3ª Compañía

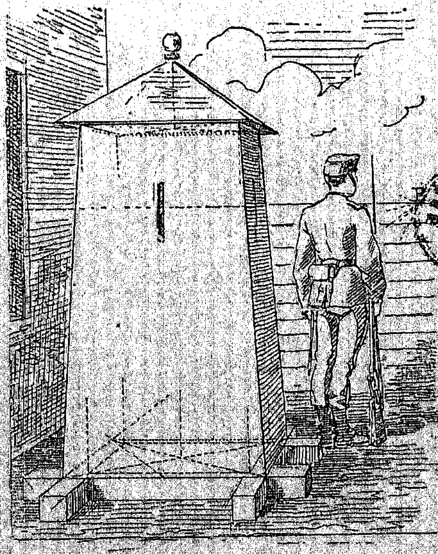
Javier de Marichalar Número 1631

N. Lagarde.

CUATRO LECCIONES

DE

PERSPECTIVA LINEAL



TOLEDO—1892
J. PELÁEZ, IMPRESOR Y LIBRERO DE LA A. G. M.
Comercio, 29 y 31—Alcázar, 20.
Teléfonos 31 y 32.

CUATRO LECCIONES DE PERSPECTIVA LINEAL

Lección 1.ª

Generalidades.
Objeto de la perspectiva.—Reglas fundamentales.
Método general de perspectiva lineal.

1. Un espectador percibe un objeto $A\,B$ (fig. 1.ª) por el intermedio de los rayos luminosos, que partiendo de los diferentes puntos de éste, van á dibujar su imagen $A'\ B'$ en la retina, después de cruzarse en el centro óptico O del sistema lenticular formado por la córnea transparente y el cristalino.

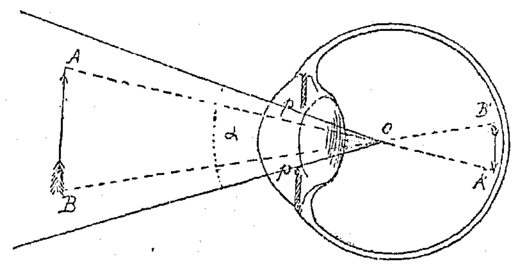


Fig. 1.ª

Desde luego se comprende, que para que el objeto pueda ser percibido de un solo golpe de vista, debe estar todo él comprendido dentro del cono óptico, cuyo ángulo α depende de la abertura pp de la pupila, correspondiente á la distancia á que se encuentra el objeto.

2. Supongamos que entre el ojo (1) del espectador redu-

(1) El ojo perspectivo sería el ojo único, convencional, sobre cuya retina se confundieran las imágenes producidas sobre los dos ojos.

cido á un *punto*, que llamaremos *de vista*, y el objeto ABC (figura 2.ª) se interpone una superficie plana y transparente, sobre la cual marcamos los puntos en que le atraviesan los rayos luminosos OA..... OB es evidente que si prescindimos del colorido é intensidad y nos concretamos á la

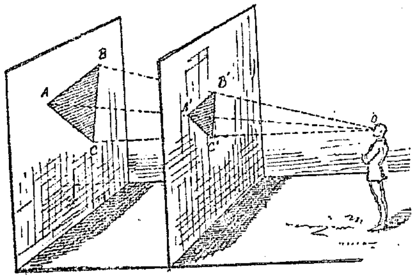


Fig. 2.ª

posición relativa de los puntos A..... B, la misma impresión causarán en el ojo del espectador los rayos emitidos por el objeto ABC que los que parten de A'..... B'; y el espectador, al dirigir la vista á $A'\,B'\,C'$ creerá ver el objeto ABC aun cuando éste deje de existir.

Esta consideración nos hace comprender la posibilidad de representar los objetos sobre una superficie ó cuadro, tal cual aparecen á nuestra vista; este es el objeto de la *perspectiva*, nombre que también se da á la imagen obtenida sobre el cuadro. El conjunto de reglas fijas que permiten representar las líneas, constituye la *perspectiva lineal*. Por medio de la *perspectiva aérea* se determinan los tonos con que aparecen los objetos, cuyas intensidades producen la ilusión de las distancias á que se encuentran del espectador. La perspectiva aérea depende casi en absoluto del talento personal del artista y de la observación constante de la naturaleza: es más cuestión de sentimiento que de teoría.

3. Por lo que acabamos de ver, el problema de la perspectiva, considerado geométricamente, se reduce á trazar rectas que, partiendo de los diferentes puntos del objeto, converjan al punto de vista y á hallar las intersecciones de estas rectas con el cuadro.

Podrían aplicarse á la resolución del problema los pro-

cedimientos de la geometría descriptiva, en el orden siguiente:

Se empezaría por representar el objeto, el cuadro y el punto de vista por medio de sus proyecciones horizontal y vertical.

Se trazarían los rayos visuales y se encontrarían sus intersecciones con el cuadro.

Se haría el rebatimiento del cuadro para tener la figura hallada, que ordinariamente habrá que ampliar.

Estas construcciones largas y complicadas, que exigen además demasiado espacio, se facilitan considerablemente teniendo en cuenta las propiedades que vamos á exponer y que permiten al mismo tiempo operar directamente sobre el cuadro, empleando pocas líneas auxiliares y sin salirse mucho de sus límites.

4. Según lo dicho anteriormente, la perspectiva de la recta AB indefinida (fig. 3.ª), no es otra cosa que el lugar geométrico de las intersecciones a.....b de los rayos oA..... oB con el cuadro; es decir, la intersección de éste con el plano OAB.

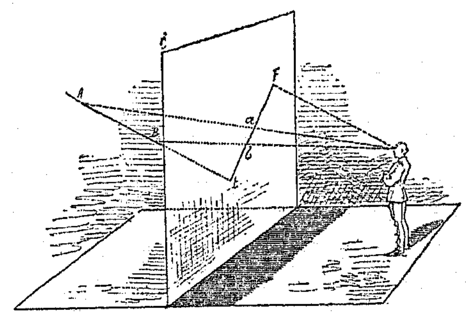


Fig. 3.ª

La traza t de la recta pertenece á esta intersección, así como la F de la paralela á la AB trazada desde O, y que evidentemente se halla en el mismo plano.

Luego para hallar la perspectiva de una recta indefinida deberemos unir su traza t con el punto F, que se obtiene trazando desde O una paralela á la recta del espacio, y hallando su intersección con el cuadro.

La circunstancia de aproximarse á F los puntos de la perspectiva ab..... á medida que los AB..... del espacio se alejan del cuadro, ha dado origen á la denominación de punto de fuga con que se designa á dicho punto.

Regla 1.ª—Podemos, pues, establecer la siguiente regla general: *Para hallar la perspectiva de una recta indefinida, hállese la traza de ésta sobre el cuadro, y únase con su punto de fuga.*

5. Regla 2.ª— Dedúcese de aquí que: *Las perspectivas de todas las rectas paralelas á una misma dirección concurren en un punto*, porque desde O sólo podemos trazar una paralela á la dirección común y uno solo será, por consiguiente, el punto que tenemos que unir con las trazas $t\,t'\,t''$..... (figura 4.ª)

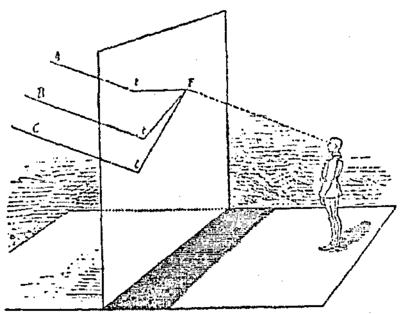


Fig. 4.ª

6. Se separan de este principio las rectas que, siendo paralelas entre sí, están además situadas en planos paralelos al cuadro ó *planos de frente;* pues es evidente que, en este caso, el punto de fuga está en el infinito. Además, sabemos que un plano OBA que pasa por una recta BA paralela á un plano, no puede cortar á éste más que según una recta paralela á BA; luego

Regla 3.ª—*Las perspectivas de rectas paralelas situadas en planos de frente son paralelas á las rectas originales.*

Regla 4.ª—*Las perspectivas de rectas verticales son siempre verticales.*

7. Supongamos una recta *horizontal de fuga;* es decir, no contenida en un plano de frente (fig. 5.ª). Si desde el punto de vista trazamos la paralela OF, estará ésta contenida en el

plano horizontal que pasa por O y que llamaremos *plano de horizonte*. La traza F se encontrará en la traza del plano de horizonte sobre el cuadro ó línea de horizonte, luego

Regla 5.ª—*Las horizontales no contenidas en planos de frente, tienen sus puntos de fuga en la línea de horizonte.*

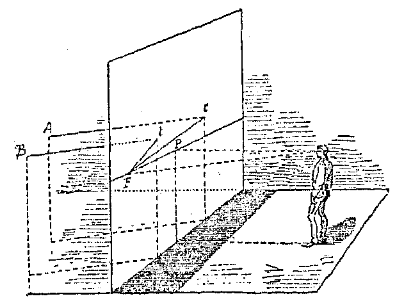


Fig. 5.ª

8. En el caso de rectas perpendiculares al cuadro (fig. 6.ª), la paralela común trazada desde O es al mismo tiempo la proyectante de este punto sobre el cuadro en P. La proyección P del punto de vista sobre el cuadro, se denomina punto principal.

