Rubén BLASCO ÁLVAREZ DE EULATE

LÓGICA Y PROBABILIDAD

LÓGICA Y PROBABILIDAD EN 2º DE BACHILLERATO MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TFM 2022

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Lógica y probabilidad en 2º de Bachillerato matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales

Rubén Blasco Álvarez de Eulate

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la forma de abordar la probabilidad con una parte de componente lógico en alumnos de 2º de Bachiller.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un estudio sobre el proceso de razonamiento en el estudio de la probabilidad, que se ha puesto en marcha en un aula de 2º de Bachillerato de Matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales de modalidad nocturna en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:
Las matemáticas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cinco capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la probabilidad en cada uno de los grados. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2º de Bachiller, así como en tres cursos anteriores, 1º de Bachiller, 4º de la ESO y 3º de la ESO.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo presentamos los contenidos mínimos del bloque de probabilidad y estadística definidos en el currículo vigente, referentes al tercer ciclo de Educación Primaria, los dos ciclos de la ESO y Bachillerato. Aunque este bloque engloba tanto la probabilidad como la estadística nos vamos a centrar en la probabilidad.

Es presente análisis tiene como objetivo analizar cómo se avanza de forma ascendente en la dificultad del contenido impartido en cada curso, y si éste tiene una secuencia lógica que va a favorecer el estudio del mismo por parte de los alumnos.

Se pueden definir los contenidos como *el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado*. (Gobierno de España. Ministerio de Educación y ciencia. Boletín Oficial del Estado(BOE), 2015)

La normativa vigente por la que se rige el presente currículo, en la que nos vamos a apoyar constantemente a lo largo del análisis es:

- Currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra. BON número 174, de 5 de septiembre de 2014.
- Currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria en la Comunidad Foral de Navarra Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril. Boletín Oficial de Navarra número 127, de 2 de julio de 2015.
- Currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria en la Comunidad Foral de Navarra. Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril. Boletín Oficial de Navarra número 127, de 2 de julio de 2015

Se ha de tener en cuenta que, aunque nos centramos en el bloque de probabilidad hay que tener muy presente durante el desarrollo del proyecto al bloque 1 de contenidos del currículo: procesos, métodos y actitudes en matemáticas. En este bloque se desarrollan una serie de contenidos que afectan en mayor o menor medida a la totalidad de los bloques.

Algunos de los contenidos de este bloque son la planificación del proceso de resolución de problemas, estrategias y procedimientos puestos en práctica, uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. reflexión sobre los resultados, práctica de los procesos de matematización y modelización…. Como se podrá comprobar a continuación estos contenidos van a tener una importante relevancia en el estudio realizado.

Para la realización del análisis del currículo vigente se han definido una serie de descriptores del contenido a los cuales se les ha asignado un código. Estos han sido definidos por orden de aparición en el currículo y son los siguientes:

- C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.
- C2. Experimentación e interpretación.
- C3. Espacio muestral y sucesos.
- C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.

- C5. Probabilidad compuesta.
- C6. Probabilidad condicionada.
- C7. Combinatoria
- C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

<table>
<tr><th colspan="3">3er Ciclo de Educación Primaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>5º Primaria</th><th>6º Primaria</th></tr>
<tr><td>C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td rowspan="3">Carácter aleatorio de algunas experiencias.
-
-</td><td>Carácter aleatorio de algunas experiencias.</td></tr>
<tr><td>C2. Experimentación e interpretación.</td><td rowspan="2">Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</td></tr>
<tr><td>C3. Espacio muestral y sucesos.</td></tr>
<tr><td>C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C7. Combinatoria.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 1. - *Contenidos en el 3er Ciclo de Educación Primaria*

1.2. Contenidos en ESO.

<table>
<tr><th colspan="3">1er Ciclo de Educación Secundaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>1º E.S.O.</th><th>2º E.S.O.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td rowspan="2">-</td><td>Fenómenos deterministas y aleatorios.</td></tr>
<tr><td>Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.</td></tr>
<tr><td>C2. Experimentación e interpretación.</td><td>-</td><td>Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3. Espacio muestral y sucesos.</td><td>-</td><td>Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.</td></tr>
<tr><td>-</td><td>Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.</td></tr>
<tr><td>C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td>Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.</td></tr>
<tr><td>C5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C7. Combinatoria.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 2. - *Contenidos 1er Ciclo de Educación Secundaria.*

2º Ciclo de Educación Secundaria				
Contenidos	**3º E.S.O Matemáticas aplicadas**	**3º E.S.O Matemáticas académicas**	**4º E.S.O. Matemáticas aplicadas**	**4º E.S.O. Matemáticas académicas**
C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.	-	Experiencias aleatorias.	Azar y probabilidad.	-
C2. Experimentación e interpretación.	-	Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	-	Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
C3. Espacio muestral y sucesos.	-	Sucesos y espacio muestral.	Frecuencia de un suceso aleatorio.	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.
C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.	-	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos.	Cálculo de probabilidades mediante la. Regla de Laplace.	
C5. Probabilidad compuesta.	-	-	Probabilidad simple y compuesta.	Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Probabilidad simple y compuesta.
C6. Probabilidad condicionada.	-	-	Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.	Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes.
C7. Combinatoria.	-	Permutaciones, factorial de un número.	-	Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.
C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.	-	-	-	-

Tabla 3.- *Contenidos 2º Ciclo de Educación Secundaria*

1.3. Contenidos en Bachillerato

Bachillerato				
Contenidos	**1º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales**	**1º Bachiller Matemáticas**	**2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales**	**2º Bachiller Matemáticas**
C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.	-	-		-
C2. Experimentación e interpretación.	-	-	Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso. Profundización en la Teoría de la Probabilidad.	-
C3. Espacio muestral y sucesos.	Sucesos.	-	-	Sucesos.
C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.	-	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.
C5. Probabilidad compuesta.	Experimentos simples y compuestos	-	Experimentos simples y compuestos.	Experimentos simples y compuestos.
C6. Probabilidad condicionada.	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.	-	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.
C7. Combinatoria.	Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.	-	-	Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.
C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.	-	-	Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.	Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Tabla 4. - *Contenidos en Bachillerato.*

1.4. Análisis de los contenidos

Los contenidos que aparecen a lo largo del currículo lo hacen en forma de "curriculum en espiral". (Bruner, 1988) Los contenidos son introducidos en orden ascendente de dificultad y en los cursos siguientes se repasan los contenidos impartidos en cursos anteriores, pero nunca repitiendo información sino ampliándola, dándole otros enfoques y se incluyen nuevos una vez se han afianzado los anteriores.

En el tercer ciclo de primaria se observa cómo se comienza a introducir los contenidos generales de la probabilidad. El contenido general de este ciclo es empezar a conocer los fenómenos aleatorios y comenzar a realizar una interpretación de éstos. Estos contenidos se identifican con el descriptor C1., C2. y C3. Aunque se habla del cálculo de probabilidades, éste se realiza de una forma más intuitiva, sin la utilización de la regla de Laplace.

En el primer ciclo de la ESO se observa cómo en 1º de la ESO no se imparte ningún tipo de contenido de probabilidad. Como vamos a observar a lo largo del currículo, cuando en un curso se les da más peso a los contenidos de probabilidad es en detrimento de los contenidos de estadística y viceversa (Como ya hemos dicho anteriormente la estadística y probabilidad conforman uno de los bloques). En 2ºde la ESO se amplían y repasan los contenidos impartidos en primaria sobre los fenómenos aleatorios e interpretación del comportamiento de fenómenos sencillos (C1. y C2.). De igual forma se introducen los contenidos relativos a los sucesos y el espacio muestral y el cálculo de probabilidades simples. (C3. Y C4.)

En el segundo ciclo de la ESO de igual forma que en el primero en 3º E.S.O. Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas no se imparte ningún contenido de probabilidad. Por el contrario, en 3º E.S.O. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se refuerzan los contenidos impartidos el curso anterior (C1. C2. C3. y C4.). La gran diferencia es que se comienza a introducir nociones de combinatoria (C7), como es son las permutaciones y el factorial de un número.

En 4º E.S.O. Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas vuelven a repasar lo impartido en 2º de la ESO (C1. C2. C3. y C4), en 3º de aplicadas no se imparten) además de la probabilidad simple y compuesta y los sucesos dependientes e independientes. (C5. y C6.). En 4º E.S.O. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, nuevamente se profundiza en la interpretación de los resultados, haciendo hincapié en la utilización de un vocabulario correcto (C2), se trabaja el cálculo de probabilidades (C4) para las cuales se debe detener en cuenta los sucesos y el espacio muestral (C3), y la combinatoria, combinaciones variaciones y permutaciones. Aunque en 3º ya s e dan unas pequeñas nociones es aquí cunado se acaba de introducir el contenido de combinatoria (C7). Además, se trabaja de forma más completa la probabilidad simple y compuesta (C5) (haciendo una distinción más completa entre ambas) y la probabilidad condicionada (Distinción entre sucesos dependientes e independientes (C6).

A la hora de realizar el análisis en 1º de Bachillerato solo observamos contenidos de probabilidad en Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales. Las diferencias más importantes con los bloques anteriores, es que ya no repasan de forma explícita los contenidos de los primeros descriptores, sino que se comienza con el cálculo de probabilidades (operaciones con sucesos) y la axiomática de Kolmogorov (C3 y C4) experimentos compuestos, probabilidad condicionada y la combinatoria. (C5, C6 y C7)

En 2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales la gran diferencia con el curso anterior es que no se cita implícitamente la correcta interpretación de los problemas (C2), aunque es un contenido igual de importante que en cursos anteriores. Se constata la ausencia implícita de combinatoria (aunque ciertas nociones van a ser necesarias para el cálculo de probabilidades) y especialmente se estudian la probabilidad total y teorema de Bayes (C8). En 2º Bachiller “Matemáticas puras” se hace un repaso más profundo de contenidos previos ya que en 3º no aparecen estos contenidos (C3,C4,C5 y C6), además de la combinatoria aplicada al cálculo de probabilidades (C7) y el teorema de la probabilidad total y Bayes (C8).

Aunque en 2º de Bachillerato en el currículo aparecen contenidos de probabilidad en ambas modalidades de estudio. Le dan un mayor peso o importancia en las CC. SS.

En “matemáticas puras” raramente se pregunta en las pruebas de acceso a la universidad sobre los contenidos de probabilidad y estadística y, dado que los profesores siempre suelen ir con el tiempo justo (agobiados y atados a las fechas) en numerosas ocasiones los docentes optan por no impartir estos contenidos.

Podemos concluir este capítulo afirmando que los contenidos que aparecen en el currículo (aunque tienen ciertas variaciones en función del itinerario o modalidad de estudio analizada) siguen una secuencia lógica que favorece el estudio por parte de los alumnos. Cada curso se repasar contenidos del curso anterior y se amplían para poder ir avanzando de forma gradual en la adquisición de conocimientos

Capítulo 2
Los criterios de evaluación de la probabilidad en el currículo vigente

Tras haber analizado los contenidos de probabilidad pasamos a hacer lo propio con los criterios de evaluación. *Los criterios de evaluación son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.* (Gobierno de España. Ministerio de Educación y ciencia. Boletín Oficial del Estado(BOE), 2015)

De igual forma que en el caso anterior se definen una serie de descriptores codificados de evaluación.

- CE1. Fenómenos aleatorios y deterministas.
- CE2. Experimentación e interpretación.
- CE3. Espacio muestral y sucesos.
- CE4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.
- CE5. Probabilidad compuesta.
- CE6. Probabilidad condicionada.
- CE7. Combinatoria.
- CE8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

<table>
<tr><th colspan="3">3er Ciclo de Educación Primaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>5º Primaria</th><th>6º Primaria</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td rowspan="3">3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td><td rowspan="3">3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.
4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>CE2. Experimentación e interpretación.</td></tr>
<tr><td>CE3. Espacio muestral y sucesos.</td></tr>
<tr><td>CE4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Combinatoria.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 5. - *Criterios de evaluación 3er Ciclo de Educación Primaria.*

2.2. Criterios de evaluación en ESO

<table>
<tr><th colspan="3">1^er Ciclo de Educación Secundaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>1º E.S.O</th><th>2º E.S.O</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td>-</td><td rowspan="2">1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.</td></tr>
<tr><td>CE2. Simulación, experimentación e interpretación.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE3. Espacio muestral y sucesos.</td><td>-</td><td rowspan="2">2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.</td></tr>
<tr><td>CE4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Combinatoria.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 6. - *Criterios de evaluación 1^er Ciclo de Educación Secundaria.*

<table>
<tr><th colspan="5">2º Ciclo de Educación Secundaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>3º E.S.O Matemáticas aplicadas</th><th>3º E.S.O Matemáticas académicas</th><th>4º E.S.O. Matemáticas aplicadas</th><th>4º E.S.O. Mátematicas académicas</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td>-</td><td rowspan="4">4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.</td><td rowspan="6">3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE2. Simulación, experimentación e interpretación.</td><td>-</td><td rowspan="2">1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.</td></tr>
<tr><td>CE3. Espacio muestral y sucesos.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td rowspan="4">2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Combinatoria.</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 7. - *Criterios de evaluación 2º Ciclo de Educación Secundaria*

3.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

<table>
<tr><th colspan="5">Bachillerato</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>1º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales</th><th>1º Bachiller Matemáticas</th><th>2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales</th><th>2º Bachiller Matemáticas</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE2. Simulación, experimentación e interpretación.</td><td rowspan="6">3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</td><td>-</td><td rowspan="5">1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad,</td><td rowspan="7">1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.</td></tr>
<tr><td>CE3. Espacio muestral y sucesos.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>CE7. Combinatoria.</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>CE8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td><td>el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</td></tr>
</table>

Tabla 8. - *Criterios de evaluación en Bachillerato.*

2.4. Análisis de los criterios de evaluación.

A la hora de realizar el análisis de los criterios de evaluación en el último ciclo de primaria podemos observar que al igual que en los contenidos los descriptores implicados son CE1., CE2. y CE3., y tienen que ver sobre todo con la observación del tipo de suceso y la resolución e interpretación de problemas simples mediante el cálculo de probabilidades. En 6 de primaria además de identificar y resolver problemas se realizan y contrastan estimaciones.

En 2ºde la ESO tiene un mayor peso el diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y los sucesos y su interpretación, (CE1. y CE2.), se comienzan a estudiar la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa (CE3. y CE4.).

En el segundo ciclo de la ESO, y más concretamente en 3º académicas de la ESO el criterio de evaluación que mayor relevancia tiene es el del cálculo de probabilidades (CE4.) para ello se han de tener en cuenta los anteriores. Hay que ser capaz de identificar un suceso aleatorio e interpretarlo, conocer el espacio muestral y los sucesos implicados (CE1. CE2. y CE3.)

En 4º de la ESO de aplicadas los criterios de evaluación son prácticamente los mismos que los de 3º de académicas con la gran diferencia que el cálculo de probabilidades se combina con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia teniendo en cuenta la probabilidad compuesta y condicionada (CE.5 y CE.6). En 4º de la ESO de académicas cobra nuevamente gran relevancia el cálculo de probabilidades (CE.4), se introducen estos últimos criterios mencionados (CE.5 y CE.6) y la mayor diferencia con cursos anteriores es que se evalúa el cálculo de probabilidades mediante otras técnicas combinatorias. (CE: 7)

En los contenidos de 3º de la ESO de aplicadas ya se refleja la introducción a la combinatoria, aunque esta no viene reflejada en los criterios de evaluación (todavía no cobra tanto peso) como ya lo hace en 4º de la ESO.

En 1º de Bachiller aparecen los criterios mencionados anteriormente y se resalta la axiomática de la probabilidad, (C4) empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales. (C2)

En 2º de la ESO destaca la utilización del teorema de la probabilidad total y aplicar el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) (C7) con la diferencia en que el las orientadas a las Ciencias Sociales se resalta

la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales. (C2) mientras que en de "ciencias puras" se realiza en contextos del mundo real.

Podemos concluir el capítulo afirmando que los criterios de evaluación van de la mano, como en lógico con los contenidos impartidos.

Capítulo 3
Estándares de aprendizaje evaluables de la probabilidad en el currículo vigente

Para concluir con el último bloque del currículo se va a realizar un análisis de los estándares de aprendizaje evaluables siendo definidos éstos como: *especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables*. (Gobierno de España. Ministerio de Educación y ciencia. Boletín Oficial del Estado(BOE), 2015)

Nuevamente se le ha asignado un código a cada descriptor:

- EA1. Fenómenos aleatorios y deterministas.
- EA2. Experimentación e interpretación.
- EA3. Espacio muestral y sucesos.
- EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.
- EA5. Probabilidad compuesta.
- EA6. Probabilidad condicionada.
- EA7. Combinatoria.
- EA8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

<table>
<tr><th colspan="3">3er Ciclo de Educación Primaria</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>5º Primaria</th><th>6º Primaria</th></tr>
<tr><td>EA1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td rowspan="3">3.1. Identifica situaciones de carácter aleatorio.
3.2. Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad.
-
-</td><td>3.1. Determina todos los posibles sucesos que pueden darse en fenómenos aleatorios.</td></tr>
<tr><td>EA2. Experimentación e interpretación.</td><td>3.2. Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos.
3.3. Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos.</td></tr>
<tr><td>EA3. Espacio muestral y sucesos.</td><td>3.4. Resuelve problemas sencillos de azar y probabilidad</td></tr>
<tr><td>EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA7. Combinatoria.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 9. - *Estándares de aprendizaje evaluables en el 3er Ciclo de Educación Primaria.*

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

1er Ciclo de Educación Secundaria		
Contenidos	**1º E.S.O**	**2º E.S.O**
EA1. Fenómenos aleatorios y deterministas.	-	1.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
EA2. Experimentación e interpretación.	-	1.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. 1.3. Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio. 2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. 2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. 2.5. Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar sencillos.
EA3. Espacio muestral y sucesos.	-	2.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.	-	2.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. 2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. 2.5. Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar sencillos.
EA5. Probabilidad compuesta.	-	-
EA6. Probabilidad condicionada.	-	-
EA7. Combinatoria.	-	-
EA8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.	-	-

Tabla 10. - *Estándares de aprendizaje del 1er Ciclo de Educación Secundaria.*

2º Ciclo de Educación Secundaria				
Contenidos	**3º E.S.O. Matemáticas aplicadas**	**3º E.S.O. Matemáticas académicas**	**4º E.S.O. Matemáticas aplicadas**	**4º E.S.O. Matemáticas académicas**
EA1. Fenómenos aleatorios y deterministas.	-	4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.	1.2. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.	1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
EA2. Experimentación e interpretación.	-	4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 4.4. Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.	1.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística. 1.2. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.	1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. 1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.
EA3. Espacio muestral y sucesos.	-	4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales	3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.	1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.	-			2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas. 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.
EA5. Probabilidad compuesta.	-	-	3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas. -	2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.
EA6. Probabilidad condicionada.	-	-		2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.
EA7. Combinatoria.	-	-	-	1.1. Aplica en problemas contextualizados los

				conceptos de variación, permutación y combinación.
EA8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.	-	-	-	-

Tabla 11. - *Estándares de aprendizaje en el 2º Ciclo de Educación Secundaria.*

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

<table>
<tr><th colspan="5">Bachillerato</th></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>1º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales</th><th>1º Bachiller Matemática</th><th>2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales</th><th>2º Bachiller Matemáticas</th></tr>
<tr><td>EA1. Fenómenos aleatorios y deterministas.</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA2. Experimentación e interpretación.</td><td>5.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
5.2. Razona y argumenta la interpretación de informaciones estadísticas o relacionadas con el azar presentes en la vida cotidiana.</td><td>-</td><td>1.4. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA3. Espacio muestral y sucesos.</td><td rowspan="5">3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td><td>-</td><td>1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.</td><td>1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.</td><td>-</td><td rowspan="3">1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td><td rowspan="4">1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td></tr>
<tr><td>EA5. Probabilidad compuesta.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA6. Probabilidad condicionada.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>EA7. Combinatoria.</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>EA8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td><td>-</td><td>-</td><td>1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.</td><td>1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.</td></tr>
</table>

Tabla 12. - *Estándares de aprendizaje en Bachillerato.*

3.4. Análisis de los estándares de aprendizaje evaluables

Como ya se ha mencionado y se ha podido comprobar anteriormente los criterios de evaluación son enunciados muy amplios que han de detallarse o especificarse mediante los estándares de aprendizaje evaluables.

A la hora de analizar los estándares de aprendizaje evaluables en el último ciclo de primaria se puede observar cómo se especifica que mientras en 5º de primaria es suficiente con identificar situaciones aleatorias en 6 ya se pide determinar todos los posibles sucesos aleatorios además de calcular probabilidades y resolver problemas sencillos. (EA1. EA2. y EA3.)

En 2º de la eso encontramos más estándares que sobre la interpretación, distingue los conceptos de posible y probable, describe experimentos aleatorios sencillos realiza predicciones utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada (EA1 y EA2.), distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables EA)3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos, realiza predicciones utiliza la probabilidad para elegir la opción más (EA4.) No es suficiente con realizar el cálculo de probabilidades, sino que hay que saber interpretarlas y tomar decisiones en función de ellas.

Ya en 3º de la ESO de académicas los estándares de aprendizaje son bastante similares a los de 2º de la ESO siendo la mayor diferencia el asignar probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos equiprobables, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales.

EN 4º de la ESO tanto de académicas como de aplicadas, se incluye el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas (EA5. Y EA6.), especificando en las matemáticas aplicadas la utilización, especialmente, de los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. (ES5.) De igual forma en esta modalidad se resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada (EA6.) de igual forma se aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. (EA7.)

Ya este segundo ciclo de la ESO se hace un gran hincapié en la utilización de un vocabulario correcto a la hora de describir o interpretar los problemas que va a perdurar en los cursos de Bachiller siguientes.

En primero de Bachiller lo más remarcable es la utilización de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. (C4). Ya en 4º de la ESO se incluye el cálculo de la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Conforme van avanzando los cursos, en numerosas ocasiones los descriptores no varían, pero sí que aumentan o se matizan los estándares de aprendizaje evaluables.

Capítulo 4
Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo del trabajo se realiza un análisis exhaustivo de los diferentes ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones que nos encontramos a lo largo de los libros de testo desde 3º de la ESO hasta 2º de bachillerato para posteriormente en el siguiente capitulo poder analizar la concordancia de éstos con el currículo vigente.

Se han analizado los libros de texto correspondientes tanto a las matemáticas aplicadas como académicas (siempre que aparezcan contenidos de probabilidad) en el segundo ciclo de la ESO. De igual manera en Bachillerato se analizan los libros de matemáticas "ciencias puras" y de matemáticas orientadas a las ciencias sociales.

Tanto en la ESO como en Bachillerato se ha decidido analizar los libros de la editorial de ANAYA. En cada punto posterior se especificará el libro utilizado.

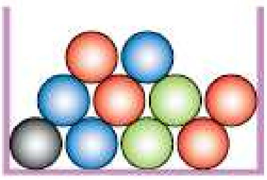
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de la ESO Académicas

En el siguiente punto se va a analizar el libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Se ha elegido la versión digital que se facilita al profesorado, ya que se cuenta con material extra, así como el solucionario de apoyo y otros recursos digitales… (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	En el siguiente ejercicio se comprueba si el alumno ha comprendido la diferencia entre fenómenos aleatorios y deterministas (C1), cual es el espacio muestral y que es un suceso (C3)

Ejemplo:

En una urna hay 10 bolas de cuatro colores. ***Sacamos una bola y anotamos su color.***



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) $E = \{R, A, V, N\}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$S_1 = \{R, A, V, N\}$ $S_2 = \{R, N\}$ $S_3 = \{V\}$

$S_4 = \{A\}$ $S_5 = \{A, V, N\}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Con esta cuestión el alumno ha de calcular las probabilidades de que ocurra cada suceso (C4) e interpretar los resultados (C2).

Ejemplo:

¿Qué es más fácil, sacar un 5 al tirar un dado, o sumar 5 al tirar dos dados?

Al tirar un dado: $P[5] = \frac{1}{6}$

Al tirar dos dados, hay cuatro posibilidades de sumar 5 (1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1) entre 36:

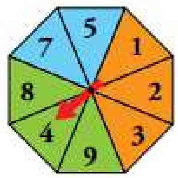
$P[\text{suma } 5] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Por tanto, es más fácil sacar un 5 al tirar un dado que sumar 5 al tirar dos dados.

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Cálculo de probabilidades para experiencias regulares mediante la regla de Laplace (C4).

Ejemplo:

Tiramos un dado y hacemos girar la ruleta:



a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números pares?

b) Halla la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en el dado y un color que no sea azul en la ruleta.

c) Calcula la probabilidad de obtener un 6 o un 5 en el dado.

d) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea más de 10.

a) $P[\text{par y par}] = P[\text{par}] \cdot P[\text{par}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

b) $P[\text{mayor que 2 y no azul}] = P[\text{mayor que 2}] \cdot P[\text{no azul}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P[6 \text{ o } 5] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

d) Construimos la tabla del espacio muestral:

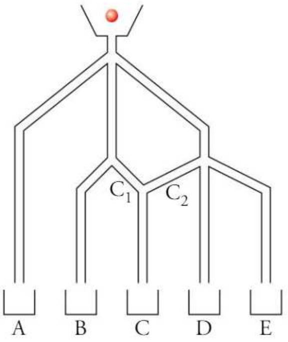
	1	2	3	4	5	7	8	9
1	2	3	4	5	6	8	9	10
2	3	4	5	6	7	9	10	11
3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	5	6	7	8	9	11	12	13
5	6	7	8	9	10	12	13	14
6	7	8	9	10	11	13	14	15

$P[\text{suma mayor que } 10] = \frac{13}{48}$

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabaja el cálculo de probabilidades mediante la resolución de diagramas de árbol sencillos (C4.)

Ejemplo:

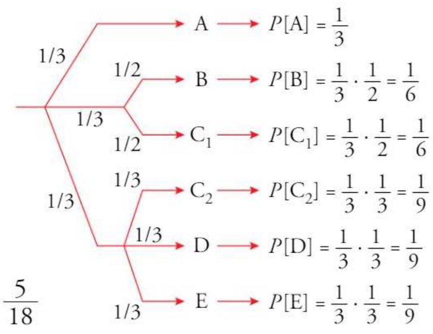
■ EXPERIENCIA III. ***Soltamos una bola desde el embudo de arriba del aparato del margen. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cada casilla? (Supongamos que en cada ramificación la bola tiene la misma probabilidad de ir a cada ramal).***



Resolvemos previamente, a la derecha, otra experiencia en la que los dos ramales C_1 y C_2 se mantengan separados.

Como en el aparato del margen los ramales C_1 y C_2 se unen en un único ramal, la probabilidad de C es:

$$P[C] = P[C_1] + P[C_2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$



Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Bajo el título de "Entrénate resolviendo problemas" se plantean una serie de problemas no tan estándar que tratan de hacer pensar a los alumnos, que utilicen la lógica y sean capaces de dar una solución. Tiene más que ver con el bloque transversal de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. (planificación, estrategia, reflexión, planteamiento….)

Ejemplo:

- **Una chica se queda sin dinero para pagar la pensión en la que se hospeda. No recibirá dinero hasta dentro de siete días. Tiene una pulsera de oro con siete eslabones que el hostelero admite como pago.**

Pero no se fían cada uno del otro: el hospedero no consiente en que tenga ninguna deuda y ella no quiere pagar nada por adelantado. Convienen, como pago, un eslabón al día.

¿Cuántos eslabones debe partir para poder pagar uno al día? (Se supone que quiere estropear lo menos posible su pulsera).

Con partir un eslabón es suficiente: el tercero.

La entrega de eslabones sería como se indica en la siguiente tabla, en la que hemos llamado:

Eslabón suelto → 1. Dos eslabones unidos → 2. Cuatro eslabones unidos → 4.

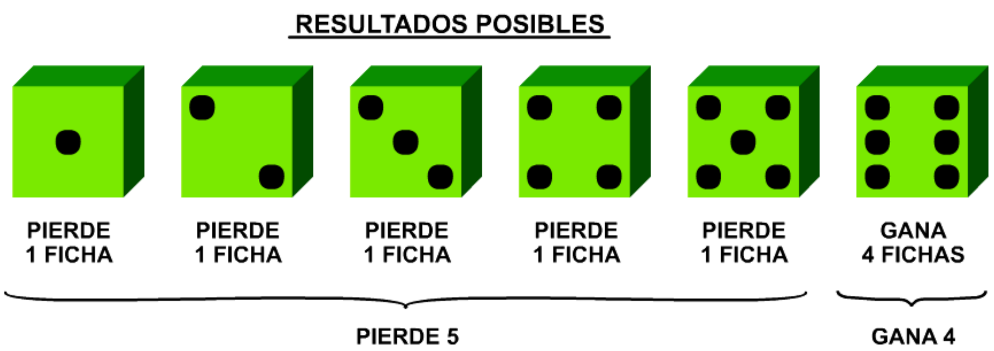
	LA CHICA ENTREGA	EL HOSTELERO DA A LA CHICA	A LA CHICA LE QUEDA	EL HOSTELERO TIENE EN TOTAL
PRIMER DÍA	1		2 + 4	1
SEGUNDO DÍA	2	1	1 + 4	2
TERCER DÍA	1		4	1 + 2
CUARTO DÍA	4	1 + 2	1 + 2	4
QUINTO DÍA	1		2	1 + 4
SEXTO DÍA	2	1	1	2 + 4
SÉPTIMO DÍA	1		0	1 + 2 + 4

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	De los recursos digitales se ha seleccionados esta cuestión en la que se ha de analizar si el juego es equitativo mediante el cálculo de probabilidades (C4.) , el análisis de los sucesos (C3.) y la toma de decisiones (C2.)

Ejemplo:

Ricardo apuesta en un juego con un dado: pone una ficha en un número; si sale ese número se lleva 5 fichas (la suya y otras cuatro) y, si no sale, pierde la ficha. ¿Es equitativo?

Si el dado es correcto, todos los números tienen las mismas posibilidades de salir. Supongamos que Ricardo apuesta al 6.



Vemos que, teóricamente, en seis tiradas, perderá 5 fichas y ganará 4. Es decir, está en desventaja; el juego no es equitativo.

Si hace una sola tirada, ganará o perderá, depende de la suerte; pero si hace muchas tiradas, terminará perdiendo con toda seguridad.

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Bajo el título de utiliza tu ingenio se plantea un ejercicio en el que se han de calcular probabilidades (C4.) que nuevamente se sale de los ejercicios estándar en el que el alumno ha de reflexionar acerca del planteamiento e interpretar los resultados. (Bloque 1)

Ejemplo:

Todas las papeletas de una rifa se han vendido en tres pueblos: Montejo, Montoro y Montilla.

En Montoro se han vendido la mitad que en Montejo, y en este, el triple que en Montilla.

- **¿Cuál es la probabilidad de que toque el premio en cada uno?**

Supongamos que la probabilidad de que toque en Montejo es p. Las probabilidades para cada población serían:

Montoro (mitad que en Montejo) $\longrightarrow \frac{p}{2}$

Montejo $\longrightarrow p$

Montilla (un tercio de Montejo) $\longrightarrow \frac{p}{3}$

La suma de probabilidades debe ser 1:

$$\frac{p}{2} + p + \frac{p}{3} = 1 \rightarrow \frac{11}{6}p = 1 \rightarrow p = \frac{6}{11}$$

Las probabilidades para cada población son, por tanto:

Montoro $\rightarrow \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$

Montejo $\rightarrow \frac{6}{11}$

Montilla $\rightarrow \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$

4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de la ESO

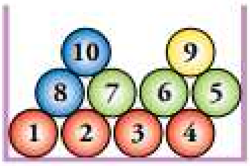
4.2.1. 4º de la ESO Aplicadas

Se va a analizar el libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicada 4º. ESO de la editorial de Anaya. Nuevamente se han utilizado los recursos digitales por sus ventajas. (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	El primer ejercicio es muy similar al de 3º de la ESO en el que se trabajan los fenómenos aleatorios y deterministas (C1), el espacio muestral y la definición de un suceso (C3)

Ejemplo:

3. En una urna hay 10 bolas numeradas. *Sacamos una bola y anotamos el número.*



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar.

b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

S_1: "PAR" = $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ S_2: "IMPAR" = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

S_3: "MÚLTIPLO DE 3" = $\{3, 6, 9\}$ S_4: "MÚLTIPLO DE 5" = $\{5, 10\}$

S_5: "NÚMERO PRIMO" = $\{2, 3, 5, 7\}$ S_6: "CUADRADO PERFECTO" = $\{1, 4, 9\}$

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabaja el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace (C4.)

Ejemplo:

1. Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:

a) El as de espadas.

b) El rey de bastos.

c) Una figura (sota, caballo o rey).

d) Una copa.

a) $P[\text{as de espadas}] = \frac{1}{40}$

b) $P[\text{rey de bastos}] = \frac{1}{40}$

c) $P[\text{una figura}] = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{una copa}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se atribuyen probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio por experimentación, atribuyendo como probabilidad de un suceso el número de su frecuencia relativa. (C2. C3. y C4.)

Ejemplo:

2. ***Lanzamos un dado 1 000 veces y obtenemos los siguientes resultados:***

$f(1) = 157$ $\quad f(2) = 171$

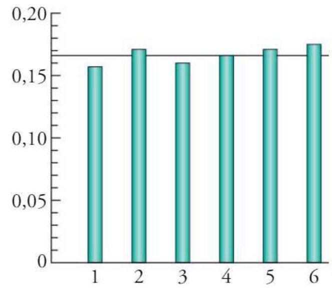
$f(3) = 160$ $\quad f(4) = 166$

$f(5) = 171$ $\quad f(6) = 175$

¿Se puede suponer que el dado es correcto?

Representamos los resultados obtenidos.

CARA	FREC.	FREC. RELATIVA
	157	157/1 000 = 0,157
	171	171/1 000 = 0,171
	160	160/1 000 = 0,160
	166	166/1 000 = 0,166
	171	171/1 000 = 0,171
	175	175/1 000 = 0,175



Si el dado es correcto, la probabilidad de cada cara es 1/6 = 0,166… Las frecuencias relativas obtenidas son todas ellas valores bastante próximos a este. Por tanto, por su comportamiento en estas 1 000 tiradas, el dado parece correcto.

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	En el siguiente problema se trabaja la probabilidad compuesta (C5. se compone de las experiencias de sacar una bola de la 1ª urna + 2ª urna). La probabilidad condicionada y la diferencia entre suceso dependientes e independientes. (C6.). Resolución mediante un diagrama de árbol.

Ejemplo:

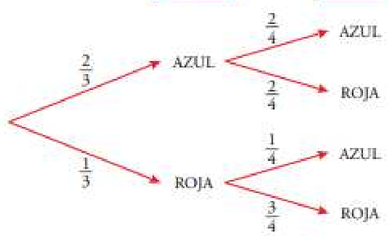
2. Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna bola sea azul? Hazlo mediante la probabilidad del suceso contrario.

Se trata de experiencias dependientes:

a)



$P[\text{AZUL } 1.^a \text{ y AZUL } 2.^a] = P[\text{AZUL } 1.^a] \cdot P[\text{AZUL } 2.^a/\text{AZUL } 1.^a] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

b) $P[\text{alguna AZUL}] = 1 - P[\text{ninguna AZUL}] = 1 - P[\text{ROJA } 1.^a \text{ y ROJA } 2.^a] =$

$= 1 - P[\text{ROJA } 1.^a] \cdot P[\text{ROJA } 2.^a/\text{ROJA } 1.^a] = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	En la siguiente cuestión (de los recursos digitales) Se ha de reflexionar acerca de la dependencia o independencia de un suceso (C6.)

Ejemplo:

1. En los siguientes experimentos compuestos por dos experiencias, señala si estas son dependientes o independientes:

a) Al levantarme observo el día. Si está nublado, es muy probable que me lleve un paraguas, y si hace sol, es poco probable que lo lleve.

- ◯ Independientes
- ◯ Dependientes

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se analiza e interpreta una tabla de contingencia. Importante diferenciar entre porcentajes y probabilidades. Corresponde al descriptor C2. (interpretación:

Ejemplo:

Interpretar una tabla

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

CURSO	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.°?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.°?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.° participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.°?

a) $\frac{72}{400} \cdot 100 = 18 \rightarrow$ El 18 % de estudiantes del centro participan en actividades culturales.

$\frac{15}{72} \cdot 100 = 20{,}83 \rightarrow$ El 20,83 % son de 2.°.

b) $\frac{168}{400} \cdot 100 = 42 \rightarrow$ El 42 % de los estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar.

$\frac{16}{168} \cdot 100 = 9{,}5 \rightarrow$ El 9,5 % son de 4.°.

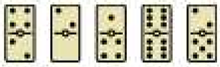
c) El 44 % de alumnos de 3.° participan en actividades deportivas.

d) $\frac{44}{160} \cdot 100 = 27{,}5 \rightarrow$ El 27,5 % de los que participan en actividades deportivas son de 3.°.

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Cálculo de probabilidades mediante un juego cotidiano y conocido. (C4.)

Ejemplo:

22. **¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:**



Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

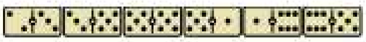
Si sacamos una al azar, halla la probabilidad de que:

b) La suma de los números sea 6.

c) La suma sea un número impar.

d) El producto de los dos números sea menor que 6.

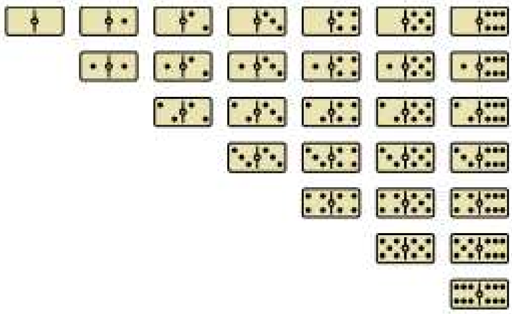
En el desarrollo del juego, las fichas se van poniendo sobre la mesa y se van enlazando unas con otras, así:



La siguiente ficha debe tener un 2, y se situaría a la izquierda, o un 5, e iría a la derecha.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, sacando al azar una de las restantes fichas, pueda enlazar con una de las que están sobre la mesa?

a) Las fichas posibles son:



En total son 28 fichas.

b) $P[\text{SUMA } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) $P[\text{SUMA IMPAR}] = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

d) $P[\text{PRODUCTO} < 6] = \frac{13}{28}$

e) Casos posibles = 22 porque ya hay 6 fichas sobre la mesa.

Casos favorables = 8 porque de las 13 fichas que podrían usarse, 5 ya están en la mesa.

$P[\text{ENLAZAR}] = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

<u>4º de la ESO Académicas</u>

Se va a analizar el libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º. ESO de la editorial de Anaya. (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Utilización de distintas técnicas de conteo, variaciones, permutaciones y combinaciones (C7.)

Ejemplo:

Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?*

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas

b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas

c) $V_6^3 = 120$ formas

d) $C_6^3 = 20$ formas

e) $V_6^3 = 120$ formas

f) 1 forma

g) $P_6 = 720$ formas

h) $C_6^3 = 20$ formas

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Repaso de los conceptos de espacio muestral y sucesos vistos en cursos anteriores (C3.)

Ejemplo:

1. Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en sacar una bola y anotar su número.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Considera estos sucesos:

A = "número primo" **B = "múltiplo de 3"**

Describe los sucesos siguientes:

A	A'	$A \cup B$	$A \cup A'$
B	B'	$A \cap B$	$A \cap A'$

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ $A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$ $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $A \cap B = \{3\}$

$A \cup A' = E$ $A \cap A' = \varnothing$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabajan técnicas de conteo (C7.)

Ejemplo:

5. **¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?**

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabaja el espacio muestral la definición de sucesos y el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. (C3. y C4.)

Ejemplo:

2. **Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.**

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

$$P[<4] \qquad P[\text{no} < 4]$$

DADO 2 \ DADO 1	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P[1] = \frac{11}{36}$ $\qquad P[2] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $\qquad P[3] = \frac{7}{36}$

$P[4] = \frac{5}{36}$ $\qquad P[5] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\qquad P[6] = \frac{1}{36}$

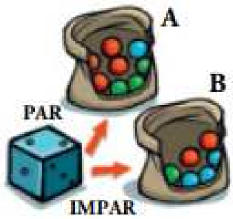
b) $P[<4] = P[1] + P[2] + P[3] = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

$P[\text{no} < 4] = 1 - P[<4] = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Probabilidad compuesta. (C5.) Diferenciar entre sucesos dependientes e independientes, antes de trabajar la probabilidad condicionada (C6.)

Ejemplo:

2. Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?



Son dependientes, porque al ser los contenidos de las bolsas distintos, el resultado depende de qué bolsa se saque, que depende del valor obtenido al lanzar el dado.

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Cálculo de probabilidades (C4.) de experiencias compuestas (C5.) apoyándose en una tabla de contingencia. Probabilidad condicionada (C6.)

Ejemplo:

4. En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone SÍ o NO, según esta tabla:

	🔴	🟢	🔵	TOTAL
SÍ	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

a) Describe los sucesos SÍ, NO, 🔴, 🔴 / SÍ, SÍ / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya SÍ en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone SÍ. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

a) SÍ → sacar una bola al azar y que sea SÍ.

NO → sacar una bola al azar y que sea NO.

🔴 → sacar una bola al azar y que sea roja.

🔴 / SÍ → de entre las bolas que dicen SÍ, sacar una roja.

SÍ / 🔴 → de entre las bolas rojas, sacar una que dice SÍ.

$P[\text{SÍ}] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $\qquad P[\text{NO}] = 1 - P[\text{SÍ}] = \frac{1}{2}$

$P[🔴] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $\qquad P[🔴 / \text{SÍ}] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\qquad P[\text{SÍ} / 🔴] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

b) $P[\text{SÍ} / 🔴] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\qquad P[\text{SÍ} / 🔵] = \frac{1}{12}$

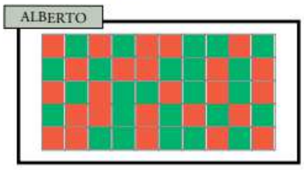
c) $P[🔴 / \text{SÍ}] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\qquad P[🟢 / \text{SÍ}] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $\qquad P[🔵 / \text{SÍ}] = \frac{1}{20}$

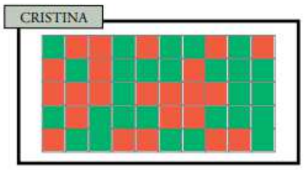
Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Como ya ocurría en cursos anteriores al final del tema se plantean una serie de actividades en los que los alumnos han de reflexionar y pensar, acerca de la frecuencias de un suceso (C4.)

Ejemplo:

Tarea con trampa

Alberto y Cristina rellenan, para un trabajo de clase, un tablero de 50 casillas del siguiente modo: avanzando de izquierda a derecha y de arriba abajo, se decide a cara o cruz si la casilla se colorea de rojo o de verde.



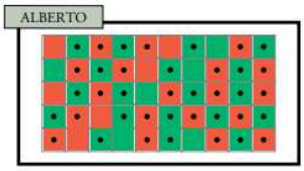


Pero el caso es que uno ha hecho el trabajo concienzudamente, tirando una moneda por cada casilla. Y el otro, con trampa, lo ha rellenado en un momento, caprichosamente.

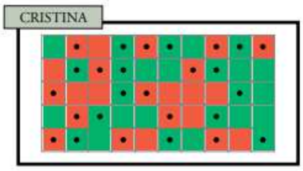
Sin embargo, el profesor ha puesto mala nota al que no ha trabajado. ¿Cómo lo ha descubierto?

- **¿Sabrías tú cómo descubrir al que ha hecho la trampa?**

Señalamos con un punto las casillas que tienen un color diferente de la anterior:



Cambios de color: 38
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 38/49 → 78 %



Cambios de color: 26
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 26/49 → 53 %

Ha hecho trampas Alberto, porque su frecuencia relativa (78 %) se separa mucho del teórico 50 %.

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Para concluir la unidad didáctica se plantea un ejercicio de lógica que puede enmarcarse en el bloque 1 de contenidos.

Ejemplo:

- **Estás junto a una fuente y dispones de un cántaro de 10 litros y otro de 6 litros.**
  a) ¿Cómo te las ingeniarías para medir, exactamente, 2 litros de agua?
  b) ¿Qué cantidades distintas puedes medir con los cántaros de que dispones?

a)

10 litros	6 litros	
10	0	Llenamos el de 10 litros y vaciamos su contenido en el de 6 *l*.
4	6	Quedan 4 y 6 litros. Vaciamos el envase de 6 *l*.
4	0	Quedan 4 y 0 litros. Ponemos los 4 *l* en el envase de 6 *l*.
0	4	Quedan 0 y 4 litros. Llenamos el de 10 litros.
10	4	Hay 10 y 4 litros. Con el de 10 *l* rellenamos el de 6 litros.
8	6	Quedan 8 y 6 litros. Vaciamos el de 6 litros.
8	0	Quedan 8 y 0 *l*. Llenamos el de 6 *l* con el contenido del de 10.
2	6	Quedan 2 y 6 litros. Ya hemos conseguido los 2 litros.

b) Se pueden conseguir 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16 litros.

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachiller

<u>1º Bachillerato . Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales</u>

En el libro de 1º de Bachillerato de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales no hay una unidad didáctica destinada al estudio de la probabilidad. En el tema 9 Distribuciones de probabilidad de variable discreta aparecen algunas actividades del cálculo de probabilidades. (Jiménez, González, Cañas, & Fernández, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Bachillerato. Anaya + Digital., 2015)

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabaja el espacio muestral y los sucesos (C3.) y el cálculo de probabilidades.
Ejemplo:	

4 Lanzamos cuatro dados. Calcula:

a) P[tres PAR y un 5], b) P[un 1, un 3, un 5 y un PAR]

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Nuevamente se trabaja el espacio muestral y los sucesos (C3.) y el cálculo de probabilidades.
Ejemplo:	

5 Extraemos tres naipes de una baraja de 40. Calcula:

a) P[3 ASES], b) P[un AS, un CABALLO y un REY]

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabaja el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace apoyándonos en diagramas de árbol.
Ejemplo:	

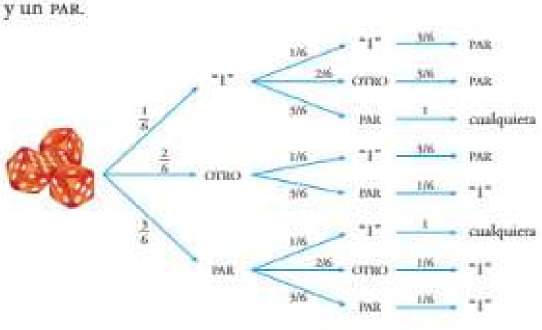
2. Cálculo de probabilidades. Diagrama en árbol

Tiramos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener algún "1" y algún PAR?

