \le \alpha_2) \& (\beta_1 \le \beta_2) \& (\gamma_1 \le \gamma_2)$.



$(L^E, \le)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

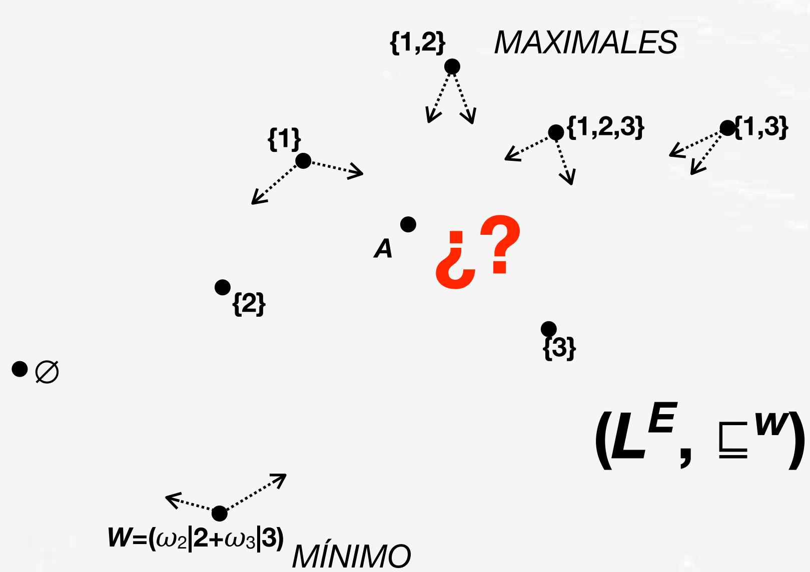
$$L^E = \bigcup_W \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M). \text{ (*)}$$

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.



(*) Para un retículo distributivo $(L, \le)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \le s\}$ $\forall s \in L$

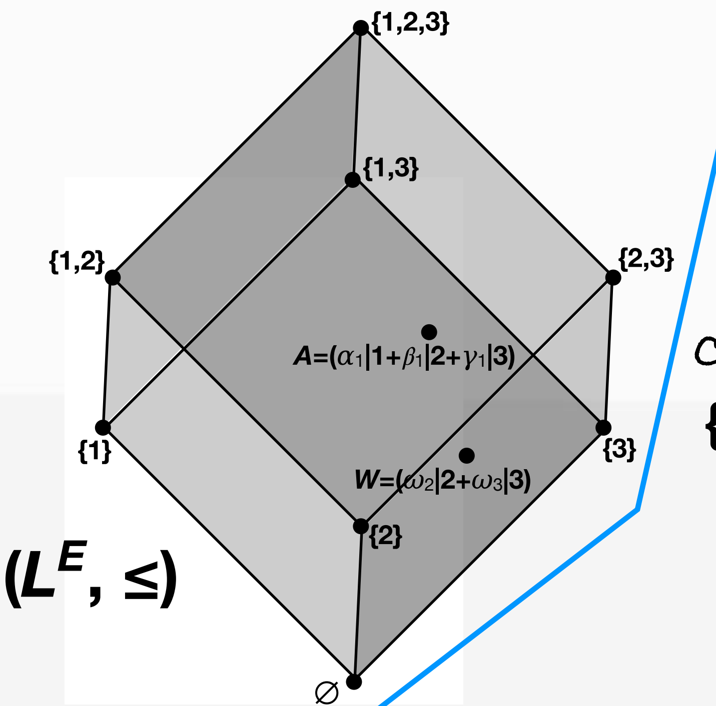
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\quad\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\quad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$L^E = \bigcup \{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\}$, junto con la propiedad

$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $\quad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

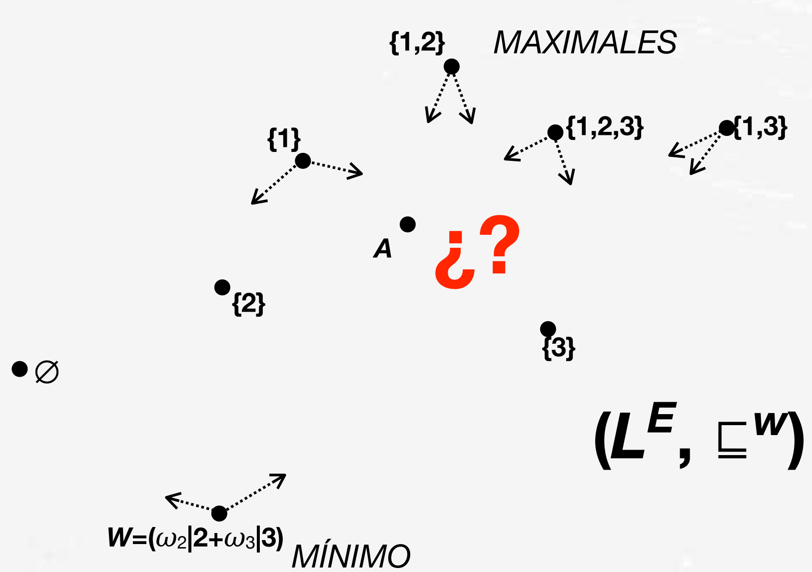
$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\quad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\quad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$

$W = (\beta|2 + \gamma|3)$.



(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$

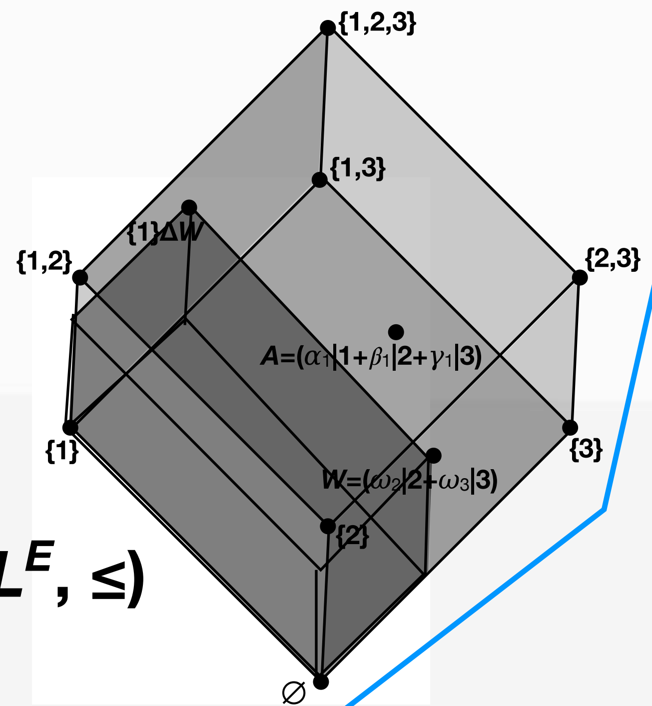
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}\ \ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\quad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\quad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2) \& (\beta_1 \leq \beta_2) \& (\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{ (\downarrow M) \;/\; M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad

$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M). \ (*)$$

$W \in L^E$, $\quad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

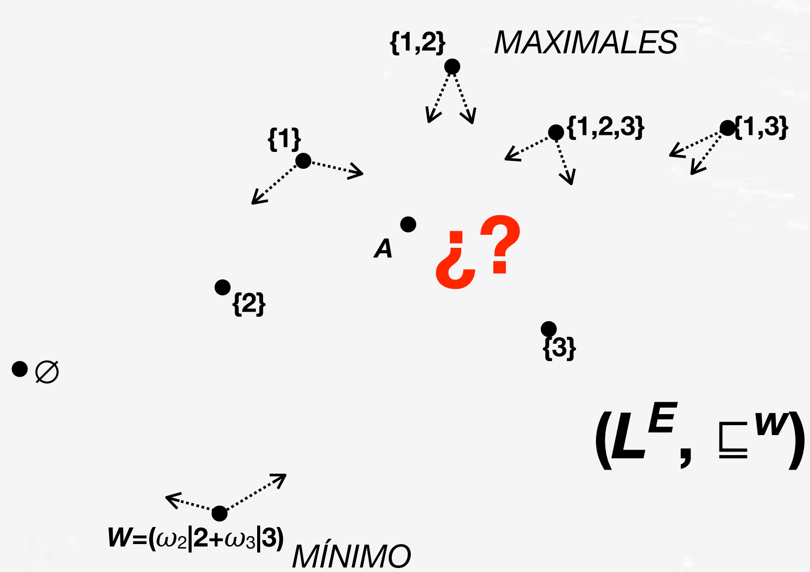
$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\quad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\quad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1\text{-}\omega_2,1\text{-}\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \;/\; (\beta \leq \omega_2) \& (\gamma \leq \omega_3) \}$.



$(L^E, \sqsubseteq^W)$

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \;/\; a \leq s\}$ $\forall s \in L$

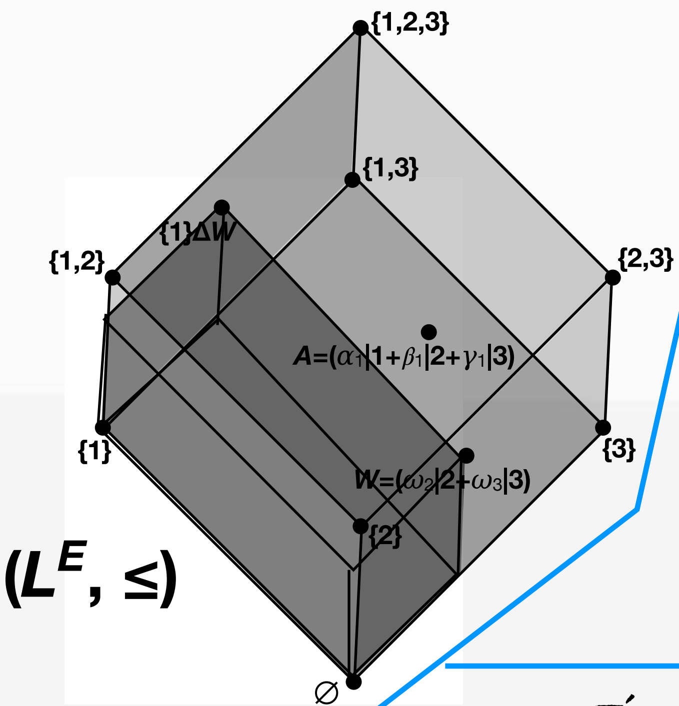
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \;/\; b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \;/\; s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad $$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M). \text{ (*)}$$

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

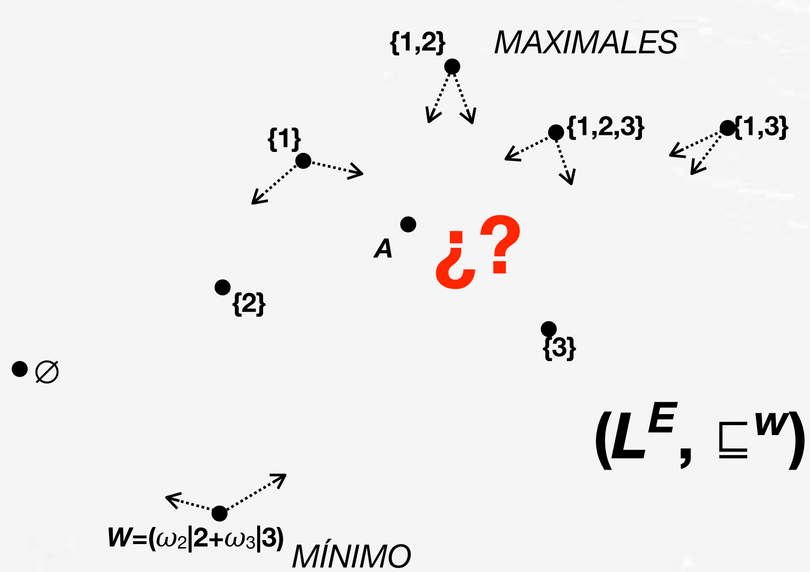
$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1\text{-}\omega_2,1\text{-}\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$

$W = (\beta|2 + \gamma|3)$.

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$.

Finalmente, $(\downarrow_W \{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{ (\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} =$

$\{ (1\text{-}\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)



(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}$ $\forall s \in L$

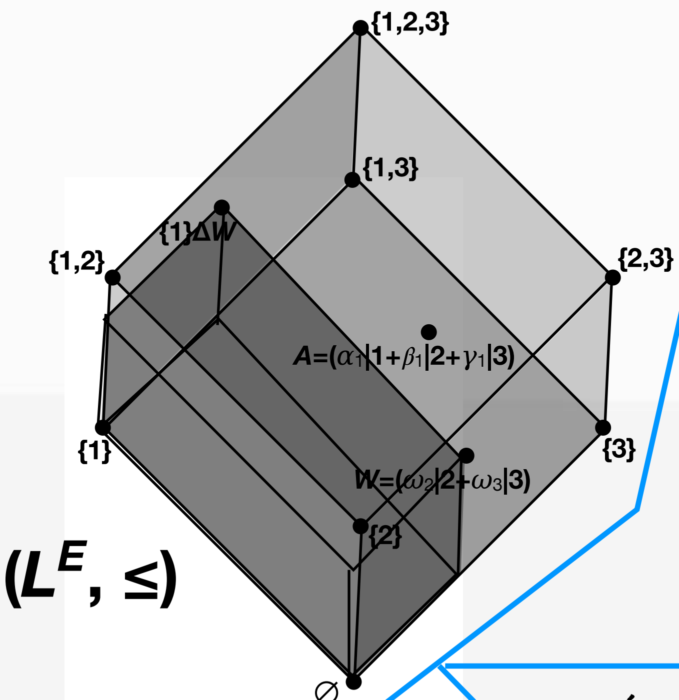
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup \{ (\downarrow M) \; / \; M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad
$$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

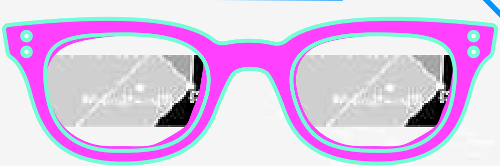
$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

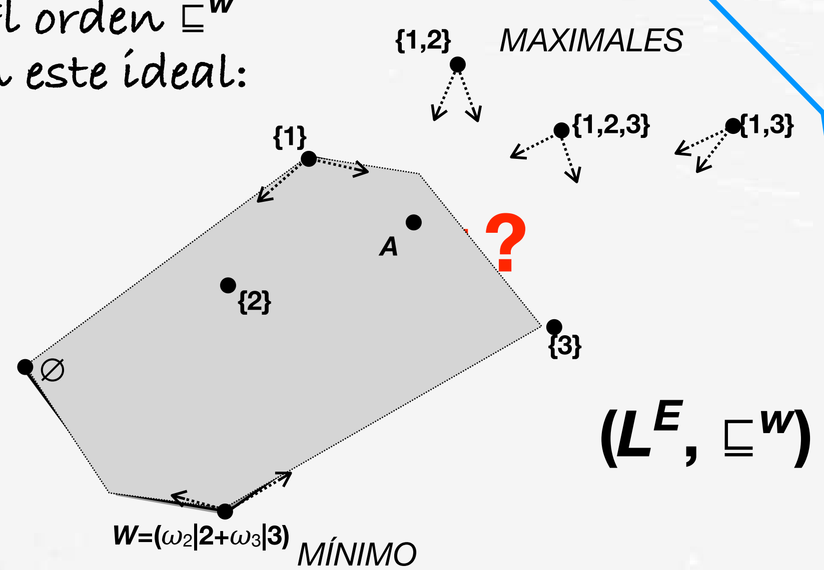
$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \; / \; (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$.



Finalmente, $(\downarrow_W \{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{ (\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \; / \; (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} =$
$\{ (1-\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \; / \; (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:



(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \; / \; a \leq s\}$ $\forall s \in L$

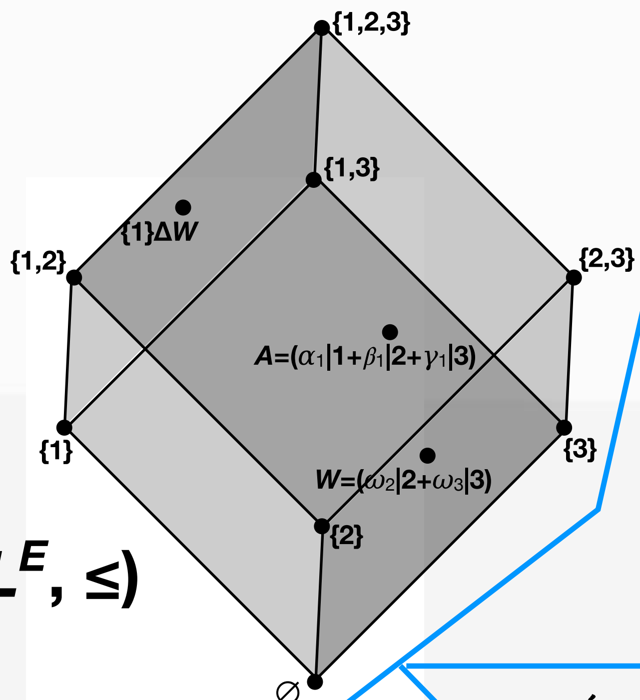
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \; / \; b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m / \; s \in S\}$ $\quad \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\},$$ junto con la propiedad $$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

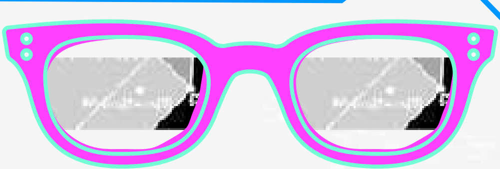
Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

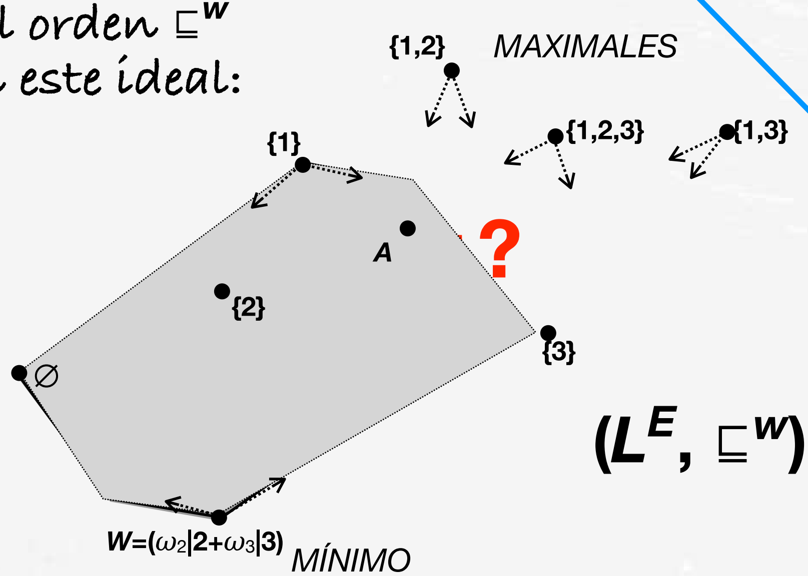
$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1\text{-}\omega_2,1\text{-}\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\}$.

Finalmente, $(\downarrow_W \{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{(\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\} =$
$\{(1\text{-}\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)



El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:



(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$

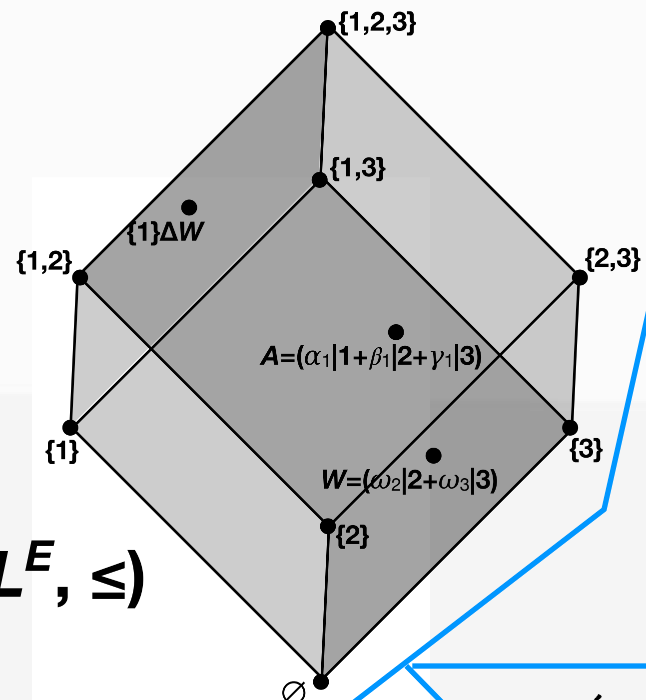
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}\ \ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A= \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B= \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A\leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1\leq\alpha_2)\&(\beta_1\leq\beta_2)\&(\gamma_1\leq\gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$L^E = \bigcup\{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E,\sqsubseteq^W)\}$, junto con la propiedad

$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $(SUPP(W))^c = \{1\}$.   Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

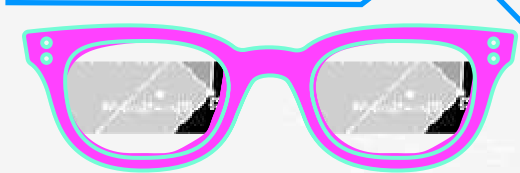
Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W\{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$
$W = (\beta|2 + \gamma|3)$.

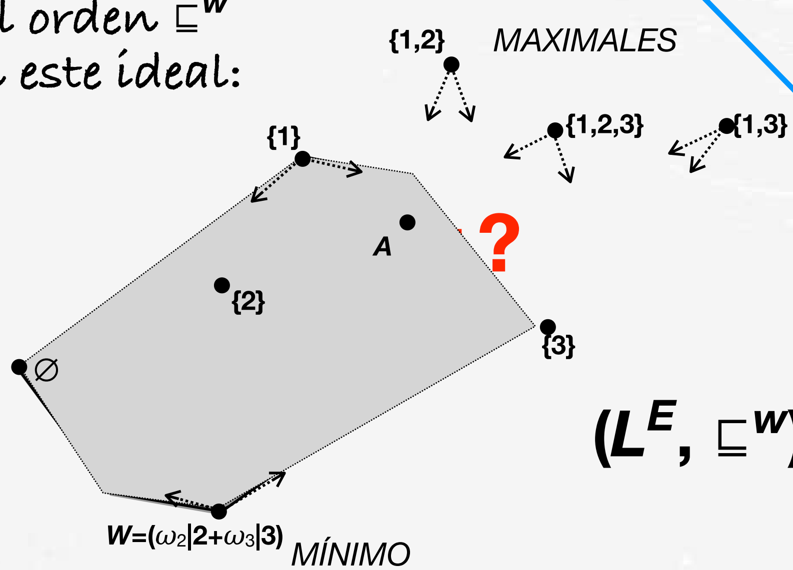
En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3)\}$.

Finalmente, $(\downarrow_W\{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{(\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3)\} =$
$\{(1-\alpha,\beta,\gamma)\in[0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3)\} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$.   (¡Sólo como conjunto!)



De forma análoga obtenemos:

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:



$(L^E, \sqsubseteq^W)$

(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}$ $\forall s\in L$

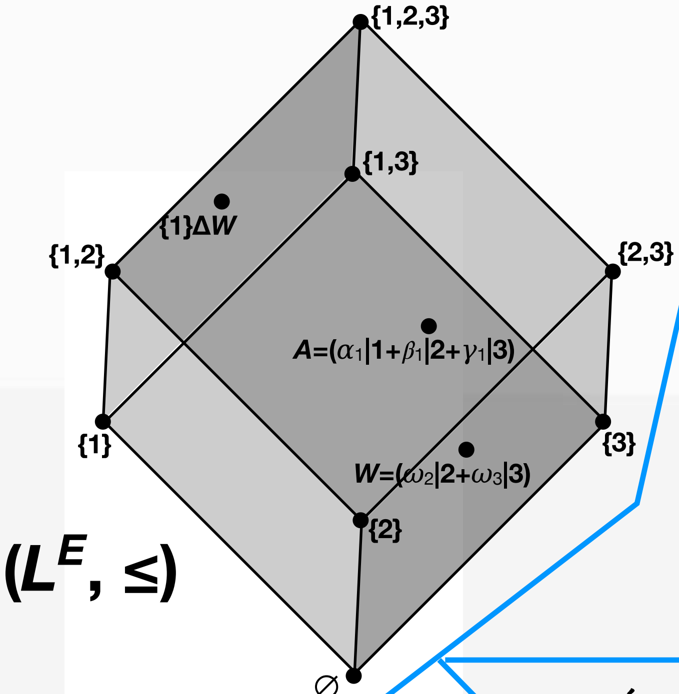
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m/\, s\in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\quad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\quad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_M \{ (\downarrow M) \;/\; M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad $(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $\quad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

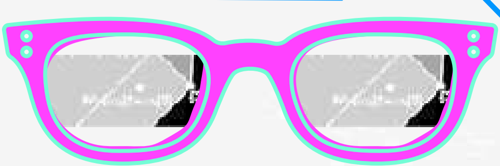
$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\quad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\quad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \;/\; (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$.

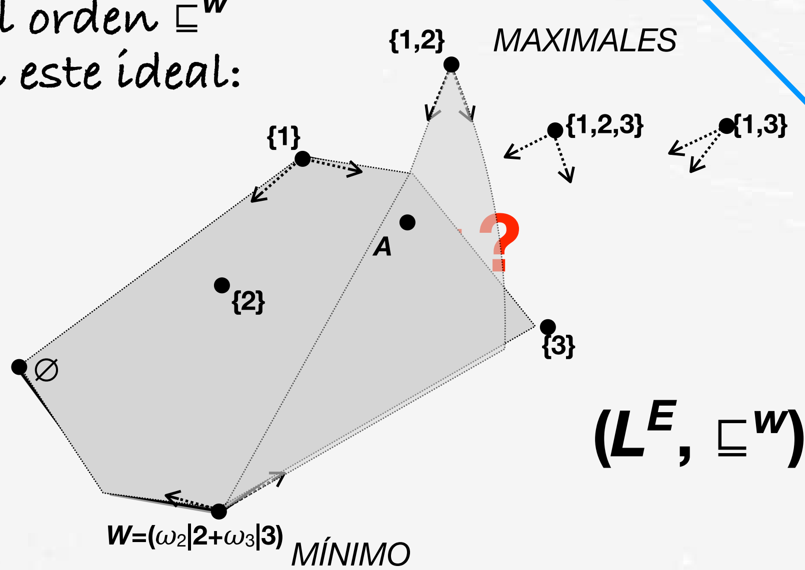


Finalmente, $(\downarrow_W \{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{ (\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \;/\; (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} =$
$\{ (1-\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \;/\; (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)

De forma análoga obtenemos:

$$(\downarrow_W \{1, 2\}) = \{ (1-\alpha, 1-\beta, \gamma) \in [0,1]^3 \;/\; (\beta \leq 1-\omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$$

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:

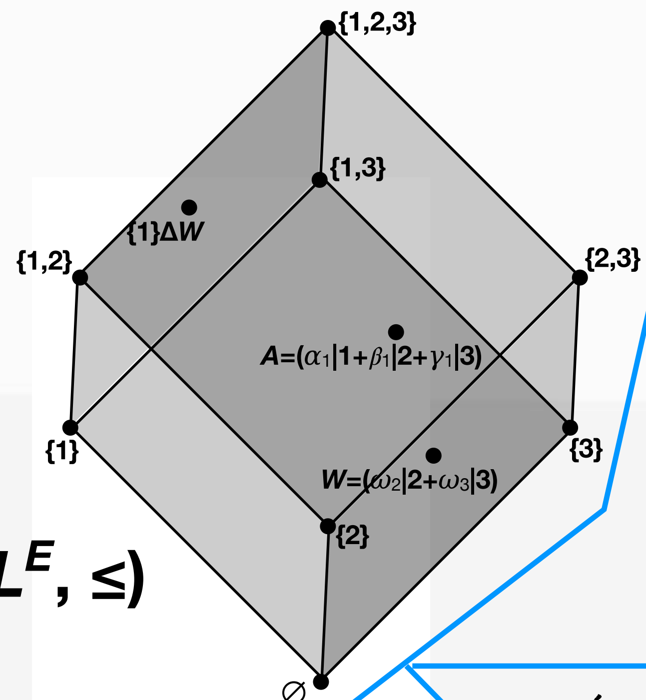


(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:
$(\downarrow s) = \{a \in L \;/\; a \leq s\}$ $\forall s \in L$
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \;/\; b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$
$S\Delta m = \{s\Delta m / s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

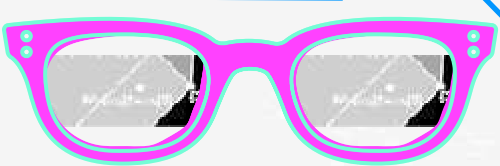
Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$



Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$L^E = \bigcup\{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\}$, junto con la propiedad
$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W\{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$
$W = (\beta|2 + \gamma|3)$.

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\}$.

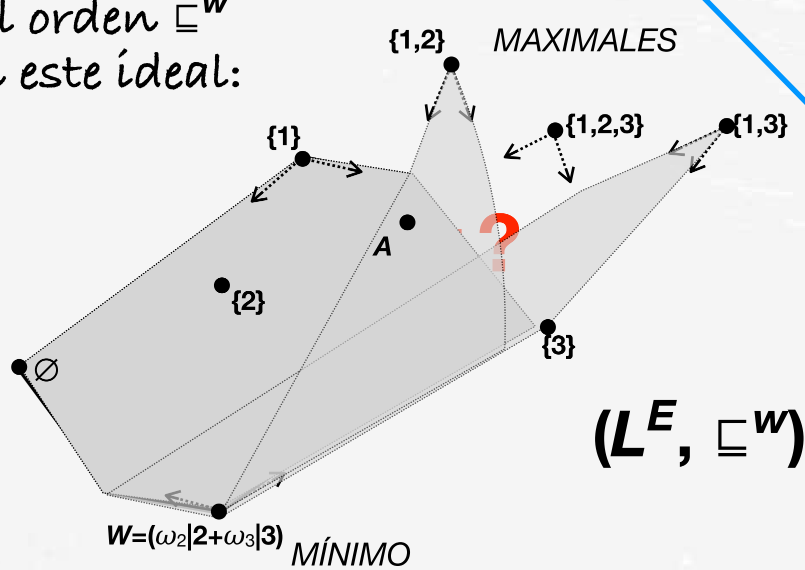
Finalmente, $(\downarrow_W\{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{(\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\} =$
$\{(1-\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)

De forma análoga obtenemos:

$(\downarrow_W\{1, 2\}) = \{(1-\alpha,1-\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq 1-\omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3)\}$

$(\downarrow_W\{1, 3\}) = \{(1-\alpha,\beta,1-\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq 1-\omega_3)\}$

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:

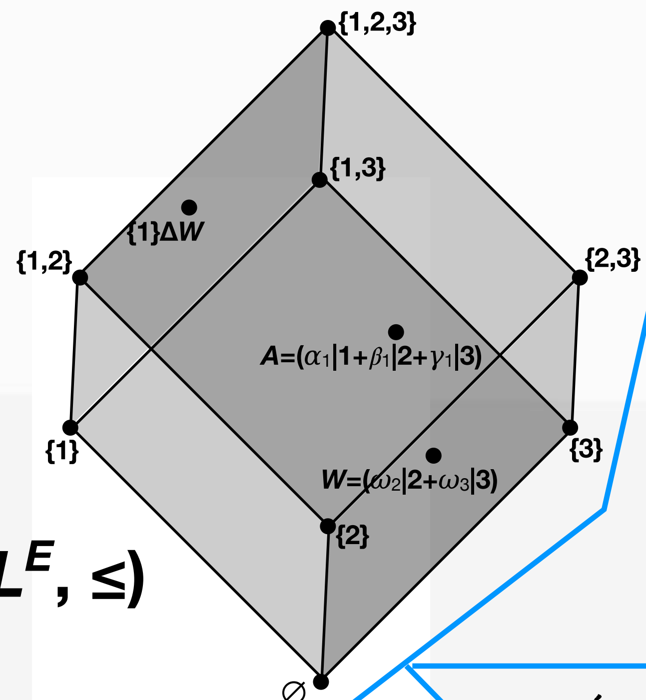


(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:
$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$
$S\Delta m = \{s\Delta m / s \in S\}\ \ \forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E, \leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2)\&(\beta_1 \leq \beta_2)\&(\gamma_1 \leq \gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_W \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad $$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M \Delta W)] \Delta M).\ (*)$$

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W \{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

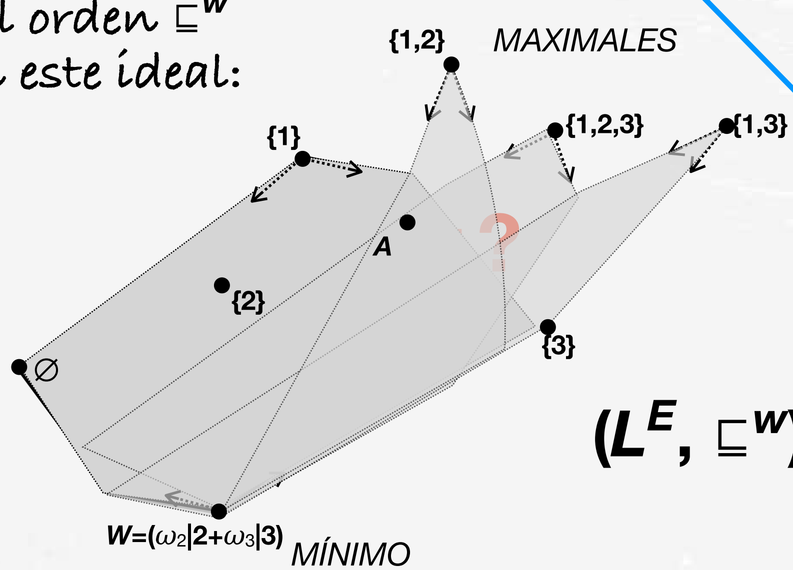
$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1, 1-\omega_2, 1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0, \omega_2, \omega_3) = (1, \omega_2, \omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$.

Finalmente, $(\downarrow_W \{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{ (\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} =$
$\{ (1-\alpha, \beta, \gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)

De forma análoga obtenemos:

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:



$(L^E, \sqsubseteq^W)$

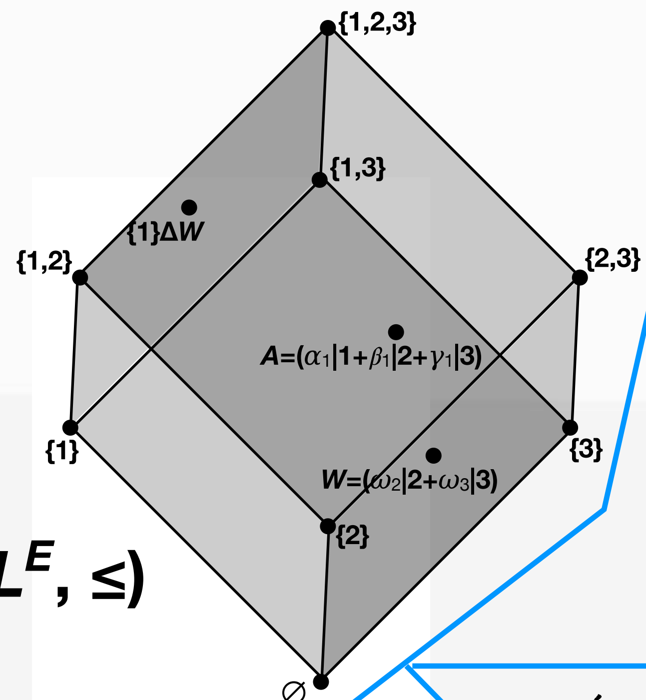
$$(\downarrow_W \{1, 2\}) = \{ (1-\alpha, 1-\beta, \gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq 1-\omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$$
$$(\downarrow_W \{1, 3\}) = \{ (1-\alpha, \beta, 1-\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq 1-\omega_3) \}$$
$$(\downarrow_W \{1, 2, 3\}) = \{ (1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \leq 1-\omega_2)\&(\gamma \leq 1-\omega_3) \}$$

(*) Para un retículo distributivo $(L, \leq)$ con negación fuerte:
$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}\ \forall s \in L$
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}\ \forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$
$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}\ \ \forall (S, m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \le) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\quad\forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\quad KER(A) \le A \le SUPP(A)$

$(L^E, \le)$ conjunto de puntos del "cubo": $A = \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B = \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A \le B) \Leftrightarrow (\alpha_1 \le \alpha_2)\&(\beta_1 \le \beta_2)\&(\gamma_1 \le \gamma_2)$.



$(L^E, \le)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$L^E = \bigcup\{(\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W)\}$, junto con la propiedad

$(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $\quad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\quad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\quad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W\{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

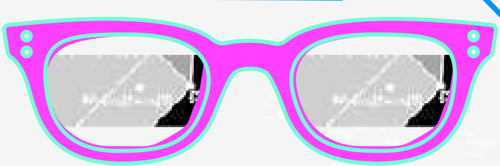
$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1-\omega_2,1-\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$

$W = (\beta|2 + \gamma|3)$.

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \le \omega_2)\&(\gamma \le \omega_3)\}$.

Finalmente, $(\downarrow_W\{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{(\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \le \omega_2)\&(\gamma \le \omega_3)\} =$

$\{(1-\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta \le \omega_2)\&(\gamma \le \omega_3)\} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. (¡Sólo como conjunto!)



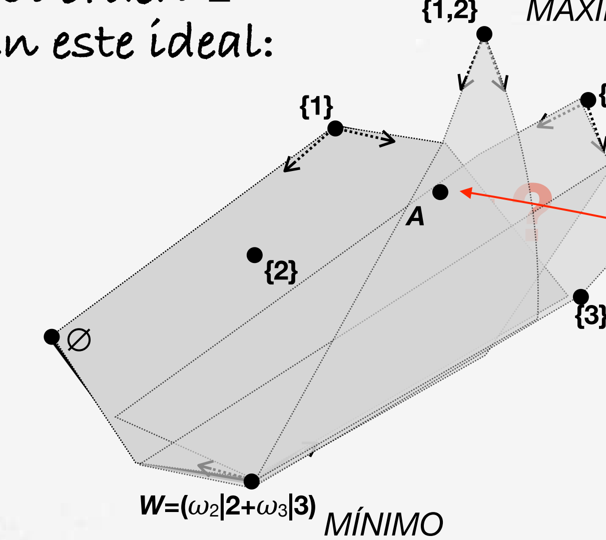
De forma análoga obtenemos:

$(\downarrow_W\{1, 2\}) = \{(1-\alpha,1-\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \le 1-\omega_2)\&(\gamma \le \omega_3)\}$

$(\downarrow_W\{1, 3\}) = \{(1-\alpha,\beta,1-\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \le \omega_2)\&(\gamma \le 1-\omega_3)\}$

$(\downarrow_W\{1, 2, 3\}) = \{(1-\alpha,1-\beta,1-\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta \le 1-\omega_2)\&(\gamma \le 1-\omega_3)\}$

El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:



$(L^E, \sqsubseteq^W)$

Un elemento puede pertenecer a varios "w-ideales"...

(*) Para un retículo distributivo $(L,\le)$ con negación fuerte:

$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \le s\}$ $\forall s \in L$

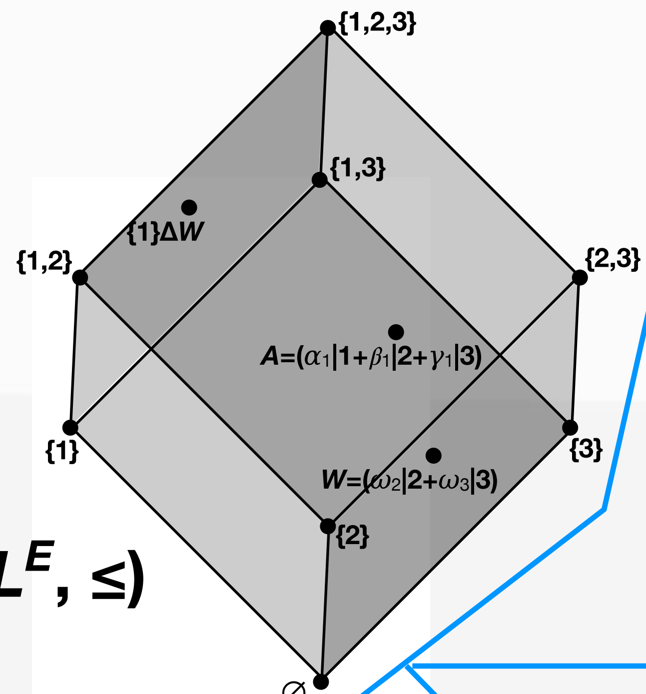
$(\downarrow_w s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^w s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$

$S\Delta m = \{s\Delta m \,/\, s \in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3\}$, $L = [0,1]$, $(L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E)$, $A \in L^E$: $A = (\alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in [0,1]^3$

$(\mathrm{N}(L^E), \leq) \equiv (P(E), \subseteq)$ $\qquad \forall A \in L^E$: $\{KER(A), SUPP(A)\} \subseteq \mathrm{N}(L^E)$, $\qquad KER(A) \leq A \leq SUPP(A)$

$(L^E,\leq)$ conjunto de puntos del "cubo": $A= \alpha_1|1 + \beta_1|2 + \gamma_1|3$, $B= \alpha_2|1 + \beta_2|2 + \gamma_2|3$,... con $(A\leq B) \Leftrightarrow (\alpha_1\leq\alpha_2)\&(\beta_1\leq\beta_2)\&(\gamma_1\leq\gamma_2)$.



$(L^E, \leq)$

Una estrategia para la determinación de $(L^E, \sqsubseteq^W)$ utilizando la unión de "w-ideales principales":

$$L^E = \bigcup_M \{ (\downarrow M) \,/\, M \in \mathrm{MAXIMAL}(L^E, \sqsubseteq^W) \},$$ junto con la propiedad $(\downarrow_W M) = ([\downarrow (M\Delta W)]\Delta M)$. (*)

$W \in L^E$, $\qquad W = (\omega_2|2 + \omega_3|3)$ $\quad KER(W) = \varnothing$, $SUPP(W) = \{2, 3\}$

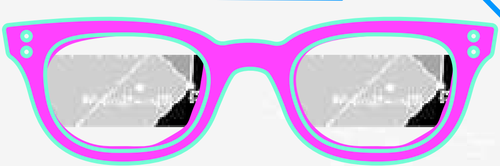
$(KER(W))^c = \{1, 2, 3\}$ $\qquad (SUPP(W))^c = \{1\}$. $\qquad$ Sea $\sqsubseteq^W$ el orden asociado a W.

Entonces: $\mathrm{MAXIMAL}((L^E, \sqsubseteq^W)) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \subset P(E)$.

Cálculo de $(\downarrow_W\{1\})$ utilizando la proposición de la transparencia anterior:

$$\{1\}\Delta W = \{1\}\cdot W' + \{2, 3\}\cdot W = (1,0,0)\cdot(1,1\text{-}\omega_2,1\text{-}\omega_3) + (0,1,1)\cdot(0,\omega_2,\omega_3) = (1,\omega_2,\omega_3) =$$
$$W = (\beta|2 + \gamma|3).$$

En consecuencia: $[\downarrow (\{1\}\Delta W)] = \{ (\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3 \,/\, (\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3) \}$.



Finalmente, $(\downarrow_W\{1\}) = ([\downarrow (\{1\}\Delta W)]\Delta\{1\}) = \{ (\alpha,\beta,\gamma)\Delta\{1\} \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3) \} =$
$\{ (1\text{-}\alpha,\beta,\gamma)\in[0,1]^3 \,/\, (\alpha \in [0,1])\&(\beta\leq\omega_2)\&(\gamma\leq\omega_3) \} = [\downarrow (\{1\}\Delta W)]$. $\quad$ (¡Sólo como conjunto!)

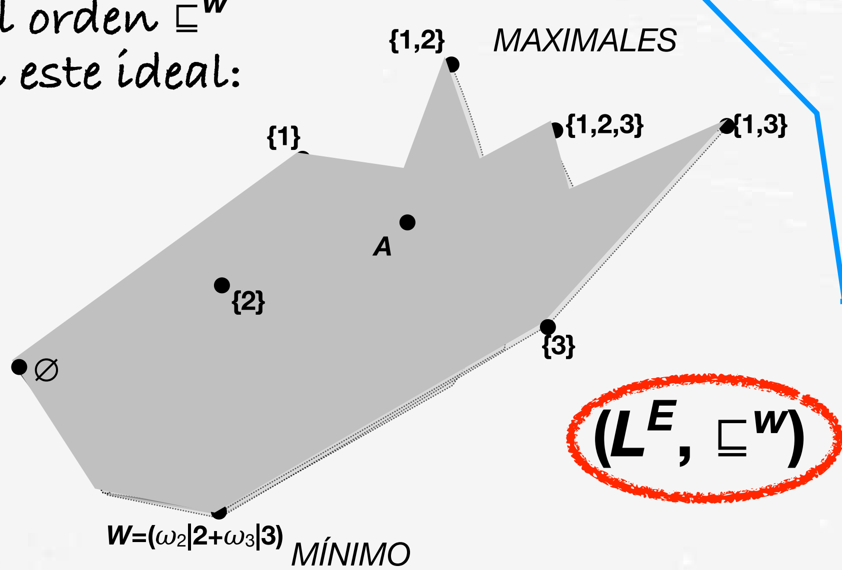
De forma análoga obtenemos:

$(\downarrow_W\{1, 2\}) = \{ (1\text{-}\alpha,1\text{-}\beta,\gamma)\in[0,1]^3 \,/\, (\beta \leq 1\text{-}\omega_2)\&(\gamma \leq \omega_3) \}$

$(\downarrow_W\{1, 3\}) = \{ (1\text{-}\alpha,\beta,1\text{-}\gamma)\in[0,1]^3 \,/\, (\beta \leq \omega_2)\&(\gamma \leq 1\text{-}\omega_3) \}$

$(\downarrow_W\{1, 2, 3\}) = \{ (1\text{-}\alpha,1\text{-}\beta,1\text{-}\gamma)\in[0,1]^3 \,/\, (\beta \leq 1\text{-}\omega_2)\&(\gamma \leq 1\text{-}\omega_3) \}$

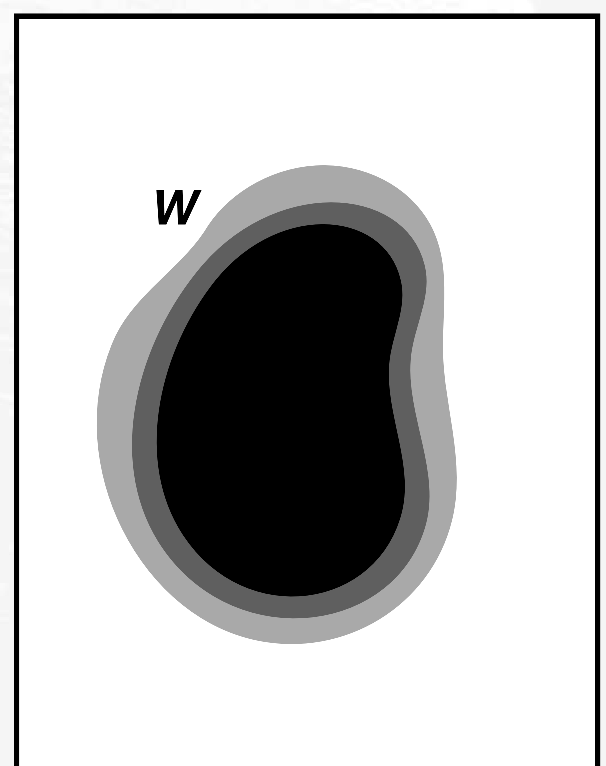
El orden $\sqsubseteq^W$ en este ideal:

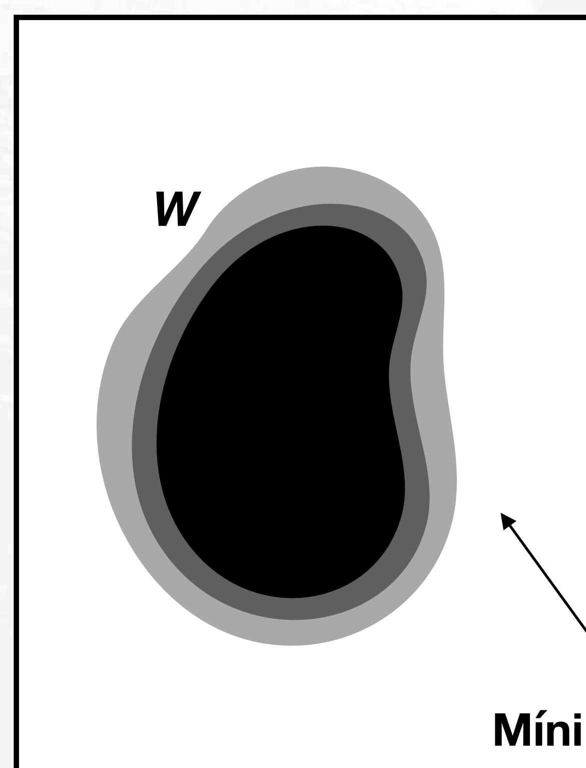


(*) Para un retículo distributivo $(L,\leq)$ con negación fuerte:
$(\downarrow s) = \{a \in L \,/\, a \leq s\}$ $\forall s\in L$
$(\downarrow_W s) = \{b \in L \,/\, b \sqsubseteq^W s\}$ $\forall (w,s) \in \mathrm{N}(L) \times L$
$S\Delta m = \{s\Delta m / s\in S\}$ $\forall (S,m) \in P(L) \times \mathrm{N}(L)$

Para el conjunto de imágenes con tonos de grises…

$\boldsymbol{L} = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}, \quad \boldsymbol{E} \subset \mathbb{Z}^2$



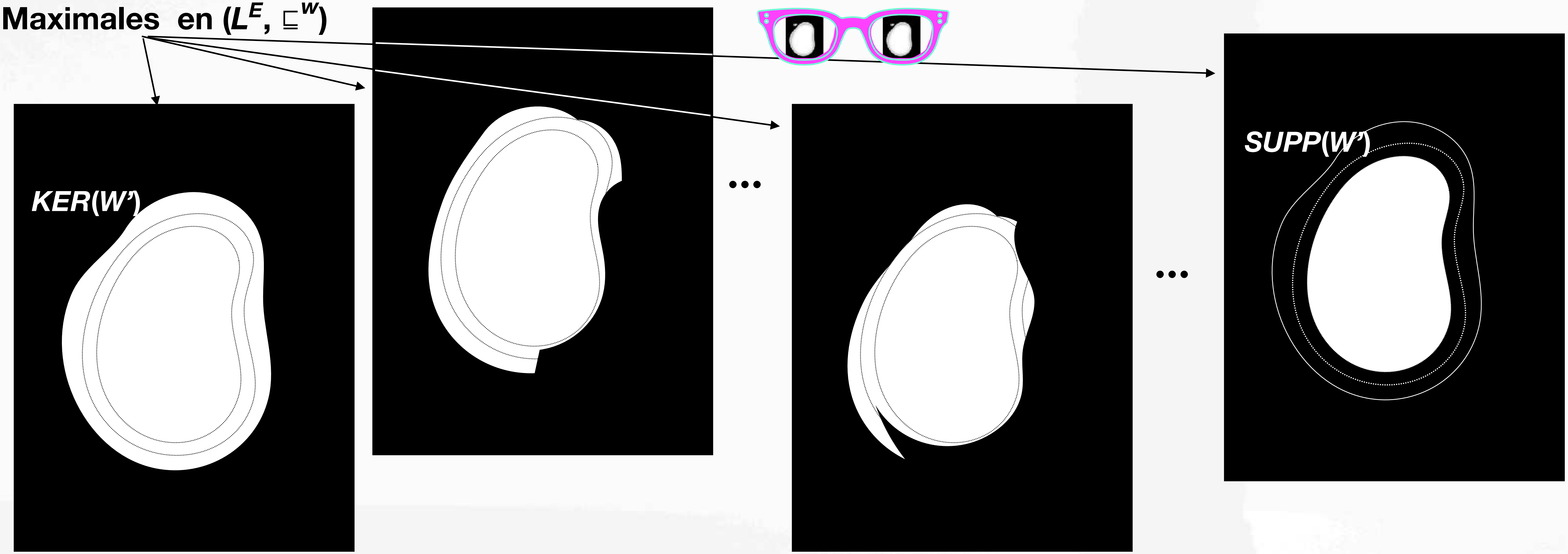


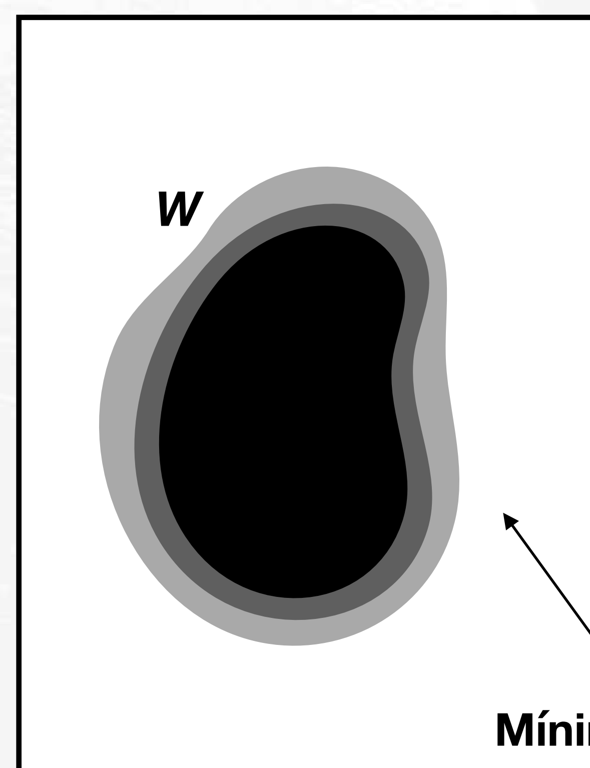
Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

$L = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}$, $E \subset \mathbb{Z}^2$

Imágenes del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$ desde una perspectiva no nítida W :

Maximales en (L^E, $\sqsubseteq^W$)

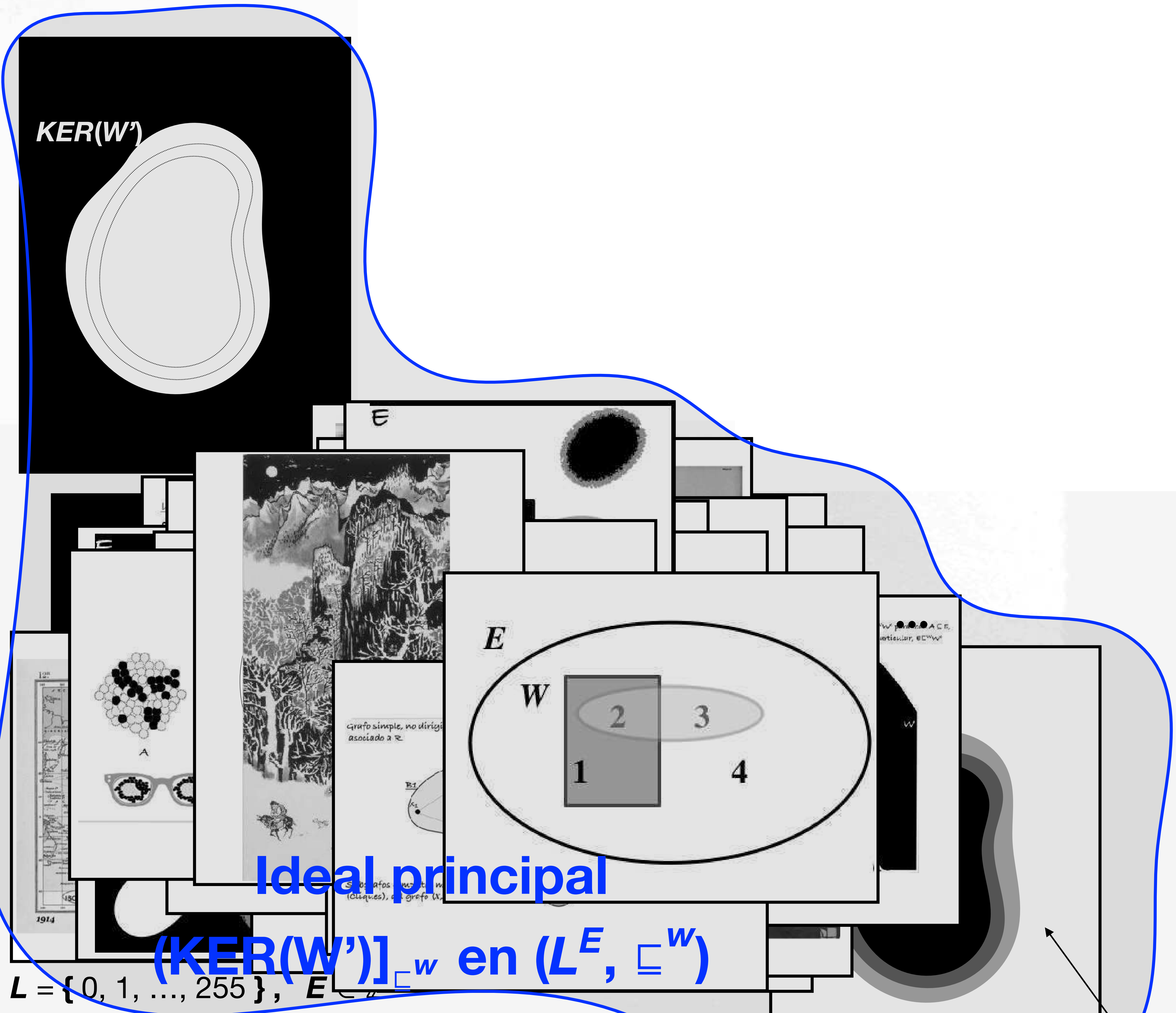




Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)

$\boldsymbol{L} = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}$, $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{Z}^2$

Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$) desde una perspectiva no nítida W :



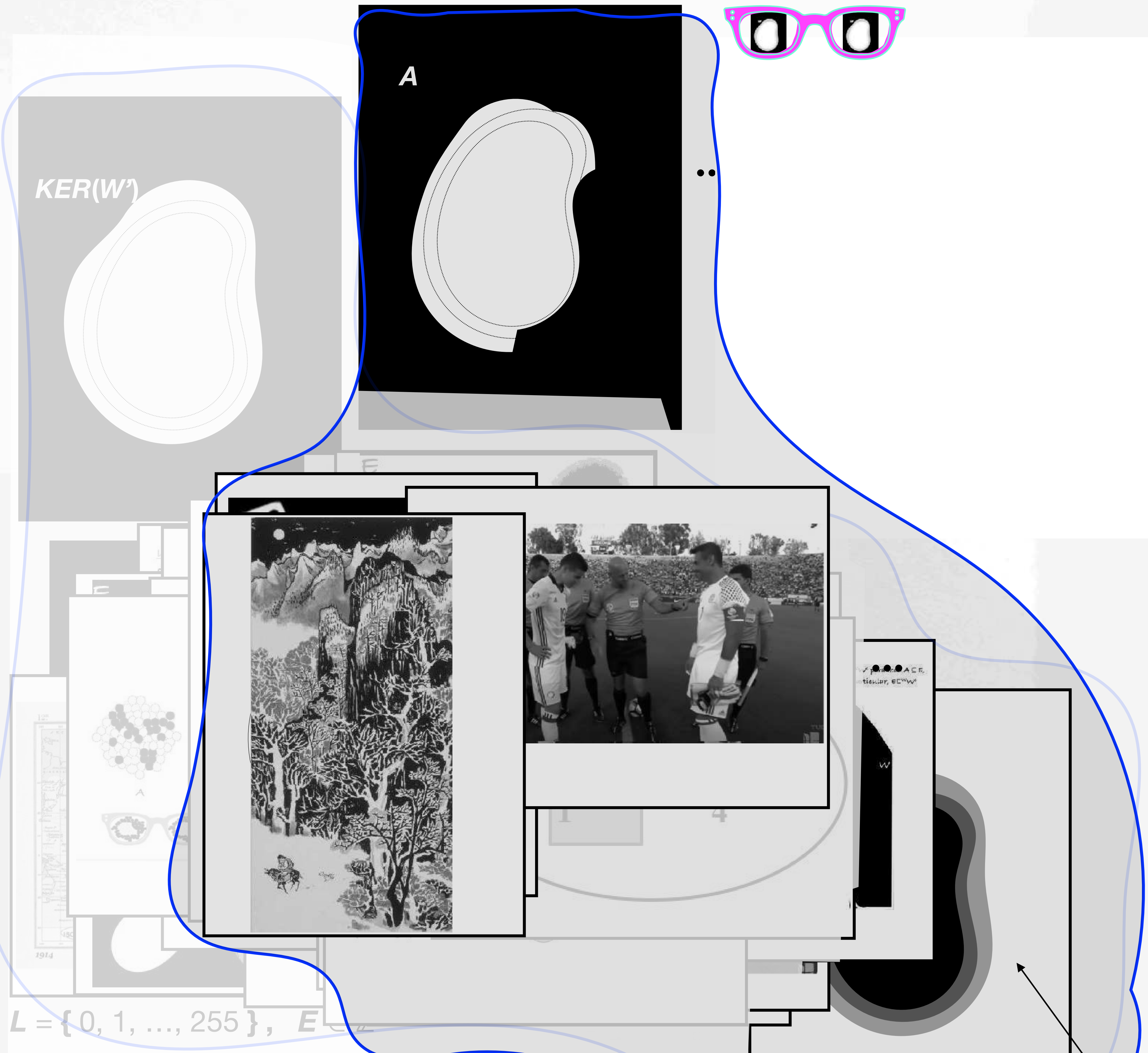
Ideal principal

$(KER(W')]_{\sqsubseteq^W}$ en $(L^E, \sqsubseteq^W)$

$L = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}$, E ⊆ …

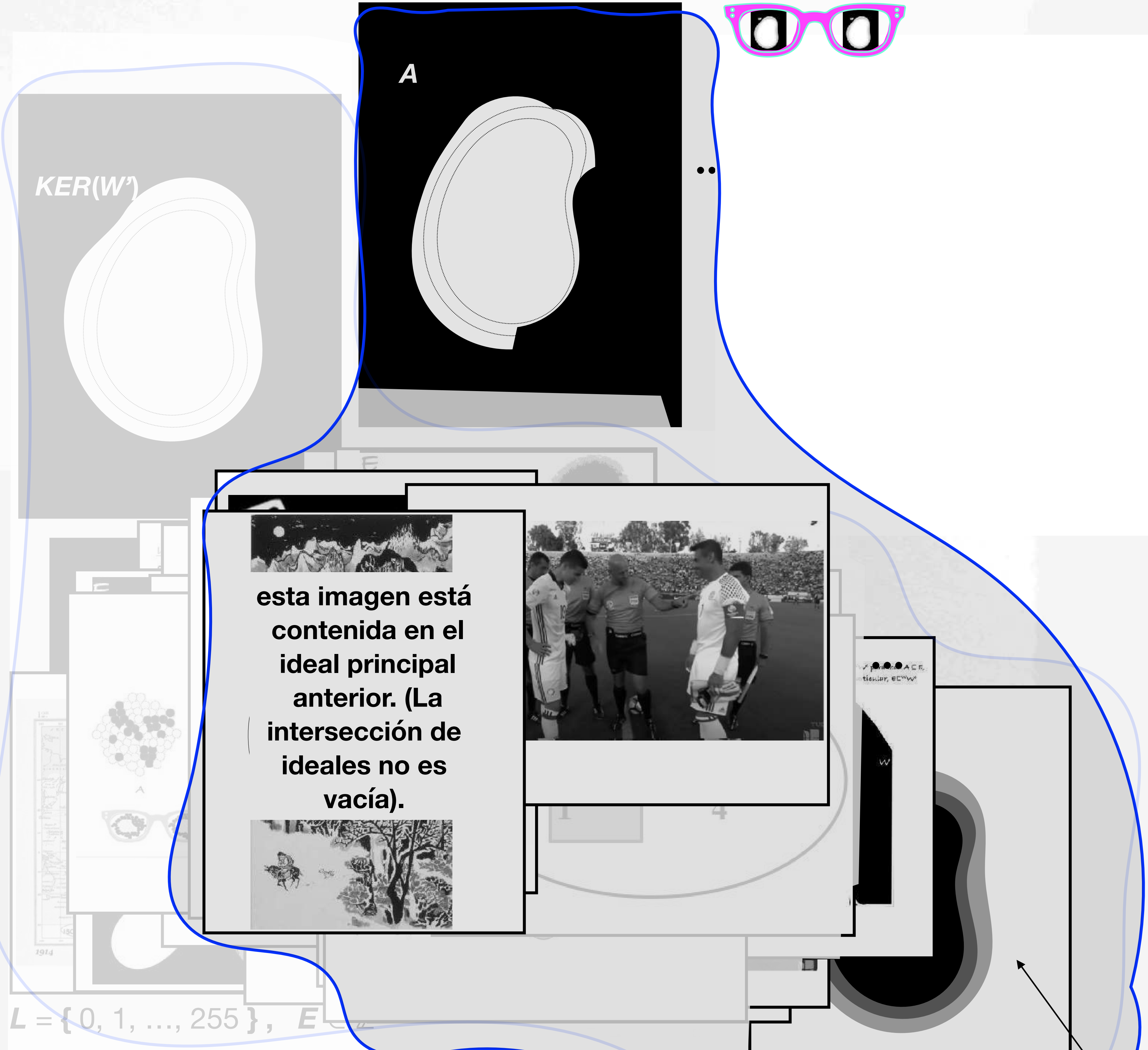
Imágenes del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$ desde una perspectiva no nítida W :

Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$



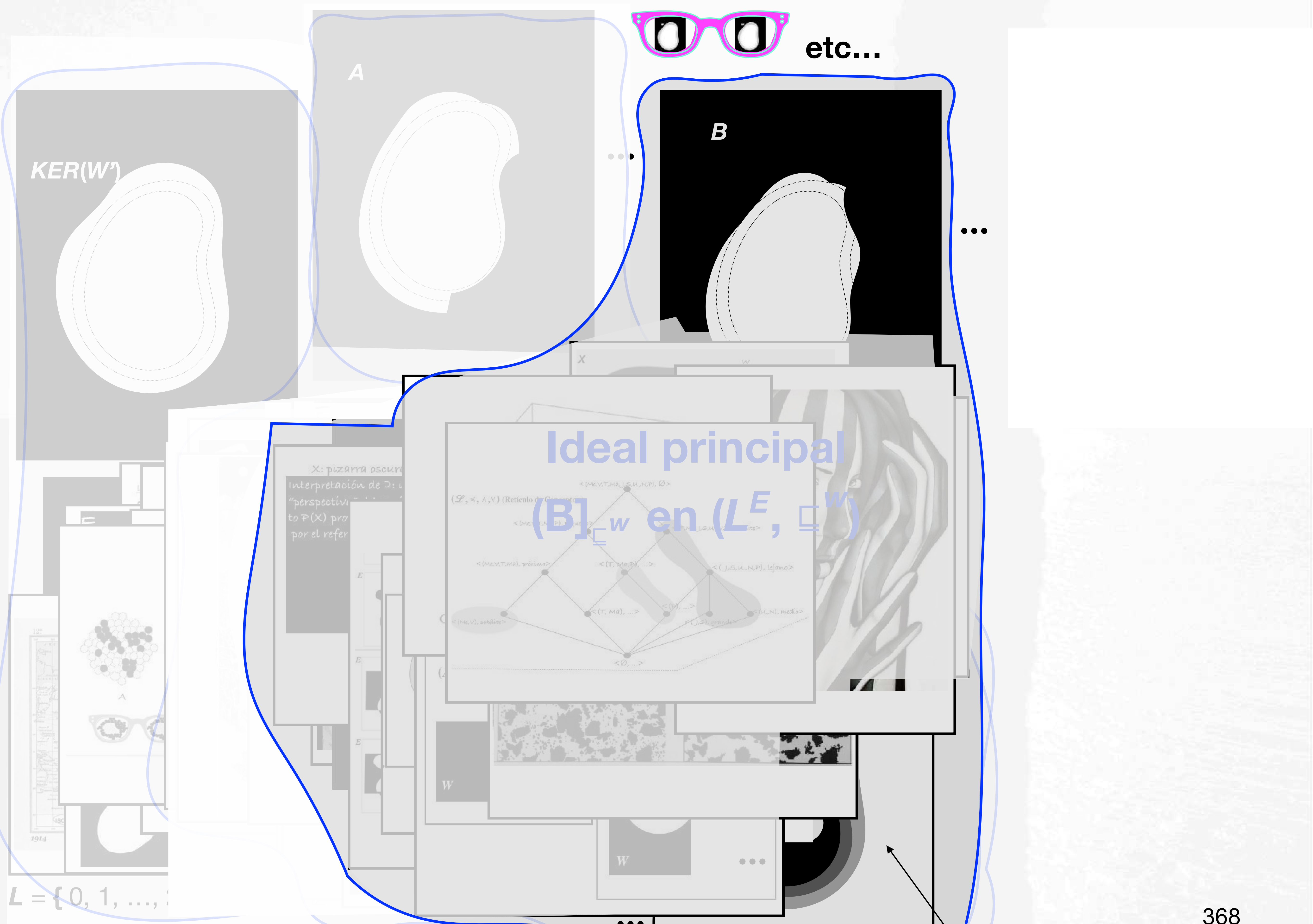
Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$) desde una perspectiva no nítida W :

Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)



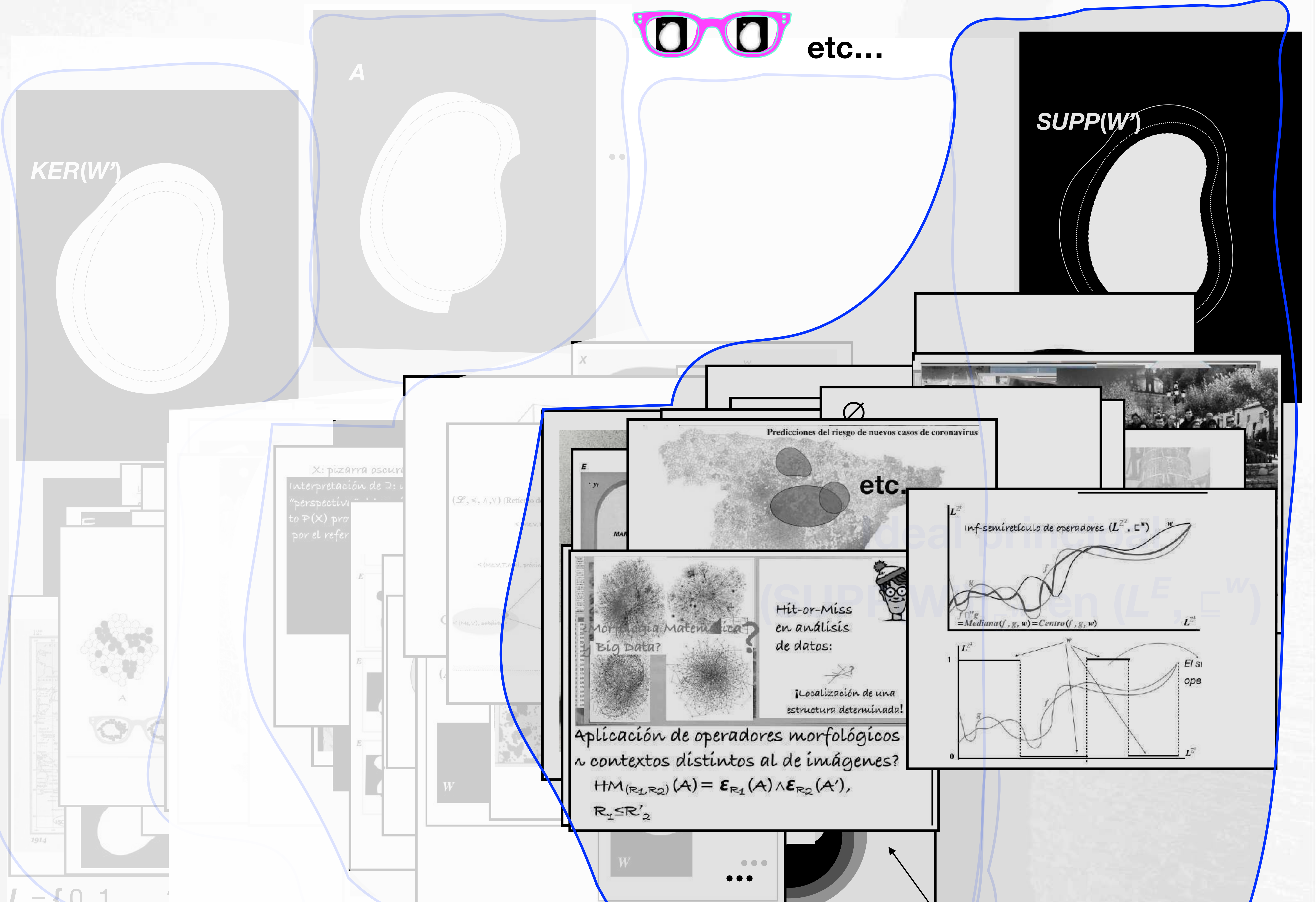
Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

Imágenes del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$ desde una perspectiva no nítida W :



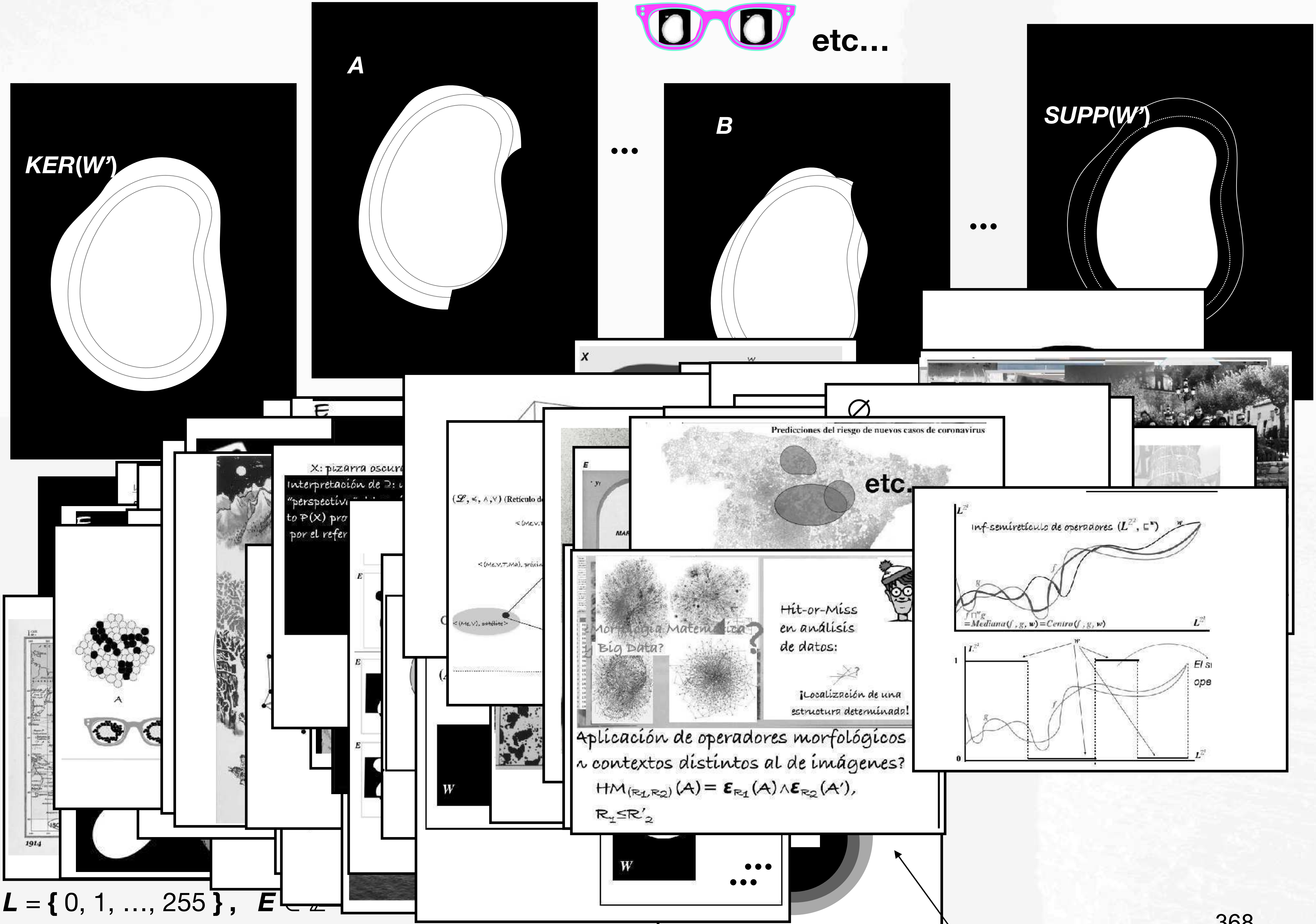
Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)

Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$) desde una perspectiva no nítida W :



Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

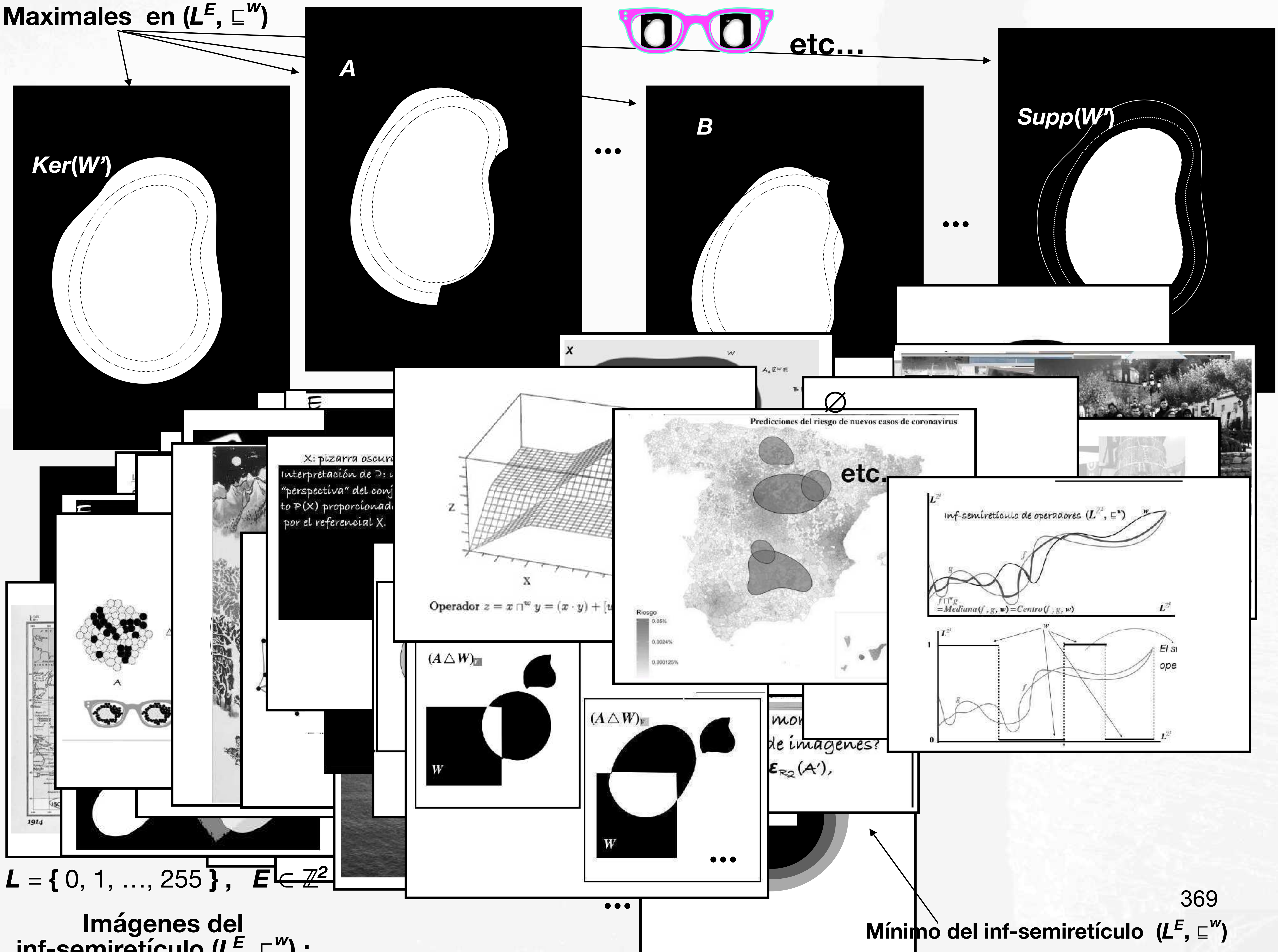
Imágenes del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$
desde una perspectiva no nítida W :



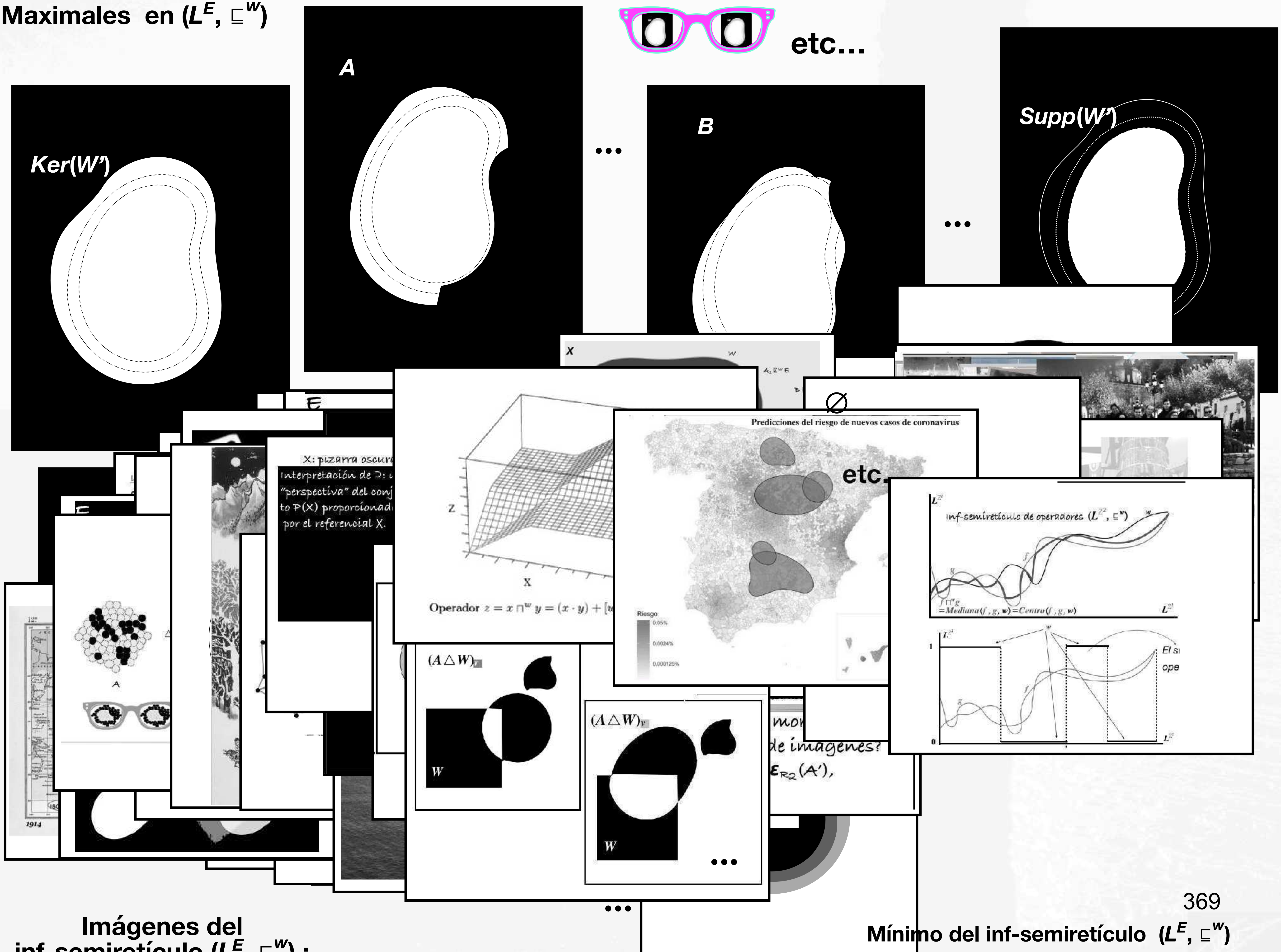
$L = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}$, $E \subset \mathbb{Z}$...

Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)
desde una perspectiva no nítida W :

Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)


Maximales en $(L^E, \sqsubseteq^W)$
etc...
A
B
Ker(W')
Supp(W')
...
Predicciones del riesgo de nuevos casos de coronavirus
etc.
X: pizarra oscura
Operador $z = x \sqcap^w y = (x \cdot y) +$
$(A \triangle W)$
W
...
inf-semiretículo de operadores $(L^{\mathbb{Z}^2}, \sqsubseteq^w)$
=Mediana(f, g, w)=Centro(f, g, w)
$L = \{ 0, 1, \ldots, 255 \}$, $E \subset \mathbb{Z}^2$
Imágenes del
inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:
Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

Maximales en (L^E, $\sqsubseteq^W$)



Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$) :

Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)

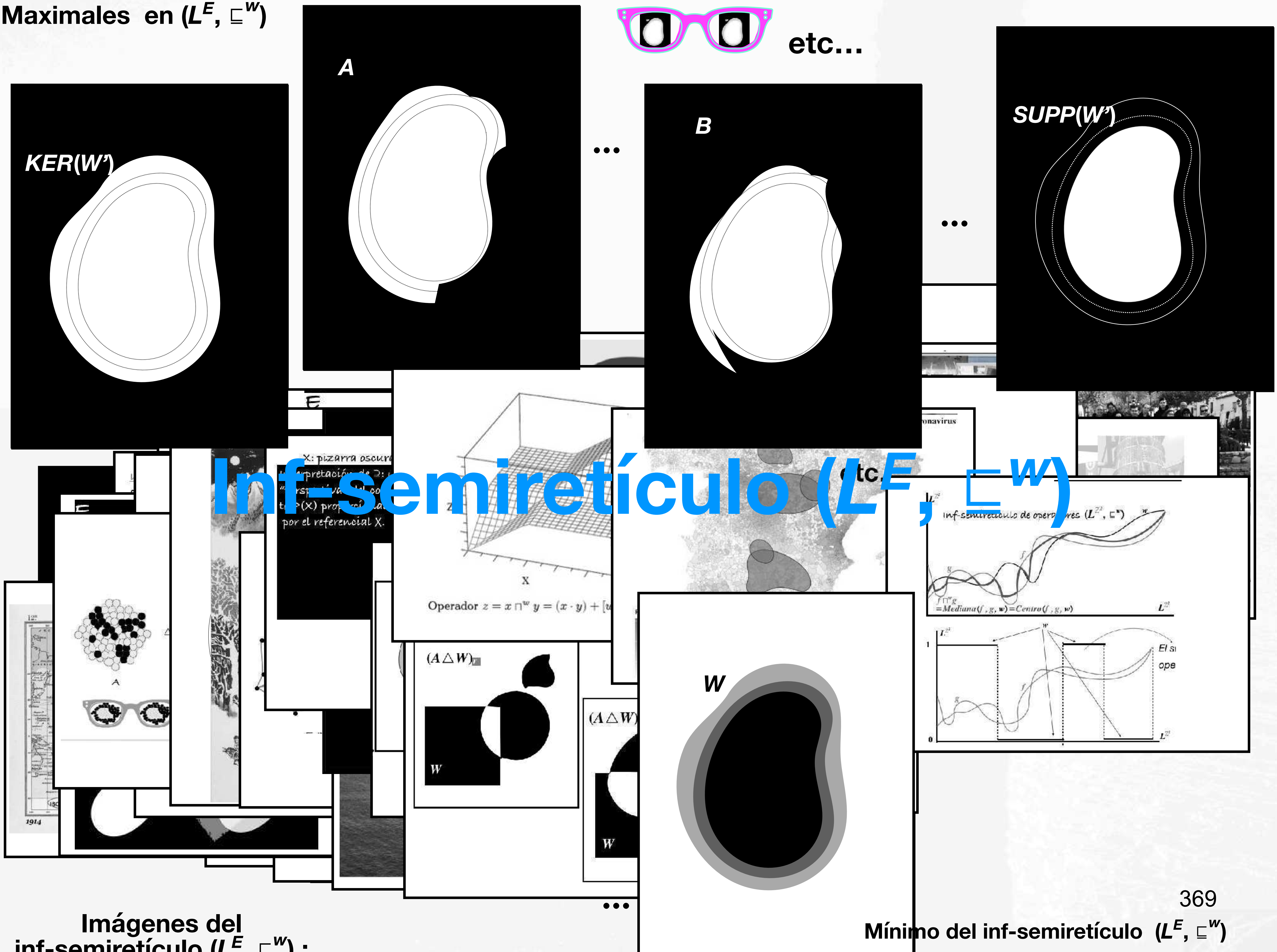
Maximales en (L^E, $\sqsubseteq^W$)

369

Mínimo del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$)

Imágenes del inf-semiretículo (L^E, $\sqsubseteq^W$) :

Maximales en $(L^E, \sqsubseteq^W)$



Inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

Imágenes del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$:

Mínimo del inf-semiretículo $(L^E, \sqsubseteq^W)$

Una propuesta de extensión de funciones $g\,(L^{E},\leq_1) \rightarrow (L^{F},\leq_2)$ a otras $\hat{g}^{*}_{\hat{W}}:(L^{E},\sqsubseteq^{W}) \rightarrow (L^{F},\sqsubseteq^{V})$ en el caso en el que L es <u>cadena</u> y alguno de los elementos "W", "V" <u>no es nítido</u>

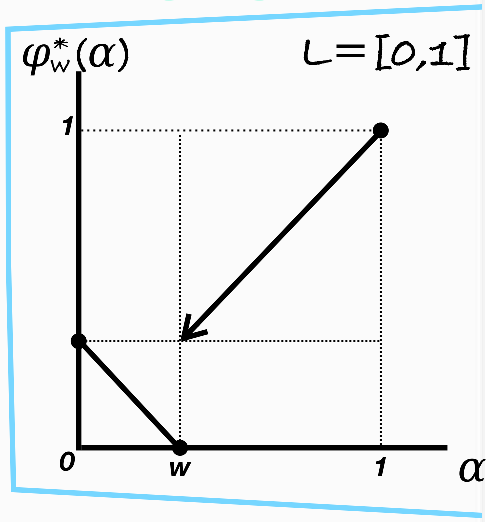
(¡Cuestión abierta!)

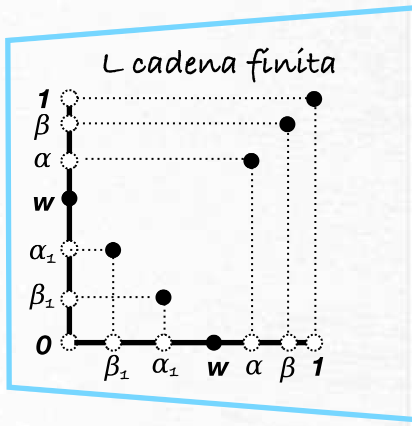
Una propuesta de extensión de funciones $g(L^E,\leq_1) \rightarrow (L^F,\leq_2)$ a otras $\hat{g}^*_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F,\sqsubseteq^V)$ en el caso en el que L es <u>cadena</u> y alguno de los elementos "W", "V" <u>no es nítido</u>

<u>Proposición</u>. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = $ **[**$w - \alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso**]** , es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^w \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))] \,\&\, [(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.

(1) Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\dots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

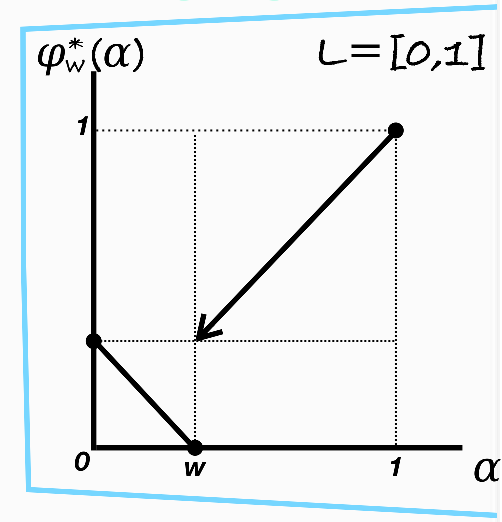
Proposición. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$. Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = [w-\alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso$]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^w \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))] \& [(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.





[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

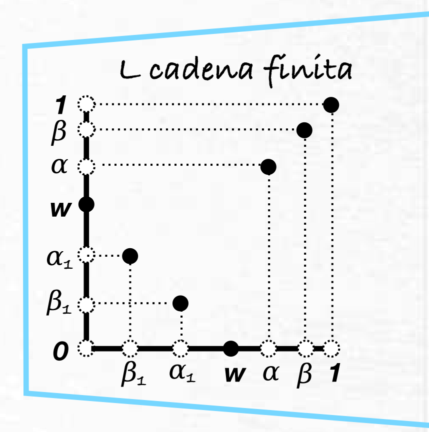
$\underline{\text{Proposición}}$. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = [w - \alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso$]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^w \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))]$ & $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.



$\underline{\text{Demostración}}$. $\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) = [w - \varphi^*_w(\alpha)$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; $\varphi^*_w(\alpha)$ en otro caso$]$ =
$[w - (w - \alpha)$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = $[\alpha$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = α.
En consecuencia, es involutiva y por los tanto biyectiva.

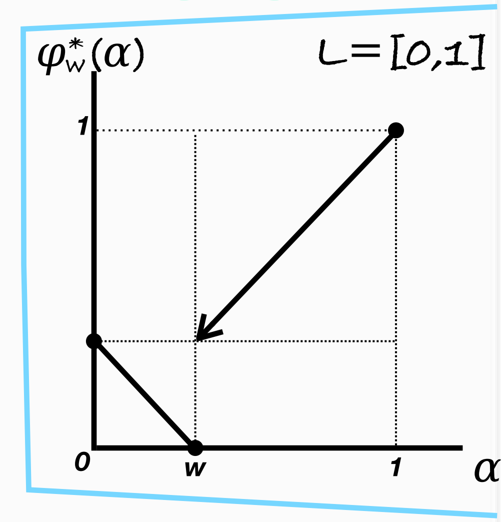
Consideremos el par $(\alpha,\beta) \in L \times L$ tal que $\alpha \sqsubseteq^w \beta$. Como $(L,\leq)$ es una cadena, esta hipótesis equivale a: $(\beta \leq \alpha \leq w)$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, que a su vez lo es a $[(w-\beta) \geq (w-\alpha) \geq 0]$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, finalmente equivalente a $(\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))$.

De la demostración anterior se desprende que: $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) \leq \varphi^*_w(\varphi^*_w(\beta))]$, que por el carácter involutivo de φ^*_w equivale a $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.∎



[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

<u>Proposición</u>. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi_w^*: L \to L$ tal que:
$\varphi_w^*(\alpha) = [w-\alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso$]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^W \beta) \Rightarrow (\varphi_w^*(\alpha) \leq \varphi_w^*(\beta))] \& [(\varphi_w^*(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi_w^*(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.

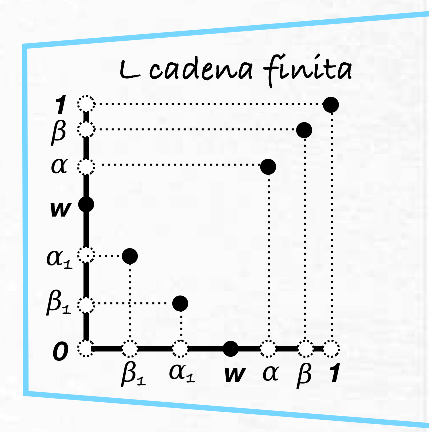


<u>Demostración</u>. $\varphi_w^*(\varphi_w^*(\alpha)) = [w-\varphi_w^*(\alpha)$ si $\varphi_w^*(\alpha) \leq w$; $\varphi_w^*(\alpha)$ en otro caso$]$ =
$[w-(w-\alpha)$ si $\varphi_w^*(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = $[\alpha$ si $\varphi_w^*(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = α.
En consecuencia, es involutiva y por los tanto biyectiva.

Consideremos el par $(\alpha,\beta) \in L X L$ tal que $\alpha \sqsubseteq^W \beta$. Como $(L,\leq)$ es una cadena, esta hipótesis equivale a: $(\beta \leq \alpha \leq w)$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, que a su vez lo es a $[(w-\beta) \geq (w-\alpha) \geq 0]$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, finalmente equivalente a $(\varphi_w^*(\alpha) \leq \varphi_w^*(\beta))$.

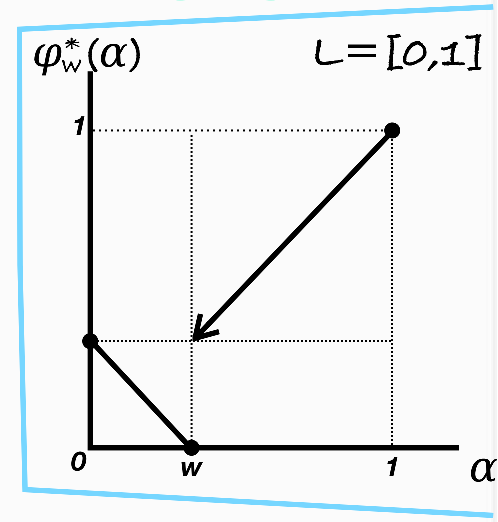
De la demostración anterior se desprende que: $[(\varphi_w^*(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi_w^*(\beta)) \Rightarrow (\varphi_w^*(\varphi_w^*(\alpha)) \leq \varphi_w^*(\varphi_w^*(\beta))]$, que por el carácter involutivo de φ_w^* equivale a $[(\varphi_w^*(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi_w^*(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.∎

<u>Nota1</u>. Se verifica $[(\alpha \leq \beta \leq w)$ ó $(w \leq \alpha \leq \beta)] \Rightarrow (\varphi_w^*(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi_w^*(\beta))$:



[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\dots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

Proposición. Sea $(L, \le, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = [w - \alpha \text{ si } \alpha \le w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^W \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \le \varphi^*_w(\beta))] \,\&\, [(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \le \beta)]$.

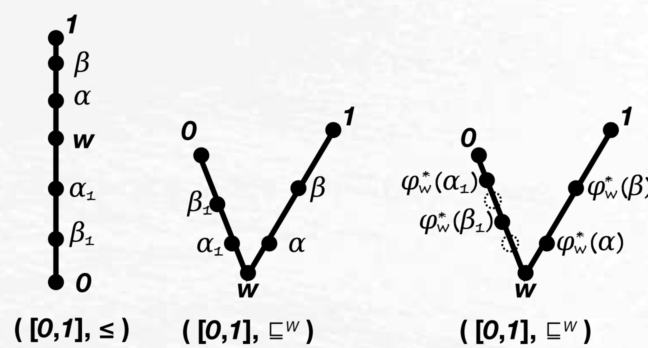


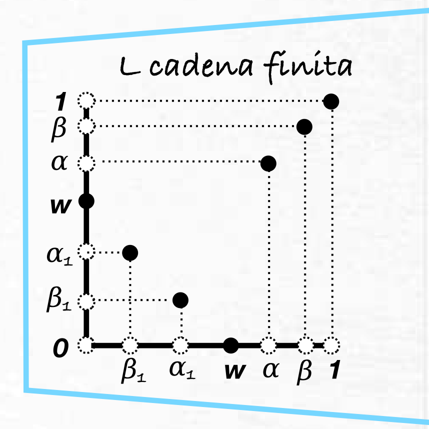
Demostración. $\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) = [w - \varphi^*_w(\alpha) \text{ si } \varphi^*_w(\alpha) \le w \,;\, \varphi^*_w(\alpha) \text{ en otro caso}] =$
$[w-(w-\alpha) \text{ si } \varphi^*_w(\alpha) \le w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}] = [\alpha \text{ si } \varphi^*_w(\alpha) \le w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}] = \alpha$.
En consecuencia, es involutiva y por los tanto biyectiva.

Consideremos el par $(\alpha,\beta) \in L \times L$ tal que $\alpha \sqsubseteq^W \beta$. Como $(L,\le)$ es una cadena, esta hipótesis equivale a: $(\beta \le \alpha \le w)$ ó $(w < \alpha \le \beta)$, que a su vez lo es a $[(w-\beta) \ge (w-\alpha) \ge 0]$ ó $(w < \alpha \le \beta)$, finalmente equivalente a $(\varphi^*_w(\alpha) \le \varphi^*_w(\beta))$.

De la demostración anterior se desprende que: $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) \le \varphi^*_w(\varphi^*_w(\beta))]$, que por el carácter involutivo de φ^*_w equivale a $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \le \beta)]$.∎

Nota1. Se verifica $[(\alpha \le \beta \le w)$ ó $(w \le \alpha \le \beta)] \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta))$:

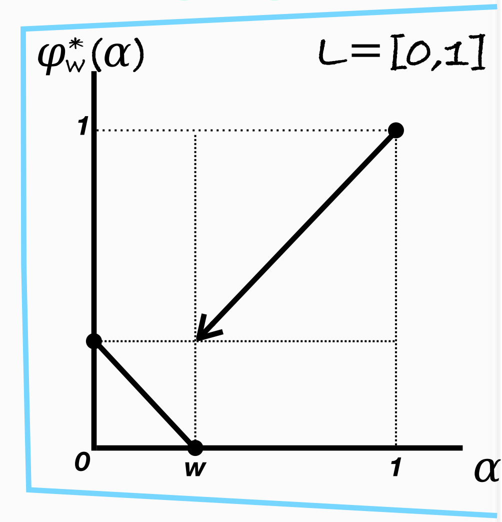




$$(\beta_1 \le \alpha_1 \le w) \,\&\, [\varphi^*_w(\beta_1) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\alpha_1)]$$
$$(w < \alpha \le \beta) \,\&\, [\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta)]$$
$$(\alpha_1 \le w < \beta) \,\&\, [\varphi^*_w(\alpha_1) \not\sqsubseteq^W \varphi^*_w(\beta)] \,\&\, [\varphi^*_w(\beta) \not\sqsubseteq^W \varphi^*_w(\alpha_1)]$$

[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \le p$.

<u>Proposición</u>. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = [w-\alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso$]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^w \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))] \& [(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.

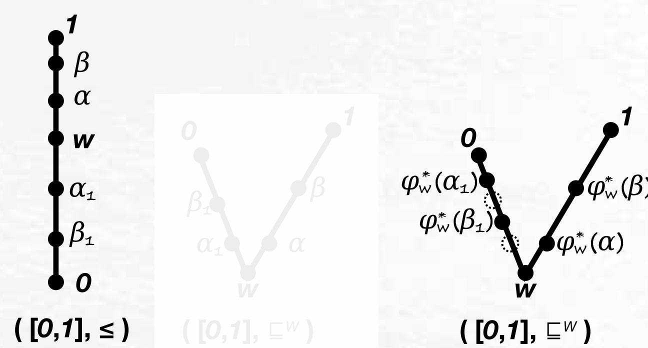


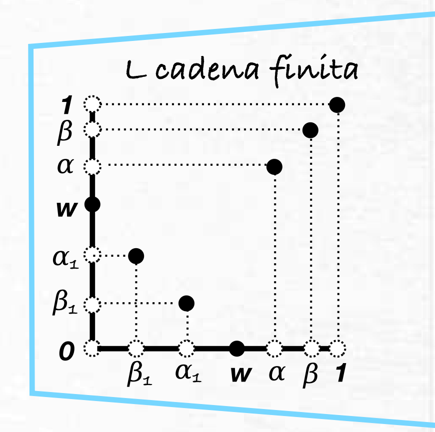
<u>Demostración</u>. $\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) = [w-\varphi^*_w(\alpha)$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; $\varphi^*_w(\alpha)$ en otro caso$]$ =
$[w-(w-\alpha)$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = $[\alpha$ si $\varphi^*_w(\alpha) \leq w$; α en otro caso$]$ = α.
En consecuencia, es involutiva y por los tanto biyectiva.

Consideremos el par $(\alpha,\beta) \in L \times L$ tal que $\alpha \sqsubseteq^w \beta$. Como $(L,\leq)$ es una cadena, esta hipótesis equivale a: $(\beta \leq \alpha \leq w)$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, que a su vez lo es a $[(w-\beta) \geq (w-\alpha) \geq 0]$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, finalmente equivalente a $(\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))$.

De la demostración anterior se desprende que: $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) \leq \varphi^*_w(\varphi^*_w(\beta))]$, que por el carácter involutivo de φ^*_w equivale a $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.∎

<u>Nota1</u>. Se verifica $[(\alpha \leq \beta \leq w)$ó$(w \leq \alpha \leq \beta)] \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta))$:



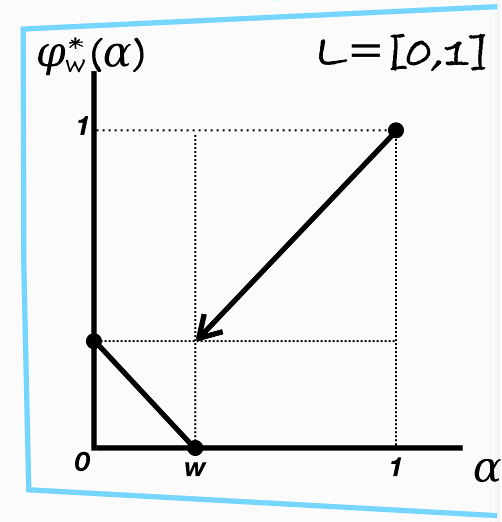


$$(\beta_1 \leq \alpha_1 \leq w) \& [\varphi^*_w(\beta_1) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\alpha_1)]$$
$$(w < \alpha \leq \beta) \& [\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)]$$
$$(\alpha_1 \leq w < \beta) \& [\varphi^*_w(\alpha_1) \not\sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta)] \& [\varphi^*_w(\beta) \not\sqsubseteq^w \varphi^*_w(\alpha_1)]$$

En consecuencia, $[((\alpha \leq \beta \leq w)$ó$(w < \alpha \leq \beta)) \Leftrightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^w \varphi^*_w(\beta))]$.

[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

Proposición. Sea $(L, \leq, \min, \max, 0, 1)$ una cadena finita[1] o la cadena $[0,1]$ incluida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$.
Consideremos un elemento $w \in L$. Entonces, la aplicación $\varphi^*_w : L \to L$ tal que:
$\varphi^*_w(\alpha) = [w-\alpha \text{ si } \alpha \leq w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}]$, es una involución y por tanto biyectiva.
Además, se verifica: $[(\alpha \sqsubseteq^{W} \beta) \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \leq \varphi^*_w(\beta))] \,\&\, [(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.

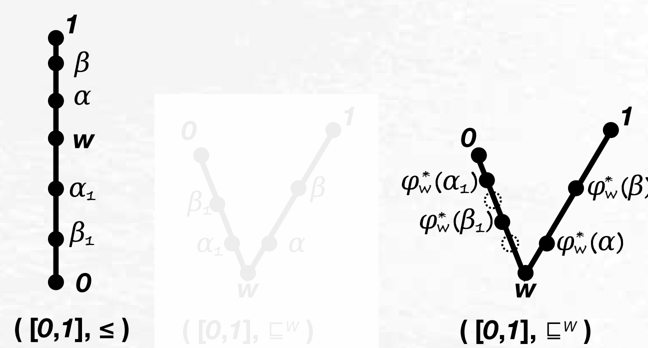


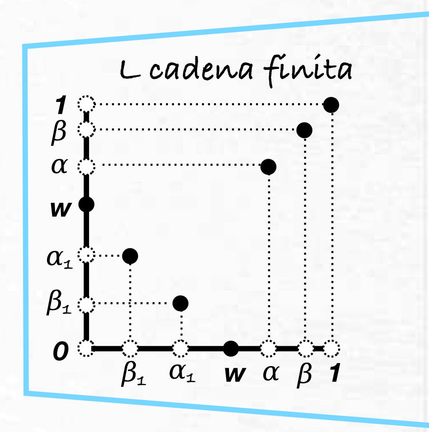
Demostración. $\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) = [w-\varphi^*_w(\alpha) \text{ si } \varphi^*_w(\alpha) \leq w \,;\, \varphi^*_w(\alpha) \text{ en otro caso}] =$
$[w-(w-\alpha) \text{ si } \varphi_w^*(\alpha) \leq w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}] = [\alpha \text{ si } \varphi_w^*(\alpha) \leq w \,;\, \alpha \text{ en otro caso}] = \alpha$.
En consecuencia, es involutiva y por los tanto biyectiva.

Consideremos el par $(\alpha,\beta) \in L \times L$ tal que $\alpha \sqsubseteq^{W} \beta$. Como $(L,\leq)$ es una cadena, esta hipótesis equivale a: $(\beta \leq \alpha \leq w)$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, que a su vez lo es a $[(w-\beta) \geq (w-\alpha) \geq 0]$ ó $(w < \alpha \leq \beta)$, finalmente equivalente a $(\varphi_w^*(\alpha) \leq \varphi_w^*(\beta))$.

De la demostración anterior se desprende que: $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\varphi^*_w(\varphi^*_w(\alpha)) \leq \varphi^*_w(\varphi^*_w(\beta))]$, que por el carácter involutivo de φ^*_w equivale a $[(\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta)) \Rightarrow (\alpha \leq \beta)]$.■

Nota1. Se verifica $[(\alpha \leq \beta \leq w)$ ó $(w \leq \alpha \leq \beta)] \Rightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta))$:





$$(\beta_1 \leq \alpha_1 \leq w) \,\&\, [\varphi^*_w(\beta_1) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\alpha_1)]$$
$$(w < \alpha \leq \beta) \,\&\, [\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta)]$$
$$(\alpha_1 \leq w < \beta) \,\&\, [\varphi^*_w(\alpha_1) \not\sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta)] \,\&\, [\varphi^*_w(\beta) \not\sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\alpha_1)]$$

En consecuencia, $[((\alpha \leq \beta \leq w)$ ó $(w < \alpha \leq \beta)) \Leftrightarrow (\varphi^*_w(\alpha) \sqsubseteq^{W} \varphi^*_w(\beta))]$.

Nota2. En los casos $w=0$ y $w=1$, las aplicaciones φ^*_0 y φ^*_1 coinciden con la "diferencia simétrica" $\varphi_w(\alpha) = \alpha \Delta w$:

$$\varphi^*_0(\alpha) = \alpha = \varphi_0(\alpha) = \alpha \Delta 0 \,,\quad \varphi^*_1(\alpha) = 1-\alpha = \alpha' = \varphi_1(\alpha) = \alpha \Delta 1 \quad \forall \alpha \in L.$$

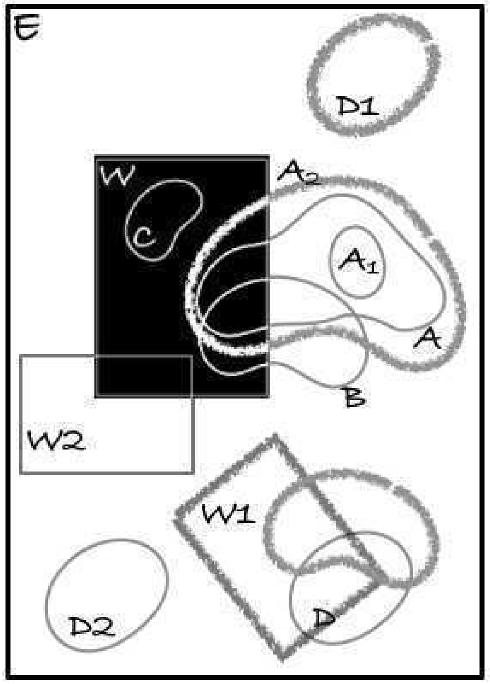
[1] Si L es finita de cardinal $n+1$, la identificamos con $n+1=\{0,1,\ldots,n\}$. Aquí está definida la operación diferencia $p-q$ si $q \leq p$.

Extensiones $\hat{g}^*_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^W)\rightarrow(L^F,\sqsubseteq^V)$ de funciones $g:(L^E,\leq_1)\rightarrow(L^F,\leq_2)$ cuando L es una cadena y alguno de los subconjuntos L-borrosos $W\in L^E$ o $V\in L^F$ no es nítido.

Si L es una cadena acotada…

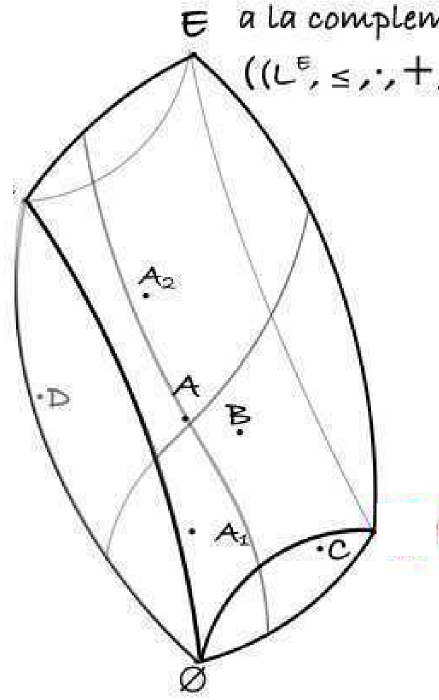
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$



Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

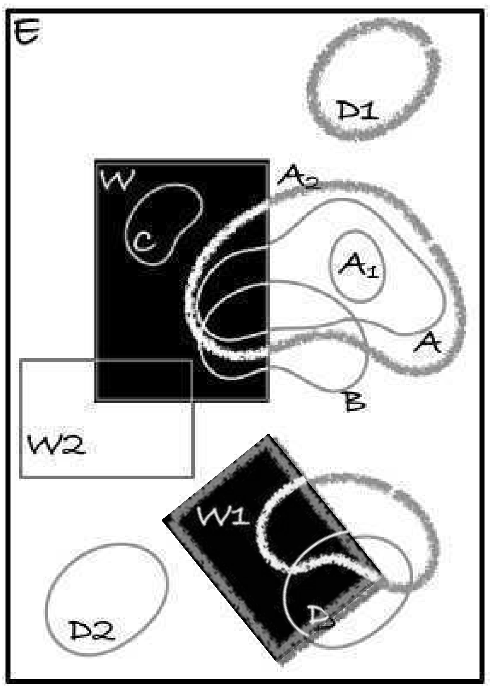
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



Si L es una cadena acotada...

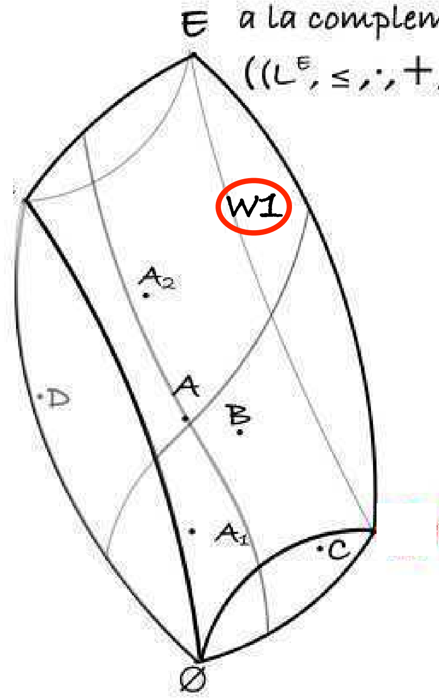
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$

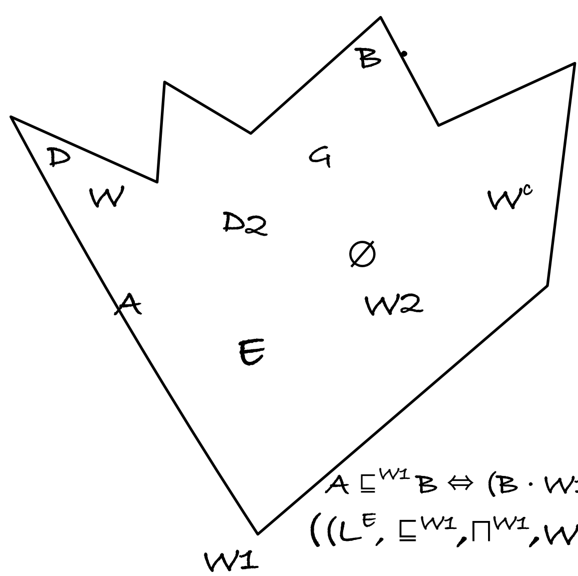


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Si L es una cadena acotada...



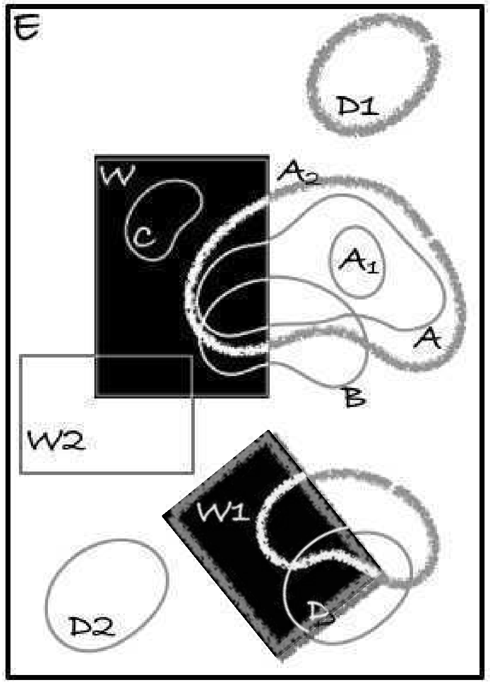
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

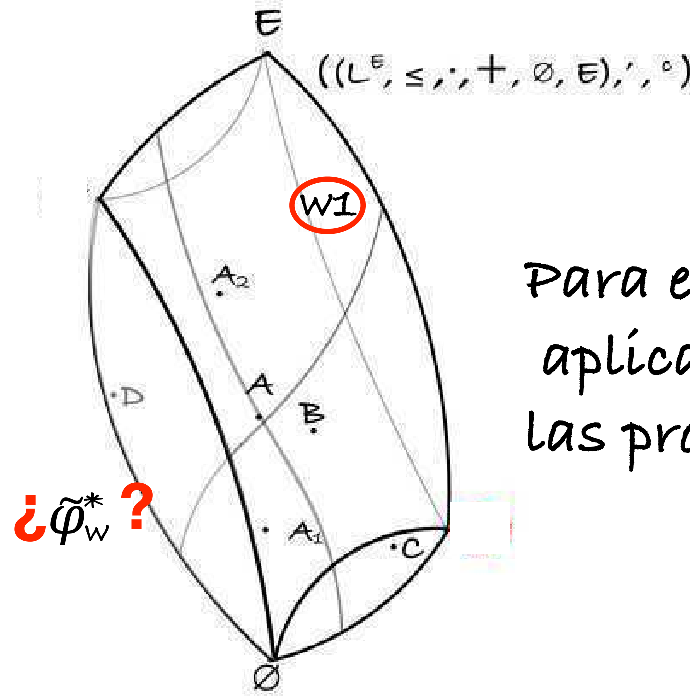
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

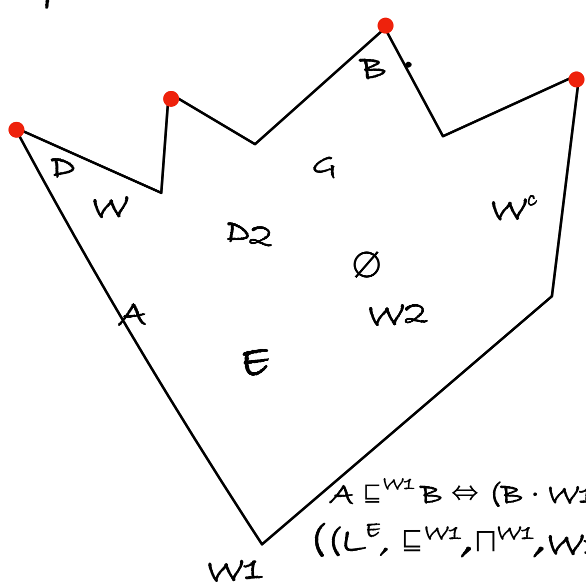




Para esos elementos $W_1 \in L^E$ que no son nítidos, ¿existe una aplicación $\tilde{\varphi}^*_{W_1} : (L^E, \leq) \rightarrow (L^E, \sqsubseteq^{W_1})$ que cumpla alguna de las propiedades análogas a las que tiene φ_W cuando W lo es?

Conjunto de maximales en L^E (son nítidos):

$\{ M \in P(E) \ / \ [Sop(W1)]^c \subseteq M \subseteq [Ker(W1)]^c \}$



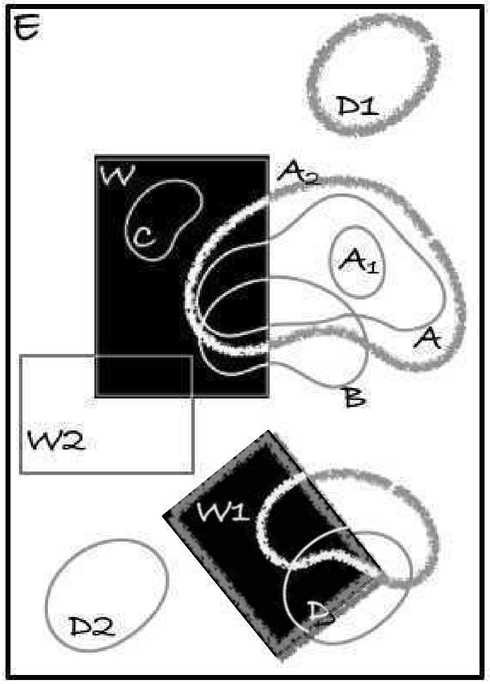
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

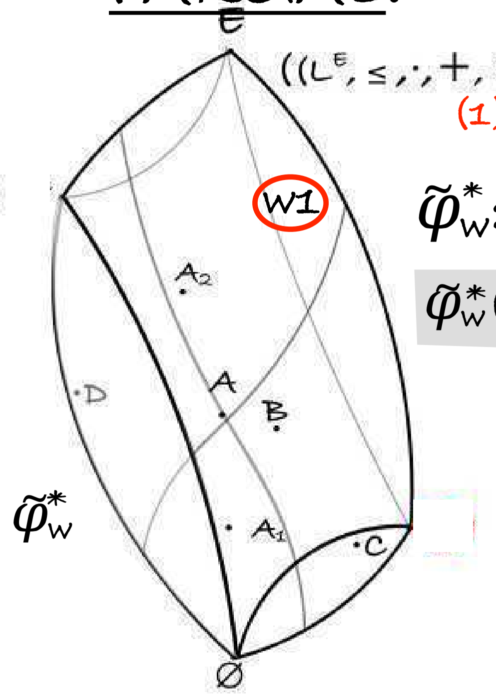
Si L es una cadena acotada...

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



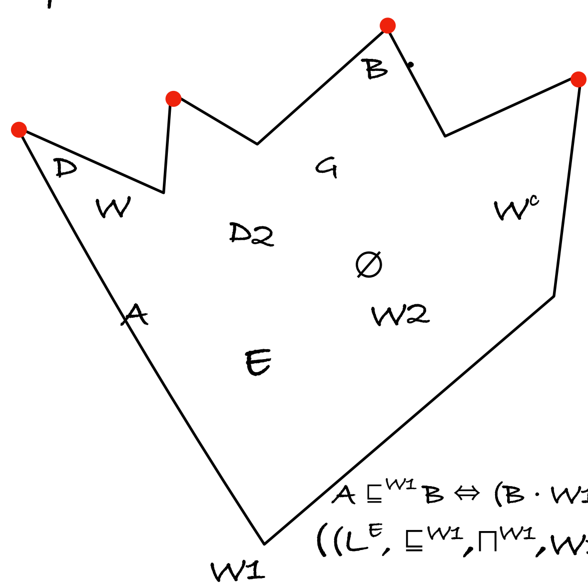
PROPUESTA DE SOLUCIÓN PARCIAL:



(1) La extensión puntual de la aplicación $\varphi^*_w : (L, \leq) \to (L, \sqsubseteq^w)$:
$\tilde{\varphi}^*_w : (L^E, \leq) \to (L^E, \sqsubseteq^w)$ tal que, $\forall S \in L^E$: $\tilde{\varphi}^*_w(S) \in L^E$ viene dado por

$$\tilde{\varphi}^*_w(S)(x) = \varphi^*_{w(x)}(S(x)) = [w(x) - S(x) \text{ si } S(x) \leq w(x) \text{ ; } S(x) \text{ en otro caso}]\ \forall x \in L$$

Conjunto de maximales en L^E (son nítidos):
$\{ M \in P(E) \ / \ [Sop(W1)]^c \subseteq M \subseteq [Ker(W1)]^c \}$



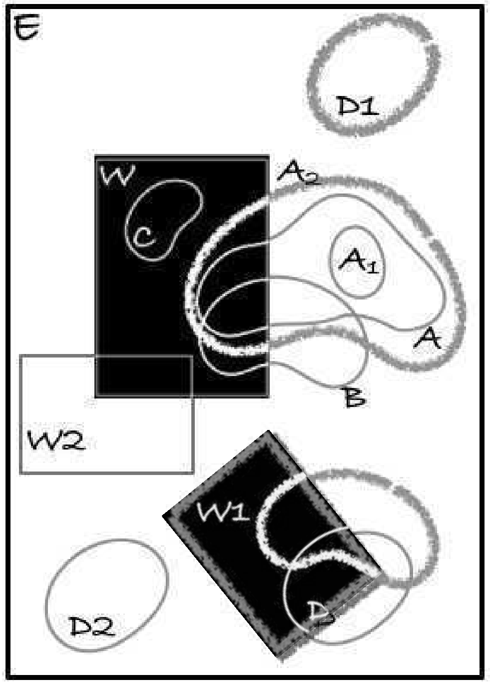
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

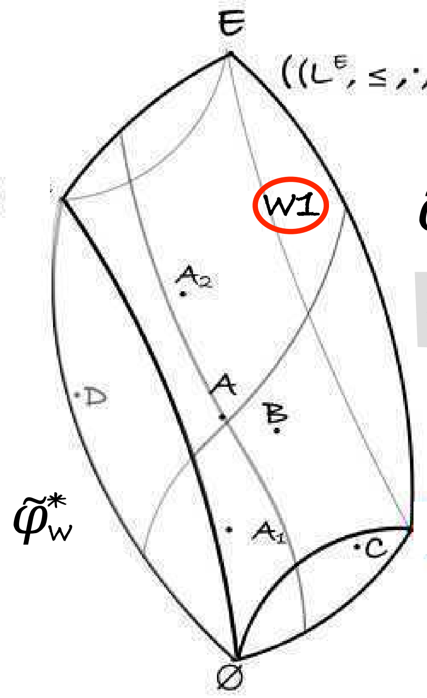
Si L es una cadena acotada...

