

# APROXIMACIONES DE LA FUNCIÓN DE KRÄTZEL EN TÉRMINOS DE FUNCIONES ELEMENTALES

*Trabajo Fin de Máster*

*Curso 2020/21*



Universidad Pública de Navarra  
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

**Departamento de Estadística, Informática y  
Matemáticas**

MÁSTER EN MODELIZACIÓN E INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA,  
ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN

Autor: Antonio Rodríguez Uguina

Tutores: Pedro Jesús Pagola Martínez  
José Luis López García

Septiembre 2021

**Resumen** El objetivo del trabajo es aproximar la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  mediante desarrollos en serie en términos de funciones elementales, ya sean de forma asintótica o convergente. Para ello, se utilizarán métodos clásicos como el Lema de Watson y métodos actuales, como el método de Laplace modificado o el método de continuación analítica, logrando en ocasiones una representación en forma de serie de la función en una región de su dominio. Primero, se presentará la función y alguna de sus aplicaciones. Posteriormente se presentan herramientas analíticas relacionadas que se utilizarán para los desarrollos en serie y de los métodos ya mencionados. Una vez vistas las herramientas, se realizará el estudio del comportamiento de la función cuando su primera variable  $x$  es grande, seguido del caso en el que  $x$  es pequeña, distinguiendo casos según el comportamiento de sus otras variables. A continuación se realizará el estudio del comportamiento de la función cuando su segunda variable  $v$  es grande y positiva, seguido de cuando es grande y negativa, teniendo que modificar los métodos mencionados para poder aplicarlos. Finalmente, se estudia el caso en el que la primera y segunda variable tienen el mismo orden.

**Summary** The aim of the paper is to approximate the Krätzel function  $Z(x, v, \rho)$  by series expansions in terms of elementary functions, either asymptotic expansions or convergent expansions. For this purpose, classical methods such as Watson's Lemma and modern methods such as the Modified Laplace method or the analytic continuation method will be used, sometimes achieving a series representation of the function in a region of its domain. First the function and some of its applications will be presented. Subsequently, related analytical tools that will be used for the series and the methods already mentioned will be presented. Once the tools have been detailed, the study of the behavior of the function when its first variable  $x$  is large will be carried out, followed by the case in which  $x$  is small, distinguishing cases according to the behavior of its other variables. Next, we will study the behavior of the function when its second variable  $v$  is large and positive, followed by when it is large and negative, having to modify the mentioned methods in order to apply them. Finally, the case in which the first and second variables have the same order is studied.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Herramientas analíticas . . . . .	6
2.2. Desarrollos asintóticos . . . . .	10
2.3. Métodos de aproximación . . . . .	11
2.3.1. Método del Lema de Watson . . . . .	11
2.3.2. Método de continuación analítica . . . . .	12
2.3.3. Método de Laplace modificado . . . . .	13
<b>3. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores grandes de <math>x</math></b>	<b>16</b>
3.1. $x \rightarrow \infty$ con $p > 0$ . . . . .	16
3.2. $x \rightarrow \infty$ con $\rho < 0$ y $\Re(v) < 0$ . . . . .	20
<b>4. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores pequeños de <math>x</math></b>	<b>23</b>
4.1. $x \rightarrow 0$ con $\rho > 0$ . . . . .	23
4.2. $x \rightarrow 0$ con $\rho < 0$ y $\Re(v) < 0$ . . . . .	26
<b>5. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores grandes de <math>v</math></b>	<b>29</b>
5.1. $v \rightarrow +\infty$ . . . . .	29
5.2. $v \rightarrow -\infty$ con $\rho > 0$ . . . . .	34
5.3. $v \rightarrow -\infty$ con $\rho < 0$ . . . . .	37
<b>6. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para <math>x</math> grande y <math>v</math> grande y negativo</b>	<b>43</b>
<b>7. Conclusión</b>	<b>47</b>

# 1. Introducción

Las funciones especiales son funciones que no pueden ser representadas mediante funciones elementales. Estas funciones pueden venir dadas por una expresión integral como, por ejemplo, la función  $\Gamma(x)$  que generaliza el concepto de factorial. Las funciones especiales suelen estar ligadas a soluciones de ecuaciones diferenciales, con aplicaciones directas en disciplinas como la física, la óptica o la ingeniería. A menudo, uno de los inconvenientes que tienen estas funciones es la dificultad de evaluarlas en ciertos puntos, por el hecho de la imposibilidad de calcular la integral en dicho punto. Para ello se desarrollan técnicas de aproximación como la integración numérica, desarrollos en serie o aproximación asintótica. Un ejemplo de esta última metodología es la fórmula de Stirling, que sostiene que cuando  $n$  es grande entonces el comportamiento de la función factorial es

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

En el contexto del análisis funcional encontramos la función de Krätzel (una función con representación integral). En 1979, E. Krätzel introdujo la transformada integral

$$K_v^\rho(x) = \int_0^\infty Z_v^\rho(xt)f(x)dt,$$

con núcleo de integración

$$Z_v^\rho(x) = Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{t^\rho - \frac{x}{t}} dt. \quad (1)$$

La función  $Z(x, v, \rho)$  es la llamada función de Krätzel. En el caso particular de  $\rho = -1$  y  $\rho = 0$  se tiene la siguiente relación con la función  $\Gamma(x)$

$$Z(x, v, -1) = (1+x)^v \Gamma(-v) \quad \text{y} \quad Z(x, v, 0) = e^{-1} x^v \Gamma(-v) \quad (2)$$

Por este motivo, vamos a considerar en todo el trabajo  $\rho \neq 0, -1$ . Esta función se relaciona con la función de Bessel modificada (de segunda especie), cuya representación integral es ([2], 7.12(23)),

$$K_v(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-v-1} e^{-\frac{1}{2}z(t+\frac{1}{t})} dt.$$

La función de Krätzel (1) se relaciona con  $K_v(z)$  de la siguiente forma

$$Z(x^2/4, v, 1) = 2(t/2)^v K_{-v}(x).$$

Por ello, podemos considerar la función de Krätzel una generalización de la función de Bessel modificada de segunda especie. La función de Krätzel también se relaciona con la H-function

$$H_{q,\rho}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1) \dots (a_\rho, A_\rho) \\ (b_1, B_1) \dots (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L h(s) z^{-s} ds,$$

con

$$h(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=m+1}^\rho \Gamma(a_j + A_j s)},$$

donde  $L$  es cierto contorno que separa los polos de los dos factores en el numerador. En [3] se demuestra, extendiendo  $Z$  a  $\mathbb{C}$  en la variable  $x$

$$Z(x, \rho, v) = \frac{1}{\rho} H_{0,2}^{2,0} \left[ x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ (0, 1), \left(\frac{v}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) \end{array} \right. \right] \quad \rho > 0, x \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}, x \neq 0,$$

para  $\rho > 0$ , y

$$Z(x, \rho, v) = \frac{1}{|\rho|} H_{1,1}^{1,1} \left[ x \left| \begin{array}{c} \left(1 - \frac{v}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) \\ (0, 1) \end{array} \right. \right] \quad \rho < 0, \Re(v) < 0, x \in \mathbb{C}, x \neq 0,$$

para  $\rho < 0$ . La función de Krätzel es, por tanto, un caso particular de la H-function.