Hazlo tú. Un dado tiene 3 caras rojas, 2 blancas y 1 negra. Lanzamos tres dados con esas características. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cara blanca y alguna negra?

Consideramos tres posibilidades: "1", PAR = {2, 4, 6} y OTRO RESULTADO = {3, 5}.

Construimos un diagrama en árbol para seguir el proceso: conseguir al menos un "1" y un PAR.



$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{216}$$
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{216}$$
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 1=\frac{3}{36}$$
$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{216}$$
$$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{216}$$
$$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{3}{36}$$
$$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{216}$$
$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{9}{216}$$

$$P[\text{algún "1" y algún PAR}] = \frac{3}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{36}+\frac{6}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{36}+\frac{6}{216}+\frac{9}{216} = \frac{72}{216}=\frac{1}{3}$$

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachiller

<u>2º Bachillerato "Ciencias Puras" y Matemáticas orientas a las Ciencias Sociales</u>

Se va a analizar conjuntamente el libro de Matemáticas 2º. Bachiller tanto de "ciencias puras" como el orientado a las ciencias Sociales de la editorial de Anaya. En ambas modalidades de estudio el contenido de la unidad didáctica es exactamente el mismo. (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trabajan las operaciones con sucesos (C3.) ayudándose de su representación gráfica mediante diagramas de Venn.

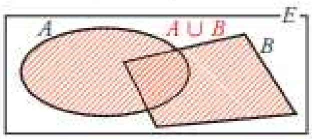
Ejemplo:

5 Ayúdate de diagramas para resolver cada apartado.

a) Expresa $A \cup B$ como unión de tres sucesos incompatibles. Puedes utilizar alguno de los siguientes: A', B', $A - B$, $B - A$, $A \cap B$.

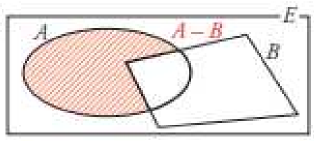
b) El suceso $A - B$ es igual a algunos de los siguientes sucesos; di a cuáles: $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A - (A \cap B)$

a)



$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

b)



$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Este ejercicio es muy completo y en él se trabajan el cálculo de probabilidades (C4.) y la probabilidad condicionada (C6.). Para ayudar a la resolución del mismo es aconsejable el realizar el diagrama de Ven y ordenar los datos mediante una tabla de contingencia.

Ejemplo:

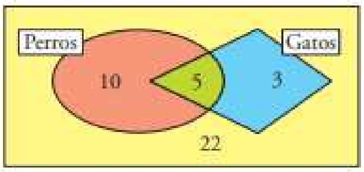
En una comunidad de 40 vecinos, 15 de ellos tienen perros, 8 tienen gatos y 5 tienen perros y gatos.

Se elige al azar un vecino de esta comunidad. Calcular las siguientes probabilidades:

a) P[PERRO o GATO]

b) P[ni PERRO ni GATO]

c) P[PERRO/GATO]



	PERROS	NO PERROS	TOTAL
GATOS	5	3	8
NO GATOS	10	22	32
TOTAL	15	25	40

a) $P[\text{PERRO o GATO}] = \dfrac{10+5+3}{40} = \dfrac{18}{40} = 0{,}45$

b) $P[\text{ni PERRO ni GATO}] = \dfrac{22}{40} = 0{,}55$

c) $P[\text{PERRO/GATO}] = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$ (de los 8 que tienen gato, 5 también tienen perro).

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se trata de afianzar el cálculo de probabilidades, así como las propiedades de que se deducen de la axiomática y los teoremas. (C4.)

Ejemplo:

3 Sabemos que:

$$P[M \cup N] = 0{,}6 \quad P[M \cap N] = 0{,}1 \quad P[M'] = 0{,}7$$

Calcula $P[M]$, $P[N]$, $P[N']$, $P[M' \cap N']$.

$P[M] = 1 - P[M'] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[M \cup N] = P[M] + P[N] - P[M \cap N] \rightarrow P[N] = P[M \cup N] + P[M \cap N] - P[M] =$

$= 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}4$

$P[N'] = 1 - P[N] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[M' \cap N'] = P[(M \cup N)'] = 1 - P[(M \cup N)] = 0{,}4$

Actividad Tipo	☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	En el siguiente ejercicio se refuerza el cálculo de probabilidades (C4.) y el concepto de probabilidad compuesta (C5.)

Ejemplo:

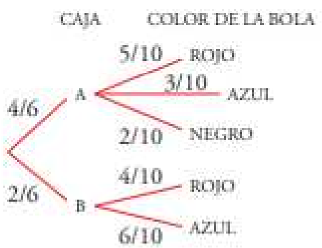
17 Observa estas cajas con bolas de colores:

Tenemos un dado que tiene cuatro caras marcadas con la letra A y las otras dos, con la letra B. Tiramos el dado, elegimos la caja que indica y sacamos, al azar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y negra?

b) La bola extraída ha resultado ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Describimos el experimento en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{ROJA}] = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{5}{10} + \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{7}{15}$

$P[\text{NEGRA}] = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{10} = \dfrac{2}{15}$

b) $P[\text{CAJA B}/\text{ROJA}] = \dfrac{P[\text{CAJA B y ROJA}]}{P[\text{ROJA}]} = \dfrac{\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{10}}{\dfrac{7}{15}} = \dfrac{2}{7}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Se proponen numerosos problemas en los que se aplica el cálculo de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes. (Contenidos nuevos en este curso C8.) De igual forma se trabaja la probabilidad condicionada. (C6.)

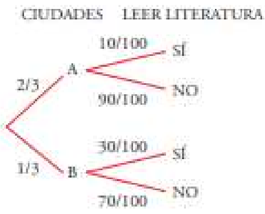
Ejemplo:

26 **La ciudad A tiene el doble de habitantes que la B. Un 30 % de ciudadanos de B lee literatura, y solo un 10 % de ciudadanos de A lee literatura.**

a) Si sabemos que un ciudadano vive en la ciudad A o en la B, ¿qué probabilidad hay de que lea literatura?

b) Si nos presentan a un ciudadano de alguna de las dos ciudades que lee literatura, ¿qué probabilidad hay de que sea de la ciudad B?

Como la ciudad A tiene el doble de habitantes que la B, un ciudadano elegido al azar entre las ciudades A o B tiene doble probabilidad de pertenecer a A que a B. Por tanto:



a) $P[\text{LEER LITERATURA}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{B/LEER LITERATURA}] = \frac{P[\text{B y LEER LITERATURA}]}{P[\text{LEER LITERATURA}]} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{5}$

Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Problema para aplicar la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes (C8.)

Ejemplo:

31 **En una ciudad, los ascensos de barrendero a jefe de grupo son muy disputados. Se puede acceder por tres conductos: por oposición, por concurso de méritos o por enchufe. La probabilidad de que un barrendero alcance la plaza si oposita es de 0,2; si concursa, es de 0,8 y si tiene enchufe, seguro que la consigue. Los aspirantes a jefes de grupo se reparten de este modo:**

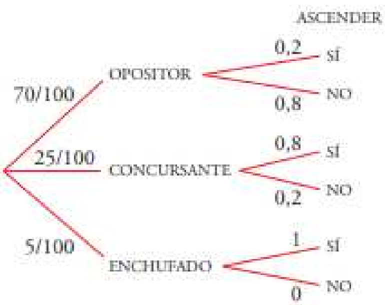
- **70 % son opositores**
- **25 % concursan**
- **5% tienen enchufe**

Calcula:

a) ¿Cuántos de los 120 jefes de grupo consiguieron el ascenso por enchufe?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto jefe de grupo haya alcanzado la plaza por concurso?

c) ¿Qué probabilidad tiene un jefe de grupo escogido al azar, de haber obtenido la plaza opositando?



a) $P[\text{ASCENDER POR ENCHUFE}] = \frac{5}{100} \cdot 1 = \frac{1}{20} = 0,05$

El número de jefes que ascendieron por enchufe fue:

$120 \cdot 0,05 = 6$

b) $P[\text{HABER CONCURSADO Y ASCENDER}] = \frac{25}{100} \cdot 0,2 = 0,05$

c) $P[\text{ASCENDER}] = \frac{70}{100} \cdot 0,2 + \frac{25}{100} \cdot 0,8 + \frac{5}{100} \cdot 1 = 0,39$

$P[\text{HABER OPOSITADO/ASCENDER}] = \frac{0,14}{0,39} = 0,39$

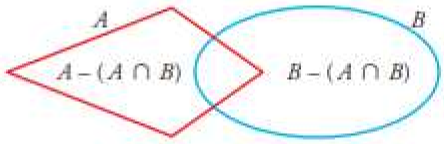
Actividad Tipo	☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación
Descripción.	Ya en 2º de Bachiller se plantean una serie de cuestiones teóricas en la que se han de realizar demostraciones de ciertas propiedades vistas en la teoría. Se enmarcaría en el cálculo de probabilidades C4.

Ejemplo:

37 Demuestra la siguiente propiedad:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

descomponiendo $A \cup B$ en tres sucesos distintos.



$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A - (A \cap B)] + P[A \cap B] + P[B - (A \cap B)] = \\ &= P[A] - P[A \cap B] + P[A \cap B] + P[B] - P[A \cap B] = \\ &= P[A] + P[B] - P[A \cap B] \end{aligned}$$

Capítulo 5
Resultados

Durante el desarrollo del presente capítulo se trata de realizar un análisis comparativo entre el currículo de los distintos cursos y los libros elegidos, en este caso los de la editorial del Anaya, tanto para secundaria como para bachillerato.

Se tratará de examinar las presencias y ausencias de los contenidos relativos a la probabilidad y como son tratados; y se analizará los grados de coherencia de estos libros con el currículo.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Como ya se ha mencionado anteriormente el diseño del currículo se realiza en forma de espiral de Bruner, en el que en los cursos posteriores se repasan y se profundiza en los contenidos de los anteriores, además de introducir nuevos contenidos.

Esta característica se observa claramente en la siguiente tabla que se muestra a continuación en la que se analiza longitudinalmente los contenidos del currículo por medio de los descriptores mencionados anteriormente.

Contenidos	Educación Primaria		Educación Secundaria						Bachillerato			
	5º	6º	1º	2º	3º Aplicadas	3º Académicas	4º Aplicadas	4º Académicas	1º CC.SS.	1º	2º CC.SS.	2º
C1. Fenómenos aleatorios y deterministas.	✓	✓		✓		✓	✓					
C2. Experimentación e interpretación.	✓	✓		✓		✓		✓			✓	
C3. Espacio muestral y sucesos.	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓			✓
C4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.				✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓
C5. Probabilidad compuesta.				✓			✓	✓	✓		✓	✓
C6. Probabilidad condicionada.							✓	✓	✓		✓	✓
C7. Combinatoria.						✓		✓				✓
C8. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.											✓	✓

Tabla 13. - *Descripción longitudinal de los contenidos del currículo.*

Para apreciar un ejemplo de cómo un mismo contenido del currículo es tratado de diferente manera en función del curso en el que aparezca se muestra una comparativa entre la definición de la ley de los grandes números de 3º de la ESO y la de 2º de Bachillerato

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Esta propiedad se llama **ley de los grandes números.**

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso S o, simplemente, frecuencia de S, al *número de veces que ocurre* S. Se designa por $f(S)$.

Se llama **frecuencia relativa** de S a la *proporción de veces que ocurre* S.

$$fr(S) = \frac{f(S)}{N}$$

$$\lim_{N \to \infty} fr(S) = P[S] \quad \text{LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS}$$

Figura 1. - *Comparación de definición de la ley de los grandes números entre 3º ESO y 2º Bachiller.*

Lo mismo ocurriría por ejemplo con la definición de probabilidad de un suceso, que mientras en 3º de la ESO se define como "*indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1",* en 2º de Bachiller se enuncia la axiomática de la probabilidad, así como los teoremas que se deducen de ella….

En los siguientes puntos se analiza la presencia y ausencia de los contenidos del currículo de los distintos cursos.

5.1.1. 3º de la ESO Matemáticas Académicas

Tras haber realizado el análisis del libro de 3º de la E.S.O. podemos afirmar que los contenidos impartidos se adecuan en gran medida a los que se muestran en el currículo. Estos aparecen en el mismo orden que en el currículo, que es el orden lógico de estudio, ya que los conceptos van aumentando de dificultad y es necesario el haber comprendido los anteriores antes de continuar en el proceso de aprendizaje dentro de la unidad didáctica.

Al comienzo de la unidad didáctica se realiza una introducción sobre el origen de la probabilidad, y se introducen algunos de los matemáticos más importantes de este campo como pueden ser Cardano, Pascal, Fermat, Bernoulli o Laplace. Lo cual a mi forma de parecer es realmente importante.

Hay una paradoja subyacente con respecto a esta asignatura que chirría en el sistema educativo. Un alumno de primero de bachillerato pasa a segundo conociendo, supuestamente, la obra de Cervantes, del Arcipreste de Hita, de Quevedo, de los grandes escritores españoles que en el mundo han sido. También debe tragar con otros, como, con todos mis respetos, Mesonero Romanos, Pereda o Valera. Sin embargo, asumiendo la necesidad de la nueva asignatura ciencias para el mundo contemporáneo, estamos aceptando lo que ocurre realmente en las aulas, que un estudiante de bachillerato no oye hablar en la asignatura de química de Lavoisier, el padre de la química. Raro es oír en clase de física o matemáticas el nombre de Newton, quizá el mayor científico de la historia, ni de Aristarco, el primer heliocéntrico, capaz de medir en el siglo III antes de Cristo el tamaño del Sol y de la Luna. ¿Quién aportó más para el conocimiento humano, Newton o Pereda? (Alconchel, 2014)

Ya desde el primer punto del libro lo primero que se muestra es el concepto de suceso aleatorio correspondiente al descriptor C1. De igual forma en un lateral del libro se realiza una aclaración Etimológica. Saber de dónde vienen el nombre de las cosas es realmente importante para la correcta comprensión de la terminología, las cosas se llaman de una determinada manera por alguna razón, hay que saber relacionar los conceptos para una correcta interiorización y comprensión de éstos. El tutor del centro lo recalcaba una y mil veces con la frase: “Podían haberlo llamado tenedor, pero como se trata de…. lo han llamado…”. En cuanto lo enunciaba los alumnos ya sabían lo que iba a decir a continuación.

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.
En latín, *alea* significa *dado* y también *suerte*, *azar*.

Figura 2. - *Etimología.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

Una vez repasado este concepto se pasa a explicar que es el espacio muestral y los tipos de sucesos C3, seguido de la probabilidad de un suceso. Nuevamente aparecen en los laterales ciertas aclaraciones de conceptos.

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.
f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Figura 3. - *Recuerda.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

Tras haber repasado estos conceptos que ya aparecen en cursos anteriores se enuncia la Ley de Laplace para experimentos regulares C4. y se muestran varias experiencias a modo de ejemplo.

■ **EXPERIENCIA II.** ***Lanzamos dos monedas y observamos el número de caras que obtenemos.***

Al lanzar dos monedas, pueden salir 0 caras, 1 cara o 2 caras. Sin embargo, estos tres casos no son igualmente probables. Para hallar sus probabilidades, hacemos como antes.

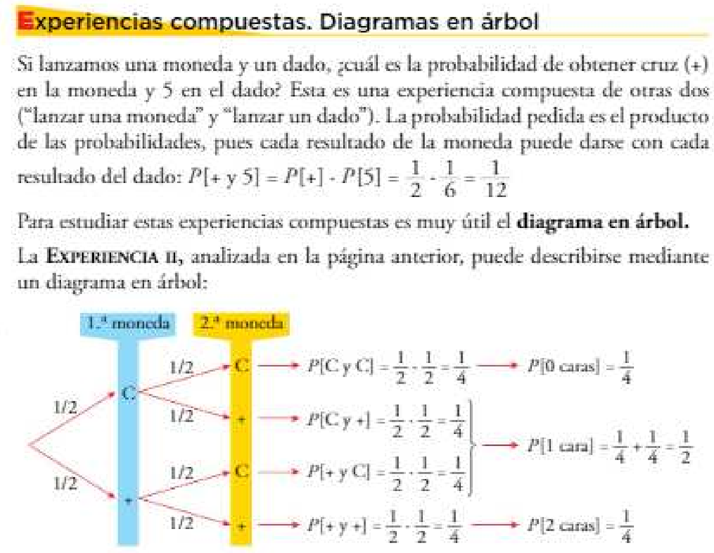
En la tabla del margen vemos claramente que:

$$P[0 \text{ CARAS}] = \frac{1}{4} \qquad P[1 \text{ CARA}] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad P[2 \text{ CARAS}] = \frac{1}{4}$$

Figura 4. – *Experiencias.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

En cuanto a la toma de decisiones y la interpretación C2. se trabaja continuamente a la hora de resolver los problemas planteados.

En el currículo todavía no aparece la probabilidad compuesta C5.; no obstante, en el libro se introduce para la resolución de problemas sencillos mediante diagramas de árbol.



Experiencias compuestas. Diagramas en árbol

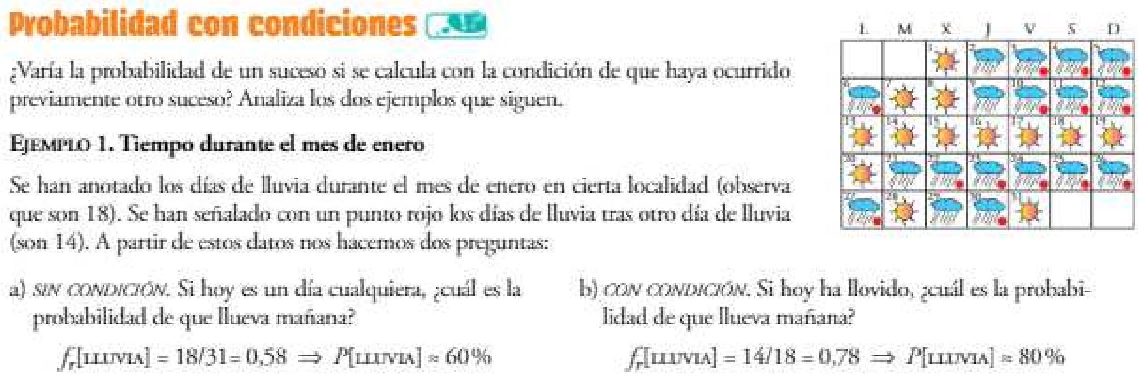
Si lanzamos una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cruz (+) en la moneda y 5 en el dado? Esta es una experiencia compuesta de otras dos ("lanzar una moneda" y "lanzar un dado"). La probabilidad pedida es el producto de las probabilidades, pues cada resultado de la moneda puede darse con cada resultado del dado: $P[+ \text{ y } 5] = P[+] \cdot P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Para estudiar estas experiencias compuestas es muy útil el **diagrama en árbol.**

La **Experiencia II**, analizada en la página anterior, puede describirse mediante un diagrama en árbol:

Figura 5. - *Experiencias compuestas diagramas de árbol.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

De igual forma la probabilidad condicionada C6. tampoco aparece en el currículo, pero se comienza a estudiar de forma intuitiva en el taller de matemáticas que aparece al final del temario.



Probabilidad con condiciones

¿Varía la probabilidad de un suceso si se calcula con la condición de que haya ocurrido previamente otro suceso? Analiza los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 1. Tiempo durante el mes de enero

Se han anotado los días de lluvia durante el mes de enero en cierta localidad (observa que son 18). Se han señalado con un punto rojo los días de lluvia tras otro día de lluvia (son 14). A partir de estos datos nos hacemos dos preguntas:

a) *Sin condición.* Si hoy es un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

$f_r[\text{LLUVIA}] = 18/31 = 0{,}58 \Rightarrow P[\text{LLUVIA}] \approx 60\%$

b) *Con condición.* Si hoy ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

$f_r[\text{LLUVIA}] = 14/18 = 0{,}78 \Rightarrow P[\text{LLUVIA}] \approx 80\%$

Figura 6. - *Probabilidad con condiciones.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

Como ausencias podemos destacar, la de la combinatoria, más concretamente de las permutaciones y el factorial de un número C7. De igual forma echo en falta la representación de la unión y la intersección de sucesos mediante diagramas de Venn, aunque este contenido no es impartido como tal aparece es ejercicios sencillos.

El esquema general que se utiliza es en una primera instancia el desarrollo teórico, seguido de unos ejemplos o ejercicios resueltos. Al final de la teoría se plantean más ejercicios y problemas graduados gráficamente en cuanto a su dificultad. Para concluir se incluye un apartado titulado taller de Matemáticas con varios apartados: para acabar el temario planteando una serie de actividades bajo el título de piensa y práctica. Dentro de este apartado hay varios subpuntos: lee y comprende (como ya hemos mencionado anteriormente hay que tener siempre en cuenta el Bloque 1 del currículo, procesos, métodos y actitudes en matemáticas, en el que podría están englobado este apartado de la unidad didáctica) utiliza tu ingenio y entrénate resolviendo problemas

Se concluye con unas actividades de autoevaluación que sirve a los alumnos para comprobar si se han comprendido los contenidos impartidos.

5.1.2. 4º de la ESO Matemáticas Aplicadas

El libro de 4º de la E.S.O. de aplicadas es muy similar al de 3º de Académicas tanto en formato como en los primeros contenidos. Esto es debido a que en 3º de Aplicadas no han visto probabilidad y parte de estos contenidos son similares. La introducción al tema es prácticamente la misma a excepción de que el primer punto de la unidad didáctica es una reflexión acerca del cálculo de probabilidades *¿experimentación o cálculo matemático?* Aunque en el currículo ninguno de los contenidos cita explícitamente este contenido (C2.). De igual forma se muestran que es un suceso aleatorio, espacio muestral, tipos de sucesos y cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace (C1., C3. Y C4.) con la diferencia de que en este curso ya se expone la ley de los grandes números (mayor formalismo matemático). De igual forma aparecen las aclaraciones mencionadas anteriormente.

Las principales diferencias están en que al igual que en currículo aparecen las experiencias compuestas C5., diferenciando entre sucesos independientes y dependientes, y enunciando la condición de independencia. Se muestran ejemplos gráficos muy sencillos que son fácil de comprender por parte de los alumnos.

Figura 7. - *Ejemplo suceso dependiente.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Tras aprender la diferencia entre sucesos dependientes e independientes, se explica la probabilidad condicionada (C6.), así como su expresión formal. Se resuelven ejercicios mediante diagramas de árbol.

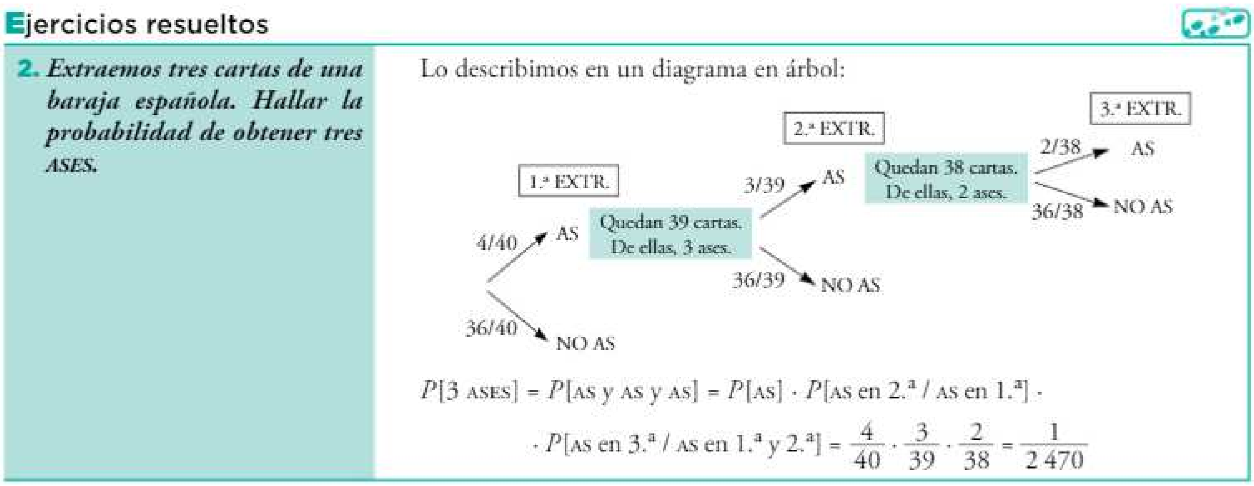


Figura 8. - *Ejercicio resuelto, probabilidad condicionada.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

En la teoría se muestran las tablas de contingencia y se diferencia entre proporciones y probabilidades (lo cual no se muestra en el currículo) pero resulta interesante ya que los alumnos pueden tener dificultades a la hora de diferenciar ambos conceptos. Para finalizar se realiza una explicación más detallada acerca de la probabilidad condicionada y como interpretarla en una tabla de contingencia.

	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.º	12	36	72	120
2.º	15	40	45	100
3.º	21	44	35	100
4.º	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Probabilidades condicionadas

Una de las probabilidades obtenidas arriba, P[CULTURAL / 1.º], es una **probabilidad condicionada.** El colectivo de referencia no es el total de estudiantes del centro, sino solo los de 1.º.

Análogamente, P[3.º / CULTURAL] significa que el colectivo de referencia es el conjunto de estudiantes que participan en alguna actividad cultural y nos preguntamos por la probabilidad de que, al elegir uno de ellos al azar, sea de 3.º.

Figura 9. - *Tablas de contingencia y probabilidad condicionada.*
Nota: Imagen extraída de **(Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)**

En cuanto a la ausencia del currículo no aparece un punto es el que se muestre implícitamente las diferencias entre las experiencias simples y compuestas, aunque este contenido aparece explicito para saber diferenciar entre sucesos dependientes e independientes.

5.1.3. 4º de la ESO Matemáticas Académicas

El libro de 4º de la E.S.O. de académicas la principal diferencia con el de académicas es que se dedica un tema entero a la combinatoria C7. Se realiza una introducción del origen de la combinatoria y cómo surge. Posteriormente se analizan ciertas estrategias basadas en el producto como son la estrategia del casillero y la utilización del diagrama de árbol para confeccionar conjuntos ordenados.

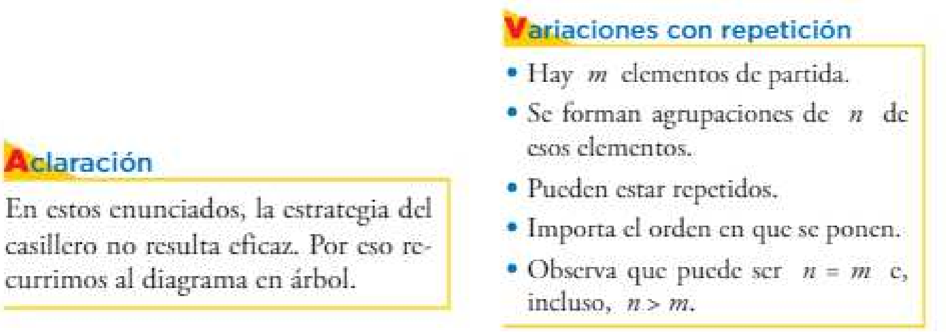
1. *Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias puede elegir?*

Situadas así las prendas, *pantalones* en las filas y *camisetas* en las columnas, ¿no es claro que cada *indumentaria* ocupa una casilla y que, por tanto, hay $4 \times 6 = 24$ indumentarias posibles?

Figura 10. - *Estrategia del casillero.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

En el siguiente punto se estudian las aquellas formas de conteo en las que influyen el orden como son las variaciones con repetición, variaciones ordinarias (sin repetición) y las permutaciones.

En los laterales aparecen la teoría resumida y organizada mediante puntos de forma que el alumno sea capaz de identificar de un vistazo las principales características de cada técnica de conteo, siguiendo el formato de cursos analizados anteriormente. De igual forma se muestran ciertas aclaraciones.



Aclaración

En estos enunciados, la estrategia del casillero no resulta eficaz. Por eso recurrimos al diagrama en árbol.

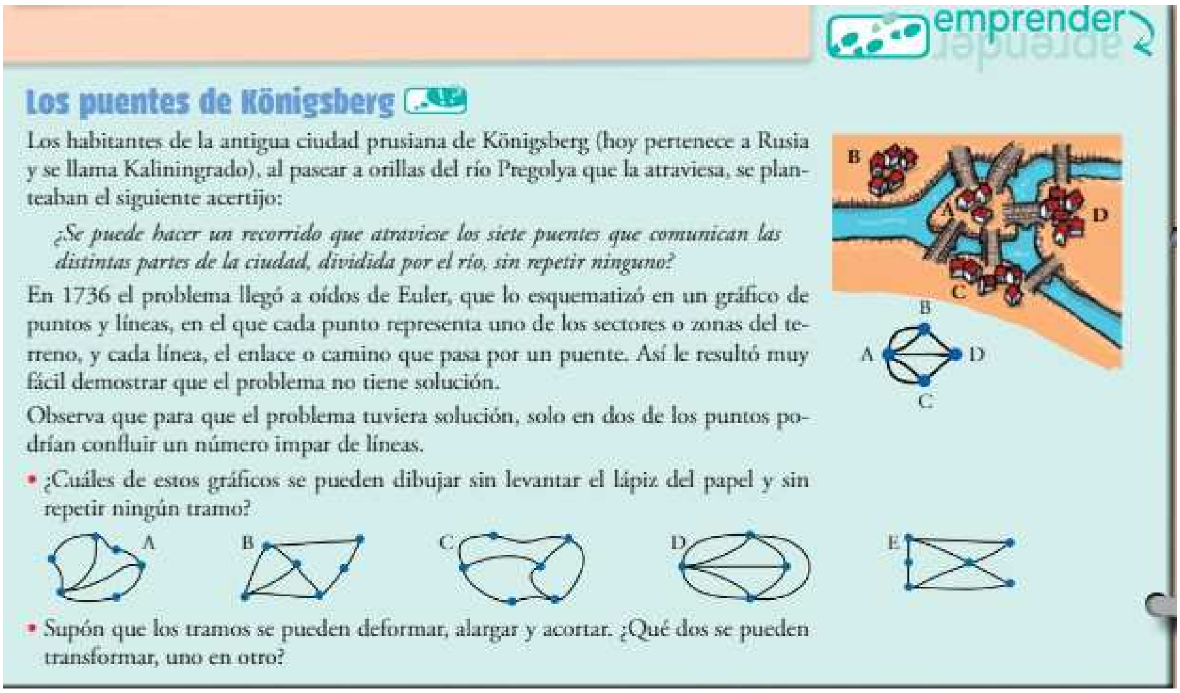
Variaciones con repetición

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de esos elementos.
- Pueden estar repetidos.
- Importa el orden en que se ponen.
- Observa que puede ser $n = m$ e, incluso, $n > m$.

Figura 11. - *Aclaraciones.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Para concluir el temario de combinatoria se estudian las combinaciones (Cuando no influye el orden). Dentro de este punto se realiza un inciso en el repaso de los números combinatorio.

De igual forma que en los libros analizados de cursos anteriores, al final del temario aparece en el taller de matemáticas algunos problemas no tan estándar en los que los alumnos han de reflexionar y pensar, no solamente aplicar las fórmulas y métodos de resolución aprendidos.



emprender aprender

Los puentes de Königsberg

Los habitantes de la antigua ciudad prusiana de Königsberg (hoy pertenece a Rusia y se llama Kaliningrado), al pasear a orillas del río Pregolya que la atraviesa, se planteaban el siguiente acertijo:

¿Se puede hacer un recorrido que atraviese los siete puentes que comunican las distintas partes de la ciudad, dividida por el río, sin repetir ninguno?

En 1736 el problema llegó a oídos de Euler, que lo esquematizó en un gráfico de puntos y líneas, en el que cada punto representa uno de los sectores o zonas del terreno, y cada línea, el enlace o camino que pasa por un puente. Así le resultó muy fácil demostrar que el problema no tiene solución.

Observa que para que el problema tuviera solución, solo en dos de los puntos podrían confluir un número impar de líneas.

- ¿Cuáles de estos gráficos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún tramo?

A B C D E

- Supón que los tramos se pueden deformar, alargar y acortar. ¿Qué dos se pueden transformar, uno en otro?

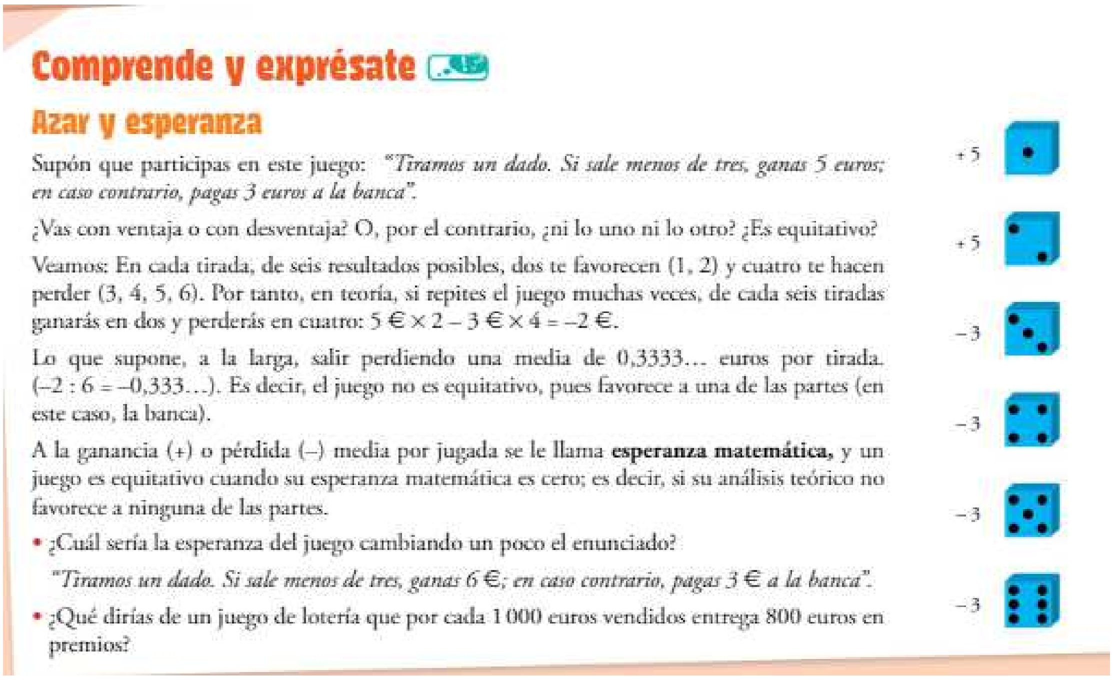
Figura 12. - *Los puestes de Konigsberg.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Este temario coincide con los contenidos que aparecen en el currículo. En este caso los contenidos siguen el mismo orden de aparición que en currículo, aunque se trate del descriptor C7. (Ya que en los primeros cursos la combinatoria no aparece en los contenidos y los descriptores se definieron en orden de aparición de los contenidos). Estas técnicas de conteo nos pueden resultar útil a la hora de realizar el cálculo de probabilidades.

Tras realizar el estudio de la combinatoria se pasa al tema de cálculo de probabilidades. En esta unidad didáctica se comienza nuevamente por una introducción seguido de la explicación de los sucesos aleatorios, las operaciones con los mismos y sus propiedades (C1 y C3). Aunque estos contenidos no aparecen de forma implícita en el currículo es necesario el realizar un repaso para posteriormente poder realizar el cálculo de probabilidades (C4).

A diferencia que en el libro de aplicadas se explica detalladamente la diferencia entre experiencias simples y compuestas (C5). De igual forma se desglosan las diferencias entre las experiencias dependientes e independientes (C6), para posteriormente explicar la probabilidad condicionada y la utilización de las tablas de contingencia.

Para concluir la unidad nuevamente nos encontramos con unas actividades muy interesantes en el taller de matemáticas. Se quiere destacar una de ellas, en la que se justifica el contenido de que se ha de utilizar un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.


Comprende y exprésate

Azar y esperanza

Supón que participas en este juego: *"Tiramos un dado. Si sale menos de tres, ganas 5 euros; en caso contrario, pagas 3 euros a la banca".*

¿Vas con ventaja o con desventaja? O, por el contrario, ¿ni lo uno ni lo otro? ¿Es equitativo?

Veamos: En cada tirada, de seis resultados posibles, dos te favorecen (1, 2) y cuatro te hacen perder (3, 4, 5, 6). Por tanto, en teoría, si repites el juego muchas veces, de cada seis tiradas ganarás en dos y perderás en cuatro: 5 € × 2 – 3 € × 4 = –2 €.

Lo que supone, a la larga, salir perdiendo una media de 0,3333... euros por tirada. (–2 : 6 = –0,333...). Es decir, el juego no es equitativo, pues favorece a una de las partes (en este caso, la banca).

A la ganancia (+) o pérdida (–) media por jugada se le llama **esperanza matemática,** y un juego es equitativo cuando su esperanza matemática es cero; es decir, si su análisis teórico no favorece a ninguna de las partes.

- ¿Cuál sería la esperanza del juego cambiando un poco el enunciado?
  "Tiramos un dado. Si sale menos de tres, ganas 6 €; en caso contrario, pagas 3 € a la banca".
- ¿Qué dirías de un juego de lotería que por cada 1 000 euros vendidos entrega 800 euros en premios?

Figura 13. - *Comprende y exprésate.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2016)

Se puede concluir el análisis del libro afirmando que se ajusta de forma correcta al currículo, y no se observa ninguna ausencia de contenido en el temario del libro.

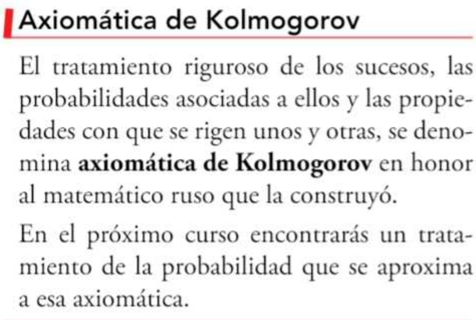
5.1.4. 1º de Bachiller Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales

En el libro de 1º de Bachillerato de Matemáticas Orientadas a las ciencias sociales no aparece ninguna unidad didáctica dedicada íntegramente en los contenidos de probabilidad, aunque en el primer punto de la unidad 9 distribuciones de la probabilidad de la variable discreta se realiza una pequeña síntesis de los contenidos de la probabilidad.

Figura 14. - *Índice libro 1º Bachiller de Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, Cañas, & Fernández, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Bachillerato. Anaya + Digital., 2015)

En el libro se muestran los contenidos de suceso aleatorio (C3.) asignación de probabilidades y la ley de los grandes números (C4.), experiencias compuestas (C5.) y la diferencia entre experiencias compuestas dependientes o independientes (Probabilidad condicionada C6).

Se enuncia por primera vez la axiomática de Kolmogorov, aunque de únicamente de forma introductoria y anecdótica.


Axiomática de Kolmogorov

El tratamiento riguroso de los sucesos, las probabilidades asociadas a ellos y las propiedades con que se rigen unos y otras, se denomina **axiomática de Kolmogorov** en honor al matemático ruso que la construyó.

En el próximo curso encontrarás un tratamiento de la probabilidad que se aproxima a esa axiomática.

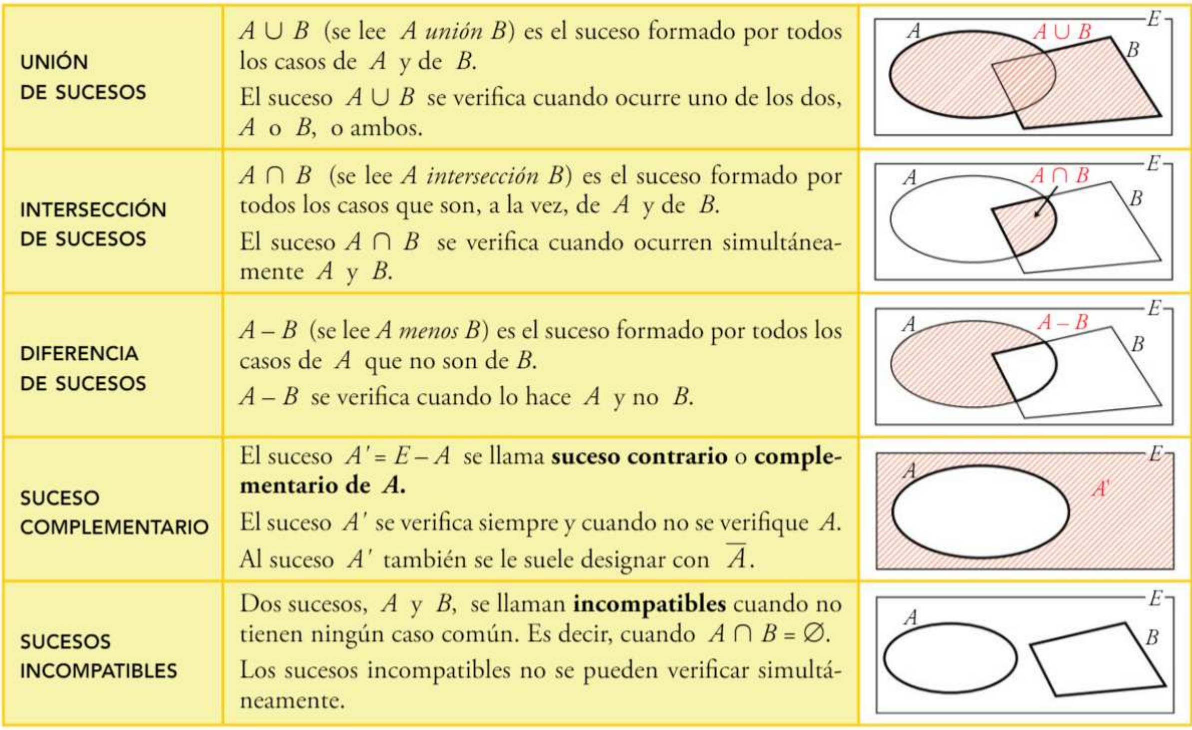
Figura 15. - *Axiomática de Kolmogorov.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, Cañas, & Fernández, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Bachillerato. Anaya + Digital., 2015)

Aunque no se le dé un gran peso dentro de la unidad didáctica en unas escasas 5 hojas, se observan todos los contenidos del currículo, sin llegar a profundizar en ellos, a excepción de la aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades (C7.) Principalmente se trabaja de forma superflua el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

5.1.5. 2º de Bachiller

Como ya es habitual la unidad didáctica comienza con una introducción al azar y la probabilidad. En el primer punto se repasan el concepto de experiencia aleatoria (C1.), la cual, como ya se ha observado en cursos anteriores, no viene de forma explícita en el currículo, pero es necesario el realizar un repaso de este concepto.

Posteriormente se expone el concepto de espacio muestral y suceso (C3), para pasar a explicar las operaciones y relaciones con sucesos. La mayor diferencia de este punto con los cursos de secundaria es que estas relaciones se representan gráficamente mediante diagramas de Venn.



UNIÓN DE SUCESOS	$A \cup B$ (se lee *A unión B*) es el suceso formado por todos los casos de A y de B. El suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.	
INTERSECCIÓN DE SUCESOS	$A \cap B$ (se lee *A intersección B*) es el suceso formado por todos los casos que son, a la vez, de A y de B. El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.	
DIFERENCIA DE SUCESOS	$A - B$ (se lee *A menos B*) es el suceso formado por todos los casos de A que no son de B. $A - B$ se verifica cuando lo hace A y no B.	
SUCESO COMPLEMENTARIO	El suceso $A' = E - A$ se llama **suceso contrario** o **complementario de** A. El suceso A' se verifica siempre y cuando no se verifique A. Al suceso A' también se le suele designar con $\overline{A}$.	
SUCESOS INCOMPATIBLES	Dos sucesos, A y B, se llaman **incompatibles** cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \varnothing$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.	

Figura 16. - *Operaciones y relaciones con sucesos.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

De igual forma se muestran algunas propiedades importantes como pueden ser las Leyes de Morgan

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$
- $\left.\begin{array}{l}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{array}\right\}$ Estas dos propiedades se llaman **leyes de Morgan** y se utilizan mucho.

Figura 17. - *Leyes de Morgan.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Aunque el formato de los libros de Bachillerato es ligeramente diferente a los de Secundaria en los laterales de las hojas se muestran nuevamente una serie de aclaraciones.

Cuándo "ocurre" un suceso

Se dice que un suceso **se verifica,** o que **ocurre,** cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los casos de dicho suceso.

Por ejemplo, si al tirar un dado sale un 5, han ocurrido, entre otros, los sucesos {5}, {3, 5, 6}, {1, 5}, *E*.

Figura 18. - *Cuando ocurre un suceso.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Siguen la misma estructura en la que se enuncia la teoría, seguido o junto a algún ejemplo o ejercicio resuelto para acabar el punto con la propuesta de ciertas actividades.

En el siguiente punto se analiza la frecuencia y la probabilidad, distinguiendo entre frecuencia relativa y absoluta y definiendo la ley de los grandes números. (Lo cual no se impartía en cursos anteriores)

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso S o, simplemente, frecuencia de S, al *número de veces que ocurre* S. Se designa por $f(S)$.

Se llama **frecuencia relativa** de S a la *proporción de veces que ocurre* S.

$$fr(S) = \frac{f(S)}{N}$$

Ley de los grandes números

Al realizar reiteradamente una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un cierto suceso, $fr(S)$, va tomando distintos valores. Estos valores al principio sufren grandes oscilaciones pero, poco a poco, se van estabilizando (oscilan cada vez menos). Cuando N crece mucho, se aproximan a un cierto valor que es la probabilidad de S, $P[S]$.

$$\lim_{N \to \infty} fr(S) = P[S] \qquad \text{LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS}$$

Por ejemplo, al lanzar un dado se obtienen los valores de $fr(3)$ para $N = 20, 40, 60, 80, 100, 120, \ldots$

Los valores de $fr(3)$ se van estabilizando en torno a $1/6 = 0,166$. (Observa la evolución en la gráfica del margen).