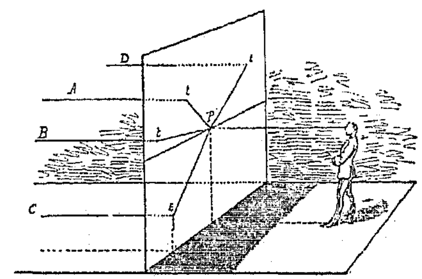


Fig. 6.ª

Regla 6.ª—*Las perpendiculares al cuadro tienen su punto de fuga en el punto principal.*

9. Si las horizontales forman 45° con el cuadro, las paralelas trazadas desde O van á encontrar al cuadro en dos puntos D y D (fig. 7.ª), situados sobre la línea de horizonte, á una distancia de P igual á la que separa el cua-

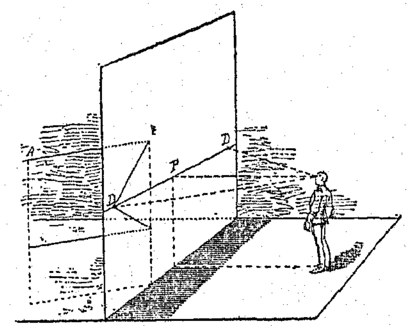


Fig. 7.ª

dro del punto de vista. Estos puntos se llaman *puntos de distancia.*

REGLA 7.ª—*Las horizontales á 45° con el cuadro tienen por puntos de fuga los de distancia.*

10. La perspectiva $A' B' C'$ de la figura $A B C$ (fig. 2.ª), situada en un plano de frente, no es otra cosa que una sección paralela á la base de la pirámide ó cono $O A B C$. Esta consideración nos permite establecer la siguiente

REGLA 8.ª—*Una figura situada en un plano de frente tiene por perspectiva otra semejante.*

11. Como consecuencia de esta regla, podemos establecer la

REGLA 9.ª—*Si una recta de magnitud determinada toma distintas posiciones en un plano de frente, las perspectivas de éstas son iguales entre sí.*

12. Con lo expuesto anteriormente podemos ya abordar la descripción de los métodos que constituyen la práctica de la perspectiva lineal.

Cuando un dibujante quiere ejecutar por *procedimientos exactos* la perspectiva de un objeto, empieza por representarlo en proyección horizontal sobre el plano que pasa por la base del cuadro, y al que designaremos con el nombre de geometral, dotando de cotas á los diferentes puntos ó valiéndose de una proyección vertical para las elevaciones.

Así, supongamos que se trata de representar el interior de una sala (fig. 8.ª), á partir de la línea $l\,l'$ que tomamos

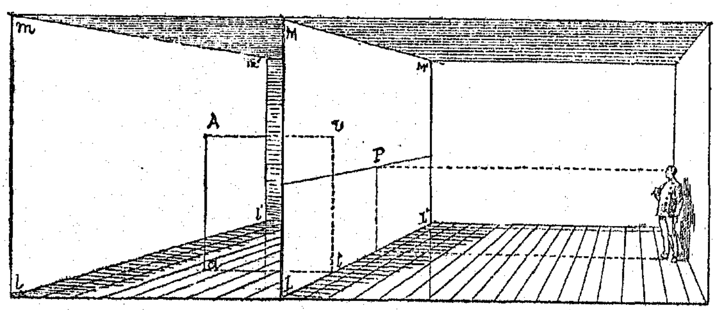
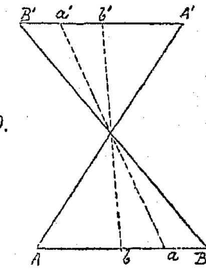


Fig. 8.ª

como base del cuadro: empezaremos por trazar el plano (figura 9.ª).

Fig. 10.



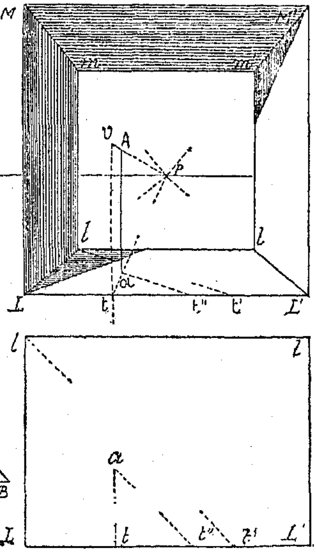


Fig. 9.ª

Para situar el punto de vista, el espectador retrocede delante del cuadro hasta que éste quede comprendido dentro del cono óptico: sea OP la distancia que llena las condiciones debidas.

Supondremos al espectador enfrente del centro del cuadro y de pie sobre el geometral, con cuyas hipótesis el punto principal se encontrará en el centro P y la línea de horizonte á la altura de los ojos. Con estos datos procederemos á dibujar el cuadro con arreglo á escala, colocando la línea de horizonte á la altura de los ojos, el punto P en el centro y los D á la distancia $PD = PO$.

Aplicando á las aristas laterales la *Regla 1.ª* observamos que sus trazas sobre el cuadro son los vértices de éste y que su punto de fuga es P por la *Regla 6.ª*; sus perspectivas serán las PM, PM', PL y PL'.

Para hallar la perspectiva del punto l, hagamos pasar por él dos rectas á las cuales sea fácilmente aplicable la *Regla 1.ª*, tales como una perpendicular y una á 45° con el cuadro, cuyos puntos de fuga son respectivamente P y D, y que van á encontrar al cuadro en su base. La primera está ya determinada en PL; la segunda cortará al cuadro á una distancia de L igual á la que separa al cuadro del punto en cuestión, por ser lt' la diagonal del cuadrado construído sobre dicha distancia. Uniendo la traza tt' con el punto D (*Regla 7.ª*), tendremos la perspectiva de la segunda recta auxiliar.

Para hallar las direcciones de lm y ll' tendremos presente la *Reglas 3.ª* y *4.ª*, lo que nos dará los puntos m y l', y, por consiguiente, el m', volviendo á aplicar las dos reglas citadas.

La proyección de un punto cualquiera A se determinará empleando el mismo procedimiento que se ha seguido para l. Falta sólo fijar su altura. Para conseguirlo hagamos pasar por la proyección a una perpendicular al cuadro, á cuya base cortará en t; levántese en este punto una vertical (figs. 8.ª y 9.ª) $tv = aA$ y únase v con P; las rectas vP y tP, representando dos perpendiculares al cuadro, interceptarán partes iguales á vt en todas las verticales situadas en el plano vta; Aa será, por consiguiente, la altura buscada.

13. El procedimiento expuesto nos da resuelto el problema de la perspectiva dejándolo reducido á cuestión de tiempo y paciencia; pero en la práctica, y especialmente cuando se dibuja del natural, se colocan solamente por dicho medio en el primer caso y por la observación en el segundo; las líneas principales, es decir, las que constituyen el conjunto, y se establecen los detalles por métodos especiales que no exigen el auxilio del geometral y permiten continuar el dibujo apoyándose en las líneas ya establecidas.

14. Antes de pasar á su exposición haremos alguna observación sobre la posición del punto de vista, y que hemos dejado exprofeso para este lugar con más medios de conocer la influencia de aquélla.

Dijimos que el espectador debe abrazar el objeto de un solo golpe de vista sin verse obligado á mover la cabeza.

Supongámosle colocado al pie de un objeto de gran altura que no esté comprendido dentro del cono, por lo cual habrá que variar el eje de éste á fin de distinguir la parte superior, y, por consiguiente, la posición del cuadro que debe serle normal. Resulta de aquí, que las aristas, que en su parte inferior se presentaban paralelas al cuadro, aparecerán en éste representadas por verticales, mientras en su parte superior convergerán por la nueva dirección que tienen respecto al cuadro; es decir, que para cada posición del eje óptico una misma línea se presenta bajo distinto aspecto, dando, por consiguiente, un dibujo enteramente deformado.

Si, por el contrario, el espectador retrocede hasta que el cono abrace al objeto, las mismas líneas guardarán siempre la misma posición relativamente al cuadro.

La experiencia enseña que para que éste sea abrazado por el cono óptico, es preciso que la distancia del espectador al cuadro sea por lo menos igual á la base del cuadro.

Respecto al punto enfrente del cual debe colocarse el espectador, hemos escogido en el caso de la figura 8.ª el centro del cuadro, por ser ésta la posición que naturalmente va á tomar el que lo examine. Pero esto no es exclusivo y en ese mismo caso convendrá, á veces, acercarlo más á uno ú otro de los costados del cuadro, bien porque el asunto principal se encuentre hacia aquel lado, bien porque se necesite descubrir más detalles del opuesto.

15. Según lo que hemos dicho de la distancia mínima que debe existir entre el espectador y el cuadro, es evidente que los puntos de distancia nunca podrán estar contenidos en los límites del cuadro. Para suplir su falta, cuando son inaccesibles y se hace preciso su empleo, se recurre al procedimiento de la reducción de distancias. Consiste éste en situar el punto D á una distancia $\frac{D}{2}$, $\frac{D}{3}$..... del punto P

de manera que resulte dentro del cuadro, y reducir en la misma proporción la magnitud que representa la profundidad de un punto, al tomarla sobre la base del cuadro, desde el pie de la perpendicular trazada desde aquél.

Así, en la figura 9.ª, si tomáramos la distancia reducida á $\frac{D}{2}$, tendríamos, para determinar l, que tomar á partir de t, una magnitud igual á $\frac{t\,t''}{2}$ y unir el punto obtenido con $\frac{D}{2}$ en vez de unirlo con D. La propiedad geométrica representada en la figura 10 nos hace ver que el punto obtenido sobre $A\,A'$ sería el mismo, bien empleemos la $B\,B'$, la $a\,a'$, $b\,b'$ etc., siempre que los segmentos $b'\,A'$, $A\,b$ sean la misma fracción respectivamente de $B'\,A'$ y $A\,B$.

Lección 2.ª

Escalas de perspectiva.—Rectas paralelas. División de rectas.

16. Hemos visto en el método general cómo puede fijarse la altura de un punto cualquiera. Para facilitar esta operación, sin tener que repetir la construcción en cada punto, se hace uso de las escalas de perspectiva.

Se llama así una magnitud tomada á voluntad en el plano del cuadro, vertical ú horizontalmente, y transportada indefinidamente por dos paralelas que parten de sus extremidades. Cualquiera de las dos direcciones que sea la adoptada, las perspectivas de las dos rectas extremas concurrirán en un punto de la línea de horizonte. El espacio entre las dos paralelas siendo el mismo, por reducido que aparezca con la distancia, estas escalas nos servirán para encontrar la magnitud de los diferentes objetos, cualquiera que sea su distancia al cuadro.

