

Laurent RICHARD

FUNCIÓNES

PROCESO DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO
DE FUNCIÓN EN MATEMÁTICAS DE 2ºESO

TFM 2021

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

**Proceso de aprendizaje del concepto
de función en Matemáticas de 2ºESO**

Laurent RICHARD

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

	Página
Introducción general	1
Parte I: Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto	3
1. El contenido de funciones en el currículo vigente	7
1.1. Contenidos en Educación Primaria	7
1.2. Contenidos en ESO	7
2. Los criterios de evaluación de funciones en el currículo vigente	11
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria	11
2.2. Criterios de evaluación en ESO	12
3. Estándares de aprendizaje evaluables de funciones en el currículo vigente	15
3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria	15
3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO	15
4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con funciones en el currículo vigente	21
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Primaria	21
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1ºESO	25
4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2ºESO	27
4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3ºESO	31
4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4ºESO	34
5. Resultados	39
5.1. Ausencias y presencias en el currículo	39
5.2. Ausencias y presencias en los libros de texto	40
5.3. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo	47
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 2ºESO	51
6. Las funciones en el libro de texto de referencia	55
6.1. Objetos matemáticos involucrados	55
6.1.1 Lenguaje	55
6.1.2 Conceptos	55
6.1.3 Procedimientos	56
6.1.4 Situaciones	56
6.1.5 Propiedades	57
6.2. Análisis global de la unidad didáctica	57
6.3. Otros aspectos relevantes	58

6.3.1 La unidad didáctica de funciones dentro del curso	58
6.3.2 Interdisciplinaridad de las funciones	59
6.3.3 Unidad didáctica dentro del libro de texto: comentarios generales	67
7. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica	69
7.1. Dificultades previsibles	69
7.2. Errores previsibles y su posible origen	74
8. El proceso de estudio	79
8.1. Distribución del tiempo de la clase	79
8.2. Actividades adicionales planificadas	84
8.3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista	87
9. Experimentación	91
9.1. Muestra y diseño de la experimentación	91
9.2. El cuestionario	92
9.3. Cuestiones y comportamientos esperados	95
9.4. Resultados	97
9.5. Discusión de los resultados	100
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas	103
Referencias	105

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar el proceso de aprendizaje del concepto de función en un curso de 2º de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria).

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria y en ESO con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones que se ha puesto en marcha en un aula de 2º de la ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2º de la ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

El contenido de funciones en el currículo vigente

En este capítulo, presentamos los contenidos del currículo relacionados con el concepto central de función. Es decir que trataremos de resaltar no solo los contenidos propios del bloque correspondiente a funciones cuando existe, sino que mostraremos cualquier contenido que introduzca, englobe y amplíe dicho concepto. Clasificaremos los contenidos por cursos y por descriptores, lo que permitirá a continuación realizar un análisis longitudinal de ciertos elementos destacables por su ausencia, presencia o evolución.

La base de los contenidos así como de los otros elementos del currículo mostrados en los capítulos posteriores ha sido recogida en los decretos forales vigentes de Educación Primaria (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 60/2014) y de Educación Secundaria Obligatoria (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 24/2015).

1.1. Contenido en Educación Primaria

Descriptor	Contenido en Educación Primaria
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Geometría.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4º de Primaria)</u> Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico. - <u>(4º de Primaria)</u> Ejes de coordenadas. - <u>(5º de Primaria)</u> Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos. - <u>(6º de Primaria)</u> Sistema de coordenadas cartesianas - Descripción de posiciones y movimientos - La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Proporcionalidad directa.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4º de Primaria)</u> Tablas de datos y gráficos. - <u>(4º de Primaria)</u> Recogida y registro de datos. - <u>(5º de Primaria)</u> Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos. - <u>(6º de Primaria)</u> Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.

1.2. Contenido en ESO

El currículo de la ESO dedica específicamente un bloque a funciones desde el primer curso de la ESO, pero otros contenidos relacionados con funciones aparecen en los demás bloques. Mostramos en este apartado todos aquellos contenidos correspondientes a los cursos de 1º, 2º, 3º y 4º de ESO. En los casos de 3º y 4º cursos de la ESO, se ofrecen dos opciones distintas: hemos dirigido nuestro análisis sobre la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas ya que no detectamos diferencias destacables respecto a la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

Descriptor	Contenido en 1ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Iniciación al lenguaje algebraico. - Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. - Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Coordenadas cartesianas: Representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados - Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Variable dependiente e independiente. Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Proporcionalidad directa y porcentajes: Cálculos en casos sencillos.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). <p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.

Descriptor	Contenido en 2ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. - El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. - Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos. - Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico). - Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). - Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la

	ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. - Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. <p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación

Descriptor	Contenido en 3ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). - Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. - Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4: Funciones</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. - Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas.

Descriptor	Contenido en 4ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Representación de números en la recta real. Intervalos. - Manipulación de expresiones algebraicas.

	<ul style="list-style-type: none"> - Utilización de igualdades notables. - Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización. - Ecuaciones de grado superior a dos. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales. <p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Logaritmos. Definición y propiedades.

Entendemos que la clasificación en los descriptores elegidos puede a veces ser sujeta a debate: ciertamente algunos contenidos podrían tener cabida en más de un sitio, pero quisimos limitarnos a lo más representativo de cada punto para no sobrecargar la presentación y facilitar la visión de conjunto. Un ejemplo son las “Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).” que clasificamos en el descriptor *Algebra de funciones* pero cuya aportación puede igualmente enmarcarse en un contexto de *Representación gráfica de funciones*.

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de funciones en el currículo vigente

En este capítulo presentamos los criterios de evaluación como primer paso de concretización de los contenidos anteriormente mencionados.

2.1 Criterios de evaluación en Educación Primaria

Descriptor	Criterios de evaluación en Educación Primaria
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Geometría.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4° de Primaria)</u> Describir una representación espacial (croquis, callejeros, planos sencillos...), interpretar y elaborar informaciones referidas a situaciones y movimientos (seguir un recorrido dado, indicar una dirección) y valorar expresiones artísticas, utilizando como elementos de referencia las nociones geométricas básicas (situación, alineamiento, movimientos). - <u>(5° de Primaria)</u> Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares. - <u>(6° de Primaria)</u> Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. Representar pares ordenados en un sistema cartesiano. - Interpretar una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones cercanas.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Iniciarse en la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4° de Primaria)</u> 1. Interpretar textos numéricos, resolver problemas. Recoger datos utilizando técnicas de recuento, registrar ordenando los datos atendiendo a criterios de clasificación y expresando el resultado en forma de tabla o gráfica. - <u>(5° de Primaria)</u> 1.1. Identifica, recoge y registra información cuantificable en tablas de datos. - 2.3. Identifica e interpreta datos en distintos tipos de diagramas y en tablas de doble entrada. - <u>(6° de Primaria)</u> 1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... comunicando la información.

2.2 Criterios de evaluación en ESO

Descriptor	Criterios de evaluación en 1ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 4. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. <p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes [...].

Descriptor	Criterios de evaluación en 2ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. - 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Utilizar las diferentes formas de presentación y reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Comprender el concepto de función. Utilizar las diferentes formas de presentación y reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. - 2. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.

Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. <p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.
-----------------------	--

Descriptor	Criterios de evaluación en 3ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. - 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4: Funciones</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. - 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.

Descriptor	Criterios de evaluación en 4ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades. - 4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a

	<p>partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.</p> <ul style="list-style-type: none"> - 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.

Capítulo 3

Estándares de aprendizaje evaluables de funciones en el currículo vigente

En este capítulo presentamos los estándares evaluables como último paso de concretización de los contenidos y criterios de evaluación anteriormente mencionados.

3.1 Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Geometría:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4° de Primaria)</u> 1.4. Localiza puntos en una cuadrícula utilizando coordenadas cartesianas. - <u>(5° de Primaria)</u> 5.2. Identifica o localiza puntos en una cuadrícula utilizando coordenadas cartesianas. - <u>(6° de Primaria)</u> Los puntos correspondientes a los criterios de evaluación no están desarrollados en el decreto foral.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 7.1. Establece equivalencias entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>(4° de Primaria)</u> 1.2. Identifica e interpretar datos en tablas de doble entrada y en gráficos. - <u>(5° de Primaria)</u> 1.1. Identifica, recoge y registra información cuantificable en tablas de datos. Recoge y registra datos en tablas de doble entrada. - <u>(6° de Primaria)</u> 1.2. Recoge y clasifica los datos y Construye tablas de frecuencias absolutas.

3.2 Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 1°ESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 4.1. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas. - 2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.

Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función. - 3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. - 3.3. Describe una situación a partir de la tabla o gráfica que la modeliza. - 3.4. Compara diferentes situaciones a partir de las tablas o gráficas que las modelizan.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 4.1. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto. <p><i>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas y calcula sus frecuencias absolutas y relativas y los representa gráficamente utilizando los diagramas más adecuados a la situación estudiada.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 2ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. - 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. - 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. - 7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. - 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.3. Relaciona las diferentes expresiones de una función.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función. - 1.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

	<ul style="list-style-type: none"> - 1.3. Relaciona las diferentes expresiones de una función. - 1.4. Describe una situación a partir de de la tabla o gráfica que la modeliza. - 1.5. Compara diferentes situaciones a partir de las tablas o gráficas que las modelizan. - 2.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores. - 2.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal o afín existente entre dos magnitudes y la representa.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. - 5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales. <p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2.1. Reconoce y representa una función lineal o afín a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente. - 2.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.4. Describe una situación a partir de de la tabla o gráfica que la modeliza.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 3ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2: Números y Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana. - 3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado. - 3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común. - 4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido. <p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada

	<p>gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. - 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. - 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. - 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. - 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. - 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4: Funciones</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 4ºESO
Álgebra de funciones	<p><i>Bloque 2. Números y álgebra.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 3.1 Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico. - 3.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado. - 3.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas. - 3.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. - 4.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos. <p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus

	<p>correspondientes expresiones algebraicas.</p> <ul style="list-style-type: none"> - 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. - 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.
Análisis de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales. - 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla. - 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. - 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas. - 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. - 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.
Familias de funciones	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
Organización de datos y tabla de valores	<p><i>Bloque 4. Funciones.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. - 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con funciones en el currículo vigente

Si bien hemos presentado los contenidos de los currículos vigentes en los tres capítulos anteriores, este capítulo y el siguiente se basan en la presentación y análisis de contenido de los libros de textos usados por el departamento de Matemáticas del centro educativo del Practicum II. En este caso, la editorial de referencia es Santillana, aunque también describiremos algunos ejercicios de diferentes libros de Educación Primaria.

El libro de texto sirve de segundo referente, tras el currículo, y es usado diariamente por el alumnado y el profesorado. La adecuación y el modo de presentación de su contenido teórico y práctico son por lo tanto de suma importancia para la enseñanza y aprendizaje.

Los alumnos se ejercitan y comprueban su comprensión típicamente a través de tres tipos de trabajos:

- Los *ejercicios* son una aplicación directa de la teoría. Suelen ser preguntas cortas y repetitivas para entrenar y automatizar ciertos algoritmos o integrar ciertos conceptos típicos. Son mayoritariamente descontextualizados. Se sitúan por lo general conjuntamente o seguidamente a la teoría expuesta.
- Los *problemas* plantean la aplicación reflexionada de la teoría en una situación contextualizada. El enunciado es más amplio y la pregunta propuesta suele ser relativamente abierta y corta para fomentar la iniciativa del alumno. Se sitúan generalmente al final de la unidad didáctica.
- Las *cuestiones* hacen referencia a preguntas de índole más conceptual que aplicaciones numéricas o algebraicas. Tratan de comprobar el grado de comprensión e asimilación de la teoría.

Hemos destacado a continuación los ejercicios, problemas y cuestiones tipos que aparecen a lo largo de los cursos.

4.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º Primaria

El centro del Practicum II no usa libros de texto de este curso inferior, pero pudimos tener acceso a algunos libros presentes en la biblioteca (editoriales Santillana, Gilza-Edébé Taldea y ELKAR-G.I.E).

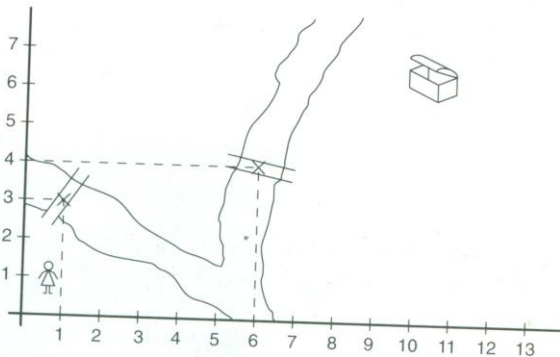
Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Posicionamiento en un sistema de coordenadas

Ejemplo(s) de enunciado

7 Éste es el plano de Villatorres. Obsérvalo y contesta:

- ¿En qué casilla está el Ayuntamiento?
- ¿Qué hay en la casilla (C, 3)?
- ¿Qué hay en la casilla (D, 1)?
- ¿Qué hay en la casilla (A, 2)?

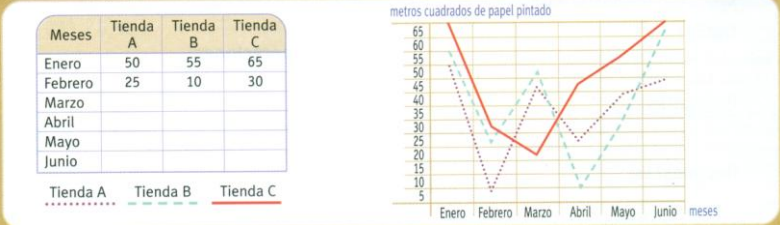
11. Lagundu Elenari altxorra aurkitzen. Zehaztu nondik zeharka ditzakeen ibaiak.



Comentario(s)

Estos ejercicios mediante mapas sirven de introducción al sistema de coordenadas cartesianas. A parte del entendimiento propio del posicionamiento mediante 2 variables, una diferencia conceptual que se muestra entre estos 2 ejercicios es la correspondencia de la posición con un área (cuadrado) en el primer caso o con un punto en el segundo ejercicio.

Tipo de actividad	Ejercicio										
Descripción	Representación gráfica de una tabla de valores, lectura e interpretación de datos.										
Ejemplo(s) de enunciado	<p>8 La siguiente tabla muestra el número de niños de la clase de 6º, agrupados según el trimestre en el que cumplen años. Completa el histograma con los datos de la tabla.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Cumpleaños</th> <th>Núm. de niños</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Enero-Marzo:</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Abril-Junio:</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Julio-Septiembre:</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Octubre-Diciembre:</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	Cumpleaños	Núm. de niños	Enero-Marzo:	5	Abril-Junio:	6	Julio-Septiembre:	7	Octubre-Diciembre:	4
Cumpleaños	Núm. de niños										
Enero-Marzo:	5										
Abril-Junio:	6										
Julio-Septiembre:	7										
Octubre-Diciembre:	4										

	<p>10 El siguiente gráfico muestra el número de metros cuadrados de un tipo de papel pintado que han vendido tres tiendas de una cadena comercial durante los seis últimos meses. Completa la tabla utilizando los datos representados.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Tienda A</th> <th>Tienda B</th> <th>Tienda C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Enero</td> <td>50</td> <td>55</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>Febrero</td> <td>25</td> <td>10</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>Marzo</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Abril</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Mayo</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Junio</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>  </div>	Meses	Tienda A	Tienda B	Tienda C	Enero	50	55	65	Febrero	25	10	30	Marzo				Abril				Mayo				Junio			
Meses	Tienda A	Tienda B	Tienda C																										
Enero	50	55	65																										
Febrero	25	10	30																										
Marzo																													
Abril																													
Mayo																													
Junio																													
<p>Comentario(s)</p>	<p>La diferencia entre los 2 ejercicios reside en que el segundo enlaza cada valor discreto de la tabla de datos para representar así la equivalencia de una función continua.</p>																												

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>														
<p>Descripción</p>	<p>Construcción de la tabla de valores de una relación de proporcionalidad directa.</p>														
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>1. Kalkulatu zenbat litro esne behar diren 1, 2, 3, 4, 5 eta 6 esne-ontzi betetzeko, ontzi bakoitzak 2 litroko edukiera badu.</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Ontzi-kopurua</th> <th style="text-align: center;">Litro-kopurua</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">$2 \times 1 = 2$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">$2 \times 2 = 4$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">.....</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">.....</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">.....</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">.....</td> </tr> </tbody> </table> <p>2, 4, 6, 8, 10 eta 12, 2 zenbakia beste zenbaki batez biderkatutakoan ditugun zenbakiak dira. Beraz, 2ren anizkoitzak dira.</p>	Ontzi-kopurua	Litro-kopurua	1	$2 \times 1 = 2$	2	$2 \times 2 = 4$	3	4	5	6
Ontzi-kopurua	Litro-kopurua														
1	$2 \times 1 = 2$														
2	$2 \times 2 = 4$														
3														
4														
5														
6														

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Problema</p>
<p>Descripción</p>	<p>Interpretación de la representación gráfica de una relación entre 2 variables. Características de la función (máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento).</p>

Ejemplo(s) de enunciado

■ Aldamenero taula honetan, neguko aste bategan zehar jasotako temperatura txikienak eta handienak (gradutan) irakur daitezke.

	A	Aa	As	O	Oa	L	I
Temperatura txikienak	-5	-3	2	-2	0	-4	-5
Temperatura handienak	8	10	12	10	15	6	12

Irudika itzazu datu horiek beheko grafiko honetan.

■ Erantzun galderak grafikoa irakurritz.

Zenbatekoa izan da tenperaturen aldea astelehenean? Zein izan da, zure ustez, egunik hotzena. Zergatik?

Astelehenetik asteartera nora egin zuen tenperatura txikienak, gora ala behera? Zenbat? Ostegunetik ostiralera nora egin zuen tenperatura handienak, gora ala behera? Zenbat?

Zein astegunetan lortu da goieneko balioa tenperatura handienetan?

BURUARI ERAGIN
Zer egunetatik zer egunetara igo...

SAKONTZEN

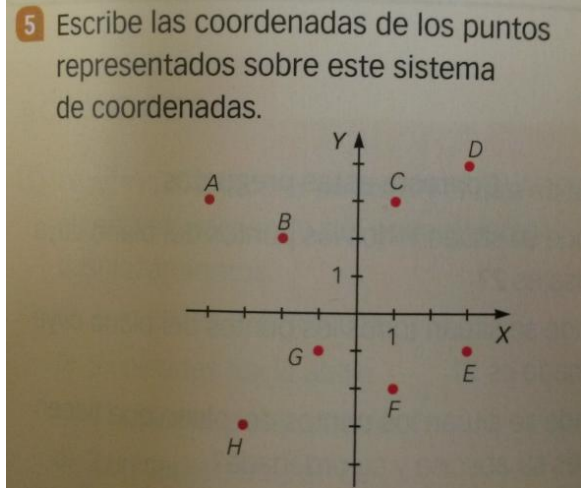
■ Zer motatako puntuak dagozkio Abiadura Handiko Trenari, gurutzeak (x) ala karratuak (□)? Zenbat km egingo ditu Abiadura Handiko Trenak 6 orduetan? Zenbat denbora beharko du 450 km ekingo? Zenbat km egiten ditu orduko Abiadura Handiko Trenak? Zenbat besteak? Zenbat km aterako dizkio orduko trenak karrak besteari? Igarotako denborak eta egindako km-ak lotzen dituen erlazioa proportzionala al da? Non ikusten da balio hori grafikoan? Zergatik? Zergatik?

Comentario(s)

El segundo ejercicio representa relaciones de proporcionalidad directa y usa para ello el eje X con una escala inhabitual (números no enteros), lo que constituye un paso más hacia el concepto de continuidad de una función. Una pregunta hace referencia a un valor que no se ve en el gráfico, lo que necesitará de una profunda comprensión del concepto de proporcionalidad.

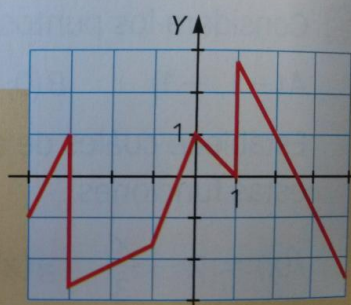
4.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de la ESO

Aparece por primera vez explícitamente en 1º de la ESO una unidad didáctica dedicada a funciones: “Funciones y gráficas”. Tal y como su título lo recoge, introduce y se centra en la interpretación gráfica del concepto de función, siendo el nivel de algebrización todavía demasiado bajo e incipiente para basarse en ello.

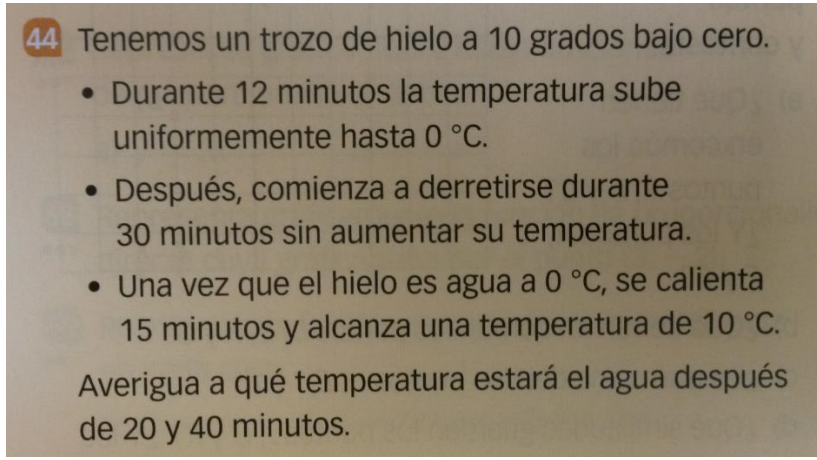
Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Encontrar las coordenadas cartesianas de puntos.
Ejemplo(s) de enunciado	<p>5 Escribe las coordenadas de los puntos representados sobre este sistema de coordenadas.</p> 
Comentario(s)	Se suelen pedir el proceso inverso también (posicionar un punto dado).

Tipo de actividad	Cuestión
Descripción	Preguntas de comprensión general sobre conjunto de puntos según condiciones.
Ejemplo(s) de enunciado	<p>10 REFLEXIONA. Contesta estas preguntas.</p> <p>a) ¿Dónde se sitúan todos los puntos del plano cuya abscisa es 2?</p> <p>b) ¿Dónde se sitúan todos los puntos del plano cuya ordenada es 2?</p> <p>c) ¿Dónde se sitúan los puntos del plano que tienen iguales su abscisa y su ordenada?</p>
Comentario(s)	La respuesta es de tipo abierta, su formulación puede escribirse de diferentes formas mientras la comprensión sea la correcta (respuesta visual, analítica, descriptiva...).

Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Determinar si una relación dada corresponde a una función.