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo

(1) Véase la transparencia anterior en la que se define: $\varphi^*_w(\alpha) = [w - \alpha \text{ si } \alpha \leq w \text{ ; } \alpha \text{ en otro caso}]$.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E, A \leq E, B \leq E, \ldots, E \leq E$



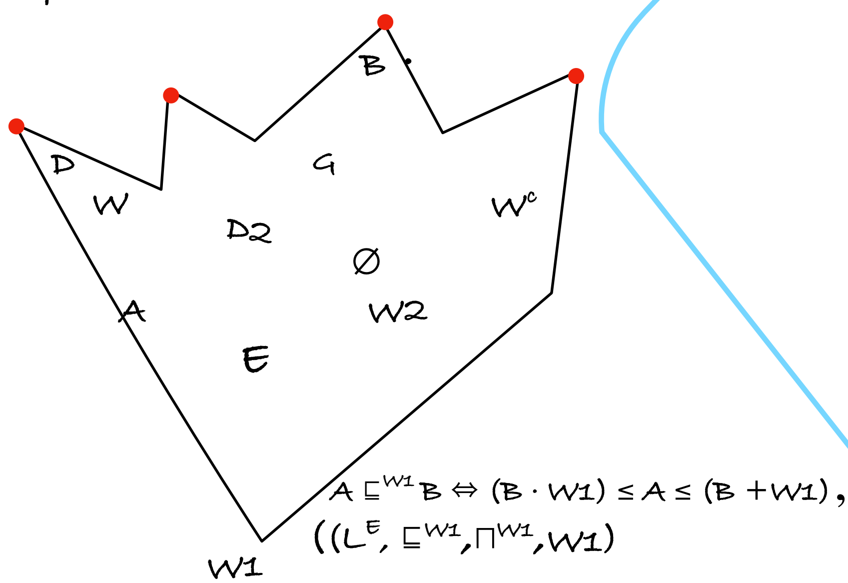


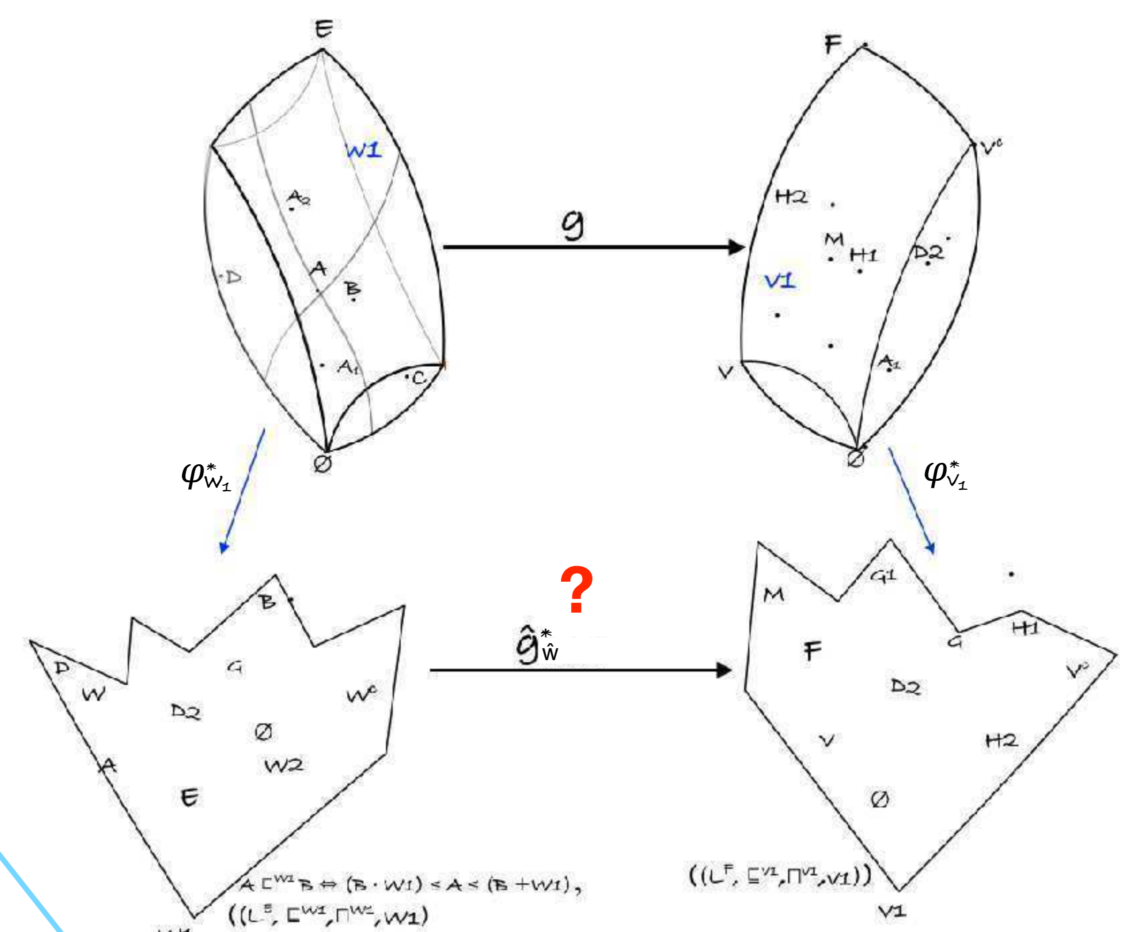
[1] La extensión puntual de la aplicación $\varphi^*_W : (L, \leq) \rightarrow (L, \sqsubseteq^W)$:
$\tilde{\varphi}^*_W : (L^E, \leq) \rightarrow (L^E, \sqsubseteq^W)$ tal que, $\forall S \in L^E$: $\tilde{\varphi}^*_W(S) \in L^E$ viene dado por

$$\tilde{\varphi}^*_W(S)(x) = \varphi^*_{W(x)}(S(x)) = [W(x) - S(x) \text{ si } S(x) \leq W(x) \text{ ; } S(x) \text{ en otro caso}] \ \forall x \in L$$

Si L es una cadena este tipo de aplicaciones proporciona un método general de extensión de funciones $g : (L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}^*_{\hat{W}} : (L^E, \sqsubseteq^{W1}) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^{V1})$:

Conjunto de maximales en L^E (son nítidos):
$\{ M \in P(E) \ / \ [Sop(W1)]^c \subseteq M \subseteq [Ker(W1)]^c \}$



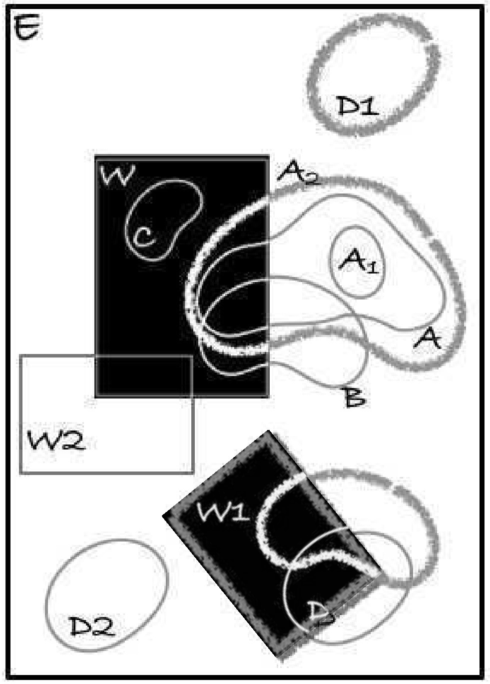


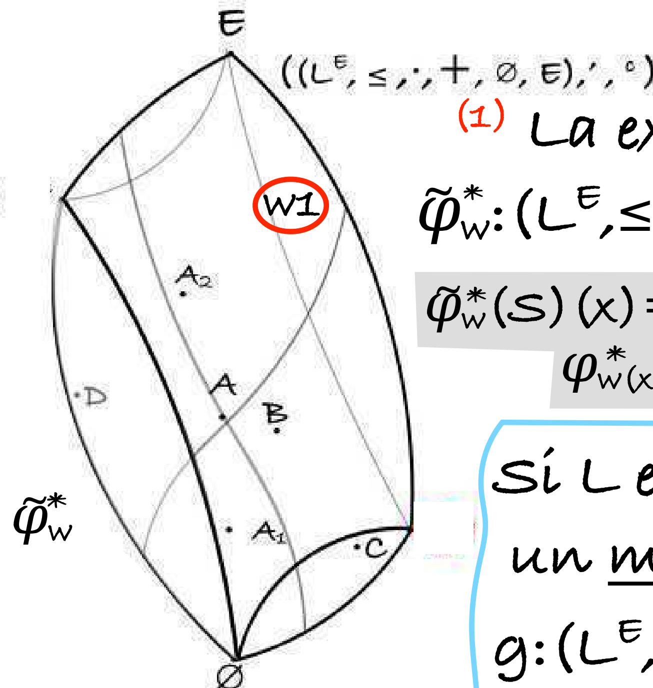
Si L es una cadena acotada...

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo

[1] Véase la transparencia anterior en la que se define: $\varphi^*_W(\alpha) = [W - \alpha \text{ si } \alpha \leq W \text{ ; } \alpha \text{ en otro caso}]$.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset\leq E,\ A\leq E,\ B\leq E, \ldots,\ E\leq E$



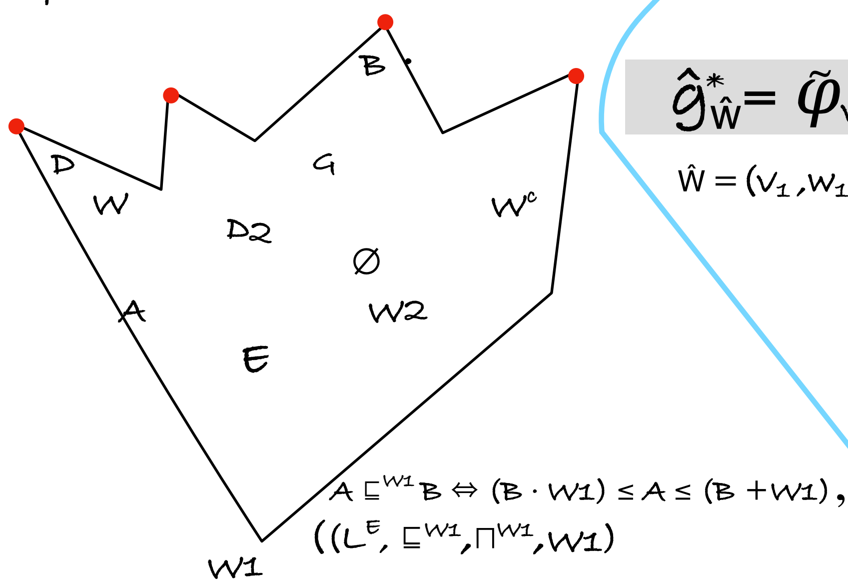


(1) La extensión puntual de la aplicación $\varphi^*_w:(L,\leq)\rightarrow(L,\sqsubseteq^w)$:
$\tilde{\varphi}^*_w:(L^E,\leq)\rightarrow(L^E,\sqsubseteq^w)$ tal que, $\forall S\in L^E$: $\tilde{\varphi}^*_w(S)\in L^E$ viene dado por

$\tilde{\varphi}^*_w(S)(x) =$
$\varphi^*_{w(x)}(S(x)) = [w(x)-S(x)$ si $S(x)\leq w(x)$; $S(x)$ en otro caso$]$ $\forall x\in L$

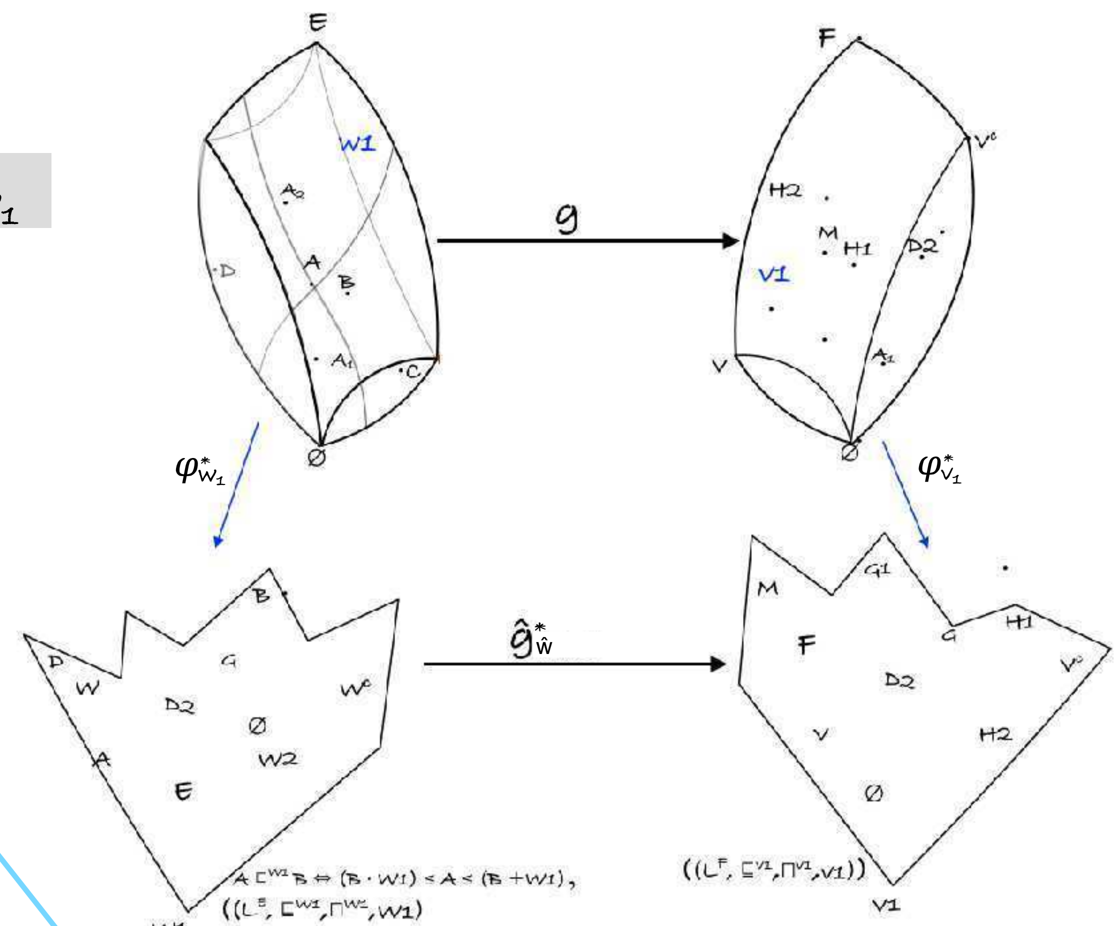
Si L es una cadena este tipo de aplicaciones proporciona un método general de extensión de funciones $g:(L^E,\leq)\rightarrow(L^F,\leq)$ a otras $\hat{g}^*_{\hat{W}}:(L^E,\sqsubseteq^{W1})\rightarrow(L^F,\sqsubseteq^{V1})$:

Conjunto de maximales en L^E (son nítidos):
$\{ M\in P(E)\ /\ [Sop(W1)]^c \subseteq M \subseteq [Ker(W1)]^c \}$



$\hat{g}^*_{\hat{W}} = \tilde{\varphi}^*_{V_1}\circ g\circ\tilde{\varphi}^*_{W_1}$

$\hat{W}=(V_1,W_1)$



Si L es una cadena acotada...

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículo

(1) Véase la transparencia anterior en la que se define: $\varphi^*_w(\alpha) = [w-\alpha$ si $\alpha\leq w$; α en otro caso$]$.

0. Preliminares: Orden de Actividad, Diferencia Simétrica, Uninormas y nulnormas.

1. Como se señala en una de las motivaciones, se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "w" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g{:}E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como:
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seismos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas, (isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre".
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

Conclusiones y algunas cuestiones

0. Preliminares: Orden de Actividad, Diferencia Simétrica, Uninormas y nulnormas.

1. Como se señala en una de las motivaciones , se propone en este trabajo un MODELO MATEMÁTICO para dotar de "contenido" al conjunto vacío $\varnothing$, es decir, "inclusión" y "pertenencia" (¡no triviales!) en $\varnothing$. Ese modelo que se propone se fundamenta en la interconexión de dos conceptos matemáticos previos consolidados en la literatura especializada:
   - Uno que pertenece al campo del tratamiento de imágenes mediante técnicas de la Morfología Matemática: el "Orden de Actividad $\sqsubseteq^W$", que aparece en los retículos distributivos $(L,\leq)$ como orden auxiliar. Ese orden de actividad, (que en Morfología Matemática es una herramienta útil para comparar filtros ($f \sqsubseteq^W g$) que transforman imágenes), lo utilizamos aquí en un contexto distinto; de manera que la expresión "$A \sqsubset^W \varnothing$" representará: "el subconjunto A es w-parte propia del vacío". Se justifica en este apartado el papel del subconjunto "W" en esa representación.
   - El otro consiste en una versión en retículos distributivos $(L,\leq)$ del operador "Diferencia Simétrica $\triangle$", concepto clásico en la Teoría Intuitiva de Conjuntos. Demostramos que la conexión que existe entre este operador diferencia $\triangle$ y el orden de actividad $\sqsubseteq^W$, justificará la re-interpretación del predicado $(x \in A) \& (A \sqsubset^W \varnothing)$ como una "w-pertenencia al vacío": $x \in^W \varnothing$.

2. En segundo lugar, se amplía el modelo propuesto justificando que la relación de orden $\sqsubseteq^W$ actúa como una "w-inclusión" entre subconjuntos ordinarios o borrosos: "$A \sqsubseteq^W B$" y demostrando además que existe el operador ínfimo $\sqcap^W$ determinado por ese orden que se interpreta a su vez, (gracias al carácter de nul-norma que posee en el retículo inicial $(L,\leq)$), como su "w-intersección" asociada: "$A \sqcap^W B$". También se justifica la "w-pertenencia" $x \in^W A$, se caracteriza el caso en el que además existe la "w-unión" $A \sqcup^W B$ y se analiza el comportamiento de $\sqcap^W$, $\sqcup^W$ con las imágenes directa $g(A)$ e inversa $g^{-1}(A)$ asociadas a funciones $g: E \to F$.

3. A continuación, se generaliza la teoría desarrollada a retículos $(L,\leq)$. En primer lugar a los que son distributivos y después a retículos cualesquiera, en los que la relación $\sqsubseteq^W$ no es necesariamente de orden, aunque sí resulta ser un pre-orden. Como se ilustra en el trabajo, esta generalización tiene interés en casos interesantes como el de "Retículos de Conceptos Formales", el de ciertos retículos de subgrupos (grupos diédricos), el de análisis de grafos, ... y otros ejemplos de Matemática Discreta.

4. Posteriormente, se ilustra la utilidad de las w-inclusión, w-intersección y, (en su caso), la w-unión en contextos tales como :
   - El de análisis de mapas de riesgo, (zonas de aludes, de riesgo de incendios, de deslizamientos, de seísmos,...), así como el de mapas con curvas de nivel o isolíneas,(isócronas, isotermas, salinidad, precipitaciones, intensidad de terremotos,...).
   - El de la preparación de datos para procesos de "Minería de Datos" o el de "Análisis de Datos con Incertidumbre" .
   - En el Tratamiento de Imágenes Digitalizadas, concretamente en el que se realiza con técnicas de Morfología Matemática.

   Además, se analiza el comportamiento de esta inclusión $\sqsubseteq^W$ y la de sus operadores asociados en referenciales con una medida, en particular en espacios de probabilidad.

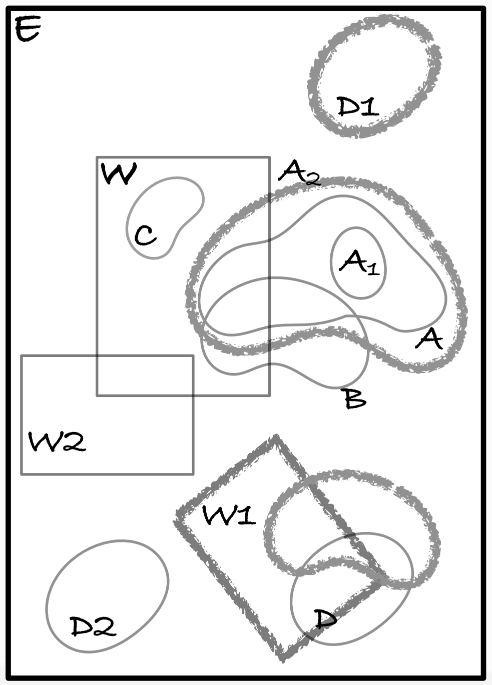
5. Finalmente, y aunque el interés inicial de este trabajo ha sido el de presentar el orden de actividad $\sqsubseteq^W$ y los operadores $\sqcap^W$, $\sqcap^W$ como herramientas de Matemática Aplicada, se presenta algún aspecto teórico como es el de un esbozo de su relación con la Topología o como su extensión a sistemas relacionales (L,R) donde $R \subseteq L \times L$ es una relación en L no necesariamente de orden.

372

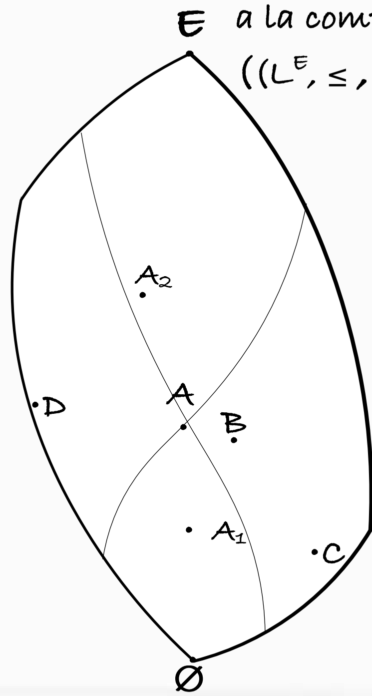
Conclusiones

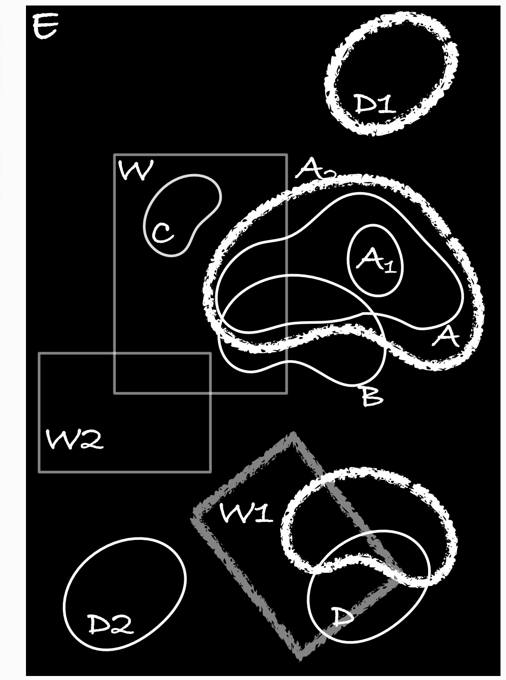
11

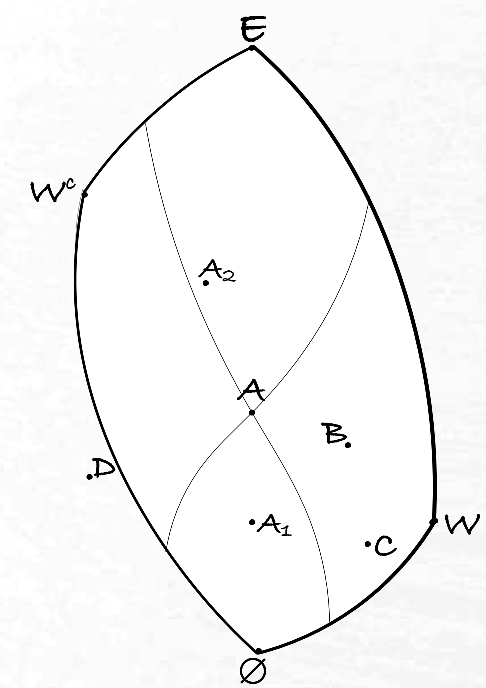
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots ,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



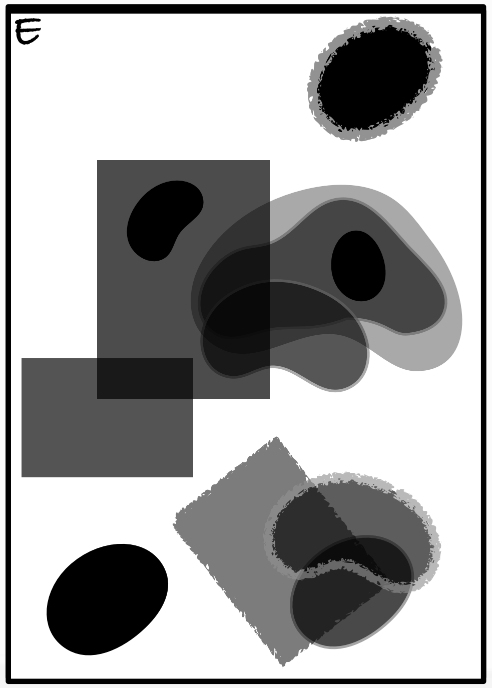




Dos interpretaciones usuales:

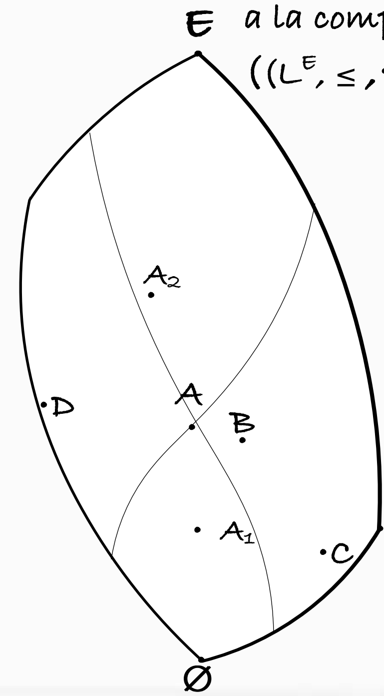
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

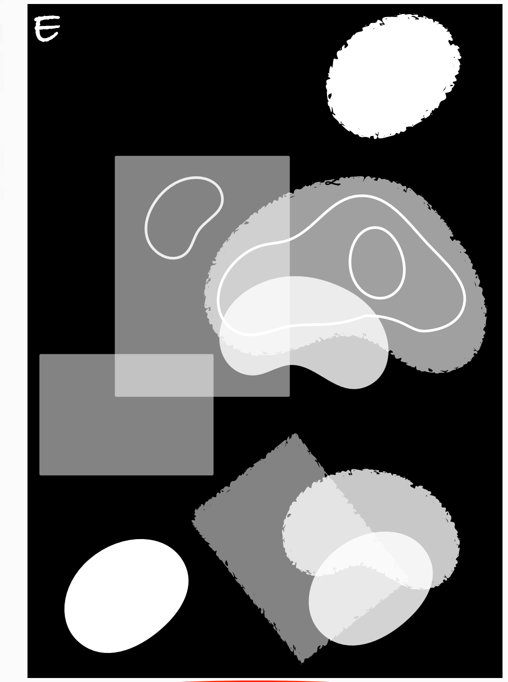
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



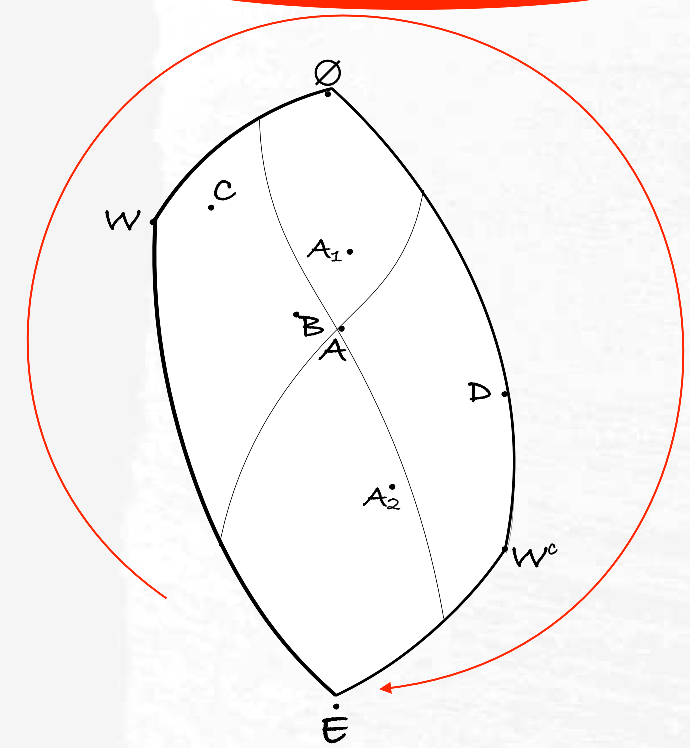
Subconjuntos borrosos

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



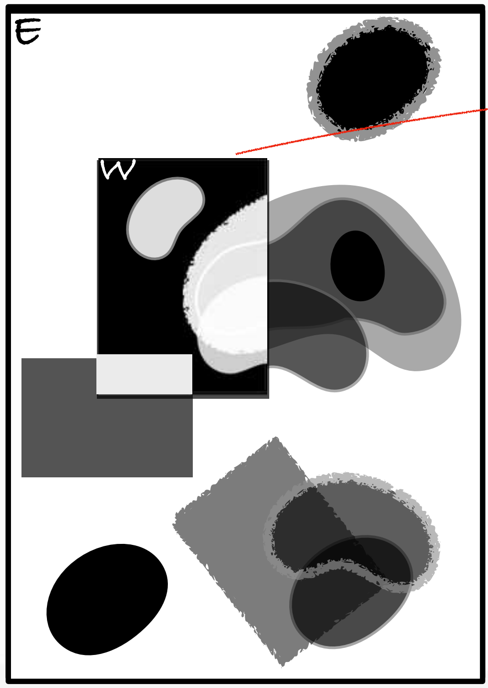


Imágenes digitalizadas

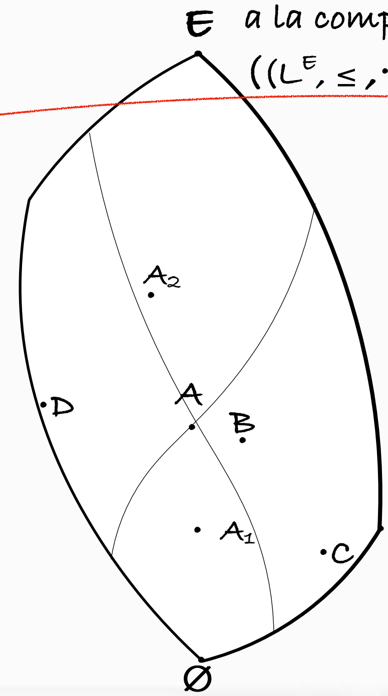


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \dots, E \leq E$

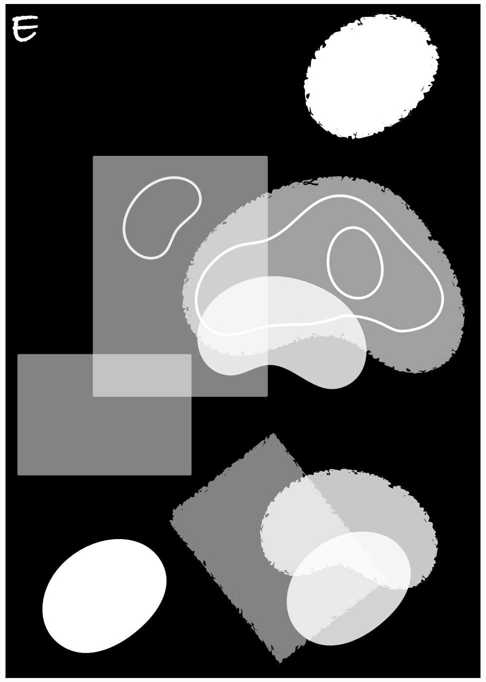


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



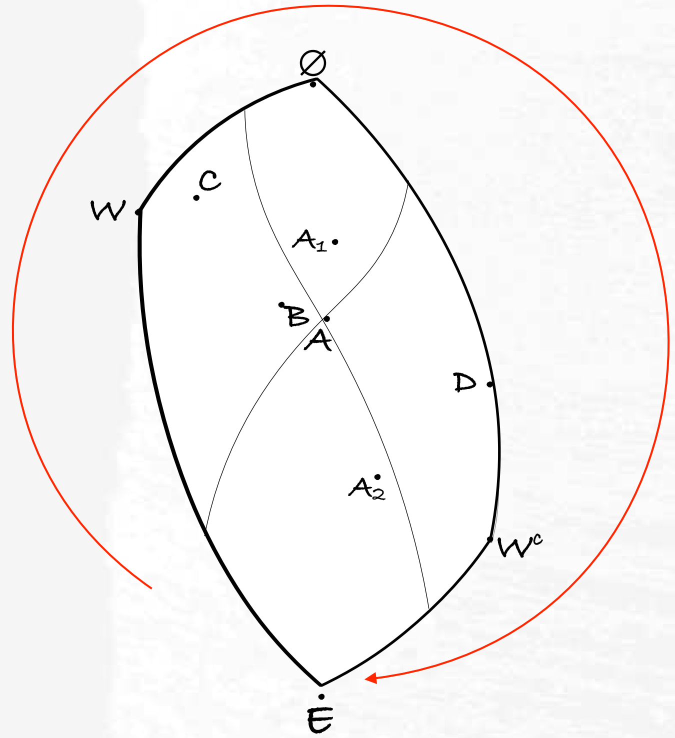
Dos interpretaciones usuales:

Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), <u>distinguido</u> por alguna razón.



Imágenes digitalizadas

Subconjuntos borrosos

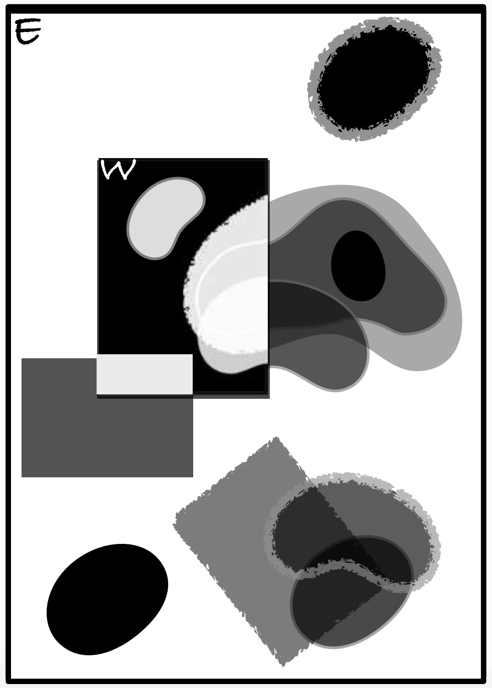


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Dos interpretaciones usuales:

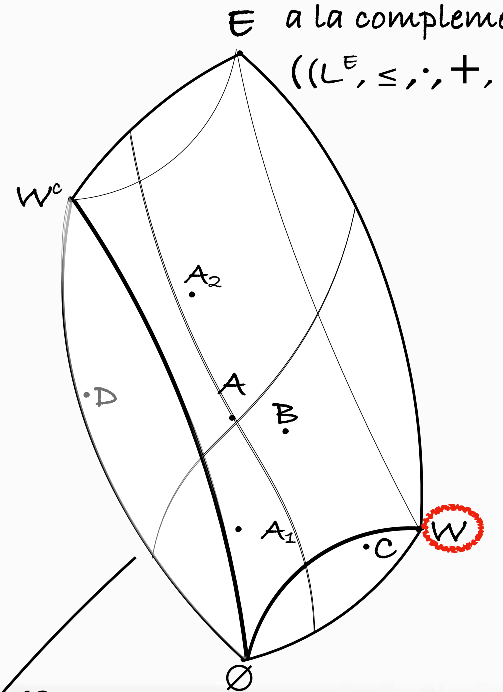
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

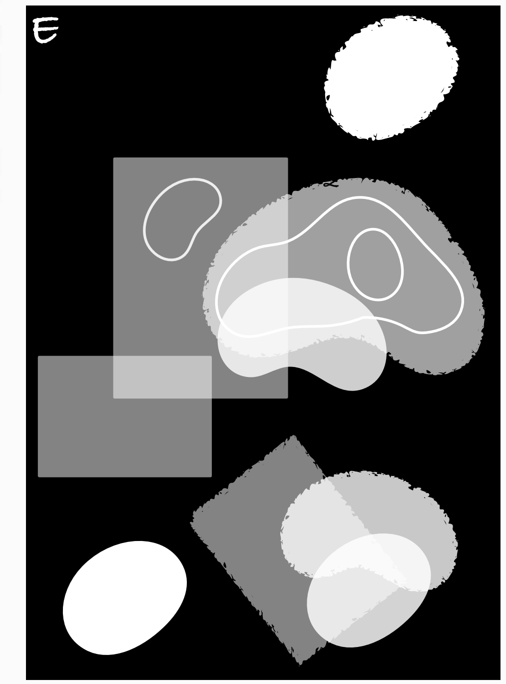
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



φ_W

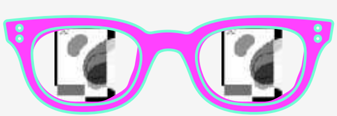
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

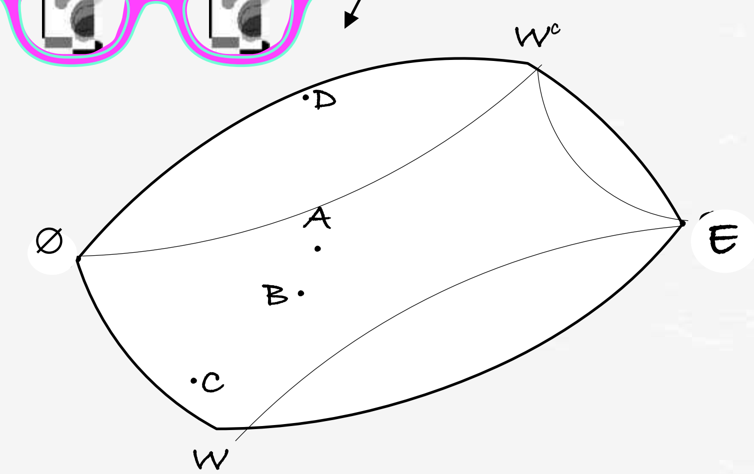
Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.



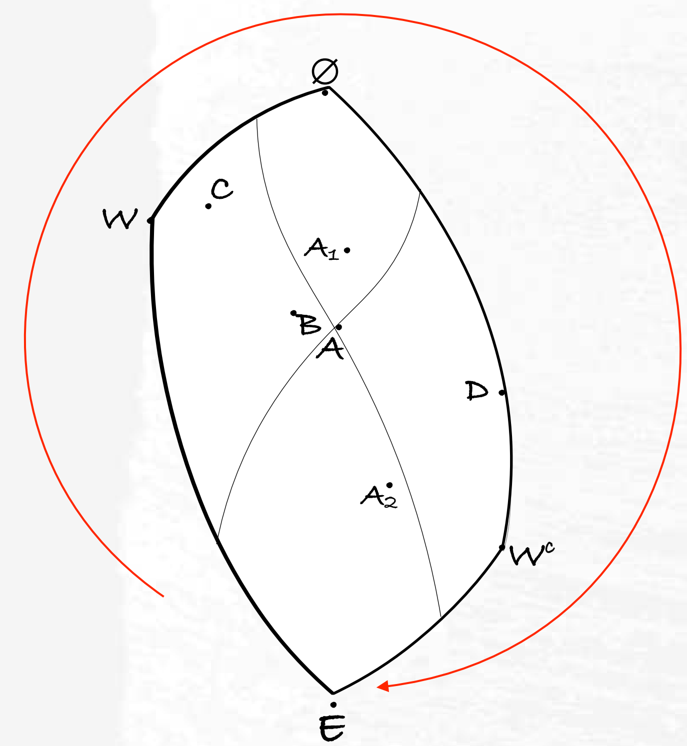
Imágenes digitalizadas

Mezcla:
Subconjuntos borrosos + imágenes digitalizadas





Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

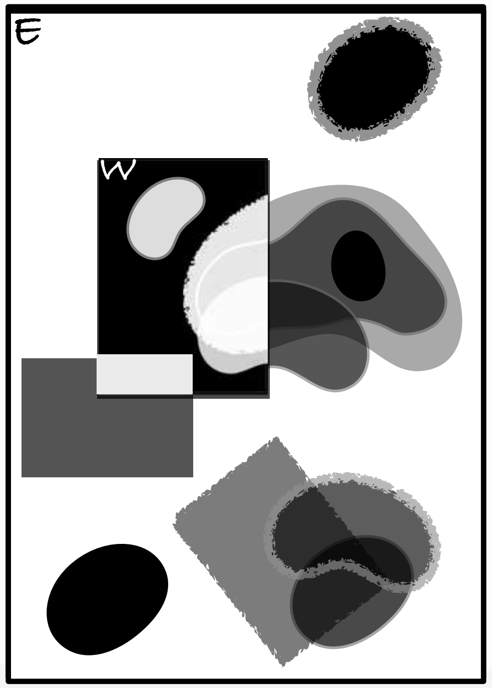


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

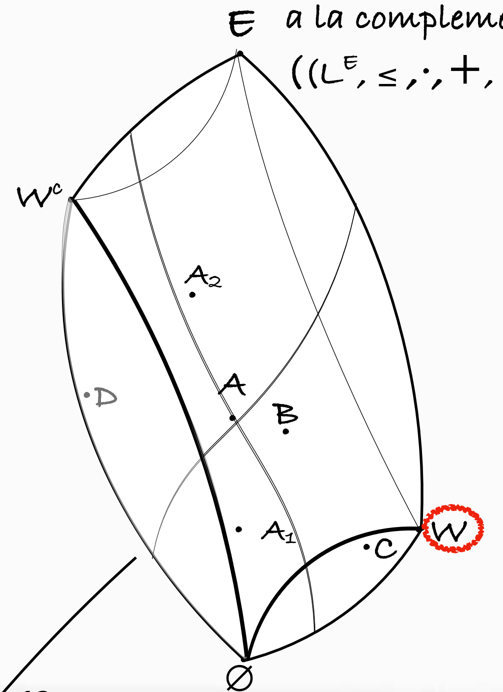
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



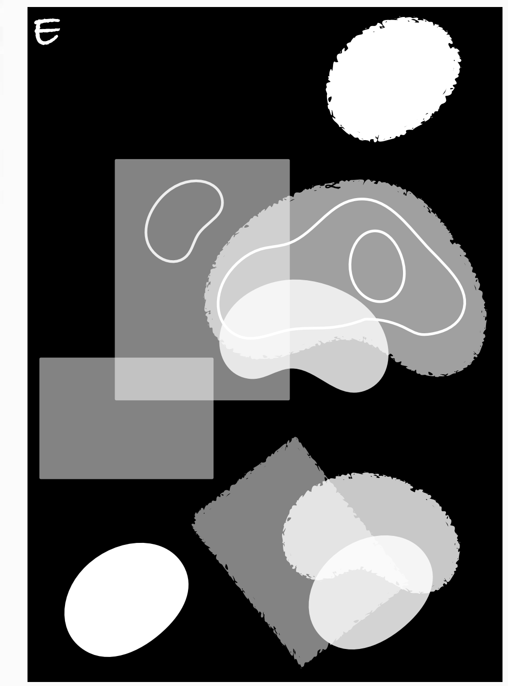
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



Dos interpretaciones usuales:

Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), <u>distinguido</u> por alguna razón.

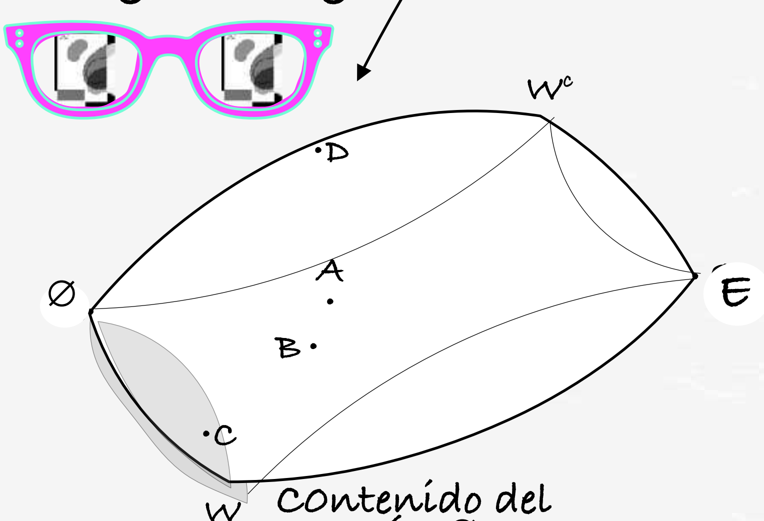


Imágenes digitalizadas

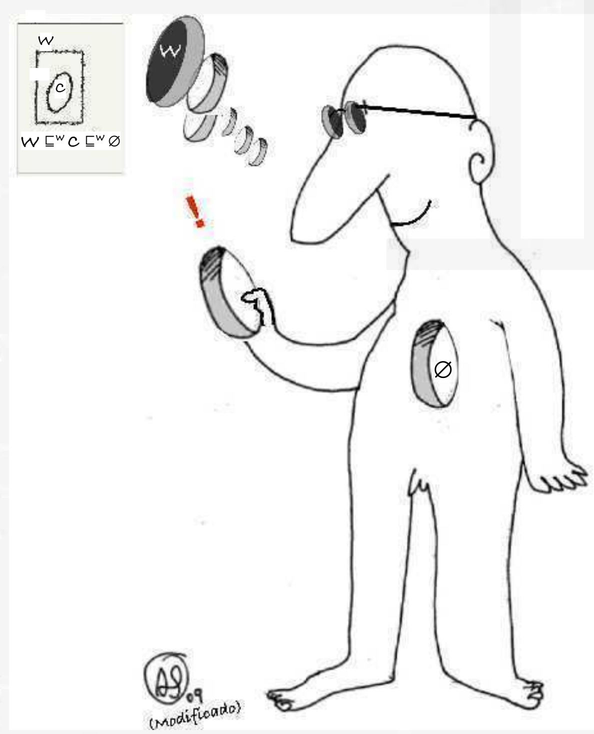
φ_W

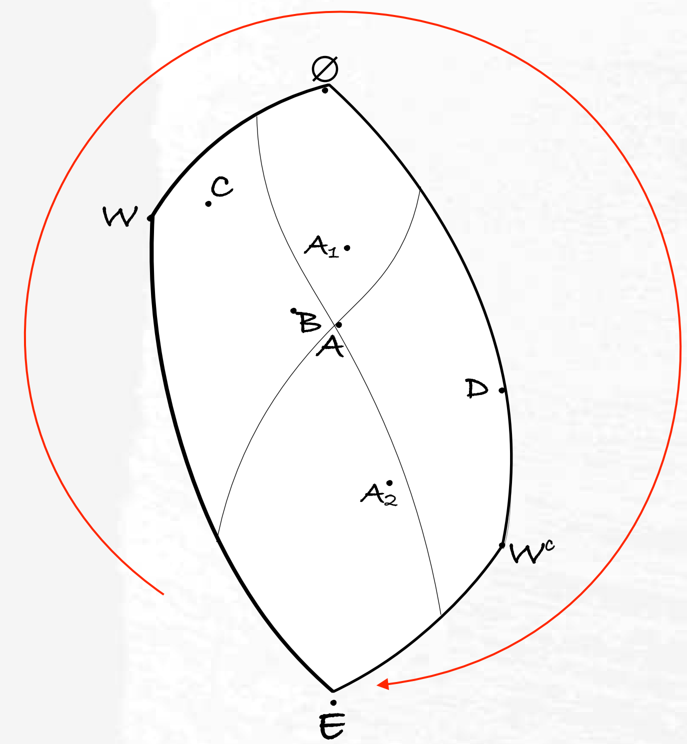
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

<u>Mezcla:</u>
Subconjuntos borrosos + imágenes digitalizadas



Contenido del vacío ∅...





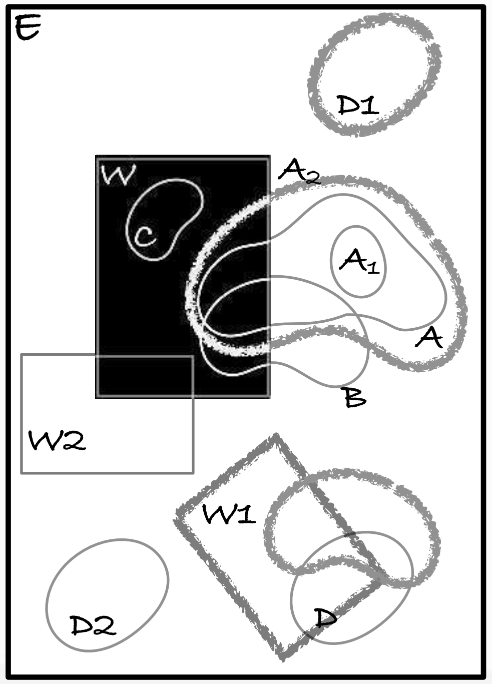
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

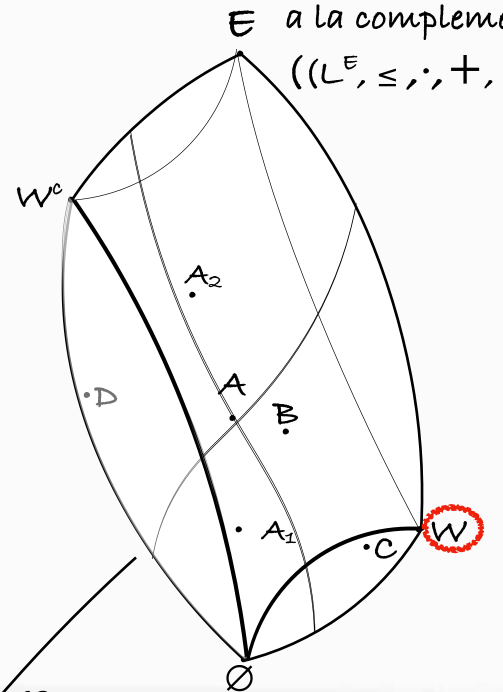
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

Dos interpretaciones usuales:

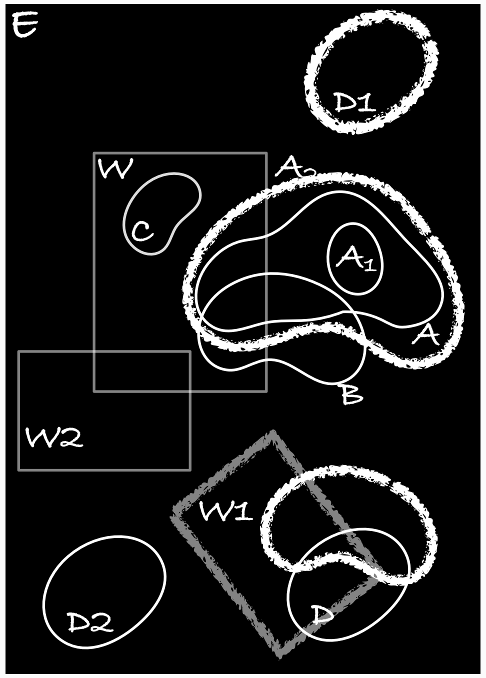
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', {}^c)$

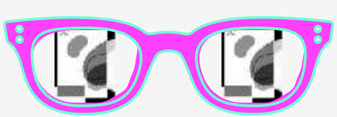


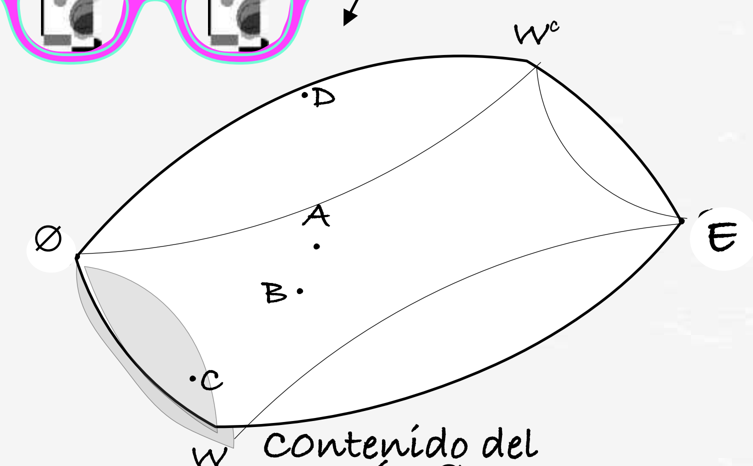
Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$),
<u>distinguido</u> por alguna razón.



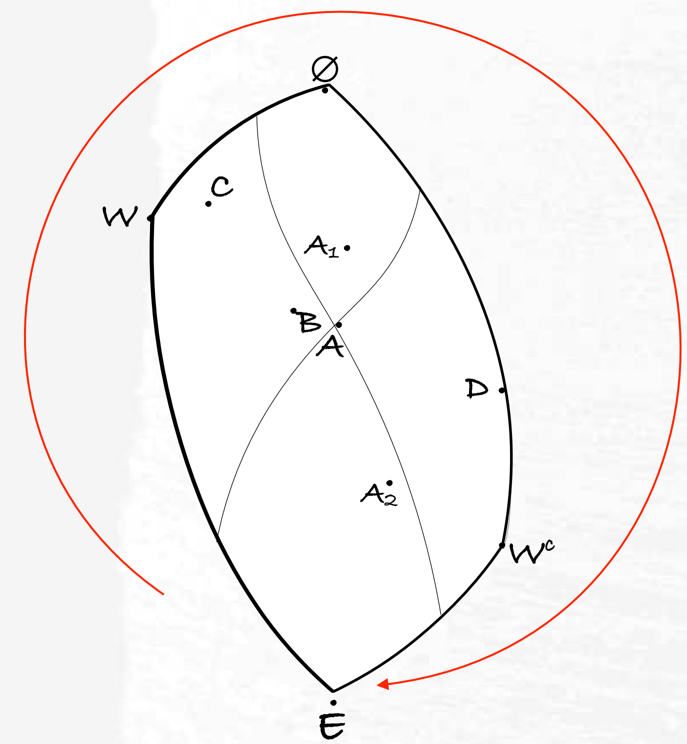
φ_W

$\varphi_W(S) = S \Delta W$





Contenido del vacío $\varnothing$...

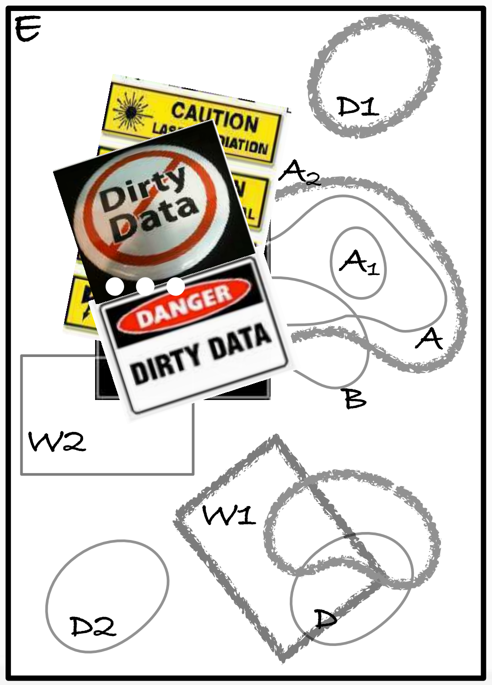


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', {}^c)$

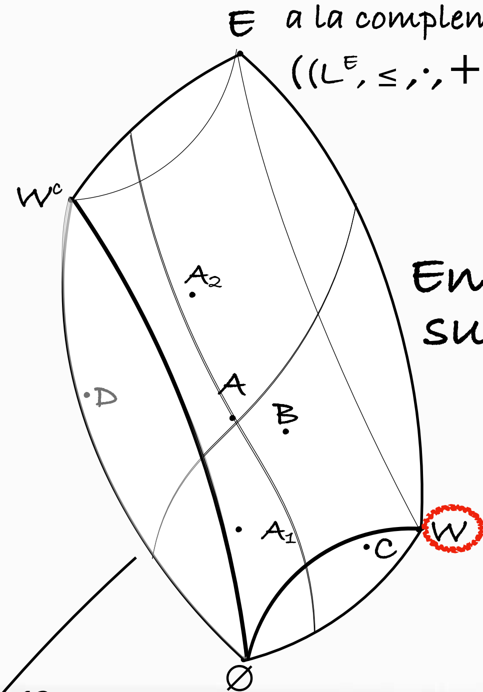
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

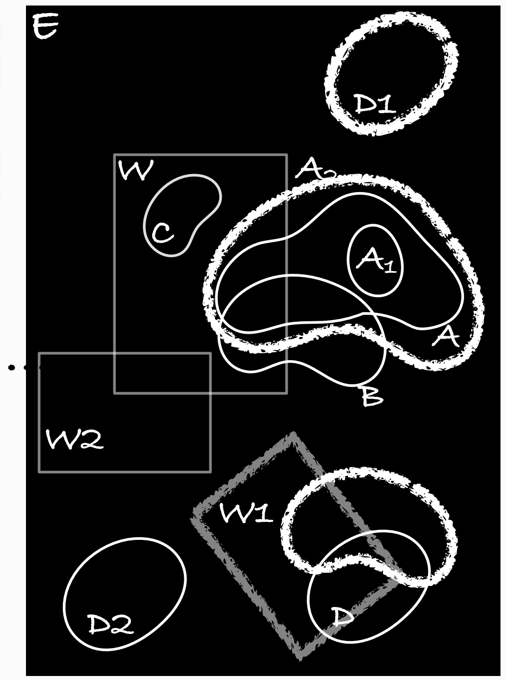
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



φ_W

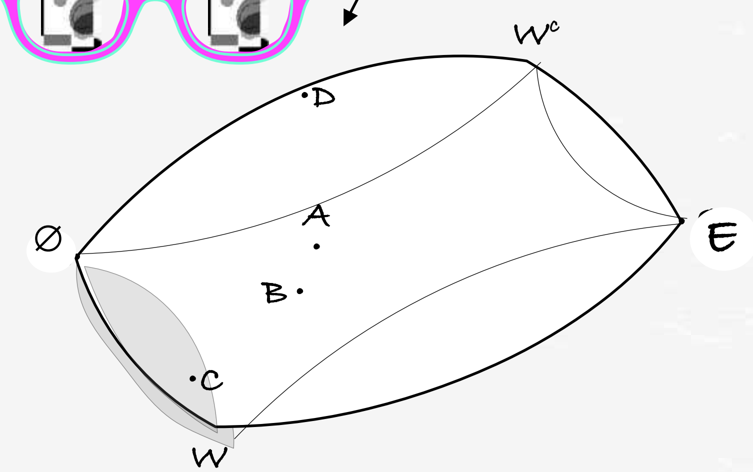
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Dos interpretaciones usuales:

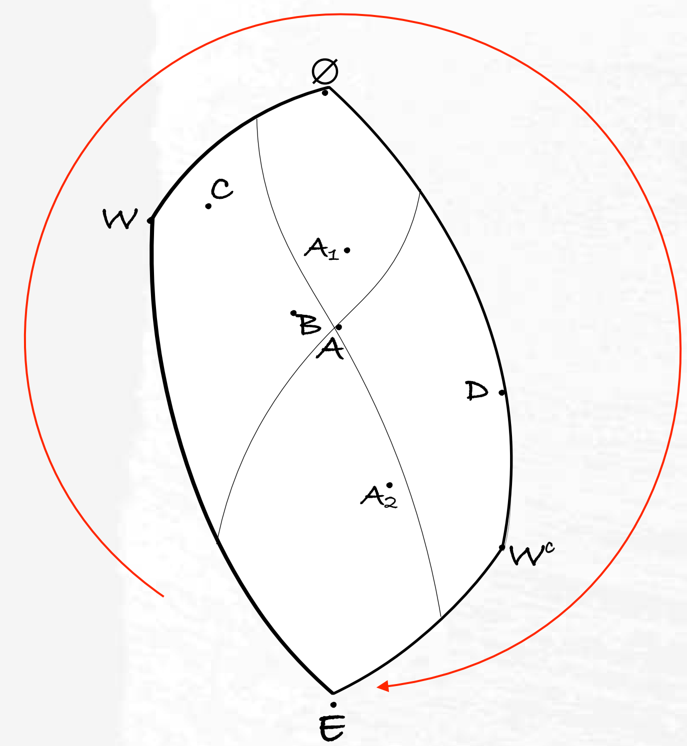


Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.

En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,...



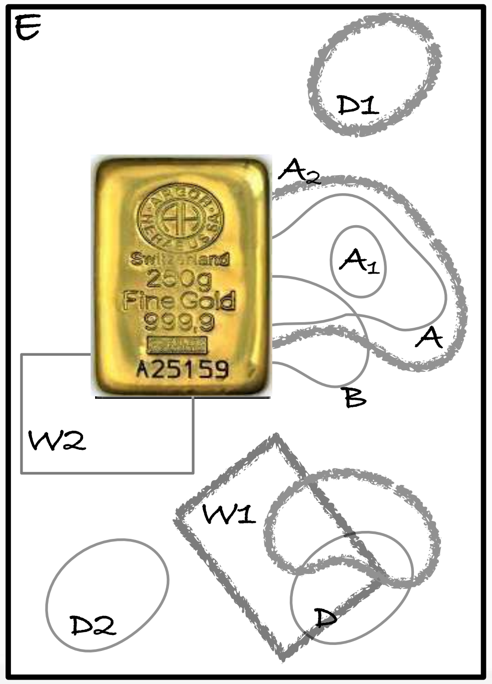
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$



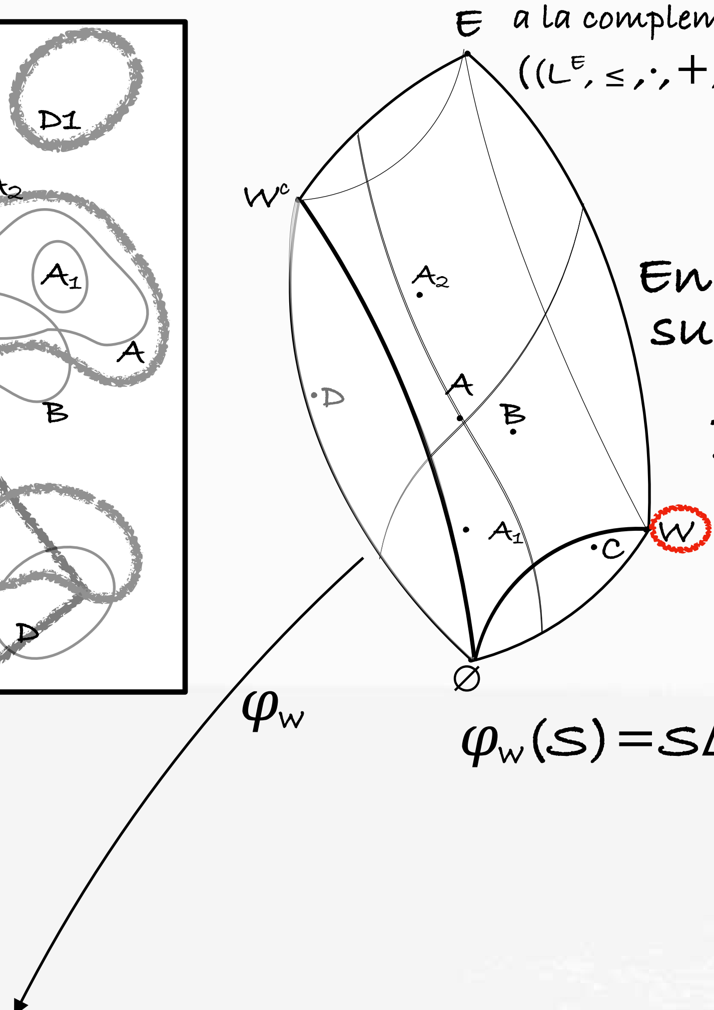
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



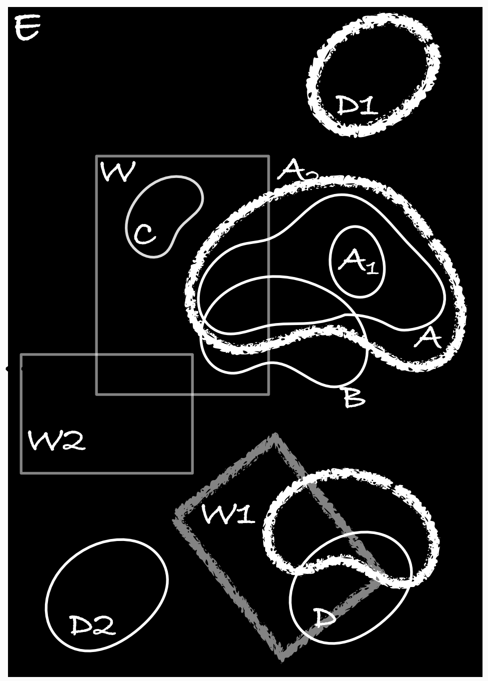
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$\varphi_W(S) = S \Delta W$

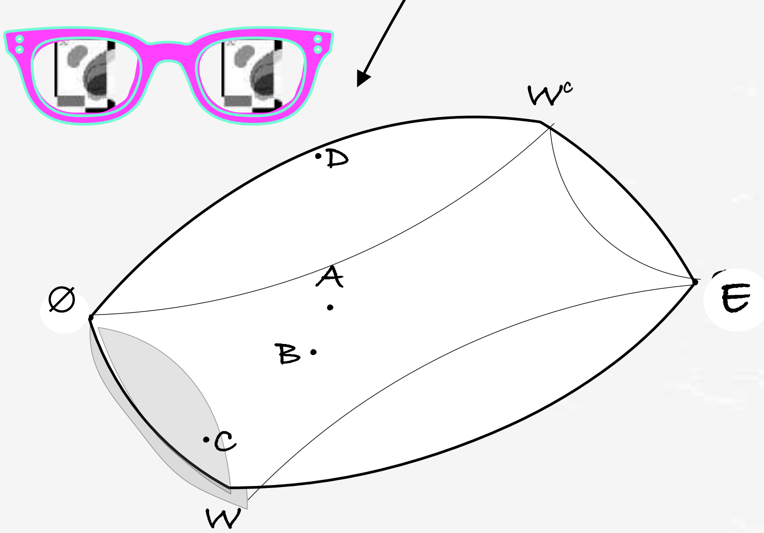
Dos interpretaciones usuales:

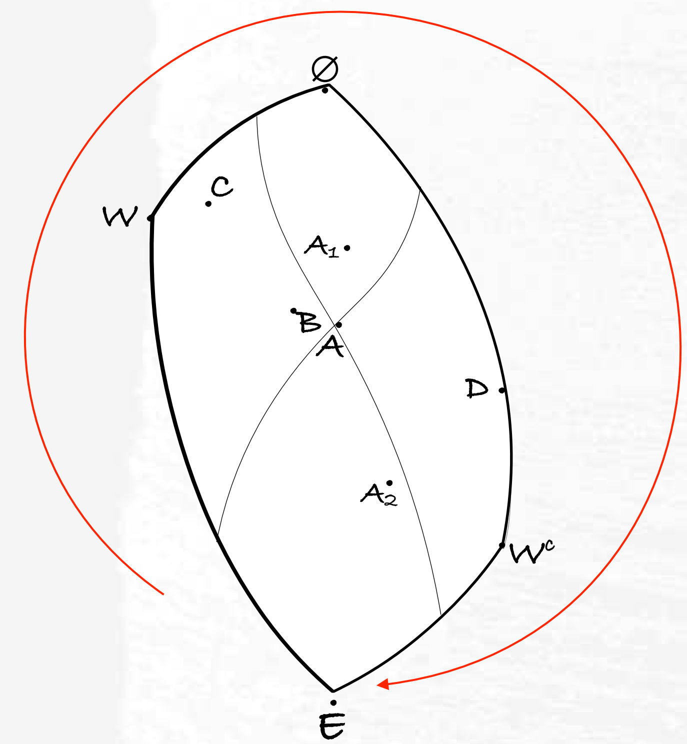
Se generaliza y otras nuevas aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.



