

E.T.S. de Ingeniería Industrial, Informática  
y de Telecomunicación

# Análisis cinemático y de rigidez para un robot redundante de 7 grados de libertad



Máster Universitario  
en Ingeniería Industrial

Trabajo Fin de Máster

Iván García Cuesta

Jokin Aginaga García

Estibaliz Barberena Tabar

Pamplona, junio de 2022

upna

Universidad Pública de Navarra  
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

## RESUMEN

Un robot redundante de 7 grados de libertad puede alcanzar un punto de su espacio de trabajo (posición y orientación) de infinitas maneras posibles. Esto hace que la cinemática inversa tenga distintas soluciones posibles, en base a un criterio a elegir.

Por otra parte, la rigidez de un robot se puede establecer mediante su matriz de rigidez. Esta matriz de rigidez depende de la configuración del robot, por lo que, resolviendo la cinemática inversa para un punto del espacio de trabajo, se puede calcular la matriz de rigidez para esa configuración en concreto.

En mecanizado de paredes finas mediante robots industriales, se tiene el problema de que las piezas se deforman debido a las fuerzas cortantes. Uno de los métodos para reducir estas deformaciones consiste en utilizar un robot para que haga de apoyo en la cara opuesta de la pieza a mecanizar. Si el robot está más rígido en la dirección de mecanizado aportará más rigidez a la pieza. Entonces, aumentando esa rigidez durante trayectoria se puede optimizar el proceso.

El objetivo de este TFM consiste en calcular una manera de realizar la trayectoria en la que, en comparación a la forma habitual de seguir la trayectoria necesaria, se aumente la rigidez y, por tanto, la precisión en el mecanizado.

Respecto a lo realizado en este trabajo de fin de máster, para empezar, se ha obtenido una función que resuelve la cinemática inversa del robot de 7 gdl. Esta función se ha conseguido obtener mediante el cálculo simbólico de MATLAB, por lo que obtener la cinemática inversa no requiere de un gran coste computacional. Además, esta función también tiene en cuenta todas las configuraciones posibles del robot, por lo que se puede escoger el tipo de configuración deseada en las variables de entrada de la función.

Por otra parte, se han calculado la matriz jacobiana y la matriz de rigidez cartesiana, también mediante el cálculo simbólico en MATLAB. Esto permite calcular la rigidez del robot en una dirección en función de la configuración.

Por último, se ha realizado un estudio de rigidez. En este estudio, se fijan ciertas variables, dejando otras libres, para buscar trayectorias que tengan buena rigidez. Para una posición del robot, se ha conseguido calcular la trayectoria óptima en cuanto a rigidez, aprovechando el grado de libertad extra con el que cuenta el robot.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	3
1.1. Justificación del trabajo.....	4
1.2. Objetivos .....	7
1.3. Terminología .....	8
2. CINEMÁTICA DEL IIWA .....	10
2.1. Modelo del robot .....	10
2.2. Definición del ángulo $\psi$ .....	13
2.3. Notación .....	14
2.4. Cinemática directa .....	15
2.5. Ecuaciones cinemáticas en función de $\psi$ .....	17
2.6. Cinemática inversa .....	19
2.6.1. Articulación del codo.....	19
2.6.2. Articulaciones del hombro .....	20
2.6.3. Articulaciones de la muñeca .....	23
2.7. Solución para diferentes configuraciones.....	24
2.8. Comprobación mediante cinemática directa.....	27
3. CÁLCULO DE MATRIZ JACOBIANA .....	28
4. CÁLCULO DE MATRIZ DE RIGIDEZ.....	30
5. ESTUDIO DE RIGIDEZ .....	33
5.1. Variables.....	33
5.1.1. Orientación.....	33
5.1.2. Posición .....	34
5.1.3. Ángulo $\psi$ .....	35
5.1.4. Configuración .....	35
5.2. Zonas de trayectorias realizables .....	36
5.2.1. Espacio de trabajo .....	36
5.2.2. Rangos de las articulaciones .....	37
5.2.3. Zonas de trayectorias realizables en función de $\psi$ .....	38
5.3. Trayectorias con $\psi$ óptima.....	43
6. CONCLUSIONES .....	47
7. LÍNEAS FUTURAS .....	48
8. BIBLIOGRAFÍA .....	49

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares fundamentales en la actual cuarta revolución industrial es la robótica. La mejora de estas tecnologías permite a las empresas una mayor productividad, la utilización de los recursos de una manera más eficiente o una disminución de errores, entre otros.

La robótica industrial es un campo de la ingeniería que trata sobre el diseño, desarrollo, automatización y fabricación de robots industriales. Los robots industriales se ocupan de realizar tareas repetitivas, y muchas veces peligrosas, con mucha precisión, rapidez y eficiencia. Por estos motivos, se usan, en una mayor medida, en una cadena de fabricación o en la producción industrial.

En función de la aplicación, las características que necesita un robot industrial son muy diversas, por eso existen distintos tipos de robots industriales:

- Robot cartesiano
- Robot antropomórfico
- Robot cilíndrico
- Robot SCARA
- Robot delta

Una de las tipologías más usadas en la industria es el robot antropomórfico, ya que tienen variedad de usos en distintos procesos de fabricación. Se utilizan para realizar operaciones más complejas como la soldadura, el montaje de productos y el mecanizado.

En ciertas operaciones de mecanizado que realizan este tipo de robots industriales, es posible mejorar la eficacia del proceso cambiando la trayectoria del robot o haciendo que trace la trayectoria de otra forma. La búsqueda de esta mejora en el proceso de mecanizado, de una aplicación en concreto, es lo que se busca en este trabajo de fin de estudios.

## 1.1. Justificación del trabajo

En este trabajo de fin de estudios se pretende estudiar la cinemática y la rigidez de un robot de 7 grados de libertad, con el fin de obtener una trayectoria lineal que haga que el robot presente la mayor rigidez posible.

El querer obtener una trayectoria lineal donde el robot esté lo más rígido posible es debido a la **necesidad** en una **aplicación práctica**, requerida en la empresa ALDAKIN AUTOMATION. Dicha aplicación se trata de una operación de **mecanizado** en componentes de **pared fina**. Un componente de pared fina es una pieza cuyas dimensiones de altura y anchura son mucho mayores que su espesor, normalmente una relación de 1 a 100.

Al mecanizar este tipo de piezas se dan los siguientes problemas [3]:

- La gran flexibilidad de la pieza a mecanizar produce una gran **deformación** debida a las fuerzas de corte.
- La herramienta de corte introduce **vibraciones** debido a su giro rotatorio y debido a los golpes del cabezal sobre la pieza a mecanizar, que se producen a una determinada frecuencia.



Ilustración 1. Pieza antes del mecanizado sin apoyo

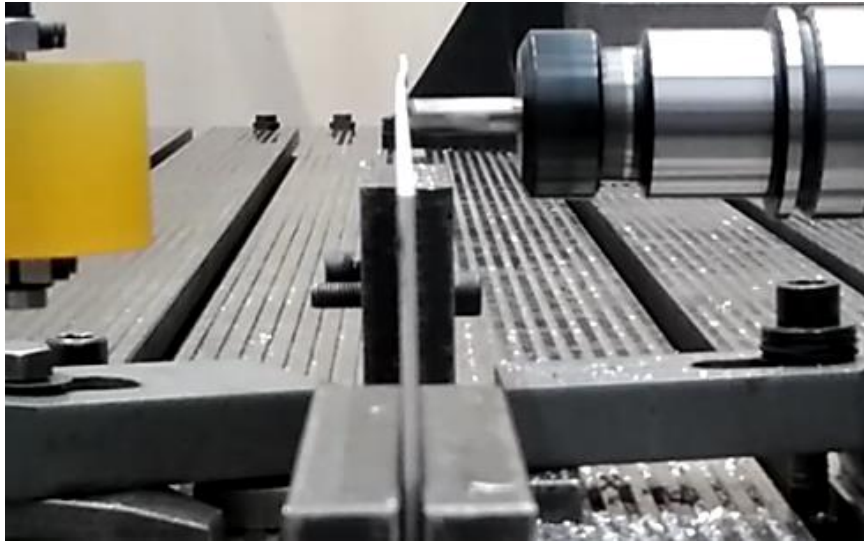


Ilustración 2. Pieza durante el mecanizado sin apoyo

Para paliar estos efectos, se utiliza un **apoyo robótico móvil** incrementando **rigidez** de la pieza y reduciendo así la deformación. Se denomina a este segundo robot el “gemelo” del robot que realiza el mecanizado, ya que sigue el mismo movimiento lineal, pero por la parte trasera de la pieza a mecanizar. Este robot gemelo es el modelo LBR iiwa 7 R800, comercializado por KUKA, el cual dispone de 7 grados de libertad. Además, el robot gemelo está sensorizado y permite modos de control que los robots convencionales no poseen.

Sin embargo, esta aportación de rigidez a la pieza mediante el robot gemelo resulta insuficiente en algunos casos. Es por eso por lo que se querría **aumentar** la **rigidez** del robot gemelo a lo largo de la trayectoria, de manera que aporte la mayor rigidez posible para que la pieza se deforme lo menos posible.

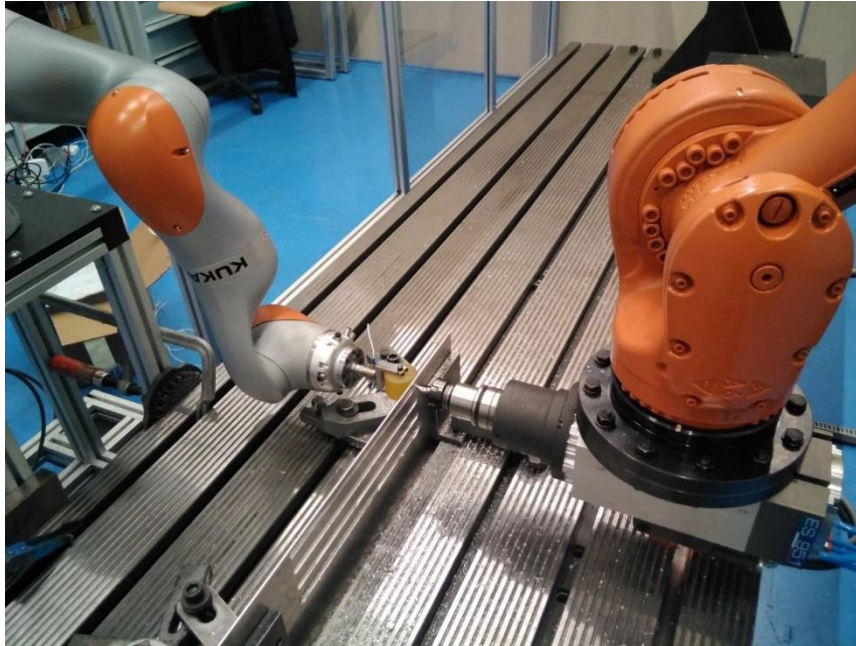


Ilustración 3. Robot de mecanizado y robot gemelo

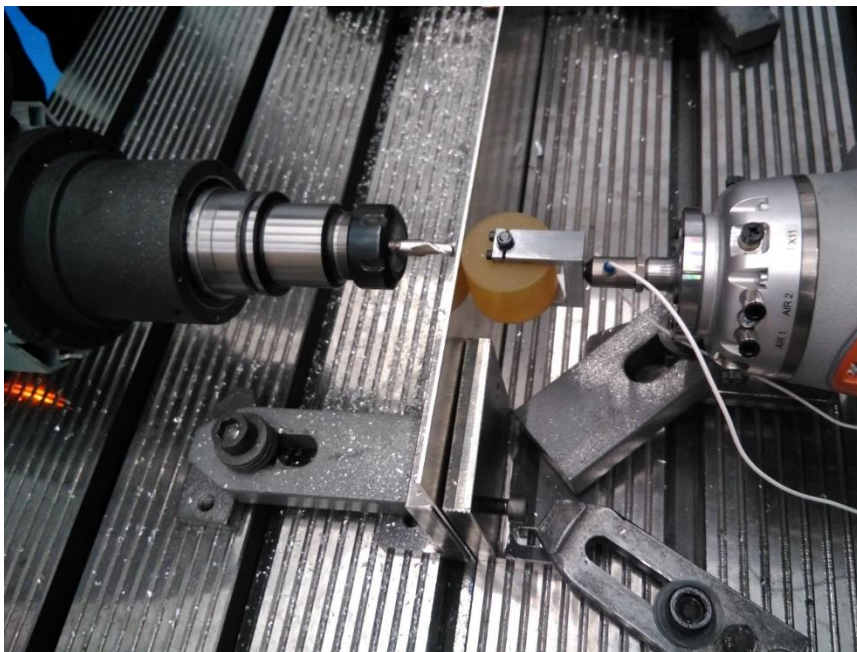


Ilustración 4. Mecanizado, vista superior

La **rigidez** de un robot industrial en una cierta dirección **depende** de la **configuración** del robot, es decir, depende de la posición de las **articulaciones**. Para cada punto y orientación final se tendrán distintas configuraciones, por lo que se tendrán distintos valores de rigidez. Entonces, si se elige una trayectoria en la que el robot gemelo pase por configuraciones en la que la rigidez es muy alta, se podrá aportar mayor rigidez a la pieza a mecanizar.

Para un robot de 6 grados de libertad, definiendo la posición y orientación final, las posibles configuraciones para llegar a esa solución son finitas. No obstante, para un robot de 7 grados de libertad, como es el robot gemelo, las posibles configuraciones son infinitas para una posición y orientación final deseadas, esta situación se conoce como **redundancia**.

La idea principal en este trabajo de fin de estudios es aprovechar la redundancia que dispone el robot gemelo para calcular nuevas formas de seguir la **trayectoria** en las que el robot presente **mayor rigidez**, respecto a la trayectoria habitual que sigue el robot gemelo. La trayectoria será la misma, lo que cambia es la manera de realizarla, aprovechando las infinitas configuraciones posibles que ofrece la redundancia del robot.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal es obtener una trayectoria lineal con la mayor rigidez posible, pero para llegar a ello hay que realizar muchos pasos intermedios. Es por eso por lo que se definen unos objetivos más simples y concretos, con un cierto orden, ya que el poder cumplir ciertos objetivos depende de haber realizado antes otros.

- Obtener la **cinemática inversa**
- Comprobar la cinemática inversa mediante la **cinemática directa**
- Obtener la **matriz jacobiana**
- Obtener la **matriz de rigidez**
- **Estudiar** la **rigidez** en función de la posición, orientación y configuración del robot
- Establecer distintos **criterios** con los que la rigidez a lo largo de una trayectoria pueda ser la mayor posible
- **Calcular trayectorias**, mediante la cinemática inversa, para diferentes criterios
- **Comparar**, para los distintos criterios, la rigidez a lo largo de la trayectoria para **establecer** cuál es la **mejor solución**



### 1.3. Terminología

A la hora de hablar sobre robótica industrial es importante entender ciertos conceptos y conocer las palabras que se usan para referirse a dichos conceptos. Aprovechando el caso más simple de un robot, se introducirán los conceptos y la jerga, relacionados con la robótica, que se van a tratar en este trabajo de fin de estudios.