<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<div data-bbox="539 129 1356 448"> <p>1 APLICA. Determina si esta gráfica corresponde a una función.</p>  </div> <div data-bbox="539 459 1356 884"> <p>14 PRACTICA. Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Número de barras de pan que se compran y cantidad de dinero que tenemos que pagar por ellas. b) Número de monedas de 2 € y cantidad de dinero que representan. c) Metros cuadrados de una vivienda y número de personas que viven en ella. </div> <div data-bbox="539 896 1356 1310"> <p>17 PRACTICA. En esta tabla se muestran las temperaturas máximas alcanzadas en una ciudad durante la primera semana de julio.</p> <table border="1" data-bbox="598 1041 1348 1198"> <tr> <td>Día</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Temperatura (°C)</td> <td>23</td> <td>25</td> <td>28</td> <td>32</td> <td>29</td> <td>30</td> <td>31</td> </tr> </table> <p>La relación que asigna a cada día la temperatura máxima alcanzada, ¿es una función?</p> </div>	Día	1	2	3	4	5	6	7	Temperatura (°C)	23	25	28	32	29	30	31
Día	1	2	3	4	5	6	7										
Temperatura (°C)	23	25	28	32	29	30	31										
<p>Comentario(s)</p>	<p>Pregunta desde tabla de valores, gráfica o enunciado.</p>																

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>																						
<p>Descripción</p>	<p>Construcción de las representaciones de funciones: mediante una tabla de valores, una ecuación, un enunciado.</p>																						
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<div data-bbox="502 1585 1356 1982"> <p>ACTIVIDADES</p> <p>33 La siguiente tabla relaciona la altura de Marta con su edad.</p> <table border="1" data-bbox="550 1702 925 1769"> <tr> <td>Edad (años)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>Altura (m)</td> <td>0,48</td> <td>0,65</td> <td>0,75</td> <td>0,84</td> <td>0,95</td> <td>1,02</td> <td>1,05</td> <td>1,08</td> <td>1,12</td> <td>1,16</td> </tr> </table> <p>Construye una gráfica de puntos con los valores de la tabla anterior.</p> <p>34 Representa la función que relaciona las siguientes magnitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Kilos de naranjas que se compran y precio, sabiendo que un kilo de naranjas cuesta 1,7 €. b) Kilómetros recorridos por un automóvil que circula a 90 km/h y tiempo que está circulando. <p>35 Construye la tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su representación gráfica.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) $y = 2x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y = 5x$ d) $y = \frac{x}{4}$ <p>36 Construye la tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su representación gráfica.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) $y = 2x + 1$ b) $y = \frac{x}{3} - 4$ c) $y = 5x + 1$ d) $y = \frac{x}{4} - 3$ <p>37 Representa la función que relaciona la altura de un rectángulo con su perímetro, sabiendo que la base es el triple que la altura.</p> </div>	Edad (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Altura (m)	0,48	0,65	0,75	0,84	0,95	1,02	1,05	1,08	1,12	1,16
Edad (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9													
Altura (m)	0,48	0,65	0,75	0,84	0,95	1,02	1,05	1,08	1,12	1,16													
<p>Comentario(s)</p>	<p>El alumnado debe ser capaz de pasar de un tipo de representación a otra.</p>																						

Tipo de actividad	Problema
Descripción	Construcción de la representación gráfica de una función mediante un enunciado.
Ejemplo(s) de enunciado	 <p>44 Tenemos un trozo de hielo a 10 grados bajo cero.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Durante 12 minutos la temperatura sube uniformemente hasta 0 °C. • Después, comienza a derretirse durante 30 minutos sin aumentar su temperatura. • Una vez que el hielo es agua a 0 °C, se calienta 15 minutos y alcanza una temperatura de 10 °C. <p>Averigua a qué temperatura estará el agua después de 20 y 40 minutos.</p>
Comentario(s)	Aplicación a un ámbito de la física, lo que permite una interpretación complementaria.

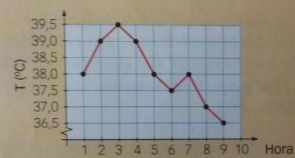
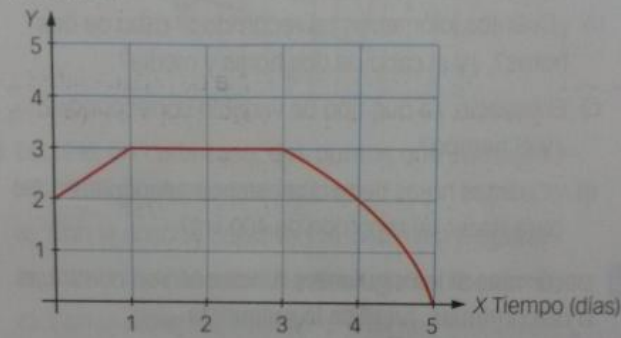
4.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de la ESO

Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Determinar si una relación dada corresponde a una función.

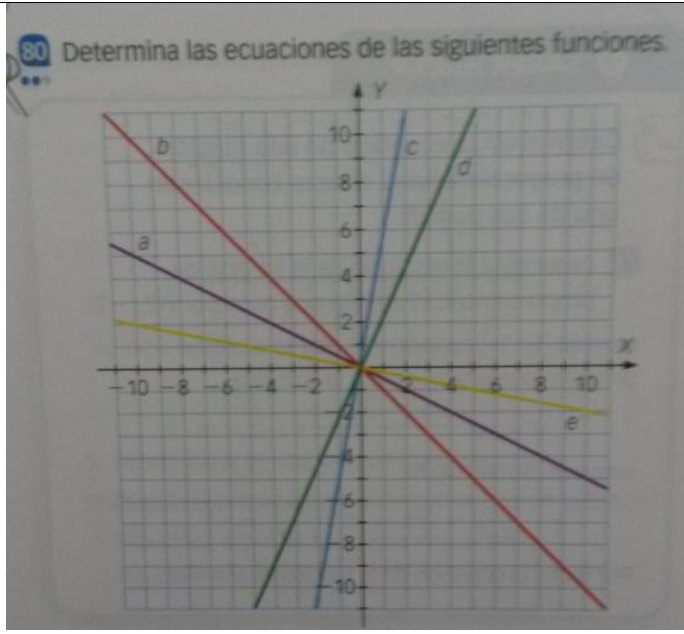
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	
<p>Comentario(s)</p>	<p>Pregunta desde tabla de valores o gráfico.</p>

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Representación gráfica y algebraica de una función a partir de un enunciado.</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>19 El precio del kilo de cerezas es 4,25 €.</p> <p>a) Escribe la expresión algebraica de esta relación.</p> <p>b) Construye una tabla de valores que represente la función y represéntala gráficamente.</p> <p>20 En una tienda se venden libros por 9,50 € cada uno, más 3,50 € de gastos de envío.</p> <p>a) Escribe la expresión algebraica que relacione el precio de un pedido, en función del número de libros comprados.</p> <p>b) Representa la expresión.</p> <p>21 Queremos colocar cintas para decorar un jardín y un rollo de cinta mide 6 m.</p> <p>a) Relaciona las magnitudes <i>número de rollos</i> y <i>longitud total de cinta</i> mediante una expresión algebraica.</p> <p>b) Represéntala gráficamente.</p> <p>22 Un coche circula por una autopista a una velocidad de 100 km/h.</p> <p>a) Escribe la expresión algebraica que indica el espacio recorrido en función del tiempo y represéntala.</p> <p>b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y media?</p>

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Determinación de las características de una función desde su gráfica o tabla de valores.</p>

<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>29 Esta gráfica muestra la temperatura de un enfermo durante una noche.</p>  <p>30 Representa gráficamente los datos de la tabla que muestran la variación de la velocidad de un atleta durante el recorrido.</p> <table border="1" data-bbox="957 224 1324 280"> <tr> <td>Distancia (km)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3,5</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7,5</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Velocidad (m/s)</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>a) ¿Cuál es la velocidad máxima?, ¿y la mínima? b) ¿En algún momento la velocidad se mantiene constante?</p> <p>31 Dibuja la gráfica de una función que sea siempre creciente y otra que sea siempre decreciente.</p> <p>66 Observa la gráfica de esta función y determina si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Corrige las falsas.</p>  <p>a) La función es decreciente de los 3 a los 5 días. b) La función tiene un máximo absoluto al cabo de un día. c) La función se mantiene constante en un período de 3 días. d) La función no tiene límites. e) La función es discontinua. f) La función no tiene puntos de corte con los ejes.</p>	Distancia (km)	1	2	3,5	5	6	7,5	9	10	Velocidad (m/s)	4	5	5	6	7	6	4	6
Distancia (km)	1	2	3,5	5	6	7,5	9	10											
Velocidad (m/s)	4	5	5	6	7	6	4	6											
<p>Comentario(s)</p>	<p>El contexto del ejercicio suele ser de la vida real, y por lo tanto suele representarse la gran mayoría de las veces en el primer cuadrante (valores positivos en X e Y).</p>																		

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Paso de expresión algebraica a representación gráfica de una función, e inversamente.</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>41 Dibuja en los mismos ejes de coordenadas.</p> <p>a) $y = 2x + 1$ $y = 2x$ $y = 2x - 1$ b) $y = -x$ $y = -x + 1$ $y = -x - 1$</p>

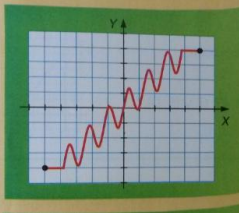

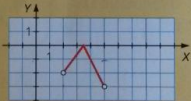
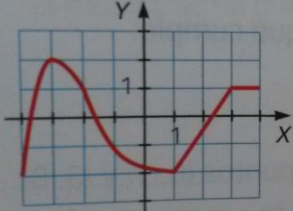
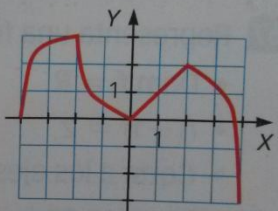
	
<p>Comentario(s)</p>	<p>En ambos ejercicios, se trata de que el alumno sepa interpretar las diferencias entre los diferentes casos (pendiente u ordenada en el origen) para deducir las repuestas.</p>

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Determinación de las expresiones algebraicas de funciones según condiciones dadas (punto-pendiente, tipo función-punto, punto-punto...).</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>82 Escribe las expresiones algebraicas de las funciones que se indican y represéntalas.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Función lineal de pendiente $m = 2$ y pasa por el punto $P(4, 1)$. b) Función lineal de pendiente $m = -1$ y pasa por el punto $P(0, 3)$. c) Función lineal de pendiente $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto $P(3, 2)$. d) Función lineal de pendiente $m = -\frac{3}{5}$ y pasa por el punto $P(1, 1)$. <p>77 Halla la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por estos puntos y represéntala.</p> <p>$A(1, -5)$ $B(2, 1)$ $C\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$</p>

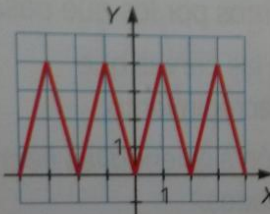
	<p>86 Determina la expresión algebraica de las funciones que pasan por los puntos indicados y representálas.</p> <p>a) (2, 3) y (5, 6) d) (-2, 5) y (-1, -3)</p> <p>b) (1, 5) y (3, 3) e) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ y (2, 3)</p> <p>c) (3, -4) y (1, 1) f) (0, -1) y (4, 0)</p>
--	--

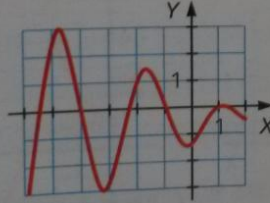
4.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de la ESO

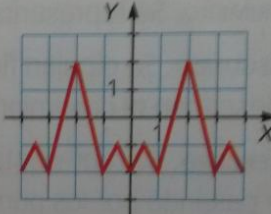
En el libro de texto 3º de la ESO, el bloque de Funciones se divide en dos unidades didácticas: “Funciones” y “Funciones lineales y cuadráticas”. En la primera unidad se desarrollan los aspectos relacionados con la definición de función, formas de representación y sus características. En la segunda unidad, se inicia el estudio de dos familias de funciones (lineales, y cuadráticas).

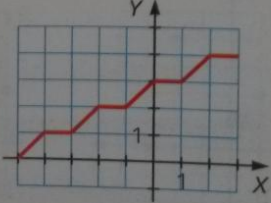
Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Determinar características de funciones mediante su expresión algebraica o representación gráfica.
Ejemplo(s) de enunciado	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 48%;"> <p>19 Indica el dominio y el recorrido de estas funciones que aparecen de las notas de Sara.</p>  </div> <div style="width: 48%;"> <p>20 Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.</p> <p>a) </p> <p>b) </p> </div> </div> <p>62 Indica el dominio, el recorrido, la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos, si existen.</p> <p>a) </p> <p>b) </p>

63 Señala las funciones periódicas y escribe su período.

a) 

b) 

c) 

d) 

17 APLICA. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 7$ b) $f(x) = \frac{3}{4x}$

66 Comprueba si las siguientes funciones son simétricas y si lo son di de qué tipo.

a) $y = x^2 + x$ c) $y = (x - 2)^2$ e) $y = x^3$
 b) $y = \frac{x}{2}$ d) $y = x^2 - 2x^3$ f) $y = \frac{3}{x}$

Tipo de actividad	Cuestión
Descripción	Construcción de funciones según condiciones dadas.
Ejemplo(s) de enunciado	29 ¿Pueden tener los mismos puntos de corte con los ejes dos funciones diferentes? Dibuja la gráfica de dos funciones que cumplan esta condición.
Comentario(s)	La solución se orienta únicamente a nivel gráfico.

Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Cálculo de puntos o rectas característicos de funciones.
Ejemplo(s) de enunciado	26 Halla los puntos de corte con el eje de ordenadas de estas funciones. a) $y = 3 - x$ e) $y = (x - 2)^2$

31 PRACTICA. Calcula el vértice de estas funciones cuadráticas y determina su eje de simetría.

a) $y = -x^2 + 2x - 5$ c) $y = -x^2 - 6x$
 b) $y = -2x^2 + 4x - 3$ d) $y = 3x^2$

32 APLICA. Determina el eje de simetría de la parábola que tiene como puntos de corte con el eje X:


a) (0, 0) y (2, 0) b) (-2, 0) y (2, 0) c) (1, 0) y (4, 0)

74 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 - 6x + 5$ d) $y = 2x^2 - 4x$
 b) $y = x^2 - 4$ e) $y = -4x + x^2$
 c) $y = 3x^2 - 18x + 24$ f) $y = -2x^2 - 6x$

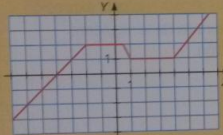
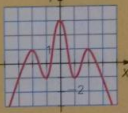
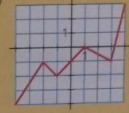
Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.
Ejemplo(s) de enunciado	<p>36 Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.</p> <p>a) $y = x^2 + x$ c) $y = x^2 + 5x$ b) $y = x^2 - 3x$ d) $y = x^2 - 7x$</p>
Comentario(s)	Los valores de las tablas se deja a la iniciativa del estudiante. Pero se suele partir del vértice hacia ambos lados para poder representar la simetría en el caso de las funciones cuadráticas.

Tipo de actividad	Problema
Descripción	Representación gráfica de una función lineal a partir de un enunciado.

<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>95 Dos obreros levantan un muro de 56 cm de altura en dos horas, y a partir de ese momento, solo trabajará uno de ellos debiendo levantar el muro a razón de 17 cm cada hora.</p>  <p>a) Encuentra la función que dé la altura del muro en función del tiempo. b) ¿Qué altura tendrá el muro después de 5 horas? c) Si el muro debe tener 3,11 m de altura, ¿cuánto tiempo tendrá que trabajar el obrero en solitario?</p>
---------------------------------------	---

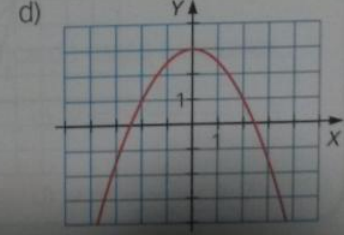
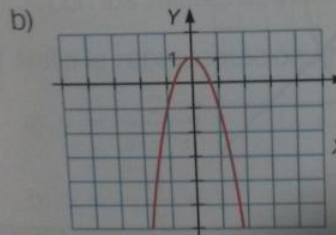
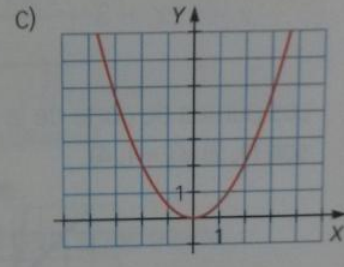
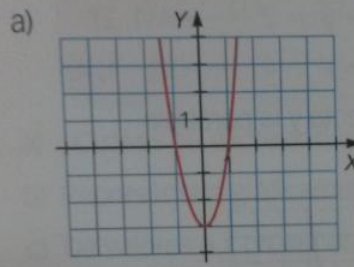
4.5 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de la ESO

En el caso del libro de texto 4º de la ESO, el bloque de Funciones se divide en tres unidades didácticas: “Funciones”, “Funciones polinómicas y racionales” y “Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas”. La primera unidad da un repaso al concepto de función y sus características, la segunda amplía las familias de funciones vistas el año anterior y la tercera unidad expone tres nuevos tipos de funciones.

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Estudio de funciones según su representación gráfica.</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>34 Estudia la siguiente función.</p>  <p>35 Realiza el estudio de las siguientes funciones.</p> <p>a)  b) </p>
<p>Comentario(s)</p>	<p>No está detallado el conjunto de características que el estudiante tiene que determinar, se deja a su iniciativa.</p>

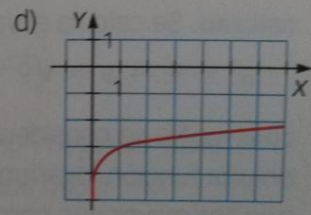
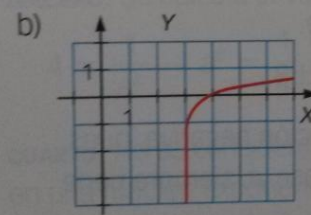
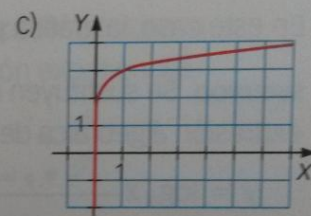
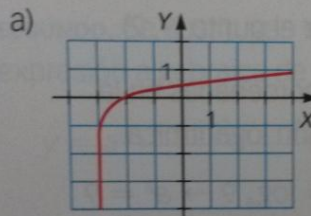
<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
<p>Descripción</p>	<p>Paso de representación gráfica a expresión algebraica de una función, e inversamente.</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	<p>17 Halla la representación gráfica de estas funciones.</p> <p>a) $y = -3x^2 + 4$ d) $y = -x^2 + 9$ b) $y = x^2 - \frac{1}{4}$ e) $y = -x^2 + 3x$ c) $y = 2x^2 - 3x$ f) $y = 4x^2 - x$</p>

52 Determina la expresión algebraica de las siguientes funciones polinómicas de segundo grado.

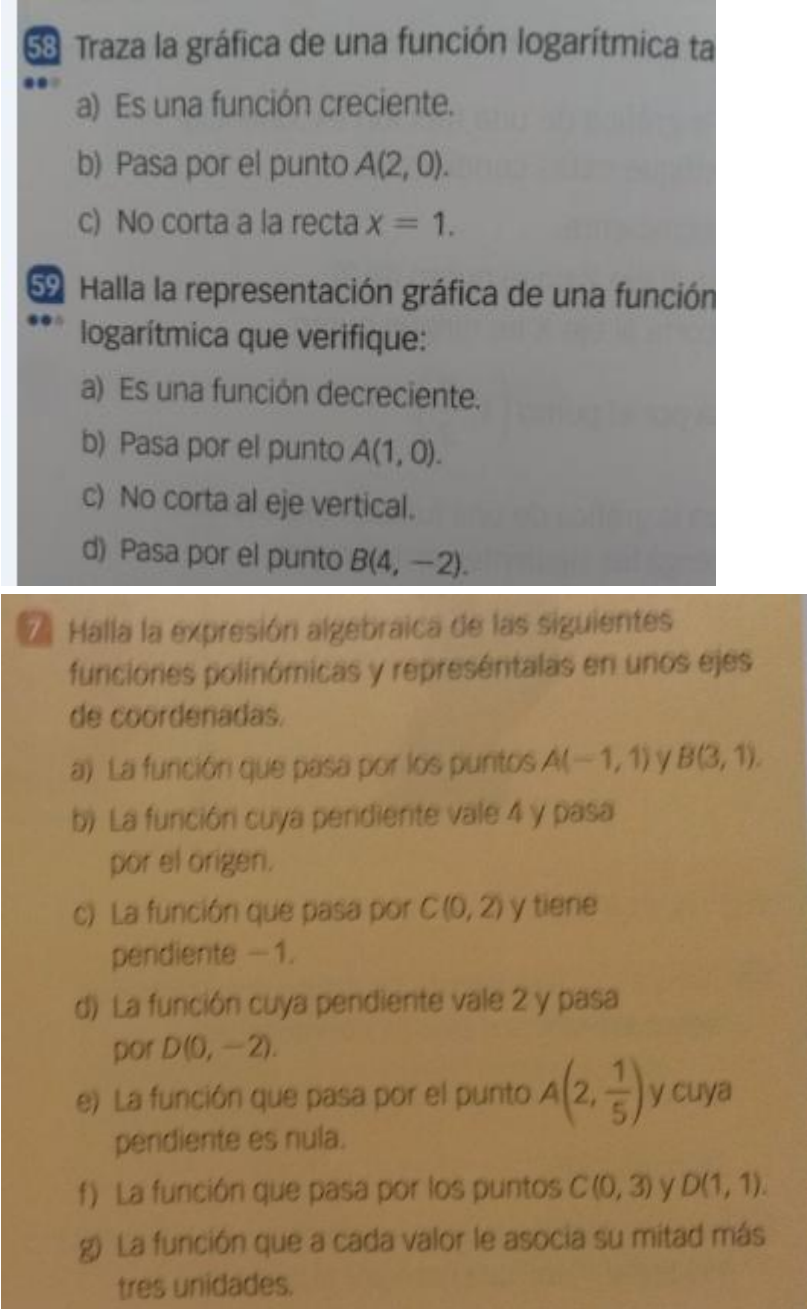


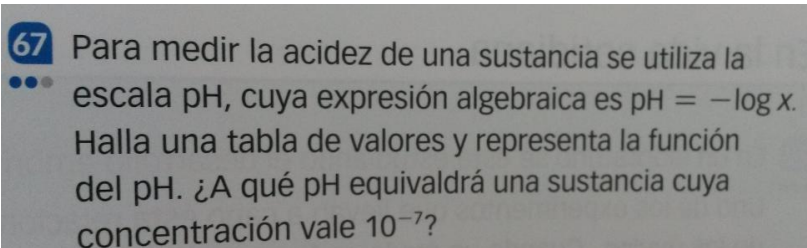
55 Relaciona los gráficos con su expresión algebraica.

$\log x - 3$ $\log(x - 3)$ $\log(x + 3)$ $\log x + 3$

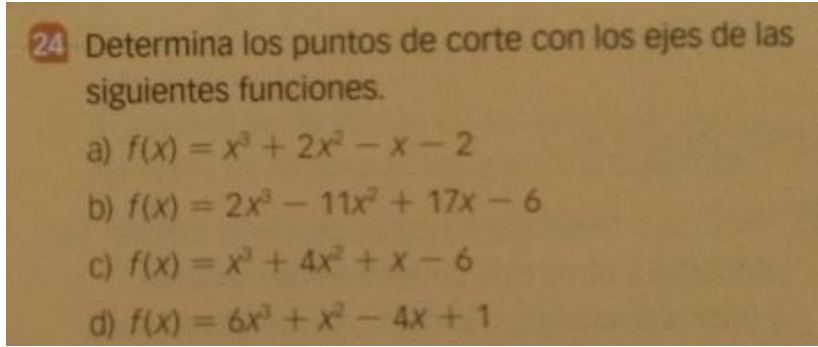


Tipo de actividad	Ejercicio
Descripción	Determinar la representación gráfica o la expresión algebraica de una función según condiciones dadas.

<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	 <p>58 Traza la gráfica de una función logarítmica tal que:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Es una función creciente. b) Pasa por el punto $A(2, 0)$. c) No corta a la recta $x = 1$. <p>59 Halla la representación gráfica de una función logarítmica que verifique:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Es una función decreciente. b) Pasa por el punto $A(1, 0)$. c) No corta al eje vertical. d) Pasa por el punto $B(4, -2)$. <p>7 Halla la expresión algebraica de las siguientes funciones polinómicas y represéntalas en unos ejes de coordenadas.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) La función que pasa por los puntos $A(-1, 1)$ y $B(3, 1)$. b) La función cuya pendiente vale 4 y pasa por el origen. c) La función que pasa por $C(0, 2)$ y tiene pendiente -1. d) La función cuya pendiente vale 2 y pasa por $D(0, -2)$. e) La función que pasa por el punto $A\left(2, \frac{1}{5}\right)$ y cuya pendiente es nula. f) La función que pasa por los puntos $C(0, 3)$ y $D(1, 1)$. g) La función que a cada valor le asocia su mitad más tres unidades.
<p>Comentario(s)</p>	<p>Algunas condiciones pueden dar pie a diferentes respuestas.</p>

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Problema</p>
<p>Descripción</p>	<p>Aplicación en la vida real de un fenómeno regido por una función logarítmica.</p>
<p>Ejemplo(s) de enunciado</p>	 <p>67 Para medir la acidez de una sustancia se utiliza la escala pH, cuya expresión algebraica es $\text{pH} = -\log x$. Halla una tabla de valores y representa la función del pH. ¿A qué pH equivaldrá una sustancia cuya concentración vale 10^{-7}?</p>

<p>Tipo de actividad</p>	<p>Ejercicio</p>
---------------------------------	------------------

Descripción	Resolución de ecuaciones polinómicas de diferentes grados.
Ejemplo(s) de enunciado	 <p>24 Determina los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.</p> <p>a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$</p> <p>b) $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$</p> <p>c) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$</p> <p>d) $f(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$</p>
Comentario(s)	Se trata básicamente de un repaso de otra unidad didáctica (ecuaciones).