Actualmente se investiga el uso de la función de Krätzel como función de densidad. Sea  $x$  una variable aleatoria, con densidad

$$g(x|\theta) = \begin{cases} c_1 x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\theta}}, & x \geq 0, \alpha > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La forma de la función de densidad es dada por

$$h(\theta) = \begin{cases} c_2 \theta^{v-1} e^{-\theta^\rho}, & \theta \geq 0, \rho > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por la definición de densidad incondicional,

$$f(x) = \int g(x|\theta) h(\theta) d\theta = c x^{\alpha-1} \int_0^\infty \theta^{v-1} e^{-\theta^\rho - \frac{x^\alpha}{\theta}} d\theta = c x^{\alpha-1} Z_p^v(x^\alpha).$$

Por tanto, una variable aleatoria  $x$  se dice que tiene una densidad de Krätzel  $f(x; \alpha, v, p)$  con parámetros  $\alpha, v, p$  si  $f(x; \alpha, v, p)$  es dada por

$$f(x; \alpha, v, p) = \begin{cases} c x^{\alpha-1} Z_p^v(x^\alpha), & x \geq 0, \alpha > 0, \rho > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

con  $c = \frac{p\alpha}{\Gamma(\frac{v+1}{p})}$  constante de normalización. La función de Krätzel como densidad se ha usado en ámbitos como la radiación solar [9], reacciones nucleares [8] o en tiempo de reacción cognitiva [10].

El objetivo del trabajo es obtener series en términos de funciones elementales que aproximen la función de Krätzel, ya sean series convergentes o series asintóticas, las

cuales introduciremos más adelante. Krätzel estudió el comportamiento asintótico de su función y estableció que para  $\rho \in \mathbb{N}$

$$Z(x, v, \rho) \sim \frac{1}{\rho} \Gamma\left(\frac{v}{\rho}\right), \quad \text{si } v \neq 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$Z(x, v, \rho) \sim -\log(x), \quad \text{si } v = 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow 0, \quad (4)$$

y

$$Z(x, v, \rho) \sim \alpha x^{(2v-\rho)/(2\rho+2)} e^{-\beta x^{\rho/p+1}} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

con

$$\alpha = \left(\frac{2\pi}{\rho+1}\right)^{1/2} \rho^{(-2v+1)/(2\rho+2)} \quad \text{y} \quad \beta = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \rho^{1/(\rho+1)}.$$

Como podemos observar, Krätzel obtuvo un comportamiento asintótico de la función, pero no una serie asintótica completa. En este trabajo trataremos de obtener series asintóticas completas de la función para diferentes valores de sus parámetros. Para ello empezaremos introduciendo herramientas relacionadas con las funciones especiales, seguido de una exhaustiva lista de definiciones relativas a la teoría asintótica. A continuación, introduciremos métodos asintóticos que usaremos en este trabajo, como son el Lema de Watson, el método de Laplace modificado y el método de continuación analítica. Todos ellos se aplican a funciones que disponen de una representación integral, como la función de Krätzel.

Una vez vistos los conceptos preliminares y los métodos a utilizar, empezamos el estudio de la función en su primera variable. Primero analizamos  $x$  grande y después  $x$  pequeña, distinguiendo casos según el comportamiento de las otras variables. Para ello usaremos los 3 métodos ya antes mencionados.

A continuación, se estudia la función en su segunda variable  $v$ . Primero se estudia cuando  $v$  es grande y positiva y a continuación, cuando  $v$  es grande y negativa. Para este estudio usaremos el método de Laplace modificado. Sin embargo no podremos aplicarlo directamente y tendremos que hacer un estudio más exhaustivo del comportamiento de la función, llegando a una suerte de generalización del método, aunque con restricciones en el dominio de la función de Krätzel.

Por último, se estudia el comportamiento de la función cuando la primera y segunda variable son grandes y tienen el mismo orden.

En cuanto a la bibliografía, han servido de referencia para el estudio de la función de Krätzel los artículos [3] [5] [8] [9] [10]. Para la introducción en la teoría de la asintótica se han hecho uso de los libros [11] y [14]. Los métodos usados para hallar los desarrollos en serie son originales de los artículos [6] y [7], además de los libros anteriormente citados. El resto de la bibliografía [2] [1] [4] [12] se usa puntualmente para demostrar algún resultado.

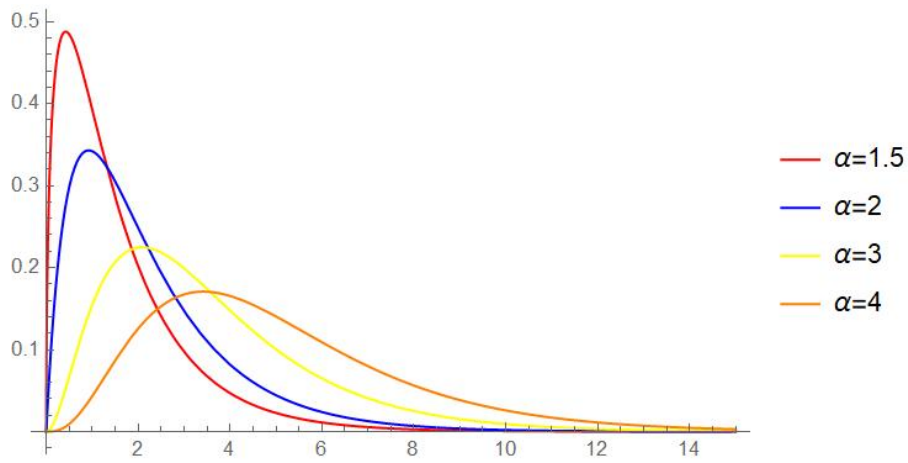


Figura 1: Función de densidad de Krätzel variando  $\alpha$  con  $\rho = 3$  y  $v = 3$

