Eduardo AZCÁRATE GRACIA

PROBABILIDAD

ESTUDIO DE LA PROBABILIDAD EN 2º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES

TFM 2021

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Estudio de la probabilidad en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales

Eduardo Azcárate Gracia

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo analizar el estudio de la probabilidad en el alumnado de 2º de Bachillerato.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre el proceso de aprendizaje, que se ha puesto en marcha en un aula de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales en la modalidad de Bachillerato Nocturno en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Educación Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulos se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del currículo vigente que hacen referencia a la probabilidad en cada uno de los grados. En el cuarto capítulo se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2º de Bachillerato de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, como curso de referencia, pero también en 1º de Bachillerato (CCSS), en 4º de ESO (matemáticas académicas y aplicadas) y 3º de ESO.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La probabilidad en el currículo vigente

A lo largo de este capítulo se muestran los contenidos del currículo vigente en Educación Primaria, ESO y Bachillerato relacionados con la probabilidad (bloque: Estadística y probabilidad) con el fin de analizar cómo avanza el contenido relacionado.

Se toma como referencia el currículo vigente en Navarra para cada uno de los ciclos mencionados (BON, 2014; 2015a; 2015b). Para poder realizar el estudio de la evolución del concepto de probabilidad, se han definido unos descriptores comunes en estas etapas educativas.

El bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) está muy presente en este trabajo. Como se ha podido analizar a lo largo del Máster, este bloque es transversal al resto de bloques, siendo una parte imprescindible en todos y cada una de las unidades didácticas del curso. Del mismo modo, todos los descriptores que se han propuesto quedan influenciados por los contenidos del bloque 1. Esto es así tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria. No se ha especificado ningún descriptor concreto pertenecientes a este bloque, todos pertenecen al bloque de estadística y probabilidad y en concreto, únicamente a la parte de probabilidad.

En Educación Primaria aparecen los contenidos en el bloque 1 del tipo: "análisis y comprensión del enunciado", "estrategias y procedimientos puesto en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación…". En Educación Secundaria: "estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes".

Es evidente que no se puede diseñar un proceso de enseñanza aprendizaje de la probabilidad sin tener en cuenta el bloque 1.

Tal y como hemos mencionado, se muestran a continuación los descriptores relacionados con la probabilidad en orden de aparición y dificultad ascendente.

Se asigna un código a cada descriptor de la siguiente manera:

- **C1.** Experimentos aleatorios y deterministas
- **C2.** Espacio muestral y sucesos
- **C3.** Definición y cálculo de probabilidad
- **C4.** Probabilidad condicionada
- **C5.** Probabilidad compuesta
- **C6.** Teorema de Probabilidad Total
- **C7.** Teorema de Bayes

Se presentan, a continuación, unas tablas relacionando los descriptores con los contenidos y el curso y etapa correspondiente.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Contenidos	Tercer ciclo de Educación Primaria	
	5º	6º
C1. Experimentos aleatorios y deterministas	Carácter aleatorio de algunas experiencias.	Carácter aleatorio de algunas experiencias.
C2. Espacio muestral y sucesos	-	Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.
C3. Definición y cálculo de probabilidad	-	
C4. Probabilidad condicionada	-	-
C5. Probabilidad compuesta	-	-
C6. Teorema de Probabilidad Total	-	-
C7. Teorema de Bayes	-	-

1.2. Contenidos en ESO

Contenidos	ESO	
	1º	2º
C1. Experimentos aleatorios y deterministas	-	Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
C2. Espacio muestral y sucesos	-	Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
C3. Definición y cálculo de probabilidad	-	Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.
C4. Probabilidad condicionada	-	-
C5. Probabilidad compuesta	-	-
C6. Teorema de Probabilidad Total	-	-
C7. Teorema de Bayes	-	-

Contenidos	**ESO**			
	3º	**Aplicadas**	**4º**	**Aplicadas**
C1. Experimentos aleatorios y deterministas	Experiencias aleatorias.	-	-	Azar y probabilidad.
C2. Espacio muestral y sucesos	Sucesos y espacio muestral.	-	-	Frecuencia de un suceso aleatorio.
C3. Definición y cálculo de probabilidad	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	-	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.
C4. Probabilidad condicionada	-	-	Probabilidad condicionada.	Probabilidad condicionada.
C5. Probabilidad compuesta	-	-	Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.	Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol
C6. Teorema de Probabilidad Total	-	-	-	-
C7. Teorema de Bayes	-	-	-	-

1.3. Contenidos en Bachillerato (Ciencias Sociales)

Contenidos	Bachillerato Ciencias Sociales	
	1º	2º
C1. Experimentos aleatorios y deterministas	-	-
C2. Espacio muestral y sucesos	Sucesos.	-
C3. Definición y cálculo de probabilidad	Experimentos simples. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.	Experimentos simples. Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.
C4. Probabilidad condicionada	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.
C5. Probabilidad compuesta	Experimentos compuestos.	Experimentos compuestos.
C6. Teorema de Probabilidad Total	-	Teorema de la Teorema de Probabilidad Total
C7. Teorema de Bayes	-	Teorema de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

1.4. Análisis sobre los contenidos

Se ha podido constatar el diseño del *currículo en espiral* (Bruner, 2001). Los contenidos se presentan y trabajan de forma progresiva y siempre se repasa lo necesario para poder avanzar con nuevos conceptos.

En el tercer ciclo de primaria se dan las primeras nociones acerca de la probabilidad mediante contenidos del tipo “*Carácter aleatorio de algunas experiencias*” e “*Iniciación intuitiva al cálculo de probabilidad de un suceso”*, correspondientes a los descriptores C1, C2 y C3. También podemos observar que tiene una mayor presencia la estadística descriptiva en esta etapa educativa que la probabilidad.

En 1º de ESO, el bloque de estadística y probabilidad se centra exclusivamente en estadística y en 2º de ESO lo hace en probabilidad. Además, en 2º utilizan tablas para mostrar la frecuencia relativa de un suceso en experimentos, como aproximación a su probabilidad. Se observa cómo en este primer ciclo de ESO aparecen los primeros tres descriptores claramente diferenciados. Se diferencia los experimentos aleatorios de los deterministas (C1), presentan el espacio muestral y los sucesos elementales en experimentos sencillos (C2) y aproximan el concepto de probabilidad mediante la frecuencia relativa y la regla de Laplace (C3).

Únicamente en 3º de ESO con matemáticas académicas vuelven a ver la probabilidad, mientras que en 3º de aplicadas se centran en la estadística. Aparecen los mismos 3 descriptores que 2º, pero se ve cómo se enriquece el C3 con la introducción de la combinatoria. El descriptor C3 ya no desaparece en la ESO, sin embargo, el C1 y C2 no se presentan explícitamente en el currículo de 4º de académicas y aparece por primera vez el descriptor C4. Ya no es necesario volver a repasar todos los contenidos con la misma profundidad para poder dedicar más tiempo a nuevos contenidos como la probabilidad condicionada (C4) y la probabilidad compuesta (C5).

En 4º de ESO con matemáticas aplicadas vuelven a aparecer los descriptores C1 y C2. Como en el curso anterior no han visto probabilidad, deben retomar el conocimiento desde un poco más atrás.

Por otro lado, se identifican ligeras diferencias dentro del mismo descriptor en 4º de académicas y 4º de aplicadas, por ejemplo, la presencia o no de tablas de contingencia.

En Bachillerato de Ciencias Sociales se observa que el contenido en los dos cursos es similar. Por una parte, se aprecia que en 2º hay una profundización sobre lo visto en 1º (C3, C4 y C5) y por otra parte en 2º aparecen por primera vez los Teoremas de Probabilidad Total (C6) y de Bayes (C7). Es la primera y única vez que aparecen estos descriptores; su desarrollo requiere que el contenido de C4 y C5 esté bien asentado para poder avanzar.

Sintetizando, se observa el diseño del currículo en espiral, profundizando en contenidos conforme avanzan los cursos. Hay ligeras variaciones según el itinerario escogido en 3º y 4º. En el itinerario de enseñanzas aplicadas no ven contenido de probabilidad en 3º y en 4º profundiza un poco menos que el itinerario de académicas.

Capítulo 2
Los criterios de evaluación de la probabilidad en el currículo vigente

Una vez vistos los contenidos, en este capítulo se muestran los criterios de evaluación en el currículo vigente relacionados con la probabilidad (bloque: estadística y probabilidad) con el fin de analizar cómo se plantea la evaluación de dicho concepto matemático.

Los criterios de evaluación son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en esta asignatura.

De nuevo se han tomado los criterios de evaluación del currículo vigente para los ciclos mencionados (BON, 2014, 2015a, 2015b). Para poder analizar los criterios de evaluación a lo largo de los diferentes cursos, se han tomado como referencia los descriptores definidos en el capítulo anterior. Quedan definidos los criterios de evaluación añadiendo una E al identificador de cada uno de los descriptores. Por ejemplo, lo que antes era el descriptor *C5. Probabilidad compuesta*, ahora se estudia su criterio de evaluación *CE5*.

Se definen los siguientes descriptores vinculados a los criterios de evaluación:

CE1. Experimentos aleatorios y deterministas
CE2. Espacio muestral y sucesos
CE3. Definición y cálculo de probabilidad
CE4. Probabilidad condicionada
CE5. Probabilidad compuesta
CE6. Teorema de Probabilidad Total
CE7. Teorema de Bayes

Se muestra, a continuación, las tablas que relacionan cada criterio de evaluación con el curso y etapa correspondiente. Se mantiene el número en negrita que se utiliza en el currículo para identificar los diferentes criterios de evaluación. Se aprecia en las tablas como en ocasiones los criterios de evaluación en el currículo son muy amplios, abarcando varios descriptores de contenidos.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

<table>
<tr><th rowspan="2">Criterios de evaluación</th><th colspan="2">Tercer ciclo de Educación Primaria</th></tr>
<tr><th>5º</th><th>6º</th></tr>
<tr><td>CE1. Experimentos aleatorios y deterministas</td><td>3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td><td rowspan="2">3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.
4. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE3. Definición y cálculo de probabilidad</td><td>-</td><td>4. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad condicionada</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Teorema de Probabilidad Total</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Teorema de Bayes</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Criterios de evaluación	**ESO**	
	1º	**2º**
CE1. Experimentos aleatorios y deterministas	-	**1.** Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.
CE2. Espacio muestral y sucesos	-	**1.** Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.
CE3. Definición y cálculo de probabilidad	-	**2**. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.
CE4. Probabilidad condicionada	-	-
CE5. Probabilidad compuesta	-	-
CE6. Teorema de Probabilidad Total	-	-
CE7. Teorema de Bayes	-	-

<table>
<tr><th rowspan="2">Criterios de evaluación</th><th colspan="4">ESO</th></tr>
<tr><th>3º</th><th>Aplicadas</th><th>4º</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>CE1. Experimentos aleatorios y deterministas</td><td rowspan="3">4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.</td><td>-</td><td>-</td><td rowspan="5">3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE3. Definición y cálculo de probabilidad</td><td>-</td><td>1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.
2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad condicionada</td><td>-</td><td>-</td><td rowspan="2">2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Teorema de Probabilidad Total</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Teorema de Bayes</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato (Ciencias Sociales)

<table>
<tr><th rowspan="2">Criterios de evaluación</th><th colspan="2">Bachillerato Ciencias Sociales</th></tr>
<tr><th>1º</th><th>2º</th></tr>
<tr><td>CE1. Experimentos aleatorios y deterministas</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos</td><td rowspan="4">3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE3. Definición y cálculo de probabilidad</td><td rowspan="5">1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad condicionada</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta</td></tr>
<tr><td>CE6. Teorema de Probabilidad Total</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Teorema de Bayes</td><td>-</td></tr>
</table>

2.4. Análisis sobre criterios de evaluación

En el tercer ciclo de primaria se observa cómo con diferentes contenidos para 5º y 6º, utilizan el mismo criterio de evaluación. Es decir, el criterio CE1 en 5º está relacionado con el descriptor C1 del contenido visto en el capítulo anterior, pero en 6º para los contenidos C1, C2 y C3 utiliza la misma expresión. En este caso CE1, CE2 y CE3 comparten esta misma expresión: *Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.* Es un criterio de evaluación que abarca a los tres descriptores C1, C2 y C3 y dependiendo del curso aplica o no. Hay una tendencia a que los criterios de evaluación sean muy amplios. Se verá en el apartado de análisis de los estándares de aprendizaje evaluable cómo se concretan.

En 2º de ESO se aprecia de nuevo que los criterios de evaluación están planteados en el currículo de manera que son bastante amplios. Encontramos entonces que el criterio 1. del currículo responde a dos de nuestros criterios, el CE1 y CE2. Más adelante se concretarán en estándares de aprendizaje evaluable.

Mismo efecto sucede en 4º de ESO, el criterio 4. del currículo engloba los descriptores CE1, CE2 y CE3, debido a su extensión. Por otro lado, llama la atención el hecho de que no estaban incluidas las tablas de contingencia en el contenido de 4º de ESO de aplicadas y, sin embargo, sí que aparecen en el criterio de evaluación.

En Bachillerato también hay un único criterio de evaluación del currículo que abarca varios de los que están definidos en este trabajo. Es interesante ver cómo se han adaptado estos criterios a este tipo de Bachillerato, aplicado a las ciencias sociales.

Capítulo 3

Los estándares de aprendizaje evaluables de la probabilidad en el currículo vigente

Estudiados ya los contenidos y los criterios de evaluación, se muestran en este capítulo los estándares de aprendizaje evaluable establecidos en el currículo vigente relacionados con la probabilidad.

Los estándares son las especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en esta asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables, y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Facilitan la construcción de pruebas estandarizadas y comparables.

Están organizados en el currículo con dos números, de manera que el primero identifica el criterio de evaluación asociado. Mantendremos estos números para poder identificarlos en el currículo, pero se utilizan los descriptores definidos en el capítulo 1 como referencia para organizar la información. De esta manera, los estándares de aprendizaje evaluables quedan definidos con las letras EAE seguidas del número correspondiente al descriptor. Por ejemplo, lo que antes era el descriptor *C5. Probabilidad compuesta*, ahora se estudia su estándar de aprendizaje evaluable *EAE5*.

Quedan entonces definidos los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

EAE1. Experimentos aleatorios y deterministas
EAE2. Espacio muestral y sucesos
EAE3. Definición y cálculo de probabilidad
EAE4. Probabilidad condicionada
EAE5. Probabilidad compuesta
EAE6. Teorema de Probabilidad Total
EAE7. Teorema de Bayes

Se muestra a continuación, las tablas que relacionan estándar de aprendizaje evaluable con el curso y etapa correspondiente. Ahora a cada criterio se le asocian diferentes estándares de aprendizaje evaluables, por lo que es más fácil asociar cada estándar a cada descriptor.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Estándares de aprendizaje evaluables	Tercer ciclo de Educación Primaria	
	5º	**6º**
EAE1. Experimentos aleatorios y deterministas	**3.1.** Identifica situaciones de carácter aleatorio. **3.2.** Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad.	**3.1.** Determina todos los posibles sucesos que pueden darse en fenómenos aleatorios.
EAE2. Espacio muestral y sucesos	-	
EAE3. Definición y cálculo de probabilidad	-	**3.2.** Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos. **3.3.** Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos. **3.4.** Resuelve problemas sencillos de azar y probabilidad
EAE4. Probabilidad condicionada	-	-
EAE 5. Probabilidad compuesta	-	-
EAE 6. Teorema de Probabilidad Total	-	-
EAE 7. Teorema de Bayes	-	-

Se aprecian concreciones sobre los criterios de evaluación, por ejemplo, el criterio de evaluación era "*4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.*", ahora se ha separado en tres estándares diferenciados:

3.2. Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos.
3.3. Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos.
3.4. Resuelve problemas sencillos de azar y probabilidad

Vemos que han usado el número 4 en el criterio de evaluación y el número 3 en los estándares de aprendizaje evaluable. En secundaria mantienen el mismo número.

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

Estándares de aprendizaje evaluables	ESO	
	1º	2º
EAE1. Experimentos aleatorios y deterministas	-	**1.1.** Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
EAE2. Espacio muestral y sucesos	-	**2.1.** Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. **2.2.** Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
EAE3. Definición y cálculo de probabilidad	-	**1.2.** Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. **1.3.** Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio. **2.2.** Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. **2.3.** Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. **2.4.** Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. **2.5.** Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar sencillos.
EAE4. Probabilidad condicionada	-	-
EAE5. Probabilidad compuesta	-	-
EAE6. Teorema de Probabilidad Total	-	-
EAE7. Teorema de Bayes	-	-

El nivel de concreción aumenta, permitiendo ver qué se debe evaluar. Hay estándares en el currículo que evalúan varios de los descriptores de manera conjunta. Es una forma de ver que los conocimientos asociados a cada descriptor debemos evaluarnos en conjunto y contextualizados, no únicamente con su contenido.

<table>
<tr><th rowspan="2">Estándares de aprendizaje evaluable</th><th colspan="4">ESO</th></tr>
<tr><th>3º</th><th>Aplicadas</th><th>4º</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>EAE1. Experimentos aleatorios y deterministas</td><td>4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.</td><td>-</td><td>1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.</td><td rowspan="3">3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.</td></tr>
<tr><td>EAE2. Espacio muestral y sucesos</td><td>4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.</td><td>-</td><td>1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.</td></tr>
<tr><td>EAE3. Definición de probabilidad</td><td>4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales.
4.4. Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.</td><td>-</td><td>1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.</td></tr>
<tr><td>EAE4. Probabilidad condicionada</td><td>-</td><td>-</td><td>2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.</td><td rowspan="2">3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas</td></tr>
<tr><td>EAE5. Probabilidad compuesta</td><td>-</td><td>-</td><td>2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.</td></tr>
<tr><td>EAE6. Teorema de Probabilidad Total</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EAE7. Teorema de Bayes</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato (Ciencias Sociales)

<table>
<tr><th rowspan="2">Estándares de aprendizaje evaluables</th><th colspan="2">Bachillerato Ciencias Sociales</th></tr>
<tr><th>1º</th><th>2º</th></tr>
<tr><td>EAE1. Experimentos aleatorios y deterministas</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EAE2. Espacio muestral y sucesos</td><td rowspan="4">3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EAE3. Definición y cálculo de probabilidad</td><td rowspan="3">1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td></tr>
<tr><td>EAE4. Probabilidad condicionada</td></tr>
<tr><td>EAE5. Probabilidad compuesta</td></tr>
<tr><td>EAE6. Teorema de Probabilidad Total</td><td>-</td><td>1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>EAE7. Teorema de Bayes</td><td>-</td><td>1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.</td></tr>
</table>

3.4. Análisis sobre los estándares de aprendizaje evaluables

Como se ha visto en el capítulo 2, los criterios de evaluación son expresiones muy amplias que abarcan varios contenidos, por lo que es necesario concretarlos para poder definir unos resultados evaluables del aprendizaje. Esto permite realizar la evaluación del logro y rendimiento alcanzado. En 5º de Educación Primaria se observa cómo el criterio de evaluación 3. *(Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.)* se concreta en dos estándares de aprendizaje evaluables, el 3.1 *(Identifica situaciones de carácter aleatorio.)* y el 3.2 *(Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad.)*. Lo mismo sucede con el resto estándares de aprendizaje evaluable, como se aprecia perfectamente en las tablas.

Se observa que conforme avanzan los cursos, aunque se haga referencia al mismo descriptor, se van centrando en los nuevos conceptos. No se evalúan estándares que ya se dan por asimilados y centran los esfuerzos en evaluar los contenidos más elaborados.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se ha realizado el análisis de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo que aparecen en los libros de texto desde 3º de ESO (Matemáticas académicas) hasta 2º de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales). Para ello se ha recopilado información en los libros de texto que utiliza el centro donde se ha realizado la experimentación. En la ESO utilizan los libros de la editorial Santillana (Proyecto Saber Hacer) y en Bachillerato los de la editorial Bruño (Código Bruño)

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1, C2 y C4. Propone usar el diagrama de árbol. La pregunta c) es muy interesante, ya que implícitamente indica que no hay devolución.

Ejemplo

9 En una urna tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Utiliza un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral en cada uno de estos experimentos aleatorios.

a) Si sacamos una bola, y sin echarla a la urna, sacamos otra bola.

b) Si sacamos una bola, la volvemos a echar a la urna, y sacamos una segunda bola.

c) Si sacamos tres bolas a la vez.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Cuestión para reflexionar sobre la definición de probabilidad, descriptor C3.

Ejemplo

29 REFLEXIONA. Una máquina fabrica chinchetas. ¿Cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una chincheta al azar, sea defectuosa?

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1 y C2. Realiza una cuestión final para ver si distienden la información relevante de la que no lo es.

Ejemplo

14 Lanzamos dos dados, uno de color rojo y otro azul, y anotamos el número que aparece en su cara superior. Considerando los siguientes sucesos:

A = «Salir el mismo número en los dos dados»

B = «La suma de los dos números es 9»

C = «El producto de los dos números es mayor que 30»

a) Calcula:

I. $A \cup \overline{B}$ III. $\overline{A} \cap \overline{B}$ V. $\overline{A} \cup \overline{B}$

II. $A \cap B \cap C$ IV. $\overline{A \cap B}$ VI. $\overline{A \cup C}$

b) ¿Qué ocurriría si los dados fuesen del mismo color?

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1, C2 y C3.

Ejemplo

21 Tiramos dos veces una moneda y observamos su cara superior. Calcula la probabilidad de que:

a) Salga las dos veces cara.

b) Salga una vez cara, y la otra, cruz.

c) No salga ninguna vez cruz.

d) Salga, al menos una vez, cara.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Cuestión acerca de los descriptores C2 y C3.

Ejemplo

32 **REFLEXIONA.** Si un suceso A está contenido en otro B, razona si estas igualdades son verdaderas o falsas.

a) $P(A) = P(B)$ c) $P(\overline{B}) = 1 - P(A)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ d) $P(A \cap B) = P(A)$

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio contextualizado planteado y resuelto que responde a los descriptores C2 y C3.

Ejemplo

SABER HACER

Calcular probabilidades en la vida cotidiana

67 La probabilidad de tener el pelo castaño es 0,6; la de tener ojos marrones es 0,7, y la de ser castaño con ojos marrones es 0,42. Calcula la probabilidad de:

a) No tener el pelo castaño.

b) Tener ojos marrones o pelo castaño.

PRIMERO. Se escriben los sucesos que nos piden en función de los sucesos conocidos utilizando la unión, la intersección y el complementario de sucesos.

a) A = «Pelo castaño» $\overline{A}$ = «Pelo no castaño»

b) B = «Ojos marrones»

$A \cup B$ = «Ojos marrones o pelo castaño»

SEGUNDO. Se aplican las propiedades de la probabilidad para calcular las probabilidades pedidas.

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema asociado al descriptor C3, pero de un nivel de complejidad elevado.

Ejemplo

73 En el instituto han ofertado dos asignaturas optativas de carácter cultural, que son Teatro y Taller de escritura, 30 estudiantes han optado por Teatro y 20 por Taller de escritura. De las 28 alumnas que hay, 18 se han apuntado a Teatro.

Si solo se puede optar a cursar una de las dos asignaturas:

a) Halla la probabilidad de que elegido un estudiante al azar sea un varón que haya optado por Teatro.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una alumna que haya elegido Taller de escritura?

c) Calcula la probabilidad de que sea varón.

d) Halla la probabilidad de que su elección fuera el Taller de escritura.

4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Académicas

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1 y C2.

Ejemplo

2 **APLICA.** Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Sacar una tarjeta de una urna en la que hay tarjetas numeradas del 1 al 8.

b) Escoger una moneda de un monedero en el que hay monedas de 2, 5, 10 y 20 céntimos.

c) Lanzar dos dados y sumar las puntuaciones.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Cuestión que mezcla contenidos con otros bloques. Corresponde a los descriptores C1 y C2.

Ejemplo

3 **REFLEXIONA.** En el experimento *Elegir un número al azar y anotar su resto al dividir entre 3*:

a) ¿Cuál es su espacio muestral?

b) Pon un ejemplo de suceso compuesto.

c) Pon un ejemplo de suceso distinto al conjunto vacío.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Cuestión acerca de los descriptores C2 y C3.

Ejemplo

10 **REFLEXIONA.** En una urna hay tarjetas numeradas del 4 al 9. Se extrae una tarjeta, se anota el resultado y se devuelve a la urna. Estos son los datos que hemos obtenido tras repetir el experimento 300 veces.

N.º	4	5	6	7	8	9
f_i	50	49	45	47	57	52

A la vista de los datos de la tabla, calcula la probabilidad de que, al extraer una tarjeta:

a) Se obtenga un número múltiplo de 3.

b) Se obtenga un número mayor que 7.

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio contextualizado que responde a los descriptores C2 y C3.

Ejemplo

20 En el bar del instituto venden bocadillos de chorizo, jamón, tortilla o queso. Hoy los han envuelto con papel de aluminio y nadie sabe de qué es cada uno. Tienen en total 40 bocadillos, la mitad de tortilla, la octava parte de chorizo y los de jamón son el doble que los de queso. Ana compra un bocadillo. Calcula la probabilidad de:

a) Que sea de jamón.

b) Que sea de queso o tortilla.

c) Que no sea de tortilla.

d) Que no sea de queso ni de tortilla.

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que responde a los descriptores C2 y C3.

Ejemplo

EJEMPLO

6. De los 25 alumnos que hay en la clase de 4.º de ESO, 20 aprobaron la primera evaluación, 17 la segunda y 15 las dos. Calcula la probabilidad de que escogido un alumno al azar:

a) No haya aprobado la primera evaluación.

A = «Aprobar la primera evaluación» $\rightarrow P(A) = \frac{20}{25} = 0{,}8$

«No aprobar la primera evaluación» $= \overline{A}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

b) Haya aprobado la primera o la segunda evaluación.