En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,..

Aunque también un subconjunto valioso, interesante, distinguido ...

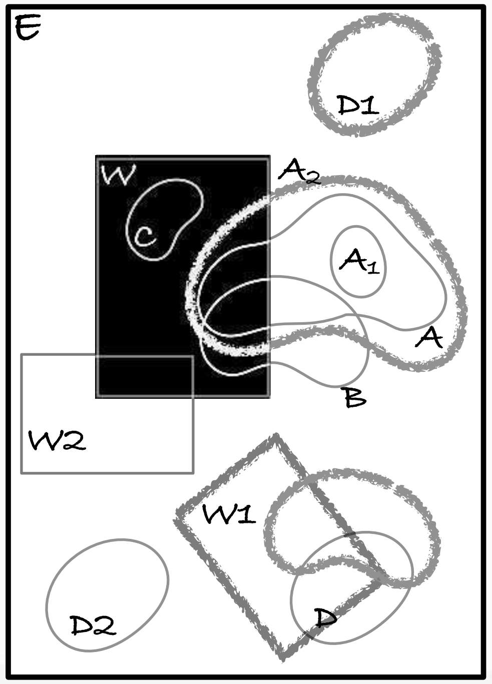




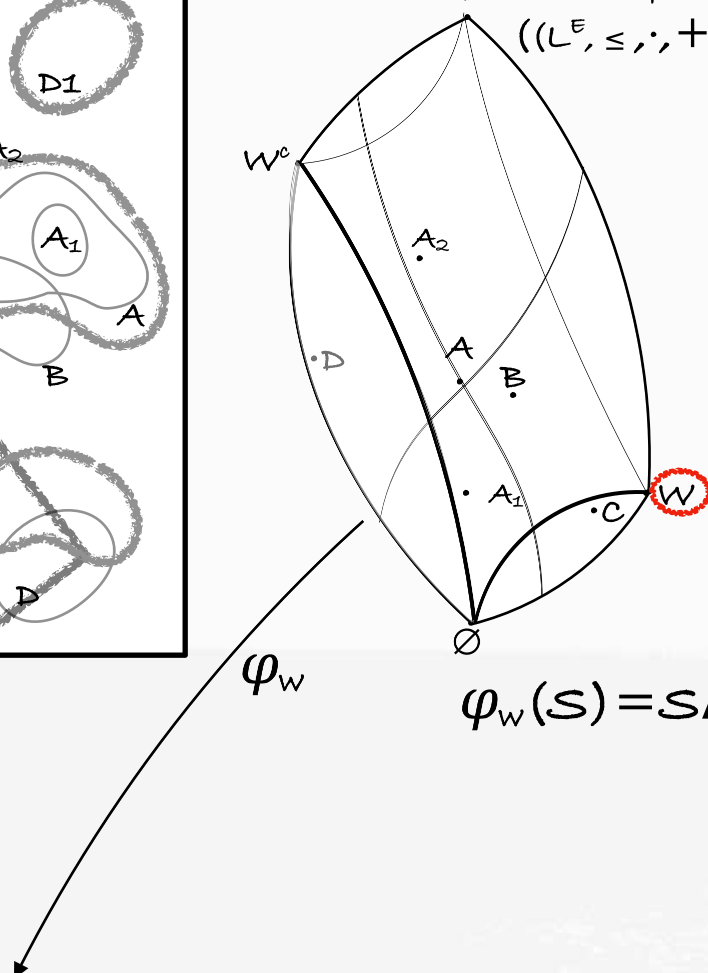
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

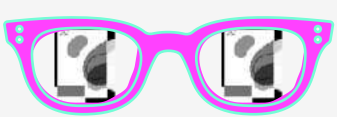


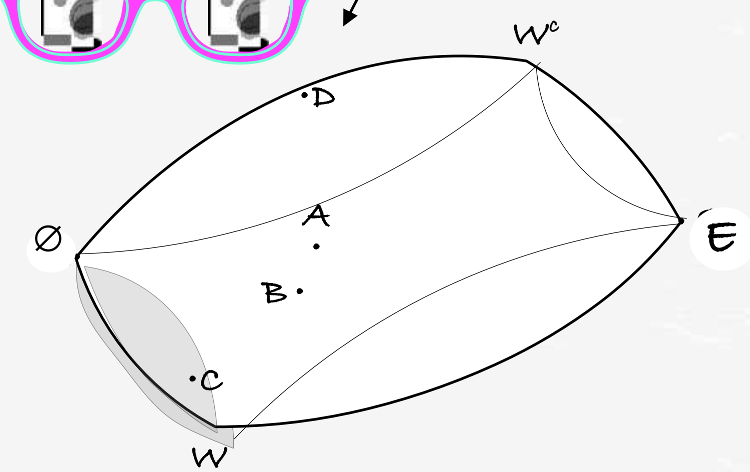
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



$\varphi_W(S) = S \Delta W$

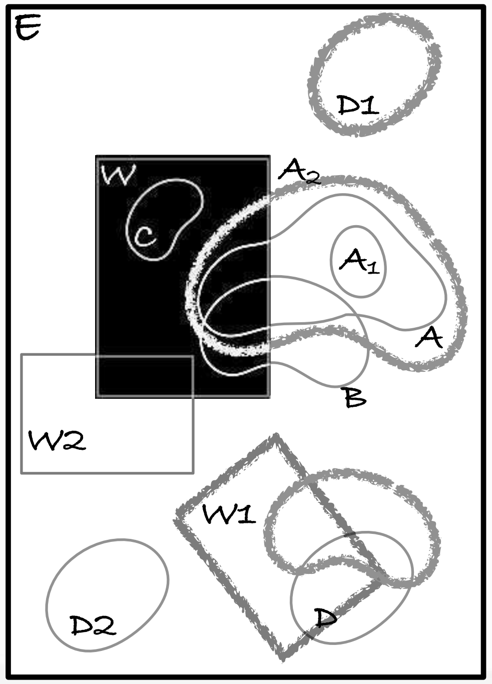
2



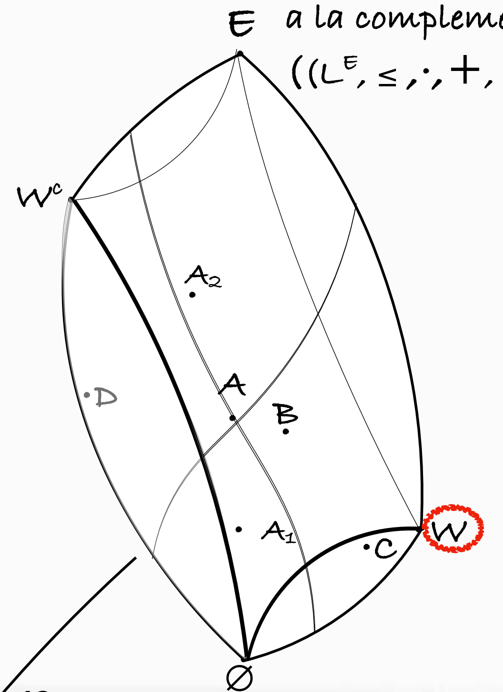


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

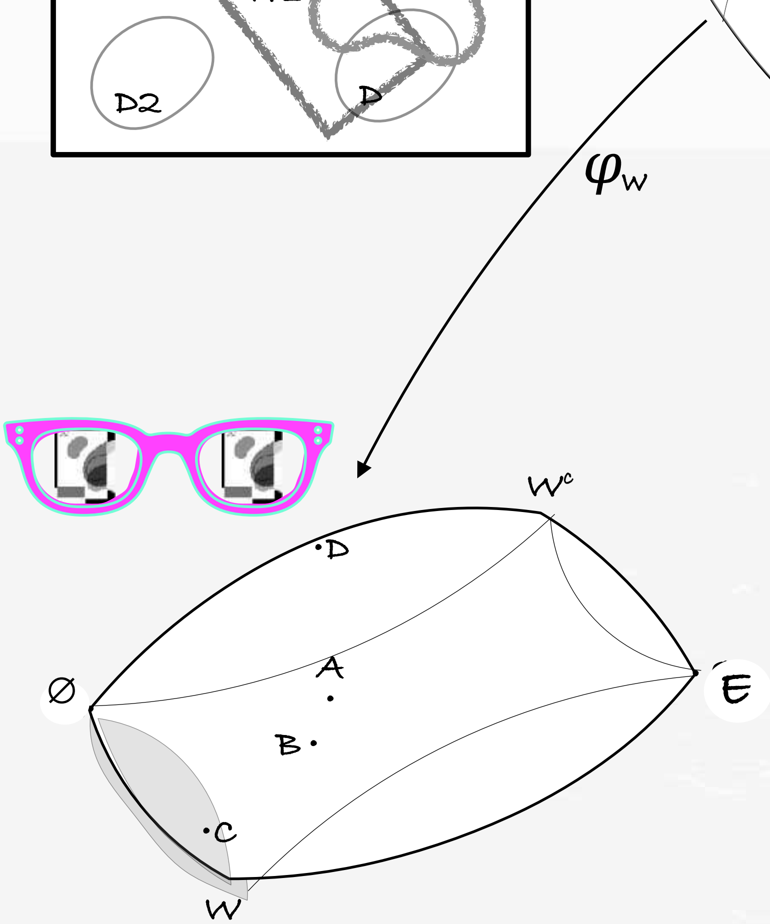
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



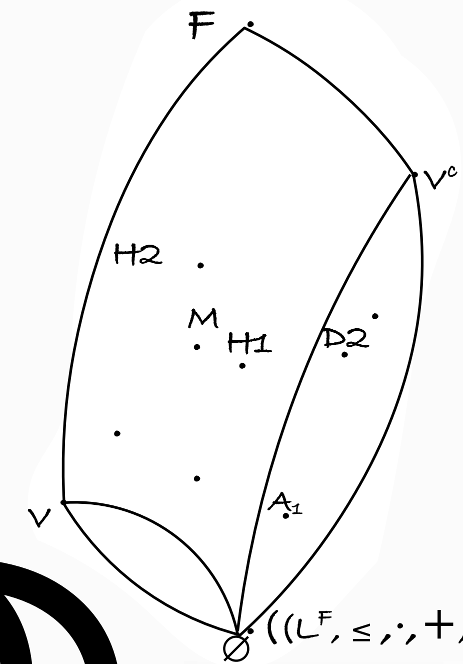
$\varphi_w(S) = S \Delta W$

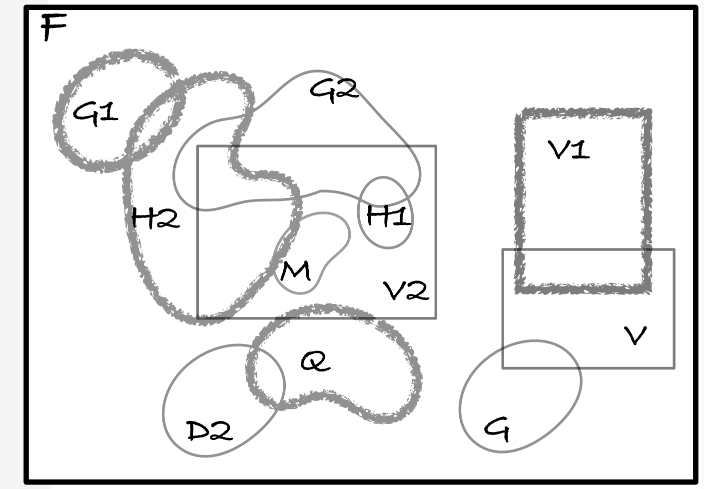


2

Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto

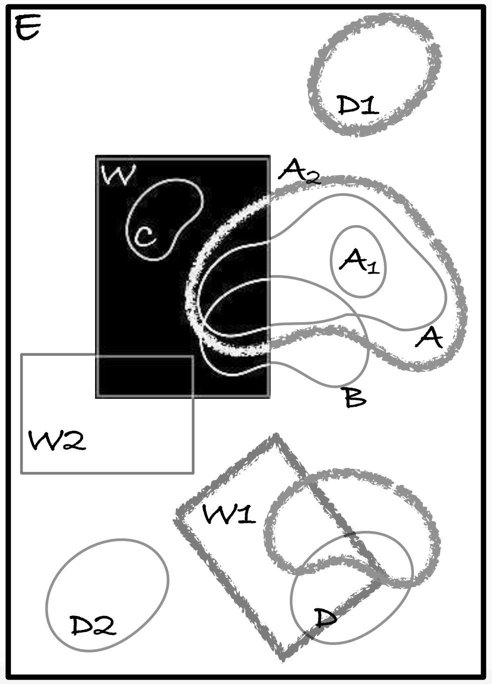
$g: (L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.



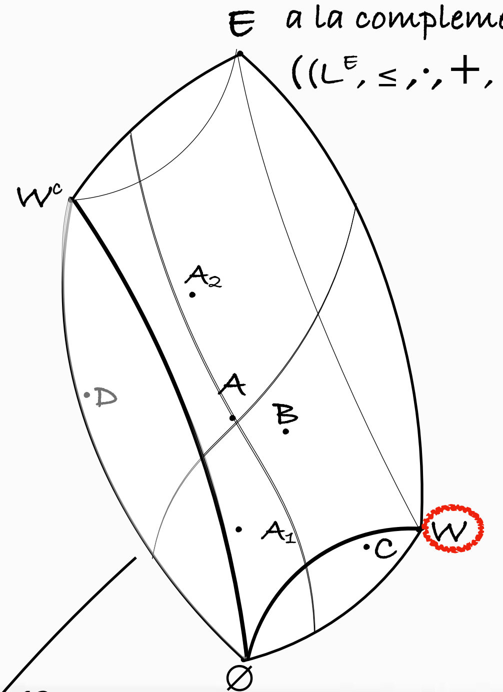


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

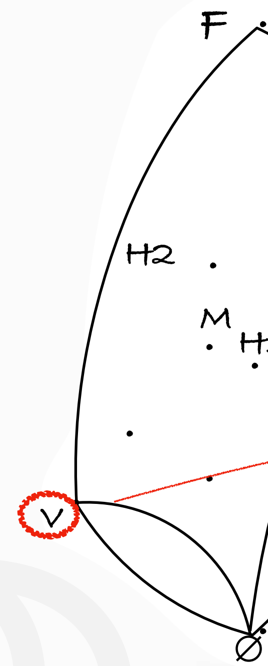


φ_w

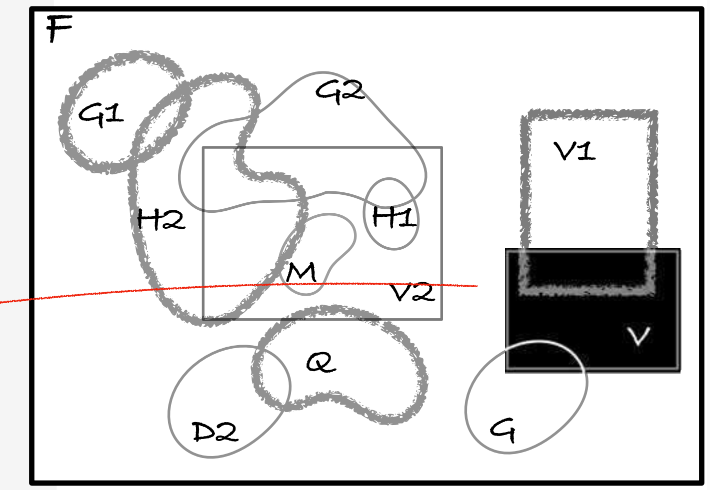
$\varphi_w(S) = S \Delta W$

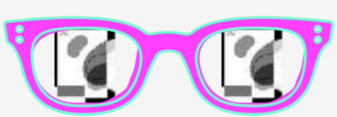
Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto

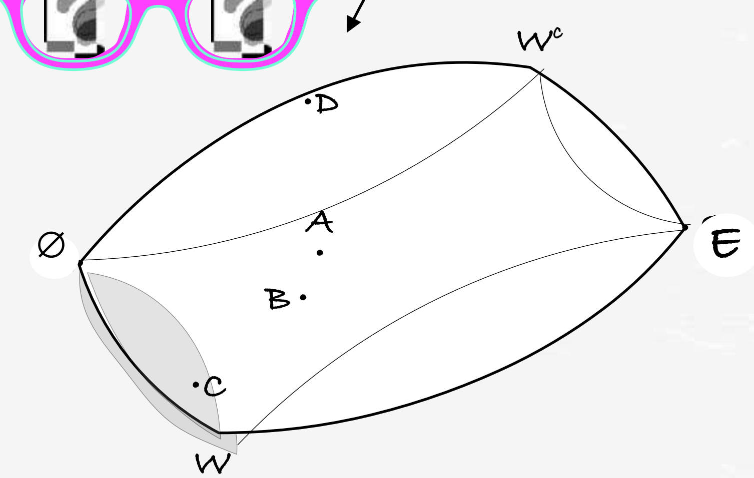
$g: (L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(v,w)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.



$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', {}^c)$





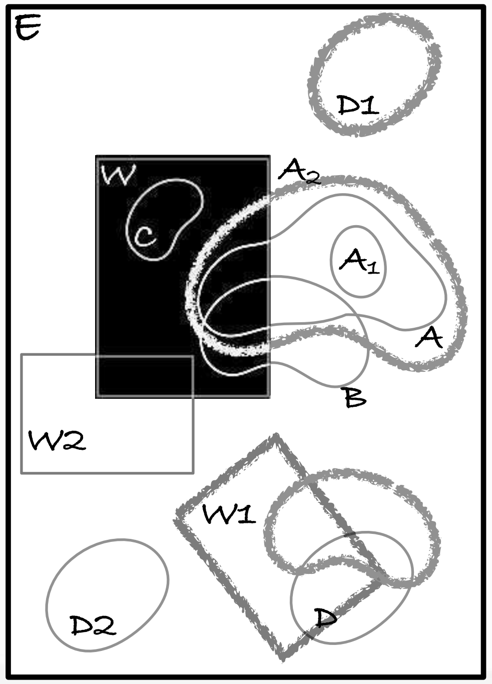


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

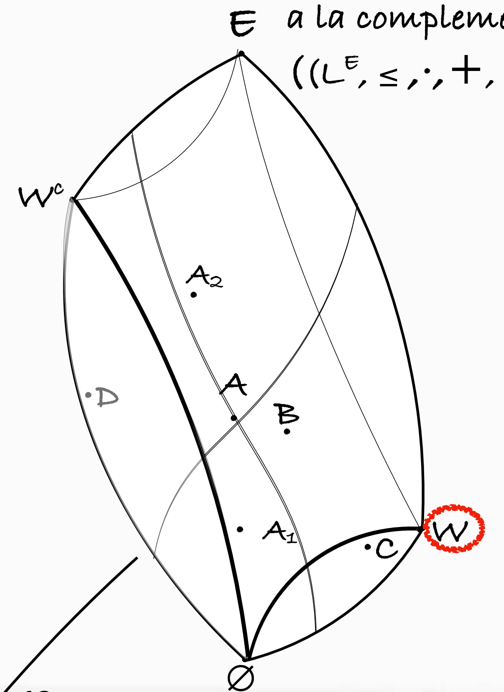
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



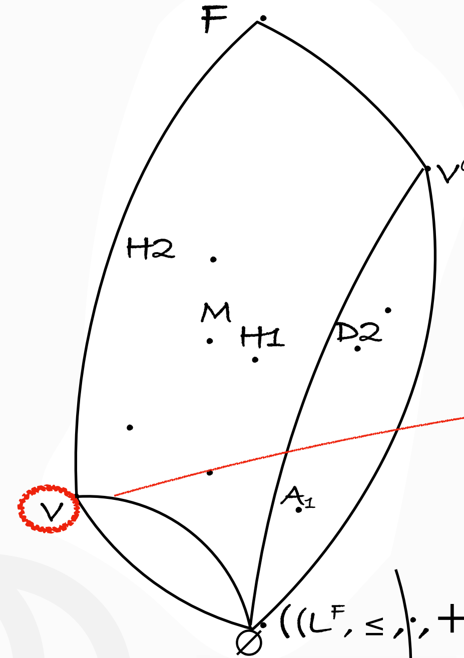
Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



φ_W

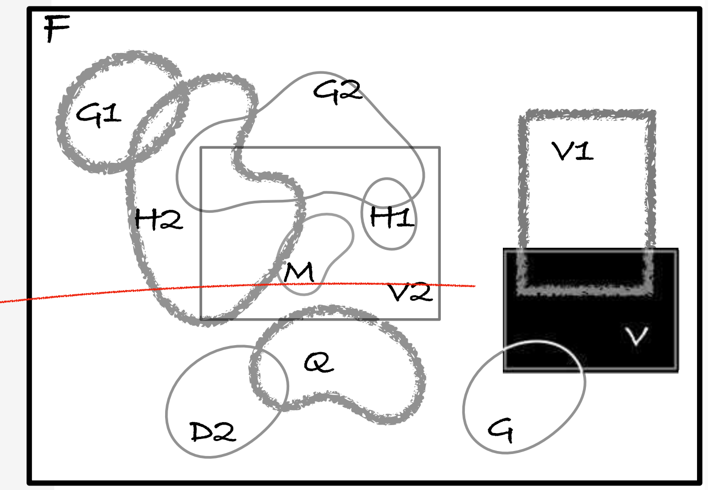
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

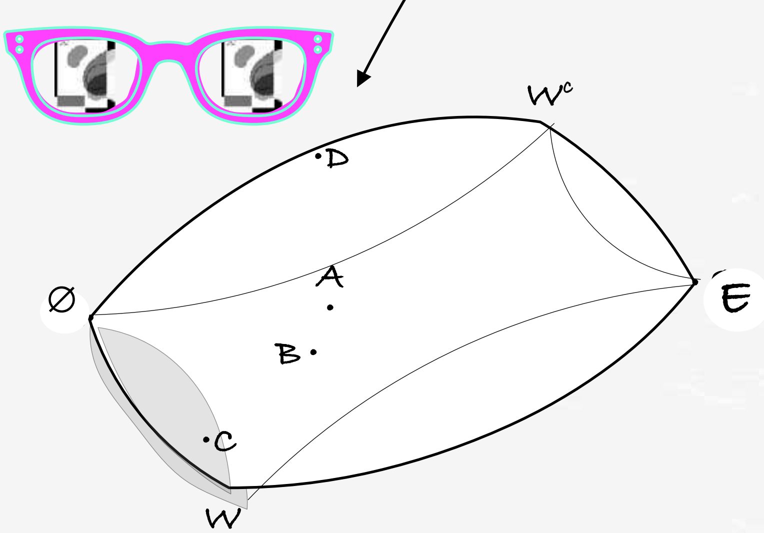


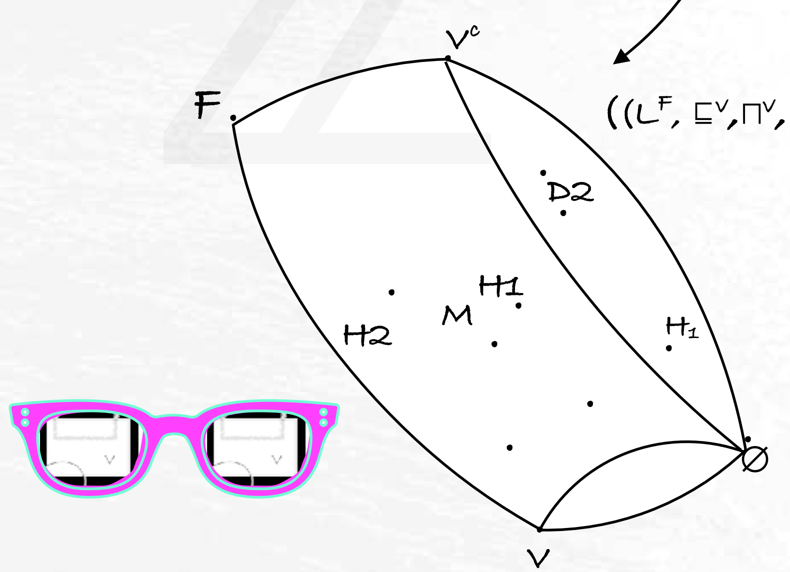
$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$

φ_V

$\varphi_V(K) = K \Delta V$



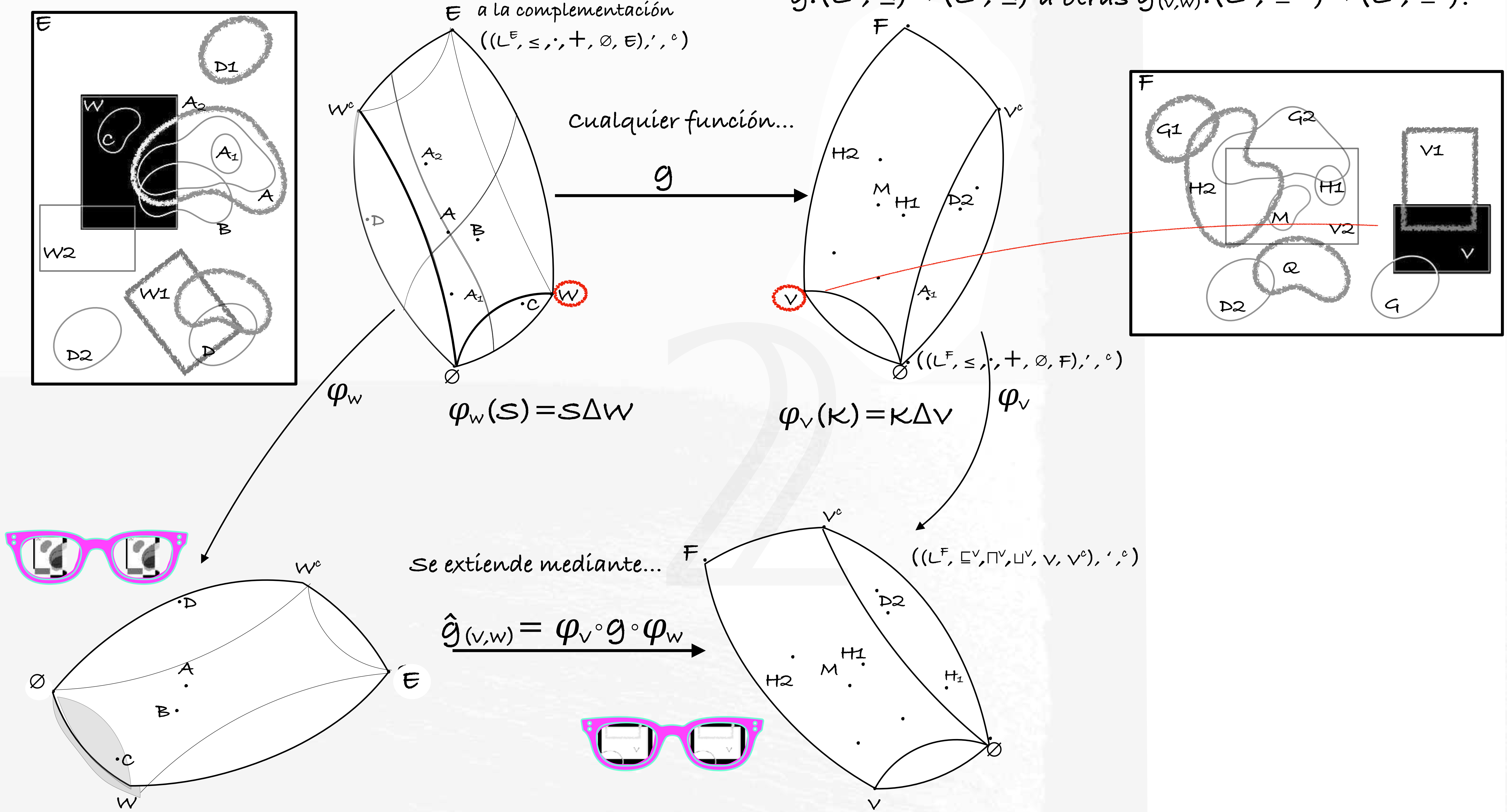




$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

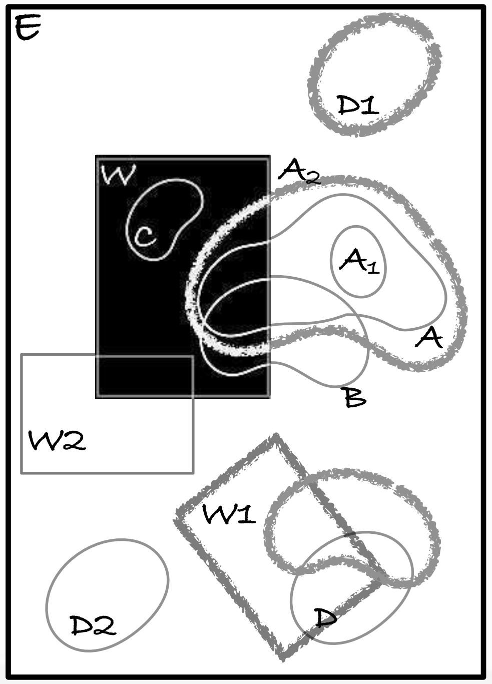
Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.



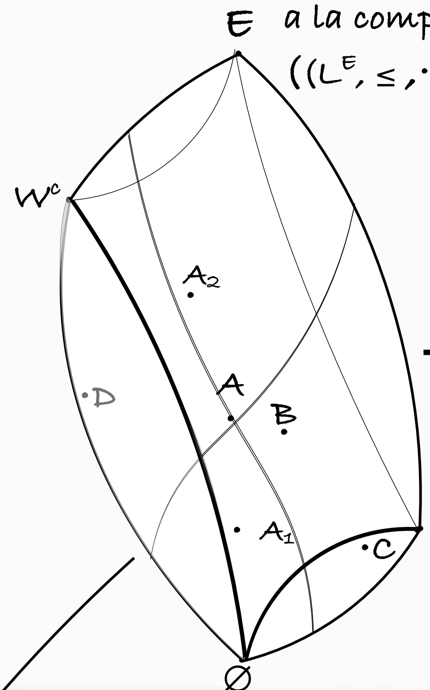
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A\Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto $g:(L^E,\le)\to(L^F,\le)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(L^F,\sqsubseteq^V)$.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing\le E,\ A\le E,\ B\le E,\dots,\ E\le E$

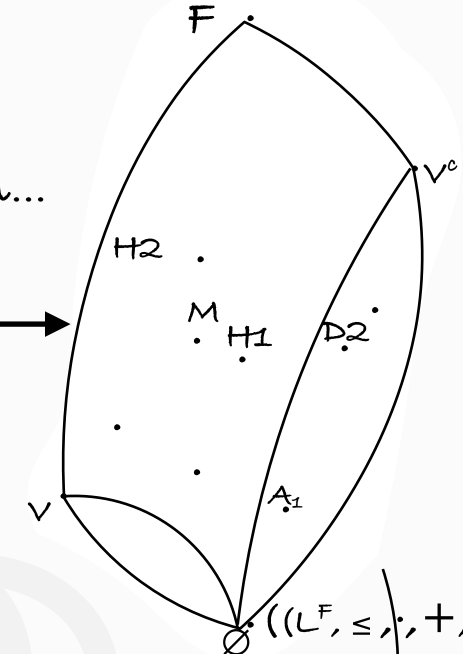


Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E,\le,\cdot,+,\varnothing,E),',^c)$

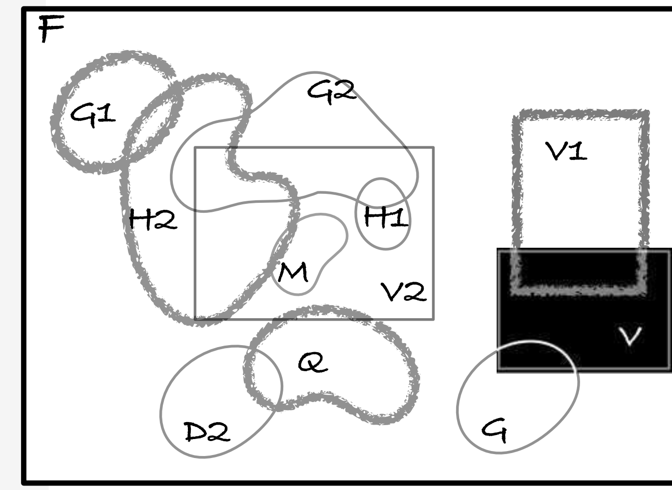


Cualquier función...

g



$((L^F,\le,\cdot,+,\varnothing,F),',^c)$



φ_W

$\varphi_W(S)=S\Delta W$

$\varphi_V(K)=K\Delta V$

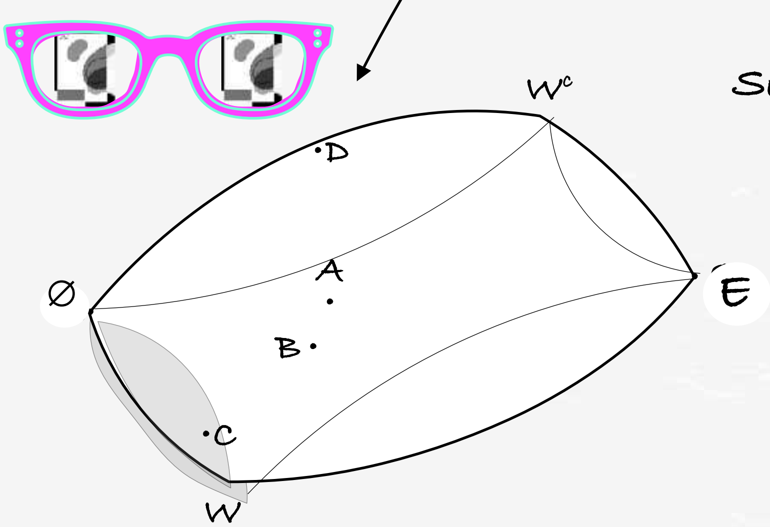
φ_V

Coherencia:
sí

$g(\bigcap_{j\in J}A_j)=\bigcap_{j\in J}g(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

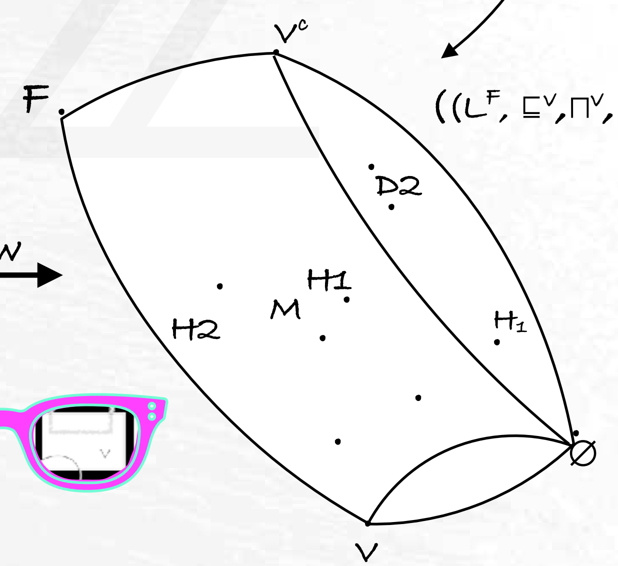
$((L^F,\sqsubseteq^V,\sqcap^V,\sqcup^V,V,V^c),',^c)$

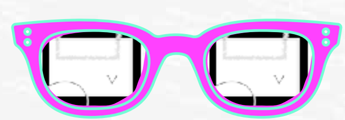
$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, etc...



Se extiende mediante...

$\hat{g}_{(V,W)}=\varphi_V\circ g\circ\varphi_W$





Entonces
también

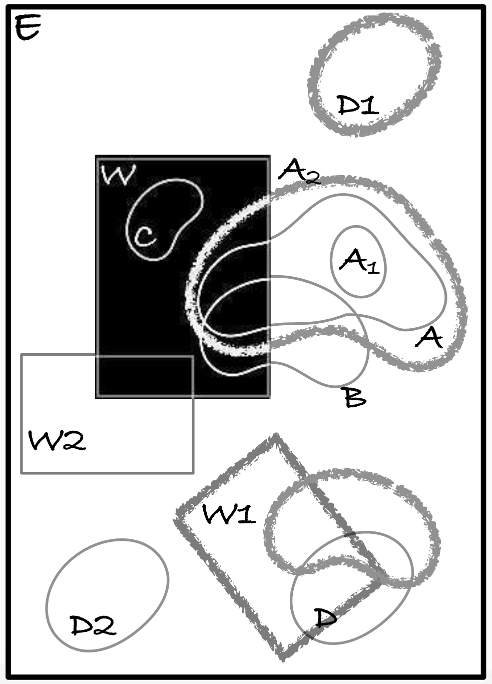
$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcap^W_{j\in J}A_j)=\bigsqcap^V_{j\in J}\hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

$(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{g}_{(V,W)}(A)\sqsubseteq^V\hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

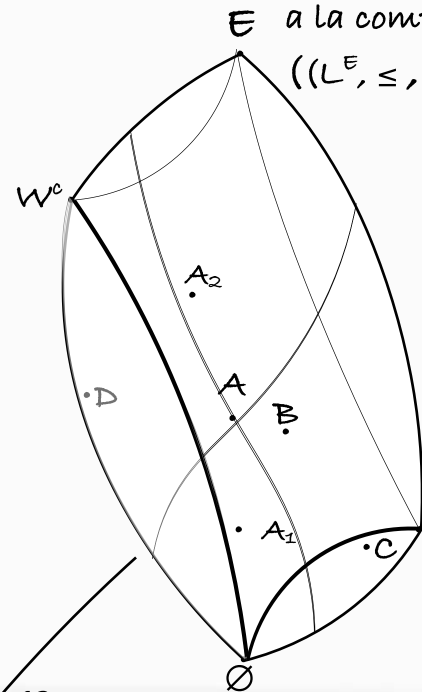
Sistema algebraico $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),',^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A\longrightarrow\varphi_W(A)=A\Delta W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)}$

Se justifica la "coherencia" del método propuesto para la extensión de funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

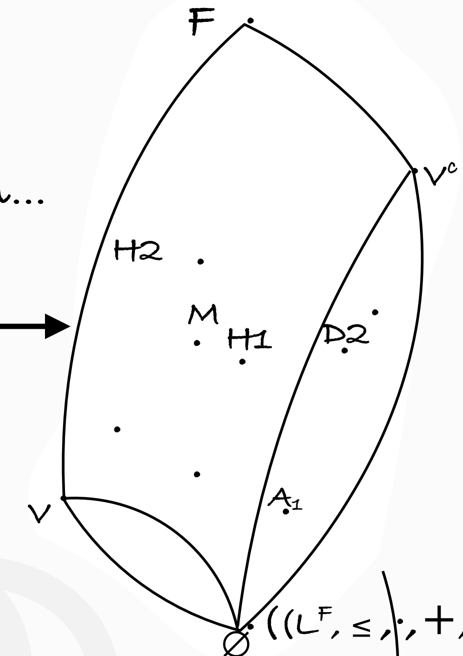


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

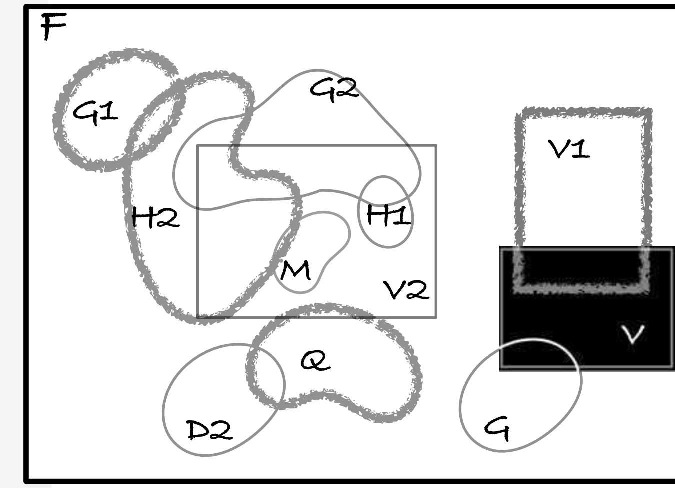


Cualquier función...

$\xrightarrow{\quad g \quad}$



$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$

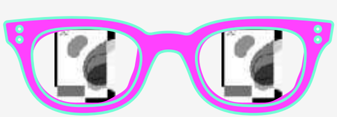


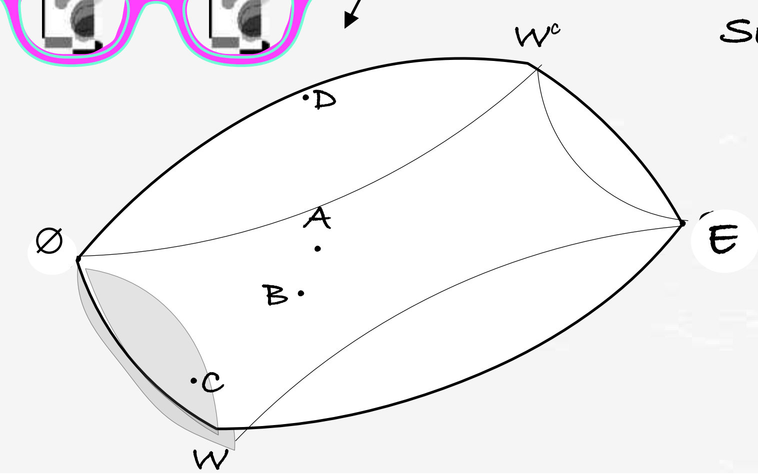
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$

φ_W

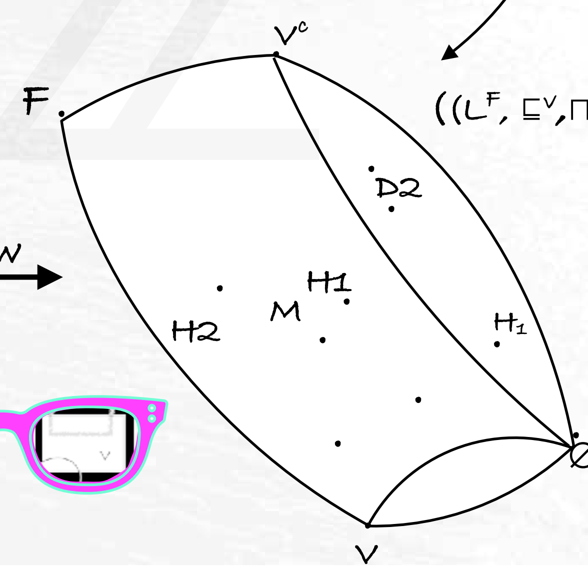
φ_V



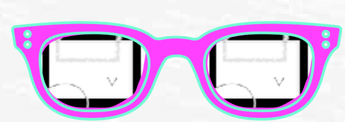


Se extiende mediante...

$$\hat{g}_{(V,W)} = \varphi_V \circ g \circ \varphi_W$$



$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$



Coherencia:
sí

$$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

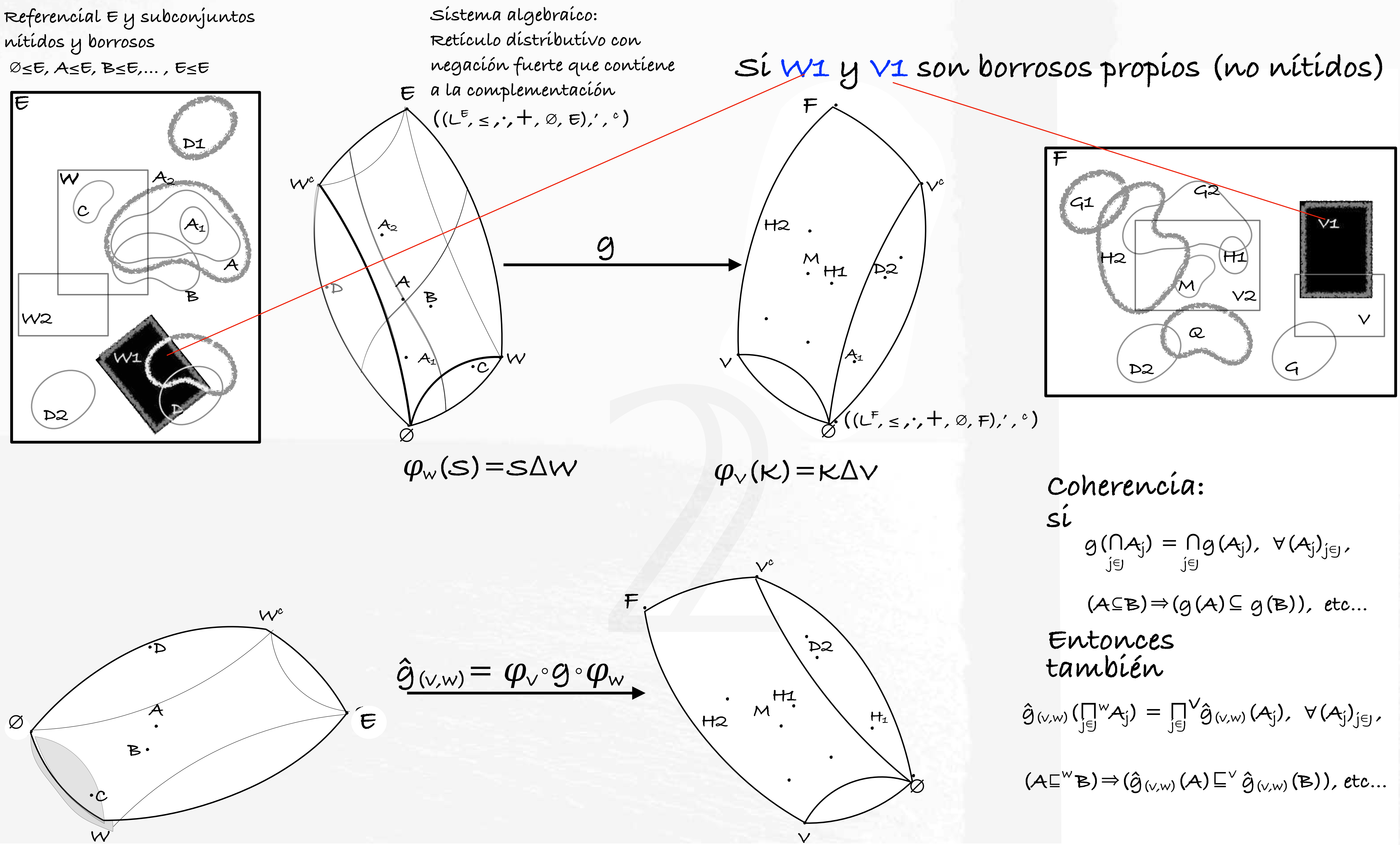
$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcap_{j \in J}{}^{W} A_j) = \bigsqcap_{j \in J}{}^{V} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

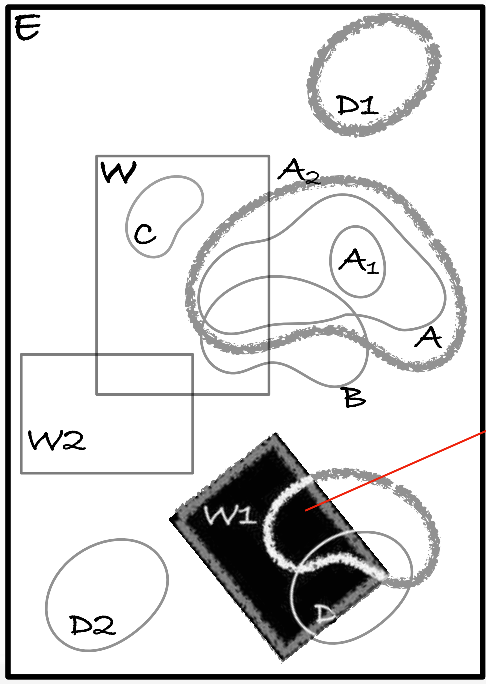
$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

Consecuentemente, la teoría aquí incluida parece ser de utilidad en situaciones en las que, por una parte, jueguen un papel relevante las funciones de conjunto y por otra, que interese que uno de esos conjuntos destaque sobre los restantes.



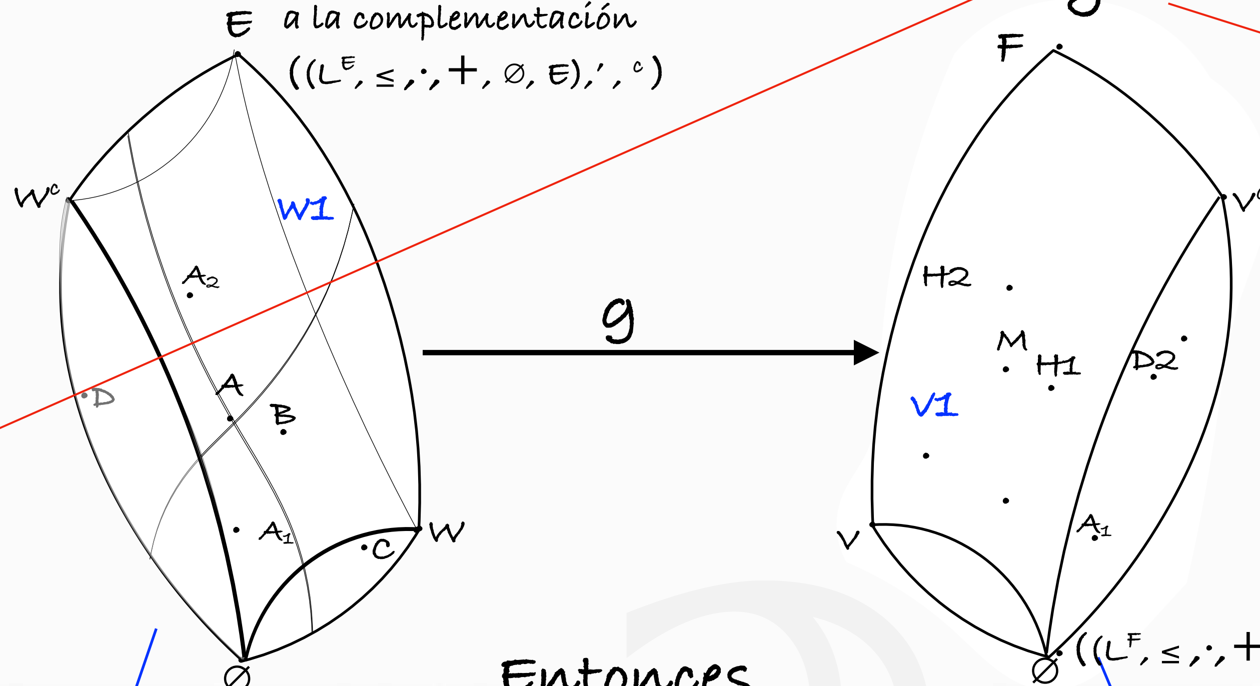
Consecuentemente, la teoría aquí incluida parece ser de utilidad en situaciones en las que, por una parte, jueguen un papel relevante las funciones de conjunto y por otra, que interese que uno de esos conjuntos destaque sobre los restantes.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \dots ,\ E \le E$

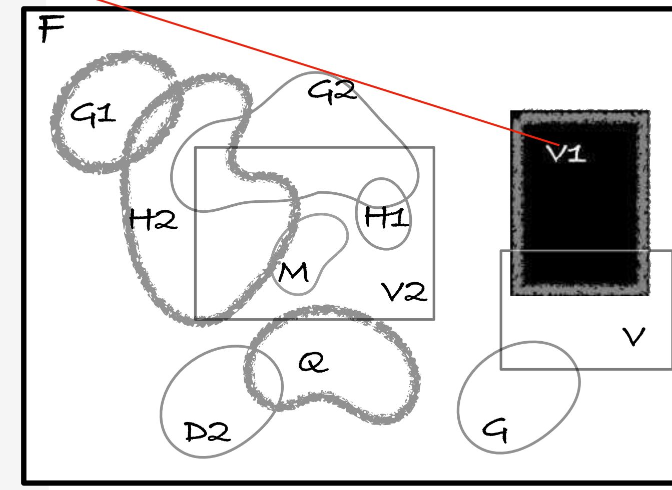


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

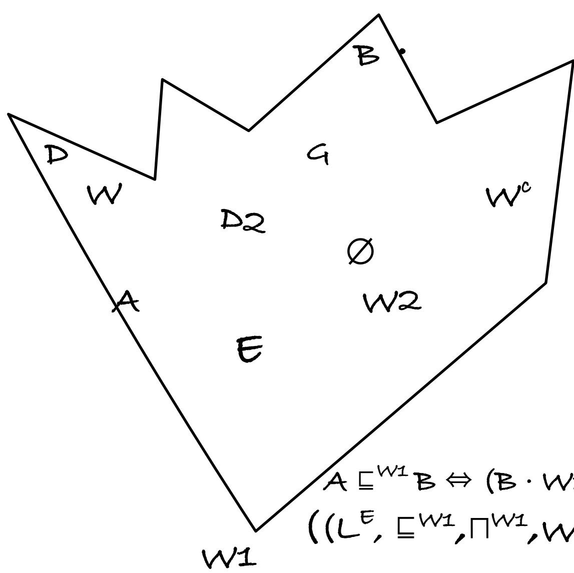


$((L^F, \le, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$

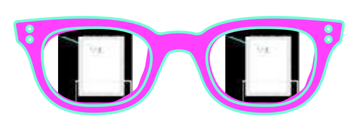


Entonces...

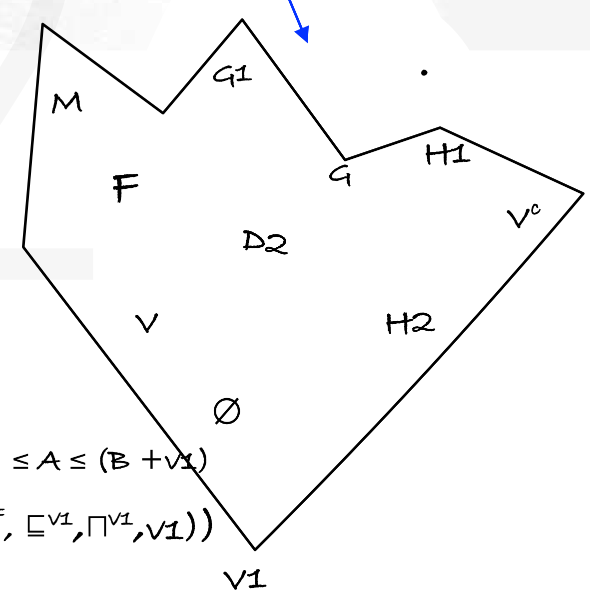
~~$\varphi_W(C) = C \wedge W$~~ ~~$\varphi_V(X) = X \wedge V$~~



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \le A \le (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \le A \le (B + V1)$
$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$



Coherencia:
si

$g(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$_{,w)}(\bigsqcap^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j\in J} \hat{g}_{(v,w)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

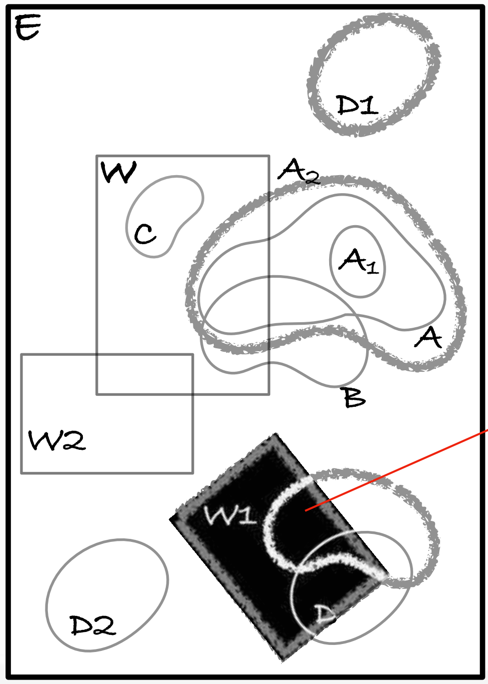
$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(v,w)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(v,w)}(B))$, etc...

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \to \varphi_W(A) = A \wedge W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$~~

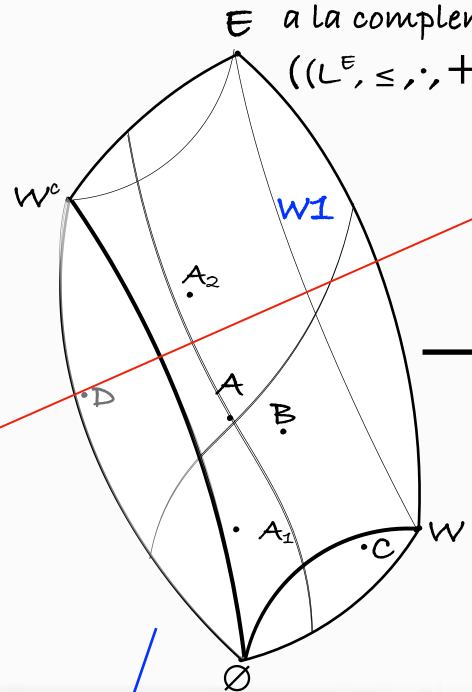
Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

Cuestiones abiertas

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

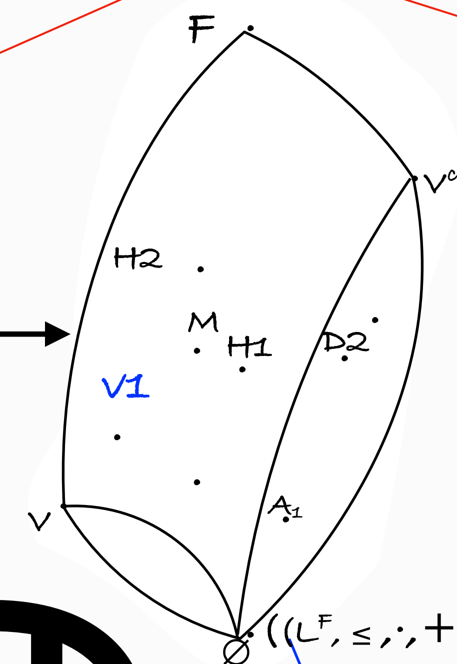


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

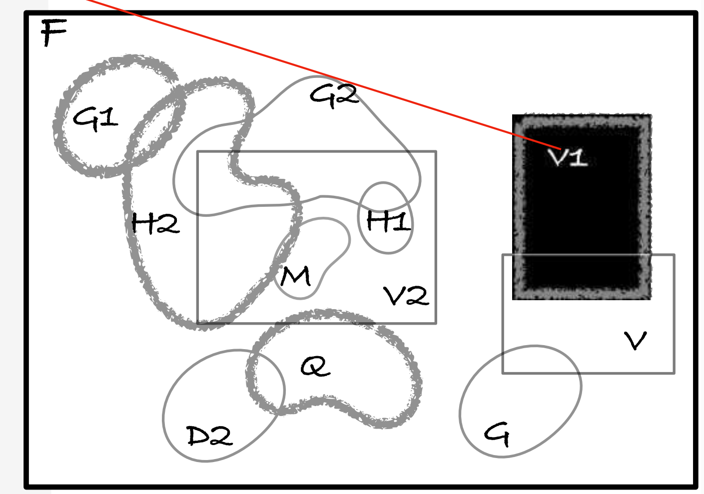


g

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)



$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$

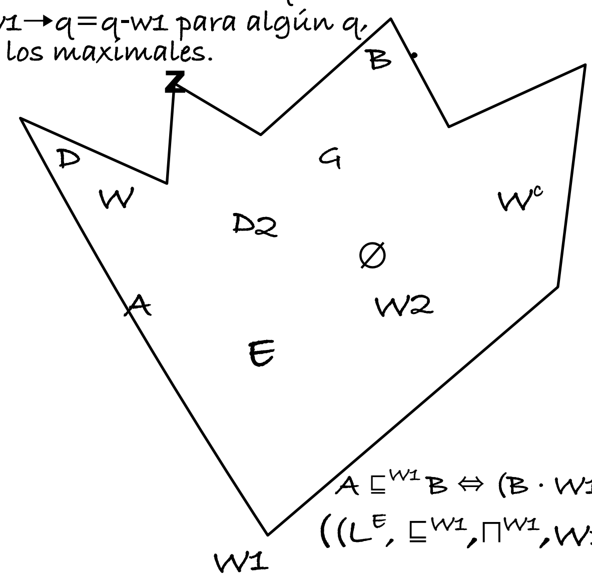


Entonces...