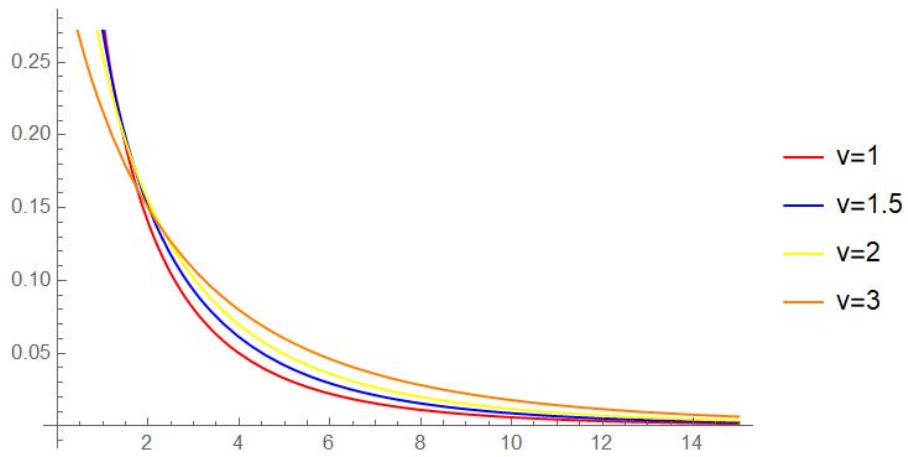


Figura 2: Función de densidad de Krätzel variando  $\alpha$  con  $\rho = 1$  y  $\alpha = 1$

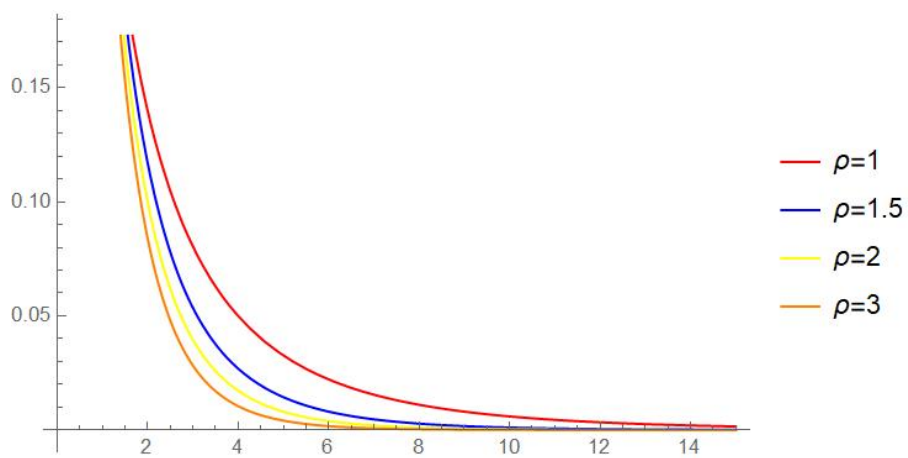


Figura 3: Función de densidad de Krätzel variando  $\alpha$  con  $v = 1$  y  $\alpha = 1$

## 2. Preliminares

Para el estudio de la función de Krätzel necesitaremos distintos conceptos y herramientas. Primero introduciremos notaciones y conceptos clásicos en el estudio de funciones especiales. Los necesitaremos para probar una proposición clave en el trabajo que nos permitirá dar forma a derivadas  $n$ -ésimas que aparecerán de manera recurrente en los desarrollos en serie. A continuación, presentamos los conceptos propios del estudio asintótico. Por último, describimos los métodos que vamos a utilizar para obtener desarrollos en serie, en concreto el lema de Watson, el método de continuación analítica y el teorema de Laplace modificado.

### 2.1. Herramientas analíticas

Introducimos los conceptos más clásicos del estudio de las funciones especiales. Los coeficientes y funciones que exponemos a continuación aparecen en multitud de desarrollos y expresiones, en particular en términos  $n$ -ésimos de sucesiones.

**Definición 1.** Se denota  $(x)_n$  el factorial descendiente

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1),$$

también llamado símbolo de Pochhammer. Se definen los coeficientes  $s(n, k)$  como

$$(x)_n = \sum_k^n s(n, k)x^k,$$

llamados números de Stirling de primera especie.

Se tiene la siguiente relación entre los números de Stirling de primera especie y los coeficientes binomiales

$$\binom{a}{n} = \sum_{j=0}^n s(n, j) \frac{a^j}{n!}. \quad (6)$$

**Definición 2.** Se definen los coeficientes  $S(n, k)$ , denominados números de Stirling de segunda especie como

$$x^n = \sum_k^n S(n, k)(x)_k.$$

**Definición 3.** Por último, se define los polinomios de Touchard  $T_n(x)$  introducidos por Touchard en [13] como

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n S(n, k)x^k. \quad (7)$$

Se puede definir de forma equivalente  $T_n(x)$  como

$$T_n(x) = e^x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} s^n. \quad (8)$$



En 1730, Stirling halló una fórmula que aproxima la función factorial para valores muy grandes, extendiendo la función factorial mediante la función  $\Gamma(x)$ .

**Proposición 1** (Fórmula de Stirling). Sea  $\Gamma(x)$  la función

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

que cumple para  $x \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x+1) = x!.$$

Entonces, para  $x$  grande se tiene la aproximación

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

En ([2], 1.2(2)) se relaciona el símbolo de Pochhammer y la función  $\Gamma(z)$  mediante la siguiente igualdad.

**Proposición 2.** Se cumple la relación

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}.$$

En particular, se tiene

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{n}{2}} = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

A continuación, vamos a expresar la derivada  $n$ -ésima de funciones del tipo  $f(t) = e^{-x t^p}$ . Este tipo de funciones aparece de forma frecuente en los desarrollos que vamos a obtener de la función de Krätzel.