«Aprobar la primera o la segunda evaluación» $= A \cup B$

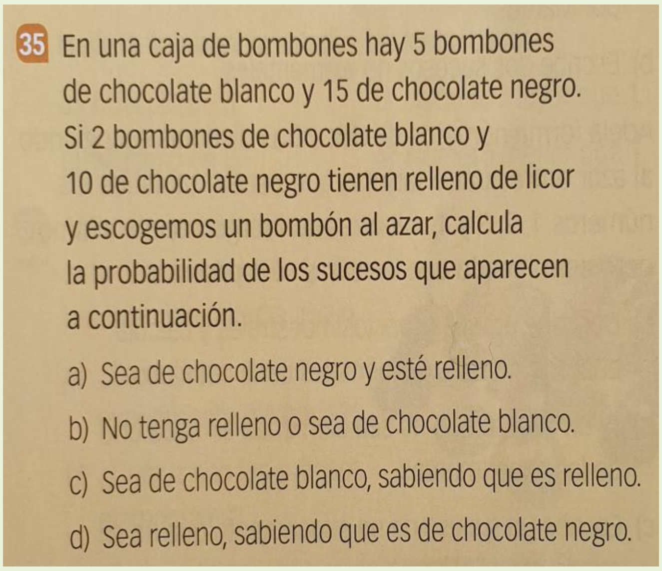
B = «Aprobar la segunda evaluación» $\rightarrow P(B) = \frac{17}{25} = 0{,}68$

$A \cap B$ = «Aprobar las dos evaluaciones» $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{15}{25} = 0{,}6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}68 - 0{,}6 = 0{,}88$

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio contextualizado que responde a los descriptores C2, C3 y C4. Importante apreciar que es probabilidad condicionada en el mismo espacio muestral (experimentos simples).

Ejemplo



35 En una caja de bombones hay 5 bombones de chocolate blanco y 15 de chocolate negro. Si 2 bombones de chocolate blanco y 10 de chocolate negro tienen relleno de licor y escogemos un bombón al azar, calcula la probabilidad de los sucesos que aparecen a continuación.

a) Sea de chocolate negro y esté relleno.

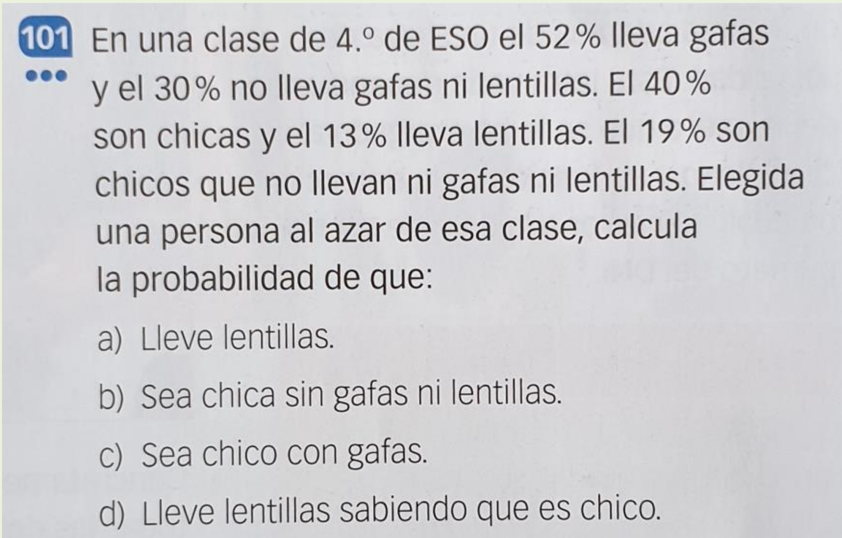
b) No tenga relleno o sea de chocolate blanco.

c) Sea de chocolate blanco, sabiendo que es relleno.

d) Sea relleno, sabiendo que es de chocolate negro.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema que responde a los descriptores C2, C3 y C4. No pueden utilizar regla de Laplace para resolver.

Ejemplo



101 En una clase de 4.º de ESO el 52 % lleva gafas y el 30 % no lleva gafas ni lentillas. El 40 % son chicas y el 13 % lleva lentillas. El 19 % son chicos que no llevan ni gafas ni lentillas. Elegida una persona al azar de esa clase, calcula la probabilidad de que:

a) Lleve lentillas.

b) Sea chica sin gafas ni lentillas.

c) Sea chico con gafas.

d) Lleve lentillas sabiendo que es chico.

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Aplicadas

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Cuestiones acerca de la compatibilidad entre sucesos de un mismo espacio muestral. Responde a los descriptores C1 y C2.

Ejemplo

18 Los siguientes sucesos, ¿son compatibles o incompatibles?

a) En el lanzamiento de un dado, «obtener un 2» y «obtener un número par».

b) «Sacar bola roja» y «sacar bola verde» al extraer una bola de una bolsa con bolas rojas y verdes.

c) «Extraer una figura» y «extraer un as» al sacar una carta de una baraja.

d) Que el número premiado en la lotería «sea número impar» y «sea número primo».

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1, C2 y C3.

Ejemplo

20 La probabilidad de extraer una avellana de una bolsa que contiene nueces, avellanas y almendras es 0,62. Si en total hay 150 frutos, ¿cuántas avellanas contiene la bolsa?

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1, C2 y C3. Operación con sucesos. Probabilidad de la unión.

Ejemplo

25 En la extracción de una carta de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de sacar un caballo o un rey?

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que se centra en los descriptores C3 y C4. Aplican diagramas de árbol para experimentos compuestos y probabilidad condicionada.

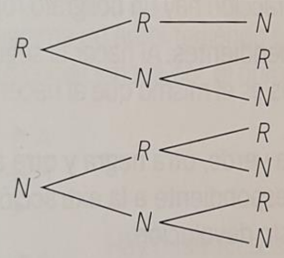
Ejemplo

EJEMPLOS

15. En una urna tenemos dos bolas rojas y tres negras. Si hacemos tres extracciones consecutivas sin reponer las bolas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 rojas? ¿Y 2 negras? ¿Y de que sean negras la primera y la última?

Realizamos un **diagrama de árbol** las tres extracciones, teniendo en cuenta las bolas que quedan en la urna tras extraer cada bola.

Extracciones: 1.ª 2.ª 3.ª



→ Puesto que solo hay dos bolas rojas, si salen ambas en las dos primeras extracciones, en la tercera solo puede salir una negra.

El espacio muestral es $E = \{RRN, RNR, RNN, NRR, NRN, NNR, NNN\}$

$P_{2R} = \frac{3}{7}$ $\quad P_{2N} = \frac{3}{7}$ $\quad P_{N\text{-}N} = \frac{2}{7}$

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C3 y C4.

Ejemplo

67 Se nos ha roto una pulsera hecha con cuentas de colores y las cuentas han ido a parar debajo de la cama. Las cuentas son: seis blancas, cuatro amarillas y una plateada. Al sacar las dos primeras cuentas de debajo de la cama, halla las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Que la primera cuenta sea blanca y la segunda plateada.

b) Sacar dos cuentas amarillas.

c) Sacar una cuenta plateada y la siguiente amarilla.

d) Que las dos sean blancas.

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que responde a los descriptores C1, C2 y C3.

Ejemplo

EJERCICIO RESUELTO

1 **Halla la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de 6 caras.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio muestral: } E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\\ \text{Suceso } A = \{2, 3, 5\}\end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que responde a los descriptores C4 y C5.

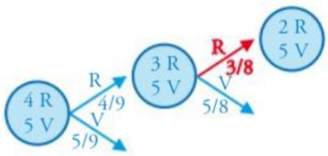
Ejemplo

EJERCICIO RESUELTO

3 **En una urna hay 4 bolas rojas y 5 verdes. Se extraen dos bolas sin devolución. Halla la probabilidad de que la segunda bola sea roja con la condición de que la primera haya sido roja también.**

A = «Extraer bola roja la primera vez»

B = «Extraer bola roja la segunda vez»



Hay que hallar $P(B/A)$. En el árbol se observa que $P(B/A) = 3/8$

Aplicando la fórmula, se obtiene el mismo resultado:

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = \dfrac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \dfrac{1}{6} \\[2ex] P(A) = \dfrac{4}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{4} = \frac{3}{8}$$

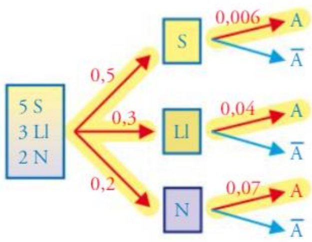
Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que responde a los descriptores C4 y C6.

Ejemplo

EJERCICIO RESUELTO

5 **Durante 10 días en una carretera ha hecho 5 días sol, 3 días ha llovido y 2 días hubo niebla. La probabilidad de que haya un accidente de coche en un día soleado es de 0,006, en un día lluvioso de 0,04 y en un día con niebla de 0,07. Halla la probabilidad de que un determinado día haya accidente.**

S: Sol Ll: Lluvia N: Niebla A = Accidente



$$P(A) = P(S) \cdot P(A/S) + P(\text{Ll}) \cdot P(A/\text{Ll}) + P(N) \cdot P(A/N)$$

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}006 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}07 = \mathbf{0{,}029}$$

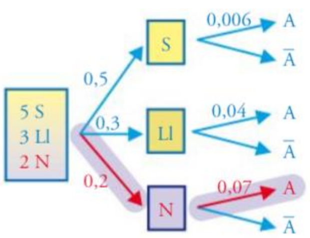
Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio planteado y resuelto que responde a los descriptores C4, C6 y C7. Se apoya en el ejemplo anterior para ampliar con el descriptor C7 y darle continuidad al contenido.

Ejemplo

EJERCICIO RESUELTO

6 **Durante 10 días, en una carretera ha hecho 5 días sol, 3 días ha llovido y 2 días hubo niebla. La probabilidad de que haya un accidente de coche en un día soleado es de 0,006; en un día lluvioso, de 0,04, y en un día con niebla, de 0,07. Un determinado día hubo un accidente. ¿Qué probabilidad hay de que ese día hubiese niebla?**

S: Sol Ll: Lluvia N: Niebla A = Accidente



$$P(N/A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \quad 0{,}07}{0{,}029} = \frac{0{,}014}{0{,}029} = \mathbf{0{,}48}$$

Tipo de actividad	☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C4, C6 y C7.

Ejemplo

5 Un barco cubre diariamente el servicio entre dos puertos. Se sabe que la probabilidad de accidente en día sin niebla es 0,005, y en día de niebla, 0,07. Un cierto día de un mes en el que hubo 18 días sin niebla y 12 con niebla se produjo un accidente. Calcula la probabilidad de que el accidente haya sido en un día sin niebla.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema en la sección final del tema. Responde a los descriptores C4, C6 y C7. Modifica el planteamiento de los ejercicios vistos hacer una pregunta que debes relacionar con la teoría.

Ejemplo

76 Se ha realizado un estudio entre 800 estudiantes, obteniéndose los datos siguientes: hay 440 mujeres de las cuales cursan estudios técnicos 300 y el resto estudian humanidades. De los 360 varones, 200 cursan estudios técnicos y 160 humanidades. Se selecciona al azar un alumno. Se pide:

a) La probabilidad de que estudie humanidades si se sabe que es varón.

b) La probabilidad de que la persona elegida sea mujer si se sabe que realiza estudios técnicos.

c) ¿Son independientes los sucesos ser varón y estudiar humanidades?

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato

Tipo de actividad	☑ Ejercicio	☐ Problema	☑ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Combina una parte de ejercicio y también cuestiones. Responde a los descriptores C1 y C2.			

Ejemplo

2 En el experimento de lanzar un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, halla:

a) El espacio muestral o suceso seguro.

b) El suceso A, formado por los números impares.

c) El suceso B, formado por los números primos.

d) El suceso C, formado por los números pares.

e) ¿A y B son compatibles o incompatibles?

f) ¿A y C son compatibles o incompatibles?

g) ¿B y C son compatibles o incompatibles?

Tipo de actividad	☑ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C1, C2 y C3.			

Ejemplo

6 Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados.

b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación).

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

Tipo de actividad	☐ Ejercicio	☑ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Problema que responde a los descriptores C4, C5 y C7. Normalmente el C7 va ligado al C6, aunque sea implícitamente.			

Ejemplo

10 Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, de 0,02 para B y de 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema que responde a los descriptores C2, C3 y C4. Hay unas cuestiones teóricas relacionadas con la dependencia de sucesos (C4) y con la compatibilidad de sucesos (C2 y C3)

Ejemplo

31 Se cree que hay una vuelta hacia los estilos de baile más populares. Se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato y resulta que al 40 % les gusta la salsa, al 30 % les gusta el merengue y al 10 % les gusta tanto la salsa como el merengue.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

c) ¿Son independientes los sucesos «gustar la salsa» y «gustar el merengue»? ¿Son incompatibles?

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema que responde a los descriptores C2, C3, C4, C5 y C7. Hay unas cuestiones teóricas relacionadas con la dependencia de sucesos (C4) y con la compatibilidad de sucesos (C2 y C3).

Ejemplo

75 Una empresa de telefonía móvil ofrece tres tipos de diferentes tarifas A, B y C, cifrándose en un 45 %, 30 % y 25 % el porcentaje de clientes abonados a cada una de ellas, respectivamente. Se ha detectado que el 3 %, 5 % y 1 % de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia. Se pide:

a) Si un cliente elegido al azar cancela su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera en la tarifa C?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar no cancele su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

c) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté abonado a la tarifa A y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

d) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté abonado a la tarifa B y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Problema que responde al descriptor C5 y que sería ideal resolver con la distribución de una Binomial. No se ve en 2º de Bachillerato CCSS, pero sí en 1º. Si no lo recuerdan, se enfrentan a un problema que pueden resolver con sus recursos actuales. En 1º sería un ejercicio más de Binomial.

Ejemplo

74 Se lanzan cinco monedas al aire.

Calcula:

a) La probabilidad de no obtener ninguna cara.

b) La probabilidad de obtener una cara.

c) La probabilidad de obtener más de una cara.

Tipo de actividad	☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción	Ejercicio que responde a los descriptores C2, C3, C4, C5 y C7.

Ejemplo

73 De los turistas que visitan Málaga, el 60 % hace el viaje en avión, el 30 % lo hace por carretera y el 10 % lo hace en tren. El 70 % de los que viajan en avión, el 80 % de los que viajan por carretera y el 50 % de los que viajan en tren van a las playas de la costa occidental.

a) Si se selecciona al azar un turista que ha visitado Málaga, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado en las playas de la costa occidental?

b) Si se selecciona al azar un turista que ha visitado Málaga y que ha estado en las playas de la costa occidental, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en tren?

Capítulo 5
Resultados

En este capítulo se va a realizar un análisis comparativo entre el currículo vigente y los ejercicios, problemas y cuestiones de los libros de texto que se han estudiado en el capítulo anterior.

El capítulo está divido en dos apartados. En el primero se examinan longitudinalmente el currículo y los libros de texto, destacando ausencias y presencias de contenidos matemáticos y su desarrollo. En el segundo se analiza la coherencia de estos libros de texto en relación con el currículo. Así, se tendrá un indicador sobre la pertinencia de los libros para favorecer la correcta adquisición de los contenidos previstos durante procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Como ya hemos mencionado al analizar los descriptores en el capítulo 1, se aprecia claramente el diseño del currículo en espiral. Se hace una revisión de los conocimientos ya explicados previamente durante el curso. Esta revisión se hace de forma iterativa, es decir, en clase se aborda de forma repetida las nociones y temáticas vistas con anterioridad. Sirve de repaso y para situar al alumnado en una posición cognitiva y social (en interacción entre iguales) donde puedan adquirir los nuevos conocimientos, es decir, en la *zona de desarrollo próximo* (Vygotski, 1978).

Tabla 1. Descripción longitudinal de los contenidos en el currículo

Contenidos	**Educación Primaria**		**ESO**						**Bachillerato**	
	5º	**6º**	**1º**	**2º**	**3º Acad**	**3º Apli**	**4º Acad**	**4º Apli**	**1º**	**2º**
C1. Experimentos aleatorios y deterministas	✓	✓		✓	✓			✓		
C2. Espacio muestral y sucesos		✓		✓	✓			✓	✓	
C3. Definición y cálculo de probabilidad		✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓
C4. Probabilidad condicionada							✓	✓	✓	✓
C5. Probabilidad compuesta							✓	✓	✓	✓
C6. Teorema Probabilidad Total										✓
C7. Teorema de Bayes										✓

En la tabla 1 se aprecia de manera global la evolución de los descriptores de contenido en el currículo a lo largo de los años. Vemos cómo avanza, curso a curso, el número de descriptores y, en caso de no hacerlo, aumenta la profundidad del contenido del mismo descriptor.

Se toma como libro de referencia el texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2 (Vizmanos J.R., 2011). Su elección se debe a la formalidad y rigor en la presentación de la información. A día de hoy sigue siendo un libro muy interesante, matemáticamente riguroso y con el contenido presentado de una forma coherente. Este formato cada vez se ve menos en los libros de texto actuales, donde hay una tendencia a aumentar la presencia de gráficos y dibujos.

Analizando el currículo y los libros de texto a partir de 3º de ESO, se ve cómo aumenta la formalidad en las definiciones con el paso de los cursos. Es comprensible que el alumnado de 3º de ESO no tiene la misma capacidad de abstracción para sintetizar la descripción de nociones en definiciones formales que cuando está en Bachillerato. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la definición de *suceso* en el libro de texto de 3º de ESO (Santillana, 2015) y en el libro de referencia de 2º de Bachillerato (Vizmanos J.R., 2011).

Un **suceso** es uno o varios de los resultados que se pueden obtener.	Se le llama **suceso** de un experimento aleatorio a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral **E**. El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina **espacio de sucesos** y se designa por **S**.

Figura 1. Definición de suceso en 3º de ESO y 2º Bachillerado.

Otro ejemplo muy claro es la formalización del concepto de probabilidad. En 3º de ESO se define como *"La probabilidad, P, de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso".* En el libro de referencia, la formalización de este concepto ocupa 4 caras de contenido relativamente denso. Afronta el enfoque frecuencial y la ley de los grandes números, continúa con la definición clásica (o de Laplace) y, finalmente, con la definición axiomática de Kolmogorov.

En los siguientes puntos, se estudia las ausencias y presencias en cada libro del curso con el currículo vigente en relación a la probabilidad.

<u>3º de ESO</u>

El libro se ajusta mucho al currículo. Presenta el contenido en el mismo orden. En las primeras hojas del tema se explican los tipos de experimentos (C1) y los sucesos y el espacio muestral (C2). Continúa con las operaciones básicas entre sucesos, abordando la unión y la intersección. Una vez que se ha entendido las posibles situaciones entre sucesos, presenta el concepto de probabilidad (C3). Introduce el cálculo de la probabilidad asociada a un suceso mediante la regla de Laplace. Es después cuando aborda el enfoque frecuencial de la probabilidad para continuar mostrando las propiedades de la probabilidad y finalmente se explica el concepto de compatibilidad de sucesos.

Cuando se ha presentado un tema, en la misma hoja siempre hay ejercicios para poner en práctica lo que se acaba de explicar. Consta de 2 a 4 ejercicios, donde varía ligeramente la complejidad. Al final del tema hay de nuevo ejercicios y problemas.

En el currículo aparecen *las permutaciones y el factorial de un número*, mientras que no hay nada en el libro referente a la combinatoria. En el libro, el cálculo de espacios muestrales en experimentos compuestos se hace de manera manual, utilizando árboles (también hay referencia explícita al uso al uso de árboles en el currículo). En el currículo de 3º todavía no se formaliza la probabilidad condicionada y el libro tampoco lo hace, aunque aparecen algunos ejercicios donde se deja entrever que un experimento con varias etapas, los resultados de estas pueden estar condicionados a las anteriores, como se aprecia en la figura 2.

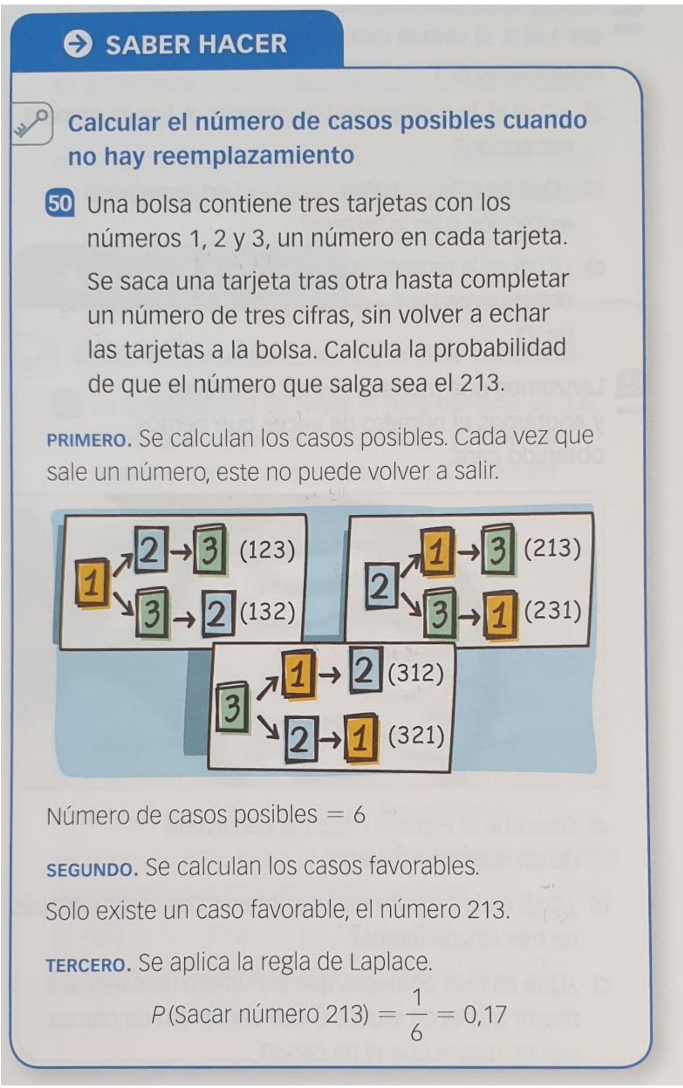


Figura 2. Ejemplo de introducción de probabilidad condicionada. 3º ESO

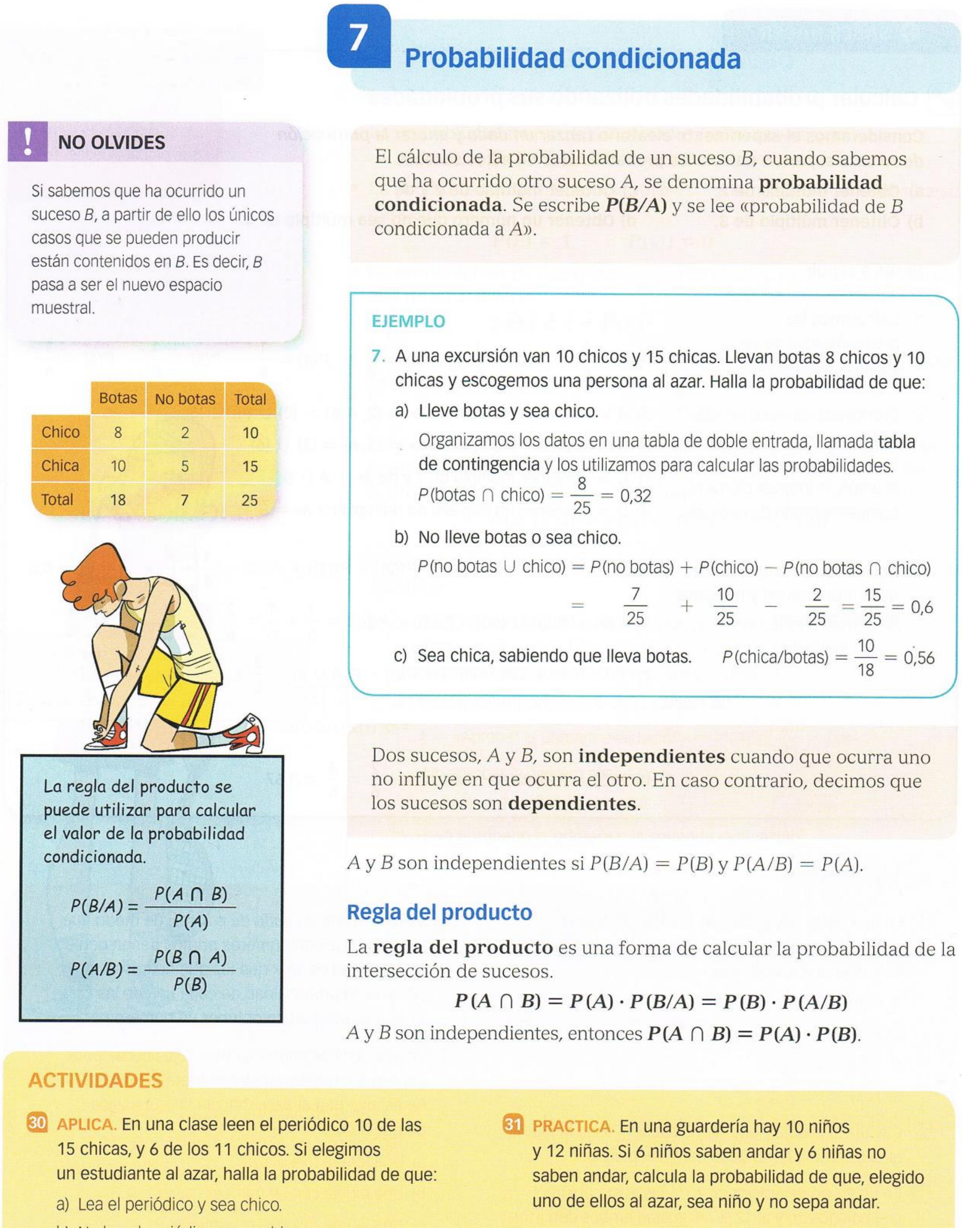
Una vez presentado un contenido, en la misma hoja siempre hay ejercicios para poner en práctica lo que se acaba de explicar. Consta de 2 a 4 ejercicios, donde varía ligeramente la complejidad. Al final del tema hay de nuevo ejercicios y problemas.

4º de ESO (Matemáticas Académicas)

El currículo de 4º en lo referente a la estadística y probabilidad, comienza con la *introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones*. En el libro de texto hay un tema completo abordando la combinatoria, aunque no es objeto de estudio en este trabajo.