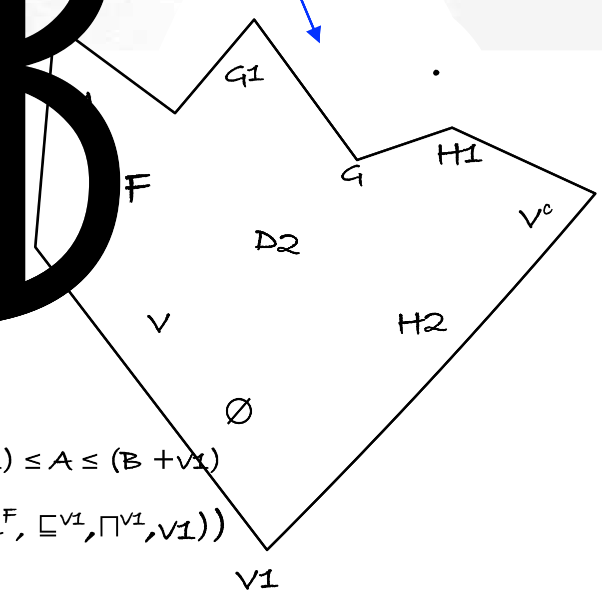
~~$\varphi_W(C) = C \wedge W$~~ ~~$g_V(A) = A \wedge V$~~

Otra caracterización en el caso L cadena)

1. Los elementos z tales que $z = w1 \to q = q - w1$ para algún q, son los maximales.



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$
$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:
si

$$g\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),\ \text{etc...}$$

Entonces también

$$_{(v,w)}\left(\sqcap^W_{j \in J} A_j\right) = \sqcap^V_{j \in J} \hat{g}_{(v,w)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(v,w)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(v,w)}(B)),\ \text{etc...}$$

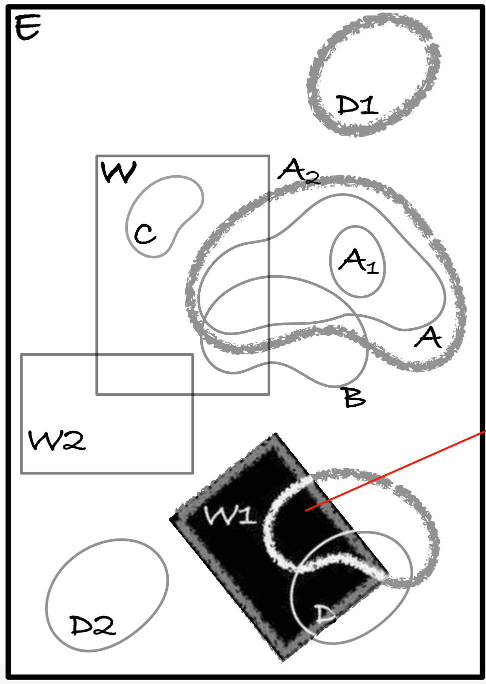
~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \to \varphi_W(A) = A \wedge W = (A' + W) \cdot (A + W^c)$~~

Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

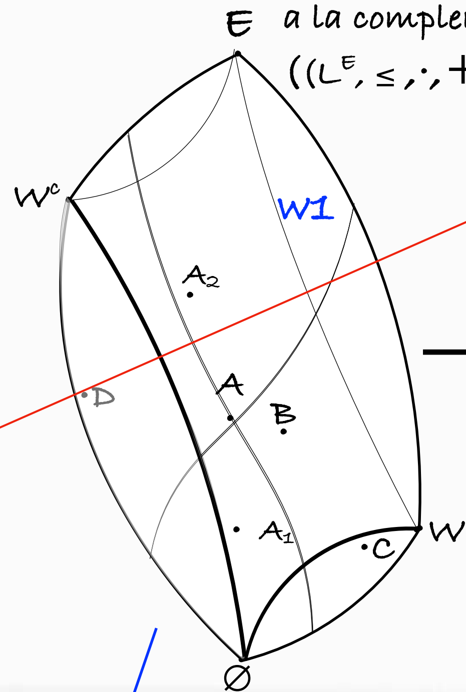
Cuestiones abiertas

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

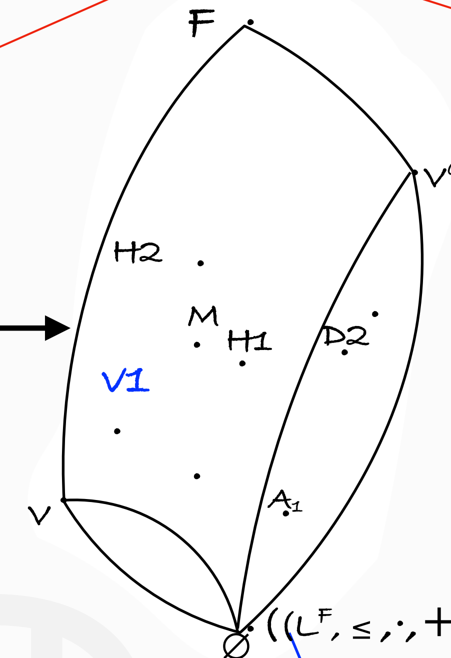
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



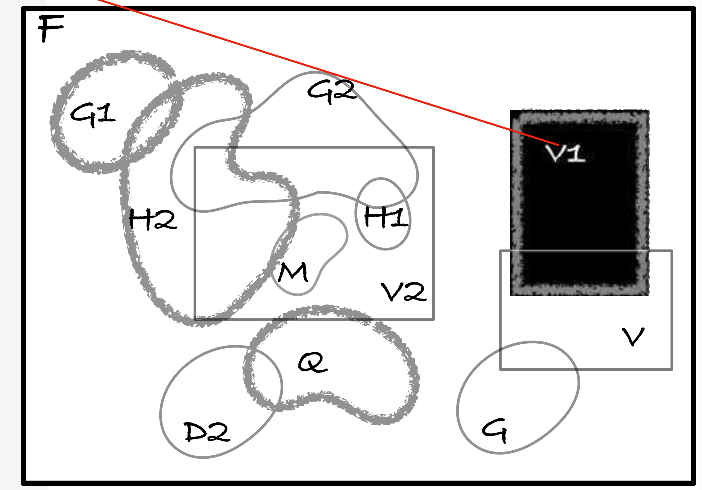
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$\xrightarrow{g}$



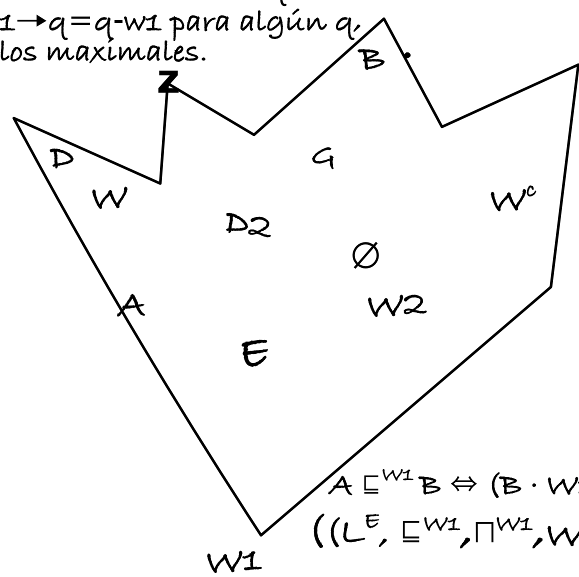
$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$



Entonces...

$\cancel{\varphi_W(C) = C \wedge W}$ $\cancel{\varphi_V(C) = C \wedge V}$

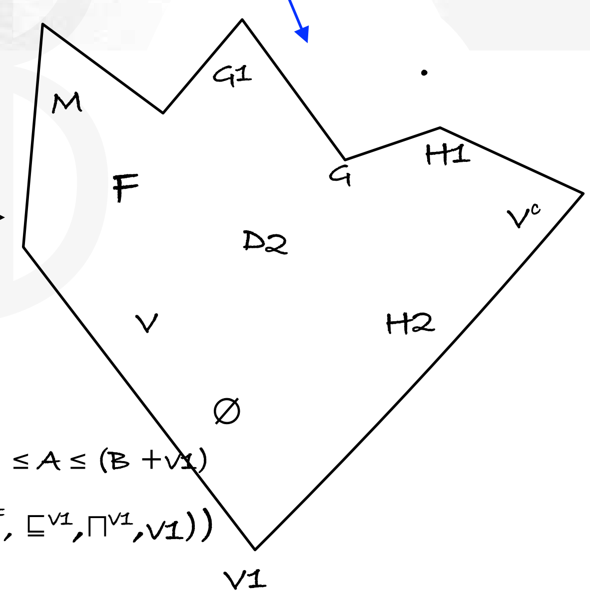
Otra caracterización en el caso L cadena) 1. Los elementos z tales que $z = w1 \to q = q\text{-}w1$ para algún q, son los maximales.



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

$\xrightarrow{\hat{g}_{(V,W)}}$

¿Hay ahora extensiones coherentes de otras g?



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$
$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:
si

$$g(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$$

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),\ \text{etc...}$$

Entonces también

$$\hat{g}_{(V,W)}(\sqcap^W_{j\in J} A_j) = \sqcap^V_{j\in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$$

$$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B)),\ \text{etc...}$$

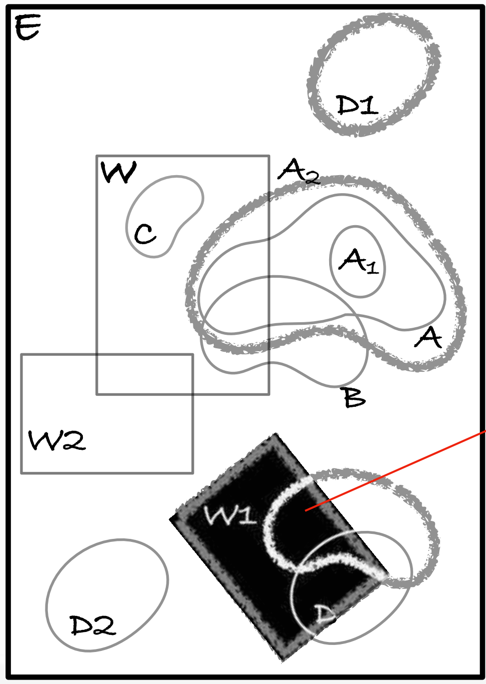
~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo~~ $\boxed{\cancel{A \to \varphi_W(A) = A \wedge W = (A'+W) + (A+W^c)}}$

Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

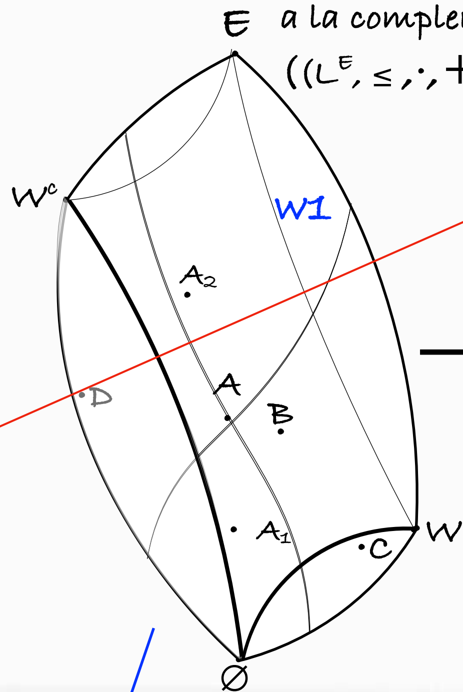
Cuestiones abiertas

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

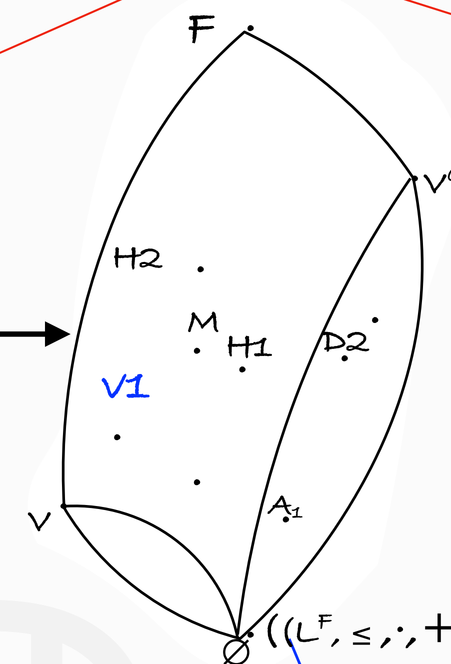
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \le E,\ A \le E,\ B \le E, \dots ,\ E \le E$



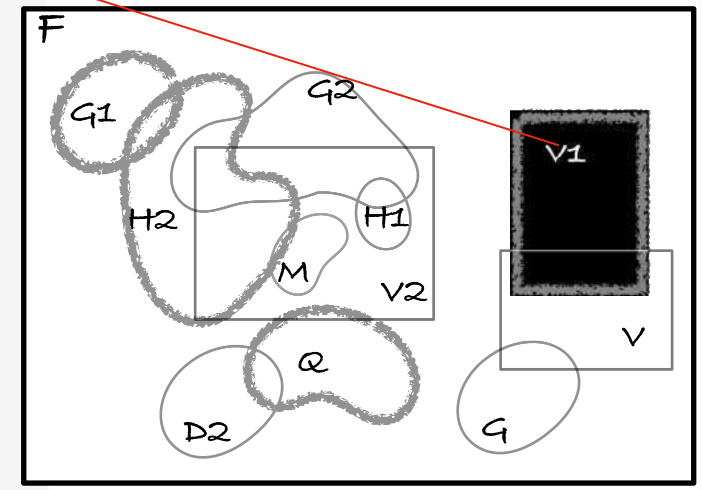
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



g



$((L^F, \le, \cdot, +, \varnothing, F), ', ^c)$



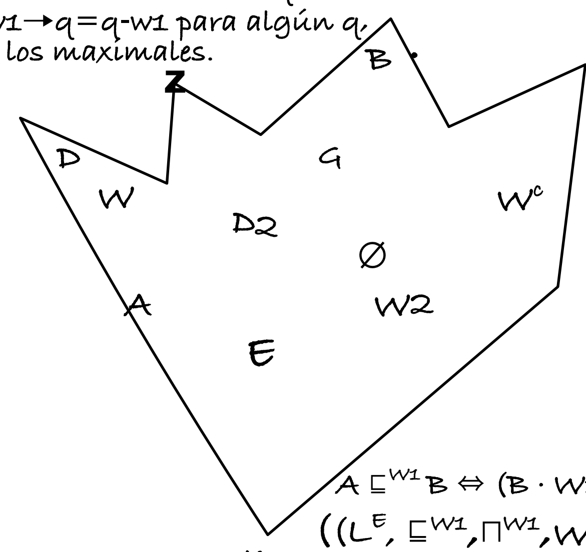
Entonces...

$\varphi_W(C) = C\Delta W1 \quad \dots (C) = C\Delta V$

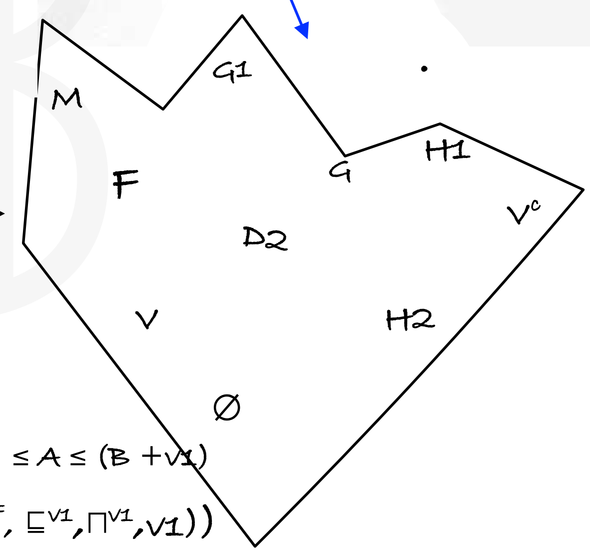
Con las extensiones de $\hat{\varphi}^*_V$, $\hat{\varphi}^*_W$ a borrosos y:

Otra caracterización en el caso L cadena)

1. Los elementos z tales que $z = w1 \to q = q\text{-}w1$ para algún q, son los maximales.



$\hat{g}_{(V,W)}$



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \le A \le (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

V1

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \le A \le (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

Coherencia:
si

$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j), \ \forall (A_j)_{j \in J}$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$_{(V,W)}(\prod^W_{j \in J} A_j) = \prod^V_{j \in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j), \ \forall (A_j)_{j \in J}$,

$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

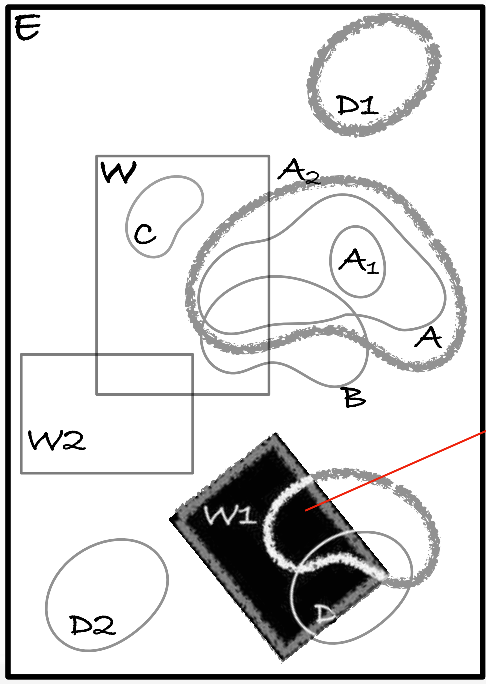
(L cadena). Si $w \in L, \alpha \in L$: $\hat{\varphi}^*_w(\alpha) = [w\text{-}\alpha$ si $\alpha \le w$; α en otro caso$]$

Solución parcial

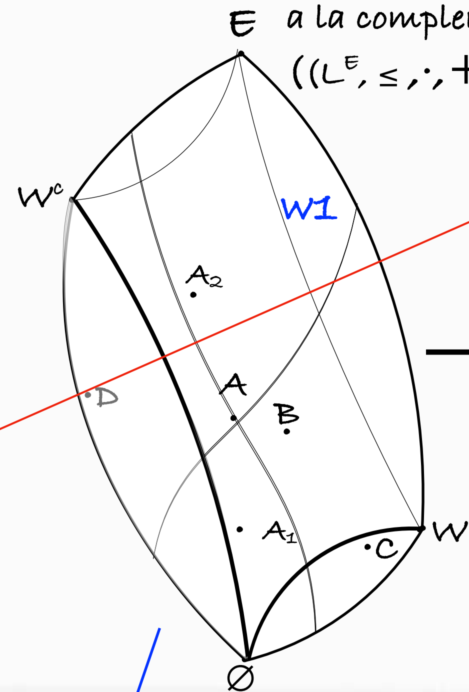
En esta línea, se propone una solución en un caso particular relevante en lógica borrosa:
En retículos producto de cadenas.

Cuestiones abiertas

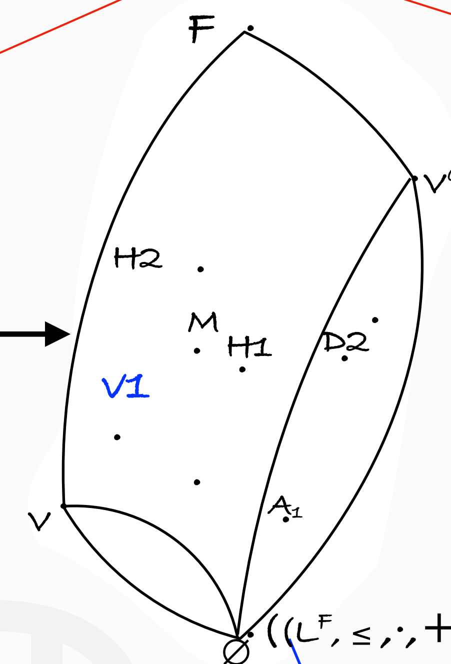
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



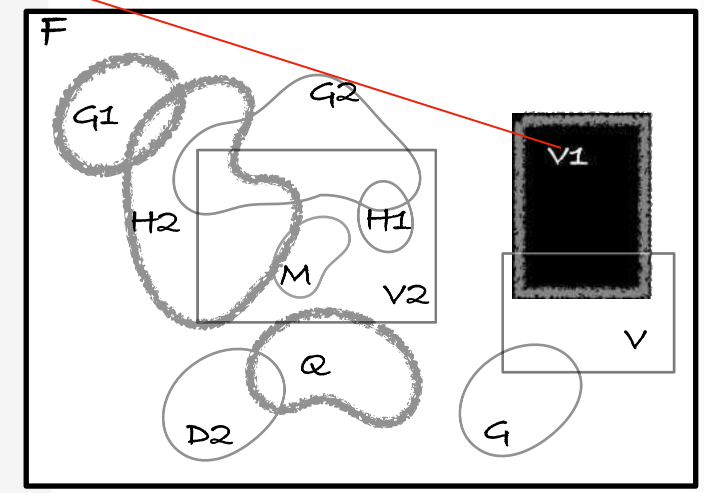
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)



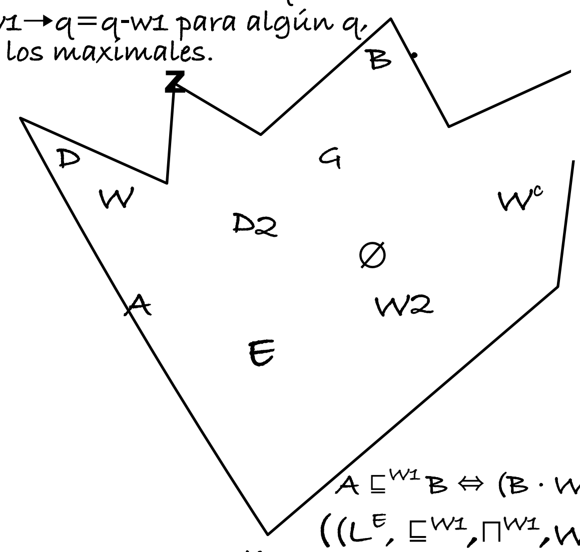
$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$



Entonces...

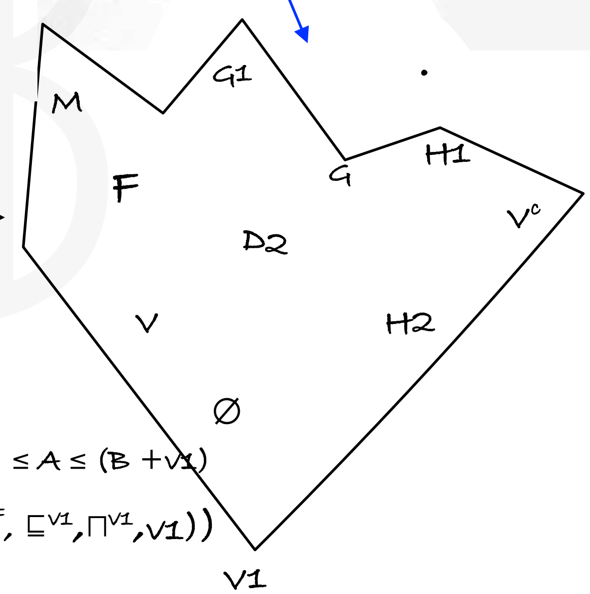
Otra caracterización en el caso L cadena)

1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.



Con las extensiones de $\hat{\varphi}^*_V$, $\hat{\varphi}^*_W$ a borrosos y:

$$\hat{g}_{(V,W)} = \hat{\varphi}^*_V \circ g \circ \hat{\varphi}^*_W$$



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$, $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:
si

$$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),\ \text{etc...}$$

Entonces también

$$\hat{g}_{(V,W)}(\prod_{j \in J}{}^{W} A_j) = \prod_{j \in J}{}^{V} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B)),\ \text{etc...}$$

(L cadena). Si $w \in L, \alpha \in L$: $\hat{\varphi}^*_W(\alpha) = [w - \alpha$ si $\alpha \leq w$; α en otro caso$]$

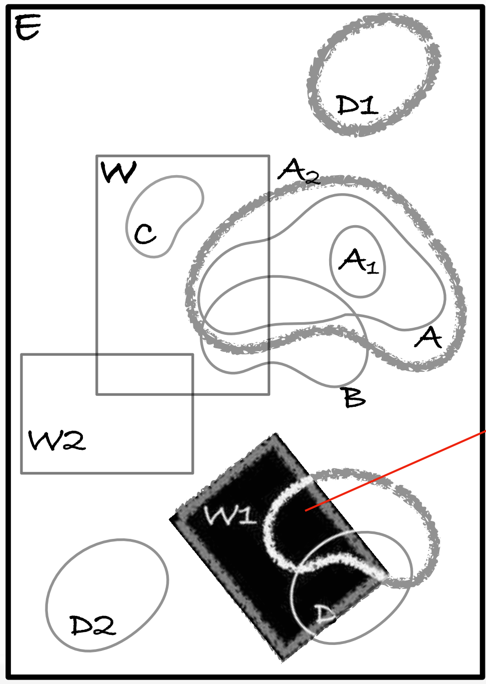
Solución parcial

En esta línea, se propone una solución en un caso particular relevante en lógica borrosa:
En retículos producto de cadenas.

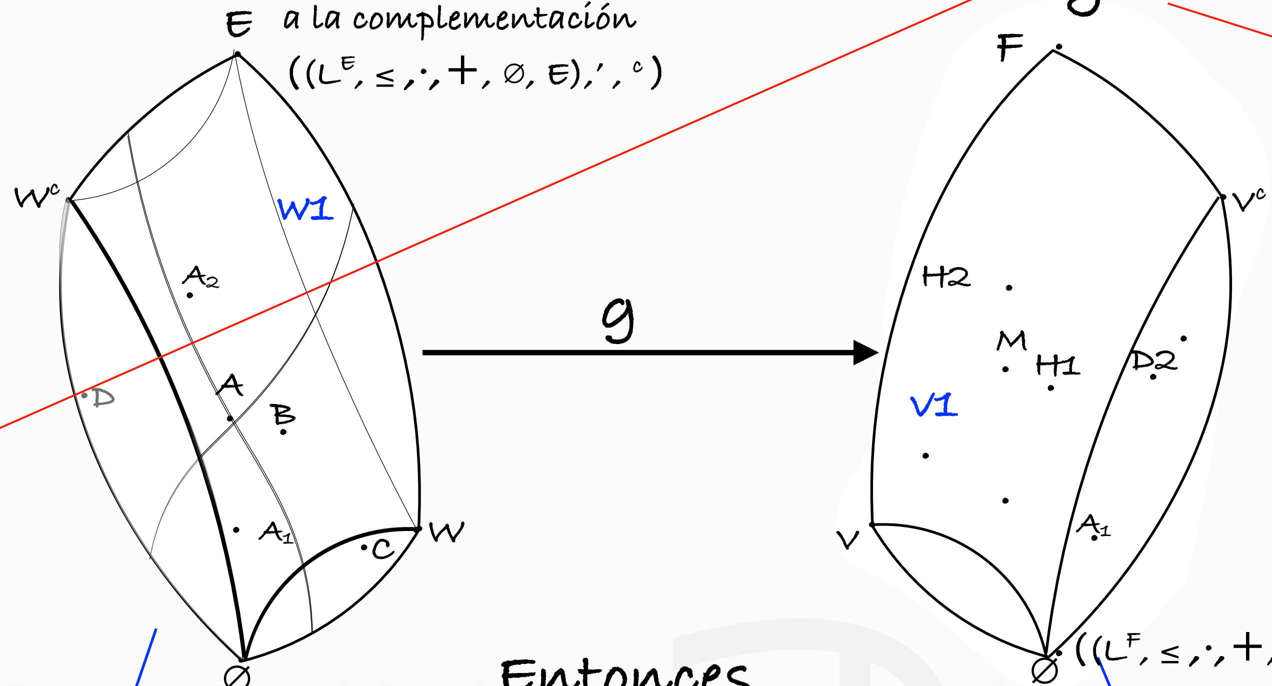
Cuestiones abiertas

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

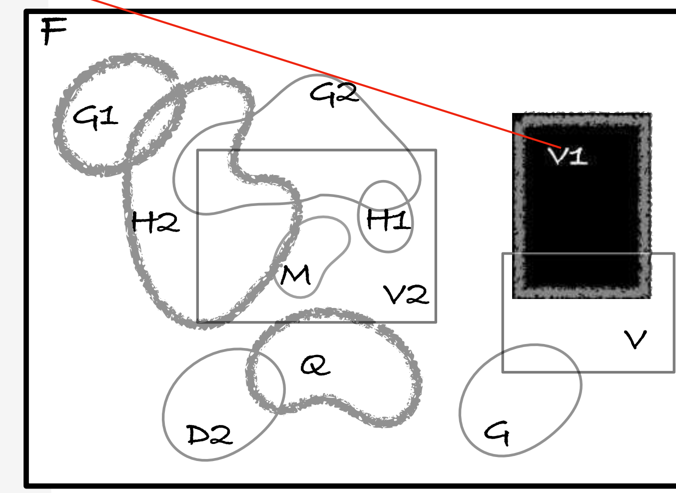
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$

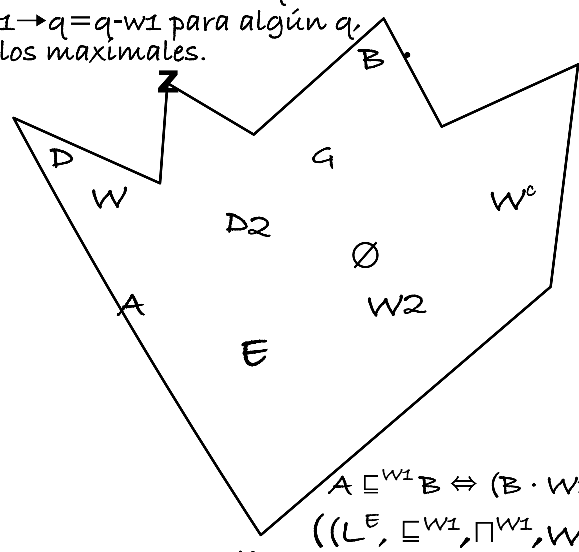


Entonces...

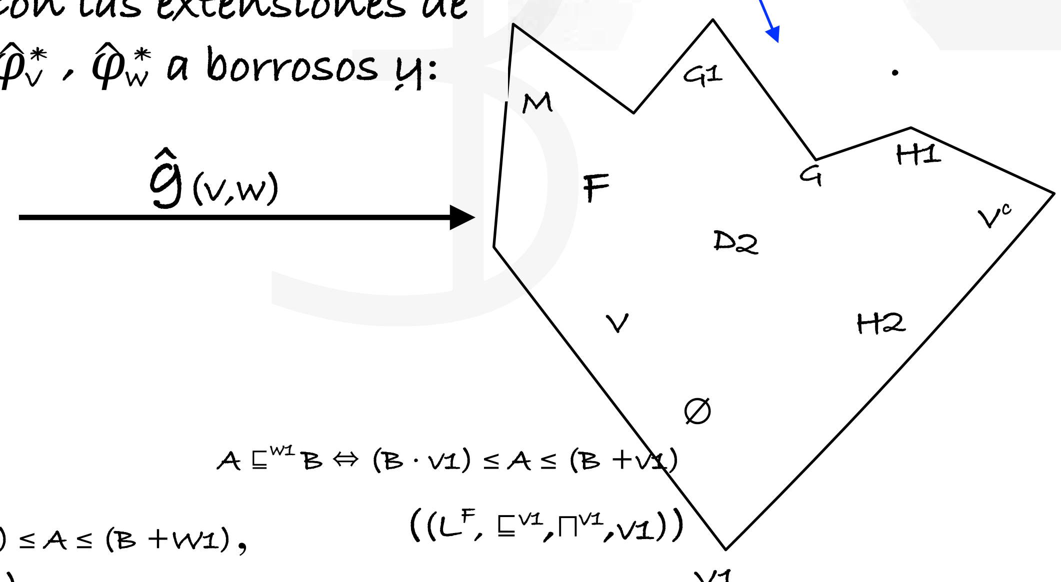
Con las extensiones de $\hat{\varphi}^*_V$, $\hat{\varphi}^*_W$ a borrosos y:

Otra caracterización en el caso L cadena)

1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.



$\hat{g}_{(v,w)}$



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

V1

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

Coherencia:

si

$g(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

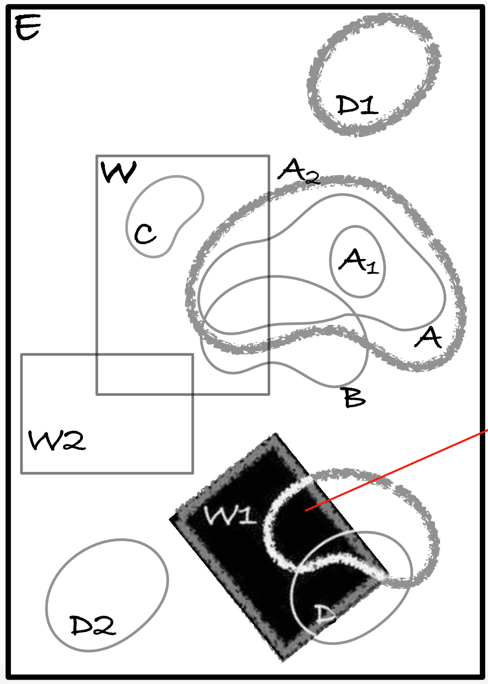
$_{(v,w)}(\bigsqcap^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j\in J} \hat{g}_{(v,w)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(v,w)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(v,w)}(B))$, etc...

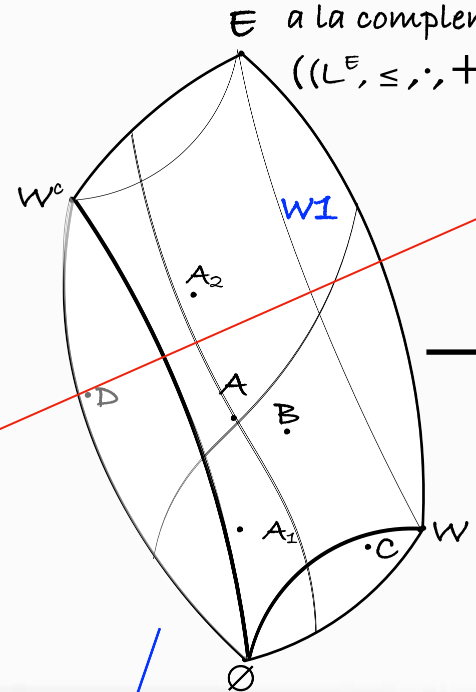
Solución parcial

En esta línea, se propone una solución en un caso particular relevante en lógica borrosa:
En retículos producto de cadenas.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, ... , $E \leq E$

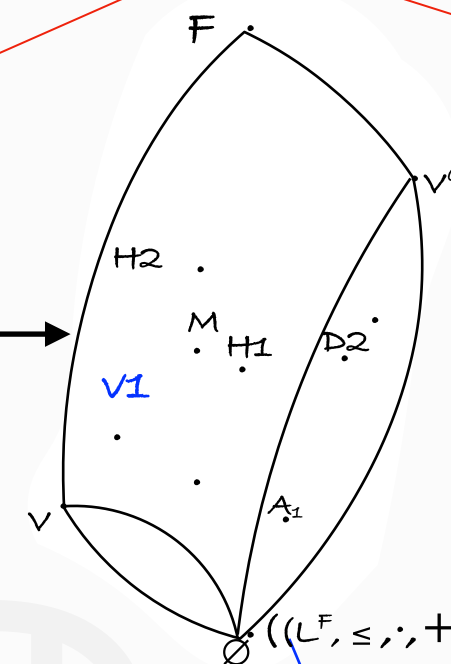


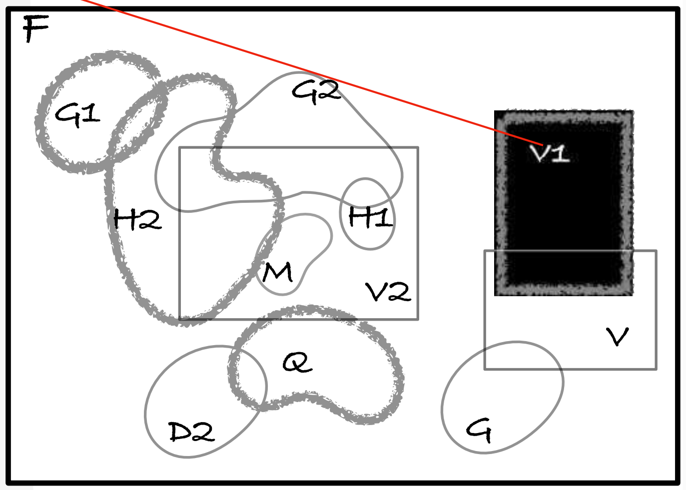
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

g



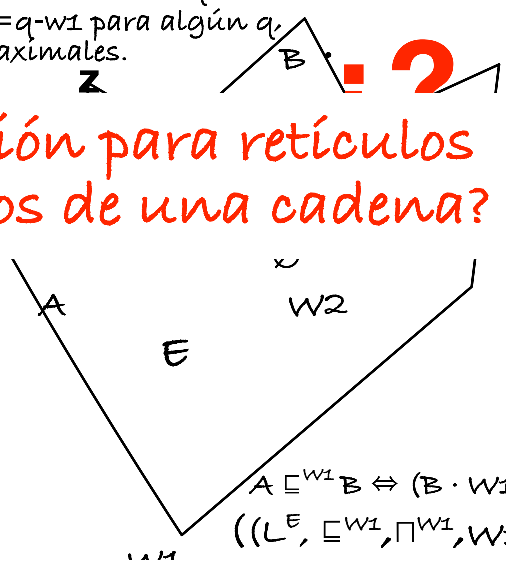


Entonces...

Con las extensiones de $\hat{\varphi}^*_V$, $\hat{\varphi}^*_W$ a borrosos y:

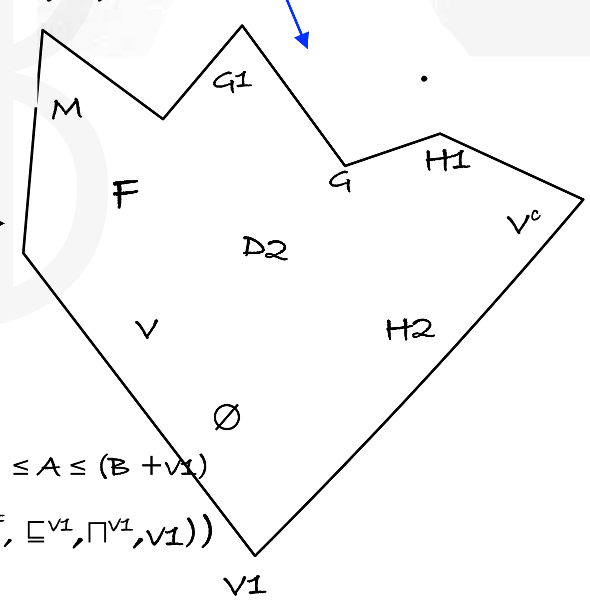
Otra caracterización en el caso L cadena) → 1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.

¿? 3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

$\hat{g}_{(V,W)}$



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$
$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$
V1

Coherencia:
si

$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j)$, $\forall (A_j)_{j \in J}$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

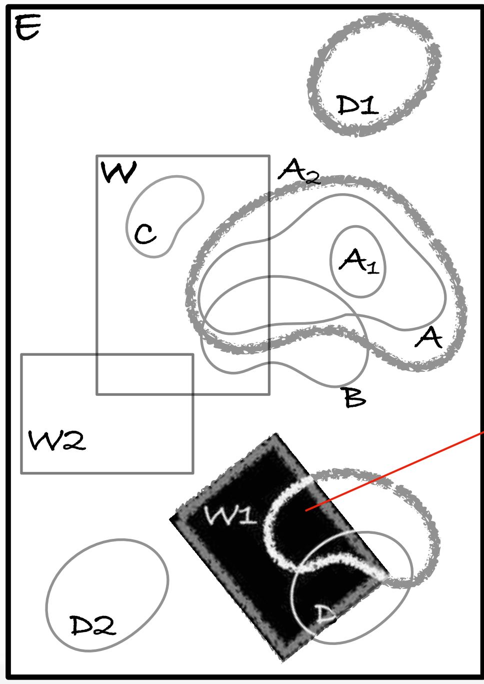
$_{(V,W)}(\bigsqcap^W_{j \in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j \in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j)$, $\forall (A_j)_{j \in J}$,

$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

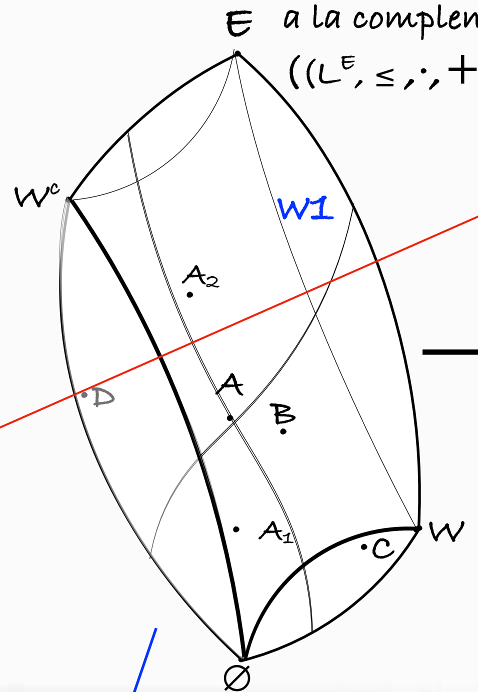
Solución parcial

En esta línea, se propone una solución en un caso particular relevante en lógica borrosa:
En retículos producto de cadenas.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

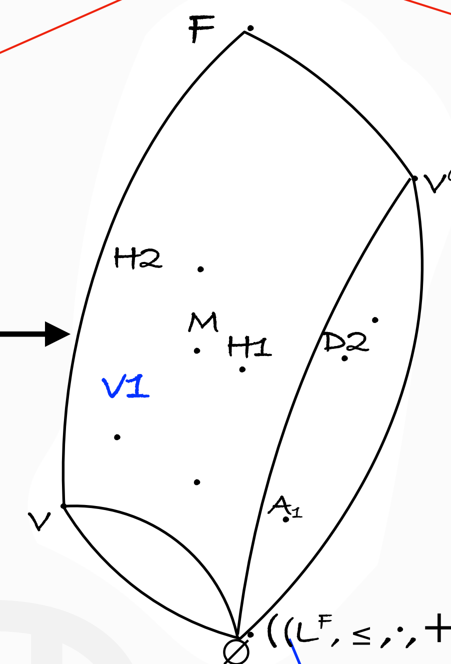


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

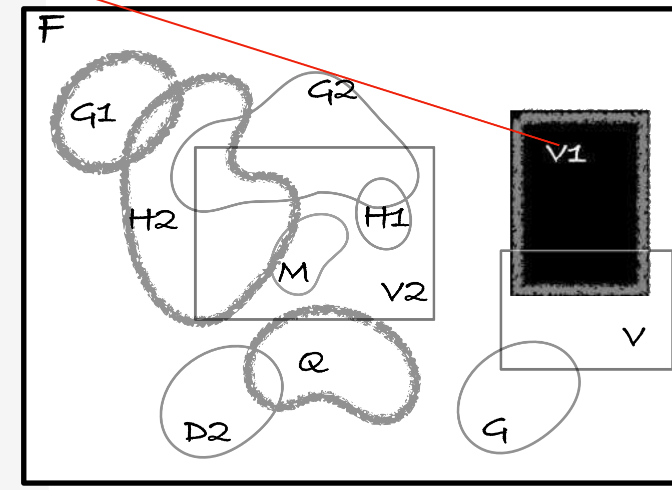


Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

g



$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', {}^c)$



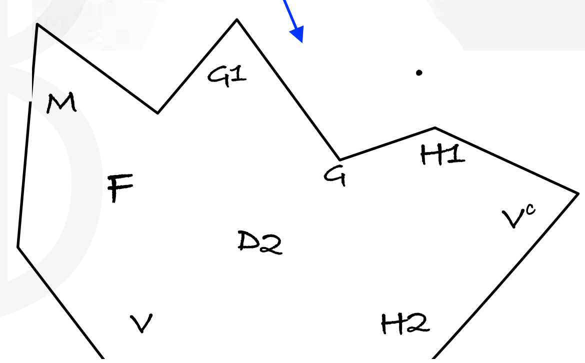
Entonces...

Otra caracterización en el caso L cadena)

1. Los elementos z tales que $z = w1 \rightarrow q = q - w1$ para algún q, son los maximales.

Con las extensiones de $\hat{\varphi}^*_V$, $\hat{\varphi}^*_W$ a borrosos y:

$\hat{g}_{(V,W)}$



¿? 3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

¿? 4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{w_\alpha}(S_\alpha) = S_\alpha \Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha} \circ g \circ \varphi_{W_\alpha})(A_\alpha), \ldots$?)

Cuestión abierta

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow ($

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap'$

Coherencia:
si

$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

¿?

Entonces también

$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcap^W_{j \in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j \in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

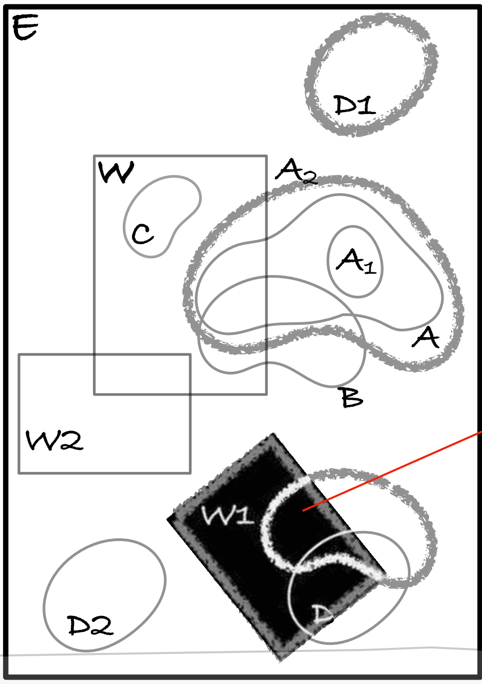
$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

Solución parcial

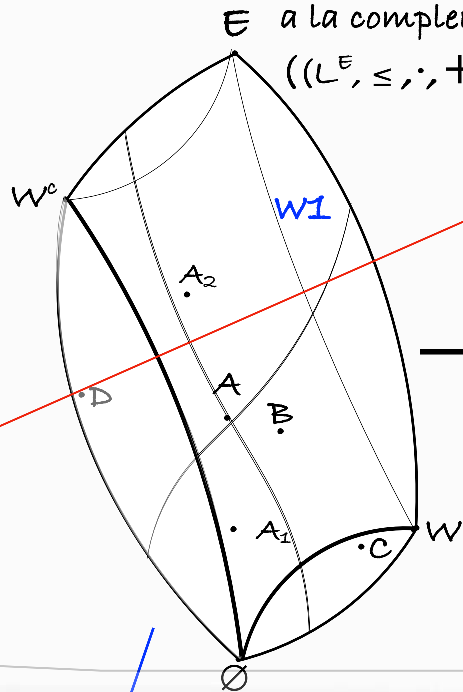
En esta línea, se propone una solución en ~~un caso particular~~ relevante en lógica borrosa:
En retículos producto de cadenas.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \ldots,\ E \le E$

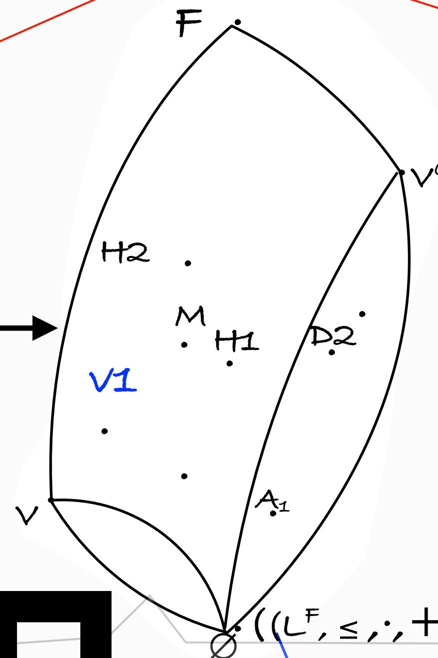


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

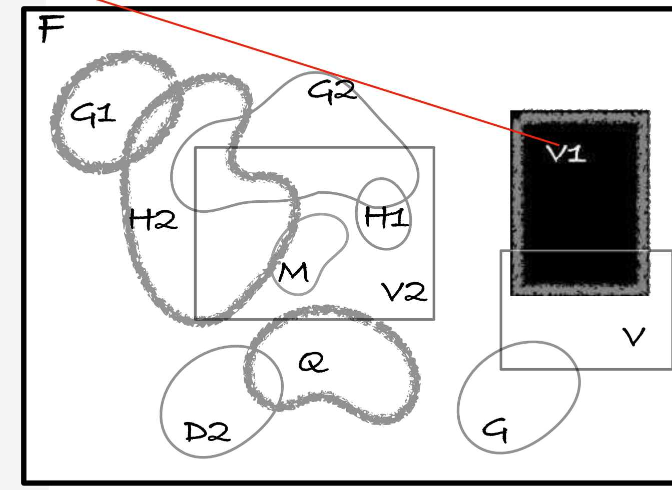


g

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)



$((L^F, \le, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$



$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$

1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.

3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

$\hat{g}_{(V,W)}$

4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha) = S_\alpha \Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha} \circ g \circ \varphi_{W_\alpha})(A_\alpha), \ldots$?)

Cuestión abierta

Coherencia:

si

$g(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

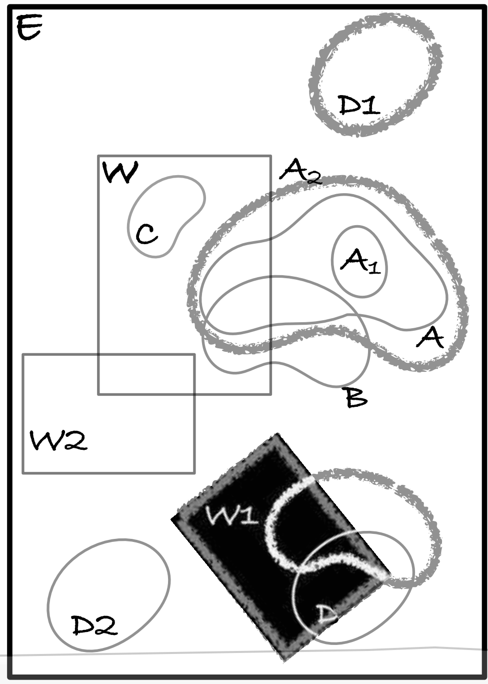
$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcap^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j\in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

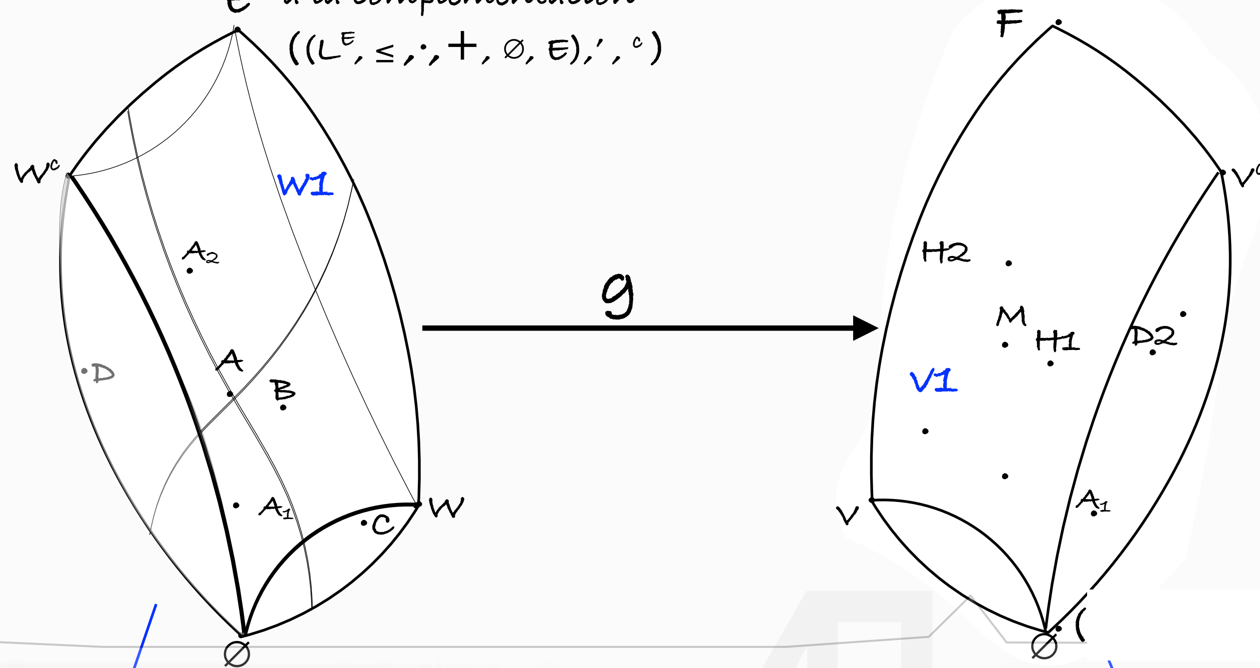
4

Finalmente, todas estas conclusiones son válidas si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de referenciales E y F

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', {}^c)$



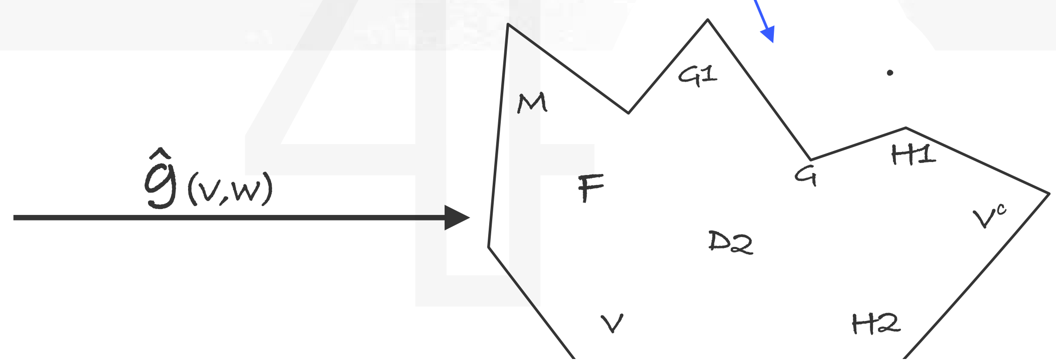
Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$

1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.

z



3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha) = S_\alpha \Delta W_\alpha$,
$(\varphi_{V_\alpha} \circ g \circ \varphi_{W_\alpha})(A_\alpha), \dots$?)

Cuestión abierta

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow ($

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap'$

Coherencia:
si

$g(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

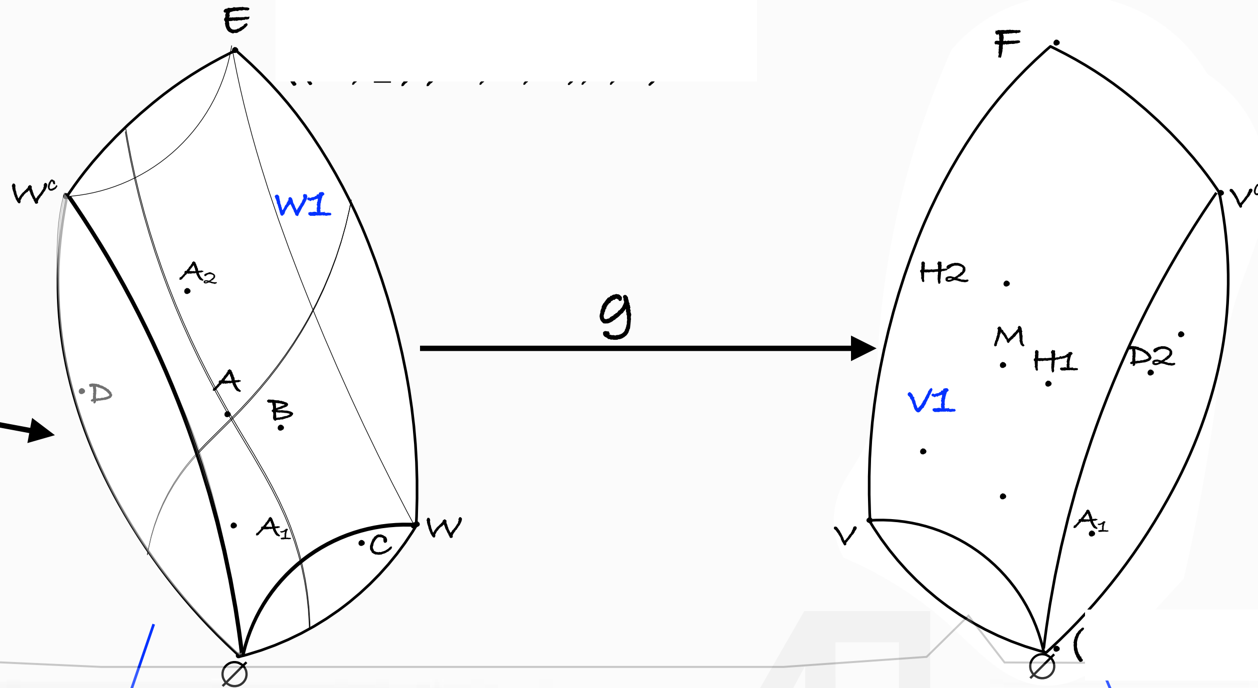
Entonces también

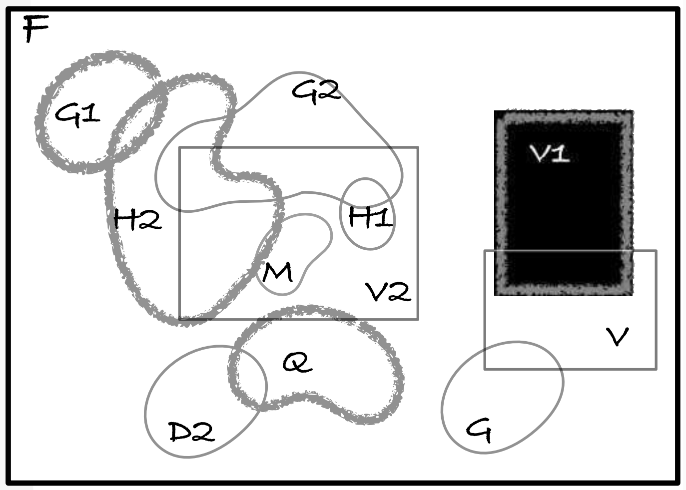
$_{(v,w)}(\bigsqcap^W_{j \in J} A_j) = \bigsqcap^V_{j \in J} \hat{g}_{(v,w)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(v,w)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(v,w)}(B))$, etc...

Finalmente, todas estas conclusiones son válidas si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de referenciales E y F

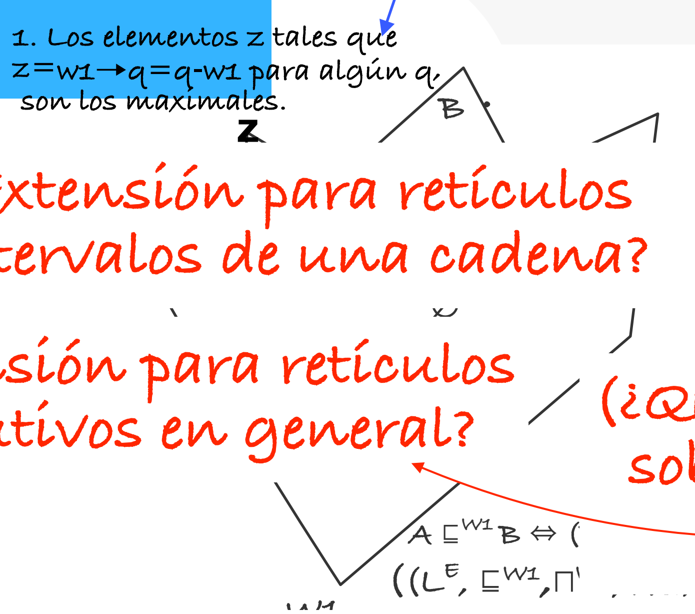
Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



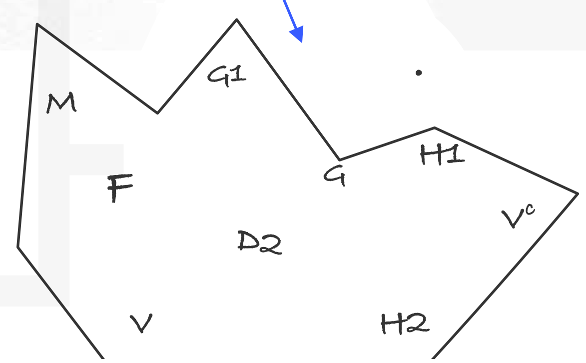


$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$



$\hat{g}_{(V,W)}$



3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha) = S_\alpha \Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha} \circ g \circ \varphi_{W_\alpha})(A_\alpha), \ldots$?)

Cuestión abierta

Coherencia:
si

$$g\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} g(A_j), \ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

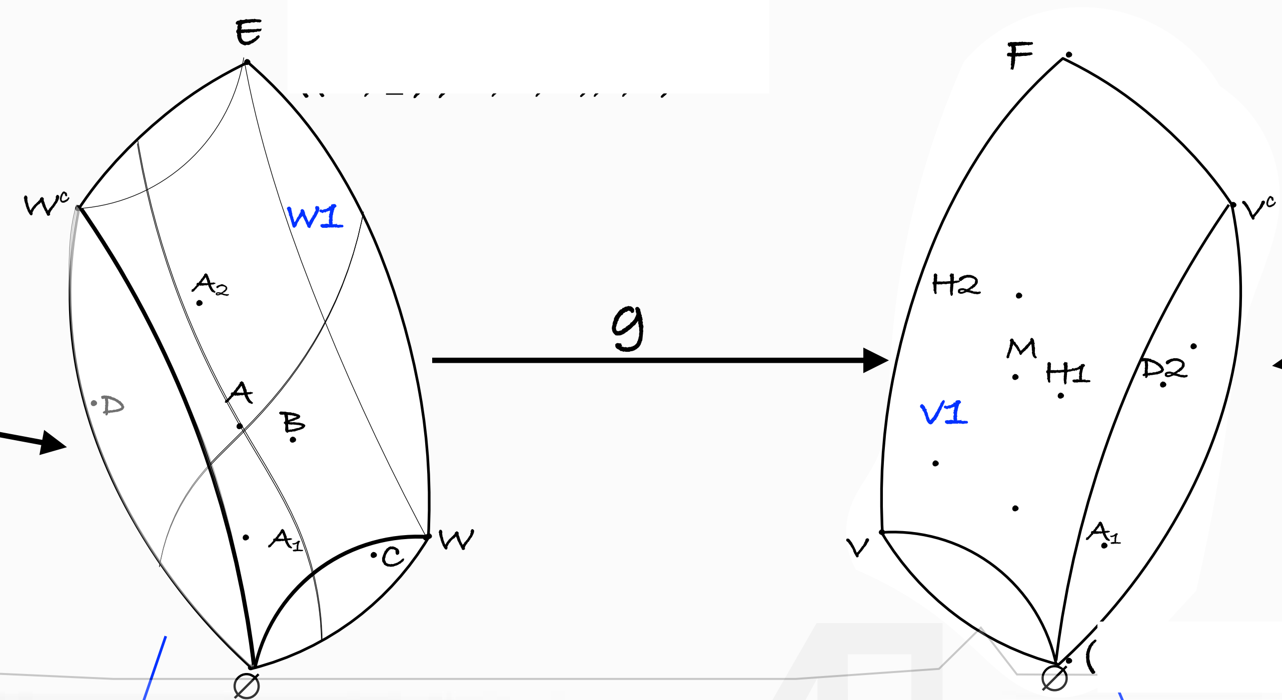
$$_{(V,W)}\left(\bigsqcap_{j \in J}{}^{W} A_j\right) = \bigsqcap_{j \in J}{}^{V} \hat{g}_{(V,W)}(A_j), \ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$\sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

Finalmente, todas estas conclusiones son válidas si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de referenciales E y F

Ó ambos...

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

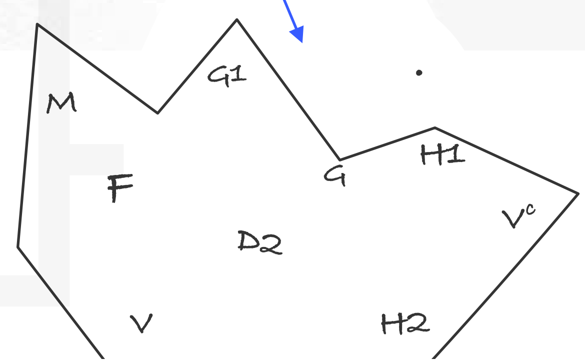
$\varphi_W(S)=S\Delta W$

$\varphi_V(K)=K\Delta V$

1. Los elementos z tales que $z=w1\to q=q\text{-}w1$ para algún q, son los maximales.

3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

$\hat{g}_{(V,W)}$



4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha)=S_\alpha\Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha}\circ g\circ\varphi_{W_\alpha})(A_\alpha),\ldots$?)

