UN POCO DE ORDEN

Donde se cuentan mil zarandajas, tan impertinentes como necesarias, para el entendimiento desta grande historia

Lección inaugural
del curso académico 2021-2022
Pronunciada por el

Profesor Doctor Esteban Induráin Eraso

Catedrático de Análisis matemático
de la Universidad Pública de Navarra

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Edita: Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Coordinación: Sección Comunicación (Publicaciones)

Fotocomposición: Pretexto

Impresión: Gráficas Alzate

Depósito Legal: NA 1665-2021

Distribución: Sección de Comunicación (Publicaciones)
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadia
31006 Pamplona
publicaciones@unavarra.es

Con la venia.
Excelentísima Sra. presidenta del Gobierno de Navarra.
Excelentísimas e ilustrísimas autoridades.
Queridos colegas universitarios.
Queridos alumnos, familiares y amigos.
Señoras y señores.

Es para mí una gran responsabilidad y honor hacerme cargo hoy de la lección magistral inaugural de este nuevo año académico 2021-2022 en la Universidad Pública de Navarra.

1. Introducción

Mi tema de investigación desde hace muchos años se centra en «Matemática del Orden». Mi objeto de estudio son las estructuras ordenadas.

Resulta curioso que, precisamente en lo que al Orden (con mayúscula) se refiere, los propios matemáticos seamos un poco desordenados. Me explico: los estudios sobre órdenes y estructuras ordenadas se encuentran un tanto diseminados y desperdigados por otras ramas de la Matemática (Álgebra, Topología General, Análisis Real y Cálculo, etc.). En mi opinión, el Orden debería tener el mismo rango y categoría que, pongo por caso, el Álgebra, el Análisis Matemático o la Geometría. Y debería tal vez estudiarse como una disciplina matemática «por sí misma», y no como una mera herramienta auxiliar en otras ramas de la Matemática. Esa «auxiliaridad», quizá muy injusta, es lo que hace que la materia de Orden ande tan desperdigada. Se han hecho esfuerzos, como la creación de la revista especializada «Order», allá por los años ochenta, pero no se ha alcanzado aún ese rango de disciplina propia, y eso obliga al investigador a rebuscar en múltiples revistas de distintos ámbitos.

... Y es que el Orden es algo muy importante:

«En el principio, creó Dios los cielos y la tierra.
Y la tierra estaba desordenada».
(Génesis 1, 1)

Observación 1.1. Partiendo de la nada, se pueden crear los números naturales: la construcción, abstracta, eso sí, es la siguiente:

i) Se parte de la «nada» o conjunto vacío $\emptyset$. (Esto simboliza y representa el número cero 0).
ii) Metemos a la nada en la cárcel. Esto es: la encerramos entre llaves, pasando a tener $\{\emptyset\}$. Esto es ya un conjunto (la cárcel, si queréis) que contiene un elemento, que, a su vez, es el conjunto vacío, que ya no tiene elementos. Esto, es decir $\{\emptyset\}$, simboliza y representa el número 1.
iii) Seguimos adelante. Ya sé que todo esto es muy sutil. El caso es que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es ya el número 2, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ es ya el número 3. Y así sucesivamente.

«Dios solo creó los números naturales.
Lo demás es obra del hombre».
[Leopold Kronecker, matemático y lógico
(Legnica, Polonia, 1823 / Berlín, Alemania, 1891)]

Por cierto, todas estas construcciones dan lugar a números diferentes.

2. ¿Y qué significa ordenar?

Podemos preguntarnos ahora:

¿Cuáles son los principales procesos que seguimos cuando tratamos de ordenar algo?

i) Analizamos el conjunto donde vamos a tratar de definir algún tipo de ordenación.
ii) Establecemos algún tipo de relación (jerarquías, comparaciones, preferencias, indiferencias, etc.) entre sus elementos. A veces, tratamos de encontrar elementos especialmente destacados (por ejemplo, algún tipo de máximos).

«Antes bien, examinadlo todo cuidadosamente.
Retened lo bueno».
(1 Tesalonicenses 5, 21)

iii) Analizamos las propiedades de la relación que hayamos definido. Por ejemplo, podemos tratar de ver si provoca situaciones no deseadas, incoherencias, etc.
iv) Según estas propiedades, tendremos o no una ordenación.
v) Construimos modelos de referencia que sean isomorfos a las ordenaciones que hayamos definido. Generalmente, se trata de modelos con alguna ordenación sobre un adecuado conjunto de números.
vi) Traducimos escalas cualitativas a escalas cuantitativas, si esto es posible.

Vamos con algún *ejemplo*:

Ejemplos 2.1.

i) «El papá de mi papá no es mi papá, es mi abuelo». (Relación que no es transitiva).
ii) «El amor no siempre es correspondido». (Relación que no es simétrica).
iii) «Tanto monta, monta tanto, Isabel como Fernando». (Relación que permite indiferencia o empates entre elementos).
iv) «¡No se empieza una casa por el tejado!». (Aquí hay ya una cierta idea de orden).
v) «Uno puede llegar a ser el padrastro de su padrastro y así dar cierta *simetría* a eso de ser padrastro». (Su madre se casa en segundas nupcias, el padre de su padrastro fallece, y él mismo, el individuo en cuestión, se casa con la madre de su padrastro, en segundas nupcias para ella. Moraleja: las «relaciones de parentesco» pueden llegar a ser muy complicadas, y su estudio proporciona modelos interesantes).
vi) «Los amigos de mis amigos son mis amigos». (Relación transitiva).
vii) «Preferimos Pedro a Juan. También preferimos Juan a Miguel. Y además, preferimos Miguel a Pedro. Y eso crea un 'círculo vicioso'... ¿Qué hacemos ahora?».
viii) «En general, a mí me gustan más las manzanas que las peras. Sin embargo, no puedo decir que tal preferencia sea total, absoluta e incondicional. Me explico: si ocurriera que llevo comiendo manzanas tres meses seguidos, sin probar otra cosa, quizá estaría muy feliz si me ofreciesen una pera, aunque solamente fuese por variar. Y si ocurriera que llevase cinco días sin comer, confieso que me daría igual que me ofreciesen una manzana, una pera o cualquier cosa comestible».
(Aquí, las preferencias no son ya de tipo tajante –«sí o no», «0 o 1»–, sino que presentan una connotación de incertidumbre, pasando a estar valoradas o graduadas entre 0 –rechazo absoluto y total– y 1 –preferencia absoluta, total e incondicional de una cosa sobre otra–, habiendo, por ende, situaciones intermedias y graduaciones que pueden tomar ya cualquier valor en