**Proposición 3.** Sea la función  $f(t) = e^{-x t^p}$  con  $p \in \mathbb{R}$ . Entonces, su derivada  $n$ -ésima respecto a  $t$  es  $f^{(n)}(t) = t^{-n} e^{-x t^p} P_{p,n}(x t^p)$ , donde  $P_{p,n}(t)$  son polinomios que se pueden expresar como

$$\text{a) } P_{p,n}(t) = e^t n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k p}{n} \frac{(-t)^k}{k!}.$$

$$\text{b) } P_{p,n}(t) = \sum_{k=0}^n s(n, k) p^k T_k(-t), \text{ con } s(n, k) \text{ números de Stirling de primera especie y } T_k(t) \text{ los polinomios de Touchard.}$$

$$\text{c) } P_{p,n}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{j+n} t^k (-j p)_n}{j!(k-j)!}.$$

$$\text{d) } P_{p,n}(t) = -(n-1+pt)P_{p,n-1}(t) + pt P'_{p,n-1}(t) \quad \text{con} \quad P_{p,0}(t) := 1.$$

*Demostración.* Tomamos la representación en serie de la función  $f(t)$

$$e^{-x t^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} t^{pk}.$$

Sumamos y restamos el término  $w$  para obtener una serie centrada en  $w$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} t^{pk} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x w^p)^k}{k!} \left( \frac{t-w}{w} + 1 \right)^{pk} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x w^p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{kp}{n} \left( \frac{t-w}{w} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{kp}{n} \frac{(-x w^p)^k}{k!} \right) (t-w)^n. \end{aligned}$$

Por tanto, por unicidad, la derivada  $n$ -ésima de  $e^{-x t^p}$  es

$$f^{(n)}(w) = w^{-n} n! \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{kp}{n} \frac{(-x w^p)^k}{k!} \right) = w^{-n} e^{-x w^p} P_{p,n}(x w^p),$$

obteniendo la fórmula a). A continuación, usando las igualdades (6) y (8) en la expresión de  $P_{p,n}$  del apartado a), se obtiene

$$\begin{aligned} P_{p,n}(t) &= e^t n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{kp}{n} \frac{(-t)^k}{k!} = e^t n! \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n s(n, j) \frac{k^j p^j}{n!} \frac{(-t)^n}{k!} = \\ &= e^t \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} s(n, j) \frac{k^j p^j}{n!} \frac{(-t)^n}{k!} = \sum_{j=0}^n s(n, j) p^j T_j(-t), \end{aligned}$$

obteniendo la fórmula b) cambiando el índice  $j$  por el índice  $k$ .

Consideramos la definición (7) y usando la fórmula [12][eq.(13)]

$$\frac{j!}{n!} \sum_{k=0}^n s(n, k) S(k, j) p^k = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \binom{pk}{n} (-1)^{k+j},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} P_{p,n}(t) &= \sum_{k=0}^n s(n, k) p^k T_k(-t) = \sum_{k=0}^n s(n, j) p^k \sum_{j=0}^n (-1)^j S(n, j) t^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n s(n, j) p^k (-1)^k S(n, k) t^k = n! \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{pj}{n} \frac{(-1)^j t^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{j+n} t^k (-jp)_n}{j!(k-j)!}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la relación entre el símbolo de Pochhammer y los coeficientes binomiales

$$\binom{pj}{n} = (-1)^n \frac{(-pj)_n}{n!}.$$

Finalmente, usando la fórmula de b) y usando las relaciones de recurrencia de los polinomios de Touchard y los números de Stirling.

$$T'_n(t) = -T_n(t) + \frac{1}{t} T_{n+1}(t) \quad \text{y} \quad s(n, m-1) = s(n+1, m) + n s(n, m).$$

$$\begin{aligned} P_{p,n}(t) &= \sum_{k=0}^n s(n, k) p^k T_k(-t) = \sum_{k=0}^n -s(n, k) p^k [tT'_n(-t) + tT_n(-t)] = \\ &= \sum_{k=0}^n -s(n, k) p^k tT'_n(-t) - \sum_{k=0}^n s(n, k) p^k tT_n(-t). \end{aligned} \quad (9)$$

Estudiamos por separado

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n -s(n, k) p^k tT'_n(-t) &= \sum_{k=0}^n -[s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, m)] p^k tT'_n(-t) = \\ &= (pt)P_{p,n-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^n s(n, k) p^k tT_n(-t) &= \sum_{k=0}^n [s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, m)] p^k tT_n(-t) = \\ &= -(n-1+pt)P_{p,n-1}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (9) obtenemos

$$P_{p,n}(t) = -(n-1+pt)P_{p,n-1}(t) + ptP'_{p,n-1}(t).$$

demostrando así el apartado d). □

**Observación:** En el caso particular en el que  $p = -1$ , se puede escribir  $P_{-1,n}$  en términos de los polinomios de Laguerre, puesto que cumplen la relación [1, eq.1.1.3.2]

$$D^n[t^\lambda e^{xt^{-1}}] = (-1)^n n! t^{\lambda-n} e^{xt^{-1}} L_n^{\lambda-1}(xt^{-1}),$$

para el caso  $f(t)$ ,  $\lambda = 0$ . Igualando las dos expresiones de la derivada n-ésima de  $f(t)$

$$f^{(n)}(t) = t^{-n} e^{-xt^{-1}} P_{-1,n}(xt^{-1}) = (-1)^n n! t^{-n} e^{xt^{-1}} L_n^{-1}(xt^{-1}),$$

y por tanto, se tiene

$$P_{-1,n}(t) = (-1)^n n! L_n^{-1}(t).$$

**Corolario 1.** Consideramos la función  $F(t) = e^{-x(t^p+1/t)}$ . Se cumple la siguiente fórmula

$$F^{(n)}(t) = \frac{e^{-x(t^p+1/t)}(-1)^n n!}{t^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} L_{n-k}^{-1}(x/t) P_{p,k}(x t^p).$$

*Demostración.* Usamos la fórmula para la derivada n-ésima de un producto

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \quad (12)$$

Sea  $f(t) = e^{-xt^p}$  y  $g(t) = e^{-x/t}$ . Usando la fórmula (12) y la observación anterior, obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) &= (f \cdot g)^{(n)} = e^{-xt^p-x/t} t^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{p,k}(x t^p) L_{n-k}^{-1}(x/t) (n-k)! (-1)^{n-k} = \\ &= \frac{e^{-x(t^p+1/t)}(-1)^n n!}{t^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} L_{n-k}^{-1}(x/t) P_{p,k}(x t^p). \end{aligned}$$

□

## 2.2. Desarrollos asintóticos

A menudo surge la necesidad de evaluar una función especial para valores grandes o pequeños de la variable. Dado que, en general, no es posible encontrar el valor exacto, se hace necesario aproximar dicho valor. Una forma de conseguirlo es a través de desarrollos asintóticos

**Definición 4.** Sea  $\Omega$  un conjunto en el plano complejo y sea  $z_0$  un punto límite de  $\Omega$ , pudiendo ser el infinito. Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  funciones definidas en  $\Omega$ . Entonces denotamos

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0,$$

si existe una constante  $C > 0$  y un entorno  $U$  de  $z_0$  tal que

$$|f(z)| \leq C|g(z)|, \quad \forall z \in \Omega \cap U.$$

De la misma forma, denotamos

$$f(z) = o(g(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0,$$

si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un entorno  $U_\epsilon$  de  $z_0$  tal que

$$|f(z)| \leq \epsilon|g(z)| \forall z \in \Omega \cap U_\epsilon.$$

Introducimos ahora el concepto de sucesión asintótica. La idea es que cada término de la serie asociada a esta sucesión aporte una cantidad más pequeña al anterior término, de forma que no se descontrole la suma cuando nos acercamos al punto. La diferencia fundamental con otro tipo de series aproximantes es que la serie no tiene por qué converger. Este hecho lo veremos en la práctica.