Capítulo 5

Resultados

Este capítulo presenta un conjunto de resultados y reflexiones personales sobre los contenidos mencionados en las secciones anteriores. Pretende desarrollar en particular las ausencias y presencias en el currículo así como en los libros de texto. La coherencia entre ambas referencias didácticas será también sujeta a análisis.

5.1 Ausencias y presencias en el currículo

En el currículo de Educación Primaria, no se aborda específicamente un bloque para funciones, no obstante unos primeros elementos ponen ciertas bases contextuales (representación de datos en tabla y gráfico) y conceptuales (proporcionalidad) hacia una futura introducción formal de las funciones. Aunque el último (6º) curso de Primaria puede parecer más propenso a tener contenidos relacionados con funciones, realizamos nuestra búsqueda sobre todos los cursos de primaria.

El bloque 5. *Estadística y probabilidad* que aparece desde primaria nos pareció importante para resaltar los elementos de introducción graduales a la organización de datos en tablas de valores. En efecto, el uso de tablas de valores será una técnica base para representar gráficamente funciones en la ESO. Este bloque nos permite también un primer salto conceptual pasando de valores discretas de una tabla a intervalos de valores, lo que es una introducción encubierta al concepto de continuidad (de los números reales, de las funciones...). En cuanto al bloque 4. *Geometría* es de especial importancia ya que introduce el sistema de coordenadas cartesianas sobre el cual los alumnos de ESO edificarán las representaciones y análisis de las funciones.

Se inicia en el primer curso de la ESO al álgebra que será indispensable para trabajar con las funciones. El contenido se enriquecerá progresivamente (ecuaciones de segundo grado, transformación de expresiones algebraicas, operaciones elementales con polinomios...) para avanzar paralelamente al desarrollo algebraico en funciones.

Las familias de funciones parten del concepto de proporcionalidad (introducido en Primaria). Luego se amplía en 2º de la ESO con funciones lineales y en 3º de la ESO con funciones cuadráticas. Finalmente, el 4º curso propone estudiar la proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica.

En referencia al concepto de proporcionalidad, hay que destacar su aspecto central en la Educación Secundaria: aparece también en contextos del bloque de 4. *Geometría* a través de las semejanzas, razones trigonométricas... pero quisimos ante todo mencionar la enseñanza del propio concepto de proporcionalidad en el bloque de álgebra.

De manera global, se visualiza de forma clara el concepto desarrollado por Jerome Bruner de currículo en forma de espiral: curso tras curso, el contenido se amplía progresivamente pero siempre partiendo de lo visto anteriormente como base a un nuevo contenido.

Una tabla resumiendo la presencia o ausencia de los descriptores mencionados para los estándares de aprendizaje evaluables del currículo refleja básicamente la aparición del álgebra y del análisis de funciones en 1º de la ESO. El grado de importancia dada desde

la primaria a la representación gráfica no se puede reflejar desde el currículo. Sí que se denota un progresivo aumento en el nivel de algebrización relacionado con las funciones, que va lógicamente a la par con el aprendizaje general del álgebra a lo largo de los cursos. Como anteriormente se ha dicho, el abanico de familias de funciones se va agrandando gradualmente, partiendo de funciones de proporcionalidad directa en primaria hasta funciones exponenciales y logarítmicas en 4º de la ESO.

Descriptor	Primaria	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO
Álgebra	x	✓	✓	✓	✓
Representación gráfica	✓	✓	✓	✓	✓
Análisis	x	✓	✓	✓	✓
Familias	✓	✓	✓	✓	✓
Organización de datos	✓	✓	✓	x	✓

Parece anecdótica la aparición en el contenido de 2º de la ESO de un punto mencionando la “Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas”. En efecto el uso de tecnologías se menciona desde el primer curso de Primaria y se repite mínimamente durante todos los cursos en el bloque I *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* (además de aparecer en numeras ocasiones en los otros bloques específicos). A posteriori (3º y 4º de la ESO), este contenido desaparece del bloque de funciones.

Asimismo, la repetida evocación a situaciones de la vida cotidiana en todos los bloques parece redundante al contenido explicitado en el bloque I “Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos”.

5.2 Ausencias y presencias en los libros de texto

Si bien nuestro análisis se basa en una única editorial (Santillana, 2016), lo primero es destacar notables diferencias que pueden existir entre editoriales distintas. Cada casa tiene por supuesto cierto margen pedagógico en su correcta adecuación con el currículo, pero aparecen diferencias en el contenido mismo enseñado en los libros de texto. Muestra de ello es la mención explícita a las rectas de ecuación $x=a$ en la editorial Casals, o las funciones trigonométricas en la editorial Santillana (familia de funciones no mencionado en el bloque de funciones del currículo).

Partiendo de esa observación inicial, constatamos como corolario lógico que cada editorial sigue con gran coherencia sus publicaciones a través de los diferentes cursos de la ESO. El diseño, la estructura y la didáctica asociada a cada editorial no varía, hasta tal punto que se detecta sin esfuerzo la perfecta similitud de contenido teórico de un curso a otro. En el caso de las unidades didácticas dedicadas a las funciones, podemos apreciar dicha repetición que forma parte del diseño en forma en espiral del currículo:

Concepto de función	
1ºESO	<p>2 Concepto de función</p> <p>Una función es una relación que asocia a cada valor de una magnitud un único valor de otra magnitud.</p> <p>Al conjunto de valores de ambas magnitudes lo llamamos variables.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La primera magnitud, x, es la variable independiente. • La segunda magnitud, y, es la variable dependiente.
2ºESO	<p>2 Concepto de función</p> <p>Una función es una relación entre dos variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.</p> <p>x es la variable independiente, y es un valor prefijado; y es la variable dependiente, y su valor depende del valor de x.</p>
3ºESO	<p>1 Concepto de función</p> <p>Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.</p> <p>La variable x se denomina variable independiente, y la variable y, variable dependiente.</p>
4ºESO	<p>1 Concepto de función</p> <p>Una función es una relación entre dos magnitudes, x e y, de forma que a cada valor x de la primera magnitud le corresponde un único valor y de la segunda. Así, x se denomina variable independiente e y es la variable dependiente.</p>

<i>Modos de expresar una función</i>	
1ºESO	<p>3 Expresión de una función mediante una tabla</p> <p>Los pares de valores (x, y) que obtenemos al relacionar dos magnitudes se pueden organizar en una tabla de valores.</p> <p>4 Expresión de una función mediante una ecuación</p> <p>Con la expresión algebraica de una función, $y = f(x)$, podemos obtener, a partir de los valores de x, los valores de la variable dependiente y.</p> <p>5 Expresión de una función mediante una gráfica</p> <p>La gráfica de una función es la representación en un sistema de coordenadas del conjunto de puntos de esa función.</p>
2ºESO	<p>3 Formas de expresar una función</p> <p>3.1. Mediante un enunciado</p> <p>La función que relaciona dos variables se puede expresar mediante un enunciado.</p> <p>3.2. Mediante una tabla de valores</p> <p>Las variables x e y de una función también se pueden escribir como pares (x, y) que se obtienen a partir de una tabla de valores.</p> <p>3.3. Mediante una ecuación</p> <p>La expresión algebraica de una función se escribe como $y = f(x)$ y se denomina ecuación de la función.</p> <p>3.4. Mediante una gráfica</p> <p>Los pares (x, y) de una función son puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesianas. La representación de los puntos es su gráfica.</p>
3ºESO	<p>2 Formas de expresar una función</p> <p>2.1. Función definida por un enunciado</p> <p>La relación entre las dos variables de una función la podemos expresar mediante un enunciado.</p>

	<p>2.2. Función definida por una ecuación</p> <p>En ocasiones, las funciones vienen dadas por una expresión algebraica. La expresión $y = f(x)$ hace referencia a la ecuación de una función.</p>
	<p>2.3. Función definida por una tabla de valores</p> <p>Las variables x e y de una función también se pueden escribir como pares de valores (x, y) que se obtienen de una tabla de valores.</p>
	<p>2.4. Expresión de una función mediante una gráfica</p> <p>Los pares de una función, (x, y), indican puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesianas. La representación de esos puntos es su gráfica.</p>

<i>Continuidad, puntos de corte, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos</i>	
2ºESO	<div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border-radius: 5px; display: inline-block;">4</div> <p>Estudio de una función</p> <p><i>• Dominio y recorrido.</i></p> <p>4.1. Continuidad de una función</p> <p>Una función real es continua si podemos dibujar la gráfica con un solo trazo. En caso contrario, es una función discontinua.</p> <p>4.2. Puntos de corte con los ejes</p> <p>Los puntos de corte con los ejes de una función son los puntos de intersección de su gráfica con los ejes de coordenadas.</p> <p>4.3. Crecimiento y decrecimiento</p> <ul style="list-style-type: none"> • Una función es creciente en un tramo si al aumentar el valor de x también aumenta el valor de y. • Una función es decreciente en un tramo si al aumentar el valor de x disminuye el valor de y. <p>4.4. Máximos y mínimos</p> <ul style="list-style-type: none"> • En los puntos donde la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, se dice que la función alcanza un máximo. • En los puntos donde la gráfica pasa de ser decreciente a ser creciente, se dice que la función alcanza un mínimo.
3ºESO	<p>3.2. Continuidad</p> <p>Una función es continua en los puntos de un intervalo si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.</p> <p>Si al dibujar la gráfica de una función existe algún punto en el que se interrumpe, este es un punto de discontinuidad de la función.</p>

	<p>3.3. Puntos de corte</p> <p>Los puntos de corte con los ejes de una función son los puntos de intersección de la gráfica con ambos ejes de coordenadas.</p> <p>3.4. Crecimiento y decrecimiento</p> <p>Dada una función $f(x)$ y los valores $x = a$ y $x = b$, tales que $a < b$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(b) > f(a)$, la función es creciente entre a y b. • Si $f(b) < f(a)$, la función es decreciente entre a y b. • Si $f(b) = f(a)$, la función es constante entre a y b. <p>3.5. Máximos y mínimos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Una función continua tiene un máximo en el punto $x = a$ cuando pasa de ser creciente a decreciente en ese punto. • Una función continua tiene un mínimo en el punto $x = a$ cuando pasa de ser decreciente a creciente en ese punto.
4°ESO	<p>3.1. Continuidad</p> <p>Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Los puntos donde se interrumpe la gráfica se llaman puntos de discontinuidad de la función.</p> <p>3.2. Puntos de corte con los ejes</p> <p>Al hallar la intersección de la gráfica con los ejes tenemos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los puntos de corte con el eje X, de la forma $(a, 0)$, donde el valor de a se calcula resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. • Los puntos de corte con el eje Y, de la forma $(0, b)$, donde el valor de b se obtiene hallando $f(0)$.

<i>Dominio y recorrido</i>	
3°ESO	<p>3 Características de una función</p> <p>3.1. Dominio y recorrido</p> <ul style="list-style-type: none"> • El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente. Se representa por Dom f. • El recorrido de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se representa por Im f.

4°ESO

2

Dominio y recorrido de una función

- El **dominio de una función** $f(x)$, **Dom f** , es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.
- El **recorrido de una función** $f(x)$, **Im f** , es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente.

La no definición de ciertos conceptos claves en el currículo también da pie a cierto margen didáctico en los libros de texto, y pueden incluso llevar a simplificaciones de dudosa rigurosidad matemática. Así es como los mínimos y máximos son únicamente enseñados como “picos”, es decir valores discretos de una función con dominio a la izquierda y derecha de dicho punto. Los extremos y las “mesetas” no entran en este tipo de definición. El tratamiento de la expresión algebraica de una función también es llamativo: se menciona furtivamente la expresión “ $f(x)$ ” en todos los cursos, pero se usa casi únicamente la formulación algebraica mediante “ y ”. La tabla siguiente da una aproximación del uso de la expresión $f(x)$ en los ejercicios de cada curso. Los porcentajes son muy pobres, aunque se aprecia un aumento creciente del uso. Si bien el concepto de función mediante esa expresión no tiene porque darse en el primer curso donde los alumnos se inician a las funciones a través de la representación gráfica, este “no uso” en cursos posteriores - una vez definido en la teoría - perjudica en mi opinión a la correcta asimilación del concepto de función. El uso de la expresión mediante la variable “ y ” debería de limitarse a la ecuación representativa del gráfico de una función.

Curso	% del uso de la expresión $f(x)$ frente a y en ejercicios
1°ESO	2%
2°ESO	2%
3°ESO	7%
4°ESO	16%

22 Completa en tu cuaderno las siguientes tablas.

a) $f(x) = \frac{x+2}{3}$

x	1	0	-5	
y		2	0	-1

b) $g(x) = \frac{x}{2} + 1$

x	0	4	-6		
y			-1	5	0

c) $h(x) = 4 - 3x$

x		2	-2	0	1
y	0	7			

En el contexto que hemos mencionado (casi ausencia de la expresión $f(x)$ para definir una función), es aún más sorprendente encontrar en uno de los muy escasos ejercicios con esta formulación la presencia de funciones con nombres distintos ($f(x)$, $g(x)$, $h(x)$), en 1° de la ESO.

Otro aspecto no definido en el currículo y que es tratado de diferentes formas en los libros de texto, generando confusión para los alumnos, es la diferenciación entre parámetros y variables. Se usan en efecto para ambos conceptos letras que siguen cierto orden alfabético (a, b, c, k, m, n, x, y...), pero la diversidad de las letras sin aparente justificación genera confusión para los alumnos que ya de por sí tienen dificultades para discernir ambos conceptos. La tabla siguiente recoge como ejemplo las diferentes formulaciones algebraicas de funciones en el libro de texto de 4º de la ESO:

<i>Formulación de parámetros con letras a, b, c, m, n</i>
Las funciones polinómicas de segundo grado son funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
Las funciones polinómicas de primer grado son funciones de la forma $y = mx + n$, y su gráfica es una recta, donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen .
Una función de proporcionalidad inversa es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = \frac{k}{x}$, con $k \neq 0$.
Funciones del tipo $y = \frac{k}{x - a} + b$

Hay que destacar que los libros de texto de la editorial estudiada proponen al final de la sección de ejercicios algunos problemas suplementarios que corresponden a contenidos y procedimientos que figuran en el curso posterior del currículo. Es de pensar que están destinados a aquellos alumnos con facilidades y constituyen por lo tanto una buena opción para el profesor de enriquecer los contenidos dando tareas individuales más adelantadas. Estas secciones se presentan bajo la denominación “más allá” y/o “profundizar”.

Es llamativo el uso mayoritario y generalizado de valores positivos en gráficos y tabla de valores. Esto entra en consonancia con la petición del currículo de presentar ejemplos de la vida cotidiana, que son por lo general datos positivos. En la tabla siguiente, se presentan los porcentajes aproximados del uso de este tipo de valores. Se denota la tendencia a presentar cada vez menos datos únicamente positivos, lo que interpretamos como un aumento de la algebrización en los contenidos y un salto conceptual en la comprensión de las funciones (una función proporcional tiene aplicación directa en la vida real más bien visto en sus valores positivos, pero su estudio analítico se puede generalizar se hace sobre el conjunto de los reales).

Curso	Primer cuadrante (X e Y positivos)	Otros cuadrantes	% uso primer cuadrante
1 ESO	18	6	75%
2 ESO	17	16	52%

3 ESO	20	22	48%
Nota: En 4º de la ESO, se estudian en general funciones con dominio y/o recorrido en \mathbb{R} , por lo tanto el uso de todos los cuadrantes es obligatorio.			

Ciertamente una estadística más fina sería contabilizar aquellos ejercicios que representan una función en el primer cuadrante sin que una contextualización (cifras de fuente real con valores lógicamente positivos) fuerce aquella representación sesgada. Mostramos a continuación una muestra de este tipo de sesgo.

5 Observa la gráfica correspondiente a una función

a) Señala su dominio y su recorrido.
b) ¿Es una función continua?
c) Estudia su crecimiento y su decrecimiento.
d) Señala sus máximos y mínimos, si los tiene.

Identificar la gráfica de una función

43 Indica si estas gráficas son de una función.

a)

b)

PRIMERO. Se determina si a algún valor de x le corresponde más de un valor de y .

a)

b)

SEGUNDO. Si ocurre así, la gráfica no corresponde a una función; es el caso de la gráfica a). En caso contrario, sí es una función; es el caso de la gráfica b).

Ambos ejercicios presentan funciones con representación gráfica únicamente en el primer cuadrante (valores de X e Y positivos) sin ninguna necesidad de ello. Los ejercicios son totalmente descontextualizados: sin un enunciado que pueda forzar los valores en los ejes ni magnitudes que puedan dar significado a ambas variables. De hecho, para el segundo ejercicio, no hay ni siquiera necesidad de dibujar los ejes para que el ejercicio guarde todo su sentido.

5.3 Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Los libros de texto siendo la principal referencia usada para la aplicación del currículo en la enseñanza, es de vital importancia poder destacar la correcta adecuación entre ambos soportes. Sus estructuras son por lo general perfectamente calcadas a la descomposición temática y a la secuencia propuesta por el currículo (si obviamos el bloque 1 *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas*).

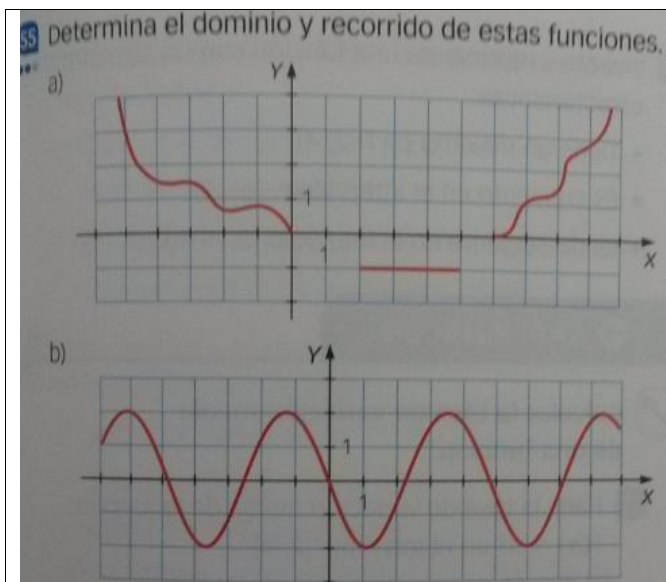
A nivel de adecuación de contenido, nos podemos percatar de dos divergencias llamativas. La primera es el uso explícito del término “afín” en el bloque de funciones de 2º de la ESO del currículo, diferenciado del tipo de función lineal (entendido como de proporcionalidad directa). A cambio, el libro de texto menciona las funciones lineales entendidas como afines, y las de proporcionalidad directa entendidas como lineales. Curiosamente en los cursos siguientes (3º y 4º de la ESO), el currículo solo menciona el término “lineal”, lo cual se tiene que interpretar de nuevo como “afín”. Sobre este punto, está generalizado el hecho de empezar con la enseñanza de la función de proporcionalidad directa (caso particular) para llegar a la función afín (caso general). Este punto de partida está en coherencia con el aprendizaje progresivo que se inicio desde primaria con la enseñanza de la proporcionalidad en todas sus aplicaciones (semejanza, fracciones equivalentes, magnitudes proporcionales...).

Otro punto a destacar es la enseñanza de las funciones trigonométricas en 4º de la ESO mientras no viene especificado en el currículo. Ciertamente los alumnos de este curso se han iniciado recientemente a través de la unidad didáctica “*Trigonometría*” a las razones trigonométricas coseno, seno y tangente. Son además funciones muy interesantes para ejemplificar el concepto de periodicidad.

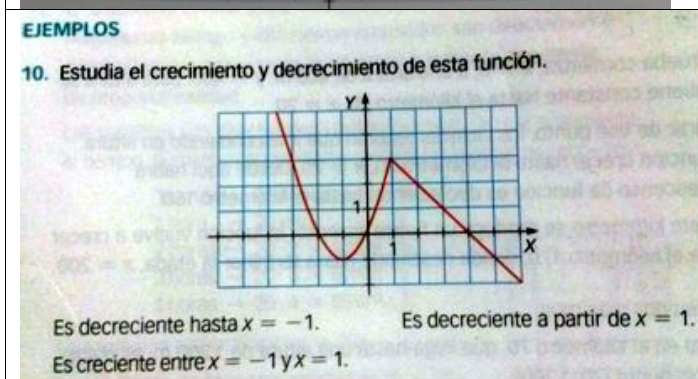
Un aspecto fundamental y de gran dificultad cognitiva es el concepto de continuidad. Esta característica se menciona en el currículo desde 1º de la ESO, pero es ausente en el libro de texto de dicho curso. Aparece explícitamente como característica de las funciones en 2º de la ESO. No obstante, la definición simplificada y únicamente gráfica refleja bien la dificultad conceptual asociada: “*una función es continua si podemos dibujarla de un solo trazo*”. Desde la primaria se ha construido funciones a partir de tablas de valores, y por lo tanto a través de valores discretos. La tendencia a lo largo de los cursos es de reducir el uso de tablas de valores (quitando 4º de la ESO donde hay un repunte del uso de tablas para poder representar gráficamente nuevas familias de funciones).

Asimismo, el salto cualitativo para asimilar la propiedad de continuidad de las funciones se da también con la introducción en 2º y 3º de la ESO de los intervalos para definir los tramos de crecimiento, decrecimiento, el dominio y el recorrido. Las tablas de valores y la representación de los ejes y de puntos discretos con valores de variables X e Y enteros es ciertamente más cómoda, pero no ayuda en hacer intuir la continuidad de los valores en los ejes, aunque los alumnos ya tienen cierta idea de la continuidad de la recta de los reales. Ya saben desde primaria agrupar datos construyendo rangos de datos cuando trabajan con ciertos valores continuos en estadístico. En la ESO, la casi no presencia de valores decimales en los ejes o tablas de valores entorpece la percepción de “continuidad” de los valores en los ejes, y por lo tanto de la propia función estudiada.

Otro tratamiento camuflado del concepto de continuidad es la definición y representación del dominio de una función. Mientras nos basamos en tablas de valores y gráficos (1º y 2º de la ESO), parece que la función no está definida más allá de los valores extremos mencionados en la tabla o los límites visuales de los ejes en el gráfico. Es llamativo el hecho de que no se dibujan en ningún momento y en ninguno de los libros de texto líneas discontinuas para indicar que la función sigue definida más allá de su representación gráfica, incluso en 4º de la ESO. El concepto de dominio se trata únicamente a través de la formulación algebraica.



¿Las funciones siguientes están definidas más allá sus representaciones gráficas? Por consiguiente, ¿cuáles son sus dominios y recorridos? ¿Una formulación algebraica de las funciones daría otra respuesta?



“Es decreciente hasta...”; “Es decreciente a partir de ...”: no se dice y queda por lo tanto indefinido el “comienzo” y el “final” de la función. Eso genera legítimas dudas entre los alumnos en cuanto al dominio de la función.

También en relación con este aspecto, el uso del concepto y símbolo de infinito ∞ es escasísimo en los libros de texto, y ausente en el currículo. Está en relación con la carencia anteriormente mencionada, y las pocas veces que encontramos el concepto, está camuflado debajo de la notación del conjunto de los reales \mathbb{R} para definir el intervalo $(-\infty; +\infty)$. Incluso en la unidad didáctica sobre números reales no se explicita.

Desde 3º de la ESO, se observa un salto cualitativo en el currículo en el análisis de las funciones que va a la par con el aprendizaje de la formulación y la manipulación algebraica. Este salto se refleja de manera cuantitativa si nos fijamos en el número de ejercicios puramente algebraicos en cada curso. El uso de tablas de valores decrece junto a esta “algebrización” creciente, aunque el apoyo gráfico mantiene niveles parecidos en proporción. En efecto, la representación y la interpretación gráfica son ampliamente señaladas hasta 4º de la ESO en el currículo. Permiten de hecho de un nivel de simbolización alto de conceptos formales (infinito, asíntotas, crecimiento, decrecimiento...). La tabla siguiente recoge aproximadamente la evolución de la base de partida de los ejercicios propuestos en los libros de texto, apreciándose con especial énfasis el creciente nivel cuantitativo de algebrización.

Curso	Punto de partida de los ejercicios			
	Gráfico	Enunciado	Tabla de valores	Álgebra
1ºESO	19	26	12	16
2ºESO	25	28	7	12
3ºESO UD1	32	16	3	18
3ºESO UD2	15	28	1	34
4ºESO UD1	26	22	4	49
4ºESO UD2	23	18	6	59

Junto a la algebrización progresiva podemos apreciar una marcada disminución de los ejercicios y problemas presentados en un contexto de la vida cotidiana, con magnitudes reales que los alumnos pueden identificar e interpretar (precio, tiempo, peso, ...). Las referencias a las aplicaciones en contextos reales son constantes en el currículo y en todos los cursos, tanto en los bloques específicos (*bloque 4. Funciones* en nuestro caso) como en el bloque transversal *bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas*. Pero queda a la vista que es difícil mantener el mismo nivel cuantitativo de ejercicios contextualizados según se avanza en los cursos, donde la algebrización creciente requiere de un mayor número de ejercicios mecánicos de álgebra “pura” para entrenar los alumnos a los procedimientos de cálculo.

