Iosune ISLA ABADÍA

ÁLGEBRA

ESTUDIO DE ECUACIONES Y SU APLICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ESTUDIANTES DE 2º E.S.O

TFM 2022

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas por estudiantes de 2º E.S.O.

Iosune Isla Abadía

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

INDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo el análisis de un proceso de estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas para estudiantes de 2º E.S.O.

El trabajo está constituido de dos partes principales. En una primera parte, se realiza un análisis teórico que consiste en un estudio longitudinal del currículo (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje) y de los libros de texto empleados en dicho proceso de estudio. Para terminar esta parte, se realiza un análisis de la relación existente entre ambos.

En la segunda parte del trabajo, se desarrolla un estudio sobre el proceso de aprendizaje del tema tratado de resolución de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas, en dos grupos de alumnos de 2º E.S.O, llevado a cabo en el centro de estudios Santa Teresa de Jesús en el que se ha realizado el Practicum II.

Se comienza realizando un análisis de la unidad didáctica del libro de referencia del centro respecto al tema tratado, así como de las dificultades y errores previsibles que los alumnos van a encontrarse a lo largo del proceso. A continuación, se detalla el proceso llevado a cabo, presentando y analizando los resultados obtenidos en el aula.

Finalmente, para concluir, se realiza una síntesis del resultado, se presentan unas conclusiones y una serie de cuestiones abiertas.

Parte I:

Estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el currículo vigente y en los libros de texto.

En esta primera parte del trabajo, se realiza un análisis teórico de cómo se aborda dentro de la materia de matemáticas el aprendizaje del bloque de álgebra y, más en concreto, el tema de resolución de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas, tanto en el currículo vigente como en los libros de texto. El análisis abarca los dos últimos cursos de Educación Primaria, la etapa de ESO y el ciclo de Bachiller.

Para ello, en los tres primeros capítulos se realiza un análisis longitudinal, en las etapas señaladas, de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje incluidos en el currículo en referencia al tema tratado.

Seguidamente, en el cuarto capítulo, tras analizar los libros de texto de la editorial Anaya utilizados en el centro, se presentan ejemplos de los distintos ejercicios, problemas y cuestiones trabajados en ellos. El análisis se realiza para los libros de texto utilizados en los dos cursos anteriores y en los dos posteriores de aquel considerado en nuestro trabajo como el curso de referencia, que en nuestro caso es 2º ESO.

Por último, para terminar esta parte teórica, en el quinto capítulo se realiza un análisis comparativo de los contenidos recogidos en ambas fuentes estudiadas, de manera que nos permita valorar la adecuación y coherencia existente entre ellas, así como la presencia o ausencia de los contenidos referidos a esta parte del álgebra dentro de estas dos fuentes.

Capítulo 1

Contenidos sobre el estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el currículo vigente.

En este primer apartado, se realiza un análisis de los contenidos referentes al tema de resolución de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas recogidos dentro del bloque de álgebra en el currículo vigente correspondiente a cada etapa educativa. Para ello, nos remitimos a la normativa de educación en Navarra, contenida en los siguientes Decretos Forales:

Decreto Foral 60/2014**,** de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.

Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.

Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, del Gobierno de Navarra, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.

A partir de este análisis, se realizan tablas que recogen los contenidos trabajados en cada curso. Las tablas se han realizado de un modo sistemático para cada curso. En una primera columna aparecen los descriptores utilizados y en la siguiente columna se hace referencia al curso que estamos estudiando.

En los dos últimos cursos de la ESO, así como en Bachiller, el análisis se centra en la rama de las matemáticas académicas.

Los descriptores utilizados en las tablas son los siguientes:

- C1: Contenido 1: Lenguaje algebraico.
- C2: Contenido 2: Valor numérico de una expresión algebraica.
- C3: Contenido 3: Operaciones con expresiones algebraicas.
- C4: Contenido 4: Ecuaciones e inecuaciones.
- C5: Contenido 5: Sistemas de ecuaciones.
- C6: Contenido 6: Resolución de problemas.

En el caso de no encontrarse el contenido relativo a un descriptor en el currículo de un curso determinado, se señalará en la tabla mediante una equis. Los contenidos recogidos en la tabla son una transcripción literal de los que aparecen en el currículo.

En el caso de que un contenido sea aplicable a dos descriptores se señalará en cursiva para indicar que aparece dos veces en la tabla.

1.1. Contenidos en Educación Primaria.

El objetivo general a lograr en esta etapa de Educación Primaria, respecto a la competencia matemática, es conseguir la alfabetización numérica de los alumnos, entendida como la capacidad de cada uno de ellos para enfrentarse a situaciones reales en las que intervengan números y relaciones entre ellos, utilizándolos siempre que sea necesario e identificando las relaciones existentes entre ellos.

Las matemáticas en esta etapa se trabajan desde el conocimiento basado en la experiencia, en lo cercano, utilizándolas en contextos relacionados con la vida diaria para avanzar desde este punto de partida hacia conocimientos más complejos. Se tiene en cuenta el desarrollo cognitivo y emocional de los alumnos que avanza desde el pensamiento concreto al inicio de la etapa hasta el pensamiento abstracto que se va desarrollando en cada uno de ellos al terminarla.

La resolución de problemas es el eje principal de la materia, puesto que es una actividad que implica en su desarrollo a muchas otras, básicas en el desarrollo del alumnado, como son la comprensión lectora, la capacidad para desarrollar estrategias y ejecutarlas, así como un proceso final de reflexión que les permita dar la solución adecuada.

Si bien es cierto que en esta etapa no se trabaja el álgebra simbólica con el uso de letras para representar valores desconocidos y resolver problemas, los alumnos deben ser capaces de resolverlos recurriendo a operaciones aritméticas elementales, dibujos o tablas que les permitan resolverlos a través de resoluciones aritméticas. Posteriormente, esos procesos aritméticos serán sustituidos por procesos algebraicos.

Por lo tanto, podemos decir que en Educación Primaria se trabajan los conocimientos previos que deben poseer los alumnos para posteriormente evolucionar hasta el aprendizaje del álgebra simbólica durante la etapa de secundaria y bachiller.

Para trabajar la materia Matemática el currículo está dividido en cinco bloques. Estos cinco bloques son, tal y cómo aparecen literalmente recogidos en la legislación: *“1 Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2 Números y álgebra; 3 Medidas; 4 Geometría; 5 Estadística y probabilidad.”*

Por lo tanto, en los cursos de quinto y sexto de primaria, el bloque 2 de números y álgebra dentro del currículo, recoge contenidos relativos a los números; al cálculo algorítmico y mental; a las operaciones realizadas con dichos números y finalmente a la resolución de problemas aritméticos dentro de contextos numéricos que podemos considerar como la base para el posterior estudio del álgebra por parte de los alumnos.

A continuación adjuntamos las tablas de contenidos trabajados en los cursos de 5º y 6º de Educación Primaria.

Curso	5º PRIMARIA
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	X
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
C5: Sistemas de ecuaciones.	X
C6: Resolución de problemas.	*Bloque 2. Números y álgebra.* Resolución de problemas de la vida cotidiana

Tabla 1: Contenidos currículo 5º Educación Primaria

Curso	6º PRIMARIA
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	X
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
C5: Sistemas de ecuaciones.	X
C6: Resolución de problemas.	*Bloque 2. Números y álgebra.* Resolución de problemas de la vida cotidiana

Tabla 2: Contenidos currículo 6º Educación Primaria

1.2. Contenidos en ESO.

El desarrollo del sentido y de la alfabetización numérica de los alumnos, comenzado a lo largo de la etapa de Educación Primaria, continúa en esta etapa al ampliarse los conjuntos de números con los que se trabaja. Es objetivo fundamental conseguir que el alumnado comprenda y de sentido a las operaciones que realiza, de manera que sean capaces de utilizarlas razonadamente, al mismo tiempo que desarrollan el cálculo mental y la capacidad matemática de estimación.

Los contenidos matemáticos de esta etapa pretenden lograr que todos los alumnos consigan los objetivos propuestos, lo que implica, que se atienda a la diversidad de actitudes y de competencias cognitivas existentes entre todos ellos. Los nuevos conocimientos deben apoyarse en los que ya tienen, consiguiendo su consolidación de forma gradual y cíclica.

En esta etapa comienza el desarrollo de las destrezas algebraicas de un modo progresivo a lo largo de los cursos, teniendo en cuenta la dificultad que supone su estudio para una gran parte de los alumnos. El conocimiento algebraico ha de construirse desde la representación y transformación de cantidades. Es básico para poder evolucionar en el estudio del álgebra que los alumnos comiencen a trabajar la simbolización y la traducción al lenguaje algebraico desde los primeros cursos de la ESO.

Destaca el uso del lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas, simbolizar relaciones y como medio para resolver problemas a través de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Es fundamental el uso y manejo de los símbolos y de las expresiones algebraicas, prestando especial atención a la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico, como simbolización y planteamiento en la resolución de problemas. En definitiva, el estudio del álgebra debe proporcionarles los medios para formular situaciones en términos matemáticos, y a partir de este punto elaborar y utilizar diferentes estrategias para resolverlas utilizando los recursos más apropiados.

Durante los dos primeros cursos, se trabaja principalmente la simbolización de números a través de letras así como la traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico, que permita llegar a plantear ecuaciones como método para la resolución de problemas.

En los dos últimos cursos, se trabajan las sucesiones numéricas, investigando las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Se profundiza en la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado, grado superior a dos y sistemas de ecuaciones. Se resuelven otro tipo de ecuaciones a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

A continuación adjuntamos en una tabla los contenidos trabajados en cada curso de ESO en el currículo de matemáticas dentro del bloque 2 denominado “Números y Álgebra”.

Curso	**1º ESO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	-Iniciación al lenguaje algebraico. -Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. -Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	- Valor numérico de una expresión algebraica.
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
C5: Sistemas de ecuaciones.	X
C6: Resolución de problemas.	X

Tabla 3: Contenidos currículo 1º E.S.O

Curso	**2º ESO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	-Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. -El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. -Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	-Valor numérico de una expresión algebraica.
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	-Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. -Operaciones con polinomios en casos sencillos.
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	- *Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico).* ***Resolución.*** *Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.*
C5: Sistemas de ecuaciones.	-*Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de* ***resolución*** *y método gráfico. Resolución de problemas.*
C6: Resolución de problemas.	-*Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución.* ***Resolución de problemas.*** -*Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico.* ***Resolución de problemas.***

Tabla 4: Contenidos currículo 2º E.S.O

Curso	**3º ESO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	-Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	-Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	-Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico)**.** -Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.
C5: Sistemas de ecuaciones.	-*Resolución de problemas mediante la* ***utilización de*** *ecuaciones y* ***sistemas de ecuaciones.***
C6: Resolución de problemas.	***-Resolución de problemas*** *mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.*

Tabla 5: Contenidos currículo 3º E.S.O

Curso	**4º ESO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	**X**
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
C3: Operaciones con expresiones algebraicas.	-Logaritmos. Definición y propiedades. Manipulación de expresiones algebraicas. -Utilización de igualdades notables. -Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	-Ecuaciones de grado superior a dos. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones. -***Inecuaciones*** *de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas.*
C5: Sistemas de ecuaciones.	-*Resolución* de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y ***sistemas***.
C6: Resolución de problemas.	-*Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica.* ***Resolución de problemas.*** -***Resolución de problemas*** cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y *sistemas*.

Tabla 6: Contenidos currículo 4º E.S.O

1.3. Contenidos en Bachillerato

Las matemáticas, dentro del currículo de Bachiller, deben ayudar a la adquisición de la competencia matemática por parte del alumnado, entendida como la capacidad de aplicar el razonamiento matemático de manera que éste les permita resolver problemas de la vida cotidiana. Los alumnos deben adquirir la capacidad de pensar, establecer modelos y llegar a razonar de forma matemática para plantear y resolver dichos problemas.

Los nuevos conocimientos deben apoyarse en los ya conseguidos. Los alumnos deben llegar a un conocimiento cada vez más complejo de forma intuitiva, llegando a contextos cada vez menos cercanos a su realidad inmediata.

La materia vuelve a estar dividida en los cinco bloques ya mencionados anteriormente. Estos bloques no deben trabajarse como bloques estancos independientes entre sí, muy al contrario, se deben establecer las conexiones internas posibles a lo largo del curso y a lo largo de las distintas etapas educativas, siendo el bloque “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas” el eje fundamental de la materia desarrollado de manera simultánea con el resto de bloques de contenidos.

Lo más destacable en el currículo de 1º de Bachiller en referencia al álgebra es la introducción de las inecuaciones en la resolución de problemas. En 2º de Bachiller aparece el lenguaje matricial para la representación de un sistema.

A continuación adjuntamos en una tabla los contenidos trabajados en cada curso de Bachiller en el currículo de matemáticas dentro del bloque 2 denominado “Números y Álgebra”.

Curso	**1 BACHILLERATO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	**X**
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
C3: Operaciones expresiones algebraicas.	**X**
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	-Logaritmos decimales y neperianos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales. -*Planteamiento y* ***resolución*** *de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones e* ***inecuaciones****. Interpretación gráfica.*
C5: Sistemas de ecuaciones	-Método de Gauss para la resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales.
C6: Resolución de problemas	-*Planteamiento y* ***resolución de problemas*** *de la vida cotidiana mediante ecuaciones e inecuaciones. Interpretación gráfica.*

Tabla 7: Contenidos currículo 1º Bachillerato

Curso	**2 BACHILLERATO**
Descriptor	**Contenido**
C1: Lenguaje algebraico.	**X**
C2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
C3: Operaciones expresiones algebraicas.	**X**
C4: Ecuaciones e inecuaciones.	**X**
C5: Sistemas de ecuaciones	*-Representación matricial de un sistema:* ***discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*** *Método de Gauss. Regla de Cramer.* *Aplicación a la resolución de un problema.*
C6: Resolución de problemas	***Representación matricial*** *de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer.* ***Aplicación a la resolución de un problema.***

Tabla 8: Contenidos currículo 2º Bachillerato

Capítulo 2

Criterios de evaluación sobre el estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el currículo vigente.

Para el estudio de los criterios de evaluación aplicados a los contenidos trabajados nos remitimos de nuevo a los currículos recogidos en la legislación vigente.

Los descriptores utilizados en las tablas serán los mismos que los empleados para el análisis de los contenidos, referidos en este caso a los criterios de evaluación.

- CE1: Criterio de evaluación 1 referido al contenido 1, lenguaje algebraico.
- CE2: Criterio de evaluación 2 referido al contenido 2, valor numérico de una expresión algebraica.
- CE3: Criterio de evaluación 3 referido al contenido 3, operaciones con expresiones algebraicas.
- CE4: Criterio de evaluación 4 referido al contenido 4, ecuaciones e inecuaciones.
- CE5: Criterio de evaluación 5 referido al contenido 5, sistemas de ecuaciones.
- CE6: Criterio de evaluación 6 referido al contenido 6, resolución de problemas.

De la misma manera se señalará con una equis la ausencia de criterios de evaluación referidos a un descriptor concreto en un curso y se utilizará la letra en cursiva cuando un mismo criterio de evaluación se utilice para dos descriptores.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria.

A continuación se presenta en una tabla por cada curso analizado, los criterios de evaluación fijados en el currículo para los contenidos correspondientes a los dos últimos cursos de Educación Primaria.

Curso	**5º PRIMARIA**
Descriptor	**Criterio de Evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	X
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
CE5: Sistemas de ecuaciones.	X
CE6: Resolución de problemas.	8. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas. *Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y las destrezas necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.*

Tabla 9: Criterios de evaluación currículo 5º Educación Primaria

Curso	6º PRIMARIA
Descriptor	**Criterio de Evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	X
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
CE5: Sistemas de ecuaciones.	X
CE6: Resolución de problemas.	9. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas. *Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y las destrezas necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.*

Tabla 10: Criterios de evaluación currículo 6º Educación Primaria

2.2. Criterios de evaluación en ESO.

A continuación se presenta en una tabla por cada curso analizado, los criterios de evaluación fijados en el currículo para los contenidos correspondientes a cada curso de la ESO,

Curso	**1º ESO**
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	*4. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, **utilizando el lenguaje algebraico para expresar,** comunicar y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.* Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende así mismo valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor en fórmulas simples con una sola letra.
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	*4. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresar, comunicar, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y **operar con expresiones algebraicas.*** Forma parte de este criterio la obtención del valor en fórmulas simples con una sola letra.
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	**X**
CE5: Sistemas de ecuaciones	**X**
CE6: Resolución de problemas	**X**

Tabla 11: Criterios de evaluación currículo 1º ESO

Curso	2º ESO
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	*6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen,* ***utilizando el lenguaje algebraico para expresar,*** *comunicar y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.* Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones.
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	*6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresar, comunicar y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y* ***operar con expresiones algebraicas****.* Se quiere valorar la capacidad de los alumnos para realizar operaciones con expresiones algebraicas sencillas, así como el manejo en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento* ***de ecuaciones de primer, segundo grado*** *y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.* Se pretende valorar la capacidad para plantear ecuaciones de primer grado y segundo grado, resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error.
CE5: Sistemas de ecuaciones	*7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y* ***sistemas de ecuaciones,*** *aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.* Se pretende valorar la capacidad para plantear sistemas de ecuaciones y resolverlos utilizando los métodos y procedimientos algebraicos, así como métodos gráficos.

CE6: Resolución de problemas	*7. Utilizar el lenguaje algebraico para* ***simbolizar y resolver problemas*** *mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.* Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y las destrezas necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.

Tabla 12: Criterios de evaluación currículo 2º ESO

Curso	**3º ESO**
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico	3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. *A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. Se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas*
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	**X**
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el* ***planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos*** *y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.* Se pretende comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.

CE5: Sistemas de ecuaciones	*4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el* ***planteamiento y resolución*** *de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y* ***sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas****, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.* Se pretende comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.
CE6: Resolución de problemas	*4.* ***Resolver problemas de la vida cotidiana*** *en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.* Se pretende comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.

Tabla 13: Criterios de evaluación currículo 3º ESO

Curso	**4º ESO**
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico	*3. **Construir** e interpretar **expresiones algebraicas**, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.* Criterio que mide la capacidad de transformar al lenguaje algebraico expresiones usuales y operar con ellas haciendo uso de sus propiedades.
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	*3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, **utilizando** con destreza el lenguaje algebraico, **sus operaciones y propiedades.*** Criterio que mide la capacidad de transformar al lenguaje algebraico expresiones usuales y operar con ellas haciendo uso de sus propiedades.
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*4. **Representar y analizar situaciones** y relaciones matemáticas **utilizando inecuaciones, ecuaciones** y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.
CE5: Sistemas de ecuaciones	*4. **Representar y analizar situaciones** y relaciones matemáticas **utilizando** inecuaciones, ecuaciones y **sistemas** para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.

CE6: Resolución de problemas	*4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas* ***para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.*** Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos.

Tabla 14: Criterios de evaluación currículo 4º ESO

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

A continuación se presentan en dos tablas los criterios de evaluación fijados en el currículo para los contenidos analizados en el primer apartado para los distintos cursos de Bachiller.

Curso	**1º Bachillerato**
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	**X**
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	**X**
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*4.Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales,* ***utilizando recursos algebraicos*** *(****ecuaciones, inecuaciones*** *y sistemas) e interpretando críticamente los resultados* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas y su capacidad para una vez resueltos dar una correcta interpretación de los posibles resultados que se puedan obtener desarrollando el espíritu crítico.
CE5: Sistemas de ecuaciones.	*4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales,* ***utilizando recursos algebraicos*** *(ecuaciones, inecuaciones y* ***sistemas****) e interpretando críticamente los resultados.* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas y su capacidad para una vez resueltos dar una correcta interpretación de los posibles resultados que se puedan obtener desarrollando el espíritu crítico.

CE6: Resolución de problemas	*4.* ***Analizar, representar y resolver problemas*** *planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas y su capacidad para una vez resueltos dar una correcta interpretación de los posibles resultados que se puedan obtener desarrollando el espíritu crítico.

Tabla 15: Criterios de evaluación currículo 1ºBachillerato

Curso	**2º Bachillerato**
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Lenguaje algebraico.	*2.* ***Transcribir*** *problemas expresados en lenguaje usual* ***al lenguaje algebraico*** *y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.* Este criterio está dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas.
CE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
CE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	**X**
CE4: Ecuaciones e inecuaciones.	**X**
CE5: Sistemas de ecuaciones.	*2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y* ***resolverlos*** *utilizando técnicas algebraicas determinadas* ***(matrices determinantes y sistemas de ecuaciones),*** *interpretando críticamente el significado de las soluciones.* Este criterio está dirigido a comprobar la destreza para utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica en la resolución de problemas. Especialmente si son capaces de distinguir y aplicar, de forma adecuada al contexto, operaciones elemento a elemento, operaciones con filas y columnas, operaciones con submatrices y operaciones con la matriz como objeto algebraico con identidad propia.

CE6: Resolución de problemas	*2. Transcribir* ***problemas*** *expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y* ***resolverlos*** *utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.* Este criterio está dirigido a comprobar la destreza para utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica en la resolución de problemas. Especialmente si son capaces de distinguir y aplicar, de forma adecuada al contexto, operaciones elemento a elemento, operaciones con filas y columnas, operaciones con submatrices y operaciones con la matriz como objeto algebraico con identidad propia.

Tabla 16: Criterios de evaluación currículo 2ºBachillerato

Capítulo 3

Estándares de aprendizaje evaluables sobre el estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el currículo vigente.

Para el estudio de los estándares de evaluación aplicados a los contenidos volvemos de nuevo a los currículos recogidos en la legislación vigente.

Los descriptores utilizados en las tablas que adjuntamos a continuación, serán los mismos que los empleados para el análisis de los contenidos, referidos en este caso a los estándares de aprendizaje evaluables:

- EAE1: Estándar de aprendizaje evaluable 1 referido al contenido 1, lenguaje algebraico.
- EAE2: Estándar de aprendizaje evaluable 2 referido al contenido 2, valor numérico de una expresión algebraica.
- EAE3: Estándar de aprendizaje evaluable 3 referido al contenido 3, operaciones con expresiones algebraicas.
- EAE4: Estándar de aprendizaje evaluable 4 referido al contenido 4, ecuaciones e inecuaciones.
- EAE5: Estándar de aprendizaje evaluable 5 referido al contenido 5, sistemas de ecuaciones
- EAE6: Estándar de aprendizaje evaluable 6 referido al contenido 6, resolución de problemas.

De la misma manera se señalará con una equis la ausencia de estándares de aprendizaje evaluables y se utilizará la letra en cursiva cuando un mismo estándar se utilice para dos descriptores.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

A continuación recogemos en una tabla por curso, los estándares de aprendizaje evaluables aplicados en Educación Primaria para los contenidos relativos al estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Curso	**5º PRIMARIA**
Descriptor	**Criterio de Evaluación**
EAE1: Lenguaje algebraico.	X
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
EAA4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	X
EAE6: Resolución de problemas.	8.1. Plantea y resuelve problemas relacionados con contenidos de estadística y problemas aritméticos de segundo nivel compactos (aparece solamente una pregunta al final del enunciado). 8.2. Plantea y resuelve problemas relacionados con contenidos de estadística y problemas aritméticos de tercer nivel (datos en números decimales y fraccionarios).

Tabla 17: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 5º Educación Primaria

Curso	**6º PRIMARIA**
Descriptor	**Criterio de Evaluación**
EAE1: Lenguaje algebraico.	X
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	X
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
EAA4: Ecuaciones e inecuaciones.	X
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	X
EAE6: Resolución de problemas.	9.1. Plantea y resuelve problemas aritméticos de segundo nivel compactos (aparece solamente una pregunta al final del enunciado). 9.2. Plantea y resuelve problemas aritméticos de tercer nivel (datos en números decimales, fraccionarios y porcentajes y proporcionalidad directa). 9.3. Aplica nociones de numeración en la resolución de problemas aritméticos. 9.4. Plantea y resuelve problemas relacionados con la numeración. 9.5. Determina/relaciona datos o pregunta o enunciado o operaciones en una situación problema. 9.6. Usa la calculadora para resolver problemas y para comprobar resultados. 9.7. Resuelve problemas de razonamiento lógico en contexto numérico. 9.8. Resuelve problemas de recuento sistemático en contexto numérico.

Tabla 18: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 6º Educación Primaria

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

A continuación recogemos en una tabla por curso, los estándares de aprendizaje evaluables aplicados en ESO para los contenidos relativos al estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Curso	**1º ESO**
Descriptor	**Estándar de aprendizaje evaluable**
EAE1: Lenguaje algebraico.	4.1. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	X
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	**X**
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	**X**
EAE6: Resolución de problemas	**X**

Tabla 19: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 1º ESO

Curso	**2º ESO**
Descriptor	**Estándar de aprendizaje evaluable.**
EAE1: Lenguaje algebraico.	*6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades,* ***mediante expresiones algebraicas****, y opera con ellas.* 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	*6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y* ***opera con ellas.*** 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*7.2.* ***Formula*** *algebraicamente una situación de la vida real mediante* ***ecuaciones de primer y segundo grado****, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las* ***resuelve*** *e* ***interpreta*** *el resultado obtenido.*
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	*7.2.* ***Formula*** *algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y* ***sistemas de ecuaciones*** *lineales con dos incógnitas, las* ***resuelve e interpreta*** *el resultado obtenido.*
EAE6: Resolución de problemas	*7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas,* ***las resuelve e interpreta el resultado obtenido.***

Tabla 20: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 2º ESO

Curso	3º ESO
Descriptor	**Estándar de aprendizaje evaluable**
EAE1: Lenguaje algebraico.	*4.1.* ***Formula algebraicamente*** *una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.*
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana. 3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado. 3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*4.1.* ***Formula*** *algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante* ***ecuaciones*** *y sistemas de ecuaciones, las* ***resuelve e interpreta*** *críticamente el resultado obtenido.*
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	*4.1.* ***Formula*** *algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y* ***sistemas de ecuaciones,*** *las* ***resuelve e interpreta*** *críticamente el resultado obtenido.*
EAE6: Resolución de problemas.	*4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones,* ***las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.***

Tabla 21: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 3º ESO

Curso	**4º ESO**
Descriptor	**Estándar de aprendizaje evaluable**
EAE1: Lenguaje algebraico.	3.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	3.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado. 3.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas.
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	3.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. *4.1.* ***Formula*** *algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo* ***estudia y resuelve****,* ***mediante inecuaciones, ecuaciones*** *o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.*
EAE5: Sistemas de ecuaciones.	*4.1.* ***Formula*** *algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo* ***estudia y resuelve****, mediante inecuaciones, ecuaciones o* ***sistemas****, e interpreta los resultados obtenidos.*

Tabla 22: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 4º ESO

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachiller

A continuación se presentan los estándares de aprendizaje aplicados en Bachiller para los contenidos relativos al estudio de ecuaciones y su aplicación a la resolución de problemas.

Curso	**1º Bachillerato**
Descriptor	**Estándar de Aprendizaje evaluable**
EAE1: Lenguaje algebraico.	*4.1. **Formula algebraicamente** las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica un sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.*
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	**X**
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	*4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y **resolución de ecuaciones** (algebraicas y no algebraicas) **e inecuaciones** (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.*
EAE5: Sistemas de ecuaciones	*4.1. **Formula** algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica **un sistema de ecuaciones lineales** planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.*
EAE6: Resolución de problemas	*4.1. **Formula** algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica un sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para **resolver problemas.*** *4.2. **Resuelve problemas** en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas y no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.*

Tabla 23: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 1º Bachillerato

Curso	**2º Bachillerato**
Descriptor	**Estándar de Aprendizaje evaluable**
EAE1: Lenguaje algebraico.	**X**
EAE2: Valor numérico de una expresión algebraica.	**X**
EAE3: Operaciones con expresiones algebraicas.	2.1. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. 2.2. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.
EAE4: Ecuaciones e inecuaciones.	**X**
EAE5: Sistemas de ecuaciones	*2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real,* ***estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve*** *en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.*
EAE6: Resolución de problemas	2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. *2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para* ***resolver problemas.***

Tabla 24: Estándares de aprendizaje evaluables currículo 2º Bachillerato

Capítulo 4

Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con el estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el currículo vigente.

A lo largo de este capítulo, analizaremos los libros de la editorial Anaya utilizados en el centro en el que se han realizado las prácticas en las que basaremos este trabajo fin de máster.

Se analizan los libros de dos cursos anteriores al considerado central en nuestro estudio y de dos cursos posteriores. Por lo tanto, se analizará el libro de matemáticas de 6º de Educación Primaria y los libros de todos los niveles educativos de la ESO, es decir, 1º, 2º, 3º y 4º.

El estudio se centra en las unidades didácticas que versan sobre álgebra, la manera en que los contenidos se trabajan en los libros de texto, a partir de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo que se incluyen en dichas unidades.

4.1. Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en 6º de Educación Primaria.