[0, 1]. Eso da lugar a lo que se denomina «preferencias difusas o borrosas», si bien los matemáticos, aún hablando y expresándonos en castellano, utilizamos la palabra inglesa «fuzzy» para referirnos a ellas).

ix) «El orden de los factores no altera el producto». (¿O sí que lo altera, y mucho?).
Todo depende de qué producto sea ese. No es lo mismo una operación matemática conmutativa (suma o producto de números naturales) que, pongo por caso, el orden de las notas de una partitura musical, o de los versos de un poema. ¿Se imaginan ustedes oír una versión de la *Novena Sinfonía* de Ludwig van Beethoven en la que las notas se distribuyan al azar? ¡Cielos, qué horror! Tampoco nos gusta demasiado que nos cambien el orden de los apellidos, aunque haya quien lo haga –pero por decisión propia–. Cuento aquí una famosa anécdota del poeta nicaragüense Rubén DARÍO (Félix Rubén GARCÍA SARMIENTO, 1867-1916). Resulta que, en cierta ocasión, en un determinado periódico se refirieron a él como «Darío Rubén». El poeta replicó, pero lo hizo de manera muy elegante, enviando una breve poesía que publicó ese mismo medio de prensa. Decía así:

«¿Que el orden de los factores no altera el producto?
¡Ah, no!
Eso conmigo no reza.
¡Que aquí el producto soy yo!».
(Rubén Darío)

x) «El orden de los factores no altera el producto (bis)». (Las tres cosas que hay que hacer en la vida).
Se dice que hay tres cosas que uno debe hacer en la vida para que sea plena; a saber: plantar un árbol, escribir un libro y tener un hijo.
Pero, por desgracia y aunque suene a chiste –y no digo que no lo sea–, hay quien altera ahí el orden, y lo que realmente acaba haciendo es escribir en un árbol, tener un libro y plantar un hijo. Sin comentarios.

Definición 2.2. Dado un conjunto no vacío X, una relación entre sus elementos es un *orden total* si satisface las propiedades:

i) Reflexividad: cada elemento está relacionado consigo mismo.
ii) Antisimetría: si x está relacionado con y y, a su vez, y lo está con x; entonces, x e y deben ser iguales.
iii) Transitividad: si x está relacionado con y y, a su vez, y lo está con z; entonces, x debe estar relacionado con z.
iv) Completitud: dados dos elementos x e y, debe ocurrir que o x está relacionado con y o y lo está con x (o ambas cosas a la vez).

Ejemplo 2.3. En el conjunto de los números naturales, la relación «≥» (esto es, «ser mayor o igual que») define un orden total.

Obviamente, y como ha quedado ya dicho, en esta literatura especializada aparecen muchos más tipos de ordenaciones, dependiendo de las propiedades de las relaciones que se definan en un conjunto.

Tales conceptos son muy abstractos y, por ello, no voy a marearles con definiciones abstrusas y difíciles. A cambio, voy a poner una serie de ejemplos ilustrativos, que, además, juegan con números –algo que nos resulta mucho más familiar– y que nos servirán, cuando menos, para tratar de tener una intuición acerca de ciertas maneras típicas de comparar u ordenar objetos.

Ejemplo ilustrativo 1: ¡Quiero cambiar de coche!

Ejemplo 2.4. Tengo intención de cambiar de coche, pero no sé muy bien cuál comprar. Estoy dudando entre dos modelos. Para cada uno de los modelos, sean estos A y B, me pateo la ciudad e, incluso, otras ciudades próximas, mirando concesionarios de vehículos. Los precios de cada coche, tanto A como B, no son fijos: en algunos concesionarios, hacen alguna oferta jugosa; en otros, no tanto.

Así las cosas, el coche A acaba teniendo un rango de precios, según dónde lo compre, que varía entre un precio mínimo m_A y un precio máximo M_A. Lo mismo ocurrirá con el coche B; su precio oscilará entre un mínimo m_B y un máximo M_B, según dónde lo adquiera. Así las cosas, yo sólo podré afirmar, sin ningún género de duda, que «*el coche A es más costoso que el coche B*» si se da la circunstancia de que el precio mínimo m_A al que pueda adquirir A es superior al precio máximo de venta, M_B, relativo al coche B (esto es: $m_A > M_B$).

El ejemplo es prototípico de un tipo de ordenación que técnicamente se denomina **orden-intervalo.**

Ejemplo ilustrativo 2: ¿Debe llevar algo de cebolla la tortilla de patatas?