Curso	Ejercicios contextualizados	Ejercicios no contextualizados	% ejercicios contextualizados
1 ESO	27	71	28%
2 ESO	29	71	29%
3 ESO UD1	14	67	17%
3 ESO UD2	20	82	19%
4 ESO UD1	6	90	6%
4 ESO UD2	7	98	6%

En cuanto a ciertas características de las funciones (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos...), aparecen explícitamente en los contenidos del currículo de 1º de la ESO, pero el libro de texto no los enseña formalmente como punto teórico, sino que introduce estos conceptos mediante preguntas indirectamente relacionadas en ejercicios contextualizados y analizando gráficas: “¿Cuál ha sido la temperatura más alta?”, “¿Ha parado el corredor en algún momento?”... En cursos posteriores, se explicitan y se explican matemáticamente en los apartados teóricos de las unidades didácticas.

Parte II:

Análisis de un proceso de aprendizaje del concepto de función en 2º ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de aprendizaje sobre el concepto de función con alumnos de 2º de ESO.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En los dos primeros se estudia el contenido de funciones en el libro de texto de referencia, y se establecen los posibles errores y dificultades previsibles en el aprendizaje.

Posteriormente, en el penúltimo capítulo se explica la implementación del proceso de estudio en el grupo en cuestión. Finalmente, en el último capítulo se desarrolla la experimentación de dicho proceso en el aula.

Capítulo 6

Las funciones en el libro de texto de referencia de 2º de la ESO

Tras analizar longitudinalmente los aspectos relacionados con funciones en cursos inferiores y superiores al curso impartido en el Prácticum II, nos centraremos en el libro de texto de referencia usado en 2º de la ESO analizando los objetos matemáticos involucrados y la unidad didáctica propiamente dicha.

6.1 Objetos matemáticos involucrados

Presentamos a continuación los objetos matemáticos involucrados en la unidad didáctica de funciones tal y como se definieron por Godino et al., 2006 para ser descritos: lenguaje, conceptos, procedimientos, situaciones, propiedades y argumentos.

6.1.1. Lenguaje

Tipo de lenguaje	Contenido
Verbal	<ul style="list-style-type: none"> - Función, magnitud, relación, correspondencia, variable dependiente e independiente, imagen. - Representación gráfica, enunciado, tabla de valores, ecuación. Ejes cartesianos, origen de coordenadas, eje X, eje Y, abscisa, ordenada, ordenada en el origen, cuadrantes, puntos de corte con los ejes. - Número real, número natural, intervalos, unión de intervalos. - Crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo, función continua, discontinua, función definida a trozos. - Recta, constante de proporcionalidad, pendiente. - Función de proporcionalidad, función lineal, función constante.
Gráfico	<ul style="list-style-type: none"> - Representación en ejes cartesianos, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, tablas de valores, puntos de corte con ejes. - Funciones proporcionales, pendiente de una recta, funciones lineales, funciones constantes. - Recta, curva. - Funciones continuas y discontinuas.
Simbólico	<p>Expresiones algebraicas de ecuaciones y funciones. ($y=2x+3$ y $f(x)=2x+3$)</p> <p>Números naturales \mathbb{N} y reales \mathbb{R}, intervalos cerrados $[a,b]$.</p>

6.1.2. Conceptos

Tipo de lenguaje	Contenido
Previos	<p>Representación gráfica, ejes cartesianos, ordenada en el origen, ordenada, abscisa, punto de coordenadas, proporcionalidad, ecuación, valores directamente proporcionales, recta, tabla de valores, eje X, eje Y, función, variable dependiente e independiente.</p>

Emergentes	Crecimiento, decrecimiento, constante, máximo y mínimo, pendiente, función lineal, función de proporcionalidad directa, función constante, unión de intervalos, función continua o discontinua, ordenada en el origen, puntos de corte.
------------	---

6.1.3. Procedimientos

Muchos de los procedimientos aparecen explícitamente en el libro de texto bajo la apelación “Saber hacer”.

- Determinar las coordenadas de un punto y saber colocar un punto según sus coordenadas.
- Representar una función a partir de una tabla de valores, de un enunciado, o de una ecuación.
- Determinar la ecuación correspondiente a una representación gráfica.
- Determinar si un punto pertenece a la gráfica de una función.
- Determinar los puntos de corte con los ejes de forma gráfica y algebraica.
- Estudiar una función mediante intervalos y/o puntos: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
- Determinar la continuidad y discontinuidad de una función a partir de su representación gráfica.
- Determinar el tipo de función lineal (proporcional, constante, lineal).
- Determinar la ecuación de una función de proporcionalidad directa o constante conociendo uno de sus puntos.
- Determinar la ecuación de una función lineal conociendo dos de sus puntos.
- Determinar la ecuación de una función lineal conociendo la pendiente y un punto.

6.1.4. Situaciones

- Problemas *descontextualizados* en los que se pide la representación gráfica de una función partiendo de su expresión algebraica.
- Problemas *descontextualizados* en los que se pide determinar algunas características de una función a partir de su gráfica o expresión algebraica.
- Problemas *contextualizados* en los que se pide determinar la expresión algebraica de una función a partir de un enunciado.
- Problemas *contextualizados* en los que se pide interpretar las características de una función a partir de su representación gráfica.

6.1.5. Propiedades

- Una función relaciona dos variables designadas por X (variable independiente) e Y (variable dependiente) y asocia a cada valor de X un único valor de Y.
- Una función es creciente en un intervalo cuando al aumentar la X aumenta la Y. Es decreciente si, al aumentar la X, disminuye la Y. Si mantiene el mismo valor todo el intervalo, se dice que es constante en dicho intervalo.
- El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama máximo absoluto de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, mínimo absoluto.
- Los puntos de corte con el eje Y tienen coordenadas de la forma (0,Y). Los puntos de corte con el eje X tienen coordenadas de la forma (X,0).
- Una función es continua en un punto si en ese punto la gráfica de la función no presenta saltos o interrupciones. Si no, es discontinua.
- Se llama función de proporcionalidad la función que relaciona dos variables directamente proporcionales. Su ecuación $y=mx$ se representa mediante una recta que pasa por el origen (0,0).
- La constante de proporcionalidad m corresponde a la pendiente de la recta. Si es estrictamente positiva, la recta es creciente. Si es estrictamente negativa, la recta es decreciente.
- La ecuación de una función lineal o afín $y=mx+n$ representa una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto (0,n). A n se le llama ordenada en el origen.
- La ecuación de una función constante es $y=n$, donde n es la ordenada en el origen. Es una función lineal de pendiente nula.
- Dos ecuaciones con la misma pendiente representan rectas paralelas.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

Analizamos en este apartado la unidad didáctica referente a funciones en 2º de ESO. Las unidades en el libro de texto exhiben sistemáticamente el siguiente patrón:

- Una portada en doble página con un apartado para recordar conocimientos previos, un aspecto de la vida cotidiana relacionado con el tema a modo de motivación de partida y un recuadro con los objetivos de contenido (nociones y procedimientos) de la unidad.
- Los apartados teóricos con el desarrollo de un ejemplo concreto y algunos pequeños ejercicios. En el caso de la unidad de funciones, las secciones son las siguientes:

Apartado	Título
1	Coordenadas cartesianas
2	Concepto de función

3	Formas de expresar una función
4	Estudio de una función
5	Funciones de proporcionalidad directa
6	Funciones lineales

- Ejercicios finales siguiendo la estructura y el orden de los apartados teóricos. Junto a ellos, hay que mencionar algunos ejercicios con solución incluida que presentan los procedimientos básicos a conocer para la resolución de preguntas típicas. Al final de esta sección se proponen problemas, por lo general contextualizados. Un último recuadro plantea una recopilación de ejercicios a modo de repaso general.
- Una doble página final presenta problemas de ampliación, una idea de proyecto y algunos ejercicios de referencia dados en las pruebas PISA. El primer de estos ejercicios hace directamente referencia a la temática abordada en la primera doble página, con un ejercicio práctico sobre aquel contexto.

El orden de los apartados teóricos es bastante intuitivo: bases para la representación gráfica, definición del concepto de función, formas de representación, propiedades generales y tipos de funciones. Corresponde a un estudio que parte de nociones generales hacia un aumento progresivo del uso del álgebra. No se aprecia una diferenciación del nivel de dificultad entre los ejercicios, exceptuando el contenido de la última doble página y un pequeño recuadro proponiendo un “reto”.

6.3 Otros aspectos relevantes

6.3.1 La unidad didáctica de funciones dentro del curso

Es primordial situar la unidad didáctica de funciones respecto a otras unidades que se han abordado anteriormente en el curso: cuatro de ellas se relacionan de manera directa con las funciones y/o anticipan aspectos claves para la comprensión de nuestro tema de referencia. Mencionaremos las siguientes unidades:

- *Expresiones algebraicas*: Se enseñan operaciones con monomios y polinomios, así como igualdades notables. Hay que resaltar que en esta unidad didáctica se trabajan al 99% con coeficientes numéricos asociados a variables representadas con letras. Es decir que no se trabaja todavía con letras que representan parámetros.
- *Ecuaciones de primer y segundo grado*: El nombre de esta unidad no da lugar a duda sobre su contenido: define ambos tipos de ecuaciones y enseña su resolución en el conjunto de los reales. Es notable la aparición de los parámetros -junto a variables- sin que sean definidos y explicados como tal. No es de extrañar por lo tanto que surjan posteriormente dificultades en la diferenciación entre los conceptos de variable y parámetro, llegando hasta avanzadas edades.

Una **ecuación de primer grado** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se puede expresar de la forma $ax + b = 0$, con a y b números reales y $a \neq 0$.
Esta ecuación tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$.

- *Sistema de ecuaciones*: Trata sobre ecuaciones lineales de dos incógnitas que son por lo tanto ecuaciones de rectas, y que corresponderán en la unidad de funciones a funciones lineales o afines (si obviamos la ecuación de la “no función” $x=a$). El aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales permitirá también resolver ejercicios algebraicos relacionados con las funciones (determinar la ecuación de una función conociendo dos de sus puntos, o conociendo su pendiente y un punto,...).
- *Proporcionalidad numérica*: Esta unidad didáctica es importante para introducir el concepto de constante de proporcionalidad directa así como para ejercitar los alumnos a la elaboración de tablas de valores.

Del correcto aprendizaje y asimilación de aquellas unidades dependerá parte del éxito de la enseñanza de la unidad de funciones. El docente que desconozca el nivel del grupo en cuestión antes de empezar el tema de funciones tendrá gran interés en averiguar en qué grado aquellas bases son conocidas y entendidas, mediante un primer test de diagnóstico por ejemplo.

6.3.2 Interdisciplinariedad de las funciones

Los alumnos no abordan exclusivamente el concepto de funciones en la asignatura de Matemáticas. Los docentes de esta materia con razón alaban su aplicación universal en infinitos campos de la vida cotidiana. No es por lo tanto de extrañar que otras asignaturas científicas como Física-Química, Biología-Geología (en 1º de la ESO ya que no se cursa en 2º) y Tecnología presenten tácitamente funciones bajo sus diferentes representaciones: algebraica, gráfica y numérica (tabla de valores). El aspecto transversal de las funciones llega incluso hasta la asignatura de Historia-Geografía a través de sus sistemas de coordenadas en mapas, tablas de valores y gráficos varios. Damos a continuación algunos ejemplos que localizamos en dichas materias, junto a unos breves comentarios personales. Es interesante comprobar que algunas materias están “adelantadas” en nociones que se verán más adelante en la asignatura de Matemáticas (función definida a trozos en Física-Química), y que se dan también algunas definiciones que se ajustan al contenido teórico en Matemáticas (sistema de coordenadas por ejemplo).

Física-Química

3.2. ¿Cómo se calcula la aceleración?

Para calcular la aceleración, aplicamos la siguiente fórmula:

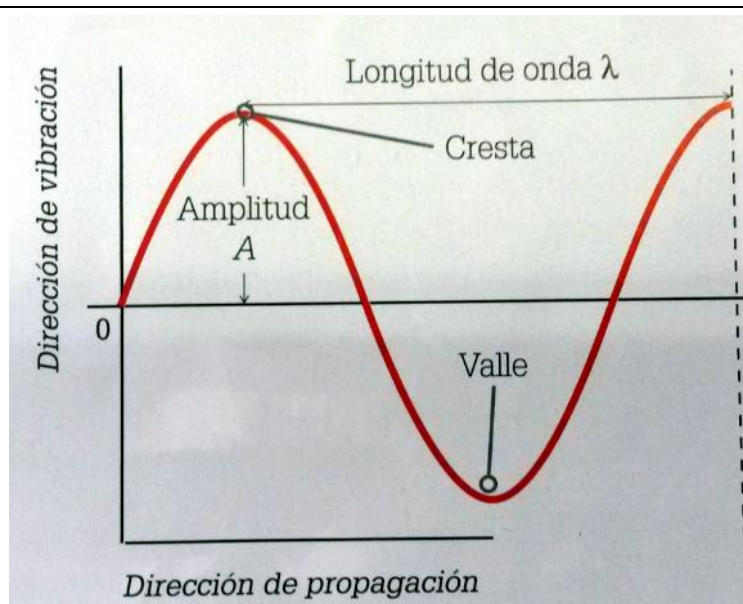
$$a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

Simbolo	Magnitud	Unidades del Sistema Internacional
v_f	Velocidad. En este caso, velocidad final alcanzada por el móvil.	m/s
v_0	Velocidad. En este caso, velocidad inicial con la que sale el móvil.	m/s
t	Tiempo transcurrido	s
a	Aceleración	m/s ²

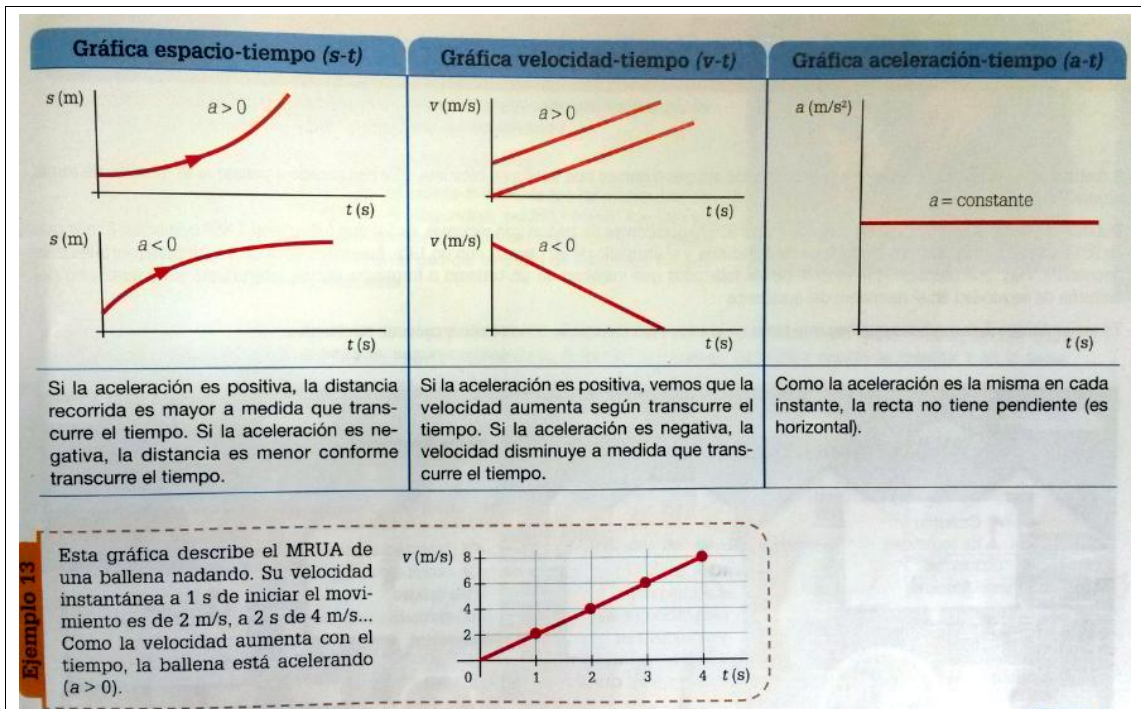
Se llama **energía cinética** a la energía que poseen los cuerpos en movimiento. Los dos factores de los que depende la energía cinética son la velocidad del cuerpo y su masa:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

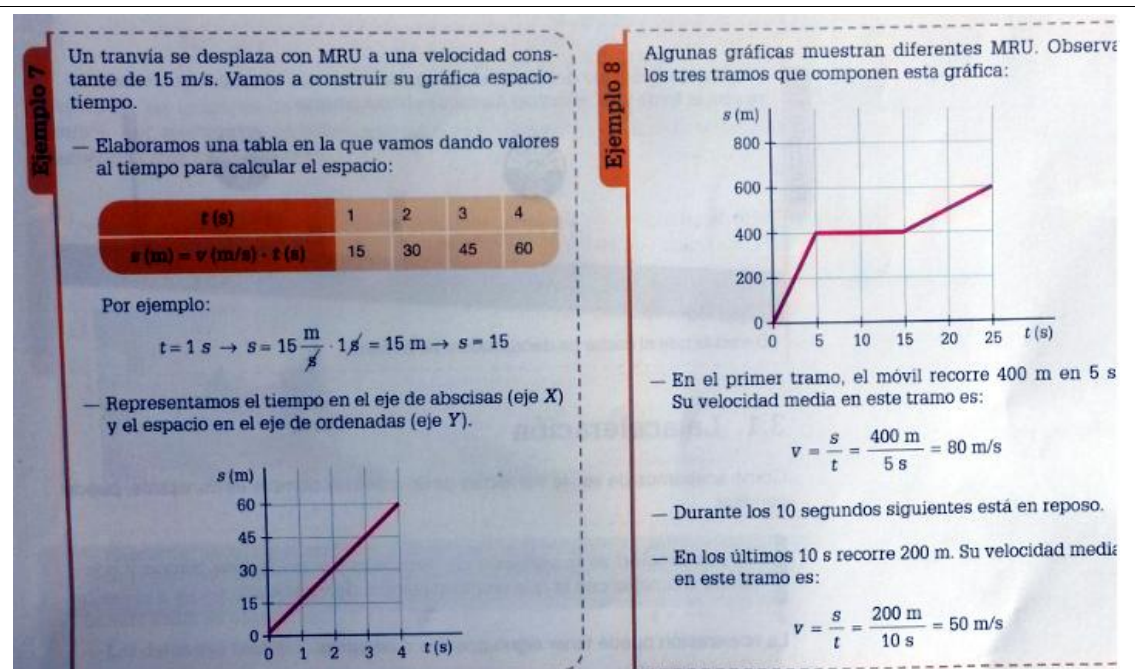
Las ecuaciones en Física-Química se aparentan más al concepto de "formula", es decir que la notación no explicita que una variable es función de otra. Ciertamente suele haber más de una variable independiente, lo que complicaría innecesariamente la notación ("E(m,v)" en el segundo ejemplo).



En este gráfico se interpretan los máximos y mínimos como crestas y valles de una función.



Se presentan en este apartado explicativo diferentes tipos de funciones: de proporcionalidad directa, lineales y constantes, entre otras.



El ejercicio de la izquierda pone en relación tabla de valores, cálculo de la constante de proporcionalidad y representación gráfica. El ejercicio de la derecha hace un análisis del gráfico por intervalos según la pendiente de crecimiento, calculando en cada caso su valor. Hay que resaltar que el contenido matemático es más avanzado en la materia de Física-Química en este caso, pues en la unidad de funciones todavía no se aborda en 2º de la ESO el estudio de funciones definidas a trozos ni el cálculo de la pendiente de manera gráfica en la editorial usada.

Biología-Geología

25 Egin klimograma bat taulako datuetan oinarrituta.

Hila	U	O	M	A	M	E	U	A	I	U	A	A
Temperatura	25	26	26	26	25	24	24	25	25	26	26	26
Plubiositatea	20	50	90	80	90	120	110	110	130	130	70	40

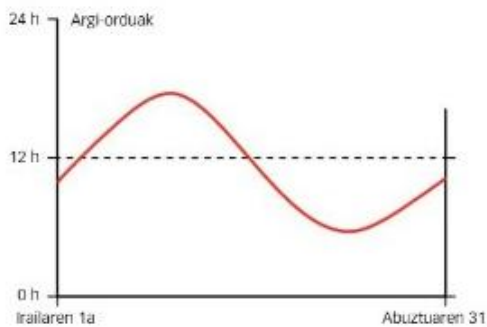


Tabla de valores y representación gráfica.

EGITEN JAKIN

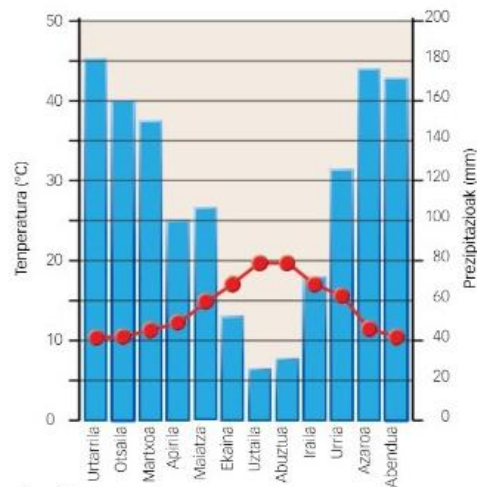
Klimograma bat interpretatzea

Klimograma bat inguru jakin batean urtebetean izandako batez besteko temperaturen eta prezipitazio osoen adierazpen grafikoa da, hilez hil adierazita.

Plubiositatearen edo euri kopuruaren balioak milimetrotan (mm) adierazten dira, urdinez, eta batez besteko temperaturen balioak gradu zentigradutan (°C), gorriz.

JARDUERAK

- 20 Zein dira hilabete hotzenak? Eta beroenak? Zer temperatura-alde dago horien artean? Alde handia iruditzen zaizu, edo ez horrenbestekoa?
- 21 Zein da hilabete euritsuena? Eta lehorrena? Kalkulatu urteko euri kopuru osoa. Horretarako, batu plubiositatearen balio guztiak.
- 22 Kalkulatu urteko batez besteko temperatura.
- 23 Zure ustez, badago loturarik temperaturen eta prezipitazioen artean?

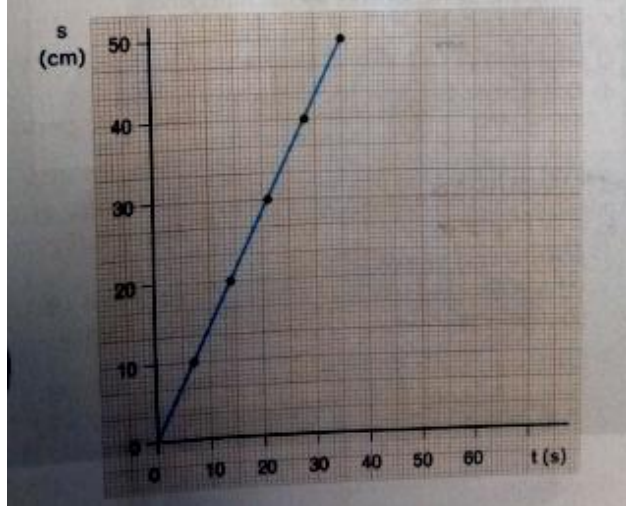


Análisis de la representación gráfica de una función: dominio, recorrido, máximo, mínimo...

3. Anotamos los resultados. Con los datos obtenidos, realizamos una tabla de espacios recorridos y tiempos.

Espacio recorrido (s) en cm	10	20	30	40	50
Tiempo (t) en s	7	14	21	28	35

4. Representamos la gráfica espacio-tiempo. Dibujamos unos ejes de coordenadas. En ordenadas (X) marcamos los valores de las distancias, y en abscisas (Y), los valores del tiempo. Con los datos obtenidos en el experimento realizamos la gráfica. Si se ajusta a una recta, el movimiento de la bolita habrá sido uniforme. La inclinación de la recta nos informa de la velocidad de caída.