A continuación presentamos distintos tipos de problemas que aparecen en el libro de texto de 6º de Educación Primaria, y que resultan relevantes de alguna manera para mostrar cómo se introduce a los alumnos en el tema del álgebra.

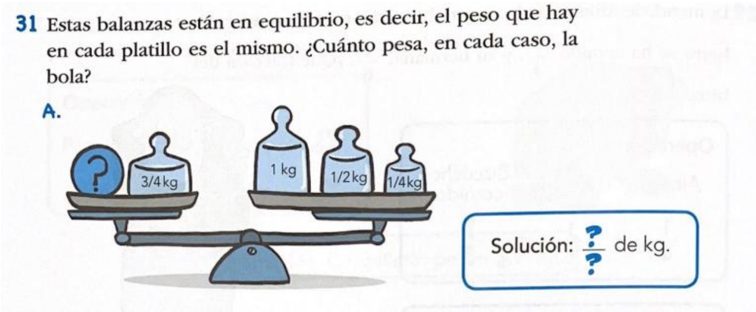
Tipo: Problema, Anaya 6ºEducación Primaria, página 167, nº8

Descripción: A través de los problemas se trata de que los alumnos trabajen la resolución de problemas de la vida cotidiana.

8 Una piscina tiene forma de prisma hexagonal. El lado del hexágono regular mide 4 m, y la apotema, 3,5 m. ¿Qué cantidad de agua contiene cuando el nivel del agua está a un metro del fondo?

Tipo: Problema, Anaya 6ºEducación Primaria, libro de problemas página 16, nº31

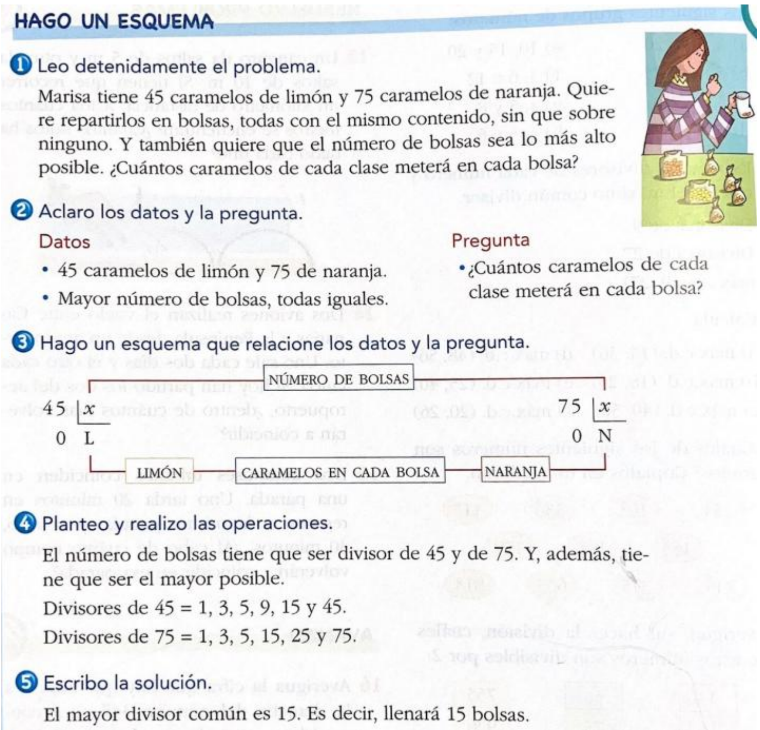
Descripción: A través de los problemas se trata de que los alumnos trabajen la resolución de problemas de la vida cotidiana. Trabajan con la imagen de las balanzas y la idea del equilibrio tan utilizada posteriormente para comenzar a explicar el tema de las ecuaciones.


31 Estas balanzas están en equilibrio, es decir, el peso que hay en cada platillo es el mismo. ¿Cuánto pesa, en cada caso, la bola?

A.

Tipo: Problema, Anaya 6ºEducación Primaria, página 48, estrategia en la resolución.

Descripción: A través de este problema resuelto se introduce a los alumnos en la secuencia y la estrategia de resolución de problemas que posteriormente emplearán en la resolución de problemas con ecuaciones.


HAGO UN ESQUEMA

1 Leo detenidamente el problema.

Marisa tiene 45 caramelos de limón y 75 caramelos de naranja. Quiere repartirlos en bolsas, todas con el mismo contenido, sin que sobre ninguno. Y también quiere que el número de bolsas sea lo más alto posible. ¿Cuántos caramelos de cada clase meterá en cada bolsa?

2 Aclaro los datos y la pregunta.

Datos

- 45 caramelos de limón y 75 de naranja.
- Mayor número de bolsas, todas iguales.

Pregunta

- ¿Cuántos caramelos de cada clase meterá en cada bolsa?

3 Hago un esquema que relacione los datos y la pregunta.

4 Planteo y realizo las operaciones.

El número de bolsas tiene que ser divisor de 45 y de 75. Y, además, tiene que ser el mayor posible.

Divisores de 45 = 1, 3, 5, 9, 15 y 45.

Divisores de 75 = 1, 3, 5, 15, 25 y 75.

5 Escribo la solución.

El mayor divisor común es 15. Es decir, llenará 15 bolsas.

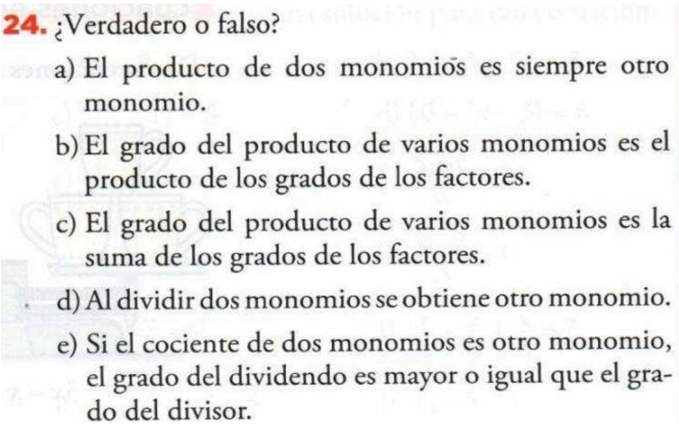
4.2. Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en 1º ESO.

A continuación presentamos distintos tipos de ejercicios, cuestiones y problemas que de alguna manera resultan relevantes por su vinculación con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje trabajados en el curso de 1º ESO.

El libro de la editorial Anaya de 1º ESO tiene 15 temas de los cuales 1 está dirigido al estudio del álgebra. Se trata del tema número 10 titulado "Álgebra".

Tipo: Cuestión, Anaya 1ºESO página 177, nº24

Descripción: A través de las cuestiones planteadas se trata de que el alumno profundice en los primeros contenidos trabajados en álgebra y se inicie en el vocabulario algebraico. Se pretende trabajar la traducción al lenguaje algebraico y su uso para simbolizar relaciones.



24. ¿Verdadero o falso?

a) El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

b) El grado del producto de varios monomios es el producto de los grados de los factores.

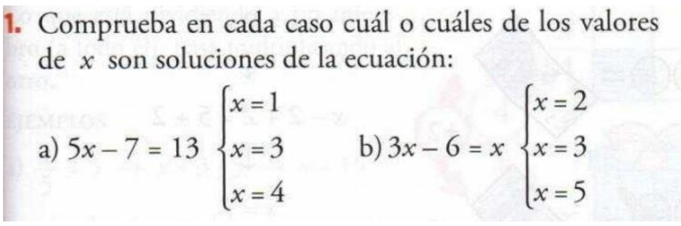
c) El grado del producto de varios monomios es la suma de los grados de los factores.

d) Al dividir dos monomios se obtiene otro monomio.

e) Si el cociente de dos monomios es otro monomio, el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor.

Tipo: Ejercicio, Anaya 1ºESO página 179, nº1

Descripción: Se trata de que el alumno sea capaz de calcular el valor numérico de una expresión algebraica y además, razonar qué valor de los dados es solución de la ecuación.



1. Comprueba en cada caso cuál o cuáles de los valores de x son soluciones de la ecuación:

a) $5x - 7 = 13 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$ b) $3x - 6 = x \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$

Tipo: Ejercicio, Anaya 1ºESO página 189, nº2
Descripción: Tiene como objetivo trabajar la realización de operaciones algebraicas. Eliminar paréntesis correctamente (muchos de los paréntesis vienen afectados por un signo menos delante) y posteriormente reducir.

12. Suprime los paréntesis y reduce.

a) $3x - (x + 1)$ b) $x + (2 - 5x)$
c) $4a - (3a - 2)$ d) $2a + (1 - 3a)$
e) $(x - 4) + (3x - 1)$ f) $(6x - 3) - (2x - 7)$

Tipo: Ejercicio, Anaya 1ºESO página 189, nº23
Descripción: Realización de operaciones algebraicas para la resolución de ecuaciones. Este ejemplo recoge las ecuaciones más complicadas que hay en la unidad para resolver. Pretenden conseguir que los alumnos se manejen con resoluciones con denominadores.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{5} - 1 = \frac{3x}{5} - 3$ b) $\frac{7x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$
c) $3x = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$ d) $\frac{x}{5} - 2 = x - \frac{1}{3}$

Tipo: Problema, Anaya 1ºESO página 190, nº30
Descripción: Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. En este primer problema el contexto nos sitúa en una situación que es susceptible de ser real.

30. Un pastor tiene, entre ovejas y cabras, 231 cabezas. El número de ovejas supera en 83 al de cabras. ¿Cuántas cabras y cuantas ovejas hay en el rebaño?

Tipo: Problema, Anaya 1ºESO página 190, nº26
Descripción: Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. En este segundo problema se trata de un contexto puramente matemático.

26. Si a un número le sumas su mitad y le restas 7, obtienes 17. ¿Qué número es?

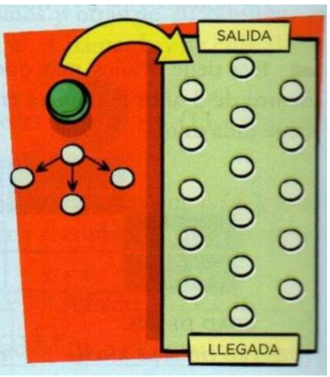
Tipo: Situación, Anaya 1ºESO página 192, “Investiga y exprésate”.
Descripción: Se trata de que el alumno participe de un juego con otro compañero de manera que llegue a encontrar regularidades, una secuencia lógica en el juego.

A continuación te presentamos un juego para dos jugadores. Ensaya, analízalo y describe razonadamente la estrategia ganadora.

El juego empieza colocando una ficha en la posición SALIDA. Cada jugador, por turno, mueve la ficha, siempre hacia abajo, a una de las posiciones adyacentes. Gana el que deje la ficha en la posición LLEGADA.

Ayuda:

— Juega varias veces con un compañero.
— Ensaya con tableros de menos puntos.
— ¿Desde qué posiciones ganas con seguridad?
— ¿Prefieres salir el primero o el segundo?



4.3. Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en 2º ESO.

A continuación presentamos distintos tipos de ejercicios, cuestiones y problemas que de alguna manera resultan relevantes en relación con el currículo de 2º de la ESO, sus contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

El libro de 2º ESO contiene 15 unidades didácticas de las cuales tres están orientadas al aprendizaje del álgebra:

- Unidad 6: Álgebra
- Unidad 7: Ecuaciones
- Unidad 8: Sistemas de ecuaciones.

Vamos a analizar las tres unidades didácticas, incidiendo más profundamente en el tema 7, qué es en el que hemos centrado nuestro estudio.

Tipo: Ejercicio, Anaya 2º ESO , tema 6 "Álgebra", página 127 nº4
Descripción: El objetivo es la traducción al lenguaje algebraico de enunciados expresados en el lenguaje usual.

4. Traduce a una igualdad algebraica cada uno de estos enunciados:

a) Si aumentas un número, x, en 15 unidades y divides entre 2 el resultado, obtienes el triple de dicho número.

b) Si triplicas la edad de Jorge, x, y al resultado le sumas 5 años, obtienes la edad de su padre, que tenía 33 años cuando nació Jorge.

Edad de Jorge $\rightarrow x$ Edad del padre $\rightarrow x + 33$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2º ESO, tema 6 "Álgebra", página 121, nº3
Descripción: El ejercicio siguiente propone al alumno que obtenga el valor numérico de una expresión algebraica.

3. Calcula el valor numérico de $3ab^2 - 5a + 3b$ para $a = 2$ y $b = -1$.

Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 7 "Ecuaciones", página 151, nº 3

Descripción: Ejercicio para trabajar la resolución de ecuaciones de primer grado. En esta unidad realizan operaciones algebraicas para la resolución de ecuaciones. Se explica y se trabaja el procedimiento para la resolución de ecuaciones de primer grado.

3. Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$

b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$

c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 6 "Álgebra", página 128, 23

Descripción: Ejercicio para trabajar las operaciones algebraicas. En un primer ejemplo, se pide que multipliquen números por polinomios aplicando la propiedad distributiva y reduzcan.

23. Reduce.

a) $2(3x - 1) + 3(x + 2)$

b) $3(x^2 - 2x - 1) - 2(x + 5)$

c) $4(2x^2 - 5x + 3) - 3(x^2 + x + 1)$

d) $6(3x^2 - 4x + 4) - 5(3x^2 - 2x + 3)$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 6 "Álgebra", página 128, 16

Descripción: Ejercicio para trabajar las operaciones algebraicas. En este segundo ejemplo, más complicado, se trata de que multipliquen polinomios y reduzcan.

28. Reduce.

a) $(x + 1) \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (x^2 + 1)$

b) $(2x - 5) \cdot (x + 2) + 3x \cdot (x + 2)$

c) $(x^2 - 3) \cdot (x + 1) - (x^2 + 5) \cdot (x - 2)$

d) $(4x + 3) \cdot (2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2º ESO, tema 7 "Ecuaciones", página 157, nº4

Descripción: En este segundo ejemplo se trabaja la resolución de ecuaciones de segundo grado.

4. Resuelve.

a) $3a^2 - 5 = 70$ b) $6x^2 - 3x = x$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$ d) $8x^2 - 6x + 1 = 0$

Tipo: Problema, Anaya 2ºESO, tema 7 “Ecuaciones”, página 153, nº29
Descripción: El objetivo es trabajar la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en un contexto susceptible de ser real.

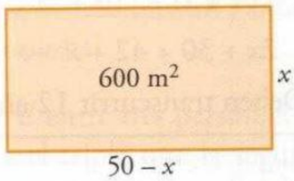
29. La edad de doña Adela es seis veces la de su nieto Juan, pero dentro de 8 años solo será el cuádruple. ¿Qué edad tiene cada uno?

Tipo: Problema, Anaya 2ºESO, tema 7 “Ecuaciones”, página 153, nº43
Descripción: Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en un contexto matemático.

43. Si el doble de un número se multiplica por ese mismo número disminuido en 5 unidades, da 12. ¿De qué número se trata?

Tipo: Problema, Anaya 2ºESO, tema 7 “Ecuaciones”, página 153, nº43
Descripción: Resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado en un contexto matemático.

46. El perímetro de un rectángulo mide 100 m, y el área, 600 m^2. Calcula sus dimensiones.



Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 8 “Sistemas de ecuaciones”, página 170, nº1
Descripción: Ejercicio cuyo objetivo es la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

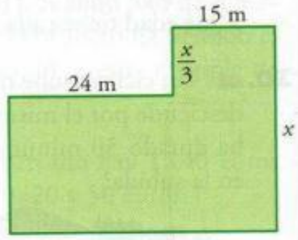
1. Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

Tipo: Cuestión, Anaya 2ºESO, página 154, nº47
Descripción: Se pide al estudiante que analice la estrategia seguida en cada caso para resolver el problema, su comprensión y explicación.

47. Analiza las soluciones que siguen al problema y explica cómo se ha construido la ecuación en cada caso.

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 930 metros cuadrados.



Resolución A

$$24 \cdot \left(x - \frac{x}{3}\right) + 15 \cdot x = 930$$

$$24 \cdot \frac{2x}{3} + 15 \cdot x = 930 \rightarrow 16x + 15x = 930$$

$$31x = 930 \rightarrow x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 30 + 15 + 10 + 24 + 20 + 39 = 138 \text{ m}$$

Resolución B

$$(24 + 15) \cdot x - 24 \cdot \frac{x}{3} = 930$$

$$39x - 8x = 930 \rightarrow 31x = 930$$

$$x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 24 + 10 + 15 + 30 + 39 + 20 = 138 \text{ m}$$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 8 "Sistemas de ecuaciones", página 170, nº1
Descripción: Ejercicio cuyo objetivo es la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

1. Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

Tipo: Ejercicio, Anaya 2ºESO, tema 8 “Sistemas de ecuaciones”, página 170, nº1
Descripción: Ejercicio cuyo objetivo es la resolución analítica de un sistema de ecuaciones aplicando uno de los tres métodos que han estudiado, igualación, sustitución o reducción.

6. Resuelve por el método que te parezca más ade cuado.

a) $\begin{cases} 2y = x + 8 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

Tipo: Problema, Anaya 2ºESO, tema 8 “Sistemas de ecuaciones”, página 153, nº29
Descripción: Resolución de problemas utilizando sistemas de ecuaciones.

15. Un hotel lleno alberga a 62 clientes en 35 habitaciones, unas individuales y otras dobles. ¿Cuántas habitaciones simples y cuántas dobles tiene el hotel?

4.4. Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en 3º ESO.

Seguidamente, presentamos ejercicios, cuestiones y problemas que de alguna manera resultan relevantes por su relación con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relativos al tercer curso de la ESO.

El libro de la editorial Anaya de 3º ESO contiene 15 unidades didácticas, correspondiente tres de ellas al bloque del álgebra.

- Tema 5: El lenguaje algebraico.
- Tema 6: Ecuaciones.
- Tema 7: Sistemas de ecuaciones.

Tipo: Ejercicio , Anaya 3ºESO, tema 5 "Lenguaje Algebraico", página 98, nº39
Descripción: Ejercicio cuyo objetivo es la traducción algebraica y el uso de dicho lenguaje para expresar regularidades y simbolizar relaciones.

39. La expresión $10a + b$ representa un número de dos cifras. Escribe en forma algebraica:

a) Un número de tres cifras.

b) El número siguiente y el anterior al que has escrito en a).

c) La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir las cifras del mismo.

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, tema 5 "Lenguaje Algebraico", página 95, nº13
Descripción: Ejercicio para trabajar con expresiones algebraicas, en este caso con polinomios.

13. Opera y simplifica.

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

Tipo: Cuestiones, Anaya 3ºESO, tema 5 "Lenguaje Algebraico", página 101, nº8

Descripción: Se trata de profundizar en los contenidos trabajados en la unidad, en referencia a las ecuaciones de 2º grado y a su resolución.

67. En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 115, nº6

Descripción: Resolución de ecuaciones de primer grado complejas. Se trata de recordar la resolución de ecuaciones de primer grado.

6. Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 116, nº14

Descripción: Resolución de ecuaciones de 2º grado complejas, habiendo trabajado en el curso anterior la resolución de ecuaciones de 2º grado sencillas.

14. Opera y resuelve.

a) $(x-2)(3x+2) = (x-4)(2x+1)$

b) $(x-1)^2 + (1-x)(x+2) = 0$

c) $(x+1)^2 = (x+1)(2x-3)$

d) $5(x+2)^2 - (7x+3)(x+2) = 0$

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 105, nº3

Descripción: Resolución de ecuaciones de grado superior a dos. El libro trabaja la resolución de ecuaciones de grado superior a dos por tanteo.

3. Tanteando, halla la solución entera de estas ecuaciones:

a) $2x^2 = 50$

b) $2x^3 + x^2 = 20$

c) $4 \cdot 10^x = 40\,000$

d) $(x-12)^4 = 81$

Tipo: Problemas, Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 117, nº45
Descripción: El objetivo de este problema es aplicar las ecuaciones de 2º grado en su resolución.

45. La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 7 "Sistemas de ecuaciones", página 131, nº5
Descripción: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El objetivo es trabajar los métodos de resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales que ya habían estudiado en 2º ESO.

5. Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:

$$\begin{cases} 7x + 5y = 11 \\ 35x - 12y = 129 \end{cases}$$

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 7 "Sistemas de ecuaciones", página 124, nº2
Descripción: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En este caso, se pretende resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales, también trabajado en 2º ESO.

5. Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:

$$\begin{cases} 7x + 5y = 11 \\ 35x - 12y = 129 \end{cases}$$

Tipo: Ejercicio, Anaya 3ºESO, Tema 7 "Sistemas de ecuaciones", página 124, nº2
Descripción: Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Finalmente, se trabaja la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales que es un contenido nuevo de este curso.

1. Resuelve estos sistemas dando su solución o señalando que no la tienen:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 16 \\ x^2 + y^2 = 64 \end{cases}$

4.5. Ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones tipo en 4º ESO.

Seguidamente, adjuntamos ejercicios, cuestiones y problemas que de alguna manera resultan relevantes por su relación con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relativos al cuarto curso de la ESO.

El libro de la editorial Anaya de 4º ESO contiene 12 unidades didácticas, siendo una de ellas correspondiente al álgebra.

- Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

Tipo: Ejercicios, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 49, nº5

Descripción: Trabajo de utilización de las identidades notables. Trata de capacitar a los alumnos para realizar operaciones con expresiones algebraicas.

5. Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:

a) $16x^2 + (\dots) - 8xy$ b) $(\dots) + 25y^2 + 60xy$

c) $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + (\dots)$ d) $(\dots) + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y$

Tipo: Ejercicios, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 51, nº31

Descripción: Objetivo, trabajar las fracciones algebraicas, operaciones y simplificaciones.

31. Efectúa.

a) $\frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$

b) $\frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6}$

Tipo: problemas, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 73, nº40

Descripción: Resolución de problemas mediante inecuaciones. Las inecuaciones aparecen como nuevos contenidos a trabajar en este curso y se aplican a la resolución de problemas.

40. Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?

Tipo: Ejercicios, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 71, nº3

Descripción: Resolución de ecuaciones, en este caso de ecuaciones de grado superior a dos.

3. Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$ d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

Tipo: Ejercicios, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 71, nº12

Descripción: Resolución de ecuaciones, en este caso se trata de resolver ecuaciones logarítmicas aplicando las propiedades de los logaritmos.

12. Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2\log_3 x - \log_3 4 = 4$ b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2$

c) $\log_2 (x - 3) + \log_2 x = 2$ d) $\log (x - 9) - \log x = 1$

Tipo: Ejercicios, Anaya 4ºESO, “Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas”, página 71, nº8, nº9

Descripción: Resolución de ecuaciones. En este caso se pretende trabajar la resolución de ecuaciones exponenciales y ecuaciones con radicales.

8. Resuelve.

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$ d) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+1} = \sqrt{8}$ b) $\sqrt{3^x} = 17$

c) $10^{1-x^2} = 0{,}001$ d) $81\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2}$

Tipo: Cuestiones, Anaya 4ºESO, "Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas", página 53, nº70

Descripción: Trabajo de razonamiento sobre las operaciones con expresiones algebraicas, los contenidos estudiados de polinomios, raíces y factorización.

70. ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) Si un polinomio es de grado 3, y otro, de grado 2, su producto es de grado 6.

b) Si $P(0) = 1$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-1)$.

c) Si sumamos dos polinomios de grado 3, siempre obtenemos un polinomio de grado 3.

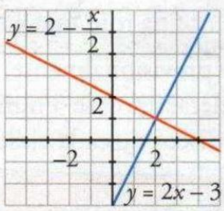
d) Si $P(3) \neq 0$, entonces el polinomio $P(x)$ no es divisible por $x-3$.

e) Si $P(-2) = 0$, entonces $x+2$ es un factor de $P(x)$.

Tipo: cuestiones, Anaya 4ºESO, "Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas", página 75, nº69

Descripción: Cuestiones para trabajar la comprensión de la resolución gráfica de inecuaciones.

69. Observa la representación gráfica de las rectas $y = 2 - \frac{x}{2}$ e $y = 2x - 3$:



Contesta sin hacer operaciones: ¿para qué valores de x es $2x - 3 \geq 2 - \frac{x}{2}$?

Capítulo 5

Resultados

En el presente capítulo, se valora la coherencia existente entre los ejercicios, problemas, situaciones y cuestiones que contienen los libros de texto analizados con el currículo vigente que hemos analizado en el primer capítulo.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.

La legislación vigente y la coherencia que debe tener un proceso de enseñanza-aprendizaje, nos dice que los nuevos conocimientos que pretendamos que sean adquiridos por los alumnos en un curso, deben basarse y apoyarse en los ya conseguidos en etapas precedentes. Teniendo en cuenta la dificultad que supone para el alumnado el aprendizaje del álgebra sobre todo en los primeros años, este fundamento es básico.

Por ello, hemos podido comprobar analizando el currículo en los distintos cursos, que desde el momento en que los alumnos comienzan a estudiar y trabajar el álgebra, los contenidos referentes al álgebra aparecen de forma **continua** dentro del currículo durante todos los cursos. Aparecen en primaria como una introducción al álgebra y a partir de primero de la ESO de un modo continuo hasta segundo de Bachiller. No encontramos ningún curso en el que el álgebra deje de estar contenido el currículo pudiéndose observar un salto.

De la misma manera en que los contenidos son tratados dentro del currículo de un modo continuo, una vez analizados los libros de texto de la Editorial Anaya, podemos concluir que en este caso sucede lo mismo. El libro de texto contiene un número determinado de unidades didácticas referentes al tema del álgebra en cada curso, desde 1º hasta 4º ESO así como en 6º de Educación Primaria a modo preparatorio. Existe una correspondencia total respecto a la continuidad de los contenidos referidos al álgebra tanto en el currículo como en los libros de texto; podemos decir que el álgebra se trabaja en cada año de la etapa escolar de un alumno de secundaria.

Al mismo tiempo, es interesante comprobar cómo el currículo de un año determinado, va recogiendo contenidos ya vistos y trabajados en el año anterior, dándoles mayor dificultad (reflejados en los criterios y estándares de aprendizaje evaluables aplicados) y al mismo tiempo va añadiendo nuevos contenidos.

De esta manera, se asegura que los conocimientos adquiridos por los alumnos en cada curso se basen y apoyen en los ya conseguidos en etapas precedentes. Aspecto básico en la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, podemos concluir que el currículo de matemáticas trabaja el álgebra de un modo espiral, pretendiendo asentar conocimientos profundizando en ellos cada año y al mismo tiempo avanzando hacia otros nuevos.

Vamos a recoger en una tabla los contenidos trabajados en los distintos cursos, teniendo en cuenta que el contenido C4, que hemos considerado que recoge todos los contenidos referentes a ecuaciones e inecuaciones es muy amplio para el análisis que deseamos realizar. Por ello, vamos a realizar un estudio más profundo subdividiendo este contenido a su vez en otros cuatro, de manera que los descriptores referentes a los contenidos trabajados quedan del siguiente modo:

- C1: Contenido 1: Lenguaje algebraico.
- C2: Contenido 2: Valor numérico de una expresión algebraica.
- C3: Contenido 3: Operaciones con expresiones algebraicas.
- C4.1. Ecuaciones de primer grado con 1 incógnita.
- C4.2. Ecuaciones de segundo grado con 1 incógnita.
- C4.3. Ecuaciones de grado superior a dos.
- C4.4. Inecuaciones.
- C4.5. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
- C5: Contenido 5: Sistemas de ecuaciones
- C6: Contenido 6: Resolución de problemas.

	CONTENIDOS DEL CURRÍCULO									
CURSO	C1	C2	C3	C4.1	C4.2	C4.3	C4.4	C.4.5	C5	C6
1º ESO	X	X								
2º ESO	X	X	X	X	X				X	X
3º ESO	X	X	X		X	X			X	X
4º ESO			X			X	X		X	X
1º BACH							X	X	X	X
2º BACH									X	X

Tabla 25 - Evolución de los contenidos en el currículo

Como podemos comprobar, los contenidos referidos a la resolución de ecuaciones van apareciendo en el currículo de un modo espiral, a partir de 2º ESO aparece la resolución de ecuaciones y se va evolucionando cada año hacia un tipo de ecuación más complicado, pero acordándose o trabajando las que ya se conocían desde el curso pasado.

También podemos comprobar que desde el momento en que los alumnos saben resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, la resolución de problemas aparece cada año, puesto que es el eje principal sobre el que se quiere dar sentido al estudio del álgebra por los estudiantes.

De la misma manera, los libros de texto recogen en una primera sección de la unidad o incluso en una unidad completa, los contenidos ya trabajados en cursos anteriores lo que permite trabajar en el aula con los alumnos sus conocimientos previos respecto al tema tratado e ir profundizando en ellos, aumentando la dificultad de los ejercicios o problemas propuestos. A medida que avanzamos en la unidad didáctica o pasamos a la siguiente unidad en el libro de texto, van apareciendo los nuevos conceptos y contenidos que se pretenden trabajar en el curso.