El tema de probabilidad comienza repasando los contenidos vistos en 3º y en el mismo orden. Primero experimentos aleatorios (C1), sucesos y operaciones con sucesos (C2). En el currículo no están especificado estos contenidos, se asumen y continúa a partir de aquí con el cálculo de probabilidades (C3). Los libros tratan de asegurar que el contenido de repaso sea suficiente para poder continuar profundizando, tal y como se ve con este contenido. A diferencia del libro de 3º, muestra la relación de la probabilidad con la frecuencia relativa antes de definir la probabilidad asociada a un suceso de forma teórica. Así, posteriormente, se introduce la regla de Laplace. Este orden de formalizar la probabilidad es más adecuado que el que hemos visto en el curso anterior. Para poder utilizar la regla de Laplace en sucesos compuestos es necesario que el espacio muestral sea equiprobable. Al presentar las propiedades de la probabilidad, la notación es adecuada al curso.

Se aborda por primera vez de manera explícita la probabilidad condicionada. El ejemplo que utiliza el libro es muy adecuado ya que se trata de una tabla de contingencia, con un experimento sencillo y dos sucesos compatibles y dependientes (figura 3). Es común ver en libros cómo mezclan el concepto de probabilidad condicionada al de probabilidad compuesta. Las actividades propuestas después de la explicación no son siempre de experimentos simples. De hecho, el ejemplo utilizado para la explicación es adecuado, pero en la hoja siguiente (figura 4), bajo el mismo capítulo del libro de texto (probabilidad condicionada), introducen la probabilidad en experimentos compuestos. Además, este ejemplo titulado *experimento compuesto* no es realmente un experimento compuesto, sino de probabilidad condicionada en el mismo experimento aleatorio. Al final del enunciado introduce las preguntas con: “Eligiendo un estudiante al azar…”, como frase típica de problema de probabilidad con experimento simple.



7 Probabilidad condicionada

NO OLVIDES

Si sabemos que ha ocurrido un suceso B, a partir de ello los únicos casos que se pueden producir están contenidos en B. Es decir, B pasa a ser el nuevo espacio muestral.

El cálculo de la probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se denomina **probabilidad condicionada**. Se escribe $P(B/A)$ y se lee «probabilidad de B condicionada a A».

	Botas	No botas	Total
Chico	8	2	10
Chica	10	5	15
Total	18	7	25

EJEMPLO

7. A una excursión van 10 chicos y 15 chicas. Llevan botas 8 chicos y 10 chicas y escogemos una persona al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Lleve botas y sea chico.

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, llamada **tabla de contingencia** y los utilizamos para calcular las probabilidades.

$P(\text{botas} \cap \text{chico}) = \frac{8}{25} = 0{,}32$

b) No lleve botas o sea chico.

$P(\text{no botas} \cup \text{chico}) = P(\text{no botas}) + P(\text{chico}) - P(\text{no botas} \cap \text{chico})$

$= \frac{7}{25} + \frac{10}{25} - \frac{2}{25} = \frac{15}{25} = 0{,}6$

c) Sea chica, sabiendo que lleva botas. $P(\text{chica/botas}) = \frac{10}{18} = 0{,}\dot{5}\dot{6}$

Dos sucesos, A y B, son **independientes** cuando que ocurra uno no influye en que ocurra el otro. En caso contrario, decimos que los sucesos son **dependientes**.

A y B son independientes si $P(B/A) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$.

La regla del producto se puede utilizar para calcular el valor de la probabilidad condicionada.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

Regla del producto

La **regla del producto** es una forma de calcular la probabilidad de la intersección de sucesos.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

ACTIVIDADES

30 APLICA. En una clase leen el periódico 10 de las 15 chicas, y 6 de los 11 chicos. Si elegimos un estudiante al azar, halla la probabilidad de que:

a) Lea el periódico y sea chico.

31 PRACTICA. En una guardería hay 10 niños y 12 niñas. Si 6 niños saben andar y 6 niñas no saben andar, calcula la probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y no sepa andar.

Figura 3. Introducción de probabilidad condicionada. 4º ESO

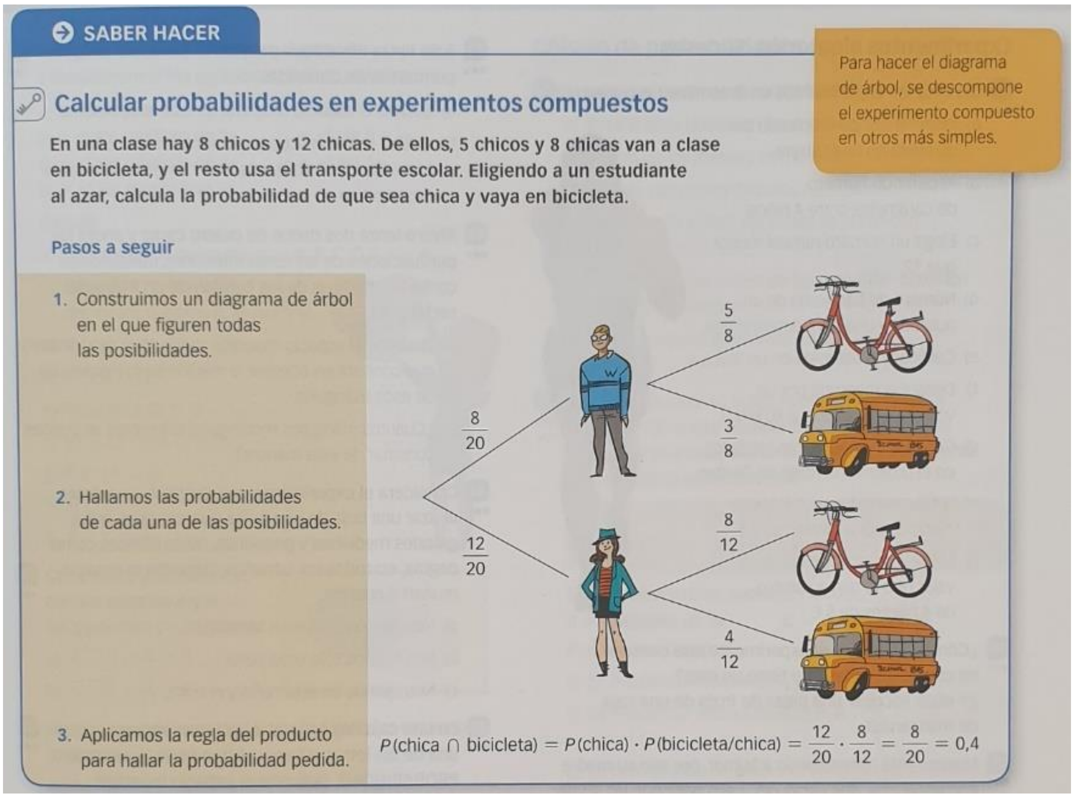


Figura 4. Ejemplo experimento compuesto. 4º ESO

<u>4º de ESO (Matemáticas Aplicadas)</u>

En este curso, como se ha visto en el capítulo 1, se hace un repaso más amplio al contenido de probabilidad, ya que en 3º de ESO con Matemáticas Aplicadas únicamente se aborda la parte de estadística.

El libro aglutina todo el bloque de estadística y probabilidad en el mismo tema (Tema 9: Estadística y probabilidad). En lo relativo a la probabilidad, comienza definiendo los tipos de experimentos (C1), continua con la definición de sucesos y sus tipos (C2). Llama la atención el hecho de que no se define el espacio muestral, ni en el libro ni en el currículo. Se pasa directamente a la definición de probabilidad y al cálculo de probabilidades (C3). Comparado con el libro de Matemáticas Académicas del mismo curso, se aprecia un discurso menos formal. No aparece de manera explícita el concepto de equiprobabilidad y presenta directamente la explicación y uso de la regla de Laplace. Es decir, se presupone implícitamente que la introducción hecha en 2º de ESO es suficiente para un estudio menos formalizado, que se completa con la explicación somera de las propiedades de la probabilidad de la unión de sucesos. De nuevo hay una mezcla de conceptos en la probabilidad condicionada y compuesta. Introduce primero los diagramas de árbol y tablas de contingencia, sin usar la probabilidad condicionada. Habla de dependencia entre sucesos para presentar la probabilidad compuesta. Se aprecia una profundización menor en este libro comparando con el de académicas, aun tratando el mismo contenido del currículo.

<u>1º de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales)</u>

En este curso se trabajan los contenidos C2 a C5 descritos en el capítulo 1; a saber: espacio muestral y sucesos (C2), definición y cálculo de probabilidad (C3), probabilidad condicionada (C4) y probabilidad compuesta (C5). En el libro de texto se hace de manera muy reducida, para dar paso a la presentación de las distribuciones binomial y normal. Esto no se debe a que los libros utilizados en el centro para Bachillerato y en ESO sean de diferentes editoriales, sino al uso convencional de los libros en los centros como "instrumento de enseñanza". En este caso, dado que los conceptos previstos se supone que deben ser bien conocidos por el alumnado se propone un "repaso ágil para desembocar rápido en los temas más complejos y novedosos (distribuciones de probabilidad)", presuponiendo que si una clase tiene una necesidad específica será el profesorado quien la subsane.

Esta forma de estructurar el libro de texto queda reforzada por el hecho de que en él no hay referencia explícita a los experimentos aleatorio (C1) ni al espacio muestral (C2). Se aprecia simplemente en un lateral del libro una definición a modo de recordatorio sobre el concepto de sucesos equiprobables. El primer contenido presentado es la regla de Laplace, por lo que el libro atiende directamente al descriptor C3.

En el currículo aparece el descriptor C3 mucho más completo: *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov*. Como se aprecia en el libro, no hay ni siquiera una definición de probabilidad. En definitiva, se ha decidido dar más importancia la parte de presentar las distribuciones.

De nuevo se encuentra la misma situación vista en libros anteriores. Mezclan el concepto de probabilidad condicionada, asociándolo siempre a probabilidad en experimentos compuestos.

Aunque no se le da mucha importancia a esta sección, se presenta el Teorema de la Probabilidad Total (C6) y Teorema de Bayes (C7). No aparecen estos contenidos en el currículo vigente para el curso de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, pero en el libro sí se abordan.

El uso de árboles y diagramas de Venn en la presentación de la probabilidad total se hace de manera muy correcta. Usa notación adecuada y se preocupan en indicar en las ramas las probabilidades condicionadas con la expresión y no sólo con el valor, tal y como se aprecia en la figura 5.

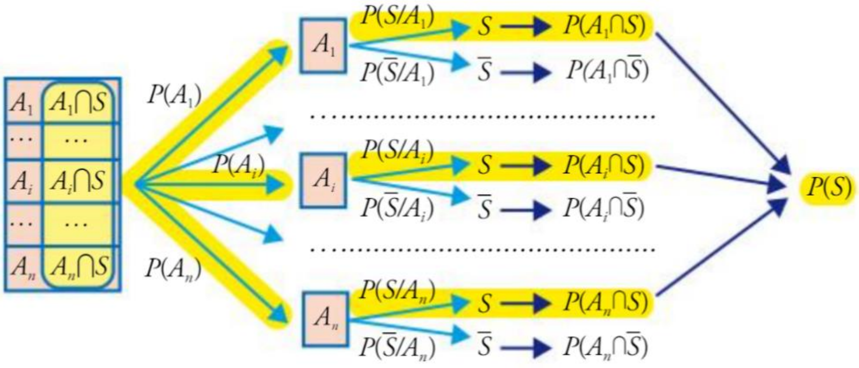


Figura 5. Diagrama de Venn y uso de árbol.

<u>2º de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales)</u>

El currículo de este curso comienza con el descriptor C3: *Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.* Tal y como sucede en otros libros y cursos, aunque en el currículo no lo especifique, repasa conceptos vistos en cursos anteriores como el espacio muestral y operaciones con sucesos (C2). Para la descripción del concepto de probabilidad lo hace en un orden adecuado, comenzando con la ley de los grandes números y la frecuencia relativa para posteriormente hablar de la regla de Laplace. Una vez llegado a este punto, se muestra un cuadro con las propiedades de la probabilidad como se puede ver en la figura 6.

2.3 Propiedades de la probabilidad

a) La probabilidad del suceso seguro es uno: $P(E) = 1$

b) La probabilidad del suceso imposible es cero: $P(\varnothing) = 0$

c) La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre cero y uno: $0 \leq P(A) \leq 1$

d) La probabilidad del suceso contrario es $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

e) Si los sucesos A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

f) Si los sucesos A y B son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Figura 6. Presentación no axiomática de las propiedades de la probabilidad.

Muestra estas propiedades ordenadas bajo un criterio que no es el de la definición axiomática de Kolmogorov. Estrictamente los axiomas corresponden al punto a, al c (en parte) y al e. El resto de propiedades mostradas en el cuadro son consecuencias de los axiomas anteriores. Esta forma de presentación “no axiomática” se debe a una decisión didáctica en el proceso de transposición (Chevallard, 1997). En este nivel, el proceso de construcción axiomático de las matemáticas está en ciernes y se pone más énfasis en las propiedades y su uso en la resolución de problemas que en su “orden jerárquico en el edificio matemático”.

En el libro de referencia esta parte se realiza de manera más formal. En la figura 7 se encuentra un recorte con dicho contenido.

6 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

La definición axiomática de probabilidad se basa en la relación que existe entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad cuando el número de pruebas es muy grande.

Basándose en las propiedades de la frecuencia relativa, Kolmogorov enunció la siguiente definición axiomática de probabilidad:

Se llama **probabilidad** a una ley (función o aplicación) que asocia a cada suceso A, de un espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de A y representamos por $P(A)$, que cumple los siguientes axiomas:

1.º La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula:

$$P(A) \geqslant 0$$

2.º La probabilidad del suceso cierto es igual a la unidad:

$$P(E) = 1$$

3.º La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A \text{ y } B \text{ incompatibles})$$

Consecuencias de los axiomas

1. **Probabilidad del suceso contrario**

   La probabilidad del suceso $\bar{A}$, contrario del suceso A, es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A.

   $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

   En efecto, como $A \cup \bar{A} = E$ y además A y $\bar{A}$ son incompatibles, resulta:

   $1 = P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, de donde $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. **Probabilidad del suceso imposible**

   La probabilidad del suceso imposible es cero:

   $$P(\varnothing) = 0$$

   En efecto, como el suceso imposible es el contrario del suceso cierto y $P(E) = 1$, aplicando el resultado anterior se obtiene:

   $$P(\varnothing) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$$

   Este resultado se puede generalizar a n sucesos incompatibles:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son ***n* sucesos incompatibles** dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Figura 7. Definición axiomática. Vizmanos J.R. (2011)

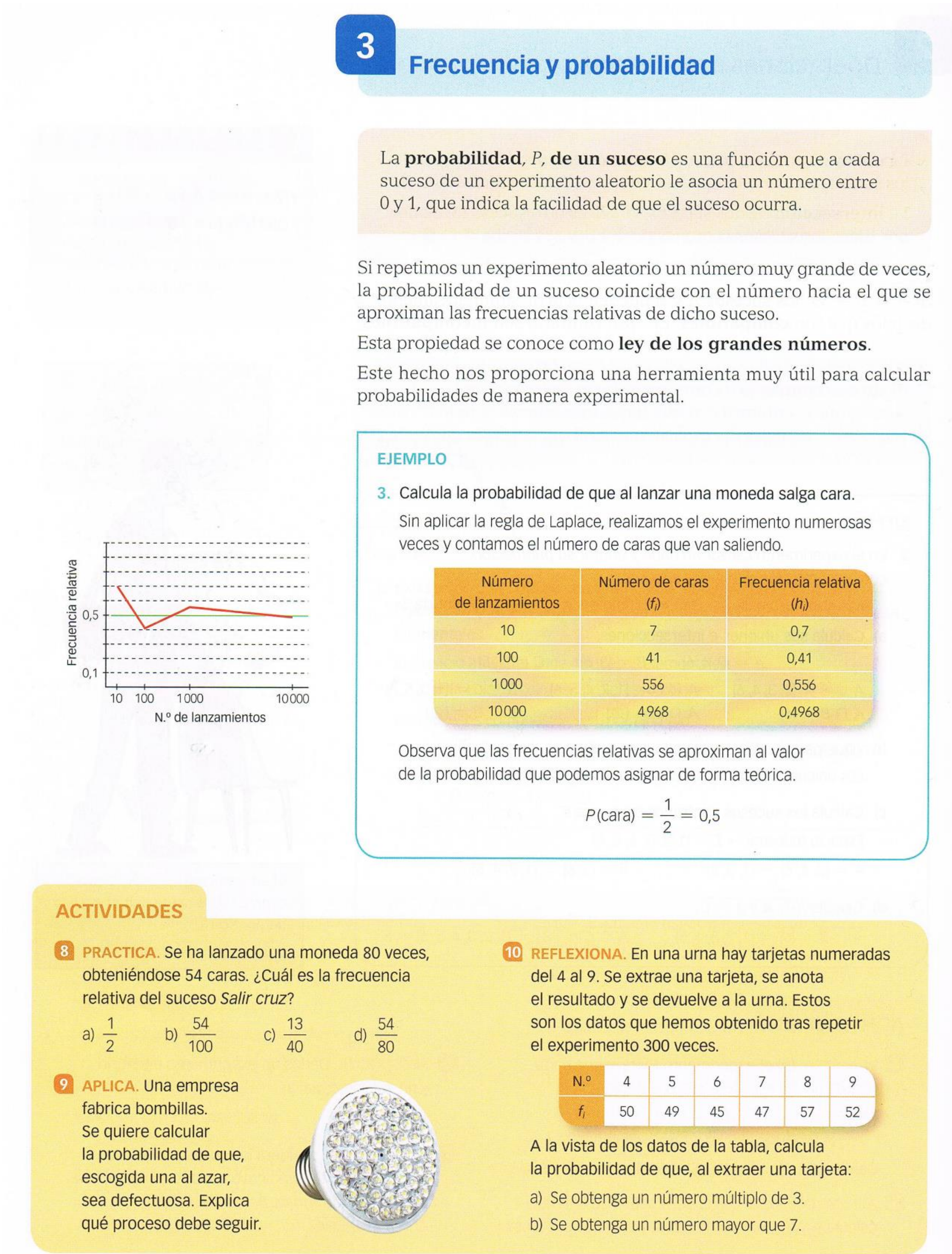
El siguiente contenido en el currículo es: *Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos (C4 y C5).* Se aprecia de nuevo una mezcla entre probabilidad condicionada y compuesta. En la explicación del Teorema de Probabilidad Total (C6) y del Teorema de Bayes (C7) se nota un aumento en la formalidad matemática respecto al libro de 1º. Recordemos que en 1º estos contenidos no están en el currículo, pero sí en el libro. Los diagramas de árbol y de Venn tienen muy bien indicadas las probabilidades a las que se refieren. Además, en el Teorema de Bayes introducen los conceptos de *probabilidad a priori, verosimilitud y probabilidad a posteriori.*

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

En este apartado se analiza cuánto se ajustan los libros de texto al currículo. Es bastante frecuente encontrar en los libros de texto una organización del curso muy similar al currículo, donde se van abordando los temas según el orden de los bloques de éste. El bloque 1 no tiene presencia como tema en concreto, porque como ya se ha mencionado anteriormente, se trata de manera transversal en el resto de bloques.

Como se ha podido ver en el apartado anterior, los libros de texto analizados se ciñen bastante bien al contenido del currículo. Es algo común en todos ellos retomar conocimientos que en el diseño del currículo ya no aparecen para centrar al alumnado. El nivel de rigor matemático y de notación va aumentando con el paso de los cursos. También se ha detectado alguna diferencia entre el currículo en el libro de 1º de Bachillerato (de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales), debido a que hay más contenido que el estipulado en el currículo vigente. Tras comentar esta situación con la docente titular en el centro, es una situación conocida y que se ha decidido desde el departamento. El currículo especifica unos contenidos mínimos que han de ser objeto de enseñanza, pero es decisión de cada departamento programar cada curso de la manera más oportuna. Como se ha comentado, en el centro han decidido abordar el Teorema de Bayes y el de Probabilidad Total también en 1º de Bachillerato (de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales). Otro caso particular es el del libro de 4º de ESO de Matemáticas Aplicadas, donde únicamente aparece el concepto de probabilidad de un suceso como la frecuencia relativa (y la ley de los grandes números) en un ejemplo, que quizá pueda pasar desapercibido (figura 8). En el currículo se hace referencia clara a la *frecuencia de un suceso aleatorio*. Posteriormente el libro plantea unas actividades relacionadas con el punto *3. Frecuencia y probabilidad*, donde no se ve claro la ley de los grandes números. Se usa la frecuencia relativa de un suceso, pero no se habla de la convergencia a la probabilidad del suceso con el aumento de las repeticiones de la experimentación. El ejercicio 10 que aparece en la figura 8 se mostró como ejemplo en el capítulo 4. Se trata de un ejercicio donde se ha realizado el mismo experimento 300 veces y se han obtenido las frecuencias relativas a cada suceso. No hay una visualización del efecto de la ley de los grandes números en esta actividad.

Es habitual encontrar problemas contextualizados como hemos podido observar en el capítulo 4. En ocasiones, la contextualización del problema puede modificar su resolución y las matemáticas involucradas. Por ejemplo, en el problema de "extraer una avellana de una bolsa que contiene nueces, avellanas y almendras" no se ha tenido en cuenta que es sencillo identificar mediante el tacto dichos frutos secos, por lo que no se trataría de un problema de probabilidad. Tampoco especifican si la bolsa es transparente u opaca. Si se cambian los frutos secos por canicas, el problema cambia de nuevo. Es evidente que hay una intención de contextualizar los problemas con elementos de la vida cotidiana para que faciliten su comprensión, pero en ocasiones se hace de manera incorrecta.



3 Frecuencia y probabilidad

La **probabilidad**, *P*, **de un suceso** es una función que a cada suceso de un experimento aleatorio le asocia un número entre 0 y 1, que indica la facilidad de que el suceso ocurra.

Si repetimos un experimento aleatorio un número muy grande de veces, la probabilidad de un suceso coincide con el número hacia el que se aproximan las frecuencias relativas de dicho suceso.

Esta propiedad se conoce como **ley de los grandes números**.

Este hecho nos proporciona una herramienta muy útil para calcular probabilidades de manera experimental.

EJEMPLO

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara.

Sin aplicar la regla de Laplace, realizamos el experimento numerosas veces y contamos el número de caras que van saliendo.

Número de lanzamientos	Número de caras (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)
10	7	0,7
100	41	0,41
1000	556	0,556
10000	4968	0,4968

Observa que las frecuencias relativas se aproximan al valor de la probabilidad que podemos asignar de forma teórica.

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

ACTIVIDADES

8 **PRACTICA.** Se ha lanzado una moneda 80 veces, obteniéndose 54 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso *Salir cruz*?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{54}{100}$ c) $\frac{13}{40}$ d) $\frac{54}{80}$

9 **APLICA.** Una empresa fabrica bombillas. Se quiere calcular la probabilidad de que, escogida una al azar, sea defectuosa. Explica qué proceso debe seguir.

10 **REFLEXIONA.** En una urna hay tarjetas numeradas del 4 al 9. Se extrae una tarjeta, se anota el resultado y se devuelve a la urna. Estos son los datos que hemos obtenido tras repetir el experimento 300 veces.

N.º	4	5	6	7	8	9
f_i	50	49	45	47	57	52

A la vista de los datos de la tabla, calcula la probabilidad de que, al extraer una tarjeta:

a) Se obtenga un número múltiplo de 3.

b) Se obtenga un número mayor que 7.

Figura 8. Frecuencia relativa. Libro de 4º ESO

Como conclusión a este apartado, se aprecia que hay un gran trabajo de diseño detrás de cada uno de los libros analizados. En los de ESO, con la editorial Santillana, dan mucha importancia al aspecto visual, con ejemplos e ilustraciones que ayudan a captar la atención del alumnado. En la editorial Bruño, por lo menos en los libros de Bachillerato, hay menos ilustraciones y más rigor en los diagramas, que ayudan mucho a entender ciertos contenidos.

Respecto al uso de las TICs en estos libros, todos ellos tienen formato digital a disposición del profesorado, con recursos digitales para aplicar en el aula. Por un lado, la editorial Bruño ofrece una serie de herramientas para la gestión del aula por parte del profesor. Se trata de un sistema de gestión para que el alumnado sea usuario de la plataforma y así poder realizar un seguimiento del trabajo realizado (gestión de notas, asistencias, comunicación…). Actualmente se utilizan estos mismos servicios en herramientas de Google y mediante Educa, pero hace unos años esto no estaba tan unificado y si era una buena herramienta para el profesorado.

Por otro lado, hay una gran cantidad de contenido adicional para el desarrollo de las clases. A parte de libro digital, podemos encontrar vídeos explicativos, enlaces a webs y el solucionario del propio libro de texto. En la figura 9 vemos una captura del portal.