En la web

Hoja de cálculo en la que puedes comprobar experimentalmente la *ley de los grandes números.*

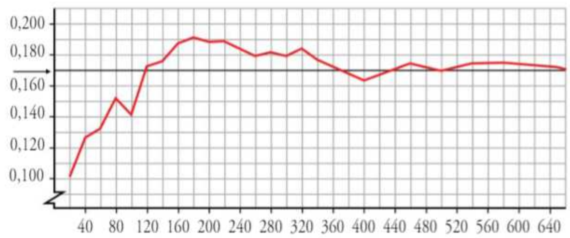


Figura 19. - *Frecuencia y Ley de los grandes números.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

De igual forma otra de las grandes diferencias es el estudio de la axiomática de Kolmogorov (aunque en el libro no la llaman propiamente así) y los teoremas que se deducen a partir de ella.

AXIOMAS

La probabilidad de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

Ax.1 Cualquiera que sea el suceso S, $P[S] \geq 0$.

Ax.2 Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Ax.3 La probabilidad total es 1: $P[E] = 1$

En esencia, estas tres propiedades indican que la cantidad total de probabilidad es igual a 1 y se reparte aditivamente entre los distintos sucesos. Por tanto, la probabilidad de cada suceso es un número comprendido entre 0 y 1: $0 \leq P[S] \leq 1$

TEOREMAS

T.1 $P[A'] = 1 - P[A]$

T.2 $P[\varnothing] = 0$

T.3 Si $A \subset B$, entonces $P[B] = P[A] + P[B - A]$

T.4 Si $A \subset B$, entonces $P[A] \leq P[B]$

T.5 Si $A_1, A_2, \dots, A_k$, son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \dots + P[A_k]$$

T.6 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

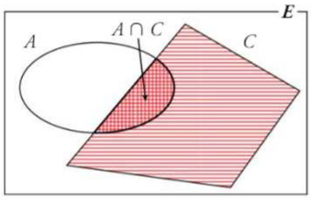
T.7 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, entonces:

$$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \dots + P[x_k]$$

Figura 20. - *Axiomas y Teoremas.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Tras impartir esta teoría se le dedica un punto a la asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace. Todos estos contenidos corresponden al descriptor C4.

Se pasa a estudiar la probabilidad condicionada y la independencia de sucesos. (C6.) organizando los datos en tablas de contingencia. Nuevamente el desarrollo teórico se apoya en la representación gráfica de los diagramas de Venn.



Dados dos sucesos, A y C, se llama **probabilidad de A condicionada a C** y se escribe $P[A/C]$ a:

$P[A/C] = \dfrac{P[A \cap C]}{P[C]}$ Mide la proporción de veces que ocurre A de entre las que ocurre C.

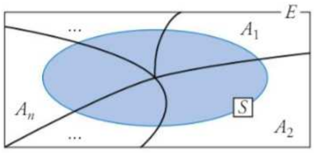
De la expresión anterior se deduce que $P[A \cap C] = P[C] \cdot P[A/C]$.

Análogamente, $P[C/A] = \dfrac{P[C \cap A]}{P[A]} \Rightarrow P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C/A]$.

Figura 21. - *Probabilidad condicionada.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Posteriormente se aclara el concepto de probabilidad compuesta (C5) y se extiende la explicación de experiencias dependientes e independientes: En el currículo este contenido aparece antes de la probabilidad condicionada, lo cual a mi juicio sería más adecuado.

Para concluir la unidad didáctica se explican dos nuevos contenidos. La probabilidad Total y el Teorema de Bayes (C8).



Tenemos n sucesos, $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Son incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

Entonces, para cualquier suceso S se cumple que:

$$P[S] = P[A_1] \cdot P[S/A_1] + P[A_2] \cdot P[S/A_2] + \dots + P[A_n] \cdot P[S/A_n]$$

A la probabilidad $P[S]$ descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total.**

Demostración

Descomponemos S en sucesos incompatibles:

$$S = (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) \cup \dots \cup (A_n \cap S)$$

Aplicamos la propiedad **T.5** de las probabilidades:

$$P[S] = P[A_1 \cap S] + P[A_2 \cap S] + \dots + P[A_n \cap S]$$

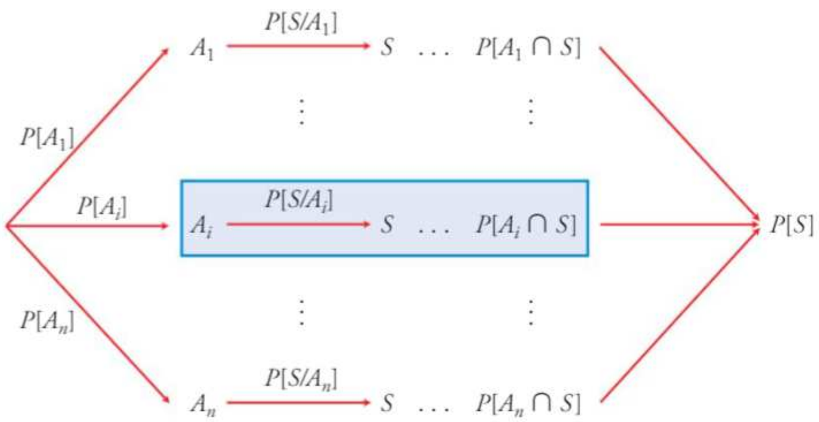
Teniendo en cuenta que $P[A_k \cap S] = P[A_k] \cdot P[S/A_k]$, se obtiene la expresión buscada.

Figura 22. - *Teorema de la Probabilidad Total.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Si expresamos $P[S]$ como probabilidad total, se obtiene la llamada **fórmula de Bayes:**

$$P[A_i/S] = \frac{P[A_i] \cdot P[S/A_i]}{P[A_1] \cdot P[S/A_1] + \dots + P[A_n] \cdot P[S/A_n]}$$

En la práctica, más que la fórmula, resulta muy útil seguir el proceso en un diagrama en árbol:



Si sabemos que ocurrió S, sobre el gráfico se obtiene que:

$$P[A_i/S] = \frac{P[A_i \cap S]}{P[S]}$$

Figura 23. - *Teorema de Bayes.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, González, & Cañas, Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital., 2016)

Además de los nuevos contenidos impartidos, el libro de Bachillerato se diferencia de los de Secundaria en la rigurosidad de la teoría y en la demostración de ésta (en cursos anteriores parte de la teoría se enunciaba pero no llegaba a demostrarse)

5.1.6. 2º de Bachiller Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales

En cuanto al libro de 2º de Bachiller Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales es prácticamente idéntico al de "ciencias puras". Aunque el contenido del currículo es muy parecido, la gran diferencia apreciable es la de la aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades, la cual no aparece en el temario del libro.

Aunque los contenidos del currículo son prácticamente los mismos, en CC.SS. se ha de profundizar más en la Teoría de la Probabilidad, y se ha de tener un mayor énfasis en el estudio de las probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

Es por ello, por lo que de alguna forma la editorial debería de adaptar y orientar los recueros a las Ciencias Sociales.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

En este punto del currículo se analiza el grado en el que los libros de texto se ajustan al currículo, que como ya hemos mencionado anteriormente, se adecuan correctamente (en términos generales, a excepción del libro de 1º de Bachiller CC.SS.) a los contenidos del currículo. Los contenidos de la unidad didáctica aparecen en el mismo orden que en currículo ya que de esta forma se favorece el aprendizaje de los contenidos.

Para concluir este apartado, se valora positivamente el gran trabajo por parte de la editorial Anaya en todos y cada uno de los libros analizados. Se destaca tanto la estructura gráfica que facilita la adquisición de contenidos, resaltando lo que es realmente importante, llamando la atención de los alumnos… como la gran cantidad de recursos complementarios al libro de texto, tanto para los alumnos como para los docentes. Se cuenta con números ejercicios interactivos y animaciones a los cuales se hace referencia a lo largo de la unidad didáctica. De igual forma todos los libros cuentan con su solucionario que puede servir de ayuda para el docente.

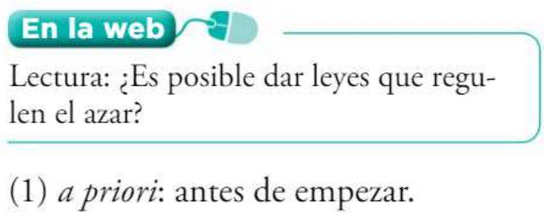


Figura 24. - *En la web.*
Nota: Imagen extraída de (Jiménez, Albero, González, & Cañas, Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital., 2015)

Los libros se encuentran en formato digital, que lo podemos enmarcar dentro de la necesidad de la utilización de las TIC's (nuevas tecnologías de la información y la comunicación) tan importantes hoy en día, como nos ha mostrado forzosamente la pandemia. Se le pueden proporcionar a los alumnos para que se lo descarguen en su ordenador personal o Cromebook. No todos los libros cuentan con los mismos recursos.

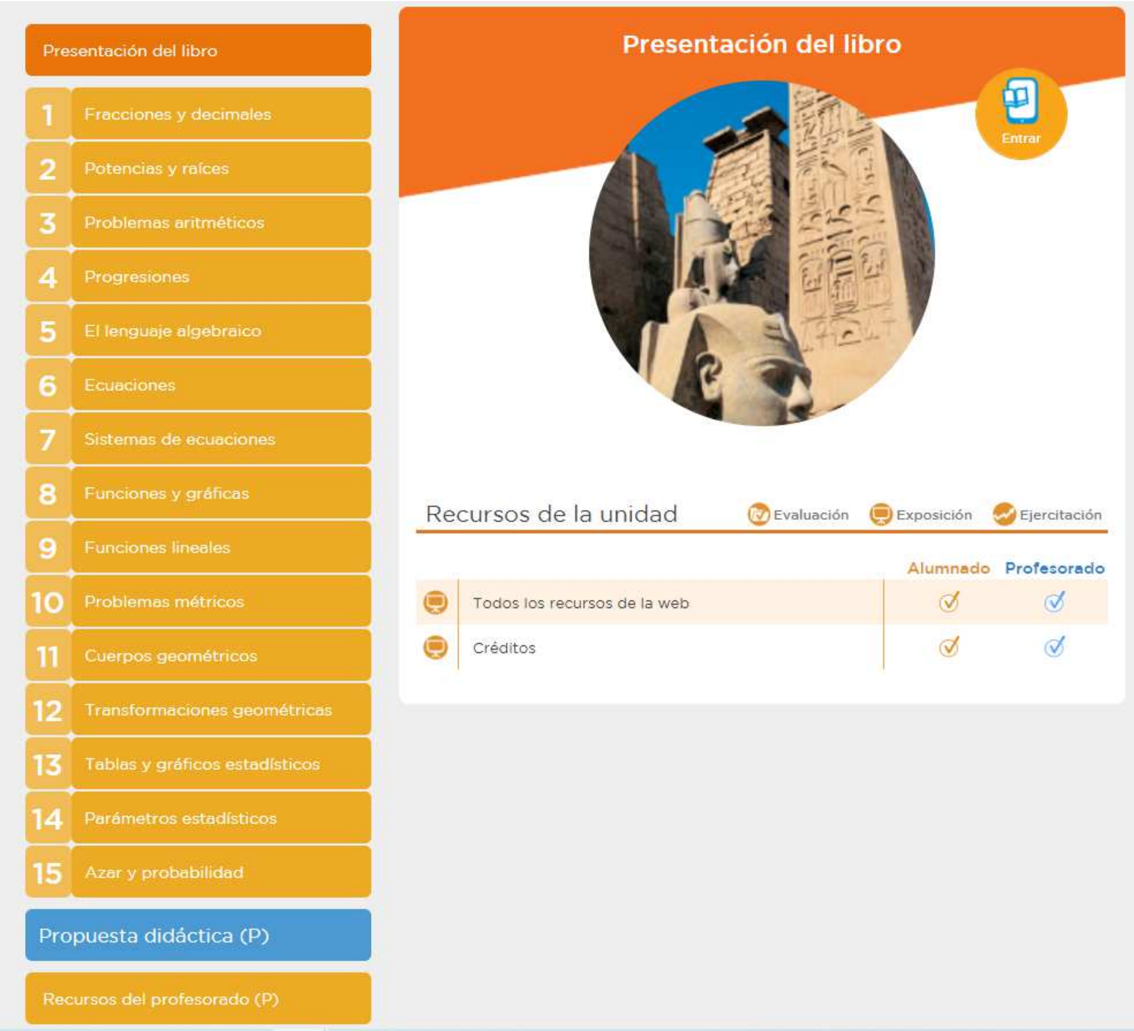


Figura 25. - *Libro digital.*

Se incluyen unas propuestas didácticas que pueden ser de ayuda al docente para la realización de la planificación de cómo ha de tratarse y desarrollarse una determinada unidad didáctica, siendo algunos de los puntos tratados en este recurso:

- Conocimientos mínimos.
- Anticipación de tareas.
- Complementos importantes.
- Adaptación curricular.

También aparecen recursos del profesorado como:

- Pruebas de evaluación
- Tareas para entrenar las pruebas basadas en competencias
- Inclusión y atención a la diversidad
- Material para el desarrollo de las competencias
- Adaptación curricular
- Portfolios
- Solucionario

Para concluir me gustaría destacar la utilización de los recursos de las hojas de cálculo. Los recursos didácticos interactivos pueden llegar a ser muy útiles, y desde mi punto de vista el realizarlos mediante una hoja de cálculo en Excel es infinitamente más interesante que un recurso web. Los alumnos comienzan a familiarizarse con ellas (se utilizan en una infinidad de trabajos) y puede llegar a serles muy ventajoso en su futuro profesional.

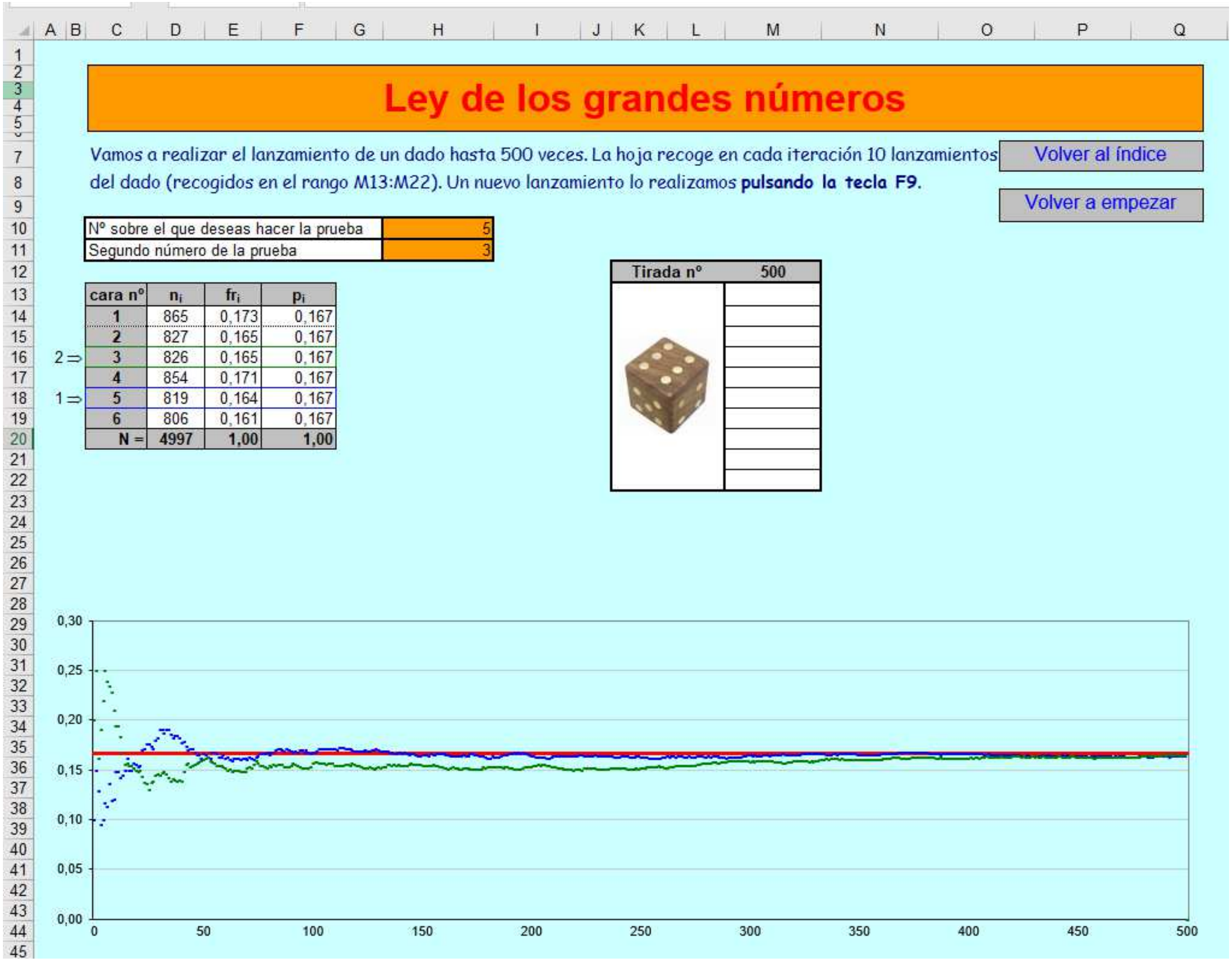


Figura 26. - *Hoja de cálculo Ley de los grandes números.*

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las matemáticas en secundaria

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio sobre la lógica y la probabilidad en 2º de Bachillerato de Matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales de la modalidad nocturna.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el contenido de probabilidad en el libro de referencia utilizado. En el segundo, se estudian las posibles dificultades u errores previsibles durante el proceso de aprendizaje de la unidad didáctica, así como sus posibles orígenes. En el tercer capítulo, se muestra el proceso de estudio seguido, detallando en la distribución del tiempo de las clases, así como las actividades adicionales y el trabajo autónomo por parte de los alumnos. Para concluir, en el último punto se analiza el proceso de experimentación seguido mediante un cuestionario y el estudio y discusión de los resultados.

Capítulo 6
La probabilidad en el libro de texto de referencia

El este apartado se va a realizar un análisis exhaustivo y detallado del libro de referencia utilizado en para realizar el presente estudio Ciencias Sociales II, de Segundo de Bachillerato para la modalidad de educación a distancia. Aunque el estudio se ha realizado en los grupos de educación en modalidad nocturna se utiliza este libro diseñado para la educación a distancia. Esto es debido a que la tarde se imparten tanto la modalidad a distancia como nocturna, por lo que los profesores encargados de la docencia, junto al departamento de matemáticas del instituto se decidió utilizar el mismo temario de referencia para ambas modalidades. Estas dos modalidades de estudio no son las usuales de un instituto y cuentan con ciertas peculiaridades, tanto en cuanto a la tipología y necesidades del alumnado (alumnos más mayores, que están trabajando, con cargas familiares…), como en el enfoque de los contenidos con muchos ejemplos de la vida cotidiana, más prácticos….

Esta no es la única referencia que el docente utiliza para impartir las clases ya que también se apoya en otros recursos.

Para realizar el siguiente análisis nos basamos en varios artículos de revistas científicas que son referenciadas a lo largo del capítulo. Estos autores enfatizan en la importancia de comprobar la idoneidad del libro de texto de referencia, que esta es una de las herramientas utilizadas en el proceso de estudio más importantes.

La siguiente figura resume las principales características de dicha noción:

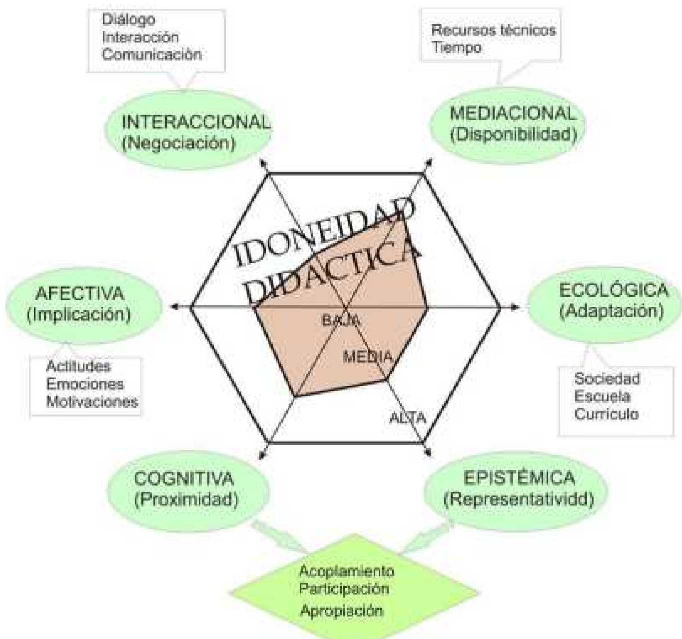


Figura 27. - *Idoneidad Didáctica.*
Nota: Imagen extraída de (Godino J. D., 2011)

La idoneidad didáctica es una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva hacia una didáctica orientada a una intervención efectiva en el aula. Es un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes: (Godino J. D., 2011)

- **Idoneidad epistémica**, se define como el grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendido, respecto de un significado de referencia.
- **Idoneidad cognitiva**, indica el grado en que los significados pretendidos pueden ser potencialmente desarrollados por los alumnos. Proximidad de los significados personales logrados frente a los significados pretendidos o implementados.
- **Idoneidad interaccional.** Las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- **Idoneidad mediacional,** adecuación de los recursos materiales y temporales imprescindibles para el desarrollo del proceso de aprendizaje.
- **Idoneidad afectiva,** grado de implicación o motivación (interés, motivación, disposición, …) del alumnado en el proceso de aprendizaje. Está relacionada con factores que dependen de la institución y aquellos factores que dependen del alumno propio alumno y de su trayectoria previa.
- **Idoneidad ecológica,** el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro y a los condicionamientos del entorno.

El análisis ontosemiótico de la lección se ha de abordar en una primera instancia con una perspectiva global que identifique sus objetivos y estructuras principales de las configuraciones didácticas. Posteriormente se pasará a realizar un análisis más detallado de cada una de ellas. (Font, Wilhelmi, & Godino, 2006)

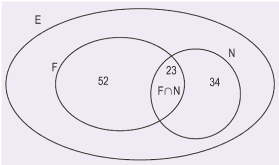
6.1. Objetos matemáticos involucrados

La configuración epistémica juega un papel central en la situación problema y está orientada a la definición de nuevos objetos matemáticos (nuevas definiciones y procedimientos de construcción) (Font, Wilhelmi, & Godino, 2006)

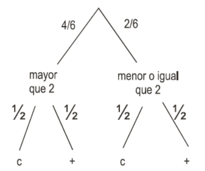
El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se constituye, comunica o aprende matemáticas. (Godino & D'Amore, 2007).

Los diferentes tipos de objetos matemáticos son los que se muestran en las siguientes tablas:

Lenguaje
Verbal Espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso seguro, suceso imposible intersección de sucesos, unión de sucesos, sucesos incompatibles, sucesos contrarios o complementarios, diferencia de sucesos, Leyes de Morgan, diagramas de Venn, probabilidad de un suceso, frecuencia relativa, Ley de los Grandes Números, experimentos aleatorios, sucesos equiprobables, Regla de Laplace, diagramas en árbol, probabilidad condicionada, sucesos independientes, Teorema de la probabilidad Total, Teorema de Bayes.
Gráfico Diagramas de Venn, tablas de contingencia, diagramas de árbol, pictogramas.



	Aprobados	Suspensos	Total
Chicas	7	10	17
Chicos	8	5	13
Total	15	15	30



Simbólico

E = {1,2,3,4,5,6 }, A= {sacar número par} = {2,4,6 }, , Φ, ∪, ∩, $\overline{A = B}$, <, >, ≠, ≤, ≥ , P(A), P(A/B), Σ.

Tabla 14. - *Lenguaje.*

Situaciones

Ejercicios descontextualizados

La mayor parte de los ejercicios descontextualizados que aparecen tratan de afianzar las propiedades de la probabilidad de un suceso, las leyes de Morgan y el cálculo de probabilidades, probabilidades condicionadas.

De los sucesos de un experimento aleatorio se sabe que $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}$ y $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Calcular **a)** $P(\overline{A})$; **b)** $P(\overline{B})$; **c)** $P(A\cap B)$ y **d)** $P(A\cap\overline{B})$.

Sobre lo sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades : $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A\cap B) = 0{,}45$

Calcular:

a) $P(A/B)$;

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Ejercicios contextualizados

El grueso de los ejercicios que aparecen en los apuntes están contextualizados en mayor o menor medida. Los contenidos mencionados en el punto anterior se trabajan también de forma contextualizada.

Comprobar las leyes de De Morgan en el juego de tirar un dado, sabiendo que $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{5,6\}$.

Se lanza un dado de 6 caras mal construido y experimentalmente se determina que $P(1) = 0{,}1$; $P(2) = 0{,}2$; $P(3) = 0{,}3$
$P(4) = 0{,}1$ y $P(5) = 0{,}15$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de salir un 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar con este dado?

Problemas contextualizados

De igual forma hay problemas contextualizados del cálculo de probabilidades, probabilidades condicionadas, utilización del teorema de la probabilidad total y teorema de bayes.

En un Instituto, la probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6 y de que apruebe economía es 0,4, mientras que la probabilidad de que apruebe las dos es 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas o economía o, lo que es lo mismo, de que apruebe al menos una de estas dos asignaturas?

b) ¿Y de que no apruebe ninguna?

c) ¿Y de que no apruebe matemáticas ni economía? (Es otra forma de plantear el apartado anterior).

Una cadena de montaje de una fábrica está dotada de un sistema de alarma que se activa cuando se produce un incidente. Se sabe por experiencia que la probabilidad diaria de que la alarma se active sin que haya incidente es 1/50; la probabilidad diaria de que haya un incidente y la alarma no se active es 1/500; y la probabilidad de que en un día surja un incidente es 1/100. **a)** Calcular la probabilidad diaria de que ocurra un incidente y la alarma se active. **b)** Calcular la probabilidad diaria de que la alarma se active. **c)** La alarma se acaba de activar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente un incidente?

Seguimos en el sector del automóvil. Una fábrica produce tres modelos de coche: *A*, *B* y *C*. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son de tipo *A* y el 30% de tipo *B*. El 30% de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30% de los coches del modelo *A* son de tipo diesel y el 20% de los coches del modelo *B* tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

Cuestiones descontextualizadas

Aunque no son numerosas, también aparecen una serie de cuestiones descontextualizadas en las que hay que realizar la comprobación de algunas propiedades, leyes o teoremas.

Dado un espacio muestral $E = \{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ y dos subconjuntos o sucesos de este espacio muestral $A = \{r,s,t,u,v\}$ y $B = \{t,v,x\}$ comprobar las leyes de Morgan:

1ª $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2ª $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dados *A* y *B* sucesos de un experimento aleatorio, demuestra que si *A* y *B* son independientes, entonces

a) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes,

b) y también *A* y $\overline{B}$ son independientes.

Tabla 15. - ***Situaciones.***

Procedimientos
Introducción del origen del estudio de la probabilidad. Contextualización de los contenidos impartidos de forma teórica. Uso de distintas estrategias de conteo para el cálculo de probabilidades. Organización de la distinta información que nos proporciona el problema en tablas de contingencia. Construcción de diagramas de árbol para representar gráficamente los posibles resultados de un experimento que consta de varios pasos sucesivos.

Tabla 16. – *Procedimientos.*

Conceptos
Previos Experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, Leyes de Morgan, probabilidad de un suceso, sucesos equiprobables, regla de Laplace, diagramas de árbol, probabilidad condicionada, tablas de contingencia y sucesos independientes.

Emergentes
Teorema de la probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Tabla 17. – *Conceptos.*

Propiedades
Leyes de De Morgan. 1ª $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, el complementario de la unión es la intersección de complementarios; 2ª $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, el complementario de la intersección es la unión de complementarios.
Regla de Laplace. $P(A) = \frac{nº\ de casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles}$
Probabilidad de B condicionada a A. $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Sucesos independientes. Dos sucesos son independientes cuando la realización de uno de ellos no influye sobrela realización del otro y se cumple $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
Probabilidad total. Permite calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos: $P(B) = P(A_1) * P(B / A_1) + (A_2) * P(B / A_2) + \ldots + P(An) * P(B / A_n)$.
Teorema de Bayes. Permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B) = \frac{P(A_i)*P(B/A_i)}{P(B)}$

Tabla 18. – *Propiedades.*

Argumentos
Justificación de la fórmula de unión de sucesos. Comprobación de las leyes de Morgan, mediante el uso de fórmulas y diagramas de Venn y aplicación a problemas. Justificación de la probabilidad condicionada mediante el uso de fórmulas tablas de contingencia y diagramas de árbol y aplicación a problemas contextualizados. Comprobación de la condición de independencia de sucesos. Comprobación en un diagrama de árbol que la intersección de todas las probabilidades es 1. Análisis empírico, deductivo e interpretación de los resultados.

Tabla 19. - *Argumentos.*

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

En este punto del capítulo se va a realizar un análisis global de la unidad didáctica de probabilidad del libro de 2º de Bachillerato Orientado a las Ciencias Sociales redactado por el CIDEAD Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia. (Castelo, Hernandez, & Hernandez).

El libro se estructura conforme a los bloques que aparecen en el currículo a excepción del Bloque 1, procesos métodos y actitudes (transversal a los demás), siendo el tema 8 de Probabilidad el primer tema del bloque 4 de probabilidad y estadística.

El libro se compone de diez unidades didácticas contenidas en tres grandes bloques de contenido.

- **Álgebra,** matrices, sistemas de inecuaciones y programación lineales.
- **Funciones**, donde se tratan límites, continuidad, derivadas, representación e introducción al cálculo integral.
- **Probabilidad y estadística,** donde se exponen los conceptos elementales de probabilidad y se dan los fundamentos de la inferencia estadística.

En el último bloque del libro se resuelven una serie de problemas de probabilidad sin combinatoria, pero añadiendo un apéndice de combinatoria necesaria para la correcta resolución de problemas de probabilidad.

Al comienzo del tema se introduce el origen de la probabilidad, así como algunos matemáticos relevantes en este campo y los objetivos que se pretenden alcanzar a lo largo de la unidad didáctica.

1. Recordar en qué consiste un experimento aleatorio.
2. Conocer qué es un suceso y las operaciones con sucesos.
3. Aprender a aplicar la regla de Laplace.
4. Identificar sucesos independientes y calcular probabilidades condicionadas.
5. Calcular probabilidades totales y la de que un efecto tenga determinada causa.

Posteriormente se muestra un esquema de los contenidos que se van a impartir a lo largo de la unidad didáctica y como están interrelacionados con conceptos, para que los alumnos cuenten con una visión global de la misma:

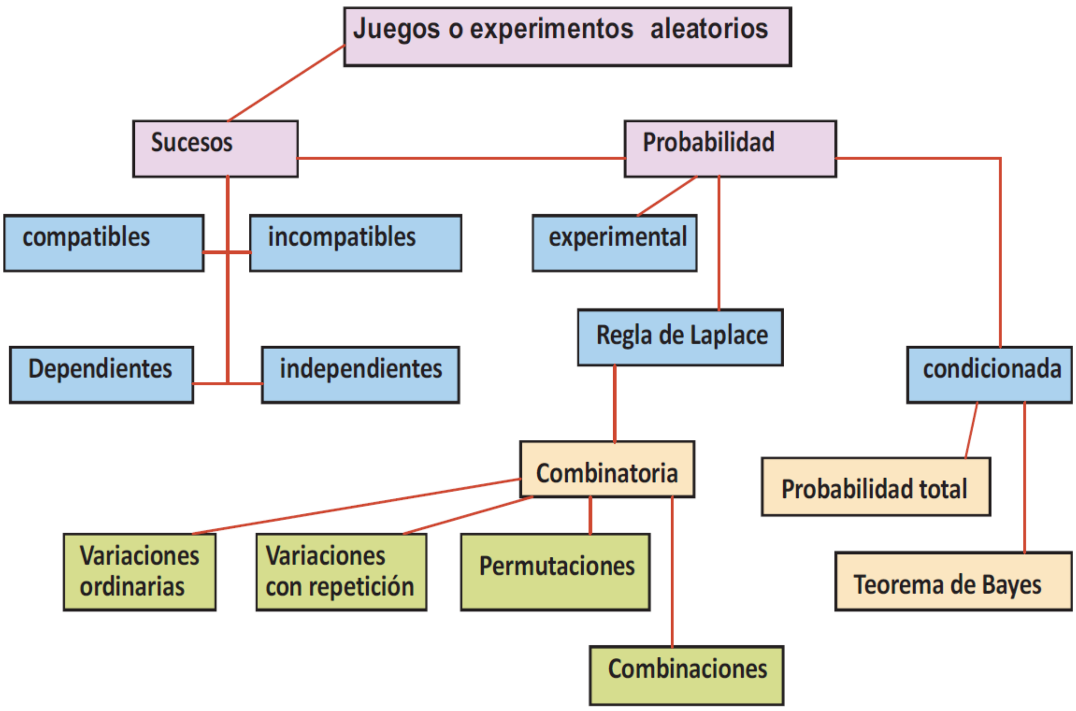


Figura 28. - *Esquema contenidos impartidos en la unidad didáctica.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Para finalizar la introducción a la unidad didáctica, se muestra el índice de contenidos que se expone a continuación:

Este libro a diferencia de los analizados en la primera parte del trabajo tiene unos formatos distintos a los libros usuales de la educación. No cuenta con las típicas aclaraciones que suelen aparecer en los laterales de las hojas ni es tan gráfico, (no hay tantos colores, pictogramas…)

La estructura común que sigue cada punto puede resumirse en que al principio aparece la teoría de los contenidos que aparecen en el mismo, posteriormente se muestran unos ejercicios o problemas resueltos y para finalizar se proponen a los alumnos una seri de actividades. En los puntos posteriores se va a analizar en profundidad como se estructura cada punto de los contenidos.

6.2.1. Espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos. Propiedades

Al principio de la unidad didáctica se repasa que un experimento aleatorio está caracterizado por la imposibilidad de prever el resultado independientemente de que se realice siempre en las mismas condiciones.

Después y con ayuda de una tabla se repasan los conceptos impartidos en cursos anteriores como: espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso seguro, suceso imposible intersección de sucesos unión de sucesos, sucesos incompatibles y sucesos contrarios o complementarios explicando el significado y aportando un ejemplo de cada uno de ellos.

Se muestra un ejemplo resuelto en el que se trabajan los contenidos previamente repasados:

Ejemplo

1. En un campamento de verano se practican dos deportes: fútbol y natación. De los 120 jóvenes inscritos, 75 se han apuntado a fútbol y 57 a natación, mientras 23 se han apuntado a ambos deportes. ¿Cuántos han ignorado el fútbol? ¿Cuántos han desechado la natación? ¿Cuántos practican el fútbol pero no la natación? ¿Cuántos practican la natación pero no el fútbol? ¿Cuántos jóvenes se han inscrito en fútbol o natación?¿Cuántos no se han apuntado a fútbol ni a natación?

Solución:

Se suelen representar estos datos por diagramas, llamados diagramas de Venn. El conjunto *E* representa el total de jóvenes. Dentro hemos dibujado dos óvalos, *F* y *N*, que corresponden a los jóvenes que practican fútbol y natación respectivamente.

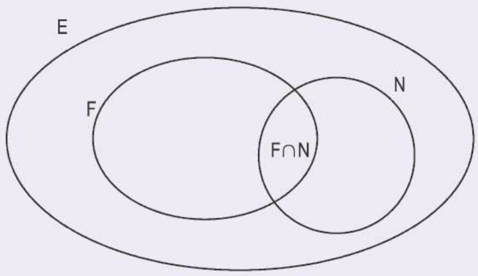


Figura 29. - *Ejercicio resuelto mediante diagramas de Venn.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Se continúa definiendo la diferencia de sucesos, que (aunque no es una operación nueva y se exponen las leyes de Morgan). Nuevamente tras la teoría aparece un ejercicio resuelto, y para acabar este primer punto se proponen una serie de actividades en las que se trabajan todos estos conceptos.

Actividades

1. En un sondeo hecho a 200 personas se les preguntó por sus hábitos. A la pregunta de si fumaban regularmente, 92 han respondido que sí, 68 han admitido que consumen regularmente bebidas alcohólicas y 45 que fuman y beben. ¿Cuántas personas son fumadoras, pero no consumen alcohol? ¿Cuántas consumen regularmente alcohol y no son fumadoras? ¿Cuántas no son fumadoras ni consumen alcohol? ¿Cuántas son fumadoras o consumen alcohol con regularidad?

2. Dado un espacio muestral $E = \{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ y dos subconjuntos o sucesos de este espacio muestral $A = \{r,s,t,u,v\}$ y $B = \{t,v,x\}$ comprobar las leyes de Morgan:

   1ª $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

   2ª $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Figura 30. - *Actividades propuestas sobre el espacio muestral, operaciones con sucesos y propiedades.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.2.2. Definición de probabilidad de un suceso

En este punto, en primera instancia se expone que es la probabilidad de un suceso y como se representa. No se menciona explícitamente las Leyes de Kolmogorov, pero se muestra la axiomática de la probabilidad y las consecuencias derivadas de esta:

1. Para cada suceso *A*, $P(A) \geq 0$.
2. La probabilidad del suceso seguro, *E*, es igual a 1, $P(E) = 1$.
3. Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \Phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Figura 31. - *Axiomas de probabilidad.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

1. Para cada suceso A, la probabilidad del complementario, $\overline{A}$, es igual a 1 menos la probabilidad de A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. La probabilidad del suceso imposible es 0, $P(\Phi)= 0$.

3. Si A_1, A_2, A_3, … , A_n son sucesos incompatibles dos a dos, entonces
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$

4. Para cada par de sucesos A y B, se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Figura 32. - *Consecuencias derivadas de los axiomas.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Se define la frecuencia relativa de un suceso y se justifica mediante la Ley de los Grandes Números. Se atribuyen probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio por experimentación, atribuyendo como probabilidad de un suceso A el número $fr(A)$.

Por último, se define que son los sucesos equiprobables y se enuncia la regla de Laplace.

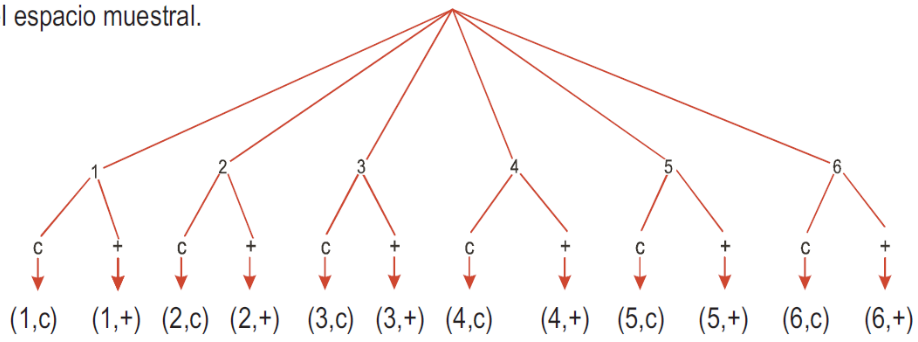
$$P(A) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Figura 33. - *Regla de Laplace.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.2.3. Diagramas en árbol y la resolución de algunos problemas sencillos de probabilidad.

Cuando un experimento aleatorio consta de varias pruebas sucesivas la numeración de los procesos elementales ya no resulta tan sencillas. Para ello se introduce el proceso de multiplicación primero, y posteriormente se aplica en los problemas de probabilidad junto a los diagramas de árbol. En este punto en la théorie se muestra un ejemplo:

Veamos, por ejemplo, un juego sencillo: se tira un dado y una moneda y queremos conocer la probabilidad del suceso A = {*sacar número mayor que 2 y cruz*}. Un diagrama en árbol nos ayuda a conocer los sucesos elementales del espacio muestral.



Por un sencillo recuento vemos que $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Figura 34. - *Ejemplo del principio de multiplicación y los diagramas de árbol.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.2.4. Probabilidad condicionada.

Se muestra que cuando dos sucesos aleatorios están relacionados y el saber que ha ocurrido uno, modifica la probabilidad del otro, hablamos de probabilidades condicionadas:

También se organiza la información proporcionada en el problema en tablas de contingencia.

En un curso de 2º CCSS hay 30 alumnos de los cuales 17 son chicas y 13 chicos. En la evaluación de matemáticas han aprobado 7 chicas y 8 chicos.

Resumimos la información anterior en un cuadro, también llamado tabla de contingencia:

	Aprobados	Suspensos	Total
Chicas	7	10	17
Chicos	8	5	13
Total	15	15	30

Figura 35. - *Probabilidad condicionada. Tablas de contingencia.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.2.5. Sucesos independientes

Unos de los mejores recursos para la resolución de problemas sencillos son sin duda los diagramas de árbol mencionados anteriormente y la identificación de sucesos independientes. Se definen dos sucesos independientes, cuando uno de ellos no suministra información sobre la realización del otro.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Figura 36. - *Fórmula probabilidad condicionada.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Se enfatiza en la importancia de esta fórmula ya que garantiza que la probabilidad de la unión es igual al producto de sucesos.

6.2.6. Probabilidad condicionada y probabilidad total.

En la primera parte de este punto se recalca que, para la resolución de problemas de probabilidad condicionada, la organización de la información mediante diagramas de árbol.

Posteriormente se expone como en ocasiones se pueden calcular la probabilidad total de un suceso a partir de las propiedades condicionadas y se enuncia que es un sistema completo, el cual tiene que cumplir dos condiciones:

1ª) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \Phi$, siempre que $i \neq j$.

2ª) La unión de $A_1, A_2, ..., A_n$ es el suceso seguro $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E$.

Figura 37. - *Condiciones de un sistema completo.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

El teorema de la probabilidad total dice:

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es un sistema completo de sucesos y B es un suceso del que únicamente conocemos las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la $P(B)$ viene dada por la fórmula:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Figura 38. - *Definición del Teorema de la Probabilidad Total.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Las demostraciones de este libro son bastante completas y rigurosas…

6.2.7. Teorema de Bayes

Si tenemos un sistema completo de sucesos, el teorema de bayes permite calcular la probabilidad de que un determinado efecto tenga una determinada causa:

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es un sistema completo de sucesos y B es un suceso cualquiera del que únicamente conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad de A_i condicionada a B viene dado por la fórmula

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_1) \cdot P(B/A_n)}$$

Figura 39. - Enunciado Teorema de Bayes.
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.2.8. Combinatoria y probabilidad y combinatoria.

Aunque este punto de la unidad didáctica no ha llegado a impartirse en profundidad, dado que raramente caen ejercicios propiamente de combinatoria en las pruebas de acceso a la universidad y se andaba justos de tiempo, ciertas nociones son necesarias para el cálculo de probabilidades, ya que, para realizar el cálculo de probabilidad mediante la regla de Laplace, en conteo de casos favorables entre casos posibles no siempre es sencillo, por lo que existen otras formas de conteo.

Lo primero que se hace es repasar el concepto de factorial. Posteriormente se enuncian que son las variaciones con repetición y las denominadas variaciones ordinarias (sin repetición), y como se definen.

$$VR_{n,p} = n^p \qquad V_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ ... \ \cdot (n-p+1)$$

Figura 40. - *Variaciones con repetición y variaciones ordinarias.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Seguido se definen las permutaciones como las posibles ordenaciones del conjunto de los n objetos que lo forman.

$$P_n = n!$$

Figura 41. - *Permutaciones ordinarias.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Para finalizar el último punto, se expone como cuando el orden en el cual los objetos son elegidos no nos interesa nos encontramos con las combinaciones.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Figura 42. - *Combinaciones.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

Para concluir la unidad didáctica se mientras una tabla a modo de recuerdo de los principales contenidos impartidos a lo larco de ella bajo el título de Recuerda:

RECUERDA

- **Leyes de De Morgan.** 1ª $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, el complementario de la unión es la intersección de complementarios;
  2ª $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, el complementario de la intersección es la unión de complementarios.
- **Regla de Laplace.** $P(A) = \dfrac{n^{o} \text{ de casos favorables}}{n^{o} \text{ de casos posibles}}$.
- **Probabilidad de B condicionada a A.** $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ o $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.
- **Sucesos independientes.** Dos sucesos son independientes cuando la realización de uno de ellos no influye sobre la realización del otro y se cumple $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Probabilidad total.** Permite calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos:
  $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$.
- **Teorema de Bayes.** Permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B)$ interpretando ésta como la probabilidad de que la causa de B sea A_i.
  $$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$
- **Variaciones con repetición** de n objetos tomados o elegidos de p en p son los grupos de p objetos en los que puede haber objetos diferentes o repetidos. Además, dos grupos serán distintos si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número viene dado por $VR_{n,p} = n^p$.
- **Variaciones ordinarias** de n objetos tomados de p en p son todos los grupos de p objetos que pueden formarse con los n disponibles. Además, dos variaciones son distintas si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número es: $V_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$.
- **Permutaciones** de n objetos y corresponden a todas las posibles ordenaciones del conjunto de esos n objetos. Se simbolizan por P_n y su número es: $P_n = n!$.
- **Combinaciones** de n elementos, tomados de p en p, son los grupos de p elementos distintos, de modo que dos combinaciones son diferentes si se diferencian en algún elemento y serán iguales si tienen los mismos elementos a pesar del orden en que aparezcan. El número de combinaciones de n elementos tomados de p en p vale: $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{V_{n,p}}{p!}$.

Figura 43. - *Recuerda.*
Nota: Imagen extraída de (Castelo, Hernandez, & Hernandez)

6.3. Otros aspectos relevantes.

Los contenidos del material didáctico Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, de Segundo de Bachillerato para la modalidad de educación a distancia, se ajustan al Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, y de la O.M. ESD 1729/20008, de 18 de junio de 2008, por los que se regula el currículo de la Ley Orgánica de Educación. Esto refleja que el libro tiene unos años ya que estas leyes de ya están obsoletas.

En el desarrollo del material didáctico para segundo de Bachiller se ha de tener siempre en cuenta las pruebas de acceso a la universidad, sin dejar de lado claro está, la responsabilidad que se tiene de aportar un material sencillo, con ejemplos cotidianos, alejado de anécdotas, pero especialmente centrado en ese objetivo especial. Un alto número de las actividades planteadas han sido extraídas de las pruebas de la selectividad de todas universidades españolas, incluyendo de igual forma a la UNED.