Es una manera de trabajar que permite a los alumnos hacer un repaso de los conocimientos que ya poseen y avanzar hacia otros contenidos nuevos y, al profesor, situarse en el punto en el que se encuentran sus alumnos para realizar un proceso de aprendizaje adecuado y coherente con sus conocimientos previos.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

En este apartado vamos a analizar la coherencia existente entre los libros de texto analizados y el currículo. Hay que tener en cuenta que los libros de texto son, en la mayor parte de las ocasiones, el recurso didáctico principal utilizado por el docente para impartir la materia y, por lo tanto, el nexo de unión entre el currículo y el aula. De ahí la importancia de su pertinencia en los procesos de aprendizaje.

Vamos a estudiar de qué manera los libros de texto cumplen los requisitos recogidos en el currículo para la enseñanza de las matemáticas. Los criterios que vamos a analizar para verificar su coherencia nos los da el propio currículo y sus exigencias:

- ***"Las matemáticas dentro del currículo favorecen el progreso en la adquisición de la competencia matemática a partir del conocimiento de los contenidos".***

Se analiza la congruencia entre los contenidos del currículo que deben ser adquiridos para desarrollar la competencia matemática y los que aparecen en los libros de texto.

- Libro de texto de 1ºESO: trabaja todos los contenidos recogidos en el currículo, llegando más lejos de lo exigido para el curso y trabajando la resolución de ecuaciones (Ejercicio, Anaya 1º ESO, página 189, nº23) y la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado (Problema, Anaya 1ºESO página 190, nº30).

- Libro de texto de 2º ESO: los contenidos trabajados en el libro son los incluidos en el currículo, trabajándose la resolución de ecuaciones de primer grado, segundo grado y los sistemas de ecuaciones lineales. Si bien, aparece al final del tema 7 de ecuaciones, un problema en el que plantea a los alumnos la resolución de una ecuación de grado superior a dos, contenido que no se recoge en el currículo de 2º ESO y por lo tanto vuelve a adelantarse ligeramente respecto al currículo.

- Libro de texto de 3ºESO: se vuelven a trabajar las ecuaciones de primer grado que no aparece ya explícitamente en este curso dentro del currículo (Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 115, nº6) y las ecuaciones de segundo grado (Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 116, nº14).

  Sin embargo, las ecuaciones de grado superior a dos, aparecen en el currículo en este curso, pero en el libro solo se resuelve alguna por tanteo (Anaya 3ºESO, Tema 6 "Ecuaciones", página 105, nº3) y no se incluye ninguna resolución analítica.

- Libro de texto 4º ESO: cuando llegamos a 4º se repasan las ecuaciones de segundo grado (página 58, nº1) y como nuevo contenido aparece la resolución analítica de ecuaciones de grado superior a dos ("Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas", página 71, nº3), aunque éste es un contenido que aparece en el currículo del curso anterior.

Del currículo de 4º se trabajan las inecuaciones (página 68, nº7). Sin embargo, en 4º se trabajan contenidos de ecuaciones que aparecen en el currículo de 1º Bachiller, como son las ecuaciones con radicales y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas (Ejercicio, Anaya 4ºESO, página 71, nº8,9).

Por lo tanto, podemos concluir que si estudiamos globalmente los libros de todo el ciclo de la ESO, los contenidos se corresponden con el currículo para toda la etapa en su conjunto. Sin embargo, existen variaciones en el momento de presentarlos en el libro. En ocasiones, el libro se adelanta al currículo como ocurre en 1º ESO o con ciertas ecuaciones en 4ºESO, pero en otras ocasiones se atrasa respecto al currículo como ocurre en 3º ESO.

Si el centro trabaja con la misma editorial a lo largo de toda la etapa podemos decir que existe un grado importante de coherencia con el currículo. Si el centro cambia de libros de texto dependiendo del curso la coherencia en este caso no es total.

En conclusión, podemos remarcar que en ocasiones se pide “más” a los alumnos de lo que viene exigido por ley y sin embargo, en otras ocasiones, hay contenidos que aparecen en el libro de texto del curso posterior al señalado en el currículo.

No podemos decir que exista una coherencia total entre ambos, pero sí podemos afirmar que existe una coherencia de contenidos bastante elevada cuando miramos la etapa en su conjunto.

- ***“Los nuevos conocimientos que deben adquirirse tienen que apoyarse en los ya conseguidos.”***

El currículo, como ya hemos visto en el apartado anterior de este capítulo, es un currículo en espiral, cuyo objetivo es que el alumnado profundice en los conocimientos de una manera progresiva.

En lo referente a las *operaciones con expresiones algebraicas*, el libro inicia el álgebra en 1º ESO con las operaciones básicas con monomios (suma, resta, multiplicación y división) y la suma y resta con polinomios. (Anaya 1ºESO página 189, nº2)

El libro de 2º vuelve a trabajar las operaciones con monomios y respecto a los polinomios añade el producto y los productos notables (Ejercicio, Anaya 2ºESO, página 128, 23).

Llegando a 3º aparecen de nuevo las operaciones con monomios y en los polinomios se trabaja la división y aparecen las fracciones algebraicas (Anaya 3ºESO, página 95, nº13).

Por último, en el último curso de la ESO no se hace ya referencia a los monomios, directamente se trabaja con polinomios y se aprende a factorizarlos. Se trabaja la suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Respecto a la *resolución de ecuaciones*, como ya hemos visto en el punto anterior, podemos afirmar es que el libro de texto trabaja en cada curso los contenidos relativos a ecuaciones que ya se han trabajado en el curso anterior.

En cuanto a la *resolución de problemas*, la evolución es paralela al tipo de ecuaciones que se resuelven en cada curso.

Por lo tanto, sí podemos afirmar que los libros de texto introducen los nuevos conocimientos apoyándose en los ya conseguidos por los alumnos.

- ***"La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas."***

Los libros de texto de cada curso en el tema del álgebra dedican una parte de la unidad o de las unidades correspondientes a la resolución de problemas, incluso en el curso de 1º ESO siendo un contenido no viene exigido por el currículo. Por lo tanto, está claro que son un eje fundamental de las unidades didácticas orientadas al estudio del álgebra.

Pero, también se debe tener en cuenta, si todo aquello que aparece señalado como problema dentro del libro escolar es realmente un problema. Existen autores como Chamorro y Vecino (2003), que consideran que la noción de problema "dista mucho de la que subyace en los problemas escolares".

Es cierto, que el hecho de ordenar en cada unidad didáctica el tipo de problemas según deban ser resueltos con ecuaciones de primer o segundo grado o señalar si deben ser resueltos con un sistema de ecuaciones, prácticamente convierte el problema en un ejercicio, puesto que el alumno ya está demasiado orientado y sabe demasiado sobre la estrategia de resolución como para poder considerarlo un problema.

Y también podemos decir, que las pistas que en ocasiones se da a los alumnos para la resolución de problemas o el hecho de presentar resuelto un problema prácticamente igual al siguiente que pueda tener más dificultad en su resolución, vuelve a hacer que esos problemas se conviertan de nuevo en ejercicios para el alumno que tiene que dedicar poco tiempo a pensar cómo puede resolver esa situación que se le plantea.

En conclusión, a pesar de estar muy presentes en los libros de texto, la secuencia en que son presentados dentro de la unidad así como las "ayudas" dadas en su resolución, hace que muchas veces los problemas escolares dejen de ser verdaderos problemas para los alumnos.

- ***"Los contextos deben ser elegidos para que el alumnado se aproxime al conocimiento de forma intuitiva mediante situaciones cercanas al mismo"***

Veamos de qué manera los libros de texto contextualizan los problemas en situaciones reales y cercanas a los alumnos siguiendo las indicaciones del currículo. Para ello se revisan los textos de los problemas presentados en los libros de los cuatro cursos de la ESO.

En los cuatro cursos se plantean un total de 260 problemas para resolver aplicando ecuaciones. De ellos un 67% se desarrollan en un entorno susceptible de poder producirse en la vida real y un 33% en un contexto puramente matemático.

Se analiza este 67% de problemas que son susceptibles de producirse en un entorno que puede ser real y vemos que dentro de este porcentaje existe una serie de problemas cuyos enunciados se alejan total y absolutamente del entorno y de los intereses del alumnado.

Así, nos encontramos enunciados de problemas que en 2º ESO nos hablan de “aleaciones de metales”, “indemnizaciones por expropiaciones de terrenos”, “mezclas de café” o “pureza del aceite”. En 3º ESO nos sitúan en la “fabricación de macetas”, el “embaldosado de salones”, la “pureza de los metales” y las “inversiones de capital” que, sin ser inapropiados, quizás no entren en sus intereses principales. Y de nuevo en 4ºESO volvemos a las aleaciones y pureza de los materiales para las mezclas o a los depósitos de capital.

Por lo tanto, podemos concluir, que una parte demasiado elevada de los problemas presentados se desarrollan en un contexto exclusivamente matemático y del resto, vuelve a haber una cantidad importante que no pertenecen al entorno e intereses actuales de los alumnos. Los libros de texto no tienen en cuenta las demandas de los currículos en cuanto a los contextos solicitados muchas más veces de las deseadas.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en 2º ESO.

En esta segunda parte del trabajo se realiza un análisis de un proceso de estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas, llevado a cabo en el Colegio Santa Teresa con dos grupos de alumnos de 2º ESO, en el marco de las prácticas llevadas a cabo en el centro de enseñanza. El análisis se desarrolla a lo largo de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se analiza el libro de texto utilizado en el centro, en concreto la unidad didáctica relativa al proceso de estudio analizado. Para ello, se estudian los objetos matemáticos presentes, la estructura de los contenidos y las actividades a realizar por los alumnos.

En el segundo capítulo se estudian las dificultades a las que los alumnos se van a enfrentar en el estudio del álgebra, y en este proceso de estudio más en concreto, así como de los errores que previsiblemente se van a cometer.

A lo largo del tercer capítulo se desarrolla la secuencia de aprendizaje seguida en las aulas, es decir, la distribución y secuenciación de los tiempos de clase, así como las actividades y tareas que los alumnos van a desarrollar.

En el cuarto capítulo, se detalla la puesta en práctica del proceso de estudio, los objetivos perseguidos y los comportamientos esperados; se presentan, se analizan y se estudian los resultados obtenidos por los alumnos durante la experimentación.

Finalmente, para concluir esta parte del trabajo, se presenta una breve síntesis, se exponen las conclusiones observadas y las cuestiones que se plantean tras haber realizado este trabajo fin de máster.

Capítulo 6

Estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en el libro de texto de referencia.

A lo largo de este capítulo, se realiza una análisis del libro de texto utilizado en el proceso de estudio que nos ocupa, siendo éste el libro de matemáticas de 2º ESO de la editorial Anaya.

Para realizar este análisis, se estudian en primer lugar los objetos matemáticos involucrados en el proceso y seguidamente se realiza un análisis global de la unidad didáctica.

6.1. Objetos matemáticos involucrados.

Primeramente se analizan los principales objetos matemáticos involucrados en el proceso de aprendizaje tomando para ello como referencia el análisis realizado en el artículo "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta", de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi (2006).

Los elementos estudiados son los siguientes:

1. ***Lenguaje***

    - *Lenguaje verbal:* ecuación, ecuación equivalente, igualdad algebraica, grado, monomio, radicando, factor, coeficiente, valor, lenguaje algebraico, solución, infinitas soluciones, solución doble, sin solución, miembro, término, incógnita, grado, enunciado, datos, interpretar, codificar, resolver, transponer, transformar, despejar, reducir, eliminar, mínimo común múltiplo.
    - *Lenguaje gráfico:* dibujos en los que se representan balanzas en equilibrio con los que se representa una ecuación y balanzas en equilibrio para explicar la transposición de términos, imágenes representativas del enunciado de los problemas, tablas de datos.
    - *Lenguaje simbólico:* incógnitas (x, y), número (k, a, b), +, -, prioridad de las operaciones (), llave para agrupar las soluciones de una ecuación de 2º grado.

2. ***Conceptos:***

    - *Previos:* monomios, operaciones con monomios, suma y resta de polinomios, suprimir denominadores en una expresión, valor numérico de una expresión, ecuación, solución de una ecuación.
    - *Emergentes:* resolución de ecuaciones de primer grado sin y con denominadores, ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución, resolución de ecuaciones de segundo grado, problemas.
    -

3. ***Procedimientos:***

    - Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado: quitar paréntesis, quitar denominadores, transponer, reducir y despejar la incógnita.

- Procedimiento para la resolución de ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2=k$, $ax^2+c=0$, $ax^2+bx=0$ y $ax^2+bx+c=0$
- Procedimiento para la resolución de problemas: leer el enunciado, codificar algebraicamente, resolver ecuación e interpretar solución.

4. Propiedades:

- Al sumar, restar, multiplicar o dividir el mismo número en los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Al pasar una expresión de adición o sustracción de un miembro a otro de la ecuación hay que cambiarle el signo, En cambio si esta expresión es de multiplicación o división el signo se mantiene.
- Propiedad distributiva.
- La transposición de términos permite despejar la incógnita, lo que equivale a resolver la ecuación.

5. Situaciones:

- *Problemas contextualizados:* resolución de problemas que los alumnos deben resolver en los que se presenta un enunciado que podría ser real. En este tipo de enunciados, como ya hemos comentado en otro capítulo de este trabajo, en ocasiones el contexto es cercano a los alumnos (se desarrollan en una clase, con amigos, compra de material escolar…) y en otras ocasiones está alejado de sus intereses (capitales, inversiones, aleaciones…).
- Problemas descontextualizados: resolver ecuaciones de primer grado, resolver ecuaciones de segundo grado, traducción al lenguaje algebraico de expresiones en lenguaje natural, cálculo del valor numérico de una expresión algebraica.

6. Argumentos:

- Representaciones gráficas de una ecuación (balanzas, equilibrio).
- Demostraciones de los procedimientos mediante ejemplos.
- Demostración de las propiedades mediante ejemplos.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica.

En este apartado se realiza un análisis de la unidad didáctica 7 titulada "Ecuaciones", del libro de Editorial Anaya utilizado en el centro educativo para el estudio de ecuaciones y su aplicación a la resolución de problemas en 2º E.S.O.

El tema se divide en los siguientes apartados

1. Introducción.
2. Secciones
    - Ecuaciones: significado y utilidad.
    - Ecuaciones: elementos y nomenclatura.
    - Transposición de términos.
    - Resolución de ecuaciones sencillas.
    - Ecuaciones con denominadores.
    - Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado.
    - Resolución de problemas con ecuaciones.
    - Ecuaciones de segundo grado.
    - Resolución de ecuaciones de segundo grado.
3. Ejercicios y problemas.
4. Taller de matemáticas
5. Autoevaluación.

A continuación describiremos cada una de las partes señaladas:

<u>1.Introducción.</u>

Esta primera parte de introducción se desarrolla a lo largo de la primera página del tema y hace un repaso histórico a propósito del origen del álgebra.

En primer lugar aparece el número de la unidad didáctica y el título, "Ecuaciones".

Seguidamente, habla del matemático griego Diofanto (S.III) como creador del álgebra simbólica. Al tratarse de un matemático de la Escuela de Alejandría, incluye una imagen de lo que fue en su día Alejandría y un retrato del personaje.

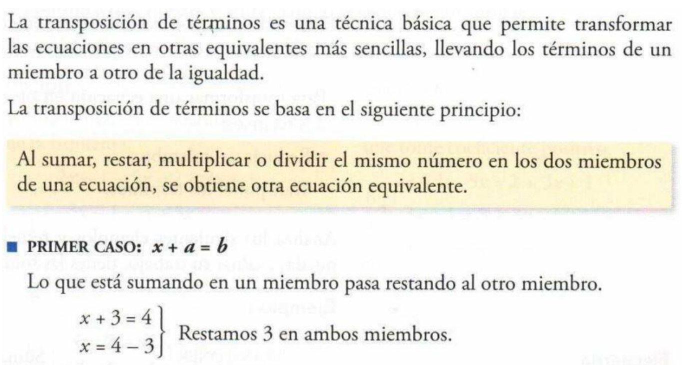
En una segunda parte de la página, habla del que es considerado por gran parte de los autores como el padre del álgebra, el matemático árabe Al-Jwarizmi (S.IX), que mostró un método de resolución de ecuaciones seguida y difundida en épocas posteriores. Aparece el texto junto a su retrato.

2. Secciones

Las 9 secciones que constituyen la unidad didáctica siguen la misma estructura en cada una de ellas, estructura que se describe a continuación:

1. ***Título de la sección:*** número y título de la sección en la esquina superior izquierda. Se emplea una letra de tamaño superior al resto del texto y en color azul, destacando sobre el resto de letra que es negra en toda la sección.

2. ***Presentación*** de contenidos o procedimientos relativos al tema de la sección. Seguidamente aparece algún ejemplo resuelto para mostrar más claramente los contenidos presentados o los métodos explicados.



La transposición de términos es una técnica básica que permite transformar las ecuaciones en otras equivalentes más sencillas, llevando los términos de un miembro a otro de la igualdad.

La transposición de términos se basa en el siguiente principio:

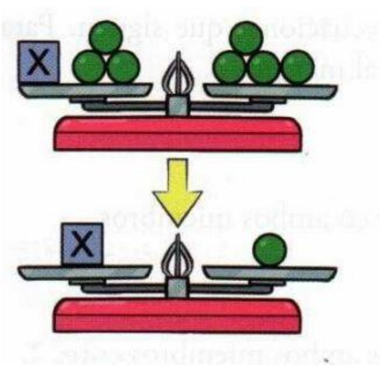
Al sumar, restar, multiplicar o dividir el mismo número en los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.

■ PRIMER CASO: $x + a = b$

Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 = 4 \\ x = 4 - 3 \end{array}\right\} \text{Restamos 3 en ambos miembros.}$$

Esta parte, también va acompañada en el margen izquierdo de la página de alguna imagen que pueda ayudar en la comprensión de lo explicado:



En ocasiones también aparece en este margen izquierdo algún recordatorio importante o estrategia interesante que pueda servir al alumno. (*"Recuerda", "Ten en cuenta", "Una estrategia similar"*)

No lo olvides

$$x + a = b \rightarrow x = b - a$$

$$x - a = b \rightarrow x = b + a$$

$$a \cdot x = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$\frac{x}{a} = b \rightarrow x = b \cdot a$$

3. ***Subapartados***: si existen subapartados dentro de la sección, aparecen en negrita con una letra de un tamaño un poco superior a la del resto del tema y con la primera letra del título en color rojo.

   En esta unidad hay dos secciones que se apoyan en subapartados: “Ecuaciones: significado y utilidad” y “Resolución de ecuaciones de segundo grado” para la que incluimos a continuación un ejemplo:

   Soluciones de una ecuación de segundo grado

   Bajo el título se presentan igualmente contenidos o procedimientos relativos a esta parte y seguidamente aparece algún ejemplo resuelto.

   A la izquierda vendrá acompañado también de alguna imagen o algún cuadro con recordatorio importante o estrategia para el alumno.

Ten en cuenta

A las soluciones de una ecuación de segundo grado también se las llama **raíces.**

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

“Las raíces de la ecuación son $x = 4$ y $x = -1$”.

En general, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas, aunque también encontrarás algunas con una solución doble o sin solución.

Ejemplo

La ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ tiene dos soluciones: $\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$

Para $x = 4 \rightarrow 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

Para $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

4. ***Actividades*** para resolver por los alumnos.

   Bajo el título *“Piensa y practica”* aparecen ejercicios o problemas para trabajar la sección trabajada.

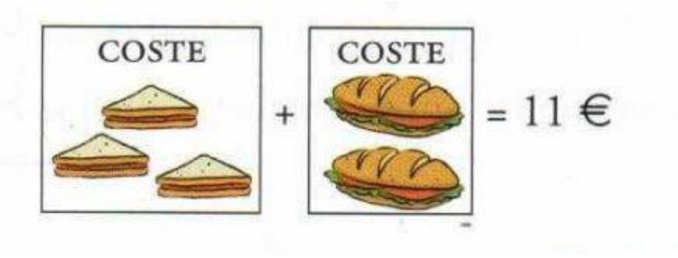
Piensa y practica

1. Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25.

¿Qué número es?

2. Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble.

En esta parte, también pueden aparecer ilustraciones o tablas que ayuden al alumno a comprender el significado del enunciado, o puede tratarse de una ayuda para la resolución del problema. Adjuntamos ilustración gráfica que acompaña al enunciado de un problema de resolución de ecuaciones:



3. Ejercicios y problemas.

En esta parte de la unidad didáctica de ecuaciones aparecen 51 ejercicios y problemas separados en apartados.

Dentro de cada apartado, las actividades aparecen clasificadas con un símbolo que representa su dificultad, dividiéndola en 3 niveles.

Estos apartados no siguen el mismo orden que las secciones de la unidad didáctica.

En las secciones se trabaja primero las ecuaciones de primer grado y los problemas que se resuelven con dichas ecuaciones y seguidamente las ecuaciones de segundo grado con los problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado.

En la parte de ejercicios y problemas primero se trabajan todos los procedimientos de resolución de ecuaciones (primer y segundo grado) y después todos los problemas (primer y segundo grado).

- *Ecuaciones sencillas.*

Incluye tres ejercicios de mínima dificultad. Los alumnos deben trabajar la resolución de ecuaciones sencillas de primer grado. El último es más complicado porque deben aplicar la propiedad distributiva para la resolución de la ecuación.

- *Ecuaciones de primer grado con denominadores.*

Incluye 6 ejercicios de resolución de ecuaciones con denominadores de los cuales uno está resuelto.

De los 6 ejercicios hay 2 de mínima dificultad, 2 de dificultad intermedia y otros dos de máxima dificultad y, es dentro de estos dos más complicados, dónde aparece el ejercicio resuelto como ayuda al alumno para que resuelva el siguiente.

En los más sencillos las fracciones tienen en el numerador un número o un monomio y en el denominador siempre un número.

En los de dificultad intermedia las fracciones tienen en el numerador un número o un binomio y en denominador siempre un número.

En los más complicados las fracciones pueden tener tanto en el numerador como en el denominador monomios.

- *Ecuaciones de segundo grado.*

Apartado constituido por tres ejercicios, dos de mínima dificultad y uno de dificultad máxima. Los dos primeros se resuelven simplemente aplicando las fórmulas estudiadas y en el último primero tienen que llegar a la forma general quitando paréntesis y denominadores.

- *Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado.*

Este apartado está formado por 28 problemas, 11 de mínima dificultad y 17 de dificultad media. En los de dificultad media algunos de ellos van acompañados de ilustraciones gráficas que representan el enunciado del problema o de tablas que recogen los datos (en problemas de mezclas o edades), dándoles indicaciones claras de cómo pueden resolver el problema.

	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	COSTE (€)
VACA	x	0,50	$0{,}5x$
OVEJA	$300 - x$	0,80	$0{,}8(300 - x)$
MEZCLA	300	0,70	$0{,}7 \cdot 300$

$\boxed{\text{COSTE LECHE VACA}} + \boxed{\text{COSTE LECHE OVEJA}} = \boxed{\text{COSTE MEZCLA}}$

Para este tipo de problemas en los que aparece una mezcla, tienen un problema resuelto cómo guía.

- *Resuelve problemas con ecuaciones de segundo grado.*

El apartado está formado por 6 problemas, 5 de dificultad intermedia y 1 de máxima dificultad. En los problemas de dificultad intermedia, la ecuación de resolución está en algunos ya planteada y la dificultad está asociada al proceso de resolución. Uno de los problemas no tiene la ecuación planteada, pero va precedido de uno prácticamente igual ya resuelto.

El problema de dificultad máxima incluye una serie de pistas para que puedan plantear la ecuación convenientemente.

- *Analiza y exprésate.*

En este apartado, aparece un problema resuelto de dos maneras diferentes con una ecuación de primer grado. El objetivo es que el alumno entienda cómo se ha planteado la ecuación de resolución en los dos casos. Y siguiendo las dos estrategias seguidas, realice la traducción al lenguaje algebraico correctamente.

- *Problemas "+".*

Se trata de 4 problemas de dificultad máxima. Una de las características de estos cuatro problemas es que no se indica si se tienen que resolver con una ecuación de primer o de segundo grado. No tienen problemas resueltos para indicarles la estrategia de resolución que pueden seguir como pasaba en el resto de problemas de dificultad semejante. No tienen tampoco ayudas en el libro para guiarlos de alguna manera como en otros problemas.

4. Taller de matemáticas

Comienza con una primera parte *"lee e infórmate"* que hace referencia de nuevo a la historia del álgebra. Les explica en qué momento se resolvieron las ecuaciones de primer y segundo grado y cuándo, aquellas de grado superior a dos. Se pasa a una segunda parte *"pero tú puedes"* en la que se plantea un reto a los alumnos de intentar resolver una ecuación de tercer grado. En esta actividad, realiza un ejemplo de resolución y plantea seguidamente un ejercicio semejante. El hacer esta parte de la unidad implica tener un conocimiento y manejo profundo del tema de ecuaciones por parte del alumno: conocimientos de los métodos de resolución de segundo grado, saber cómo calcular el valor numérico de una expresión algebraica y entender el significado de que un valor de x sea solución de la ecuación.

- ¿Sabrías construir una ecuación que tenga por soluciones $x = 5$, $x = 1/5$ y $x = -2$?

Esta parte termina con *"entrénate resolviendo problemas"* en la que les plantea el enunciado de tres problemas de dificultad importante y no se les da ningún tipo de indicación o guía.

5.Autoevaluación.

En esta última parte aparecen ejercicios y problemas de manera que el alumno pueda repasar todos los contenidos que aparecen en la unidad y sepa si comprende y es capaz de realizar todos los ejercicios y problemas que se le plantean. Son 5 ejercicios y 3 problemas. De los problemas dos se resuelven con una ecuación de primer grado y uno de ellos con una ecuación de segundo grado.

6.3. Otros aspectos relevantes.

Vamos a prestar atención y analizar las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático.

Comenzamos por el primer bloque de la unidad didáctica, que parte de conocimientos previos del alumnado, a otros que construirá a partir de los primeros.

En primer lugar se define el álgebra y partiendo de la expresión algebraica más simple, el monomio, se definen posteriormente las operaciones básicas con monomios (suma, resta, multiplicación y división), a continuación se define un polinomio a través del concepto más básico de monomio y siguiendo la misma estructura que acabamos de ver, las operaciones básicas con polinomios (suma, resta y multiplicación) sin llegar a la división y de ahí hasta el siguiente y último punto, el de productos notables y aplicaciones. En este primer bloque la secuencia de contenidos podemos decir que es lógica y correcta.

En el siguiente bloque de la unidad didáctica, siguiendo la misma secuencia, partimos de la definición de ecuación (elementos y nomenclatura) y seguimos con la técnica de transposición de términos como método en la "resolución de ecuaciones sencillas". En el siguiente punto nos explica cómo resolver ecuaciones con denominadores para volver a darnos un "procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado" y finalmente establece la metodología a seguir en la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado.

El hecho de que aparezca un apartado denominado como "resolución de ecuaciones sencillas", y seguidamente volver a denominar un apartado "procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado" hace que la secuencia seguida no sea clara. El procedimiento general, sirve también para la resolución de ecuaciones sencillas. Este apartado es repetitivo e innecesario, aportando al alumno la sensación de que existen dos métodos de resolución de ecuaciones cuando no es así. Simplemente, una vez repasada la técnica de transposición (conocida y utilizada por los alumnos desde el curso anterior), explicar cómo procederemos en el caso de que existan denominadores en la ecuación y en conclusión, establecer el procedimiento general para resolver cualquier ecuación de primer grado.

En este caso la secuencia es lógica, pero existe un apartado repetitivo e innecesario en la comprensión del tema que puede llevar a confusión.

En este segundo bloque se trabajan las ecuaciones de segundo grado y su resolución.

El último bloque de la unidad didáctica comienza por definir una ecuación de primer grado con dos incógnitas, cuál es su representación gráfica y solución.

Seguidamente definimos que es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, su solución gráfica y los métodos de solución analítica. Finalmente la resolución de problemas con un sistema de ecuaciones.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles.

En el siguiente capítulo, se va a tratar de identificar las dificultades que supone al alumnado el estudio del álgebra en general y la resolución de ecuaciones y su aplicación a la resolución de problemas en particular; así como los errores previsibles que se presentan en el proceso de aprendizaje.

El análisis realizado sobre dificultades y errores previsibles, se basa en la clasificación de dificultades realizada por Wagner y Parker (1999) y la clasificación de errores realizada por Socas (1997).

7.1. Dificultades

Un hecho admitido por docentes e investigadores en los estudios realizados referentes al álgebra, es que el aprendizaje de esta rama de las matemáticas es sumamente complicado y dificultoso para una gran parte del alumnado.

Dentro de los numerosos estudios existentes, centramos nuestro interés en una clasificación de las dificultades en el aprendizaje en tres tipos realizada por Wagner y Parker, (1999) en relación con su origen:

1. Dificultades intrínsecas al objeto de estudio: éste tipo de dificultades están relacionadas con la naturaleza misma del álgebra y del lenguaje algebraico necesario para su desarrollo.