Ejemplo 2.5. Un cierto individuo tiene alergia o intolerancia a la cebolla, así que la tortilla de patata, que le gusta a rabiar, la toma siempre sin cebolla. Cuando va de pinchos y vermut, pide siempre uno de tortilla de patata. Ocurre que, según el bar en que lo pida, el pincho de tortilla que le sirven tiene a veces un poquitín de cebolla, pero él no llega a detectarlo a menos que esa cantidad de cebolla supere un cierto «*umbral de percepción*», que consideraremos que es fijo. Para tal individuo, ese umbral será el mismo siempre, y un pincho de tortilla frente a otro pincho de tortilla se considerará «ciertamente más encebollado y, por ende, rechazable» si la diferencia entre la cantidad de cebolla que lleve uno frente a la que lleve el otro supera ese «umbral de percepción» fijo de nuestro individuo consumidor compulsivo de tortilla de patata. Si dos pinchos de tortilla son tales que la diferencia entre la cantidad de cebolla que llevan no supera tal umbral de percepción, el individuo no lo nota, y se muestra «*indiferente*» entre consumir uno de los pinchos de tortilla o el otro.

Pues bien, ocurre aquí que esa indiferencia es *intransitiva*: si nuestro consumidor come un día un pincho sin nada de cebolla y, al día siguiente, uno con, pongo por caso, 10 mg de cebolla –algo por debajo de su umbral de percepción–, los verá como indiferentes. Si al siguiente día le damos un pincho con 20 mg de cebolla –aún por debajo del umbral–, seguirá indiferente... Si vamos aumentando paulatinamente 10 mg de cebolla cada día, entre dos días consecutivos nuestro consumidor no notará nada (será indiferente), pero, cuando se llegue al umbral de percepción, cosa que, tarde o temprano, sucederá, notará que el pincho está claramente encebollado si se compara con el primero que tomó que no llevaba nada de cebolla.

Como dato jocoso, un amigo mío, que es físico y buen cocinero, preparaba con mucho cuidado y sutileza una tortilla de patata muy redondita que, en una mitad (de un diámetro para arriba), no llevaba cebolla, y en la otra mitad (de ese diámetro hacia abajo), sí que llevaba. La llamaba «*la tortilla de patata cuántica*», puesto que, a la vez, llevaba y no llevaba cebolla.

El ejemplo es prototípico de un tipo de ordenación que técnicamente se denomina **semiorden.**

3. ¿De verdad son odiosas las comparaciones?

Por más que la sabiduría popular nos repita una y otra vez que las comparaciones son odiosas, en Matemáticas son absolutamente fundamentales. Al estudiar estructuras, las comparamos entre sí, y eso sirve después para clasificarlas. Estructuras similares decimos que son «isomorfas», o que responden exactamente al mismo patrón. Así las cosas, en cada tipo general de estructuras que queramos estudiar buscamos «patrones» o modelos estandarizados. Se trata, además, de que tales modelos sean fáciles de reconocer y manejar.

Observación 3.1. Vamos a establecer tres *modelos numéricos básicos*:

i) Ordenación usual de los números reales: vemos cada número real como un punto situado en una recta.
Un número es mayor que otro si, en tal recta, cae más a la derecha. Este orden lo representamos por el símbolo habitual de «ser mayor o igual que», que denotamos «$\geq$», o por su análogo de «ser menor o igual que», denotado «$\leq$». Por ejemplo: $-3 \leq 4$; $5 \geq 5$; $17 \geq 3$; $20 \leq 20$; $50 \geq 40$; $300 \leq 700$. Se trata de un orden total.

ii) Orden-intervalo típico en la recta real: ahora trabajaremos con intervalos $[a, b]$ de números reales. Un intervalo $[c, d]$ será preferido a otro $[a, b]$ si ocurre que está situado, en su totalidad, más a la derecha que $[a, b]$ (esto es, $b < c$). Esta relación de preferencia es transitiva. Dos intervalos que se solapen (esto es $c \leq b$), por extraño que nos parezca, se considerarán aquí indiferentes. Por cierto, *esta relación de indiferencia es ya intransitiva*, lo que hace que haya que manejar estas ordenaciones con mucha atención y cuidado.

iii) Semiorden típico en la recta real: aquí vamos a suponer que somos muy pero que muy miopes, de manera que solo podemos distinguir un número de otro si la diferencia entre ambos supera una cantidad *fija* (por fijar ideas, supondremos que esta es 1), que será nuestro *umbral de percepción*, constante, fijo e inmutable. Cuando no podemos distinguir dos números, los declaramos indiferentes. Solo cuando ocurre que $a - b > 1$ entonces sí que somos capaces de declarar que «a es mayor que b». Este tipo de ordenación corresponde también al anterior de orden-intervalo, pero con la peculiaridad adicional de que ahora todos los intervalos que se consideran tienen la misma longitud (a saber, nuestro umbral de percepción 1). No podríamos distinguir entre 3 y π. Sí que podríamos distinguir entre 5 y 7. Aquí, la indiferencia es también intransitiva, pero hay aún más sutilezas.

Observación 3.2. Por supuesto, en la teoría especializada se emplean muchos más modelos de referencia, no solamente los descritos en la observación anterior. Incluso se manejan modelos que no son numéricos, o que manejan otros conceptos (por ejemplo, números difusos –«fuzzy numbers»–, el plano lexicográfico, la línea larga, etc.). Los tres descritos anteriormente son quizá los más importantes, pero debe quedar claro que no son los únicos.

Distinguiremos ahora entre dos procesos fundamentales que empleamos, muchas veces sin percatarnos de ello, cuando analizamos, definimos o establecemos algún tipo de ordenaciones, a saber, *la adaptación* frente al establecimiento de un *isomorfismo* o retrato fiel de un determinado tipo de ordenación en un modelo, generalmente, numérico.

Cuando *adaptamos*, resulta que tal vez la ordenación final que definimos no refleje exactamente las comparaciones individuales, dos a dos, que podrían incluso dar lugar a inconsistencias (generalmente, intransitividades).