17. *Aplicación de la escala de perspectiva á la colocación de figuras.*—Sea AB la magnitud de una figura en primer plano de frente y supongamos que se nos dan sobre el cuadro las perspectivas de los puntos del geometral sobre los cuales deben aquéllas apoyarse (figs. 11 y 12).

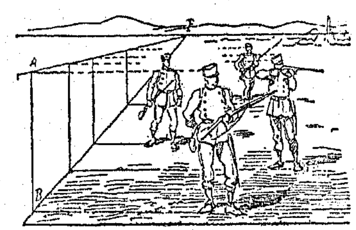


Fig. 11.

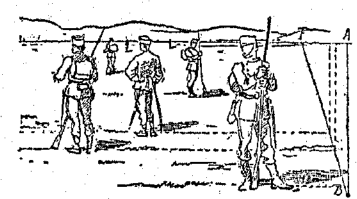


Fig. 12.

Trácense á voluntad las AF y BF á un punto cualquiera del horizonte, por los pies de las figuras llévense las líneas de frente hasta encontrar á la BF y levántense verticales en los puntos de encuentro; es evidente que las rectas AF y BF interceptarán sobre dichas verticales partes iguales á AB, y como según la *Regla 9.ª* las perspectivas de éstas no varían de magnitud, cualquiera que sea la posición de las mismas en los planos de frente en que se encuentran situadas, podremos llevarlas sobre las verticales trazadas en los puntos dados y dibujar sobre ellas las figuras de la misma magnitud.

En el caso particular de estar el observador de pie sobre el mismo plano que las figuras, todas estas tendrán sus ojos sobre la línea de horizonte y podrán trazarse sin necesidad de escala.

18. Cuando hay que fijar muchos puntos sobre el cuadro, suelen emplearse tres escalas de perspectiva, perpendiculares entre sí, constituyendo un sistema de ejes coordenados que sirven para determinar la posición de los diferentes puntos. Ordinariamente se toman como tales la base, un lado vertical del cuadro y una perpendicular á éste trazada por el punto de unión de los primeros (fig. 13). El lado vertical y la base del cuadro se dividen directamente en partes iguales que en la escala adoptada para aquél, representen metros, decímetros, etc. Para dividir igualmente el eje perpendicular al cuadro, bastará unir las divisiones de la base con el punto de distancia; todas las rectas así obtenidas representan horizontales á 45°, que interceptarán sobre la perpendicular al cuadro, partes iguales á $L1$, $L2$, $L3$,.....

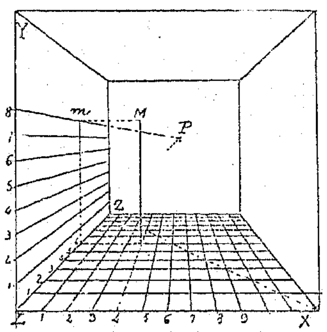


Fig. 13.

Las rectas trazadas paralelamente al cuadro por los puntos de división obtenidos, representarán otras tantas rectas situadas á la misma distancia del cuadro que aquéllas.

Supongamos que se quiere hallar la perspectiva de un punto cuyas coordenadas con relación á los citados ejes son $X=4$, $Y=8$ y $Z=6$; trazaremos $4P$ hasta su encuentro con la paralela al cuadro, situada á 6 de éste, falta sólo llevar $Z=8$ sobre la vertical levantada en el punto de encuentro; para ello tomaremos dicha magnitud $6m$ en la escala de altura y trazando la mM tendremos resuelto el problema.

19. *Perspectiva de una pirámide de base cuadrada de 4ᵐ de lado y 7 de altura vista de frente.*—La posición de la pirámide (fig. 14) está dada por la proyección de su vértice situado á 3^m y 4^m de los ejes X y Z.

Para ocupar menos espacio, hemos supuesto la distancia reducida á $\frac{1}{2}$; según esto, para obtener la profundidad 4^m uniremos la división 2 de la base con $\frac{D}{2}$; el vértice se encontrará como en el caso anterior el punto m. Las perpendiculares $1P$ y $5P$, trazadas á 2^m de la $3P$, interceptarán partes iguales á 4^m en las líneas de frente 2 y 6 obtenidas como la 4, y que, á su vez, interceptan partes iguales á 4^m sobre las perpendiculares citadas.

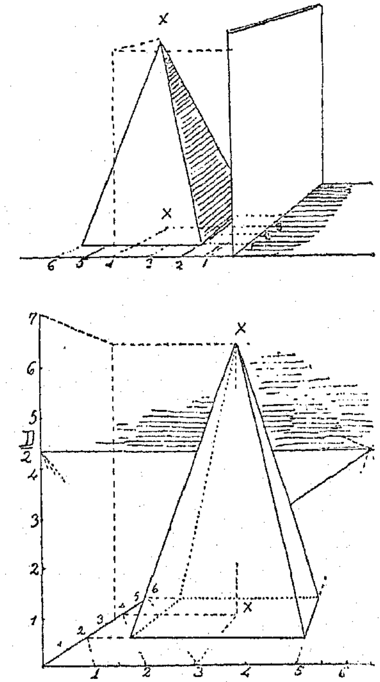


Fig. 14.

Falta sólo unir el vértice x con los de la base.

20. No se necesita partir del primer plano para construir la escala de perspectiva, pues bastará conocer la magnitud de una cualquiera de las rectas ya representadas y tener presente la *Regla 9.ª* para completar el dibujo.

En el croquis de aplicación (fig. 15) se supone ABB'

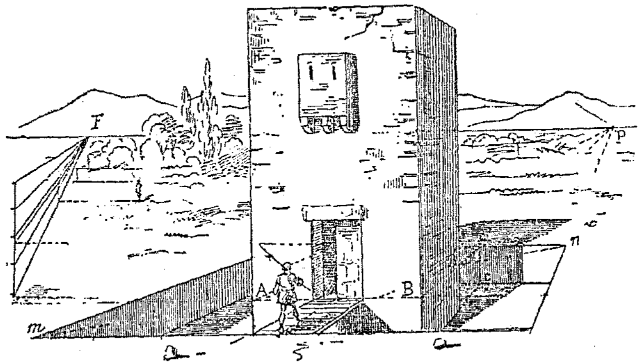


Fig. 15.

un cuadrado ya construído de 4^m de lado y se trata de construir un torreón de 7^m de altura sobre el terreno, rodeado de un foso de 3^m de ancho por 2 de profundidad.

Levántense las aristas laterales sobre las que tomaremos una altura igual á 7 veces la $\frac{1}{4}$ AB, es decir, 7^m. El borde del foso, siendo un cuadrado concéntrico con ABB' será fácil de construir trazando la diagonal AB' hasta que corte en n y m á las dos perpendiculares al cuadro, trazadas á 3^m de A y B; las aristas verticales se prolongarán por debajo del terreno en una cantidad igual á la profundidad del foso. La puerta será semejante á la original, por estar en un plano de frente.

21. *Perspectiva de una escalera vista de frente* (fig. 16).— Sea $a\,a$ el primer escalón hallado por cualquier procedimiento y $a\,1$ su profundidad; la recta que parte del pie del escalón y pasa por 1 está contenida en el plano aPF y tendrá su

punto de fuga en F: la que parte de a y pasa por los vértices de los escalones es paralela á la primera y concurrirá

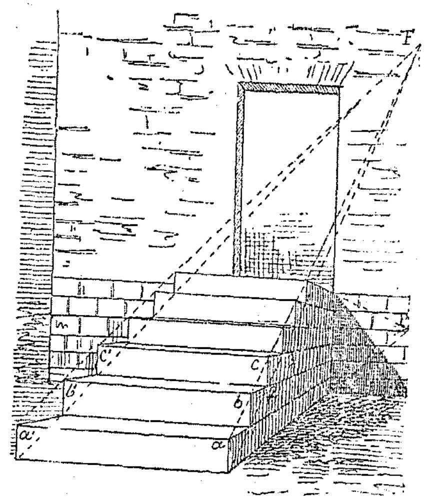


Fig. 16.

también en F, resta sólo trazar las $1\,b$, $b\,c$, $c\,2$..... alternativamente horizontales y verticales para tener uno de los perfiles de la escalera. Para hallar el otro trazaremos rectas horizontales de frente desde los vértices del perfil hasta que encuentren á las dos rectas homólogas de $F\,a$ y $F\,1$.

Como se ve, las dos rectas inclinadas transportan la altura del escalón á los diferentes planos sucesivos.

22. *Determinación directa de los puntos de fuga.*—Rebatir el punto de vista sobre el cuadro alrededor de la línea de horizonte y trazar desde O así rebatido una recta que forme con la línea de horizonte el mismo ángulo que la dirección, cuyo punto de fuga se busca, forma con el cuadro. El punto de intersección F con la línea de horizonte será el buscado.

Supongamos se trata de fijar la dirección de las caras de un paralelepípedo que se apoye en un punto dado; bájese la vertical $PO'=D$ (fig. 17) y trácense por O' las OF' que formen con la línea de horizonte los ángulos dados;

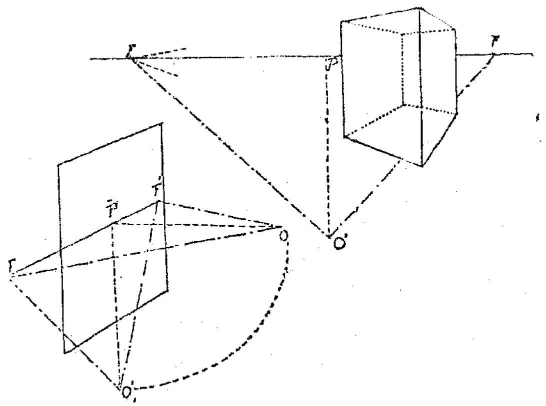


Fig. 17.