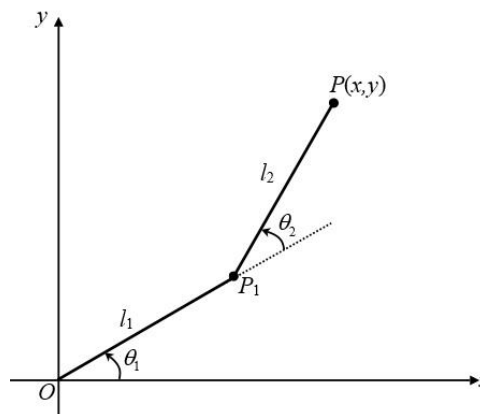


Ilustración 5. Robot plano de 2 grados de libertad

**Robot industrial:** Manipulador polivalente de varios grados de libertad controlados por servosistemas de posición y velocidad que permiten la ejecución de trayectorias espaciales programadas mediante algún lenguaje de alto nivel y un entorno de programación/simulación [1].

**Cinemática directa:** estudio de los movimientos de un robot. Teniendo como entrada las variables articulares se estudia cómo se comportan las variables cartesianas del elemento terminal.

**Cinemática inversa:** estudio que permite determinar el movimiento de las variables articulares para lograr que elemento terminal se ubique en una posición concreta.

**Eslabones:** Son los elementos rígidos del robot, que están conectados entre sí mediante las articulaciones. En la ilustración 5 son las barras de longitud  $L_1$  y  $L_2$ .

**Articulaciones:** Permiten el movimiento de los eslabones. En la ilustración 5 están las articulaciones del punto  $O$  y la del punto  $P_1$ , que permiten la rotación del eslabón de longitud  $L_1$  y del eslabón de longitud  $L_2$  respectivamente.

**Grados de libertad:** mínimo de parámetros que necesitamos especificar para determinar completamente la velocidad de un mecanismo, que coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento. En la ilustración 5, para poder describir el movimiento del mecanismo se necesitan las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , por lo que el robot es de 2 grados de libertad. Desde ahora, dada la alta frecuencia del uso de este concepto, se le referirá mediante sus siglas: gdl.

**Cadena cinemática:** Es la cadena formada por los eslabones y las articulaciones. Un robot puede estar formado por más de una cadena cinemática, siendo el caso de los robots paralelos.

**Elemento terminal** (*End effector*): extremo final de la cadena cinemática. En la ilustración 5 es el punto  $P$ .

**Variables cartesianas:** Variables relacionadas con el elemento terminal, que sirven para indicar la posición, velocidad, aceleración, etcétera en coordenadas cartesianas. En la ilustración 5, la posición cartesiana del elemento terminal la definen las variables  $x$  e  $y$ .

**Variables articulares:** Variables relacionadas con las articulaciones, que sirven para indicar la posición, velocidad, aceleración, etcétera de las articulaciones. En la ilustración 5, la **posición articular** (*Joint angle*) de las articulaciones las definen  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . En este trabajo de fin de estudios, para referirse a las posiciones articulares, por lo general, se empleará el término de variable articular.

**Espacio cartesiano** (*Task space*): Espacio donde se define la posición cartesiana del elemento terminal. En la ilustración 5 se representa mediante el plano que forman los ejes  $x$  e  $y$ .

**Espacio articular** (*Joint space*): Espacio donde se definen las posiciones articulares.

**Redundancia:** Ocurre cuando la dimensión del espacio articular es mayor que la del espacio cartesiano. Entonces, hay infinitas soluciones de la cinemática inversa para un punto del elemento terminal. No es el caso del robot mostrado en la ilustración 5. En cambio, sí que es el caso del robot de la ilustración 6.

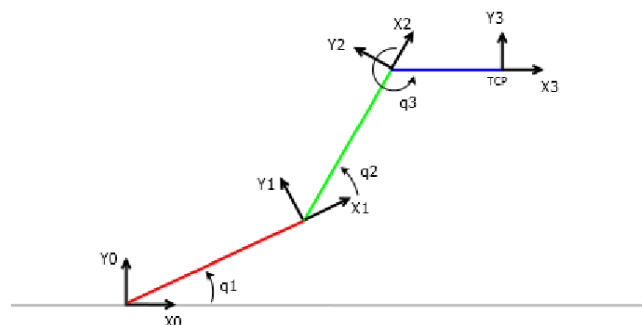


Ilustración 6. Robot redundante de 3 grados de libertad

## 2. CINEMÁTICA DEL IIWA

La resolución de la cinemática inversa se ha realizado de manera analítica. Existen otros métodos como la resolución de manera numérica a través del método de Newton-Raphson u otros algoritmos. No hay ningún método estrictamente mejor que otros, pero se ha decidido optar por la resolución analítica porque con el uso de algoritmos es posible (dependiendo de las condiciones) llegar a puntos donde el algoritmo se “atasque” y no consiga llegar en un número pequeño de iteraciones a la solución.

Esto no pasa con la forma analítica, ya que, una vez resuelta, se obtienen las variables articulares en función de parámetros del robot, configuración del robot, posición final y orientación final. Esto significa que solamente bastaría con sustituir cada término en la expresión final, que computacionalmente es muy rápido y directo.

La resolución de manera analítica consiste en obtener la cinemática inversa a partir de las ecuaciones que definen las posiciones y orientaciones del robot. Entonces, es necesario definir ciertas variables y parámetros del robot para poder expresar estas ecuaciones.

El planteamiento que se verá a continuación para resolver la cinemática inversa ha sido desarrollado por Masayuki en [2]. Se explicará paso por paso la manera de solventar la redundancia, el procedimiento y su integración en código de MATLAB.

### 2.1. Modelo del robot

Como se ha mencionado anteriormente, el modelo del robot gemelo es el LBR iiwa 7 R800, que se puede ver en la ilustración 7. En la imagen se muestran, a la izquierda, el robot en la configuración “home”, indicando las 7 articulaciones disponibles. En cambio, a la derecha, se tiene al robot en una configuración arbitraria.

La forma del robot no es la habitual en robótica industrial porque, a priori, parece un tanto “serpenteante”. Aunque al principio parezca un poco confuso, sobre todo visto en la configuración “home”, tras entender el modelo se puede comprender mucho mejor el robot real identificando los puntos clave.

Dichos puntos clave son; la base, el hombro, el codo, la muñeca y el elemento terminal. Posteriormente, se definirán rigurosamente estos puntos para el modelo mediante la representación de Denavit-Hartenberg.

Pero para hacerse una idea rápida y sin entrar en detalles, el codo el hombro y la muñeca corresponden a las partes de color naranja que tiene el robot.

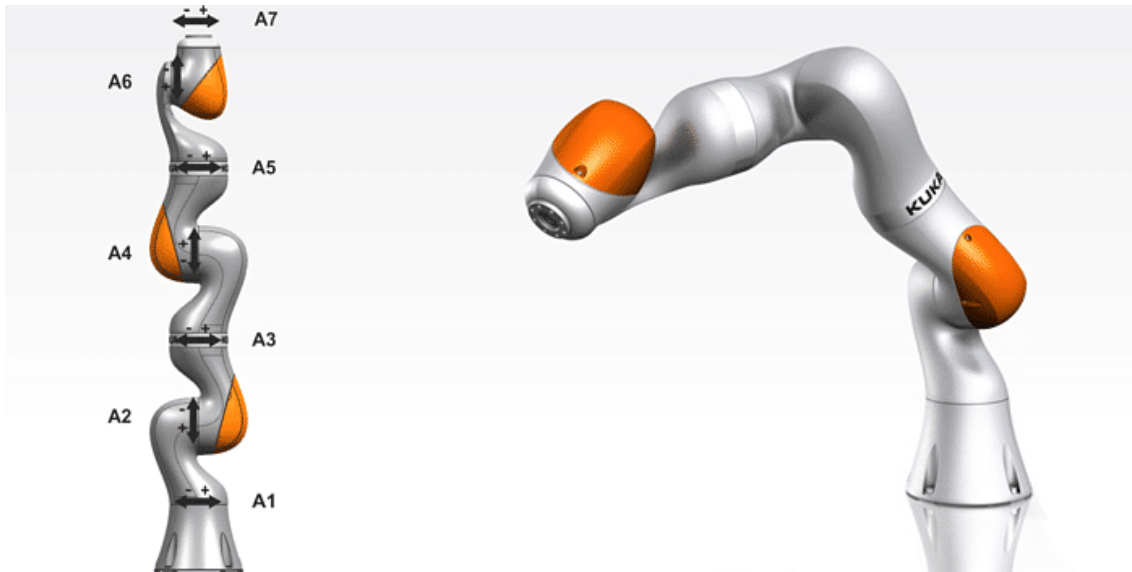


Ilustración 7. KUKA LBR iiwa 7 R800 [7]

Para entender y visualizar mejor el iiwa se muestra la ilustración 8, en el que se representan los 7 giros de las articulaciones del robot, mediante el modelo del robot real.

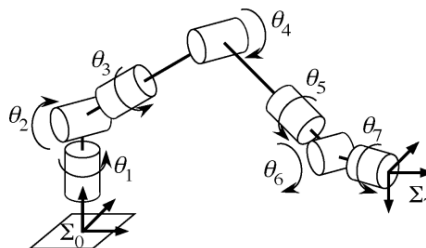


Ilustración 8. Modelo del robot real [2]

Con el fin de simplificar las ecuaciones y la representación gráfica, se trabajará con un **modelo simplificado**, que es equivalente al **modelo real** en cuanto a la resolución de la cinemática inversa. Es decir, que la expresión final de las variables articulares  $\theta$  se puede escribir de la misma manera.

Esta equivalencia, en cuanto a la resolución de la cinemática inversa, se debe a que se puede llegar al mismo punto del espacio de trabajo de distintas formas usando sistemas de referencia intermedios.

En ambos modelos los sistemas de referencia están asociados a cada una de las articulaciones, pero hay diferencias significativas.

- **Modelo real:** el origen del sistema de referencia  $i$  está en el punto de unión entre eslabones  $i$  e  $i + 1$ . Por ejemplo, el origen  $O_2$  está en la unión de los eslabones 2 y 3. Esto se cumple para todos los orígenes exceptuando  $O_7$ , que es la posición del elemento terminal. Este modelo se utiliza para representar el modelo en 3D, porque de esta manera se pueden ver en las simulaciones en 3D dónde se sitúa cada una de las articulaciones del iiva.
- **Modelo simplificado:** Solamente cambian los orígenes  $O_1, O_3$  y  $O_5$ , el resto es igual al modelo real. Ahora se cumple que  $O_1 = O_2, O_3 = O_4$  y  $O_5 = O_6$ . Con este modelo la cinemática inversa es más fácil de resolver, pero si se representa en 3D resulta más difícil de visualizar cómo es el robot, en qué configuración está y cómo se mueve.

Entonces, es conveniente usar un modelo u otro en cada caso. Por eso, cuando se resuelva la cinemática inversa se hará uso del modelo simplificado, pero a la hora realizar la representación en 3D se utilizará el modelo real.

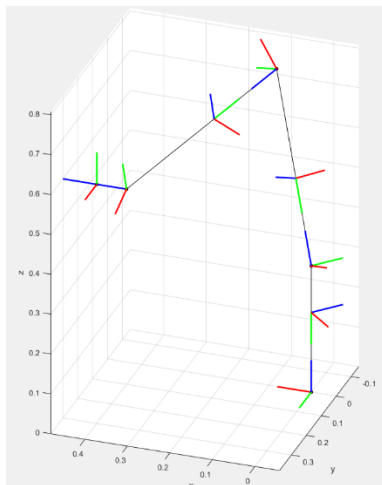


Ilustración 9. Modelo real

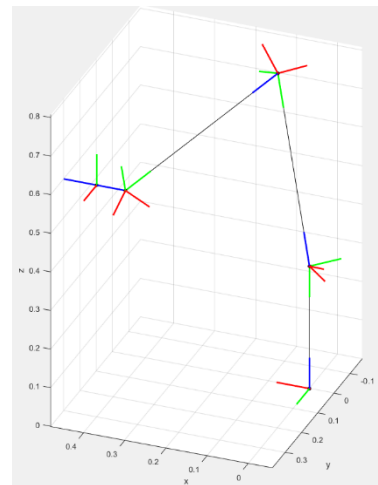


Ilustración 10. Modelo simplificado

En cuanto a la representación, como es habitual en robótica industrial, se trabaja con la representación de Denavit-Hartenberg, que se obtiene aplicando el algoritmo de Denavit-Hartenberg. En la tabla 1 se muestran los parámetros asociados a cada giro, donde cada término es el siguiente:

- $i$ : número de articulación
- $\theta_i$ : Es el ángulo de la articulación desde el eje  $x_{i-1}$  hasta el eje  $x_i$ , medido respecto del eje  $z_{i-1}$ , usando la regla de la mano derecha.

- $\alpha_i$ : Es el ángulo que separa los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , medido respecto del eje  $x_i$
- $d_i$ : Es la distancia medida desde el origen del sistema i-1, a lo largo del eje  $z_{i-1}$  hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$
- $a_i$ : Es la distancia de separación entre los orígenes de los sistemas de referencia i-1 e i, medida a lo largo del eje  $x_i$  hasta la intersección con el eje  $z_{i-1}$ . (o la distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , cuando estos no se interceptan)

$i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$a_i$
1	$\theta_1$	$-\pi/2$	$d_{bs}$	0
2	$\theta_2$	$\pi/2$	0	0
3	$\theta_3$	$-\pi/2$	$d_{se}$	0
4	$\theta_4$	$\pi/2$	0	0
5	$\theta_5$	$-\pi/2$	$d_{ew}$	0
6	$\theta_6$	$\pi/2$	0	0
7	$\theta_7$	0	$d_{wt}$	0

Tabla 1. Tabla de la representación de Denavit-Hartenberg

En cuanto a la notación de las distancias  $d_i$  de la tabla 1, cada letra corresponde a un punto del robot, siendo estos:

- **b**: la base del robot. Origen del sistema de referencia 0.
- **s**: el hombro del robot, (*shoulder*). Origen del sistema de referencia 2.
- **e**: el codo del robot, (*elbow*). Origen del sistema de referencia 4.
- **w**: la muñeca del robot, (*wrist*). Origen del sistema de referencia 6.
- **t**: el elemento terminal. Origen del sistema de referencia 7.