2. Dificultades inherentes al propio sujeto: dificultades asociadas al proceso de abstracción y generalización que el alumno debe de ser capaz de desarrollar y que en ocasiones, supone un proceso cognitivo complicado que no es capaz de realizar.

3. Tipo de enseñanza: dificultades ligadas y consecuencia de las técnicas de enseñanza aplicadas en el proceso de aprendizaje.

En este trabajo, se analizan las dificultades intrínsecas al álgebra y en particular aquellas que están ligadas a la resolución de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas, en el curso de 2º ESO.

Las dificultades aparecen con claridad en el aula en el desarrollo de las sesiones, en la resolución de las tareas, en las cuestiones planteadas por los alumnos, así como en los cuestionarios que se les realizan de cuyo análisis se puede observar los errores cometidos por los estudiantes, reflejo de dichas dificultades.

A continuación, detallamos las principales dificultades inherentes al álgebra a las que se enfrentan los alumnos, que surgen y han sido detectadas, en una gran parte del alumnado:

- *El álgebra como lenguaje:* dificultades ligadas a las características del propio lenguaje. Es complicado para los alumnos dar significado a los símbolos y expresiones del álgebra.

- *Traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico:* cuando la información proporcionada al estudiante se presenta con un texto, enunciado de un problema, esto supone una gran dificultad para traducir las expresiones verbales en ecuaciones algebraicas.
  En muchas ocasiones, la dificultad para resolver un problema radica fundamentalmente en la incapacidad de los alumnos para encontrar en el lenguaje simbólico las herramientas para plantear una ecuación que recoja el contenido del enunciado.

- *Simbolismo del álgebra:* el empleo de dos sistemas de símbolos distintos dentro de la misma expresión, letras y números, genera gran confusión en los estudiantes.

- *Dificultades aritméticas:* conocimiento insuficiente de la estructura aritmética que se traduce en manipulación algebraica errónea.

- *Operaciones algebraicas:* la jerarquía existente en las operaciones, para la cual muchas veces no se encuentra sentido y les lleva a cometer errores de resolución.
  Dificultades en el empleo de los paréntesis en la creación de ecuaciones de expresiones algebraicas. Los paréntesis son indispensables para indicar el orden de ejecución de operaciones, sin embargo, los alumnos ignoran su uso, no saben cómo y dónde deben colocarlos. En ocasiones les parece una exigencia del docente, una rareza sin ningún tipo de justificación matemática.

- *Significado del signo igual en el álgebra:* dificultad para construir mentalmente el significado de equivalencia del signo igual y dejar de considerarlo sólo como un mandato operacional. Esto hace que algunos estudiantes que no tienen en cuenta la equivalencia, transformen las expresiones algebraicas o ecuaciones de un modo arbitrario. En la resolución de ecuaciones, el signo igual indica una relación y hay que operar encontrando relaciones equivalentes.
  En ocasiones no son capaces de comprender su importancia en la resolución de problemas.

7.2. Errores previsibles

Cuando los errores se presentan repetidamente en el proceso de construcción de los conocimientos, es necesario tenerlos en cuenta para poder saber cómo se originan, de manera que luego se puedan llevar a cabo unas acciones de superación y corrección en el aula.

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, los errores no nos muestran únicamente una falta de conocimiento o de procedimiento del alumno, existen errores que se producen ante nuevas tareas cuando un conocimiento anterior que era válido se muestra insuficiente.

Los errores previsibles son aquellos que están relacionados con el saber en juego y se caracterizan porque son cometidos por un cierto número de alumnos, que pueden ser de clases diferentes y repetirse incluso en años distintos.

Las características que acabamos de citar nos permiten concluir que este tipo de errores dependen más de la actividad desarrollada y de los conocimientos que demanda y no tanto del alumno que los comete en sí mismo.

Este tipo de errores son reveladores de obstáculos en el proceso de aprendizaje. Los obstáculos son parte inevitable del proceso cognitivo; deben ser superados por los alumnos.

Basándonos en los estudios teóricos existentes, se realiza el análisis de los errores cometidos, clasificándolos de la siguiente manera, como indica *Socas (1998),* según el origen de dichos errores:

1. Errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética.
2. Errores de procedimiento.
3. Errores causados por las características propias del álgebra.

En clase, se realiza una prueba de evaluación formativa durante el proceso de aprendizaje. Se les han planteado una serie de ejercicios y problemas de cuya resolución se analizarán posteriormente los resultados y los errores cometidos mayoritariamente por los alumnos. En base a estos resultados, se realizaran unas sesiones que les permitan profundizar en aquellos contenidos que supongan mayor dificultad para ellos. Al finalizar la siguiente unidad de álgebra, en un segundo cuestionario, se verá si este trabajo les ha podido ayudar a mejorar resultados y superar dificultades.

Capítulo 8

El proceso de estudio.

A lo largo de este capítulo se describe el proceso de estudio llevado a cabo en dos grupos de 2º E.S.O en el Colegio concertado Santa Teresa de Jesús, en el marco de la asignatura de matemáticas, referente al estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

En primer lugar se explicará en detalle la secuenciación del proceso en el aula, las actividades adicionales planificadas y para concluir, la tarea prevista para el grupo de alumnos.

8.1. Distribución del tiempo de clase.

La asignatura de matemáticas se imparte en el centro en cuatro sesiones semanales de 55 minutos cada una de ellas. La secuenciación de las sesiones a lo largo del curso, así como el contenido de dichas sesiones, son exactamente iguales para los dos grupos y se van desarrollando de un modo paralelo.

En ocasiones, se producen pequeñas diferencias temporales entre ambas clases debidas generalmente a las actividades que se desarrollan dentro del propio del centro que pueden afectar de modo distinto a cada uno de los grupos, produciendo pequeños adelantos o retrasos. En otras ocasiones, pueden deberse a los propios alumnos que en su proceso de aprendizaje pueden avanzar de distinta forma en algún momento concreto.

El material didáctico empleado por el docente es el libro de texto de la editorial Anaya.

En primer lugar, describimos la secuenciación de las sesiones seguidas en este proceso de estudio. Cabe señalar que las tres primeras sesiones a las que se hace referencia, se produjeron previamente a mi presencia en el centro.

Las primeras ocho sesiones, tienen una serie de puntos en común estructurales que detallamos a continuación, de manera que no se señalará posteriormente en cada una de las sesiones.

- *Repaso / Tareas.* Tiempo: 10 -15 minutos.

Realización y corrección de las tareas realizadas por los alumnos en casa o repaso de los contenidos trabajados en la sesión anterior.

- *Presentación de contenidos.* Tiempo: 15-20 minutos.

El docente presenta, de un modo magistral, contenidos nuevos.

- *Trabajo dirigido de contenidos.* Tiempo: 35-40 minutos.

Los alumnos trabajan de forma individual ejercicios o problemas referentes al tema de la sesión. Si hay dudas se resuelven y el docente los realiza y corrige en la pizarra.

A continuación pasamos a detallar qué contenidos se han ido trabajando durante las sesiones:

- ***<u>Sesión 1:</u>***

Contenidos: *Ecuaciones. Técnicas de resolución. Resolución de ecuaciones de primer grado sencillas.*

- ***<u>Sesión 2:</u>***

Contenidos: *Ecuaciones con denominadores. Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado.*

- ***<u>Sesión 3:</u>***

Contenidos: *Resolución de ecuaciones de primer grado. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.*

- ***<u>Sesión 4:</u>***

Contenidos: *Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.*

El docente les indica durante la sesión la secuencia a seguir en la resolución de problemas: determinación de la incógnita, planteamiento de la ecuación de resolución, resolución y solución concreta del problema. Se realizan los primeros problemas que los alumnos han realizado en casa como tarea y a lo largo de la clase los alumnos de forma individual trabajan nuevos problemas.

- ***<u>Sesión 5:</u>***

Contenidos: *Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.*

El docente dedica toda la sesión a la realización de problemas un poco más complicados. Los alumnos trabajan de forma individual, si tienen dudas las plantean. Las dudas se van resolviendo individualmente y finalmente realiza los problemas en la pizarra. Discuten si hay varias maneras de resolverlos, distintas ecuaciones de resolución planteadas.

- ***<u>Sesión 6:</u>***

Contenidos: *Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas.*

A lo largo de la sesión se hace una corrección de los problemas que han realizado en clase como tarea. El docente trabaja con los alumnos un problema referente al tema de las edades. Les muestra una metodología de resolución con ayuda de tablas. Les indica como trabajo varios problemas.

Comienzan a trabajar la metodología de resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas.

- ***<u>Sesión 7:</u>***

Contenidos: *Resolución de ecuaciones de 2º grado completas.*

Les indica el procedimiento de resolución de ecuaciones de 2º grado completas y los posibles resultados que podemos obtener. Se trabaja en clase algún ejemplo y les indica ejercicios para resolver en casa.

- ***<u>Sesión 8:</u>***

Contenidos: *Resolución de ecuaciones de 2º grado. Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica.*

En clase trabajan los diferentes tipos de resolución de ecuaciones de 2º grado y pasan a la siguiente unidad de sistemas de ecuaciones. En este curso no trabajan aunque está incluido en la unidad didáctica del libro de texto, los problemas cuya resolución se realiza con ecuaciones de segundo grado.

- ***<u>Sesión 9:</u>***

Evaluación de los contenidos trabajados referentes a ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo y resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. El análisis de este cuestionario nos permitirá saber en qué punto se encuentran los alumnos respecto al tema trabajado.

- ***<u>Sesión 10:</u>***

Contenidos: *Operaciones con expresiones algebraicas. Actividad 1. Anexo*

Durante esta sesión los alumnos trabajarán en grupos cooperativos una actividad, "*Pirámides algebraicas*", cuyo objetivo es que mejoren la resolución de ecuaciones evitando los errores de resolución que se producen en muchas ocasiones.

Resolución de problemas:

Los alumnos trabajan en grupos poniendo en común los problemas que han realizado en casa. Se plantean sus dudas y realizan un trabajo colaborativo.

- ***<u>Sesión 11:</u>***

Contenidos: *Traducción al lenguaje algebraico. Actividad 2. Anexo*

Durante esta sesión los alumnos trabajarán en grupos en una actividad, "*Dominó algebraico*", cuyo objetivo es que mejoren la traducción al lenguaje algebraico puesto que se ha comprobado que no poseen herramientas suficientes para plantear con facilidad las ecuaciones de resolución de los problemas.

Resolución de problemas:

Los alumnos trabajan en grupos poniendo en común los problemas que se les han mandado de nuevo para realizar en casa. Se plantean sus dudas y realizan un trabajo colaborativo.

- ***<u>Sesión 12:</u>***

Contenidos: *Taller de problemas. Actividad 3. Anexo.*

Durante esta sesión los alumnos trabajarán en grupos en una actividad, "Taller de problemas", cuyo objetivo es que trabajen problemas únicamente planteando las ecuaciones de resolución. El objetivo es que trabajen la traducción al lenguaje algebraico como herramienta en la resolución de problemas.

8.2. Actividades adicionales planificadas.

Como hemos citado en el apartado anterior en las sesiones 10, 11, 12 se han realizado fuera del contexto habitual de trabajo y del material didáctico empleado, tres actividades para que los alumnos desarrollen en grupos de trabajo colaborativo. El objetivo de las actividades, que pasamos a detallar a continuación, es conseguir trabajar el álgebra desde el trabajo cooperativo y a través de unas actividades que les permita salir del contexto del libro de texto.

Actividad 1: Pirámides algebraicas - Anexo B

El objetivo de la actividad es que trabajen las operaciones algebraicas con monomios y binomios; que apliquen correctamente la propiedad distributiva y mejoren en el manejo del signo "-" en la resolución de ecuaciones que les lleva a cometer frecuentes errores de resolución.

Actividad 2: Dominó algebraico - Anexo C

El objetivo de la actividad es conseguir que los alumnos trabajen el lenguaje algebraico como herramienta en la resolución de problemas, punto que les resulta en ocasiones extremadamente dificultoso. Para ello, deben ser capaces de interpretar y utilizar el lenguaje algebraico. Al trabajar en grupos deben conseguir comunicar lingüísticamente a sus compañeros cómo y por qué se debe utilizar una expresión algebraica determinada frente a otra, mejorando sus competencias lingüísticas y sociales.

Actividad 3: Taller de problemas - Anexo D

El objetivo de la actividad es que, en grupos de trabajo, sean capaces de encontrar la ecuación de resolución de los problemas planteados, comprendiendo los enunciados, traduciéndose al lenguaje simbólico del álgebra y buscando, para concluir, la ecuación que les permita encontrar la solución.

Se pretende conseguir, con el trabajo en grupo, que esta manera de trabajar anime a los alumnos a expresarse en voz alta para explicar a sus compañeros cómo han realizado una determinada traducción algebraica, cómo han razonado para pasar un enunciado del lenguaje natural al lenguaje simbólico o el proceso seguido para llegar a plantear una ecuación de resolución de un problema. Buscamos que sean capaces de expresarse matemáticamente haciéndose entender por sus compañeros y, al mismo tiempo, sepan escuchar y comprender a los demás, todo ello como una forma más de aprendizaje.

8.3. La tarea: actividad autónoma prevista de los alumnos.

A lo largo de las sesiones, el material didáctico empleado por el docente en el proceso de estudio es el libro de texto de la editorial Anaya de 2º ESO, más en concreto, el tema 7 de “Ecuaciones”.

En cuanto al trabajo autónomo que los alumnos deben realizar en casa, el docente diariamente les indica qué ejercicio, problemas o cuestiones deben hacer de tarea de la unidad didáctica del libro de texto. Al finalizar la clase, en los últimos minutos, escribe en la pizarra qué deben hacer y en ocasiones se lo indica a través de la plataforma. Generalmente, se trata de 3 ejercicios o 3 problemas o una mezcla de ejercicios y problemas que los alumnos realizan en casa y que son corregidos en la clase siguiente.

En la siguiente sesión, cómo ya se ha indicado, la tarea es corregida por el profesor en la pizarra. En dos sesiones, fueron los alumnos los que salieron a la pizarra a realizar la corrección.

Frecuentemente, el docente controla la realización de tareas por los alumnos, siendo esta nota una parte de la evaluación. Si un alumno falla reiterativamente y no tiene la tarea hecha, se enviará un aviso a los padres a través de la plataforma.

Capítulo 9

Experimentación

A lo largo de este capítulo, se analizará en una primera parte la muestra utilizada para la experimentación así como las actividades realizadas en el proceso de estudio.

Seguidamente se analizarán y discutirán los resultados obtenidos por los alumnos en cada uno de los cursos para cada una de las dos pruebas realizadas.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación.

La experimentación de este proceso de estudió se llevó a cabo con dos grupos de 2º de la E.S.O. del centro concertado Santa Teresa. En el colegio, en las asignaturas de matemáticas y lengua, se ha tomado la decisión de hacer un desdoble de los dos grupos originales, 2ºA y 2ºB, formando tres grupos de trabajo, 2ºA / 2ºB/ 2ºAB. De esta manera, el ratio original de 30 alumnos por clase, pasa a ser en estas dos asignaturas a 20 alumnos por clase. Esto facilita, tanto el trabajo en clase como la atención que se les puede proporcionar a los alumnos.

Los grupos se realizan aleatoriamente, no se forman atendiendo ni a criterios de comportamiento ni de nivel académico. El resultado en este caso, son dos grupos bastante homogéneos en cuanto a estos dos factores. El docente, en base a su experiencia, considera que el grupo de 2ºAB tiene un mejor comportamiento y un rendimiento escolar un poco superior.

Coincidiendo como mi estancia en el centro, todos los profesores de 2º ESO tomaron una serie de medidas cuyo objetivo final era recordar a los alumnos de este curso, cuáles son las normas de comportamiento que se deben cumplir en el centro y en el aula y que los alumnos, en los últimos tiempos, parecen tener olvidadas. Cuando la clase se desarrolla, no hay comportamientos disruptivos ni actitudes negativas que llamen la atención, se trata más de un grupo de alumnos que necesitan llamadas de atención continuadas para poder comenzar la clase en una actitud correcta; generalmente no tienen el material preparado y en otras ocasiones se les olvida; hablan entre ellos…tienen, en general, actitudes que los docentes asocian mayoritariamente a la etapa de desarrollo adolescente en la que se encuentran y qué afecta a su trabajo y comportamiento.

En cuanto al rendimiento escolar, se trata de dos grupos bastante semejantes, aunque como ya se ha comentado, el grupo AB suele obtener mejores resultados. En este grupo coinciden un par de estudiantes que destacan sobre el resto con muy buenos resultados académicos en matemáticas y una mayoría de alumnos bastante trabajadora. El grupo B tiene un alumno académicamente brillante y el resto constituyen un grupo menos trabajador que el AB.

En cada uno de los grupos, se ha unido a la clase durante mi estancia un alumno de incorporación tardía a los que el docente ayuda de forma paralela. Estos alumnos realizan un programa de adaptación y por lo tanto, contenidos y pruebas diferentes.

Para la experimentación, tras terminar el tema de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas, se planteó una prueba de evaluación de cuyo análisis de resultados se determinó que sería conveniente realizar una serie de actividades que permitiesen a los alumnos profundizar y trabajar en aquellos contenidos en los que los errores habían sido más recurrentes. Durante tres sesiones, se plantearon tres actividades para trabajar en el aula en grupos cooperativos. Durante cada una de las sesiones, se realizó una actividad y el resto del tiempo se dedicó a poner en común problemas de ecuaciones resueltos por ellos como tarea.

Posteriormente, los alumnos continuaron trabajando dentro del bloque de álgebra, estudiando los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas. Al terminar, se realizó una prueba de esta última unidad didáctica de la que se analizarán los resultados obtenidos en la resolución de problemas, con objetivo de comprobar si el trabajo de la nueva unidad didáctica también de álgebra así como las actividades realizadas, les han podido ayudar a superar ciertas dificultades, evitar ciertos errores y mejorar en el manejo del álgebra como lenguaje y herramientas de resolución de problemas.

9.2. El cuestionario

A continuación, vamos a presentar los cuestionarios que se plantearon a los alumnos en dos momentos del proceso de aprendizaje, El primero de ellos, el cuestionario 1, se realizó al terminar la unidad didáctica del tema de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y su aplicación en la resolución de sistemas.

El segundo cuestionario, el cuestionario 2, se realizó al terminar la siguiente unidad didáctica referente a sistemas de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas. Con este cuestionario los alumnos terminan definitivamente el bloque de álgebra en este curso escolar.

Cuestionario 1 - Ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

MATEMÁTICAS 2º ESO
Control Tema 7 (31-3-22)

Alumno______________________________________Grupo ____ Número____

Nota: en cada pregunta se indica su valor.

1. Resuelve, **paso a paso**, las siguientes ecuaciones de **primer grado**: *(2,5 p)*

a) $2x - 3 + 5x = x - 1 - 2x$

b) $2(3x - 5) = 4x - (2x - 2)$

c) $\frac{x}{5} + 2 = x - 4 - \frac{x}{2}$

d) $\frac{x}{2} + 3\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{8} + 6$

e) $\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{5x}{2} - 3(x - 1)$

COLEGIO SANTA TERESA
PAMPLONA

3. Resuelve, **paso a paso**, las siguientes ecuaciones de **segundo grado** utilizando el método adecuado en cada caso:

(2,5 p)

a) $2x^2 - 72 = 0$

b) $x^2 + 11x = 0$

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

d) $6x^2 + 5x = 7x$

e) $3x^2 + 10 = x^2 - 8$

RESUELVE ESTOS PROBLEMAS CON AYUDA DE UNA ECUACIÓN

4. He sumado 26 a la tercera parte de un número, y he obtenido el mismo resultado que si le resto 14 a su doble. ¿**Cuál es el número**?

(1 p)

COLEGIO SANTA TERESA
PAMPLONA

5. Un kilo de garbanzos cuesta 0,50 € más que uno de lentejas. Miren ha comprado tres kilos de lentejas y uno de garbanzos por 7,30 €.

¿A **cuánto** está **el kilo de garbanzos**? ¿Y **el de lentejas**?

(1 p)

6. Un padre es 36 años mayor que su hijo. Sin embargo, dentro de 9 años su edad será el triple que la de su hijo. ¿Cuál es la **edad de cada uno**?

(1 p)

7. Un ganadero tiene **un prado rectangular** en el que pastan sus vacas, y ha decidido proteger a los animales **cercándolo con 256 metros de alambre**. Si sabemos que es el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las **dimensiones del prado**?

(1 p)

COLEGIO SANTA TERESA
PAMPLONA

Cuestionario 2 - Sistemas de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

MATEMATICAS 2º ESO
Examen Tema 8

Alumno____Grupo ____ Número____

RESUELVE ESTOS PROBLEMAS CON AYUDA DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Calcula **dos números** de forma que su diferencia sea 5 y la suma del mayor con el doble del menor sea 35.

(1 p)

2. En la pastelería, por dos croissants y tres napolitanas pagamos el otro día 5,20€. Hoy hemos tomado tres croissants y una napolitana, y nos han cobrado 3,60€.

¿Cuánto **cuesta un croissant**? ¿Y **una napolitana**?

(1,25 p)

COLEGIO SANTA TERESA
PAMPLONA

3. En un garaje hay aparcados, entre coches y motos, 50 vehículos. Si hemos contado 134 ruedas, ¿cuántos **vehículos** hay **de cada clase**?

(1 p)

4. ¿Qué cantidades de vino, uno dulce de 14 euros/litro y otro suave de 12 euros/litro, **hay que mezclar** para que resulten 25 litros de mezcla de vino a 13,2 euros/litro?

(1,25 p)

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

Los objetivos perseguidos y los comportamientos esperados para los dos cuestionarios anteriores son los siguientes:

<u>Cuestionario 1 - Ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.</u>

Objetivos perseguidos:

- Resolver 5 ecuaciones de primer grado con distintos niveles de dificultad, desde las ecuaciones más sencillas hasta las más complicadas con paréntesis y denominadores.

- Resolver 5 ecuaciones de segundo grado de todos los tipos, incompletas y completas, interpretando si es necesario la solución obtenida.

- Resolver 4 problemas de la vida diaria aplicando en su resolución ecuaciones de primer grado, valorando su capacidad de utilizar el lenguaje algebraico como herramienta y su espíritu crítico en la interpretación de la solución.
  Los alumnos deben seguir la secuencia de resolución estudiada:
    - Determinar la incógnita del problema.
    - Plantear la ecuación de resolución codificando algebraicamente los datos.
    - Resolver ecuación.
    - Interpretar la solución.

Comportamientos esperados:

Como hemos analizado en capítulos anteriores se espera que los alumnos se enfrenten a una serie de dificultades y cometan una serie de errores.

- *Ejercicio 1*

Ejercicio 1a) - Se espera, que el ejercicio sea resuelto correctamente por la mayor parte de los estudiantes; las dificultades que encuentren serán derivadas de la aritmética y les van a llevar a cometer errores en la manipulación algebraica.

Ejercicio 1b) - Aparece un paréntesis en el primer término de la ecuación y tienen que aplicar la propiedad distributiva que, en ocasiones, su aplicación les lleva a cometer errores. Por otra parte, se espera que apliquen correctamente el signo menos que hay delante del paréntesis del segundo término, lo contrario les llevará a una solución incorrecta.

Ejercicio 1c) - La dificultad aumenta con la aparición de fracciones, su resolución les resulta más dificultosa y se espera que al eliminar denominadores no comentan errores derivados de la aritmética.

Ejercicio 1d) - En esta ecuación aparecen fracciones y paréntesis a los que hay que aplicar la propiedad distributiva. En este caso es necesario que los alumnos respeten la jerarquía de las operaciones en la resolución y resuelvan como han aprendido, primero paréntesis y luego denominadores, sino llegarán a soluciones erróneas.

Ejercicio 1e) - Esta ecuación es la de máxima dificultad y contiene todas las dificultades anteriores: fracciones, paréntesis afectado por un signo menos y propiedad distributiva. La resolución de esta ecuación es la más complicada.

- *Ejercicio 2:* no se analiza porque es parte de la siguiente unidad didáctica referente a sistemas de ecuaciones.

- *Ejercicio 3*

Ejercicio 3a) - Se trata de resolver una ecuación de segundo grado incompleta que tiene poca dificultad. Se espera que la mayor parte la realice correctamente y que tomen por buenas las dos soluciones de la ecuación y que no se queden solamente con el resultado positivo de la raíz cuadrada.

Ejercicio 3b) - Se trata de resolver una ecuación de segundo grado incompleta en la que según se les ha explicado en clase tienen que sacar factor común y a partir de ahí encontrar las soluciones. Para resolverlo correctamente tienen que haber entendido la metodología a seguir y el razonamiento que se les ha explicado en clase. En el aula, parecían no entender correctamente el razonamiento llevado a cabo, según el cual cada factor que obtengo debe ser igual a cero para que el resultado de la multiplicación de los dos factores sea cero.

Ejercicio 3c) - Resolución de una ecuación de segundo grado completa. En primer lugar los alumnos deben haber aprendido la fórmula de resolución para llegar a un resultado correcto. Es una ecuación sencilla. Se espera, que si han estudiado, no cometan errores.

Ejercicio 3d) - En esta ecuación deben transponer términos para “ver” la forma general de la ecuación. Una vez hecho este primer paso, deben reducir términos operando con monomios y sacar factor común para llegar a una ecuación de segundo grado incompleta igual al ejercicio 3b.

Ejercicio 3e) - En esta ecuación primero deben transponer términos para llegar a la forma general de la ecuación. Una vez hecho, deben reducir términos operando con monomios y sacar factor común para llegar a una ecuación de segundo grado incompleta igual a la del ejercicio 3a. Esta es la más sencilla de resolver para los alumnos, pero en este caso van a llegar a una ecuación que no tienen solución y se espera que sean capaces de razonar y justificar porque la ecuación no tiene solución.

- *Problemas*

Resolución de 4 problemas aplicando en su resolución una ecuación de primer grado.

Problema nº4) - El primer problema es de contexto matemático. Se espera que los alumnos controlen este tipo de enunciados porque se han hecho muy parecidos en clase. La primera dificultad a la que se van a enfrentar es la traducción algebraica del enunciado, en éste y en el resto de los problemas. En primer lugar deben determinar la incógnita y seguidamente las relaciones que existen comprendiendo bien el enunciado, para poder entender dónde se encuentra el equilibrio y plantear la ecuación. En la resolución se genera una ecuación con denominadores, pero no excesivamente complicada.

Problema nº5) - Este es un problema de contexto real. La primera dificultad que se les plantea es la traducción algebraica. A partir del enunciado determinar la incógnita.

La ecuación de resolución es sencilla, tiene como dificultad operar con decimales que les puede llevar a error. Se espera que los alumnos sean capaces de dar una solución concreta al enunciado del problema teniendo en cuenta que debe ser expresado en las unidades correctas. Si sólo dan un número como resultado, es indicador de que no están dando sentido a la solución.

Problema nº6) - Problema de contexto real referente a edades. En clase se ha podido ver que los alumnos tienen gran dificultad con este tipo de problemas. En primer lugar, la traducción al álgebra les resulta complicada y es por eso que se les ha explicado cómo pueden recoger los datos en una tabla. La tabla recoge las edades en distintos momentos de tiempo a los que se suele referir el enunciado. Puede ser que realicen correctamente este primer paso, pero se encuentran con una segunda dificultad que es encontrar el equilibrio, el momento en el tiempo en el que se puede plantear la ecuación. Y por último, en el planteamiento deben entender que se necesita de un paréntesis para indicar el orden de ejecución y si no los utilizan en este problema llegarán a un resultado incorrecto. La ecuación a la que se llega es sencilla y se espera de los alumnos que la realicen correctamente.

Problema nº7) - Problema de contexto matemático. Es un problema muy sencillo en el planteamiento y en la resolución. Las dificultades a la que se enfrentan son dos, saber cómo se calcula el perímetro en un rectángulo y dar correctamente la solución. No se les pide únicamente la medida de un lado, que es el valor directo que van a obtener al resolver la ecuación, se les pide las dimensiones del rectángulo. Una respuesta correcta debe incluir ambas medidas.

Cuestionario 2 - Sistemas de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Objetivos perseguidos:

En el siguiente cuestionario se analizará únicamente los objetivos y comportamientos esperados referentes a la resolución de problemas. No valoraremos los errores cometidos en la aplicación de los métodos de resolución aplicados, puesto que no forman parte de nuestro proceso de estudio, pero sí los errores que se produzcan propiamente en la resolución de ecuaciones.

- Resolver 4 problemas de la vida diaria aplicando en su resolución sistemas de ecuaciones lineales; valorando su capacidad de utilizar el lenguaje algebraico como herramienta en el planteamiento y su espíritu crítico en la interpretación de la solución.
  Los alumnos deben seguir la secuencia de resolución estudiada:
  - Determinar la incógnita del problema.
  - Plantear el sistema de ecuaciones codificando algebraicamente los datos.
  - Resolver sistema.
  - Interpretar la solución.

Comportamientos esperados:

Como hemos analizado en capítulos anteriores se espera que los alumnos se enfrenten a una serie de dificultades y cometan una serie de errores.