A la hora de redactar el libro se ha tenido un especial cuidado en que los conceptos matemáticos que aparecen sean cercanos a la realidad social actual, ya que un material didáctico de esta naturaleza debe ser capaz de aportar los instrumentos necesarios para la correcta interpretación y análisis de manifestaciones humanísticas, económicas, políticas…..

Se hace un gran uso de diversos ejemplos, ya que es de esta forma como se entiende que es la mejor guía para actuar con seguridad. Todas las actividades, extraídas de modelos de examen se encuentran claramente clasificadas en orden ascendiente de dificultad para establecer una correcta pauta de aprendizaje.

El libro ababa por completarse con una solución detallada de todas las actividades que han sido propuestas a lo largo del mismo y concluye con un glosario en el que se recogen los términos matemáticos empleado a lo largo de todas las unidades didácticas.

NOTA: Puede ser descargado en la sede electrónica del Ministerio de Educación y Formación Profesional:

https://sede.educacion.gob.es/publiventa/matematicas-aplicadas-a-las-ciencias-sociales-ii-2-bachillerato-bachillerato-a-distancia/bachillerato-matematicas-ciencias-sociales/16046

Capítulo 7
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo del trabajo se van a analizar las dificultades y errores que se pueden prever en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad didáctica. Es realmente importante realizar este tipo de análisis para poder anticiparte a futuras problemáticas y contar con los recursos necesarios para poder enfrentarse a ellas.

Aunque a priori se pueden detectar y comentar algunos de estas dificultades u errores, es la experiencia la mejor de las aliadas para poder conocerlos y obrar de acorde a las necesidades de los alumnos.

Durante el desarrollo del Prácticum II en mi caso, se ha contado con dos tutores en el centro, siendo uno de ellos un veterano en esto de la educación con una larga trayectoria a sus espaladas (a punto de jubilarse). Ha tocado muchos palos en esto de la docencia; ha impartido clases en la modalidad diurna, nocturna, a distancia, bachillerato internacional (el cual le decepcionó), ha llevado un blog de educación, ha realizado una infinidad de proyectos, siendo siempre fiel a su modo de entender la educación, que dista bastante de la educación convencional a la que todos estamos acostumbrados, en el que a los alumnos se les enseña algoritmos para la resolución de ciertos ejercicios tipo más que a razonar.

A la hora de impartir los contenidos los abordaba de manera que se centra más en que los alumnos capten la idea fundamental, entiendan lo que están haciendo y luego ya se podrá pasar a los formalismos matemáticos que los describen, cómo aplicarlos etc….

El docente ha sabido mantenerse actualizado en lo que a las nuevas tecnologías y la innovación en la investigación didáctica se refiere… Dando solución, u otro enfoque, a problemas que antiguamente eran más difíciles de plasmar, mediante recursos interactivos, recursos de GeoGebra etc

No sigue tanto la estructura de los libros, ya que domina el temario y lo aborda de la forma que la experiencia de todos estos años le ha enseñado que es la mejor para que los alumnos pueden llegar a entender, comprender e interpretar lo que realmente están haciendo, aunque esto no es una ciencia exacta ciertos patrones o dificultades aparecen sistemáticamente a lo largo de los años.

7.1. Dificultades

A la hora de hablar de las dificultades previsibles se ha se tener en cuenta que el presente análisis se va a realizar en 2º de Bachiller de Ciencias Sociales de la modalidad nocturna. Ésta cuenta con ciertas características especiales que la diferencian de la modalidad diurna.

Además de estas características propias de la modalidad, y no menos importante, es la tipología del alumnado que decide optar por ella la cual se analizará en profundidad posteriormente.

De igual forma se ha de tener en cuenta que los dos años anteriores hemos sufrido una pandemia global en la que el clima de incertidumbre era brutal y muchos de los alumnos todavía arrastran ciertas carencias de aquel periodo lectivo tan convulso. Aunque se siguieron impartiendo las asignaturas de forma online, esto entrañaba una dificultad extra, tanto por parte de los docentes a la hora de impartir las clases, como en la adquisición de competencias y contenidos por parte de los alumnos. Esto se plasma perfectamente en las pruebas de acceso a la universidad en la que los dos cursos anteriores han sido significativamente “más sencillas”. En este curso, aunque poco a poco se va retomando la normalidad en las aulas, al arranque del mismo, todavía se contaba con la incertidumbre de cómo iba a transcurrir.

Es por ello por lo que cobra una especial relevancia el repaso de contenidos impartidos en cursos anteriores, ya que prácticamente la totalidad de los alumnos proceden de diferentes centros y no podemos dar por supuesto qué contenidos les han impartido.

Para poder analizar las dificultades previsibles se va a seguir la estructura que se muestra en el índice de contenidos del libro de texto que ya han sido analizados en el capítulo anterior:

En el primer punto de la unidad didáctica, los alumnos a priori no tendrían que tener ningún tipo de dificultad a la hora de identificar fenómenos aleatorios, definir el espacio muestral, identificar y definir sucesos seguros imposibles, elementales, complementarios, independientes…De igual forma no se presuponen dificultades a la hora de trabajar con la unión e intersección de sucesos. En lo que el alumno puede tener más dificultades es en el concepto de la diferencia de sucesos $A - B$ como suceso $A \cap \bar{B}$, es decir los elementos de A que no pertenecen a B e interpretar las leyes de Morgan. .1ª $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, el complementario de la unión es la intersección de complementarios; 2ª $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, el complementario de la intersección es la unión de complementarios. Probablemente estos enunciados no aporten demasiado a los alumnos, pero si los interpretamos mediante un diagrama de Venn y el alumno realmente comprende que es lo que significan, es más fácil que se acuerde de ellos o en su defecto sea capaz de deducirlos

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Figura 44. - *Índice de contenidos.*

En el 2º punto, otra de las dificultades previsibles por parte de los alumnos es la interpretación del desarrollo teórico de la axiomática de probabilidad, (en la clase se centraban bastante más en la práctica que en desarrollos matemáticos formales). Aunque en este caso la axiomática de Kolmogorov es bastante sencilla, las demostraciones de las consecuencias de no suele resultarle sencillo a los alumnos. Por otro lado, el concepto de frecuencia relativa no debe suponer ningún problema, al igual que la asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace que ya se ha realizado en varios cursos anteriores.

En cuanto al punto 3 no se intuye ningún tipo de dificultad a la hora de aplicar el principio de multiplicación para la resolución de problemas de probabilidad sencillos mediante diagramas de árbol. Estos diagramas son muy intuitivos y los alumnos por lo usual los comprenden rápida y fácilmente. En algunas ocasiones tienen dificultades a la hora de asignar las probabilidades a cada rama, aunque esto es más un problema de interpretación del enunciado y comprensión lectora. En el punto 4 de la probabilidad condicionada tampoco se presuponen grandes dificultades. Las tablas de contingencia normalmente también las entienden ya que han sido trabajadas en numerosas ocasiones a lo largo de los años. La resolución de problemas de la realidad cotidiana ayuda a los alumnos a comprender estos conceptos de mejor forma.

En el punto 5 de sucesos independientes, tampoco tiene porque haber ningún tipo de dificultad. La definición teórica en ocasiones puede descolocar a los alumnos, o realmente no llegan a entender qué es lo que quiere decir, pero en cuanto se les pone un ejemplo de la vida cotidiana como puede ser, tirar una moneda y después un dado, los alumnos ven de forma evidente que el resultado de la moneda no influye en la del dado, por lo que se trata de sucesos independientes.

En cuanto al punto 6 y como ya hemos mencionado anteriormente el alumno suele comprender el concepto de probabilidad condicionada, el conocimiento de que ha ocurrido uno de los sucesos modifica la probabilidad de otro, por lo que el concepto del teorema de la probabilidad total no supone problemas. Las mayores dificultades de este punto están en el concepto de sistema completo de sucesos, y su definición formal. Una vez les pones un ejemplo y les haces ver que la suma de las ramas del árbol siempre es 1 (la unión de sucesos es el suceso seguro, y que los sucesos son incompatibles, no pueden ocurrir a la vez) acaban por comprenderlo. Prácticamente la totalidad de los alumnos sabe aplicar el teorema de la probabilidad total, la dificultad está a la hora de escribir formalmente el desarrollo matemático del problema. La notación utilizada no siempre es la correcta. Por ello es realmente importante recalcarles desde el principio la importancia de escribir siempre lo que estamos haciendo, antes de la resolución numérica.

La explicación formal del Teorema de Bayes (punto 7) puede ser complicada para los alumnos. Para entender el teorema los alumnos han de tener claro que la intersección de dos sucesos es conmutativa: $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = P(B) * P(A/B)$ y que en función de los datos proporcionados por el problema ha de seguirse un camino u otro.

Por último, el bloque de combinatoria es que más dificultades entraña para los alumnos. En estas técnicas de recuento no hay una fórmula infalible que la aplicamos y resolve el problema, sino que cada problema hay que analizarlo y pensar primero que técnica de recuento ha de utilizarse y cómo hemos de contar, pudiéndose complicar estos ejercicios muchísimo para los alumnos. Del punto 8 y 9 se impartieron algunas pinceladas, pero llegaron a estudiarse en profundidad.

7.2. Errores y su posible origen

Tras haber analizado las dificultades previsibles pasamos a analizar los posibles errores de cada punto, así como su origen. A lo largo de todos estos puntos podemos incluir el error a la hora de interpretar los enunciados de los problemas, problema que la educación española todavía no ha sabido solventar….

7.2.1. Espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos. Propiedades.

Errores a la hora de traducir el lenguaje matemático al lenguaje ordinario. La letra o que aparece en la unión de sucesos no es una “o exclusiva” sino que es “inclusiva”, en algunos libros para evitar este posible error se traduce como “o/y”. El posible origen de este error puede estar en que en otras aplicaciones como puede ser por ejemplo la programación el o es excluyente (un caso u otro, nunca los dos) en la mayor parte de situaciones.

Identificar la resta de sucesos como la intersección del primero de los sucesos con el complementario del segundo. En la figura que se muestra a continuación se resalta en verde la definición correcta y en rojo la errónea.

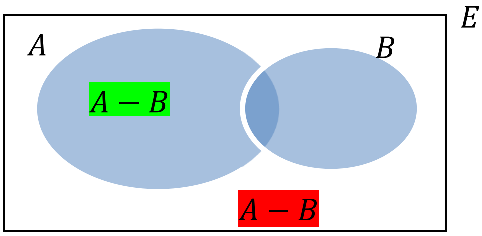


Figura 45. - *Resta de succesos.*

Errores a la hora de aplicar las Leyes de Morgan. En el mayor número de los casos estos errores son debidos a que los alumnos se aprenden de memoria las fórmulas, en vez de saber deducirlas o interpretarlas, y en un momento dado comienzan a dudar, se les olvida…. Aquí se ve fácilmente la necesidad de aprender a pensar.

Durante el proceso de aprendizaje se debatieron las Leyes de Morgan mediante un diagrama de Venn antes de enunciarlas. De hecho, los alumnos llegan a distintas conclusiones (ambas correctas) que son realmente el enunciado de las leyes de Morgan, sin saberlo. Cada alumno defiende su punto de vista, la argumenta y se mantiene firme en su decisión… lo que nos permite comprobar que han comprendido los conceptos impartidos y el funcionamiento de los diagramas de Venn.

1ª Ley de Morgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 2ª Ley de Morgan $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

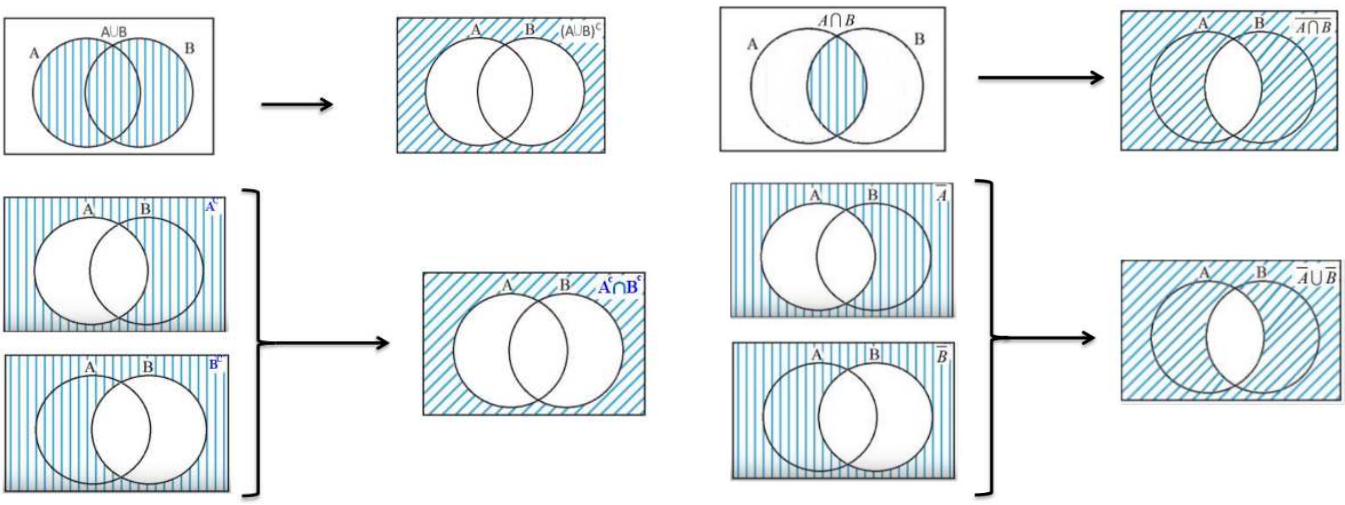


Figura 46. - *Representación de las Leyes de Morgan mediante diagramas de Venn.*

Lo que es realmente importante es la comprensión de los conceptos o en su defecto el tener los recursos necesarios para poder llegar a ellos. Las fórmulas aprendidas sin entenderlas se les van a olvidar. El docente institucionaliza el contenido impartido, explicando que las deducciones a las que se llegan se tratan de las Leyes de Morgan.

7.2.2. Definición de probabilidad de un suceso

Uno de los errores típico de los alumnos es afirmar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para cualquier suceso. Este error puede venir del enunciado del 3[er] axioma de la probabilidad que afirma que si A y B son dos sucesos incompatibles $A \cap B = \emptyset, entonces\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Si estos sucesos no son incompatibles, esto deja de ser cierto y $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si los alumnos no se aprenden las fórmulas, sino que aprenden a razonarlas mediante diagramas de Ven (un recurso muy útil) evitamos este tipo de errores.

7.2.3. Diagramas en árbol y la resolución de algunos problemas sencillos de probabilidad.

Aunque por lo general los alumnos captan muy bien la metodología de los diagramas de árbol, pueden aparecer errores a la hora de asignar probabilidades a las diferentes ramas. Uno de los métodos de control para ver que se están asignando bien las probabilidades es comprobar que la suma de las probabilidades de las ramas es 1. Al poner un 60% en un diagrama de árbol asignan la probabilidad de 1/6 en vez de 6/10. En ocasiones te sorprenden con estos fallos, que hay que recalcarlos para intentar que no vuelvan a suceder. Es un error más de comprensión que de concepto.

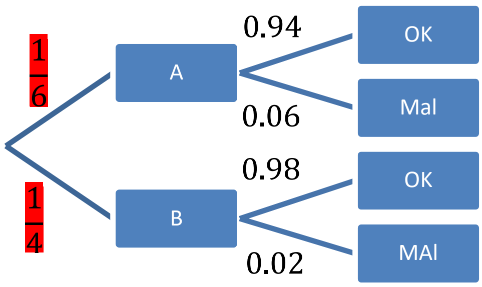


Figura 47. - *Incorrecta asignación de probabilidades.*

7.2.4. Probabilidad condicionada.

Confundir la probabilidad condicionada y compuesta. Este error es de origen léxico, ya que ambos conceptos se parecen en cuanto a escritura y fonema.

Error a la hora de diferenciar la probabilidad condicionada y la intersección de probabilidades, en ocasiones los confunden.

Intersección de sucesos:

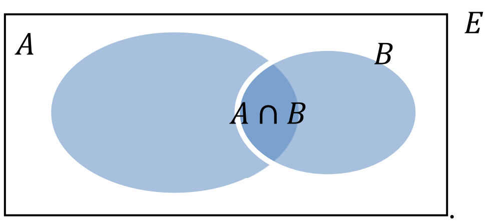


Figura 30. - *Intersección de sucesos.*

Probabilidad condicionada. Sabiendo que ha ocurrido el suceso B, se pide calcular la probabilidad de que ocurra A. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Sabemos que ha ocurrido el suceso B, por lo que para interpretar el diagrama de Venn nos encontramos en el área de color rojo. Una vez ya estamos en el área de color rojo hay que ver cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A dentro de dicha área.

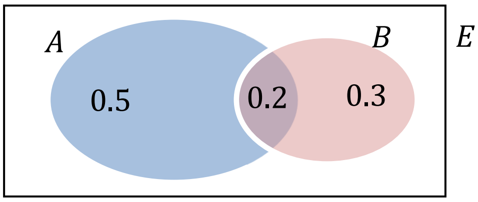


Figura 31. – *Probabilidad condicionada.*

Nuevamente si se intentan aprender la fórmula de memoria suelen acabar equivocándose. Con el diagrama de Venn lo comprenden de forma que ya no sea tan fácil que se produzcan errores.

$$P(A/B) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

Si el suceso B ya ha ocurrido tendríamos:

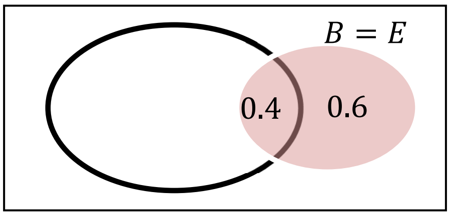


Figura 32. - Probabilidad condicionada

Por lo que el alumno ya puede observar que la $P(A/B) = 0.4$.

7.2.5. Sucesos independientes

En este punto uno de los errores más típico es confundir suceso independiente con el suceso incompatible. El origen de este error más que conceptual, es claramente de léxico o fonético. Ambas definiciones son muy próximas en cuanto a su fonética y escritura lo que puede inducir a errores.

7.2.6. Probabilidad condicionada y probabilidad total.

Uno de los principales errores es no identificar correctamente el sistema completo de sucesos del que se compone el espacio muestral. Esto es debido en gran parte a la mala comprensión e interpretación del enunciado. Otro de los errores más comunes es el de no utilizar las probabilidades condicionadas necesarias para el cálculo o la interpretación incorrecta de las mismas.

En muchas ocasiones estos errores pueden llegar a ser de notación más que de concepto, hay que acostumbrar a los alumnos a que escriban todo que realizan, enfatizando en la importancia de que la notación utilizada sea la correcta.

7.2.7. Teorema de Bayes

Es frecuente el error en el manejo de la fórmula de la probabilidad condicionada y del teorema de Bayes y la notación, como ya se ha mencionado en puntos anteriores. Otros errores se dan a la hora de identificar los datos y decidir si "el problema ha de seguir un camino o otro". De igual forma en ocasiones se comenten errores a la hora de asignar las probabilidades a las distintas ramas de los árboles.

7.2.8. Combinatoria

En este punto de la unidad didáctica el principal error cometido se produce a la hora de identificar si nos encontramos entre un variación, permutación o combinación. De igual forma hay numerosos errores a la hora de realizar el conteo, ya que cada problema o ejercicio es diferente y hay que pensarlo. Una vez más, aparece la necesidad de implementar técnicas de pensar y reflexionar….

Tras el análisis realizado podemos concluir afirmando que hay que recalcar a los alumnos la importancia de la notación matemática, no es suficiente con llegar a la solución, sino que han de ser capaces de plasmarla de forma correcta. Por otro lado, es realmente importante que los alumnos sean capaces de saber realmente qué es lo que están haciendo, y que no se limiten simplemente a aplicar ciertos algoritmos o fórmulas para la resolución de los problemas. En muchísimas ocasiones al repetir algoritmos se pierde el concepto de lo que estamos realizando o resolviendo.

Se destaca la importancia de operar mediante fracciones ya que, aunque esto no debería suponer ningún tipo de problema la realidad observada en el aula nos dice que para muchos alumnos sí que es difícil utilizarlas correctamente.

Para concluir también se enfatiza en el origen epistemológico de las de las definiciones para que los alumnos sean capaces de realizar asociaciones de conceptos. (Ej: Intersección de sucesos, qué es la intersección de dos calles: el espacio donde ambas confluyen, se unen o se juntan, el espacio común a las dos.)

Capítulo 8
El proceso de estudio

En el presente capítulo se trata de describir el proceso de estudio seguido durante el transcurso de la unidad didáctica del aula de 2º de Bachiller de Matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales de la modalidad nocturna, durante la realización del Prácticum II. Esta asignatura consta de 4 sesiones por semana con una duración de 50 min por sesión. En la distribución de estas sesiones encontramos la particularidad de que los jueves se imparten dos clases consecutivas. La verdad es que, a mi juicio, esto permitía aprovechar más el tiempo en la clase ya que en la segunda hora no se pierde el tiempo de entrada al aula, ni el que los alumnos suelen tardar en concentrase. También es cierto que al tratarse de dos horas seguidas al final del día en ocasiones también se le puede observar que los alumnos acaban cansados.

<table>
<tr><th colspan="6">N2S</th></tr>
<tr><th>/~\</th><th>Lunes</th><th>Martes</th><th>Miércoles</th><th>Jueves</th><th>Viernes</th></tr>
<tr><td>13:50
14:40</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">mediodía</td></tr>
<tr><td>16:15
17:05</td><td>Eco de la em Jim E, M M (B210)</td><td>Eco de la em Jim E, M M (B210)</td><td></td><td>His de la Fi Her S, A (B210)</td><td>His de Esp Ose E, M A (B210)</td></tr>
<tr><td>17:10
18:00</td><td>Len Cas y Li Hierr P, V M (B210)</td><td>His de la Fi Her S, A (B210)</td><td>Latín II Och d A Och d E, C (B206)</td><td>His de Esp Ose E, M A (B210)</td><td>Inglés II Ord P, M Á (B210)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">recreo</td></tr>
<tr><td>18:15
19:05</td><td>Fun de Adm y Jim E, M M (B209)
Psicología Her S, A (B210)
Fra (Se Idi Bar A, R (B301)
Ale (Se Idi Int Ale (B303)
Geografía Ose E, M A (B304)
Tec de la In Ule B, E (B305)</td><td>Len Cas y Li Hierr P, V M (B210)</td><td>His de Esp Ose E, M A (B210)</td><td rowspan="2">Len Cas y Li Hierr P, V M (B210)</td><td rowspan="2">Eco de la em Jim E, M M (B210)</td></tr>
<tr><td>19:10
20:00</td><td>Mat Apl a la Loz R, M V (B210)</td><td>Inglés II Ord P, M Á (B210)</td><td>His de la Fi Her S, A (B210)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">recreo</td></tr>
<tr><td>20:15
21:05</td><td>His de la Fi Her S, A (B210)</td><td>Inglés II Ord P, M Á (B210)</td><td>Mat Apl a la Loz R, M V (B210)</td><td rowspan="2">Mat Apl a la Loz R, M V (B210)</td><td></td></tr>
<tr><td>21:10
22:00</td><td>Inglés II Ord P, M Á (B210)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 52. - *Horario 2º de Bachiller Matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales (Nocturno)*
Nota: Imagen extraída de (IES Sagasta Logroño, 2015)

La metodología utilizada en el transcurso de las clases es mayoritariamente magistral, aunque cuenta con ciertos rasgos de dialógica. Esto es debido a que en estas clases de educación de la modalidad nocturna el número de alumnos matriculado es pequeño (y el número de los que acuden regularmente a clase es aún más reducido) y es posible tener un feedback continuo con el alumno de manera que esto nos permita saber si comprenden los contenidos, qué dudas tienen, qué es necesario repasar… Este diálogo continuo profesor alumno, ha de trabajarse clase tras clase, creando un clima distendido y cercano en el que los alumnos se sientan cómodos a la hora de preguntar. Esto nos permite adaptar los ritmos de trabajo si la situación lo requiere.

Para impartir la siguiente unidad didáctica se ha seguido como libro de referencia el libro de 2º de Bachillerato orientado a las Ciencias Sociales redactado por el CIDEAD, mencionado y analizado anteriormente (el cual se muestra en los anexos) además otros contenidos de refuerzo, siendo el más destacado de ello la colección de exámenes de acceso a la universidad de La Rioja (EBAU Matemáticas Exámenes de Matemáticas en la EBAU, s.f.).

El capítulo se compone de tres puntos. En el primero de ellos se muestra la distribución del tiempo de las sesiones durante el transcurso de la unidad didáctica. En el segundo se muestran las actividades adicionales al libro de texto y finalmente se concluye con un punto en el que se muestran las tareas propuestas al alumnado como trabajo autónomo.

8.1. Distribución del tiempo de la clase.

En este punto del capítulo se va a detallar como ha sido la distribución del tiempo a la hora de impartir la unidad didáctica. Ésta se ha desarrollado a lo largo de 9 sesiones más una sesión introductoria (0) y una sesión de repaso. De las 10 sesiones la primera de ellas se trata de una sesión introductoria en la que se comienza por repasar los contenidos y conceptos vistos en cursos anteriores.

En la siguiente tabla se puede ver el calendario con el resumen de los distintos contenidos impartidos a modo de resumen.

Lunes *28/02*	**Miércoles** *02/03*	**Jueves** *03/03*	
		1ª Sesión	**2ª Sesión**
Introducción al bloque de probabilidad y estadística. Repaso de conceptos: -Experimentos aleatorios. -Espacio muestral. -Sucesos. -Operaciones con sucesos. Resolución de ejercicios **0**	Se continua con la resolución de ejercicios de la sesión anterior. - Diferencia de sucesos. - Leyes de Morgan. Resolución de ejemplos. **1**	Probabilidad de un proceso. - Propiedades. - Frecuencia relativa. - Regla de Laplace. Ejemplos. **2**	Introducción a los diagramas de árbol Ejercicios. **3**
Lunes *7/03*	**Miércoles** *16/03*	**Jueves** *17/02*	
		1ª Sesión	**2ª Sesión**
- Principio de multiplicación. - Diagramas de árbol. Ejercicios. **4**	Probabilidad condicionada. - Tablas contingencia. Resolución de ejemplos. **5**	Resolución de problemas probabilidad condicionada. - Sucesos independientes. **6**	Resolución de problemas. **7**
Lunes *21/03*	**Miércoles** *23/03*	**Jueves** *24/03*	
		1ª Sesión	**2ª Sesión**
- Probabilidad total. - Sistema completo de sucesos. Resolución de ejemplos. **8**	- Teorema de Bayes. Ejercicios. **9**	Dudas. Resolución de problemas. **10**	

Tabla 20. - *Calendario distribución de las sesiones.*

A continuación, las siguientes tablas exponen detalladamente la distribución del tiempo empleado en el desempeño de cada una de las subtareas o secciones en las que distribuimos las sesiones de la unidad didáctica, así como quién es en encargado de impartirla y tipo de proceso enseñanza aprendizaje. Dentro de los cinco grandes tipos de procesos (magistral, dialógica, colaborativa, adidáctica, estudio autónomo.) destacamos tres de ellos que son:

- Magistral. El docente es el encargado de “hacer la clase”, el docente es el protagonista de la enseñanza y tiene a cargo el desarrollo y la responsabilidad en el progreso de la actividad. Tanto las fases de regulación como de institucionalización (valida el conocimiento impartido) son típicamente magistrales.
- Dialógica. El docente dialoga con los estudiantes e incorpora sus respuestas en su discurso, modificando, en el caso de que sea necesario, su argumentación y las conjeturas realizadas. No se trata de una organización con preguntas retóricas, sino que se procura evaluar el nivel de logro de los estudiantes y sus necesidades.

- Estudio autónomo. La tarea personal o un examen son actividades en las que el alumno ha de trabajar por sí mismo, sin la necesidad de alguien más. La organización de estas dinámicas en las que cada estudiante debe afrontar una tarea, de forma totalmente autónoma. Este estudio se puede aprovechar para realizar un seguimiento personalizado, y de esta forma poder afrontar tareas más avanzadas (estudiantes con mayor rendimiento), y del mismo modo acompasar el ritmo y los aprendizajes a las necesidades de la clase (estudiantes con menor rendimiento).

Estas definiciones aparecen como aclaraciones en la memoria de Prácticum II.

Sesión 0: Lunes 28/02			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Valoración examen trimestre anterior.	5min	Docente	Magistral/Dialógica
Breve introducción al bloque de probabilidad y estadística.	5min	Docente	Magistral/Dialógica
Repaso general de contenidos. -Experimentos aleatorios. -Espacio muestral. -Sucesos y operaciones con sucesos.	30min	Docente	Magistral/Dialógica
Realización de ejemplos	10min	Docente	Magistral
Sesión 1: Miércoles 02/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Breve repaso de lo visto en la sesión anterior	5min	Docente	Magistral/Dialógica
Explicación de las Leyes de Morgan y la diferencia de sucesos	25min	Docente	Magistral/Dialógica
Realización de ejemplos	10min	Docente	Magistral
Resolución de ejercicios	10min	Compartida	Magistral
Sesión 2-3: Jueves 03/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Definición de la probabilidad de un proceso. - Propiedades. - Frecuencia relativa. - Regla de Laplace	30min	Docente	Magistral
Realización de ejemplos	20min	Docente	Magistral/Dialógica
Introducción a los diagramas de árbol	15min	Docente	Magistral
Resolución de ejercicios	35min	Compartida	Magistral/Dialógica
Sesión 4: Lunes 7/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Explicación del principio de multiplicación.	10min	Docente	Magistral
Diagramas de árbol ligados a problemas de probabilidad	10min	Docente	Magistral/Dialógica
Realización de ejemplos y ejercicios.	30min	Compartida	Magistral/Dialógica
Sesión 5: Miércoles 16/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Explicación de la probabilidad condicionada.	20min	Docente	Magistral
Organización de datos mediante tablas contingencia	10min	Docente	Magistral/Dialógica
Ejemplos	20min	Docente	Magistral
Sesión 6-7: Jueves 17/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Resolución ejercicios probabilidad condicionada.	20min	Compartida	Magistral/Dialógica
Sucesos independientes.	20min	Docente	Magistral
Ejercicios	60min	Compartida	Magistral/Dialógica

Sesión 8: Lunes 21/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Explicación de la Probabilidad total. - Sistema completo de sucesos.	25min	Docente	Magistral
Realización de ejemplos	25min	Compartida	Magistral/Dialógica
Sesión 9:Miercoles 23/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Explicación Teorema de Bayes.	20min	Docente	Magistral
Resolución de ejercicios.	30min	Compartida	Magistral/Dialógica
Sesión 10:Jueves 24/03			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Planteamiento de dudas sobre los contenidos de probabilidad.	50min	Alumnos	Magistral/Dialógica
Resolución de problemas.		Compartida	Magistral/Dialógica

Tabla 21. -*Distribucion del tiempo de las sesiones.*

8.2. Actividades adicionales planificadas

Como ya se ha mencionado anteriormente, se sigue le libro de referencia, intercalando éste principalmente con ejercicios de la EvAU planteados en La Rioja en cursos anteriores.

El libro se les proporciona a los alumnos de forma gratuita en formato pdf a través de la plataforma de Office 365. El acceso de los centros educativos, los docentes del equipo directivo y el alumnado es habilitada por el Gobierno de La Rioja, desarrollada en el marco de la innovación y formación, para facilitar tanto el intercambio de información y contenido (equivaldría al Classroom que se utiliza en Navarra).

Tanto el alumno como el docente tiene acceso a todos a las funcionalidades de Office 356 siendo las más utilizadas el SharePoint mediante en el que se cuelgan los documentos a los que queremos que el alumno tenga acceso, y el Outlook, (correo de Office) para comunicarse con ellos.

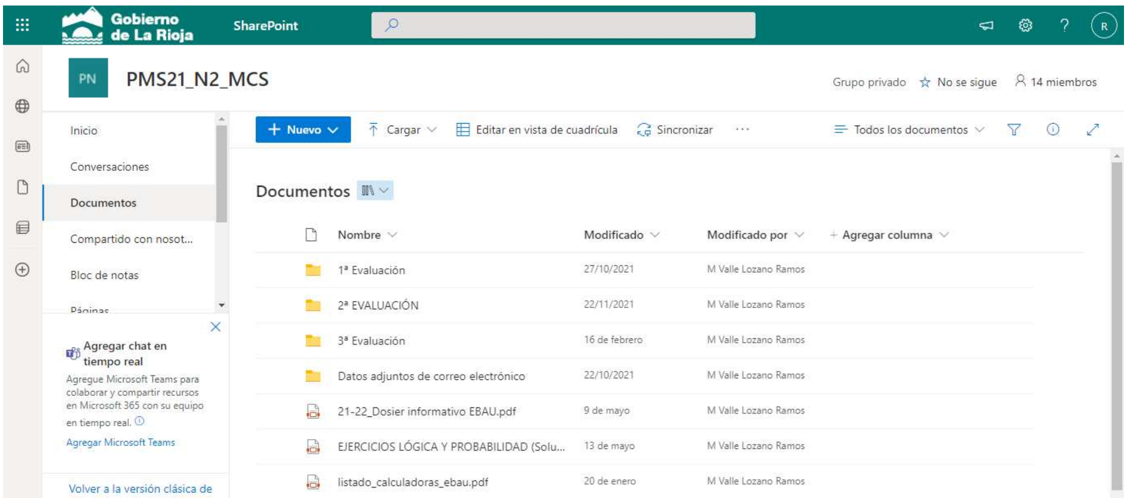


Figura 53. - *Office Gobierno de La Rioja.*

A través de esta plataforma el docente facilita dos páginas webs en las que los alumnos pueden encontrar una infinidad de recursos extra que les pueden servir para afianzar y asimilar mejor los conceptos impartidos y reforzarlos.

En la primera de ellas, solucionarios 10, se facilitan los solucionarios a ejercicios y problemas de la gran mayoría de las asignaturas impartidas de distintas editoriales. Para 2º de Bachillerato CC.SS. se cuenta con los siguientes solucionarios: (Solucionarios10, s.f.)

- Solucionario Matemáticas 2 Bachillerato Anaya
- Solucionario matemáticas 2 Bachillerato Santillana
- Solucionario Matemáticas 2 Bachillerato SM
- Solucionario matemáticas 2 Bachillerato Editex
- Solucionario Matemáticas 2 Bachillerato Oxford

Estas actividades complementarias son de carácter opcional y en ningún momento se han tratado en clase a diferencia de la colección de exámenes de la EvAU.

La segunda página web es EvAU Matemáticas en la que el alumno puede acceder fácilmente a los exámenes de acceso a la universidad de cada comunidad autónoma de los últimos años (desde 2017).

8. 3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

A la hora de analizar este último punto del capítulo se ha de tener en cuenta que las clases se imparten en modalidad nocturna, con sus características y peculiaridades. Es cierto que aunque conforme va aumentando los cursos las tareas que se les mandan a los alumnos dejan de estar tan pautadas y pierden ese criterio de obligatoriedad, no es tan extraño que en 2º de Bachiller aún se les siga mandando ciertas actividades de trabajo autónomo, las cuales cuentan para nota… En nuestro caso, un 20% del peso de la nota final de la asignatura corresponde a la realización de una serie de actividades propuestas por parte del docente. En este caso y debido a que la docente iba justa de tiempo para el desempeño tanto de la presente unidad didáctica como de las siguientes se les propuso el cuestionario realizado como trabajo autónomo, reconociendo y valorándo el trabajo y esfuerzo que responder este cuestionario puede llegar a requerir, con este 20% de la nota mencionado anteriormente.

Es por todos es tristemente sabido que si a los alumnos se les dice que un tema, problema o ejercicio no cuenta para nota o no va a entrar en el examen la mayoría de ellos no van a dedicarle ni un ápice de atención o esfuerzo a comprender el tema o resolver el problema o ejercicio.

No se le manda tarea propiamente dicha a excepción de lo ya mencionado, lo que sí se les proponen son ciertos ejercicios tanto del libro como de la colección de exámenes de la EvAU, los cuales van a ser resueltos en clases posteriores para ver las dificultades que tienen y poder enfrentarse a ellas antes de su resolución. En muchas ocasiones si los alumnos no tienen dificultades y el docente no lo cree oportuno algunos problemas no se resuelven en clase, sino que en ellas se realizan otro tipo de actividades u problemas. Es aquí donde se ve claramente el feedback continuo entre alumno y profesor.

Podemos concluir afirmando que no es necesario mandar una serie de actividades para realizar de manera autónoma de forma claramente pautada, ya que las realidades de los alumnos son muy variopintas y por lo general éstos ya tienen la madurez necesaria para organizarse como creen oportuno. El que tiene interés viene a clase con dudas, pregunta por ejercicios de refuerzo…. y el que no tiene interés no va a realizar las actividades propuestas sean de carácter obligatorio o no.

Muchas veces se ve una clara diferencia entre aquellos alumnos que quieren realizar la prueba de acceso a la universidad y los que solamente quieren obtener el título de bachillerato. Los que pretenden realizar la prueba de acceso suelen pedir más ejercicios de refuerzo, y trabajan más en ellos, lo que implica que platean más dudan en clase, proponen la resolución de ciertos problemas….

Capítulo 9
Experimentación

En el último capítulo del trabajo se detalla la experimentación llevada a cabo en el Prácticum II durante el desempeño de la unidad didáctica referente a la probabilidad. Se ha diseñado un cuestionario en el que no aparecen problemas o ejercicios "tipo" sino que se trata de ver si los alumnos son capaces de pensar reflexionar y junto a los contenidos impartidos utilizar la lógica y el ingenio para conseguir llegar a las soluciones.

En este proceso de estudio es el docente el encargado de impartir la mayor parte de las sesiones, aunque el docente en prácticas participa activamente en parte de ellas, tanto en el diseño y preparación de las actividades, como en momentos puntuales en el desempeño de las clases.

En primer lugar, se va a realizar una explicación del proceso seguido a la hora de realizar el cuestionario, para continuar analizando las cuestiones y comportamientos esperados y concluir analizando y discutiendo los resultados. El cuestionario que se va a presentar a los alumnos se engloba dentro del 20% de la nota que los alumnos tienen destinado al trabajo autónomo.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación

En el primer punto del capítulo se estudia la muestra a la cual se le va a realizar el cuestionario. El cuestionario se ha realizado en el instituto I.E.S. Práxedes Mateo Sagasta en la clase de 2º de Bachiller de matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales de la modalidad de nocturno con las características propias de esta modalidad.

En ambas modalidades de estudio (tanto diurna como nocturna) la asistencia a clase es obligatoria para poder optar a la evaluación continua (no es posible faltar a más del 25% de las clases), pero a diferencia del del Bachillerato diurno, en esta modalidad nocturna se pueden repetir únicamente aquellas asignaturas que el alumno tiene suspensas sin necesidad de tener que repetir el curso completo. Es también posible asistir a un curso completo, además de las asignaturas pendientes del curso anterior, durante un mismo año lectivo.

En cuanto al perfil del alumnado, en numerosos casos son alumnos que ya están un poco desilusionados con la educación convencional, no han llegado a adaptarse correctamente en sus institutos de origen, tienen cargas laborales o familiares que les hicieron abandonar los estudios y posteriormente los han retomado, o simplemente compaginan estudios y trabajo…. En definitiva, nos encontramos ante un alumnado heterogéneo.

La clase se compone de un total de 12 alumnos de los cuales 4 han abandonado totalmente la asignatura y solamente 5 alumnos tienen intenciones de presentarse a las pruebas de acceso a la universidad.

El alumnado más representativo de la clase es aquel que procede de otros centros tras ya haber cursado Bachiller y a al que le quedan ciertas asignaturas pendientes (en muchas ocasiones tienen pendientes una asignatura tanto de 1º como de 2º de bachiller). Esto queda reflejado claramente en las asignaturas impartidas por el centro. Éste oferta tanto la modalidad a distancia como nocturna de matemáticas de "ciencias puras" y de matemáticas orientadas a las ciencias sociales, tanto de 1º como de 2º de Bachillerato.

Para que salgan adelante la modalidad presencial, se han de matricular un mínimo de 8 alumnos (no es un número fijo, sino que puede variar a función del criterio del inspector de turno) y por lo normal, para 1º de Bachiller nunca se llega a este mínimo por lo que se imparten solamente la modalidad a distancia, mientras que para 2º de Bachiller lo usual es que se imparta tanto la modalidad a distancia como la nocturna.

En cuanto al nivel de matemáticas, como ya hemos mencionado anteriormente, gran parte de los alumnos llegan al instituto con las últimas asignaturas que tienen pendientes por lo que hay una gran heterogeneidad también en cuanto conocimientos, en los que algunos de ellos sí que tienen un nivel acorde a la etapa de estudio mientras que otros presentan mayores dificultades.

9.2. El cuestionario

El objetivo del cuestionario es el de analizar si los alumnos han comprendido el contenido de la unidad didáctica y son capaces de ir más allá y razonar ante distintas situaciones en las que tengan que utilizar la lógica y el ingenio. Se huye de los ejercicio “tipo” o estándar para hacer reflexionar a los alumnos, trabajar el análisis crítico, razonamiento, la comprensión e interpretación lectora…

Durante el proceso de aprendizaje el docente trata de fomentar estas estas pautas de aprendizaje, introduciendo a los alumnos en sus clases algunos juegos o retos a los alumnos como analizar la frase *“La mayor parte de las personas tienen un número de piernas superior al de la media” ¿Creéis que es cierta? ¿A qué se debe?* De esta forma se fomenta la participación y el debate de la clase… *Que levanten la mano los que crean que… ¿Por qué?*

Otro de los retos que se ha propuesto a los alumnos, fue el de decirles. *Si tenemos un dado trucado en el que la probabilidad de que salga 1 es el doble de la que salga cualquiera del resto de los números. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cada uno de los valores?*

$$P(1,2,3,4,5,6) = (2p, p, p, p, p, p)$$

$$2p + p + p + p + p + p = 1 \; luego \; p = \frac{1}{7}$$

Para la realización del siguiente cuestionario se elaboró una primera selección de ejercicios que se dejaran en los anexos, de los cuales se seleccionaron seis de acuerdo a ciertas características como la dificultad y los contenidos trabajados, para que sean lo más adecuados posibles al nivel observado en la clase.

A continuación, se exponen los enunciados de los seis problemas planteados en el cuestionario. Aunque claramente los tres primeros ejercicios son más sencillos que los tres siguientes, no se ha querido ordenar en orden de dificultad ya que es necesario que los alumnos se enfrenten a todos los problemas, y, en muchas ocasiones si saben que éstos están ordenados por dificultad, si no saben hacer un problema, ni lo intentan con el siguiente.

Se ha puntuado cada problema planteado, siendo la puntuación de cada uno de los ejercicios diferente, en función de la dificultad y número de cuestiones que se incluyen en él.

Los ejercicios que plantean más de una cuestión se exponen éstas en orden creciente de dificultad.

Problema 1.

Supongamos que la probabilidad de que nazca un niño es exactamente igual a la de que nazca una niña, aunque en realidad se sabe que no son exactamente iguales. Una pareja tiene dos hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si el mayor es un niño? (0.5 puntos)
c) *¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si al menos uno de los hijos es un niño? (0.5 puntos)* (Villatoro, 2010)

En el primero de los problemas planteados, se abordan diferentes estándares de aprendizaje evaluables como pueden ser el 1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral y 1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento que a su vez se corresponden con los descriptores EA3. Espacio muestral y sucesos, EA4. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace, EA5. Probabilidad compuesta y EA6. Probabilidad condicionada.

Problema 2.

Se lanza un dado y se introducen en una caja tantas bolas blancas como indica el número obtenido, se vuelve a lanzar el dado y se introducen en la caja tantas bolas negras como indica el número obtenido, y a continuación se saca de la caja una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? (1.5 puntos) (Frabetti, El juego de la ciencia. Probabilidades sorprendentes., 2021)

El segundo problema planteado, aborda el estándar de aprendizaje 1.1. (cálculo de probabilidades en experimentos compuesto), que a su vez se corresponde con los descriptores EA3. Espacio muestral y sucesos, EA4. Cálculo de probabilidades, regla de Laplace, EA5. Probabilidad compuesta y EA6. Probabilidad condicionada.

De igual forma y como ya se ha mencionado con anterioridad, en la realización de este cuestionario cobra una especial relevancia el Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas y se utilizarían los estándares:

- 1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados,
- 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.),
- 2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido y
- 3.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.

Problema 3.

Cierta convención reunía a cien políticos. Cada político era o bien deshonesto o bien honesto. Se dan los datos:

- *Al menos uno de los políticos era honesto.*
- *Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos era deshonesto.*

¿Puede determinarse partiendo de estos dos datos cuántos políticos eran honestos y cuántos deshonestos? (1.5 puntos) (Cinta de Moebius. Exprime tu mente., s.f.)

El siguiente problema podría relacionarse con el estándar 1.2. (hay que reconocer los posibles sucesos del experimento, suceso seguro e imposible) relacionado con el descriptor EA3. Espacio muestral y sucesos.

De igual forma que en el anterior se pueden aplicar los siguientes estándares del bloque 1: 1., 2.1. y 3.2. (estos se refieren principalmente a la correcta comprensión, razonamiento, argumentación y la forma de expresar el resultado)

Problema 4

Alicia, Bob y Carol conciertan un duelo triple. Alice no es buena tiradora: solo da en el blanco 1/3 de las veces. Bob es mejor: da en el blanco 2/3 de las veces. Carol es infalible: siempre acierta. Disparan por turnos: primero Alicia, luego Bob, luego Carol, luego de nuevo Alicia y así hasta que solo quede uno de los tres. En su turno cada uno es libre de disparar a quien crea oportuno ¿Cuál es la mejor opción de Alice en su primer turno? (1.75 puntos) (Frabetti, El juego de la ciencia. Números vampiros., 2021)

El siguiente ejercicio se relaciona con los estándares de aprendizaje evaluables .2. (sucesos y espacio muestral) y 1.4. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones, que se relacionan con los descriptores EA2. Experimentación e interpretación y EA3. Espacio muestral y sucesos.