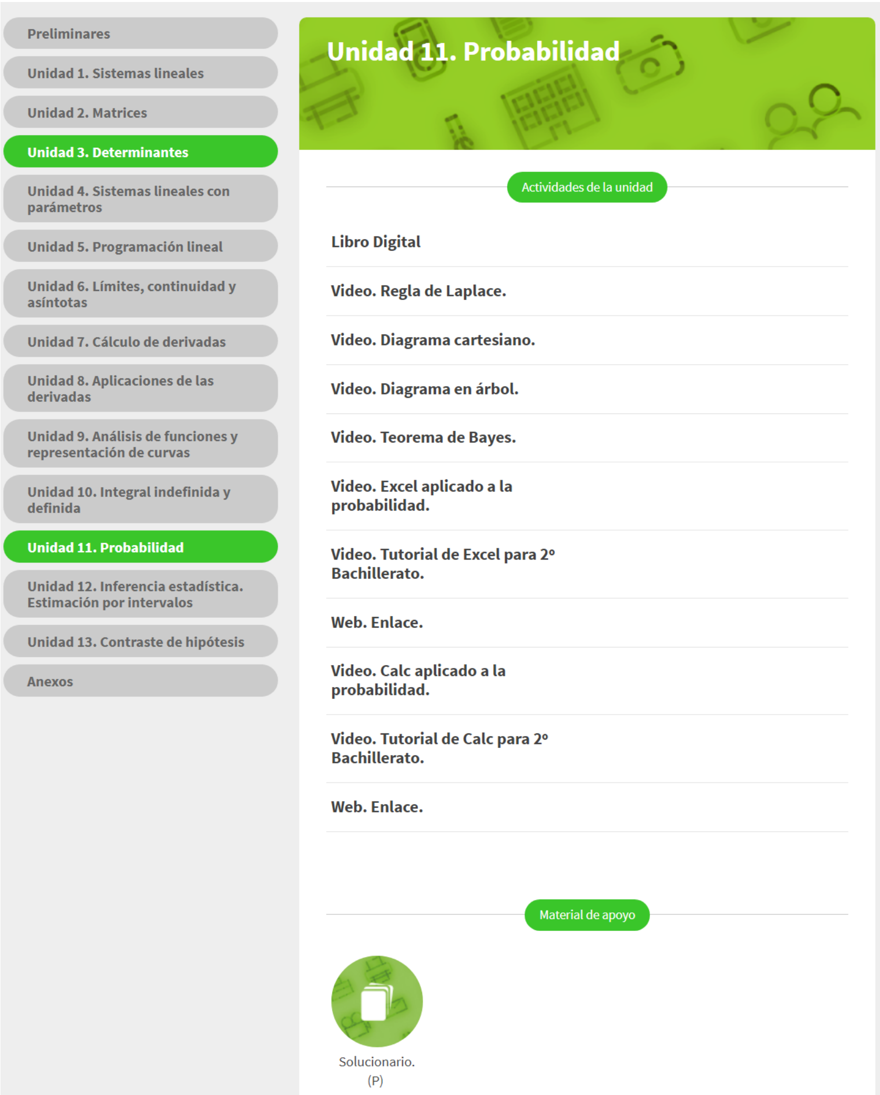


Figura 9. Portal digital

El acceso a estos vídeos explicativos también se da desde el propio libro de texto digital, mediante iconos en ciertos lugares como se muestra en la figura 10.

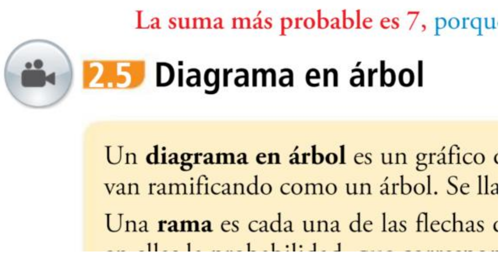


Figura 10. Enlace a vídeo explicativo.

Finalmente se encuentra un apartado de recursos didácticos de acceso exclusivo para el profesorado. Dichos recursos son muy diversos, desde programaciones didácticas hasta propuestas de exámenes con sus soluciones.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la probabilidad en 2º de Bachillerato (matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales)

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio sobre la probabilidad en 2º de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales).

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se estudia el contenido de probabilidad en el libro de texto 2º de Bachillerato. En el segundo, se establecen y estudian las dificultades y errores previstos durante el aprendizaje de este tema, así como sus posibles orígenes. En el siguiente capítulo, se muestra la programación y puesta en práctica del proceso de estudio del tema, con destalles como: la distribución del tiempo de clase, actividades adicionales planificadas y la actividad autónoma del alumnado prevista. Por último, en el cuarto capítulo de esta parte, se analiza la experimentación mediante el diseño de un cuestionario y el estudio de los resultados obtenidos.

Capítulo 6
La probabilidad en el libro de texto de referencia

En el actual capítulo se analiza a fondo el tema 11 (Probabilidad) del libro de texto de 2º de Bachillerato de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales (Arias Cabezas, J. M., & Maza Sáez, I, 2016). Es el libro que se recomienda en el instituto donde se ha realizado la experimentación y que hemos utilizado como apoyo para diseñar e impartir este tema durante el Practicum II. La docente titular no utiliza el libro como referencia única, sino que busca entre diferentes fuentes los mejores recursos posibles. La motivación del estudio de esta unidad en el libro es para tener una referencia institucional sobre la probabilidad en dicho curso.

En la primera parte de este capítulo, se estudian los objetos matemáticos involucrados y en la segunda parte se analiza la unidad didáctica de manera global (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Estos autores muestran la importancia de un análisis crítico de los libros de texto con el objetivo de comprobar su idoneidad ya que son es una herramienta clave y determinante en el proceso de estudio. Para ello se muestran algunas herramientas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. Tal y como se aprecia en el texto, hay diferentes criterios que definen la idoneidad:

- Idoneidad epistémica: significados institucionales implementados o pretendidos (saber enseñado) respecto a los de referencia (saber a enseñar).
- Idoneidad cognitiva: proximidad de los significados pretendidos respecto a lo personales iniciales del alumnado (están o no en una zona de desarrollo próximo. Vygotsky)
- Idoneidad semiótica: negociado de significado entre los que se enseñan y los que acaban siendo comunes para el alumnado.
- Idoneidad mediacional: adecuación de los recursos materiales y temporales para el proceso de estudio.
- Idoneidad emocional: motivación del alumnado en el proceso de estudio.

6.1. Objetos matemáticos involucrados

Como se señala en Godino et al. (2006), para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (significado pretendido) es necesario establecer el significado de referencia para poder realizar comparaciones. Los principales elementos del significado de referencia quedan agrupados en seis tipos de entidades: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos y los agrupamos en configuraciones epistémicas (formales y empíricas). Las configuraciones formales analizan de manera formal o estructural el contenido dentro del marco interno de las matemáticas. Las empíricas ponen en juego un proceso de modelización que produce una situación con el nuevo conocimiento donde el resultado debe ser coherente con el contexto inicial. En las tablas 2a y 2b se muestran los principales elementos de la configuración epistémica empírica formada por el sistema de objetos y las relaciones entre ellos, implicadas en la probabilidad.

Tabla 2a

LENGUAJE
Verbal: Experimento, aleatorio, determinista, azar, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto, suceso seguro, suceso imposible, unión de sucesos, intersección de sucesos, compatibilidad entre sucesos, diagrama de Venn, probabilidad, frecuencia relativa, regla de Laplace, casos favorables, casos posibles, equiprobabilidad, probabilidad condicionada, dependencia, experimentos compuestos, tabla de contingencia, diagrama de árbol, Teorema de Probabilidad Total, Teorema de Bayes, probabilidad a priori, verosimilitud, probabilidad a posteriori. **Gráfico:** Espacio muestral, diagrama de Venn, tabla de contingencia, diagrama de árbol, diagrama de Venn para probabilidad total, pictogramas o dibujos contextualizados (dados, barajas de carta, ruletas) **Simbólico:** E, A, {}, P(A), $\leq$, %, $\cap$, $\cup$, $\emptyset$, P(A|B), $\sum$, $P(B\|A_i)$

SITUACIONES	CONCEPTOS
Ejercicios descontextualizados sobre: operaciones con sucesos y cálculo de probabilidades, cálculo de probabilidad condicionada. “Calcula la probabilidad de $\bar{A} \cap B$ sabiendo que…”, “Sean A y B dos sucesos del mismo E. Sabiendo…, determina P(A|B)” **Ejercicios contextualizados**: repetición del mismo ejemplo de ejercicio para cálculo de probabilidades. “En el experimento de lanzar un dado…” **Problemas contextualizados** sobre: operaciones con sucesos y cálculo de probabilidades, probabilidad condicionada, probabilidad compuesta. “En un centro educativo hay 200 alumnos, 120 de 1º y 62 de 2º…”, “En una urna hay 4 bolas rojas y 5 verdes. Se extraen dos bolas sin devolución…” “Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. La A fabrica 600, la B 300 y la C 100. La probabilidad de producir defectuosos de cada una es…” **Cuestiones contextualizadas**: al final de algunos problemas contextualizados suelen aparecer cuestiones. También al final de algún ejercicio contextualizado tipo lanzamiento de dados.	**Previos:** Sucesos. Asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia de sucesos. **Emergentes:** Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

Tabla 2b

PROCEDIMIENTOS	**PROPIEDADES**
Descontextualización del enunciado de problemas (Ej. operación son sucesos y cálculo de probabilidades). Contextualización de enunciados descontextualizados (Ej. operaciones básicas con sucesos). Uso de estrategias de combinatoria para cálculo de espacios muestrales. Construcción de tablas de contingencia para organizar la información Realización de diagramas de árbol para aplicar probabilidad condicionada.	- Operaciones con sucesos: unión, intersección, complementario. Leyes de Morgan. - Asignación de probabilidades por su frecuencia relativa o por la regla de Laplace. - Axiomática de Kolmogorov y consecuencias. $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(E) = 1$ $P(\emptyset) = 0$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (incompatibles) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - Probabilidad condicionada, dependencia de sucesos (regla del producto). $P(B\|A) = P(A \cap B) / P(A)$ $P(B\|A) = P(B)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ - Probabilidad total (regla de la suma) como suma de $B \cap A_i$, es decir, sucesos incompatibles. - Teorema de Bayes.

ARGUMENTOS
Generalización de la fórmula general de la probabilidad de la unión en casos de incompatibilidad. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Comprobación de probabilidad condicionada mediante el uso de la fórmula y las tablas de contingencia, es decir, $P(B\|A) = P(A \cap B) / P(A)$ enfrentado al uso de Laplace. Comprobación de que las probabilidades finales (intersección) de todas las ramas suman 1. Empírica-inductiva (por análisis de casos), deductiva, …

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

A lo largo de esta sección se muestra el análisis global de la unidad didáctica en el libro que utiliza el centro para 2º de Bachillerato de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, Arias Cabezas, J. M., & Maza Sáez, I. (2016), que corresponde al tema 11, Probabilidad.

El libro está organizado según los bloques del currículo (salvo el bloque 1). El tema 11 es el primero del bloque de estadística y probabilidad, por lo que muestra dos hojas de introducción a dicho bloque a modo de portada. En dicha portada aparece un listado de matemáticos asociados al estudio de la estadística y la probabilidad y también un texto introductorio. Muestra los 3 temas que componen este bloque del libro: tema 11 (Probabilidad), tema 12 (Inferencia estadística. Estimación por intervalos.) y tema 13 (Contraste de hipótesis).

Las dos siguientes hojas son la portada del tema 11, con un mapa conceptual bajo el nombre de *organiza tus ideas*. Este tipo de mapa aparece en todos los temas. Sirve para que el alumnado repase de un vistazo lo que ya debería saber y vea qué hay nuevo en este tema. En todos los temas aparece un texto introductorio a modo de justificación y uso del concepto matemático. En este caso habla de ciertas aplicaciones de la probabilidad en la actualidad (cálculo de primas de seguros, riesgos nucleares, pronósticos económicos).

En las siguientes páginas se encuentra el desarrollo del tema, organizado bajo 4 capítulos, con apartados en cada uno de ellos.

1. Operaciones con sucesos
   1.1. Espacio muestral
   1.2. Operaciones con sucesos. Sucesos compatibles e incompatibles.
   1.3. Leyes de Morgan
2. Regla de Laplace
   2.1. Ley de los grandes números
   2.2. Regla de Laplace
   2.3. Propiedades de la probabilidad
   2.4. Diagrama cartesiano
   2.5. Diagrama de árbol
   2.6. Tabla de contingencia
3. Probabilidad condicionada
   3.1. Sucesos dependientes e independientes
   3.2. Probabilidad condicionada
   3.3. Relación entre las probabilidades de sucesos independientes
   3.4. Regla del producto o de la probabilidad compuesta
4. Regla de la suma y teorema de Bayes
   4.1. Regla de la suma o de la probabilidad total
   4.2. Teorema de Bayes

Al inicio de cada capítulo hay una cuestión bajo el nombre *piensa y calcula.* Se trata de una cuestión para reflexionar sobre lo que se va a explicar a continuación. Como se ha mencionado en repetidas ocasiones, el currículo sigue un diseño en espiral. Esta pregunta ayuda a centrar al alumnado y poder introducir el contenido, incluso aunque el contenido también sea un repaso.

En los laterales de las hojas hay diferentes dibujos, diagramas o tablas, que sirven de apoyo a la explicación. Una vez se presenta una explicación o un contenido, se muestra un ejemplo resuelto en el texto.

En el libro digital del profesor, la editorial ha realizado un trabajo adicional, añadiendo acceso a videos explicativos del tema. Es común encontrar este tipo de material adicional en los recursos para el docente. En ocasiones hay applets de GeoGebra o enlaces a videos.

Al final de cada capítulo está la sección *aplica la teoría*, con varios ejercicios relativos a lo que se ha tratado. Una vez finalizados los 4 capítulos, se encuentra una sección común a todos los temas denominada *Ejercicios y problemas resueltos*. Son ejemplos resueltos que además están rotulados con la sección a la que pertenecen, para que el alumnado sea capaz de ubicar la teoría relacionada con cada ejemplo.

La siguiente sección incluye unas preguntas tipo test que ocupan una cara. Finalmente, se encuentra el banco de ejercicios y problemas, *Ejercicios y problemas propuestos.* Al principio están organizados por capítulos. En la siguiente sección se encuentran los problemas *Para ampliar* que ya no están asociados a ningún capítulo en concreto. Por último, están los *Problemas,* donde hay una mezcla de conceptos y es el alumnado el que debe identificar qué contenidos y procedimientos son necesarios en su resolución.

Finalmente, se encuentra una sección relacionada con el uso de las TICs donde se propone realizar una actividad en dos softwares: Excel (Microsoft) y Calc (Open Office). La actividad está relacionada con la experimentación sobre la Ley de los grandes números, utilizando las funciones de generación de números aleatorios.

A continuación, se revisa el contenido y el enfoque de cada capítulo:

1. Operaciones con sucesos
2. Regla de Laplace
3. Probabilidad condicionada
4. Regla de la suma y teorema de Bayes

1. Operación con sucesos

En este capítulo muestran la definición del espacio muestral y los diferentes tipos de sucesos, con la ayuda de un ejemplo y con los diagramas de Venn en los laterales. A continuación, muestra las diferentes operaciones con sucesos y explica la compatibilidad entre ellos. Sigue apoyándose en los diagramas de los laterales. Finalmente explica las leyes de Morgan.

La sensación es que queda bien explicado y son de gran ayuda los diagramas en los laterales y los ejemplos en cada apartado (figura 11).

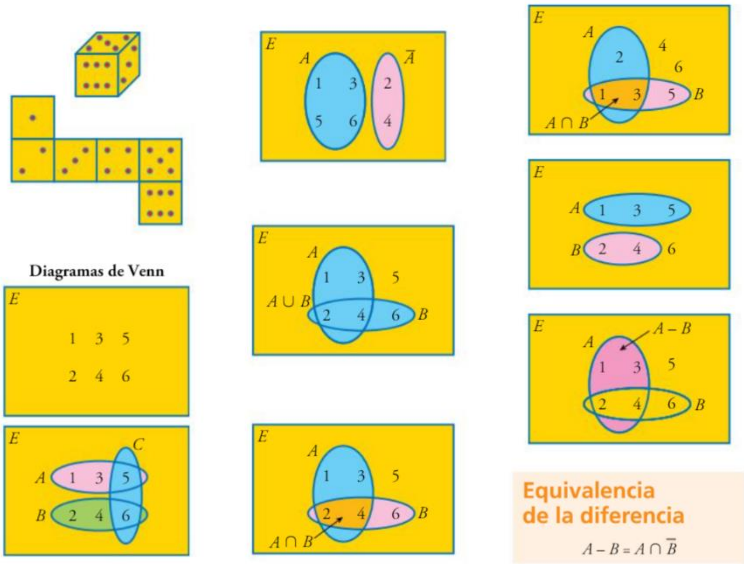


Figura 11. Diagramas en los laterales del libro de texto.

2. Regla de Laplace

Se presenta inicialmente la Ley de los grandes números para pasar posteriormente a utilizar la regla de Laplace. Este orden justifica la equiprobabilidad de los sucesos para validar el uso de la regla de Laplace.

El siguiente apartado muestra las propiedades de la probabilidad. No menciona explícitamente a Kolmogorov y a los 3 axiomas, sino que mezcla los axiomas con consecuencias, haciendo un listado de propiedades.

Después introduce el diagrama cartesiano para calcular espacios muestrales en experimentos compuestos. Le sigue el diagrama de árbol, encasillado en este mismo concepto. Y a continuación la tabla de contingencia, esta vez en un experimento sencillo.

Se tratan antes los experimentos compuestos, incluso mezclados con experimentos simples, sin haber hablado de la probabilidad condicionada.

3. Probabilidad condicionada

Introduce el concepto con el uso de ejemplos de experimentos en varias etapas, tipo extracción en urna con y sin reposición. Es un ejemplo típico y que ayuda mucho a su comprensión. No se introduce la probabilidad condicionada en experimentos simples, sino que aparece como un caso particular en ejemplos.

Se explica con buenos ejemplos la dependencia de sucesos y la probabilidad condicionada, siempre asociada a experimentos compuestos. A continuación, se muestra la consecuencia de la independencia en la probabilidad condicionada en el cálculo de la probabilidad de la intersección.

Entonces se hace el primer ejemplo de probabilidad condicionada en un experimento simple, con el uso de una tabla de contingencia (figura 12).

EJERCICIO RESUELTO

7 **En un hospital se han producido 60 nacimientos en una semana. De ellos, 35 son varones; y de estos, 21 tienen el pelo negro. Asimismo se ha observado que, de las niñas nacidas, 10 no tienen el pelo negro. Basándote en estos datos, razona si tener el pelo negro depende o no del sexo.**

	Niños (V)	Niñas (M)	Total pelo
Pelo negro (N)	21	15	36
Pelo no negro	14	10	24
Total niños/as	35	25	60

$$\left.\begin{array}{l} P(V \cap N) = 21/60 = 7/20 \\ P(V) \cdot P(N) = 35/60 \cdot 36/60 = 7/20 \end{array}\right\} \Rightarrow P(V \cap N) = P(V) \cdot P(N)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(M \cap N) = 15/60 = 1/4 \\ P(M) \cdot P(N) = 25/60 \cdot 36/60 = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$$

En ambos casos se obtiene el mismo valor, luego son independientes.

Figura 12. Ejercicio resuelto con table de contingencia.

Por último, se explica la probabilidad compuesta o regla del producto. Es realmente el cálculo de la probabilidad de la intersección de los sucesos expresada como el producto de las probabilidades que aparecen en las ramas de los árboles.

3.4 Regla del producto o de la probabilidad compuesta

La **regla del producto** o de la **probabilidad compuesta** dice que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos dependientes, entonces:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$

$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$

En la práctica, en un diagrama de árbol, la **regla del producto** o de la **probabilidad compuesta** dice que la probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.

EJERCICIO RESUELTO

8 **Halla la probabilidad de obtener dos copas al extraer sin devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.**

$$P(CC) = P(C) \cdot P(C/C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

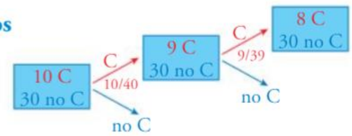


Figura 13. Regla del producto.

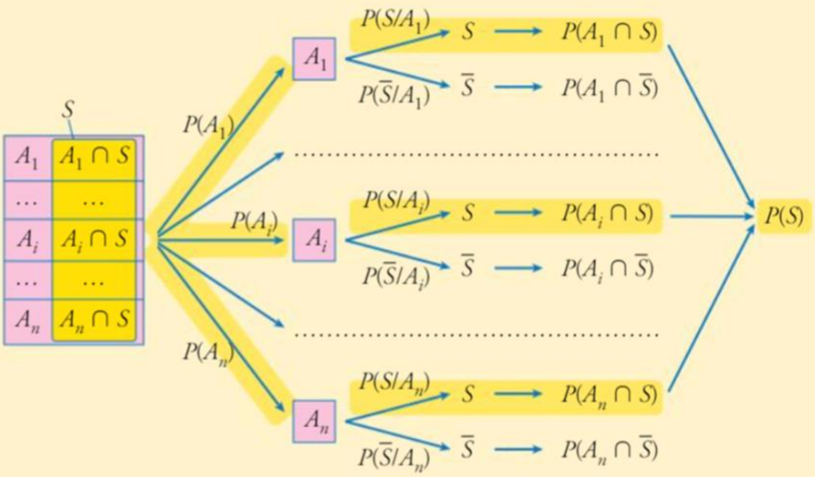
4. Regla de la suma y teorema de Bayes

Se trata del apartado del tema donde el contenido está más organizado. El uso del diagrama de árbol combinado con el diagrama de Venn mostrando una partición completa es muy acertado, además, la notación en el diagrama de árbol es detallada y precisa. Lo mismo sucede en la explicación del teorema de Bayes. Ver detalle en figura 14. Además hay un salto en la formalidad en las explicaciones de este capítulo.

4.1 Regla de la suma o de la probabilidad total

La **regla de la suma** o de la **probabilidad total** dice que si $A_1, A_2 \dots A_n$ es un sistema completo de sucesos y S es un suceso cualquiera para el que se conocen las $P(S/A_i)$, entonces:

$$P(S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)$$



En la práctica, en un diagrama de árbol, la **regla de la suma** o de la **probabilidad total** dice que la probabilidad de varios caminos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los caminos.

Se aplica la regla de la suma cuando se pregunta por la probabilidad total de un suceso, S, de la última experiencia y se conocen las probabilidades condicionadas de este suceso a los sucesos de la primera experiencia. Es decir, se debe calcular la probabilidad de un suceso al que se puede llegar por varios caminos del árbol.

Figura 14. Diagrama de Venn y de árbol simultáneos.

Como conclusión a este capítulo, se aprecia un gran trabajo detrás del diseño de este libro de texto. La colección de ejemplos, ejercicios y problemas es muy rica y variada. Desde el punto de vista del docente, es más interesante seleccionar pocos ejercicios y trabajarlos bien que ofrecer demasiados ejercicios al alumnado. Es labor del alumnado sacar provecho a dicha colección de ejercicios y problemas.

El grado de idoneidad epistémica respecto al nivel exigido en el currículo es muy alto. Todos los contenidos están tratados y claramente identificados. El rigor matemático y la notación también son adecuados al curso. La manera de organizar los contenidos y mostrarlos con ejemplos y diagramas en los laterales de las hojas facilitan al alumnado la comprensión y es de agradecer una estructura clara y repetida en todos los temas.

Como se ha comentado anteriormente, el único punto que queda más confuso es la forma en la que se trata la probabilidad condicionada y la probabilidad compuesta. Podría estar ordenado de una manera más clara. Hablar primero de condicionamiento en un experimento simple, para pasar a mostrar experimentos compuestos, donde puede haber condicionamiento o no.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En el presente capítulo se estudian las dificultades y los errores previsibles en el proceso de enseñanza y aprendizaje a lo largo de la unidad didáctica de probabilidad. Es vital realizar este tipo de análisis para poder anticiparse a situaciones predecibles, con objeto de estar preparado con recursos suficientes para superar las dificultades o trabajar con los errores de la mejor manera posible.

Durante el periodo del Practicum II, ha sido posible asistir a gran cantidad de clases impartidas por la docente titular, observando sus recursos ante dificultades y errores previsibles. Es una docente con larga trayectoria y con un conocimiento profundo de las dificultades intrínsecas que supone la adquisición de contenidos matemáticos. Es labor del docente estar preparado para estas dificultades y errores. Para ello, debe prever posibles interacciones, apoyándose tanto en su experiencia profesional como en los conocimientos emanados de la innovación e investigación didáctica, propias o ajenas.

7.1. Dificultades

Es necesario indicar la excepcionalidad del curso actual 2020/2021 ya que durante el curso anterior el confinamiento general limitó el desarrollo convencional de los procesos educativos. La mayoría de los centros no estaban preparados para impartir docencia no presencial y el alumnado tampoco. Otro factor clave es que el bloque de estadística y probabilidad, habitualmente se aborda en la etapa final del curso. En el caso de la clase de interés, el grupo de 2º de Bachillerato nocturno con Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, no es una excepción. Se ha podido comprobar mediante el Classroom del curso anterior que se trató el tema y se dio la teoría con apuntes escritos a mano, con ejercicios también a mano. Se decidió que la tercera evaluación no se calificara de manera convencional, sino que fuera un resultado de las dos anteriores, sin calificar los contenidos propios de la última evaluación. A todo esto, hay que añadir que hubo gente que no pudo seguir las clases por diferentes motivos (brecha digital, trabajo, salud, estado anímico…).

Por todo esto, se ha planteado la unidad didáctica con la necesidad de reforzar los contenidos asociados al curso anterior. Siempre es necesario realizar este repaso, recordamos el diseño en espiral del currículo y la importancia de situar al alumnado y el contenido en la zona de desarrollo próximo, pero este año ha cobrado todavía mayor importancia.

Viendo el contenido del libro y el currículo se ha confeccionado conjuntamente con la docente titular el temario que se detalla en la figura 15.

PROBABILIDAD
1. Definiciones previas
1.1. Experimento aleatorio
1.2. Espacio muestral
1.3. Tipos de sucesos
1.4. Operaciones con sucesos
2. Definición de probabilidad
2.1. Frecuentista
2.2. Laplace
2.3. Propiedades
3. Probabilidad condicionada
4. Probabilidad compuesta
5. Teorema de probabilidad total
6. Teorema de Bayes

Figura 15. Temario

En el punto 1 cabe esperar cierta dificultad al hablar de las operaciones con sucesos y las leyes de Morgan. No debería suponer un problema la unión y la intersección de sucesos, pero otras operaciones como el concepto de "resta de sucesos" es un poco abstracto. Si hay dos sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral y son compatibles, A–B es el suceso correspondiente a los elementos del suceso A que no estén en B, en realidad estamos hablando de la intersección entre A y $\overline{B}$. También se han detectado enunciados del tipo "que se cumpla A o que se cumpla B" para hablar de la unión, cuando no queda claro si "que se cumpla A y B a la vez" también está aceptado en ese caso.