F y F' serán los puntos de concurso de las aristas horizontales. Sus magnitudes se han fijado á voluntad, debiendo tener presente que adoptadas tres que concurran en un vértice, las magnitudes perspectivas de los otros no son arbitrarias, sino que dependen de las primeras.

23. Puede suceder que al resolver en el problema anterior el punto F, resultara inaccesible. Puede resolverse el mismo problema sin salir de los límites del cuadro, del modo siguiente:

Hágase pasar por el punto dado A (fig. 18) una línea de frente $A\,e$ y trácese en el plano de frente que la contiene una recta $A\,a$ que forme con la primera el mismo ángulo α que debe formar la recta pedida con el cuadro. Si ahora hacemos girar el plano $A\,a\,e$ alrededor de $A\,e$, hasta ponerlo horizontal, la recta $A\,a$ quedará en

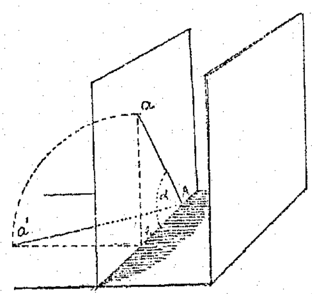


Fig. 18.

la situación deseada y el punto a' estará en la perpendicular $a'\,e$ y á una distancia de la charnela igual á $e\,a$.

Efectuando estas operaciones sobre el cuadro (fig. 19), trazaremos $A\,e$ de frente, y la $A\,a$ que forme el ángulo α con la primera; bajaremos la perpendicular $a\,e$ de un punto cualquiera de $A\,a$ y uniremos e con el punto principal P; resta ahora llevar sobre la perpendicular $e\,P$ al cuadro una magnitud $e\,a'=e\,a$, para lo cual nos valdremos del punto de distancia D. La recta $A\,a'$ resuelve el problema.

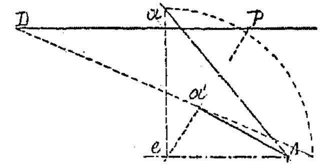


Fig. 19.

24. *Por un punto de una recta en perspectiva trazar la de otra que forme con la primera un ángulo dado.*—Este problema se presenta especialmente cuando se copian ángulos de edificios.

Sea A (fig. 20) el punto dado sobre $A\,B$, y supongamos que se trata de hallar la perspectiva de una recta que forme con la primera un ángulo recto. Trácese una línea de frente por un punto B de la recta dada y hágase girar ésta alrededor de $B\,a$ hasta que quede en el plano vertical de la charnela: la recta $A\,a$, perpendicular al eje, irá á colocarse verticalmente. Para hallar su magnitud en el plano $a\,A'\,B$, únase D con a y prolónguese hasta encontrar á la línea de frente que pasa por A, con lo que tendremos la magnitud $A\,a$ en el plano de frente correspondiente al punto A; fácil nos será ahora transportar ésta sobre $a\,A'$.

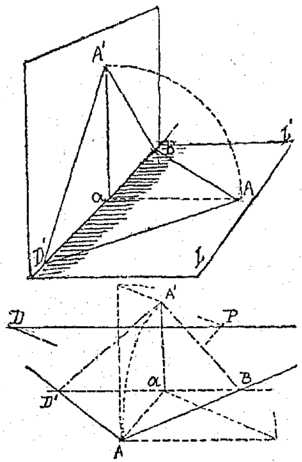


Fig. 20.

Obtenido el punto A', $A'B$ será la posición de AB después del giro; trácese la A' D' á 90° y únase D' con A.

25. *Dividir una recta perspectiva* AB (fig. 21) *en partes*

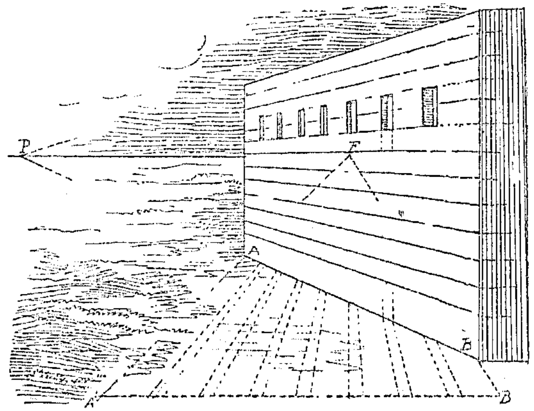


Fig. 21.

iguales ó en una relación dada.—Únanse los dos extremos A B con un punto F cualquiera de la línea de horizonte y prolónguense las FA y FB' hasta cortar á una línea de frente A' B'.

Las FA' y FB' representan dos horizontales paralelas cuyo punto de fuga es F.

Fácil es ahora dividir la A' B' en la forma deseada, y uniendo los puntos de división con F, tendremos otras tantas rectas que dividirán á AB en la misma forma.

Aplicación.—Sobre un muro AB trazar siete aspilleras á una altura dada; trácese A' B' como antes se ha dicho y colóquense en ella las anchuras de las aspilleras repartidas en la forma que se desee; los puntos obtenidos se unen con F y elevando verticales en los de encuentro con AB, no habrá más que limitar éstas por dos horizontales que determinen en ellas la altura de las aspilleras.

26. *Continuar sobre un camino un trazado de árboles*

(figura 22).—Ordinariamente se presenta este problema cuando se dibuja del natural.

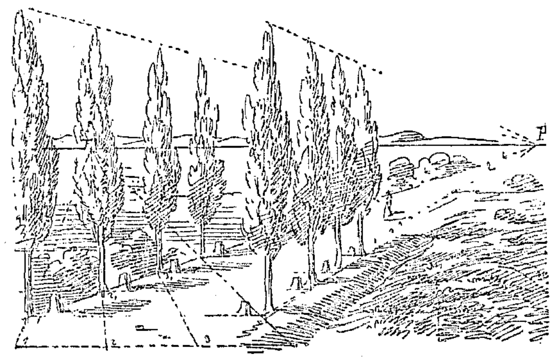


Fig. 22.

Supongamos que en un terreno horizontal se ha colocado la dirección del camino y los dos primeros árboles, bien por procedimientos de perspectiva, bien por observación, y se quiere colocar los árboles siguientes de manera que resulten igualmente espaciados que los dos primeros.

Al efecto: trazar desde un punto F de la línea de horizonte dos rectas que pasen por A y B y vayan á cortar á una línea de frente en A' B': llévese esta magnitud sobre la línea de frente tantas veces como intervalos se deseen y únanse con F los puntos obtenidos.

Si la alineación es muy larga, será á veces necesario prolongar demasiado la línea frente para obtener los puntos lejanos, pero como la operación no exige que se parta de un intervalo determinado, puede repetirse desde otro más lejano.

27. Cuando por un punto del dibujo se quiere trazar una paralela á una recta del mismo, bastará unir aquél con el punto de fuga de la recta, pero como éste se hallará frecuentemente fuera del papel, se hace preciso recurrir á otros procedimientos, que son los que vamos á exponer.

Procedimiento aproximado.—Sea $A\,B$ (fig. 23) una recta establecida bien por la observación ó por cualquier procedimiento, pero cuya dirección admitimos como exacta, y á cuyo punto de fuga, que suponemos inaccesible, se prevé que concurrirán muchas rectas del dibujo.

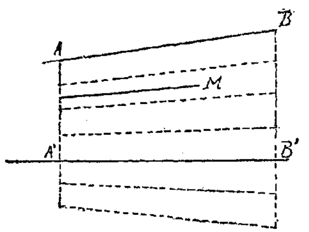


Fig. 23.

Se trazan las dos verticales $A\,A'$ y $B\,B'$ hasta la línea de horizonte, se dividen ambas en el mismo número de partes iguales y se unen los puntos de división como indica la figura, prolongando, si es necesario, las divisiones por debajo de la línea de horizonte. Es evidente que estas líneas concurren en el mismo punto, según la teoría de las líneas proporcionales.

Si queremos ahora trazar por un punto M, que no esté situado sobre ellas, una paralela á la dirección común, fácil será á ojo el hacerlo guiándonos por las dos entre las que se encuentra comprendido.

Este procedimiento tiene especial aplicación cuando se dibuja del natural.

28. *Procedimiento exacto.*—Sea M (fig. 24) el punto y $A\,B$ la dirección dada. La vertical $M\,A$ mide la distancia entre las rectas en el plano de frente en que está situado M. Luego si á partir de otro punto de $A\,B$ tomamos verticalmente otra distancia perspectivamente igual á $A\,M$,

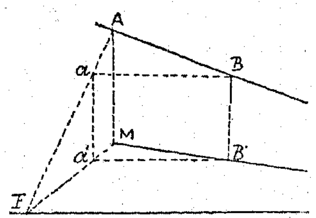


Fig. 24.

tendremos otro punto de la recta buscada. Constrúyase una escala de perspectiva $F\,A\,M$ y tómese esa distancia.

29. *Aplicación de las dos reglas anteriores.*—Sean $a\,e$, $a\,b$ y $a\,c$ (fig. 25) las aristas de un edificio visto de frente.

La cara anterior puede construirse desde luego; si el

punto de fuga de $a\,b$ fuera accesible, bastaría unirlo con c para tener la altura $b\,d$. Para suplir su falta recurriremos á

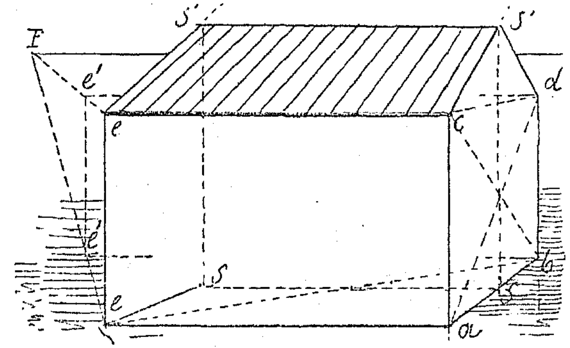


Fig. 25.

la escala auxiliar $e\,e\,F$, es decir, que trazaremos $b\,e'$ y $e'e'$, y llevaremos esta última sobre $b\,d$. El punto S' de la cara $a\,b\,c\,d$ se encontrará por medio de las diagonales $a\,d$ y $b\,c$ y por una construcción análoga á la que nos ha dado la $b\,d$; la $S\,S$ y $S\,S'$ acabarán de fijar la cubierta.