Un ejemplo muy sencillo es el dar la clasificación final de la Liga de Primera División (veinte equipos). El orden final es un *orden total*, ya que hay sistemas de desempate. Pero, en este orden final, no podemos adivinar lo que ha ocurrido en los encuentros individuales. Si dijésemos que «un equipo a es mejor que otro b si le ha ganado los dos partidos», veremos que hay casos donde esto ocurre y, sin embargo, la clasificación final –al aparecer más equipos y resultados de a y b con terceros–, puede ser tal que b haya quedado delante de a. Esto es muy frecuente. Las demás alternativas (aparte de a y b) no son en absoluto irrelevantes para la posición final relativa entre a y b, que, como hemos dicho, puede ser la opuesta a la que se daría si solamente jugasen la liga estos equipos, y ninguno más. Además, teniendo en cuenta ya tres equipos a, b y c, puede darse el caso de que, en los enfrentamientos individuales, a supere a b, b haga lo propio con c, y c lo haga con a, dando lugar a un ciclo o intransitividad, que un orden total, al ser este transitivo, nunca va ya a reflejar.

Por otra parte, cuando definimos un *isomorfismo* de estructuras ordenadas, las estructuras en sí deben ser matemáticamente «las mismas». Han de tener exactamente las mismas propiedades abstractas. Generalmente, una de estas ordenaciones viene dada por una *escala cualitativa* (comparamos objetos, cosas o elementos de un conjunto, y definimos preferencias ahí) y la otra suele ser una escala *cuantitativa o numérica*. Se trata, por tanto, de reflejar esa escala cualitativa mediante *números*, de manera que un objeto a que se prefiera a otro b debe tener asignado un número o valor $v(a)$ que sea mayor que el número o valor $v(b)$ correspondiente al objeto b. Por cierto, *esto es absolutamente fundamental a la hora de poner precios a las cosas*, si nos basamos en las preferencias que tenemos definidas sobre ellas y aplicamos el «tanto te prefiero, tanto vales».

Ejemplo 3.3. Una tribu cultiva cuatro tipos de fruta: manzanas, peras, plátanos y melocotones. A todo el mundo le gustan más las peras que cualquier otro tipo de fruta, detestan los plátanos, y les da igual comerse una manzana que un melocotón. Esto sería una escala cualitativa de preferencias.

Si esa tribu abriese un mercado y sacase las frutas a la venta, no tendría ningún sentido que un plátano costase 10 dólares, mientras que una pera valiese

5 dólares. Sin embargo, si vendemos las peras a 10; los melocotones y las manzanas, a 7; y los plátanos, a 2, este sistema numérico $2 < 7 < 10$, escala ya cuantitativa, refleja fielmente (o de manera isomorfa, que así se dice en esta jerga matemática) lo que ocurre en las preferencias de la tribu.

Como ya ha quedado dicho, alguna definición inherente a esta teoría resultaría quizá demasiado abstracta o técnica para ser expuesta aquí. Nuestras comparaciones, preferencias, jerarquías, etc. *no siempre vienen dadas por números*. Son escalas y, a veces, son solamente cualitativas.

Vamos a definir, eso sí, y a riesgo de ser ahora un poquito técnicos, pero no demasiado, cuáles serían los principales isomorfismos posibles (cuando los haya, que no siempre va a haberlos) entre escalas cualitativas y escalas numéricas o cuantitativas.

Definición 3.4. Sea X un conjunto no vacío, y sea R una relación binaria definida en X, de manera que, si x, y son elementos de X, la notación xRy la interpretemos como «x es al menos tan bueno como y». En estas condiciones, tenemos:

i) La relación R es un *preorden total representable numéricamente* si existe una función[1] F definida en el conjunto X, y tomando valores en los números reales, tal que xRy se da si y solamente si $F(x) \leq F(y)$, para cualesquiera elementos x, y de X.
Notemos que esta F transforma la escala cualitativa R en una escala numérica, que refleja exactamente –por aquello del «si y solo si»– lo que está ocurriendo en X.

ii) La relación R es un *orden-intervalo representable numéricamente* si existen dos funciones F, G definidas en el conjunto X, y tomando valores en los números reales, tal que $F(x) \leq G(x)$, y además xRy se da si y solamente si $G(x) < F(y)$, para cualesquiera elementos x, y de X.

iii) La relación R es un *semiorden representable numéricamente* si existe una función F definida en el conjunto X, y tomando valores en los números reales, tal que xRy se da si y solamente si $F(x) + 1 < F(y)$, para cualesquiera elementos x, y de X.

1. En muchos contextos, generalmente relacionados con Economía o con Teoría de la Decisión, esta función F se denomina «función de utilidad».

Observación 3.5. Una vez dadas estas definiciones clave, a los matemáticos que trabajen en Teoría del Orden les van a aparecer de inmediato las siguientes tareas:

i) Caracterizar completamente las relaciones R que son preórdenes totales representables numéricamente.
ii) Caracterizar completamente las relaciones R que son órdenes-intervalo representables numéricamente.
iii) Caracterizar completamente las relaciones R que son semiordenes representables numéricamente.
iv) Clasificar los preórdenes totales que *no* sean representables numéricamente. ¿Hay diferentes tipos de no representabilidad? ¿Cuáles son?
v) Clasificar los órdenes-intervalo que *no* sean representables numéricamente.
vi) Clasificar los semiórdenes que *no* sean representables numéricamente.
vii) Buscar representaciones numéricas para preórdenes totales, órdenes-intervalo y semiórdenes, que cumplan, además, alguna condición adicional deseable según el contexto (por ejemplo, que preserven alguna operación como una suma o similar, que sean continuas con respecto a alguna topología dada, etc.). Y, por ende, habrá que caracterizarlas y catalogarlas.
viii) Consolidar una teoría adecuada para el manejo de preferencias u ordenaciones difusas («*fuzzy*») en ambientes de incertidumbre.