En el punto 2, enfoque frecuencial de la probabilidad de un suceso elemental y la regla de Laplace no deberían suponer problemas. Se ha tratado en muchas ocasiones a lo largo de la ESO. El uso de todas las propiedades de la probabilidad (axiomática de Kolmogorov y consecuencias) tampoco debe suponer un problema. Es importante mostrar el caso de la probabilidad de la unión de sucesos compatibles como algo general y ver que el caso de incompatibles, la fórmula también es válida ya que la probabilidad de la intersección es nula por definición. Sin embargo, el uso de diferentes probabilidades complementarias puede producir confusiones, incluso por el simple hecho de encontrar enunciados muy enrevesados o mal redactados.

El punto 3 trata sobre probabilidad condicionada. Como se ha analizado en los libros una cierta confusión entre probabilidad condicionada y compuesta, se ha decido tratar la probabilidad condicionada primero en experimentos aleatorio simples. Es previsible que encuentren dificultades en expresiones del tipo "que se cumpla A y B", "que se cumpla A sabiendo que se cumple B". Es decir, pueden confundir la probabilidad condicionada con la probabilidad de la intersección. Es necesario encontrar ejemplos claros y poder usarlos en clase para que esto quede más nítido.

El punto 4 normalmente es mejor aceptado por el alumnado. Entienden muy bien el concepto de probabilidad condicionada en casos de experimentos compuestos donde un resultado en una etapa puede afectar al resultado de la siguiente. Ejemplos típicos de urnas, cartas, son perfectamente válidos para esto. Es habitual en este apartado que realicen diagramas de árbol de manera automática y pierdan la perspectiva del conocimiento matemático detrás de la aplicación del diagrama de árbol. En la sección final de este trabajo (en cuestiones abiertas) se plantea un método alternativo al uso de árboles para la resolución de este tipo de problemas. En el diagrama de árbol, la probabilidad de las ramas debe estar claramente indicada como probabilidad de la primera etapa (no condicionada) y probabilidad de las sucesivas etapas (condicionada o no). El resultado del camino, que a veces se le llama regla del producto, es precisamente la intersección de los sucesos, es decir, que se cumplan a la vez. Aquí es donde debemos mostrar que hay un uso de la probabilidad condicionada. También es previsible que confundan, desde el punto de vista léxico, por su proximidad fonética y de escritura, las palabras *suceso independiente* y *suceso incompatible*, y, desde el punto de vista conceptual, atendiendo a la interpretación de estos conceptos en el diagrama de árbol.

En el caso del teorema de la probabilidad total se debe prestar especial atención a la notación. Cabe esperar que haya confusiones con la notación en el proceso del cálculo de la probabilidad total. El concepto de sistema completo de sucesos es algo complicado de asimilar al principio. El uso de ejemplos claros facilita la explicación, junto el uso de diagramas de Venn y notación estricta. Ver que un suceso es la unión de las intersecciones de cada una de las particiones del sistema completo con el propio suceso es algo que conlleva cierta dificultad. Lo han visto en el punto 2 con dos sucesos, pero esta aplicación da lugar a confusiones. No obstante, hacerlo de manera muy rigurosa y con diagramas de Venn no es la mejor forma, es mejor una combinación de esto junto con un buen ejemplo.

El teorema de Bayes explicado de manera teórica también supone dificultades. El concepto de a priori y a posteriori es complicado. Si han entendido bien la probabilidad total, es buena idea usar un ejemplo para aplicar Bayes. Deben tener claro que la probabilidad de la intersección de dos sucesos es conmutativa y que se puede llegar a ella aplicando primero un suceso y la probabilidad condicionada del segundo o siguiendo el camino inverso. Es previsible que confundan la probabilidad condicionada con su inversa.

Como norma general ante un problema, sería interesante hacer alguna pregunta al alumnado para ver si ha comprendido tanto la situación como los contenidos. ¿Cuál es el experimento aleatorio? ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Son equiprobables los resultados?

7.2. Errores previsibles

A continuación, se detallan algunos de los errores previsibles dentro de cada punto del esquema propuesto y finalmente algunos generales.

1. Definiciones previas 2. Definición de probabilidad
   - Identificar la “resta” de sucesos como intersección del primero con el complementario del segundo.
   - Problemas con la interpretación de enunciados.
   - Aplicar leyes de Morgan

3. Probabilidad condicionada
   - Confusión entre probabilidad condicionada y probabilidad de la intersección
   - Problemas en el uso adecuado de tablas de contingencia, sin saber “qué denominador” utilizar (problemas en la aplicación de la condición)

4. Probabilidad compuesta
   - Uso adecuado de la notación en los diagramas de árbol
   - Problemas en calcular probabilidades complementarias que los enunciados evitan dar

5. Teorema de probabilidad total
- No identificar qué sucesos crean el sistema completo de sucesos del espacio muestral
- No utilizar todas las intersecciones necesarias en el cálculo
- Interpretar erróneamente las probabilidades condicionadas

6. Teorema de Bayes
- Confundir una probabilidad condicionada con su inversa
- No manejar bien la fórmula de la probabilidad condicionada

De manera general, el alumnado tiene poco cuidado con la notación, aunque se les ha recordado la importancia de indicar siempre el proceso que están realizando en la resolución de este tipo de problemas. Al realizar un diagrama de árbol o usar la tabla de contingencia, es muy útil expresar claramente qué probabilidad se está calculando (la intersección, la unión o condicionada) con una notación adecuada para detectar posibles fallos en el planteamiento de la resolución. Parte del alumnado ha demostrado en clases anteriores una tendencia a resolver problemas mediante operaciones sin indicar a qué corresponde cada operando, incluso a veces no indican ni qué es la solución. La notación en esta unidad no es demasiado compleja, pero es cierto que es una notación que únicamente se ve en este bloque durante la enseñanza secundaria.

Por otro lado, al utilizar sistemas o métodos en la resolución de problemas, se pierde la noción del concepto subyacente. Es interesante reflexionar acerca de los problemas planteados para evitar que se resuelvan de manera automática.

En cuanto a operaciones matemáticas, a lo largo de esta unidad didáctica se opera continuamente con fracciones y porcentajes (sumas, restas, multiplicación y división). No debería suponer problema realizar cualquier operación matemática implicada.

Capítulo 8
El proceso de estudio

En el actual capítulo se realiza una descripción del proceso de estudio llevado a cabo durante el Practicum II en el aula de 2º de Bachillerato (nocturno) en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Se trata de una asignatura obligatoria con 4 sesiones semanales con una duración de 45 minutos cada una.

La metodología utilizada es una mezcla entre clase magistral y dialógica. El tamaño de los grupos en el Bachillerato nocturno se presta a que haya un diálogo fluido entre el profesor y el alumnado. De esta manera, el docente tiene un *feedback* inmediato por parte del alumnado, pudiendo así adaptar el ritmo.

Para poder impartir esta unidad didáctica, se ha confeccionado una presentación siguiendo el esquema acordado. Estas diapositivas se han presentado en el monitor disponible en el aula, con especial cuidado de no adelantar contenido hasta que se ha explicado o planteado en la pizarra tradicional. En el anexo se muestra la presentación completa.

El capítulo consta de tres secciones. En la primera se muestra la distribución del tiempo de clase durante la unidad didáctica. En la segunda se detallan las actividades adicionales al libro de texto, que como se ha mencionado, han sido la mayoría. Finalmente se indica la tarea propuesta para el alumnado como trabajo autónomo.

8.1. Distribución del tiempo de clase

El número de sesiones utilizadas para esta unidad didáctica han sido 10 y una sesión introductoria (sesión 0). Estas sesiones no han sido seguidas. Tras la introducción, se realizó un examen correspondiente a temas anteriores y en las últimas sesiones se comenzó con el siguiente tema.

Se programó una sesión de repaso el día previo al cuestionario, negociando con el alumnado que solamente se haría si tenían dudas concretas.

En la tabla 3 se puede ver de forma sinóptica el calendario con el resumen de los contenidos tratado en cada una de las sesiones.

Tabla 3. Proceso de estudio.

Lunes 12/04	**Martes 13/04**	**Miércoles 14/04**	**Jueves 15/04**
Introducción bloque estadística. - Probabilidad - Estadística - Inferencia 0	Examen tema anterior	Primera clase de la UD. 1. Definiciones previas - Experimento aleatorio - Espacio muestral - Tipos de sucesos - Operaciones con sucesos 1	2. Definición de probabilidad - Frecuentista - Laplace - Propiedades 2
Lunes 19/04	**Martes 20/04**	**Miércoles 21/04**	**Jueves 22/04**
Repaso punto 2 Ejercicios 3	3. Probabilidad condicionada: mismo experimento Diagramas de Venn 4	3. Probabilidad condicionada: mismo experimento Tabla de contingencia 5	4. Probabilidad condicionada: experimento compuesto 6
Lunes 26/04	**Martes 27/04**	**Miércoles 28/04**	**Jueves 29/04**
5. Probabilidad total 7	5. Probabilidad total 6. Teorema de Bayes 8	Ejercicios 5 y 6 9	Tema nuevo. Inferencia Repaso distribución normal
Lunes 03/05	**Martes 04/05**	**Miércoles 05/05**	**Jueves 06/05**
Ejercicios distribución normal Repaso probabilidad 10	Realización del cuestionario		

A continuación, en las tablas 4a, 4b y 4c, se expone en detalle la distribución del tiempo en cada una de las sesiones dividido en secciones, indicando el responsable y el tipo de procesos de enseñanza y aprendizaje. Dentro de estos, tenemos tres grandes tipos:

- Magistral. El docente imparte la clase, tiene a cargo su desarrollo y la responsabilidad en el progreso de la actividad. Las fases de regulación y de institucionalización son típicamente magistrales.
- Dialógica. El docente pregunta a los estudiantes e incorpora sus respuestas en el discurso, modificando, en su caso, su discurso y la previsión hecha. Se evalúa el nivel de logro de los estudiantes y sus necesidades.
- Estudio autónomo. Organización de dinámicas en que cada estudiante debe afrontar una tarea. Permite un seguimiento más personalizado, ya para afrontar tareas más avanzadas (estudiantes con mayor rendimiento), ya para acompasar el ritmo y los aprendizajes a la clase (estudiantes con menor rendimiento).

Tabla 4a. Sesiones 0-4 de 10

Sesión 0: Lunes 12/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Breve repaso de bloques dados y pendientes.	2 min	Profesor	Dialógica
Introducción contenidos del bloque 5. Estadística, probabilidad e inferencia. Repaso general de contenidos.	40 min	Profesor	Magistral / dialógica
Sesión 1: Miércoles 14/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Cuestionario oral sobre conocimientos previos.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra. *1. Definiciones previas*	30 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios de operaciones con sucesos	10 min	Compartida	Dialógica
Sesión 2: Jueves 15/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Cuestionario oral sobre clase anterior.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra. *2. Definición de probabilidad*	30 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios de probabilidad	10 min	Compartida	Dialógica
Sesión 3: Lunes 19/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior.	5 min	Profesor	Dialógica
Ejercicios para trabajo individual y corrección de alguno en pizarra.	30 min	Alumnado	Dialógica
Sesión 4: Martes 20/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra. *3. Probabilidad condicionada: mismo experimento. Diagrama de Venn*	30 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios en la pizarra.	15 min	Compartida	Dialógica

Tabla 4b. Sesiones 5-8 de 10

Sesión 5: Miércoles 21/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra. *3. Probabilidad condicionada: mismo experimento. Tabla de contingencia*	25 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios en la pizarra.	15 min	Compartida	Dialógica
Sesión 6: Jueves 22/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra. *4. Probabilidad condicionada: experimento compuesto*	20 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios en la pizarra.	25 min	Compartida	Dialógica
Sesión 7: Lunes 26/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra combinada con varios ejemplos dialogados. *5. Probabilidad total*	35 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios en la pizarra.	5 min	Compartida	Dialógica
Sesión 8: Martes 27/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior.	10 min	Profesor	Magistral / dialógica
Explicación de contenidos mediante televisión y pizarra combinada con varios ejemplos dialogados. *6. Teorema de Bayes*	35 min	Profesor	Magistral / dialógica

Tabla 4c. Sesiones 9-10 de 10

Sesión 9: Miércoles 28/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe las dos clases anteriores.	10 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios con tiempo para trabajo individual y corrección de alguno en pizarra.	35 min	Alumnado	Dialógica
Sesión 10: Lunes 03/05			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso inicial sobe clase anterior. *Inferencia. Distribución normal**	10 min	Profesor	Magistral / dialógica
Ejercicios con tiempo para trabajo individual y corrección de alguno en pizarra.	35 min	Alumnado	Dialógica

* Pertenece a la siguiente unidad didáctica.

8.2. Actividades adicionales planificadas

Tal y como se ha comentado, no se sigue el libro en el día a día, por lo que ha sido necesario planificar las clases con introducciones o ejemplos buscados en diversas fuentes. Se han utilizado otros libros y también material propio. La idea es generar una necesidad antes de explicar el nuevo contenido, para que pueda dar respuesta a esa necesidad.

La presentación que se ha utilizado en clase es únicamente un apoyo a las explicaciones y muchas veces se ha utilizado a modo de esquema para que sepan dónde se encuadra cada clase. El alumnado debe tomar sus apuntes y generarse su propio contenido. Utilizando Classroom de Google, se ido publicando la presentación actualizada tras cada sesión. De manera que no han podido ver el contenido hasta que ha sido tratado en clase.

Aprovechando Classroom, se han ido publicando problemas similares a los vistos en clase, a modo de banco de ejercicios para trabajo autónomo. También se han publicado varios ejemplos de exámenes de evaluación de acceso a la universidad de los últimos años en Navarra (EvAU).

Otra de las prácticas habituales por la docente titular es repartir las actividades en el aula de manera que cada estudiante se encargue de una en concreto y posteriormente suba el resultado a Classroom. De esta manera, el resto del alumnado puede acceder a problemas resueltos y corregidos por el profesor.

8.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

Debido al perfil del alumnado (ver descripción de la población y muestra en la sección 9.1), se prevé que dispongan de poco tiempo en casa para la realización de la tarea. También es cierto que en 2º de Bachillerato ya no es habitual mandar tarea para que realicen en casa, tal y como se suele hacer en ESO. No se les manda tarea propiamente dicha, sino que se deja a su disposición problemas interesantes para que vayan trabajando. Es aquí cuando se detecta una diferencia importante entre quienes necesitan obtener el título oficial de Bachillerato, pero no tienen intención de ir a la prueba de evaluación de acceso a la universidad (EvAU), frente a los que sí tienen previsto realizar esta prueba.

Capítulo 9
Experimentación

En este capítulo se detalla la experimentación realizada con estudiantes de 2º de Bachillerato con motivo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la unidad didáctica de probabilidad. Se ha realizado un cuestionario a modo de examen para evaluar el aprendizaje. En una primera parte se explica el proceso de diseño del cuestionario, a continuación, se muestra el cuestionario y los comportamientos esperados, para finalmente comparar con los resultados reales.

En este proceso el docente planifica la intervención con un profesor experto externo, que no interviene en la actividad presencial de aula, pero si tanto en el diseño como en el seguimiento entre sesiones. El cuestionario final representa una prueba oficial para los estudiantes. Sin embargo, dada la especificidad del estudio, se establece que la puntuación obtenida puede tener una repercusión cualitativa, pero no forma parte de la evaluación sumativa ordinaria.

En cuanto al tipo de evaluación, se ha planteado este cuestionario con la misma rigurosidad que un examen, sin embargo, se decide que únicamente va a puntuar de manera positiva. No está pues dentro de la evaluación sumativa ya acordada entre la profesora titular y el grupo; así, se trata de un test formativo.

9.1. Población, muestra y diseño de la experimentación

Como ya se ha introducido, la modalidad de Bachillerato del centro donde se ha realizado la experimentación es el nocturno. Hay ligeras diferencias con el diurno, como, por ejemplo, la duración de las clases, la normativa para finalizar los estudios y obtener el título, pero, sobre todo, el perfil del alumnado.

Se trata de alumnado de mayor edad, que ha retomado su formación o que, por motivos justificados, no han podido realizar el bachillerato en su modalidad habitual. La mayor parte del alumnado no tiene como objetivo el acceso a la universidad, sino la obtención del título para promocionar en sus puestos de trabajo o para acceder a otro tipo de formación.

En el centro, únicamente hay un grupo de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales, por lo que la experimentación se ha centrado en dicho grupo. Las clases al finalizar el curso están muy reducidas debido al abandono por parte del alumnado, por lo que la muestra de esta experimentación se ha realizado en todo el alumnado que sigue acudiendo al curso. Se trata de un grupo con perfiles muy diferentes. Sólo 4 de ellos tienen intención de presentarse a la evaluación para el acceso a la universidad (EvAU). Por ello, estamos ante un grupo bastante heterogéneo en cuanto a sus origines, motivaciones y destinos. Hay casos en los que han retomado sus estudios pasado un tiempo, o que están trabajando y únicamente pueden acudir a clase en este horario. El nivel matemático en la clase también es heterogéneo, habiendo alumnado (mayoritariamente femenino) con un nivel adaptado a la etapa y otros que presentan mayores dificultades. Los motivos de esta disparidad también se pueden asociar a diferentes periodos de ausencia a las clases (motivos personales, enfermedad o incluso desmotivación).

Es cierto que la propia percepción que tiene el alumnado sobre el grupo es que se trata de un alumnado diferente al que se puede encontrar en otros centros y esto hace que haya una buena relación entre ellos, aportando y participando mucho en las clases. Hay casos que han podido acudir menos a clase y sin embargo tienen una motivación excepcional. En concreto, hay dos personas que en el tramo final están acudiendo a clase, pero que han tenido ausencias en largos periodos de tiempo, lo que se traduce en un déficit de adquisición de contenidos respecto al resto de la clase. Se espera que lleguen a tener dificultades para superar este cuestionario. Siendo conscientes de esta diversidad, el cuestionario se ha realizado con problemas diferentes y con niveles de acceso crecientes, para que siempre puedan comenzar a realizar los ejercicios, aunque no todos logren terminarlos por completo.

Llegado el día de la prueba, la realidad es que únicamente 5 personas han acudido a realizarla. La intermitencia en la asistencia a clase es habitual y los que han realizado la prueba son los que, mayoritariamente, acuden a clase más frecuentemente.

9.2. El cuestionario

El cuestionario tiene el formato de examen con 4 problemas de respuesta abierta correspondientes al tema de probabilidad. El objetivo del cuestionario es conocer el nivel de aprendizaje por el alumnado. Al finalizar el tema, se da una sesión del nuevo tema (inferencia) y la clase anterior al examen se realiza una sesión de repaso, donde el alumnado es instado en clases anteriores a traer preparadas dudas concretas.

Se han diseñado los problemas intentando contextualizar los casos para que puedan aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de las sesiones dedicadas a esta unidad didáctica. Los enunciados de los problemas son de creación propia, para no caer en ejercicios que hayan podido ver en el libro o incluso en pruebas de acceso a la universidad. Se ha trabajado en clase con varios problemas que han aparecido en los últimos años en las evaluaciones de acceso a la universidad (EvAU).

A continuación, se puede ver el cuestionario con sus 4 problemas. Debido a la escasez de tiempo disponible para la realización de la prueba por los estudiantes, se ha decidido que únicamente se enfrenten a 3 de los 4 problemas. Los dos primeros son obligatorios y deben escoger uno entre el 3 y el 4. Se ha dejado la elección entre estos dos porque son muy similares, donde hace falta aplicar teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Todos los problemas tienen varias cuestiones cuyo orden es lógico y responden a crecientes niveles de dificultad, de manera que la mayoría puedan cubrir varios de las cuestiones y únicamente si dominan el contenido puedan contestar a todas ellas.

Problema 1

En este problema se abordan el estándar de aprendizaje evaluable correspondiente a 1.1 (Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento) que a su vez están asociados a nuestros descriptores C3 (Definición y cálculo de probabilidad) y C4 (Probabilidad condicionada).

En detalle, deben dominar en concepto de la probabilidad de la unión de sucesos compatibles, las propiedades de la probabilidad (axiomática de Kolmogorov y consecuencias) y la probabilidad condicionada.

La última cuestión apela a que sepan identificar y diferenciar el concepto de compatibilidad y dependencia.

Problema 2

En este caso, se evalúa de nuevo el estándar 1.1. Los descriptores son los mismos que en anterior salvo que también está incluido el C5 (Probabilidad compuesta). Se les da un enunciado donde no está indicado explícitamente que no hay devolución.

Problema 3 y 4

Estos dos problemas atienden, además del estándar 1.1, al 1.2 (Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral) y al 1.3 (Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes). Los descriptores implicados ahora son C3, C4, C5, C6 (Teorema de Probabilidad Total) y C7 (Teorema de Bayes).

Test. PROBABILIDAD.

2º Bachillerato Ciencias Sociales
04/05/2021

Indicaciones: El problema 1 y el 2 son obligatorios. Del 3 y el 4 únicamente hay que hacer uno de ellos.

Problema 1 (4 puntos)

Tenemos los datos de los exámenes de Inglés y Matemáticas de un aula de 2º de Bachillerato con 27 alumnos. 12 han aprobado Inglés y 18 han aprobado Matemáticas. Solamente han aprobado los dos exámenes 8 personas. Escogiendo al azar una persona de esta clase:

a) ¿Qué probabilidad tiene de haber aprobado alguno de los exámenes? (0.5 puntos)

b) ¿Qué probabilidad tiene de haber suspendido los dos exámenes? (0.5 puntos)

c) Si escogemos al azar alguien de los que ha aprobado Inglés, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Matemáticas? (0.75 puntos)

d) Si escogemos al azar alguien que ha aprobado Matemáticas: ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Inglés? (0.75 puntos)

e) Si escogemos al azar alguien que ha suspendido Matemáticas: ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado Inglés? (0.75 puntos)

f) ¿Aprobar matemáticas y aprobar inglés son sucesos compatibles? ¿Y son dependientes? (0.75 puntos)

Problema 2 (3 puntos)

Tenemos una docena de huevos donde 4 de ellos están caducados. Queremos sacar dos huevos de la huevera. Calcula:

a) Probabilidad de que los dos estén bien. (0.75 puntos)
b) Probabilidad de que los dos estén caducados. (0.75 puntos)
c) Probabilidad de que uno esté caducado. (1,5 puntos)

Figura 16a. Cuestionario 1ª cara.

Problema 3 (3 puntos)

El personal de cierta empresa está constituido por un 50% de personal obrero, un 35% de personal técnico, siendo el resto personal administrativo. Se ha realizado una consulta a los trabajadores donde se les preguntaba si estarían dispuestos a reducir el número de horas laborales a cambio de una reducción proporcional en su nómina. Han contestado afirmativamente el 40% del personal obrero, el 30% del personal técnico y el 60% del personal administrativo. Si seleccionamos al azar un trabajador de dicha empresa, calcular la probabilidad de que:

a) Haya contestado afirmativamente. (0.75 puntos)

b) Pertenezca al personal administrativo y haya contestado afirmativamente. (0.75 puntos)

c) Pertenezca al personal administrativo si sabemos que ha contestado afirmativamente. (0.75 puntos)

d) Pertenezca al personal obrero si ha contestado negativamente. (0.75 puntos)

Problema 4 (3 puntos)

En cierto instituto se ha hecho una encuesta entre el alumnado (60 personas) de bachillerato para elegir una asignatura como su favorita. Podían escoger una entre Matemáticas, Lenguaje e Historia. En el instituto se ofrece la modalidad de Bachillerato diurno y nocturno y se sabe que hay el doble de personas en el diurno que en el nocturno. Hemos comprobado que en el diurno han elegido 10 alumnos Matemáticas y 20 Lenguaje. En el nocturno han elegido 10 Matemáticas y 5 Historia. Escogiendo una persona al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Siendo del diurno haya elegido Matemáticas. (0.25 puntos)
b) Siendo del nocturno haya elegido Matemáticas. (0.25 puntos)
c) Haya elegido Matemáticas. (0.75 puntos)
d) Haya elegido Historia. (0.75 puntos)
e) Sabiendo que ha elegido Historia, sea del nocturno. (1 punto)

Figura 16b. Cuestionario 2ª cara.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

En este apartado se analizan los resultados esperados en el cuestionario y los motivos que hacen que sean predecibles. El análisis se realiza sobre cada uno de los problemas planteados. Las soluciones que se proponen son consistentes con las técnicas y notaciones utilizadas en el proceso de estudio. Como ya se ha mencionado, en el apartado de cuestiones abiertas se ha propuesto una resolución alternativa a los problemas 2 y 3.

Problema 1

Solución:

$$P(I) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}; \qquad P(M) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}; \qquad P(I \cap M) = \frac{8}{27}$$

a) $\mathrm{P(I \cup M) = P(I) + P(M) - P(I \cap M)} = \frac{12+18-8}{27} = \frac{22}{27}$

b) $\mathrm{P(\overline{I \cup M}) = 1 - P(I \cup M)} = 1 - \frac{22}{27} = \frac{5}{27}$

c) $\mathrm{P(M|I)} = \frac{\mathrm{P(I \cap M)}}{\mathrm{P(I)}} = \frac{8/27}{12/27} = \frac{8}{12}$

d) $\mathrm{P(I|M)} = \frac{\mathrm{P(I \cap M)}}{\mathrm{P(M)}} = \frac{8/27}{18/27} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

e) $\mathrm{P}(I \cap \overline{\mathrm{M}}) = \mathrm{P(I) - P(I \cap M)} = \frac{12}{27} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$

$$\mathrm{P(I|\overline{M})} = \frac{\mathrm{P(I \cap \overline{M})}}{\mathrm{P(\overline{M})}} = \frac{4/27}{1 - 18/27} = \frac{4}{9}$$

f) Como $\mathrm{P(I \cap M)} \neq 0$, son sucesos compatibles
Como $\mathrm{P(I|M)} = P(I)$, son sucesos independientes

Tal como se ha comentado, se trata de un problema sobre cálculo de probabilidades, aplicación de la axiomática de Kolmogorov y probabilidad condicionada. Como cualquier problema tiene diferentes formas de ser resuelto. Una sería mediante una tabla de contingencia, es relativamente sencillo construirla con los datos del enunciado. Si eligen este camino, van a tener a mano las frecuencias absolutas de todas las intersecciones posibles. Es un método que puede hacer que realicen bien la mayoría de las preguntas. Otra opción es realizar diagramas de Venn, incluyendo las frecuencias absolutas en el diagrama. Alguna vez se ha utilizado este método en clase y también facilita identificar dónde está cada individuo. La tercera opción es la más abstracta y teórica, que es como se ha resuelto en este trabajo.