Si ahora quisiéramos marcar las líneas de tejas, como el punto de fuga de $e\,S'$ y $c\,S'$ es inaccesible, dividiremos $S'\,S'$ y $e\,c$ en el mismo número de partes iguales y uniremos los puntos de división.

30. Otro procedimiento para llevar una magnitud sobre una recta indefinida es la interpretación de la propiedad geométrica expresada en la figura 26. Según ella, para llevar indefinidamente la magnitud $B\,a$ sobre la recta $B\,F$ (fig. 27),

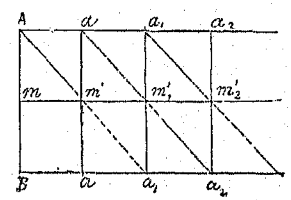


Fig. 26.

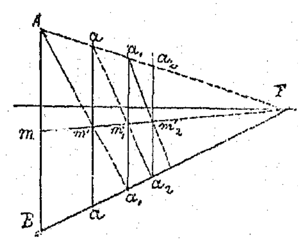
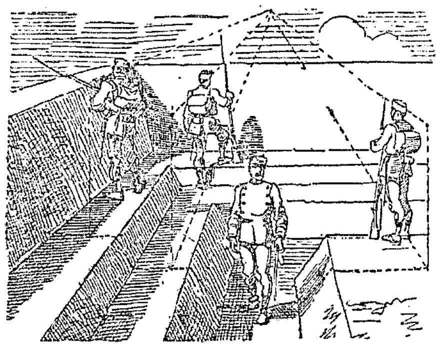


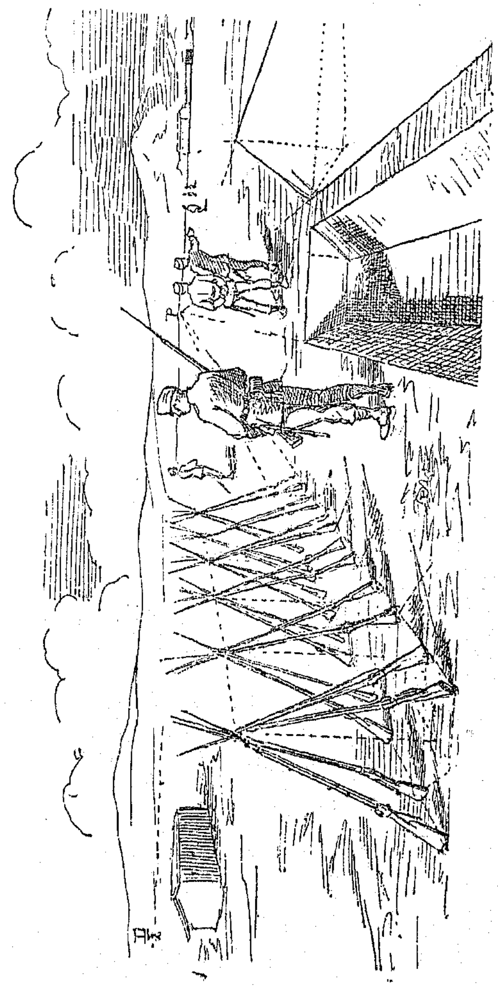
Fig. 27.

tomaremos el punto medio m de $B A$ y trazaremos las $A F$, $m F$, $B F$; uniremos A con m' para obtener a' y repetiremos la construcción el número de veces necesario.

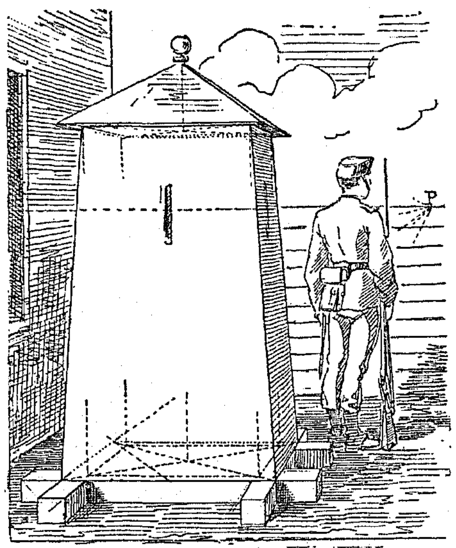
31. *Colocación de figuras en distintos planos.*—Cuando las figuras no están situadas en el geometral podremos fijar su posición con el auxilio de la *Regla 9.ª*



Se empezará por trasladar la figura al plano de frente en que debe situarse; se unirá con una recta el pie de la figura así transportada con el punto de situación, y se trazará por la cabeza una paralela á dicha recta hasta que corte á la vertical levantada en el punto dado.



Croquis de aplicación.



Croquis de aplicación.

Lección 3.ª

Perspectiva de circunferencia.—Aplicaciones.

32. El estudio de la perspectiva de la circunferencia es interesante por el gran número de aplicaciones en la perspectiva lineal.

Como toda clase de curvas, podría trazarse por puntos, aplicando á cada uno de ellos el método general, pero una buena elección de éstos puede facilitar considerablemente el trazado de la circunferencia.

Sea dado un cuadrado en el cual está inscripta la circunferencia O (fig. 28); se observa desde luego que ésta es tangente al primero en cuatro puntos, que son los extremos de la cruz establecida sobre el punto O.

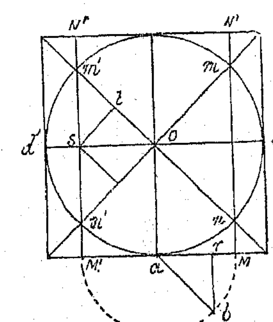


Fig. 28.

Estos cuatro puntos son, en rigor, suficientes para conducir la perspectiva de la curva; pero para que resulte más regular, especialmente cuando tiene cierta magnitud, buscaremos otros cuatro puntos fáciles de determinar, tales como los m, m', n, n' en que la circunferencia corte á los lados del cuadrado.

Estos cuatro puntos se encuentran situados dos á dos en las perpendiculares $M' N'$ y $M N$, situadas á la distancia $S O$ del centro.

Ahora, $S O$ es la diagonal del cuadrado construído sobre la mitad $O t$ del radio; luego para situar las dos rectas citadas tomaremos $a r = \frac{1}{2} R$, construiremos un cuadrado sobre esta magnitud y llevaremos la diagonal ab á derecha é izquierda del punto a.

Supongamos que O (fig. 29), sea la perspectiva del centro de una circunferencia horizontal, cuyo radio es Od, empezaremos por construir el cuadrado circunscripto, valiéndonos del punto d, distancia reducida á $\frac{1}{2}$, por ejemplo, trazaríamos las $d'P$ y dP, tomaríamos la mitad de $d'O$ que uniríamos con $\frac{D}{2}$ para determinar uno de los vértices, con lo cual tendremos los medios necesarios para construir el cuadrado, pues bastará unir dicho vértice con O y el resto de la construcción del cuadrado se deduce tan fácilmente que creemos inútil insistir en ella.

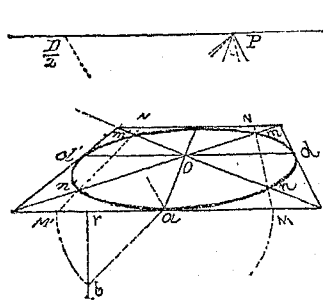


Fig. 29.

Trácense las diagonales y medias y determínense sobre éstas los puntos m', m, n y n' por medio de las rectas $M'N'$, MN situadas á la distancia $M'a = ba$ hallada como se indicó más arriba. Falta sólo hacer pasar la curva por los ocho puntos obtenidos.

33. La figura 30 indica el procedimiento para trazar

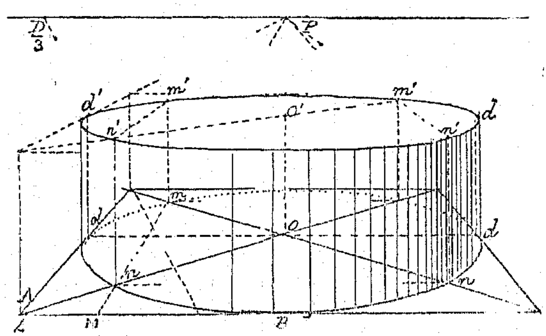


Fig. 30.

una circunferencia igual á la anterior y situada á una altura OO'. Podría resolverse el problema llevando por medio de la escala de perspectiva, magnitudes iguales á OO', sobre cada una de las verticales elevadas en los ocho puntos conductores; pero aquí podemos prescindir de ella por la circunstancia de hallarse situados todos los puntos buscados sobre rectas fáciles de determinar. Así, uniendo O' con P, tendríamos una recta que cortaría á dos de las verticales citadas; una paralela á la base del cuadro trazada por el mismo punto O' cortaría á otras dos en d y d'. La $d'P$ cortaría á la vertical elevada en A, dándonos un punto, que unido con O' proporcione otros dos n' y m' de la circunferencia; las horizontales trazadas por estos últimos nos darían los restantes.

34. *Circunferencia vertical.*—Sea OR (fig. 31) el radio

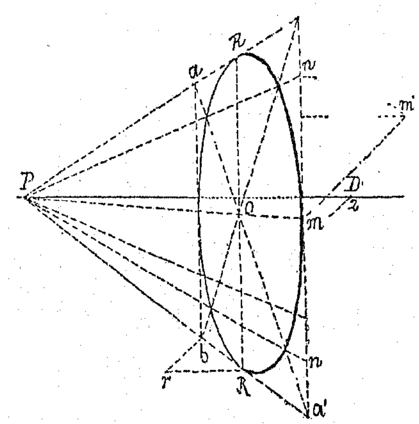


Fig. 31.

situado sobre un plano vertical perpendicular al cuadro: para construir el cuadrado circunscripto trazaremos las RP y OP. Tómese $Rr = \frac{R}{4}$ y únase r con $\frac{D}{2}$, con lo que tendremos el punto b situado á la distancia bR igual al radio.