A continuación, mostramos un pequeño panorama o resumen *del estado de la cuestión* ahora mismo.
¿Hasta dónde se ha llegado?
¿Qué problemas permanecen todavía sin resolver?

Resultados 3.6.

i) Desde finales del siglo XIX (a través de la obra de G. Cantor, entre otros), se sabía ya que cualquier orden total definido sobre un conjunto finito, o infinito numerable[2]*, es numéricamente representable. Además, puede conseguirse una representación numérica (función de utilidad) que tome valores en números* racionales *(cociente de números enteros).*

2. Sin ánimo de quebrar las neuronas de nadie, digo aquí que hay distintas categorías, jerarquías o «tamaños» de infinitud. Técnicamente, se les llama *cardinalidades*. La más pequeña es la de los números naturales. La de los puntos de una recta, denominada *cardinalidad del continuo*, es estrictamente mayor; se trata de un tipo de infinitud superior.

ii) *Se conocen diversas caracterizaciones de la representabilidad numérica de preórdenes completos. Las primeras aparecieron a finales de los años treinta (Milgram) y comienzo de los cuarenta (Birkhoff). Las hay, además, utlizando distintas técnicas matemáticas (por ejemplo, topología general).*

iii) *Se conocen también distintas caracterizaciones de la representabilidad numérica de órdenes-intervalo [Fishburn (1973), Doignon et al. (1984), Bosi et al. (2001), etc.].*

iv) *La caracterización de la representabilidad numérica de semiórdenes se hizo esperar, y mucho. Ha sido uno de los grandes caballos de batalla de esta teoría especializada. Ya planteada por R. D. Luce (1956) y Scott y Suppes (1958), finalmente se resolvió por Candeal e Induráin en el año 2010, si bien desde entonces han aparecido algunas nuevas caracterizaciones, obtenidas de forma independiente por diversos autores, algunos, de nuestro equipo de trabajo.*

v) *Una clasificación de los órdenes totales que no son representables numéricamente se debe a Beardon et al., y fue obtenida en 2002. Después, han aparecido más, clasificando según otros criterios.*

vi) *La representabilidad numérica* continua *de preórdenes totales fue caracterizada por G. Debreu*[3] *en 1964.*

vii) *La representabilidad numérica continua de órdenes-intervalo se ha resuelto muy recientemente (ca. 2020).*

viii) *La representabilidad numérica continua de semiórdenes constituye aún un problema abierto para los investigadores en esta teoría especializada. Se conocen resultados parciales significativos: por ejemplo, está caracterizada en el caso de semiórdenes definidos sobre conjuntos finitos.*

ix) *Se conocen resultados diversos acerca de representaciones numéricas de estructuras* algebraicas *ordenadas desde comienzos del siglo XX.*

x) *Estudios acerca de preferencias y ordenaciones difusas («fuzzy») aparecen últimamente (ca. 2010 en adelante), aunque haya precedentes que daten de los años ochenta. La teoría va adquiriendo cada vez más rigor, y consolidándose, si bien queda todavía mucho por hacer al respecto.*

Observación 3.7. He de decir aquí que llevo dedicándome a investigar sobre este tipo de cuestiones desde hace unos treinta años, habiendo dirigido varias tesis doctorales sobre el particular. Algunos de los mejores logros de investigación

3. G. Debreu (1921-2004) fue matemático y economista. Recibió el premio Nobel de Economía en 1983.

obtenidos en el seno de mi equipo de trabajo tienen que ver, precisamente, con esas cuestiones y resultados antes expuestos.

En vez de demostrar aquí los resultados antes citados, que son muy técnicos y requieren de una amplia gama de artillería matemática y conceptos y desarrollos previos meticulosos, me limitaré a citar una conocida anécdota atribuida al premio Nobel de Economía Gérard Debreu. La anécdota, tal vez apócrifa, gira en torno a los resultados que caracterizan la representabilidad numérica de órdenes totales.

Resulta que muchos economistas pensaban, allá por los años cincuenta, que cualesquiera preferencias que pudiera tener un consumidor eran siempre representables numéricamente por una función de utilidad (en otras palabras, cabe entender aquí que «todos los preórdenes totales son numéricamente representables»). Debreu sabía que eso no es así, pero los economistas le cuestionaban que los contraejemplos que pudiera haber eran algo «propio de matemáticos» y, sobre todo, «alejado de la realidad».

Debreu reaccionó así, según se cuenta: a uno de sus colegas economistas, muy crítico con los matemáticos, le invitó a comer. Debreu sabía que su colega era buen gourmet; de hecho, era un glotón, comedor algo compulsivo. Ante todo, le gustaba comer. Entre dos posibles cantidades de comida, elegiría siempre la mayor, aunque se le restringiera la bebida. Eso sí, ante dos platos con exactamente la misma cantidad de comida, preferiría ya el menú que le permitiera una mayor cantidad de bebida para acompañar.

Debreu, sabedor de todo esto, le dijo a su amigo: «¡Me temo que tus preferencias sobre la comida no admiten representación numérica ninguna!». Y así es, en efecto (aunque no voy a dar aquí la demostración técnica de por qué tales preferencias no son representables numéricamente).

El ejemplo, bien conocido entre quienes nos dedicamos a la Matemática del Orden, es prototípico de lo que se denomina en la literatura «orden lexicográfico del plano real», que es uno de los más clásicos órdenes totales no representables. Y, jocosamente, a este ejemplo de Debreu le llamamos «*ejemplo del glotón*» o incluso se llama «*teorema del glotón*» al teorema que afirma que el plano lexicográfico no se representa numéricamente en la recta real.