Este ejercicio espera que se realice de forma argumentativa, no mediante el cálculo estricto de las probabilidades, por lo que cobra una especial relevancia nuevamente el bloque 1 siendo estos, 1.1., 2.1., 2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia, 2.3. y 3.2. A los estándares de aprendizaje ya mencionados se le añade la importancia de la realización de estimaciones y la contrastación de los resultados.

Problema 5.

El tío Henry, la tía Em y Dorothy meten sus brazos sucesivamente y en este orden en lava hirviendo. Las probabilidades de sobrevivir a la prueba son del 50 %, y gana el primero que sobreviva. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada uno? (1 punto) (Frabetti, El juego de la ciencia. Probabilidades sorprendentes., 2021)

¿Demasiado fácil? Supongamos que el macabro juego no termina con el primer superviviente, sino con el primer muerto. ¿Qué probabilidades de sobrevivir tiene Dorothy? (1 punto) (Frabetti, El juego de la ciencia. Números vampiros., 2021)

Tanto en la primera como en la segunda parte del problema, se aplican los estándares 1.1. (relacionada con el cálculo de probabilidades). De igual forma en ambas serían aplicables los estándares del 1er bloque 1.1., 2.1, 2.3., 3.2 (comprensión, razonamiento y argumentación) y 6.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación.

La principal diferencia es que en la segunda parte del problema también se aplicaría el estándar 5.1. Profundiza en la resolución de algunos problemas planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc., ya que los alumnos han de realizar ciertas reflexiones para poder dar una solución al problema y argumentar su respuesta.

Problema 6.

El faraón Apofis envejecía y le faltaba decidir a qué sirvientes iba a llevar a su siguiente vida. Tenía dudas con Ahmed, el escriba con el que disfrutaba jugando a los acertijos, pero sabía que para llevarlo con él lo tendría que sepultar vivo y lo respetaba demasiado para hacerle eso. Pensó que lo mejor sería que un ´ultimo acertijo fuera el que tomara la decisión. He aquí lo que hizo escribir en su testamento: A mi muerte el gran sacerdote deberá preparar 100 perlas: 50 perlas negras y 50 perlas blancas. Cada uno de mis servidores será invitado a depositar dichas perlas en dos jarrones opacos. Tendrán derecho a distribuir las perlas como quieran. Cuando todas las perlas se encuentren en los jarrones, el gran sacerdote entrara en la sala, escogerá uno de los jarrones al azar y tomaría una perla. Si es blanca, se sacrificará al servidor. Si es negra, el servidor se salvará. Ahmes *se salvó porque fue inteligente para colocar las perlas de forma que la probabilidad de que el gran sacerdote sacase perla negra fuese la máxima posible, ¿cómo lo hizo? (1.75 puntos)* (Asin)

En el último de los problemas planteados los estándares aplicables del bloque de probabilidad serían el 1.2. y 1.4. (cálculo de probabilidades y toma de decisiones). De igual forma que es casos anteriores, del bloque 1 se trabajan los estándares 1.1., 2.1., 2.2. 2.3. y 3.2. Comprende, razona argumenta y contrasta las soluciones utilizando un lenguaje y notación adecuados.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

En el presente apartado se exponen los resultados esperados para cada uno de los ejercicios planteados. Se proponen distintas soluciones concordes a los métodos de resolución y notaciones utilizadas a lo largo de la unidad didáctica.

<u>Problema 1</u>

$$m_{1º} = \{Ser\ de\ sexo\ masculino\ (niño)\ el\ primero\ de\ los\ hijos\ (Mayor)\}$$
$$m_{2º} = \{Ser\ de\ sexo\ masculino\ (niño)\ el\ segundo\ de\ los\ hijos\ (Menor)\}$$

1.1. Mediante tablas de contingencia

a) De los cuatro posibles resultados solo en uno los dos hijos son varones, por lo que la probabilidad es de 1/4.

$$P(m_{1º} \cap m_{2º}) = \frac{1}{4}$$

b) De los dos posibles casos en el que el hijo mayor es niño, solamente en uno de ellos el menos va a ser niño, por lo que la probabilidad va a ser de .1/2.

$$P(m_{2º}/m_{1º}) = \frac{1}{2}$$

c) Sólo hay tres casos posibles en los que al menos uno de ellos sea hijo, y solamente en uno de los tres casos los dos son hijos, luego la respuesta es 1/3.

$$P(m_{1º} \cap m_{2º}/m_{1º} \cup m_{2º}) = \frac{1}{3}$$

Mayor	**Menor**		
	m	f	$m \cup f$
m	1/4	1/4	1/2
f	1/4	1/4	1/2
$m \cup f$	1/2	1/2	1

Mayor	**Menor**		
	m	f	$m \cup f$
m	1/4	1/4	1/2
f	1/4	1/4	1/2
$m \cup f$	1/2	1/2	1

Mayor	**Menor**		
	m	f	$m \cup f$
m	1/4	1/4	1/2
f	1/4	1/4	1/2
$m \cup f$	1/2	1/2	1

Figura 54. - *Problema 1. Solución mediante tablas de contingencia de los apartados a, b y c.*

a) 2º Mediante diagramas de árbol:

$$P(m_{1º} \cap m_{2º}) = \frac{1}{4}$$

b)

$$P(m_{2º}/m_{1º}) = \frac{P(m_{1º} \cap m_{2º})}{P(m_{1º})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

c)

$$P(m_{1º} \cap m_{2º}/m_{1º} \cup m_{2º}) = \frac{P(m_{1º} \cap m_{2º}) * P(m_{1º} \cup m_{2º}/m_{2º})}{P(m_{1º} \cup m_{2º})} = \frac{\frac{1}{4} * 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

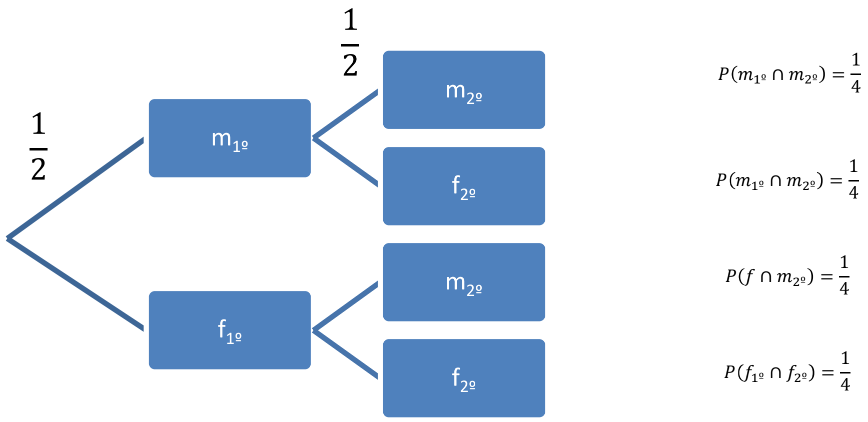


Figura 55. - *Problema 1. solución mediante diagrama de árbol.*

El primero de los problemas se ha modificado un poco la nomenclatura, en vez de niño y niña, se ha optado por poner masculino o femenino con el objetivo de que la nomenclatura pueda inducir a errores. De igual forma en vez de hijo mayor o menor se habla del 1º y 2º hijo.

Se trata de un problema sobre el cálculo de probabilidades, el cual es el más "estándar" de los que han sido planteados. Se proponen dos formas de resolver el problema, mediante la organización de los datos en tablas de contingencia o diagramas de árbol.

En la primera de las opciones es relativamente sencillo, teniendo los casos bien identificados, contar los casos favorables y los posibles en función de las condiciones descritas. Van a tener toda la información detectable de un vistazo (en forma de frecuencia absoluta).

Si el alumno toma como método de resolución los diagramas de árbol a la hora de realizar los dos primeros apartados no va a tener ningún tipo de problema o dificultad, mientras que éstos sí que pueden aparecer en la tercera cuestión, en la que el planteamiento y la descripción formal del mismo ya no son tan sencillos y se pueden llegar a complicar.

Realmente se espera que este tercer apartado lo realicen mediante la tabla de contingencia, o en el caso de que se efectúe mediante un diagrama de árbol, se aborde esta última cuestión realizando un simple cuenteo de casos que facilita mucho la resolución.

<u>Problema 2</u>

Se puede y se espera que se resuelva sin cálculos, pues basta con darse cuenta de que las bolas blancas y negras son intercambiables, por lo que, dada la simetría de la situación, la probabilidad tanto de que la bola sea blanca como negra es de 1/2.

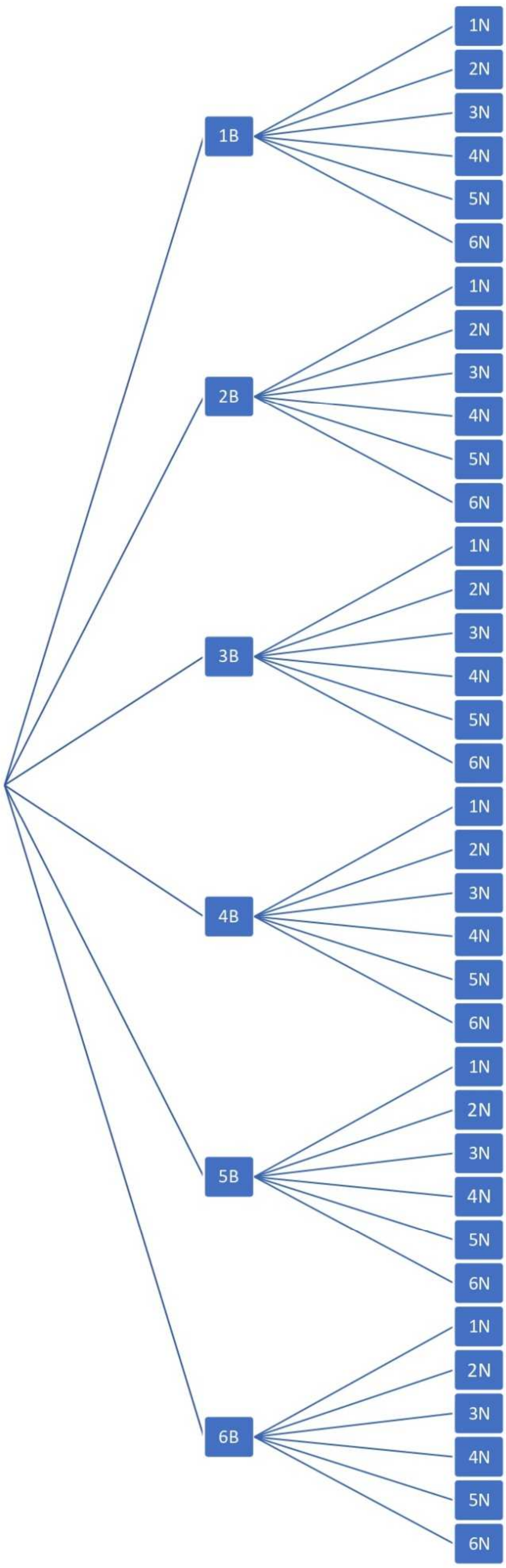
$1B = \{Introducir\ una\ bola\ blanca\ en\ la\ caja.\}$

$1N = \{Introducir\ una\ bola\ negra\ en\ la\ caja.\}$

$P(1B) = Probabilidad\ de\ introducir\ una\ bola\ blanca\ en\ la\ caja$
$= Probabilidad\ de\ sacar\ un\ uno\ en\ el\ primer\ dado$

$P(1N) = Probabilidad\ de\ introducir\ una\ bola\ negra\ en\ la\ caja$
$= Probabilidad\ de\ sacar\ un\ uno\ en\ el\ segundo\ dado$

$P(SB) = Probabilidad\ de\ sacar\ una\ bola\ blanca\ tras\ realizar\ el\ priemer\ experimento\ de\ introducirlas$



$P(1B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\right)$

$P(1B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(1B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{4}\right)$

$P(1B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{5}\right)$

$P(1B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{6}\right)$

$P(1B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{7}\right)$

$$P(SB/1B) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) = \frac{223}{5040}$$

$P(2B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/2B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{3}\right)$

$P(2B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/2B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{4}\right)$

$P(2B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/2B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{5}\right)$

$P(2B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/2B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{6}\right)$

$P(2B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/2B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{7}\right)$

$P(2B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/1B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{8}\right)$

$$P(SB/2B) = \frac{1}{36}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\frac{2}{8}\right) = \frac{341}{5040}$$

$P(3B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{4}\right)$

$P(3B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{5}\right)$

$P(3B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{6}\right)$

$P(3B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{7}\right)$

$P(3B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{8}\right)$

$P(3B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/3B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{9}\right)$

$$P(SB/3B) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{3}{7}+\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\right) = \frac{2509}{30240}$$

$P(4B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{5}\right)$

$P(4B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{6}\right)$

$P(4B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{7}\right)$

$P(4B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{8}\right)$

$P(4B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{9}\right)$

$P(4B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/4B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{10}\right)$

$$P(SB/4B) = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7}+\frac{4}{8}+\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\right) = \frac{2131}{22680}$$

$P(5B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)$

$P(5B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{7}\right)$

$P(5B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{8}\right)$

$P(5B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{9}\right)$

$P(5B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{10}\right)$

$P(5B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/5B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{11}\right)$

$$P(SB/5B) = \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}+\frac{5}{10}+\frac{5}{11}\right) = 0.102297$$

$P(6B \cap 1N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 1N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{7}\right)$

$P(6B \cap 2N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 2N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{8}\right)$

$P(6B \cap 3N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 3N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{9}\right)$

$P(6B \cap 4N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 4N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{10}\right)$

$P(6B \cap 5N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 5N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{11}\right)$

$P(6B \cap 6N) = \frac{1}{36}$ $\quad P(SB/6B \cap 6N) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{12}\right)$

$$P(B/6B) = \frac{1}{36}\left(\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}+\frac{9}{10}+\frac{10}{11}+\frac{11}{12}\right) = 0.108868$$

$$P(SB) = P(B/1B) + P(B/2B) + P(B/3B) + P(B/4B) + P(B/5B) + P(B/6B) = \frac{223}{5040} + \frac{341}{5040} + \frac{2509}{30240} + \frac{2131}{22680} + 0.102297 + 0.108868 \approx 0.5$$

Figura 56. - *Problema 2. Solución mediante diagrama de árbol.*

No obstante, para todos aquellos que traten de resolver el problema contando casos, ya no resulta tan evidente, pero podrían llegar a la solución. El conteo de casos no es nada sencillo además de que se dan un elevado número de posibilidades, por lo que también es laborioso, pero si éste se organiza bien mediante un diagrama de árbol, no es nada descabellado que lleguen a la solución.

De igual forma mediante la realización de estos cálculos de probabilidad el alumno puede comparar su hipótesis inicial y contrastar los resultados. A veces lo que parece muy intuitivo puede resultar engañoso, más si cabe en el bloque de probabilidad.

Problema 3

El primero de los datos me indica que por lo menos uno de los políticos es honesto. En el segundo de los datos nos dice que, si cogemos una pareja cualquiera, al menos uno de ellos va a ser deshonesto.

Para ello es necesario que los otros 99 sean deshonestos, ya que si tuviéramos dos honestos, tomando esa pareja, no se cumpliría el segundo requisito. Es la única forma en la que podemos asegurar que se cumplan los dos requisitos.

Este ejercicio es probablemente el más sencillo de los que han sido planteado por los que se espera que prácticamente la totalidad de los alumnos lleguen a la conclusión correcta y sean capaces de interpretarlo.

Se pueden apoyar en pictogramas, o representarlos de alguna forma…. De igual forma, siempre es necesario que se contraste la solución obtenida con los requisitos del problema, para cerciorarse de que es correcta la solución.

Problema 4

En el siguiente problema se espera que los alumnos lleguen a una solución mediante una argumentación como la que se muestra a continuación, concluyendo que la mejor opción que garantiza que Alicia sigue con vida tras la primera ronda es:

- La mejor opción para Alicia es disparar al aire.
- El siguiente en disparar será Bob, que podemos presuponer que disparará contra Carol, ya que es la más que mejor puntería tiene. Entonces pueden ocurrir dos opciones:
  - Si Bob acierta y mata a Carol solo quedarían vivos, Alicia y Bob, siendo el turno de Alicia, y teniendo de esta forma una elevada probabilidad 1/3 de salir victoriosa.
  - Si por el contrario Bob falla su disparo y no mata a Carol, será Carol quien tenga el turno y escogerá disparar contra Bob a quien matará seguro ya que nunca falla.
    - Nuevamente quedarían vivos Alicia y Carol, y el turno correspondería a Alicia que sigue teniendo 1/3 de probabilidades de ganar, aun siendo la que peor puntería tiene.

Si, por el contrario, Alicia no opta por disparar al aire pueden ocurrir los siguientes casos:

- Alicia dispara a Bob y acierta, el turno corresponde a Carol que mata a Alicia.
  - Alicia dispara a Bob y falla, Bob dispara a Carol y falla y Carol mata a Alicia.
  - Alicia dispara a Bob y falla, Bob dispara a Carol y acierta: (2/3)(2/3)=4/9. Turno de Alicia con probabilidad 1/3 de matar a Bob.
- Alicia dispara a Carol y acierta, el turno corresponde a Bob que tiene 2/3 de probabilidad de matar a Alicia, luego la probabilidad de que Alicia siga con vida con 1/3 de probabilidad de matar a Bob es: (1/3)(2/3)=1/9.
  - Alicia dispara a Carol y falla, Bob mata a Carol: (2/3)(2/3)=4/9 y llega el turno de Alicia con probabilidad 1/3 de matar a Bob.
  - Alicia dispara a Carol y falla, Bob dispara a Carol y falla y Carol mata Alicia.

La probabilidad de que Alicia quede viva al pasar el primer turno es de 4/9 si opta por disparar a Bob y de 5/9 si dispara a Carol. En ningún caso tiene la seguridad de seguir con vida para la segunda ronda.

Si el alumnado trata de resolverlo realizando el cálculo de probabilidades el problema se complica y les puede llegar a resultar realmente difícil encontrar la solución correcta, ya que ésta no es para nada intuitiva, sino que, al contrario, a priori no es la solución que esperaríamos.

Muchos de los alumnos previsiblemente argumenten que la mejor de las opciones es que en el primer turno de Alicia dispare a Carol, (ya que es la que mejor puntería tiene), pero contrastando esta hipótesis se llega a la conclusión que no es la mejor opción para que Alicia salga del duelo victoriosa.

Problema 5

En el 5º problema el tío Henry tendrá una posibilidad de ganar de 0.5.

Para que gane la tía Em ha de suceder que pierda Henry y luego ella gane por lo que la probabilidad será de 1/2 x 1/2=1/4 = 0,25

Por último, para que gane Dorothy ha de suceder que pierdan los dos anteriores y ella gane, por lo cual la probabilidad será de 1/2 x 1/2 x 1/2 =1/8 = 0,125.

$$MH = \{Pierde\ Henrry = Muere\ Henrry\}$$
$$VH = \{Gana\ Henrry = Vive\ Henrry\}$$

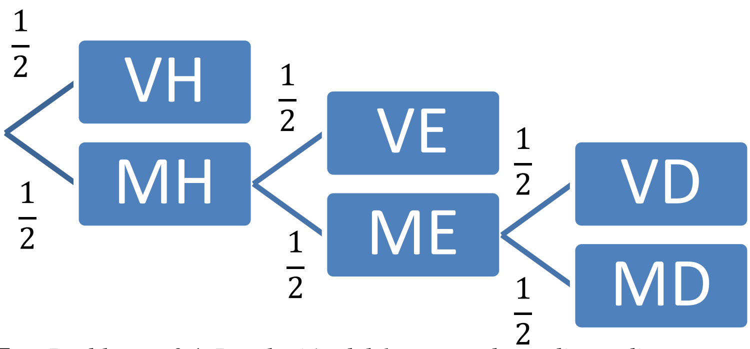


Figura 57. - *Problema nº 4. Resolución del 1er apartado mediante diagramas de árbol.*

$$P(GH) = P(VH) = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$P(GE) = P(MH)\ x\ P(VE) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$P(GD) = P(MH) x\ P(ME)\ x\ P(VD) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Para la resolución de esta primera parte del problema se espera que los alumnos utilicen la estrategia del diagrama de árbol. Este diagrama tiene la peculiaridad de que mientras una de las ramas (la del caso de victoria) acaba si el suceso ocurre (ya que el juego habría terminado con la victoria), la otra se desgrana nuevamente en las otras dos opciones de vivir y morir, y esto vuelve a ocurrir hasta que le llega el turno a Dorothy.

En la resolución de esta primera parte del problema los alumnos, a priori no deberían tener ningún tipo de dificultad si son capaces de interpretarlo correctamente e identificar cuando se termina acaba el juego.

En cuanto a la segunda cuestión, la probabilidad de sobrevivir de Dorothy será que la suma de las probabilidades de que sobreviva el tío 1/2 más la probabilidad de que sobreviva la tía 1/2 x 1/2=1/4 = 0,25 más la probabilidad de que sobreviva ella en el caso de que llegue su turno 1/2 x 1/2 x 1/2 =1/8 = 0,125. La suma de estas tres probabilidades será de 0.875.

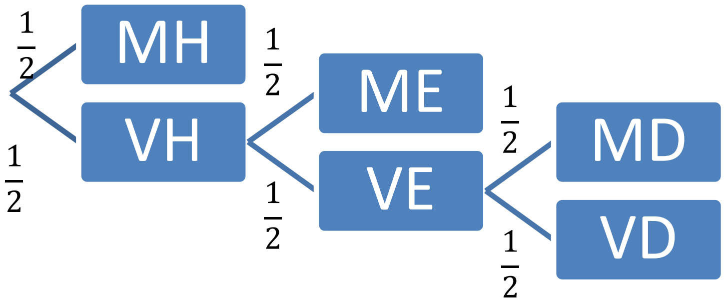


Figura 58. - *Resolución del 2º apartado mediante diagramas de árbol (1ª ronda).*

$$P(GD) = P(MH) + P(ME) + P(VD) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

Lo que ocurre en este caso es que ha sobrevivido a la primera ronda, pero el juego continúa y si ninguno de sus tíos muere, será su turno nuevamente siendo las posibilidades de sobrevivir a la segunda ronda:

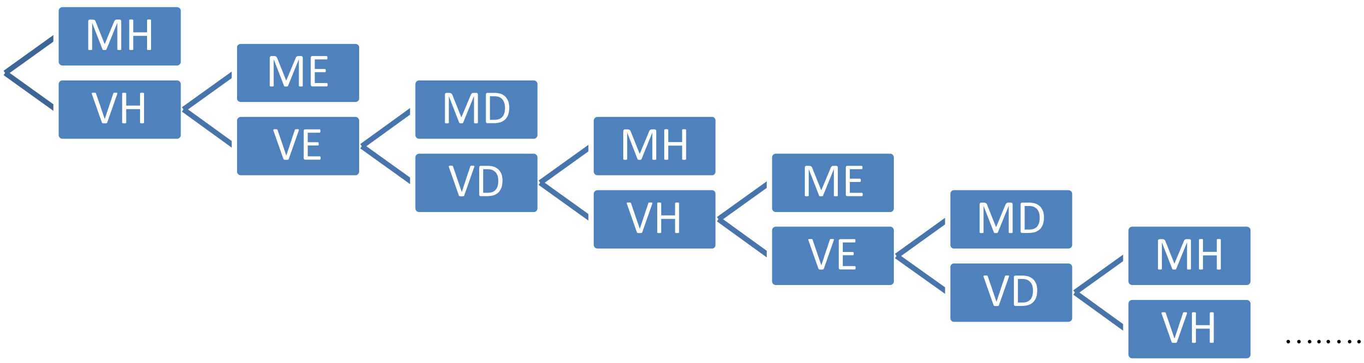


Figura 59. - *Resolución del 2º apartado mediante diagramas de árbol (2ª ronda).*

$$P(GD) = P(MH_1) + P(ME_1) + P(MD_1) + P(MH_2) + P(ME_2) + P(VD_2)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0.9843$$

Y así se podría continuar jugando, originándose un árbol infinito en el que las probabilidades de sobrevivir cada vez sean menores.

De acuerdo con lo que se ha explicado el alumno ha de realizarse ciertas preguntas como ¿La solución a la que se quiere llegar es la de victoria en la primera ronda? ¿Cuándo acaba el juego? O en su defecto argumentar la respuesta obtenida…. Debe darse cuenta de que este problema podría entrar en un bucle infinito que nunca se acabaría. No se espera que la totalidad de los alumnos llegue a estas conclusiones, pero sí que al menos algunos de ellos, sean capaces de ir más allá de lo que el problema plantea y obtenga estas conclusiones.

Problema 6

El alumno debería de llegar a la conclusión de que la mejor de las opciones es colocar 1 sola perla negra en uno de los jarrones y las otras 99 en el otro. En este caso la probabilidad de sacar negra es si elige el jarrón en el que está sola la perla negra es total y si elige el otro jarrón es 49/99.

La probabilidad de sacar negra es $\frac{1}{2}\ x\ 1 + \frac{1}{2}\ x\ \frac{49}{99} = \frac{74}{99}$ y cualquier otra repartición disminuye la probabilidad de sacar la bola negra.

Es un problema en el que se trata el cálculo de probabilidades propiamente dicho, pero desde otro enfoque en el que los alumnos han de realizar sus propias hipótesis y luego contrastarlas de forma que lleguen a la solución adecuada… No es un problema difícil, pero hay que pensar, por lo que se espera que mientras algunos de los alumnos llegan a una solución correcta, otros no sean capaces de llegar ésta.

Para concluir el presente punto del capítulo, teniendo en cuenta que no son esperables muy buenos resultados en el cuestionario, porque el nivel de la clase no es el mejor, por lo que se han planteado ejercicios en los que la dificultad varía notablemente de unos a otros; así podemos observar hasta que donde son capaces de llegar los alumnos. De igual forma, aunque muchos de los ejercicios los van a ser resueltos de forma muy intuitiva, queremos observar si la argumentación seguida es correcta. También se analiza si la notación utilizada es rigurosa y adecuada y si se ponen en práctica las distintas técnicas o métodos utilizados a lo largo de la unidad didáctica.

9.4. Resultados

Tras analizar la realización del cuestionario y los comportamientos esperados en este punto del capítulo se muestran los resultados obtenidos en el mismo. Como ya hemos mencionado anteriormente, el cuestionario estaba valorado con el 20 % de la nota destinada al trabajo autónomo de los alumnos y la puntuación de cada uno de los ejercicios se encontraba claramente definida.

A la hora de cuantificar la nota se ha valorado positivamente el esfuerzo de los alumnos, dando por válido en ciertas ocasiones el resultado de la prueba, aunque este no esté totalmente argumentado correctamente (esto es algo anecdótico que se acordó con el tutor del instituto para fomentar la participación, y con lo que no estoy de acuerdo totalmente). Como se ha podido observar claramente, no es la mejor época del año para realizar un cuestionario, y menos de estas características. No se trata de ejercicios estándar que les sirva para repasar lo que es posible que les pongan en el examen de la asignatura o en las pruebas de acceso a la universidad, por lo que en cierto modo hay que recompensar el esfuerzo en este tramo final del curso. Tras corregir los ejercicios algunos de los que los han entregado, tenían una nota muy baja por lo que se ha tratado de valorar lo más alto posible.

Esto se ha creído oportuno ya que la finalidad del presente proyecto en ningún caso se centra en realizar unas correcciones rigurosas y exhaustivas (que también sería lo ideal) sino, analizar ciertos contenidos o competencias mencionados anteriormente que tienen que ver con el razonamiento lógico y la probabilidad.

La modalidad de enseñanza nocturna, así como la tipología de su alumnado es muy característica y heterogénea, como ya se ha visto por lo que los resultados obtenidos en el cuestionario también lo son. Están notas se muestran de forma anecdótica ya que no son muy representativas por lo ya mencionado anteriormente.

En la corrección de estos problemas, en la mayor parte de los casos se da como buena una solución del problema y se ha penalizado muy poco la nomenclatura inadecuada, los errores en el formalismo matemáticos y la ausencia de justificación rigurosa de los mismos.

Este sistema de corrección valora más el razonamiento lógico matemático que los formalismos matemáticos.

Las notas obtenidas por los alumnos que han presentado el cuestionario formulado se muestran tabuladas a continuación en la siguiente tabla.

Problemas	1			2	3	4	5		6	
	a	b	c				a	b		
EST.1	0,5	0,5	-	1,5	-	-	1	0,75	1,75	6
EST.2	0,5	0,5	-	1,5	1,5	-	-	-	-	4
EST.3	0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	-	-	0,25	1,75	6,5
EST.4	0,5	0,5	0,5	-	1,5	-	-	-	-	3
EST.5	0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	-	1	0,75	1,75	8
EST.6	0,5	0,5	-	-	1.5	-	-	-	-	2,5
EST.7	0,5	0,5	-	1,5	1,5	-	-	0,25	-	4,25

Tabla 22. - *Calificaciones cuestionario.*

Realmente no tiene mucho sentido el realizar un análisis numérico cuantitativo de los resultados, ya que estas notas han sido "infladas" y no son, como ya se ha mencionado, totalmente representativas, por lo que nos vamos a centrar principalmente en el análisis cualitativo de los distintos ejercicios. Se ve una clara diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los tres primeros ejercicios (más sencillos) y los tres siguientes.

A la hora de analizar los ejercicios planteados se ha decidido realizarlo en todos los casos mediante la utilización de variables didácticas, analizando exhaustivamente las respuestas de los alumnos, debido a la peculiaridad de los mismos.

<u>Problema 1:</u>

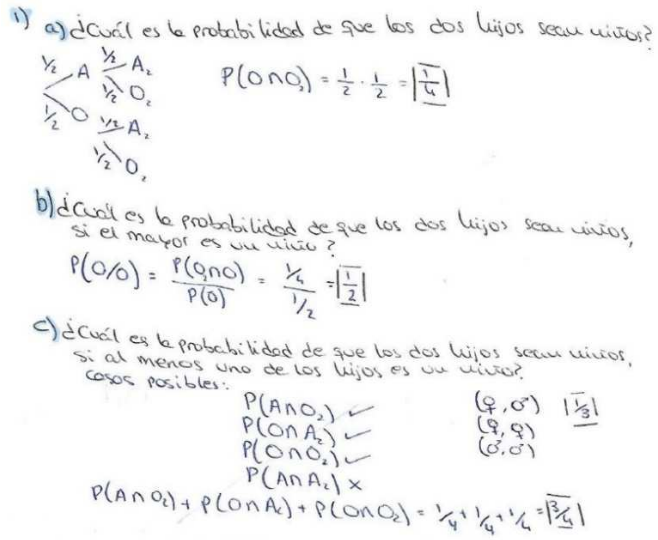
Se plantean las siguientes variables didácticas:

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Diagrama de árbol		x	x	x		x	
V2. Probabilidades de las ramas		x	x	x		x	
V3. Identificación 1ª y 2ª experiencia				x	x		
V4. Tabla de contingencia	x				x		
V5. Probabilidad correcta de la intersección (a)	x	x	x	x	x	x	x
V6. Probabilidad condicionada correcta (b)	x	x	x	x	x	x	x
V7. Resolución correcta apartado c			x	x	x		
V8. Notación adecuada		x	x	x	x		

Tabla 23. - *Variables didácticas Ejercicio 1.*

A la hora de analizar este primer problema la mayor parte de los estudiantes lo han planteado mediante la resolución de un diagrama de árbol, más concretamente cuatro de los siete estudiantes han realizado este planteamiento, dos de los restantes han decidido abordar el problema mediante la organización de los datos en tablas de contingencia, y el restante no utiliza ninguna de las estrategias.

De las cuatro personas que han abordado la resolución del problema realizando diagramas de árbol, las cuatro son capaces de resolver tanto el apartado a como el b, aunque no todas utilizan una nomenclatura adecuada. Dos de ellas, de igual manera argumentan y dan una solución correcta al apartado c, otra da una solución errónea del mismo, y la restante da una solución correcta que no termina de argumentar, (se observa cómo en una primera instancia da una solución errónea que tacha). De hecho, esa solución que ha tachado la vemos en la respuesta de otro de los alumnos. Solamente dos de las cuatro optan por identificar la primera y la segunda experiencia, lo que les ha podido resultar útil a la hora de realizar el problema. Aunque esta identificación entre los apartados a y b en el primer paso no es obligatoria, sí que es muy recomendable.


1) a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños?

$P(O \cap O_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si el mayor es un niño?

$P(O/O) = \frac{P(O \cap O)}{P(O)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si al menos uno de los hijos es un niño?

Casos posibles:

$P(A \cap O_2)$ ✓

$P(O \cap A_2)$ ✓

$P(O \cap O_2)$ ✓

$P(A \cap A_2)$ ✗

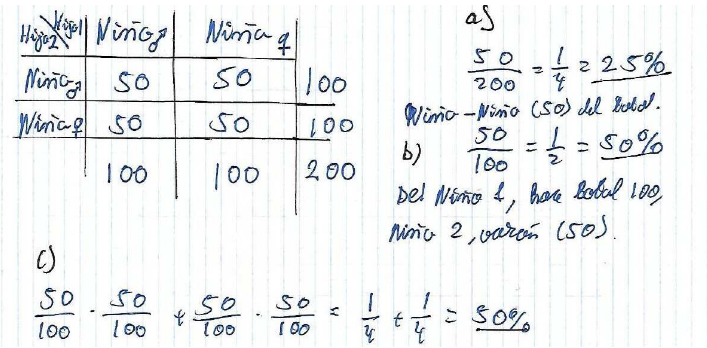
$P(A \cap O_2) + P(O \cap A_2) + P(O \cap O_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Figura 60. - *Resolución del problema 1 EST.4.*

De los dos alumnos que optan por la realización de tablas de contingencia, uno de ellos, que no ha acudido regularmente a clase, realiza el ejercicio de manera bastante intuitiva, sin prácticamente utilizar la notación adecuada, pero planteando "bien" la tabla y dando una solución correcta a los apartados a y b, y una errónea para el c (realmente la tabla de contingencia no es correcta, pero su argumentación sí). Este alumno da las probabilidades en porcentajes, en vez de en forma de un número entre 0 y 1.

Esta solución que aporta para el apartado c de 0.5 podría haber sido esperable antes de impartir la unidad didáctica y era uno de los posibles errores contemplados que se esperaba que realmente ninguno lo cometiera.

El otro de los alumnos realiza con una notación correcta, los tres apartados del ejercicio.



Hijo 2 / Hijo 1	Niño ♂	Niña ♀	
Niño ♂	50	50	100
Niña ♀	50	50	100
	100	100	200

a) $\frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 25\%$

Niño - Niño (50) del total.

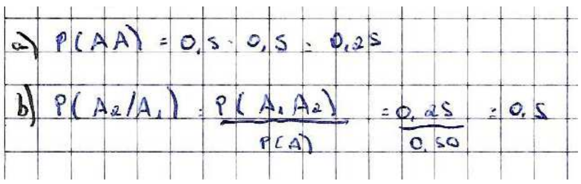
b) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 50\%$

Del Niño 1, hay total 100, Niño 2, varón (50).

c) $\frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 50\%$

Figura 61. - *Resolución del problema 1 EST.1.*

El alumno restante no utiliza niunguna de las dos opciones, mencionadas anteriormente y no emplea una notacion adecuada. Cabe destacar de este alumno que es el único que utiliza númenros decimales en vez de fraciones a la hora de hacer los cálculos numéricos.


a) $P(AA) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

b) $P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}50} = 0{,}5$

Figura 62. - *Resolución del problema 1 EST.7.*

Problema 2:

Para organizar la información de los resultados nuevamente se realiza una tabla en la que se definen distintas variables didácticas que son analizadas posteriormente.

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Solución correcta	x	x		x	x		x
V2. Argumentación sin cálculos		x	x	x	x		x
V3. Argumentación con cálculos	x					x	
V4. Argumentación correcta	x				x		
V5. Diagrama de árbol (conteo casos)						x	
V6. Tabla de contingencia	x						

Tabla 24. - *Variables didácticas Ejercicio 2.*

Cinco de los estudiantes son capaces de dar una solución correcta (ya que es bastante intuitiva), pero solamente dos de ellas son capaces de argumentarlas correctamente, ya sea mediante el cálculo de probabilidades o explicando las causas de la probabilidad obtenida como solución, de forma adecuada y correcta.


$\frac{1}{2}$ sería la probabilidad, porque vamos a tener seguro en la caja una bola de cada color

Figura 63. - *Resolución del problema 2 EST7.*

Uno de los estudiantes que da una solución correcta no espone una solucion nuéricaaunque realmente da una solucion que es correcta, pero no la argumenta.

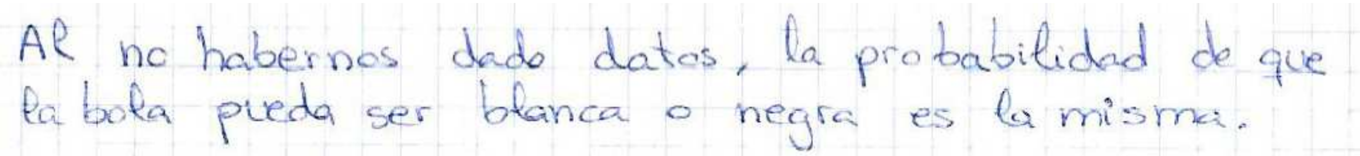

Al no habernos dado datos, la probabilidad de que la bola pueda ser blanca o negra es la misma.

Figura 64. - *Resolución del problema 2 EST3.*

La argumentación realizada sin cálculos realmente no es muy rigurosa, pero al menos lo que dice es correcto y se ve que realiza un esfuerzo por razonarlo.

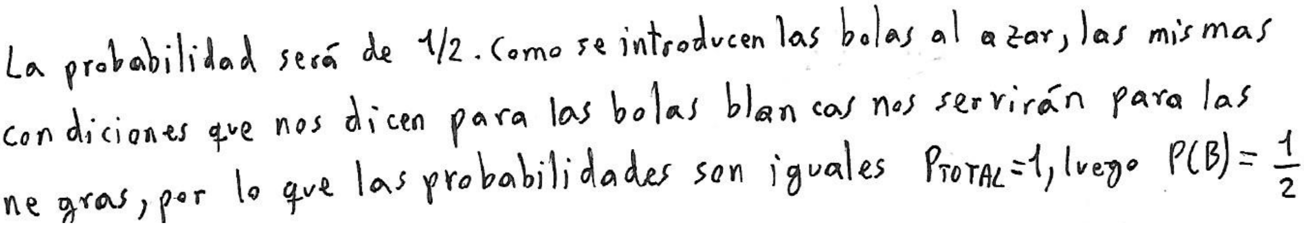
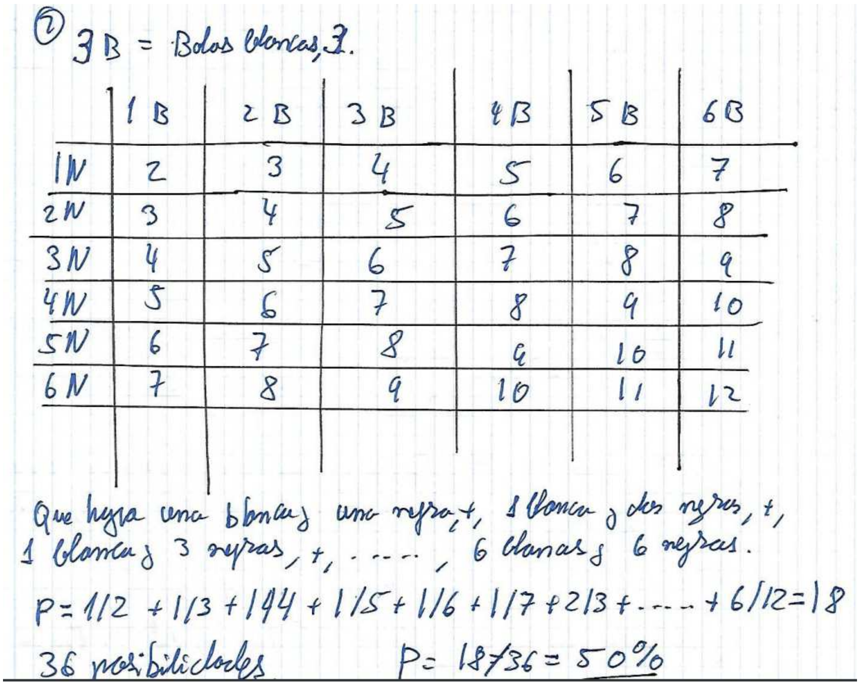

La probabilidad será de 1/2. Como se introducen las bolas al azar, las mismas condiciones que nos dicen para las bolas blancas nos servirán para las negras, por lo que las probabilidades son iguales $P_{TOTAL}=1$, luego $P(B)=\frac{1}{2}$

Figura 65. - *Resolución del problema 2 EST5.*

El estudiante número 1 realiza el planteamiento mediante una tabla de contingencia, caso que no había contemplado pero que realmente es mucho más cómodo a la hora de organizar los datos que un diagrama de árbol. Realiza una argumentación correcta (quizás no rigurosa en cuanto a la explicación y la notación), pero es capaz de organizar todos los posibles casos, y dar una solución correcta utilizado un método que es válido.


(2) 3B = Bolos blancos, 3.

	1 B	2 B	3 B	4 B	5 B	6 B
1N	2	3	4	5	6	7
2N	3	4	5	6	7	8
3N	4	5	6	7	8	9
4N	5	6	7	8	9	10
5N	6	7	8	9	10	11
6N	7	8	9	10	11	12

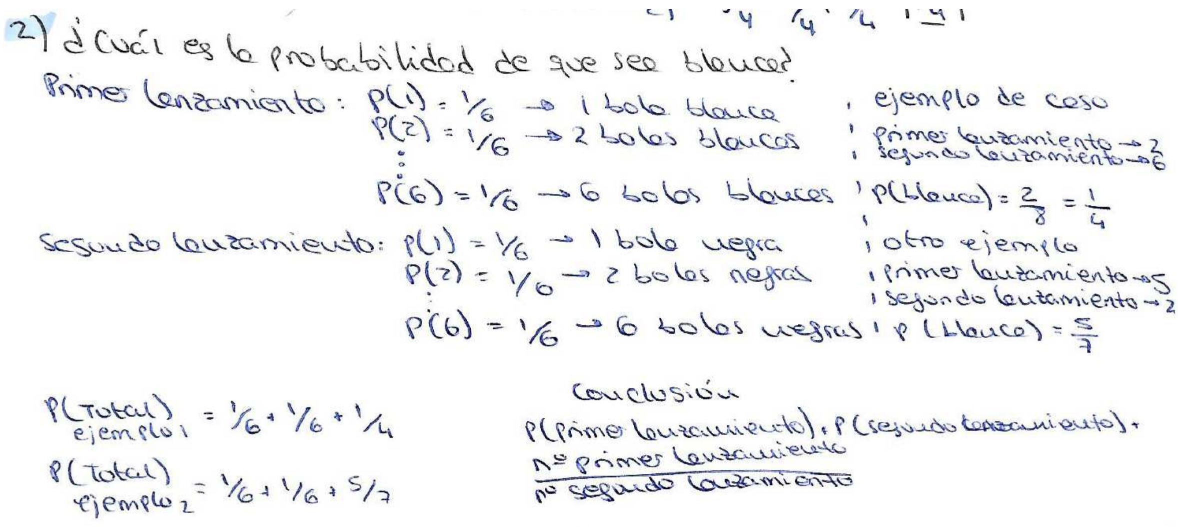
Que haya una blanca y una negra, +, 1 blanca y dos negras, +, 1 blanca y 3 negras, +, ..., 6 blancas y 6 negras.

P= 1/2 + 1/3 + 1/44 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 2/3 + ... + 6/12 = 18

36 posibilidades P= 18/36 = 50%

Figura 66. - *Resolución del problema 2 EST1.*

Los otros dos estudiantes comienzan a realizar el conteo de casos (o tratan de hacerlo) pero parece que se atasca y no contempla todas las posibilidades, no dan realmente una solución al problema.


2) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Primer lanzamiento: P(1) = 1/6 → 1 bolo blanco
P(2) = 1/6 → 2 bolos blancos
⋮
P(6) = 1/6 → 6 bolos blancos

Segundo lanzamiento: P(1) = 1/6 → 1 bolo negro
P(2) = 1/6 → 2 bolos negros
⋮
P(6) = 1/6 → 6 bolos negros

ejemplo de caso
primer lanzamiento → 2
segundo lanzamiento → 6
P(blanco) = 2/8 = 1/4

otro ejemplo
primer lanzamiento → 5
segundo lanzamiento → 2
P(blanco) = 5/7

P(Total) ejemplo 1 = 1/6 · 1/6 · 1/4

P(Total) ejemplo 2 = 1/6 · 1/6 · 5/7

Conclusión
P(primer lanzamiento) · P(segundo lanzamiento) · nº primer lanzamiento / nº segundo lanzamiento

Figura 67. - *Resolución del problema 2 EST4.*

Problema 3:

Para el siguiente problema se han definido únicamente las siguientes variables didácticas:

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Solución correcta		x	x	x	x	x	x
V2. Argumentación correcta		x	x		x		
V3. Apoyo pictogramas					x		

Tabla 25. - *Variables didácticas Ejercicio 3.*

La totalidad de los alumnos, a excepción de uno de ellos son capaces de llegar a la solución correcta, aunque algunos de ellos no la argumentan o no lo haces de forma totalmente válida.

Dos de los estudiantes solamente ponen la solución sin hacer ningún tipo de argumentación justificando su respuesta.

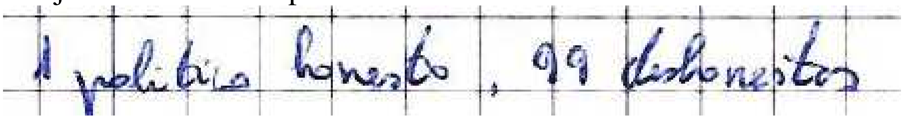

1 político honesto, 99 deshonestos

Figura 68. - *Resolución del problema 3 EST7.*

Tres de ellos argumenta de forma correcta además uno de ellos realiza una especie de pictograma en el que se apoya.