Hay cierto alumnado que son muy intuitivos, pero poco formales. Se espera ellos elijan la opción del diagrama de Venn con las frecuencias escritas en este. El error que se espera en los que escojan esta opción es en el cálculo de probabilidades condicionadas. Se tiende a dividir los elementos de un suceso entre los que son únicamente de dicho suceso y los que están en la intersección con el otro suceso, de manera que el valor total del primer suceso no está explícito en el diagrama.

Los que escojan la opción de la tabla de contingencia van a tener toda la información a simple vista (en forma de frecuencia absoluta). De nuevo, se espera que de tener problemas sea en la parte de la probabilidad condicionada.

Quienes escojan la opción más abstracta se espera que sea el alumnado que mejor domina el tema, o por lo menos de manera más formal. Estos no deberían tener problemas en aplicar la probabilidad condicionada.

La pregunta e) *probabilidad de aprobar Inglés habiendo suspendido Matemáticas* hace necesario calcular la probabilidad de suspender Matemáticas, que no está explícitamente, y sobre todo la probabilidad que sólo haya aprobado Inglés, es decir, de la intersección $I \cap \overline{M}$. Deben darse cuenta de que esa probabilidad es precisamente $P(I \cap \overline{M}) = P(I) - P(I \cap M)$. Quienes hayan utilizado tabla de contingencia o diagrama de Venn con frecuencias, tienen más sencillo encontrar este valor.

Las preguntas teóricas del final se asocian al estudio y comprensión de la teoría vista en clase. Si tienen claro los conceptos lo aplicarán bien. La compatibilidad se ve de manera inmediata y la dependencia la pueden estudiar con los datos ya obtenidos en aportados anteriores.

Este ejercicio debería ser bien resuelto por la mayoría del alumnado. Es un ejercicio exigible incluso en cursos inferiores. Como se ha comentado en capítulos anteriores, el efecto del confinamiento a final del curso anterior aflora en el nivel general sobre probabilidad.

Problema 2

Solución: No hay devolución

a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = (8/12) \cdot (7/11) = 56/132$

b) $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) = (4/12) \cdot (3/11) = 12/132$

c) $P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(C_2|B_1) + P(C_1) \cdot P(B_2|C_1)$
$= (8/12) \cdot (4/11) + (4/12) \cdot (8/11) = (32+32)/132 = 64/132$

Alternativa:
P(uno de cada) = 1 – (P(los dos bien) + P(los dos caducados))

Este segundo problema trata sobre probabilidad condicionada y compuesta. No está explícitamente escrito en el enunciado, pero se trata de una experiencia de dos etapas de extracción sin devolución.

Se espera que este tipo de problemas lo planteen mediante un diagrama de árbol, indicando en cada rama la probabilidad asicada. Durante las sesiones donde se ha practicado este tipo de problemas, el alumnado ha mostrado predilección por el uso de diagramas de árbol en vez del uso de diagramas de Venn. En las ramas no indican con una notación clara a qué probabilidad corresponde, es decir, probabilidad de la primera extracción y probabilidad de la segunda (condicionada o no al resultado de la primera). También es posible que no usen subíndices o alguna notación que ayude a identificar si el resultado es de la primera o de la segunda extracción. Si no lo hacen de manera clara, puede que en el apartado c) encuentren dificultades.

Es un ejercicio donde se predicen buenos resultados en general.

Problema 3

Solución:

a) $P(S) = P(S \cap O) + P(S \cap T) + P(S \cap A) = P(O) \cdot P(S|O) + P(T) \cdot P(S|T) + P(A) \cdot P(S|A) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}3 + 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}395$

b) $P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S|A) = 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}09$

c) $P(A|S) = P(A \cap S)/P(S) = 0{,}09/0{,}395 \simeq 0{,}23$

d) $P(O \cap N) = P(O) \cdot P(N|O) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$
$P(O|N) = P(O \cap N)/P(N) = 0{,}3 / (1- 0{,}395) \simeq 0{,}496$

Este problema está basado en los teoremas de probabilidad total y de Bayes. Como la información está dada en porcentajes, se espera que afronten su resolución mediante un diagrama de árbol. Deben identificar que la partición total del espacio muestral se da entre el tipo de personal de la empresa, para una vez que estén cada tipo ver la probabilidad de respuesta afirmativa o negativa.

La primera cuestión es la aplicación directa de la probabilidad total y se espera que la mayoría sepan calcularla. La segunda cuestión es directamente el resultado de una de las ramas. Se ha preguntado para ver si son capaces de diferencia la probabilidad de la intersección (administrativo y contestar afirmativamente) frente a probabilidad condicionada (conteste afirmativamente siendo administrativo). Se espera que la mayoría vea clara esta diferencia, por lo que se ha podido apreciar durante la impartición de la unidad. La cuestión c) es la aplicación de Bayes, donde deben contestar a: “sabiendo que ha contestado afirmativamente, qué probabilidad hay de que el origen sea de una de las fuentes en concreto”. Es aplicación directa y también se esperan buenos resultados, aunque quizás menos que en el uso de la probabilidad total. Por último, la cuestión d) también consiste en la utilización del Teorema de Bayes, pero en este caso deben calcular la probabilidad total de la respuesta negativa. Si han planteado bien el diagrama de árbol y calculan la probabilidad de la intersección entre obrero y responder negativamente, podrán responder correctamente. Se espera menor tasa de acierto en esta pregunta.

Problema 4

Solución:

a) $P(M|D) = P(M \cap D)/P(D) = (10/60)/(40/60) = 0{,}25$

b) $P(M|N) = P(M \cap N)/P(N) = (10/60)/(20/60) = 0{,}5$

c) $P(M) = P(M \cap D) + P(M \cap N) = (10/60) + (10/60) = 20/60 \simeq 0{,}33$

d) $P(H) = P(H \cap D) + P(H \cap N) = (10/60) + (5/60) = 15/60 = 0{,}25$

e) $P(N|H) = P(H \cap N)/P(H) = (5/60)/(15/60) = 5/15 \simeq 0{,}33$

De nuevo, se trata de un problema de probabilidad total y Bayes. Es por esto que deben elegir uno de los dos para su resolución. En este caso, como se dan frecuencias absolutas, hay dos variantes de resolución esperadas: uso de diagrama de árbol o uso de tabla de contingencia.

Las dos primeras cuestiones son acerca de la interpretación del enunciada y comprensión de la probabilidad condicionada. Se espera que la mayoría puedan responder correctamente a ambas cuestiones. La c) y la d) es de aplicación directa del teorema de probabilidad total, pero de nuevo, se espera mayor acierto en el caso del uso de la tabla de contingencia. La pregunta e) es aplicación del teorema de Bayes. Si han usado la tabla, deberán aplicar bien las restricciones y tendrán inmediatamente el resultado usando la regla de Laplace. Si han usado el árbol, deberán aplicar Bayes.

Se esperan mejores resultados en este ejercicio que en el anterior. Es un ejercicio de resolución más rápida que el 3. Es también un buen entrenamiento el hacerles elegir entre dos problemas y que puedan identificar cuál es más sencillo o rápido de resolver. Precisamente se les ha dejado escoger entre dos ejercicios muy similares en cuanto al contenido matemático involucrado, por lo que deben leerlo detenidamente y elegir. La diferencia entre ellos es que el problema 3 está planteado con porcentajes y el 4 con frecuencias absolutas. Por cómo se han afrontado este tipo de problemas durante las sesiones de clase, el primero está más enfocado a ser resuelto con un diagrama de árbol y el segundo con tabla de contingencia.

Como comentario general, se esperan buenos resultados en el cuestionario. Estudiadas las diferencias en el alumnado, hay dos casos identificados donde espera dificultades en la superación del cuestionario, pero no en el resto de la clase. Hay casos en los que usan, normalmente con acierto, la intuición. En estos casos hay un déficit de interés en utilizar la notación adecuada. Pretenden dar resultados sin realizar el esfuerzo de indicar qué están aplicando e incluso una notación mínima para poder seguir su planteamiento. Se recuerda en la clase anterior y en el propio día del examen, que deben indicar qué están haciendo en cada momento.

9.4. Resultados

En esta sección se analizan los resultados obtenidos en el cuestionario. Como el diseño del cuestionario dejaba claro la puntuación de cada apartado, se ha corregido cada prueba teniendo un examen resuelto al lado para identificar fallos o ausencias. La puntuación de cada cuestión se da por válida completamente si el resultado es correcto y hay un mínimo de notación indicando qué está calculando. Si el resultado está correcto, pero no hay notación será penalizado. Si la notación es correcta y usa valores no adecuados, se le puntuará una pequeña parte.

A continuación, se muestra la tabla 5 con los resultados de cada estudiante en cada uno de los problemas y apartados.

Tabla 5. Resultados del cuestionario.

	Problema 1						Problema 2		
	a	b	c	d	e	f	a	b	c
	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	1,5
EST1			0,75	0,75		0,5			
EST2	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75		0,75	0,75	1,5
EST3			0,75	0,75			0,75	0,75	
EST4						0,25			
EST5									

	Problema 3				Problema 4					Notas finales
	a	b	c	d	a	b	c	d	e	
	0,75	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25	0,75	0,75	1	
EST1										2
EST2	0,75	0,75	0,75	0,75						9,25
EST3	0,4	0,4								3,8
EST4					0,25					0,5
EST5					0,25					0,25

En cuanto al análisis de los resultados desde el punto de vista numérico-sumativo, ha aprobado una persona (con muy buena nota) y el resto han suspendido. Tres de ellos con notas muy bajas.

El problema 1 es el que más puntuación ha obtenido entre el alumnado. Ser el primer problema ha influido en que todos lo intentaran resolver.

En el segundo problema ha habido 3 personas con puntuaciones de 0. Analizando después el enunciado de dicho problema, pudo no quedar claro que se podría resolver como un problema de dos extracciones. Extraer dos huevos es lo mismo que extraer uno y después el otro, sin devolución. Se les ofreció ayuda durante la prueba para resolver dudas, pero no hubo muchas preguntas.

Entre los dos últimos problemas, tres de los 5 han optado por resolver el ejercicio 3. Eran muy similares ambos, pero han escogido el que está en primera posición. Las dos personas que intentaron resolver el ejercicio 4 no llegaron a construir la tabla de contingencia y no pudieron resolverlo.

A continuación, se realiza un análisis sobre diferentes variables de interés en la resolución de cada uno de los problemas del cuestionario. Para facilitar dicho análisis se han confeccionado unas tablas donde se muestras las correspondientes variables y el comportamiento de cada uno de los estudiantes.

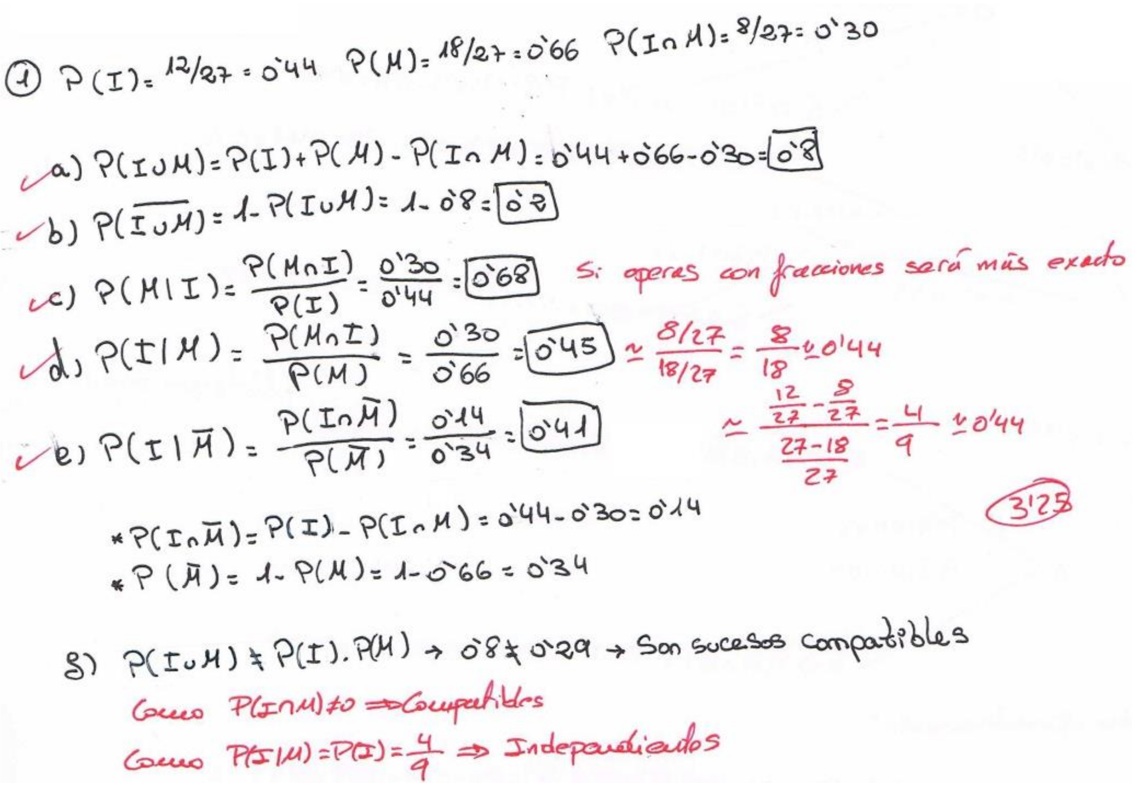
Tabla 6. Estudios de variables en el problema 1.

Problema 1		EST1	EST2	EST3	EST4	EST5
V1.1	Tabla de contingencia	✓			✓	
V1.2	Diagrama de Venn con frecuencias	✓		✓	✓	✓
V1.3	Diagrama de Venn sin frecuencias					
V2	Uso correcto notación		✓	✓		
V3	Uso correcto probabilidad de la unión		✓			
V4	Uso correcto probabilidad condicionada	✓	✓	✓		
V5	Apartado e) correcto		✓			
V6	Concepto sucesos compatibles	✓				
V7	Concepto sucesos dependientes					
V8	Errores en operaciones		✓			

Aunque mayoritariamente se ha optado por el uso de diagrama de Venn con frecuencias absolutas, la mitad lo planteó bien y la otra mitad mal y, de hecho, la única persona que tenía el ejercicio bien fue la que no usó ningún diagrama ni tabla. Ninguno de los estudiantes ha utilizado el diagrama de Venn de manera abstracta (sin marcar las frecuencias absolutas). En cuanto a la notación, dos estudiantes han usado la notación de una mejor manera y esto se ha traducido en un mejor resultado general en este ejercicio y también en el examen. Se ha tratado la resolución del apartado e) por separado porque suponía un manejo superior para poder resolverlo, y únicamente una persona lo ha hecho correctamente.

Nadie ha contestado correctamente a la pregunta sobre la independencia de sucesos. De hecho, es la única pregunta que ha fallado el estudiante EST2.

En la figura 17 se muestra la resolución por parte de EST2, que es la mejor resolución presentada (las anotaciones en rojo son las realizadas por el docente en todas las capturas que se muestran en este apartado). No usa diagramas ni tablas, pero la notación está muy cuidada e indica la fórmula que utiliza en cada caso, antes de utilizar los valores concretos. Particularmente se observa que ha utilizado números decimales en vez dejar los resultados en fracciones. Esto ha podido ocasionar que no vea a simple vista que se trata de sucesos independientes al no poder comparar los resultados.



① $P(I)=12/27=0'44$ $P(M)=18/27=0'66$ $P(I\cap M)=8/27=0'30$

a) $P(I\cup M)=P(I)+P(M)-P(I\cap M)=0'44+0'66-0'30=\boxed{0'8}$

b) $P(\overline{I\cup M})=1-P(I\cup M)=1-0'8=\boxed{0'2}$

c) $P(M|I)=\frac{P(M\cap I)}{P(I)}=\frac{0'30}{0'44}=\boxed{0'68}$ Si operas con fracciones será más exacto

d) $P(I|M)=\frac{P(M\cap I)}{P(M)}=\frac{0'30}{0'66}=\boxed{0'45}\simeq\frac{8/27}{18/27}=\frac{8}{18}\simeq 0'44$

e) $P(I|\bar{M})=\frac{P(I\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{0'14}{0'34}=\boxed{0'41}$ $\simeq\frac{\frac{12}{27}-\frac{8}{27}}{\frac{27-18}{27}}=\frac{4}{9}\simeq 0'44$

3'25

$*P(I\cap\bar{M})=P(I)-P(I\cap M)=0'44-0'30=0'14$

$*P(\bar{M})=1-P(M)=1-0'66=0'34$

g) $P(I\cup M)\neq P(I).P(M)\rightarrow 0'8\neq 0'29\rightarrow$ Son sucesos compatibles

Como $P(I\cap M)\neq 0\Rightarrow$ Compatibles

Como $P(I|M)=P(I)=\frac{4}{9}\Rightarrow$ Independientes

Figura 17. Solución de EST2 al problema 1.

Tabla 7. Estudios de variables en el problema 2.

Problema 2		EST1	EST2	EST3	EST4	EST5
V1	Diagrama de árbol		✓			
V2	Indicar probabilidades en las ramas		✓			
V3	Notación en las probabilidades de las ramas		✓			
V4	Notación en el final del camino		✓	✓		
V5	Uso de identificación para 1ª y 2ª extracción		✓			
V6	Apartado c) correcto		✓			

El problema 2 se había planteado de manera que fuera el más accesible para todos. Se trata de un problema de experimento compuesto con probabilidad condicionada en la segunda extracción. Como se ha mencionado, quizás sea problema de que el planteamiento pudiera dar lugar a confusión, pero la realidad es que únicamente dos estudiantes han sabido cómo comenzar a resolverlo. De nuevo, EST2 lo ha realizado de manera perfecta, mediante el uso de diagrama de árbol y con un uso correcto de notación. En la figura 18 se muestra la solución dada por EST3. Ha identificado que se trata de un experimento compuesto por dos etapas, donde el resultado de la primera afecta a la segunda, pero no ha planteado el problema usando el diagrama de árbol ni responde a las probabilidades solicitadas. Únicamente ha indicado las diferentes probabilidades en cada etapa, en la segunda dependiendo del primer resultado. No ha utilizado notación adecuada.

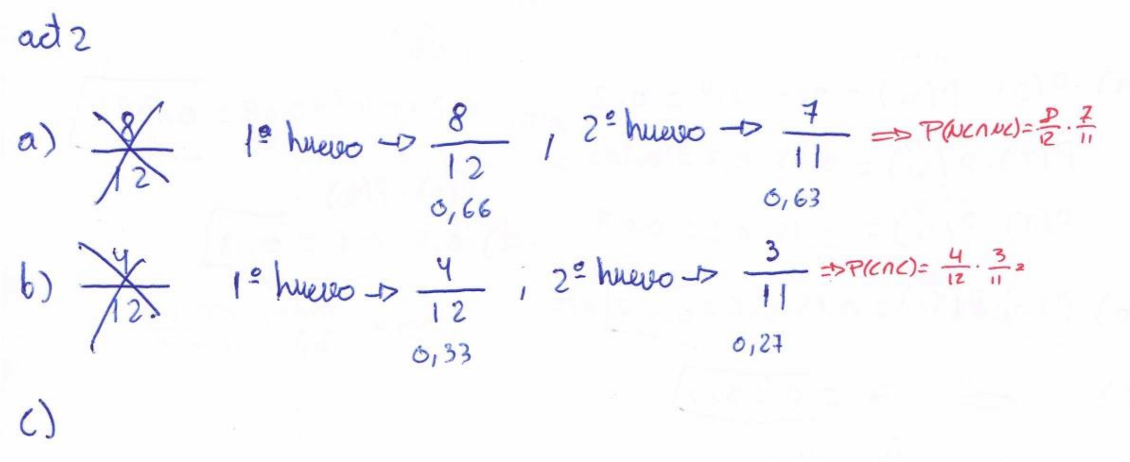


Figura 17. Solución de EST2 al problema 1.

Tabla 8. Estudios de variables en el problema 3.

Problema 3		EST1	EST2	EST3	EST4	EST5
V1	Diagrama de árbol	✓	✓	✓		
V2	Uso correcto de notación		✓			
V3	Uso correcto de la probabilidad condicionada		✓	✓		
V4	Uso correcto Teorema probabilidad total		✓	✓		
V5	Uso correcto Teorema de Bayes		✓			
V6	Errores en operaciones					

De la elección entre el problema 3 y 4, el 3 es el que más personas han decidido hacer, aunque únicamente dos de ellas han puntuado algo. Podemos ver cómo todos los que han intentado resolverlo han planteado un diagrama de árbol. De las dos personas que han puntuado, quien ha utilizado mejor la notación es quien ha conseguido resolver el aparatado del teorema de Bayes, de nuevo EST2. El estudiante EST3 ha llegado a hacer bien hasta la probabilidad total, aunque con un uso incorrecto de notación. En la siguiente figura se muestra la solución de dicho estudiante.

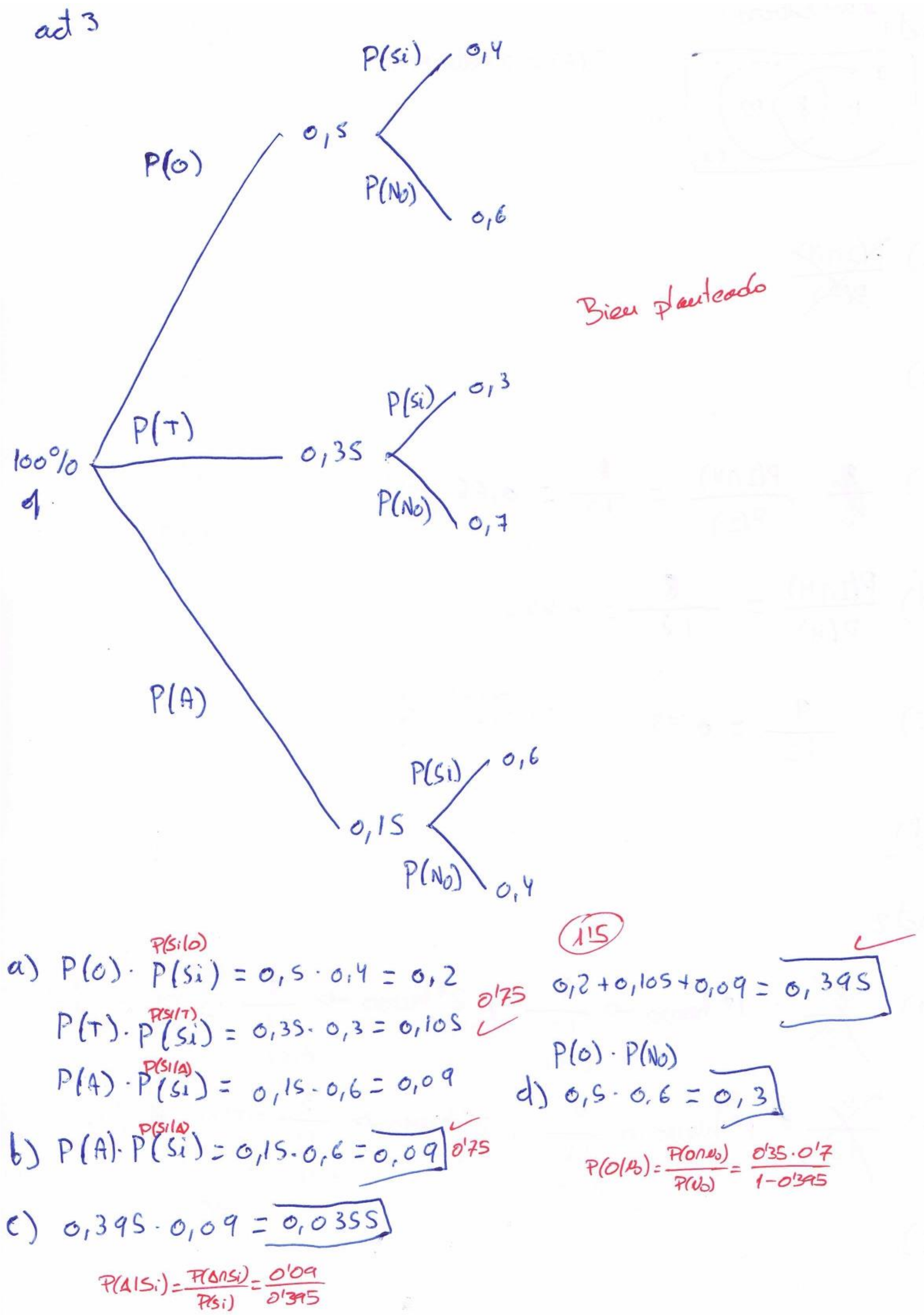


Figura 18. Solución de EST2 al problema 3

Se observa cómo el estudiante ha planteado el árbol de manera adecuada, indicando las probabilidades en las ramas. En todas las probabilidades condicionadas ha omitido el uso del símbolo "|X" donde X es el suceso correspondiente a la condición (O, T ó A). Ha calculado correctamente las probabilidades de la intersección entre respuesta afirmativa y cada uno de los tres sucesos para poder calcular la probabilidad de respuesta afirmativa, mediante el teorema de probabilidad total, sin embargo, no ha indicado qué fórmula o teorema está utilizando. La pregunta b) la ha realizado correctamente, salvo, de nuevo, por un mal uso de la notación. Finalmente vemos cómo no ha sabido aplicar el teorema de Bayes. Es posible que no domine el concepto de probabilidad condicionada y su expresión $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ porque ha usado el diagrama de árbol sin indicar este concepto y no ha sido capaz de resolver Bayes.

Tabla 9. Estudios de variables en el problema 4.