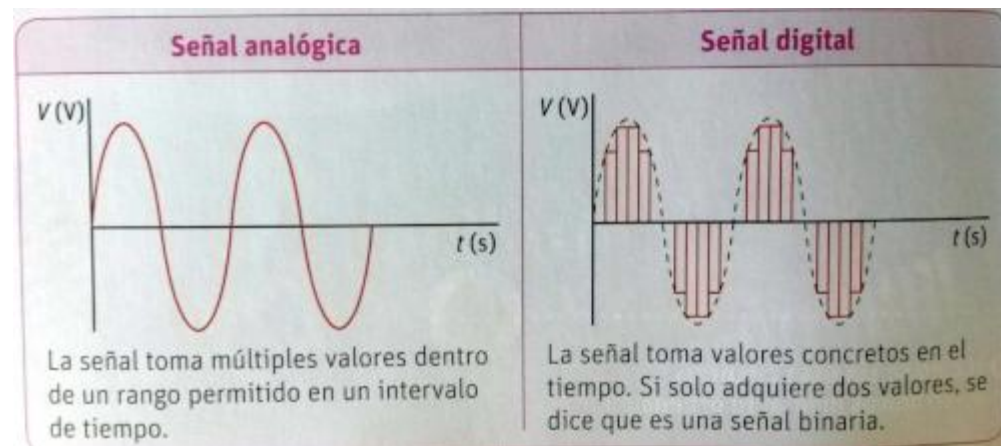


Obtención de la representación gráfica de una función de proporcionalidad directa a partir de una tabla de valores. Interpretación de la pendiente.

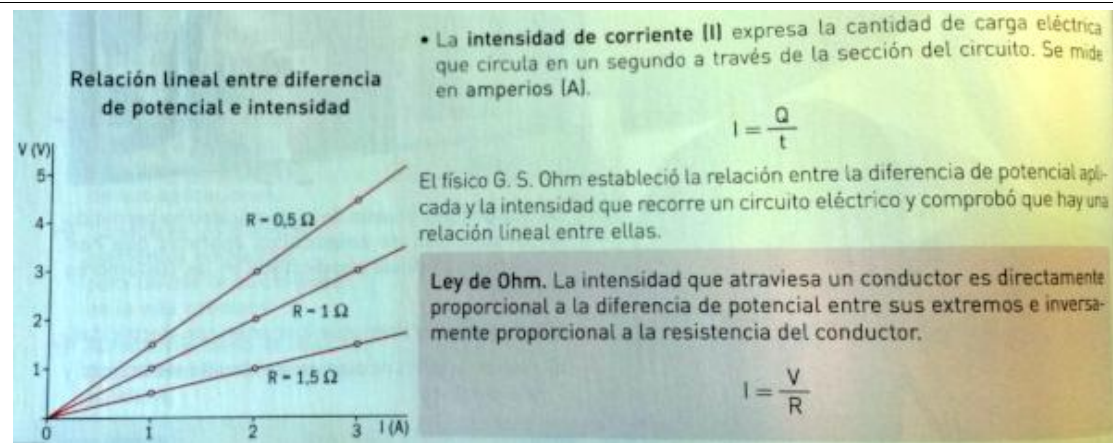
Tecnología

Magnitud	Definición	Expresión matemática	Notación
Fuerza	Es el empuje para modificar el movimiento de un cuerpo o deformarlo.	$F = m \cdot a$ Unidad: newton (N)	m : masa (kg) a : aceleración (m/s ²)
Momento de una fuerza	Es el producto de la fuerza por la distancia al punto de aplicación. Las fuerzas provocan desplazamientos y los momentos, rotaciones o giros.	$M = F \cdot r$ Unidad: N m	F : fuerza (N) r : distancia (m)
Potencia mecánica	La potencia mecánica de un eje de rotación es el producto del momento de giro (par) por la velocidad angular.	$P = M \cdot \omega = F \cdot r \cdot \omega$ Unidad: vatio (W)	P : potencia (W)
Energía mecánica	Los objetos en movimiento tienen energía cinética y los que están situados a una determinada altura tienen energía potencial. La suma de ambas energías se denomina energía mecánica.	$E_m = E_{cinética} + E_{potencial}$ $E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$ Si se desprecian las pérdidas por rozamientos: $E_m = W = P \cdot t$ Unidad: julio (J)	E_m : energía mecánica (J) v : velocidad lineal (m/s) g : gravedad (m/s ²) h : altura del objeto (m) W : trabajo realizado (J) t : tiempo (s)

Al igual que en la asignatura de Física-Química, las ecuaciones propuestas son “formulas” que no expresan la dependencia de una variable con otra.



Representación gráfica de funciones e interpretación práctica del concepto de continuidad en la señal analógica. Funciones periódicas.



Funciones de proporcionalidad directa con representación gráfica para varios

valores de la constante de proporcionalidad.



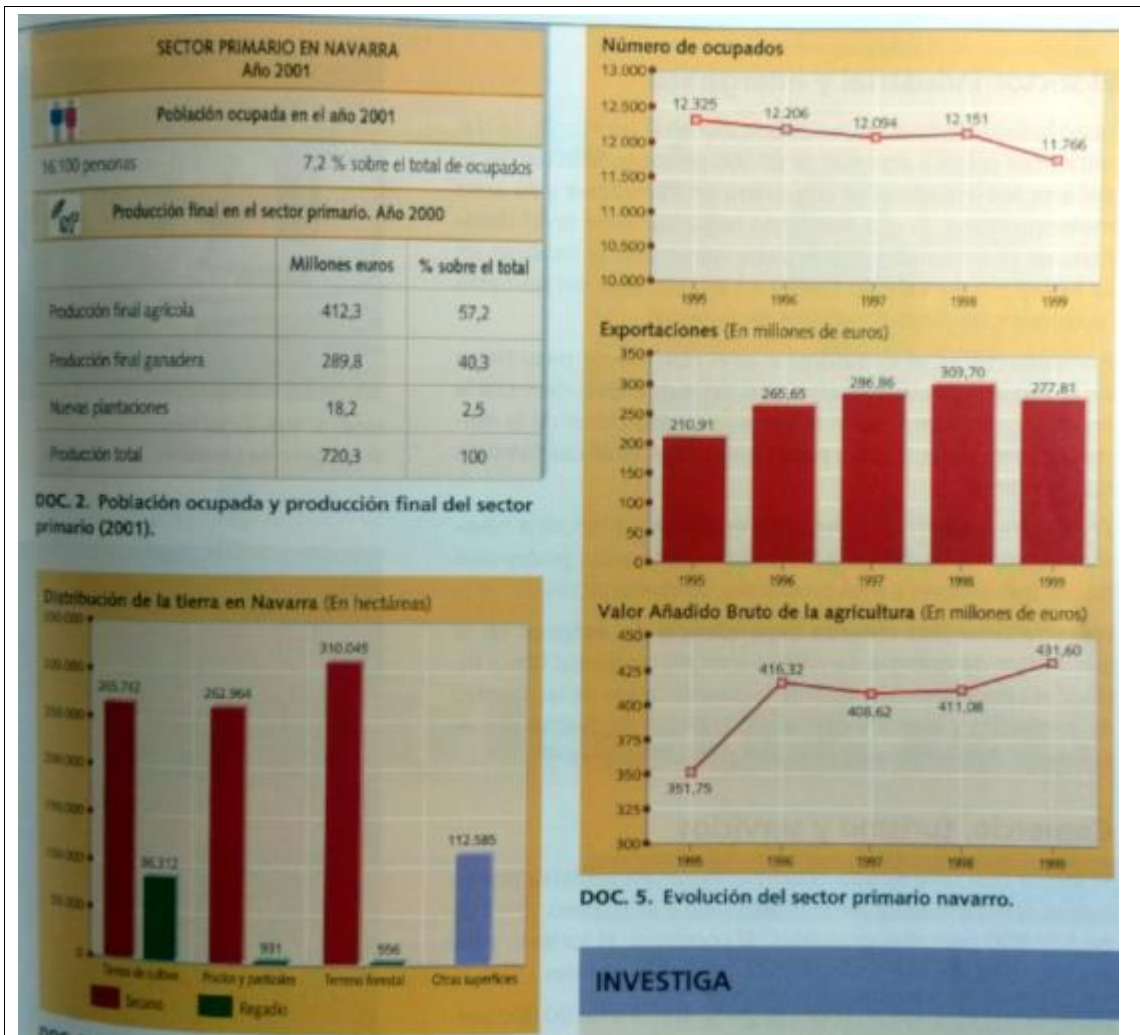
Líneas, gráficos XY (dispersión) o áreas. Expresan la relación entre parejas de valores numéricos para su representación en ejes cartesianos de abscisas (x) y ordenadas (y), lo que resulta útil en la valoración de tendencias para establecer predicciones. Cuentan con numerosos subtipos, en 2D, 3D, con marcadores en los puntos, con líneas suavizadas, etc.

Explicación teórica del vocabulario propio de un sistema de coordenadas cartesiano.

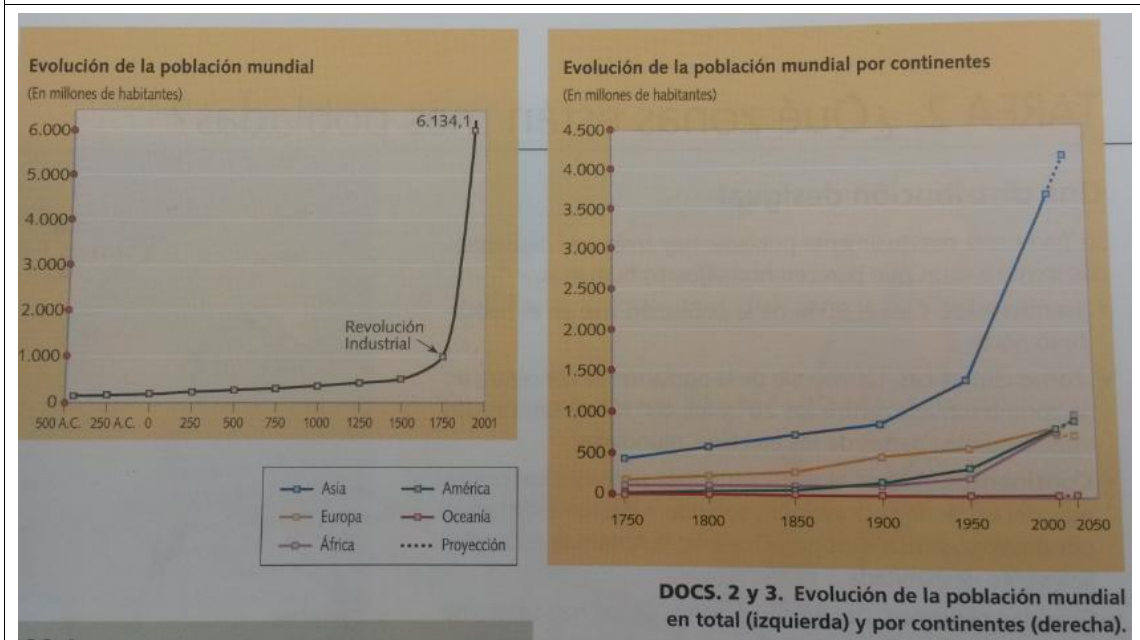
Historia-Geografía



Referencia indirecta a un sistema de coordenadas (longitud, latitud).



Uso general de diferentes tipos de gráficos a partir de valores discretos. Análisis de los mismos.



Unión con segmentos o curvas entre valores discretos de una representación gráfica.

6.3.3 Unidad didáctica en el libro de texto: comentarios generales

Ya aludimos ciertas cuestiones didácticas en el capítulo 5, refiriéndonos al tratamiento de aspectos claves de manera longitudinal, pero lo haremos esta vez con la mirada enfocada en el curso de 2º de la ESO.

El primer punto que podemos mencionar es la casi ausencia del uso de la expresión algebraica “ $f(x)$ ” frente a la variable “ y ”. Concretamente, se usa “ $f(x)$ ” solo un 2% en los ejercicios propuestos. Si bien la formulación con “ y ” es más propia de las representaciones gráficas, el no emplear la notación “ $f(x)$ ” parece una carencia que puede repercutir en la comprensión de la noción de función.

Por otra parte, el libro de texto elige un orden específico para la presentación de las tres familias de funciones que se enseña: parte del caso particular previamente conocido (funciones de proporcionalidad directa $f(x)=mx$) para acabar con el caso general (funciones lineales $f(x)=mx+n$). Observamos la coherencia de esta elección en relación con el concepto de currículo en espiral (se inicia un nuevo contenido basándose en los previos). De hecho, la enseñanza del mismo contenido en 3º de la ESO en la misma editorial se aborda de manera inversa, pero respetando la lógica mencionada: se parte por entonces del caso general ($f(x)=mx+n$) ya visto el curso anterior para luego precisar los casos particulares (función de proporcionalidad directa con $n=0$ y función constante con $m=0$).

También vimos en el capítulo 5 el uso mayoritario del primer cuadrante para representar funciones. Está relacionado con el empleo de ejemplos contextualizados, no obstante el no presentar y representar valores negativos y el dominio en todos los reales entorpece la asimilación de la noción de función, que no tiene porque limitarse a valores positivas.

Existe una tendencia generalizada a realizar una simplificación en la modelización de fenómenos de la vida real hacia funciones: se juntan casi sistemáticamente los puntos discretos conocidos en un gráfico a través de segmentos. Ciertamente este modo se ajusta al tipo de funciones (lineales) que se van a estudiar en este curso, no obstante sería más preciso unir esos puntos mediante curvas para adecuarse a la realidad física de los fenómenos.

Por fin, queremos apuntar el uso inoportuno de funciones con dominio definido únicamente para valores discretas, a la manera de un histograma. Aquellos ejercicios y problemas están a menudo relacionados con situaciones sencillas de proporcionalidad: se trata en general de determinar el precio de un producto según su cantidad. Esto afecta a la asimilación de la idea misma de función y de continuidad que se pretende enseñar.

<p>90 En una pizzería cada repartidor de pizzas hace 20 entregas por noche. Decide si las magnitudes <i>número de repartidores</i> y <i>entregas</i> son directamente proporcionales. Representa la situación e indica la constante de proporcionalidad.</p>	
<p>61 El precio de una entrada de teatro es de 21 €. <i>cada</i></p> <ol style="list-style-type: none"> Construye una tabla que represente el precio que se tiene que pagar, hasta un total de diez entradas. Escribe la función mediante una expresión algebraica. Indica cuál es la variable independiente. Representa gráficamente la función. 	<p><i>Las funciones correspondientes a los enunciados de estos dos ejercicios no tienen dominio en intervalos. La expresión algebraica o gráfica nos puede dar el número de entregas para 1,2 repartidores (ejercicio 90) o el precio de 1,4 entradas (ejercicio 61), pero obviamente carece de sentido.</i></p>

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo presentamos las dificultades (obstáculos en el proceso de entendimiento de conceptos) y errores (fallos en la aplicación de un concepto teóricamente entendido) que suelen sufrir o cometer los alumnos de 2º de la ESO en la unidad didáctica de funciones. Estas dificultades y errores forman parte del proceso normal de aprendizaje de los alumnos, como lo demuestra su reproducción año tras año en grupos y contextos diferentes. El profesor tiene por lo tanto gran interés en anticipar esas dificultades para adecuar su enseñanza y adaptar la didáctica asociada: ampliar el tiempo dedicado a ciertos conceptos claves, verificar con cuidado la total comprensión a través de enunciados específicos... Enfrentarse a aquellas dudas y errores comunes a todo el alumnado tiene que ir a la par con la enseñanza teórica de la unidad.

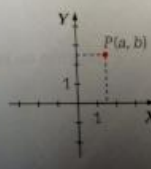
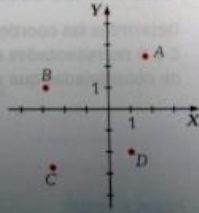
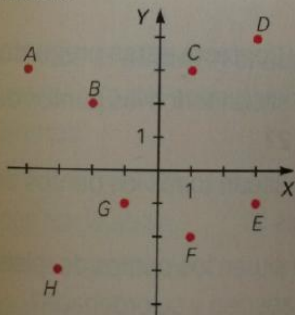
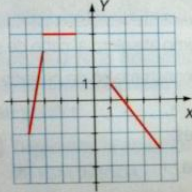
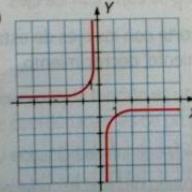
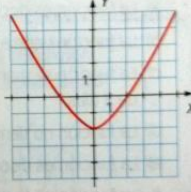
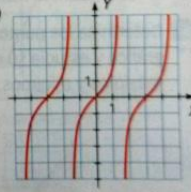
7.1 Dificultades previsibles

Todos los estudiantes se enfrentan a diferentes tipos de dificultades, muchas de ellas son inevitables a la par que naturales. Le incumbe sin embargo al docente preverlas para trabajarlas y enfrentarse a ellas con los mejores y más adecuados recursos posibles (temporales, didácticos,...) y conseguir así un aprendizaje íntegro y acertado de los contenidos abordados. Clasificamos las dificultades en dos grupos distintos: por una parte aquellos obstáculos directamente relacionados con la comprensión de aspectos matemáticos, y por otra parte aquellos problemas que surgen de aspectos personales del alumnado (contexto histórico, sociocultural, afectivo).

En cuanto a la comprensión de los conceptos matemáticos, mencionaremos dos tipos de obstáculos:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos (obstáculos epistemológicos y ontológicos):*
 - El propio concepto de función es difícil de asimilar por la dificultad asociada a la idea de continuidad, aspecto clave en la comprensión general de esta unidad didáctica. El salto cualitativo a nivel cognitivo se da en el paso de valores discretos (tabla de valores, representación gráfica con puntos sueltos, uso casi exclusivo de números enteros...) hacia la continuidad de valores en el gráfico y en la expresión algebraica (se puede escoger “cualquier” punto del dominio y recorrido, es decir no necesariamente valores enteros y en cantidad finita). Se trabaja escasamente sobre este puente conceptual en clase y en el libro de texto debido a su dificultad epistemológica al nivel de iniciación que se da en 2º de la ESO. De hecho, harán falta varios años para progresivamente integrar esta potente noción a través de otras herramientas e interpretaciones (dominio, concepto de infinito, derivadas, integrales...). La tendencia de los alumnos es quedarse con una representación gráfica por puntos discretos, finitos y abordados desde cuadrículas (valores enteros). Son escasos los gráficos que no representan las cuadrículas en los casos concretos donde no hacen falta. Este hecho es aún más sorprendente si

recordamos que el libro de texto de 1º de la ESO empezó la primera unidad didáctica sobre funciones representando sistemas de coordenadas sin cuadrículas.

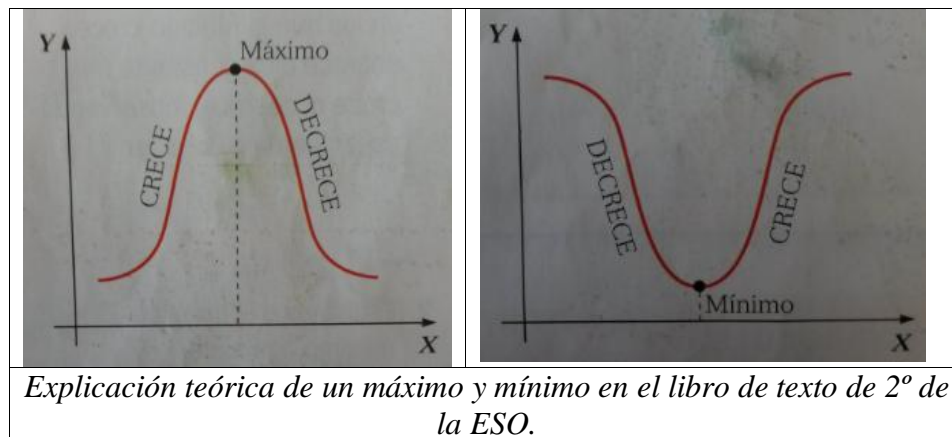
<p>1.2. Coordenadas cartesianas</p> <p>La posición de un punto P en el plano se indica por un par de números, (a, b), llamados coordenadas cartesianas del punto P.</p> <p>Dado un punto P de coordenadas (a, b) tenemos que: La primera coordenada, a, se llama abscisa y se mide en el eje horizontal. La segunda coordenada, b, se llama ordenada y se mide en el eje vertical.</p>  <p>1.3. Signo de las coordenadas de un punto</p> <p>El signo de las coordenadas de un punto $P(a, b)$ varía según el cuadrante al que dicho punto pertenece.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un punto del primer cuadrante A tiene la abscisa, a, positiva y la ordenada, b, positiva. • Un punto del segundo cuadrante B tiene la abscisa, a, negativa y la ordenada, b, positiva. • Un punto del tercer cuadrante C tiene la abscisa, a, negativa y la ordenada, b, negativa. • Un punto del cuarto cuadrante D tiene la abscisa, a, positiva y la ordenada, b, negativa.  <p>5 Escribe las coordenadas de los puntos representados sobre este sistema de coordenadas.</p> 	<p>3 Determina si las siguientes funciones son continuas o discontinuas. Justifica la respuesta.</p> <p>a) </p> <p>b) </p> <p>c) </p> <p>d) </p>
<p><i>Teoría y ejercicio de 1º de la ESO: se aborda el sistema de coordenadas sin cuadrículas, e incluso dando ejemplos de puntos con coordenadas no enteras en el 1.2.</i></p>	<p><i>Ejercicio de 2º de la ESO: ¿Acaso las cuadrículas ayudan a determinar la propiedad de continuidad de las funciones?</i></p>

Fijándose en las tablas de valores, los alumnos quedan supeditados a una visión discreta de la función. Tienen asimismo dificultad para abstraerse de las representaciones “parciales” que son las representaciones graficas y las tablas de valores: el dominio de una función no tiene porque limitarse a los valores extremos mencionados o dibujados.

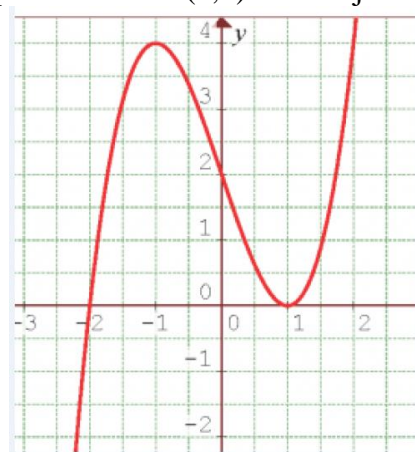
- La condición dada para definir una función (“La función asocia a cada valor de x un único valor de y ”) es entendida pero no se consigue distinguirla de la condición “inversa” que es irrelevante y falsa para definir una función: “A cada valor de y le corresponde un único valor de x ”. Unicidad de imagen y unicidad de argumento son conceptos difíciles de disociar.

- El proceso de algebrización iniciado en 1º de la ESO es todavía incipiente aunque en 2º de la ESO se da un salto cualitativo notable (operaciones sobre polinomios, ecuaciones de primer y segundo grado,...). La unidad didáctica de funciones es parte de este proceso progresivo en la cual el uso de variables y ecuaciones crece. Una de las dificultades relacionadas es precisamente el paso de un enunciado en lenguaje común hacia una ecuación en lenguaje matemático.
- Otro avance progresivo al cual los alumnos se tienen que enfrentar es el aumento general del nivel de abstracción. El álgebra solo es un componente de este aspecto: el uso de símbolos (infinito, variables, parámetros, π ...), los conceptos abstractos sin representación finita o tangible (irracionales, continuidad,...), el hecho de tener que abstraerse de las aproximaciones reales pero inexactas (el dibujo de un círculo por parte del docente en la pizarra no es del todo redondo y regular, la recta de la pizarra no es recta, las líneas presentadas como paralelas no lo son,...). En cuanto a las funciones, es ardua tarea para los alumnos de realizar la conexión conceptual entre diferentes formas de representación de una función y tener así una visión global de aquella noción abstracta.
- *Dificultades asociadas al proceso de enseñanza (obstáculos didácticos):* Varios factores influyen la elección didáctica desarrollada en los libros de texto. El nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos, el estudio previo en unidades didácticas o cursos anteriores de conceptos, técnicas, conocimientos... condicionan las posibilidades de enseñanza.
 - En el curso de 2º de la ESO y en particular en la unidad de funciones, queda manifiesto que ciertos conceptos emergentes y difíciles quedan sujetos a explicaciones parciales o más bien enfocadas a la comprensión intuitiva (gráficas) de las nuevas nociones. No se puede todavía exigir de los libros que propongan definiciones matemáticas rigurosas para la continuidad por ejemplo. Se identifican y trabajan ciertas características como máximo y mínimo exclusivamente a un nivel gráfico. No obstante, estas aproximaciones pueden constituir una laguna que repercuta en una correcta comprensión. El caso de la continuidad es edificante: hay una constante ambivalencia de esta noción emergente con la presentación discreta de datos (tabla de valores, gráficos con valores enteros). De la indefinición misma de la discontinuidad (definida como “no continuidad”) resulta que los alumnos puedan entender correctamente la continuidad sin percibir correctamente el concepto de discontinuidad.
 - Algunas editoriales proponen un orden diferente al usado por la editorial Santillana: parten del caso general de las funciones lineales ($y=mx+n$) para llegar a los casos particulares ($y=n$, $y=mx$). Visto desde la perspectiva del alumnado, parece más coherente partir de sus conocimientos previos (proporcionalidad directa) para llegar a ideas nuevas.
 - La diferenciación entre parámetro y variable es una noción también bastante compleja para el alumnado. Ambos se escriben con letras y los conceptos (abstractos) relacionados resultan de difícil asimilación, tanto en el curso en cuestión como en posteriores. El hecho es que su introducción y uso se integran en las unidades didácticas sin que haya una dedicación curricular específica a su explicación.