Figura 69. - *Resolución del problema 3 EST5.*

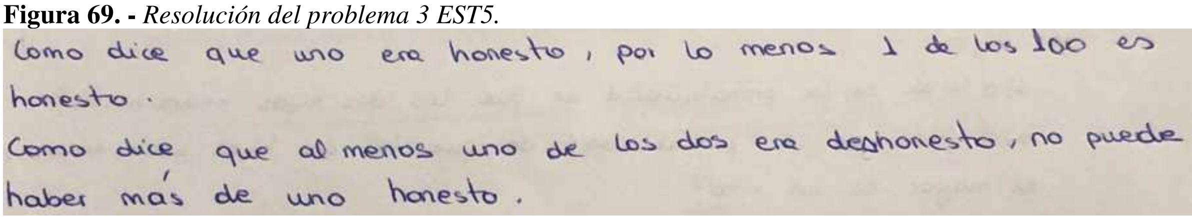

Como dice que uno era honesto, por lo menos 1 de los 100 es honesto.
Como dice que al menos uno de los dos era deshonesto, no puede haber más de uno honesto.

Figura 70. - *Resolución del problema 3 EST5.*

Uno realiza una argumentación que es correcta pero no completa, argumenta uno de los requisitos, pero aunque probablemente lo tenga en cuenta, el otro requisito no lo plasma explícitamente en su solución.

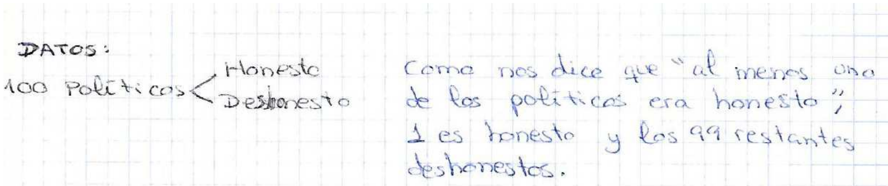

DATOS:
100 Políticos < Honesto / Deshonesto
Como nos dice que "al menos uno de los políticos era honesto"; 1 es honesto y los 99 restantes deshonestos.

Figura 71. - *Resolución del problema 1 EST3.*

Por último, otro de los estudiantes da una solución que indica que no ha terminado de comprender el problema, su respuesta es incorrecta.

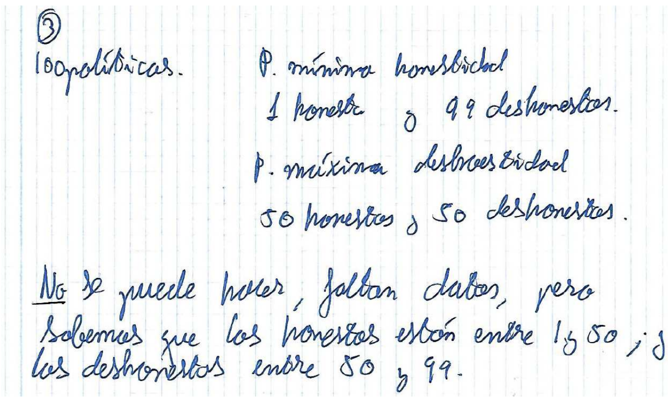

③
100 políticos.
P. mínima honestidad
1 honesto y 99 deshonestos.
P. máxima deshonestidad
50 honestos y 50 deshonestos.
No se puede hacer, faltan datos, pero sabemos que los honestos están entre 1 y 50, y los deshonestos entre 50 y 99.

Figura 72. - *Resolución del problema 3 EST1.*

Problema 4 :

Se definen las variables didácticas que se muestran en la siguiente tabla:

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Dan una solución (correcta o no)	x	x	x		x		x
V2. Argumentación o solución correcta							
V3. Realización diagramas de árbol		x	x				x
V4. Da como solución disparar a Carol	x	x	x		x		x

Tabla 26. - *Variables didácticas Ejercicio 4.*

Dos de los estudiantes no da ningún tipo de solución a la actividad planteada (directamente ni intentan hacerlo, o si lo intentan no llegan a plasmar nada en la solución). Tres de los restantes argumentan su respuesta y la justifican, como ya se ha podido observar en la tabla de forma incorrecta.

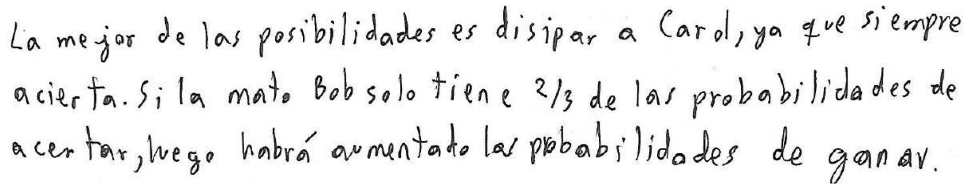


Figura 73. - *Resolución del problema 4 EST5.*

Los otros tres llegan a la misma conclusión que sus compañeros apoyándose en la realización de un diagrama de árbol y tratan de justificar posteriormente la solución obtenida.

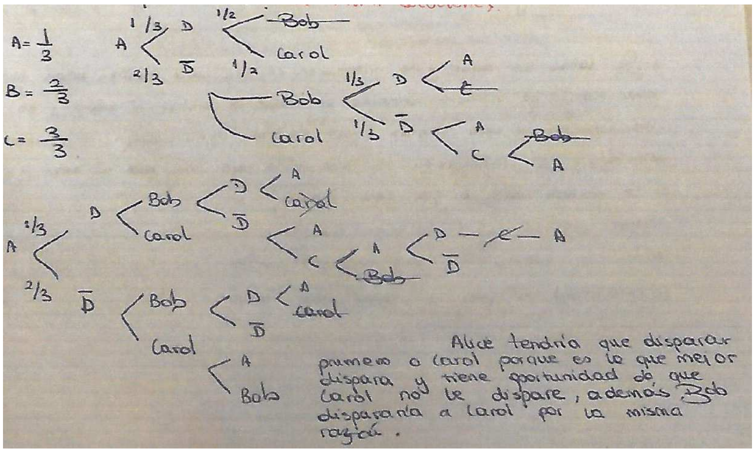


Figura 74. - *Resolución del problema 4 EST2.*

La totalidad de los alumnos que resuelven el problema, dan como solución que la mejor de las opciones es disparar a Carol. Este era uno de los errores más previsibles de todo el cuestionario, ya que la solución correcta no resulta nada intuitiva.

Problema 5:

Se definen las siguientes variables didácticas que se muestran en la siguiente tabla.

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Dan una solución (correcta o no)	x		x		x		x
V2. Solución correcta al apartado a	x				x		
V3. Realización diagramas de árbol	x				x		
V4. Solución correcta al apartado b (1er turno)	x				x		
V4. Identifica el posible juego infinito	x				x		

Tabla 27. - *Variables didácticas Ejercicio 5.*

Solamente dos de los alumnos dan una solución numérica y en ambos casos es correcta. En ambos casos son capaces de identificar el diagrama de árbol y dar una solución correcta. La notación utiliza no es rigurosa ni la adecuada. pero lo realmente importante es que saben realizar la interpretación del enunciado y su posterior resolución, hay que recalcar que utilicen una notación matemática adecuada, tras haber cursado la unidad didáctica correspondiente a la probabilidad.

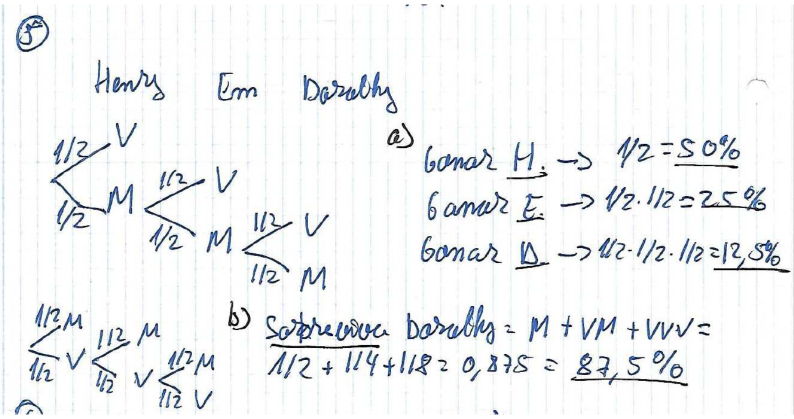


Figura 75. - *Resolución del problema 5 EST1.*

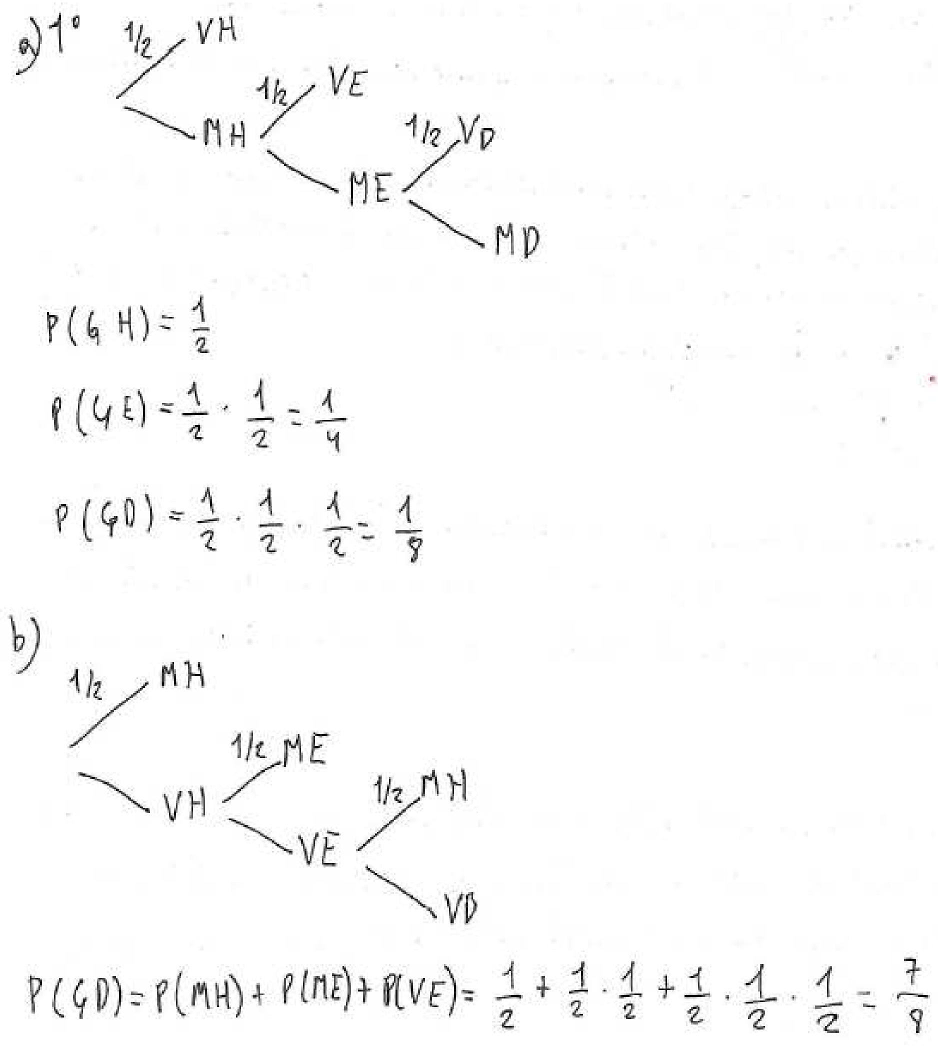


Figura 76. - *Resolución del problema 5 EST5.*

Los otros dos alumnos que dan una solución al problema, en ambos casos indican que la probabilidad de vivir de Dorothy es superior a la de los otros dos participantes en el "juego" lo cual esta deducción es correcta.

No dan solución a la primera cuestión del problema, y no dan una solución numérica en el segundo, por lo que no sería correcto ya que el enunciado lo pide implícitamente.

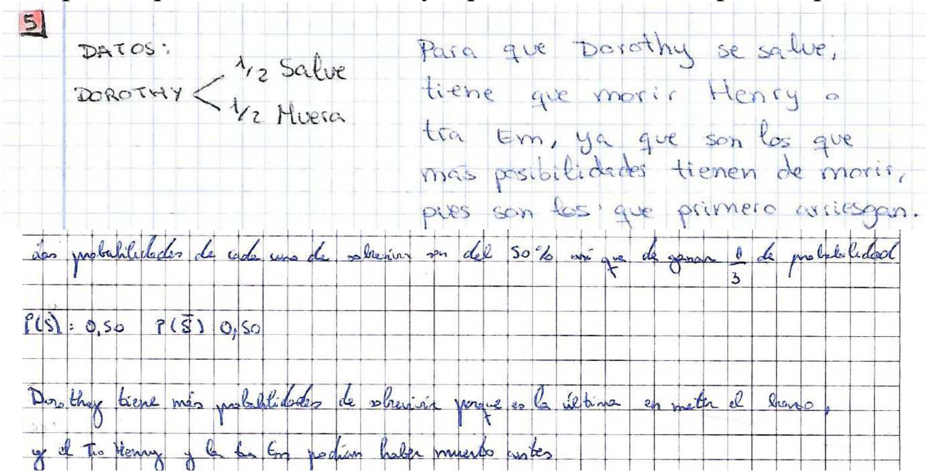


Figura 77. - *Resolución del problema 5 EST1. y EST3.*

Problema 6:

Para realizar el análisis del último de los problemas se definen las siguientes variables didácticas:

	EST1	EST2	EST3	EST4	EST5	EST6	EST7
V1. Da una solución (correcta o no)	x		x		x		
V2. Solución correcta al ejercicio	x						
V3. Se apoya en pictogramas	x						
V4. Utiliza una notación matemática	x		x		x		

Tabla 28. - *Variables didácticas Ejercicio 6.*

Solamente tres de los alumnos realizan el último de los ejercicios planteados en el cuestionario y en los tres casos la solución obtenida es correcta.

Dos de ellos se apoyan en un pictograma para la resolución del ejercicio. Uno de ellos también realiza un diagrama de árbol en el que identifica claramente que el sacerdote tiene las mismas probabilidades de elegir un jarrón u otro y da un valor numérico a la probabilidad de salvarse.

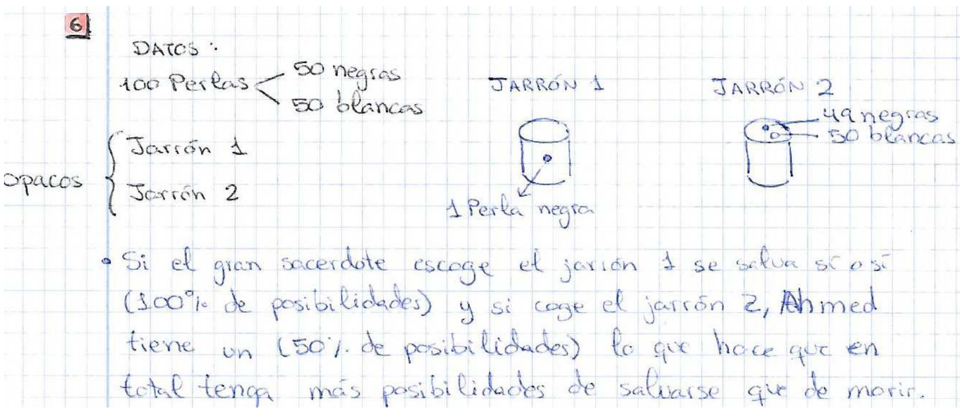


Figura 78. - *Resolución del problema 6 EST3.*

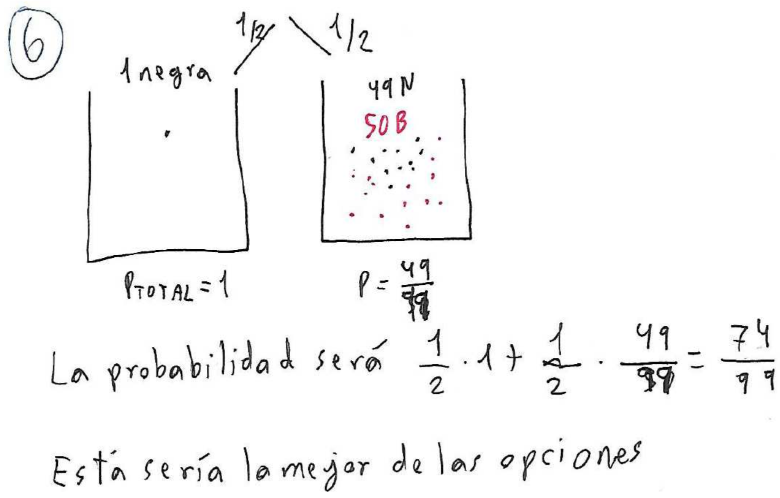


Figura 79. - *Resolución del problema 6 EST5.*

El tercero de los alumnos da una solución correcta e identifica las probabilidades de vivir si elige cada uno de los jarrones pero no la probabilidad total de vivir.

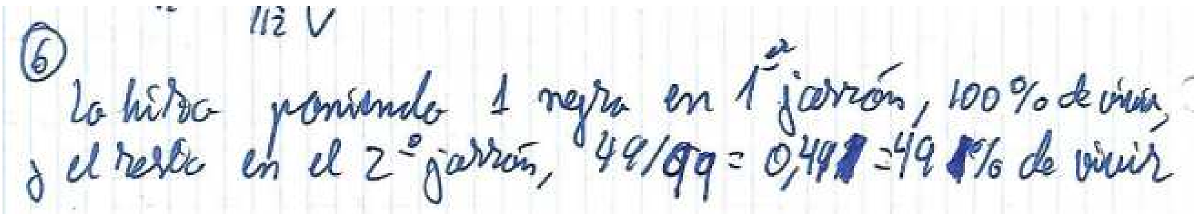


Figura 80. - *Resolución del problema 5 EST1.*

9.5. Discusión de los resultados

En el presente capítulo se va a realizar una discusión de los resultados obtenidos por los alumnos en el cuestionario.

En el primer problema, la mayor parte de los alumnos lo abordan utilizando diagramas de árbol como ya era previsible. Esta técnica la comprenden sin dificultad por lo que en primera instancia suele ser uno de los recursos que barajan o plantean para la resolución de un problema.

Por lo general los alumnos utilizan una nomenclatura adecuada y acorde a la unidad didáctica impartida. Este formalismo matemático no tiene el mismo rigor en la tercera cuestión del ejercicio, en el que los alumnos realizan un conteo de casos favorables entre casos posibles sin plasmar este formalismo matemático en la descripción de la probabilidad del suceso descrito.

Cabe destacar la respuesta de uno de los alumnos que a lo largo de todo el cuestionario da las soluciones de la probabilidad en porcentajes y no mediante un número entre 0 y 1. Realiza grandes razonamientos a lo largo del cuestionario, pero no tiene ningún rigor en cuanto a la nomenclatura matemática utilizada a lo largo del mismo. Aunque se trata de un alumno con grandes capacidades en la tercera evaluación no ha sido capaz de acudir regularmente a clase, lo cual puede justificar las peculiaridades de su respuesta.

Este alumno en un examen estándar obtendrá previsiblemente peor nota que alguno de sus compañeros, si en la corrección del mismo se penaliza la ausencia de rigor matemático, aunque la realidad de lo observado nos indica que probablemente entienda mejor que ellos cómo funciona la probabilidad, y lo que es más importante, sabe comprender y razonar cómo resolver una determinada situación.

Ya en el segundo ejercicio la mayor parte del alumnado es capaz de dar una solución correcta (quizás muchos más de forma intuitiva que mediante el razonamiento lógico) al problema, aunque no todos son capaces de argumentarla. Alguno de ellos prácticamente ni lo intentan. Solamente uno de ellos lo justifica numéricamente, mediante una tabla de contingencia. El alumno que da una solución errónea no ha comprendido bien el enunciado del problema como se ve claramente en la solución aportada, probablemente se trata más de un problema de comprensión lectora que de razonamiento lógico matemático.

Esta respuesta no estaba contemplada o no era esperada, pero tras verla probablemente sea mejor opción que la estrategia esperada del conteo de casos mediante un diagrama de árbol. Lo esperable era que los alumnos justificasen su solución al problema sin la realización de cálculos numéricos, por lo que las respuestas no distan mucho de ello. Si que se esperaba que se explayaran un poco más en su razonamiento o que realmente justificaran correctamente su respuesta, no que dieran la solución al problema sin explicar como han llegado a ella.

En el tercero de los ejercicios, probablemente el más sencillo de los planteados, todos los alumnos a excepción de uno son capaces de dar una solución correcta al mismo, pero solamente la mitad de ellos lo justifican de manera totalmente correcta. Aunque realmente se les recalcó a los alumnos la peculiaridad del cuestionario y que tenían que argumentar todas sus respuestas, tras observar los resultados, se llega a la conclusión de que hay que continuar recalcando la importancia que tiene razonar la respuesta, ya no en este cuestionario sino en cualquier ejercicio que se les puede llegar a plantear. Probablemente alguno de los alumnos que no justifica su resultado sería capaz de hacerlo correctamente, pero no le dan la importancia o relevancia que realmente tiene justificar lo que hace y se queda satisfecho dando un resultado numérico sin explicación alguna.

En el cuarto problema, los resultados son acordes a lo esperado. Alguno de los alumnos trata de resolverlo mediante un diagrama de árbol, que como ya se ha mencionado es uno de los recursos o métodos más utilizados por parte de los alumnos. La totalidad de los alumnos que responden a este ejercicio (dos de ellas ya ni lo intentan) dan como solución que la mejor de las opciones es disparar primero a Carol. Esta era probablemente la solución errónea más esperable ya que intuitivamente parece que la mejor de las opciones es disparar primero a quien mejor puntería tiene, que así va a aumentar las probabilidades de sobrevivir.

Analizando los resultados obtenidos en el quinto ejercicio, se ve que solamente dos de ellos son capaces de realizar un planteamiento adecuado del diagrama de árbol descrito por el problema. Esto difiere bastante de lo esperado ya que se presuponía que los alumnos no iban a tener grandes dificultades en este problema, al menos en la resolución de la primera cuestión planteada en el mismo.

Las dificultades pueden venir de que los alumnos están acostumbrados a la realización de diagramas de árbol simétricos, en el que el número de sucesos de las ramas incipientes es el mismo, mientras que en el ejercicio planteado si se sigue un camino el juego se termina, mientras que, si se sigue el otro, este continúa. Los alumnos no llegan a realizar una interpretación correcta del enunciado del problema, ya que la resolución no entraña grandes dificultades si se entiende qué pide el problema.

En la resolución de los tres últimos problemas se ha de tener en cuenta la comprensión lectora. Los enunciados ya no son tan sencillos, y en ocasiones pueden resultar tediosos. De igual forma se trata de enunciados más largos de lo habitual y esto siempre añade dificultad. En ciertas ocasiones cuando los alumnos ven enunciados muy largos, esto ya les predispone a no hacerlos porque lo asocian enunciado largo a enunciado complicado, o encuentran dificultades en la comprensión lectora de los mismos y, obviamente, no los pueden resolver si no los han leído y comprendido.

Los dos alumnos que plantean este ejercicio y dan una solución correcta al primer apartado, son capaces de hacerlo también en el segundo. Haber entendido correctamente en funcionamiento del juego y les permite realizar con facilidad el cálculo de las probabilidades que ya no es complicado.

Ninguno de ellos reflexiona sobre si el juego puede continuar si Dorothy sobrevive y llega nuevamente su turno, no se plantean la probabilidad de sobrevivir en la segunda y posteriores rondas.

Para concluir, en el sexto y último de los problemas únicamente tres alumnos dan una respuesta y en los tres casos ésta es correcta. Dos de ellos se apoyan en un pictograma para la resolución del ejercicio. Uno de ellos también realiza un diagrama de árbol en el que identifica claramente que el sacerdote tiene las mismas probabilidades de elegir un jarrón u otro y da un valor numérico a la probabilidad de salvarse.

Como conclusión de los resultados, se puede decir que en términos generales los alumnos no están acostumbrados a la resolución de estos tipos de ejercicios, y les cuesta realizar estos razonamientos lógico-matemáticos. Les cuesta pensar, si les sacas de los ejercicios "tipo" en muchos casos se bloquean o se inhiben.

No es que los alumnos no piensen, absolutamente todo el mundo piensa, pero no todos lo hacen detenidamente, ni pueden apoyarse en unas ideas de los que estén seguros y proporcionen confianza. Si esto ocurre, si no se potencia el pensamiento correcto y propio, el sistema educativo está fracasando a la hora de preparar a los alumnos para enfrentarse a los retos del mundo exterior.

La mayoría de los centros continúa considerando a la memoria como base del aprendizaje, aunque es infinitamente más importante el que los alumnos aprendan a pensar de forma correcta y adecuada, y lo más importante, que es muchísimo más útil para su vida diaria. Se tiene que dejar de lado el método de enseñanza tradicional de aprender por repetición, (que todos hemos experimentado en algunos de nuestros procesos educativos) El docente ha de ser paciente con los alumnos, esto no se consigue de un día para otro, y debe retarlos y motivarlos continuamente

Se ha de tratar de que los alumnos lleguen a utilizar importantes destrezas de pensamiento para conectar con el contenido del currículo, (aprender a partir y desde el currículum), incluyendo un pensamiento crítico y creativo, así como diversos modos de análisis. Esto es lo que da lugar a un pensamiento y conocimiento profundo, al contrario que la educación tradicional, en la cual, la memoria es el único modo de aprendizaje, y los alumnos acaban teniendo tan sólo conocimientos superficiales de aquello que están aprendiendo. (Swartz, Padre del método Aprendizaje basado en el Pensamiento, 2017)

La equiparación entre educación tradicional y educación memorística o repetitiva no es correcta, antes, como ahora, han existido muchos profesores que han conseguido que sus alumnos aprendan con metodologías muy variadas que siguen siendo útiles en la actualidad. El problema constatable de gran cantidad de alumnos que prefieren aprender algoritmos y se resisten a pensar es también problema de muchos profesores que se sienten más seguros enseñando técnicas que enseñando a pensar. Esto se observa habitualmente en matemáticas: se resuelven montón de sistemas de ecuaciones, pero no se plantea un problema real que puede ser expresado y resuelto mediante ecuaciones o también de forma mucho más sencilla; se enseña el cálculo de la media y la desviación típica de una muestra de datos en vez de mostrar qué nos dicen estos datos sobre la muestra; se aplica la regla de Laplace pero no se enseña a asignar adecuadamente la probabilidad a un suceso; …

No existe la dicotomía entre educación tradicional y educación actual, que pueden ser similares, aunque antes se utilizase la pizarra y ahora se use el ordenador. La dicotomía está entre la educación que enseña a pensar y la que no lo hace. Aprender matemáticas es aprender a pensar con lógica, es saber distinguir hipótesis de tesis, es definir correctamente, demostrar razonadamente, detectar errores y, en último término, plantear y resolver adecuadamente problemas, tanto de la vida académica como personal y social.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

Durante el presente trabajo de fin de máster de profesorado se analiza el proceso de estudio de la probabilidad de 2º de bachillerato de matemáticas orientadas a las ciencias sociales de la modalidad nocturna.

En la primera parte el trabajo se realiza un análisis longitudinal de los contenidos de probabilidad presentes en el currículo desde el último ciclo de Educación primaria hasta el bachillerato. Para ello se estudia a fondo el contenido los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje presentes en el currículo de las diferentes etapas educativas para posteriormente hacer lo propio con los libros de texto utilizados en dichos cursos.

Tras analizar el currículo, se examinan los ejercicios, problemas y cuestiones tipo de cada uno de los libros en los que aparece contenido de probabilidad desde 3º de la E.S.O. hasta 2º de bachillerato. Para finalizar esta primera parte se analizan las presencias y ausencias del currículo en los libros de texto y la coherencia de los textos con éste.

Es absolutamente necesario la realización de este análisis para conocer la evolución del contenido matemático referente a la probabilidad para luego ser capaces de adecuar el proceso de estudio de estos contenidos al curso correspondiente.

La segunda parte del trabajo se centra en el propio proceso de aprencizaje del contenido de probabilidad en el 2º curso de Bachillerato de Ciencias Sociales. Para ello lo primero que se realizae es un análisis completo de los contenidos de probabilidad en el libro de referencia utilizado para impartir la unidad didáctica, desglosando los diferentes objetivos matemáticos, para posteriormente realizar un análisis gobal de la unidad y destacar ciertos aspectos relevantes. Tras ello se estudian las dificultades y errores previsibles ala hora de realizar este proceso de aprendizaje.

Se continua mostrando el proceso que se ha seguido a la hora de realizar la experimenteacion, desglosando el tiempo de las sesiones utililizadas en impartir cada conenido. Para fianlizar se analiza en proceso de experimentacion realizado en el aula, detallando el diseño del cuestionario, asi como la comparacionde los resultados esperados con los obtenidos.

Conclusiones generales del trabajo

Como conclusiones del trabajo se destaca en primera instancia la importancia de la utilización de una nomenclatura matemática adecuada al nivel cursado, así como la justificación de los resultados obtenidos en los ejercicios o problemas planteados. Al nivel de bachillerato no basta con dar una solución correcta al problema, ésta se ha de plasmar de forma adecuada y detallando el razonamiento seguido para obtenerla. Muchas veces los alumnos dejan de lado estos formalismos tan necesarios.

De igual forma se observa claramente la importancia de la comprensión lectora de los alumnos, los cuales, si no comprenden los que les pide el problema, difícilmente van a poder realizar un razonamiento correcto y llegar a obtener una solución.

Se destaca por encima de todo lo demás la importancia de que los alumnos sean capaces de pensar y razonar, lo cual va a ser mucho más útil en su vida diaria y les va a preparar para posibles retos que se les planteen.

Lo primero que hay que entender es que las matemáticas son un arte. La diferencia entre las matemáticas y el resto de las artes, como la música y la pintura, es que nuestra cultura no la reconoce como tal. Todo el mundo entiende que los poetas, pintores y músicos crean obras de arte, y que se expresan con la palabra, la imagen y el sonido. De hecho, nuestra sociedad es bastante generosa en cuanto a la definición de expresión creativa; arquitectos, cocineros e incluso directores de televisión se consideran artistas. Entonces, ¿por qué no los matemáticos?

Parte del problema es que nadie tiene la menor idea de qué hacen los matemáticos. La percepción común parece ser que los matemáticos están relacionados de alguna forma con la ciencia; quizá ayuden a los científicos con sus fórmulas, o metan grandes números en los ordenadores por una u otra razón. No hay duda de que, si el mundo tuviese que ser dividido en «soñadores poéticos» y «pensadores críticos», la mayoría de la gente pondría a los matemáticos en la última categoría. (Lockhart, 2008)

Lamentablemente, el sistema educativo actual empleado para enseñar matemáticas destruye, con frecuencia, la curiosidad natural y el amor a la creación de patrones innatos en un niño.

A mi forma de ver, a lo largo de la vida educativa se han de crear en el aula unas pautas para fomentar el aprendizaje basado en el pensamiento (o del inglés TBL Thinking-Based Learning). Éstas pretenden enseñar a los alumnos a razonar, pensar, tomar decisiones y, en definitiva, a que los alumnos no solo adquieran los conocimientos y contenidos de las distintas unidades didácticas, sino que sean capaces de desarrollar habilidades y destrezas relacionadas con el pensamiento. Los alumnos han de ser capaces de poner en práctica habilidades, destrezas y conocimientos, de forma autónoma y adecuarlas al contexto de la situación presente y futura.

Aunque ahora esto es tratado como una metodología activa, debería ser el objetivo principal de cualquier docente, ya no solo de matemáticas, sino de cualquiera de las asignaturas. Es verdad que esto hay que entrenarlo y fomentarlo día a día y no siempre es sencillo.

Este enfoque de la educación pretende enseñar a pensar eficazmente a los estudiantes a través del currículo potenciando involucrar activamente al alumno para aprender a aprender. Esto promoverá que los alumnos sean más eficaces, autónomas, flexibles, resolutivas… y en definitiva, competentes, principalmente en cuanto a la competencia para aprender a aprender.

El docente tiene el papel de guiar y presentar objetivos retadores a los alumnos, de forma que éstos aprendan a usar destrezas superiores de pensamiento, no únicamente la memoria y la repetición de algoritmos u métodos de resolución y aplicarlas al aprendizaje de los distintos contenidos.

Estas habilidades de pensamiento se han de practicar periódicamente, Las clases pueden ser magistrales, pero en un determinado momento o situación debemos proponer algún reto que requiera de la utilización de estas habilidades, o en su defecto al final de la unidad didáctica, dedicar algo de tiempo a desarrollar estas habilidades contextualizadas en el temario impartido.

De esta forma se consigue que los estudiantes aprendan de una forma más motivadora y activa a través de las técnicas de pensamiento. Se deja de lado una docencia en la que el objetivo del alumno es pasar los exámenes de una manera pasiva y memorística como actualmente continúa ocurriendo en muchas aulas centradas en el papel del docente. Lo realmente importante es que aprendan habilidades o pautas de pensamiento importantes e imprescindibles desde una manera profunda y enriquecedora, logrando de esta forma que los alumnos sean capaces de comparar y contrastar situaciones y de contar con la destreza necesaria para tomar decisiones y resolver problemas. Estas habilidades adquiridas perdurarán a lo largo de su vida.

En España al igual que otros países, la educación se sustenta demasiado sobre la base de la realización de exámenes estándar para determinar qué es lo que el alumno recuerda de los contenidos adquiridos a lo largo de las correspondientes unidades didácticas. Esto da un protagonismo mayor que el que el aprendizaje requiere a la repetición de los contenidos que a la propia competencia sobre los mismos, lo cual no garantiza un aprendizaje adecuado.

En el libro de Ken Bain "Lo que hacen los mejores profesores universitarios" aparecen distintos tipos de profesores que utilizan muy distintas metodologías, pero todos coinciden el algo: *El buen profesor es el que consigue que sus alumnos aprendan*. Me parece reseñable la frase: "Si los alumnos estudian sólo porque quieren sacar buenas notas o ser los mejores de la clase, no les irá tan bien como si estudiasen porque tienen interés". Despertar el interés de los alumnos es prioritario y no se consigue con ejercicios mecánicos y repetitivos. Dedicar tiempo a que los alumnos piensen siempre resulta productivo. (Brain, 2004)

Cuestiones abiertas

Sería muy interesante plantear este mismo cuestionario, o uno similar adaptado al nivel del alumnado, en una clase en la que desde pequeños se haya formado a los alumnos en el trabajo con estas pautas de pensamiento mencionadas anteriormente. También sería útil diseñar un proyecto conjunto entre los docentes de primaria y de secundaria e ir analizando la consecución de los objetivos mediante la utilización continua de esta metodología para enseñar y aprender a pensar.

También podría ser interesante plantear un cuestionario de estas características en una clase en la que se fomentan estas pautas de pensamiento y en otra en la que el docente no dedica tanto tiempo a enseñar a pensar y analizar si realmente se observan diferencias y se consiguen los beneficios esperables, que se van a mencionar posteriormente.

Se ha de estimular desde pequeños el razonamiento matemático junto con la comprensión lectora, hay que trabajar conjuntamente ambas capacidades, esenciales en el desarrollo cognitivo de los niños e íntimamente relacionadas.

Se propone que los docentes al final de la unidad didáctica dediquen una parte de la última sesión al planteamiento de ciertos retos lógico matemáticos cuyo contenido esté relacionado con la unidad didácticas impartidas.

Estas capacidades, si se entrenan, se puede llegar a conseguir y proporcionan grandes logros y beneficios incrementando la habilidad de cada alumno. Esta estimulación temprana favorecerá su desarrollo y permitirá su utilización en distintas situaciones de la vida cotidiana. Esta estimulación ha de ser acorde a la edad y características del alumnado, adaptándose a sus ritmos de trabajo, y tratando de que sea lo más amena, divertida y agradable posible.

Este pensamiento lógico-matemático incluye el pensamiento numérico y la destreza en el cálculo matemático, permite comprender conceptos abstractos, realizar razonamientos y encontrar las distintas relaciones existentes. Estas habilidades van más allá del mero aprendizaje de las matemáticas como de una asignatura más.

Los beneficios que el razonamiento puede llegar a aportar a los alumnos favorecen notablemente la consecución de las metas y logros personales y, por lo tanto, contribuyen al éxito personal y profesional.

La inteligencia lógica para niños contribuye a:

- Desarrollar la inteligencia y el pensamiento.
- Aumentar la capacidad de solucionar problemas asociados a distintos ámbitos de la vida, mediante la formulación de hipótesis y predicciones.
- Fomentar la capacidad de razonamiento, mejorando la planificación del proceso de resolución e identificando las metas.
- Establecer relaciones entre diferentes conceptos y de esta forma llegar a una comprensión más profunda.
- Proporcionar orden y sentido a las acciones y decisiones tomadas.

Como ya se ha visto en el análisis de los libros de secundaria, ciertas editoriales (como la de Anaya) proponen ciertos retos lógicos y matemáticos al final de la unidad didáctica. Muchos de los docentes no le dedican tiempo a esta parte del contenido que es igual de importante o más que el resto.

De igual forma, en internet aparecen una infinidad de recursos para ir trabajando este este pensamiento y razonamiento críticos. Una de las formas más utilizadas a la hora de fomentarlo es a través de la realización de fichas, adaptadas al nivel del curso en las que se van a usar, como las que se muestran a continuación.

Ya desde muy pequeños (en educación infantil) la mayoría de los contenidos matemáticos son principalmente lógicos. Se aprende realizando comparaciones, ordenando conceptos, relacionando y asociación ideas y expresando correctamente las características comunes que definen los objetos.

Fichas para alumnos de educación infantil:

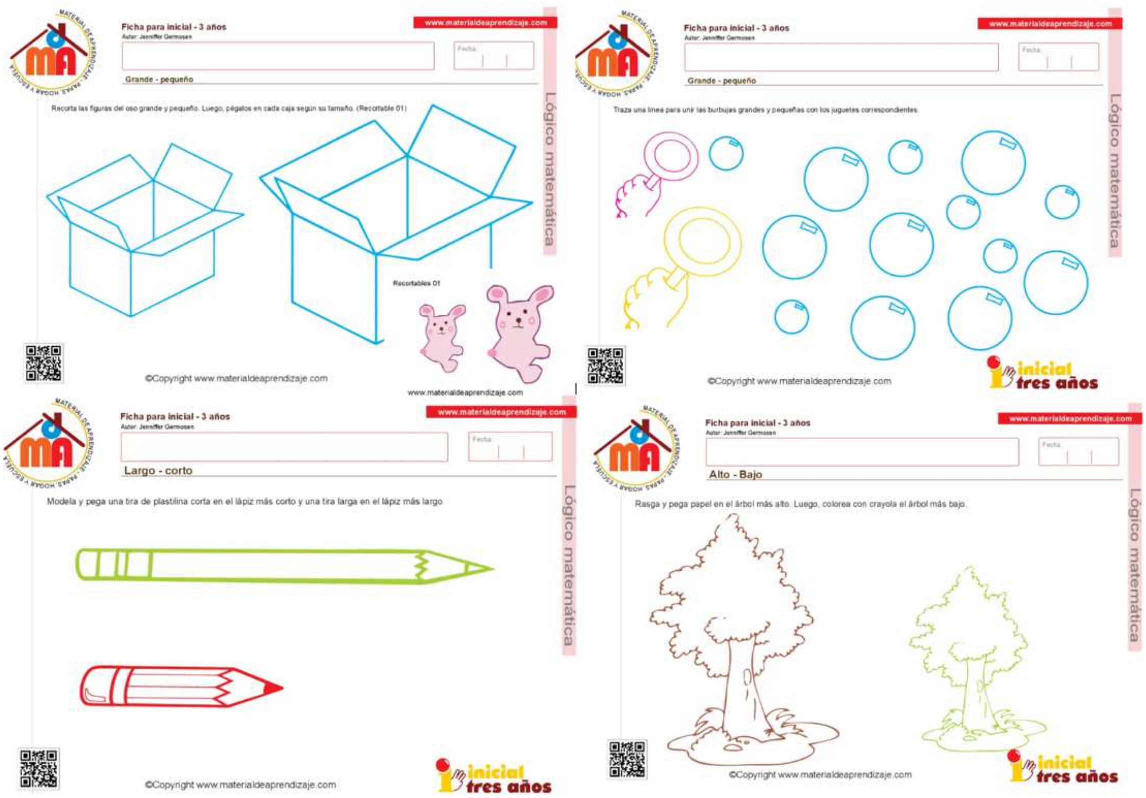


Figura 81. - *Fichas lógica matemática educación infantil.*
Nota: Imagen extraída de (Orientacionandujar, 2015)

Fichas para alumnos de educación primaria:

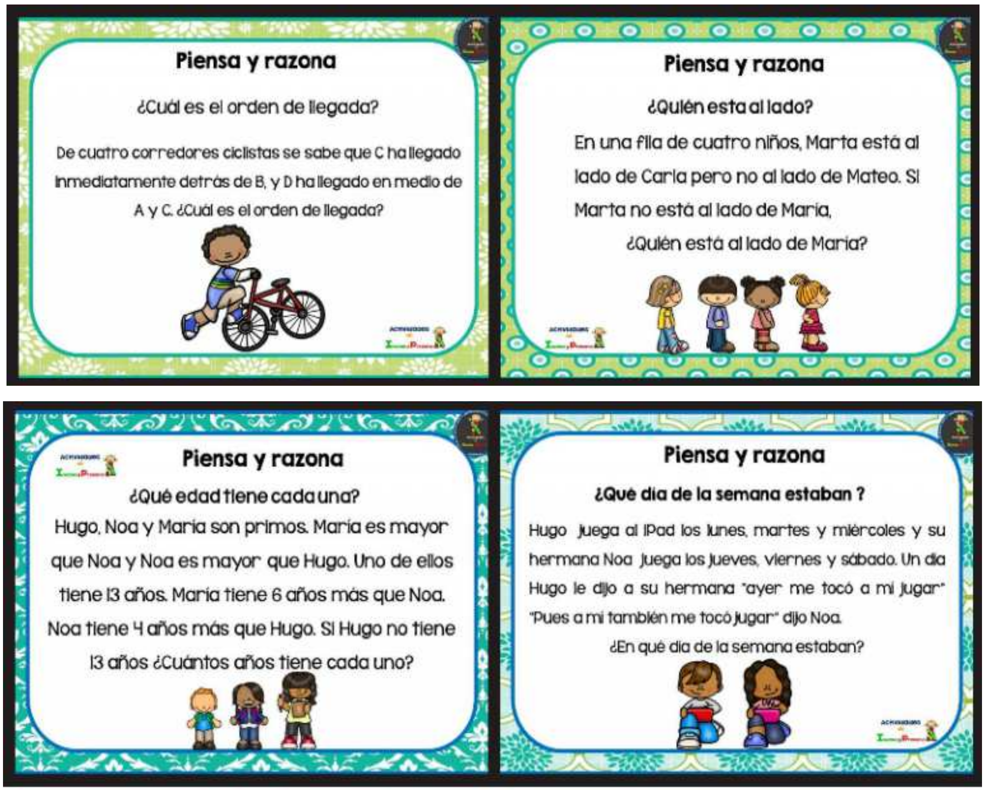


Figura 82. - *Fichas lógica matemática educación primaria.*
Nota: Imagen extraída de (ACRBIO, 2018)

Fichas para alumnos de educación secundaria y bachillerato:

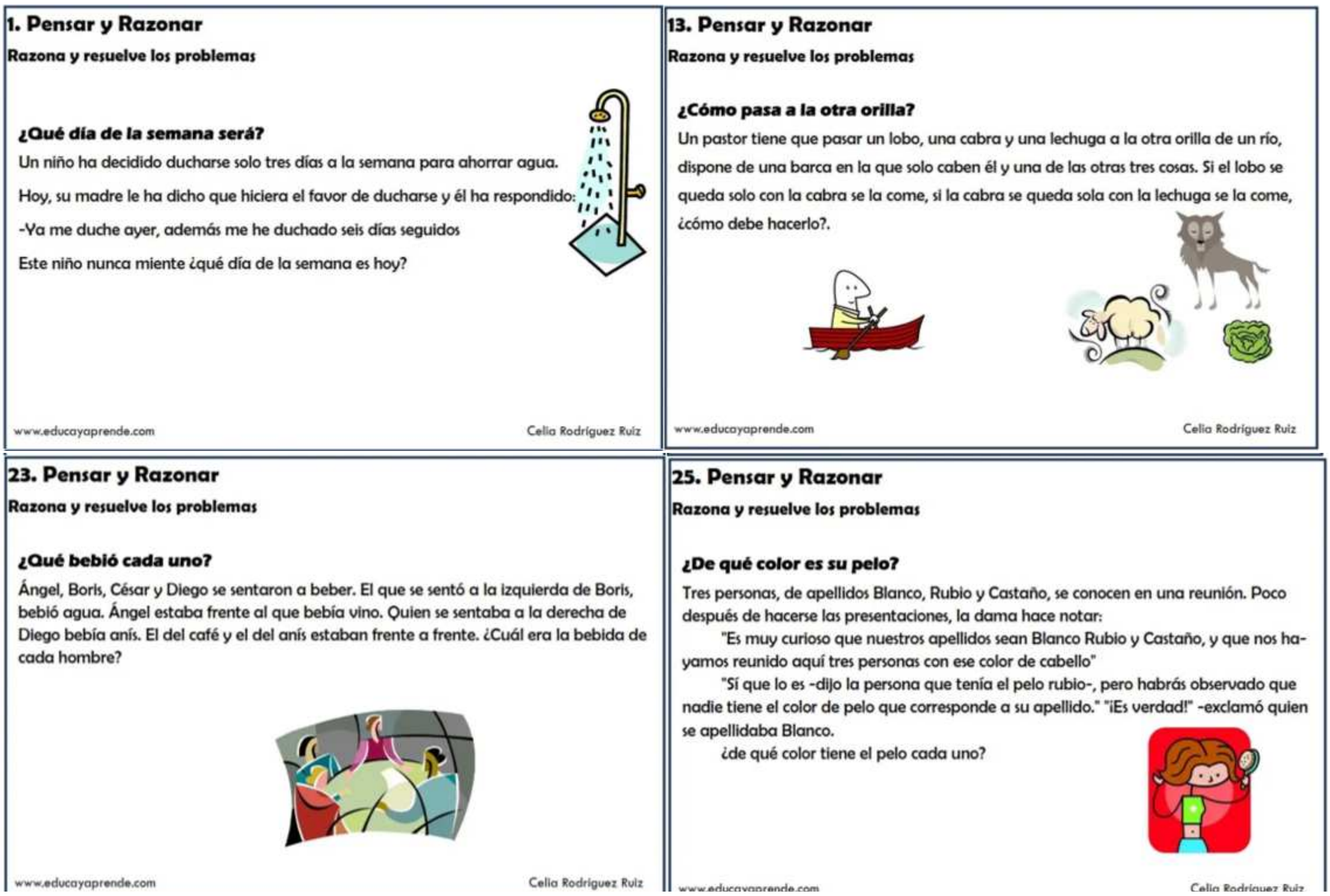


Figura 83. - *Fichas lógica matemática educación secundaria y bachillerato.*

Nota: Imagen extraída de (Rodriguez, s.f.)