Resolución de 4 problemas aplicando en su resolución un sistema de ecuaciones lineales.

Problema nº1) - Problema de contexto matemático. La mayor dificultad a la que se enfrentan en este problema es la traducción al lenguaje algebraico del enunciado. Ser capaces de establecer las relaciones existentes entre las incógnitas. Una vez planteado el sistema la resolución es muy sencilla independientemente del método elegido.

Problema nº2) - Problema de contexto real. La mayor dificultad a la que se enfrentan en este problema es la resolución del sistema por la existencia de decimales en las ecuaciones que les puede llevar a cometer errores de resolución.

Problema nº3) - Problema de contexto real. En este caso la resolución y dar una solución concreta son partes del proceso muy sencillas en las que no deberían cometer errores.

En este caso, la dificultad radica en el planteamiento de las ecuaciones. Con facilidad van a plantear una de las ecuaciones, pero sin embargo para la segunda van a tener mayor dificultad en traducir el enunciado al lenguaje simbólico.

Problema nº3) - Problema de contexto real. Se trata de un problema de mezclas. En clase se han trabajado este tipo de problemas y se les ha indicado el procedimiento más sencillo construyendo tablas con los datos para poder pasar correctamente los datos del enunciado a ecuaciones. Se espera que los alumnos construyan esta tabla que han aprendido a hacer.

Una vez planteado el problema, se encontrarán con dificultades relacionadas con los decimales que aparecen en las ecuaciones.

9.4. Resultados

En primer lugar analizamos los resultados obtenidos en los dos cuestionarios y seguidamente los resultados obtenidos por actividades.

9.4.1- Resultados generales de los cuestionarios

Cuestionario 1- Ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Como se ha comentado anteriormente, el ejercicio 2 que aparece en los resultados y en el análisis general, no entrará posteriormente en el análisis detallado, puesto que se trata de un ejercicio de la siguiente unidad didáctica sobre la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones. A continuación se adjunta la tabla de resultados del cuestionario de 2º ESO B.

Alumno	**P1** (2.5 ptos)	**P2** (1 pto)	**P3** (2.5 ptos)	**P4** (1 pto)	**P5** (1 pto)	**P6** (1 pto)	**P7** (1 pto)	**TOTAL**
A1	1,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,30	0,00	2,30
A2	2,00	1,00	0,65	0,00	0,00	0,00	0,90	4,55
A3	1,40	0,70	0,90	0,00	0,00	0,00	0,00	3,00
A4	1,50	0,85	1,75	1,00	1,00	0,00	0,90	7,00
A5	1,80	0,40	1,65	0,00	0,25	0,00	0,00	4,10
A6	1,90	1,00	1,90	0,00	0,20	0,40	0,60	6,00
A7	1,85	0,50	0,50	0,00	0,80	0,00	0,00	3,65
A8	1,00	0,40	1,00	1,00	0,30	0,00	0,90	4,60
A9	0,75	0,00	0,50	0,15	0,90	0,00	0,90	3,20
A10	2,50	0,50	1,65	1,00	0,90	0,00	0,50	7,05
A11	2,50	1,00	2,05	0,90	0,90	0,00	1,00	8,35
A12	1,50	0,90	1,55	0,00	0,80	0,00	0,00	4,75
A13	2,35	0,00	1,40	0,00	0,00	0,00	0,00	3,75
A14	1,50	0,00	0,90	0,00	0,00	0,00	0,90	3,30
A15	2,30	1,00	1,80	0,50	0,90	0,00	1,00	7,50
A16	1,35	0,00	1,40	0,15	0,00	0,90	0,00	3,80
A17	1,50	0,65	1,50	1,00	0,90	0,00	0,90	6,45
A18	2,30	0,50	2,00	0,00	0,00	0,00	0,30	5,10
A19	2,50	1,00	2,10	1,00	0,70	0,00	0,00	7,30
A20	2,50	1,00	2,25	1,00	0,90	0,00	1,00	8,65
A21	2,20	1,00	1,25	0,30	0,85	1,00	0,90	7,50
Media	**1,84**	**0,61**	**1,37**	**0,38**	**0,49**	**0,12**	**0,51**	**5,33**

Tabla 26: Resultados cuestionario 1 - 2ºESO B

A continuación se adjunta la tabla de resultados del cuestionario en 2º ESO AB

Alumno	**P1** (2.5 ptos)	**P2** (1 pto)	**P3** (2.5 ptos)	**P4** (1 pto)	**P5** (1 pto)	**P6** (1 pto)	**P7** (1 pto)	**TOTAL**
A1	2,50	1,00	1,90	0,00	1,00	1,00	0,75	8,15
A2	1,00	1,00	1,30	0,30	0,65	0,00	1,00	5,25
A3	2,50	0,85	2,30	0,75	0,90	1,00	0,85	9,15
A4	0,50	0,50	1,30	0,00	0,00	0,00	0,20	2,50
A5	2,00	0,00	2,45	1,00	0,80	0,00	0,75	7,00
A6	0,00	0,00	1,25	0,30	0,40	0,90	0,15	3,00
A7	2,25	0,90	1,60	0,00	0,90	0,00	0,00	5,65
A8	2,00	0,25	1,90	0,00	0,90	0,85	0,00	5,90
A9	2,50	1,00	2,50	1,00	1,00	1,00	1,00	10,00
A10	2,00	0,25	1,30	0,75	0,00	0,00	0,00	4,30
A11	1,85	1,00	2,30	0,60	1,00	1,00	0,00	7,75
A12	2,00	0,25	0,80	1,00	1,00	0,00	0,60	5,65
A13	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	0,25	0,00	1,75
A14	1,25	0,85	2,40	0,00	0,00	0,00	0,00	4,50
A15	0,50	0,25	1,15	0,00	0,90	0,00	0,20	3,00
A16	1,75	1,00	1,25	0,30	0,65	0,00	0,20	5,15
A17	2,50	1,00	1,05	0,75	0,70	0,00	0,00	6,00
A18	1,00	1,00	1,75	1,00	0,90	0,00	0,90	6,55
A19	1,50	0,75	1,50	0,75	0,90	0,00	1,00	6,40
A20	2,00	0,55	1,50	0,75	0,90	0,00	0,90	6,60
Media	**1,63**	**0,62**	**1,59**	**0,46**	**0,69**	**0,3**	**0,43**	**5,71**

Tabla 27: resultados cuestionario 1 - 2ºESO AB

Cuestionario 2 - Sistemas de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Adjuntamos calificaciones de los alumnos de 2º ESO B:

Alumno	**P5** (1 pto)	**P6** (1,25 ptos)	**P7** (1 pto)	**P8** (1,25 ptos)	TOTAL /4.5	**TOTAL / 10**
A1	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	2,22
A3	0,00	1,00	0,75	0,25	2,00	4,44
A4	0,00	0,50	0,00	0,75	1,25	2,78
A5	1,00	1,15	1,00	1,15	4,30	9,56
A6	0,75	0,90	0,50	0,25	2,40	5,33
A7	0,75	0,30	0,90	0,00	1,95	4,33
A8	0,75	0,90	0,75	0,00	2,40	5,33
A9	1,00	0,80	1,00	0,00	2,80	6,22
A10	0,65	0,75	0,00	0,00	1,40	3,11
A11	0,00	1,25	1,00	0,25	2,50	5,56
A12	1,00	1,25	1,00	1,25	4,50	10,00
A13	0,75	0,75	1,00	0,00	2,50	5,56
A14	0,00	0,50	0,65	0,00	1,15	2,56
A15	1,00	1,10	1,00	0,25	3,35	7,44
A16	1,00	1,15	1,00	1,25	4,40	9,78
A17	1,00	0,30	1,00	0,00	2,30	5,11
A18	1,00	1,00	0,75	0,00	2,75	6,11
A19	1,00	1,15	1,00	0,00	3,15	7,00
A20	1,00	1,25	1,00	1,25	4,50	10,00
A21	1,00	1,25	1,00	1,25	4,50	10,00
A22	1,00	1,00	1,00	0,00	3,00	6,67
Nota media	**0,70**	**0,92**	**0,78**	**0,38**	**2.64**	**5.86**

Tabla 28: resultados cuestionario 2 - 2ºESO B

Adjuntamos calificaciones de los alumnos de 2º ESO AB:

Alumno	**P5** (1 pto)	**P6** (1,25 ptos)	**P7** (1 pto)	**P8** (1,25 ptos)	TOTAL /4.5	**TOTAL / 10**
A1	1,00	1,25	1,00	1,25	4,50	10,00
A2	1,00	1,10	1,00	0,00	3,10	6,89
A3	1,00	1,10	1,00	1,25	4,35	9,67
A4	0,00	0,50	0,70	0,00	1,20	2,67
A5	1,00	1,25	0,50	1,25	4,00	8,89
A6	0,75	0,50	0,35	0,00	1,60	3,56
A7	1,00	1,25	1,00	0,00	3,25	7,22
A8	0,00	1,25	1,00	0,00	2,25	5,00
A9	1,00	1,25	1,00	1,25	4,50	10,00
A10	1,00	0,30	0,75	1,00	3,05	6,78
A11	1,00	0,75	1,00	0,50	3,25	7,22
A12	1,00	1,10	1,00	0,00	3,10	6,89
A13	0,00	0,50	0,30	0,00	0,80	1,78
A14	1,00	1,00	1,00	0,85	3,85	8,56
A15	0,75	0,50	0,30	0,00	1,55	3,44
A16	1,00	1,25	1,00	0,00	3,25	7,22
A17	0,75	0,40	0,00	0,00	1,15	2,56
A18	0,30	1,10	1,00	0,00	2,40	5,33
A19	0,75	1,00	0,75	0,00	2,50	5,56
A20	0,50	1,25	0,00	0,00	1,75	3,89
Nota Media	**0,74**	**0,93**	**0,73**	**0,37**	**2,77**	**6,16**

Tabla 29: resultados cuestionario 2 - 2ºESO AB

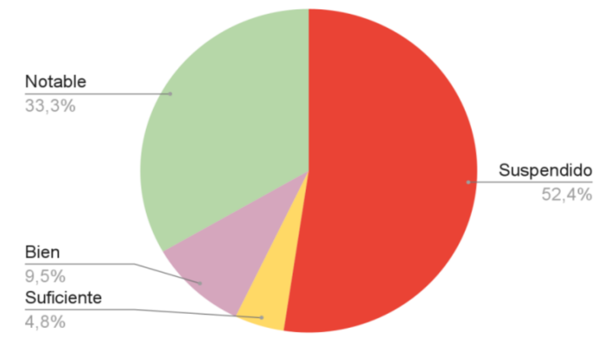
Se establece el siguiente rango de calificaciones según el valor numérico de la nota:

- Suspendido: alumnos con una calificación entre 0-4.99
- Suficiente: alumnos con una calificación entre 5.00-5.99
- Aprobado: alumnos con una calificación entre 6.00 - 6.99
- Notable: alumnos con una calificación entre 7.00-8.99
- Sobresaliente: alumnos con una calificación entre 9.00 - 10.00

Resumen global de los resultados obtenidos - <u>Cuestionario 1</u> -2º ESO B

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	11
Suficiente, 5.00-5.90	1
Bien, 6.00-6.90	2
Notable 7.00-8.90	7
Sobresaliente 9.00-10.00	0

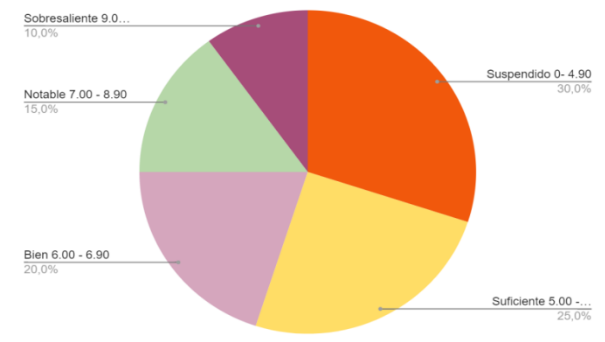
Nota media: 5.33
Por debajo objetivo mínimo 52.38%



Resumen global de los resultados obtenidos - <u>Cuestionario 1</u> - 2º ESO AB

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	6
Suficiente, 5.00-5.90	5
Bien, 6.00-6.90	4
Notable 7.00-8.90	3
Sobresaliente 9.00-10.00	2

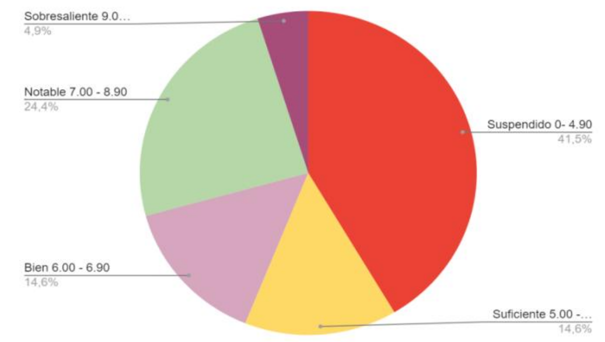
Nota media: 5.71
Por debajo objetivo mínimo 30.00%



Resumen global de los resultados obtenidos - <u>Cuestionario 1</u> - 2º ESO AB y 2ºESO B

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	17
Suficiente, 5.00-5.90	6
Bien, 6.00-6.90	6
Notable 7.00-8.90	10
Sobresaliente 9.00-10.00	2

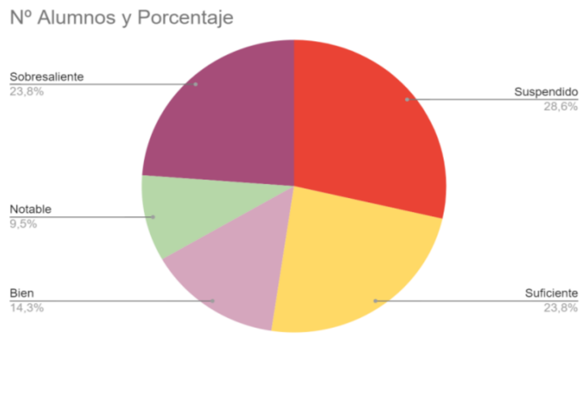
Nota media: 5.52
Por debajo objetivo mínimo 41.46%



Resumen global de los resultados obtenidos - __Cuestionario 2__ - 2º ESO B

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	6
Suficiente, 5.00-5.90	5
Bien, 6.00-6.90	3
Notable 7.00-8.90	2
Sobresaliente 9.00-10.00	5

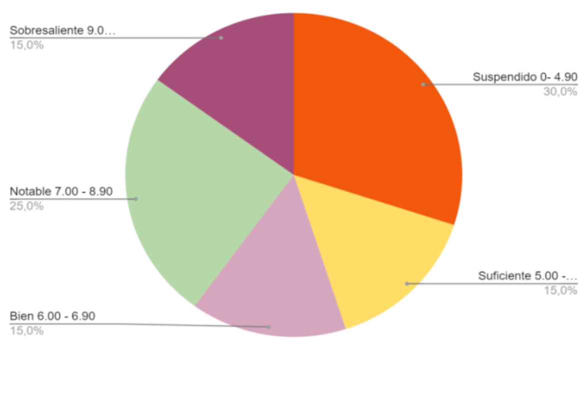
Nota media: 5.86
Por debajo objetivo mínimo 28.57%



Resumen global de los resultados obtenidos - __Cuestionario 2__ - 2º ESO AB

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	6
Suficiente, 5.00-5.90	3
Bien, 6.00-6.90	3
Notable 7.00-8.90	5
Sobresaliente 9.00-10.00	3

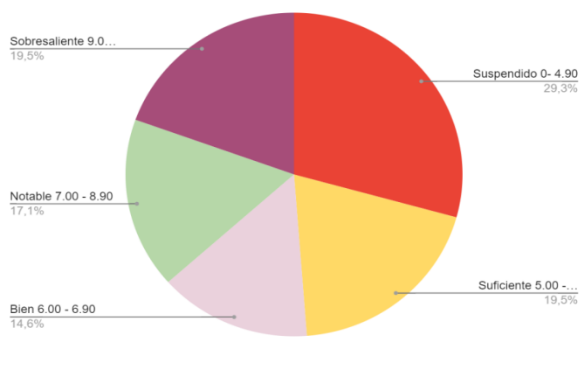
Nota media: 6.16
Por debajo objetivo mínimo 30.00%



Resumen global de los resultados obtenidos - __Cuestionario 2__ - 2º ESO AB y 2ºESO B

Calificación Alumno	Nº Alumnos
Suspendido, 0-4.90	12
Suficiente, 5.00-5.90	8
Bien, 6.00-6.90	6
Notable 7.00-8.90	7
Sobresaliente 9.00-10.00	8

Nota media: 6.01
Por debajo objetivo mínimo 29.27%



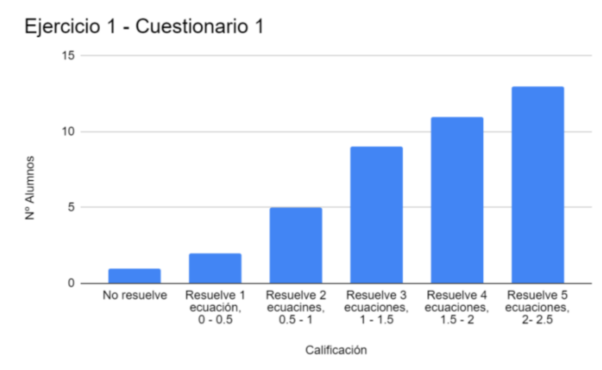
9.4.2- Resultados por actividades.

<u>Cuestionario 1 - Resultados obtenidos por los cursos de 2º ESO AB y 2ºESO B</u>

Ejercicio 1: El ejercicio 1 consta de 5 ecuaciones y se ha establecido el siguiente baremo en la calificación:

- El alumno no resuelve ninguna ecuación - 0
- El alumno resuelve una ecuación, 0 - 0.5
- El alumno resuelve 2 ecuaciones, 0.5 - 1.00
- El alumno resuelve 3 ecuaciones, 1.00 - 1.50
- El alumno resuelve 4 ecuaciones, 1.50 - 2.00
- El alumno resuelve 5 ecuaciones, 2.00 - 2.5

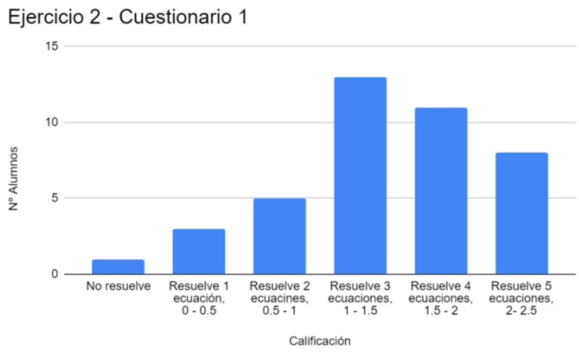
Ejercicio 1 - Cuestionario 1	
Calificación Alumno	Nº Alumnos
No resuelve	1
Resuelve 1 ecuación, 0 - 0.5	2
Resuelve 2 ecuaciones,0.5 - 1	5
Resuelve 3 ecuaciones, 1 - 1.5	9
Resuelve 4 ecuaciones, 1.5 - 2	11
Resuelve 5 ecuaciones, 2- 2.5	13



Ejercicio 2: consta de 5 ecuaciones de 2º grado y se ha establecido el siguiente baremo en la calificación:

- El alumno no resuelve ninguna ecuación - 0
- El alumno resuelve una ecuación, 0 - 0.5
- El alumno resuelve 2 ecuaciones, 0.5 - 1.00
- El alumno resuelve 3 ecuaciones, 1.00 - 1.50
- El alumno resuelve 4 ecuaciones, 1.50 - 2.00
- El alumno resuelve 5 ecuaciones, 2.00 - 2.5

Ejercicio 2 - Cuestionario 2	
Calificación	Nº Alumnos
No resuelve	1
Resuelve 1 ecuación, 0 - 0.5	3
Resuelve 2 ecuaciones, 0.5 - 1	5
Resuelve 3 ecuaciones, 1 - 1.5	13
Resuelve 4 ecuaciones, 1.5 - 2	11
Resuelve 5 ecuaciones, 2- 2.5	8



Problemas

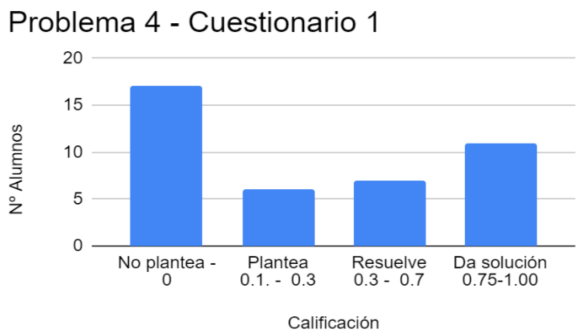
Los problemas del cuestionario 1 se han valorado todos con el siguiente baremo:

- El alumno no plantea - 0
- Plantea la ecuación , 0 - 0.3
- Resuelve la ecuación , 0.3 - 0.75
- Da solución al problema, 0.75 - 1.00

Adjuntamos los resultados para cada problema en función de hasta dónde haya podido llegar cada alumno, tema que es importante conocer puesto que nos indicará el tipo de error cometido en relación al tipo de problema que se les plantea de forma que veremos cuáles son sus mayores dificultades en la resolución.

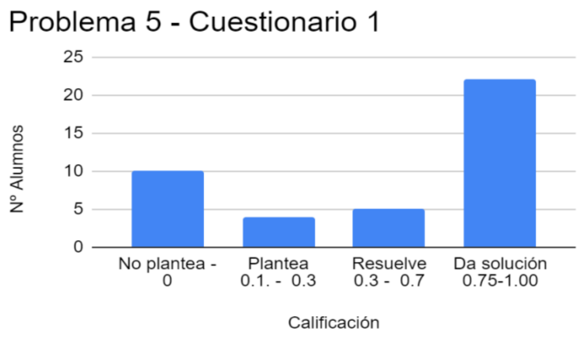
- *Problema 4*

Problema 4 - Cuestionario 1	
Calificación Alumno	Nº Alumnos
No plantea - 0	17
Plantea 0.1. - 0.3	6
Resuelve 0.3 - 0.7	7
Da solución 0.75-1.00	11



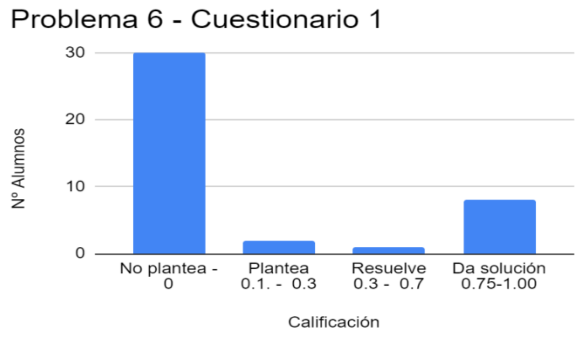
- *Problema 5*

Problema 5- Cuestionario 1	
Calificación Alumno	Nº Alumnos
No plantea - 0	10
Plantea 0.1. - 0.3	4
Resuelve 0.3 - 0.7	5
Da solución 0.75-1.00	22



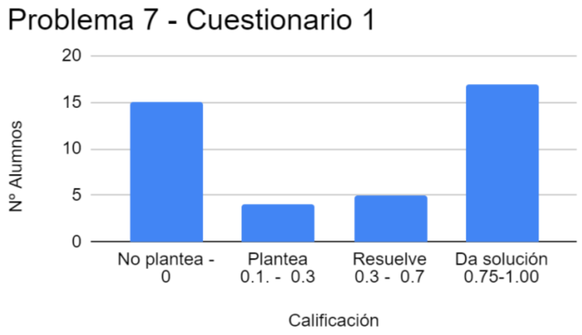
- *Problema 6*

Problema 6 - Cuestionario 1	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	30
Plantea 0.1. - 0.3	2
Resuelve 0.3 - 0.7	1
Da solución 0.75-1.00	8



- *Problema 7*

Problema 7 - Cuestionario 1	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	15
Plantea 0.1. - 0.3	4
Resuelve 0.3 - 0.7	5
Da solución 0.75-1.00	17



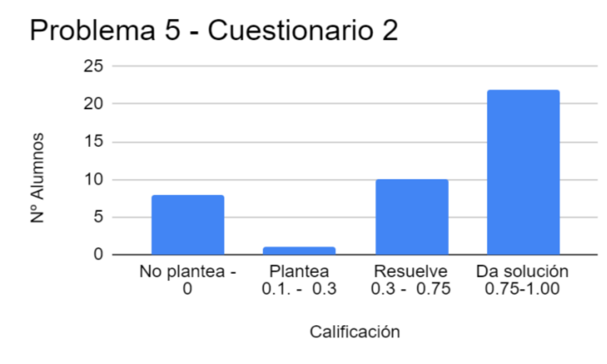
Cuestionario 2

Los problemas del cuestionario 2 se han valorado cada uno de ellos con un baremo distinto atendiendo a su dificultad particular.

Problema 5

- El alumno no plantea - 0
- Plantea un sistema , 0 - 0.3
- Resuelve el sistema, 0.3 - 0.75
- Da solución al problema, 0.75 - 1.00

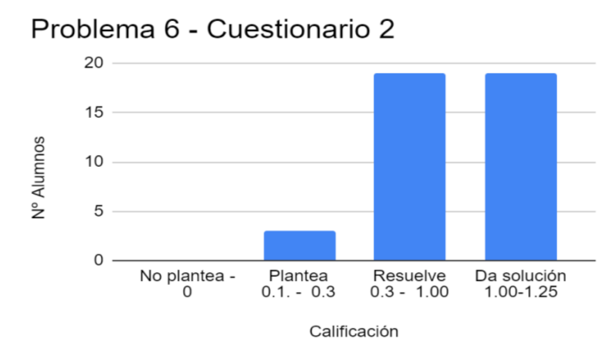
Problema 5 - Cuestionario 2	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	8
Plantea 0.1. - 0.3	1
Resuelve 0.3 - 0.75	10
Da solución 0.75-1.00	22



Problema 6

- El alumno no plantea - 0
- Plantea un sistemas , 0 - 0.30
- Resuelve el sistema , 0.30 - 1.00
- Da solución al problema, 1.00 - 1.25

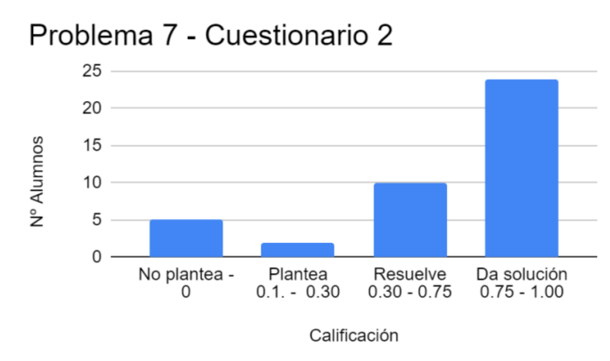
Problema 6 - Cuestionario 2	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	0
Plantea 0.1. - 0.3	3
Resuelve 0.3 - 1.00	19
Da solución 1.00-1.25	19



Problema 7

- El alumno no plantea - 0
- Plantea un sistema , 0 - 0.3
- Resuelve el sistema , 0.3 - 0.75
- Da solución al problema, 0.75 - 1.00

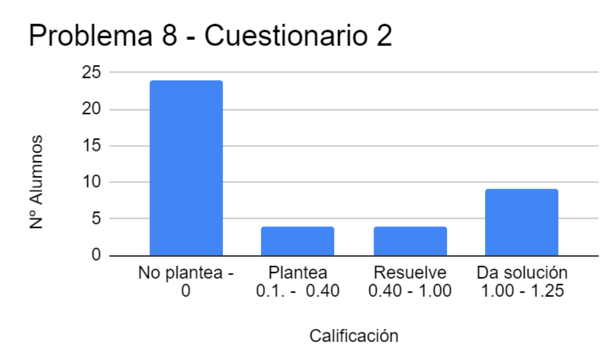
Problema 7 - Cuestionario 2	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	5
Plantea 0.1. - 0.30	2
Resuelve 0.30 - 0.75	10
Da solución 0.75 - 1.00	24



Problema 8

- El alumno no plantea - 0
- Plantea la ecuación 0 - 0.40
- Resuelve la ecuación 0.40 - 1.00
- Da solución al problema, 1.00 - 1.25

Problema 8 - Cuestionario 2	
Calificación	Nº Alumnos
No plantea - 0	24
Plantea 0.1. - 0.40	4
Resuelve 0.40 - 1.00	4
Da solución 1.00 - 1.25	9



9.5. Discusión de los resultados

A partir de los resultados obtenidos y de los objetivos y comportamientos esperados que han sido analizados en los apartados anteriores de este capítulo, realizamos un análisis de los resultados globales así como de los resultados por actividades en ambos cuestionarios.