Problema 4		EST1	EST2	EST3	EST4	EST5
V1.1	Tabla de contingencia				✓	✓
V1.2	Diagrama de árbol					
V2	Uso correcto de notación					
V3	Uso correcto de la probabilidad condicionada					
V4	Uso correcto Teorema probabilidad total					
V5	Uso correcto Teorema de Bayes					
V6	Errores en operaciones					

Únicamente dos personas han intentado resolverlo y no han podido comenzar porque no tenían bien el planteamiento, En ambos casos han planteado el uso de una tabla de contingencia, pero no han podido rellenarla por completo, por lo que no han podido continuar con la resolución. Á continuación se muestran los planteamientos de EST4 y EST5 en las figuras 19a y 19b respectivamente.

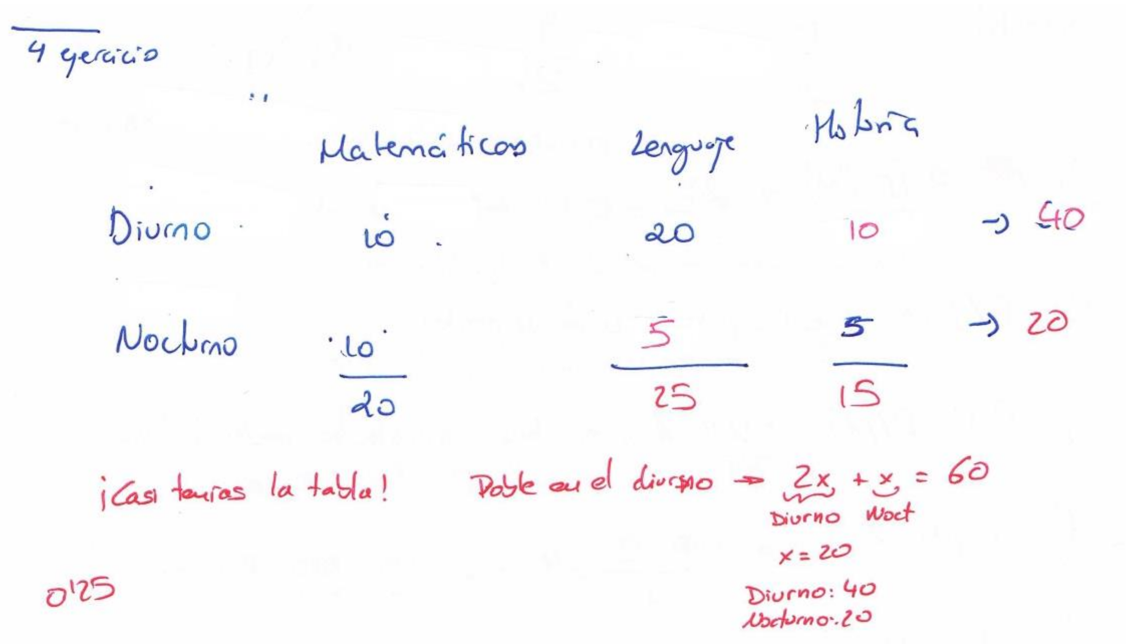
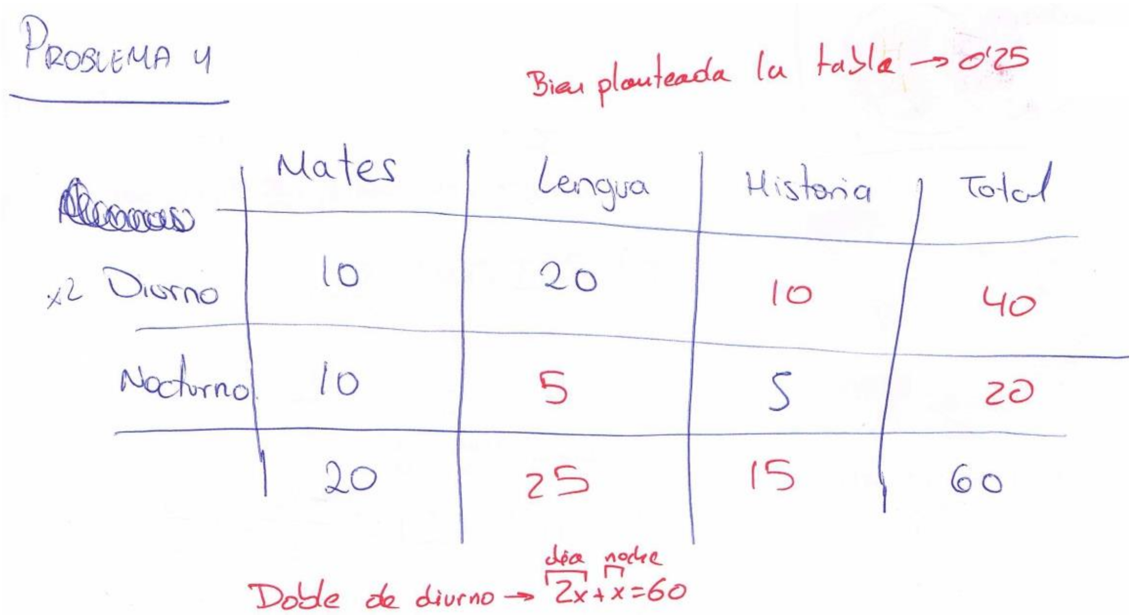


Figura 19a. Planteamiento de EST4 al problema 4.


PROBLEMA 4

Bien planteada la tabla → 0'25

	Mates	Lengua	Historia	Total
x2 Diurno	10	20	10	40
Nocturno	10	5	5	20
	20	25	15	60

Doble de diurno → $\overbrace{2x}^{\text{día}} + \overbrace{x}^{\text{noche}} = 60$

Figura 19b. Planteamiento de EST5 al problema 4.

En los dos casos han indicado los totales en los bordes de la tabla, quedando más claro en el estudiante EST5. Se planteó el enunciado indicando todos los datos necesarios, pero no de manera directa, sino que debían realizar pequeñas operaciones para el cálculo de las personas que pertenecían al Bachillerato nocturno y al diurno (60 = 2x + x).

9.5. Discusión de los resultados

Los resultados del cuestionario han sido muy variados y dispares, mostrando la realidad de la clase. Un estudiante lo ha hecho casi perfecto, dos lo han hecho obteniendo menos de un 1, otro un 2 y otro cerca del 4. EST1 falta habitualmente a clase y se ha perdido bastantes sesiones de esta unidad didáctica. EST3 es un estudiante que está trabajando más en esta recta final del curso, pero que le falta un poco para poder aprobar los exámenes en la primera oportunidad. Va con un nivel algo inferior a lo deseado, pero últimamente va mejorando y suele aprobar en recuperaciones. EST4 y EST5 van siempre juntos y se ve que trabajan a un nivel parecido. Han mostrado interés durante las sesiones, por lo que se esperaba un mejor resultado. EST2 trabaja y participa mucho en clase, trae buen nivel acompañado de buenos resultados académicos desde el principio del curso.

Como también se ha mencionado, era un cuestionario presentado al alumnado como un test cuyo objetivo era medir su aprendizaje hasta ese momento y que en ningún caso inflaría negativamente en sus calificaciones. También se ha dado la circunstancia de que tenían exámenes sumativos de otras asignaturas y han comentado la necesidad de darles prioridad. La conclusión es que únicamente dos estudiantes le han dado importancia al test, uno de ellos obteniendo muy buen resultado (EST2) y el otro suspendiendo, pero teniendo nociones básicas y que con un poco más de trabajo va a conseguir superar (EST3).

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

Durante este trabajo fin de máster se ha analizado el concepto de probabilidad y su proceso de estudio de la probabilidad en 2º de Bachillerato (nocturno) en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

En la primera parte del trabajo se ha realizado un análisis longitudinal del tratamiento de la probabilidad desde Educación Primaria hasta finalizar Bachillerato. Para ello, se ha estudiado a fondo el contenido dentro del currículo en estas etapas educativas y también se han analizado los libros de texto utilizados en dichos cursos. Como las circunstancias del Practicum II han hecho que el curso donde realizar la experimentación haya sido 2º de Bachillerato, se han analizado los libros de texto desde 3º de ESO. En 4º de ESO se han estudiado las dos variantes (matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas). El objetivo de esta parte es realizar un estudio longitudinal en el contexto educativo actual basado en el currículo vigente y en los libros de texto y asimismo contrastar la coherencia entre el diseño de este currículo y los libros de texto. Es necesario conocer la evolución del contenido matemático para diseñar los procesos de estudio y aprendizaje de un curso determinado, teniendo claro el punto de partida y los objetivos.

La segunda parte se ha centrado en el proceso de enseñanza de la probabilidad en el 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Para ello, se ha realizado el análisis del libro de texto que el centro tiene como referencia para valorar su idoneidad. Una vez analizado el libro y diseñado el proceso de enseñanza y aprendizaje, se ha atendido a las dificultades y errores previsibles en dicho proceso. Posteriormente se detalla el proceso mostrando la distribución del tiempo en las diferentes sesiones con sus respectivas actividades. Finalmente, se ha llevado a cabo una experimentación con el grupo y se ha utilizado como instrumento de toma de datos un cuestionario. Se explica el proceso de diseño del cuestionario y los resultados esperados y obtenidos.

Conclusiones

Las conclusiones alcanzadas son tres, referidas cada una de ella a aspectos diferentes:

- *Contrato didáctico*. Uso y función de los diagramas de árbol en el contexto educativo.
- *Leguaje matemático*. Importancia de la notación y rigurosidad matemática como herramienta de clasificación de la actividad matemática de los estudiantes.
- *Dimensión mediacional*. Uso real de recursos informáticos en el aula.

Diagramas de árbol

El uso de diagramas de árbol acompaña al proceso de enseñanza desde 2º de ESO, primer curso de Educación Secundaria donde se aborda la probabilidad, hasta finalizar Bachillerato. En el currículo aparece de manera explícita como una técnica de recuento, en ocasiones acompañado de otras opciones como la tabla de contingencia. En la tabla XX se muestra su presencia a lo largo de los diferentes cursos. Se presenta entonces como una herramienta sugerida por el currículo y tal y como se ha podido constatar a lo largo del presente trabajo, se utiliza en el aula tanto por decisión de los docentes como por la presencia en los libros de texto.

Tabla 10. Diagramas de árbol en el currículo

	CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
2º ESO	Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y **diagramas de árbol** sencillos.	2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.	2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o **diagramas en árbol** sencillos.
3º ESO Acad.	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. **Diagramas de árbol** sencillos. Permutaciones, factorial de un número.	4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los **diagramas de árbol**, identificando los elementos asociados al experimento.	4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o **árboles** u otras estrategias personales.
4º ESO Acad.	Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y **diagramas de árbol** para la asignación de probabilidades.	2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los **diagramas de árbol**, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los **diagramas de árbol** o las tablas de contingencia.
4º ESO Aplic.	Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. **Diagrama en árbol.**	3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los **diagramas de árbol** y las tablas de contingencia.	3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, **diagramas de árbol** o tablas de contingencia para el recuento de casos.
1º Bach CCSS	Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.	3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con **diferentes técnicas de recuento** y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.	3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y **diferentes técnicas de recuento**.
2º Bach CCSS	Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, **diagramas de árbol** o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y **diferentes técnicas de recuento**.

Tal y como se ha comentado en el capítulo 9, el alumnado encuentra útil el diagrama de árbol y lo incorpora en sus resoluciones de problemas y ejercicios de manera automática. Esta *automatización* (uso del método de resolución) puede llegar a convertirse en una técnica no adecuada para el alumnado si se pierde, por un lado, la *responsabilidad matemática* y, por otro lado, el *control epistemológico*. La aplicación automática de un método, sin una reflexión o entendimiento completo del sistema, hace que el estudiante pierda el control y no sepa si realmente está resolviendo el problema adecuadamente. Esto sucede si carece de otras herramientas para validar el resultado obtenido y controlar el proceso de estudio realizado. Así, es el profesor quien se encarga de validar si la resolución es correcta, asumiendo la responsabilidad matemática. En el siguiente apartado (cuestiones abiertas) se propone otro método de resolución de este tipo de problemas de probabilidad mediante áreas. Se muestran sus ventajas y desventajas respecto al diagrama de árbol, motivándose su introducción y desarrollo.

Para que el diagrama de árbol sea una herramienta más útil, es interesante conseguir su *rutinización*. Para ello es necesario que el estudiante se haga responsable matemáticamente del método y sea capaz de tener el control. Esto se puede lograr teniendo un completo entendimiento del diagrama. Una notación adecuada y rigurosa facilita su completa comprensión. Entender qué está sucediendo en cada bifurcación, en cada rama, en el camino final, dónde las probabilidades deben sumar 1, dónde no…

En conclusión, el proceso de estudio se debe garantizar que el uso de los diagramas de árbol sea *rutinario* (eficaz, económico y controlado) y no meramente automatizado.

Notación y rigurosidad matemática

A lo largo del trabajo se ha comprobado cómo los libros de texto adaptan el contenido del currículo de una manera coherente. Suelen conservar la organización de temas en los mismos bloques que aparecen en el currículo. La notación matemática también se adapta a cada curso. Se ha visto cómo también las definiciones en cursos más bajos eran más coloquiales y cercanas al alumnado. Un claro ejemplo de este intento de acercamiento al estudiante es el esfuerzo, a veces sin demasiado éxito, de contextualizar los problemas en casos y situaciones buscando una conexión con la realidad. Esto afecta también a la notación y a la rigurosidad. Es claro que ha de haber una evolución en este sentido a lo largo de los cursos.

Se ha podido ver la diferencia en este aspecto también comparando libros actuales de un curso determinado con un libro más antiguo, del mismo curso (diseñados ambos bajo la misma ley educativa y currículo vigente). La notación e incluso la presentación de contenidos era más rigurosa matemáticamente. Se recuerda la presencia o no de la definición axiomática de la probabilidad comentada en capítulos anteriores. Como también se ha explicado que esto es debido a una transposición didáctica. La tendencia en los libros de texto es el uso de gráficos y dibujos para acompañar y ayudar en las explicaciones. También se ha comprobado cómo en libros actuales hay un gran acierto con el uso de diagramas de Venn de manera paralela al diagrama de árbol, con una notación correcta.

En conclusión, el uso correcto (tampoco abusivo) de notación ayuda a una comprensión más profunda del contenido. Es importante que haya una adaptación adecuada de la notación y de la rigurosidad matemática a cada curso.

Uso real de recursos informáticos en el aula

En cada uno de los bloques de la asignatura de Matemáticas aparecen menciones explícitas al uso de medios informáticos para la resolución de diferentes tipos de problemas. También es una de las competencias clave marcadas para la Educación Secundaria. Como se ha comprobado en capítulos anteriores, las editoriales han hecho un esfuerzo para adaptarse a esta nueva etapa, con una amplia oferta de contenido digital para utilizar en el aula.

En la experimentación llevada a cabo en este trabajo, se ha utilizado contenido digital (tablas, gráficas) y TIC (presentaciones, vídeos y aulario virtual para compartir contenido entre el alumnado). En la modalidad de Bachillerato nocturno, las clases son de 45 minutos; esto hace haya menos disponibilidad para la incorporación de nuevas herramientas digitales para la clase. Sin embargo, es necesario mostrar las nuevas herramientas para capacitar al alumnado para su futuro (de formación o laboral). El uso de hojas de cálculo o programas como GeoGebra pueden ayudar también en el proceso de estudio, ofreciendo herramientas alternativas para experimentar y practicar sus nuevos conocimientos.

En conclusión, queda mucho camino por recorrer en el uso de recursos informáticos en el aula. Hay recursos verdaderamente interesantes que pueden ayudar en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Cuestiones abiertas

A continuación, se señalan dos cuestiones abiertas que se siguen de este estudio y que podrían ser analizadas en el futuro: una, referida a la dimensión epistemológica y, otra, referida a la dimensión ecológica y afectiva.

Dimensión epistemológica

A la hora de resolver problemas de probabilidad condicionada, tanto en experimentos simples como en compuestos, es habitual el uso de tablas de contingencia, de diagramas de Venn y, sobre todo, de diagramas de árbol.

Un método alternativo al diagrama de árbol y que de alguna manera tiene relación con los diagramas de Venn, es el uso de áreas para calcular la intersección en probabilidades condicionadas. Los diagramas de Venn pueden simular estas áreas de una forma más abstracta, haciendo que un suceso ocupe más parte del espacio muestral si su probabilidad es alta. Por otro lado, se trabaja el concepto de producto de fracciones, como producto de numeradores entre producto de denominadores, de manera gráfica. Es un contenido matemático que el alumnado ya posee y que puede servir de punto de partida para la aplicación de este método.

Se plantea a continuación la resolución del problema 2 y 3 del cuestionario realizado en la parte de experimentación, comparando los métodos del uso de diagramas de árbol y el uso de áreas.

Problema 2

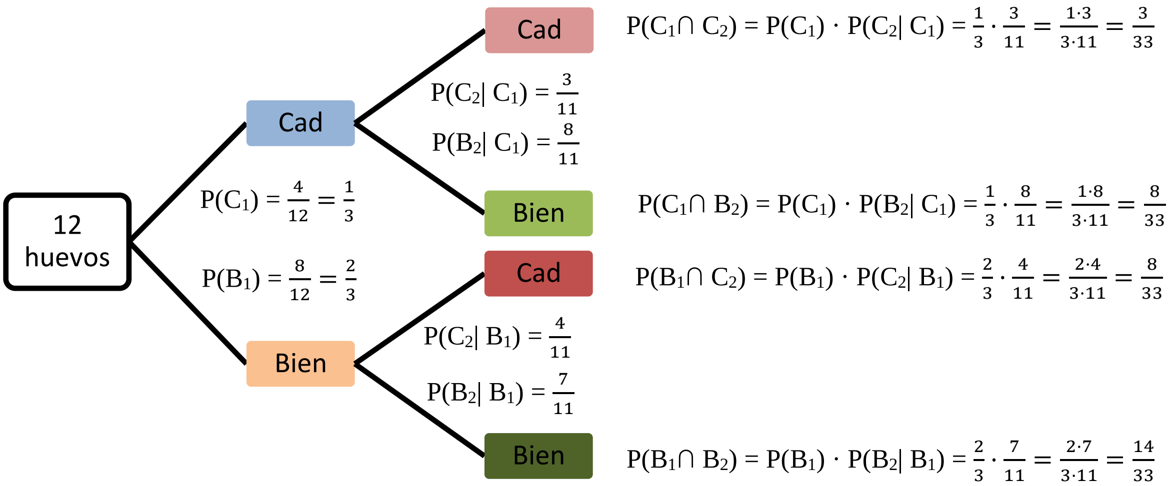


Figura 20a. Resolución mediante diagrama de árbol.

El método alternativo consistiría en asignar al eje Y la fracción correspondiente a la probabilidad en la primera extracción y al eje X la fracción correspondiente a la probabilidad en la segunda (condicionada).

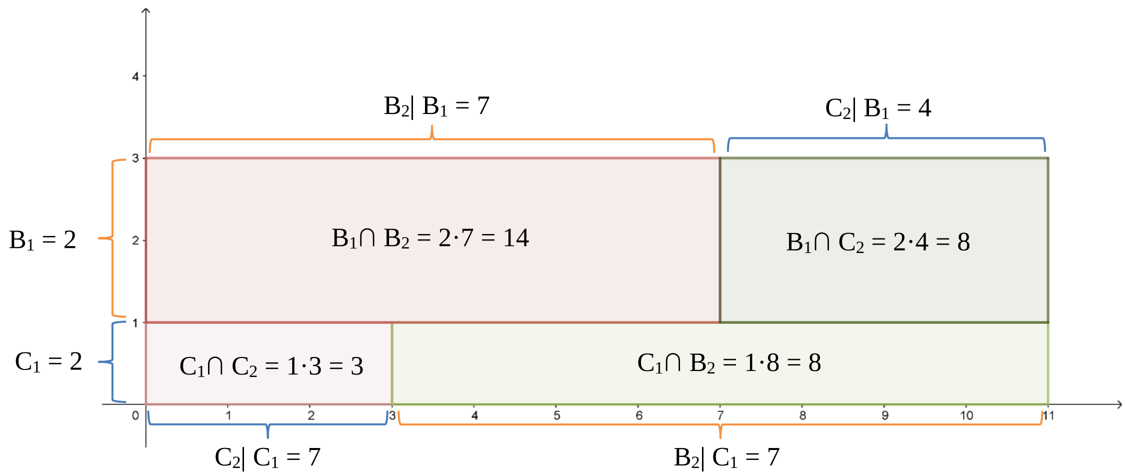


Figura 20b. Resolución mediante áreas.

La probabilidad de las intersecciones corresponde al área de la intersección entre el área total. El área total es de $3 \cdot 11 = 33$

$P(C_1 \cap C_2) = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 11} = \frac{3}{33}$ $\qquad$ $P(B_1 \cap B_2) = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 11} = \frac{14}{33}$

$P(C_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap C_2) = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 11} + \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 11} = \frac{16}{33}$

Problema 3

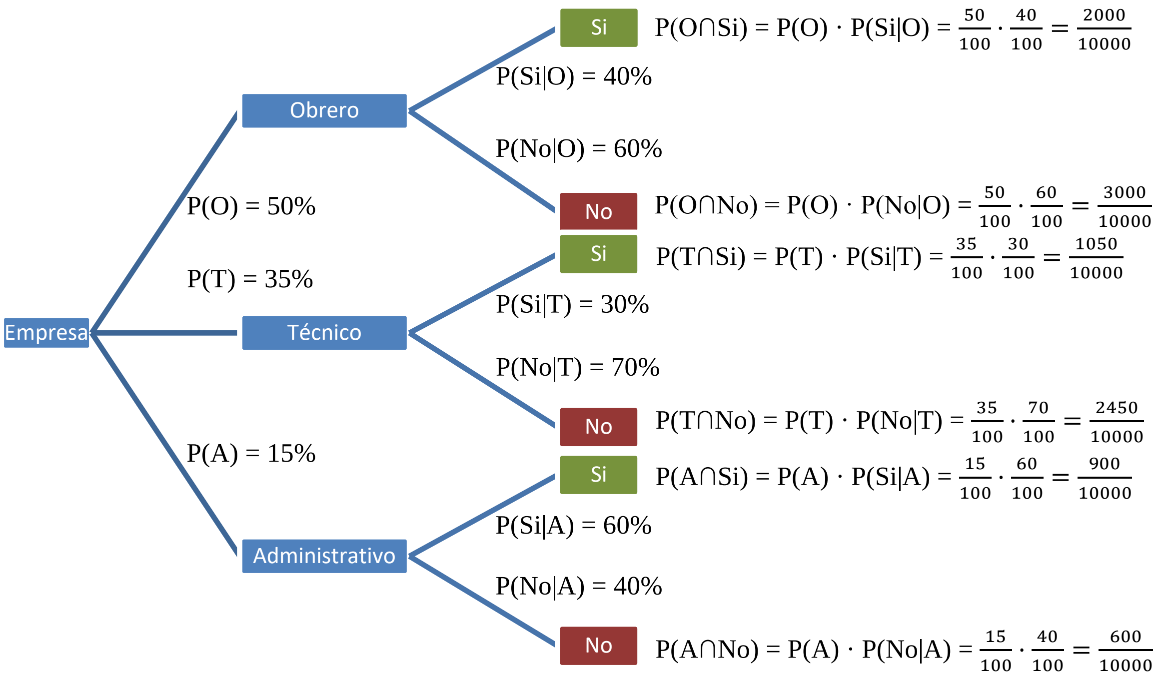


Figura 21a. Resolución mediante diagrama de árbol.

El método alternativo consistiría en asignar al eje Y el porcentaje correspondiente al tipo de trabajador y al eje X el porcentaje correspondiente a la contestación de cada uno de ellos (probabilidad condicionada).

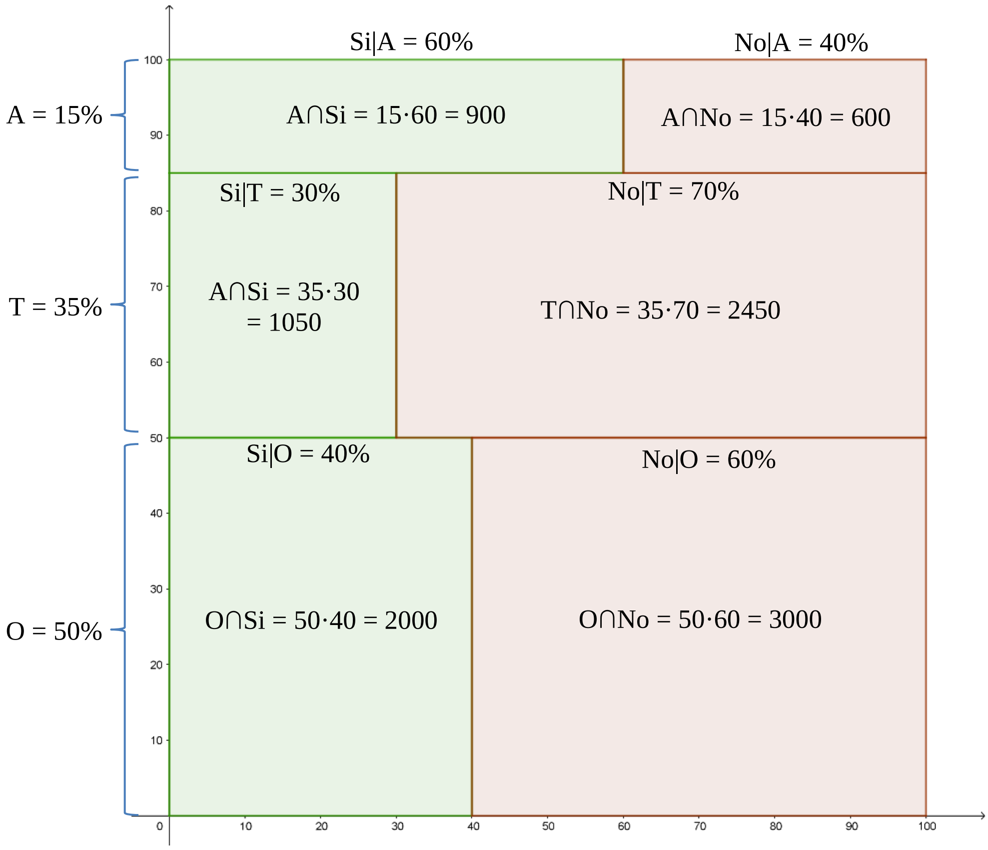


Figura 21b. Resolución mediante áreas.