## 2.2. Definición del ángulo $\psi$

Una de las claves en esta forma de resolver la cinemática inversa es la inclusión de una nueva variable para solventar la redundancia. Entonces, se define el ángulo  $\psi$  como el ángulo formado por el plano de referencia y el ángulo del brazo del robot, los cuales se definen a continuación:

- **Plano del brazo del robot**: Es el plano formado por los puntos del hombro, codo y muñeca del robot.

**Plano de referencia:** tomando  $\theta_3 = 0$  y resolviendo la cinemática inversa se obtiene una configuración del robot. Entonces, para esta configuración, es el plano formado por los puntos del hombro, codo y muñeca del robot no redundante, que se le denomina así porque al establecer  $\theta_3 = 0$  se elimina la redundancia.

Esta representación de los planos se puede entender más fácilmente observando la ilustración 11.

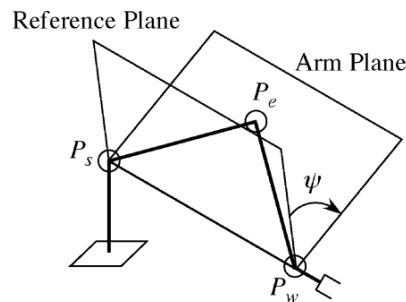


Ilustración 11. Definición del ángulo  $\psi$  mediante el plano de referencia y el plano del brazo [2]

Nótese que, en el caso del robot redundante, cuando  $\psi = 0$  el plano del brazo y el plano de referencia coinciden, por lo que  $\theta_3 = 0$ .

Además, puesto que los puntos del hombro y la muñeca son fijos, como se demostrará posteriormente, este ángulo  $\psi$  es el que gira entorno al eje formado por los puntos del hombro y la muñeca.

### 2.3. Notación

En cuanto las ecuaciones cinemáticas, se va a seguir la siguiente notación:

- ${}^i x_{jk}$  : vector  $x$  desde el punto  $j$  al punto  $k$ , expresado en base  $i$
- ${}^i x_n$  : vector  $x$  desde el origen del sistema de referencia  $i$  hasta el origen del sistema de referencia  $n$
- ${}^i R_j$  : matriz de rotación  $R$  desde base  $i$  hasta base  $j$
- ${}^i R_j^0$  : matriz de rotación  $R$  desde base  $i$  hasta base  $j$  en el caso del robot no redundante, es decir, cuando  $\theta_3 = 0$
- $\theta_i^0$  : variable articular  $i$  en el caso del robot no redundante, cuando  $\theta_3 = 0$
- $I_3$  : matriz identidad de 3x3

Siguiendo esta notación, los vectores asociados a las longitudes de los eslabones se pueden escribir como:

$${}^0\mathbf{l}_{bs} = [0 \quad 0 \quad d_{bs}]^T \quad (1)$$

$${}^3\mathbf{l}_{ls} = [0 \quad -d_{se} \quad 0]^T \quad (2)$$

$${}^4\mathbf{l}_{ew} = [0 \quad 0 \quad d_{ew}]^T \quad (3)$$

$${}^7\mathbf{l}_{wt} = [0 \quad 0 \quad d_{wt}]^T \quad (4)$$

Por otra parte, las matrices de rotación obtenidas, siguiendo la representación de Denavit-Hartenberg, se expresan como:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2.4. Cinemática directa

Resolver la cinemática directa es muy importante y prioritario, porque se va a usar en la cinemática inversa, en su comprobación y en el cálculo de la matriz Jacobiana, la cual es muy importante porque se necesita para calcular la matriz de rigidez.

La idea principal es calcular el origen y la orientación de cada uno de los sistemas de referencia de uno en uno, ya que unos se pueden expresar en función de los anteriores. De esta manera, paso a paso, se calcula más fácilmente el origen y la orientación del sistema de referencia 7, que son la posición y orientación deseadas del elemento terminal.

Cabe resaltar que estos sistemas de referencia no están asociados a la representación de Denavit-Hartenberg explicada anteriormente, sino a la representación de Denavit-Hartenberg del modelo real. Si se realizase con dicha representación, la posición de los orígenes de los sistemas de referencia 1, 3 y 5 coincidiría con los de 2, 4 y 6 respectivamente. Como ya se ha comentado, esto simplifica el cálculo de la cinemática inversa. Sin embargo, se necesita conocer cada una de las posiciones de los orígenes de los sistemas de referencia del modelo real, de manera que se sepa dónde se están realizando los giros de las articulaciones en el robot.

Con el objetivo de obtener estos sistemas de referencia, primero se han de calcular las matrices de rotación, las cuales se pueden obtener mediante la siguiente expresión generalizada:



$${}^{i-1}\mathbf{R}_n = \prod_i^n {}^{i-1}\mathbf{R}_i \quad (6)$$

Entonces, la orientación del elemento terminal se puede expresar de la siguiente manera:

$${}^0\mathbf{R}_7 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 {}^6\mathbf{R}_7 \quad (7)$$

Una vez calculadas las matrices de orientación necesarias, se puede ir calculando el origen de cada uno de los sistemas de referencia. Además, se pueden utilizar los orígenes calculados para expresar de una manera más sencilla los siguientes. Entonces, la expresión genérica para calcular los orígenes es:

$${}^0\mathbf{O}_i = {}^0\mathbf{O}_{i-1} + {}^0\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1,i} \quad (8)$$

Aplicando esta manera de calcular, se obtienen todos los orígenes:

$${}^0\mathbf{O}_1 = {}^0\mathbf{d}_{01} \quad (9)$$

$${}^0\mathbf{O}_2 = {}^0\mathbf{O}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{d}_{12} \quad (10)$$

$${}^0\mathbf{O}_3 = {}^0\mathbf{O}_2 + {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{d}_{23} \quad (11)$$

$${}^0\mathbf{O}_4 = {}^0\mathbf{O}_3 + {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{d}_{34} \quad (12)$$

$${}^0\mathbf{O}_5 = {}^0\mathbf{O}_4 + {}^0\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{d}_{45} \quad (13)$$

$${}^0\mathbf{O}_6 = {}^0\mathbf{O}_5 + {}^0\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{d}_{56} \quad (14)$$

Por último, se obtiene el origen del sistema de referencia 7, que es la posición del elemento terminal:

$${}^0\mathbf{O}_7 = {}^0\mathbf{O}_6 + {}^0\mathbf{R}_6 {}^6\mathbf{d}_{67} \quad (15)$$

## 2.5. Ecuaciones cinemáticas en función de $\psi$

En este apartado se pretende plantear las ecuaciones cinemáticas del robot en función del ángulo  $\psi$ , de manera que se pueda resolver la cinemática inversa con  $\psi$  como variable de entrada.

Para empezar, se muestran las dos ecuaciones principales que describen la posición y orientación final del robot. La ecuación (16) relaciona la posición del origen del sistema de referencia 7, que es el punto del elemento terminal, con las variables articulares. Por otra parte, la ecuación (17) relaciona la matriz de rotación del sistema de referencia 7, que es la orientación del elemento terminal, con las variables articulares.

$${}^0\mathbf{x}_7 = {}^0\mathbf{l}_{bs} + {}^0\mathbf{R}_3 \{ {}^3\mathbf{l}_{se} + {}^3\mathbf{R}_4 ( {}^4\mathbf{l}_{ew} + {}^4\mathbf{R}_7 {}^4\mathbf{l}_{ew} ) \} \quad (16)$$

$${}^0\mathbf{R}_7 = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_7 \quad (17)$$

Aunque las ecuaciones relacionen las variables articulares con parámetros conocidos o la orientación y posición deseadas, no se pueden despejar estas variables usando las ecuaciones (16) y (17). Es por eso que se recurre a la ecuación (18), que expresa la posición de la muñeca respecto del hombro.

$${}^0\mathbf{x}_{sw} = {}^0\mathbf{x}_7 + {}^0\mathbf{l}_{bs} - {}^0\mathbf{R}_7 {}^7\mathbf{l}_{wt} \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que la posición y la orientación del elemento terminal es fijo, puesto que son dato a la hora de resolver el problema, la posición de la muñeca no varía. Atendiendo a la ecuación (18), resulta que la posición de la es independiente de las variables articulares.

Sin embargo, la orientación de la muñeca respecto del sistema de referencia de la base depende del ángulo rotado en el eje formado por el hombro y la muñeca, que es el ángulo  $\psi$ . Entonces, tal y como se demuestra en [2], el cambio de orientación por el ángulo  $\psi$  viene dado por la ecuación (19).

$${}^0\mathbf{R}_\psi = \mathbf{I}_3 + \sin \psi [ {}^0\mathbf{u}_{sw} \times ] + (1 - \cos \psi) [ {}^0\mathbf{u}_{sw} \times ]^2 \quad (19)$$

${}^0\mathbf{u}_{sw}$  es el vector unitario de  ${}^0\mathbf{x}_{sw}$ , cuya expresión es:

$${}^0\mathbf{u}_{sw} = \frac{{}^0\mathbf{x}_{sw}}{\| {}^0\mathbf{x}_{sw} \|} \quad (20)$$

El término  $[{}^0\mathbf{u}_{sw} \times]$  corresponde a la matriz antisimétrica del vector  ${}^0\mathbf{u}_{sw}$ , la cual se puede expresar como:

$$[{}^0\mathbf{u}_{sw} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 & 0 & -\mathbf{u}_1 \\ -\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Donde los términos  $\mathbf{u}_i$  corresponden a los elementos del vector  ${}^0\mathbf{u}_{sw}$ .

Esta matriz de rotación  ${}^0\mathbf{R}_\psi$  permite expresar la matriz de rotación  ${}^0\mathbf{R}_4$  tal y como se muestra en la ecuación (22).

$${}^0\mathbf{R}_4 = {}^0\mathbf{R}_\psi {}^0\mathbf{R}_4^o \quad (22)$$

Atendiendo a la ecuación (18), esta se puede reescribir tal y como se muestra en la ecuación (23).

$${}^0\mathbf{x}_{sw} = {}^0\mathbf{R}_3 ({}^3\mathbf{l}_{se} + {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{l}_{ew}) \quad (23)$$

Ahora, aplicando la norma a ambos lados de la ecuación (23), se obtiene la ecuación (24).

$$\|{}^0\mathbf{x}_{sw}\| = \|{}^3\mathbf{l}_{se} + {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{l}_{ew}\| \quad (24)$$

Lo que se puede concluir de esta ecuación es que, para una determinada posición del elemento terminal, la variable articular  $\theta_4$  queda definida completamente. Entonces, se puede deducir que tanto para el caso en el que  $\theta_3 = 0$ , como en el caso en el que  $\theta_3$  puede tomar un valor arbitrario,  $\theta_4$  tendrá el mismo valor.

Luego, si  $\theta_4$  toma el mismo valor en ambos casos, las matrices de rotación desde la base 3 hasta la base 4 serán iguales, puesto que únicamente dependen de  $\theta_4$ . Entonces, si como se ha demostrado  ${}^3\mathbf{R}_4 = {}^3\mathbf{R}_4^o$ , expandiendo la ecuación (22) como  ${}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_4 = {}^0\mathbf{R}_\psi {}^0\mathbf{R}_3^o {}^0\mathbf{R}_4^o$  se puede obtener fácilmente  ${}^0\mathbf{R}_3$ , tal y como se muestra en la ecuación (25).

$${}^0\mathbf{R}_3 = {}^0\mathbf{R}_\psi {}^0\mathbf{R}_3^o \quad (25)$$

Teniendo  ${}^0\mathbf{R}_3$  en función de  ${}^0\mathbf{R}_\psi$ , que depende de  $\psi$ , se puede expresar el punto del elemento terminal y la orientación final en función de  $\psi$ .

$${}^0\mathbf{x}_7 = {}^0\mathbf{l}_{bs} + {}^0\mathbf{R}_\psi {}^0\mathbf{R}_3^o \{ {}^3\mathbf{l}_{se} + {}^3\mathbf{R}_4 ({}^4\mathbf{l}_{ew} + {}^4\mathbf{R}_7 {}^4\mathbf{l}_{ew}) \} \quad (26)$$

$${}^0\mathbf{R}_7 = {}^0\mathbf{R}_\psi {}^0\mathbf{R}_3^o {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_7 \quad (27)$$

## 2.6. Cinemática inversa

Una vez obtenidas las ecuaciones cinemáticas en función del ángulo  $\psi$ , se calculan las variables articulares en base a estas ecuaciones, con la ayuda de otras expresiones también.

Para obtener las variables articulares en función de parámetros o variables conocidas hay que seguir un cierto orden, puesto que ciertas variables dependen de otras, las cuales habrá que calcular antes.

Lo que se busca es obtener las variables articulares en función de parámetros conocidos, como las longitudes de los eslabones, y en función de variables que se les asigna un valor, como  $\psi$  o la posición y la orientación del elemento terminal. Entonces, a priori, para el problema de la cinemática inversa se tienen como datos conocidos:  $d_{bs}$ ,  $d_{se}$ ,  $d_{ew}$ ,  $d_{wt}$ ,  $\psi$ ,  ${}^0\mathbf{x}_7^d$  y  ${}^0\mathbf{R}_7^d$ . Los dos últimos términos son la posición deseada del elemento terminal y la orientación deseada del elemento terminal, respectivamente, que se expresan como en (28) y (29).

$${}^0\mathbf{x}_7^d = \left[ {}^0x_{7(x)}^d \quad {}^0x_{7(y)}^d \quad {}^0x_{7(z)}^d \right]^T \quad (28)$$

$${}^0\mathbf{R}_7^d = \begin{pmatrix} {}^0R_{7(11)}^d & {}^0R_{7(12)}^d & {}^0R_{7(13)}^d \\ {}^0R_{7(21)}^d & {}^0R_{7(22)}^d & {}^0R_{7(23)}^d \\ {}^0R_{7(31)}^d & {}^0R_{7(32)}^d & {}^0R_{7(33)}^d \end{pmatrix} \quad (29)$$

### 2.6.1. Articulación del codo

La única variable articular que no está sujeta a otras variables articulares es  $\theta_4$ , que es la variable articular del codo, por lo que será la primera en ser calculada.

En base a la ecuación (24), se puede obtener el coseno de  $\theta_4$  tal y como se muestra en la ecuación (30).

$$\cos \theta_4 = \frac{\|{}^0\mathbf{x}_{sw}\|^2 - d_{se}^2 - d_{ew}^2}{2d_{se}d_{ew}} \quad (30)$$

En (30), las longitudes de los eslabones son conocidas y  ${}^0\mathbf{x}_{sw}$  se puede expresar en función de datos conocidos, como se ve en (31), que proviene de la ecuación cinemática (18).

$${}^0\mathbf{x}_{sw} = {}^0\mathbf{x}_7^d + {}^0\mathbf{l}_{bs} - {}^0\mathbf{R}_7^d {}^7\mathbf{l}_{wt} \quad (31)$$

Una vez obtenido el coseno de  $\theta_4$ , basta con aplicar el arcoseno para conseguir despejar  $\theta_4$ .

$$\theta_4 = \arccos\left(\frac{\|{}^0\mathbf{x}_{sw}\|^2 - d_{se}^2 - d_{ew}^2}{2d_{se}d_{ew}}\right) \quad (32)$$

## 2.6.2. Articulaciones del hombro

La idea es obtener las variables articulares  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  de (25). A la izquierda de la ecuación se tienen las variables articulares del hombro. Por otra parte, a la derecha, se tiene  $\psi$  y las variables articulares del hombro correspondientes al robot no redundante.