Cuestión abierta

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow ($

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap'$

Coherencia:

si

$g(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

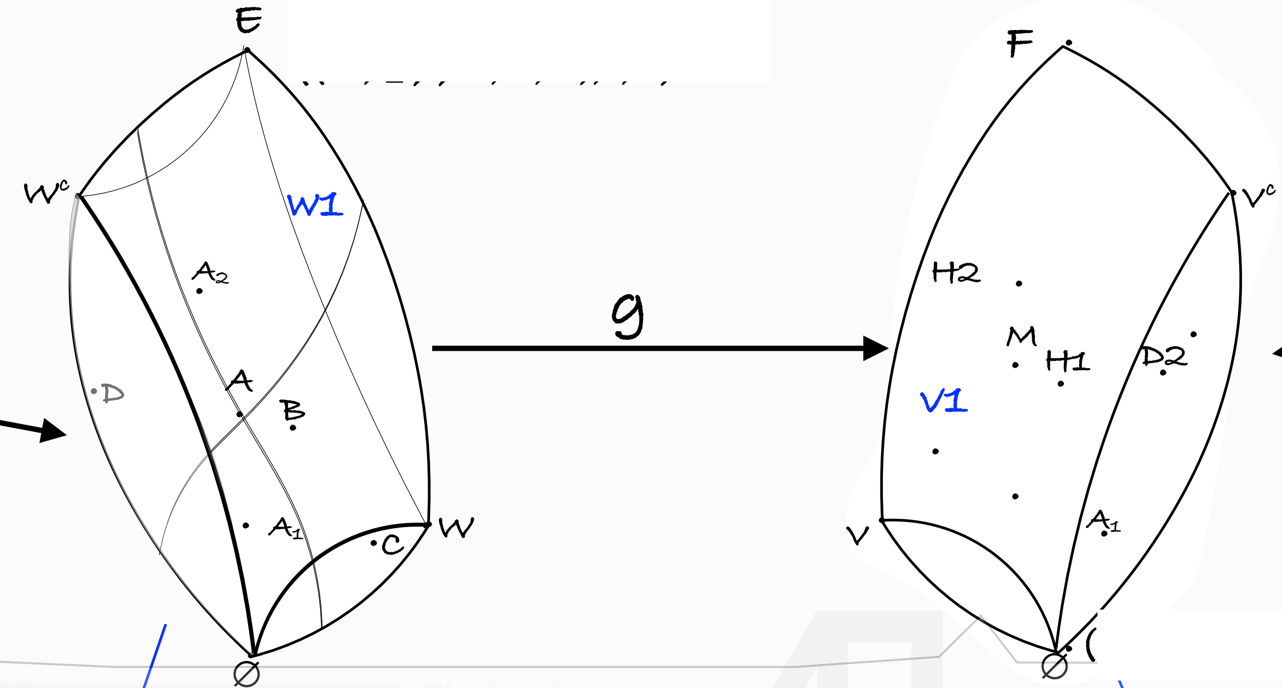
$_{,W)}(\bigsqcap^{W}_{j\in J} A_j) = \bigsqcap^{V}_{j\in J}\hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$\sqsubseteq^{W} B)\Rightarrow(\hat{g}_{(V,W)}(A)\sqsubseteq^{V}\hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc...

Finalmente, todas estas conclusiones son válidas si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de referenciales E y F

Ó ambos...

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

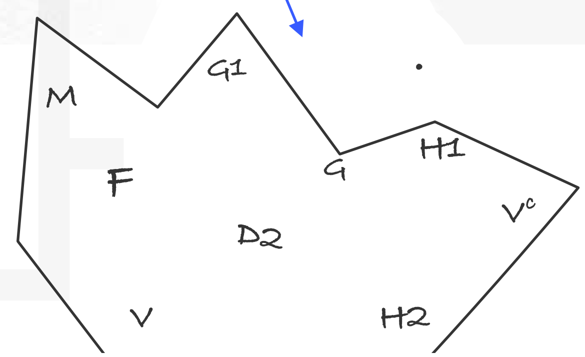


Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

$\varphi_W(S)=S\Delta W$

$\varphi_V(K)=K\Delta V$

1. Los elementos z tales que $z=w1\rightarrow q=q\text{-}w1$ para algún q, son los maximales.



3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha)=S_\alpha\Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha}\circ g\circ\varphi$ ... Cuestión abierta

$A\sqsubseteq^{W1}B \Leftrightarrow$ (

$((L^E,\sqsubseteq^{W1},\sqcap'$ ...

Coherencia:

si

$g(\bigcap_{j\in J}A_j)=\bigcap_{j\in J}g(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$_{,W)}(\bigsqcap^W_{j\in J}A_j)=\bigsqcap^V_{j\in J}\hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

), etc...

Otros temas abiertos: "perspectivas" y Rough Sets, "perspectivas" y birretículos...

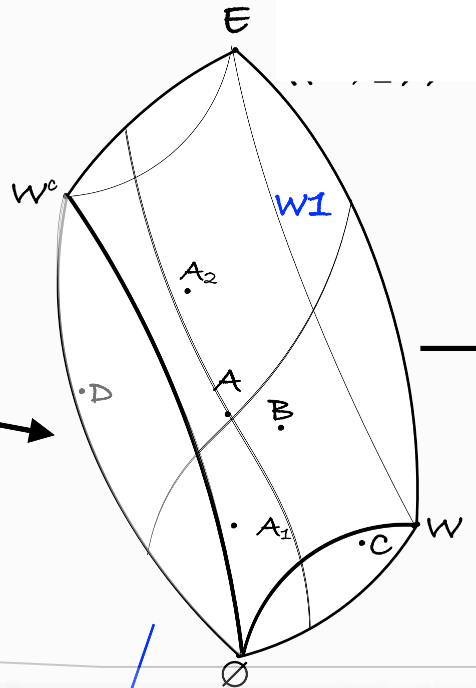
Finalmente, todas estas conclusiones so... mos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a ... o nítidos de referenciales E y F

1. Cuestión abierta: ¿Soluciones de $A\sqsubseteq^Z B$ para A,B,Z borrosos propios (no nítidos)?

2. Cuestión abierta: ¿Conjetura: $\lim_{u\to 1} A *_u B = supp(A)\cap supp(B)$, etc. ? (transparencia 68)

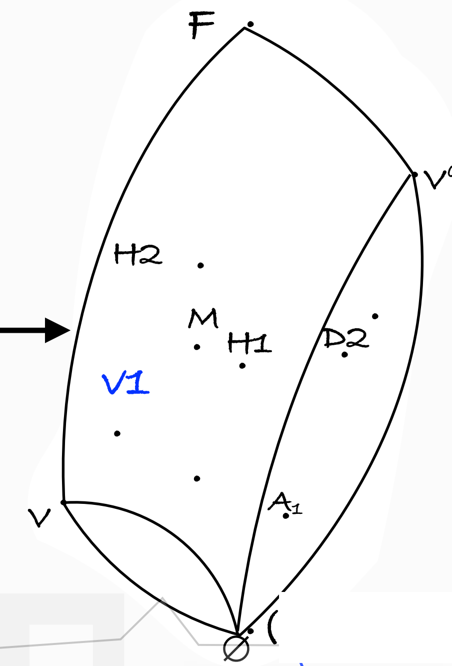
Ó ambos…

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



$\varphi_W(S)=S\Delta W$

g



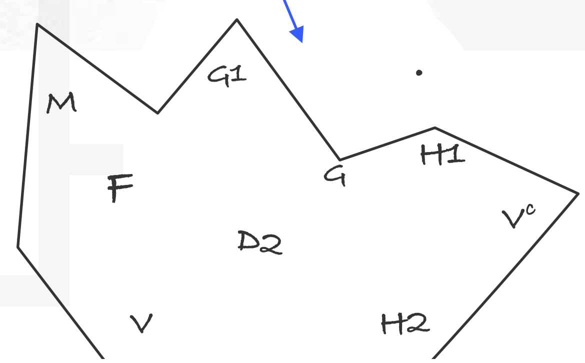
$\varphi_V(K)=K\Delta V$

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

1. Los elementos z tales que z=w1→q=q-w1 para algún q, son los maximales.

3. ¿Extensión para retículos de intervalos de una cadena?

$\hat{g}_{(V,W)}$



4. ¿Extensión para retículos distributivos en general?

(¿Quizá con la diferencia simétrica sobre α-cortes $\varphi_{W_\alpha}(S_\alpha)=S_\alpha\Delta W_\alpha$, $(\varphi_{V_\alpha}\circ g\circ\varphi$ … Cuestión abierta

$A\sqsubseteq^{W1}B \Leftrightarrow ($ …

$((L^E,\sqsubseteq^{W1},\sqcap'$ …

Coherencia:

si

$g(\bigcap_{j\in J}A_j)=\bigcap_{j\in J}g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, etc…

Entonces también

$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcap^W_{j\in J}A_j)=\bigsqcap^V_{j\in J}\hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

…), etc…

Otros temas abiertos: "perspectivas" y Rough Sets, "perspectivas" y birretículos…

Finalmente, todas estas conclusiones so… mos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a … o nítidos de referenciales E y F

1. Cuestión abierta: ¿Soluciones de $A\sqsubseteq^Z B$ para A,B,Z borrosos propios (no nítidos)?

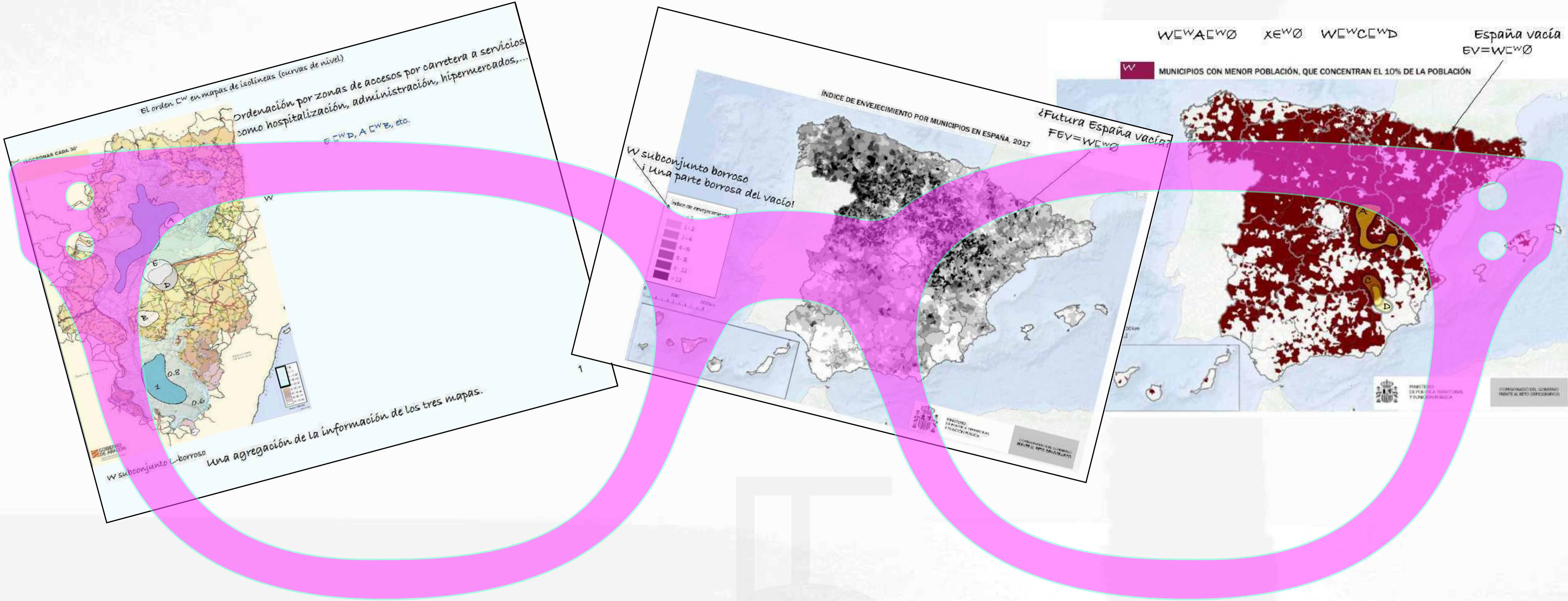
2. Cuestión abierta: ¿Conjetura: $\lim_{u\to 1} A *_u B = \mathrm{supp}(A)\cap \mathrm{supp}(B)$, etc. ? (transparencia 68)

5

Aplicaciones...

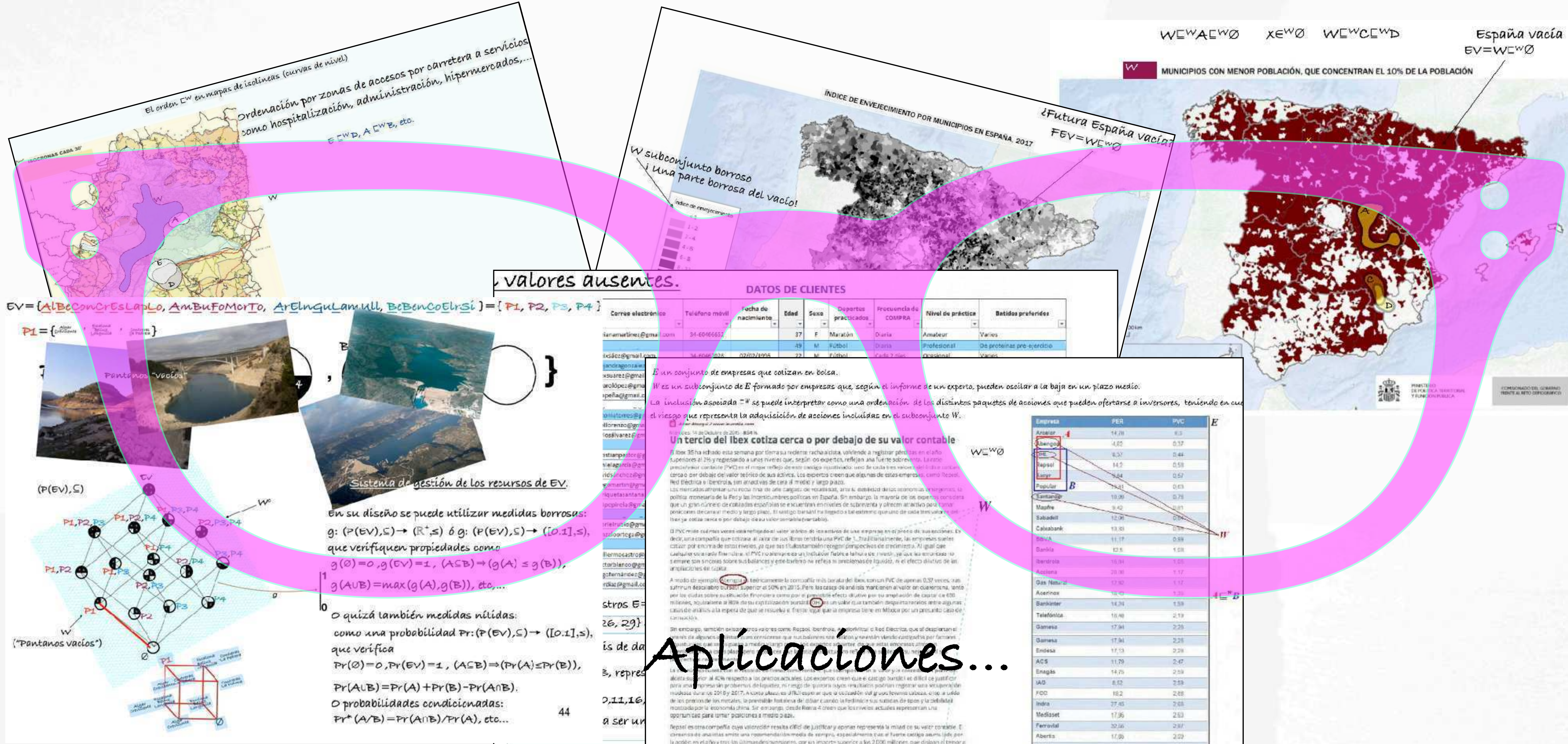
Aplicaciones…

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,…(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa “distinguir” un subconjunto W de elemento que son irrelevantes, prescindibles, etc…,(o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc…), y “reordenar” los subconjuntos de E desde la “perspectiva” que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



Aplicaciones…

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,…(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elemento que son irrelevantes, prescindibles, etc…,(o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc…), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



Aplicaciones...

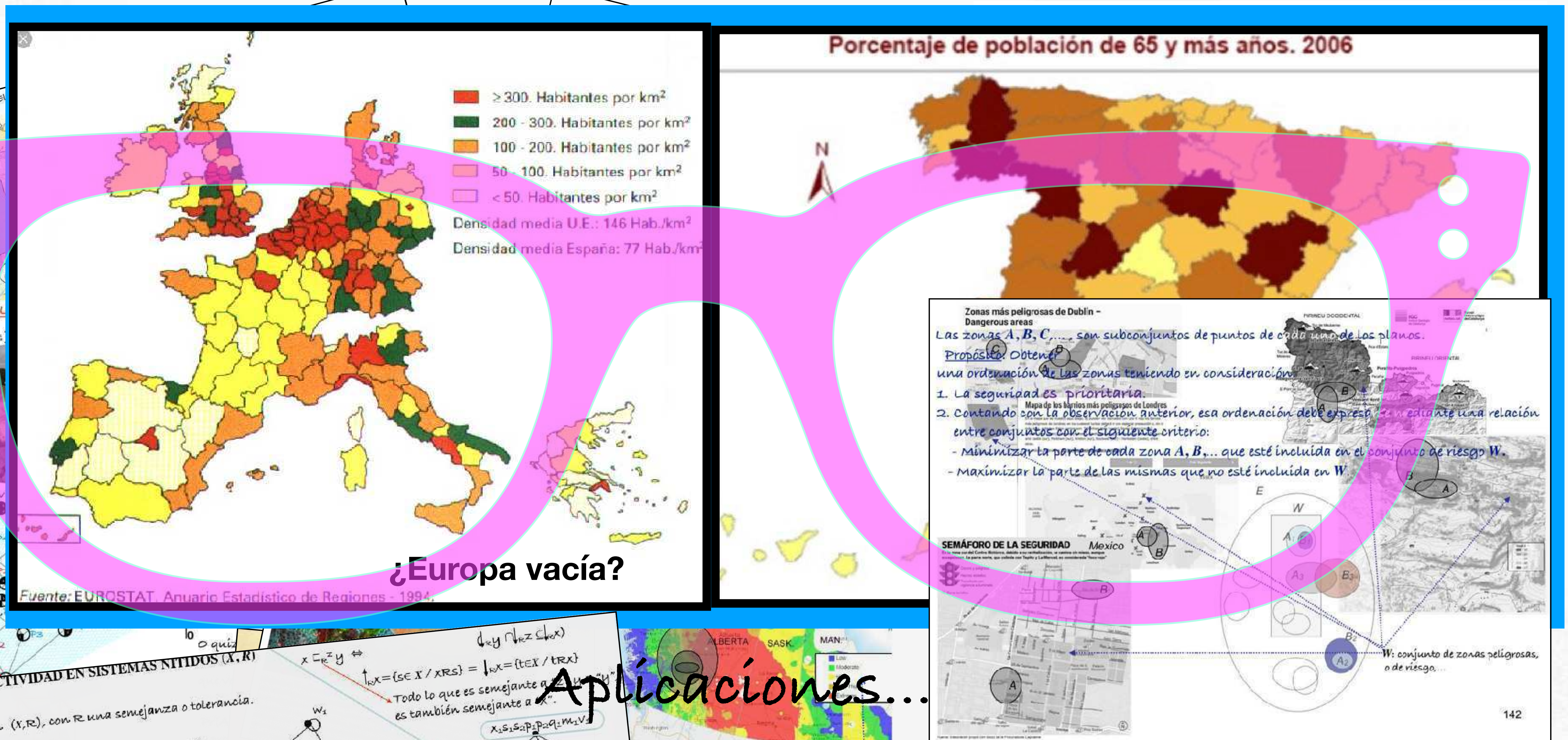
En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc..., (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).

Aplicaciones

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc..., (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).

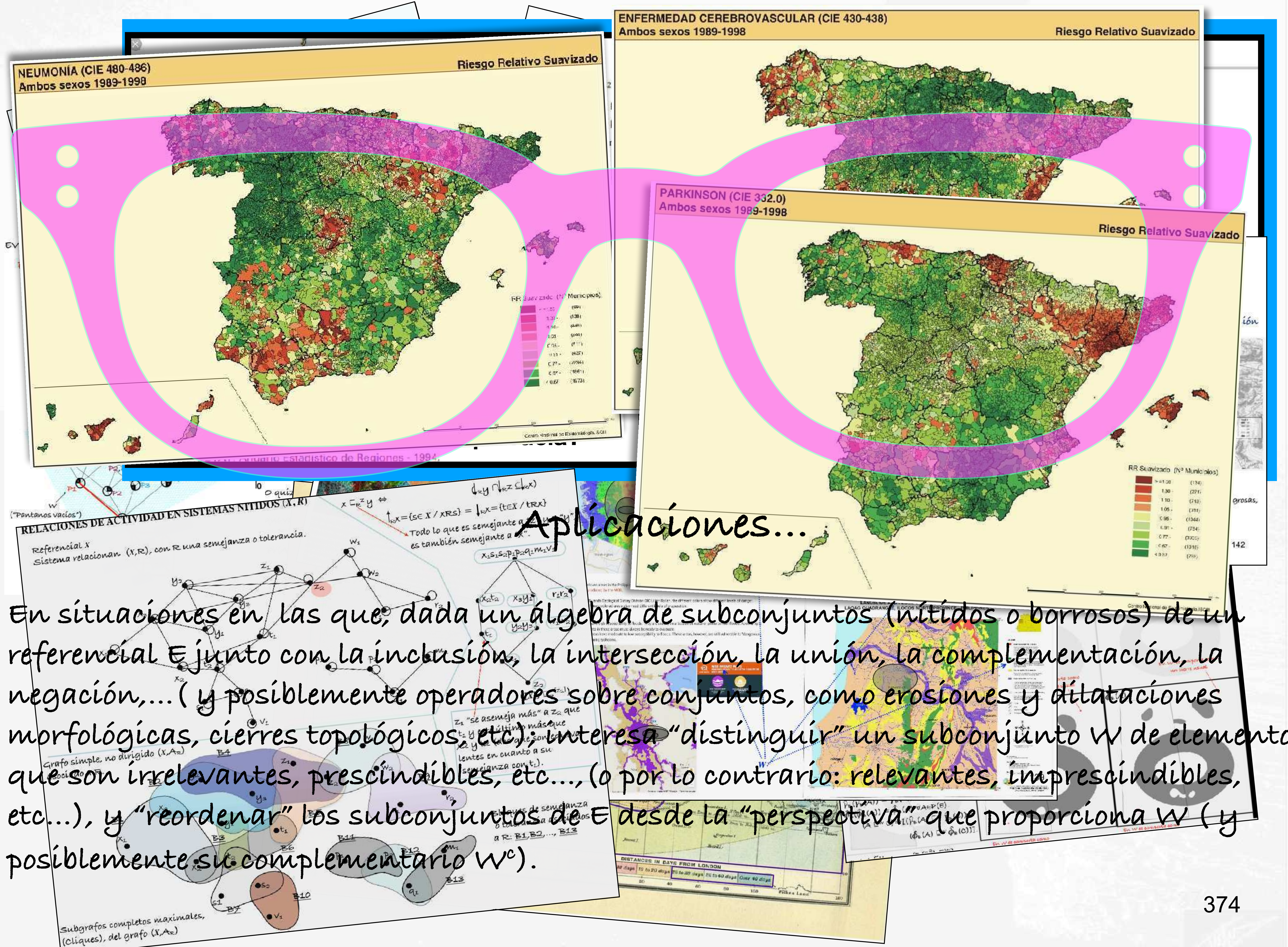
Aplicaciones...

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc..., (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



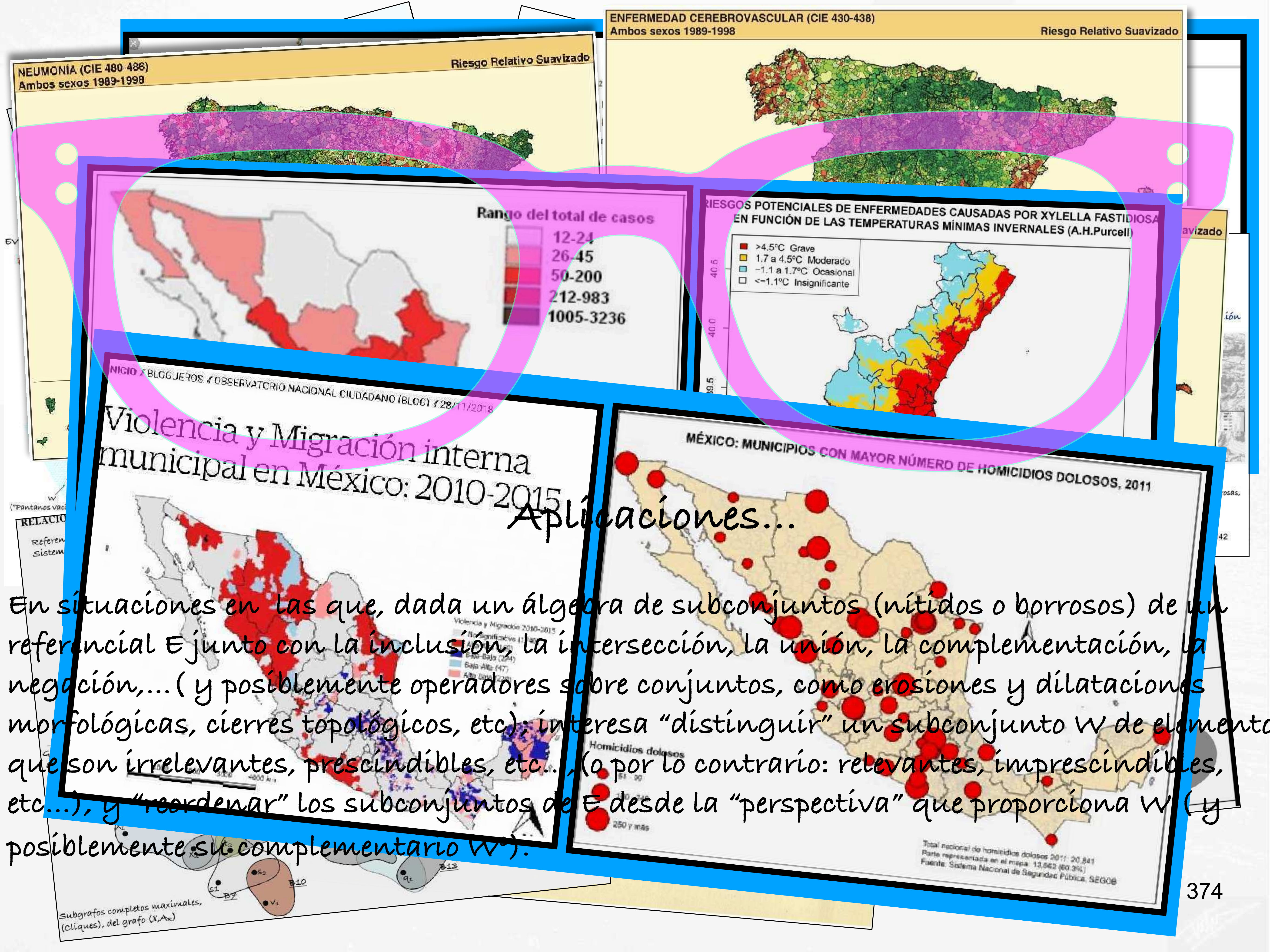
Aplicaciones...

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc), interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc..., (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



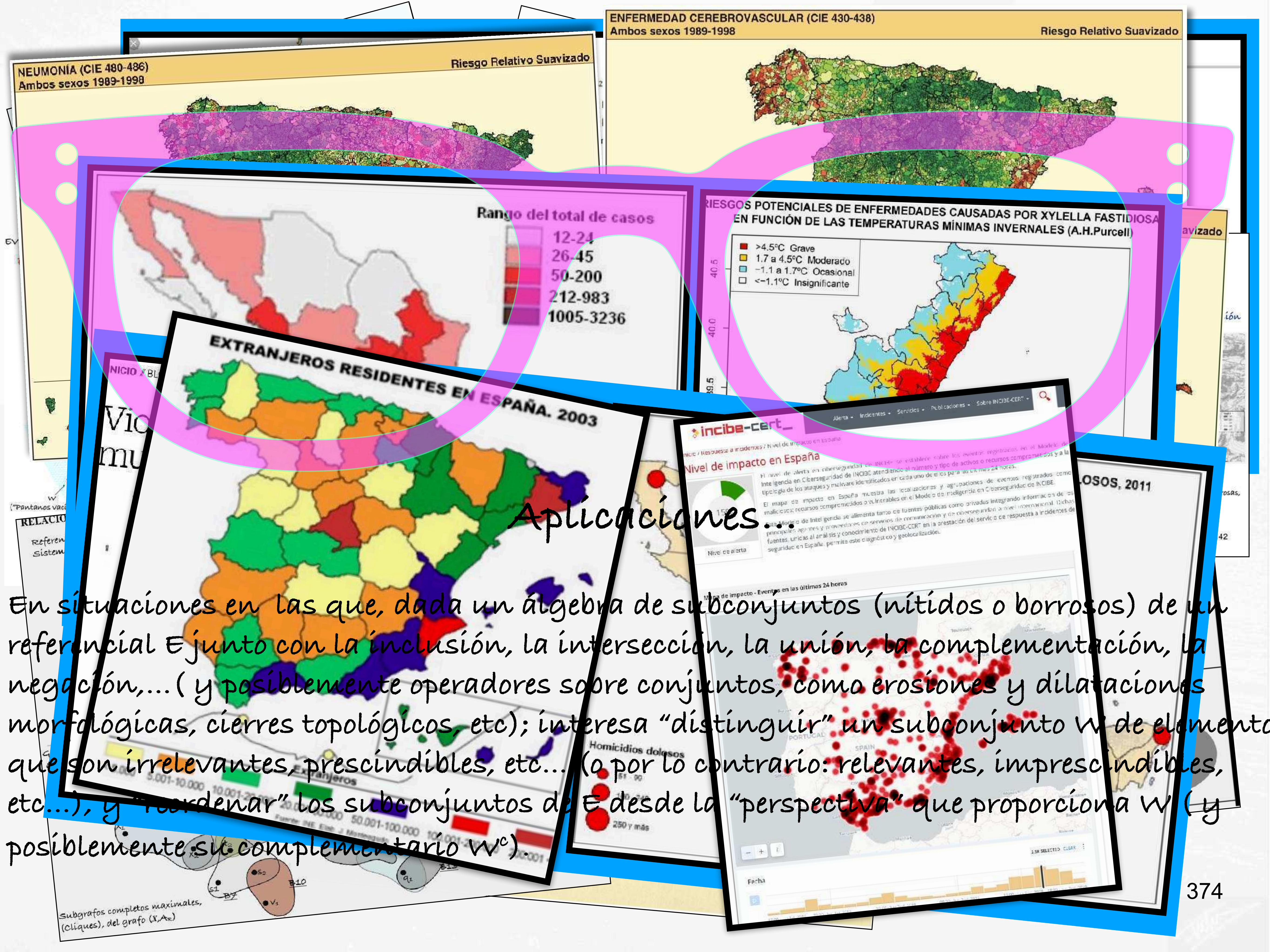
Aplicaciones...

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc), interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc..., (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "reordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



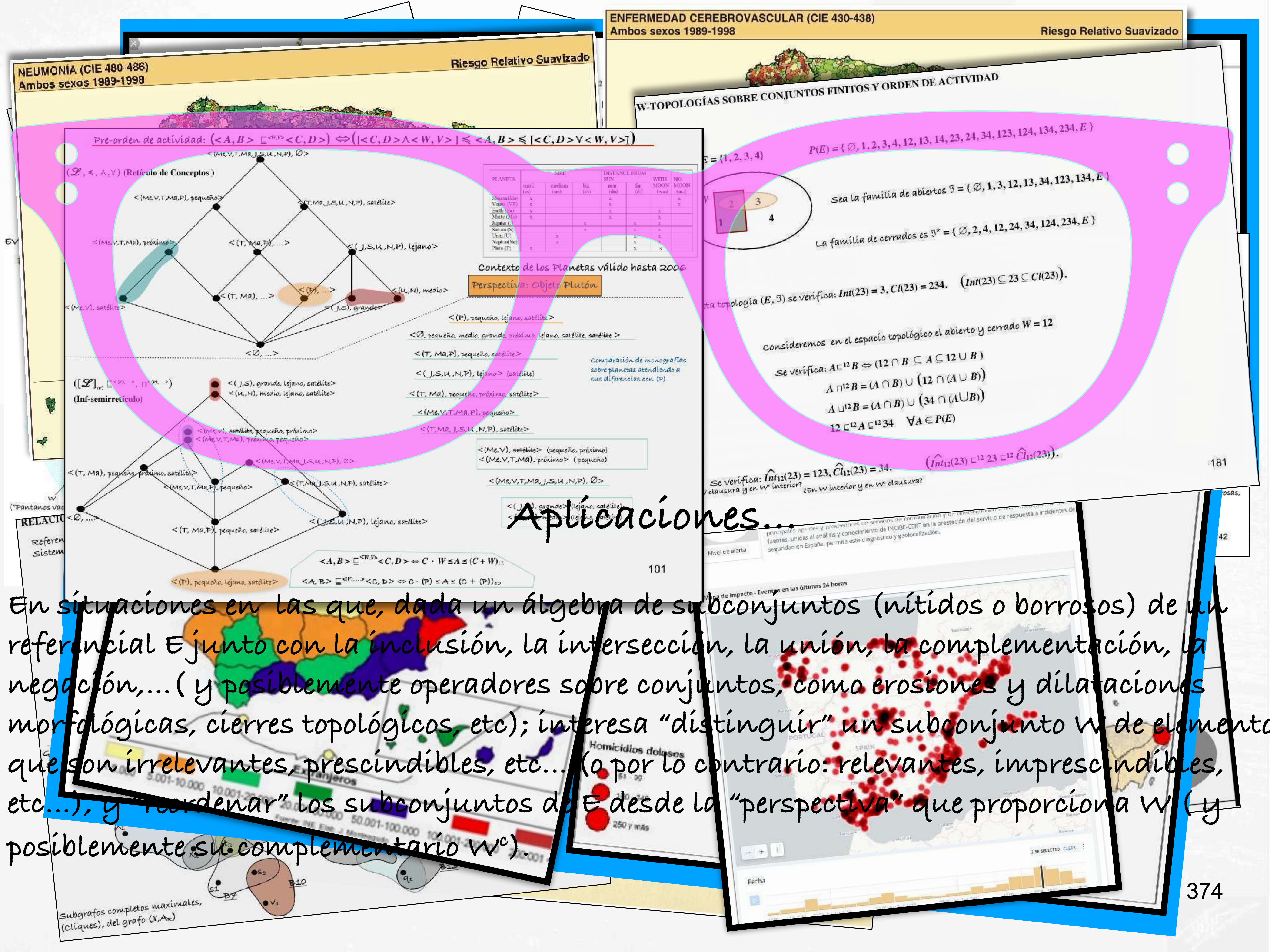
Aplicaciones…

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,…(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc): interesa “distinguir” un subconjunto W de elemento que son irrelevantes, prescindibles, etc…, (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc…), y “reordenar” los subconjuntos de E desde la “perspectiva” que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



Aplicaciones…

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,…(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc… (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc…), y "ordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).

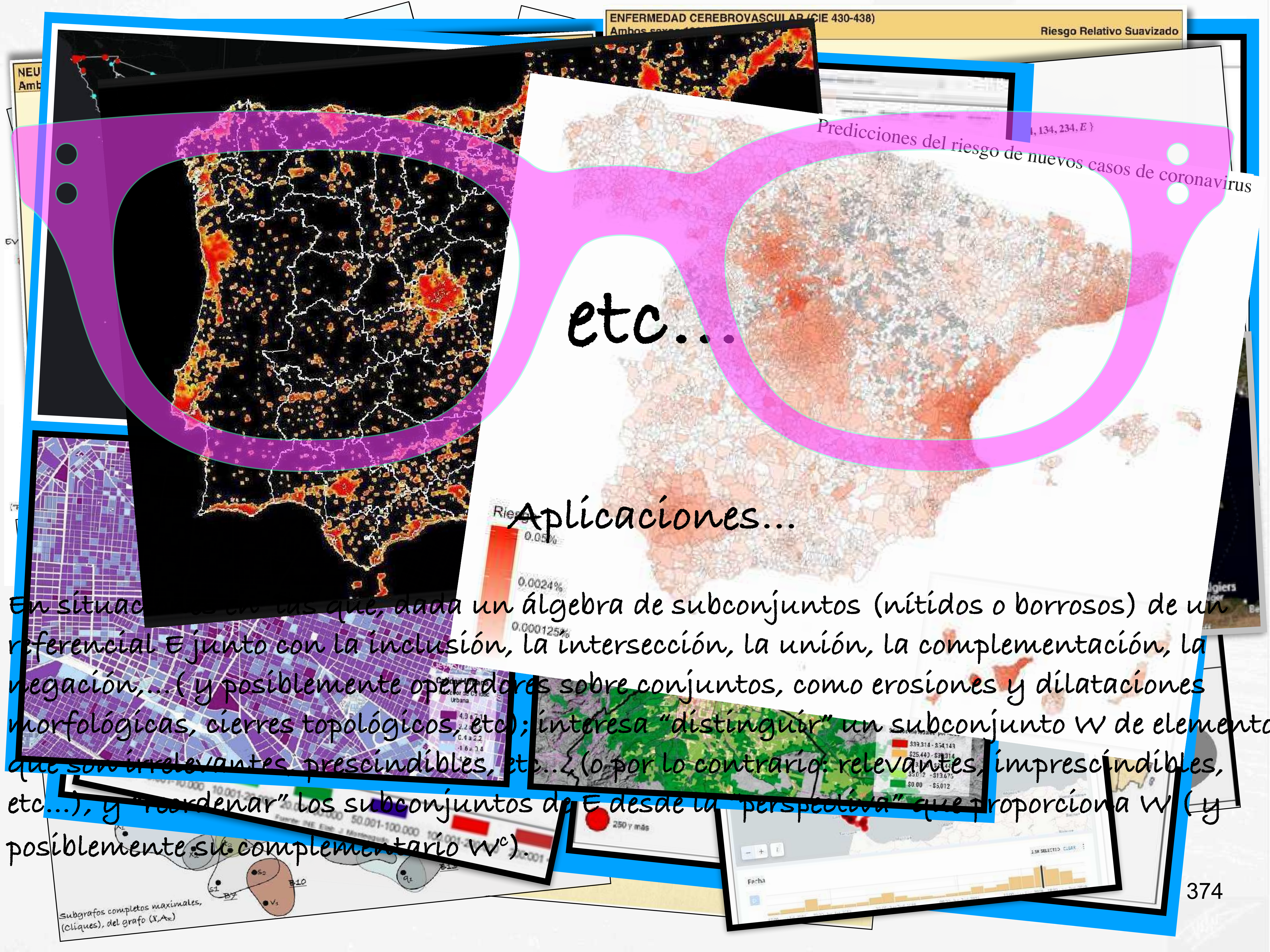


Aplicaciones…

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,…(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa “distinguir” un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc… (o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc…), y “ordenar” los subconjuntos de E desde la “perspectiva” que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).

Aplicaciones...

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc...(o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "ordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).



etc...

Aplicaciones...

En situaciones en las que, dada un álgebra de subconjuntos (nítidos o borrosos) de un referencial E junto con la inclusión, la intersección, la unión, la complementación, la negación,...(y posiblemente operadores sobre conjuntos, como erosiones y dilataciones morfológicas, cierres topológicos, etc); interesa "distinguir" un subconjunto W de elementos que son irrelevantes, prescindibles, etc...((o por lo contrario: relevantes, imprescindibles, etc...), y "ordenar" los subconjuntos de E desde la "perspectiva" que proporciona W (y posiblemente su complementario W^c).

Epílogo.

Una especulación:

“Si un álgebra del tipo $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^{w})$ o del tipo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^{w})$ fuese un modelo compatible con el universo $\mathcal{U}$; ¿lo notaríamos?”

Epílogo.

Una especulación:

"Si un álgebra del tipo $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^{W})$ o del tipo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^{W})$ fuese un modelo compatible con el universo $\mathcal{U}$; ¿lo notaríamos?"

Desde luego, si la zona W es "accesible", lo podríamos comprobar analizando el comportamiento de la inclusión, intersección,...

Epílogo.

Una especulación:

"Si un álgebra del tipo $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\sqsubseteq^{W})$ o del tipo $(L^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^{W})$ fuese un modelo compatible con el universo $\mathcal{U}$; ¿lo notaríamos?"

Desde luego, si la zona W es "accesible", lo podríamos comprobar analizando el comportamiento de la inclusión, intersección,...

Pero ¿qué ocurriría si W es inaccesible debido a su lejanía?

Epílogo.

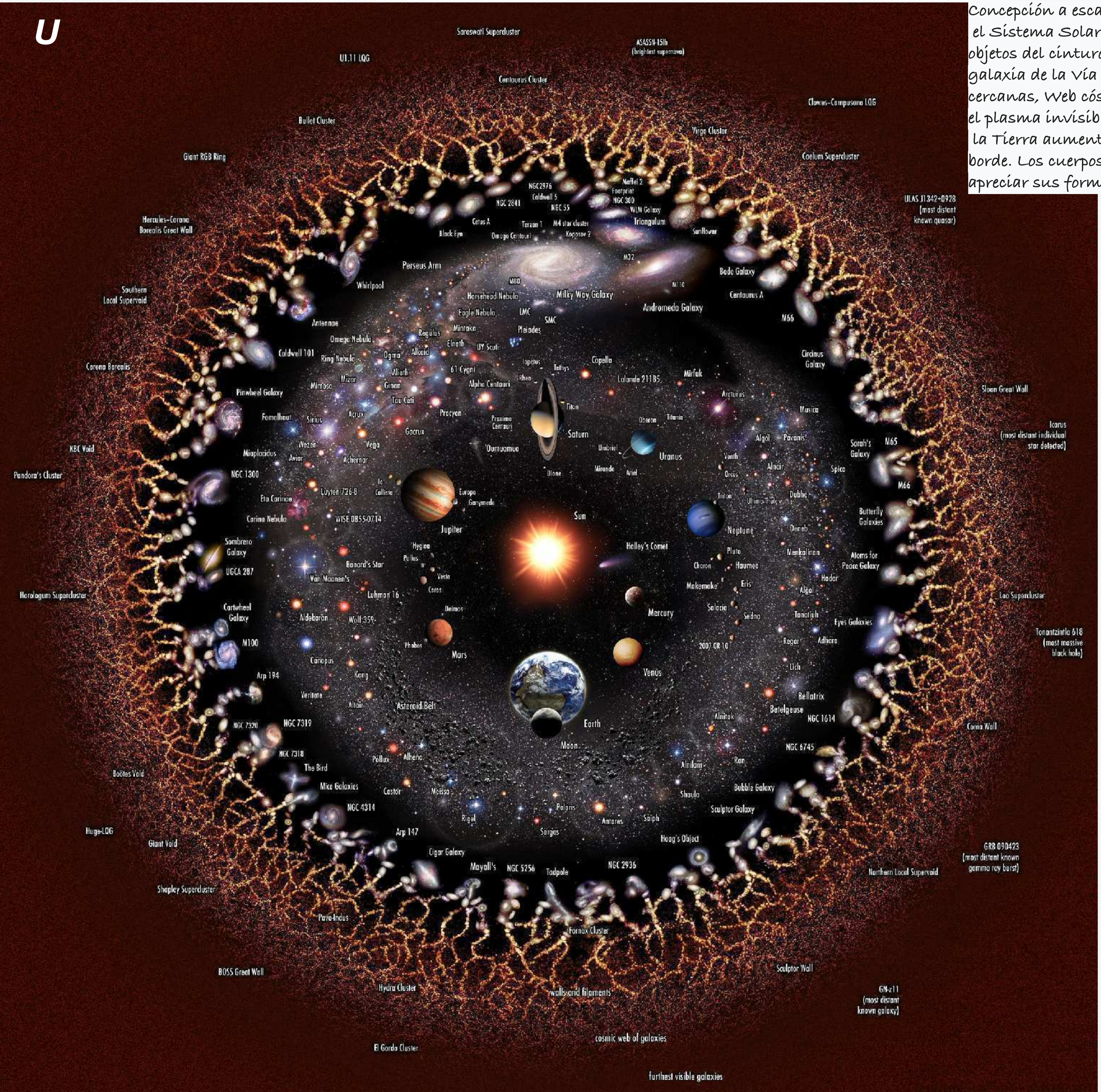
Una especulación:

"Si un álgebra del tipo $(P(\mathcal{U}),\sqsubseteq^{W})$ o del tipo $(L^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^{W})$ fuese un modelo compatible con el universo $\mathcal{U}$; ¿lo notaríamos?"

Desde luego, si la zona W es "accesible", lo podríamos comprobar analizando el comportamiento de la inclusión, intersección,...

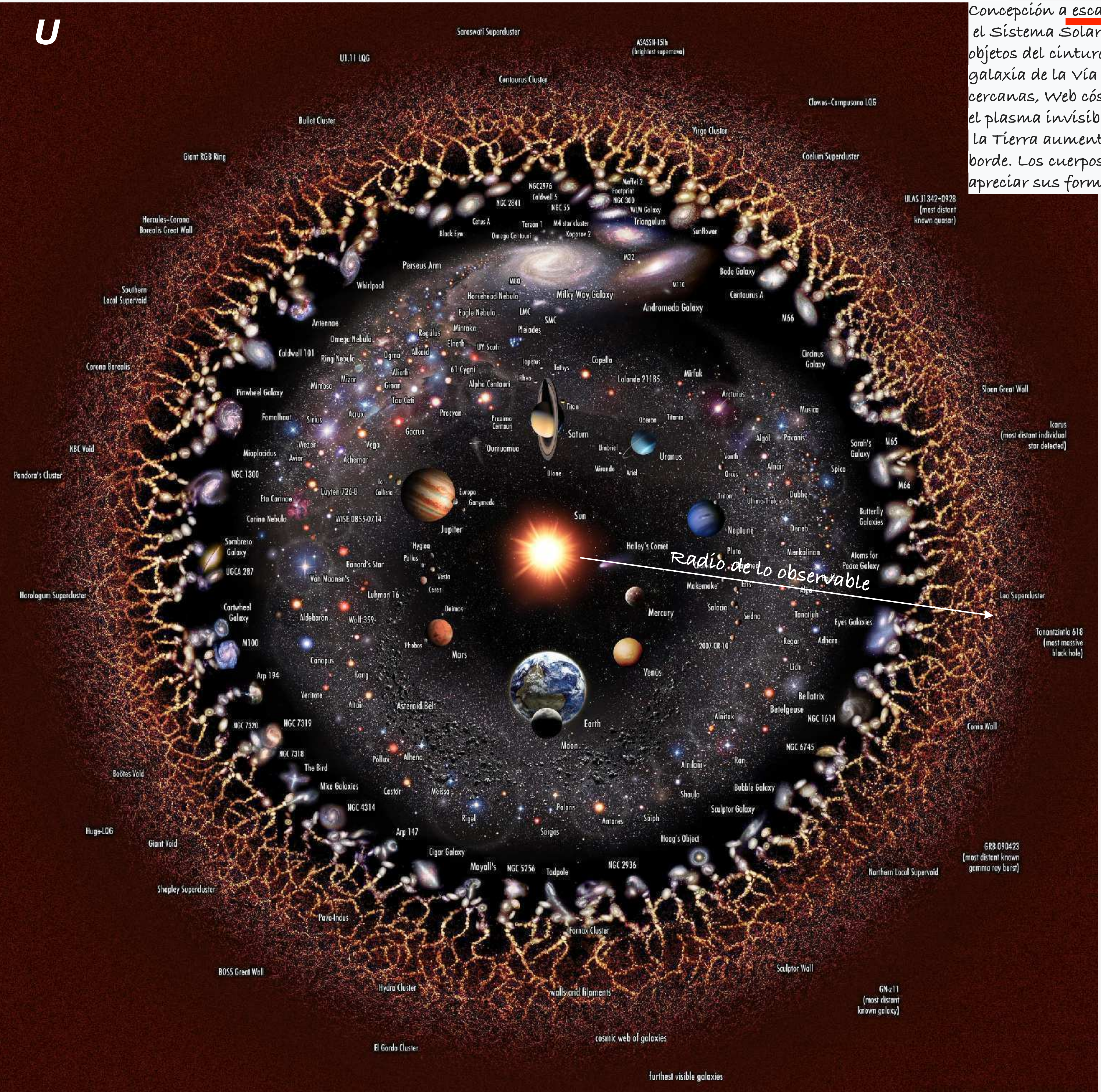
Pero ¿qué ocurriría si W es inaccesible debido a su lejanía?

(Planteamos la siguiente hipótesis: supongamos que en el universo observable $\mathcal{U}$ hay un subconjunto W, actualmente inaccesible,  (una "perspectiva" muy lejana), en el que la inclusión, unión, intersección,..., son duales de las que utilizamos en nuestro entorno).



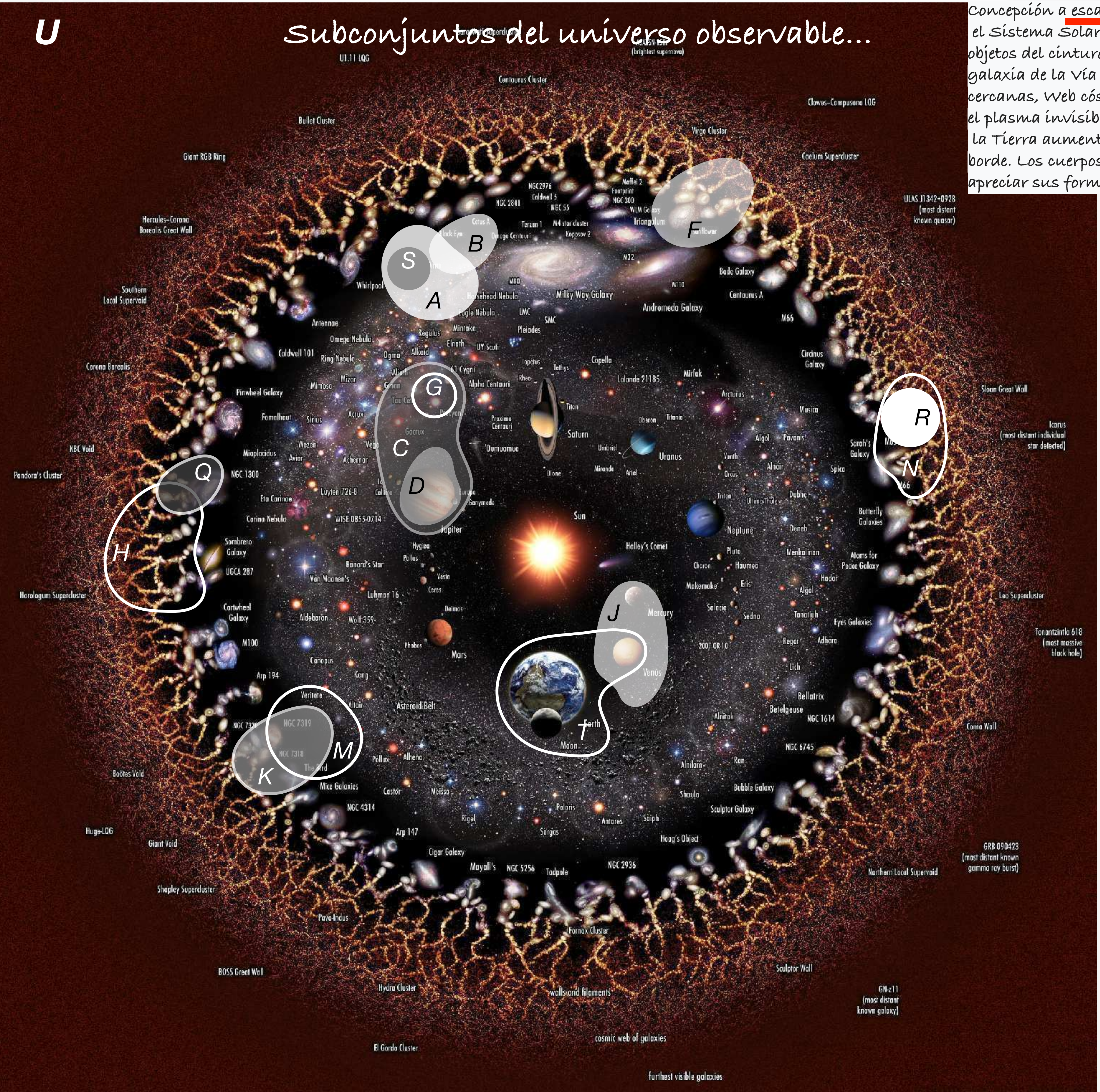
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)



Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

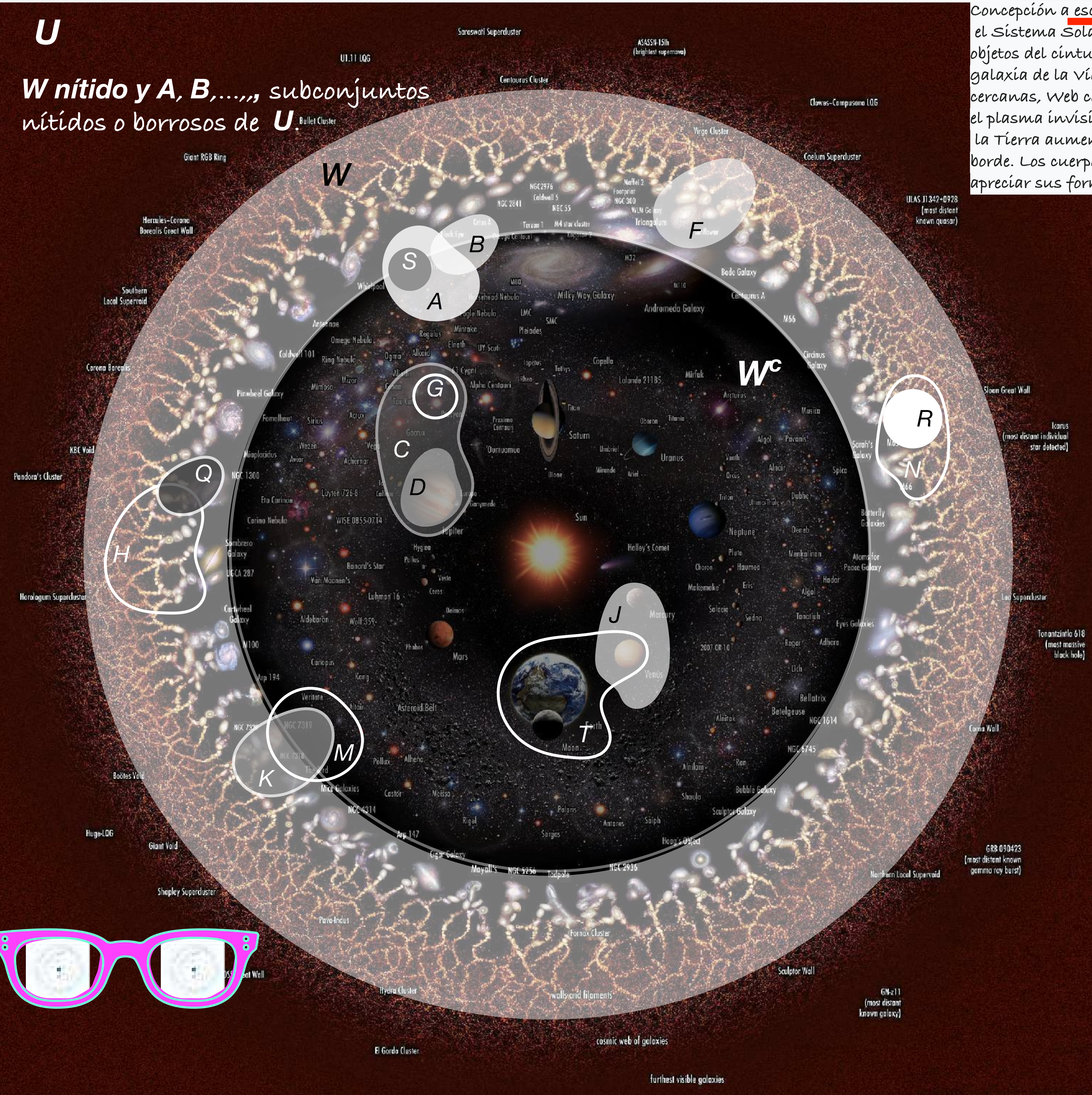


Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

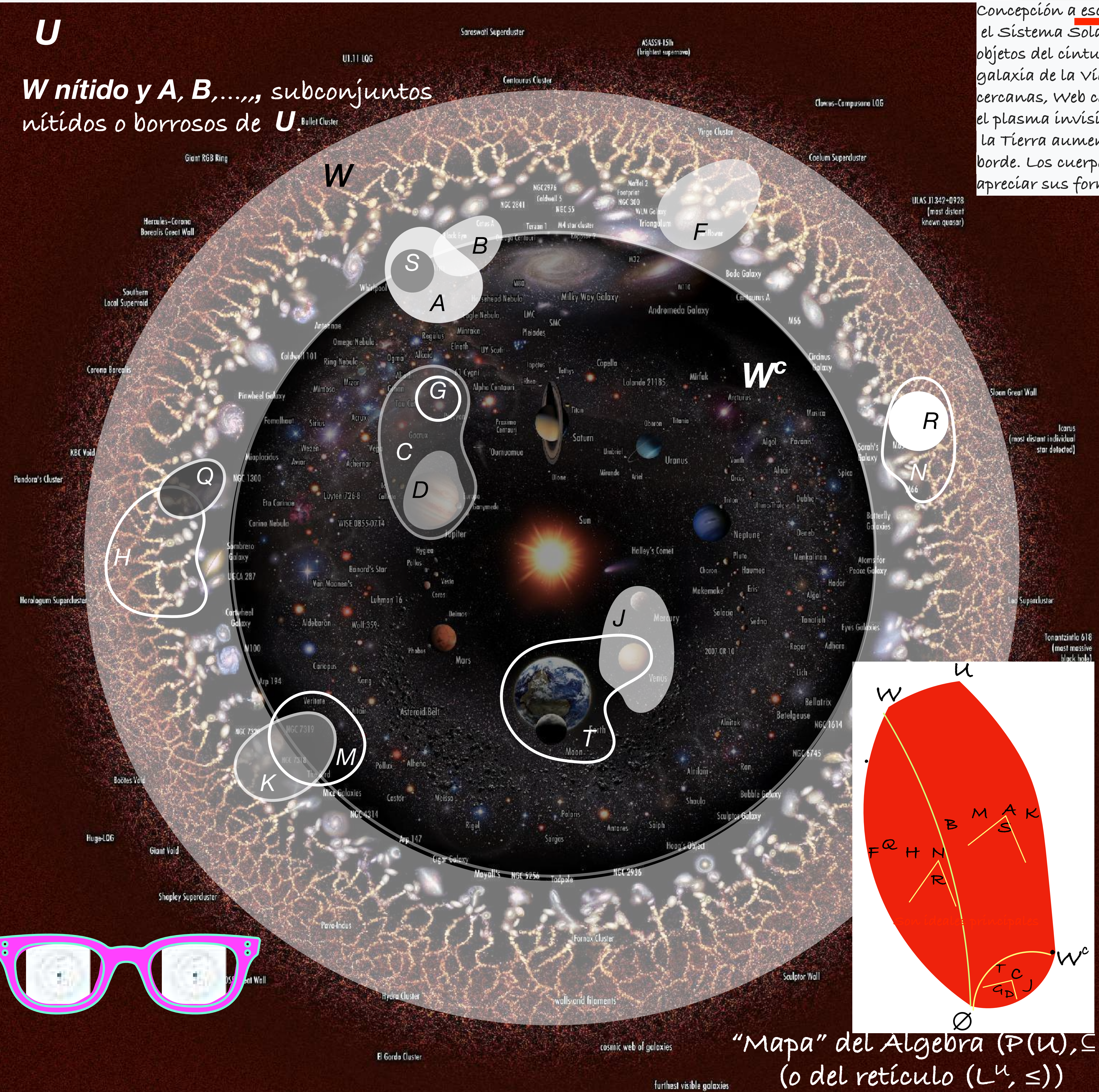
U

***W* nítido y *A, B*,…,,, subconjuntos nítidos o borrosos de *U*.**



Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)



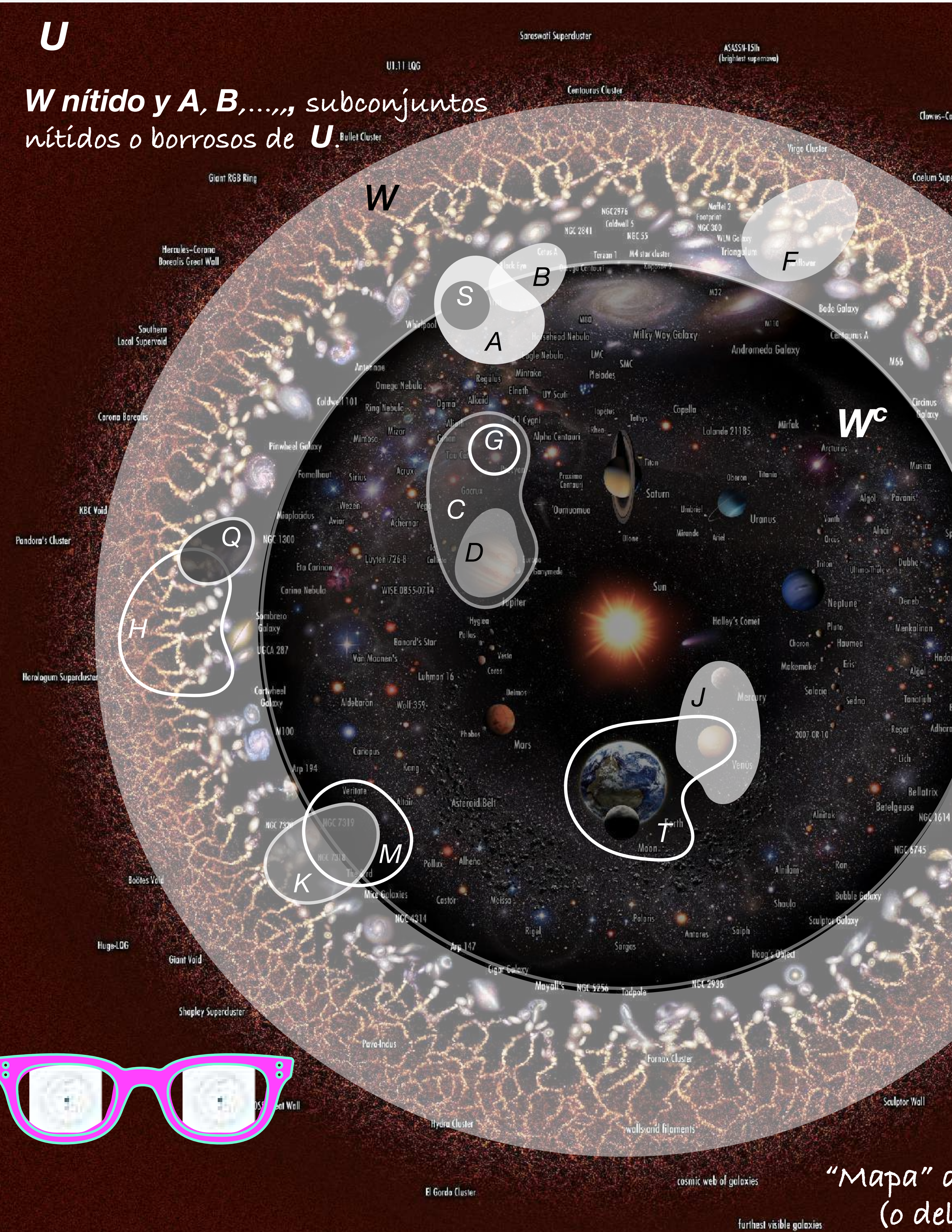
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