En la figura 21b se observa cómo también se puede resolver este tipo de problemas, done hay probabilidad condicionada en un mismo experimento y más de 2 opciones en una de las clasificaciones. También sirve para el caso en el que haya más de 2 posibles respuestas (2ª categoría en el árbol). Se reduce al cálculo de áreas favorables entre áreas totales. A continuación, se dan las respuestas al problema planteado:

$$\mathrm{P(Si)} = \frac{\acute{A}rea\ Si}{\acute{A}rea\ total} = \frac{900+1050+2000}{100\cdot 100} = \frac{3950}{10000} = 0{,}395$$

$$\mathrm{P(A\cap Si)} = \frac{\acute{A}rea\ \mathrm{A\cap Si}}{\acute{A}rea\ total} = \frac{900}{100\cdot 100} = \frac{900}{10000} = 0{,}09$$

$$\mathrm{P(A|Si)} = \frac{\acute{A}rea\ \mathrm{A\cap Si}}{\acute{A}rea\ Si} = \frac{900}{900+1050+2000} = \frac{900}{3950} = 0{,}228$$

$$\mathrm{P(O|No)} = \frac{\acute{A}rea\ \mathrm{O\cap No}}{\acute{A}rea\ No} = \frac{3000}{600+2450+3000} = \frac{3000}{6050} = 0{,}496$$

Este método de resolución de problemas de probabilidad condicionada es interesante porque permite utilizar la regla de Laplace con las áreas representadas. En los casos en los que no se pueda utilizar dicha regla porque las probabilidades están en forma de porcentaje o de valor entre 0 y 1 y no se disponga de las frecuencias absolutas, este método de áreas es mucho más “ilustrativo” que mediante árbol o únicamente mediante las fórmulas, en el sentido de que se refiere a un contenido previo que el alumnado conoce desde la Educación Primaria y que refuerza en el primer ciclo de ESO.

Se encuentran limitaciones para la aplicación de este método. Por ejemplo:

- Para aplicar las probabilidades condicionadas en uno de los ejes, necesitamos que todas las probabilidades condicionadas tengan el mismo denominador. En su caso, habría que calcular el denominador común.
- Cuando hay más de dos etapas (o categorías) en el problema. No se puede resolver como un cálculo de áreas en $\mathbb{R}^2$ y se perdería la ventaja de interpretación visual. Se convertiría en un sistema mucho más abstracto y dejaría de ser tan interesante.

Es entonces cuando el diagrama de árbol cobra más utilidad. Es un método económico, en cuanto al esfuerzo y tiempo necesario para su aplicación, y también eficaz e incluso es idóneo desde el punto de vista afectivo (el alumnado se encuentra cómodo aplicando métodos). Debe prestarse especial atención a evitar una automatización y pérdida de perspectiva matemática.

Dimensión ecológica y afectiva

La evaluación sumativa obtenida por los estudiantes refleja un bajo nivel de adquisición de los contenidos. Es habitual seguir el orden de los contenidos tal y como se presentan en el currículo, organizados por temas y agrupados en bloques. Se ha observado en el análisis de los libros de texto que también hay una tendencia a mantener el orden y división del currículo. Esto hace que el bloque de estadística y probabilidad se aborde en la parte final del curso, donde el alumnado ya no está tan centrado o si está preparando la evaluación de acceso a la universidad es complicado presentar contenidos nuevos.

¿Habría posibilidad de tratar este bloque de alguna otra manera? Si se eliminara como bloque separado y se desarrollara a lo largo del año como herramienta en la realización de proyectos, ¿se podría conseguir mejores resultados?

Este bloque se presta para buscar ejemplos reales, contextualizar o diseñar proyectos de una manera más sencilla y cercana que en otros, como, por ejemplo, el bloque de números y álgebra al estudiar el uso y operaciones con matrices. Sería interesante estudiar el efecto de extraer el bloque de estadística y probabilidad de las clases habituales y tratarlo como un apartado de la asignatura más práctico y organizado por proyectos.

Por último, hay que tener en cuenta que, al finalizar 2º de Bachillerato, el alumnado se debe enfrentar a la evaluación de acceso a la universidad. No se puede perder esta perspectiva porque el interés del alumnado es conseguir una nota suficiente para la elección de sus estudios. Esto hace necesario que sean capaces de resolver los problemas tipo del bloque de estadística y probabilidad que aparecen en la EvAU, intervalos de confianza para la media poblacional, uso de probabilidad total y teorema de Bayes.

Referencias

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sáez, I. *Código Bruño Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1º Bachillerato* (2016). Grupo Editorial Bruño S.L.

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sáez, I. *Código Bruño Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato* (2016). Grupo Editorial Bruño S.L.

Bruner, J. S. (2001). *El Proceso mental en el aprendizaje.* Madrid: Narcea.

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 174, de 5 de septiembre, Anexo I 41-57).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015a). *Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 127, de 2 de julio, 44-57).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015b). *Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 127, de 2 de julio, 81-90).

De la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve*. *3º ESO*. Santillana Educación, S.L.

De la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve*. *4º ESO*. Santillana Educación, S.L.

De la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Soluciona*. *4º ESO*. Santillana Educación, S.L.

Godino, J.D., Font, V., and Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, (pp. 131-155).

Vizmanos J.R. *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2* (2011). Ediciones SM.

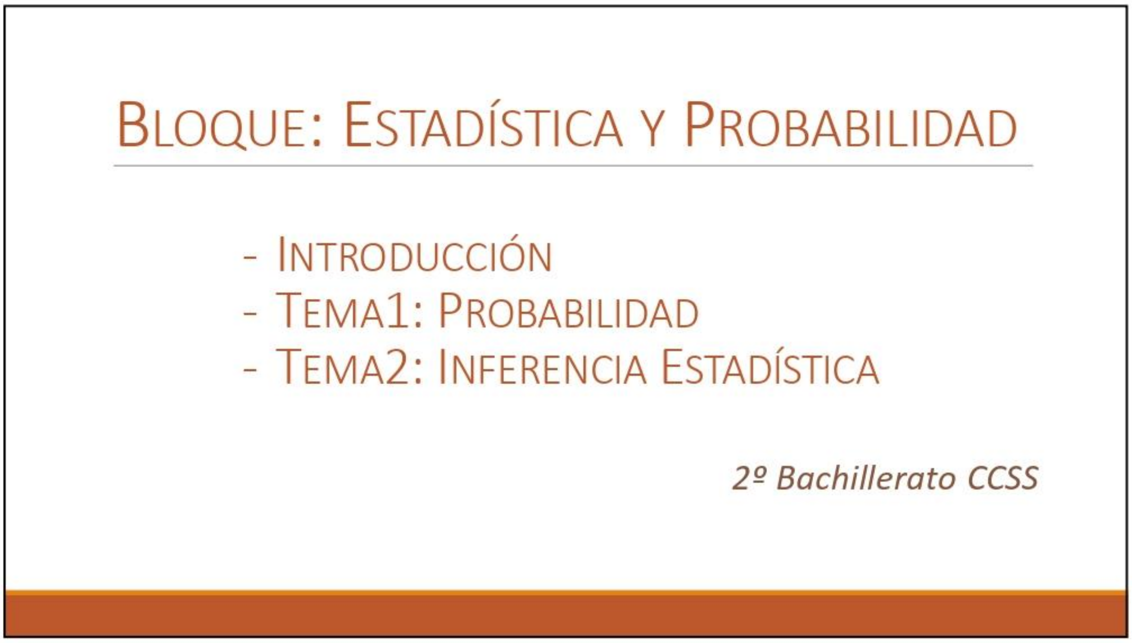
Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Yves Chevallard (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.

Anexo

Diapositivas para la unidad didáctica

Diapositivas para la unidad didáctica



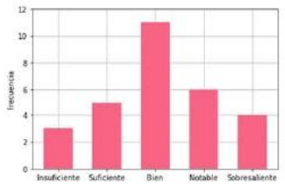
INTRODUCCIÓN: ESTADÍSTICA

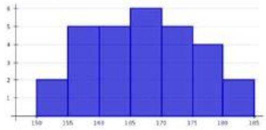
Datos:

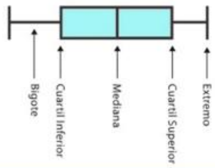
Nota	ni	fi	Ni	Fi
Insuficiente	3	0,103	3	0,103
Suficiente	5	0,172	8	0,276
Bien	11	0,379	19	0,655
Notable	6	0,207	25	0,862
Sobresaliente	4	0,138	**29**	**1,000**
	29	**1**		

Intervalos	n_i	f_i	N_i	F_I
1.55-1.60	2	0,067	2	0,067
1.60-1.65	5	0,167	7	0,233
1.65-1.70	6	0,200	13	0,433
1.70-1.75	8	0,267	21	0,700
1.75-1.80	5	0,167	26	0,867
1.80-1.85	4	0,133	30	1,000
	30	1		

Representaciones:



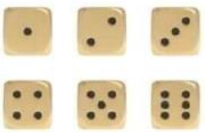


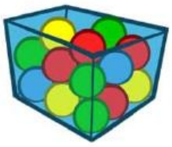


INTRODUCCIÓN: PROBABILIDAD

Área de las matemáticas que se encarga del estudio de la **frecuencia con la que ocurre un hecho concreto**, dentro de un fenómeno aleatorio que depende del azar. Estudiando esto se pueden encontrar patrones que permitan predecir lo que va a ocurrir en ciertas situaciones.

Por ejemplo: cuando tiras un dado tienes una probabilidad entre seis de que salga un 4.





INTRODUCCIÓN: INFERENCIA

$\underline{X}$: v.a. de interés

azar/muestreo

Muestra k

ESTADÍSTICOS

n: tamaño muestral

$x_1, \ldots, x_n$: valores

$\overline{x}_k$: media muestra k

s_k^2: varianza muestral

s_k: desviación típica muestral

Toda la población

PARÁMETROS

μ: media poblacional $E[\underline{X}]$

σ: desviación típica poblacional

σ^2: $var[\underline{X}]$

N: total población

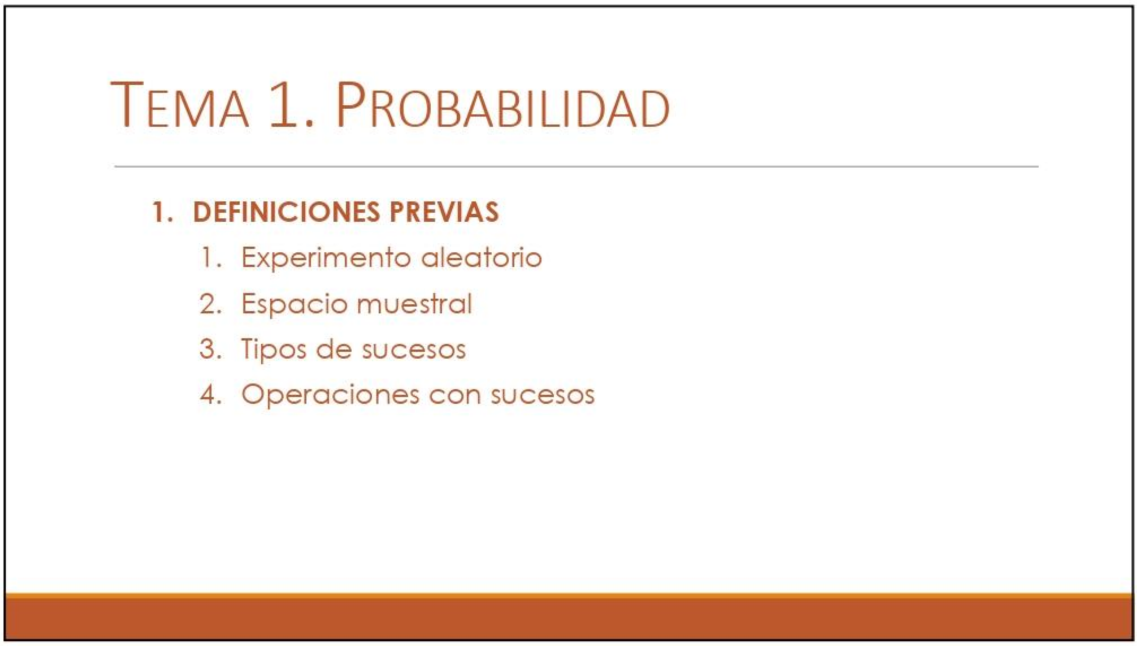
Inferencia

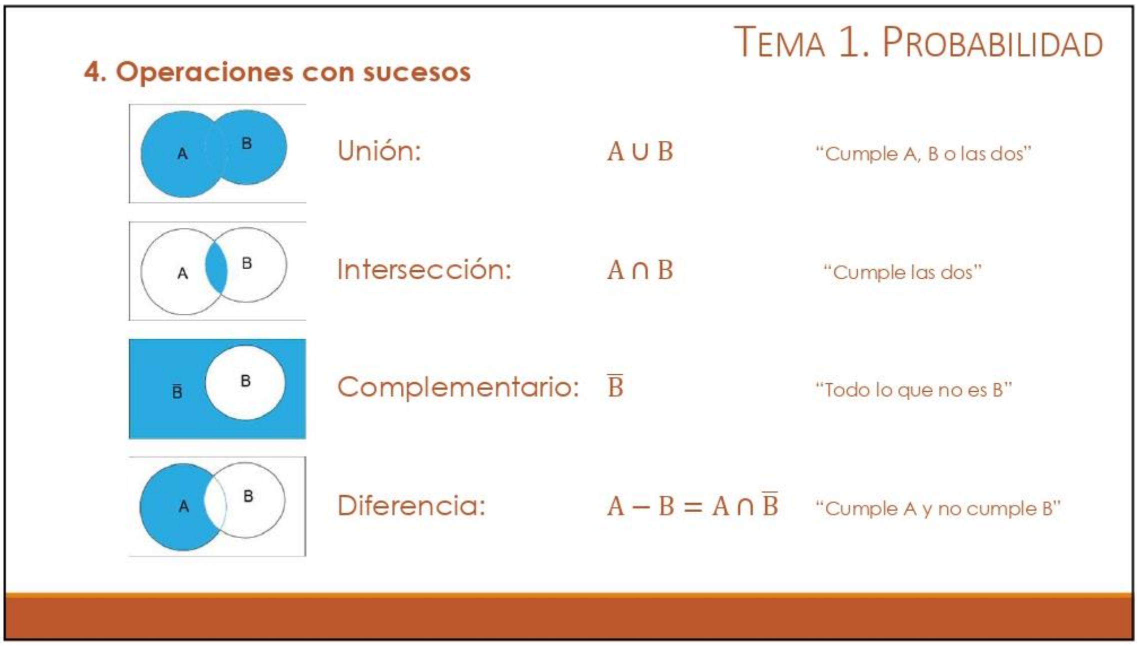
Con los datos de la muestra, estimaremos los poblacionales.

- Cálculo de media: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{j} x_i \cdot f_i}{n}$ si $n = N \rightarrow \overline{x} = \mu$
- Cálculo de la varianza: $s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{j} (x_i-\overline{x})^2 \cdot f_i}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{j} x_i^2 \cdot f_i}{n} - \overline{x}^2$ si $n = N$, $\sigma^2 = s^2$

TEMA 1. PROBABILIDAD

1. DEFINICIONES PREVIAS
2. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD
3. PROBABILIDAD CONDICIONADA: MISMO EXPERIMENTO
4. PROBABILIDAD CONDICIONADA: EXPERIMENTO COMPUESTO
5. PROBABILIDAD TOTAL
6. TEOREMA DE BAYES


TEMA 1. PROBABILIDAD
1. DEFINICIONES PREVIAS
1. Experimento aleatorio
2. Espacio muestral
3. Tipos de sucesos
4. Operaciones con sucesos


TEMA 1. PROBABILIDAD
4. Operaciones con sucesos
A
B
Unión:
$A \cup B$
"Cumple A, B o las dos"
A
B
Intersección:
$A \cap B$
"Cumple las dos"
$\overline{B}$
B
Complementario:
$\overline{B}$
"Todo lo que no es B"
A
B
Diferencia:
$A - B = A \cap \overline{B}$
"Cumple A y no cumple B"

TEMA 1. PROBABILIDAD

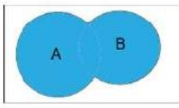
1. DEFINICIONES PREVIAS
2. **DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD**
    1. Frecuentista
    2. Laplace
    3. Propiedades
3. PROBABILIDAD CONDICIONADA: MISMO EXPERIMENTO
4. PROBABILIDAD CONDICIONADA: EXPERIMENTO COMPUESTO
5. PROBABILIDAD TOTAL
6. TEOREMA DE BAYES

TEMA 1. PROBABILIDAD

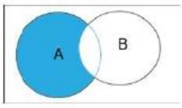
Propiedades de la probabilidad:

- Está acotada: $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$
- Suceso complementario: $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$
- Suceso imposible: $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- Suceso seguro: $\mathrm{P(E)} = 1$
- Unión de sucesos:
    - Incompatibles $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
    - Compatibles $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

TEMA 1. PROBABILIDAD

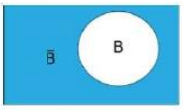


Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

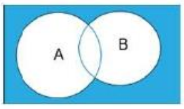


Diferencia: $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$A - B = A \cap \overline{B}$

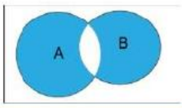


Complementario: $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ Todo lo que no es B"



Ni A ni B: $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



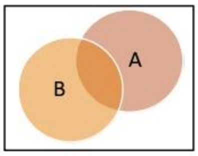
$P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

TEMA 1. PROBABILIDAD

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA: MISMO EXPERIMENTO

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Sucesos independientes:

$P(A) = P(A|B)$ $P(B) = P(B|A)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TEMA 1. PROBABILIDAD

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA: MISMO EXPERIMENTO. Tabla de contingencia

	Hombres (A)	Mujeres ($\overline{A}$)	Totales
Aprobado (B)	9	8	9 + 8 = 17
Suspendido ($\overline{B}$)	6	2	6 + 2 = 8
Totales	9 + 6 = 15	8 + 2 = 10	25

P(ser hombre) = $P(A) = \frac{15}{25}$

P(ser mujer) = $P(\overline{A}) = \frac{10}{25}$

P(aprobar) = $P(B) = \frac{17}{25}$

P(suspender) = $P(\overline{B}) = \frac{8}{25}$

Ser hombre y aprobar: $P(A \cap B) = \frac{9}{25}$

Aprobar siendo hombre: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{9}{15}$

Ser mujer y aprobar: $P(\overline{A} \cap B) = \frac{8}{25}$

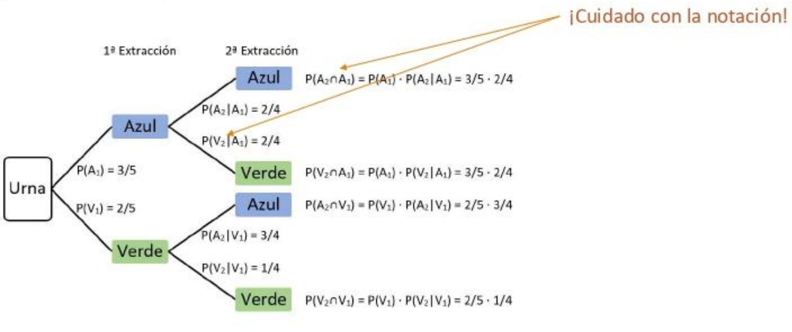
Aprobar siendo mujer: $P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{10}{25}} = \frac{8}{10}$

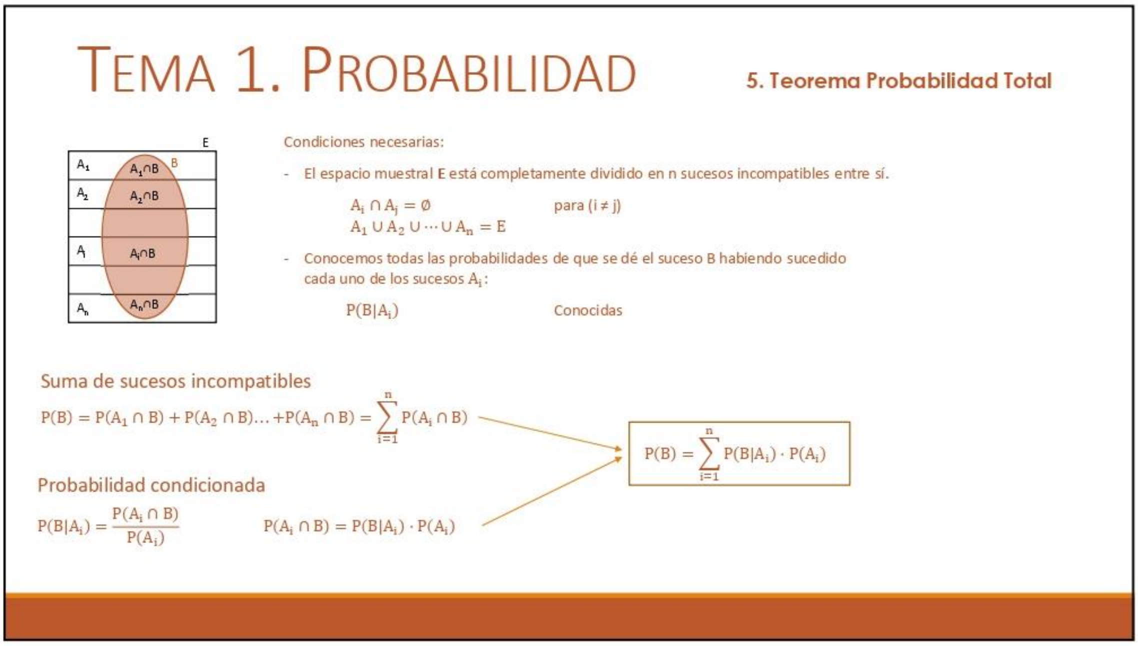
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{9}{17} \cdot \frac{17}{25} = \frac{9}{15} \cdot \frac{15}{25} = \frac{9}{25}$$

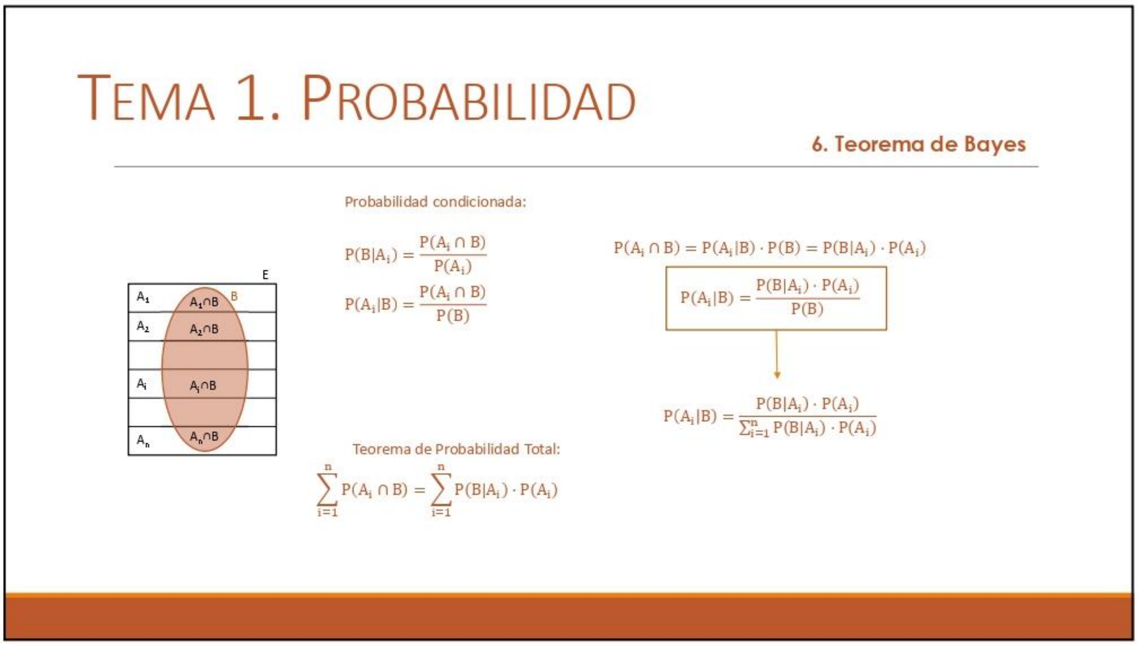
TEMA 1. PROBABILIDAD

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA: EXPERIMENTO COMPUESTO. Diagrama de árbol

En una urna hay 5 bolas: 3 azules y 2 verdes. Se extrae una bolsa, se anota el color y se repite el proceso otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas azules? ¿Cuál es la probabilidad de que la 1ª vez sea verde y la 2ª azul? Resolver con devolución de bola y sin devolución.




TEMA 1. PROBABILIDAD
5. Teorema Probabilidad Total
E
A_1 $A_1 \cap B$ B
A_2 $A_2 \cap B$
A_i $A_i \cap B$
A_n $A_n \cap B$
Condiciones necesarias:
- El espacio muestral E está completamente dividido en n sucesos incompatibles entre sí.
$A_i \cap A_j = \emptyset$ para (i ≠ j)
$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$
- Conocemos todas las probabilidades de que se dé el suceso B habiendo sucedido cada uno de los sucesos A_i:
$P(B|A_i)$ Conocidas
Suma de sucesos incompatibles
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)\ldots + P(A_n \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$
Probabilidad condicionada
$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$
$P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$


TEMA 1. PROBABILIDAD
6. Teorema de Bayes
E
A_1 $A_1 \cap B$ B
A_2 $A_2 \cap B$
A_i $A_i \cap B$
A_n $A_n \cap B$
Probabilidad condicionada:
$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$
$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
$P(A_i \cap B) = P(A_i|B) \cdot P(B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$
Teorema de Probabilidad Total:
$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Miguel R. Wilhelmi, Departamento de Matemáticas