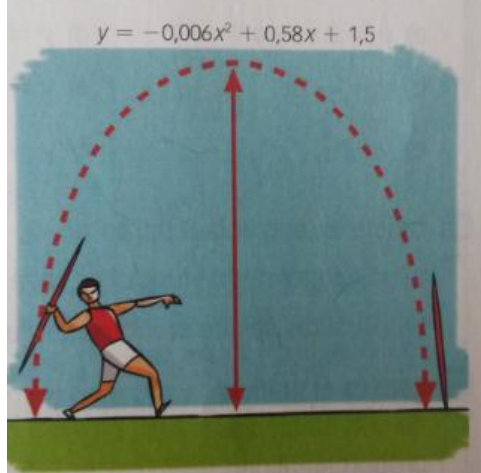
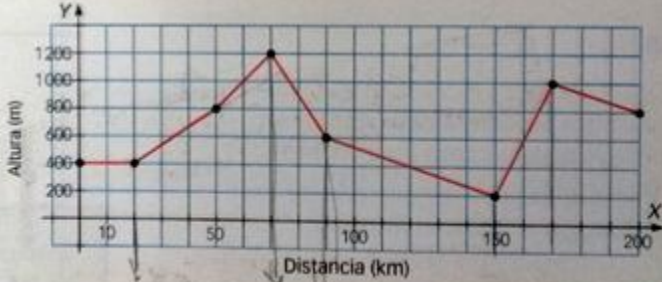
- El uso mayoritario del primer cuadrante (valores positivos en el eje X e Y) influye en la percepción del concepto mismo de una función: salvo indicación contraria, una función lineal definida por su expresión algebraica tiene su dominio en el conjunto de todos los reales.
- La definición “en pico” de los máximos y mínimos es ciertamente intuitiva, pero omite casos particulares como mesetas de valores (función constante en un intervalo donde alcanza un mínimo o máximo) o posibles valores en los extremos de una función definida en un dominio finito.



- El vocabulario empleado para las definiciones puede llevar a confusión y condicionar la comprensión y las respuestas. Por ejemplo un “punto de corte” con los ejes no tiene porque “cortar” esos ejes, sino más bien “alcanzarlos” o “tocarlos”. En el ejemplo siguiente, los alumnos no detectaron el punto de corte $(0,1)$ con el eje X:



- La forma gráfica de las representaciones de ciertas funciones puede a veces llevar a una confusión, pues se aparentan a la forma física del fenómeno estudiado. Esta exacta similitud tiene coherencia (se trata de modelizar la realidad), no obstante las funciones son una abstracción cuya representación gráfica es relativa (punto de referencia para las variables, escala de ambos ejes,...) y no tiene porque corresponder con precisión al movimiento real.

	<p>En ambos ejercicios (en 3º de la ESO para la representación de una función cuadrática, y en 2º de la ESO para la relación altura-distancia recorrida), el trazado de la función se corresponde con el movimiento real, lo que puede ayudar a la modelización pero dificultar la distinción entre movimiento físico y el concepto de función.</p>
<p>Estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función</p> <p>Esta gráfica muestra el perfil de la etapa de una prueba ciclista, donde la coordenada x representa los kilómetros recorridos y la coordenada y representa la altura respecto al nivel del mar. Estudia su crecimiento, decrecimiento y los puntos máximos y mínimos.</p> 	

Además de esas dificultades más bien cognitivas, podemos destacar algunos aspectos más específicos del contexto del aula en la cual nos situamos:

- *Dificultades asociadas al contexto histórico del alumnado en su proceso de aprendizaje en Matemáticas:* Es patente la gran influencia del aspecto histórico personal del alumnado en el aprendizaje académico general, y en particular de las Matemáticas. Muchos estudiantes de nuestra clase son de procedencia extranjera, y algunos de ellos de reciente llegada al Estado Español. Esto implica a menudo un retraso en la escolarización y/o en el dominio de la lengua (castellana en este caso). Aunque las instituciones prevén varias medidas paliativas o de puesta a nivel (clase de desdoble, presencia de un Pedagogo Terapéutico, programas de aprendizaje del castellano...), es una tarea ardua recuperar a tiempo el nivel de conocimiento correspondiente al curso y las dificultades se acumulan año tras año. Otro ejemplo de correlación entre el contexto histórico y el desarrollo cognitivo del alumnado es la situación vivida por todos los alumnos en el confinamiento general de la primavera 2020 y en posteriores situaciones de falta de clases presenciales (confinamiento individual): cada clase, y dentro de ella cada individuo, vivió situaciones muy dispares en cuanto a la continuidad del aprendizaje escolar, perjudicando de esta manera el proceso de adquisición de los contenidos previstos en el curso, y por consiguiente también de los futuros años de escolarización.

- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* Cada alumno tiene una relación emocional propia con cada asignatura, función de su nivel académico, de su relación con el profesor, de las expectativas de su entorno sobre sí mismo o sobre la materia, sus perspectivas académicas personales, su historial académico (curso repetido)... Todos estos aspectos influyen en su motivación personal para enfrentarse a los contenidos. Es habitual oír la sentencia “*A mí no se me dan bien las Matemáticas*”, sinónima de renuncia en el esfuerzo personal del alumnado con la asignatura. El rechazo al lenguaje matemático (frente al lenguaje común) también es frecuente en esta primera fase de algebrización del alumnado, que no ve la necesidad de su uso: “*¿Por qué tenemos que usar estas palabras y símbolos?*”. Otro aspecto detectado es la elección del contexto de los ejercicios y problemas propuestos en el libro de texto. Hay que admitir que las situaciones de la vida cotidiana se van aproximando cada vez más a la vida real de los adolescentes y de sus aficiones, no obstante las magnitudes relacionadas con el dinero y por lo general contextos dependientes de una situación socioeconómica privilegiada es común en el ámbito de las matemáticas. Ejercitar a los alumnos en problemas relacionados con productos comerciales inalcanzables para algunos, vacaciones y viajes de ensueño... puede -inconscientemente- desanimar la resolución de una tarea alejada de su realidad.
- *Dificultades asociadas al contexto sociocultural:* Como se ha anteriormente dicho, muchos alumnos pueden tener un déficit en el vocabulario del idioma empleado. Esto es palpable en la comprensión de los enunciados de problemas, lo que puede dificultar la interpretación y posterior resolución. También se pudo comprobar que el vocabulario usado puede ser desconocido por parte de los alumnos con menos bagaje cultural o vivencias no acordes con lo que se puede suponer de una familia de nivel socioeconómico medio. “*Una habitación doble*”, “*unos beneficios sobre inversión*”, “*duplicar*”, “*palo de una baraja*”, “*aforo*”... son ejemplos de palabras que pueden constituir un obstáculo lingüístico latente y persistente. La situación personal de los alumnos puede también complicar el trabajo personal exigido en las horas fuera del centro educativo: la disponibilidad y disposición de ayuda de los padres, los recursos económicos para contratar clases particulares, la situación familiar,... son factores que condicionan también el proceso de aprendizaje.

7.2 Errores previsible y su posible origen

Los errores son fallos en la aplicación de los conocimientos adquiridos. Muchos de ellos se repiten con frecuencia, por lo que una vez más predecirlos permite prevenirlos. Recogemos en la siguiente tabla aquellos relacionados con las funciones.

Orden de valores en intervalos	Los alumnos permutan los extremos de un intervalo. Ej: $[2, -2]$. Este error es más frecuente en 3º de la ESO cuando descubren el concepto de recorrido: en el caso de una función decreciente, si leen los valores de Y en el sentido habitual de lectura de la gráfica (X creciente), empezarán del mayor valor de Y hacia el menor de Y y reproducirán este orden de lectura en la formulación del intervalo.
Sentido de lectura	Los alumnos suelen tener duda a la hora de interpretar si una

	función es creciente o decreciente (“baja” o “sube”) ya que depende del sentido de lectura.
Errores de álgebra	Los alumnos efectúan incorrectamente las manipulaciones algebraicas.
Interpretación de una cuadrícula	Los alumnos malinterpretan la posición en una cuadrícula dibujada en un sistema de coordenadas cartesiano: asimilan los propios cuadrados (elementos geométricos) a las posiciones, en lugar de asociar las coordenadas a los puntos de cruce de la cuadrícula.
Orden de los valores de coordenadas de un punto	Los alumnos suelen permutar los valores de X e Y en las coordenadas de un punto, bien sea para situarse en uno de los cuadrantes, bien sea para colocar el punto en cuestión. En particular, confunden con más frecuencia la posición de las variables de un punto si éste se sitúa en uno de los ejes. Ej: (0,3) en lugar de (3,0) e inversamente.
Confusión entre variable y parámetro	A causa de la dificultad mencionada anteriormente, los alumnos llegan a asignar valores de una variable a un parámetro, y/o inversamente.
Escala de los ejes	Los alumnos dibujan en un mismo eje escalas diferentes, es decir no guardan la proporcionalidad de representación en la recta de los reales (base ortonormal).
Formulación de intervalos	Los alumnos escogen los valores en el eje Y o incluso razonan sobre coordenadas de puntos para definir un intervalo.

Podemos conjeturar el origen de algunos de los errores cometidos habitualmente por los alumnos a través de cuatro grupos de causas:

- *Origen histórico:* Los errores actuales provienen de una falta de asentamiento de conocimientos previos. El ejemplo más llamativo y habitual se encuentra en los cálculos algebraicos, iniciados en el curso anterior y desgraciadamente con bases todavía no dominadas a pesar de su importancia y constante uso a lo largo de los cursos. La propia didáctica proporcionada en años anteriores condiciona también errores futuros. El ejemplo visto en el capítulo 4 de un ejercicio con el posicionamiento en un mapa induce a la interpretación errónea de las coordenadas de un punto en un sistema de referencia cartesiano.

7 Este es el plano de Villatorres. Obsérvalo y contesta:

- ¿En qué casilla está el Ayuntamiento?
- ¿Qué hay en la casilla (C, 3)?
- ¿Qué hay en la casilla (D, 1)?
- ¿Qué hay en la casilla (A, 2)?

Ejercicio de 6º de primaria para introducir al sistema de coordenadas cartesiano. Se razona de manera discreta en los valores de los ejes y se asocian a estos valores áreas (casillas).

- *Origen procedimental:* Nos referimos expresamente al bloque 1 del currículo *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas*, y en particular al contenido que hace hincapié en la verificación y reflexión sobre los resultados. En efecto los alumnos no suelen tener todavía adquirido el automatismo de una visión anticipada (planificación del proceso de resolución) y posterior a la ejecución de un ejercicio (comprobación, interpretación,...). Es habitual ver resultados incoherentes con un contexto dado, valores sin unidades, o simplemente la presentación de un resultado suelto sin que la respuesta literal a la pregunta hecha sea expresada.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE
BLOQUE 1.-PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
<p>Planificación del proceso de resolución de problemas.</p> <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.</p> <p>Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.)</p> <p>Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expresar verbalmente y c de resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de raz resolución de problemas, realiz y comprobando las soluciones 3. Describir y analizar sil encontrar patrones, regularid en contextos numéricos, geo dísticos y probabilísticos, valo predicciones. 4. Profundizar en problema la historia de las matemáticas documentación o planteando j datos, otras preguntas, otros c 5. Elaborar y presentar i resultados y conclusiones ob investigación. 6. Desarrollar procesos de i de la realidad cotidiana (numéri
<i>Extracto del currículo de 2º de la ESO, bloque 1.</i>	

- *Origen sociocultural:* Muchos errores tienen como origen la falta de atención o el cansancio intelectual que puede afectar a cualquiera persona. No obstante, el contexto sociocultural específico de los alumnos tiene especial trascendencia en

la clase en cuestión: muchos alumnos son de procedencia musulmana y han sido inmersos durante un mes en el ayuno del Ramadán, periodo en el cual no han ni bebido ni comido durante el día. A esta falta fisiológica básica que condiciona el rendimiento intelectual hay que añadir el trastorno de sueño que también pudo influir negativamente en su atención. Asimismo, es probable que algunos adolescentes no tengan en su entorno próximo recursos económicos suficientes o que no gocen de buenas costumbre referentes a una vida saludable, también a causa del periodo de adolescencia que atraviesan (escasez o falta de desayuno, horas de sueño insuficientes...). Respeto al aspecto fisiológico, es notable la gran diferencia de atención del alumnado según la hora del día: son mucho más propensos a escuchar y trabajar en las primeras horas de la mañana mientras que aumenta el cansancio y baja por lo tanto el nivel de atención después del descanso del patio y en las últimas horas.

- *Origen institucional:* Hemos detectado errores o enunciados confusos en los propios libros de texto. La falta de reflexión de los alumnos sobre los resultados obtenidos, su dependencia al contrato didáctico (“*el libro y el profesor nunca fallan*”) les pone en una situación ambivalente donde tienen que dar obligatoriamente una respuesta aunque se den cuenta de que es inadecuada. El propio profesor, como cualquier humano, no es exento de errores y/o explicaciones inoportunas, y el alumno puede padecer estos desaciertos.

102 Un jugador de fútbol se encuentra frente a una portería sin portero, a 6 metros de distancia. Averigua si con el lanzamiento siguiente metería gol: $y = -0,07x^2 + 0,9x$ (la altura de la portería es de 2,44 m).

a) ¿A qué distancia se debe poner para meter gol?
 b) ¿Y para golpear en el larguero?
 c) ¿Desde qué distancia el balón irá fuera?

Ejemplo de ejercicio (3º de la ESO) que puede inducir errores y/o dificultades: el enunciado pregunta por una distancia que el mismo da (6m). Además da una ecuación sin explicitar la interpretación de las variables.

Funciones lineales

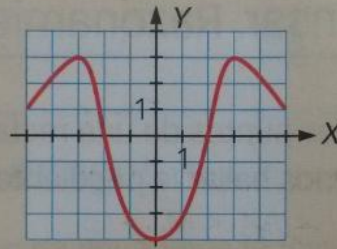
6 Completa la tabla en tu cuaderno. Determina si hace referencia a una función de proporcionalidad directa o inversa, y escribe la expresión algebraica correspondiente.

X	0,02	0,1			1	2
Y	600		60	24	12	

En este ejercicio de repaso (sección final con siete ejercicios de autoevaluación) pide encontrar la expresión algebraica de una función de proporcionalidad, que muy probablemente no encontrarán porque no se ha visto en esta unidad didáctica. De hecho se da este tipo de función 2 cursos más adelante (4º de la ESO). Se interpreta la

presencia de este ejercicio como un error en la edición del libro.

5 Dada la siguiente gráfica:



- Indica si es una función continua o discontinua.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Estudia el crecimiento y el decrecimiento, y determina los extremos.
- Calcula la tasa de variación entre el tramo que va desde $x = -2$ hasta $x = 0$.

En ejercicio también aparece en la sección de repaso (sección final de autoevaluación), propone en la pregunta d) dar una tasa de variación que se verá dos cursos más adelante (4º de la ESO).

Capítulo 8

El proceso de estudio

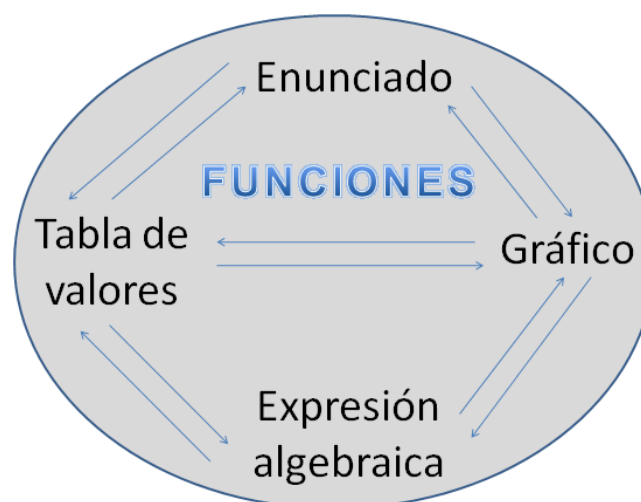
En este capítulo presentamos la estructura general y la organización temporal de las sesiones de docencia autónoma realizada con la clase de 2º de la ESO para la unidad didáctica de funciones. Desarrollamos también el contenido de las actividades adicionales realizadas en clase y el trabajo personal pedido a los alumnos. Toda esa distribución se hace en base a nuestros objetivos de aprendizaje y la metodología que usamos entorno a las actividades.

8.1 Distribución del tiempo de la clase

Se prevé dedicar once sesiones a la unidad didáctica de funciones, lo que corresponde a casi 3 semanas a razón de cuatro horas a la semana. La sesión de examen y la corrección del mismo en la penúltima e última sesión son ineludibles. Para el resto del tiempo adjudicado, atendimos a la estructura del libro de texto y dividimos los aspectos teóricos en 3 bloques diferenciados:

- 1/ Sistema de coordenadas cartesiano y representación gráfica
- 2/ Concepto de función y características
- 3/ Familia de funciones (lineales, afines y constantes)

Dentro de esta misma estructura, enfocamos el aprendizaje según las cuatro formas de representar funciones: forma numérica por medio de tablas de valores, forma visual por medio de gráficos, forma verbal por medio de enunciados y forma algebraica por medio de formulas. Nos guiamos en cada sesión en la explicación teórica de una de las formas y de los procedimientos, situaciones o propiedades asociados, o en el desarrollo del paso de una forma de representación hacia otra. El esquema siguiente da todas las conversiones posibles que de hecho los alumnos tienen que conocer y saber hacer:



Se detalla a continuación la planificación del proceso de estudio, indicando el contenido teórico abordado y otros aspectos relativos a la organización de cada sesión.

Sesión 1				
Contenido teórico	Sistema de coordenadas cartesiano. Punto de coordenadas.			
Vocabulario y/o definiciones	Sistema de coordenadas. Abscisa. Ordenada. Origen. Ejes. Punto.			
Estándares de aprendizaje evaluables	1.1			
Actividades	<p>Se propone un ejercicio de introducción a los sistemas de coordenadas: los alumnos tienen que hacer un mapa de la clase situándose y sus compañeros. Se discute sobre la influencia del origen escogido como referencia.</p> <p>Luego se hace un repaso teórico sobre el vocabulario, definiciones y procedimientos básicos.</p> <p>Se dedican finalmente los últimos minutos a pequeños ejercicios prácticos del libro de texto.</p>			
Objetivos procedimentales	Determinar las coordenadas de un punto y saber colocar un punto según sus coordenadas.			
	Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
	Actividad	25 minutos	Compartida	Dialógica
	Repaso teórico	15 minutos	Profesor	Magistral
	Ejercicios	10 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 2				
Contenido teórico	Concepto de función. Formas de representación (enunciado, tabla de valores, gráfico, ecuación).			
Vocabulario y/o definiciones	Ecuación, función, variable dependiente, variable independiente, tabla de valores.			
Estándares de aprendizaje evaluables	1.1, 1.3, 1.4			
Actividades	Ejercicios y ejemplos de la vida cotidiana.			
Objetivos procedimentales	Representar una función a partir de una tabla de valores, de un enunciado, o de una ecuación.			
	Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
	Teoría	25 minutos	Profesor	Magistral
	Ejercicios	25 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 3	
Contenido teórico	Paso de tabla de valores a gráfico e recíprocamente. Análisis de función desde la representación gráfica. Propiedades de continuidad, crecimiento, decrecimiento, intervalos, puntos de corte con los ejes.
Vocabulario y/o definiciones	Continuidad, crecimiento, decrecimiento, intervalos, máximo, mínimo, punto de corte
Estándares de aprendizaje evaluables	1.2, 1.4, 1.5, 2.4
Actividades	Participación de los alumnos saliendo a la pizarra para realizar ejercicios priorizando el análisis visual de gráficos para llegar a las nociones básicas sobre las características de las funciones.
Objetivos procedimentales	<p>Representar una función a partir de una tabla de valores, de un enunciado, o de una ecuación.</p> <p>Estudiar una función mediante intervalos y/o puntos: crecimiento y decrecimiento, constante; máximos y mínimos; continuidad.</p> <p>Determinar la continuidad y discontinuidad de una función a partir de su representación gráfica, y expresarla mediante intervalos.</p>

Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Teoría	25 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios	25 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 4			
Contenido teórico	Repaso general del contenido anteriormente dado.		
Actividades	Ejercicios de repaso.		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios	50 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 5	
Contenido teórico	Teoría y ejercicios sobre funciones de proporcionalidad. Paso de enunciado a tabla, gráfico y ecuación.
Vocabulario y/o definiciones	Función de proporcionalidad directa, constante de proporcionalidad, pendiente, origen, parámetro.
Estándares de aprendizaje evaluables	1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.2, 2.3, 2.1, 2.4

Actividades	Ejercicios viendo ofertas de supermercado. Paso de enunciado a tabla de valores, y luego a representación gráfica y ecuación.		
Objetivos procedimentales	<p>Representar una función a partir de una tabla de valores, de un enunciado, o de una ecuación.</p> <p>Determinar la ecuación correspondiente a una representación gráfica.</p> <p>Determinar si un punto pertenece a la gráfica de una función.</p> <p>Determinar el tipo de función lineal (proporcional, constante, afín).</p>		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios	30 minutos	Compartida	Dialógica
Teoría	20 minutos	Profesor	Magistral

Sesión 6			
Contenido teórico	Repaso teórico. Funciones constantes.		
Vocabulario y/o definiciones	Función constante. Ordenada en el origen. Pendiente.		
Estándares de aprendizaje evaluables	1.2, 1.3, 2.2, 2.3		
Actividades	<p>Comentarios sobre los errores comunes hechas en el test online (google forms).</p> <p>Repaso funciones de proporcionalidad directa con ejercicios de paso entre los diferentes tipos de representación.</p> <p>Teoría sobre funciones constantes y ejercicios de aplicación.</p>		
Objetivos procedimentales	<p>Determinar los puntos de corte con los ejes de forma gráfica y algebraica.</p> <p>Representar una función a partir de una tabla de valores, de un enunciado, o de una ecuación.</p> <p>Determinar la ecuación de una función de proporcionalidad directa o constante conociendo uno de sus puntos.</p>		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios (corrección)	10 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios	30 minutos	Compartida	Dialógica
Teoría	5 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios	5 minutos	Compartida	Personal

Sesión 7			
Contenido teórico	Funciones lineales.		
Vocabulario y/o definiciones	Funciones lineales, ordenada en el origen, pendiente, ecuación.		
Estándares de aprendizaje evaluables	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2		
Actividades	Se da la teoría y se hacen ejercicios prácticos con participación de los alumnos.		
Objetivos procedimentales	<p>Determinar el tipo de función lineal (proporcional, constante, lineal).</p> <p>Determinar la ecuación de una función lineal conociendo dos de sus puntos.</p> <p>Determinar la ecuación de una función lineal conociendo la pendiente y un punto.</p>		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Teoría	25 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios	25 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 8			
Contenido teórico	Funciones de proporcionalidad directa, lineales, constantes.		
Actividades	Repaso con ejercicios sobre los tres tipos de función.		
Objetivos procedimentales	<p>Determinar el tipo de función lineal (proporcional, constante, lineal).</p> <p>Determinar la ecuación de una función de proporcionalidad directa o constante conociendo uno de sus puntos.</p> <p>Determinar la ecuación de una función lineal conociendo dos de sus puntos.</p> <p>Determinar la ecuación de una función lineal conociendo la pendiente y un punto.</p>		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Teoría	25 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios	25 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 9	
Contenido teórico	Funciones lineales y repaso general.
Estándares de aprendizaje	Todos

evaluables			
Actividades	Repaso general antes de examen.		
Objetivos procedimentales	Todos		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios	20 minutos	Alumno	Personal
Ejercicios	25 minutos	Compartida	Dialógica