**Definición 5.** Sea  $\{\phi_n(z)\}$  una sucesión de funciones definidas en un conjunto  $\Omega$ , y sea  $z_0$  un punto límite de  $\Omega$ . Entonces, decimos que  $\{\phi_n\}$  es una sucesión asintótica cuando  $z \rightarrow z_0$  en  $\Omega$  si, para todo  $n \geq 0$ ,

$$\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

**Definición 6.** Sea  $f(z)$  y  $f_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , funciones definidas en el conjunto  $\Omega$ . La serie  $\sum f_n(z)$  se denomina desarrollo o serie asintótica generalizada de  $f(z)$  respecto de la sucesión asintótica  $\{f_n(z)\}$ , cuando  $z \rightarrow z_0$ , si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(z) + \mathcal{O}(f_N(z)),$$

para todo  $N \geq 0$  fijo. En este caso escribimos

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z); \quad \{f_n\}, \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

## 2.3. Métodos de aproximación

Introducimos 3 métodos para el cálculo de desarrollos asintóticos de una función con representación integral cuando su variable a estudiar es suficientemente grande o pequeña. Estos son el Lema de Watson, el método de continuación analítica y el método de Laplace modificado. A la hora de estudiar la función de Krätzel haremos uso de ellos.

### 2.3.1. Método del Lema de Watson

El Lema de Watson se usa para funciones del tipo

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt. \quad (13)$$

La idea es simple, expresar  $f(t)$  en serie y cambiar sumatorio por integral, y obtener una serie donde aparece la función  $\Gamma(x)$  en el término general de la misma.

**Teorema 1** (Lema de Watson). Si se cumple

- 1)  $f(t)$  es analítica cuando  $|t| \leq \delta + a$ , donde  $a > 0$ ,  $\delta > 0$ , permitiendo incluso que éste sea un punto de ramificación, y

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{m/r-1}, \quad \text{en } |t| < \delta, \quad r < 0.$$

- 2)  $|f(t)| < Ke^{bt}$ , donde  $K$  y  $b$  son independientes de  $t$ , cuando  $t > 0$  y  $t \geq a$
- 3)  $|\arg z| \leq \pi/2 - \Delta$ , con  $\Delta > 0$

4)  $|z|$  es suficientemente grande

Entonces existe un desarrollo asintótico para (13) dado por la fórmula

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Gamma\left(\frac{m}{r}\right) z^{-m/r}.$$

### 2.3.2. Método de continuación analítica

El método de continuación analítica se aplica a funciones cuya representación integral es de la forma

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(t)h(xt)dt. \quad (14)$$

Como podemos comprobar es una generalización del método del Lema de Watson, puesto que si  $h(xt) = e^{-xt}$  entonces (14) tiene la forma de (13). La idea del método es tomar las series de Taylor de  $f(t)$  y de  $h(t)$  de tal forma que no creen divergencias, apareciendo la transformada de Mellin de por medio, la cual definimos a continuación.

**Definición 7.** Denotamos  $\mathcal{F}$  al conjunto de funciones localmente integrables en el intervalo  $(0, \infty)$ , es decir,  $f \in L_{loc}^1(0, \infty)$ , que satisfacen:

1)  $f$  tiene un desarrollo asintótico en el infinito:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{t^{\alpha_k}} + f_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde, para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, a_k$  y  $\alpha_k$  son sucesiones de números complejos y reales respectivamente, con  $\alpha_k$  estrictamente creciente y  $f_n = \mathcal{O}(t^{-\alpha_n})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

2)  $f(t) = \mathcal{O}(t^{-a})$ , cuando  $t \rightarrow 0^+$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definición 8.** Denotamos  $\mathcal{H}$  al conjunto de funciones localmente integrables en el intervalo  $(0, \infty)$ , es decir,  $h \in L_{loc}^1(0, \infty)$ , que satisfacen:

1)  $h$  tiene un desarrollo asintótica en  $t=0^+$  :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{\beta_k} + h_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde, para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, b_k$  y  $\beta_k$  son sucesiones de números complejos y reales respectivamente, con  $\beta_k$  estrictamente creciente y  $h_n = \mathcal{O}(t^{\beta_n})$  cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

2)  $h(t) = \mathcal{O}(t^{-b})$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definición 9.** Sea  $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ . Denotamos  $M[g, z]$  a la integral (cuando exista)

$$\int_0^\infty t^{z-1} g(t) dt,$$

o su continuación analítica como función de  $z$ . A  $M[g, z]$  se le denomina transformada de Mellin de  $g$ .

**Teorema 2** (Método de continuación analítica). Sean  $f \in \mathcal{F}$  y  $h \in \mathcal{H}$ . Entonces, para cualquier  $n, m \in \mathbb{N}$  que cumplen  $\alpha_{n-1} - \beta_m < 1 < \alpha_n - \beta_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(xt)f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k M[h; 1 - \alpha_k] x^{\alpha_k - 1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j M[f; \beta_j + 1] x^{\beta_j} + \\ &+ \int_0^\infty f_n(t)h_m(xt)dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Si  $\alpha_k - \beta_j = 1$  para algún par  $(k, j)$  entonces, en la fórmula (15), la suma de términos

$$a_k M[h; 1 - \alpha_k] x^{\alpha_k - 1} + b_j M[f; \beta_j + 1] x^{\beta_j},$$

es remplazada por

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \{ x^{\beta_j} [a_k x^{-z} M[h; 1 + z - \alpha_k] + b_j M[f; z + \beta_j + 1]] \} = \\ = x^{\beta_j} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} [a_k x^{-z} M[h; 1 + z - \alpha_k] + b_j M[f; z + \beta_j + 1]] - a_k b_j \log x \right\}. \end{aligned}$$