«Si así fue, así pudo ser; si así fuera, así podría haber sido.
Pero como no es, no es. Eso es Lógica».

[Charles Lutwidge Dogson, más conocido como Lewis Carroll (1832-1898): capítulo cuarto de *A través del espejo y lo que Alicia encontró allí*].

4. ¿Y esto sirve para algo?

Huelga decir que todo aquello donde intervenga algún tipo de orden puede considerarse una aplicación de esta teoría, y puede, por tanto, ser estudiado, analizado con un mayor rigor e, incluso, controlado o consolidado por ella. Más todavía, aparecen teorías, en otras ramas de la ciencia o de la técnica, cuya base o sustrato matemático es propio de la Matemática del Orden, si bien a veces no nos percatamos de ello a primera vista. Esto, generalmente, ocurre porque el *lenguaje* propio de cada disciplina concreta puede ser diferente del que se utiliza por los matemáticos que se dediquen al Análisis Real o a la Teoría del Orden, y, más concretamente, al estudio de representaciones numéricas de estructuras ordenadas.

Como quedó dicho al principio de la introducción, al no haber sido la Teoría del Orden una disciplina matemática estudiada *per se*, sino, por el contrario, encontrarse como añadido (notable, eso sí) en otras teorías o ramas más consolidadas, los artículos especializados sobre Teoría del Orden se hallan a veces dispersos en revistas que, en ocasiones, ni siquiera son de Matemática (pura), sino de otras disciplinas como Economía, Psicología Matemática, etc. Y, por suerte o por desgracia, esto viene siendo así también porque nuevas revistas enteramente dedicadas al estudio del orden (por ejemplo *Order*, fundada en 1984) a veces no tienen tanto impacto como otras revistas de otros ámbitos (por ejemplo, *Journal of Mathematical Psychology*).

Citamos a continuación una serie de ejemplos significativos de teorías cuya base científica es la Matemática del Orden:

Ejemplos 4.1.

i) Estudios acerca de *Entropía* en Termodinámica (Física).
ii) Teoría de la *Utilidad* en Economía, así como también en Teoría de la Decisión.

> *«¿Dónde está la utilidad de nuestras utilidades?*
> *Volvamos a la verdad: vanidad de vanidades».*
> [Proverbios y Cantares XXVII, de *Campos de Castilla*;
> Antonio Machado Ruiz (Sevilla, 1875-Collioure, Francia, 1939)]

iii) Teoría de las Votaciones y de la *Elección Social*.
iv) Teoría de las *Lógicas de Orden Superior*.
v) Teoría de la *Medición* (Measurement Theory) en Psicología Matemática.

vi) Teoría de Clasificaciones y Sistemas de Puntuación (*Ranking Theory*).
vii) Teoría de *Preferencias Difusas (Fuzzy Preferences)*.

Y como todo lo anterior queda como algo demasiado abstracto y teórico, voy a terminar esta sección poniendo dos últimos ejemplos como botones de muestra, pero ahora estos ejemplos van a ser *concretos y propios de alguna situación práctica real*. Con la exposición de tales ejemplos, daré ya por terminada esta lección inaugural del curso 2021-2022 en la Universidad Pública de Navarra. Espero que haya sido de su agrado.

Ejemplo 4.2. (Ejemplo práctico 1: Contratando al personal necesario para montar una empresa)

Una empresa quiere contratar personal. Para ello, hace un examen de aptitud que consta de cien preguntas. El que mejor ha puntuado tiene 99 puntos, y el segundo mejor clasificado ha obtenido 98. El peor de los candidatos para ser contratado solamente ha obtenido un punto. Cualquiera diría que, si la empresa únicamente quiere fichar a una persona, contrataría sin dudar al mejor clasificado, el que obtuvo 99 puntos. Pero, *¿qué ocurrirá si la empresa puede contratar a* dos *personas en vez de a una?*, ¿debe la empresa verse obligada a contratar ahora al segundo clasificado, el que obtuvo 98 puntos en la prueba? La mayúscula sorpresa que podemos llevarnos es que la respuesta es *negativa*. No siempre contratarán al segundo clasificado en el examen. Más todavía, hay situaciones en las que la empresa contratará al primer clasificado, el de los 99 puntos, junto con el último clasificado, que solamente obtuvo 1 punto. Esto puede resultar impresionante e insólito... Sin embargo, la empresa puede tener buenas y contundentes razones para obrar así.

En efecto, pensemos que cada una de las preguntas del examen consiste en *la realización de una determinada tarea*, y que, además, *cada una de las cien tareas es absolutamente necesaria, e imprescindible de hecho, para que la empresa pueda funcionar*.

Pudiera ocurrir que haya una entre las tareas que sea tan rara y extraña (por ejemplo, saber traducir simultáneamente de la lengua arapajó de las reservas de indios americanos de Wyoming y Oklahoma al idioma hiri motu hablado en Papúa Nueva Guinea) que solamente una persona haya podido ser capaz de hacerla. Y pudiera ser, además, que esa misma persona solo haya realizado correctamente esa prueba tan poco común. Pues bien, en un tal hipotético caso, ese último clasificado con solamente 1 punto puede darse por felicitado y satisfecho, ya que sería contratado. Insistimos aquí en que su tarea es imprescindible.

Este ejemplo pretende ilustrar la dificultad del estudio de las *extensiones de ordenaciones de un conjunto a su conjunto potencia*[4], siguiendo unos criterios previamente establecidos. Es un tema de investigación que estuvo en boga, por sus aplicaciones en Economía y Teoría de la Decisión, allá por los años ochenta, y en el que hoy día hay todavía una amplia gama de cuestiones abiertas y de problemas sin resolver.