El resto de la construcción del cuadrado está bastante indicado en la figura. El cuadrado cuyo lado es $\frac{R}{2}$ tiene por diagonal $m\,m'$, cuya magnitud llevaremos sobre $m\,n$, para obtener las perpendiculares $n\,P$ al cuadro, cuyas intersecciones con las diagonales darán cuatro puntos de la circunferencia buscada.

35. *Circunferencias paralelas al cuadro.*—Según la *Regla 9.ª*, no deben sufrir deformación alguna, únicamente varía su magnitud según la distancia del plano de frente en que se encuentran.

Supongamos $A\,B$ y $A\,E$ (fig. 32) la anchura y altura de una galería perpendicular al cuadro, terminada por una bóveda de medio punto. Se trata de construir su perspectiva fijando la posición de varios arcos, distantes entre sí una magnitud igual á la anchura de la galería.

Sea $\frac{D}{3}$ el punto de distancia reducida al tercio: para colocar la posición del primer arco, tomaremos $\frac{A\,B}{3}$ situado á la tercera parte de $A\,B$ y lo uniremos con $\frac{D}{3}$. Por el punto así obtenido trazaremos una horizontal, á partir de la cual podemos repetir la construcción ejecutada en el primer plano de frente, y obtener sucesivamente los planos de los demás arcos. Para trazarlos haremos centro en los puntos L, I, J..... en que la perpendicular $C\,P$ al cuadro encuentre á los distintos planos de frente. Los rayos quedan determinados, teniendo en cuenta que los arranques de los arcos se encuentran en las dos perpendiculares al cuadro $E\,P$ y $S\,P$.

36. *Perspectiva de una bóveda por aristas* (fig. 33).—Los arcos de cabeza y fondo se trazarán como en el caso de la galería. Para trazar los arcos diagonales observaremos que se encuentran situados:

1.º En el cilindro cuya base es $a\,b\,c\,d$.

2.º En los planos verticales cuyas trazas sobre el plano horizontal superior son las diagonales $1\ 2\ 3'$ y $1'\ 3\ 4$,

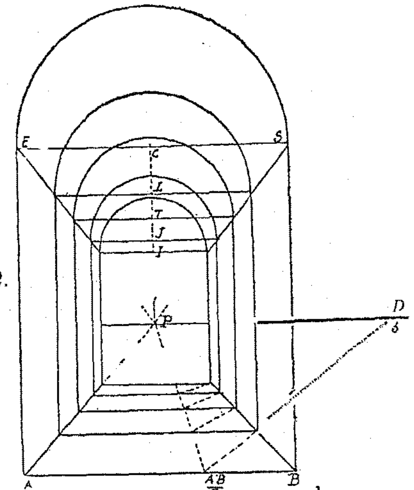


Fig. 32.

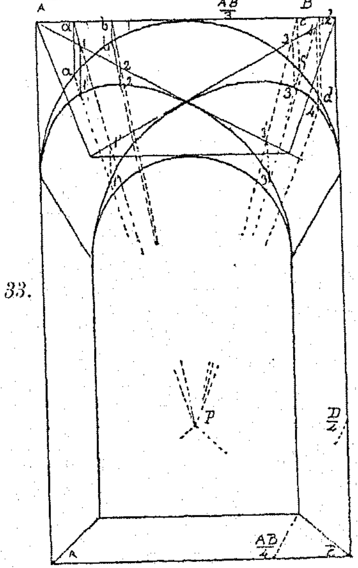
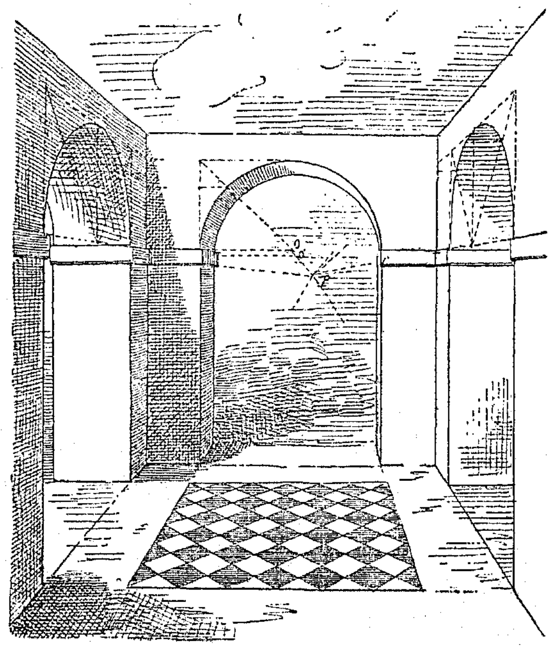


Fig. 33.

Supuesto esto, si por $a\,a$ hacemos pasar un plano perpendicular al cuadro, cortará al cilindro, según la generatriz $a\,P$, y al plano de la curva diagonal, según una vertical $1\ 1$: la intersección de estas dos rectas será un punto de la curva. Observaremos que cada plano vertical auxiliar corta á los dos planos diagonales y nos da al mismo tiempo un punto de cada curva. Repitiendo la operación el número de veces necesario y uniendo los puntos obtenidos, tendremos resuelto el problema.



Croquis de aplicación.

37. *Perspectiva de una puerta que se destaca de un muro.*— Sea $c\,d$ (fig. 34) la base de una puerta que gira alrededor de $e\,e$: el punto d describirá una circunferencia cuyo centro es e, y que sabemos construir.

Supongamos que se quiere representar la puerta cuando su base se encuentra en la posición $a\,e$. Trácese la verti-

cal $a\,a$ y llévese sobre ella la altura de la puerta, sirviéndonos de $d\,e$ y $c\,e$ como de escala de perspectiva; es decir, que trazaremos la $a\,b$, levantaremos la $b\,b$ y llevaremos esta última sobre la $a\,a$.

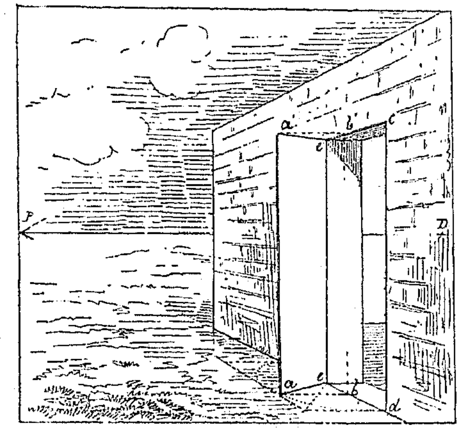


Fig. 34.

Si $a\,e$ encontrase á la línea de horizonte en un punto accesible, podríamos también hallar la altura $a\,a$, uniendo aquel con e y prolongando la recta de unión hasta el lado anterior de la puerta.

38. Si la puerta girara alrededor de un eje horizontal de frente, trazaríamos las circunferencias verticales y perpendiculares al cuadro, descriptas por los puntos c y a (figura 35), y tomando sobre ellas dos puntos situados sobre la misma horizontal, los uniríamos con los $e\,e$, obteniendo así una posición cualquiera.

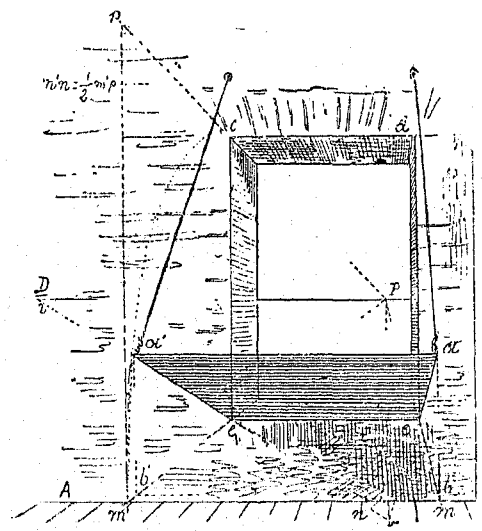
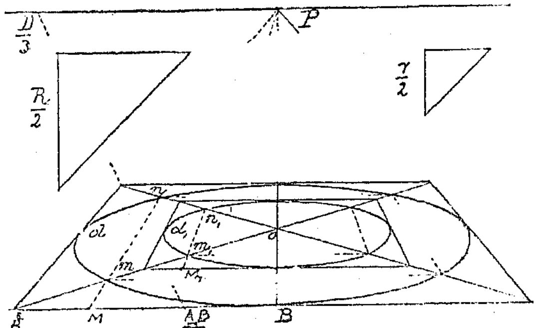


Fig. 35.



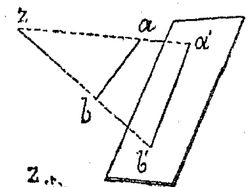
Circunferencias concéntricas.

Lección 4.ª

Sombras.—Perspectiva de las sombras.—Luz solar.

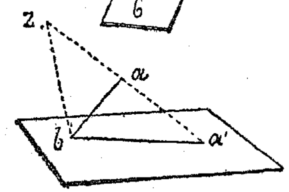
39. *Sombra arrojada por una recta sobre un plano.*—Basta considerar el plano que pasa por el foco luminoso z y la recta $a\,b$ (fig. 36), buscar su traza sobre el plano dado y determinar sobre esta traza las penetraciones $a'\,b'$ de los rayos luminosos que pasan por los extremos de la recta; $a'\,b'$ será la sombra arrojada.

Fig. 36.



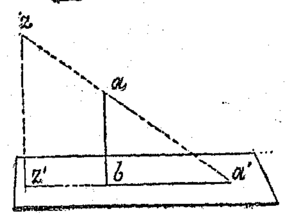
40. Si la recta se apoya en el plano, el punto de contacto b (fig. 37) será de la traza y no habrá que determinar más que un solo punto.