El desarrollo (15) es una serie asintótica para valores pequeños de  $x$

$$\int_0^\infty f_n(t)h_m(xt)dt = \mathcal{O}(x^{\beta_m} + x^{\alpha_n - 1}) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0 \text{ y } \alpha_n \neq \beta_m + 1.$$

Si  $\alpha_n = \beta_m + 1$  para algún  $n$  y  $m$ , se cumple

$$\int_0^\infty f_n(t)h_m(xt)dt = \mathcal{O}(x^{\beta_m \log x}) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0 \text{ y } \alpha_n = \beta_m + 1.$$

### 2.3.3. Método de Laplace modificado

El método de Laplace modificado se aplica a funciones del tipo

$$F(x) = \int_a^b e^{-xf(t)} g(t) dt, \quad (16)$$

Su nombre proviene del método de Laplace, introducido por el propio autor en 1774. La idea es que cuando aumenta  $x$ , la mayor parte de la contribución al valor de la integral se da en un entorno del mínimo de  $f(t)$ . En este método no siempre es fácil obtener una expresión explícita para los coeficientes de la serie asintótica, hecho que sí se consigue con el método de Laplace modificado.

**Teorema 3.** Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  de (16) continuas en  $(a, b)$  intervalo finito o infinito y supongamos que la integral (16) existe para  $x \geq x_0$ . Sea  $t_0$  el único mínimo de  $f(t)$  en  $[a, b]$  y supongamos que  $f(t)$  y  $g(t)$  son analíticas en  $t = t_0$ . Si  $t_0 = a$ , podemos incluso suponer que  $g(t)$  tiene un punto de ramificación en  $t = a$  de manera que  $(t - a)^{-s}g(t)$  es analítica en  $t = a$ , con  $s \in (-1, 0]$  si  $t_0 = a$  y  $s = 0$  si  $t_0 \in (a, b]$ . Entonces

$$F(x) \sim e^{-xf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

con

$$\psi_n(x) = \sum_{k=\lfloor \frac{n-m}{p-m} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{p-m} \rfloor} a_{n+mk}(x) \frac{\alpha + (-1)^{n+mk} \beta}{m} \Gamma\left(k + \frac{n+s+1}{m}\right) \left| \frac{m!}{f^{(m)}(t_0)x} \right|^{k + \frac{n+s+1}{m}}.$$

En esta suma,  $[-n]$  con  $n$  natural debe entenderse como 0 y

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } t_0 \in [a, b) \\ 0 & \text{si } t_0 = b, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } t_0 \in (a, b] \\ 0 & \text{si } t_0 = a. \end{cases}$$

El entero  $m$  es el orden de la primera derivada de  $f(t)$  que no se anula en  $t = t_0$  y  $p$  el siguiente orden de derivación en no anularse la función. Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$a_n(x) = e^{xf(t_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \frac{x^k}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(x) B_{n-mk-j},$$

donde  $A_j(x)$  y  $B_j$  son los coeficientes de Taylor de las funciones  $e^{-xf(t)}$  y  $(t-a)^{-s}g(t)$  en  $t = t_0$  respectivamente, es decir,

$$e^{-xf(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)(t-t_0)^n, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t-t_0)^{n+s}, \quad |t-t_0| < r.$$

Los términos de la expansión son del orden  $\psi_n = \mathcal{O}(x^{-(n+s+1)/m})$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

**Observación 1.** En el teorema 3 se tiene  $B_n = \mathcal{O}(1)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Se puede escribir el término  $a_n$  como

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) B_{n-k} = \mathcal{O}(x^{\lfloor n/p \rfloor}).$$

con  $c_0(x) = 1$ ,  $c_1(x) = \dots = c_{p-1}(x) = 0$  y  $c_n = \mathcal{O}(x^{\lfloor n/p \rfloor})$  para  $n \geq p$ . Así, los coeficientes  $a_n(x)$  son polinomios de grado  $\lfloor n/p \rfloor$ . En el caso de que  $B_n \neq \mathcal{O}(1)$ ,



podemos hacer el estudio del carácter asintótico de la serie con el estudio de  $a_n(x)$ , pues siguiendo la estructura anterior

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) B_{n-k}(x),$$

con  $c_0(x) = 1$ ,  $c_1(x) = \dots = c_{p-1}(x) = 0$  y  $c_n = \mathcal{O}(x^{[n/p]})$  para  $n \geq p$ .

### 3. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores grandes de $x$

#### 3.1. $x \rightarrow \infty$ con $p > 0$ .

Partimos de la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  y realizamos una serie de cambios de variable para ajustar su forma al Teorema 3. Aplicamos el cambio de variable  $t = ux^{\frac{1}{\rho+1}}$  a la representación integral (1)

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt = x^{\frac{v}{\rho+1}} \int_0^\infty u^{v-1} e^{-x^{\frac{\rho}{\rho+1}}(u^\rho + \frac{1}{u})} du.$$

Sea  $y = x^{\frac{\rho}{\rho+1}}$ , se tiene la integral a estudiar

$$Z(x, v, \rho) = x^{\frac{v}{\rho+1}} \int_0^\infty u^{v-1} e^{-y(u^\rho + \frac{1}{u})} du, \quad (17)$$

que tiene la forma deseada para aplicar el Teorema 3. Identificamos cada una de las funciones que toman partido. La función de fase  $f(u)$  es

$$f(u) = u^\rho + \frac{1}{u},$$

y su derivada n-ésima es

$$f^{(n)}(u) = \left( \left[ \prod_{k=0}^{n-1} (\rho - k) \right] u^{\rho-n} + \frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}} \right),$$

y por tanto tiene un mínimo en  $u_0 = \rho^{\frac{-1}{\rho+1}}$ , lo que implica que el coeficiente  $s$  del Teorema 3 sea 0. Su segunda derivada en  $u_0$  es no nula,

$$f''(u_0) = \rho(\rho-1) \rho^{+1} \sqrt{1/\rho}^{\rho-2} + \frac{2}{\rho^{+1} \sqrt{1/\rho}^3} = (\rho+1) \rho^{\frac{3}{\rho+1}} > 0,$$

y, por tanto,  $m = 2$ . Veamos su tercera derivada en  $u_0$

$$f'''(u_0) = u_0^{-4} [(\rho)(\rho-1)(\rho-2)u_0^{\rho+1} - 6] = u_0^{-4} [(\rho+1)(\rho-4)]$$