Ejemplo 4.3. (Ejemplo práctico 2: ¿Sabríamos salir de un laberinto?)

Supongamos que entramos en un laberinto[5]. Después de andar un poco por ahí dentro, nos ponemos muy nerviosos. No encontramos la salida, y queremos salir a toda costa, aunque sea por la misma puerta por la que entramos. No nos importa encontrar la salida «buena u oficial» o regresar a la puerta de entrada, con tal de escapar de allí y así tranquilizarnos al fin. *¿Se le ocurre a alguien alguna idea para salir de ahí, aunque quizá haya que caminar durante un buen rato?*

Pues bien, una regla que funciona aquí es la denominada «*regla de la mano derecha*»[6], y que consiste en ir tocando siempre con la mano la pared de la derecha. Eso sí, hay que llevar control de los lugares por donde hemos pasado[7]. Se observa así, que, cuando llegamos a un callejón sin salida, con esa regla, tal callejón se recorre dos veces (una de ida y otra de vuelta), y ya no se recorre más. Como el número de tramos o callejones del laberinto es *finito*, tarde o temprano, habremos de encontrar la salida, aunque sea a riesgo de recorrer todos los callejones.

Como ha quedado dicho, el número de callejones es finito. Y eso es esencial.

En este ejemplo, parece que la teoría de ordenaciones, o la denominada «Matemática del Orden», solamente interviene aquí para darnos el útil consejo de

4. Conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado.

5. Quien haya visto la hermosísima película *La Huella* («*Sleuth*»), dirigida en 1972 por Joseph Mankiewicz y protagonizada por Michael Caine y Laurence Olivier, recordará una famosa escena en la que Michael Caine trata de salir de un laberinto a base de setos vegetales. Y, mientras, el malvado Laurence Olivier le iba cambiando los setos de posición, ya que alguno de ellos estaba montado sobre un resorte que podía girar. De esta manera, *el laberinto iba cambiando*, para desesperación absoluta de Michael Caine, que, con tales cambios, no iba a poder salir a menos que Laurence Olivier se aburriera y le dejase libre. En el modelo o ejemplo que proponemos aquí, vamos a suponer, claro, que nadie hace trampas: *nuestro laberinto será fijo, no va a cambiar.*

6. Para los zurdos, hay buenas noticias: pueden usar la regla análoga, de la mano izquierda, que también es igual de efectiva.

7. Lo de echar miguitas de pan en el suelo, al estilo de Pulgarcito, puede no funcionar si hay pajaricos por ahí. La idea del hilo de Ariadna me gusta más a ese efecto.

proceder siempre con calma y no ponernos nerviosos, y guardar un cierto orden, sistemático, en los recorridos esos que tendremos que hacer en el laberinto.

Pues bien, allí escondido o implícito, hay bastante más, hay algo bastante más profundo y sutil. Sin saberlo, resulta que estamos ordenando las distintas trayectorias de una manera alfabética o lexicográfica. (No doy aquí los detalles técnicos de ello. Puede estudiarse también en *Teoría de Grafos*. Se trata de ordenar convenientemente los caminos de un grafo finito). Y este orden subyacente a nuestra regla de la mano derecha, siendo sobre un conjunto finito y siendo un orden exhaustivo, que no se deja ningún hipotético camino por recorrer si fuese necesario hacerlo, funciona perfectamente y constituye la clave para hallar la salida.

«Bueno... ¡Hemos estado ahí!».
(Miguel Induráin Larraya[8],
nacido en Villava, Navarra, 1964).

Agradecimientos

Tendría que agradecer a tanta gente el haber podido llegar hasta aquí hoy, que la lista de agradecidos podría llegar a ser, sin duda, más larga que todo el texto que le precede.

Así que, quizá por deformación profesional como matemático que soy, voy a hacerle caso a Euclides (ca. 325 a.C. / ca. 265 a.C.), quien en el Libro 1 de sus *Elementos* y, más concretamente, en el número 8 de las «*Nociones Comunes*» que siguen a sus famosos *Postulados*, deja bien sentado que:

«El todo es mayor que la parte».

Y así os digo yo ahora:

¡Gracias de todo corazón a todos y a todas!
Mila esker denei, bihotz-bihotzetik!

He dicho.

8. No somos parientes, pero, al menos, entre 1991 y 1996, yo siempre decía que era «mi primo».

Referencias

[1] F. Aleskerov, D. Bouyssou, B. Monjardet: *Utility Maximization, Choice and Preference (second edition)*, Springer, Berlin, 2007.

[2] Ch. D. Aliprantis, K. Border: *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchiker's Guide*, Springer Verlag, Berlin, 1999.

[3] K. J. Arrow: *Social Choice and Individual Values*. Wiley, New York, 1951.

[4] A. F. Beardon: *Limits: a New Approach to Real Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] A. F. Beardon, J. C. Candeal, G. Herden, E. Induráin, G. B. Mehta: The non-existence of a utility function and the structure of non-representable preference relations. *Journal of Mathematical Economics* **37(1)**, 17-38 (2002).

[6] H. R. Bennet, D. J. Lutzer (eds.): *Topology and ordered structures, part 1*, Mathematical Centre Tracts **142**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

[7] G. Birkhoff: *Lattice theory (first edition)*, American Mathematical Society, Providence RI, 1940.

[8] G. Bosi, J. C. Candeal, E. Induráin, E. Olóriz, M. Zudaire: Numerical representations of interval orders, *Order* **18**, 171-190 (2001).

[9] D. S. Bridges: *Foundations of Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] D. S. Bridges, G. B. Mehta: *Representations of preference orderings*, Springer Verlag, Berlin, 1995.

[11] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola: Restricted equivalence functions, *Fuzzy Sets and Systems* **157**, 2333-2346 (2006).