Fig. 37.



41. *Sombra arrojada sobre un plano por una perpendicular al mismo.*—La traza del plano de luz que pasa por la recta $a\,b$ y por el foco z (fig. 38), pasará por el pie z' de la perpendicular $z\,z'$ al plano dado, cuya recta está evidentemente contenida en el plano de luz.

Fig. 38.



El punto z' recibe el nombre de pie de la luz.

Uniremos, por consiguiente, el pie de la luz con el pie de la perpendicular y limitaremos la recta así trazada por el rayo luminoso que pasa por el extremo superior de la perpendicular.

42. Los rayos solares pueden considerarse como paralelos, teniendo en cuenta la gran distancia á que se encuentra el foco luminoso y las dimensiones de éste con relación á la tierra.

Supondremos al sol en las tres posiciones siguientes:

1.ª El sol situado en el cuadro.

2.ª El sol situado detrás del cuadro.

3.ª El sol situado detrás del observador.

43. 1.ª Posición.—*El sol, estando situado en el plano del cuadro, emite rayos paralelos á éste.*

Los planos de luz correspondientes á rectas verticales resultan en este caso paralelos al cuadro; sus trazas lo serán también á la base del cuadro.

Las perspectivas de los triángulos determinados por la vertical, su sombra y el rayo luminoso superior, tendrán por perspectivas figuras semejantes.

44. *Perspectiva de la sombra arrojada por una vertical.*—La sombra arrojada pasará por el pie b y estará limitada por el rayo $a\,a'$ (fig. 39). Esta solución nos da el medio de hallar la sombra arrojada por un punto cualquiera a, pues bastará trazar por él una vertical y proyectar el punto dado sobre la sombra arrojada por la recta auxiliar.

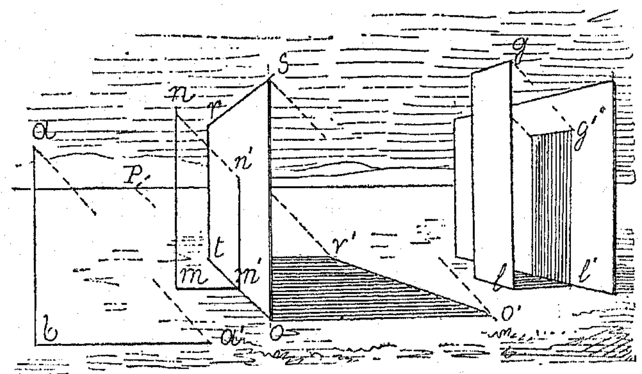


Fig. 39. *Fig. 40.* *Fig. 41.*

45. *Sombra arrojada por un rectángulo vertical.*—Repetir el procedimiento anterior en cada uno de los lados verticales $o\,s$ y $t\,r$ (fig. 40).

46. *Sombra de una vertical sobre un plano vertical.*—Trazar la sombra arrojada sobre el horizontal; levantar la vertical $m\,n'$ traza del vertical dado con el plano de luz; limitarle por el rayo superior $n\,n'$ (fig. 40).

47. *Sombra arrojada por un rectángulo vertical sobre un plano vertical* (fig. 41).—Repetir en los lados verticales lo practicado en el caso anterior.

48. *Sombra arrojada por una pirámide* (fig. 42).—Determinar la sombra arrojada por el vértice. Unir este punto con los de la base, situados en la línea de separación de luz y sombra.

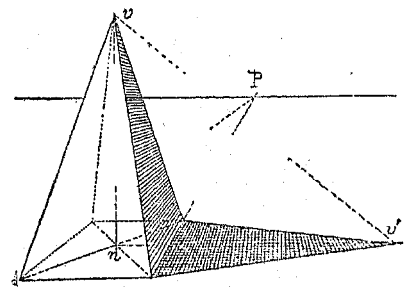


Fig. 42.

49. *Sombra de una pirámide sobre un plano vertical* (fig. 43).

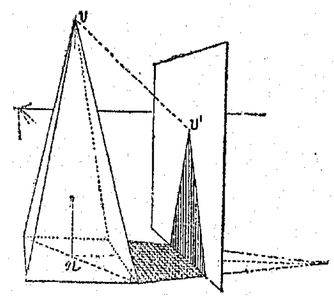


Fig. 43.

Determinar la sombra arrojada por el vértice. Unir este punto con las intersecciones de las sombras horizontales y la traza.

50. La sombra arrojada por una vertical sobre un cuerpo cualquiera, se encontraría determinando la intersección de éste con el plano luminoso y limitándola por el rayo superior. En los cuerpos limitados por superficies planas, será fácil, en general, prescindir del plano geometral, combinando las reglas anteriores.

En la figura 44 se ha hallado primeramente la intersec-

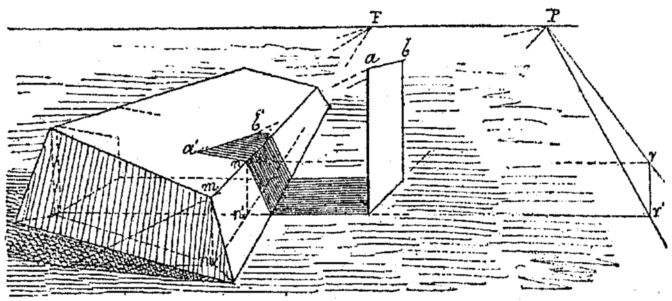


Fig. 44.

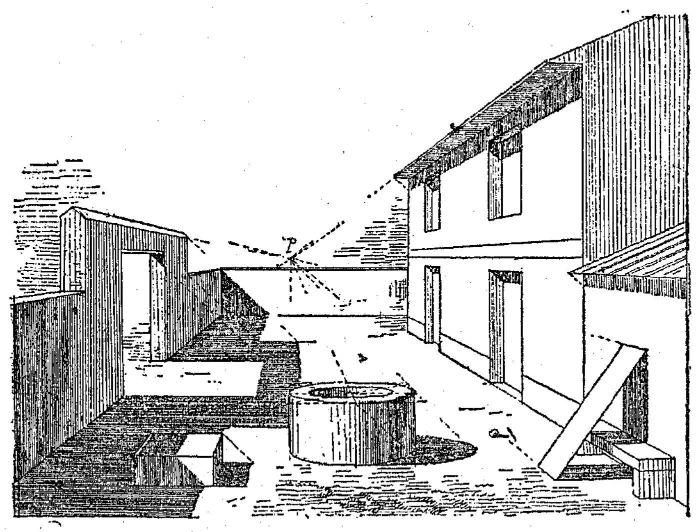
ción $n' n$ del plano de luz correspondiente á la vertical a, con el proyectante de la arista $m n$, lo que nos proporciona otro punto sobre el talud exterior.

La intersección del vertical proyectante de la cresta interior, con el plano de luz nos da otro punto sobre el plano de fuego, que uniremos con n: sobre esta recta arrojará su sombra el punto a en a'. Lo mismo se haría con la arista b'.

Hemos supuesto conocidas las proyecciones de las dos crestas como restos de la construcción perspectiva; pero si hubieran desaparecido y conociéramos la cota de las aristas, podríamos valernos de la escala de perspectiva para hallar la sombra arrojada. Supongamos que queremos hallar el punto n; por el pie de la vertical se trazará una

línea de frente hasta encontrar á la escala; tomaremos sobre ella la altura $r' r$ igual á la cota de la arista $m n$; se llevará por r una línea de frente hasta que corte á la arista $m n$ en n que será el punto buscado.

Debemos observar que á medida que avanza la resolución de un problema de perspectiva, el dibujante va encontrando cada vez más recursos en el cuadro para prescindir del geometral.



Croquis de aplicación.

51. 2.ª Posición.—*El sol está situado detrás del cuadro.*

Sea X (fig. 45) la dirección de los rayos solares y O el punto de vista: las sombras arrojadas son oblicuas con relación al cuadro. Trácense desde O las $O Z$ y $O Z'$ paralelas respectivamente á X y á las $b a'$ $b a'$; Z será el punto de fuga de los rayos solares, y por consiguiente la perspectiva del sol; mientras Z', que evidentemente es el pie de la vertical bajada desde Z á línea de horizonte, viene á ser el punto de fuga de las sombras arrojadas.

52. *Perspectiva de la sombra arrojada por una vertical* a b.

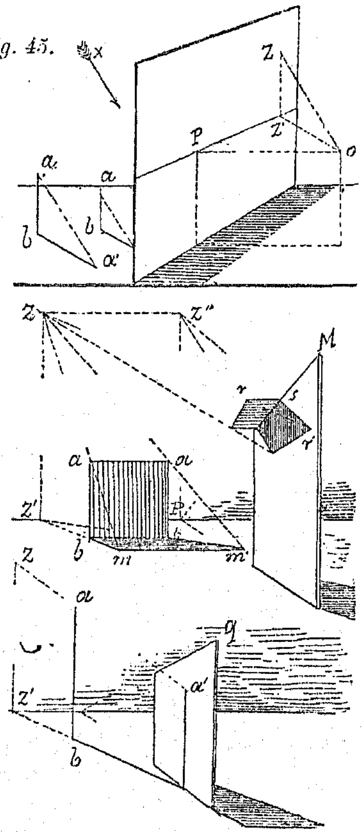
Sea Z (fig. 46) la perspectiva del sol; bájese la ZZ' y únase Z' con el pie b de la vertical. El rayo am nos determinará el límite de la sombra.

53. *Sombra arrojada por un rectángulo* (fig. 46).—Aplicar el procedimiento anterior á las dos verticales que lo limitan.

Fig. 45.

Fig. 46.