Así, se tiene  $p = 4$  en el caso de  $\rho = 4$  y  $p = 3$  cuando  $\rho \neq 4$ . A continuación, veamos la serie de Taylor de la función  $e^{-y(u^\rho + \frac{1}{u})}$  centrada en  $u_0$ . Para ello necesitamos su derivada n-ésima. Sea  $G(u) = e^{-y(u^\rho + \frac{1}{u})}$ , haciendo uso del Corolario 1 su derivada n-ésima es

$$G^{(n)}(u) = \frac{e^{-y(u^\rho + 1/u)} (-1)^n n!}{u^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} L_{n-k}^{-1}(y/u) P_{p,k}(y u^p).$$

Por tanto, los coeficientes  $A_n(y)$  son

$$A_n(y) = \frac{e^{-y(u_0^\rho + 1/u_0)} (-1)^n}{u_0^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} L_{n-k}^{-1}(y/u_0) P_{p,k}(y u_0^p).$$

La función  $g(u) = u^{v-1}$  tiene como serie de Taylor centrada en  $u_0$

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v-1}{n} u_0^{v-1-n} (t - u_0)^n.$$

Por tanto, los coeficientes  $B_n$  son

$$B_n = \binom{v-1}{n} u_0^{v-1-n}$$

Así, tenemos los coeficientes de los desarrollos de Taylor necesarios para aplicar el Teorema 3. Definimos  $a_n(y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  como

$$a_n(y) = e^{yf(u_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \left( \frac{y^k}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(u_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(y) B_{n-mk-j} \right).$$

Definimos  $\Phi_n(y)$  según el método de Laplace modificado. En nuestro caso, como  $u_0 \notin \{0, \infty\}$ , entonces  $\alpha, \beta = 1$ .

$$\Phi_n(y) = \frac{\alpha + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(u_0)y} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma \left( \frac{n+s+1}{m} \right).$$

Formamos la serie

$$F(y) \sim e^{-yf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(y).$$

Remontándonos a (17) y aplicando el Teorema 3 se tiene que, para  $x \rightarrow \infty$  con  $\rho > 0$

$$Z(x, v, \rho) \sim x^{\frac{v}{\rho+1}} \cdot F(x^{\frac{\rho}{\rho+1}}) = x^{\frac{v}{\rho+1}} e^{-yf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x^{\frac{\rho}{\rho+1}}) \Phi_n(x^{\frac{\rho}{\rho+1}}). \quad (18)$$

Desarrollando  $e^{-yf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x^{\frac{\rho}{\rho+1}}) \Phi_n(x^{\frac{\rho}{\rho+1}})$  en (18) se tiene

$$x^{\frac{v}{\rho+1}} \sum_{n=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{k=0}^n D_k \right] \frac{1 + (-1)^n}{2} \left| \frac{2!}{f^{(2)}(u_0) x^{\frac{1}{\rho+1}}} \right|^{(n+1)/2} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right), \quad (19)$$

con

$$D_k = \frac{x^{\frac{k}{\rho+1}}}{k!} \left( \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-2k} A_j(x^{\frac{1}{\rho+1}}) B_{n-2k-j}.$$

Sustituyendo en (19)

$$u_0 = \rho^{+1} \sqrt{\frac{1}{\rho}},$$

$$f^{(2)}(u_0) = (\rho + 1) \rho^{\frac{3}{\rho+1}},$$

$$A_0(y) = e^{-y((u_0)^\rho + \frac{1}{u_0})},$$

$$A_n(y) = \frac{e^{-y(u_0^p+1/u_0)}(-1)^n}{u_0^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} L_{n-k}^{-1}(y/u_0) P_{p,k}(y u_0^p),$$

$$B_0 = u_0^{v-1},$$

$$B_n = \binom{v-1}{n} u_0^{v-1-n},$$

y haciendo uso de la Proposición 2, obtenemos la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim \frac{e^{-(\rho+1)X} X^{\frac{v}{\rho}-1/2} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\rho(\rho+1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(X), \quad X := \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}, \quad (20)$$

con

$$\phi_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k X^{-k}}{(n-k)! \rho^k (\rho+1)^k} \sum_{j=0}^{2k} \binom{v-1}{2k-j} \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s}{(j-s)!} L_s^{-1}(\rho X) P_{\rho, j-s}(X). \quad (21)$$

**Observación 2.** La aproximación de Krätzel (7) es el primer término de la serie asintótica obtenida.

## Experimentos numéricos

Para estudiar la precisión de la aproximación (20) hemos de compararla con la integral (1) calculada numéricamente, puesto que desconocemos el valor de la función de Krätzel en el punto al tratarse de una integral sin primitiva. Para ello usamos el comando NIntegrate del software Mathematica 12.2.

- Fijamos  $\rho = 3$   $v = 7$ .

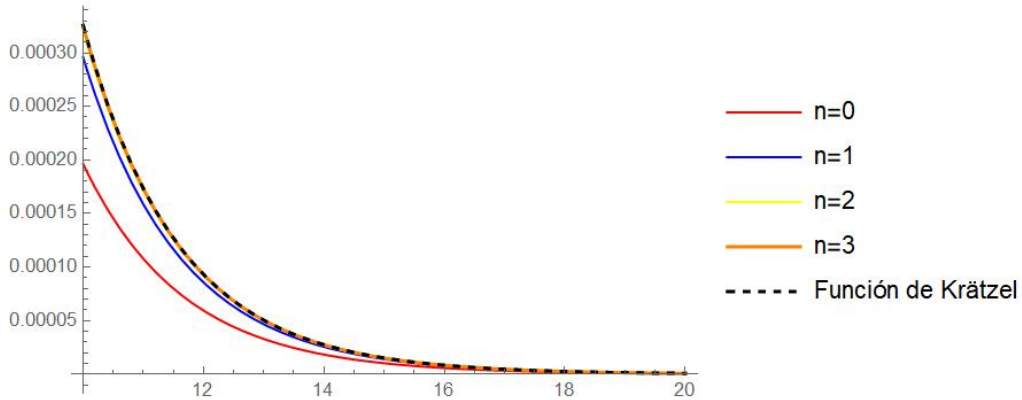


Figura 4: Función de Krätzel vs serie asintótica (20),  $x$  grande  $\rho = 3$ ,  $v = 7$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	3.97e-1	9.17e-2	1.50e-2	1.84e-3
20	2.72e-1	5.38e-2	7.81e-3	1.01e-3
50	1.54e-2	2.63e-2	3.22e-3	3.56e-4
100	9.67e-2	1.53e-2	1.68e-3	1.40e-4
500	3.05e-2	4.47e-3	1.43e-5	9.36e-7
1000	1.83e-2	2.64e-3	2.37e-4	5.19e-6

Figura 5: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (20),  $x$  grande,  $\rho = 3$ ,  $v = 7$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $x$  para cualquier valor de  $n$ , reflejando así el carácter asintótico de la serie.