[12] H. Bustince, B. Bedregal, M. J. Campión, I. Da Silva, J. Fernández, E. Induráin, A. Raventós-Pujol, R. H. N. Santiago: Aggregation of individual rankings through fusion functions: criticism and optimality analysis, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* (2021, en prensa). DOI 10.1109/TFUZZ.2020.3042611.

[13] M. J. Campión, J. C. Candeal, E. Induráin: Representability of binary relations through fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* **157** 1-19 (2006).

[14] M. J. Campión, L. De Miguel, R. G. Catalán, E. Induráin, F. J. Abrísqueta: Binary relations coming from solutions of functional equations: orderings and fuzzy subsets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **25 Suppl. 1**, 19-42 (2017).

[15] M. J. Campión, E. Falcó, J. L. García-Lapresta, E. Induráin: Assigning numerical scores to linguistic expressions, *Axioms* **2017**, 6, 19 (2017).

[16] M. J. Campión, E. Induráin: Open questions in utility theory, en *Mathematical topics on representations of ordered structures and Utility Theory* pp. 47-81, Springer, Cham, Switzerland, 2020.

[17] J. C. Candeal, E. Induráin: Semiorders and thresholds of utility discrimination: Solving the Scott-Suppes representability problem, *Journal of Mathematical Psychology* **54**, 485-490 (2010).

[18] J. C. Candeal, E. Induráin, M. Zudaire: Numerical representability of semiorders, *Mathematical Social Sciences* **43 (1**9, 61-77 (2002).

[19] G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre I, *Mathematische Annalen* **46**, 481-512 (1895).

[20] G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre II, *Mathematische Annalen* **49**, 207-246 (1897).

[21] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet: *Ensembles ordonnés finis: concepts, résultats et usages*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.

[22] Marquis de Condorcet (M. J. A. N. de Caritat): *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris, 1785.

[23] J. L. B. Cooper: The foundations of Thermodynamics, *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* **17**, 172-193 (1967).

[24] N. Cuesta-Dutari: Matemática del Orden (I), *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* **52**, 147-321 (1958).

[25] N. Cuesta-Dutari: Matemática del Orden (II), *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* **52**, 609-770 (1958).

[26] N. Cuesta-Dutari: Matemática del Orden (III), *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* **53**, 33-190 (1959).

[27] J. R. De Miguel, M. I. Goicoechea, E. Induráin, E. Olóriz: Criterios de extensión al conjunto potencia de ordenaciones sobre un conjunto finito, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, 94 (**1**) 83-92 (2000).

[28] G. Debreu: Representation of a preference ordering by a numerical function, en *Decision processes*, pp. 159-166, editado por R. Thrall, C. Coombs y R. Davis, Wiley, New York, 1954.

[29] G. Debreu: *Theory of value*, Wiley, New York, 1959.

[30] G. Debreu: Continuous properties of Paretian utility, *International Economic Review* **5**, 285-293 (1964).

[31] J. P. Doignon, A. Ducamp, J. C. Falmagne: On realizable biorders and the biorder dimension of a relation, *Journal of Mathematical Psychology* **28**, 73-109 (1984).

[32] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[33] A. Estevan, J. Gutiérrez García, E. Induráin: Numerical representation of semiorders, *Order* **30**, 455-462 (2013).

[34] Euclides: *Elementos Libros I-IV* y *Elementos. Libros V-IX*, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1991.

[35] P. C. Fishburn: Interval representations for interval orders and semiorders, *Journal of Mathematical Psychology* **10**, 91-105 (1973).

[36] P. C. Fishburn: *Interval orders and interval graphs*, John Wiley, New York, 1985.

[37] M. B. Gibilisco, A. M. Gowen, K. E. Albert, J. N. Mordeson, M. J. Wierman, T. D. Clark: *Fuzzy Social Choice Theory*, Studies in Fuzziness and Soft Computing **315**, Springer International Publishing Switzerland, 2014.

[38] J. S. Kelly: *Social Choice Theory: an introduction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.

[39] R. D. Luce: Semiorders and a theory of utility discrimination, *Econometrica* **24**, 178-191 (1956).

[40] A. Milgram: Partially ordered sets, separating systems and inductiveness, Reports of a Mathematical Colloquium (second series), University of Notre Dame, 18-30 (1939).

[41] J. R. Munkres: *Topología, segunda edición*, Prentice-Hall, Pearson Educación S.A., Madrid, 2002.

[42] L. Nachbin: *Topology and Order*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.

[43] M. Pirlot, Ph. Vincke: *Semiorders: Properties, Representations, Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[44] A. Raventós-Pujol, M. J. Campión, E. Induráin: Decomposition and Arrow-Like Aggregation of Fuzzy Preferences, *Mathematics* **2020** 8, 436 (2020).

[45] A. Raventós-Pujol, M. J. Campión, E. Induráin: Arrow theorems in the fuzzy setting, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* **17** (**5**), 29-41 (2020).

[46] H. Royden, P. Fitzpatrick: *Real Analysis (4th Edition)*, Pearson, London, 2010.

[47] D. Scott, P. Suppes: Foundational aspects of theories of measurement, *Journal of Symbolic Logic* **23**, 113-128 (1958).

[48] E. Trillas: Assaig sobre les relacions d'indistinguibilitat, *Proc. of Primer Congrés Català de Lògica Matemàtica, Barcelona, Spain (January 1982)*, pp. 51-59 (1982).

[49] J. Van Dalen, E. Wattel: A topological characterization of ordered spaces, *General Topology and its Applications* **3**, 347-354 (1973).

[50] L. A. Zadeh: Fuzzy sets, *Information and Control* 8 338-353 (1965).