Para concluir, podemos afirmar que hoy en día existen infinidad de recursos, en todo tipo de soportes, que nos ofrecen, como docentes, un amplio abanico de posibilidades a la hora de enfocar cómo se ha de tratar y fomentar en las clases el pensamiento crítico y lógico. Las nuevas tecnologías, una vez más, pueden ser nuestras aliadas, ya sea para la búsqueda de recursos o para la utilización de algún tipo de recurso interactivo en la simulación de experimentos como los que se muestran a continuación y que se engloban dentro del proyecto Gauss (El INTEF desarrolla el Proyecto Gauss para ofrecer al profesorado numerosos ítems didácticos y de applets de GeoGebra, de prácticamente todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria)

Figura 84. - *Applets proyecto Gauss.*

U otros recursos como pueden ser la programación por bloques, ya que en la programación esta muy presente este pensamiento lógico. En muchos institutos cuentan con alguna asignatura optativa en la que trabajan estos tipos de recursos que pueden ser muy interesantes.

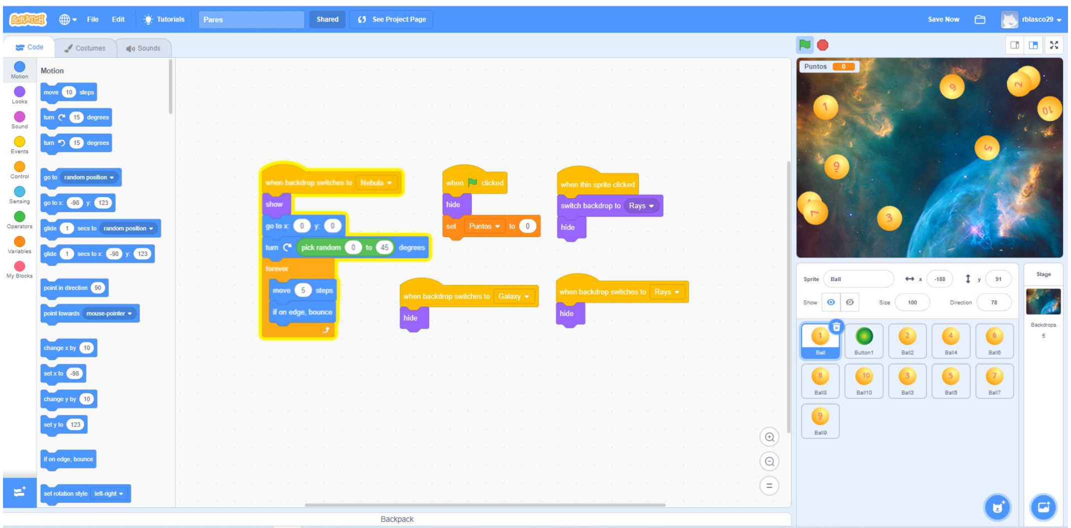


Figura 85. - *Scratch (programación por bloques)*

Referencias

ACRBIO. (14 de Marzo de 2018). *Imágenes educativas*. Obtenido de Fichas para razonar y pensar, reforzamos el pensamiento matemático: https://www.imageneseducativas.com/fichas-para-razonar-y-pensar-reforzamos-el-pensamiento-matematico/fichas-para-razonar-y-pensar-reforzamos-el-pensamiento-matematico-portada/

Alconchel, M. B. (2014). *¿Y los ciruelos chinos? Retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas.* Barcelona: Editorial GRAÓ.

Asin, M. J. (s.f.). Problemas lógicos y soluciones. *Apuntes Intensificación en Matemáticas (Master Profesorado).*

Aulaplaneta. (16 de Octubre de 2017). Obtenido de Ventajas del aprendizaje basado en el pensamiento o Thinking-Based Learning (TBL): https://www.aulaplaneta.com/2017/10/16/recursos-tic/ventajas-del-aprendizaje-basado-pensamiento-thinking-based-learning-tbl#:~:text=El%20aprendizaje%20basado%20en%20el,de%20los%20temas%20del%20curr%C3%ADculo.

Brain, K. (2004). *Lo que hacen los mejores profesores de universidad.* Cambridge.

Bruner, J. S. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación.* (Seleccion de textos por Jesús Palacios): Ediciones MORATA S. L.

Castelo, S. C., Hernandez, A. S., & Hernandez, L. V. (s.f.). *Bachillerato a distancia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Ministerio de Educación Cultura y deporte. Subdirección General de Aprendizaje a lo largo de la vida. CIDEAD Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia.

Cinta de Moebius. Exprime tu mente. (s.f.). Obtenido de Problemas de lógica, matemáticas e ingenio. Los cien políticos.: https://www.cintademoebius.com/problema-logica/los-cien-politicos/

Comunidad Foral de Navarra, Boletín Oficial de Navarra (BON). (2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra*. (BON 174, de 5 de septiembre, Anexo I 41-57).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) . (2015). *Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de la enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra*. (BON 127, de 2 de julio, 81-90).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON). (2015). *Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra*. (BON 127, de 2 de julio, 44-57).

EBAU Matemáticas Exámenes de Matemáticas en la EBAU. (s.f.). Obtenido de https://www.ebaumatematicas.com/matematicas-ccss-ii/

Font, V., Wilhelmi, M. R., & Godino, J. D. (2006). Análisi ontosémico de una leción sobre la suma y la resta. *Relime Número, Especial*, (pp. 1331-155).

Frabetti, C. (07 de Mayo de 2021). El juego de la ciencia. Números vampiros. *El mundo*. Obtenido de https://elpais.com/ciencia/2021-05-07/numeros-vampiros.html

Frabetti, C. (14 de Mayo de 2021). El juego de la ciencia. Probabilidades sorprendentes. *El mundo*. Obtenido de Probabilidades sorprendentes: https://elpais.com/ciencia/2021-05-14/probabilidades-sorprendentes.html

Gobierno de España. Ministerio de Educación y ciencia. Boletín Oficial del Estado (BOE). (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la* *estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* BOE 266, de 6 de noviembre de 2007, 45381-45477.

Gobierno de España. Ministerio de Educación y ciencia. Boletín Oficial del Estado(BOE). (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* BOE 3, de 3 de enero de 2015, 169-546.

Gobierno de España. Ministerio de Educación, Política Social y Deporte. Boletín oficial del Estado (BOE. (2008). *Orden ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.* BOE 147, de 18 de junio de 2008, 27492-27608.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, (Recife, Brasil).

Godino, J., & D'Amore, B. (2007). El enfoque ontosemico como un desarrollo de la teoría antropológica en la didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericada de investigación en matemática educativa*, (pp. 191-218).

IES Sagasta Logroño. (2015). Obtenido de https://iessagasta.larioja.edu.es/index.php/nuestra-oferta-educativa/bachillerato-a-distancia/d-semipresencial/n-2bach/n-horario-2b-2

Jiménez, J. C., Albero, I. G., González, M. J., & Cañas, R. C. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-678-5817-4.

Jiménez, J. C., Albero, I. G., González, M. J., & Cañas, R. C. (2016). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-698-1876-3.

Jiménez, J. C., Albero, I. G., González, M. J., & Cañas, R. C. (2016). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4. ESO. Profesorado. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-698-1878-7.

Jiménez, J. C., González, M. J., & Cañas, R. C. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Bachillerato. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-698-2053-7.

Jiménez, J. C., González, M. J., & Cañas, R. C. (2016). *Matemáticas II. Bachillerato. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-698-2052-0.

Jiménez, J. C., González, M. J., Cañas, R. C., & Fernández, E. S. (2015). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Bachillerato. Anaya + Digital.* Madrid: GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-698-0536-7.

Lockhart, P. (2008). En *El lamento de un matemático* (págs. 739–766).

Orientacionandujar. (13 de Septiembre de 2015). *Orientacion Andujar*. Obtenido de Colección de fichas para trabajar razonamiento Lógico matemático educación Infantil: https://www.orientacionandujar.es/2015/09/14/coleccion-de-fichas-para-trabajar-razonamiento-logico-matematico-educacion-infantil/

Rodriguez, C. (s.f.). *Educa y aprende*. Obtenido de Fichas didácticas. Ejercicios de Lógica Matemática para niños: https://educayaprende.com/fichas-logica-matematica-razonar-y-pensar/

Rubio, M. M. (s.f.). *Educacion 3.0*. Obtenido de Pautas para fomentar el aprendizaje basado en el pensamiento en el aula: https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/como-ensenar-a-pensar/

Solucionarios10. (s.f.). Obtenido de https://solucionarios10.com/2-bachillerato/matematicas/

Swartz, R. (04 de Marzo de 2015). Director del National Center for Teaching Thinking. (D. Momtó, Entrevistador)

Swartz, R. (23 de Enero de 2017). Padre del método Aprendizaje basado en el Pensamiento. (M. Amorós, Entrevistador)

Villatoro, F. R. (7 de Enero de 2010). *La Ciencia de la Mula Francis*. Obtenido de ¿Cuál es la probabilidad de tener dos hijos varones, si uno de ellos se llama Francis?: https://francis.naukas.com/2010/01/07/cual-es-la-probabilidad-de-tener-dos-hijos-varones-si-uno-de-ellos-se-llama-francis/

Wilhelmi, M., & Lasa, A. (2022). *Plantilla memoria de Practicum II.* Pamplona: UPNA (Universidad Publica de Navarra).

Índice figuras

Índice tablas

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto.
B. Orientaciones unidad didáctica
C. Ejercicios preseleccionados

A. Unidad didáctica del libro de texto

UNIDAD

8 Probabilidad

El origen del estudio de la probabilidad se encuentra en los juegos de azar. Los primeros problemas fueron planteados por jugadores. El gran duque de Toscana mostró en el siglo XVI su sorpresa al advertir que al tirar tres dados se obtenía con más frecuencia 10 que 9 puntos, cuando ambas cifras – 10 y 9 – se descomponían, según él, de 6 maneras diferentes. El problema del gran duque fue resuelto por Galileo.

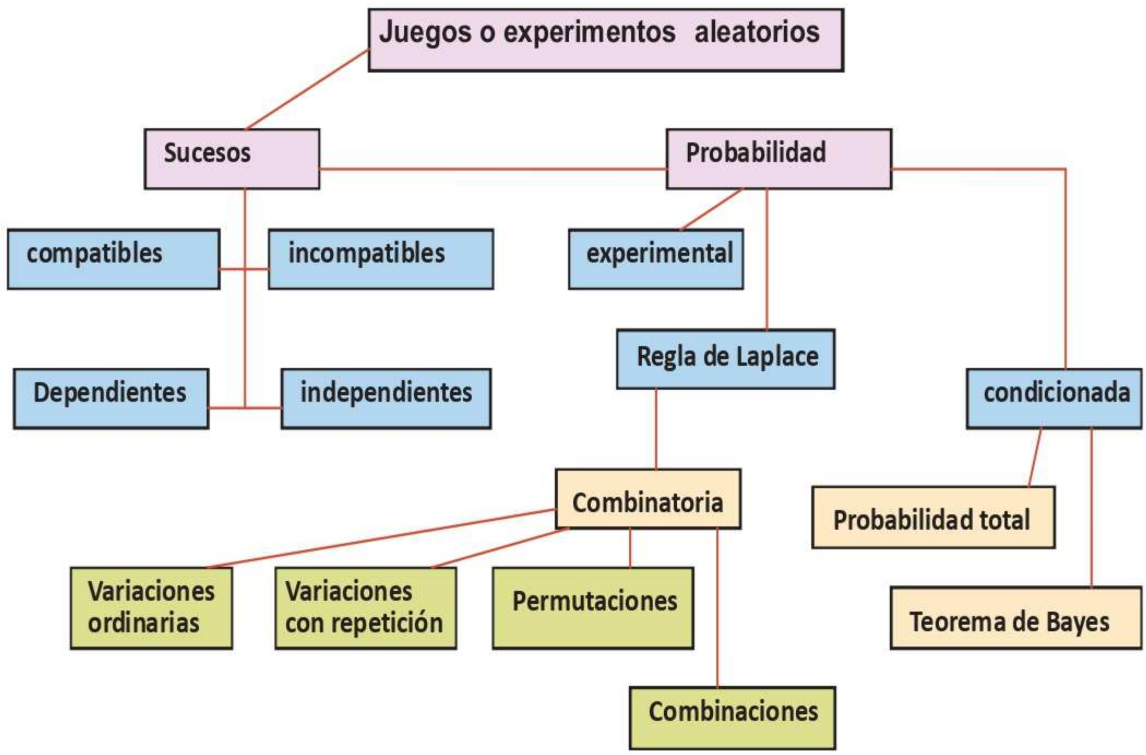
Otro problema famoso planteado a mediados de siglo XVII por el caballero de Meré, un cortesano francés, a Blaise Pascal dio lugar a una relación epistolar entre el jurista y matemático Pierre de Fermat y el propio Pascal en la que se fijaron los fundamentos del cálculo de probabilidades.

El estudio de probabilidad alcanzó un gran desarrollo, durante el siglo XIX, de la mano de los físicos Maxwell, Gibbs y Boltzmann. Creadores de lo que se conoce como Mecánica Estadística, en la que asignan probabilidades a los estados de las moléculas de un gas contenido en un recipiente. Estos estudios condujeron a James Clerk Maxwell (1831 – 1879) a afirmar que la verdadera lógica del mundo está en el cálculo de probabilidades. Sin ánimo de ir tan lejos, en esta Unidad didáctica sólo nos ceñiremos al estudio de la probabilidad en juegos o experimentos aleatorios sencillos. También introduciremos el concepto de probabilidad condicionada y sucesos independientes, útiles importantes para la resolución de muchos problemas de probabilidad. La Unidad termina con el estudio de la probabilidad total y el teorema de Bayes, éste último es un intento de cuantificar en qué grado varias causas contribuyen a la aparición de un efecto. Hemos dejado, a modo de apéndice, dos apartados al final para resolver algunos de los problemas de probabilidad con ayuda de la combinatoria.

• Juego de mesa *(ISFTIC. Banco de imágenes)*

En esta Unidad nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Recordar en qué consiste un experimento aleatorio.
2. Conocer qué es un suceso y las operaciones con sucesos.
3. Aprender a aplicar la regla de Laplace.
4. Identificar sucesos independientes y calcular probabilidades condicionadas.
5. Calcular probabilidades totales y la de que un efecto tenga determinada causa.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

149

1. Espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos. Propiedades

Sabemos, lo hemos visto el curso pasado, que un experimento aleatorio se caracteriza por la imposibilidad de prever el resultado a pesar de que se realice siempre en las mismas condiciones. Recordamos, en el cuadro siguiente, la terminología básica en torno al experimento aleatorio de tirar un dado una única vez (una única prueba).

Concepto	Significado	Ejemplo
Espacio muestral	Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.	$E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Suceso	Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.	$A = \{$*sacar número par*$\} = \{2,4,6\}$
Suceso elemental	Suceso constituido por un único resultado.	$C = \{$*sacar el número* $3\} = \{3\}$
Suceso seguro	Suceso constituido por todos los resultados de la prueba.	$E = \{$*sacar número menor que* $7\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
Suceso imposible	Suceso que no se realiza nunca; es el suceso que no contiene resultado alguno.	$D = \{$*sacar un número mayor que* $7\} = \Phi$ *El suceso imposible se simboliza por* Φ
Intersección de sucesos	Suceso constituido por el conjunto de resultados comunes a A y a B.	$A = \{$*sacar número par*$\} = \{2,4,6\}$ y $B = \{$*sacar número mayor que* $4\} = \{5,6\}$ $A \cap B = \{$*número par y mayor que* $4\} = \{6\}$
Unión de sucesos	Suceso constituido por sucesos elementales de A o de B.	$A \cup B = \{$*número par o mayor que* $4\} = \{2,4,5,6\}$
Sucesos incompatibles	Sucesos cuya realización simultánea es imposible, es decir, su intersección es el suceso imposible.	$A = \{$*sacar número par*$\}$ y $B = \{3\}$, *entonces* $A \cap B = \Phi$
Sucesos contrarios o complementarios	Son dos sucesos incompatibles cuya unión es el suceso seguro.	$A = \{$*sacar número par*$\}$ y $\overline{A} = \{$*sacar número impar*$\}$ $A \cap \overline{A} = \Phi$ *y* $A \cup \overline{A} = E$. Es evidente que todos los elementos de $\overline{A}$ son los elementos de E que no pertenecen a A. Los sucesos E y Φ son complementarios, ya que $\overline{E} = \Phi$ y $E \cap \Phi = \Phi$.

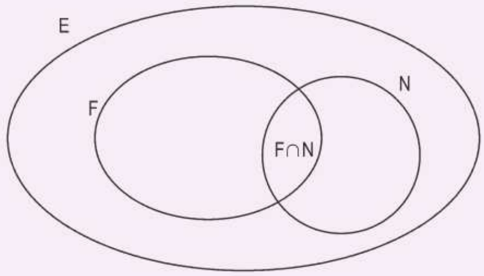
La letra "o" que aparece en la definición de la unión de sucesos no es una "o exclusiva", sino una "o inclusiva" como se ve en algunos escritos "o/y".

Ejemplo

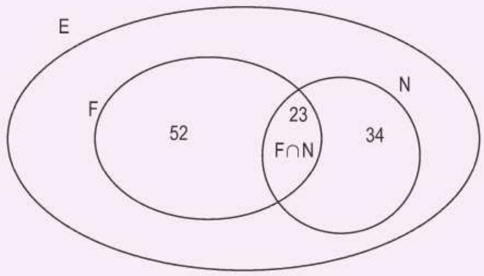
1. En un campamento de verano se practican dos deportes: fútbol y natación. De los 120 jóvenes inscritos, 75 se han apuntado a fútbol y 57 a natación, mientras 23 se han apuntado a ambos deportes. ¿Cuántos han ignorado el fútbol? ¿Cuántos han desechado la natación? ¿Cuántos practican el fútbol pero no la natación? ¿Cuántos practican la natación pero no el fútbol? ¿Cuántos jóvenes se han inscrito en fútbol o natación?¿Cuántos no se han apuntado a fútbol ni a natación?

Solución:

Se suelen representar estos datos por diagramas, llamados diagramas de Venn. El conjunto *E* representa el total de jóvenes. Dentro hemos dibujado dos óvalos, *F* y *N*, que corresponden a los jóvenes que practican fútbol y natación respectivamente.



La parte común a *F* y *N* simboliza los jóvenes que se han apuntado a fútbol y natación, es decir, $F \cap N$. Los que han ignorado el fútbol pertenecen al conjunto $\overline{F}$ y son 120 – 75 = 45. Los que no han escogido natación constituyen el conjunto expresado por $\overline{N}$ y son 120 – 57 = 63.



Los que practican fútbol y no natación, es decir, el conjunto $F \cap \overline{N}$ está constituido por 75 – 23 = 52, mientras que los que practican natación y no fútbol, los del conjunto $N \cap \overline{F}$, son 57 – 23 = 34. Es evidente que *F* es unión de dos conjuntos incompatibles $N \cap \overline{F}$ y $F \cap N$, ya que los que se han apuntado a fútbol pueden dividirse en dos grupos: los que practican también natación y los que no, luego $F = (F \cap N) \cup (F \cap \overline{N})$; y lo mismo ocurre con *N*, $N = (N \cap F) \cup (N \cap \overline{F})$.

Por otra parte, $F \cup N$ está formado por $F \cap \overline{N}$, $F \cap N$ y $N \cap \overline{F}$, en consecuencia está compuesto por 52 + 23 + 34 = 109 jóvenes. Finalmente, el conjunto $\overline{F} \cap \overline{N}$, los que no se han apuntado a fútbol y no se han apuntado a natación, constituye el complementario de los que se han inscrito en algo, $F \cup N$, y en consecuencia $\overline{F \cup N} = \overline{F} \cap \overline{N}$; además resultan ser : 120 – 109 = 11.

Vamos a deducir algunas propiedades de las operaciones con sucesos mencionadas antes.

Aunque no es una nueva operación definimos la **diferencia de sucesos** $A-B$ como el suceso $A\cap\overline{B}$, es decir, los elementos de A que no pertenecen a B. Según esto los elementos de A se dividen en dos sucesos incompatibles: los que pertenecen también a B y los que no pertenecen a B, pero sí a $\overline{B}$. Luego $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. Del mismo modo, resulta fácil de ver que el complementario del complementario de A , $\overline{\overline{A}}$, es el propio A.

Mayor dificultad e interés ofrecen las **leyes de De Morgan**, las hemos visto en la última pregunta del ejemplo 1, que enunciamos así:

1ª $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$, el complementario de la unión es igual a la intersección de complementarios.

2ª $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, el complementario de la intersección es igual a la unión de complementarios.

El nombre de estas leyes proviene del lógico británico que las estudió, Augustus de Morgan (1806 - 1871).

Ejemplo

2. Comprobar las leyes de De Morgan en el juego de tirar un dado, sabiendo que $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{5,6\}$.

Solución:

En el juego de tirar un dado, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Si $A=\{2,4,6\}$, $\overline{A}=\{1,3,5\}$; y como $B=\{5,6\}$, entonces $\overline{B}=\{1,2,3,4\}$. Por otra parte $A\cap B=\{6\}$.

Primera ley de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Dado que $A\cup B=\{2,4,5,6\}$, $\overline{A\cup B}=\{1,3\}$; y por otro lado $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,3\}$. Luego la igualdad se cumple.

Segunda ley de De Morgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Dado que $A\cap B=\{6\}$, $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5\}$; y por otra parte $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,5\}$. Luego la igualdad también se cumple.

Actividades

1. En un sondeo hecho a 200 personas se les preguntó por sus hábitos. A la pregunta de si fumaban regularmente, 92 han respondido que sí, 68 han admitido que consumen regularmente bebidas alcohólicas y 45 que fuman y beben. ¿Cuántas personas son fumadoras, pero no consumen alcohol? ¿Cuántas consumen regularmente alcohol y no son fumadoras? ¿Cuántas no son fumadoras ni consumen alcohol? ¿Cuántas son fumadoras o consumen alcohol con regularidad?

2. Dado un espacio muestral $E = \{r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ y dos subconjuntos o sucesos de este espacio muestral $A = \{r,s,t,u,v\}$ y $B = \{t,v,x\}$ comprobar las leyes de Morgan:

1ª $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

2ª $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

2. Definición de probabilidad de un suceso

Al realizar un experimento aleatorio desconocemos cuál va ser el resultado, por lo que no tenemos la certeza de que ocurra o no un determinado suceso *A*; pero sí podemos asignar al suceso *A* un número que mida la posibilidad de que ocurra. Este número se llama probabilidad del suceso *A* y se simboliza por $P(A)$.

2.1. Propiedades de la probabilidad de un suceso

Antes de asignar un número a cada uno de los sucesos de un experimento aleatorio, vamos a establecer algunas propiedades deseables de esa asignación. Para cada suceso *A*, es decir, para cada subconjunto del espacio muestral *E*, al número $P(A)$, que mide la probabilidad de que *A* ocurra, le vamos a imponer que cumpla las siguientes exigencias (o axiomas):

1. Para cada suceso *A*, $P(A) \geq 0$.
2. La probabilidad del suceso seguro, *E*, es igual a 1, $P(E) = 1$.
3. Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \Phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Aún sin saber cómo asignaremos probabilidades a un suceso, nos encontramos ya con algunas consecuencias de los axiomas anteriores, y que nada tienen que ver con el modo de calcular $P(A)$. Veámoslas, son las consecuencias siguientes:

1. Para cada suceso *A*, la probabilidad del complementario, $\overline{A}$, es igual a 1 menos la probabilidad de *A*, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración: Como $E = A \cup \overline{A}$ y $A \cap \overline{A} = \Phi$, según el axioma 3, $P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ y por el axioma 2, $1 = P(A) + P(\overline{A})$. Despejando $P(\overline{A})$, resulta $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Esta fórmula es sumamente útil porque en muchos problemas resulta más fácil el cálculo de la probabilidad de $\overline{A}$ que la de *A*.

2. La probabilidad del suceso imposible es 0, $P(\Phi) = 0$.

Demostración: Como *E* y Φ son complementarios, de la consecuencia anterior, $P(\Phi) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$

Demostración: Es una consecuencia directa del axioma 3.

4. Para cada par de sucesos *A* y *B*, se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostración: Sabemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, y que $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son incompatibles, luego $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ y $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Por otra parte $A \cup B = (A - B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ y como $A \cap \overline{B}$ y *B* son incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$. Sustituyendo $P(A \cap \overline{B})$ por la expresión calculada antes, obtenemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Esta fórmula se emplea en muchos problemas sencillos de probabilidad.

Ejemplos

3. Si A y B son sucesos de un espacio muestral con $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

Calcular: **a)** $P(A\cup B)$, **b)** $P(\overline{A})$, **c)** $P(\overline{B})$, **d)** $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ y **e)** $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

Solución:

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{17}{30}$.

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

c) $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

d) Utilizamos la 1ª ley de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, luego

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{17}{30}=\frac{13}{30}.$$

e) Utilizamos la 2ª ley de De Morgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, luego

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

4. En un Instituto, la probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6 y de que apruebe economía es 0,4, mientras que la probabilidad de que apruebe las dos es 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas o economía o, lo que es lo mismo, de que apruebe al menos una de estas dos asignaturas?

b) ¿Y de que no apruebe ninguna?

c) ¿Y de que no apruebe matemáticas ni economía? (Es otra forma de plantear el apartado anterior).

Solución:

Sea A el suceso aprobar matemáticas y B el aprobar economía. Lógicamente $\overline{A}$ es suspender matemáticas y $\overline{B}$ es suspender economía.

a) El suceso $A \cup B$ es aprobar al menos una asignatura,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}4-0{,}3=0{,}7.$$

b) No aprobar ninguna es el suceso complementario de $A \cup B$, luego

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3.$$

c) No aprobar matemáticas ni economía es el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$, que por la 1ª ley de De Morgan es igual que $\overline{A\cup B}$,

luego $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3$.

Actividades

3. Dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cup B) = 0,8$. Calcular $P(A \cap B)$.

4. De los sucesos de un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

   Calcular **a)** $P(\bar{A})$; **b)** $P(\bar{B})$; **c)** $P(A \cap B)$ y **d)** $P(A \cap \bar{B})$.

5. En un experimento aleatorio sabemos que $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ y $P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$.

   Calcular las probabilidades de los sucesos A, B y $\bar{A} \cap B$.

2.2. Asignación de probabilidades por la frecuencia relativa

La **frecuencia relativa** del suceso A, f_r, es el cociente que resulta al dividir el número de veces que ocurre A, n_A, entre el número de veces que realizamos el experimento aleatorio, N,

$$f_r(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número de veces que realizamos el experimento}} = \frac{n_A}{N}$$

La frecuencia relativa de un suceso, al aumentar el número de veces que realizamos el experimento, converge o tiende a estabilizarse alrededor de un número fijo. Esto es tanto más notorio cuantas más veces realicemos el experimento. Esta aproximación de la frecuencias relativas a un número fijo está garantizada por la llamada Ley de los Grandes Números. De este modo atribuimos como probabilidad del suceso A el número $f_r(A)$. Esta forma de atribuir probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio se dice por experimentación o empírica.

Ejemplo

5. Una cadena de montaje de una fábrica está dotada de un sistema de alarma que se activa cuando se produce un incidente. Se sabe por experiencia que la probabilidad diaria de que la alarma se active sin que haya incidente es 1/50; la probabilidad diaria de que haya un incidente y la alarma no se active es 1/500; y la probabilidad de que en un día surja un incidente es 1/100. **a)** Calcular la probabilidad diaria de que ocurra un incidente y la alarma se active. **b)** Calcular la probabilidad diaria de que la alarma se active.

   Solución:

   Llamaremos A al suceso la alarma se activa, I al suceso se produce un incidente y a los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{I}$, no se activa la alarma y no se produce incidente. Según esto sabemos que $P(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{50}, P(I \cap \bar{A}) = \frac{1}{500}$ y $P(I) = \frac{1}{100}$.

   a) Si la alarma salta y se produce un incidente, estamos ante el suceso $A \cap I$. Por otra parte, sabemos que $I = (I \cap \bar{A}) \cup (I \cap A)$, siendo $(I \cap \bar{A})$ y $(I \cap A)$ incompatibles. Luego

   $$P(I) = P((I \cap \bar{A}) \cup (I \cap A)) = P(I \cap \bar{A}) + P(I \cap A)$$

   Sustituyendo los valores conocidos en la igualdad anterior,

   $$\frac{1}{100} = \frac{1}{500} + P(I \cap A) \Rightarrow P(I \cap A) = \frac{1}{100} - \frac{1}{500} = \frac{1}{125} = 0,008.$$

b) Queremos conocer $P(A)$ y sabemos que $A = (I \cap \bar{A}) \cup (\bar{I} \cap A)$, siendo $(I \cap A)$ y $(\bar{I} \cap A)$ sucesos incompatibles.

Por tanto, $P(A) = P((I \cap A) \cup (\bar{I} \cap A)) = P(I \cap A) + P(\bar{I} \cap A) = \frac{1}{125} + \frac{1}{50} = \frac{7}{250} = 0{,}028$.

Actividades

6. Se lanza un dado de 6 caras mal construido y experimentalmente se determina que $P(1) = 0{,}1$; $P(2) = 0{,}2$; $P(3) = 0{,}3$; $P(4) = 0{,}1$ y $P(5) = 0{,}15$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de salir un 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar con este dado?

7. La probabilidad de que un equipo de fútbol gane un partido es 0,5 y la de que pierda es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que empate?

2.3. Asignación de probabilidades en experimentos aleatorios con resultados equiprobables. Regla de Laplace

Cuando es previsible que todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio tengan la misma disponibilidad de salir podemos atribuir, como probabilidad, a cada uno de ellos el número

$$\frac{1}{n^o \ total \ sucesos \ elementales}$$

Esta asignación de probabilidades que sólo podemos hacer en experimentos aleatorios con resultados o sucesos elementales equiprobables, es decir, todos tienen la misma probabilidad, nos permite disponer de una regla para hallar la probabilidad de cualquier otro suceso. Veamos cómo se hace.

Si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es un suceso constituido por n sucesos elementales, entonces es posible escribir este suceso como unión de sucesos incompatibles dos a dos, así: $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}$.

La probabilidad de A, si empleamos la consecuencia 3, será:

$$P(A) = P(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}) == P\{a_1\} + P\{a_2\} + ... + P\{a_n\} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

En donde hemos supuesto que m es el número total de sucesos elementales del experimento aleatorio. Luego,

$$P(A) = \frac{n^o \ de \ sucesos \ elementales \ de \ A}{n^o \ de \ sucesos \ elementales \ de \ E}$$

A los elementos de *A* se les suele llamar resultados favorables a la realización del suceso *A* y a los de *E*, resultados posibles; por lo que la fórmula anterior se acostumbra a escribir así:

$$P(A) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

A este cociente se le llama **Regla de Laplace**, y será la fórmula que emplearemos en la mayor parte de los problemas, salvo en aquellos en que las probabilidades vengan asignadas ya en el enunciado.

Ejemplo

6. El control de calidad de una fábrica descubre que cada 2.000.000 de piezas producidas hay 10000 defectuosas. Si no se modifican las condiciones de fabricación, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?

Solución:

$P(\text{pieza defectuosa}) = \frac{10000}{2000000} = \frac{1}{200} = 0{,}005$. El número 0,005 se puede leer como un porcentaje:

0,005 = 0,5/100 = 0,5%. La probabilidad indica un porcentaje, es decir, el porcentaje de éxito o de ocurrencia de un suceso.

Actividades

8. Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) *A* = {se obtiene al menos un 5}.

b) *B* = {se obtiene un doble}.

c) $A \cap B$.

d) $A \cup B$.

9. Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

3. Diagramas en árbol y la resolución de algunos problemas sencillos de probabilidad

3.1. Principio de multiplicación y diagramas en árbol

En los problemas de probabilidad, a veces, nos dan la probabilidad de algunos sucesos y nos piden calcular la de otros sin hacer referencia a la naturaleza del experimento aleatorio al que pertenecen. En otros, conocemos la naturaleza del experimento aleatorio, casi siempre con resultados equiprobables, y nos piden calcular la probabilidad de determinados sucesos. En este último caso, al aplicar la regla de Laplace, tenemos que contar sucesos elementales o casos favorables y casos posibles. Si el experimento aleatorio es simple como tirar un dado, extraer una carta de una baraja, contar chicos a los que les gusta el fútbol o la natación, etc., la enumeración directa de los sucesos elementales es suficiente.

Cuando el experimento aleatorio consta de varias pruebas, es decir, consiste en tirar varios dados, una moneda y un dado, extraer varias cartas, extraer varias bolas de una urna, escoger varias personas, etc., la enumeración de los sucesos elementales no es tan sencilla. Sin embargo, el principio de la multiplicación facilita mucho las cosas.

Principio de la multiplicación: Si un experimento aleatorio está constituido por *p* pruebas, teniendo cada una de ellas $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ resultados, entonces el número total de resultados del experimento aleatorio es

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_p$$

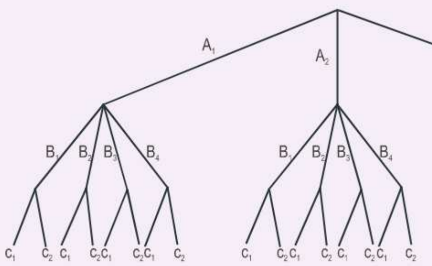
Los ejemplos que vienen a continuación nos ayudarán a comprender y utilizar este principio.

El ejemplo muestra que los diagramas en árbol son muy útiles no sólo para contar el número de sucesos elementales de un suceso en un experimento de varias pruebas, sino también para identificar cada uno de esos sucesos elementales del espacio muestral.

Ejemplo

7. Un restaurante ofrece a sus clientes una carta en la que hay 3 primeros platos, 4 segundos y 2 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

Solución: Podemos pedir $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús. Si empleamos un diagrama en árbol, podemos, además de determinar el número de menús, identificar cada uno de ellos. Supongamos que A_1, A_2, A_3, son los primeros platos y B_1, B_2, B_3 y B_4, los segundos y C_1 y C_2, los postres. Disponemos un diagrama en árbol así:



Recorriendo las ramas del árbol de arriba abajo obtenemos todos los menús posibles: $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1, \ldots$, $A_3B_4C_2$, en total 24.

Actividades

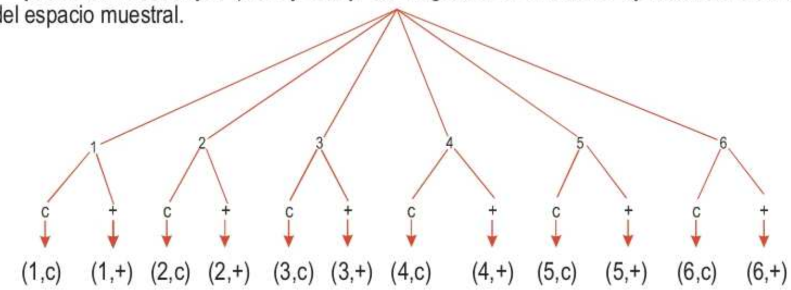
10. Un restaurante ofrece a sus clientes una carta en la que hay 3 primeros platos, 4 segundos y 2 postres, flan o helado. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir en los que el postre es flan?

11. Entre el pueblo A y el pueblo B hay 4 caminos, y de B salen 3 caminos para el pueblo C. ¿De cuántas maneras distintas se puede ir de A a C? Calcula el número de modos de hacer el trayecto de ida y vuelta A – C – A, empleando recorridos distintos a la ida y a la vuelta.

3.2. Diagramas en árbol y problemas de probabilidad

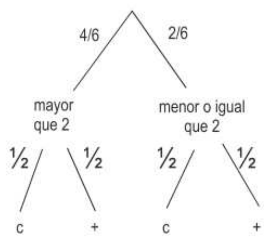
En buena parte de los problemas de probabilidad nos encontramos ante experimentos aleatorios de varias pruebas, y para resolverlos resultan sumamente útiles los diagramas en árbol.

Veamos, por ejemplo, un juego sencillo: se tira un dado y una moneda y queremos conocer la probabilidad del suceso A = {*sacar número mayor que 2 y cruz*}. Un diagrama en árbol nos ayuda a conocer los sucesos elementales del espacio muestral.



Por un sencillo recuento vemos que $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Si consideramos el dado primero, la probabilidad de obtener mayor que 2 es 4/6, es decir, que esperamos que salga *mayor que* 2 en los 4/6 de todas las tiradas, recuerda que la probabilidad es un porcentaje. Si a continuación tiramos la moneda es de esperar que salga *cruz* en la mitad de las tiradas. Por tanto, al tener dos porcentajes encadenados, es de esperar que salga *mayor que* 2 *y cruz* en los $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}$ de todas las tiradas que hagamos; en consecuencia, la probabilidad de A será: $P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Esto nos induce a emplear diagramas en árbol reducidos al suceso A que nos interesa, de modo que el diagrama anterior quedaría reducido a éste:



Podemos afirmar, por tanto, que la probabilidad de A es igual al producto de las probabilidades de las ramas que conducen a él. Este tipo de diagramas en árbol, reducidos al suceso que nos interesa, serán particularmente útiles cuando estudiemos la probabilidad condicionada.

Actividades

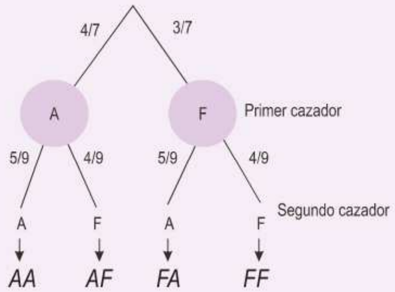
12. En una urna hay seis bolas negras y cuatro rojas. Se extraen dos bolas: **a)** si la primera se devuelve a la urna, calcula la probabilidad de que las dos sean de distinto color; **b)** calcular la probabilidad de que las dos sean del mismo color, si la primera no se devuelve a la urna.

13. Se extraen dos cartas de una baraja de 40. **a)** Calcula la probabilidad de que ambas sean ases. **b)** Calcula la probabilidad de que la primera sea un as y la segunda no. Considera el caso de que haya devolución de la primera carta y de que no la haya.

Ejemplos

8. Dos cazadores disparan sobre la misma liebre. Afortunadamente para la liebre se sabe por experiencia que la probabilidad de acertar de uno es 4/7 y del otro, 5/9. ¿Cuál es la probabilidad de que la liebre se salve? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno acierte?

Solución: Hacemos un diagrama de dos pruebas, una para cada cazador.



La liebre se salva si ambos fallan y $P(FF) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{21} = 0{,}19$. La probabilidad de que al menos uno acierte corresponde a la probabilidad de que acierte el primero, el segundo o los dos a la vez, es decir, de los sucesos elementales: *AF*, *FA* y *AA*

$$P(AF \cup FA \cup AA) = P(AF) + P(FA) + P(AA) = \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9} = \frac{17}{21}$$

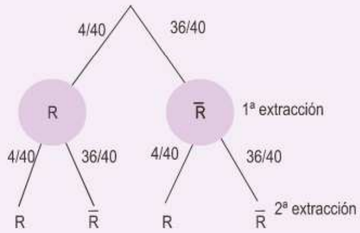
El mismo resultado se obtiene de $P(\{\textit{al menos uno acierta}\}) = 1 - P(FF) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$.

9. Se extraen dos cartas de una baraja de 40.

a) Si la primera carta se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

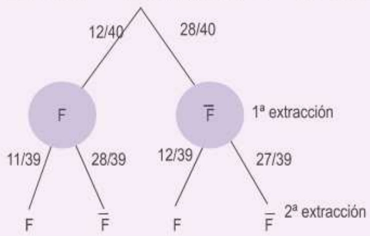
b) Si la primera carta no se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean figuras.

Solución: **a)** Simbolizamos por *R* salir rey y por $\overline{R}$ no salir rey.



$$P(RR) = \frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

b) Hay 12 figuras: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Si no devolvemos la primera carta, en la segunda extracción hay sólo 39 disponibles. Sea F = {salir figura} y $\overline{F}$ = {no salir figura}



$$P(FF) = \frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39} = 0{,}084.$$

4. Probabilidad condicionada

Cuando dos sucesos de un experimento aleatorio están relacionados, el conocimiento de que ha ocurrido uno de ellos puede modificar la probabilidad del otro. Veamos un ejemplo.

En un curso de 2º CCSS hay 30 alumnos de los cuales 17 son chicas y 13 chicos. En la evaluación de matemáticas han aprobado 7 chicas y 8 chicos.

Resumimos la información anterior en un cuadro, también llamado tabla de contingencia:

	Aprobados	Suspensos	Total
Chicas	7	10	17
Chicos	8	5	13
Total	15	15	30

Si elegimos al azar una persona de este curso estamos ante un experimento aleatorio cuyo espacio muestral tiene 30 sucesos elementales y la probabilidad de cada suceso elemental es $^1/_{30}$. Consideremos los sucesos

$$A = \{\ ser\ una\ chica\ \} \quad y \quad B = \{\ estar\ aprobado\ \}$$

entonces

$$P(A) = \frac{17}{30} \quad y \quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Si queremos hallar la probabilidad del suceso *ser chica* y *haber aprobado*, éste sería: $P(A \cap B) = \frac{7}{30}$

Imaginemos que, en este juego de elegir una persona del curso, alguien sabe que la persona elegida es una chica y quiere saber la probabilidad de que también haya aprobado. Simbolizaremos esta probabilidad por $P(B/A)$, que significa probabilidad de B sabiendo que A ha ocurrido o probabilidad de B condicionada a A. Según la tabla tenemos

$$P(B/A) = \frac{7}{17}$$

Dividiendo numerador y denominador de esta fracción por 30 se obtiene .

$$P(B/A) = \frac{7}{17} = \frac{7/30}{17/30} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Es decir, la **probabilidad de *B* condicionada a *A***, nos indica la proporción de veces que ocurre B de entre todas las que ocurre A y esta probabilidad se calcula por las fórmulas

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad o \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

De otro modo, la probabilidad de B condicionada a A indica en qué se convierte la probabilidad de B cuando se restringe el conjunto de resultados posibles de E a A.

Ejemplo

10. Al tirar dos dados se sabe que la suma de los resultados ha sido 8, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya salido un 5?

Solución:

El suceso A = {*la suma de los dos dados es* 8} = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)} y el suceso B = {*al menos sale un* 5}. Es evidente que $A \cap B = \{ (3,5),(5,3) \}$, luego

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Sin embargo, observamos que la probabilidad de B es $P(B) = \frac{11}{36}$; ya que hay 11 resultados favorables a que salga al menos un 5 entre los 36 posibles:

(1,5), (5,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (5,5), (6,5) y (5,6).

Actividades

14. Sobre lo sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades : $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}45$.

Calcular:

a) $P(A/B)$;

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

15. Según la estadística del hotel de un balneario la distribución de clientes por sexo y edad es la siguiente: 23% hombres con más de 45 años, 7% hombres con menos de 45 años, 60% mujeres con más de 45 años, 10% mujeres con menos de 45 años.

La persona alojada en la habitación nº 222 se sabe que tiene 80 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

16. Una cadena de montaje de una fábrica está dotada de un sistema de alarma que se activa cuando se produce un incidente. Se sabe por experiencia que la probabilidad diaria de que la alarma se active sin que haya incidente es 1/50; la probabilidad diaria de que haya un incidente y la alarma no se active es 1/500; y la probabilidad de que en un día surja un incidente es 1/100. **a)** Calcular la probabilidad diaria de que ocurra un incidente y la alarma se active. **b)** Calcular la probabilidad diaria de que la alarma se active. **c)** La alarma se acaba de activar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente un incidente?

Nota : los apartados **a)** y **b)** están resueltos en el ejemplo 5.

5. Sucesos independientes

Sin duda los diagramas en árbol y la identificación de sucesos independientes son los mejores recursos para resolver problemas de probabilidad sencillos. Veamos qué caracteriza a los sucesos independientes. Consideremos el juego de tirar un dado y los sucesos

$$A = \{salir\ menor\ que\ 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{salir\ impar\} = \{1, 3, 5\}$$
$$A \cap B = \{salir\ impar\ y\ menor\ que\ 5\} = \{1, 3\}$$

La probabilidad de estos sucesos es

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ \ y\ \ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de salir impar sabiendo que ha salido menor que 5, $P(B/A)$, sería

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2},$$

pero también $P(B) = \frac{1}{2}$, entonces $P(B/A) = P(B)$.

Es decir, la probabilidad de B condicionada a A es igual a la de B o, lo que es lo mismo, la probabilidad de B no está modificada por la información suministrada por A. En este caso se dice que A y B son independientes y, por tanto, la fórmula de la probabilidad condicionada

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

queda

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta última fórmula es importante porque garantiza que la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades de cada una de ellos.

Dos sucesos se llaman **sucesos independientes** cuando la realización de uno de ellos no suministra información sobre la realización del otro. Se pueden encontrar en un juego simple, como el del ejemplo anterior, o en experimentos aleatorios de varias pruebas. Es, en estos juegos, donde los sucesos independientes tienen más interés.

Sucesos independientes en pruebas independientes

En los juegos con varias pruebas puede ocurrir que los sucesos de una prueba sean independientes de los de otra o no. En un caso estamos ante pruebas independientes y en otro, ante pruebas dependientes. Veamos algunos experimentos aleatorios de uno y otro tipo:

1. Tirar una moneda y después un dado. Es evidente que el resultado de la moneda no influye en el resultado del dado. Son pruebas independientes y los sucesos relativos a cada prueba son independientes.

2. Extraer dos cartas de una baraja. Si al sacar la primera carta la devolvemos al mazo de cartas, tenemos dos pruebas independientes; el resultado de la primera no influye en el resultado de la segunda. Pero si no se devuelve la primera carta al mazo, entonces el resultado de la segunda va a depender del resultado de la primera.