9.5.1. Discusión de los resultados globales.

Analizando los resultados del cuestionario 1, vemos que la media del grupo de 2ºAB es de 5.71 mientras que la media de 2ºB es un poco inferior, siendo de 5.33. Es una media que sitúa a los alumnos justamente en el rango del aprobado. Teniendo en cuenta que el cuestionario tenía un número de ejercicios y problemas que por su dificultad era esperable que los alumnos hubiesen realizado correctamente obteniendo una calificación mínima de 5, se puede comprobar que, en general, los alumnos poseen unos conocimientos que les permiten superar estos objetivos mínimos, pero no obtener unos resultados notables.

Es remarcable que en 2º B no hay ningún estudiante que haya obtenido resultados sobresalientes y que un 52.3% del alumnado no supere los objetivos mínimos marcados para el cuestionario; es un porcentaje demasiado elevado reflejo de la dificultad que les supone trabajar el álgebra.

Por otra parte, en el grupo de 2º AB hay dos alumnos que han obtenido notas sobresalientes y el porcentaje de alumnos que no superan los objetivos mínimos marcados en el cuestionario desciende hasta un 30% del alumnado.

Estos resultados por clases, se ajustan a lo esperable por el docente, siendo el grupo de 2ºAB el que tiene un conjunto de alumnos más trabajador, un mejor comportamiento y un mejor rendimiento académico. En el grupo de 2ºB los resultados son peores y en general, es un grupo con un rendimiento académico más bajo.

En cuanto al cuestionario 2, que es un reflejo de la evolución de los alumnos relativos al álgebra, vemos que el grupo de 2ºB mejora su media hasta 5.86 y el grupo de 2ºAB hasta un 6.16.

El dato quizás más importante es ver como el número de alumnos por debajo de los objetivos mínimos desciende del 52.38% hasta el 28.57% en 2ºB y se mantiene en el 30% en 2ºAB. Puede ser un reflejo de que ha mejorado el conocimiento de los contenidos, de que los han trabajado durante más tiempo y más profundamente y que el manejo del lenguaje algebraico es mejor a medida que lo trabajan y se familiarizan con él.

9.5.1. Discusión de los resultados por actividades

Cuestionario 1 - Ejercicio 1

Para este ejercicio los alumnos tienen que resolver ecuaciones de primer grado. Como hemos visto, analizando el currículo, son contenidos ya trabajados en el curso anterior y vueltos a trabajar a lo largo de este curso. Los resultados, siendo 33 alumnos los que resuelven 3 de 5 ecuaciones, son muestra de que los alumnos conocen los métodos de resolución, los conocimientos están asentados y resuelven las ecuaciones con consistencia y facilidad en su mayoría. Hay 33 alumnos que superan las dificultades previstas, y resuelven las ecuaciones más complicadas que se les han presentado.

En este ejercicio, el grupo más numeroso de alumnos es aquel que resuelve 5 ecuaciones correctamente, siendo 8 alumnos de 41.

Cuestionario 1 - Ejercicio 2

Los alumnos tienen que resolver ecuaciones de segundo grado. En este caso se trata de un contenido nuevo para el curso de 2º ESO.

En esta ocasión la mayoría de alumnos, 32, resuelve entre 3 y 5 ecuaciones. Coinciden con los resultados obtenidos para el primer ejercicio, lo cual nos puede hacer pensar que la resolución de ecuaciones de 2º grado no les resulta complicada.

Es importante ver cómo se distribuyen los datos. El grupo mayoritario en este caso, 9 alumnos, es el grupo de alumnos que resuelve 3 ecuaciones. Luego va decreciendo el número de alumnos que resuelven 4, y un poco menos los que resuelven 5. Cabe presuponer, que al tratarse del primer año en el que se trabaja la resolución de ecuaciones de 2º grado, hay una parte del alumnado que no supera las dificultades y errores previstos de las ecuaciones más complicadas, pero que al volverse a trabajar al siguiente año, los resultados progresaron hasta encontrarse el grupo más numeroso con aquellos que resuelven 5 ecuaciones como sucede con las ecuaciones de primer grado.

Cuestionario 1 - Problemas

Analizando los resultados de los problemas del cuestionario 1 vemos que el error más recurrente, siendo el mayoritario en 3 de los 4 problemas, es que los alumnos no son capaces de plantear la ecuación de resolución a partir del enunciado del problema. Son errores previsibles asociados a la incapacidad de los alumnos para encontrar en el lenguaje simbólico herramientas para plantear la ecuación de resolución. Llega a su punto álgido en el problema relativo a las edades, en el que 30 de 41 alumnos no han sido capaces de plantear el problema.

Una vez planteado y superada la máxima dificultad, los alumnos mayoritariamente no tienen problemas en resolver puesto que las ecuaciones a las que llegan son más sencillas de las que ya saben resolver con facilidad.

Al finalizar el problema, nos encontramos con que entre los alumnos que han planteado y resuelto la ecuación correctamente, son muchos aquellos que no saben o no consideran importante expresar la solución correcta y con sentido a lo que realmente se les está preguntando. Dentro de la horquilla del 0.75-1.00, analizados los cuatro problemas, hay 32 alumnos con la puntuación máxima de 1 que indica que han dado la solución correctamente y 24 alumnos que cometen algún tipo de error dando la solución. Es decir, los alumnos resuelven los problemas, dan un valor a su incógnita y a veces no van más allá, no utilizan su sentido crítico para expresar una solución con sentido y comenten errores en las unidades o no responden a lo que realmente se les está preguntando; fallan en dar la solución al problema.

Cuestionario 2 - Problemas

Al analizar los resultados de los problemas del cuestionario 2, vemos que los alumnos que han fallado en el planteamiento de los problemas ha descendido considerablemente excepto en el problema relativo a las mezclas que sucede igual que en el del cuestionario 1 referido a las edades, en el que son mayoría los que no han sido capaces de plantear el sistema de resolución con 24 alumnos de 41. Visto el proceso de aprendizaje, en el aula los alumnos planteaban muchas dudas en la resolución de este tipo de problemas porque principalmente parecían no entender los enunciados, lo cual hace bastante complicado traducirlos al lenguaje simbólico. Puede ser, que los más trabajadores hayan memorizado cómo realizar las tablas según la metodología vista en clase para plantear el problema, y puede ser que muchos de ellos ante la incapacidad de entenderlos no lo hayan ni siquiera intentado.

En este cuestionario los resultados obtenidos en los problemas son mucho mejores que en el anterior cuestionario. Es verdad que los alumnos han tenido tiempo de realizar actividades para profundizar en la traducción algebraica y esto, acompañado de que los enunciados que se les plantean cuando los problemas se deben resolver con sistemas de ecuaciones son más sencillos, hace que en esta ocasión sí poseen herramientas algebraicas para plantear los problemas.

Al finalizar los problemas, si que se muestra una evolución clara en los alumnos a la hora de expresar la solución correctamente. En este caso, entre los alumnos que han sabido plantear y resolver los problemas, son mayoría aquellos que una vez que han superado todas las etapas dan una solución correcta y precisa a lo que realmente se les está preguntando siendo 64 respuestas correctas a la solución de los problemas, frente a 28 alumnos que superadas las etapas del problema no dan una solución correcta. Hay una clara evolución en el aprendizaje de los alumnos que les lleva a una mejoría en la resolución de los problemas.

Síntesis, conclusiones y preguntas abiertas.

Síntesis

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo el análisis de un proceso de estudio de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas en un grupo de alumnos de 2º curso de Educación Secundaria.

Con este fin, en una primera parte se realiza un análisis teórico longitudinal de la normativa vigente referente al tema tratado y su correspondencia en los libros de texto utilizados en el aula, analizando las ausencias y presencias de contenidos así como la coherencia existente entre ambos.

A continuación, se desarrolla una segunda parte basada en la experimentación de dicho proceso de estudio en las aulas de 2º ESO del colegio de Santa Teresa en el marco del Practicum II. A partir del estudio del material didáctico utilizado, de las dificultades y errores a los que los alumnos van a enfrentarse a lo largo del proceso de aprendizaje llevado a cabo y detallado en estas páginas, se recogen una serie de datos experimentales a partir de los cuales se plantean una serie de actividades complementarias con el fin de ayudar a superar dificultades y evitar errores, realizando posteriormente un análisis y discusión de los resultados obtenidos.

Conclusiones

Al concluir el presente trabajo, se puede llegar a una serie de conclusiones importantes relativas al álgebra y a su proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Con el fin de que el estudio del álgebra sea coherente y los nuevos contenidos se formen en los alumnos apoyándose en los anteriores, el álgebra aparece de una forma continua en el currículo y en los libros de texto de todos los años analizados. Un alumno en su proceso de formación matemática, trabaja el álgebra desde la última etapa de Educación Primaria, a lo largo de toda la ESO y termina en Bachiller, sin que en ninguno de estos años el álgebra esté ausente.
- En cada uno de estos años el álgebra va apareciendo de forma espiral, de manera que el alumno, para ampliar los conocimientos vuelve a los ya adquiridos en etapas anteriores, para poder revisar las conclusiones y los conocimientos a los que ya había llegado previamente.
- A pesar de esta coherencia entre currículo y libros de texto analizados en cuanto a contenidos, estos últimos, en ocasiones, incluyen los contenidos en años diferentes a lo marcado oficialmente en el currículo, adelantando o retrasando ligeramente su aparición. Dan a los problemas bastante presencia respetando la importancia dada a éstos en el currículo, pero existe una contextualización de los mismos excesivamente matemática y en ocasiones su dificultad y la manera de presentarlos hace que estén más próximos a un ejercicio que a un problema matemático.
- En base a los resultados obtenidos experimentalmente en el proceso de estudio realizado, se ha podido comprobar, que el estudio del álgebra es sumamente

complicado para los alumnos. Se enfrentan, en esta parte de las matemáticas, a la necesidad de utilizar el lenguaje simbólico como herramienta de trabajo, pasar de lo concreto a lo general y ser capaces de realizar operaciones con las expresiones algebraicas generadas.

- Estas dificultades y errores asociados al álgebra, que conocemos previamente y que ratificamos experimentalmente, nos permiten profundizar en aquellos aspectos más complicados y llegar a mejorar sus resultados, qué es realmente el objetivo de todo proceso de enseñanza-aprendizaje.

Preguntas abiertas.

Analizado el currículo y los libros de texto, el hecho de que las editoriales presenten contenidos que no aparecerán en el currículo hasta el año siguiente o, bien al contrario, esperen un año para presentar un contenido que ya debería aparecer, provoca que los centros se vean en la obligación de trabajar con una editorial desde el principio hasta el final de una etapa. Es por ello, que me pregunto, si el momento en el que los contenidos aparecen en el currículo y en los libros de texto, no debería corresponderse plenamente, concediendo de esta manera a los centros la capacidad de decidir la editorial con la que quieren trabajar cada curso y no la editorial con la que deben trabajar una etapa completa, como sucede en este caso.

Respecto a la parte experimental de este trabajo que me ha permitido estar presente en el aula, ser en ocasiones observador y en ocasiones parte del proceso, conocer y disfrutar de un grupo de alumnos, me lleva realmente a preguntarme cómo es posible que parte de estos alumnos al terminar el bloque correspondiente al álgebra me transmitan que se sienten “contentos y aliviados de por fin terminar el tema”. Y me pregunto si este alivio está solamente ligado al álgebra y a su dificultad o es un sentimiento general que acompaña a las matemáticas.

Referencias

Boletín Oficial de Navarra (2014). Decreto Foral 60/2014**,** de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 174, de 5 de septiembre, Anexo I 41-57),

Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 24/2015**,** de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 127, de 2 de julio, 44-57).

Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 25/2015**,** de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 127, de 2 de julio, 81-90),

Chamorro M. y Vecino F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En: Chamorro, M (2003). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Cap. 9.Pearson Educación. Madrid. 273-299.

Godino J. D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2006). "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta" (2006).

Ferrero, P. L., Gaztelu I. (2010). Matemáticas 6 primaria. Editorial: ANAYA.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. (2012). Educación Secundaria Matemáticas 1. Editorial: ANAYA

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. (2012). Educación Secundaria Matemáticas 2. Editorial: ANAYA

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. (2012). Educación Secundaria Matemáticas 3. Editorial: ANAYA

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. (2012). Educación Secundaria Matemáticas 4. Editorial: ANAYA

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), Algebraic Thinking, Grades K-12, 328-340

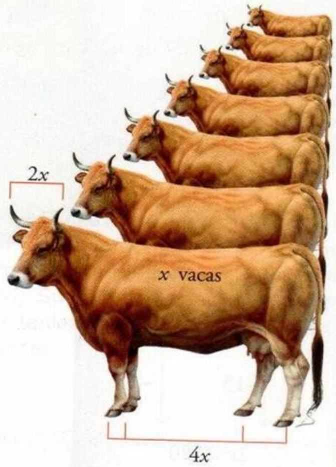
Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Actividad 1 - Pirámides algebraicas.
C. Actividad 2 - Dominó algebraico.
D. Actividad 3 - Taller de problemas

A. Unidad didáctica del libro de texto.

1 Ecuaciones: significado y utilidad



Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre c tidades cuyo valor, de momento, no conocemos.

Esas cantidades se representan con letras.

Ejemplos

- En el establo, entre cuernos y patas, he contado 28:

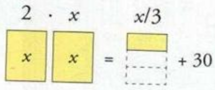
$$\left.\begin{array}{l}\text{Vacas} \rightarrow x \\ \text{Cuernos} \rightarrow 2x \\ \text{Patas} \rightarrow 4x\end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow 2x + 4x = 28$$

- Raquel tuvo a su hijo Daniel a los 26 años y en la actualidad triplica su edac

$$\left.\begin{array}{l}\text{Edad de Raquel} \rightarrow x \\ \text{Edad de Daniel} \rightarrow x - 26\end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow x = 3 \cdot (x - 26)$$

- La luna de un escaparate es un metro más larga que ancha y su superficie mi 3,75 m^2:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ancho} \rightarrow x \\ \text{Largo} \rightarrow x + 1\end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow x \cdot (x + 1) = 3{,}75$$



- El doble de un número es igual a su tercera parte más treinta unidades:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El número} \rightarrow x \\ \text{Su doble} \rightarrow 2x \\ \text{Su tercera parte} \rightarrow \frac{x}{3}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuación} \rightarrow 2x = \frac{x}{3} + 30$$

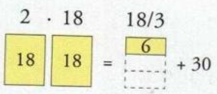
Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir d ahí, manejarlas matemáticamente. Eso, como comprobarás más adelante, supon una **potentísima herramienta para resolver problemas.**

Pero antes, debes aprender a resolverlas.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo



En la ecuación del último ejemplo, $2x = \frac{x}{3} + 30$, la igualdad se cumple solamente para el valor $x = 18$.

$$\left.\begin{array}{l}2x = \frac{x}{3} + 30 \\ x = 18\end{array}\right\} \underbrace{2 \cdot 18}_{36} = \underbrace{\frac{18}{3} + 30}_{36}$$

Diremos, entonces, que la solución de la ecuación es $x = 18$.

136

Ecuaciones con infinitas soluciones y ecuaciones sin solución

- En la ecuación $0 \cdot x = 0$, cualquier valor que tome x hace cierta la igualdad.

$0 \cdot x = 0 \rightarrow$ **Tiene infinitas soluciones**

- En la ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no hay ningún valor de x, que haga cierta la igualdad.

$0 \cdot x = k \rightarrow$ **No tiene solución**

Resuelve ecuaciones "con lo que ya sabes"

Antes de aprender ninguna técnica específica, ten en cuenta que razonando con lo que ya sabes, o tanteando, puedes resolver muchas ecuaciones.

Ejemplos

- $5x - 20 = 0 \rightarrow$ Piensa primero: ¿A qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?

  Y, después: ¿Cuánto debe valer x?

- $\dfrac{4x+3}{5} = 3 \rightarrow$ Piensa primero: ¿Qué número dividido entre 5 da 3? ¿Cuál es el valor de $4x + 3$?

  Y, después: ¿Cuánto debe valer $4x$? ¿Cuánto debe valer x?

Piensa y practica

1. ¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades. (Número $\rightarrow x$)

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años. (Andrés $\rightarrow x$ años)

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros. (Ancho $\rightarrow x$ metros)

d) He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc. (Bloc $\rightarrow x$ euros)

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más. (Ciclista $\rightarrow x$ horas)

f) Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5. (Saltamontes $\rightarrow x$ metros)

$x + \dfrac{x}{3} = 20$	$2x + 2(x+3) = 30$	$15(x-1) = 5x$
$\dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} + 20$	$3x + 2x = 30$	$15x = 5(x+1)$

2. Resuelve en el orden en que aparecen.

a) $3x = 21$

b) $3x - 1 = 20$

c) $\dfrac{3x-1}{5} = 4$

d) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{5}} = 2$

3. Resuelve con lo que sabes.

a) $7x = 35$

b) $4x - 12 = 0$

c) $x + 3 = 10$

d) $2x - 4 = 6$

e) $\dfrac{x}{3} = 9$

f) $\dfrac{x-2}{2} = 5$

g) $\dfrac{x+1}{3} = 2$

h) $\dfrac{3x-4}{2} = 1$

i) $\dfrac{7}{x+1} = 1$

j) $\dfrac{10}{2x-3} = 2$

k) $x^2 + 1 = 26$

l) $\sqrt{3x+1} = 5$

4. Encuentra alguna solución por tanteo.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{8}{x} = 3$

d) $x^3 - \sqrt{x} = 0$

2 Ecuaciones: elementos y nomenclatura

- **Miembros de una ecuación:** son cada una de las expresiones que aparecen ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

PRIMER MIEMBRO — SEGUNDO MIEMBRO

$$\underbrace{3x + 1}_{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \underbrace{9 - x}_{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS: $3x$, 1, 9, x

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en la ecuación.

Ejemplos

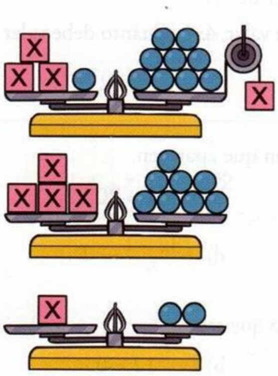
$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación con una incógnita, x.

$5x + 3y = y + 2 \rightarrow$ Ecuación con dos incógnitas, x e y.

- **Soluciones:** son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad se cierta.

Ejemplo

$$3x + 1 = 9 - x \begin{cases} x = 2 \text{ es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 \text{ no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 0 - 1. \end{cases}$$



- **Grado de una ecuación:** es el mayor de los grados de los monomios que for man los miembros, una vez reducida la ecuación.

Ejemplos

$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación de primer grado.

$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \rightarrow$ Ecuación de segundo grado.

- **Ecuaciones equivalentes:** dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la mismas incógnitas y las mismas soluciones.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x = 8 \end{array}\right\} \text{ Son equivalentes. Las dos tienen como solución } x = 2.$$

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) La ecuación $x^2 + 6x - x^2 = 7x - 1$ es de segundo grado.

b) La ecuación $2x + x \cdot y = 6$ es de segundo grado.

c) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

d) Una ecuación puede tener más de dos miembros.

e) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

f) La ecuación $x + 1 = 5$ es equivalente a la ecuación $x + 2 = 6$.

2. Copia en tu cuaderno y asocia cada ecuación con su solución:

$4x + 4 = 5$

$4x - 3 = x + 3$

$x^2 - 3 = 2x$

$3x = x + 1$

$\boxed{3}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{2}$

3. Agrupa las ecuaciones equivalentes.

a) $4x = 20$ b) $3x - 1 = 8$

c) $5x - 4 = x$ d) $3x = 9$

e) $4x - 5 = 15$ f) $4x - 4 = 0$

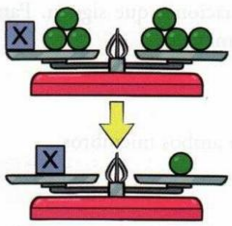
3 Transposición de términos

En la web
Practica las técnicas básicas de resolución de ecuaciones.

La transposición de términos es una técnica básica que permite transformar las ecuaciones en otras equivalentes más sencillas, llevando los términos de un miembro a otro de la igualdad.

La transposición de términos se basa en el siguiente principio:

Al sumar, restar, multiplicar o dividir el mismo número en los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.



■ **PRIMER CASO: $x + a = b$**

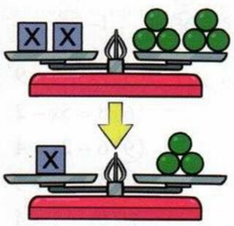
Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 = 4 \\ x = 4 - 3 \end{array}\right\} \text{Restamos 3 en ambos miembros.}$$

■ **SEGUNDO CASO: $x - a = b$**

Lo que está restando en un miembro pasa sumando al otro.

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 3 \\ x = 3 + 2 \end{array}\right\} \text{Sumamos 2 en ambos miembros.}$$



■ **TERCER CASO: $a \cdot x = b$**

Lo que está multiplicando en un miembro pasa dividiendo al otro.

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x = \dfrac{6}{2} \end{array}\right\} \text{Dividimos ambos miembros entre 2.}$$

■ **CUARTO CASO: $\dfrac{x}{a} = b$**

Lo que está dividiendo en un miembro pasa multiplicando al otro.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = 4 \\ x = 4 \cdot 3 \end{array}\right\} \text{Multiplicamos ambos miembros por 3.}$$

No lo olvides

$x + a = b \rightarrow x = b - a$

$x - a = b \rightarrow x = b + a$

$a \cdot x = b \rightarrow x = \dfrac{b}{a}$

$\dfrac{x}{a} = b \rightarrow x = b \cdot a$

La transposición de términos permite despejar la incógnita; es decir, dejarla sola en uno de los miembros de la igualdad, lo que equivale a resolver la ecuación.

Piensa y practica

1. Despeja la incógnita y calcula la solución.

a) $x + 2 = 5$ b) $x + 3 = 2$ c) $x - 1 = 5$

d) $x - 3 = 4$ e) $x - 1 = 1$ f) $3x = 6$

g) $5x = 15$ h) $\dfrac{x}{2} = 1$ i) $\dfrac{x}{5} = 3$

2. Resuelve transponiendo elementos.

a) $3x = 12$ b) $x - 4 = 6$ c) $\dfrac{x}{3} = 2$

d) $x + 4 = 3$ e) $6 + x = 7$ f) $5 - x = 0$

g) $4 = \dfrac{x}{2}$ h) $18 = 3x$ i) $4 = x + 2$

En la web Practica la transposición de términos en una ecuación.

4 Resolución de ecuaciones sencillas

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediant sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

Analiza los siguientes ejemplos y resuelve las ecuaciones que siguen. Para qu puedas evaluar tu trabajo, tienes las soluciones al margen.

Ejemplo 1

TRANSPONER $2x - 5 = 3$ Sumamos 5 en ambos miembros.

$2x = 3 + 5$

REDUCIR

$2x = 8$ Dividimos ambos miembros entre 2.

TRANSPONER

$x = \dfrac{8}{2}$

REDUCIR

$x = 4$

Recuerda

- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- La ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no tiene solución.

Soluciones

1 1	2 1	3 2
4 –2	5 1	6 2
7 –4	8 3	9 1
10 –1	11 2/3	12 –1/3
13 –1/2	14 I. S.(*)	15 S. S.(**)

(*) → I. S. (infinitas soluciones).

(**) → S. S. (sin solución).

■ **PRACTICA**

1 $2x - 1 = 1$	2 $5x - 3 = 2$	3 $7x - 5 = 9$
4 $10 + 3x = 4$	5 $2x - 3 = -1$	6 $8 = 5x - 2$
7 $0 = 3x + 12$	8 $5 - x = 2$	9 $6 - 2x = 4$
10 $4 - 5x = 9$	11 $3x - 1 = 1$	12 $4 = 3x + 5$
13 $5 = 4x + 7$	14 $0x + 2 = 2$	15 $0x + 1 = 4$

En la web

Actividades guiadas para afianzar la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 2

$5x + 1 - 3x = 7$

R

$2x + 1 = 7$

T

$2x = 7 - 1$

R

$2x = 6$

T

$x = \dfrac{6}{2}$

R

$x = 3$

Ejemplo 3

$4x - x + 3 = 7 - 5$

R

$3x + 3 = 2$

T

$3x = 2 - 3$

R

$3x = -1$

T

$x = \dfrac{-1}{3}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

Soluciones

16 1	17 3	18 –2
19 2	20 –4	21 1/2
22 –3	23 –1	24 1
25 0	26 1/5	27 –4
28 3/4	29 I. S.	30 S. S.

■ **PRACTICA**

16 $8x - 4 + x = 5$	17 $5x - 8 - x = 7 - 3$	18 $3x + 10 + x = 2$
19 $7x - 2x - 3 = 7$	20 $3x + 15 + 2x = -5$	21 $5 + 2x + 1 = 7$
22 $5 - x + 2 = 10$	23 $7x + 3 - 9x = 5$	24 $5 - 1 = x + 5 - 2x$
25 $1 = x + 1 + 2x$	26 $4 = x + 5 - 6x$	27 $9 = 4x + 1 - 6x$
28 $5 = 3x - 1 + 5x$	29 $7x + 2 - 7x = 3 - 1$	30 $5x + 3 - 5x = 7$

140

A medida que las ecuaciones se complican, se abren diferentes opciones de resolución. Cualquiera es válida, siempre que operes correctamente.

A continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de dos formas:

Ejemplo 4

OPCIÓN A

La incógnita, en el miembro de la izquierda.

$$2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1$$
$$-3x - 1 = 3 + 3x$$
$$-3x - 3x = 3 + 1$$
$$-6x = 4$$
$$x = \frac{4}{-6}$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

OPCIÓN B

La incógnita, en el miembro en el que tome coeficiente positivo.

$$2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1$$
$$-3x - 1 = 3 + 3x$$
$$-1 - 3 = 3x + 3x$$
$$-4 = 6x$$
$$\frac{-4}{6} = x$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

PRACTICA

31 $2x - 1 = x + 2$
32 $3x + 2 = x + 6$
33 $2x + 1 = 5x - 5$
34 $1 - x = 4 - 2x$
35 $x - 6 = 5x - 2$
36 $3 + 7x = 2x + 5$
37 $6x - 2 + x = 2x + 3$
38 $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$
39 $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$
40 $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$
41 $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$
42 $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$

Soluciones

31 3	32 2	33 2
34 3	35 −1	36 2/5
37 1	38 3/5	39 −1/2
40 −5	41 I.S.	42 S.S.

Cuando una ecuación contiene paréntesis, comenzaremos suprimiéndolos y reduciendo.

Ejemplo 5

$$5x - 2(2x - 2) = 8 - (3 + 2x)$$
$$5x - 4x + 4 = 8 - 3 - 2x$$
$$x + 4 = 5 - 2x$$
$$x + 2x = 5 - 4$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

PRACTICA

43 $x - 7 = 6 - (x - 3)$
44 $x - (1 - 3x) = 8x - 1$
45 $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$
46 $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$
47 $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$
48 $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$
49 $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$
50 $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$
51 $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$
52 $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$
53 $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$
54 $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$

Soluciones

43 8	44 0	45 2
46 1/2	47 3/4	48 −1
49 2/3	50 1/6	51 −2
52 1	53 I.S.	54 S.S.

5 Ecuaciones con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, *multiplicaremos los dos miembros* de la ecuación por un número que sea múltiplo de todos los denominadores. El múltiplo más adecuado es el más pequeño; es decir, el *mínimo común múltiplo de los denominadores.*

Ejemplo

$$\frac{5x}{6} - 1 = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

$$12 \cdot \left(\frac{5x}{6} - 1\right) = 12 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\right)$$

mín.c.m. (6, 3, 4) = 12

Multiplicamos los dos miembros por 12.

$$\frac{60x}{6} - 12 = \frac{12x}{3} - \frac{36}{4}$$

$$10x - 12 = 4x - 9$$

Al quitar paréntesis y reducir, desaparecen los denominadores.

$$10x - 4x = -9 + 12$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

A partir de ahí, actuaremos como ya sabemos.

Para **eliminar** los **denominadores** en una ecuacion, se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Una estrategia similar

- Reducir a común denominador:

$$\frac{5x}{6} - \frac{1}{1} = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

Común denominador $\rightarrow$ 12

$$\frac{10x}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{9}{12}$$

- Eliminar denominadores:

$$10x - 12 = 4x - 9.$$

En la web

Ayuda para la resolución de ecuaciones con denominadores.