Dichas variables articulares, del caso del robot no redundante, son;  $\theta_1^o$ ,  $\theta_2^o$  y  $\theta_3^o$ . Como se ha establecido por definición, obviamente  $\theta_3^o = 0$ , por lo que solo queda obtener  $\theta_1^o$  y  $\theta_2^o$  para tener las variables articulares del hombro en función de datos conocidos.

Para ello, se recurre a la ecuación cinemática (23), aplicándola al caso del robot no redundante. Además, expandiendo la matriz de rotación  ${}^0\mathbf{R}_3$  se obtiene la ecuación (33).

$${}^0\mathbf{x}_{sw} = {}^0\mathbf{R}_1^o {}^1\mathbf{R}_2^o {}^2\mathbf{R}_3 \Big|_{\theta_3=0} ({}^3\mathbf{l}_{se} + {}^3\mathbf{R}_4^o {}^4\mathbf{l}_{ew}) \quad (33)$$

A la izquierda de la ecuación (33), se tiene  ${}^0\mathbf{x}_{sw}$ , que es conocido porque se ha calculado en (31). En cambio, a la derecha, hay vectores de posición, que son conocidos y cuatro matrices de rotación:

- ${}^0\mathbf{R}_1^o$ : depende únicamente de senos y cosenos de  $\theta_1^o$ , que es incógnita.
- ${}^1\mathbf{R}_2^o$ : depende únicamente de senos y cosenos de  $\theta_2^o$ , que es incógnita.
- ${}^2\mathbf{R}_3 \Big|_{\theta_3=0}$ : depende únicamente de  $\theta_3$ , que en el caso del robot no redundante  $\theta_3^o = 0$ , por lo que es conocida.
- ${}^3\mathbf{R}_4^o$ : mediante (24) se ha demostrado que  ${}^3\mathbf{R}_4 = {}^3\mathbf{R}_4^o$ . Como  $\theta_4$  es conocido, esta matriz, que depende únicamente de  $\theta_4$ , también es conocida.

Entonces, solamente se ha de hallar  $\theta_1^o$  y  $\theta_2^o$ , o sus términos de seno y coseno. Para ello, se separa la ecuación vectorial (33) en tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} {}^0x_{7(x)}^d - {}^0R_{7(13)}^d d_{wt} - (d_{se} + d_{ew} \cos \theta_4) \cos \theta_1^o \sin \theta_2^o \\ - d_{ew} \sin \theta_4 \cos \theta_1^o \cos \theta_2^o = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} {}^0x_{7(y)}^d - {}^0R_{7(23)}^d d_{wt} - (d_{se} + d_{ew} \cos \theta_4) \sin \theta_1^o \sin \theta_2^o \\ - d_{ew} \sin \theta_4 \sin \theta_1^o \cos \theta_2^o = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} {}^0x_{7(z)}^d - d_{bs} - {}^0R_{7(33)}^d d_{wt} - (d_{se} + d_{ew} \cos \theta_4) \cos \theta_2^o \\ + d_{ew} \sin \theta_4 \sin \theta_2^o = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Para simplificar las ecuaciones se utilizan variables auxiliares:

$$A_a = {}^0x_{7(z)}^d - d_{bs} \quad (37)$$

$$B_a = -(d_{se} + d_{ew} \cos \theta_4) \quad (38)$$

$$C_a = d_{ew} \sin \theta_4 \quad (39)$$

$$D_a = {}^0x_{7(x)}^d - {}^0R_{7(13)}^d d_{wt} \quad (40)$$

$$E_a = B_a \sin \theta_2^o \quad (41)$$

$$F_a = -C_a \cos \theta_2^o \quad (42)$$

$$G_a = {}^0x_{7(y)}^d - {}^0R_{7(23)}^d d_{wt} \quad (43)$$

Entonces, (34), (35) y (36) se pueden escribir como (44), (45) y (46), respectivamente.

$$D_a + (E_a + F_a) \cos \theta_1^o = 0 \quad (44)$$

$$G_a + (E_a + F_a) \sin \theta_1^o = 0 \quad (45)$$

$$A_a + B_a \cos \theta_2^o + C_a \sin \theta_2^o = 0 \quad (46)$$

Nótese que las variables auxiliares  $E_a$  y  $F_a$  dependen de  $\theta_2^o$  por lo que para resolver (44) y (45) antes se ha de resolver (46), donde solamente  $\theta_2^o$  es conocido.

### Cálculo de $\theta_2^o$

Aplicando las identidades trigonométricas de (47) y (48) se puede reescribir la ecuación (46) como (49). Esto resulta ser una ecuación de segundo grado, con  $\tan \frac{\theta_2^o}{2}$  como incógnita.

$$\sin 2\theta_2^o = \frac{2 \tan \theta_2^o}{1 + \tan^2 \theta_2^o} \quad (47)$$

$$\cos 2\theta_2^o = \frac{1 - \tan^2 \theta_2^o}{1 + \tan^2 \theta_2^o} \quad (48)$$

$$(A_a - B_a) \tan^2 \frac{\theta_2^o}{2} + 2C_a \tan \frac{\theta_2^o}{2} + (A_a + C_a) = 0 \quad (49)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y aplicando la función  $atan2$  se puede despejar  $\theta_2^o$ , como se puede ver en (50).

$$\theta_2^o = 2 \operatorname{atan2} \left( -2C_a \pm \sqrt{4C_a^2 - 4(A_a + B_a)(A_a - B_a)}, 2(A_a - B_a) \right) \quad (50)$$

Esta función, representada con la notación  $\operatorname{atan2}(y, x)$ , devuelve el ángulo formado entre el eje  $x$  positivo y la recta que conecta el origen con un punto de coordenadas  $(x, y)$ . De esta manera, se evita la multiplicidad de soluciones que se daría si se resolviese mediante la función tangente clásica.

### Cálculo de $\sin \theta_1^o$ y $\cos \theta_1^o$

Como  $\theta_2^o$  ya es conocido, se pueden despejar los términos de seno y coseno de  $\theta_1^o$ , que se muestran en (51) y (52).

$$\sin \theta_1^o = \frac{-G_a}{E_a + F_a} \quad (51)$$

$$\cos \theta_1^o = \frac{-D_a}{E_a + F_a} \quad (52)$$

Con estos datos se podría calcular  $\theta_1^o$ , pero no es necesario porque las matrices de rotación de (33) solamente dependen de los términos de seno y coseno.

### Cálculo de $\theta_1, \theta_2$ y $\theta_3$

Una vez calculados todos los términos de  ${}^0R_3^o$ , se puede expresar  ${}^0R_3$  en función de datos conocidos.

Entonces, si se sustituye (19) en (25), se llega a obtener (53), que es una expresión más simplificada de  ${}^0R_3$  :

$${}^0R_3 = A_s \sin \psi + B_s \cos \psi + C_s \quad (53)$$

Donde  $A_s$ ,  $B_s$  y  $C_s$  son matrices cuyos elementos se representan mediante  $a_s$ ,  $b_s$  y  $c_s$ . Estas matrices se pueden calcular mediante las ecuaciones (54), (55) y (56).

$$A_s = [ {}^0\mathbf{u}_{sw} \times ] {}^0R_3^o \quad (54)$$

$$B_s = -[ {}^0\mathbf{u}_{sw} \times ]^2 {}^0R_3^o \quad (55)$$

$$C_s = [ {}^0\mathbf{u}_{sw} \quad {}^0\mathbf{u}_{sw}^T ] {}^0R_3^o \quad (56)$$

Con las matrices  $A_s$ ,  $B_s$  y  $C_s$  ya calculadas, a partir de (53) se pueden obtener las variables articulares del hombro, cuyas ecuaciones se muestran en (57), (58) y (59).

$$\theta_1 = \text{atan2}(-a_{s22} \sin \psi - b_{s22} \cos \psi - c_{s22}, -a_{s12} \sin \psi - b_{s12} \cos \psi - c_{s12}) \quad (57)$$

$$\theta_2 = \arccos(-a_{s32} \sin \psi - b_{s32} \cos \psi - c_{s32}) \quad (58)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(a_{s33} \sin \psi + b_{s33} \cos \psi + c_{s33}, -a_{s31} \sin \psi - b_{s31} \cos \psi - c_{s31}) \quad (59)$$

### 2.6.3. Articulaciones de la muñeca

Habiendo calculado  ${}^0R_3^o$  en el apartado anterior, la manera de obtener las variables articulares de la muñeca es similar a la forma de obtener las variables articulares del hombro.

Sustituyendo (19) en (27) se puede obtener una expresión simplificada de  ${}^4R_7$  .

$${}^4R_7 = A_w \sin \psi + B_w \cos \psi + C_w \quad (60)$$

Donde  $A_w$ ,  $B_w$  y  $C_w$  son matrices cuyos elementos se representan mediante  $a_w$ ,  $b_w$  y  $c_w$ . Estas matrices se pueden calcular mediante las ecuaciones (61), (62) y (63).

$$A_w = {}^3R_4^T A_s^T {}^0R_7^d \quad (61)$$

$$B_w = {}^3R_4^T B_s^T {}^0R_7^d \quad (62)$$

$$C_w = {}^3R_4^T C_s^T {}^0R_7^d \quad (63)$$

Con las matrices  $A_s$ ,  $B_s$  y  $C_s$  ya calculadas, a partir de (53) se pueden obtener las variables articulares de la muñeca, cuyas ecuaciones se muestran en (64), (65) y (66).



$$\theta_5 = \operatorname{atan2}(a_{w23} \sin \psi + b_{w23} \cos \psi + c_{w23}, a_{w13} \sin \psi + b_{w13} \cos \psi + c_{w13}) \quad (64)$$

$$\theta_6 = \arccos(a_{w33} \sin \psi + b_{w33} \cos \psi + c_{w33}) \quad (65)$$

$$\theta_7 = \operatorname{atan2}(a_{w32} \sin \psi + b_{w32} \cos \psi + c_{w32}, -a_{w31} \sin \psi - b_{w31} \cos \psi - c_{w31}) \quad (66)$$

## 2.7. Solución para diferentes configuraciones

La solución que se ha calculado para la cinemática inversa es solamente una de las posibles configuraciones. Para un valor de  $\psi$ , posición y orientación finales existen diferentes configuraciones posibles que también son solución. Por ejemplo, para unas variables de entrada, existe una solución en la que el codo del robot está “arriba” y otra en la que el codo está “abajo”. Esto se da por dos motivos.

Por una parte, para calcular  $\theta_2^o$ , se parte de una ecuación de segundo grado, por lo que el término  $\pm$  en la ecuación (50) indica que hay dos posibles soluciones.

La segunda razón es que, al calcular  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_6$ , se utiliza la función arcocoseno, para la cual existen dos soluciones, porque  $\cos \theta = \cos -\theta$ .

Entonces, si se eligen otras soluciones para  $\theta_2^o$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_6$  se puede llegar a otras soluciones de la cinemática inversa. No obstante, también hay que tener en cuenta que al cambiar estas variables, la solución cambia por completo. Por ello,  $\theta_1$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_7$  han de ajustarse, en función de la solución escogida en  $\theta_2^o$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_6$ , para llegar a la solución de la cinemática inversa.

El objetivo es obtener una expresión general de la cinemática inversa, con la que se obtenga una única solución. Teniendo en cuenta que hay 4 ecuaciones que tienen dos soluciones, eso da un total de 16 soluciones posibles, por lo que se tendrán 16 configuraciones posibles para un solo punto del espacio de trabajo. Entonces, para diferenciar cada una de las posibles configuraciones posibles es necesario incluir los siguientes parámetros de entrada:

- HOMBRO (H) =  $\begin{cases} -1 : \text{Hombro delante} \\ 1 : \text{Hombro atrás} \end{cases}$
- POSICIÓN CODO (PC) =  $\begin{cases} -1 : \text{Codo arriba} \\ 1 : \text{Codo abajo} \end{cases}$
- ORIENTACIÓN CODO (OC) =  $\begin{cases} -1 : \text{Codo izquierda} \\ 1 : \text{Codo derecha} \end{cases}$
- MUÑECA (M) =  $\begin{cases} -1 : \text{Muñeca arriba} \\ 1 : \text{Muñeca abajo} \end{cases}$

A continuación, se muestra cómo serían las diferentes soluciones variando solamente una de las variables. En las siguientes ilustraciones, se muestra, a la izquierda, una configuración como referencia y, a la derecha, una configuración distinta en la que solamente se cambia una de estas variables.