Sesión 10			
Contenido teórico	Todo el contenido de la unidad didáctica.		
Estándares de aprendizaje evaluables	Todos		
Actividades	Examen. Se dan algunas indicaciones al inicio (justificación sistemática de las preguntas, nº de hojas del enunciado, prohibición de la calculadora...), y se lee rápidamente los enunciados para minimizar las preguntas individuales durante el examen.		
Objetivos procedimentales	Todos		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios	55 minutos	Alumno	-

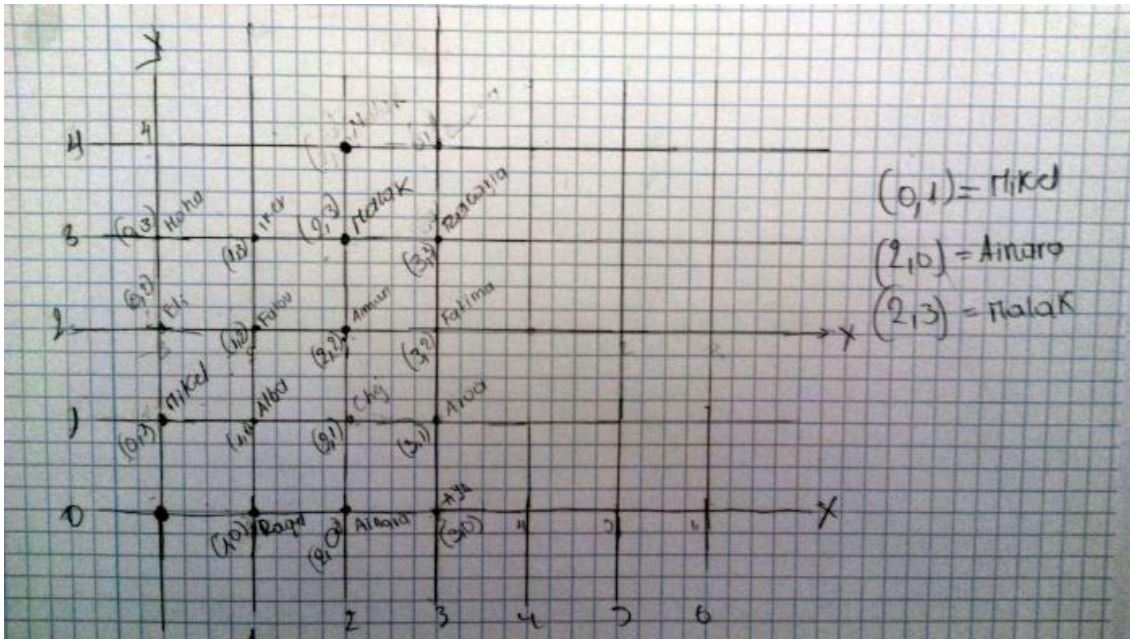
Sesión 11			
Contenido teórico	Corrección examen de proporcionalidad y de funciones.		
Actividades	Corrección compartida con el tutor.		
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Ejercicios	55 minutos	Compartida	Dialógica

8.2 Actividades adicionales planificadas

Todos los profesores del departamento de Matemáticas se basan casi exclusivamente en el libro de texto y la pizarra para impartir sus clases. El uso generalizado y sistemático de estos recursos origina una dependencia de los propios alumnos para con su aprendizaje. Es decir que llegan a rechazar el empleo de otros tipos de enseñanza (no magistrales) y de otros medios que no tengan referencia directa con el libro. El currículo hace explícitamente referencia al uso de medio tecnológicos sin especificarlos, dando libertad al docente en su elección y aplicación.

Aún y todo, se propusieron unas actividades adicionales fuera del contexto habitual de una clase magistral, con un alcance moderado hacia el interés del alumnado. Detallamos a continuación las tareas planteadas:

- Actividad introductora a los sistemas de coordenadas cartesianos: se realiza un mapa de la clase usando un sistema de ejes ortonormal ya que los pupitres están organizados en filas y columnas. Se dirige la tarea de manera a realizar una reflexión sobre la influencia de la elección del origen para determinar las coordenadas. Los alumnos entregan la tarea, con la excusa de que el docente en práctica pueda ir conociendo el nombre de cada alumno según su lugar en la clase (tienen que poner los nombres en cada punto del mapa). Se hacen preguntas contextualizadas para obtener o para localizar coordenadas (“¿En qué punto te gustaría estar sentado?”, “¿Quién está sentado en el punto (1,2)?”,...).



Producción de un alumno en la tarea

- Para introducir las funciones de proporcionalidad directa, se propone un ejercicio que parte de la foto de un producto en un supermercado donde aparece en un primer momento el precio unitario. Se realiza el análisis de la función que relaciona cantidad comprada con el precio (tabla de valores, gráfico y expresión algebraica). Finalmente se enseña una segunda foto que muestra dicho producto con un cartel (real) de una oferta, y se pide a los alumnos una reflexión sobre la validez de dicho anuncio (engñoso en realidad).



- Se propone un applet Geogebra para visualizar el cambio a nivel gráfico de las funciones lineales según el valor de sus parámetros (pendiente y ordenada en el origen).

GeoGebra

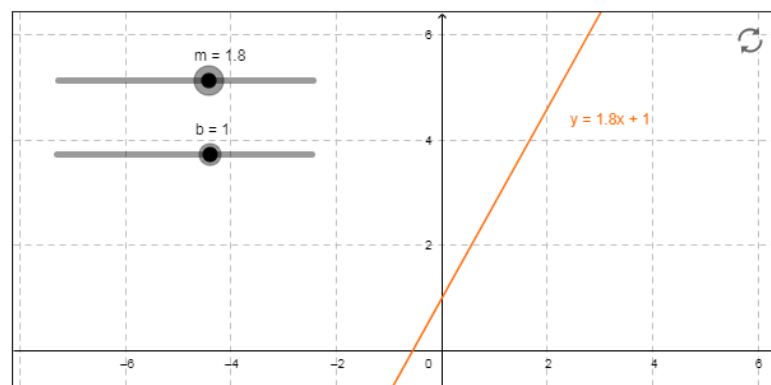
Función Lineal

Autor: El Sueniero

Tema: [Función lineal](#)

Construcción para el apoyo en el estudio de la función lineal $y = mx + b$.

Los deslizadores controlan los valores de m y b , al variar éstos la gráfica refleja automáticamente la gráfica.



Fuente: <https://www.geogebra.org/m/myBRxDDZ>

- Se cuelga en el sitio classroom de la clase un enlace a la página web del proyecto Descartes donde se da la unidad didáctica de funciones con la correspondiente teoría, ejercicios prácticos y de autoevaluación. Esta actividad es de carácter opcional y a hacer en casa. Se pretende dar ejercicios de ampliación (a nivel cuantitativo y cualitativo) a aquellos alumnos más avanzados o más motivados en el trabajo personal.

Education Digital con Descartes **edad** 2º ESO Matemáticas **proyecto descartes** 2017 **Funciones**

ocultar índice **Antes de empezar** **Contenidos** **Ejercicios** **Autoevaluación** **Para enviar al tutor** **Para saber más**

1. Relaciones funcionales
Tablas, gráficas y fórmulas.
Variables
Dominio y recorrido

2. Representación gráfica
A partir de tabla o fórmula
Unos símbolos muy útiles

3. Propiedades generales
Corte con los ejes
Crecimiento decrecimiento
Máximos y mínimos

4. Primeras funciones elementales
De proporcionalidad directa
De proporcionalidad inversa

5. Funciones cuya gráfica es una recta

RESUMEN

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Comprender, distinguir y valorar el concepto de función
- Interpretar y relacionar tabla, gráfica y fórmula de una relación funcional
- Distinguir los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y recorrido
- Aprender e interpretar sobre una gráfica las primeras propiedades generales de una

La Piedra Roseta encierra un documento escrito de tres formas distintas. En la parte superior (jeroglíficos), en la central, (demótico) dos formas de escritura de una lengua muerta, el egipcio. En la parte inferior aparece la misma inscripción en griego. Esto último y la genialidad de Champollion permitió encontrar las claves de la correspondencia entre los signos jeroglíficos y sus imágenes fonéticas.

Escentura jeroglífica

Fuente:

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_funciones-JS-LOMCE/index.htm

8.3 La tarea: actividad autónoma prevista por el alumnado

Tal y como se ha anteriormente mencionado, la enseñanza y el aprendizaje del alumnado en el centro se basa principalmente en el libro de texto. La actividad autónoma ordinaria se apoyó por lo tanto en este medio a través de tareas de lectura de contenido teórico y de la realización de ejercicios. Se pidió diariamente una tarea según el contenido visto durante la sesión del día.

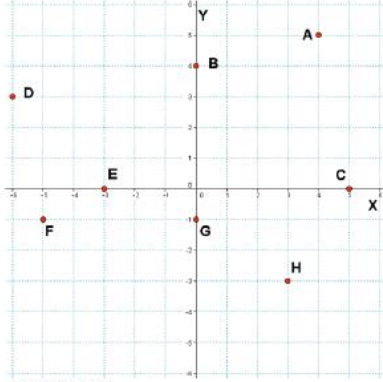
Para poder cumplir con la responsabilidad docente de evaluación formativa, se concibieron dos formularios mediante la aplicación Google Forms. Constaron de unas doce preguntas tipo test sobre el contenido abordado en las sesiones anteriores. No se realizó una corrección detallada ya que los resultados entregados fueron mayoritariamente buenos, pero se aprovechó para volver a dar una explicación más profunda sobre los puntos confusos y/o erróneos detectados en las respuestas. Se diseñaron precisamente esos dos tests con especial vista a los dificultades y errores previsibles que desarrollamos en el capítulo 7.

Repaso funciones

Preguntas de repaso para la unidad didáctica de funciones
*Obligatorio

1. Tu nombre *

2. Encuentra las coordenadas correctas entre las propuestas:



Marca solo un óvalo.

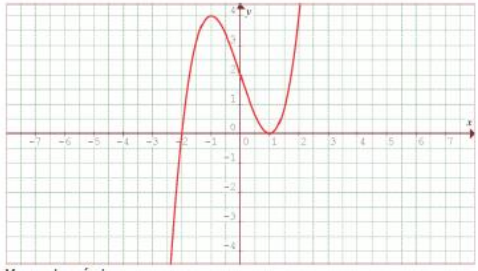
A(4,5) ; E(0,-3) ; H(3,-3)

B(4,0) ; G(0,-1) ; F(-5,-1)

B(0,4) ; C(5,0) ; D(-6,3)

Ninguna coordenada es correcta

3. ¿Cual es la afirmación correcta?



Marca solo un óvalo.

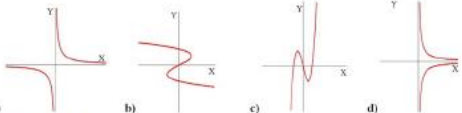
Hay 2 puntos de corte con los ejes

La función corta el eje X en un punto: (-2,0)

La función corta el eje Y en un punto: (0,2)

La función corta el eje Y en un punto: (2,0)

4. ¿Cuáles de las gráficas siguientes corresponde a una función?



Marca solo un óvalo.

a), b) y c)

c) y d)

a) y c)

c)

Extracto del primer formulario de repaso tipo test (evaluación formativa).

Se implementó también una ficha con las nociones y procedimientos que los alumnos deberían lograr tras la enseñanza de esta unidad didáctica. Se sirvió de este documento como presentación del tema en la primera sesión pero sobre todo de autoevaluación en la penúltima sesión antes del examen. Se pidió a los alumnos comprobar su nivel de conocimiento en cada uno de los puntos mencionados, y en caso de duda se les comentó realizar los ejercicios indicados. Esta ficha se recogió el día anterior al examen para poder hacer posteriormente un análisis entre las propias previsiones del alumnado y los resultados del examen. Desgraciadamente la escasa buena voluntad y participación del alumnado a esta autoevaluación no permitió sacar conclusiones sobre los datos aportados.

Vocabulario a conocer:

	Función		Variable dependiente		Eje de las abscisas
	Ecuación		Variable independiente		Eje de las ordenadas
	Origen		Cuadrantes		Intervalos
	Función de proporcionalidad		Función constante		Función lineal
	Pendiente		Ordenada en el origen		Puntos de corte
	Continuidad		Crecimiento, decrecimiento		Máximo, mínimo

	SABER HACER	EJERCICIOS
	Determinar las coordenadas de un punto y saber colocar un punto según sus coordenadas.	44,45,46 p266
	Representar una función a partir de una tabla de valores o de un enunciado	12,15 p257 51,52,56 p 266
	Estudiar una función: crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos; continuidad, puntos de corte	24, 26, 27 p 261 63, 64, 65 p267
	Representar una función a partir de su ecuación haciendo una tabla de valores. Determinar el tipo de función (proporcional, constante, lineal)	81 p270 41 p265
	Determinar si un punto pertenece a una función	58,59 p267
	Determinar los puntos de corte con los ejes de una función desde su gráfico o desde su ecuación.	67,69 p268
	Determinar la ecuación de una función de proporcionalidad directa o constante conociendo uno de sus puntos o su gráfica	77,78,80 p269
	Determinar la ecuación de una función lineal conociendo la pendiente y un punto	80,82 p270

Ficha de autoevaluación de conceptos y procedimientos junto a propuestas de ejercicios.

Capítulo 9

Experimentación

En este capítulo presentamos los elementos relacionados con el experimento llevado a cabo para la evaluación de la unidad didáctica de funciones en la clase de 2º de la ESO: el diseño, el cuestionario, los comportamientos esperados, los resultados y una discusión sobre los mismos.

9.1 Muestra y diseño de la experimentación

Se llevó a cabo la experimentación en la clase de 2º de la ESO que consta de once alumnos y alumnas. Múltiples factores hacen que se trate de un grupo conflictivo, lo que repercute en el nivel general de atención en horas lectivas y una falta de trabajo personal en casa. También se constata un retraso temporal en la transmisión de los contenidos (los demás grupos de 2º de la ESO llevan unas tres semanas de adelanto en la programación anual) y en el nivel de competencias y de conocimiento de los contenidos anteriormente enseñados por el docente titular. El nivel es heterogéneo: cuenta con tres alumnos con actitud positiva y proactiva hacia el trabajo personal y la atención en clase, cuatro alumnos en dificultades debido a la irregularidad de su trabajo personal y cuatro alumnos en situación de abandono escolar (ausencias repetidas, trabajo personal nulo, inatención en clase). La participación en clase puede llevar a confusión: parece alta en cuanto se hacen preguntas y se piden voluntarios para ir a la pizarra, pero se mezcla con un constante efecto de barullo, lo que impide de hecho una enseñanza fluida y un correcto aprendizaje.

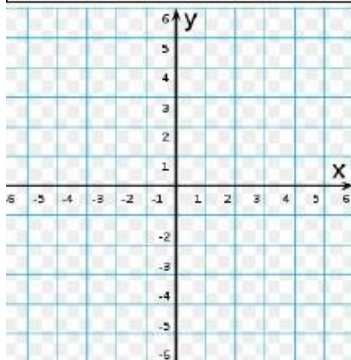
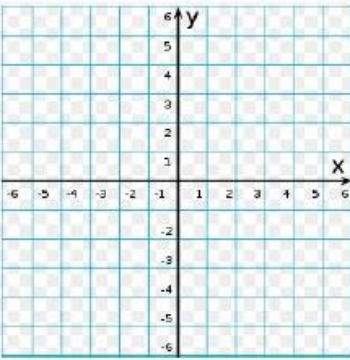
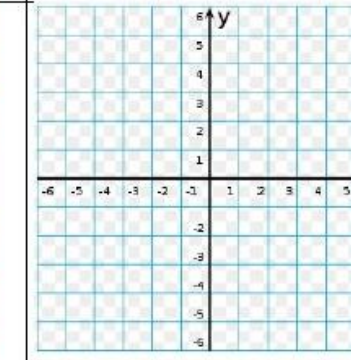
Se propone por lo tanto un cuestionario en adecuación con las dificultades propias de este grupo, a la vez que se atiende a las exigencias de los estándares de aprendizaje evaluables del currículo. Hay que remarcar que se realizó el diseño del examen antes de empezar con la unidad didáctica, con la idea de que la programación de las sesiones y su contenido sea en coherencia con lo que se iba a pedir en el cuestionario final. No obstante, se hizo algún ajuste el día anterior a la prueba para quitar algún elemento de un ejercicio para el cual no hubo tiempo suficiente de práctica.

El nivel general de la clase siendo bastante bajo, se proponen ejercicios referentes a cada concepto básico visto en clase, sin desviarse de los ejercicios de aplicación clásicos ni pedir cálculos algebraicos complejos. No se proponen a propósito problemas contextualizados, ya que se trabajó en especial la transcripción de enunciados a lenguaje matemático en la unidad didáctica anterior de proporcionalidad, y que no se pudo dedicar un tiempo adecuado a este tipo de ejercicios en esta unidad didáctica. La sesión anterior al examen se dedicó a un repaso de los aspectos teóricos y prácticos que entraban en el cuestionario.

En cuanto a la dimensión temporal del examen, se probó antes de la fecha prevista la redacción completa y exhaustiva de las respuestas por el docente en práctica, verificando que no sobrepasaba los 15 minutos, dejando así un amplio margen para los alumnos con los 55 minutos de una sesión.

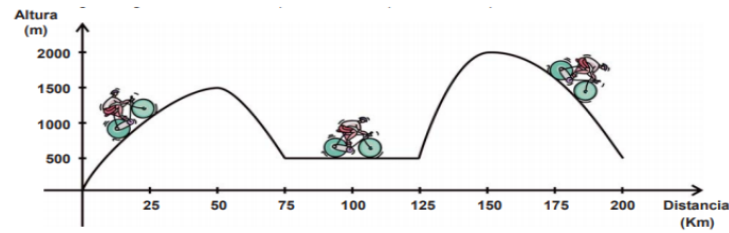
9.2 El cuestionario

Presentamos a continuación cada uno de los ejercicios propuestos en la experimentación así como los puntos asignados a cada uno y su repartición dentro de una misma tarea. Evidentemente todas las tareas pedidas fueron repetidamente vistas y ejercitadas en clase.

<i>Ejercicio 1</i>		
<p>1- (3 puntos) Para cada una de las 3 funciones siguientes, determina:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) El valor de la pendiente y de la ordenada en el origen b) El tipo de función c) Indica si la función es creciente, decreciente o constante d) Haz una tabla de valores con 3 puntos e) Representa gráficamente la función f) Determina el punto de corte con el eje X g) Determina el punto de corte con el eje Y 		
$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = -4x$	$f(x) = -2$
		
<p>Se propone el estudio de tres funciones (una de cada tipo) partiendo de sus ecuaciones. Las tres primeras preguntas hacen referencia a la definición de los elementos de la expresión algebraica de la función (pendiente, ordenada en el origen, tipo de función, crecimiento según el valor de la pendiente). Se pide luego una tabla de valores para enseguida realizar la representación gráfica a partir de los puntos escogidos. Por fin, el alumnado tiene que determinar los puntos de corte con los ejes eligiendo ellos mismos el método de resolución (gráfico o algebraico). Se asigna el mismo peso de puntuación a las cinco primeras preguntas, y medio peso para las dos últimas.</p>		

Ejercicio 2

2- (1,5 puntos) Consideramos la función que nos da el perfil de una competición ciclista. Justifica todas tus respuestas.

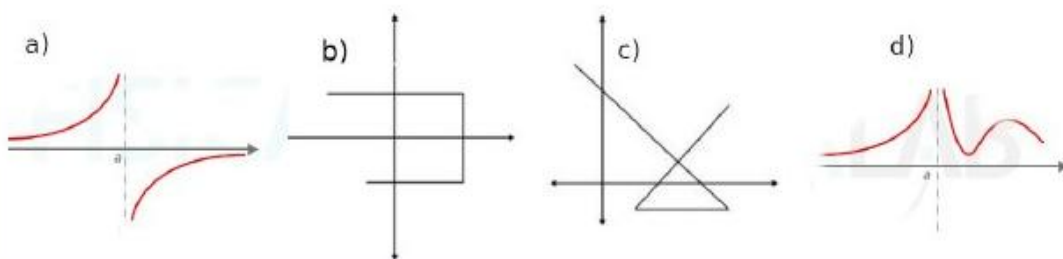


- ¿Cuál es la variable independiente de esta función?
- ¿Cuál es la variable dependiente de esta función?
- ¿La función es continua?
- Indica los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
- ¿Cuáles son los máximos de la función?
- ¿Cuáles son los mínimos de la función?

Este ejercicio parte de la representación gráfica de una función y pide algunas características: continuidad, reconocer las variables en cuestión, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los mínimos y máximos. Se asigna el mismo peso a las tres últimas preguntas, y ese mismo peso para el conjunto de las tres primeras.

Ejercicio 3

3- (0,5 puntos) Dí cuales de las siguientes gráficas representa a una función, y en caso afirmativo si es continua.



Se pide reconocer cuales son las representaciones gráficas que corresponden a una función según la propiedad vista en clase, y la continuidad. Se asigna el mismo peso de los puntos asignados a cada respuesta.

Ejercicio 4

4- (1 punto) Consideramos la función $f(x) = 2x - 3/5$.

a) Calcula el punto de corte con el eje X.

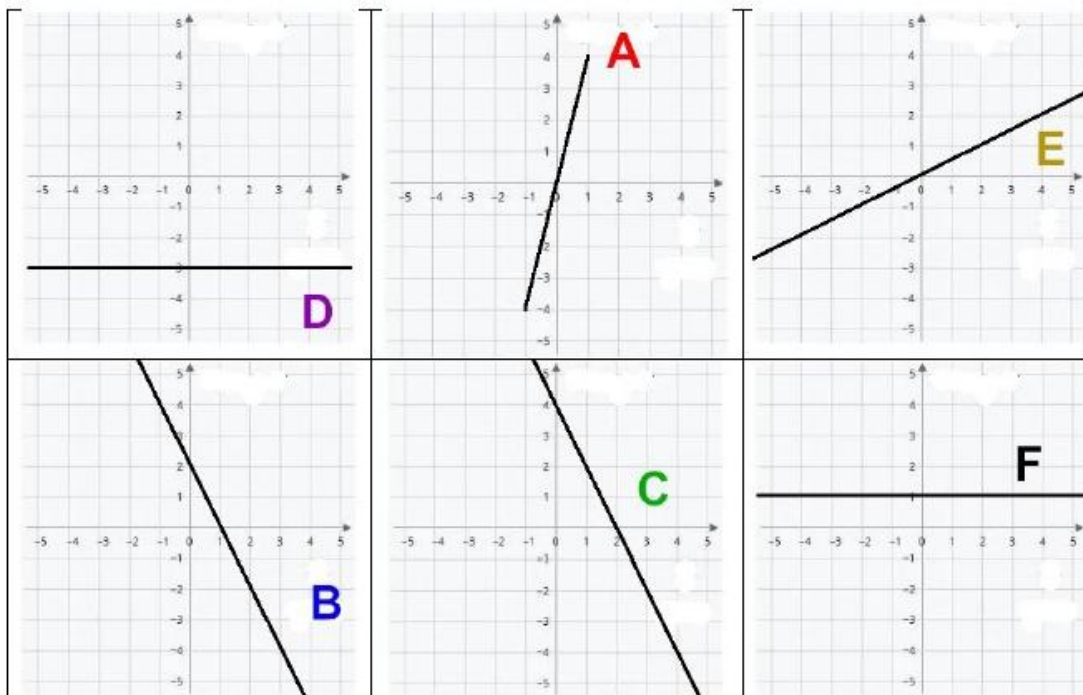
b) Calcula el punto de corte con el eje Y.

Se pide determinar a partir de una ecuación los puntos de corte con los ejes X e Y. Se asigna el mismo peso de la nota a cada pregunta.

Ejercicio 5

5- (2 puntos) Asocia a cada una de las gráficas (A, B, C, D, E) la ecuación que le corresponda justificando todas las respuestas (tipo de función, pendiente, ordenada en el origen...).