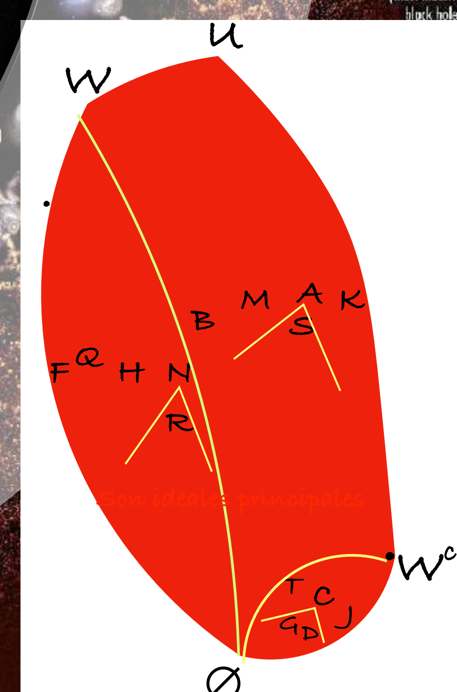
"Mapa" del Algebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$
(o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \leq)$)

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)



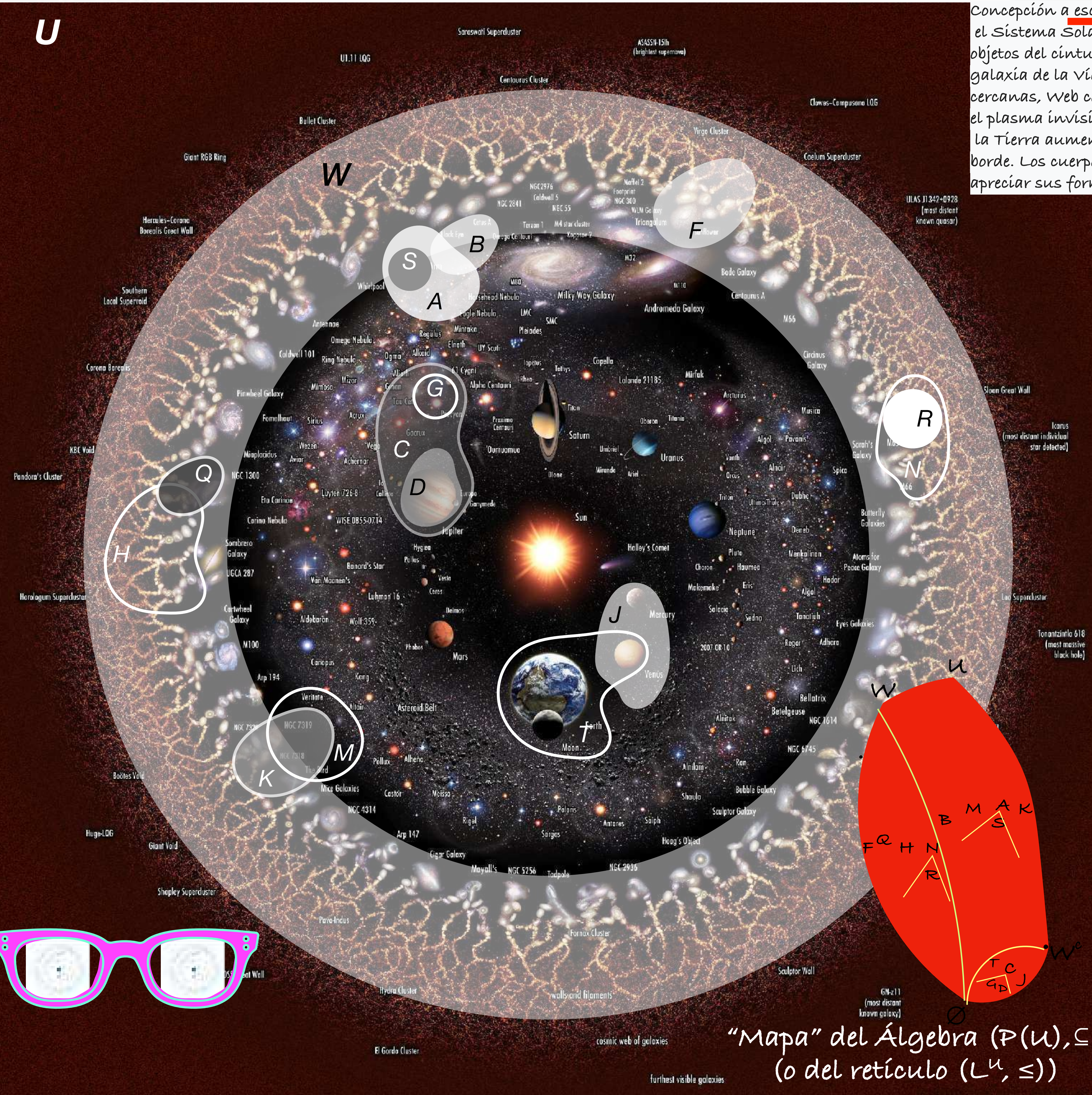
Desde la perspectiva de **W,** (lo muy lejano en el universo):



"Mapa" del Algebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$
(o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \leq)$)

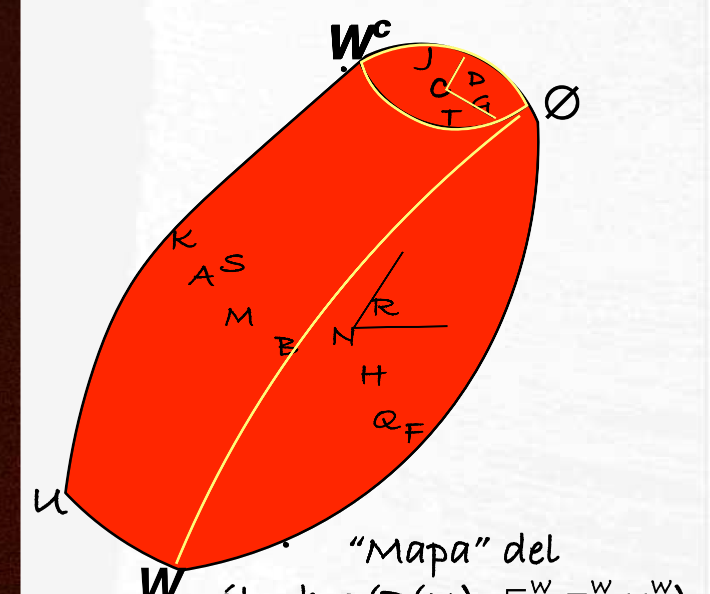
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)



Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

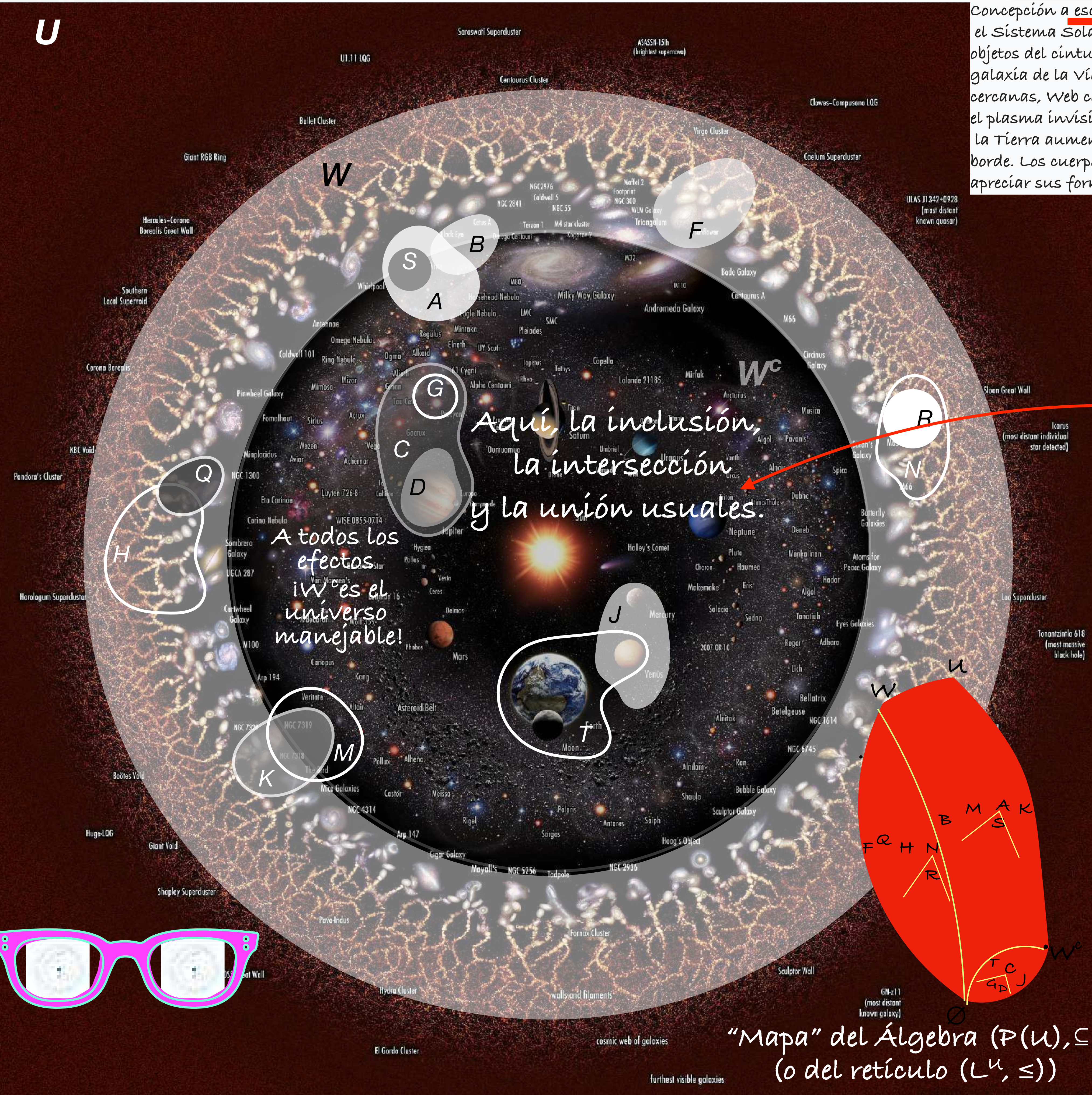
"Mapa" del Álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$
(o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \leq)$)



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W})$
o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W})$

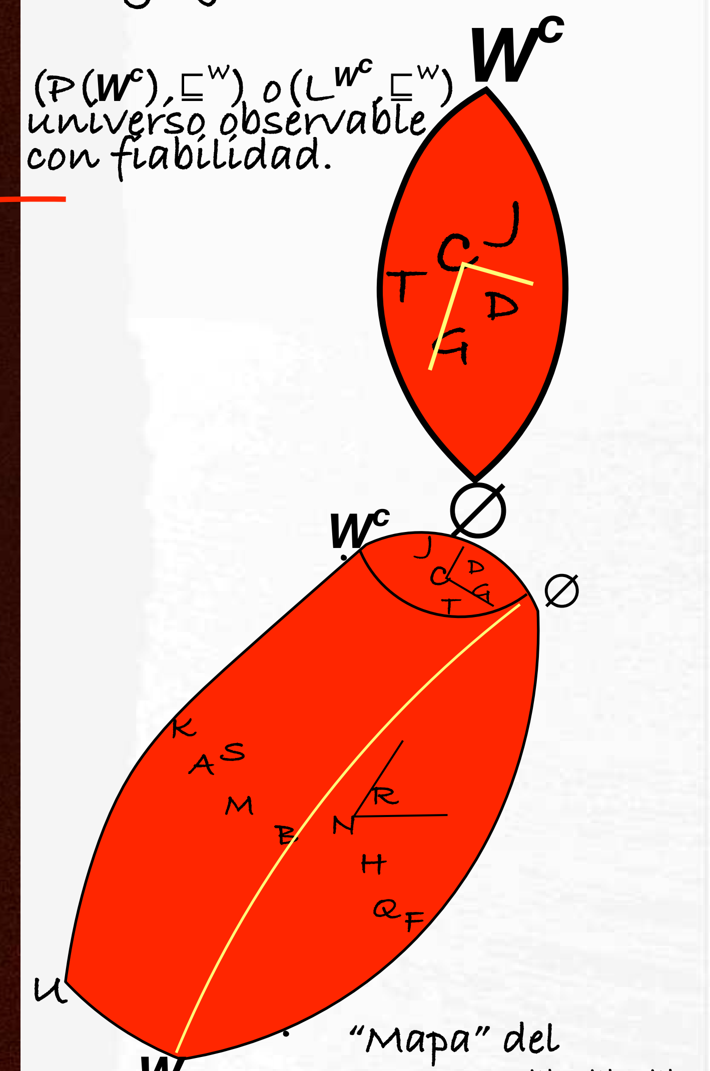
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)



Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

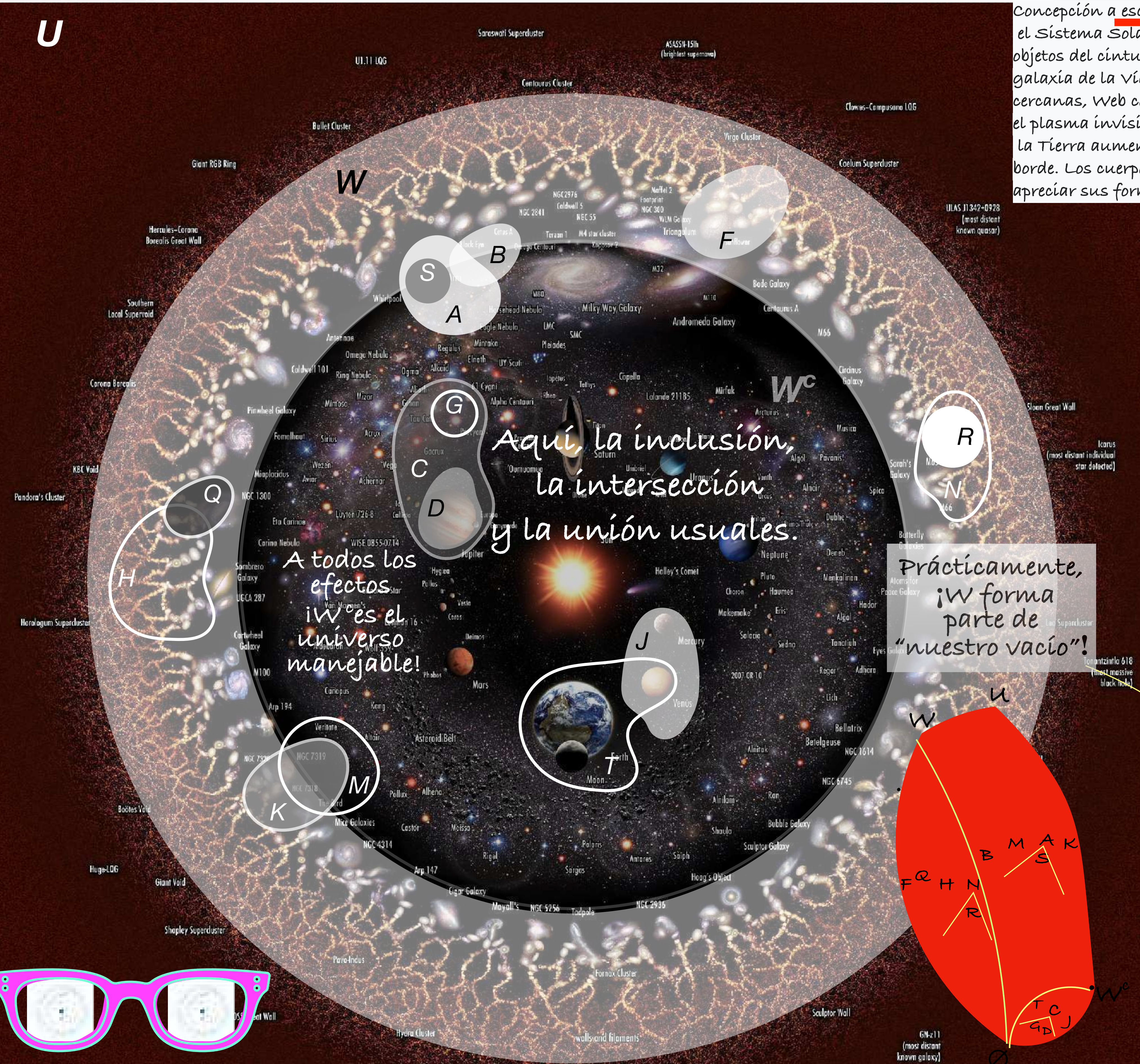
$(\mathcal{P}(W^c),\sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c},\sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(U),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$ o del retículo $(L^U,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

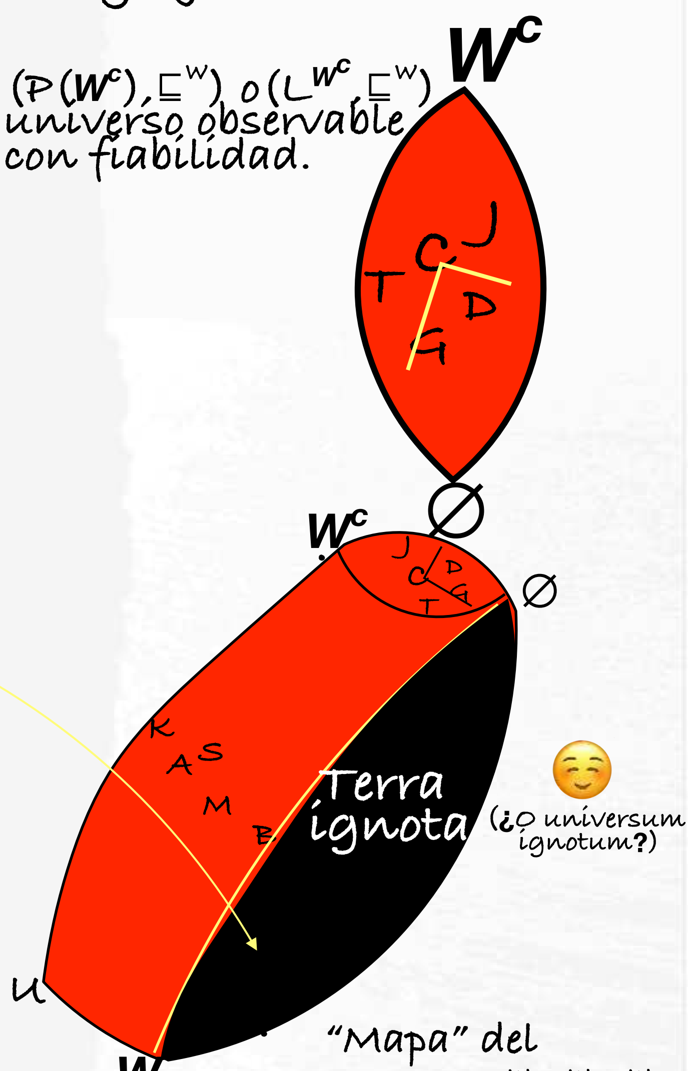
Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)



"Mapa" del Álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$
(o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \leq)$)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

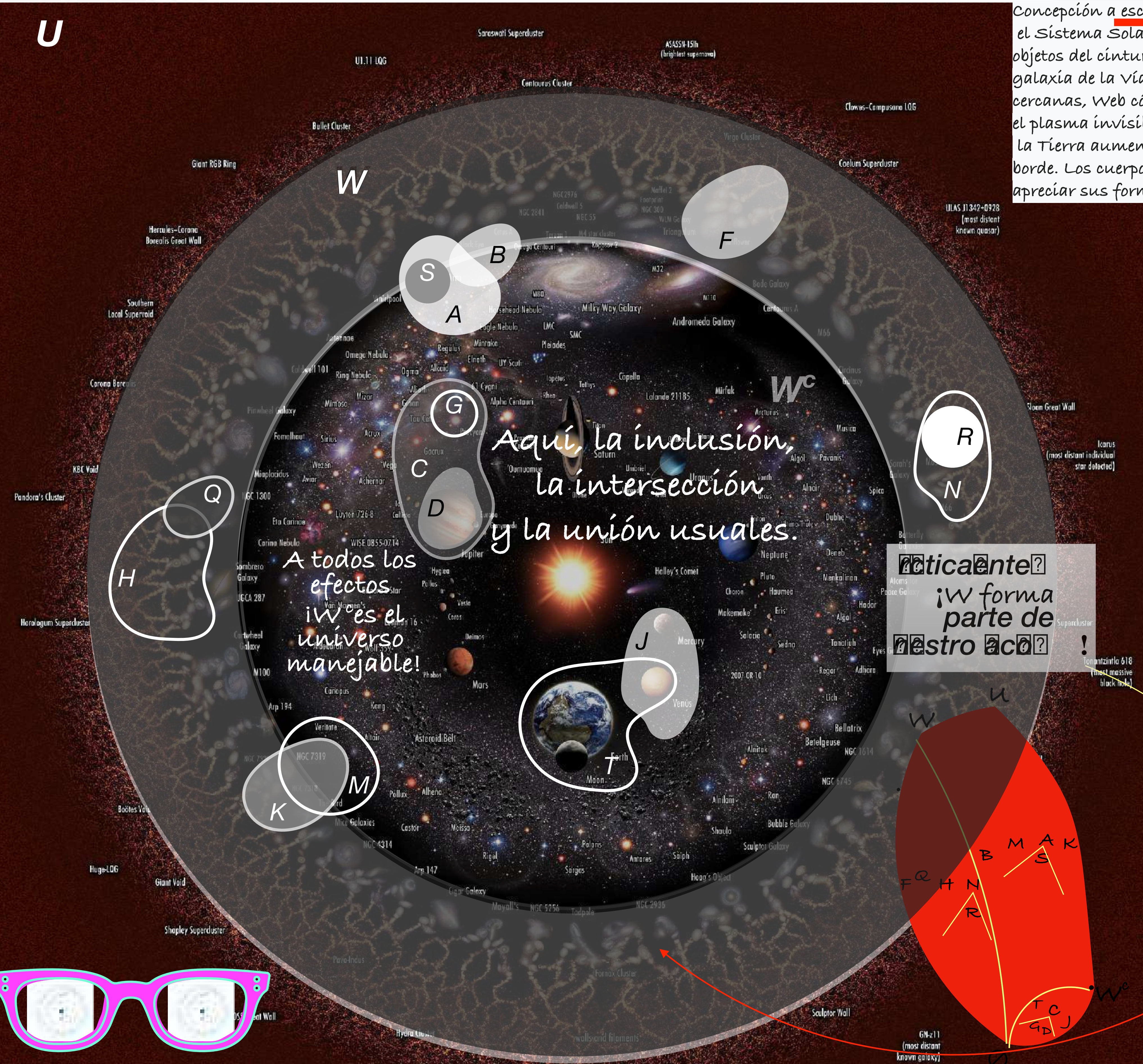
$(\mathcal{P}(W^c),\sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c},\sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$
o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

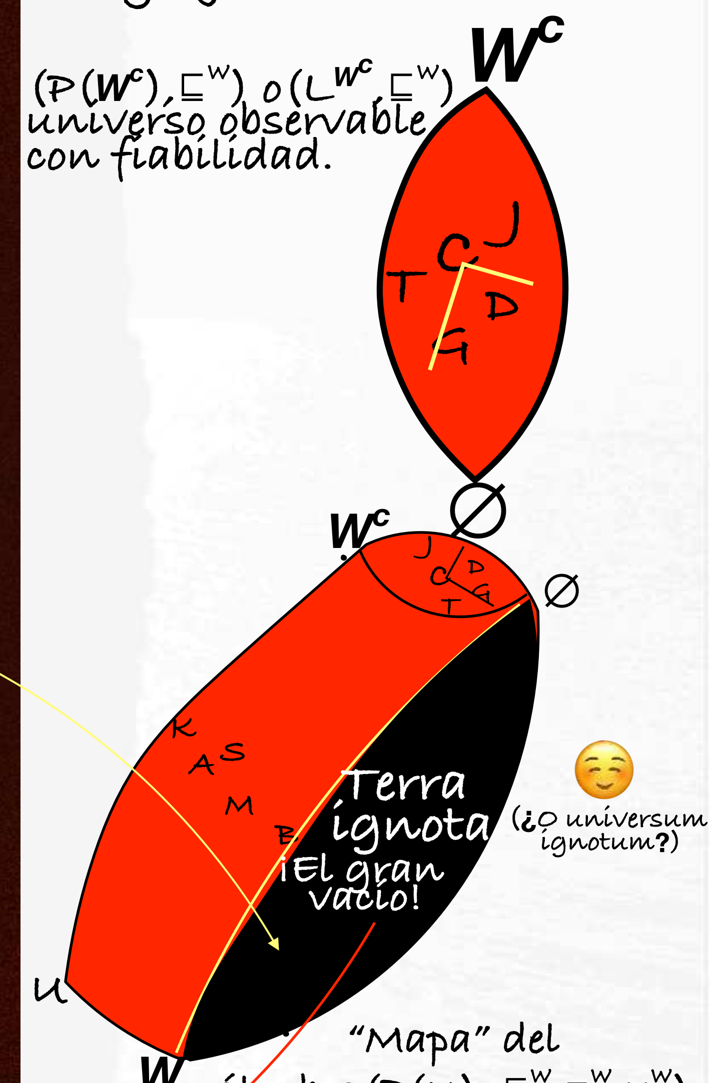
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)



“Mapa” del Álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$
(o del retículo $(L^{\mathcal{U}},\leq)$)

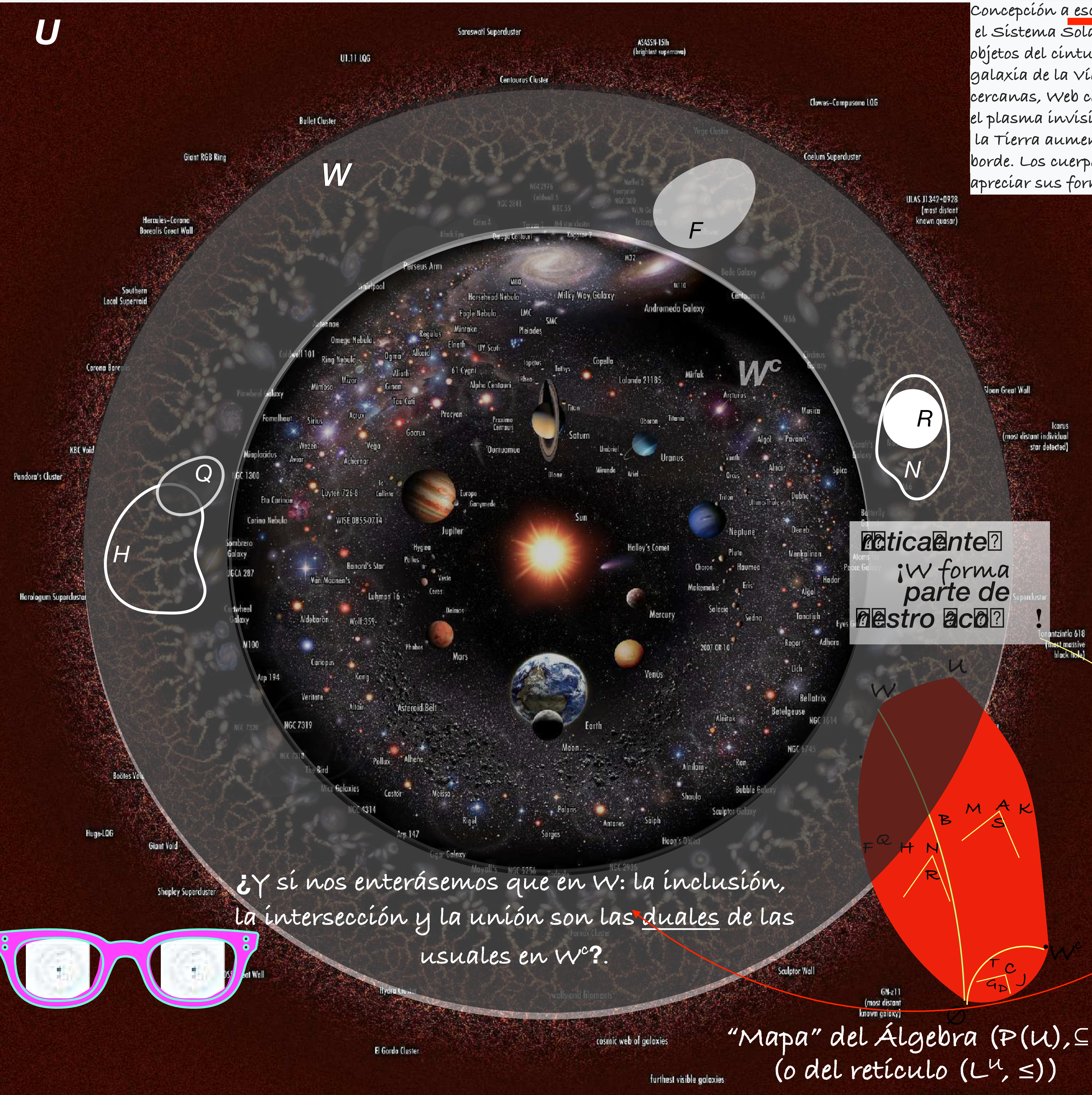
Desde la perspectiva de ***W***, (lo muy lejano en el universo):



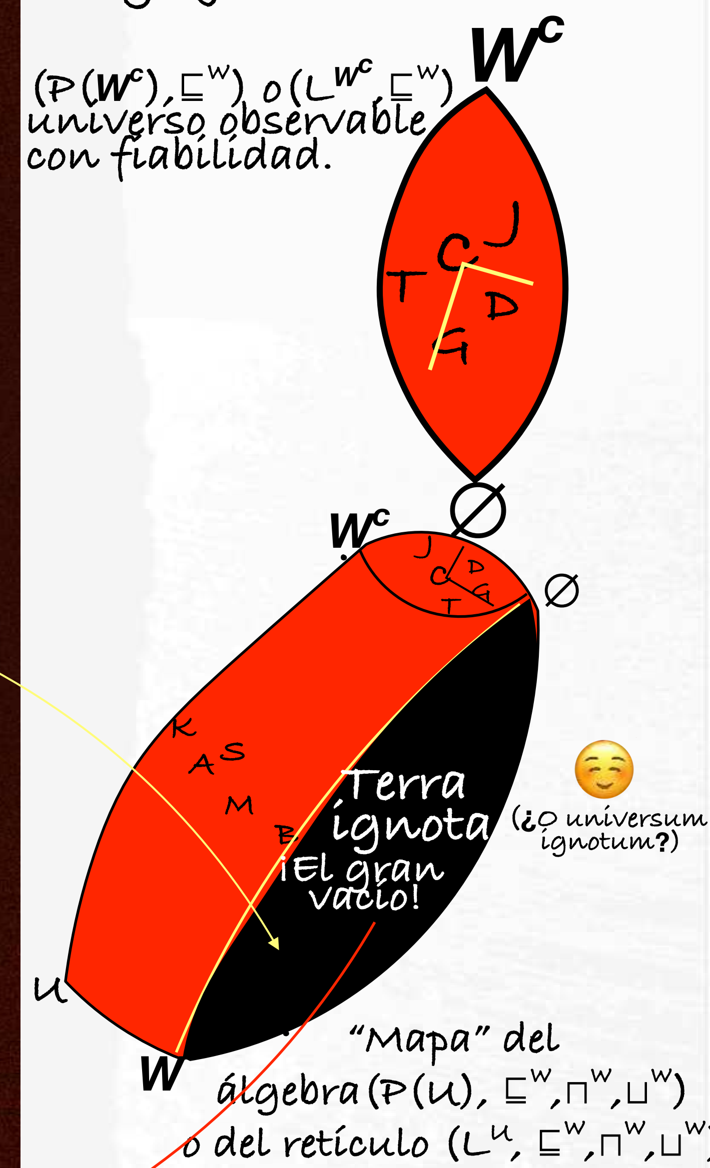
“Mapa” del álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$
o del retículo $(L^{\mathcal{U}},\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W)$

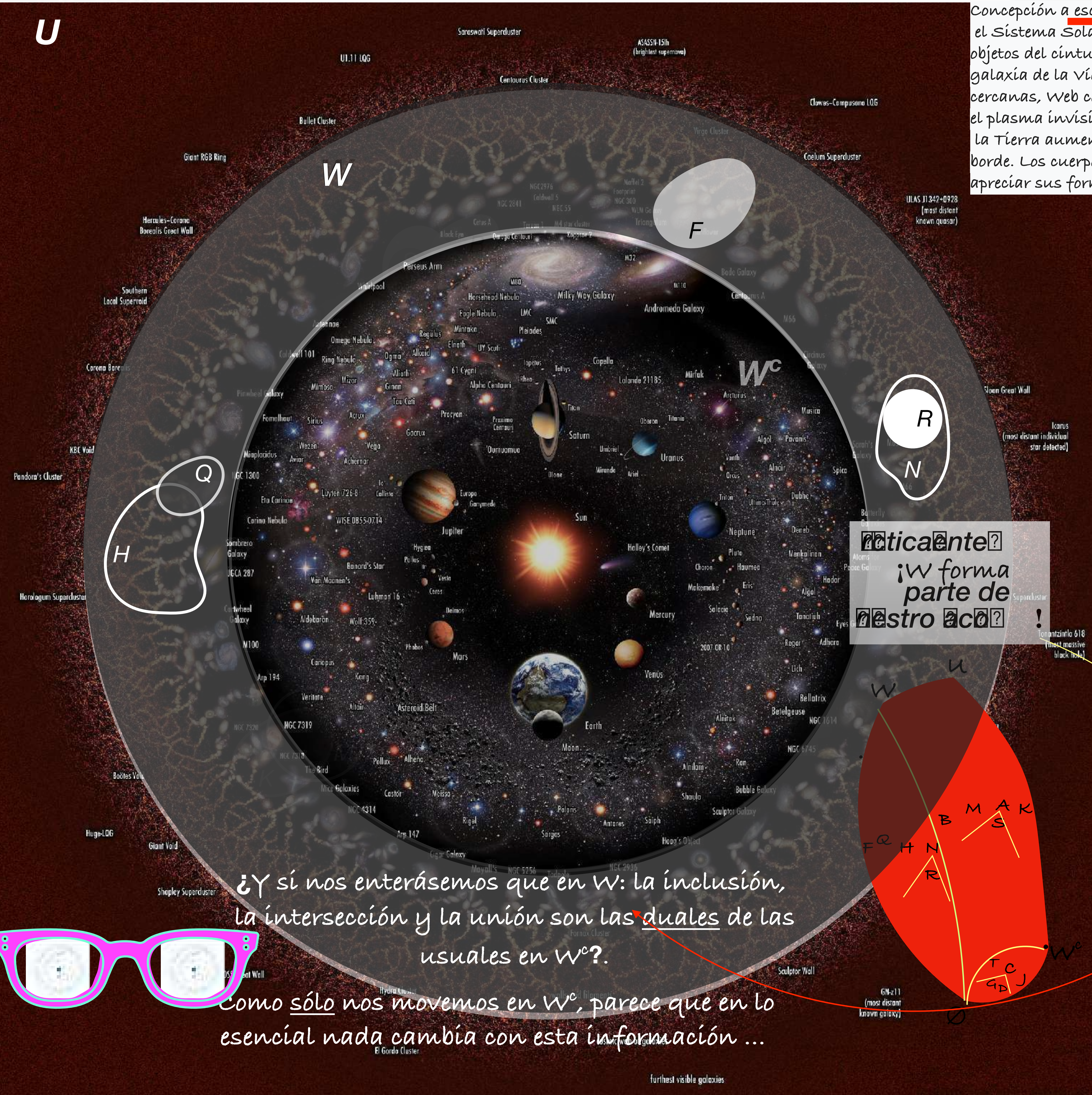
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)



Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):





Prácticamente ¡W forma parte de nuestro acá!

¿Y si nos enterásemos que en W: la inclusión, la intersección y la unión son las duales de las usuales en W^c?

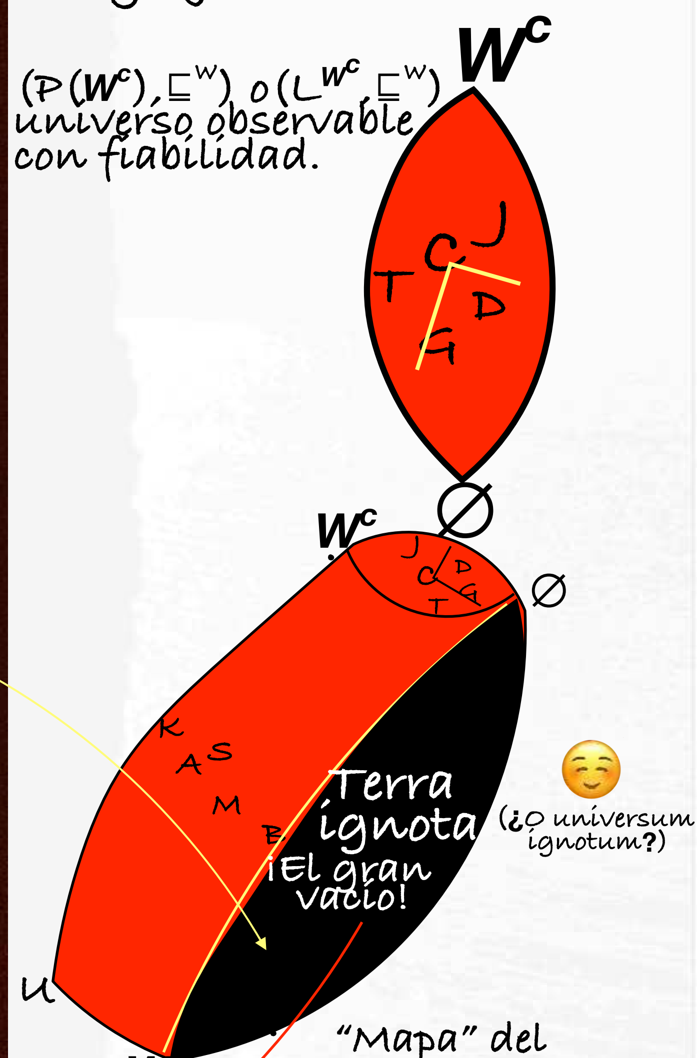
Como sólo nos movemos en W^c, parece que en lo esencial nada cambia con esta información …

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

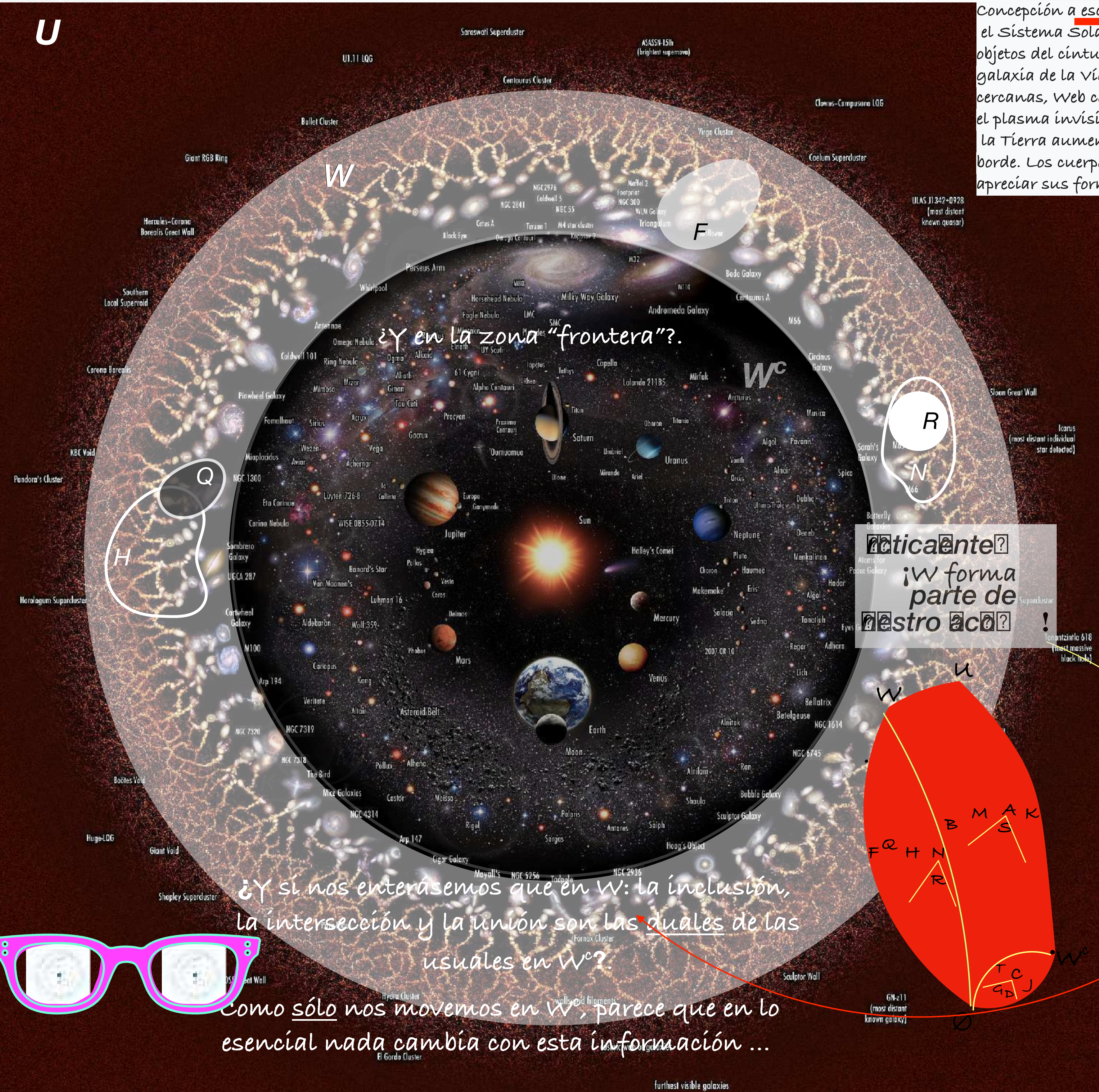
Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

$(P(W^c), \sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c}, \sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



"Mapa" del álgebra $(P(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$

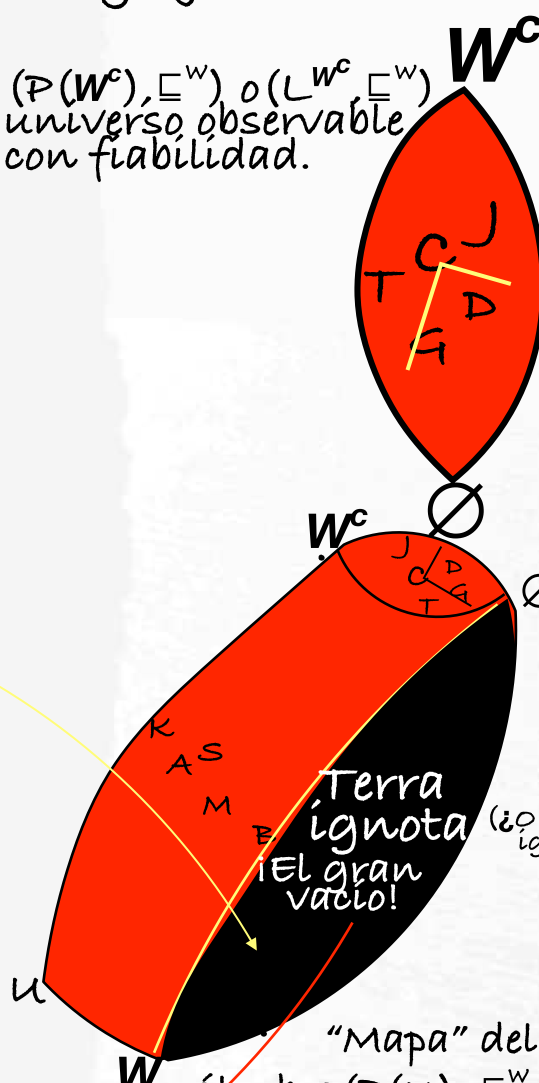


Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

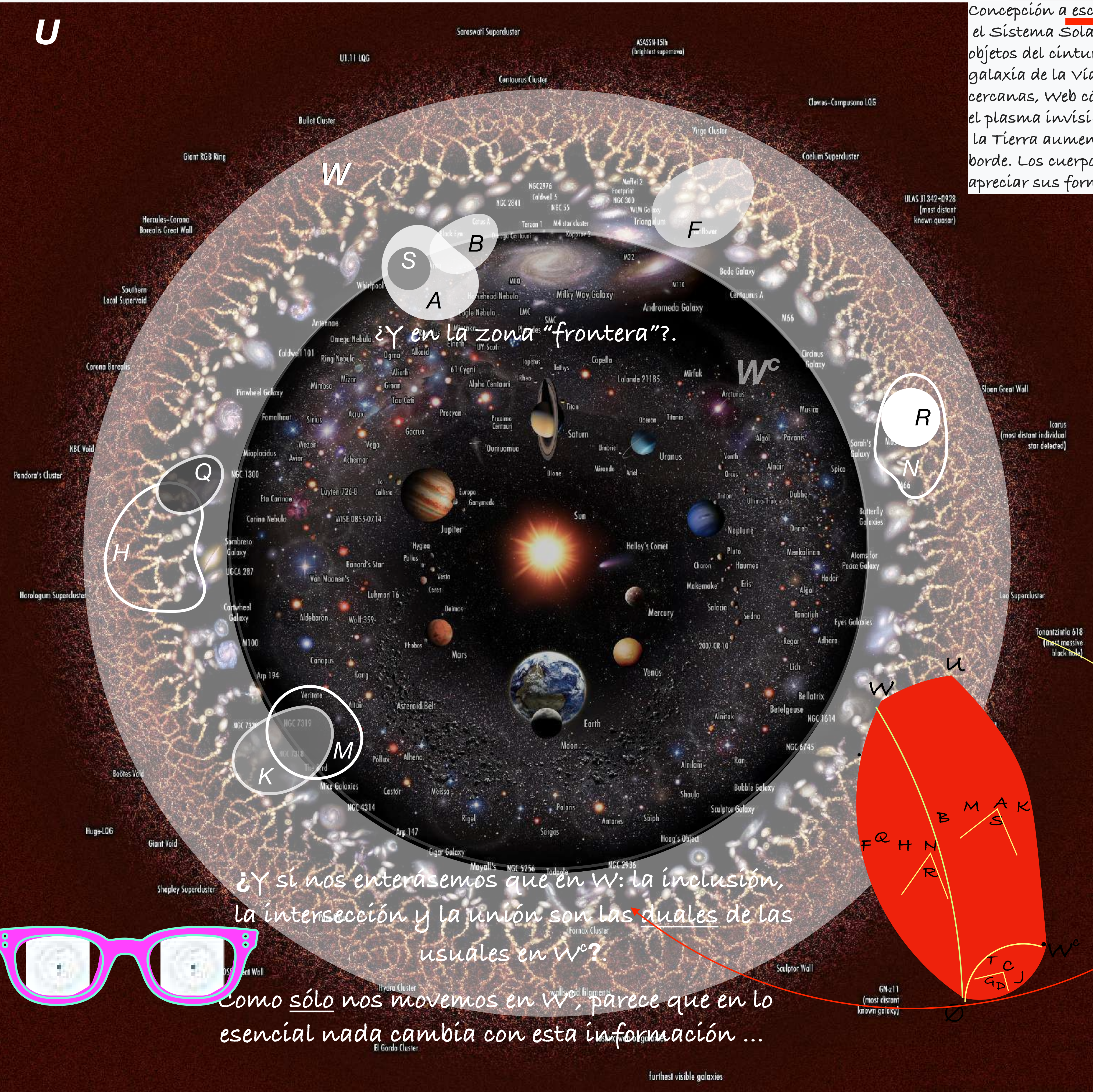
$(\mathcal{P}(W^c), \sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c}, \sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

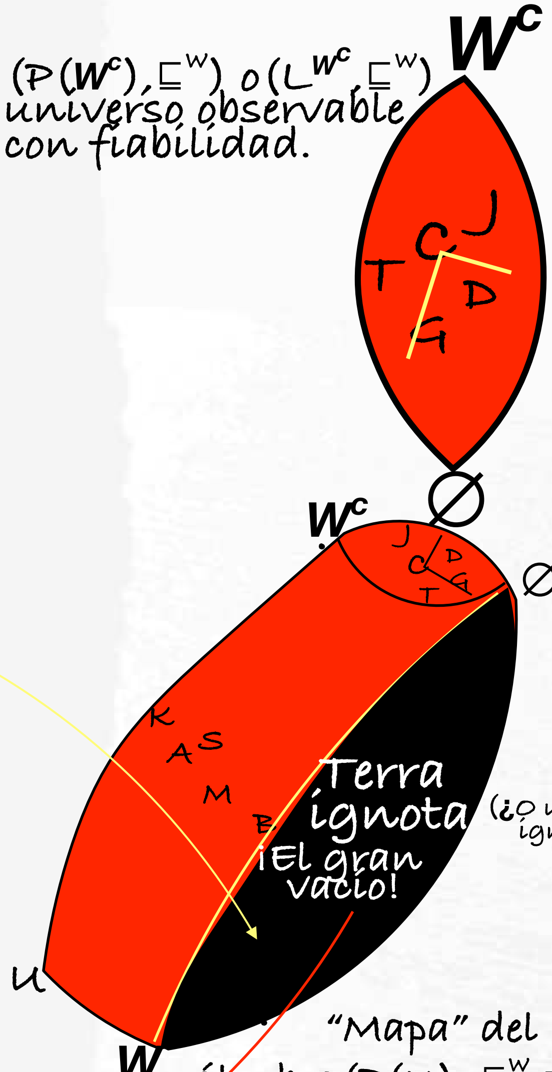


¿Y si nos enterásemos que en W: la inclusión, la intersección y la unión son las duales de las usuales en W^c?

Como sólo nos movemos en W^c, parece que en lo esencial nada cambia con esta información ...

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

$(\mathcal{P}(W^c), \sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c}, \sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.

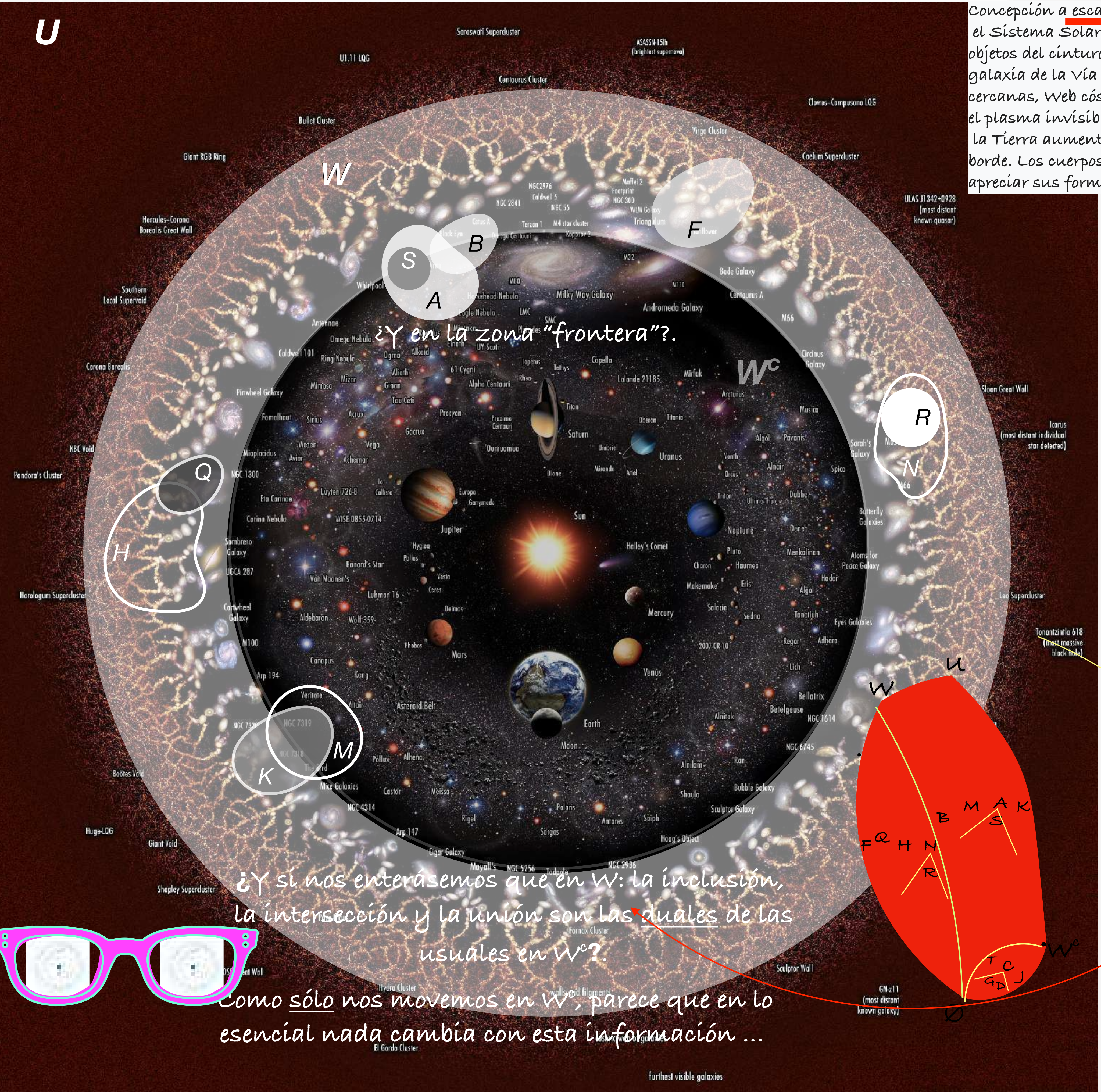


(¿O universum ignotum?)

"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)



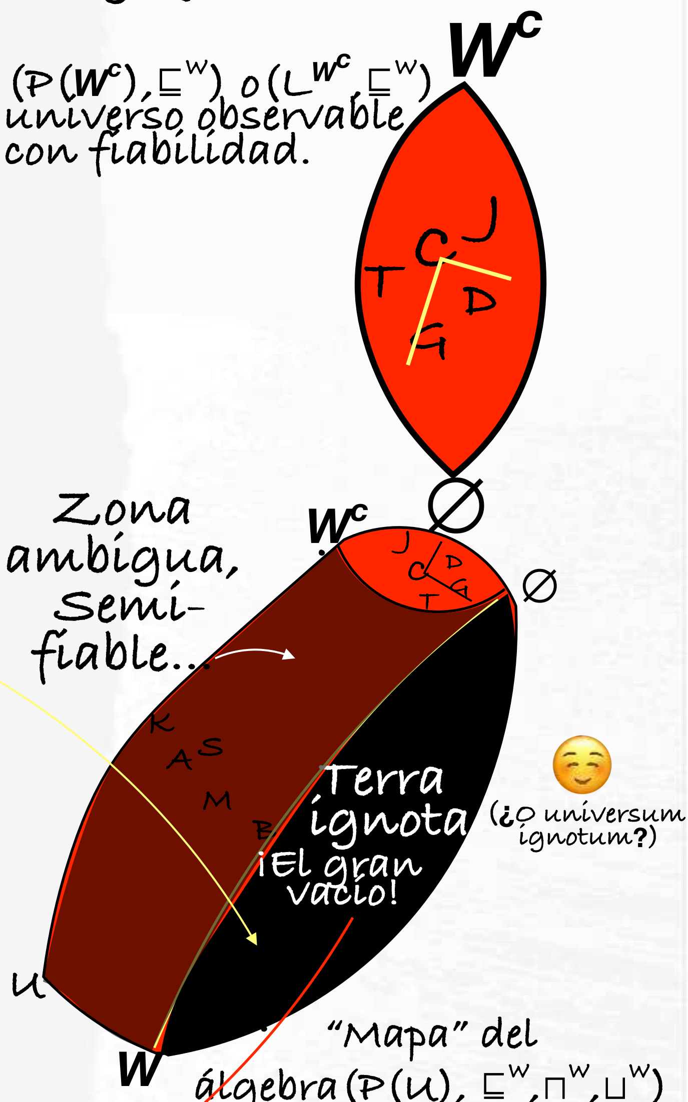
¿Y en la zona "frontera"?.

¿Y si nos enterásemos que en W: la inclusión, la intersección y la unión son las duales de las usuales en W^c?.

Como sólo nos movemos en W^c, parece que en lo esencial nada cambia con esta información ...

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

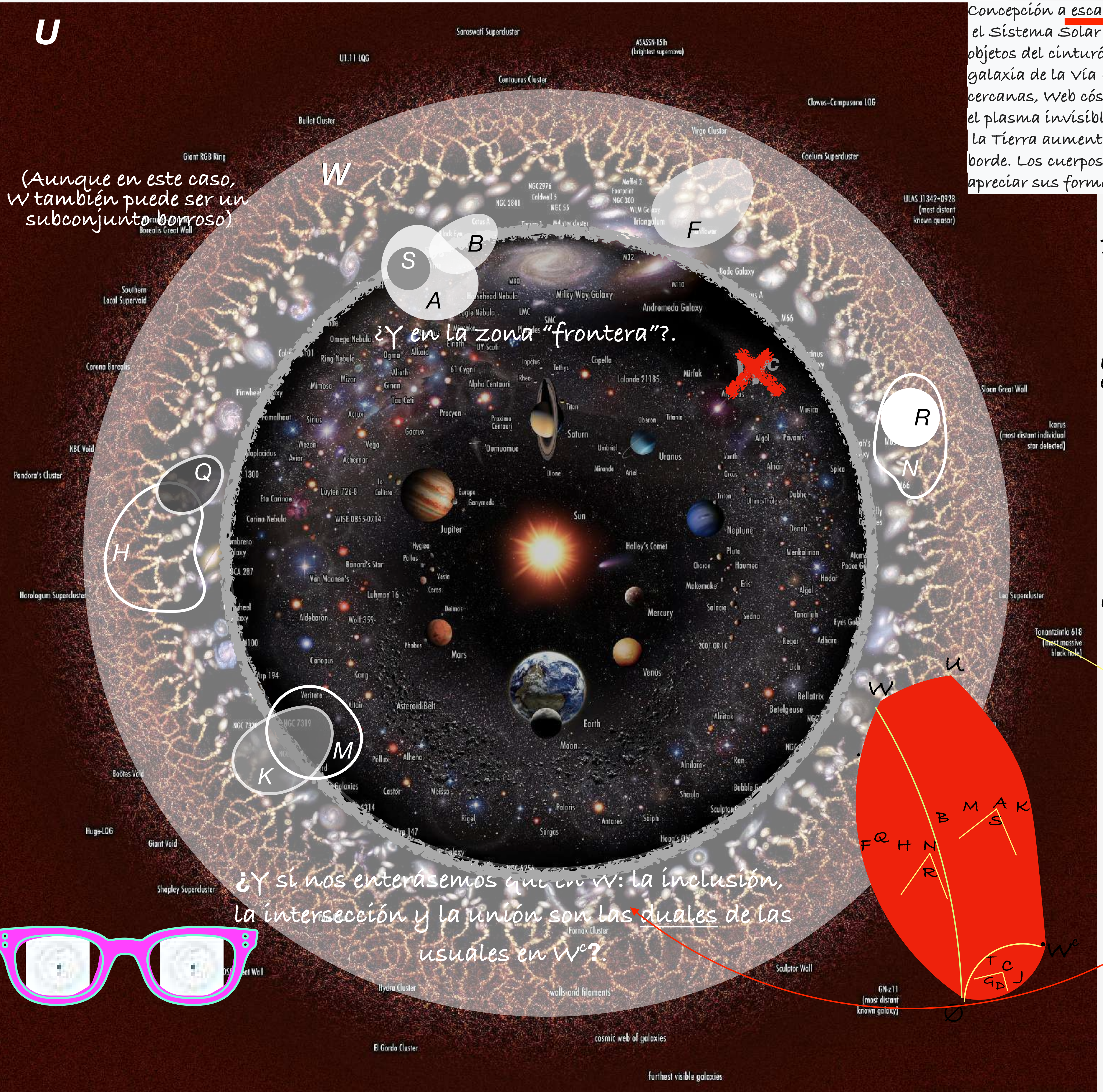
$(\mathcal{P}(W^c), \sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c}, \sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^{\mathcal{U}}, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$

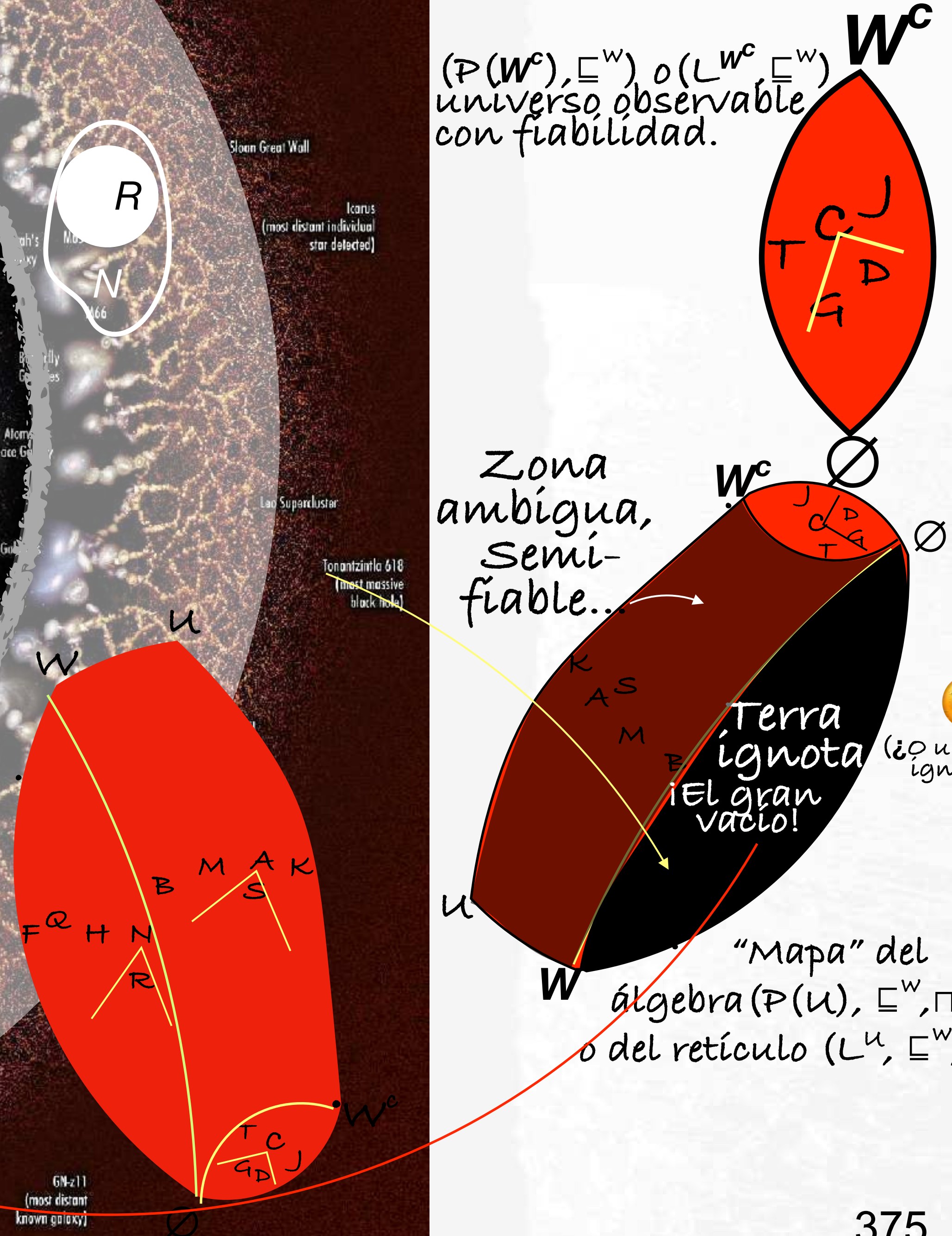
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

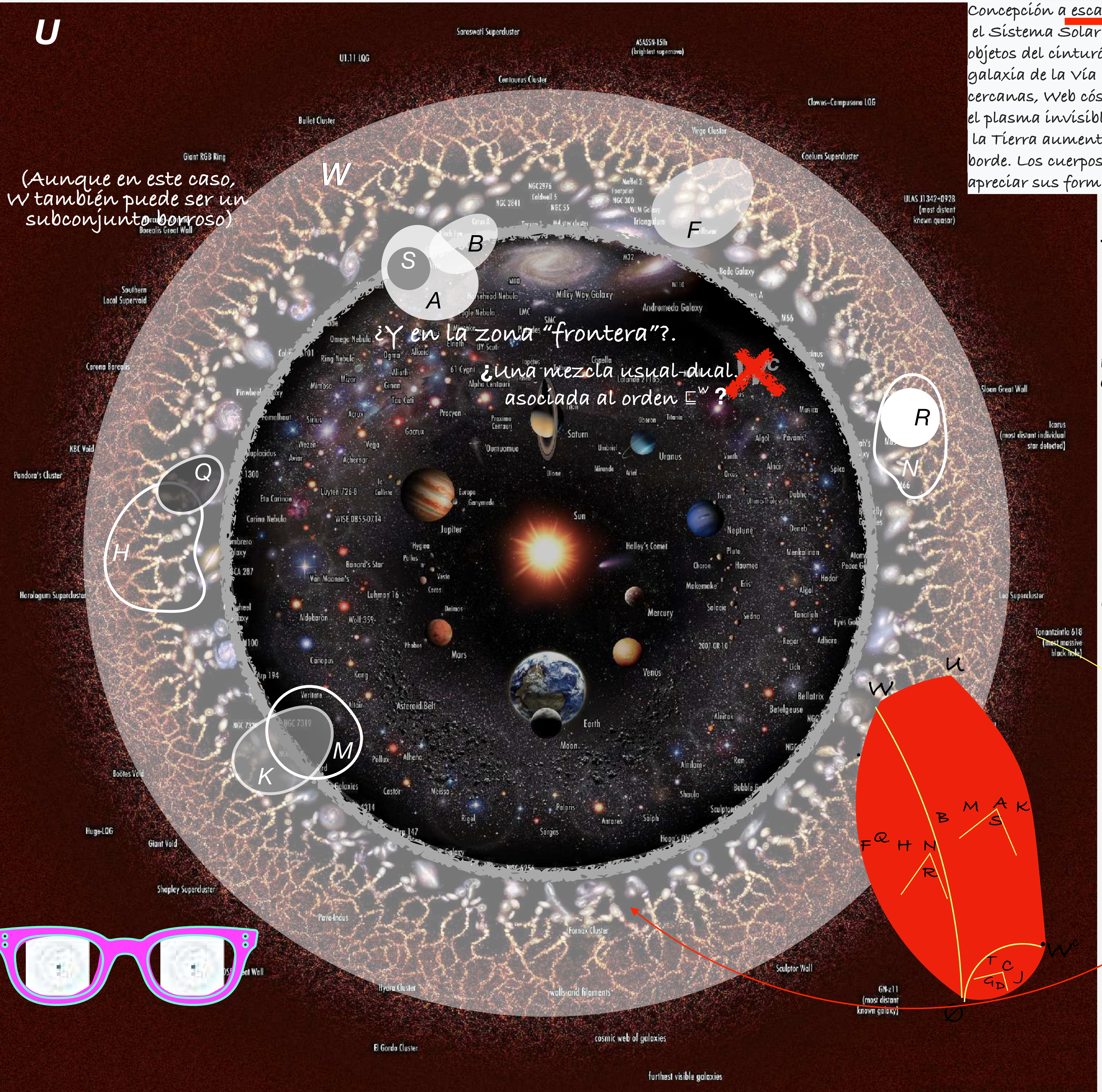


Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

$(\mathcal{P}(W^c), \sqsubseteq^W)$ o $(L^{W^c}, \sqsubseteq^W)$ universo observable con fiabilidad.