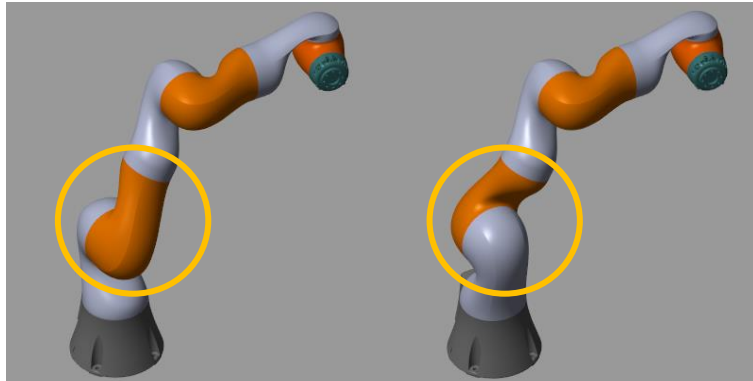


Ilustración 12. Configuraciones con distinta orientación de hombro [4]

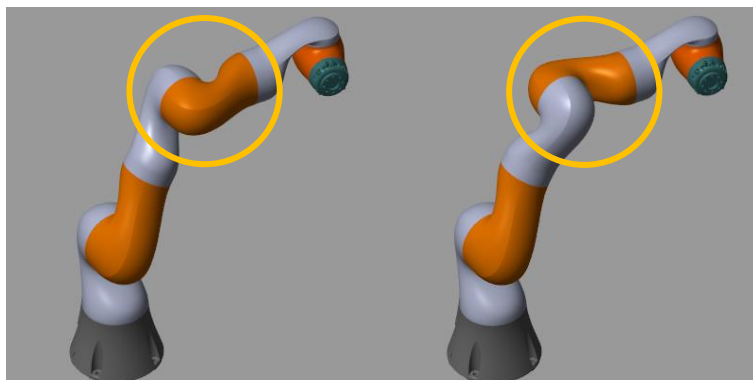


Ilustración 13. Configuraciones con distinta orientación de codo [4]

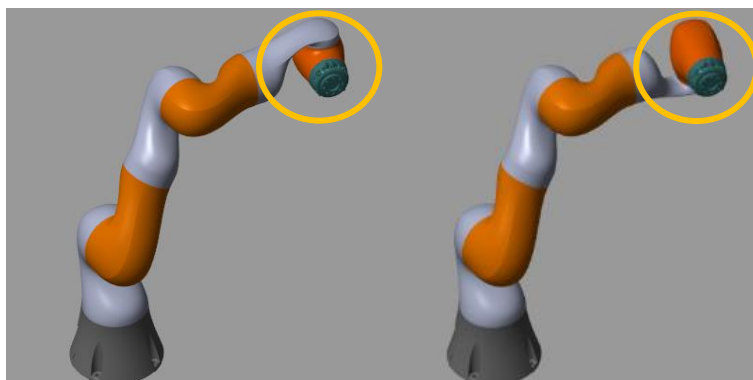


Ilustración 14. Configuraciones con distinta orientación de muñeca [4]

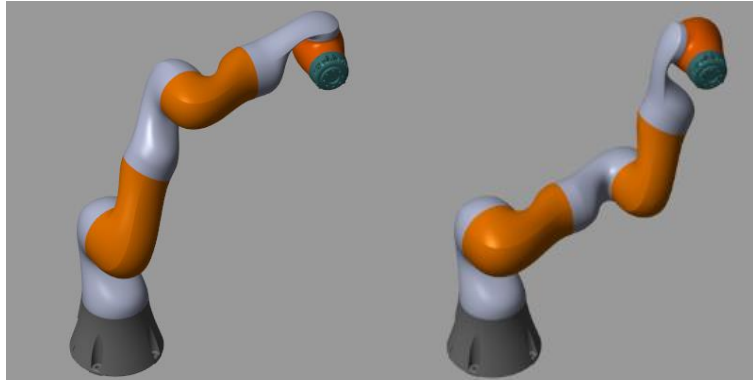


Ilustración 15. Configuraciones con distinto punto del codo [4]

Esta definición de las variables de entrada ayuda a la hora de calcular la solución general de la cinemática inversa, ya que permite determinar la solución con la configuración deseada. Además, ahora se pueden reescribir las ecuaciones de la cinemática inversa, dejándolas en función de la configuración deseada.

$$\theta_4 = -OC \cdot \arccos\left(\frac{\|{}^0\mathbf{x}_{sw}\|^2 - d_{se}^2 - d_{ew}^2}{2d_{se}d_{ew}}\right) \quad (67)$$

$$\theta_2^o = 2 \operatorname{atan2}\left(-2C_a - PC \cdot OC \sqrt{4C_a^2 - 4(A_a + B_a)(A_a - B_a)}, 2(A_a - B_a)\right) \quad (68)$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(-a_{s22} \sin \psi - b_{s22} \cos \psi - c_{s22}, -a_{s12} \sin \psi - b_{s12} \cos \psi - c_{s12}) + \frac{\pi(1+H)}{2} \quad (69)$$

$$\theta_2 = -H \cdot \arccos(-a_{s32} \sin \psi - b_{s32} \cos \psi - c_{s32}) \quad (70)$$

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}(a_{s33} \sin \psi + b_{s33} \cos \psi + c_{s33}, -a_{s31} \sin \psi - b_{s31} \cos \psi - c_{s31}) + \frac{\pi(1+H)}{2} \quad (71)$$

$$\theta_5 = \operatorname{atan2}(a_{w23} \sin \psi + b_{w23} \cos \psi + c_{w23}, a_{w13} \sin \psi + b_{w13} \cos \psi + c_{w13}) + \frac{\pi(1+M)}{2} \quad (72)$$

$$\theta_6 = -M \cdot \arccos(a_{w33} \sin \psi + b_{w33} \cos \psi + c_{w33}) \quad (73)$$

$$\theta_7 = \operatorname{atan2}(a_{w32} \sin \psi + b_{w32} \cos \psi + c_{w32}, -a_{w31} \sin \psi - b_{w31} \cos \psi - c_{w31}) + \frac{\pi(1+M)}{2} \quad (74)$$

## 2.8. Comprobación mediante cinemática directa

La manera de comprobar que la cinemática inversa se ha resuelto correctamente es aplicando la cinemática directa, para ver que se obtiene un resultado igual a los datos de entrada de la función de la cinemática inversa.

Esta es la comprobación, explicada paso por paso:

1. Se establecen las variables de entrada de la cinemática inversa: ángulo  $\psi$ , la configuración deseada, la posición deseada y la orientación deseada. Estas variables se definen como **variables deseadas**.
2. Se introducen las variables en la función de la cinemática inversa, obteniendo así las variables articulares:  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  y  $\theta_7$ .
3. Se introducen las variables articulares en la función de la cinemática directa, obteniendo un ángulo  $\psi$ , una configuración, una posición y una orientación. Estas variables se definen como **variables obtenidas**.
4. Se comparan las variables deseadas con las variables obtenidas. Si ambas coinciden, se puede concluir que la función de la cinemática inversa funciona, pero solo para esas variables en concreto.
5. Para poder concluir que la función de la cinemática inversa funciona en su totalidad, se repiten los pasos anteriores variando las variables deseadas y probando distintas combinaciones.

### 3. CÁLCULO DE MATRIZ JACOBIANA

Con el fin de obtener la matriz de rigidez se realiza el cálculo de la matriz jacobiana, la cual depende de la configuración.

Para obtener la matriz jacobiana se parte de la expresión mostrada en las ecuaciones (75) y (76). Estas expresiones son para el caso particular en el que todas las articulaciones son de rotación, como es el caso del iiva.

$$J = [J_1, J_2, \dots, J_n] \quad (75)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_n^* \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Entonces, se necesita calcular los vectores  $\mathbf{z}_{i-1}$  y  ${}^{i-1}\mathbf{p}_n^*$  para cada una de las articulaciones. Estos vectores se obtienen mediante (77) y (78).

$$\mathbf{z}_{i-1} = {}^0\mathbf{R}_{i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$${}^{i-1}\mathbf{p}_n^* = {}^0\mathbf{O}_n - {}^0\mathbf{O}_{i-1} \quad (78)$$

Como ya se han calculado, en función de las variables articulares, las matrices de rotación utilizando (6) y cada uno de los vectores de los orígenes usando (8), se pueden escribir los vectores  $\mathbf{z}_{i-1}$  y  ${}^{i-1}\mathbf{p}_n^*$  en función de las variables articulares.

Luego, calculando cada uno de los  $J_i$  se puede obtener la matriz jacobiana en función de las variables articulares.

Por otra parte, la matriz jacobiana se puede utilizar para calcular las velocidades cartesianas del elemento terminal, así como su velocidad angular. Utilizando (79), con  $\dot{\mathbf{q}}$  conocido, se obtienen fácilmente.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = J\dot{\mathbf{q}} \quad (79)$$

De la misma manera, se puede usar la matriz jacobiana para obtener las velocidades angulares de las articulaciones. Despejando  $\dot{\mathbf{q}}$  de (79), se puede obtener (80).

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}\dot{\mathbf{x}} \quad (80)$$

Ahora, resulta que  $\dot{\mathbf{q}}$  depende de la inversa de la matriz jacobiana, la cual depende de las variables articulares, y de  $\dot{\mathbf{x}}$ .

Esto es interesante, puesto que utilizando estas expresiones se puede calcular  $\dot{\mathbf{q}}$  para una trayectoria donde se quiera obtener una  $\dot{\mathbf{x}}$  deseada.

## 4. CÁLCULO DE MATRIZ DE RIGIDEZ

Las articulaciones de un robot tienen un cierto valor de rigidez [6], en la dirección de giro, que hace que el par ejercido en la articulación tenga mayor o menor influencia en la variación de la variable articular.

Este comportamiento viene dado por la ecuación (81), donde la rigidez de cada una de las articulaciones se expresa mediante la matriz de rigidez de las articulaciones  $K_\theta$ .

$$\boldsymbol{\tau} = K_\theta \Delta \mathbf{q} \quad (81)$$

Esta  $K_\theta$  es una matriz donde sus componentes de la diagonal son los valores de rigidez asociados a cada una de las articulaciones. Por otra parte, el resto de los elementos de la matriz son nulos.

$$K_\theta = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{bmatrix} \quad (82)$$

De la misma manera que ocurre para las articulaciones, ocurre lo mismo para el elemento terminal. Si se aplica una fuerza en el elemento terminal, la posición de este cambiará.

Lo que se quiere obtener es una matriz que relacione las fuerzas  $\mathbf{F}$  ejercidas en el elemento terminal con la variación de la posición y orientación de este. Esta matriz se denomina matriz de rigidez cartesiana:  $K_p$ .

Para hallar esta matriz, se parte de la ecuación (83), que relaciona los pares de las articulaciones con las fuerzas en el elemento terminal mediante la traspuesta de la matriz jacobiana.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (83)$$

Sustituyendo (81) en (83) se puede obtener la siguiente expresión, mostrada en (84).

$$\mathbf{J}^T \mathbf{F} = K_\theta \Delta \mathbf{q} \quad (84)$$

Ahora, se utiliza la ecuación (85), que relaciona la variación de la posición y la orientación del elemento terminal con la variación de las variables articulares mediante la matriz jacobiana.

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} \quad (85)$$

Entonces, sustituyendo (85) en (84) se consigue la ecuación (86).

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{p} \quad (86)$$

De esta forma, parece que ya se tiene una manera de relacionar las fuerzas del elemento terminal con los desplazamientos. Sin embargo,  $\mathbf{F}$  no se puede expresar tal y como se muestra en (86) para el caso de un robot de 7 grados de libertad.

El problema es que  $\mathbf{J}^T$  no es invertible, ya que sus dimensiones son 7x6. Esto es porque el robot cuenta con 7 variables articulares y 6 ecuaciones que describen la posición y la orientación del elemento terminal.

Para solventar este contratiempo se recurre a una de las propiedades de las matrices invertibles, como es la propiedad mostrada en (87), donde A y B son dos matrices invertibles.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (87)$$

Aplicando (87) al término  $\mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^T$  se obtiene la inversa de la matriz de rigidez cartesiana, también llamada en inglés “*compliance matrix*”, de ahí la letra C para representarla.

$$\mathbf{C} = (\mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{J}^T \quad (88)$$

Ahora, dado que  $\mathbf{K}_\theta$  es invertible y las matrices son multiplicables, sí que se puede obtener la matriz C. Esta matriz es de dimensiones 7x7 y es invertible, siempre que no se trabaje en una configuración que sea una singularidad.

Entonces, como la inversa de la matriz de rigidez cartesiana es C, la inversa de C es la matriz de rigidez cartesiana.

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{C}^{-1} \quad (89)$$



Finalmente, se llega a la ecuación (90), donde se relaciona  $\mathbf{F}$  con  $\Delta\mathbf{p}$  mediante la matriz de rigidez cartesiana  $K_p$ .

$$\mathbf{F} = K_p \Delta\mathbf{p} \quad (90)$$

Recapitulando, se ha calculado  $K_p$ , que es la inversa de  $C$ . A su vez, esta matriz  $C$  depende de  $J$  y  $K_\theta$ . Por tanto, la matriz de rigidez cartesiana  $K_p$  depende de la configuración del robot y de la rigidez de cada una de las articulaciones.

En cuanto a esta matriz  $K_p$ , para el caso de un robot de 7 grados de libertad, las dimensiones de la matriz son de [6x6]. Además, a diferencia de la matriz de rigidez articular, no cuenta con elementos nulos en el caso general, como se muestra en (91).

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \quad (91)$$

La información que se puede extraer la matriz es muy importante para el estudio de rigidez, ya que los elementos diagonales de esta matriz indican la rigidez del robot cuando se somete a una fuerza ubicada en el elemento terminal.

Para entenderlo mejor, si se aplica una fuerza en el elemento terminal en la dirección del eje  $x$ , cuanto mayor sea  $k_{11}$  menos se desplazará el elemento terminal en la dirección del del eje  $x$ .

Entonces, los tres primeros elementos diagonales de la matriz están asociados a la rigidez en las direcciones de los ejes  $x, y, z$ . En cambio, los tres últimos elementos diagonales de la matriz están asociados a la rigidez que se opone a los desplazamientos angulares en los ejes  $x, y, z$ .

## 5. ESTUDIO DE RIGIDEZ

Para empezar, hay que recordar la clave es medir la rigidez a lo largo de una trayectoria, lo cual servirá para elegir la trayectoria óptima.

En la aplicación requerida, las deformaciones de la pieza se producen por las fuerzas en la dirección de mecanizado. Si se establece que la dirección de mecanizado es el eje  $x$ , interesa medir la rigidez del robot respecto al eje  $x$ . Esto es porque cuanto más rígido sea el robot en esta dirección, menos se desplazará el elemento terminal en el eje  $x$ , lo cual hace que se produzca una deformación menor de la pieza.

Atendiendo a lo comentado en el apartado anterior, para medir la rigidez del robot en el eje  $x$ , simplemente se ha de calcular el primer elemento de la diagonal de la matriz de rigidez cartesiana,  $k_{11}$ .

### 5.1. Variables

Hay muchas variables para tener en cuenta a la hora de decidir cómo realizará la trayectoria el robot. Por eso, en este apartado se explica qué variables se podrán modificar y qué variables se fijarán para simplificar el problema.

#### 5.1.1. Orientación

Para empezar, el robot ha de realizar una trayectoria determinada en el eje  $y$ , desplazando el elemento terminal con una determinada orientación, de manera que el rodillo que se apoya en la pieza pueda rodar.

En realidad, la pieza que une el rodillo con el robot puede girar libremente, haciendo que no importe la orientación del elemento terminal. Esto es porque si, una vez se ha fijado el rodillo en la orientación deseada al comienzo de la trayectoria, cuando el robot empieza a ejercer fuerza el rodillo no cambiará su orientación, aunque lo haga el elemento terminal. No obstante, para simplificar el problema se fija la orientación del elemento terminal.

### 5.1.2. Posición

La posición que es variable es la de la base del robot, ya que se podría cambiar el robot de sitio para que haga la trayectoria. Sin embargo, el estudio se va a realizar con el robot fijo en el origen de coordenadas y lo que se cambiará es la posición del elemento terminal. Cuando se obtengan unas coordenadas del inicio de la trayectoria respecto del origen (donde se encuentra el robot en el estudio), se puede definir la posición en la que ha de estar el robot real conociendo las coordenadas del inicio de la trayectoria.

- **Eje  $y$**

La dirección del desplazamiento del robot se realiza en este eje. Entonces, teniendo en cuenta que la trayectoria tiene una longitud  $L_t = 0.35 \text{ m}$ , solamente hay que definir la posición inicial en el eje  $y$ .