Ejemplos

11. Se extraen dos cartas de una baraja de 40.

a) Si la primera carta se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

b) Si la primera carta no se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que ambas sean reyes.

Solución:

Este problema lo hemos resuelto mediante un diagrama, pero admite otra forma resolverlo. Consideremos los sucesos

$$A = \{\text{ sacar rey en la } 1^{a}\},\quad B = \{\text{ sacar rey en la } 2^{a}\}\ \text{ y}$$
$$A \cap B = \{\text{ sacar rey en la } 1^{a} \text{ y sacar rey en la } 2^{a}\}$$

a) Si A y B son independientes, y esto ocurre cuando devolvemos la primera carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

b) Si A y B no son independientes, y esto ocurre cuando no devolvemos la primera carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

12. Calcular la probabilidad de obtener al menos un 6 al tirar un dado cuatro veces.

Solución:

Cuando nos encontramos ante el suceso {*obtener al menos* 6} debemos pensar que es complementario de {*no sacar ningún* 6}. La probabilidad de {*no sacar* 6} en una tirada es

$$P(\{no\ 6\}) = \frac{5}{6}$$

Llamemos A_1 al suceso no sacar 6 en el primer lanzamiento del dado, A_2 al suceso no sacar 6 en el segundo lanzamiento y A_3 y A_4 , el mismo resultado en los lanzamientos tercero y cuarto. El suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ es no sacar 6 ni en el primero, ni en el segundo, ni en el tercero y ni en el cuarto lanzamiento, todos estos sucesos son independientes ya que lo que ocurra en un lanzamiento no influye en el siguiente, y su probabilidad será:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}482$$

Luego la probabilidad de obtener al menos un 6

P({*obtener al menos un 6 en cuatro tiradas*}) = 1- P({*no sacar* 6 en cuatro tiradas}) = 1 - 0,482 = 0,518.

13. Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo acierta en un blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0,3:

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente al tercer intento?

Solución:

Los diagramas en árbol son muy engorrosos cuando tenemos más de tres pruebas; en estos casos resulta más práctico identificar sucesos independientes. Llamemos

A_1 = {*acertar con el primer dardo*} y $\bar{A}_1$ = {*no acertar con el primer dardo*},
A_2 = {*acertar con el segundo dardo*} y $\bar{A}_2$ = {*no acertar con el segundo dardo*},
A_3 = {*acertar con el tercer dardo*} y $\bar{A}_3$ = {*no acertar con el tercer dardo*};

además sabemos que

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,3 \text{ y } P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = 0,7.$$

Todos los sucesos mencionados anteriormente son independientes, como puede comprobarse al realizar la actividad 16. Por lo tanto,

a) se lleva el peluche si al menos acierta con un dardo, pero esto es el complementario de no acertar con ningún dardo

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,7\cdot 0,7\cdot 0,7 = 0,657;$$

b) se lleva el peluche en el tercer intento si falla el primero y el segundo, pero como $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ y A_3 son independientes, tenemos

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3) = 0,7\cdot 0,7\cdot 0,3 = 0,147.$$

Actividades

17. Dados *A* y *B* sucesos de un experimento aleatorio, demuestra que si *A* y *B* son independientes, entonces

a) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes,

b) y también *A* y $\bar{B}$ son independientes.

18. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,2$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$. Calcular: **a)** $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes; **b)** $P(A \cup B)$.

19. Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja.

a) Vemos la primera y la devolvemos al mazo de cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean copas?

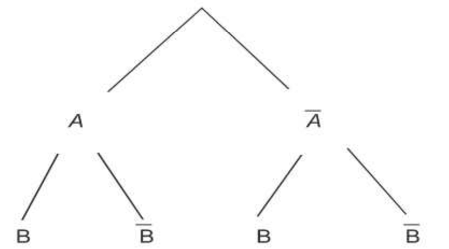
b) Después de ver la primera no la devolvemos al mazo de cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean copas?

6. Probabilidad condicionada y probabilidad total

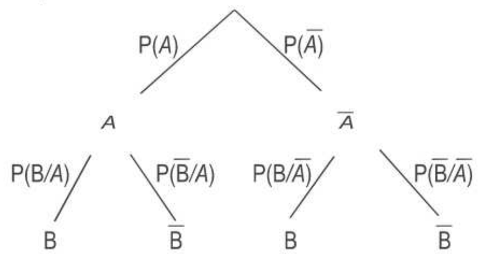
6.1. Probabilidad condicionada y diagramas en árbol

Al resolver problemas de probabilidad condicionada ayudan mucho los diagramas en árbol; tanto si son experimentos con varias pruebas, como si no.

Si nos encontramos con un juego de dos pruebas y A es un suceso de la primera y B es un suceso de la segunda, entonces es posible esquematizar el juego así:



En las ramas de este esquema podemos escribir:



Luego la probabilidad del suceso $A \cap B$ será: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, es decir, el producto de las ramas indica que se realiza A en la primera prueba y B en la segunda. Si embargo, la probabilidad de B, dado que

$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, será:

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}),$$

es decir, la suma de los productos de las ramas que conducen a él.

Ejemplos

14. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de un programa de 20 y desarrollar uno de ellos. Un alumno sabe 11 temas.

a) ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene de saber un tema y otro no?

Solución: Los sucesos A_1 = {*sabe el 1º tema*} y A_2 = {*sabe el 2º tema*} no son independientes porque

$P(A_1) = 11/20$, pero $P(A_2) = 10/19$.

a) $P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = 0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}325$. Por consiguiente, el 32,5% de los inversores obtiene beneficios.

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$.

c) Se trata de hallar la probabilidad $P(\bar{A}/B)$, que por la definición de probabilidad condicionada nos conduce a

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})}{P(B)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}2}{0{,}325} = 0{,}46.$$

La generalización del apartado a) de este ejemplo nos conduce al teorema de la probabilidad total, que veremos en seguida, y la generalización del apartado c) nos conduce al teorema de Bayes que veremos en el próximo epígrafe.

6.2. Probabilidad total

En ocasiones, es posible calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos. Esto ocurre cuando el conjunto de sucesos conocidos constituye un sistema completo de sucesos. ¿Qué es un **sistema completo de sucesos**? Pues un conjunto de sucesos A_1, A_2, ..., A_n constituye un sistema completo de sucesos si cumple dos condiciones:

1ª) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \Phi$, siempre que $i \neq j$.

2ª) La unión de A_1, A_2, ..., A_n es el suceso seguro $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

El teorema de la probabilidad total dice así:

Si A_1, A_2, ..., A_n es un sistema completo de sucesos y B es un suceso del que únicamente conocemos las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la $P(B)$ viene dada por la fórmula:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

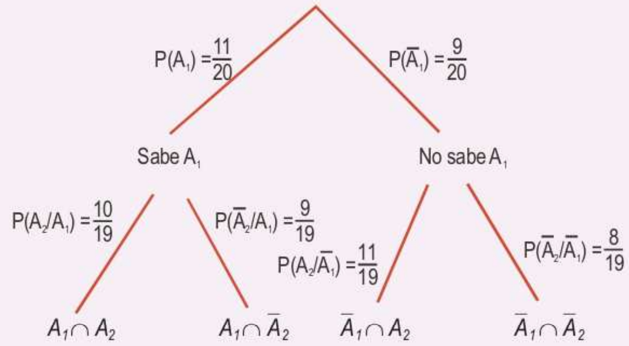
Demostración: Como A_1, A_2, ..., A_n son incompatibles dos a dos, también lo son los sucesos

$A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, ..., $A_n \cap B$ y además $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$

y en consecuencia

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n).$$

En los ejemplos veremos que ya sabíamos resolver problemas de la probabilidad total con un sencillo diagrama en árbol.



a) Aprueba si sabe al menos uno,

P({*sabe al menos uno*}) = 1- P({*no sabe ninguno*}) $= 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{77}{95}$.

Como $\frac{77}{95} = 0{,}8105$, tiene más de un 81% de posibilidades de aprobar. El mismo resultado obtendríamos sumando los productos de las ramas que conducen a $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \overline{A}_2$ y $\overline{A}_1 \cap A_2$.

b) La suma de las probabilidades de $A_1 \cap \overline{A}_2$ y $\overline{A}_1 \cap A_2$ nos da respuesta. Por consiguiente,

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) = \frac{11}{20} \cdot \frac{9}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{99}{190} = 0{,}521.$$

En un experimento aleatorio en el que no está claro que existan varias pruebas, también resultan útiles los diagramas en árbol como se pone en evidencia en el ejemplo siguiente.

Ejemplos

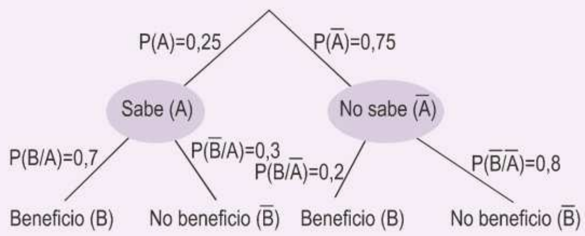
15. Los resultados de una encuesta indican que sólo un 25% de los que invierten en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos el 70% obtiene plusvalías. Sin embargo, únicamente un 20% de los que compran acciones sin conocimiento del mercado de valores consigue ganancias. Se pide:

a) Probabilidad de que elegido un inversor al azar obtenga beneficios. ¿Qué porcentaje de los que compran acciones consigue plusvalías?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un inversor elegido al azar no tenga conocimientos de bolsa y no consiga ganancias?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que habiendo obtenido beneficios no tenga idea de la bolsa de valores?

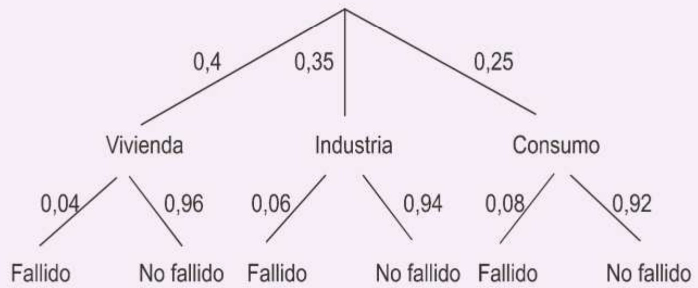
Solución: Distinguiremos dos sucesos A = {*sabe de bolsa*} y B = {*obtiene beneficios*} y sus contrarios $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Sobre el diagrama en árbol resolveremos los dos primeros apartados.



Ejemplo

16. El 40% de los créditos que concede un banco son para la vivienda, el 35% para la industria y 25% para el consumo. Resultan fallidos el 4% de los créditos a la vivienda, el 6% de los créditos a la industria y el 8% de los créditos al consumo. Se elige al azar un prestatario del banco, ¿cuál es la probabilidad de que no pague el crédito? ¿y cuál es la probabilidad de que pague el crédito?

Solución: Los créditos vivienda, industria y consumo forman un sistema completo de sucesos. Son incompatibles y su unión constituyen todos los créditos que concede el banco. Con un sencillo diagrama en árbol de dos pruebas veremos mejor las cosas.



Un crédito fallido es el que no se paga y sabemos por el teorema de la probabilidad total que la probabilidad de un suceso es la suma de los caminos que conducen a él:

$$P(Fallido) = P(Vivienda) \cdot P(Fallido/Vivienda) + P(Industria) \cdot P(Fallido/Industria) +$$
$$+ P(Consumo) \cdot P(Fallido/Consumo) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}08 = 0{,}057.$$

Es decir, 5,7 % de los créditos resultan fallidos.

La probabilidad de que se pague, es decir, *No fallido*, será: $P(No fallido) = 1 - P(Fallido) = 1 - 0{,}057 = 0{,}943$.

El mismo resultado hubiéramos encontrado sumando las ramas que conducen a *No fallido*. En todo caso, no está bien eso de no pagar los préstamos.

Actividades

20. Tenemos 4 urnas. En la primera hay 5 bolas blancas y 3 negras; en la segunda 6 blancas y 7 negras; en la tercera hay 4 bolas blancas y 2 negras y en la cuarta hay 6 bolas negras. Si elegimos una urna al azar y extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

21. En un hotel hay tres cajas fuertes. En una de ellas hay 6 joyas buenas y 2 falsas; en otra, 5 joyas de valor y 1 falsa; y en la tercera, 8 joyas valiosas y 3 falsas. Suponiendo que un ladrón sólo puede abrir una caja fuerte y llevarse una joya, ¿cuál es la probabilidad de que se lleve bisutería?

22. En una empresa el 70% son empleados y el 30% directivos. El 80% de los primeros son casados, mientras que 40% de los segundos son solteros. Se elige una persona al azar en la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea soltera?

7. Teorema de Bayes

Si interpretamos un sistema completo de sucesos, $A_1, A_2, ..., A_n$, como las causas de que se produzcan ciertos efectos, y uno de esos efectos es un suceso B, entonces el **teorema de Bayes** permite calcular la probabilidad de que un efecto tenga una determinada causa. En otras palabras, permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B)$ interpretando ésta como la probabilidad de que la causa de B sea A_i.

El teorema de Bayes tiene este enunciado:

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es un sistema completo de sucesos y B es un suceso cualquiera del que únicamente conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad de A_i condicionada a B viene dado por la fórmula

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B / A_i)}{P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_1)\cdot P(B / A_n)}$$

Demostración: De la definición de probabilidad condicionada podemos escribir

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\cdot P(B / A_i) \quad \text{y} \quad P(A_i \cap B) = P(B)\cdot P(A_i / B)$$

Si dos cosas son iguales a una tercera, son también iguales entre sí; luego $P(A_i)\cdot P(B / A_i) = P(B)\cdot P(A_i / B)$

Despejando $P(A_i/B)$, se obtiene

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B / A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B / A_i)}{P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_1)\cdot P(B / A_n)}$$

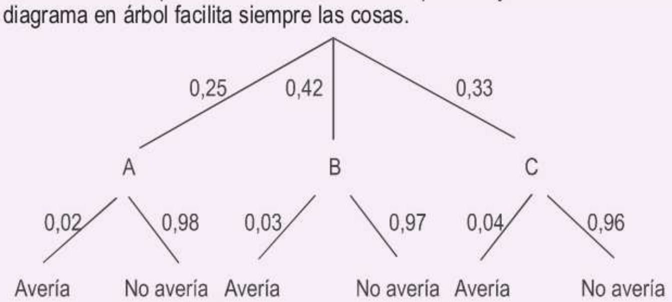
dado que $P(B) = P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_1)\cdot P(B / A_n)$, (**teorema de la probabilidad total**).

Ejemplos

17. Un modelo de automóvil se fabrica en 3 factorías distintas: A, B y C. De A sale el 25% de la producción anual, en B se hace el 42% y en C el 33%.

El 2% de los coches fabricados en A sufre una avería en el primer mes de rodaje, lo mismo ocurre con el 3% de los fabricados en B y con el 4% de los fabricados en C. Un cliente tiene un coche que se ha averiado en el primer mes de uso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en C?

Solución: Los sucesos A, B y C están formados por los automóviles que se fabrican en cada una de las factorías. Además, constituyen un sistema completo de sucesos: son incompatibles y su unión es toda la producción anual de este modelo. Un diagrama en árbol facilita siempre las cosas.



Conocemos el suceso *el coche se ha averiado*, y queremos calcular la probabilidad de *haya sido fabricado en C*, se trata de hallar $P(C/\ Avería)$ y es, según la fórmula de Bayes,

$$P(C/Avería)=\frac{P(C)\cdot P(Avería/C)}{P(Avería)}=\frac{P(C)\cdot P(Avería/C)}{P(A)\cdot P(Avería/A)+P(B)\cdot P(Avería/B)+P(C)\cdot P(Avería/C)}=$$

$$=\frac{0,3\cdot 0,04}{0,25\cdot 0,02+0,42\cdot 0.03+0,3\cdot 0,04}=0,4054.$$

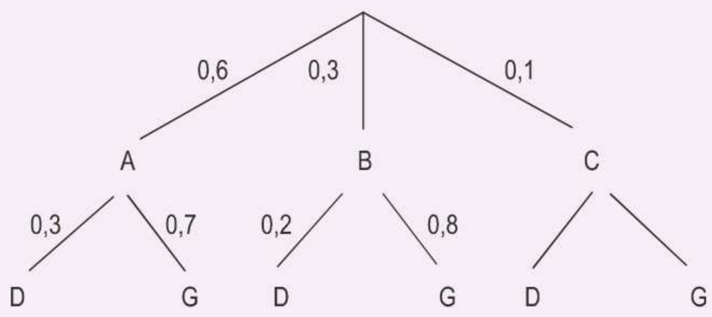
18. Seguimos en el sector del automóvil. Una fábrica produce tres modelos de coche: *A*, *B* y *C*. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son de tipo *A* y el 30% de tipo *B*. El 30% de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30% de los coches del modelo *A* son de tipo diesel y el 20% de los coches del modelo *B* tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) El coche es del modelo *C*.

b) El coche es del modelo *A*, sabiendo que tiene motor diesel.

c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo *C*.

Solución: A pesar del galimatías que sugiere el enunciado, se trata de un problema de probabilidad total y fórmula de Bayes. Tal vez lo mejor sea organizar los datos en un diagrama en árbol. El dato "el 30% de los coches fabricados tienen motor diesel" se utilizará en el apartado b).



a) Los coches del modelo *A*, junto con los coches de los modelos *B* y *C*, constituyen un sistema completo de sucesos y, por tanto, los coches del modelo *C* serán el 10%. Esto es así porque 1 – (0,6 + 0,3) = 1 – 0,9 = 0,1.

b) Si *D* es el suceso tener motor diesel y nos piden calcular $P(A/D)$, por la fórmula de Bayes:

$$P(A/D)=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0,6\cdot 0,3}{0,3}=0,6.$$

c) Como $P(D)$ = 0,3, empleando la fórmula de la probabilidad total, resulta

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)$$

$$0,3=0,6\cdot 0,3+0,3\cdot 0,2+0,1\cdot P(D/C)$$

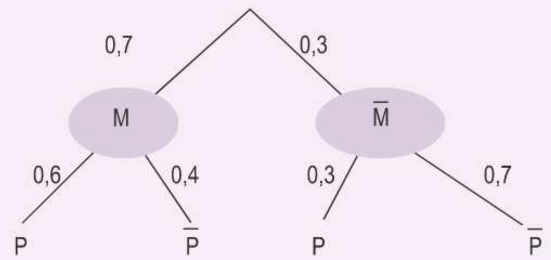
$$P(D/C)=\frac{0,3-0,18-0,06}{0,1}=0,6.$$

19. Continuamos en el sector del automóvil, pero ahora en el negocio del taxi. Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70% tiene más de 40 años y de éstos el 60% es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que, no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30%. Se pide:

a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce.

b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

Solución: Llamemos P al suceso ser propietario y $\overline{P}$ no ser propietario. Al suceso {*más de 40 años*} lo simbolizaremos por M y al suceso {*igual o menos de 40 años*} lo simbolizaremos por $\overline{M}$. Con un diagrama en árbol veremos las cosas con más claridad.



a) La probabilidad de P, como M y $\overline{M}$ son un sistema completo de sucesos, puede calcularse por el teorema de la probabilidad total $P(P) = P(M)\cdot P(P/M) + P(\overline{M})\cdot P(P/\overline{M}) = 0,7\cdot 0,6 + 0,3\cdot 0,3 = 0,51.$

b) Se trata de hallar la probabilidad de M condicionada a P, $P(M/P)$, empleando la fórmula de Bayes obtenemos:

$$P(M/P) = \frac{P(M)\cdot P(P/M)}{P(P)} = \frac{0,7\cdot 0,6}{0,51} = 0,8235.$$

Actividades

23. En una empresa el 70% son empleados y el 30% directivos. El 80% de los primeros son casados, mientras que el 40% de los segundos son solteros. Se elige una persona al azar en la empresa. Sabiendo que se ha elegido una persona soltera, ¿cuál es la probabilidad de que sea directivo?

24. Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0,3; de que se remita al bufete B es 0,5 y de que se remita al bufete C es 0,2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0,6; para el bufete B esta probabilidad es 0,8 y para el bufete C es 0,7.

a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

25. Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de perderse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

8. Combinatoria

La regla de Laplace nos obliga a contar objetos de un conjunto, casos favorables y casos posibles. Esto no siempre es una labor fácil. Para estas situaciones, en las que no podemos contar fácilmente y los diagramas en árbol resultan engorrosos o insuficientes, existen técnicas de conteo que emplearemos para resolver algunos problemas de probabilidad.

8.1. Factoriales

Si n es un número natural mayor que 1, se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. El factorial de n se simboliza por $n!$ y será:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Si nos piden calcular 4 factorial y luego 6 factorial, escribimos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Aceptaremos que $0! = 1$ y también $1! = 1$. En una calculadora científica, con las teclas SHIFT x! se hallan factoriales.

Actividades

26. Calcula: **a)** $5!$; **b)** $(9-2)!$; **c)** $(10-4)!$.

27. Calcula $(n-p)!$ Cuando $n = 10$ y $p = 8$.

28. Calcula $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ cuando $n = 12$ y $p = 4$.

29. Calcula $\dfrac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$ cuando $n = 10$ y $p = 6$, y luego cuando $n = 10$ y $p = 4$. ¿Dan el mismo resultado?

8.2. Variaciones con repetición

Podíamos haber titulado este apartado así: ¿cómo elegir al azar, sucesivamente y con devolución, p objetos (o sucesos elementales) entre n disponibles?.

Se trata, en realidad, de elegir un objeto, registrarlo y devolverlo a la colección; y repetir esta operación hasta tener el registro de los p objetos. Un ejemplo nos ayudará a comprenderlo: *¿cuántos resultados distintos podemos obtener al extraer* 3 *cartas, de una baraja de* 40, *si devolvemos cada vez la carta extraída al mazo*?

Para la 1ª extracción tenemos 40 cartas posibles, pero si devolvemos la carta, para la 2ª tenemos también 40 y, al reponer ésta, para la 3ª tenemos igualmente 40.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados posibles	40	40	40

Luego, por el principio de multiplicación, todos los posibles resultados del juego serán: $40\cdot 40\cdot 40 = 40^3$.

Otro ejemplo: *¿cuántos resultados distintos podemos obtener al tirar tres veces un dado*?

En la 1ª tirada pueden salir 6 resultados, en la 2ª tirada, como es independiente de la 1ª, pueden salir también 6; y en la 3ª también 6, porque es independiente de las anteriores.

	1ª tirada	2ª tirada	3ª tirada
Resultados posibles	6	6	6

Por el principio de multiplicación pueden salir: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ resultados.

De un modo general, las **variaciones con repetición** de *n* objetos tomados o elegidos de *p* en *p* son los grupos de *p* objetos en los que puede haber objetos diferentes o repetidos. Además dos grupos serán distintos si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente.

Las variaciones con repetición de *n* objetos tomados de *p* en *p* se simbolizan por $VR_{n,p}$, y su número viene dado por

$$VR_{n,p} = n^p$$

Ejemplo

20. ¿Cuántos números de teléfono fijo pueden empezar por 91?

Solución: Los números de teléfono fijo tienen 9 lugares, como tenemos los dos primeros fijos, con un 9 y un 1, disponemos de diez cifras, de 0 a 9, para llenar cada uno de los siete lugares restantes. Se trata de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 7 en 7,

$$VR_{10,7} = 10^7 = 10000000$$

Hay, por tanto, posibilidad de tener hasta diez millones de números de teléfono fijo en la Comunidad de Madrid.

Actividades

30. a) ¿Cuántas columnas tenemos que cubrir a las quinielas para tener la certeza de acertar los catorce? **b)** ¿Y el pleno al quince?

31. ¿Cuántos números de teléfono móvil, de nueve cifras, hay que empiecen por el 6?

8.3. Variaciones ordinarias

Disponemos ahora *n* objetos de los que elegimos, sucesivamente y sin devolución, *p* objetos. Por ejemplo, *¿de cuántas maneras diferentes pueden extraerse* 3 *cartas de una baraja de* 40*, si no se devuelve ninguna al mazo después de cada extracción*?

Para la 1ª extracción disponemos de 40 resultados posibles; para la 2ª, 39 y para la 3ª únicamente 38, que son las cartas que quedan en el mazo después de las dos primeras extracciones.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados posibles	40	39	38

Por el principio de multiplicación serán: $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$ maneras diferentes.

En general, las **variaciones ordinarias** de n objetos tomados de p en p son todos los grupos de p objetos que pueden formarse con los n disponibles. Además, dos variaciones son distintas si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente.

Simbolizaremos las variaciones simples de n objetos tomados de p en p por $V_{n,p}$. Para calcular su número, como vimos en el ejemplo, imaginemos que disponemos de p cajas

			....	
1ª caja	2ª caja	3ª caja		p-ésima caja

Para la primera podemos seleccionar n objetos. Hecho esto, nos quedan $n-1$ para la segunda; $n-2$ para tercera. Continuado de esta forma, para la última caja, la p-ésima, nos quedan $n-(p-1)$, es decir, $n-p+1$.

Aplicando ahora el principio de multiplicación:

$$V_{n,p} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ \ldots \ \cdot(n-p+1)$$

En ocasiones empleamos otra fórmula para calcular las variaciones. Si al segundo miembro de la igualdad anterior lo multiplicamos y dividimos por $(n-p)!$, resulta:

$$V_{n,p} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ejemplos

21. En una carrera de 100 m participan 6 corredores, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden repartir las medallas de oro, plata y bronce?

Solución: Indicamos los 3 primeros lugares de llegada con las palabras oro, plata y bronce.

1º oro	2º plata	3º bronce
6	5	4

Para el primer lugar puede elegirse cualquiera de los 6 corredores, para el segundo sólo pueden elegirse 5, porque uno ya llegó primero, y para el tercer lugar sólo pueden elegirse 4 corredores, los que quedan. Se trata de variaciones simples de 6 objetos tomados de 3 en 3,

$V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$ maneras diferentes.

Con la tecla $\boxed{\text{nPr}}$, precedida de la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$, es posible calcular variaciones ordinarias. El cálculo anterior se haría así: 6 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ 3 = 120.

22. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes mayores que 3000 es posible escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Solución: Los números de 4 cifras mayores que 3000 que podemos formar con { 1, 2, 3, 4, 5, 6} deben comenzar por 3, 4, 5 o 6,

3 __ __ __ 4 __ __ __

5 __ __ __ 6 __ __ __

para los otros tres lugares hay disponibles 5 cifras para agrupar de 3 en 3, y como las cifras han de ser diferentes estamos ante $V_{5,3}$. En consecuencia, el total de números mayores que 3000 será:

$$4\cdot V_{5,3} = 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 240.$$

Actividades

32. En una clase de 24 alumnos se elige delegado y subdelegado. Si todos son candidatos, ¿cuántos resultados posibles habrá?

8.4. Permutaciones ordinarias

¿Qué ocurriría si dispusiésemos de *n* objetos y elegimos, sucesivamente y sin devolución, *n* objetos? Estaríamos ante el problema de calcular variaciones simples de *n* objetos tomados de *n* en *n*. Para resolverlo disponemos, como en el apartado anterior, de *n* cajas

☐	☐	☐	....	☐
1ª caja	2ª caja	3ª caja		*n*-ésima caja

Para la primera podemos seleccionar *n* objetos; para la segunda *n* –1; para la tercera *n* – 2. Procediendo de la misma forma, cuando lleguemos a la *n*-ésima caja sólo nos quedará un objeto disponible, $n - n + 1 = 1$. Aplicando la fórmula tenemos:

$$V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Las variaciones simples de *n* objetos tomados de *n* en *n* se llaman **permutaciones** de *n* objetos y corresponden a todas las posibles ordenaciones del conjunto de esos *n* objetos. Se simbolizan por P_n y hemos visto que su número es:

$$P_n = n!$$

Ejemplo

23. Dos chicos y dos chicas entran en una cafetería; si por la puerta sólo cabe una persona, ¿de cuántas formas posibles pueden entrar?

Solución: Son cuatro personas que únicamente pueden entrar de una en una, luego formas posibles de entrar son:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Actividades

33. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 5 libros diferentes en una estantería?

34. ¿De cuántas formas pueden entrar en la cafetería la pandilla del ejemplo 23 si las chicas entran una detrás de otra?

8.5. Combinaciones

Cuando el orden en el cual han sido elegidos los *p* objetos entre los *n* disponibles no nos interesa, estamos ante combinaciones de *n* objetos tomados de *p* en *p*. Emplearemos las combinaciones cuando hagamos extracciones simultáneas.

Por ejemplo, imaginemos una urna con ocho bolas iguales numeradas de 1 a 8. Extraemos 3 bolas, sin devolver ninguna. En este caso atendemos únicamente a los números que llevan las bolas extraídas y no reparamos en el orden de salida. Obtenemos así subconjuntos de 3 elementos de un conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} de ocho elementos.

El número de subconjuntos de 3 elementos que se pueden formar con un conjunto de ocho elementos se simboliza por $C_{8,3}$, y se lee combinaciones de 8 elementos tomados de 3 en 3. Es evidente que cada uno de estos subconjuntos de 3 elementos, digamos el {2, 5, 7}, puede ordenarse de 3! maneras diferentes; en consecuencia, hay 3! veces más subconjuntos de 3 elementos ordenados, $V_{5,3}$, que no ordenados, $C_{5,3}$; esto nos permite establecer la igualdad:

$$C_{5,3} \cdot 3! = V_{5,3}$$

de donde

$$C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{3!}$$

Generalizando, definimos **combinaciones** de n elementos, tomados de p en p, a los grupos de p elementos distintos, de modo que dos combinaciones son diferentes si se diferencian en algún elemento. Sin embargo, dos combinaciones son iguales si tienen los mismos elementos a pesar del orden en que aparezcan.

El número de combinaciones de n elementos tomados de p en p lo simbolizamos por $C_{n,p}$ o por $\binom{n}{p}$ y como hemos visto en el ejemplo se calculan por la fórmula:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!}$$

Por otra parte, como $V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ podemos escribir

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Ejemplos

24. En un curso de 2º de bachillerato hay 26 alumnos y se debe elegir una comisión formada por tres alumnos. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

Solución: En una comisión no hay una jerarquía que implique un orden, luego se trata de combinaciones de 26 elementos tomados de 3 en 3, es decir, $C_{26,3} = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3! \cdot 23!} = 2600$. Las calculadoras científicas disponen de la tecla $\boxed{\text{nCr}}$ para calcular combinaciones. El cálculo se haría así: 26 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 = 2600.

25. En un curso de 2º de bachillerato hay 12 chicos y 14 chicas y se debe elegir una comisión integrada por dos chicos y dos chicas ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

Solución: En las comisiones aplicamos combinaciones. Hay $C_{12,2} = 66$ maneras de elegir 2 chicos entre 12 y $C_{14,2} = 91$ de elegir 2 chicas entre 14. Por el principio de multiplicación habrá $C_{12,2} \cdot C_{14,2}$ comisiones formadas por 2 chicos y 2 chicas, es decir,

$$C_{12,2} \cdot C_{14,2} = 66 \cdot 91 = 6006 \text{ comisiones.}$$

26. Se reparten 4 cartas de una baraja de 40, es lo que los jugadores llaman una mano.

a) ¿Cuántas manos distintas se pueden dar?

b) ¿Cuántas de estas manos están formadas únicamente por bastos?
c) ¿En cuántas manos entran dos caballos?
d) ¿En cuántas manos entran dos copas y una espada?
e) ¿En cuántas manos aparecerán al menos tres copas?

Solución:

a) $C_{40,4} = \dfrac{40!}{4!\cdot 36!} = 91390$.

b) Hay 10 cartas de bastos y con ellas podemos formar $C_{10,4}$ = 210 grupos de 4 bastos.

c) La baraja tiene 4 caballos y con ellos podemos formar $C_{4,2}$ grupos de 2 caballos. Nos quedan 40 – 4 = 36 cartas para elegir las otras 2 que faltan. Por el principio de multiplicación, habrá

$$C_{4,2}\cdot C_{36,2} = 3780 \text{ manos con dos caballos.}$$

d) Disponemos de 10 copas para tomar 2 y los podemos hacer de $C_{10,2}$ maneras y 10 espadas para tomar 1, esto lo podemos hacer $C_{10,1}$ = 10 maneras. Nos quedan 40 – 10 – 10 = 20 cartas para elegir la cuarta, entonces por el principio de multiplicación tendremos:

$$C_{10,2}\cdot C_{10,1}\cdot C_{20,1} = C_{10,2}\cdot 10\cdot 20 = 9000 \text{ manos con 2 copas y 1 espada.}$$

e) Si en una mano entran al menos 3 copas, quiere decir que entrarán 3 o 4 copas. Entran 3 en $C_{10,3}\cdot C_{30,1} = C_{10,3}\cdot 30\cdot$= 3600 manos. Entran 4 copas $C_{10,4}$ = 210 manos. En total, entran 3 o 4 copas en

$$C_{10,3}\cdot 30 + C_{10,4} = 3600 + 210 = 3810 \text{ manos.}$$

27. Al tirar seis monedas diferentes , ¿de cuántas maneras pueden salir 4 caras y 2 cruces?

Solución: Se trata de formar, con los signos **c** y **+**, palabras de 6 signos, empleando 4 veces **c** y 2 el signo **+** , como esta

c c + c + c

Imaginemos que tenemos 6 cajas

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª

y que podemos elegir cuatro de ellas para poner una letra **c**. Una elección podía ser 1ª , 2ª, 4ª y 6ª, pero sería lo mismo elegir 6ª, 4ª, 2ª y 1ª, porque el resultado es el mismo: poner una **c** en ellas. Las elecciones posibles no dependen del orden de elección se trata de $C_{6,4}$, es decir,

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = 15.$$

Este número será el mismo que si eligiéramos dos cajas, entre las seis, para poner el signo **+**. Porque poniendo la letra **c** en cuatro nos quedan dos para poner el signo **+**.

Actividades

35. Se reparten 5 cartas de una baraja de 40 cartas. **a)** ¿En cuántos manos sale exactamente un rey? **b)** ¿En cuántas salen dos copas? ¿En cuántas sale al menos un oro?

36. a) ¿De cuántas maneras distintas pueden elegirse 3 personas en un grupo de 6 mujeres y 10 hombres? **b)** ¿Y 3 personas de modo que 2 sean mujeres y 1 hombre?

9. Probabilidad y combinatoria

La combinatoria es útil en la resolución de problemas de probabilidad cuando se trata de hallar la probabilidad de sucesos en experimentos aleatorios con resultados equiprobables en los que podemos emplear la regla de Laplace.

Las técnicas de conteo que hemos estudiado en el apartado anterior facilitan el recuento de los casos favorables y posibles de la fórmula de Laplace. En este apartado resolveremos algunos problemas típicos de probabilidad.

9.1. Elecciones simultáneas al azar

El elegir *p* objetos en una colección de *n* objetos significa formar subconjuntos de *p* elementos de uno mayor de *n* elementos. ¿Cuántos subconjuntos de *p* elementos hay en otro mayor de *n*? Esto sabemos que son combinaciones de *n* elementos tomados de *p* en *p*, $C_{n,p}$, y la probabilidad de elegir cada uno de estos subconjuntos es:

$$\frac{1}{C_{n,p}}$$

Ejemplo

28. Se extraen simultáneamente 4 cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que salgan:

a) cuatro caballos;

b) dos caballos y dos reyes;

c) al menos un rey.

Solución: El número de casos posibles es $C_{40,4} = 91390$. Veamos ahora cada apartado.

a) Una baraja tiene 4 caballos y hay $C_{4,4} = 1$ maneras de elegir 4 caballos entre 4 disponibles. Casos favorables = 1, luego

$$P(4\ caballos) = \frac{C_{4,4}}{C_{40,4}} = \frac{1}{91390}.$$

b) Una baraja posee 4 caballos y 4 reyes. Tenemos $C_{4,2}$ maneras de elegir 2 caballos y $C_{4,2}$ maneras de elegir 2 reyes. Y 2 caballos y 2 reyes, $C_{4,2} \cdot C_{4,2} = 6 \cdot 6 = 36$. Estos son los casos favorables, por tanto

$$P(2\ caballos\ y\ 2\ reyes) = \frac{C_{4,2} \cdot C_{4,2}}{C_{40,4}} = \frac{36}{91390}.$$

c) Al menos un rey quiere decir que pueden entrar 1, 2, 3 ó 4 reyes. Calculemos primero no salir ningún rey. Si sacamos los 4 reyes, quedan 36 cartas y con éstas podemos formar $C_{36,4}$ manos en las que no hay reyes. Si restamos esta cantidad al número total de manos, tendremos las manos en las que al menos hay un rey: $C_{40,4} - C_{36,4} = 32485$. Estos son los casos favorables; en consecuencia la probabilidad pedida es:

$$P(al\ menos\ un\ rey) = \frac{C_{40,4} - C_{36,4}}{C_{40,4}} = \frac{32485}{91390} = 0,3554.$$

9.2. Elecciones sucesivas al azar

Las elecciones sucesivas al azar se pueden hacer de dos formas: con devolución (o reemplazamiento) y sin devolución (o sin reemplazamiento).

En el primer caso, elegimos un objeto, lo registramos, y lo devolvemos a la colección; seguidamente elegimos otro objeto y hacemos las mismas operaciones; y repetimos el proceso hasta tener registros de *p* objetos. Estamos formando variaciones con repetición de *n* elementos tomados de *p* en *p*, $VR_{n,p} = n^p$, y la probabilidad de cada una de estas elecciones es:

$$\frac{1}{VR_{n,p}}$$

Si, por el contrario, elegimos un objeto, lo registramos, pero no lo devolvemos al conjunto, y repetimos estas operaciones hasta completar *p* objetos, entonces estamos ante variaciones simples de *n* elementos tomados de *p* en *p*; y la probabilidad de cada una de estas elecciones es

$$\frac{1}{V_{n,p}}$$

Ejemplos

29. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras al tirar 3 monedas?

Solución: Casos posibles $VR_{2,3} = 2^3 = 8$. Los casos favorables, las monedas son distintas o identificables, son: **cc+, c+c, +cc**. En total 3, luego

$$P(\text{dos caras}) = 3/8 = 0{,}375.$$

30. a) ¿ De cuántas maneras pueden hospedarse 6 viajeros en 10 habitaciones individuales de un hotel?

b) Si los viajeros se han instalado sin saber que 7 de las habitaciones tienen baño, ¿cuál es la probabilidad de que les haya correspondido a cada uno una habitación con baño?

Solución: **a)** Son variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6, ya que cada viajero toma una habitación distinta, y las habitaciones están ordenadas, tienen número, luego hay:

$$V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200.$$

maneras de hospedarse.

b) Si hay 7 habitaciones con baño los casos favorables son

$$V_{7,6} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040.$$

Los casos posibles ya los hemos calculado en el apartado a); por tanto, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{V_{7,6}}{V_{10,6}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Actividades

37. En una oposición entran 20 temas, de los que salen 3 por sorteo y el opositor escoge uno para contestar. Un opositor sabe los 7 primeros, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe?

38. Si un sufrido opositor, de la misma oposición del ejercicio anterior, sólo sabe los 6 últimos temas, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe?

39. Se barajan 10 tarjetas numeradas del 1 al 10, para que queden en un orden al azar. Calcular:

a) la probabilidad de que la primera sea 7;

b) la probabilidad de que la 7 y la 2 estén consecutivas.

RECUERDA

- **Leyes de De Morgan.** 1ª $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, el complementario de la unión es la intersección de complementarios; 2ª $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, el complementario de la intersección es la unión de complementarios.
- **Regla de Laplace.** $P(A) = \dfrac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$.
- **Probabilidad de B condicionada a A.** $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ o $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.
- **Sucesos independientes.** Dos sucesos son independientes cuando la realización de uno de ellos no influye sobre la realización del otro y se cumple $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Probabilidad total.** Permite calcular la probabilidad de un suceso en función de las probabilidades condicionadas de ese suceso con respecto a un conjunto de sucesos conocidos: $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$.
- **Teorema de Bayes.** Permite calcular la probabilidad condicionada $P(A_i/B)$ interpretando ésta como la probabilidad de que la causa de B sea A_i.
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$
- **Variaciones con repetición** de n objetos tomados o elegidos de p en p son los grupos de p objetos en los que puede haber objetos diferentes o repetidos. Además, dos grupos serán distintos si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número viene dado por $VR_{n,p} = n^p$.
- **Variaciones ordinarias** de n objetos tomados de p en p son todos los grupos de p objetos que pueden formarse con los n disponibles. Además, dos variaciones son distintas si tienen distintos objetos o, si tienen los mismos, en orden diferente; su número es: $V_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$.
- **Permutaciones** de n objetos y corresponden a todas las posibles ordenaciones del conjunto de esos n objetos. Se simbolizan por P_n y su número es: $P_n = n!$.
- **Combinaciones** de n elementos, tomados de p en p, son los grupos de p elementos distintos, de modo que dos combinaciones son diferentes si se diferencian en algún elemento y serán iguales si tienen los mismos elementos a pesar del orden en que aparezcan. El número de combinaciones de n elementos tomados de p en p vale: $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{V_{n,p}}{p!}$.

B. Orientaciones unidad didáctica

Orientaciones Tema 8		
Asignatura: MATEMÁTICAS II	Curso: 2º Bachillerato	NOCTURNO

Bloque VI : Probabilidad y estadística.

Probabilidad:

- Probabilidad. Probabilidad condicionada.
- Probabilidad de experiencias de dos o más pruebas
- Teorema de la probabilidad total
- Teorema de Bayes

Desde el punto de vista procedimental es fundamental:

- *Entender el concepto de función de probabilidad en casos discretos.*
- *Entender el concepto de probabilidad condicionada y de sucesosindependientes.*
- *Saber distinguir entre sucesos dependientes e independientes en contextosconcretos.*
- *Saber aplicar el Teorema de la probabilidad total en casos prácticos.*
- *Saber utilizar el Teorema de Bayes en casos prácticos.*

C. Ejercicios preseleccionados

EJERCICIOS LÓGICA Y PROBABILIDAD

1. Supongamos que la probabilidad de que nazca un niño es exactamente igual a la de que nazca una niña, aunque en realidad se sabe que no son exactamente iguales. Una pareja tiene dos hijos.

¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños?

¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si el mayor es un niño?

¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean niños, si al menos uno de los hijos es un niño?

2. Cuantas personas crees que tienen que estar en una misma sala para que haya una probabilidad de mas del 50% de que al menos dos de ellas cumplan los años el mismo día.

3. Se lanza un dado y se introducen en una caja tantas bolas blancas como indica el número obtenido, se vuelve a lanzar el dado y se introducen en la caja tantas bolas negras como indica el número obtenido, y a continuación se saca de la caja una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

4. Alicia, Bob y Carol conciertan un duelo triple. Alice no es buena tiradora: solo da en el blanco 1/3 de las veces. Bob es mejor: da en el blanco 2/3 de las veces. Carol es infalible: siempre acierta. Disparan por turnos: primero Alicia, luego Bob, luego Carol, luego de nuevo Alicia y así hasta que solo quede uno de los tres. ¿Cuál es la mejor opción de Alice en su primer turno?

5. El tío Henry, la tía Em y Dorothy meten sus brazos sucesivamente y en este orden en lava hirviendo. Las probabilidades de sobrevivir a la prueba son del 50 %, y gana el primero que sobreviva. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada uno?

¿Demasiado fácil? Supongamos que el macabro juego no termina con el primer superviviente, sino con el primer muerto. ¿Qué probabilidades de sobrevivir tiene Dorothy?

6. Un tahúr tiene tres monedas en el bolsillo: una con dos caras, una con dos cruces y una normal (con cara y cruz). Saca una moneda al azar, la lanza al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de nuevo cara si vuelve a lanzarla?

7. Tres presos, A, B y C, se encuentran en celdas separadas y están condenados a muerte. El gobernador ha seleccionado a uno de ellos al azar para ser indultado. El alcaide sabe cuál está indultado, pero no se le permite decirlo. El prisionero A le ruega al alcaide que le haga saber la identidad de uno de los dos que van a ser ejecutados. "Si va a perdonar a B, dame el nombre de C. Si va a perdonar a C, dame el nombre de B. Y si me perdonan, lanza una moneda en secreto para decidir si nombrar a B o C."

El alcaide le dice a A que B debe ser ejecutado. El prisionero A está complacido porque cree que su probabilidad de sobrevivir ha aumentado de 1/3 a 1/2, como ocurre ahora entre él y C. El prisionero A le cuenta en secreto a C la noticia, quien razona que la posibilidad de que A sea perdonado es sin cambios en 1/3, pero está contento porque su propia oportunidad ha subido a 2/3. ¿Qué prisionero tiene razón?

8. Supongamos que un matrimonio tiene cuatro hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellos sean niñas y dos niños? ¿Sería el caso más probable?

9.- El faraón Apofis envejecía y le faltaba decidir a qué sirvientes iba a llevar a su siguiente vida. Tenía dudas con Ahmed, el escriba con el que disfrutaba jugando a los acertijos, pero sabía que para llevarlo con él lo tendría que sepultar vivo y lo respetaba demasiado para hacerle eso. Pensó que lo mejor sería que un ´ultimo acertijo fuera el que tomara la decisión. He aquí lo que hizo escribir en su testamento: A mi muerte el gran sacerdote deberá preparar 100 perlas: 50 perlas negras y 50 perlas blancas. Cada uno de mis servidores será invitado a depositar dichas perlas en dos jarrones opacos. Tendrán derecho a distribuir las perlas como quieran. Cuando todas las perlas se encuentren en los jarrones, el gran sacerdote entrara en la sala, escogerá uno de los jarrones al azar y tomaría una perla. Si es blanca, se sacrificará al servidor. Si es negra, el servidor se salvará. Ahmes se salvó porque fue inteligente para colocar las perlas de forma que la probabilidad de que el gran sacerdote sacase perla negra fuese la máxima posible, ¿cómo lo hizo?

10. Cierta convención reunía a cien políticos. Cada político era o bien deshonesto o bien honesto. Se dan los datos:

- Al menos uno de los políticos era honesto.
- Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos era deshonesto.

¿Puede determinarse partiendo de estos dos datos cuántos políticos eran honestos y cuántos deshonestos?

11. Juan se levanta por la mañana y descubre que la luz de la habitación no funciona. Abre el cajón de los guantes, en el que hay diez guantes negros y diez azul oscuro. ¿Cuántos guantes ha de sacar para estar seguro de que saca al menos dos del mismo color?

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
María José Asiáin Ollo, Departamento de Matemáticas