Piensa y practica

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

c) $4 - \frac{2x}{3} = x + \frac{2}{3}$ d) $1 + \frac{2x}{5} = \frac{1}{5} - 2x$

e) $\frac{1}{4} - x = \frac{3x}{4} - 1$ f) $\frac{3x}{2} + 5 = 2x - \frac{1}{2}$

2. Halla x en cada caso.

a) $1 - \frac{x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} = 1$

c) $\frac{5x}{6} + 1 = x - \frac{1}{3}$ d) $\frac{7x}{10} + 1 = \frac{2}{5} + x$

e) $x + \frac{1}{5} = \frac{2x}{3}$ f) $\frac{11x}{20} - x = \frac{3x}{4} - 1$

3. Resuelve.

a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{15} + \frac{2x}{5}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} - x$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 1$ d) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5x}{6} - 1$

e) $\frac{7x}{9} - \frac{1}{6} = \frac{x}{3}$ f) $1 - \frac{x}{3} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} - \frac{x}{2}$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = 1$ b) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3x}{5} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ d) $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = \frac{x}{3} - \frac{x}{5} + 1$

e) $x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2}$

SOLUCIONES

1. a) 3 b) −2 c) 2 d) −1/3 e) 5/7 f) 11

2. a) 2 b) 4/5 c) 8 d) 2 e) −3/5 f) 5/6

3. a) −1 b) 1/8 c) 6 d) 10 e) 3/8 f) −3

4. a) 4/5 b) −1/3 c) −1/2 d) 5 e) 2

142

6 Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado, conviene organizar el trabajo según las fases que se exponen en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

- Primera fase:

Quitar paréntesis. →
$$\frac{x}{2} - 3\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{8} - 2$$
$$\frac{x}{2} - 3 + \frac{3x}{4} = \frac{x}{8} - 2$$

- Segunda fase:

Quitar denominadores.
(Para ello, multiplicamos ambos miembros por 8). →
$$\frac{8x}{2} - 24 + \frac{24x}{4} = \frac{8x}{8} - 16$$
$$4x - 24 + 6x = x - 16$$

- Tercera fase:

Despejar la incógnita, reduciendo y transponiendo términos. →
$$10x - 24 = x - 16$$
$$10x - x = 24 - 16$$
$$9x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{9}$$

En la web
Practica la resolución de diferentes ecuaciones de primer grado.

Piensa y practica

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{3}{2}(1 - x) + 2 = 3x$

b) $1 - \frac{2x}{7} = x - 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{3}{2}\right) + x$

d) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{3}\right)$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{2x}{3} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}(2x - 3) + 1 = \frac{1}{3}(x - 5) - x$

c) $2\left(\frac{4x}{9} - \frac{7}{6}\right) + \frac{2x}{3} = 1 - \frac{2x}{3}$

d) $5\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3} = x - 2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$

3. Halla el valor de x en cada caso.

a) $2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\right) + 1$

b) $5x - \left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(9x - \frac{1}{2}\right)$

c) $5 - 2\left(\frac{x}{5} + 1\right) = \frac{x}{10} + 3\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

d) $3\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{4}\right) + x = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{10}\right)$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\right) - \frac{3x}{10} = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{5}\right) - 1$

b) $\frac{1}{4} - 2\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) = x + 3\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{2}\right)$

c) $\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{6} - 1\right) = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$

d) $x - 3\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{10}(4x - 6)$

SOLUCIONES

1. a) 7/9 b) –7/15 c) 1/4 d) –5/6

2. a) 1 b) –7/10 c) 3/2 d) –3

3. a) 7/6 b) –1/5 c) 3 d) 5

4. a) 0 b) –1/2 c) I.S. d) S.S.

En la web Practica la resolución de ecuaciones de primer grado.

7 Resolución de problemas con ecuaciones

En la información que aporta el enunciado de un problema, encontramos elementos conocidos (*datos*) y elementos desconocidos (*incógnitas*).

Si conseguimos *codificar algebraicamente* todos esos elementos, y relacionarlos mediante una igualdad, habremos construido una *ecuación*.

Resolviendo la ecuación e interpretando las soluciones en el contexto del enunciado, habremos resuelto el problema.

En esta página, y en las siguientes, verás varios ejemplos del proceso a seguir.

Problema resuelto

1. ***Un hipermercado ha sacado hoy, en oferta, una partida de lavadoras y ha vendido la mitad por la mañana y la tercera parte por la tarde. Si en total ha vendido 20 unidades, ¿cuántas lavadoras ha sacado en oferta?***

a) Identifica los elementos del problema, expresando algebraicamente los que son desconocidos.

- Lavadoras en oferta $\longrightarrow x$
- Las vendidas por la mañana $\longrightarrow \dfrac{x}{2}$
- Las vendidas por la tarde $\longrightarrow \dfrac{x}{3}$

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{VENDIDAS POR LA MAÑANA}} + \boxed{\text{VENDIDAS POR LA TARDE}} = 20$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20$$

c) Resuelve la ecuación.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20 \rightarrow 3x + 2x = 120 \rightarrow 5x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{5} \rightarrow x = 24$$

d) Interpreta la solución de la ecuación dentro del enunciado del problema y comprueba si es correcta.

Solución: El lote de lavadoras se componía de 24 unidades.

Comprobación:

$$\frac{24}{2} + \frac{24}{3} = 12 + 8 = 20$$

Piensa y practica

1. Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25.

¿Qué número es?

2. Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble.

¿De qué número se trata?

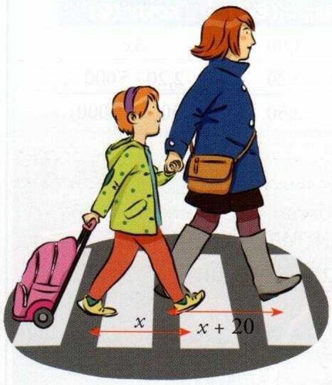
3. Anteayer salieron a la venta las entradas para un concierto y, en ese mismo día, se vendió un tercio; ayer, una cuarta parte, y hoy, se han vendido las 200 restantes.

¿Cuántas entradas se pusieron a la venta?

$$\boxed{\text{VENDIDAS ANTEAYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS AYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS HOY}} = \boxed{\text{TOTAL}}$$

Problema resuelto

2. ***Ana y su madre cruzan una calle por el paso de cebra. Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana, ¿cuánto mide el paso de cada una?***



a) Los datos:

- Paso de Ana (cm) $\longrightarrow x$
- Paso de la madre (cm) $\longrightarrow x + 20$

b) La ecuación:

$$\boxed{\text{ANCHURA DE LA CALLE} \\ \text{35 PASOS DE ANA}} = \boxed{\text{ANCHURA DE LA CALLE} \\ \text{25 PASOS DE LA MADRE}}$$

$$35x = 25(x + 20)$$

c) Resuelve la ecuación:

$$35x = 25(x + 20) \rightarrow 35x = 25x + 500 \rightarrow 35x - 25x = 500 \rightarrow$$
$$\rightarrow 10x = 500 \rightarrow x = \frac{500}{10} \rightarrow x = 50$$

d) *Solución:*

Paso de Ana $\rightarrow$ 50 cm

Paso de la madre $\rightarrow 50 + 20 = 70$ cm

Comprobación:

35 pasos de Ana		25 pasos de la madre
$\underbrace{35 \cdot 50}$	$\Leftrightarrow$	$\underbrace{25 \cdot 70}$
1 750	=	1 750

Piensa y practica

4. Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

$$\left.\begin{array}{l} \text{NARANJAS} \rightarrow x \\ \text{MANZANAS} \rightarrow x + 0{,}5 \end{array}\right\}$$

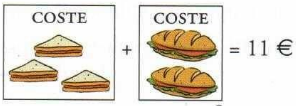
$$\boxed{\text{NARANJAS} \\ \text{COSTE 3 kg}} + \boxed{\text{MANZANAS} \\ \text{COSTE 1 kg}} = 5{,}30 \text{ €}$$

5. Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} \text{ROSA} \rightarrow x \\ \text{JUAN} \rightarrow x + 25 \\ \text{ALBERTO} \rightarrow x - 26 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\text{EDAD} \\ \text{DE ROSA}} + \boxed{\text{EDAD} \\ \text{DE JUAN}} + \boxed{\text{EDAD} \\ \text{DE ALBERTO}} = 98 \text{ años}$$

6. La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería. Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich. Por tres sándwiches y dos bocadillos pagan 11 euros. ¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?

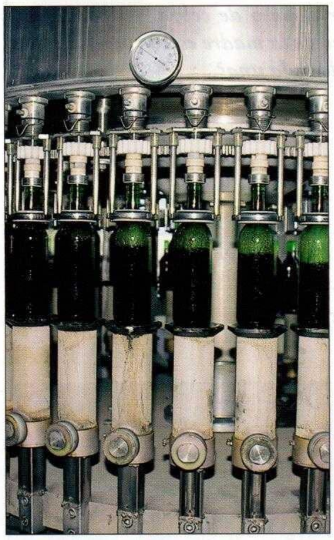


7. Un frutero ha cargado en su furgoneta 26 cajas: unas de kiwis, de 12 kilos, y otras de plátanos, de 10 kilos. Si en total pesan 290 kilos, ¿cuántas cajas eran de cada clase?

$$\boxed{\text{Cajas kiwis} \rightarrow x} \quad \boxed{\text{Cajas plátanos} \rightarrow 26 - x}$$

8. En un test de 50 preguntas se consiguen dos puntos por cada respuesta correcta y se pierden dos por cada respuesta errónea o en blanco. ¿Cuántos aciertos son necesarios para superar la prueba si se exige un mínimo de 75 puntos?

Problema resuelto



3. ***En una bodega, el vino de uva garnacha se vende a 3 €/litro, y el de uva tempranillo, a 2,20 €/litro. ¿Qué cantidad del primero se ha de mezclar con 5 000 litros de la variedad tempranillo para que el litro de mezcla salga a 2,50 €?***

a) Los datos:

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
GARNACHA	x	3,00	$3x$
TEMPRANILLO	5 000	2,20	$2{,}20 \cdot 5\,000$
MEZCLA	$x + 5\,000$	2,50	$2{,}50(x + 5\,000)$

b) La ecuación:

COSTE VINO GARNACHA + COSTE VINO TEMPRANILLO = COSTE MEZCLA

$$3x + 2{,}2 \cdot 5\,000 = 2{,}5(x + 5\,000)$$

c) Resolución de la ecuación:

$$3x + 2{,}2 \cdot 5\,000 = 2{,}5(x + 5\,000)$$
$$3x + 2{,}2 \cdot 5\,000 = 2{,}5x + (2{,}5 \cdot 5\,000)$$
$$3x + 11\,000 = 2{,}5x + 12\,500$$
$$3x - 2{,}5x = 12\,500 - 11\,000$$
$$0{,}5x = 1\,500$$
$$x = \frac{1\,500}{0{,}5} \rightarrow x = 3\,000$$

d) *Solución:* Se han de mezclar 3 000 litros de vino de variedad garnacha con los 5 000 litros de vino de tempranillo para que la mezcla salga a 2,50 €/litro.

Comprobación:

Coste del vino de garnacha → 3 000 · 3,00 = 9 000 €

Coste del vino de tempranillo → 5 000 · 2,20 = + 11 000 €

Coste de la mezcla (8 000 *l*) → 8 000 · 2,50 = 20 000 €

Piensa y practica

9. Un almacenista dispone de dos tipos de café:

TIPO	PRECIO
Calidad superior	12,70 €/kg
Calidad inferior	7,80 €/kg

¿Cuántos kilos del café superior debe mezclar con 100 kilos del inferior para conseguir una mezcla de calidad intermedia que salga a 9,90 €/kg?

10. Martina ha mezclado pinturas roja y amarilla para obtener 40 litros de pintura naranja.

Roja → x litros

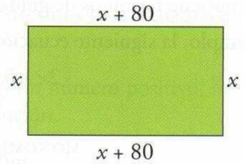
Amarilla → $(40 - x)$ litros

El litro de pintura roja cuesta 3,40 €, y el de amarilla, 2,60 €. ¿Cuántos litros de cada tipo ha utilizado si la pintura naranja ha salido a 2,95 €/litro?

Problema resuelto

4. ***Calcular las dimensiones de una finca rectangular, sabiendo que es 80 metros más larga que ancha y que la valla que la rodea tiene una longitud de 560 metros.***

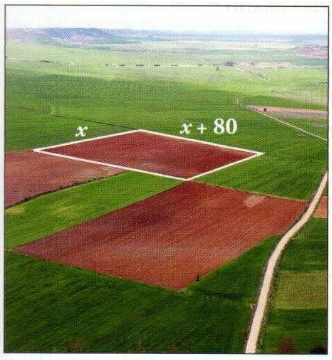
a) Los datos:



Lado menor (ancho) $\rightarrow x$

Lado mayor (largo) $\rightarrow x + 80$

Longitud de la valla $\rightarrow$ 560 m



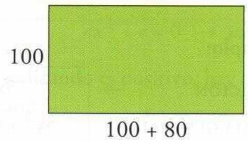
b) La ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$

c) Resolución de la ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$
$$2x + 2x + 160 = 560$$
$$4x = 560 - 160 \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

d) *Solución:*



Lado menor $\rightarrow$ 100 m

Lado mayor $\rightarrow 100 + 80 = 180$ m

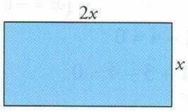
La finca mide 180 m de larga por 100 m de ancha.

Comprobación:

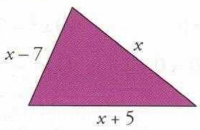
Longitud de la valla: $2 \cdot 100 + 2 \cdot 180 = 200 + 360 = 560$ metros

Piensa y practica

11. Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

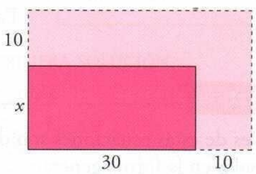


12. En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor. Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



13. De una parcela rectangular se han cedido, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, por lo que la parcela ha perdido una superficie de 480 m².

Si el rectángulo resultante mide 30 metros de largo, ¿cuál es su anchura?



SUPERFICIE ORIGINAL $\rightarrow 40 \cdot (x + 10)$

SUPERFICIE RESULTANTE $\rightarrow 30 \cdot x$

SUPERFICIE PERDIDA $\rightarrow 40 \cdot (x + 10) - 30 \cdot x$; $\rightarrow 480\ m^2$

En la web: Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado.

8 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación es de segundo grado si, tras reducirla, cumple estas condiciones:

- Alguno de sus términos es un monomio de segundo grado.
- No contiene términos de grado superior a dos.

Por ejemplo, la siguiente ecuación es de segundo grado:

$$2x + 5x^2 - 1 = 3 + 4x^2 + 5x$$

MONOMIOS DE SEGUNDO GRADO

La ecuación anterior se puede reducir así:

$$2x + 5x^2 - 1 - 3 - 4x^2 - 5x = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 3x - 4 = 0}$$

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita se puede expresar de la siguiente **forma general:**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} \text{donde } a \neq 0,\ b \text{ y } c \text{ son} \\ \text{coeficientes conocidos.} \end{cases}$$

Por ejemplo:

ECUACIÓN →	$5x^2 = 45$	$(x-3)\cdot(x-2) = 0$
FORMA GENERAL →	$5x^2 + 0x - 45 = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
COEFICIENTES →	$a = 5,\ b = 0,\ c = -45$	$a = 1,\ b = -5,\ c = 6$

Recuerda

$(x-3)\cdot(x-2)$

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ \times\ \ x - 2 \\ \hline -2x + 6 \\ x^2 - 3x \quad\ \ \\ \hline x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

Soluciones de una ecuación de segundo grado

En general, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas, aunque también encontrarás algunas con una solución doble o sin solución.

Ejemplo

La ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ tiene dos soluciones: $\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$

Para $x = 4 \rightarrow 4^2 - 3\cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

Para $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

Ten en cuenta

A las soluciones de una ecuación de segundo grado también se las llama **raíces.**

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

"Las raíces de la ecuación son $x = 4$ y $x = -1$".

Piensa y practica

1. Indica cuáles de estas ecuaciones son de segundo grado y exprésalas en la forma general:

a) $x^2 = 5$ b) $x^2 + 3 = x^2 + x$

c) $2x(x-1) = 4$ d) $x(x-3) = x^2 - 1$

e) $7x^2 - 4x = x^2 + 2$ f) $5x + 6 - x^2 = 7x^3 + 4$

g) $3x^2 + 9 - 3x^2 = x$ h) $x^3 + 2x = x(x+3)$

2. Asocia cada ecuación con su pareja de soluciones:

a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 9$

c) $x^2 + x - 6 = 0$ d) $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 - 5x + 6 = 0$

3 –5 2 5 –3

148

9 Resolución de ecuaciones de segundo grado

La ecuación $x^2 = k$

Para resolver la ecuación $x^2 = k$, buscamos los números cuyo cuadrado es k. Es decir, buscamos la raíz cuadrada de k.

$$x^2 = k \rightarrow x = \pm\sqrt{k}$$

Si k es un número positivo, hay dos soluciones opuestas; si k es negativo, no hay solución.

Ejemplos

- $x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = \begin{cases} +6 \\ -6 \end{cases}$
- $x^2 + 25 = 0 \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25}$

  No tiene solución, ya que la raíz cuadrada de –25 no existe.

Ten en cuenta

En muchas ocasiones deberás entregar las soluciones en forma aproximada.

Por ejemplo:

$$3x^2 - 15 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{15}{3}$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} \rightarrow \boxed{2.236679}$$

$$x = \begin{cases} \approx 2,24 \\ \approx -2,24 \end{cases}$$

La ecuación $ax^2 + c = 0$

Se trata de un caso similar al anterior:

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el radicando es positivo, hay dos soluciones; si es negativo, la ecuación no tiene solución.

Ejemplos

- $2x^2 - 18 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \begin{cases} +6 \\ -6 \end{cases}$
- $5x^2 + 20 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-20}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$. No hay solución.

La ecuación $ax^2 + bx = 0$

En este caso, extraemos factor común en el primer miembro:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

Si un producto es igual a cero, necesariamente uno de los factores ha de ser cero, lo que nos presenta dos opciones:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \longleftarrow \text{PRIMERA SOLUCIÓN} \\ ax + b = \rightarrow x = \frac{-b}{a} \longleftarrow \text{SEGUNDA SOLUCIÓN} \end{cases}$$

Ejemplos

- $x^2 - 5x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$
- $5x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (5x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases}$

En la web

Ayuda para la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.

En la web Practica la aplicación de la fórmula de las ecuaciones de segundo grado.

En la web Practica la resolución de ecuaciones de segundo grado.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

El proceso para resolver una **ecuación de segundo grado completa** es largo y complicado, por lo que empleamos la fórmula que ofrece la incógnita ya despejada. Esa fórmula te permite llegar a las soluciones con rapidez y comodidad.

FÓRMULA:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La justificación de esta fórmula queda para cursos superiores. Por ahora, conviene que la memorices y que aprendas su manejo como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

- $5x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow a = 5;\ b = -7;\ c = 2$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{10} = \begin{cases} \frac{7+3}{10} = 1 \\ \frac{7-3}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

- $5x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow a = 5;\ b = 6;\ c = 2$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{10}$$

La ecuación no tiene solución, pues la raíz cuadrada de -4 no existe.

Solución doble

$$(x-5)^2 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 25 \end{cases}$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{10+0}{2} = 5 \\ \frac{10-0}{2} = 5 \end{cases}$$

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 = 81$ b) $x^2 = 25$
c) $x^2 = 7$ d) $5x^2 = 20$
e) $4x^2 = 1$ f) $x^2 - 9 = 0$
g) $x^2 + 6 = 10$ h) $3x^2 - 7 = x^2 + 9$
i) $\frac{5x^2}{8} = \frac{2}{5}$ j) $\frac{2x^2}{9} - \frac{1}{50} = 0$
k) $\frac{4x^2}{25} - \frac{1}{25} = 0$ l) $\frac{x^2}{21} - 21 = 0$

2. Reduce, saca factor común y resuelve.

a) $x^2 - 4x = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$
c) $x^2 - x = 0$ d) $x^2 + x = 0$
e) $3x^2 - 2x = 0$ f) $5x^2 + x = 0$
g) $5x^2 = 4x$ h) $2x^2 = -x$
i) $2x + x^2 = 7x$ j) $3x^2 - 2x = 2x^2 - 4x$
k) $\frac{x^2}{2} = \frac{x}{3}$ l) $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} = \frac{5x}{6}$

3. Calcula las soluciones aplicando la fórmula.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x + 5 = 0$
c) $x^2 + x - 12 = 0$ d) $x^2 + 7x + 10 = 0$
e) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ f) $x^2 - 2x + 1 = 0$
g) $x^2 + 6x + 9 = 0$ h) $x^2 - 3x + 3 = 0$

4. Reduce y resuelve.

a) $x^2 - 3x - 5 = 2x + 9$
b) $6x^2 - 5(x-1) = x(x+1) + 4$
c) $2x^2 + \frac{x}{4} = x^2 + \frac{4x}{5} + \frac{1}{5}$
d) $x(x+1) - \frac{1}{2} = \frac{x-4}{6}$
e) $\frac{2x+2}{3} + \frac{x^2-x}{5} = \frac{3x+7}{10}$

5. Resuelve estas ecuaciones, observa sus parecidos y diferencias, y compara sus soluciones:

$\boxed{x^2 - 6x + 5 = 0}$ $\boxed{x^2 - 6x + 9 = 0}$ $\boxed{x^2 - 6x + 10 = 0}$

En la web Resuelve problemas con ecuaciones de segundo grado.

Ejercicios y problemas

Ecuaciones sencillas

1. Resuelve mentalmente.

a) $x + 4 = 5$ b) $x - 3 = 6$ c) $7 + x = 10$
d) $7 - x = 5$ e) $9 = 15 - x$ f) $2 - x = 9$

2. Resuelve.

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$
b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$
c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$
d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$
e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$
f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

3. Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$
b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$
c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$
d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$
e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$
f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$
g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4. Quita denominadores y resuelve.

a) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$
b) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$
c) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$
d) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$
e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5}{6} + \frac{x}{6} - \frac{2}{3}$

5. Elimina los paréntesis y los denominadores, y resuelve.

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$ b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$
c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$ d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

6. Elimina denominadores y resuelve.

a) $1 - \frac{x+1}{3} = 2x - \frac{1}{3}$ b) $1 - \frac{1-x}{3} = x + \frac{1}{2}$
c) $\frac{3x-1}{2} - 1 = 2x - 2$ d) $x + \frac{2-3x}{5} = \frac{x}{2} + 1$
e) $2x + \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{4}$ f) $\frac{3x}{5} - 1 = x - \frac{x+1}{2}$
g) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-6}{7} = 1$ h) $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{5} = \frac{7x-13}{20}$
b) $2 + \frac{2}{5}(x + 1) = x - \frac{2x+3}{5}$
c) $\frac{2}{3}(1 - 3x) + \frac{3(x-1)}{4} = \frac{5}{12}(1 - x)$
d) $\frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{3} + 1\right) + x = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

8. Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación: $1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3x}$

$$3x \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{3}\right) = 3x \cdot \frac{2}{3x}$$

$$3x + 6 + x = 2 \rightarrow 4x = 2 - 6$$

$$4x = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{4} \rightarrow x = -1$$

9. Resuelve, como en el ejercicio anterior.

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3x} + 1$ b) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5x} + \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2x} - \frac{2}{9x} = 1 + \frac{1}{3x}$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2(x-1)}$

Multiplica por 6x, 10x, 18x y 2(x − 1), respectivamente.

Ecuaciones de segundo grado

10. Observa, razona y resuelve.

a) $5x^2 = 45$ b) $12x^2 = 3$
c) $x(x - 3) = 0$ d) $(x + 5)x = 0$
e) $x(3x - 1) = 0$ f) $3x(5x + 2) = 0$
g) $x^2 - 7x = 0$ h) $x^2 + 4x = 0$
i) $3x^2 = 2x$ j) $5x^2 = x^2 - 2x$

Ejercicios y problemas

11. Resuelve aplicando la fórmula.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9x + 40 = 0$ d) $5x^2 + 14x - 3 = 0$

e) $15x^2 - 16x + 4 = 0$ f) $14x^2 + 5x - 1 = 0$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$ h) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

i) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ j) $6x^2 - x - 5 = 0$

12. Reduce a la forma general y aplica la fórmula.

a) $x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{4} - 1\right)$

b) $\frac{x}{2}\left(x + \frac{1}{30}\right) = \frac{x}{3}\left(x + \frac{2}{5}\right)$

c) $\frac{x}{3}\left(x - \frac{1}{20}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{15}\left(2x - \frac{1}{2}\right)$

d) $\frac{x^2}{2} + x = \frac{2x^2 - 5}{3} - 1$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

13. Calcula, primero, mentalmente y, después, con la ayuda de una ecuación.

a) Si a un número le sumas 12, obtienes 25. ¿De qué número se trata?

b) Si a un número le restas 10, obtienes 20. ¿Qué número es?

c) Un número, x, y su siguiente, $x + 1$, suman 13. ¿Cuáles son esos números?

d) En mi clase somos 29 en total, pero hay tres chicos más que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

14. Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.

15. Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12.

¿Cuál es ese número?

16. La suma de dos números es 167, y su diferencia, 19. ¿Cuáles son esos números?

17. Calcula el número natural que sumado a su siguiente da 157.

EL NÚMERO $\rightarrow x$ SU SIGUIENTE $\rightarrow x + 1$

18. La suma de tres números consecutivos es 135. ¿Cuáles son esos números?

19. Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.

ANTONIO $\rightarrow x - 7$; TERESA $\rightarrow x$; BLANCA $\rightarrow x + 2$

20. Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros. ¿Cuál es el coste de cada pieza?

21. Nicolás ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €. ¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?

22. Reparte 280 € entre tres personas, de forma que la primera reciba el triple que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

1.ª PERSONA $\rightarrow 6x$; 2.ª $\rightarrow 2x$; 3.ª $\rightarrow x$

23. Tres agricultores reciben una indemnización de 100 000 € por la expropiación de terrenos para la construcción de una autopista. ¿Cómo han de repartirse el dinero, sabiendo que el primero ha perdido el doble de terreno que el segundo, y este, el triple de terreno que el tercero?

24. En la caja de un supermercado hay 1 140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros.

Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase tiene la caja?

25. Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

26. Un hortelano siembra la mitad de su huerta de melones, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200 m², de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

SUPERFICIE HUERTA $\rightarrow x$ MELONES $\rightarrow x/2$

TOMATES $\rightarrow x/3$ PATATAS $\rightarrow 200\ m^2$

152

27. **Ejercicio resuelto**

Joaquín tiene 14 años; su hermana, 16, y su madre, 42. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre ambos hijos igualen la edad de la madre?

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE x AÑOS
JOAQUÍN	14	$14 + x$
HERMANA	16	$16 + x$
MADRE	42	$42 + x$

Dentro de x años, debe ocurrir que:

$$\boxed{\text{EDAD DE JOAQUÍN}} + \boxed{\text{EDAD DE LA HERMANA}} = \boxed{\text{EDAD DE LA MADRE}}$$

$$(14 + x) + (16 + x) = 42 + x$$

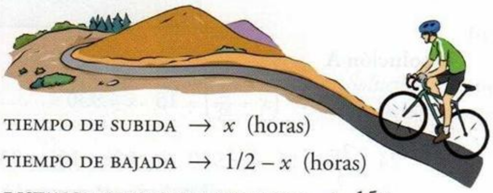
$$2x + 30 = 42 + x \rightarrow x = 12$$

Solución: Deben transcurrir 12 años.

28. Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?

29. La edad de doña Adela es seis veces la de su nieto Juan, pero dentro de 8 años solo será el cuádruple. ¿Qué edad tiene cada uno?

30. Un ciclista sube un puerto a 15 km/h y, después, desciende por el mismo camino a 35 km/h. Si la ruta ha durado 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha invertido en la subida?



TIEMPO DE SUBIDA $\rightarrow x$ (horas)

TIEMPO DE BAJADA $\rightarrow 1/2 - x$ (horas)

DISTANCIA RECORRIDA SUBIENDO $\rightarrow 15x$

DISTANCIA RECORRIDA BAJANDO $\rightarrow 35\left(\frac{1}{2} - x\right)$

31. Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

TIEMPO HASTA EL ENCUENTRO $\rightarrow x$ (horas)

DISTANCIA RECORRIDA POR EL PRIMERO $\rightarrow 24x$

DISTANCIA RECORRIDA POR EL SEGUNDO $\rightarrow 16x$

32. Dos trenes se encuentran, respectivamente, en las estaciones de dos ciudades separadas entre sí 132 km. Ambos parten a la misma hora, por vías paralelas, hacia la ciudad contraria. Si el primero va a 70 km/h, y el segundo, a 95 km/h, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

33. Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

34. Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

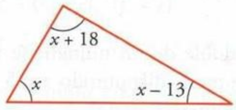
PRECIO ORIGINAL $\rightarrow x$ REBAJA $\rightarrow \frac{12x}{100}$

ECUACIÓN $\rightarrow x - \frac{12x}{100} = 66$

35. Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20 % de rebaja, y en la blusa, solo un 15 %. ¿Cuánto costaba cada prenda?

36. Para delimitar una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta. ¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?

37. La amplitud de uno de los ángulos de un triángulo es 13 grados mayor y 18 grados menor, respectivamente, que las amplitudes de los otros dos ángulos. Calcula la medida de cada ángulo.



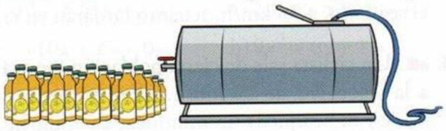
38. Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca, a 0,50 €/*l*, con otra cantidad de leche de oveja, a 0,80 €/*l*, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio medio de 0,70 €/*l*. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche empleó?