Siguiendo la intuición, las trayectorias con una  $k_{11}$  mayor se darán cuando el brazo esté lo más “encogido” posible. Si se define una posición inicial de la trayectoria muy lejana a  $y = 0$ , en general, el brazo estará más estirado. Por esto, se fija la posición inicial de la trayectoria en  $y = \frac{-L_t}{2}$ , de manera que la posición final de la trayectoria esté en  $y = \frac{L_t}{2}$ . De esta manera, no hay ninguna posición de la trayectoria que esté muy alejada de  $y = 0$ , dejando una trayectoria simétrica.

Por otra parte, si se tiene una trayectoria simétrica es más probable que  $k_{11}$  a lo largo de la trayectoria. Esto resulta beneficioso, porque el tener  $k_{11}$  simétrica hace que los desplazamientos sean simétricos, por lo que las deformaciones en la pieza también lo serán, lo que hace que la pieza no quede asimétrica.

- **Ejes  $x, z$**

En principio, no hay una manera clara de determinar qué valores de estas variables son óptimos para obtener una buena  $k_{11}$  a lo largo de la trayectoria. Además, dependiendo de otras variables, habrá unos valores de  $x, z$  que den mejores o peores resultados en cuanto a rigidez. Entonces, estas variables se dejan libres.

### 5.1.3. Ángulo $\psi$

El ángulo  $\psi$  juega un papel muy importante, ya que es una variable que cambia completamente la rigidez en la trayectoria. Como en el caso anterior, la rigidez depende de más variables, por lo que no queda claro a priori qué valores de  $\psi$  son mejores. Por eso, esta variable se dejará libre.

### 5.1.4. Configuración

Otra de las variables de las que depende la cinemática inversa, y por tanto también la trayectoria, son las distintas configuraciones. No obstante, la variación en las configuraciones de las orientaciones del hombro, codo y la muñeca no afectan a la rigidez. Esto es porque pese a cambiar la configuración del robot, este sigue teniendo la misma estructura del brazo, por lo que la rigidez no varía.

No ocurre lo mismo si se cambia la configuración de la posición del codo, ya que, en ese caso, la estructura del brazo sí que cambiaría. Sin embargo, si se parte del caso de tener la configuración de codo arriba, variando el ángulo  $\psi$  se puede llegar a obtener la configuración donde el codo está abajo sin necesidad de cambiar esta variable de la configuración. Como se ha decidido dejar libre el ángulo  $\psi$ , este cubriría este tipo de casos.

Recapitulando, el estudio de rigidez se va a realizar pudiendo variar  $x$ ,  $z$  y  $\psi$ . Por otro lado, las variables que se fijan son las siguientes.

- Coordenada  $y$  de la posición inicial de la trayectoria:  $y = \frac{-L_t}{2}$
- Orientación del elemento terminal:  ${}^0\mathbf{R}_7^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Configuración del robot:  $\begin{cases} \text{Hombro} & = 1 \\ \text{Posición Codo} & = 1 \\ \text{Orientación Codo} & = 1 \\ \text{Muñeca} & = 1 \end{cases}$

## 5.2. Zonas de trayectorias realizables

Además de analizar las variables ya comentadas, también es importante saber qué trayectorias son realizables por el robot, porque no serviría de nada obtener una trayectoria teórica con una buena rigidez si el robot no es capaz de trazarla.

Estas limitaciones se dan por el **espacio de trabajo** y el **rango** en el que pueden girar las **articulaciones**. Por eso es necesario conocer cuáles son los límites del robot.

### 5.2.1. Espacio de trabajo

Es importante que cada uno de los puntos de la trayectoria esté en el espacio de trabajo, ya que, si no es el caso, el robot no puede llegar físicamente a dicho punto. Si no es posible llegar a todos los puntos de la trayectoria (con la posición y orientación deseadas) se entiende que la trayectoria no es realizable.

El fabricante define el espacio de trabajo del iiva tal y como se muestra en la ilustración 16.

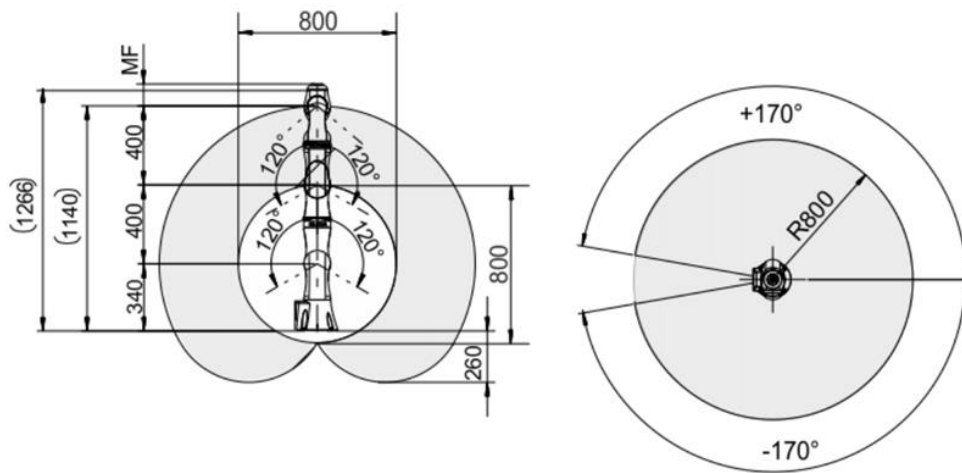


Ilustración 16. Espacio de trabajo del iiva [7]

Este espacio de trabajo se asemeja a una esfera grande quitando una parte de una esfera más pequeña. No obstante, esto merece ser explicado con mayor rigor.

Sean dos esferas  $A$  y  $B$ , de radios  $d_{se} + d_{ew}$  y  $d_{se}$ , centradas en el punto  $(0,0, d_{bs})$ , el espacio de trabajo es la diferencia entre estos dos conjuntos. Es decir, el espacio de trabajo es  $A \setminus B$ .

Definiendo las ecuaciones de ambas esferas en coordenadas cartesianas, estas quedan de la siguiente manera.

$$A: x^2 + y^2 + (z - d_{bs})^2 \leq (d_{se} + d_{ew})^2 \quad (92)$$

$$B: x^2 + y^2 + (z - d_{bs})^2 \leq d_{se}^2 \quad (93)$$

Por tanto, la diferencia entre las esferas  $A$  y  $B$ , que es el espacio de trabajo, se puede escribir matemáticamente de la siguiente manera.

$$A \setminus B: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - d_{bs})^2 > d_{se}^2 \\ x^2 + y^2 + (z - d_{bs})^2 \leq (d_{se} + d_{ew})^2 \end{cases} \quad (94)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que las variables  $x, z$  están en las dos ecuaciones mostradas en (94), se pueden fijar unos límites de estas variables con los que realizar el estudio de rigidez.

### 5.2.2. Rangos de las articulaciones

Por otro lado, los rangos en los que pueden girar las articulaciones del robot también van a limitar la realizabilidad de las trayectorias. Entonces, si hay al menos un punto de la trayectoria que resolviendo la cinemática inversa se obtienen unas variables articulares que no están en sus respectivos rangos, dicha trayectoria no será realizable.

A continuación, en la ilustración 17, se muestran los rangos de las 7 articulaciones de las que cuenta el iiwa, especificados por el fabricante.

Range of motion	
A1	±170 °
A2	±120 °
A3	±170 °
A4	±120 °
A5	±170 °
A6	±120 °
A7	±175 °
Speed with rated payload	
A1	98 °/s
A2	98 °/s
A3	100 °/s
A4	130 °/s
A5	140 °/s
A6	180 °/s
A7	180 °/s

Ilustración 17. Limitaciones de las articulaciones del iiwa [7]

Estas limitaciones fáciles de restringir, porque simplemente hay que asegurarse de que todos los puntos de la trayectoria dan unos valores de las variables articulares que estén dentro de los rangos mostrados.

### 5.2.3. Zonas de trayectorias realizables en función de $\psi$

Teniendo en cuenta estas limitaciones en cuanto a la trayectoria, se va a realizar un barrido de trayectorias en las direcciones  $x, z$  con una  $\psi$  constante para ver cuáles son las zonas de las trayectorias realizables.

Para realizar esto se procede siguiendo los siguientes pasos:

1. Se fija un  $\psi$ , que será constante en este análisis
2. Se toman unos valores de  $x, z$
3. Se comprueban todos los puntos de la trayectoria en base a las limitaciones comentadas, para saber si dicha trayectoria es realizable o no.
4. Si la trayectoria es realizable se grafica ese punto con color **amarillo** en el plano  $xz$ . Si algún punto de la trayectoria no está dentro del espacio de trabajo, a ese punto le corresponde el color **azul oscuro**. Si todos los puntos de la trayectoria están dentro del espacio de trabajo, pero algún punto de la trayectoria no cumple con las limitaciones de las articulaciones, entonces a ese punto le corresponde el color **azul claro**.

Esto se realiza para un rango de valores del plano  $xz$ , pero manteniendo el ángulo  $\psi$  constante. Entonces, se llegan a obtener estos gráficos, que indican qué valores de  $x, z$  dan trayectorias realizables para un ángulo  $\psi$  escogido.

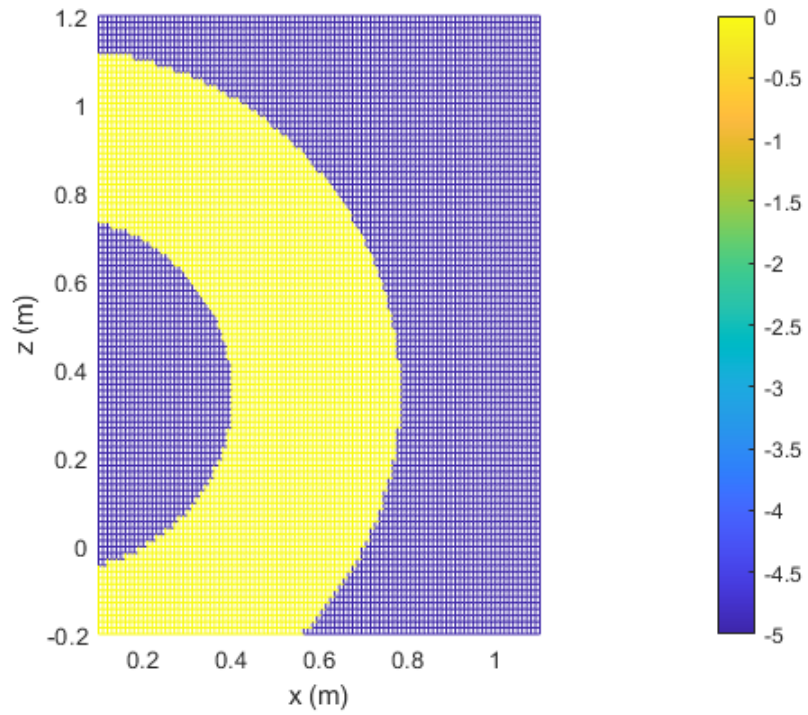


Ilustración 18. Mapa de trayectorias realizables con  $140^\circ < \psi < 220^\circ$