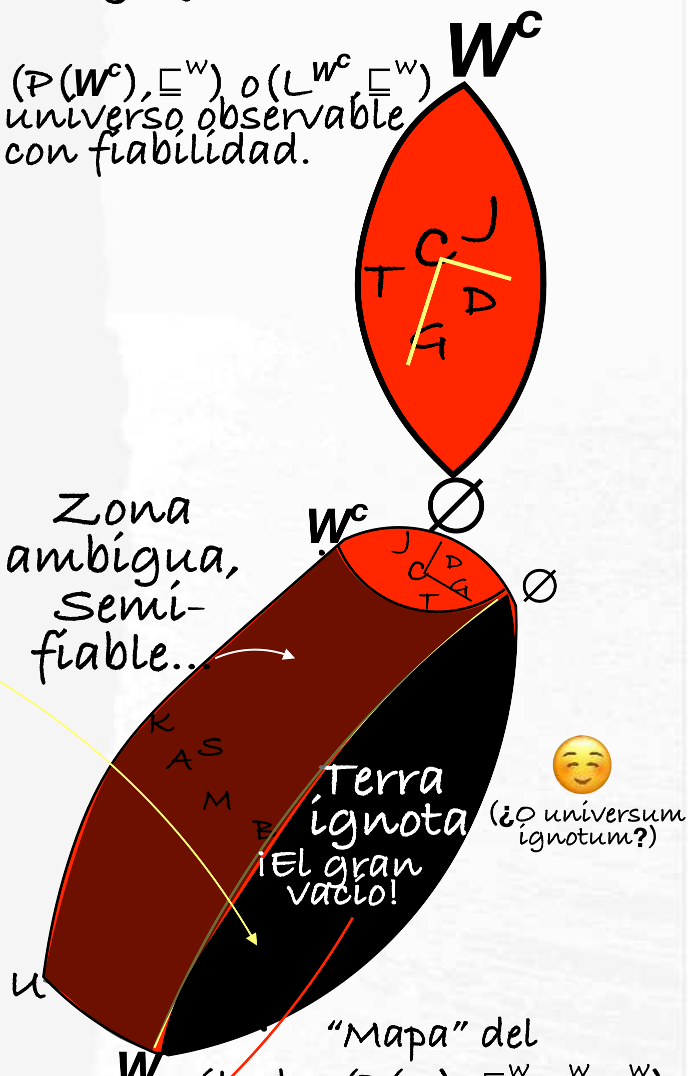
"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$



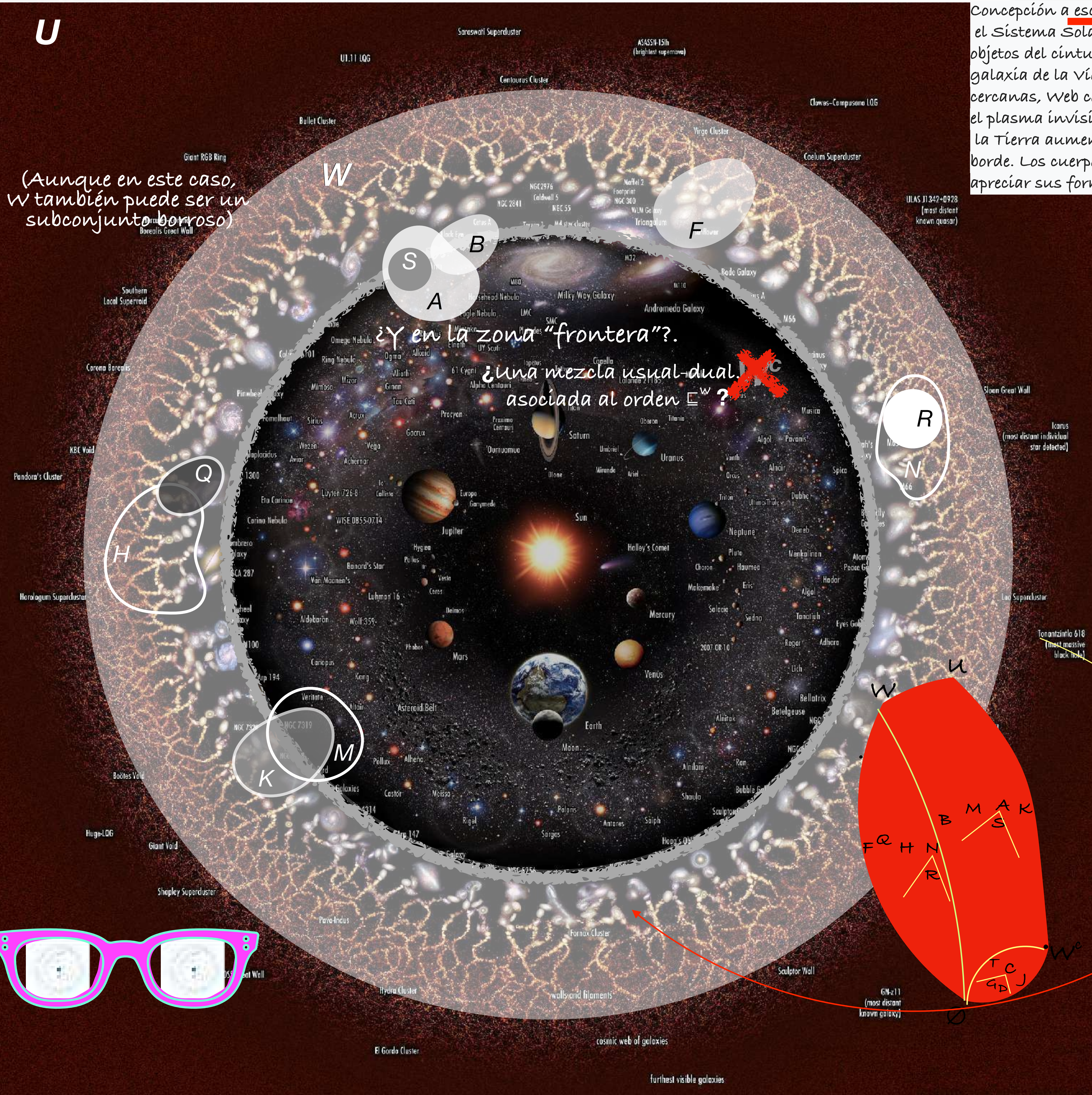
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

Desde la perspectiva de **W,** (lo muy lejano en el universo):



"Mapa" del álgebra $(\mathcal{P}(U), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$ o del retículo $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W)$

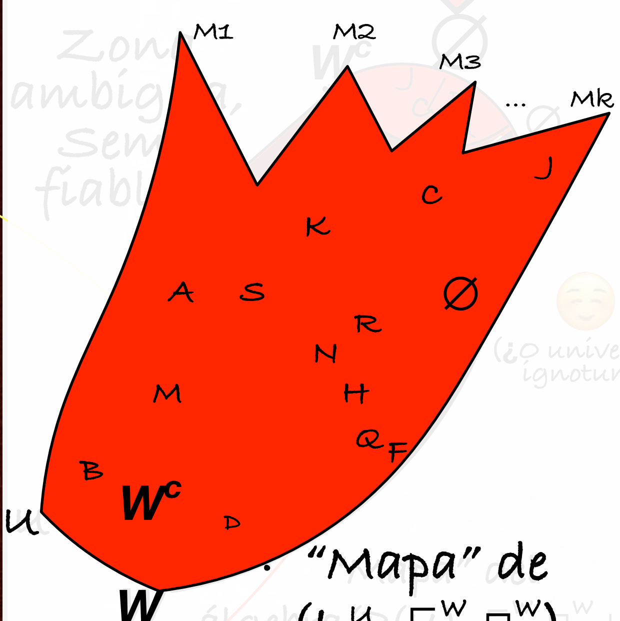


Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

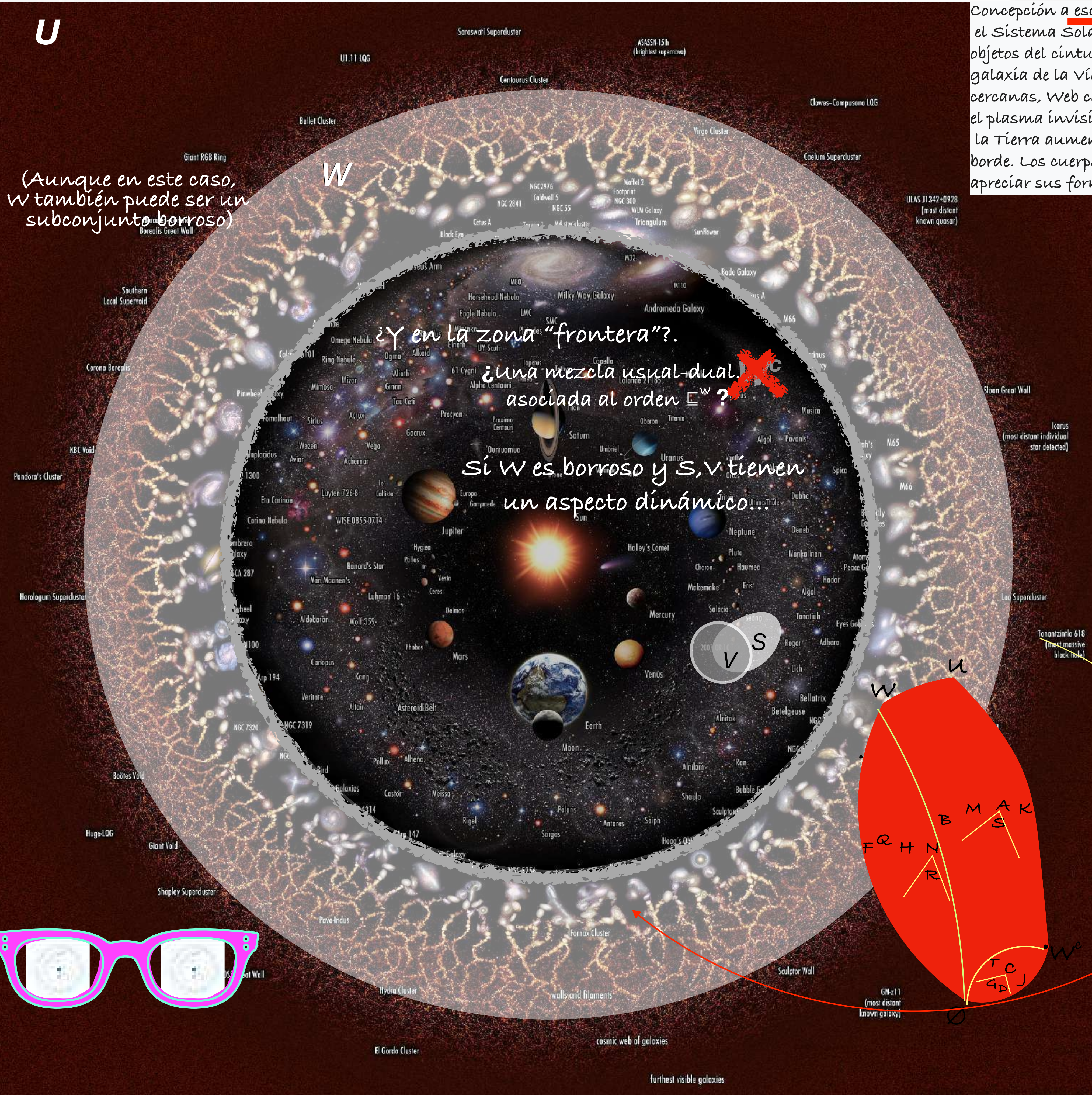
Pablo Carlos Budassi (Wikipedia , 2019)

Desde la perspectiva de **W,** (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:



“Mapa” de $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$



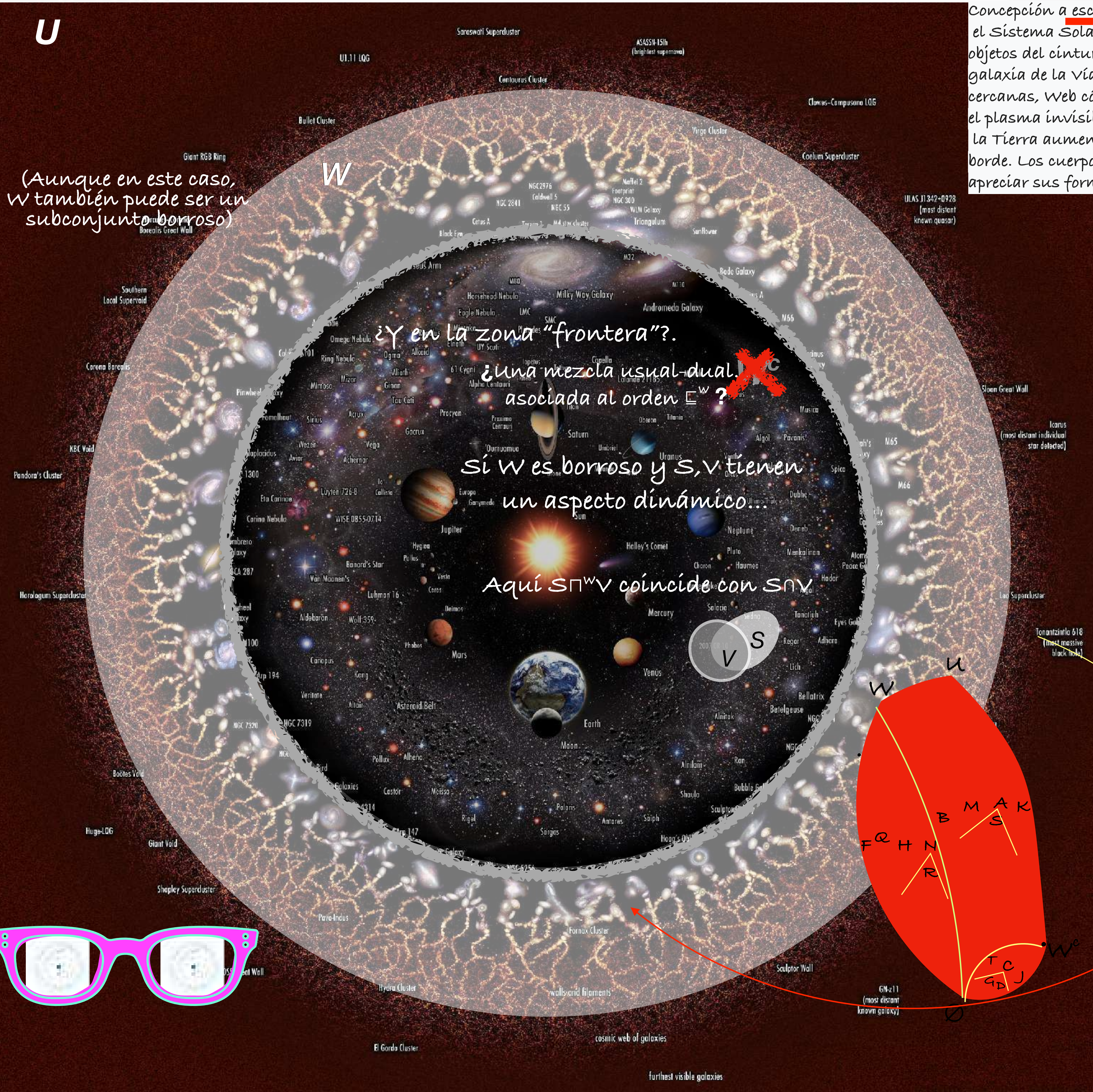
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:

“Mapa” de $(L^{U}, \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W})$



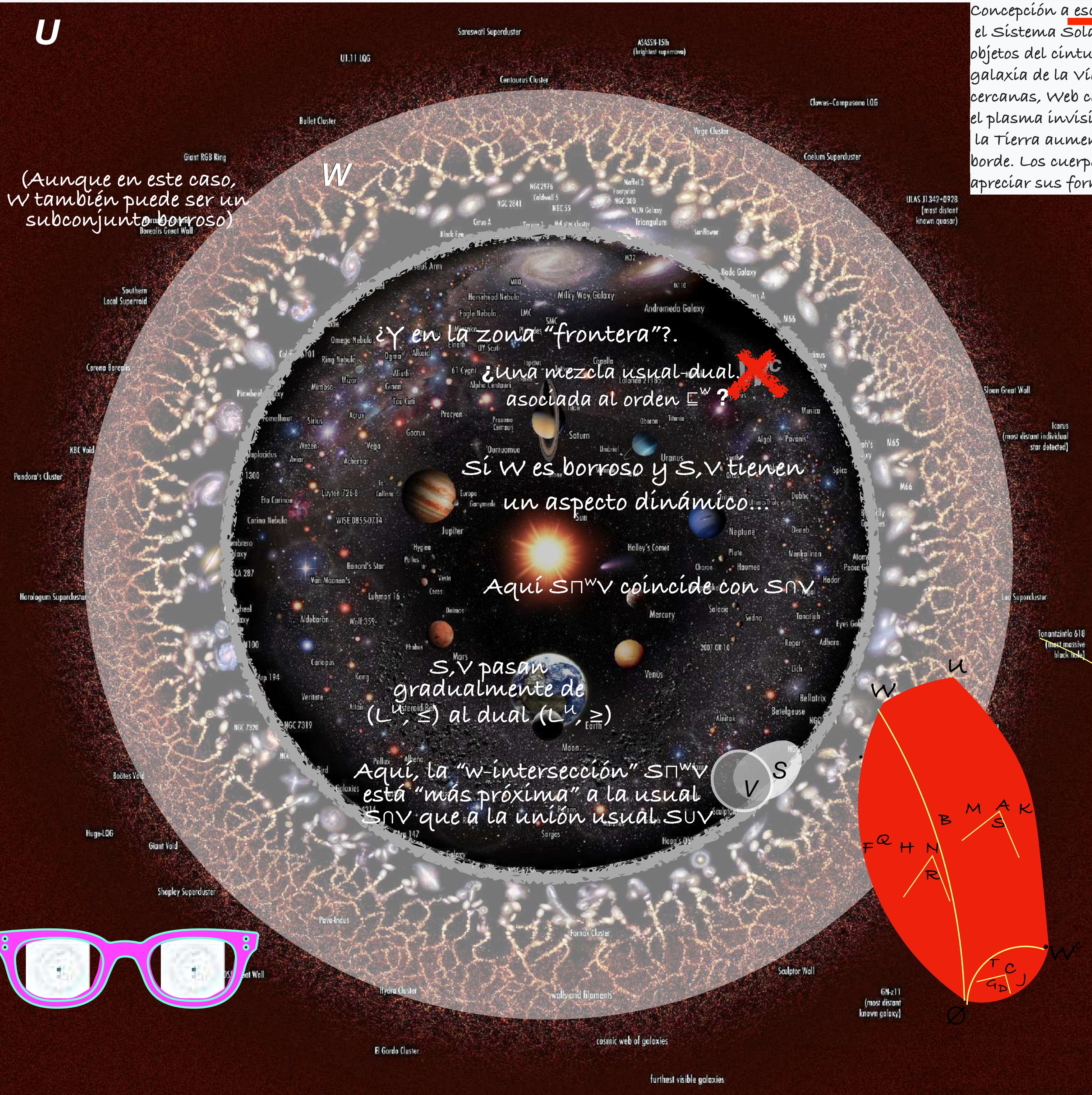
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:

"Mapa" de $(L^{U}, \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W})$

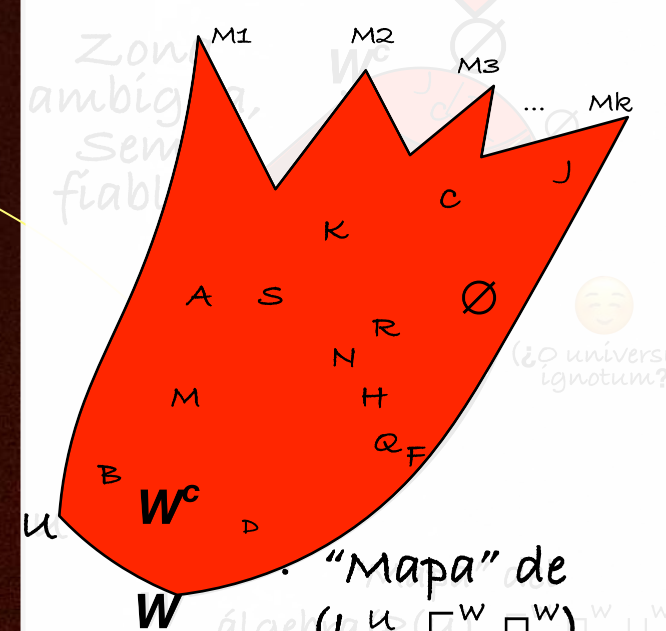


Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

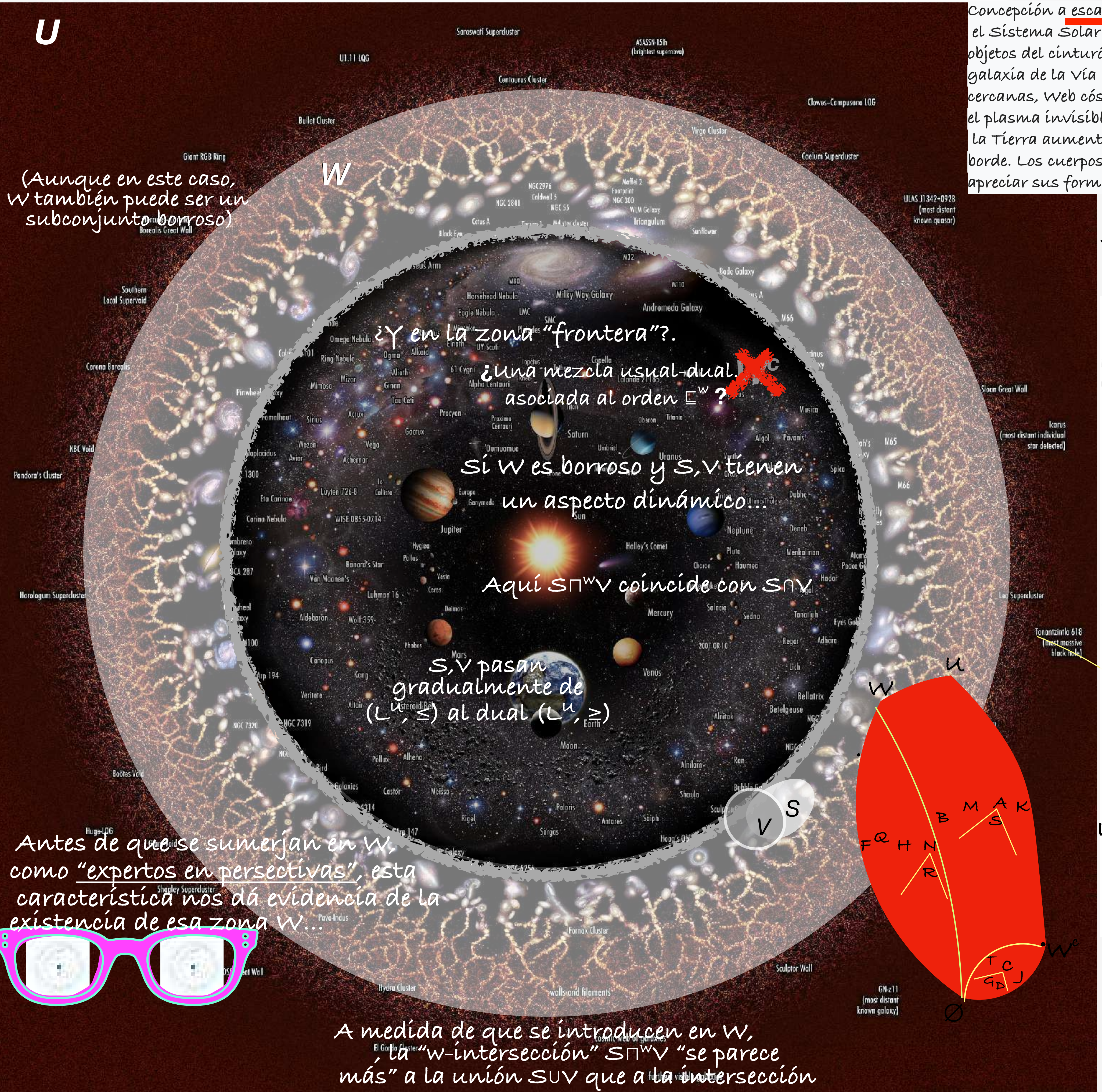
Inf-semiretículo:



"Mapa" de $(L^{u}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w})$

Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)



(Aunque en este caso, W también puede ser un subconjunto borroso)

¿Y en la zona "frontera"?.

¿Una mezcla usual-dual asociada al orden $\sqsubseteq^{W}$?

Si W es borroso y S, V tienen un aspecto dinámico...

Aquí $S \sqcap^{W} V$ coincide con $S \cap V$

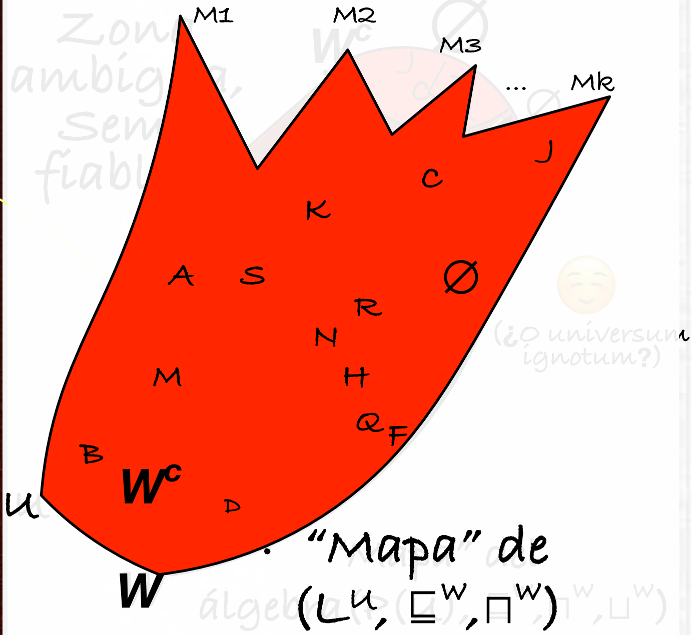
S, V pasan gradualmente de $(L^{U}, \leq)$ al dual $(L^{U}, \geq)$

Antes de que se sumerjan en W, como "expertos en persectivas", esta característica nos dá evidencia de la existencia de esa zona W...

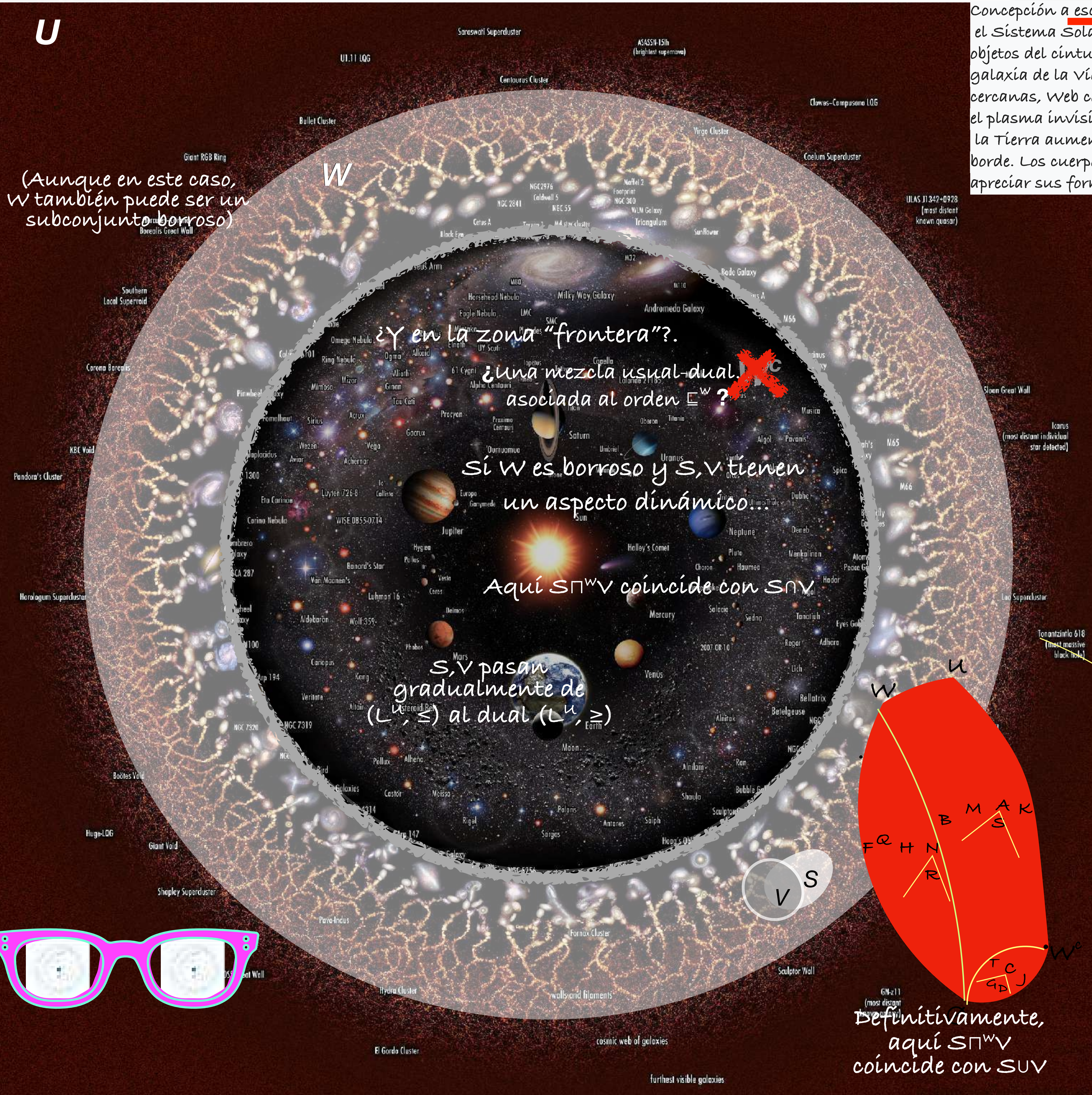
A medida de que se introducen en W, la "w-intersección" $S \sqcap^{W} V$ "se parece más" a la unión $S \cup V$ que a la intersección

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:



"Mapa" de $(L^{U}, \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W})$



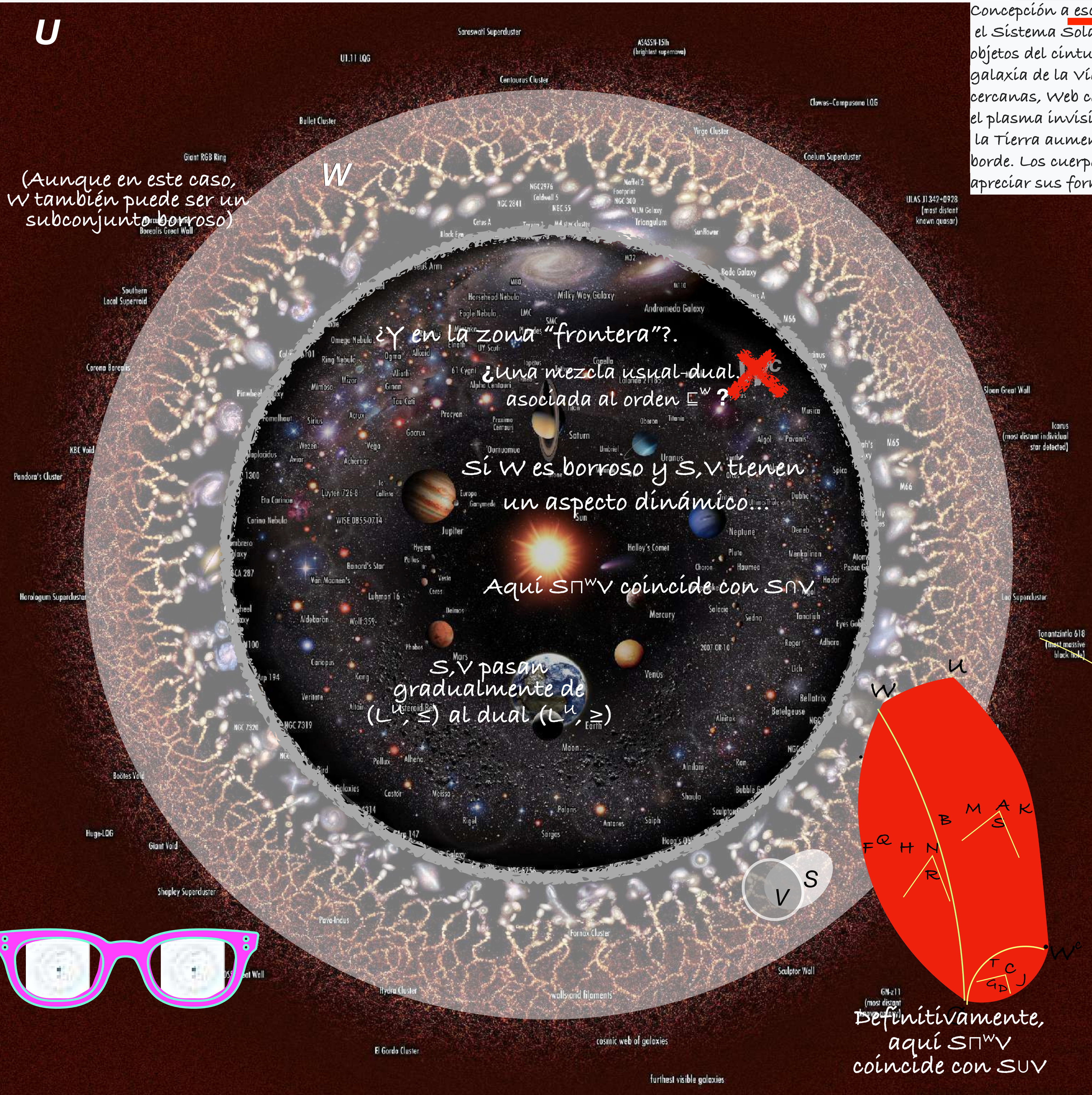
Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:

"Mapa" de $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$

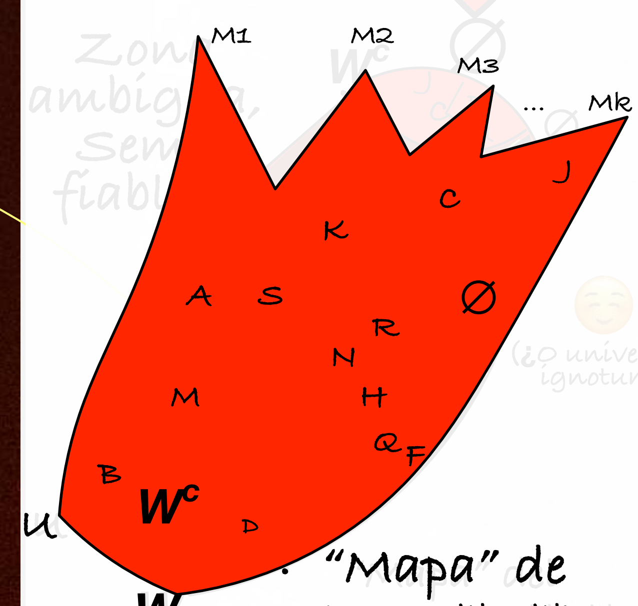


Concepción a escala logarítmica del universo observable con el Sistema Solar en el centro, planetas interiores y exteriores, objetos del cinturón de Kuiper, Alpha Centauri, Brazo Perseo, galaxia de la Vía Láctea, galaxia de Andrómeda, galaxias cercanas, Web cósmica, radiación cósmica de microondas y el plasma invisible de Big Bang en el borde. La distancia desde la Tierra aumenta exponencialmente desde el centro hasta el borde. Los cuerpos celestes se muestran agrandados para apreciar sus formas.

Pablo Carlos Budassi (Wikipedia, 2019)

Desde la perspectiva de **W**, (lo muy lejano en el universo):

Inf-semiretículo:



“Mapa” de $(L^U, \sqsubseteq^W, \sqcap^W)$

E

¡Uff! Finalizamos…

376

E

Magritte
La clarividencia
(1936)

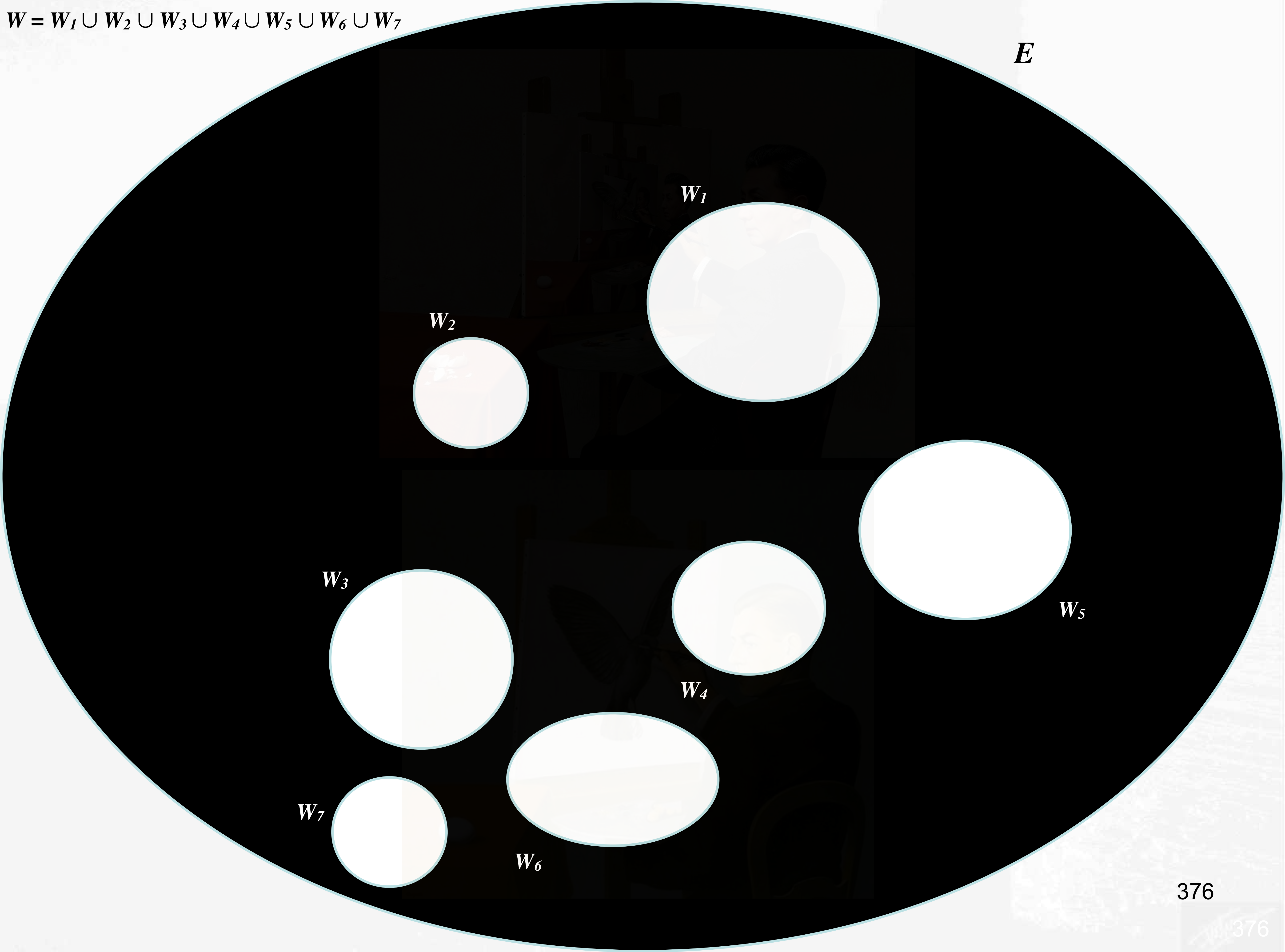
376

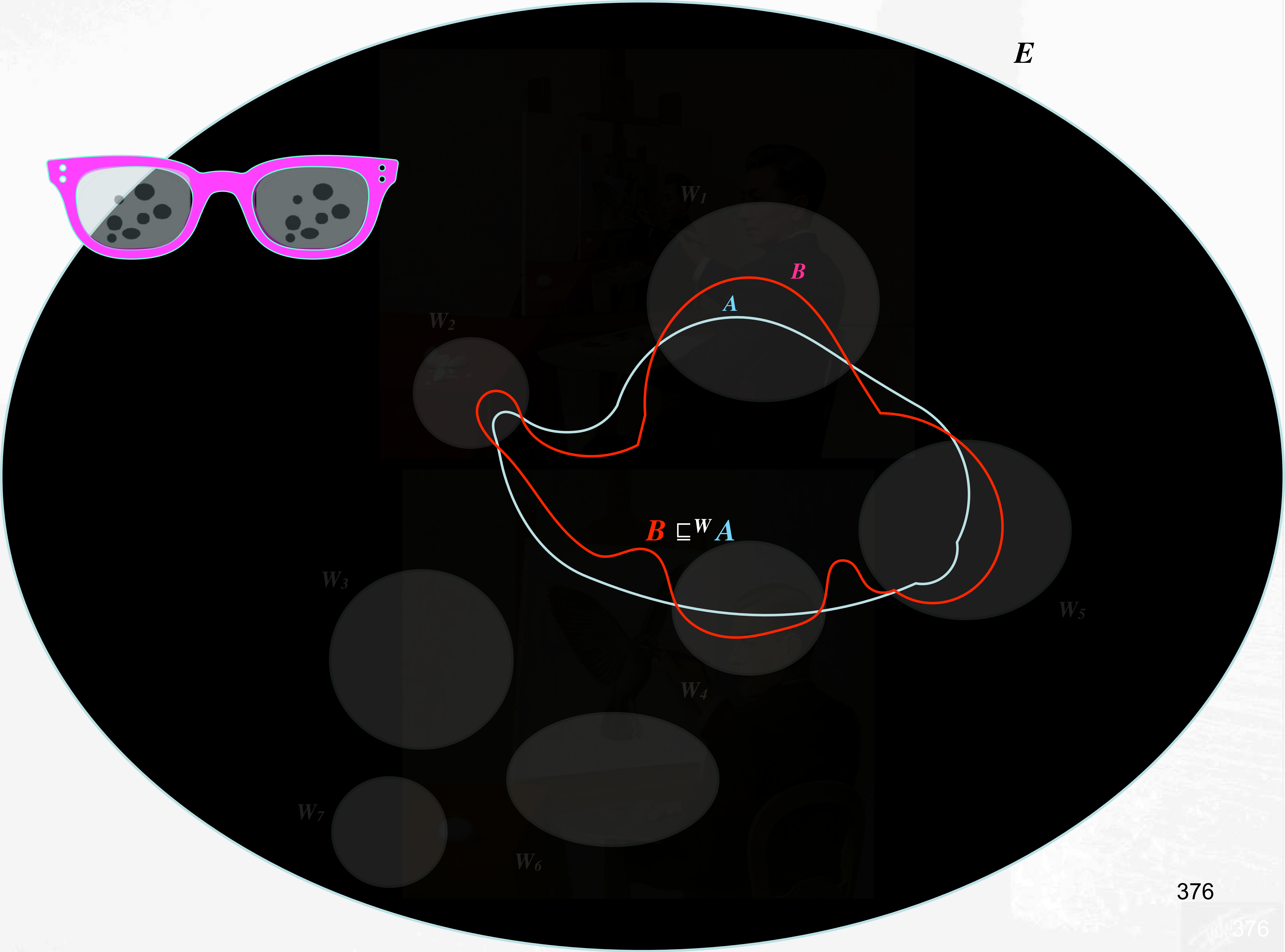
Yasumasa Morimura
Autorretratos a través de la historia del arte
(*Magritte / Triple personalidad*), 2016

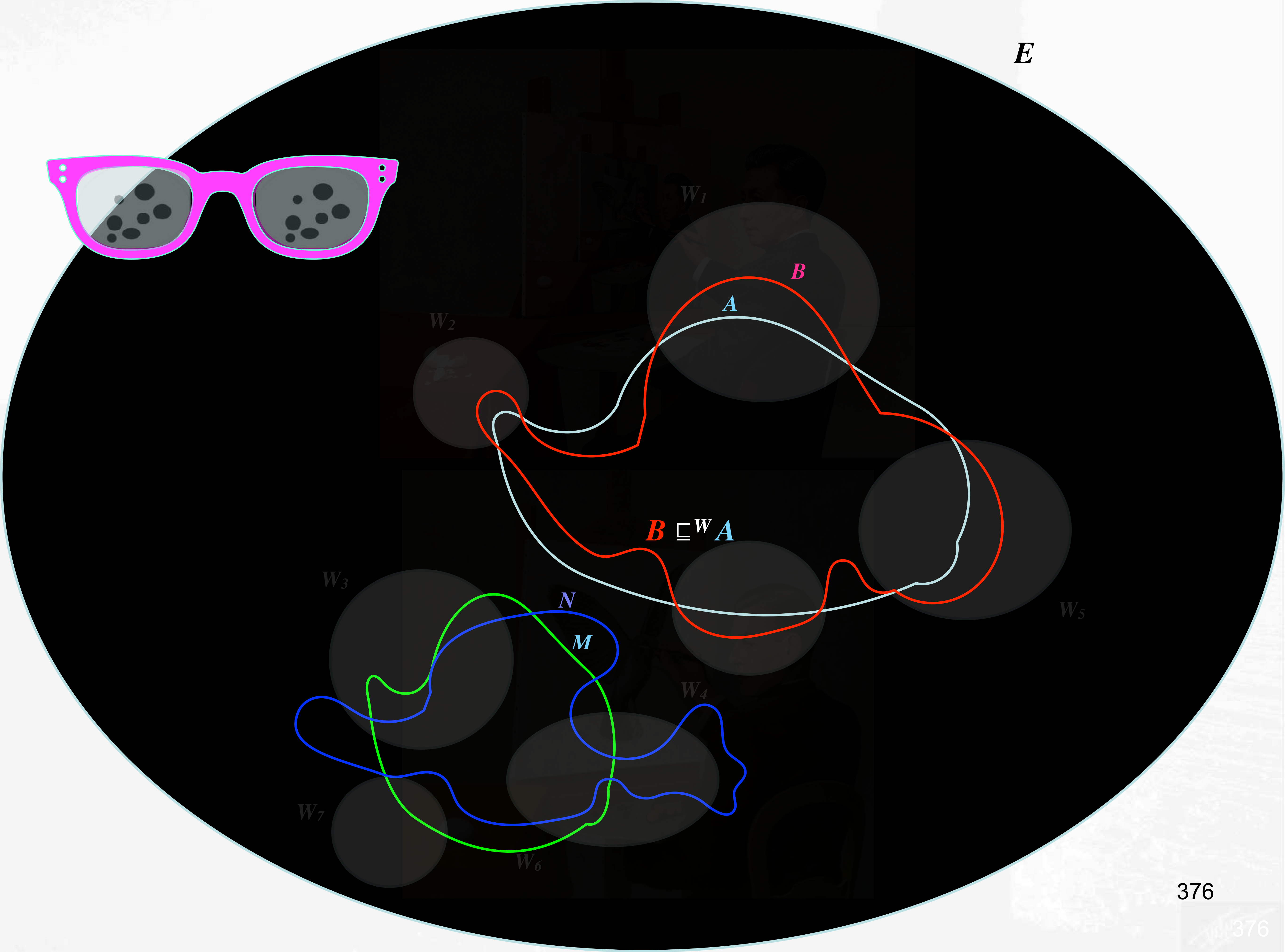
E

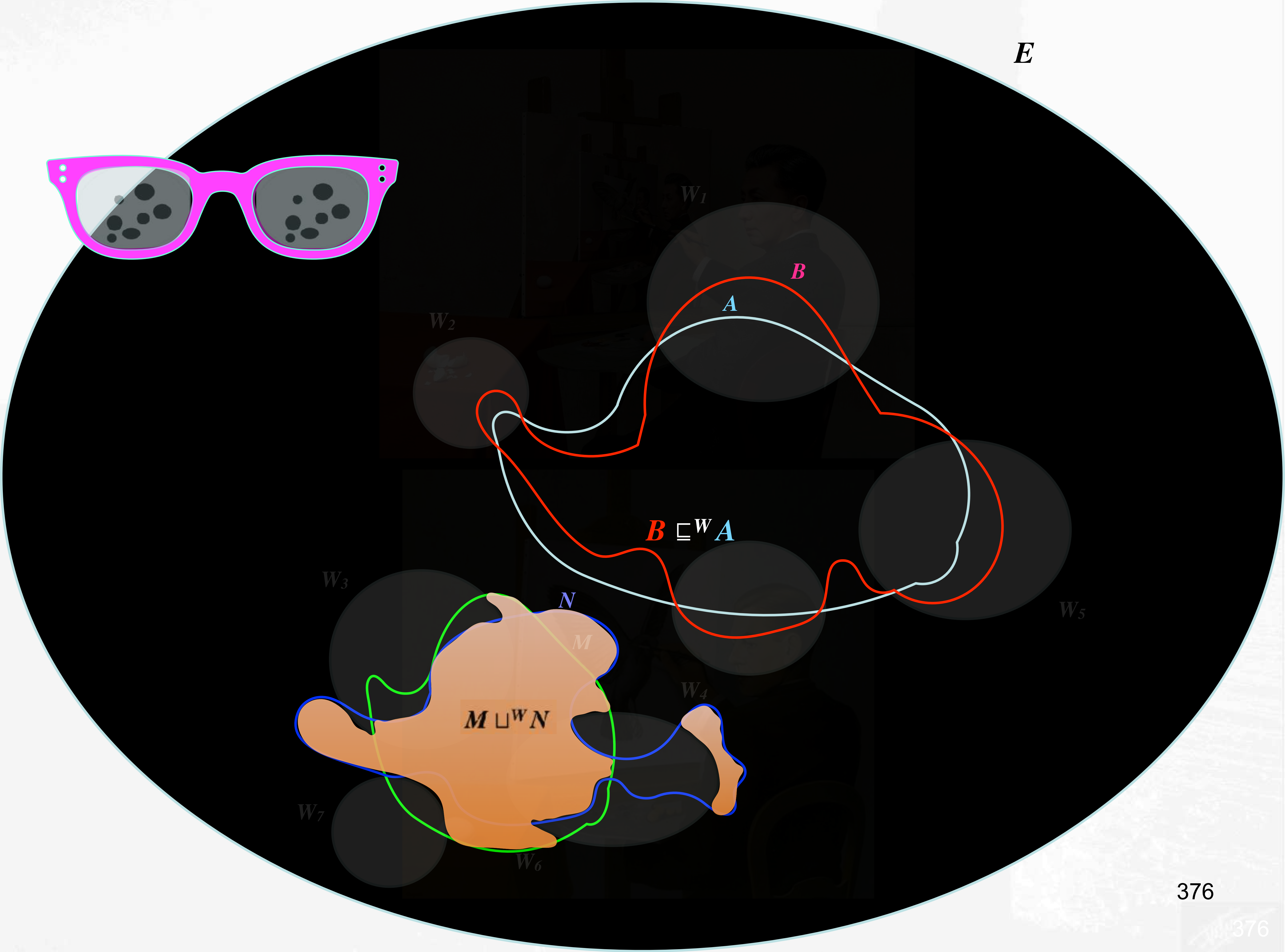
376

$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$

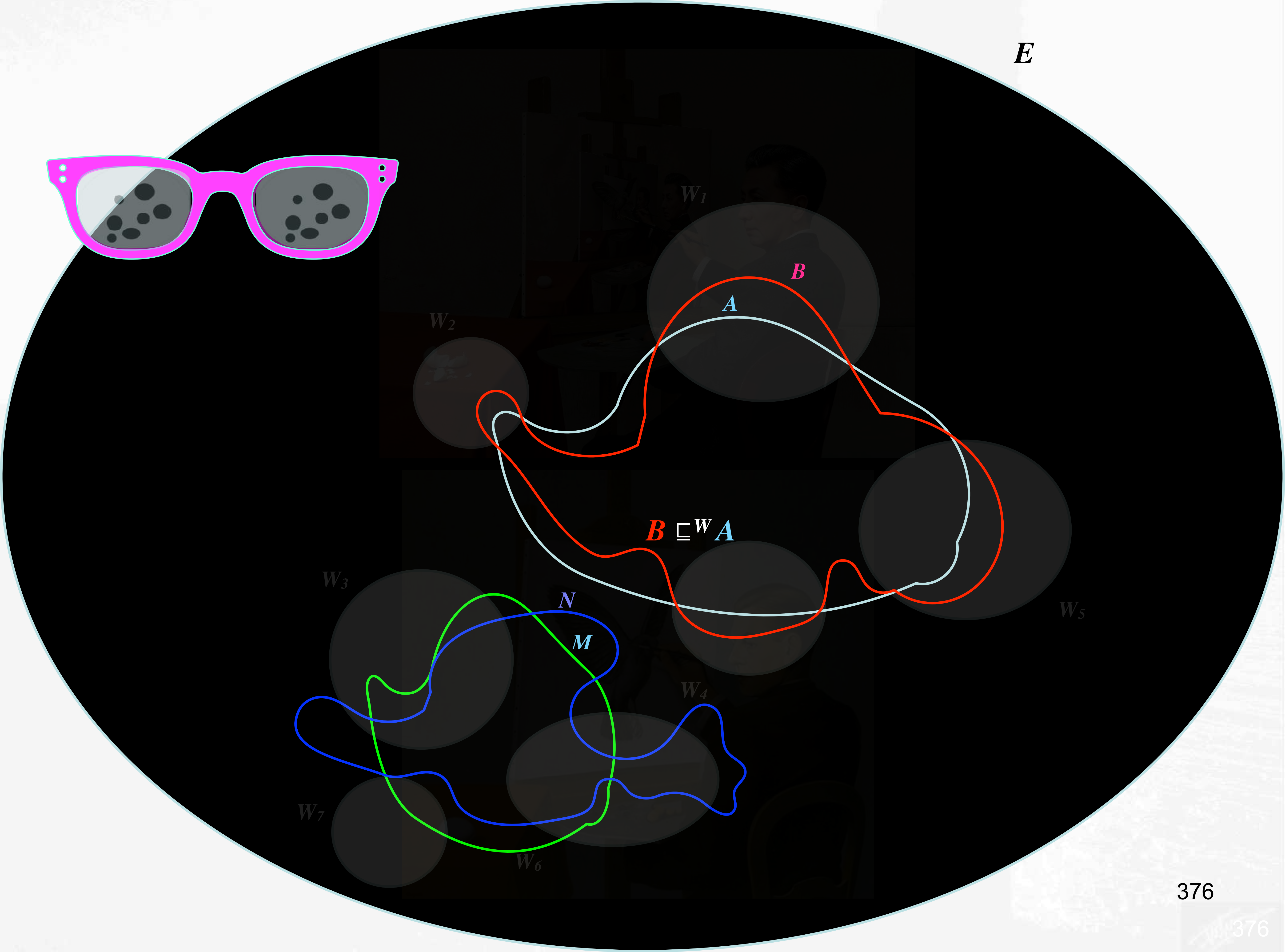


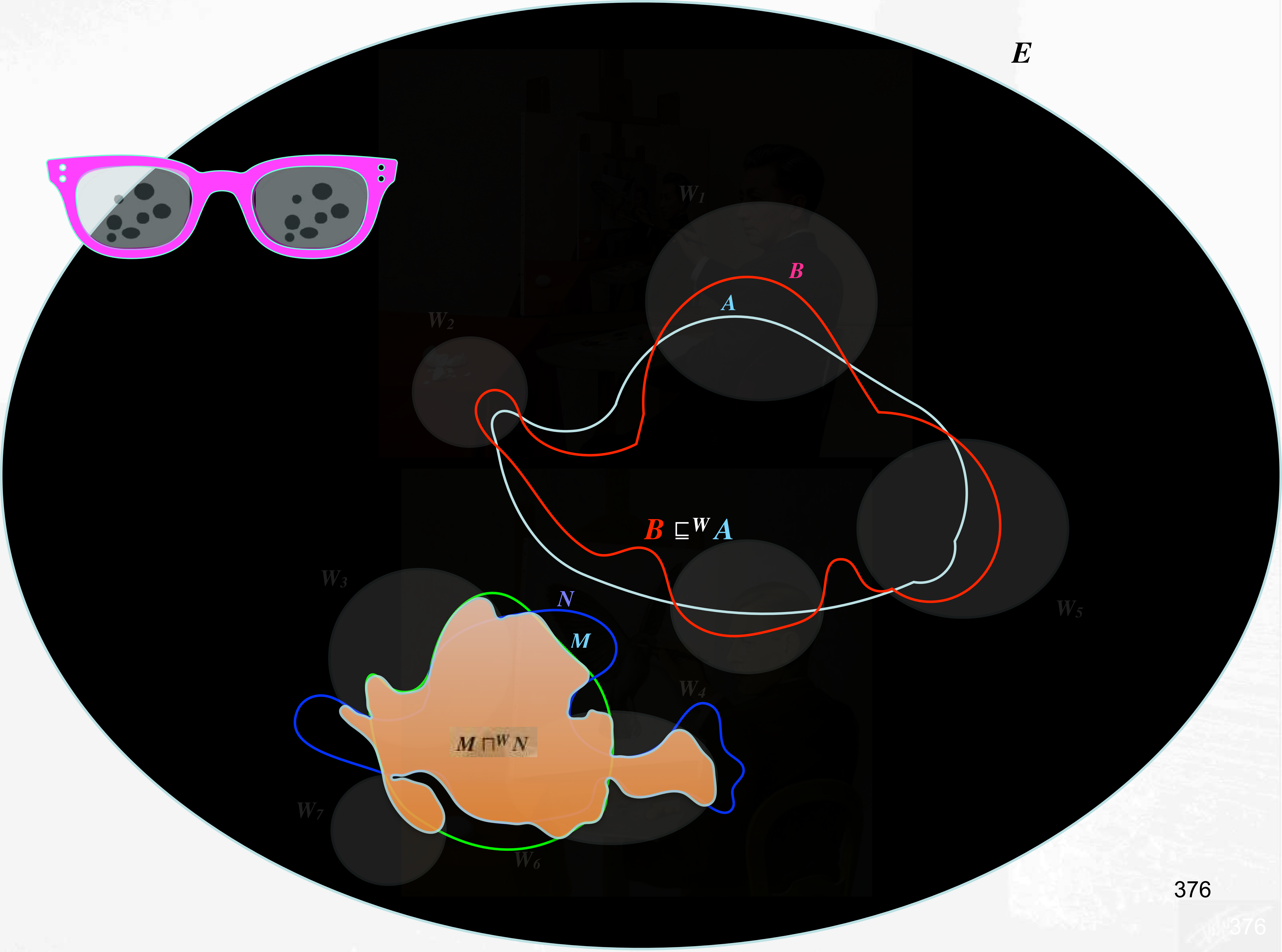

E
W1
W2
B
A
B ⊑W A
W3
W4
W5
W6
W7


E
W1
B
A
W2
B ⊑W A
W3
N
M
W5
W4
W7
W6



376


E
W1
W2
W3
W4
W5
W6
W7
B
A
B ⊑W A
N
M



376


E
B
A
Gracias por su atención
N
M
B ⊑^W A
M ⊓^W N


E
Gracias por su atención
A
B
N
M
B ⊑W A
M ⊓W N
Gafas de “lleno a tope”


E
B
A
Gracias por su atención
N
M
$B \sqsubseteq^W A$
$M \sqcap^W N$

?

Vista de la “Isla Plana” o “Nova Tabarca” desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain) .

Vista de la “Isla Plana” o “Nova Tabarça” desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain) .

Vista de la “Isla Plana” o “Nova Tabarca” desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain) .

Vista de la “Isla Plana” o “Nova Tabarca” desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain)

"Isla Plana" o "Nova Tabarca". Una "PERSPECTIVA" desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain) .

¿?