- a) $y = -2x + 4$ b) $y = x/2$ c) $y = 4x$ d) $y = -3$ e) $y = -2x + 2$ f) $y = 1$



Se pide asociar ecuaciones (dos de cada tipo) a su representación gráfica. En el caso de las funciones lineales, se proponen dos funciones con misma pendiente y ordenada en el origen diferente para obligar los alumnos a fijarse en estas características distintas. De la misma forma, se puede resolver todo el ejercicio únicamente basándose en justificaciones visuales en el gráfico (distinguiendo cada familia de función y luego comparando dos funciones del mismo tipo): no hay ninguna obligación de calcular la

pendiente de las rectas. Se asigna el mismo peso a la asociación ecuación-gráfica y a la justificación correcta para que la nota refleja que la elección de cada asociación no es aleatoria.

Ejercicio 6

6- (2 puntos) Determinar las ecuaciones cuya representación gráfica es una función:

- a) constante que pasa por el punto A(2,3)
- b) de proporcionalidad directa con pendiente -5
- c) lineal que pasa por el punto B(0,3) y con pendiente 2
- d) constante con ordenada en el origen -2

Se pide determinar las ecuaciones correspondientes a las funciones según las características enunciadas (tipo de función, punto de pertenencia, definición de la pendiente u ordenada en el origen). Se atribuye el mismo peso a cada pregunta.

9.3 Cuestiones y comportamientos esperados

Se pide claramente al inicio de la sesión que los alumnos repasen a conciencia sus producciones antes de devolver las copias y sobre todo que se aseguren de responder (correctamente o no) a lo pedido. Aún así, se prevé que algunos alumnos, por falta de atención, ni respondan a todo lo pedido cuando un mismo enunciado requiera varias respuestas distintas, ni que comprueben la relación entre lo pedido y lo respondido.

El comportamiento observado en dos alumnos concretos durante exámenes anteriores y durante las sesiones lectivas incita a pensar que no realizarán el examen, o sea no participarán en esa tarea. Asimismo, es probable que la dimensión afectiva hacia las matemáticas y la escasa motivación al trabajo personal (entendido como estudio previo pero también como facultad para enfrentarse y esforzarse ante las dificultades del momento en la sesión del cuestionario) implique que los ejercicios más abstractos no se realicen por la mayoría del alumnado.

Si nos enfocamos el análisis del aspecto matemático, podemos destacar para cada ejercicio los siguientes puntos:

Ejercicio 1	
Contenido	Definiciones, tabla de valores, representación gráfica, puntos de corte
Comportamiento esperado	Mezcla entre parámetros y variable. Por ejemplo, decir que la pendiente es "2x". No encontrar el valor de la pendiente o de la ordenada en el origen

	<p>cuando es nula.</p> <p>Limitar la representación gráfica a los puntos elegidos en la tabla de valores (es decir sin dibujarla más allá).</p> <p>Para determinar los puntos de corte, hacer la resolución de manera algebraica en la primera función y de manera visual en los otros dos casos más simples. Por ello es probable que pocos alumnos resuelvan la pregunta en el primer caso.</p> <p>Se espera que la mayoría de los alumnos completen todas las respuestas a excepción de las dos últimas (puntos de corte).</p>
--	---

<i>Ejercicio 2</i>	
Contenido	Intervalos, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos
Comportamiento esperado	<p>Dificultad en la determinación de intervalos: dar valores de Y, e incluso de puntos.</p> <p>No unir los intervalos (símbolo “U”).</p> <p>Uso de paréntesis en lugar de corchetes para dar intervalos.</p> <p>Dar solo los intervalos de decrecimiento (olvidando la pregunta sobre los intervalos de crecimiento).</p> <p>Tener dificultades para determinar los valores de X o Y de un punto ya que no hay cuadrícula.</p> <p>Dar únicamente máximo y mínimo absolutos.</p> <p>No considerar los extremos como posibles mínimos o máximos.</p>

<i>Ejercicio 3</i>	
Contenido	Definición de una función, continuidad.
Comportamiento esperado	<p>Al ser dos puntos a determinar en el enunciado, es probable que se responda a solo uno de ellos.</p> <p>Asociar la continuidad de una función a su definición (pensar que un trazado discontinuo no puede ser una función).</p> <p>Dar respuestas incoherentes (por el hecho de no estar justificadas) entre las gráficas propuestas (dar resultados correcto y falso para dos gráficos de mismas características).</p>

<i>Ejercicio 4</i>	
Contenido	Puntos de corte con los ejes.
Comportamiento esperado	<p>Desconocer la propiedad asociada a cada pregunta ($X=0$ en el eje Y y $Y=0$ en el eje X) o intercambiar las propiedades.</p> <p>No saber aplicar el método de resolución (reemplazar el valor de X</p>

	<p>o Y conocido en la ecuación)</p> <p>Errores en el desarrollo algebraico.</p> <p>No se espera que los alumnos hagan este ejercicio que supone desarrollar un corto cálculo algebraico y que no tiene componente visual dado.</p> <p>Intentar representar gráficamente la función para determinar visualmente los puntos de corte.</p>
--	---

<i>Ejercicio 5</i>	
Contenido	Tipos de funciones (constante, lineal, de proporcionalidad directa). Significado visual de la pendiente y de la ordenada en el origen.
Comportamiento esperado	<p>No dar ninguna justificación de cada elección.</p> <p>Dar justificación insuficiente a cada elección.</p> <p>Asociar cada ecuación con el gráfico de misma letra de referencia (enunciado y conceptos no entendidos).</p>

<i>Ejercicio 6</i>	
Contenido	Ecuaciones según definiciones en enunciado o representación gráfica.
Comportamiento esperado	No hacer un gráfico de borrador para entender las condiciones dadas.

9.4 Resultados

Empecemos por una visión general de los resultados obtenidos en nuestra muestra de once alumnos:

<i>Notas obtenidas</i>
9.75
7.35
6.45
6.2
5.5
5.05
4.55
4.5
4.5
4.15
2.5

La media es de 5,5. Una corta mayoría de la clase aprobó este cuestionario. Un alumno tuvo de hecho un 10 (9.75 debido a un despiste en la copia del enunciado), y el resto de aprobados corresponde a alumnos que realizan un trabajo personal mínimo en casa.

Veamos ahora para cada ejercicio cuales fueron los resultados alcanzados en las producciones de los alumnos a la luz de algunos indicadores.

Ejercicio 1		
	<i>% de respuestas</i>	<i>% de respuestas correctas</i>
Pregunta a) valor pendiente y ordenada en origen	63%	27%
Pregunta b) tipo de función	90%	72%
Pregunta c) crecimiento o decrecimiento	100%	81%
Pregunta d) tabla de valores	90%	90%
Pregunta e) (representación gráfica)	90%	81%
Pregunta f) y g) (puntos de corte)	36%	27%

Como era de esperar, solo cuatro alumnos intentaron determinar los puntos de corte. La tabla de valores y representación gráfica fueron los puntos más ejecutados, ya que se trabajaron con más regularidad en clase, e incluso en unidades didácticas anteriores. Si bien se esperaba que la respuesta en cuanto al crecimiento o decrecimiento se resolviera a partir de la expresión algebraica, pudimos comprobar que algunos alumnos hicieron lo propio una vez realizado la representación gráfica, ignorando así la definición más algebraica de la pendiente. Este ejercicio concentra el mayor peso de puntos relativos al total de la nota, y también fue aquel para el cual los alumnos tuvieron el porcentaje de logro más alto.

Aunque parece anecdótico, hay que mencionar de nuevo la dificultad del alumnado para identificar el punto de origen (0,0) como perteneciente a los dos ejes X e Y. En el caso de la función de proporcionalidad directa, este mismo punto corresponde al punto de cruce con el eje X y a la vez con el eje Y. Se podría interpretar esta dificultad como una muestra del contrato didáctico: “Cada pregunta diferente tiene que tener una respuesta diferente”.

Ejercicio 2	
Identificar los puntos o intervalos requeridos	63%
Usa la notación correcta (corchetes, paréntesis)	45%
Da una respuesta completa	45%
Justifica la respuesta	9%

Muchos alumnos tuvieron duda a la hora de incluir los extremos como posibles mínimos o máximos, aunque se les dio consigna al respecto tanto en clase como en el examen. La ausencia de cuadrículas también fue una fuente de preocupación por los alumnos, más pendientes del valor numérico exacto que de la consideración del análisis de crecimiento o decrecimiento. Este ejercicio no suponía ninguna dificultad de abstracción o algebraica, no obstante el nivel de logro fue relativamente bajo si lo comparamos con las expectativas.

Ejercicio 3	
Responde a las dos preguntas hechas	18%
Incoherencia conceptual entre las respuestas	54%
Todas las respuestas correctas	27%

Justifica la(s) respuesta(s)	18%
------------------------------	-----

Fueron dos propiedades a determinar (determinar si las gráficas son funciones y si las funciones son continuas), no obstante 82% de los alumnos solo respondió a una de ellas. Queda patente una vez más que los alumnos no vuelven a leer la pregunta hecha antes de dar por finalizado el ejercicio. Este ejercicio destaca por su porcentaje muy bajo de respuestas correcta debido a que el concepto de función no fue del todo asimilado (una valor fijado de X solo puede dar un único valor de Y), aunque fue repasado varias veces en clase a petición del grupo. También hay que destacar la asociación ideada por algunos alumnos: “un trazado discontinuo no puede ser una función”. Se desmintió específicamente aquella afirmación en clase con ejemplos.

El alumno asocia la continuidad de una posible función con el hecho de que sea de facto una función.

Ejercicio 4	
Intenta el ejercicio	36%
Da las respuestas correctas	27%

Este ejercicio más bien algebraico apenas fue realizado por los estudiantes. No obstante, tres de los cuatro alumnos que lo intentaron hallaron la respuesta correcta: los alumnos con menos problemas para atacar ejercicios abstractos tampoco suelen tener problemas para ejecutar cálculos algebraicos.

Ejercicio 5	
Intenta el ejercicio	72%
Da las respuestas correctas	54%
Justifica las respuestas	54%

Este ejercicio interpretativo era un buen medidor del nivel de comprensión en cuanto a las diferentes tipos de funciones y de sus parámetros (pendiente y origen en la ordenada). La mayoría halló las respuestas relativas a las funciones constantes, pero los demás resultados fueron insuficientes (algunas asociaciones correctas no estaban correctamente justificadas y por lo tanto de valor nulo).

Hay que reconocer que la notación del enunciado no fue del todo acertada: algunos alumnos se empeñaron en asociar la ecuación a) con la recta A). Pero eso denota de

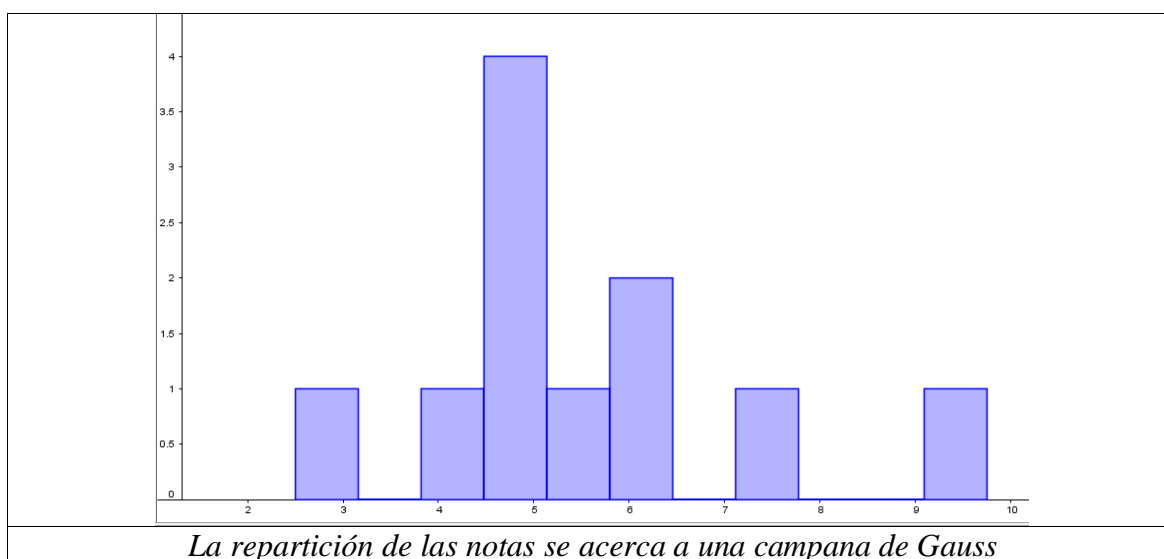
todas formas una incorrecta comprensión de los conceptos básicos relacionados con las funciones.

<i>Ejercicio 6</i>	
Realiza un gráfico de apoyo	36%
Da todas las respuestas correctas	9%

Este ejercicio también era más bien interpretativo que algebraico: se insistió repetidas veces en clase en la gran utilidad de esbozar un gráfico con las propiedades generales de una función (crecimiento, puntos notables,...) antes de empezar ejercicios de este tipo.

9.5 Discusión de los resultados

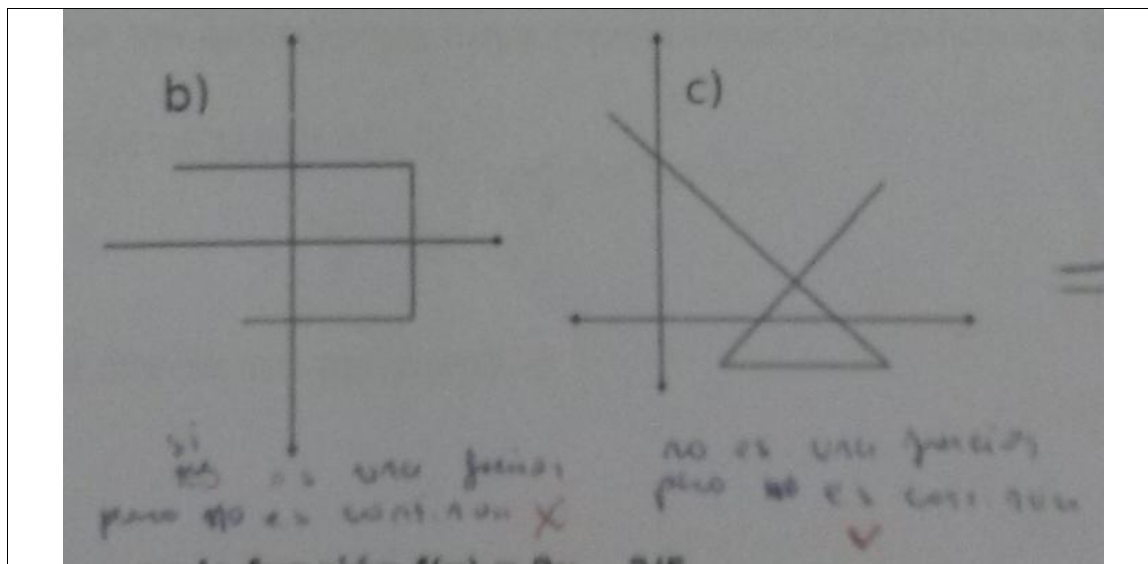
Hay que destacar en el contexto de esta clase que el resultado obtenido a nivel académico (una corta mayoría -seis de once alumnos- aprobó el examen) no corresponde a las exigencias habituales de una clase de 2º de la ESO. El nivel global es insuficiente si consideramos que el nivel exigido en el examen era bajo. Además la comprensión real (sin incoherencias entre diferentes respuestas sobre un mismo concepto) parece aún menor entre aquellos que superaron la media. Esas constataciones pueden parecer inconsistentes con el labor de evaluación objetiva del docente, pero la realidad impone tanto atender a los criterios del currículo como las exigencias explícitas e implícitas de resultados positivos (desde la jerarquía del centro y del propio sistema educativo, pues no se permite repetir cursos más de un cierto número de veces). Por ello no es de extrañar que a pesar de que la muestra de la experimentación es pequeña (once alumnos), constatamos que la repartición de las notas se ajusta a una distribución en campana de Gauss. A la vista de este resultado, nos quedará la duda de saber si corresponde a un fenómeno natural (¿"normal"? como lo indica su nombre) y universal, si simplemente se adecua al perfil concreto de la clase en cuestión, o si fue el propio docente quien diseño inconscientemente el examen para conseguir tal repartición. ¿Un buen examen es aquel para el cual la media de las notas es de 5?



Por lo general, las tareas con un componente más algebraico tuvieron el menor grado de respuesta, mientras que aquellas que se basaban en un análisis visual tuvieron mayor participación y logro. Eso corresponde con lo previsto en el diseño del examen.

Fue más impactante la incoherencia manifiesta de algunas respuestas entre ellas, lo que denotó que el alumno no entendió realmente los conceptos: se vieron respuestas correctas asociadas a una justificación totalmente falsa. En ausencia de justificación, dos respuestas sobre funciones de iguales características no deberían de ser diferentes. A la inversa, dos propiedades excluyentes entre sí no deberían corresponder a la misma función. Como docente en práctica, me encontré por lo tanto ante el dilema de atribuir los puntos correspondientes a cada pregunta de manera individual, o puntuar globalmente (y negativamente) interpretando las soluciones incoherentes del alumno como respuestas aleatorias e injustificadas al no haber sido entendidas, anulando entonces el valor de la respuesta correcta dada.

	<p><i>Ejercicio 1: Se piden las características de una misma función. En ambas producciones, la incoherencia de las respuestas (función constante y decreciente a la vez) demuestra que el alumno dio respuestas aleatorias o bien no entendió los conceptos.</i></p>



Ejercicio3:

En el primer gráfico, el alumno escribió “Sí es una función pero no es continua”. En el segundo gráfico, el mismo alumno escribió “No es una función pero es continua”. Sin justificaciones, no se observa ningún tipo de coherencia entre ambas respuestas en cuanto a los dos conceptos pedidos.

De manera global, fue patente ver como los alumnos no saben desarrollar un procedimiento matemático, ni hacer un borrador de resultado, ni seguir el método de un procedimiento mecánico (algebraico en general). Muchos no leen correctamente la pregunta al principio (independientemente de comprenderla y de saber solucionarla), ni tienen una mirada retroactiva para confirmar si lo que han respondido corresponde efectivamente a lo que se pedía inicialmente (número de preguntas en el enunciado y contenido de cada una de ellas).

Finalmente, parece que el tiempo requerido para hacer el examen fue el adecuado, pues el mejor alumno que desarrolló con especial atención los procedimientos, justificó cada respuesta, y respondió de manera completa, empleó justo el tiempo a su disposición.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de aprendizaje del concepto de función con alumnos de 2º de la ESO del centro educativo público de Altsasu. En la primera parte del trabajo se realiza un análisis longitudinal en Primaria y en la ESO tanto a nivel del currículo como de los libros de texto, siempre en lo relativo a las funciones. El objetivo de este análisis es presentar los conocimientos de partida de los alumnos analizando los cursos anteriores al curso de referencia así como los requisitos a los cuales los alumnos se tendrán que enfrentar en los cursos posteriores. Tras la presentación de aquellos contenidos, se analizan las presencias y ausencias en el currículo y en los libros de texto, y la coherencia entre ambas referencias.

En la parte II se analiza el tema de funciones mediante un análisis ontosemiótico y se describe la organización de la unidad didáctica dedicada en el libro de texto de referencia. A continuación se analizan las dificultades y errores previstos en el aprendizaje del alumnado, tarea de especial relevancia para adaptar la enseñanza del docente. Finalmente se explicita la estructura planteada para el desarrollo de las clases impartidas y se presentan la cronología del proceso y los resultados obtenidos (actividades adicionales, cuestionario). Finalmente se discuten los resultados y en los apartados siguientes se apuntan las conclusiones extraídas así como las cuestiones abiertas que pueden ser objeto de estudio en futuros trabajos.

Conclusiones generales del trabajo

La primera parte del trabajo constituye una labor imprescindible para ejercer correctamente la función de docente: se trata a la vez de analizar cuáles son los requisitos en los contenidos definidos para la enseñanza y a la vez ver su coherencia con los libros de texto, recurso de base del docente y de los alumnos. El estudio longitudinal de ambos textos de referencia da además un contexto (contenidos anteriormente vistos) y un rumbo a la enseñanza actual. La unidad didáctica, objeto de este trabajo, aparece formalmente en el currículo y en los libros de texto a partir de 1º de la ESO, y su contenido se va ampliando curso tras curso, de acuerdo con el diseño en espiral del currículo. Hay que destacar que la iniciación (en 1º y 2º de la ESO) al concepto de función y a sus principales propiedades se hace de manera visual con la representación gráfica. Esto constituye a la vez un puente facilitador para la comprensión de los nuevos conceptos, pero restringe también parte de la asimilación total de ellos (el concepto de continuidad en particular). Mientras tanto el uso del álgebra va aumentando paulatinamente con las expresiones algebraicas de los diferentes tipos de funciones, hecho que se denota claramente en los tipos de ejercicios propuestos en los libros de texto.

En la segunda parte del trabajo analizamos el libro de texto de referencia que usamos durante el proceso de enseñanza. Asimismo vimos que la correcta asimilación de los contenidos propuestos en la unidad de función depende otras unidades anteriores en el curso, y que el propio concepto de función y otras ideas relacionadas (representación gráfica, proporcionalidad, tabla de valores...) aparecen en otras asignaturas del curso. La siguiente labor de previsión de dificultades y errores es realmente clave para diseñar

(contenido) y organizar (evaluación formativa) las sesiones de docencia. Se tienen que tomar en cuenta tanto el aspecto puramente matemático de los contenidos como el contexto cultural, social y económico de los integrantes de la clase en cuestión. Finalmente el diseño de las sesiones y del cuestionario tiene que tener en cuenta todos estos aspectos, y la previsión de malos resultados no tiene que desanimar al docente en su labor, sino que ha de ser el punto de partida de una constante autoevaluación de su enseñanza para lograr los mejores resultados posibles, sea a nivel cuantitativo (notas) como cualitativo (comprensión real de los conceptos).

Cuestiones abiertas

En el contexto propio de la clase, la reflexión principal reside en el peso y la prioridad que el docente tiene que dedicar en el aspecto puramente académico de los contenidos (procedimientos mecánicos de resolución, álgebra de las funciones) frente a la comprensión real y profunda de los conceptos (función, continuidad, variable,...). En la mayoría de los casos, para los alumnos el resultado académico (nota) carece de valor desde el inicio: escasa motivación en el trabajo personal, desinterés crónico en clase. Eso explica la insuficiencia de las notas obtenidas, y por ello creemos que una cuestión abierta es saber redefinir en estos casos a la alza la repartición de las horas centradas en el entendimiento más profundo de los conceptos básicos, aunque sea a costa de los procedimientos y ejercicios mecánicos. La realización de problemas (sin tener necesariamente que resolverlos de manera completa) puede ser un punto central en lugar de ser un objetivo “final” de la unidad didáctica. En efecto constituyen una base más apropiada para alcanzar una reflexión e incluso un mayor nivel de abstracción sobre los conceptos introducidos, además de presentar muchas veces un contexto real, y por lo tanto más motivador para los alumnos.

Otro punto a destacar es la gran carencia en cuanto a las competencias matemáticas formuladas en el bloque 1 del currículo de todos los cursos. Los alumnos no saben desarrollar una explicación secuencial y lógica, no justifican sus respuestas ni las formalizan (frase literal con el resultado, el hecho de subrayar un resultado), no tienen una visión retroactiva (no responden a la pregunta hecha, o lo hacen de manera parcial), la presentación (limpieza en el desarrollo) es insuficiente... Estos aspectos deberían de trabajarse de manera continua (por ello no existe una unidad didáctica dedicada a ello), pero resultan en realidad los menos trabajados. Creemos que más que las matemáticas puras, serán las competencias matemáticas que serán útiles y claves en el futuro de los alumnos: para todos en su vida cotidiana, y para algunos de aquellos que seguirán en estudios de nivel superior, ya que será una exigencia intelectual y de formalismo.

Referencias

Boletín Oficial de Navarra (BON) (2014). Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 174, de 5 de septiembre, Anexo I 41-57).

Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015a). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 127, de 2 de julio, 44-57).

Godino, J.D., Font, V., and Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Recuperado de: *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (pp.131-155).

Gilza-Edébé Taldea. (1995). *Matematika 6. Lehen mailako hezkuntza. Hirugarren Zikloa.*

Jesus Mari Goñi. (1996). *Matematika 6. Baga.Biga. Lehen mailako hezkuntza. Hirugarren Zikloa.* ELKAR-G.I.E.

Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve. 1º ESO (2016). Santillana Educación, S.L.

Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve. 2º ESO (2016). Santillana Educación, S.L.

Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve. 3º ESO (2016). Santillana Educación, S.L.

Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve. 4º ESO (2016). Santillana Educación, S.L.

Matemáticas 6º Primaria. Vacaciones Santillana. (2000). Santillana Educación, S.L.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:

Esteban Induráin Eraso, Departamento de Matemáticas