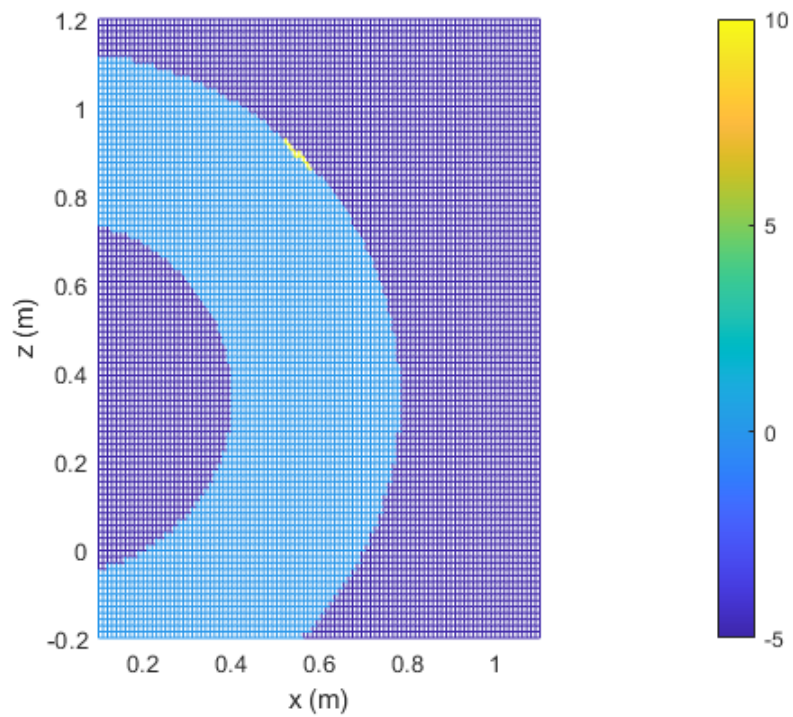


Ilustración 19. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 140^\circ$



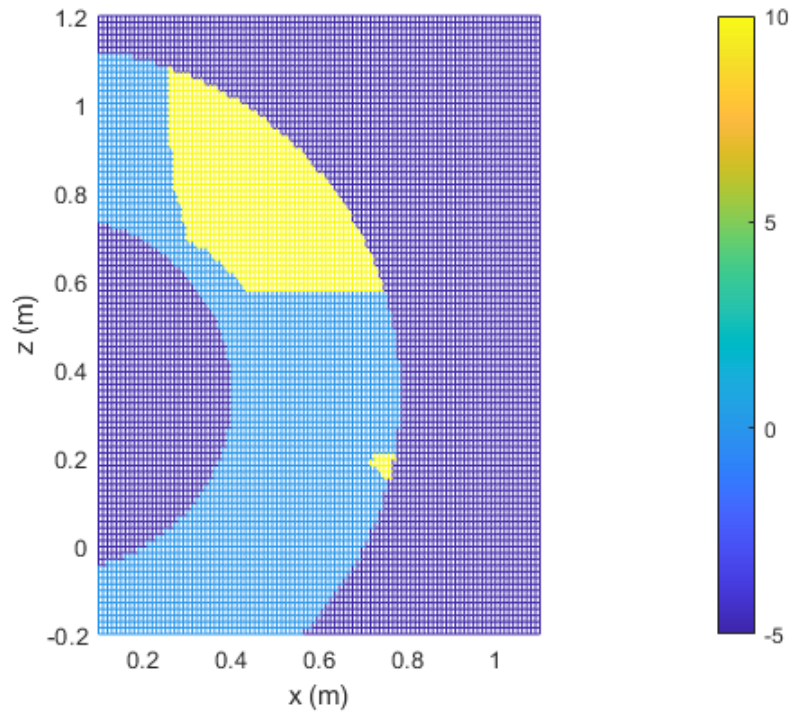


Ilustración 20. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 120^\circ$

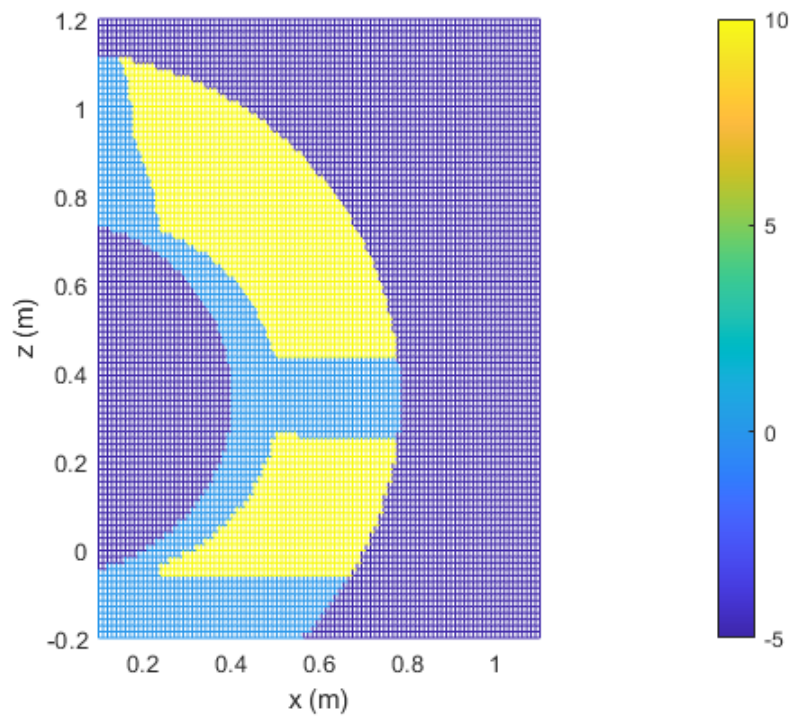


Ilustración 21. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 90^\circ$

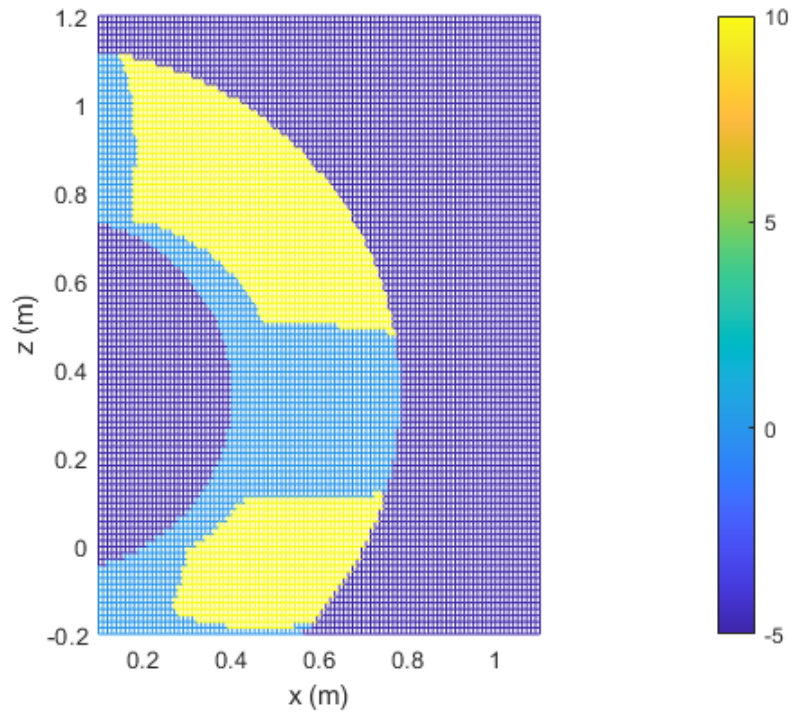


Ilustración 22. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 60^\circ$

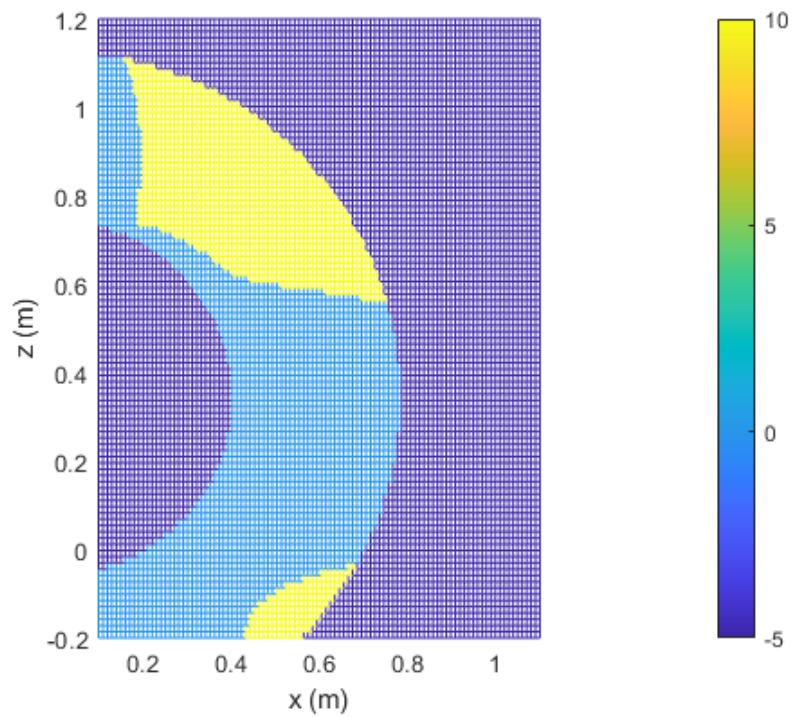


Ilustración 23. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 45^\circ$

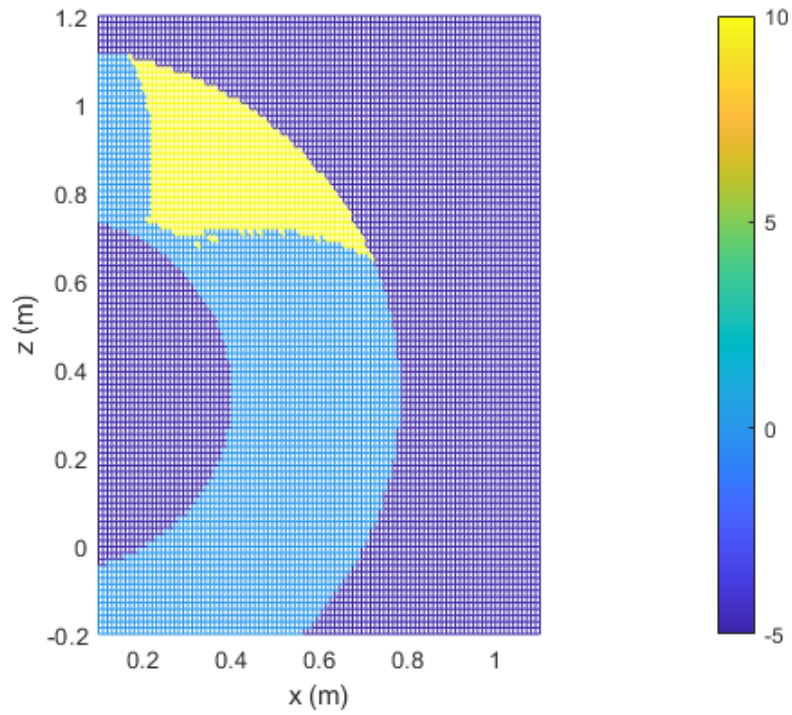


Ilustración 24. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = \pm 30^\circ$

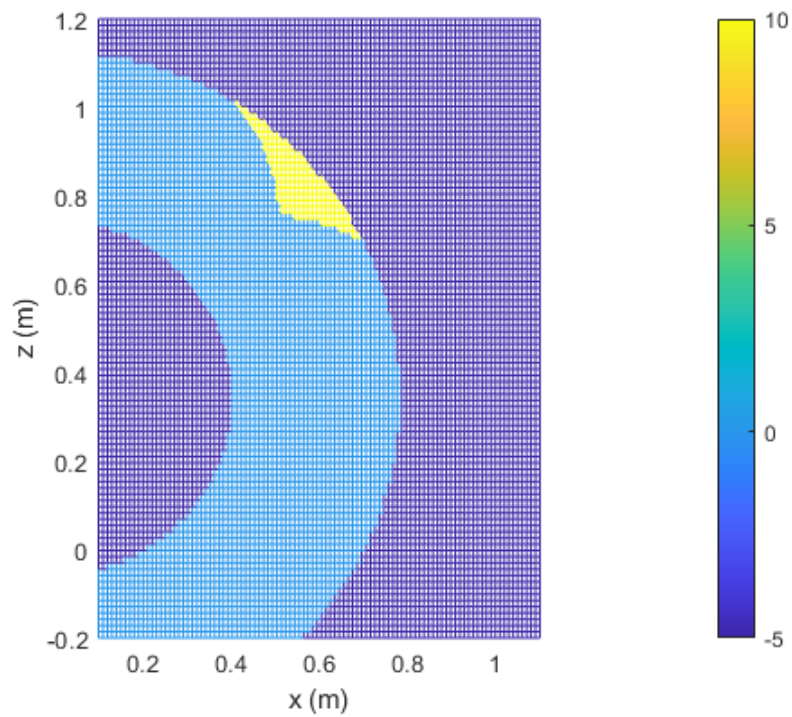


Ilustración 25. Mapa de trayectorias realizables con  $\psi = 0^\circ$

Para empezar, en estos gráficos se puede ver la forma del conjunto formado por las dos esferas que conforman el espacio de trabajo seccionada por el plano  $xz$  con una  $y$  constante. En este disco se encuentran los puntos que se encuentran dentro del espacio de trabajo teórico. Aplicando las restricciones de las articulaciones y viendo qué trayectorias son realizables, estas corresponden a los puntos en el gráfico con color amarillo.

Esta realizabilidad resulta que es simétrica para  $\psi$ . En otras palabras, los gráficos obtenidos para  $\psi$  también son los mismos que para  $-\psi$ .

Los valores de  $\psi$  que dan las zonas menos restrictivas en cuanto a la realizabilidad son para  $140^\circ < \psi < 220^\circ$ . En todos los puntos del espacio de trabajo teórico la trayectoria es realizable para esos valores de  $\psi$ .

Sin embargo, a partir de estos límites de  $\pm 140^\circ$ , todo el espacio de trabajo salvo una pequeñísima porción, pasa a ser no realizable. Desde  $\psi = 140^\circ$  empieza a hacerse más grande la zona realizable, hasta que llega a  $\psi = 90^\circ$ . A partir de aquí y hasta  $\psi = 0^\circ$ , el área de esta zona realizable disminuye.

Por tanto, parece que los valores de  $\psi$  con los que más se puede cambiar las variables  $x, z$  en busca de una trayectoria con una buena rigidez, son para los valores  $140^\circ < \psi < 220^\circ$ .

Sin embargo, esto no implica que las mejores trayectorias en cuanto a rigidez sean para  $140^\circ < \psi < 220^\circ$ . Por ejemplo, para  $\psi = 30^\circ$  hay un gran rango de  $x, z$  en el que se pueden obtener trayectorias realizables. Si para algún punto en  $x, z$  de  $\psi = 30^\circ$  la rigidez a lo largo de la trayectoria es mayor que para todos los  $x, z$  de  $\psi = 180^\circ$ , aunque la zona de realizabilidad en  $\psi = 180^\circ$  sea menos restrictiva, es mejor ir a ese punto de  $\psi = 30^\circ$ . Porque se recuerda que el objetivo es obtener una trayectoria la máxima rigidez posible.

### 5.3. Trayectorias con $\psi$ óptima

Seleccionando uno de los puntos del plano  $xz$ , para un valor de  $\psi$  constante, se obtiene una trayectoria. En esa trayectoria la rigidez irá variando a lo largo de la distancia recorrida en el eje  $y$ , tal y como se muestra en ilustración 26.

Además, también se muestran capturas de las simulaciones realizadas en MATLAB, ilustración 27, donde se ve el modelo del robot al comienzo y al final de la trayectoria. En estas simulaciones, el cilindro rojo colocado en el elemento terminal representa el rodillo y el prisma gris representa la pieza.

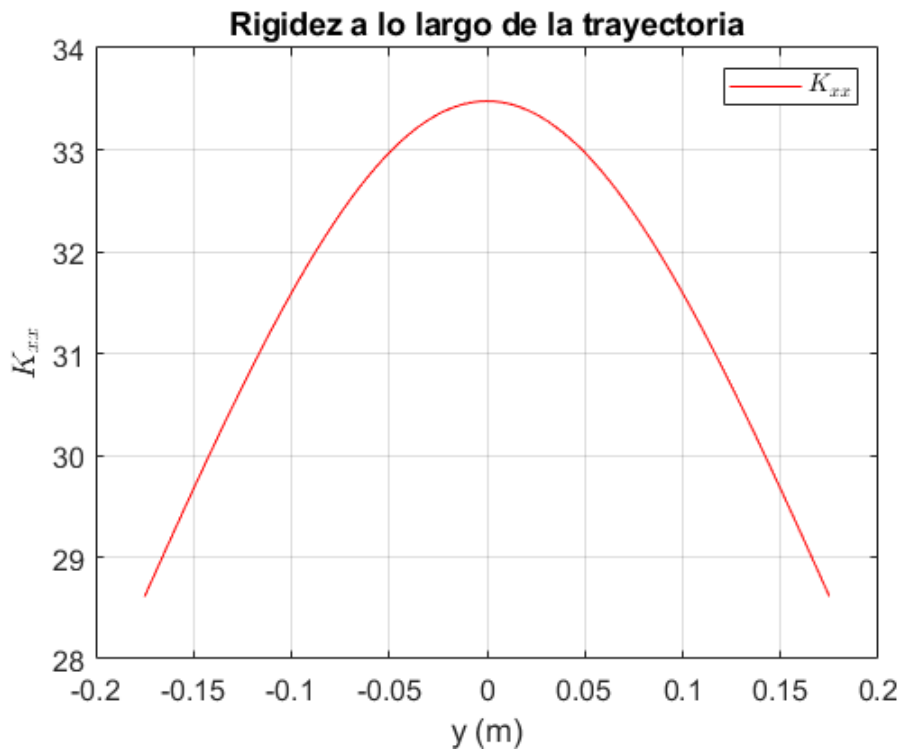


Ilustración 26. Rigidez a lo largo de la trayectoria para  $\psi = 0$   $x = 0.5$   $z = 0.3$