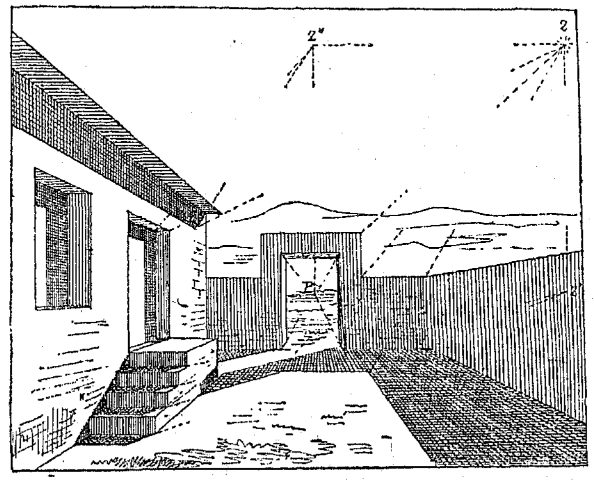
Fig. 47.



54. *Sombra arrojada sobre un plano vertical* (fig. 47).—Véase el caso análogo de la primera posición.

55. *Sombra arrojada por una perpendicular* r s *á un plano* M *normal al cuadro* (fig. 46).—El punto de fuga de

las sombras arrojadas debe hallarse sobre la vertical levantada en P y que contiene los puntos de fuga de todas las rectas situadas en el plano PM. Siendo este punto el pie de la luz sobre PM, se encontrará también la horizontal ZZ''. Hágase, pues, pasar por S y Z'' una recta y limítese por el rayo rr'.



Croquis de aplicación.

56. 3.ª Posición.—*El sol está colocado detrás del espectador.*

La perspectiva del cuadro se encontrará como en el caso anterior, trazando desde el punto de vista una paralela á la dirección de los rayos luminosos. Es evidente que esta paralela, que va descendiendo hacia el cuadro, encontrará á éste por debajo de la línea de horizonte y del lado opuesto á aquel en que el sol se encuentre.

La proyección de la perspectiva del sol sobre la línea de horizonte, seguirá siendo el punto de fuga de las sombras arrojadas sobre el plano horizontal.

57. Sea N (fig. 48) la perspectiva del sol, en cuyo caso éste está colocado á la izquierda y detrás del espectador: el punto N' será el fuga de las sombras arrojadas. No variando en este ejemplo más que la posición de los puntos N y N', aplicaremos todo lo dicho en las posiciones del sol es-

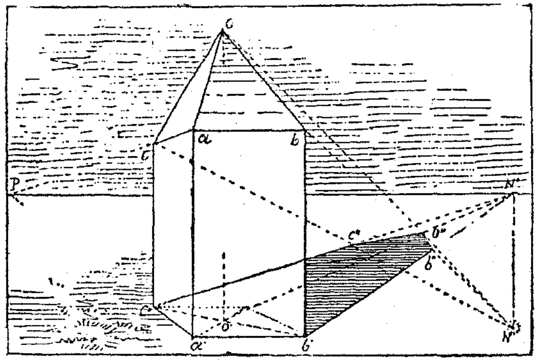


Fig. 48.

tudiadas en los dos casos anteriores. Para hallar, por ejemplo, la sombra arrojada por $b\,b$, uniremos su pie con N' y su parte superior con N, lo que nos dará el punto b'.

58. *Sombras arrojadas sobre un plano vertical.*—En la figura 49 el sol Z está á la derecha y detrás del espectador.

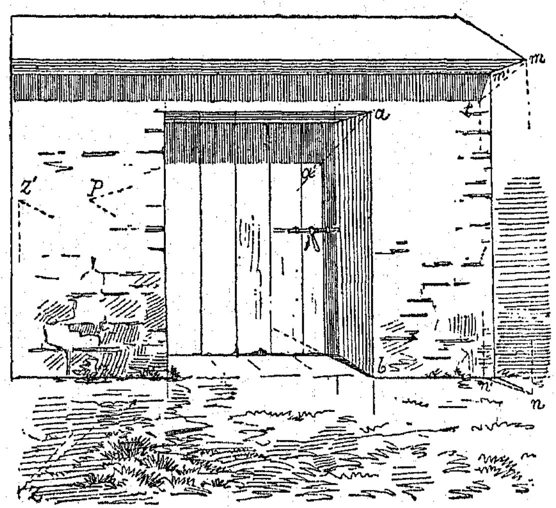


Fig. 49.

Para hallar la sombra arrojada por $b\,a$ sobre la puerta, únase b con Z' y levántese una vertical en el punto en que la sombra arrojada encuentre á la puerta, limitándola por la $a\,Z$ que da el punto a'. Este punto pertenece también á la sombra arrojada por el lado superior, y evidentemente tiene que ser horizontal. La sombra arrojada por la perpendicular $m\,m'$ al muro, se halla fácilmente observando que debe pasar por el pie m' y por la sombra del punto m, perteneciente á la vertical $m\,n$. Uniremos, pues, n con Z', trazaremos la vertical $n'\,t$ y limitaremos ésta por el rayo $m\,Z$.

59. *Sombra arrojada sobre un plano inclinado que se aleja del cuadro.*—Sea X (fig. 50) la dirección de la luz, y $a\,b$ la

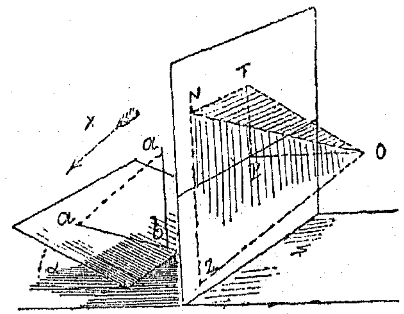


Fig. 50.

sombra arrojada por una vertical; si trazamos $O\,N$ y $O\,Z$ paralelas respectivamente á $a\,b$ y X, los trazos N y Z de fuga de las sombras y de los rayos luminosos estarán en una misma vertical. Al mismo tiempo el punto N debe estar en la horizontal $N\,F$, lugar geométrico de los puntos de fuga de todas las rectas contenidas en el plano inclinado y que se ha hallado trazando la $O\,F$ que forma el ángulo α con $O\,P$.

En vista de lo anterior, supongamos que se trate de hallar la sombra arrojada por una vertical a (fig. 51) sobre el plano inclinado que forma el tejado de una casa cuya fachada anterior es paralela al cuadro. El sol está representado en Z, es decir, que está á la izquierda y detrás del espectador. Trácense las FN horizontal y la vertical ZN:

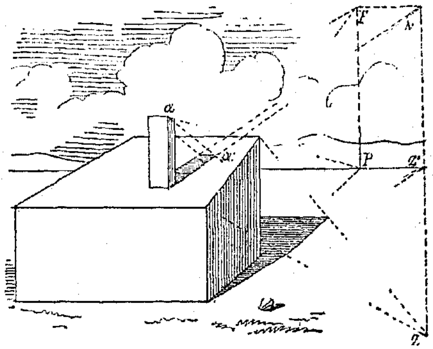


Fig. 51.

el punto de encuentro será el punto de fuga de las sombras arrojadas sobre el tejado.

Aplicando la regla general á la arista a, uniremos su pie con el punto N y trazaremos el rayo luminoso aZ que cortará á la sombra arrojada en a'. De la misma manera determinaríamos el resto de la sombra arrojada por la chimenea.

60. *Objetos reflejados por una superficie.*—Sabemos que un punto visto por reflexión produce el mismo efecto que otro que estuviera simétricamente colocado con relación á la superficie reflejante, de manera que si B (fig. 52) es el pie de una vertical sobre la superficie del agua, el reflejo de A nos producirá el mismo efecto que un punto situado por debajo de B á la misma distancia á que el A se encuentra de la superficie del agua. Pero como según la *Regla 9.ª* estas dos distancias serán iguales en perspectiva, podemos establecer que para hallar la perspectiva A' de un punto reflejado por una superficie, se trazará desde el punto dado A, una perpendicular á aquélla, y á partir del pie B de dicha recta se tomará una magnitud BA' igual á la BA que separa el punto dado de la superficie reflejante.

En la figura 52, la ms encuentra á la superficie del agua en s', que se obtiene añadiendo á ms la ss', igual

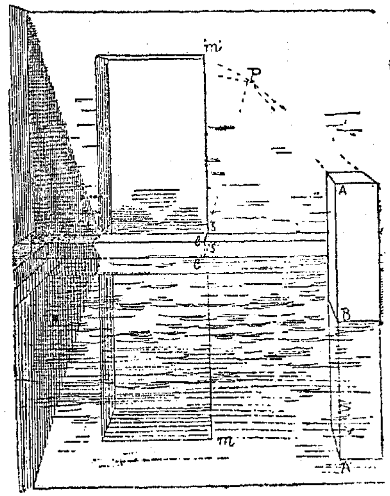
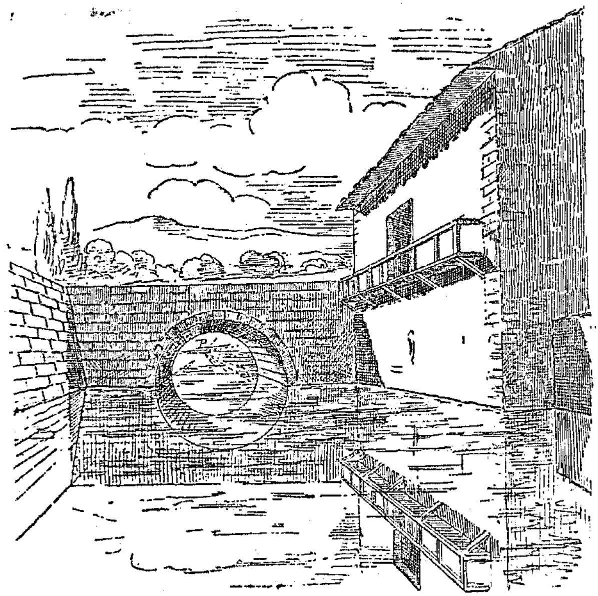


Fig. 52.

perspectivamente á ee, que es la diferencia de nivel entre el plano de situación de la puerta y la superficie del agua.

La misma marcha se seguirá en todos los casos.



Croquis de aplicación.