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
VACA	x	0,50	$0,5x$
OVEJA	$300 - x$	0,80	$0,8(300 - x)$
MEZCLA	300	0,70	$0,7 \cdot 300$

$$\boxed{\text{COSTE LECHE VACA}} + \boxed{\text{COSTE LECHE OVEJA}} = \boxed{\text{COSTE MEZCLA}}$$

Ejercicios y problemas

39. Una empresa compra un depósito de zumo concentrado al precio de 0,35 €/*l*. Para rebajarlo añade 35 litros de agua. Así, el litro sale 7 céntimos más barato. ¿Cuánto zumo había en el depósito antes de aguarlo?



40. Un ciclista circula por una carretera a 18 km/h durante 20 minutos. ¿A qué velocidad debería ir durante los 10 minutos siguientes para que la media de esos treinta minutos resulte de 20 km/h?

Resuelve problemas con ecuaciones de segundo grado

41. Calcula, primero, mentalmente y, después, con una ecuación.

a) ¿Qué número multiplicado por su siguiente da 12?

$$x \cdot (x+1) = 12$$

b) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. ¿De qué números se trata?

$$x^2 + (x+1)^2 = 5$$

42. Si un número aumentado en tres unidades se multiplica por el mismo número disminuido en otras tres, se obtiene 55. ¿Qué número es?

$$(x+3) \cdot (x-3) = 55$$

43. Si el doble de un número se multiplica por ese mismo número disminuido en 5 unidades, da 12. ¿De qué número se trata?

44. Los miembros del equipo vamos a hacer un regalo al entrenador que cuesta 80 €.

Nos sale un poco caro, pero si fuéramos dos más, tocaríamos a dos euros menos cada uno. ¿Cuántos somos en el equipo?

N.º DE COMPONENTES DEL EQUIPO $\rightarrow x$

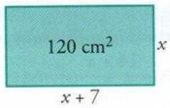
CADA UNO DEBE PAGAR $\rightarrow \dfrac{80}{x}$

SI FUERAN DOS MÁS, CADA UNO PAGARÍA $\rightarrow \dfrac{80}{x+2}$

$\boxed{\text{LO QUE PAGA CADA UNO}} - 2 = \boxed{\text{LO QUE PAGARÍA CADA UNO SI FUERAN DOS MÁS}}$

45. Ejercicio resuelto

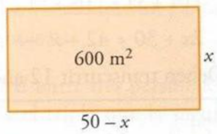
Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que es 7 cm más largo que ancho y que su área es de 120 cm².



$$x \cdot (x+7) = 120$$
$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 23}{2} \begin{cases} 8 \\ -15 \end{cases}$$

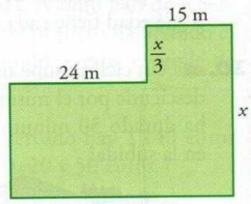
46. El perímetro de un rectángulo mide 100 m, y el área, 600 m². Calcula sus dimensiones.



Analiza y exprésate

47. Analiza las soluciones que siguen al problema y explica cómo se ha construido la ecuación en cada caso.

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 930 metros cuadrados.



Resolución A

$$24 \cdot \left(x - \frac{x}{3}\right) + 15 \cdot x = 930$$

$$24 \cdot \frac{2x}{3} + 15 \cdot x = 930 \rightarrow 16x + 15x = 930$$

$$31x = 930 \rightarrow x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

Perímetro = 30 + 15 + 10 + 24 + 20 + 39 = 138 m

Resolución B

$$(24 + 15) \cdot x - 24 \cdot \frac{x}{3} = 930$$

$$39x - 8x = 930 \rightarrow 31x = 930$$

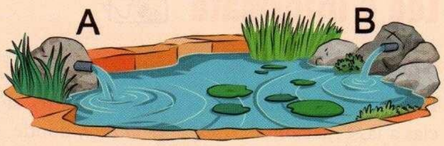
$$x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

Perímetro = 24 + 10 + 15 + 30 + 39 + 20 = 138 m

154

Aprende a resolver problemas

Un estanque se alimenta de dos bocas de agua, A y B. Abriendo solamente A, el estanque se llena en 3 horas. Abriendo ambas, se llena en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abre solamente B?



Comprueba que has entendido el enunciado.

¿Cuántos grifos alimentan el estanque? ¿Cuánto tarda el primero en llenarlo? ¿Y si se abren los dos? ¿Qué te preguntan?

Piensa el camino que vas a seguir para resolver el problema. ¿Qué necesitas saber?

Escribe los datos, sitúa y da nombre a la incógnita. ¿Sabes cómo relacionar esos elementos?

	A	B	A + B
TARDA	3 h	x h	2 h

— Los tiempos de A y B no se suman, porque juntos tardan menos… No sé.

¿Por qué no piensas en la parte de estanque que llena cada grifo en una hora?

— Vale, lo hago.

	A	B	A + B
EN UNA HORA LLENA:	$\frac{1}{3}$ del estanque	$\frac{1}{x}$ del estanque	$\frac{1}{2}$ del estanque

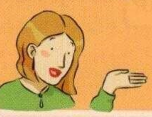
¿Puedes relacionar esas fracciones?

— Ahora sí. La parte que llena A en una hora más la que llena B es igual a la parte que llenan los dos juntos.

Expresa lo que acabas de decir con una ecuación.

— Efectivamente $\rightarrow$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Muy bien. Resuélvela y termina.



— Multiplico los dos miembros por $6x$ para eliminar los denominadores.

$$6x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) = 6x \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 2x + 6 = 3x \rightarrow x = 6$$

Solución: La boca B, en solitario, llena el estanque en 6 horas.

Problemas "+"

48. Una fuente dispone de dos grifos. Abriendo solamente el primero, se llena en 8 horas, y abriendo ambos, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solamente el segundo grifo?

49. El pilón de riego de un huerto se llena, en 3 h, con una bomba que aporta agua desde un pozo. Ayer, con el pilón lleno, Eva conectó la bomba y, así, pudo regar durante 6 h, hasta que el pilón quedó vacío. ¿Cuánto tarda en vaciarse el pilón, sin conectar la bomba?

50. Un automóvil parte de A hacia B a la misma hora que un camión lo hace desde B hacia A y tardan en cruzarse 2 horas en un punto intermedio del camino. ¿Cuánto tiempo ha invertido el coche en el viaje completo si el camión lo ha hecho en 5 horas?

51. De un número de dos cifras sabemos que:

a) Es múltiplo de 5 pero no de 10.

b) Si se invierte el orden de sus cifras, disminuye en 27 unidades.

¿De qué número se trata?

Taller de matemáticas

Lee e infórmate

Historia de la *x*

En escritos de matemáticos árabes anteriores al siglo XV aparecen referencias a las ecuaciones: *Tratado de la cosa*, donde, a falta de otro nombre, *la cosa* significa lo desconocido; es decir, la incógnita.

"*¿Cuánto vale* ***la cosa*** *que aumentada en cinco es igual al doble de* ***la cosa*** *menos siete?*"

Y como la palabra *cosa*, en árabe, se pronuncia *xay*, esta es la expresión que utilizaron los traductores. Más tarde se acabó abreviando con su letra inicial, *x*.

Ecuaciones: grado y dificultad

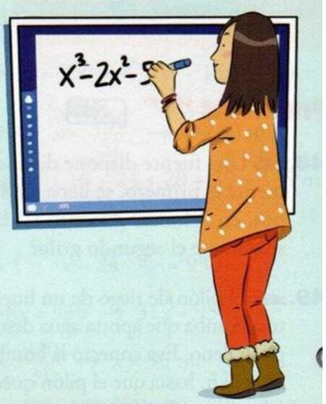
La obtención de fórmulas para resolver las ecuaciones de primer y segundo grado no ha supuesto una gran dificultad para los matemáticos. Esos problemas se solucionaron en la Edad Media.

Pero no ocurrió lo mismo con las de grado superior a dos. De hecho, durante el Renacimiento, los matemáticos italianos del siglo XVI, que eran entonces los más avanzados, trabajaron duramente en ello.

A finales del siglo XVII seguían sin encontrar fórmulas para resolver las de grado superior a cuatro hasta que, en el XIX, el genio noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), demostró que tales fórmulas, en general, no existen.

emprender aprender

Pero tú puedes



Sin embargo, tú puedes resolver algunas ecuaciones de grado tres o superior.

Por ejemplo, observa las ecuaciones:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) = 0$$

Para resolver la primera, con lo que has estudiado hasta ahora, solo tienes el recurso del tanteo, que es poco seguro.

Sin embargo, puedes ver que las soluciones de la segunda son: $x = 1$, $x = -2$ y $x = 3$.

Y esas son también las soluciones de la primera. Compruébalo y constata también, multiplicando los paréntesis, que se trata de la misma ecuación.

- ¿Te atreves ahora a resolver estas otras tres?

  $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(2x-1) = 0 \qquad x^3 - 9x = 0 \qquad x^3 - 9x^2 = 0$

- ¿Sabrías construir una ecuación que tenga por soluciones $x = 5$, $x = 1/5$ y $x = -2$?

156

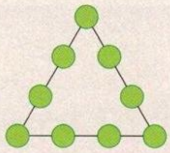
Entrénate resolviendo problemas

Dibuja un esquema, echa cuentas, tantea

- Un aizkolari tarda un cuarto de hora en cortar un tronco en tres partes. ¿Cuánto tardará en cortar otro tronco igualmente grueso en seis partes?
- Un agricultor vende sus tomates a un mayorista. El mayorista los vende a un intermediario, ganando un 20 %. El intermediario los vende a un almacén, ganando un 20 %. El almacén los vende a un minorista, y este, al público, ganando cada uno de ellos, también, un 20 %.

  ¿En qué porcentaje ha aumentado lo que cobró el agricultor cuando el producto llega, finalmente, al público?
- Coloca los números del 1 al 9, uno en cada círculo, de modo que cada lado del triángulo sume 23.

  Hay dos soluciones.



Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1. Indica cuál de los valores siguientes es solución de la ecuación:

$$\frac{x^2-1}{5} = \sqrt{x} - 1$$

$x = 1$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ $x = 4$ $\quad$ $x = 9$ $\quad$ $x = -\frac{1}{2}$

2. Resuelve.

a) $7x - 3 - 2x = 6 + 3x + 1$

b) $1 - 4x - 6 = x - 3(2x - 1)$

3. Resuelve.

a) $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$ $\qquad$ b) $x - \frac{x+1}{5} = \frac{x+3}{2} - 2$

c) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$ $\qquad$ d) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}$

4. Resuelve.

a) $3a^2 - 5 = 70$ $\qquad$ b) $6x^2 - 3x = x$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\qquad$ d) $8x^2 - 6x + 1 = 0$

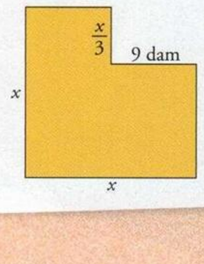
5. Pasa a la forma general y encuentra las soluciones de la ecuación:

$$\frac{3x}{2} - \frac{8}{x} = x - 3$$

6. Por tres kilos de peras y dos de manzanas, Ramón ha pagado 7,80 €. Averigua el precio de unas y otras, sabiendo que un kilo de peras cuesta vez y media lo que un kilo de manzanas.

7. Un hortelano ha plantado 1/3 de la superficie de su huerta de acelgas y 3/10 de zanahorias. Si aún le quedan 110 m² libres, ¿cuál es la superficie total de la huerta?

8. Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que ocupa una superficie de 180 decámetros cuadrados.



B. Actividad 1 - Pirámides algebraicas.

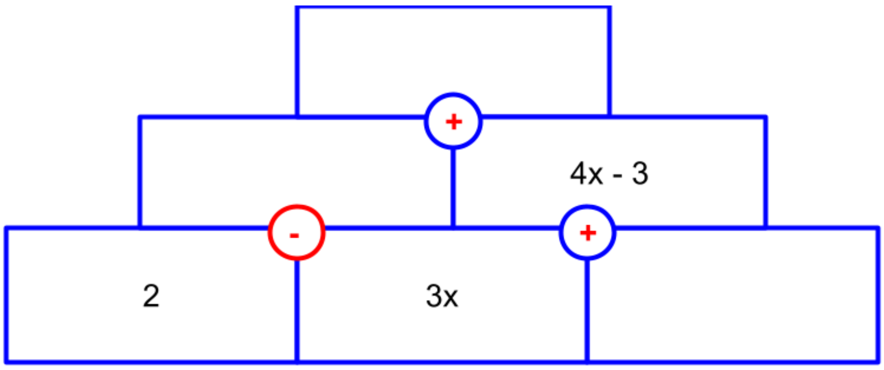
Completa las pirámides algebraicas

Reglas

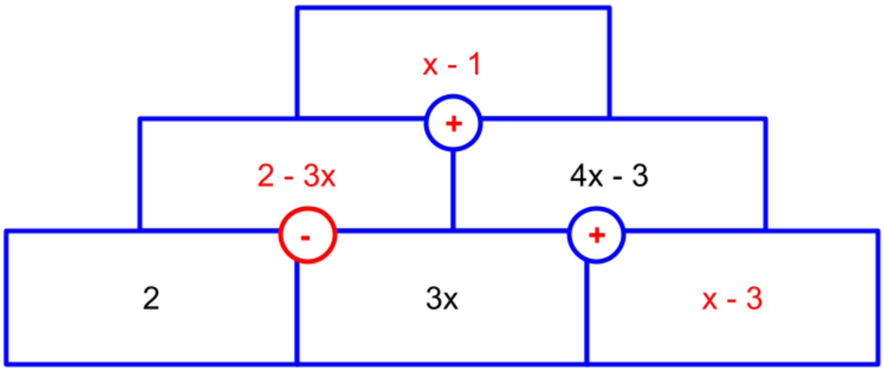
1- Las casillas que tienen números no se modifican. Hay que completar las casillas vacías.

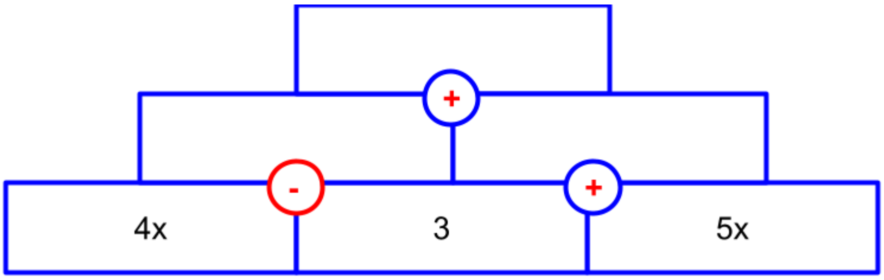
2- Fíjate si debes sumar o restar para subir o bajar.

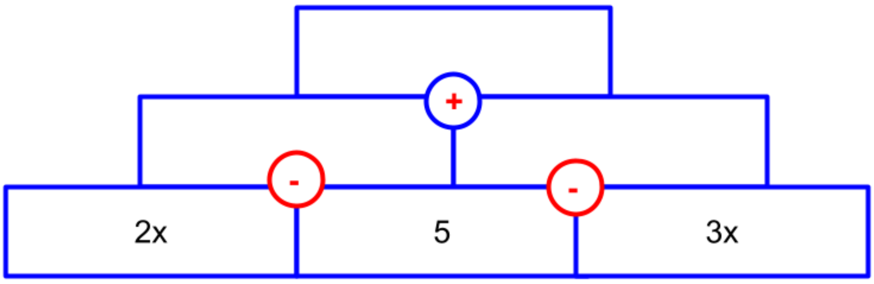
3- Aquí tienes una a modo de ejemplo.

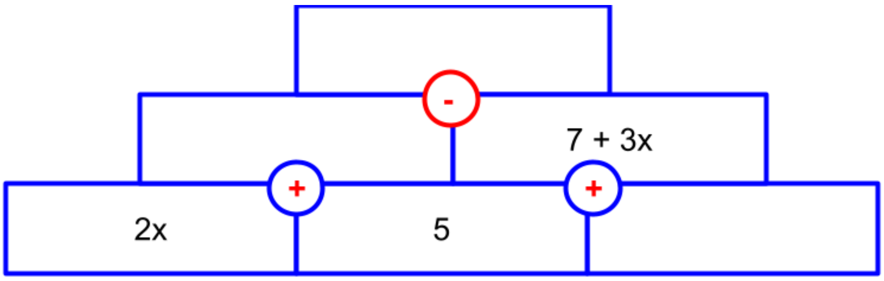


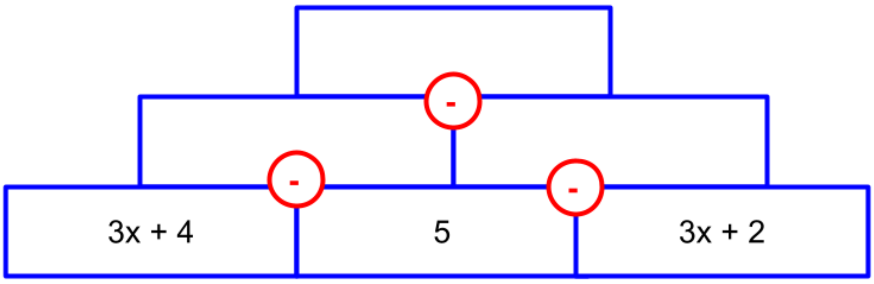
Vuestra pirámide ya tiene unas casillas completas
Vosotros debéis rellenar el resto de las casillas realizando operaciones algebraicas

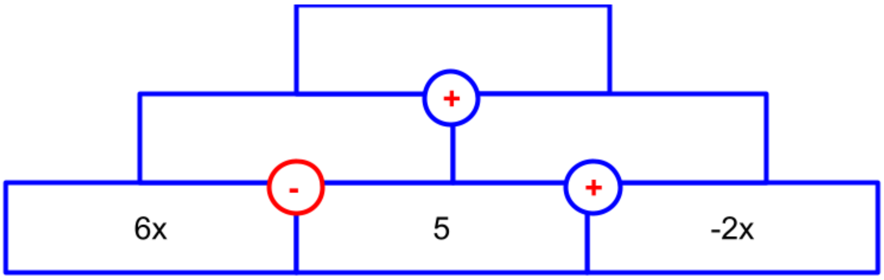


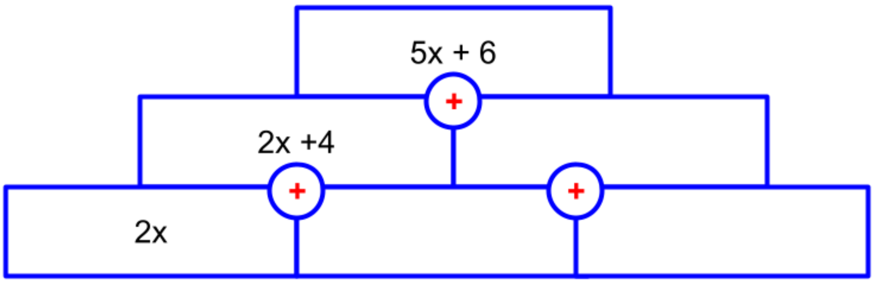

+
-
+
4x
3
5x

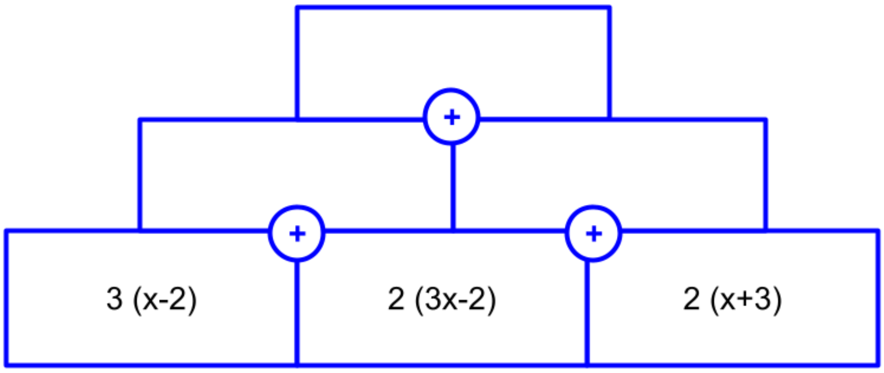

+
-
-
2x
5
3x

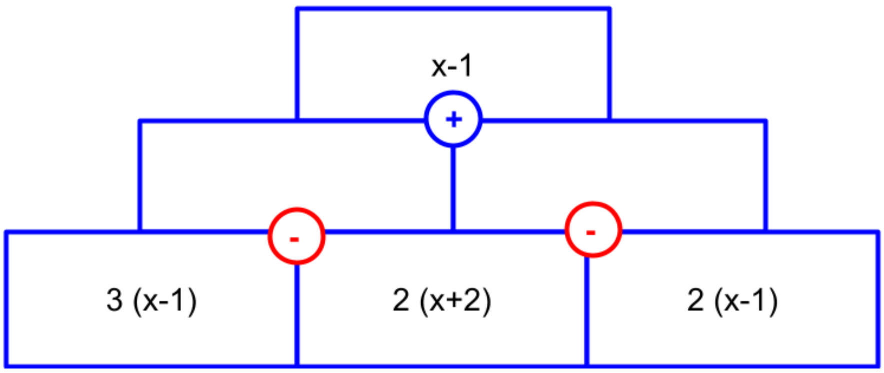

-
7 + 3x
+
+
2x
5


-
-
-
3x + 4
5
3x + 2


+
-
+
6x
5
-2x


5x + 6
+
2x +4
+
+
2x

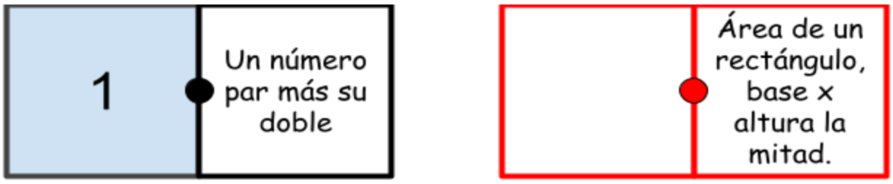

+
+
+
3 (x-2)
2 (3x-2)
2 (x+3)


x-1
+
-
-
3 (x-1)
2 (x+2)
2 (x-1)

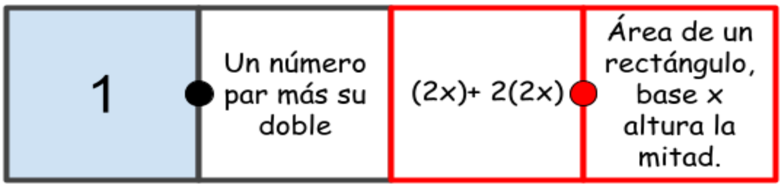
C. Actividad 2 - Dominó algebraico

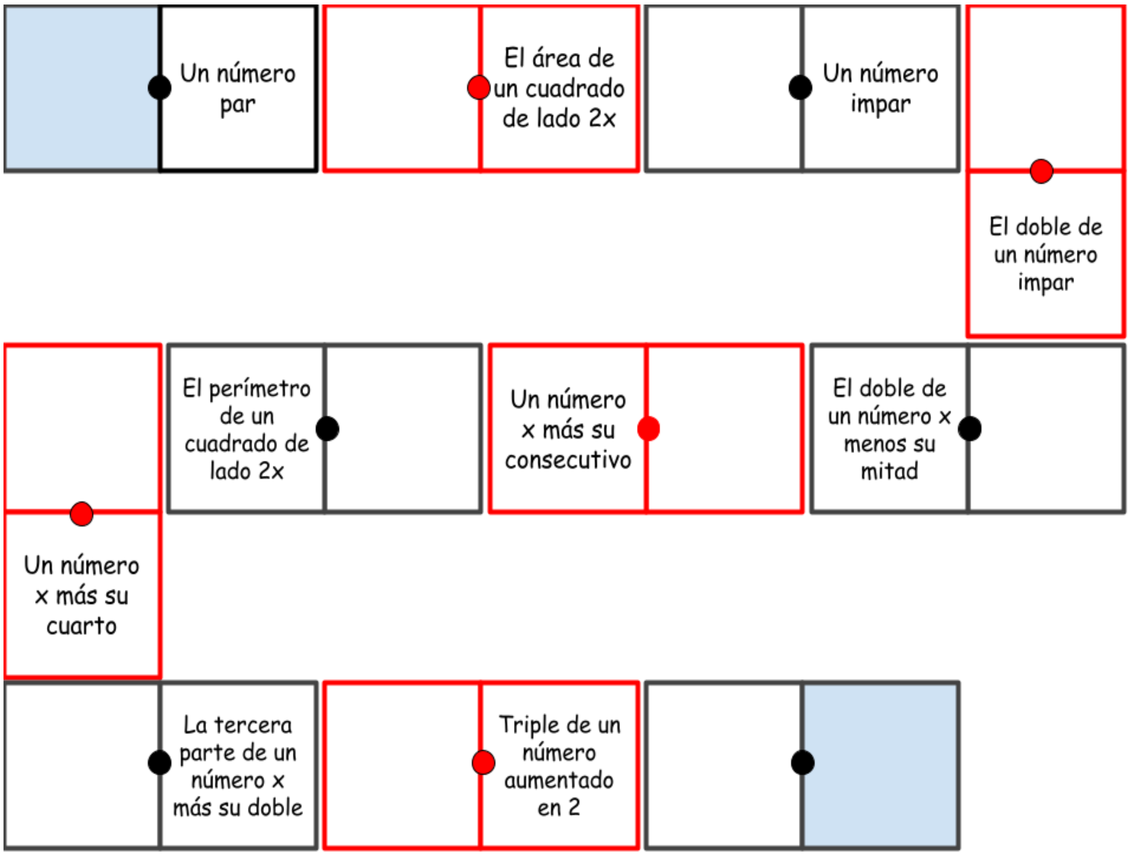
Dominó algebraico

El objetivo de la actividad es completar el mayor número de fichas posibles. Para ello, hay que buscar la expresión algebraica entre las proporcionadas que nos permitan unir una ficha con la siguiente. No hay que crear expresiones algebraicas, las necesarias son exactamente las que se han proporcionado.



La ficha roja debe completarse, como en un dominó, con la expresión algebraica que corresponda para poder unirse a la anterior.





Un número par
El área de un cuadrado de lado 2x
Un número impar
El doble de un número impar
El perímetro de un cuadrado de lado 2x
Un número x más su consecutivo
El doble de un número x menos su mitad
Un número x más su cuarto
La tercera parte de un número x más su doble
Triple de un número aumentado en 2

D. Actividad 3 - Taller de problemas.

ECUACIONES LINEALES

1- Completa para cada enunciado propuesto, las dos casillas correspondientes.

2- **No** hay que resolver la ecuación.

Enunciado del problema	Asignación de incógnitas	Planteamiento de la ecuación.
La suma de dos números consecutivos es 207. ¿Cuáles son esos números?	Un número cualquiera: Consecutivo de ese número:	
Un número, más su mitad suman 630. ¿Qué número es?	Un número cualquiera: Mitad de ese número:	
La suma de dos números es 36. Uno de los números, es la quinta parte del otro. Halla los dos números	Un número cualquiera: Número qué es su quinta parte:	

Enunciado del problema	Asignación de incógnitas	Planteamiento de la ecuación.
La suma de dos números pares consecutivos es 122. ¿Cuáles son esos números?	Un número par: Su consecutivo par:	
Halla dos números sabiendo que uno excede al otro en 8 unidades y su suma es 450.	Un número cualquiera: Número que excede al anterior en 8 unidades:	
El perímetro de un triángulo isósceles mide 20cms. El lado desigual es la mitad de cada uno de los lados iguales, ¿Cuánto mide cada lado del triángulo?	Medida 1 lado igual: Medido 2º lado igual: Medida lado desigual:	
Mi abuelo ha plantado 12 m2 de su huerto. Esos 12 m2 corresponden a dos séptimos de su superficie. ¿Cuántos metros cuadrados mide el huerto?	Superficie del huerto: Dos séptimos de la superficie del huerto:	
Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 años más, los dos tendrían la misma edad. Averigua la edad de cada uno	Edad del hijo: Edad del padre:	

Enunciado del problema	Asignación de incógnitas	Planteamiento de la ecuación.
En una caja hay el doble de número de caramelos de menta que de limón y el triple número de caramelos de naranja que de menta y limón juntos. En total hay 324 caramelos. ¿Cuántos hay de cada sabor?	Número de caramelos de menta: Número de caramelos de limón: Número de caramelos de naranja:	
Juan tiene 60€ en billetes de 5€ y de 10€. Si el número de billetes de 5€ es el cuádruple del número de billetes de 10€. ¿Cuántos billetes tiene de cada clase?	Nº de billetes de 5€ Nº de billetes de 10€	
María tiene 30 años menos que su padre, y este tiene el triple de los años de su hija, Halla la edad de cada uno	Edad de María: Edad del padre de María:	