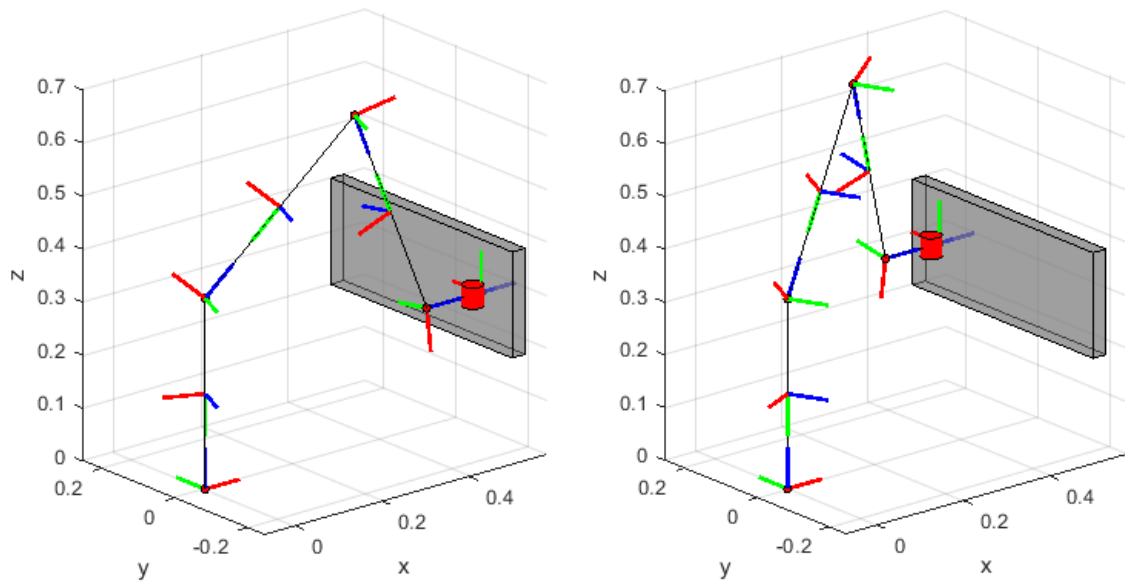


Ilustración 27. Simulación en MATLAB de la trayectoria al comienzo (izquierda) y al final (derecha)

Sin embargo, esta rigidez a lo largo de la trayectoria no está para nada cerca de ser óptima. Por eso, a continuación, para un punto del plano  $xz = (0.5, 0.3)$ , se realiza un barrido comprobando la rigidez para cada  $\psi$  de ese punto del plano.

Entonces, registrando la rigidez máxima obtenida en cada punto de la trayectoria se llega a obtener el siguiente gráfico, mostrado en la ilustración 28.

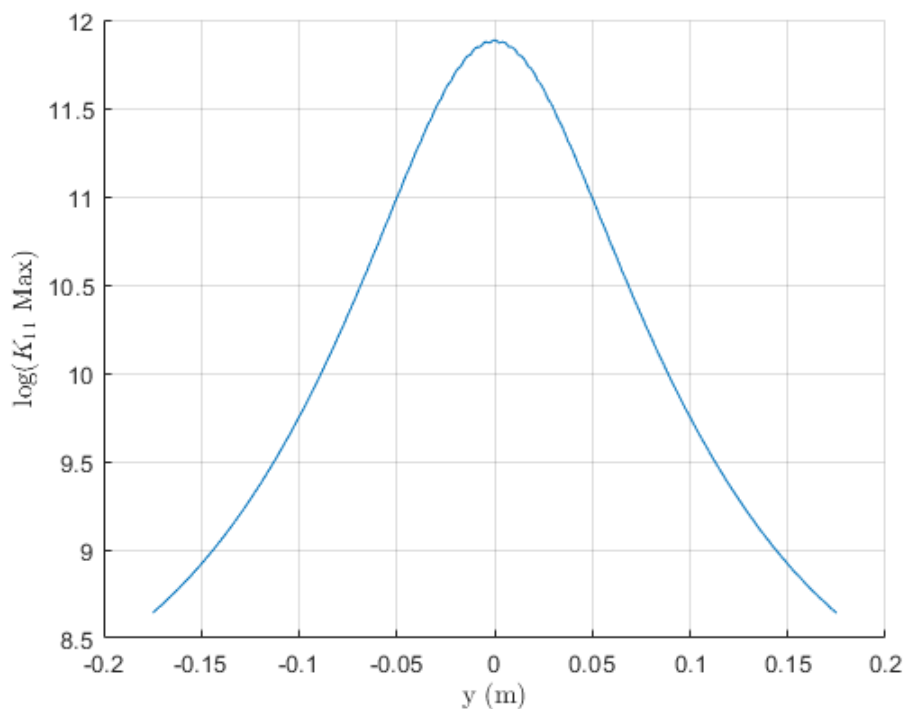


Ilustración 28. Rigidez máxima a lo largo de la trayectoria

Si se compara esta rigidez máxima a lo largo de la trayectoria, en la que  $\psi$  hace máxima la rigidez, con otras curvas de rigidez donde  $\psi$  es constante, se puede ver la clara mejora con respecto a estas. Esto se aprecia mejor en la ilustración 29.

Además, se registran las variables  $\psi$  que hacen máxima la rigidez, denominadas  $\psi$  óptimas. Graficando estas  $\psi$  óptimas para cada punto de la trayectoria, se obtiene una curva en la que no hay discontinuidades ni variaciones muy grandes, como se ve en la ilustración 30.

Gracias a esto, se puede crear una trayectoria en la que  $\psi$  siga la curva establecida que hace que la rigidez sea máxima. No obstante, hay que tener cuidado, porque hay que recordar las limitaciones del espacio de trabajo y de las articulaciones. En este caso, para todo valor de  $\psi$ , el punto del plano  $xz$  pertenece a la zona de trayectoria realizable, porque  $140^\circ < \psi < 220^\circ$ .

De esta manera, se ha conseguido obtener una manera de calcular la trayectoria óptima en cuanto a rigidez en un punto dado del plano  $xz$ .

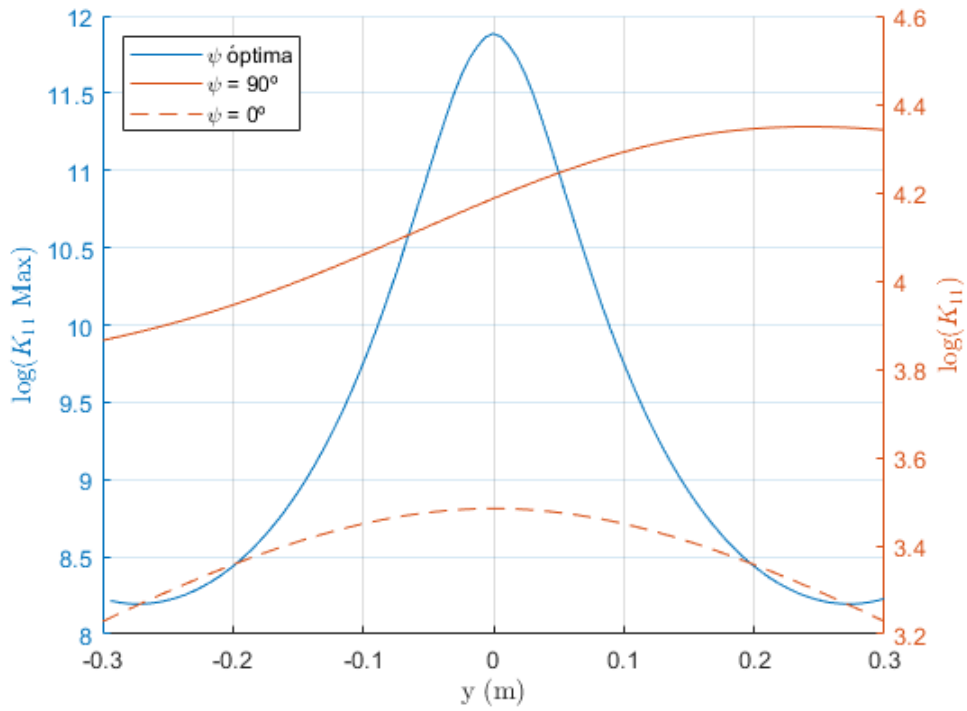


Ilustración 29. Comparación de rigidez entre trayectorias con distinta  $\psi$

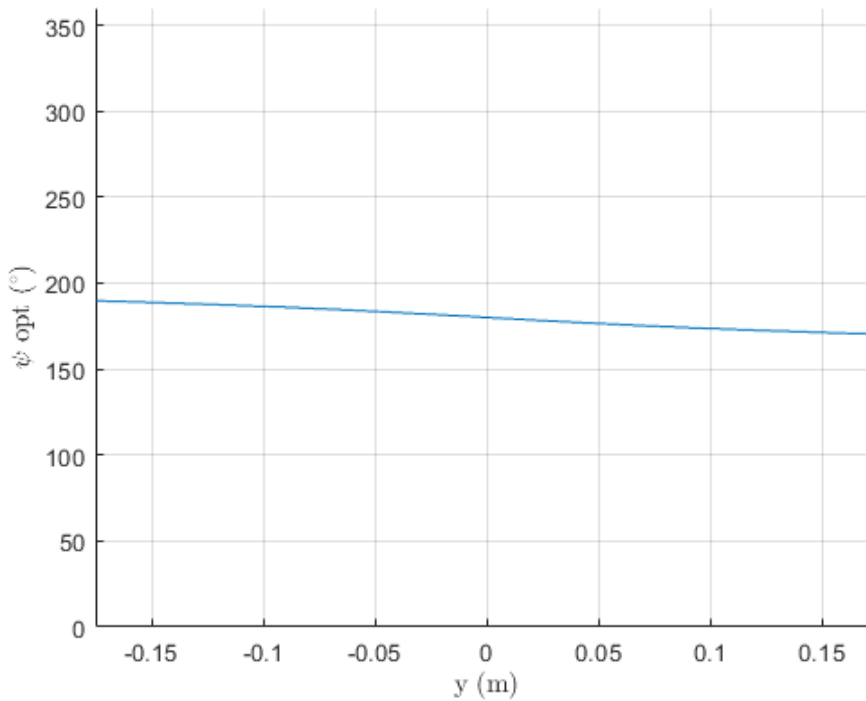


Ilustración 30.  $\psi$  óptima a lo largo de la trayectoria

## 6. CONCLUSIONES

A partir de lo que se ha realizado se pueden extraer varias conclusiones, las cuales se van a distinguir entre el trabajo realizado en el estudio cinemático y el estudio de rigidez.

### Conclusiones del estudio cinemático

- El hecho de haber realizado la función de la cinemática inversa, el cálculo de la matriz jacobiana y la matriz de rigidez cartesiana mediante el cálculo simbólico ha sido clave. En ocasiones es más complicado resolverlo de esta manera, pero merece la pena el esfuerzo, porque después se agiliza mucho la ejecución de otros programas, que dependen de llamar a estas funciones. Por ejemplo, en el estudio de rigidez, se llama a la función de la cinemática inversa dentro de 3 bucles anidados, por lo que la diferencia del tiempo de ejecución de la función es muy importante.

### Conclusiones del estudio de rigidez

- Hay muchas variables para tener en cuenta a la hora de elegir una trayectoria, por eso es importante saber qué variables fijar y por qué. Esto es necesario, ya que, de lo contrario, se incrementaría innecesariamente la complejidad del análisis.
- Se ha obtenido un buen rango de valores de  $\psi$  ( $140^\circ < \psi < 220^\circ$ ) para poder buscar trayectorias con la rigidez óptima. Además, viendo las curvas obtenidas para las  $\psi$  óptimas, estas siempre se dan cerca de  $\psi = 180^\circ$ . Entonces, todo parece indicar, que los valores de  $\psi$  cercanos a  $180^\circ$  dan las trayectorias con mayor rigidez. Además, este tipo de valores de  $\psi$  hacen que la rigidez a lo largo de la trayectoria sea simétrica, lo cual es muy conveniente.



## 7. LÍNEAS FUTURAS

### Estudio cinemático

Sería interesante un análisis más profundo en cuanto a las singularidades del  $\psi$ . En este trabajo de fin de máster se han tenido en cuenta las más habituales, que no afectan a esta aplicación en principio. Sin embargo, puede haber otras aplicaciones en las que se deban tener más en cuenta.

### Estudio de rigidez

Una vez sabida la forma de calcular trayectorias óptimas para un punto, el siguiente paso es hacerlo para todo el plano  $xz$ , de manera que se llegue a obtener la mejor trayectoria posible.

Para ello, se ha pensado en una estrategia para la búsqueda de una trayectoria óptima en cuanto a rigidez, la cual se detalla paso a paso:

1. Escoger un punto del plano  $xz$ .
2. Calcular la curva de  $\psi$  óptima a lo largo de la trayectoria.
3. Comprobar si todos los valores de la curva  $\psi$  se encuentran entre  $140^\circ < \psi < 220^\circ$ , ya que este rango asegura la realizabilidad para cualquier punto del plano  $xz$ .
4. Si no lo cumple, comprobar si existen otros valores de  $\psi$  que hagan la trayectoria óptima realizable.
5. Calcular la rigidez a lo largo de la trayectoria y, mediante una función objetivo, valorar la calidad de la rigidez a lo largo de la trayectoria.

Realizando esto para todos los puntos del plano  $xz$ , se pueden comparar las calidades de estas trayectorias mediante la función objetivo. Entonces, de todas las trayectorias, habrá una que sea la mejor en cuanto a rigidez.

Respecto a esta función objetivo, no se ha diseñado. Sin embargo, esta deberá tener en cuenta la media de la rigidez y la varianza. Esto es porque, por una parte, interesa que la rigidez sea la máxima posible. Pero, por otro lado, también interesa que la rigidez a lo largo de la trayectoria sea constante, es decir, que tenga una varianza lo más pequeña posible.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] I. Arocena, *Robótica Industrial*, Dept. Automática y Computación Universidad Pública de Navarra.
  
- [2] S. Masayuki, K. Hiromu, Y. Woo-Keun, K. Kosei y K. Kazuhiro, «Analytical Inverse Kinematic Computation for 7-DOF Redundant Manipulators With Joint Limits and Its Application to Redundancy Resolution,» *IEEE Transactions on Robotics*, 2008.
  
- [3] R. Torres, «Desarrollo y validación de un soporte móvil robótico para el mecanizado de paredes finas,» Universidad Pública de Navarra, 2020.
  
- [4] J. C. Ruiz, «Identificación de parámetros dinámicos del robot KUKA LBR IIWA,» Universidad Pública de Navarra, 2022.
  
- [5] J. Aginaga, «Métodos Computacionales en Ingeniería Mecánica,» Dept. ingeniería Mecánica Universidad Pública de Navarra.
  
- [6] G. Testa, «Experimental stiffness identification in the joints of a lightweight robot,» Universitat Politècnica de Catalunya, 2017.
  
- [7] Kuka, «LBR iiwa 7 R800, LBR iiwa 14 R820 Specification,» 2015.