- Fijamos  $\rho = 3$   $v = -7$ .

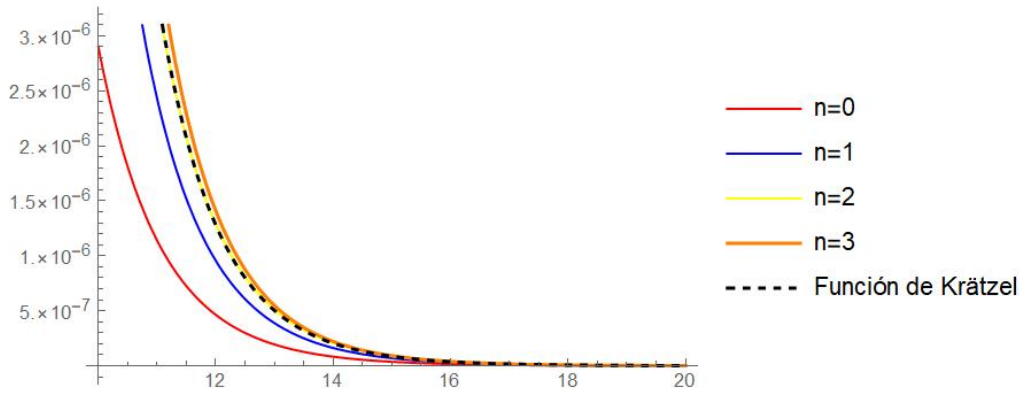


Figura 6: Función de Krätzel vs serie asintótica (20)  $x$  grande  $\rho = 3$ ,  $v = -7$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	6.91e-1	3.16e-1	1.7e-2	1.26e-1
20	4.9e-1	1.22e-1	3.2e-2	4.42e-2
50	2.8e-1	1.87e-2	1.94e-2	5.63e-3
100	1.75e-1	2.77e-3	8.7e-3	3.91e-4
500	5.52e-2	5.8e-3	7.64e-4	1.7e-4
1000	3.31e-2	4e-3	1.96e-4	7.52e-5

Figura 7: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (20),  $x$  grande,  $\rho = 3$ ,  $v = -7$ .

El comportamiento es parecido al caso de  $v$  positivo. El error disminuye con el crecimiento de  $x$  para cualquier valor de  $n$ , reflejando así el carácter asintótico de la serie.

- Fijamos  $\rho = 4$   $v = 7$ .

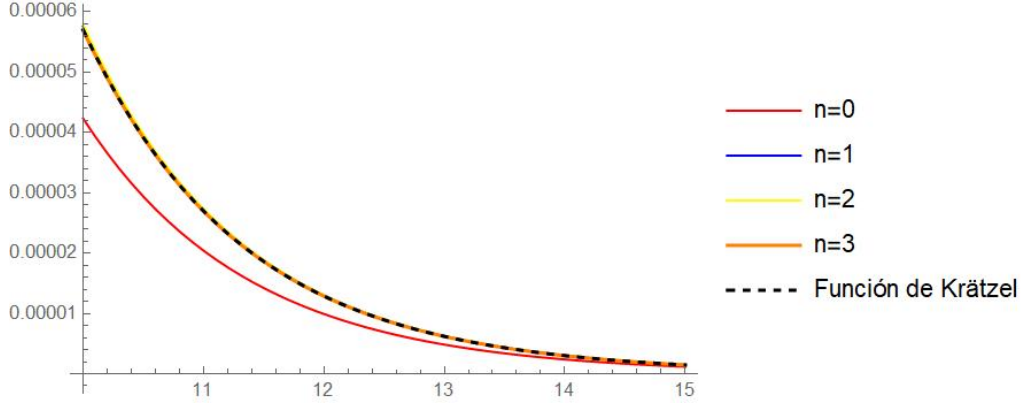


Figura 8: Función de Krätzel vs serie asintótica (20),  $x$  grande  $\rho = 4$ ,  $v = 7$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	2.57e-1	1.01e-2	1.60e-2	1.45e-3
20	1.65e-1	7.46e-3	5.98e-3	5.4e-4
50	8.65e-2	4.25e-3	1.51e-3	1.34e-4
100	5.15e-2	2.6e-3	5.20e-4	4.57e-5
500	1.47e-2	7.68e-4	4.12e-5	5.84e-6
1000	8.52e-3	4.46e-4	1.37e-5	1.18e-6

Figura 9: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (20),  $x$  grande,  $\rho = 4$ ,  $v = 7$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Se percibe una mejora en la velocidad de aproximación debido a que para  $\rho = 4$ ,  $\rho = 4$  y  $\mathcal{O}(x^{n/\rho})$  es menor.

### 3.2. $x \rightarrow \infty$ con $\rho < 0$ y $\Re(v) < 0$ .

Partimos de la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  y realizamos una serie de cambios de variable para ajustar su forma al Teorema 1. Aplicamos el cambio de variable  $t = 1/u$ .

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt = \int_0^\infty u^{-v-1} e^{-u^{-\rho} - xu} du.$$

Aplicamos el Teorema 1 con

$$f(u) = e^{-u^{-\rho}},$$

$$\lambda = -v.$$

La serie de Taylor de  $f(u)$  es

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{-\rho n},$$

y, por tanto, la serie asintótica dada por el Lema de Watson es

$$\int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-\rho n - v) x^{\rho n + v}. \quad (22)$$

Podemos estudiar además, cuándo esta serie es convergente. Usamos el método del cociente para estudiar la convergencia, además de la fórmula de Stirling para la función  $\Gamma(z)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\rho}{n+1} \frac{\Gamma(-\rho(n+1) - v)}{\Gamma(-\rho n - v)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\rho e^\rho}{n+1} \frac{\sqrt{-\rho n - v - \rho}}{\sqrt{-\rho n - v}} \frac{(-\rho n - v - \rho)^{-\rho n - v - \rho}}{(-\rho n - v)^{-\rho n - v}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Para el cálculo del límite, usamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-\rho n - v - \rho}}{\sqrt{-\rho n - v}} = 1. \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-\rho n - v - \rho}{-\rho n - v} \right)^{-\rho n - v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-\rho}{-\rho n - v} \right)^{-\rho n - v} = e^{-\rho}. \quad (25)$$

Por lo que, aplicando (24) y (25) en (23) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \left( \frac{x}{\rho} \right)^\rho \frac{n^{-\rho}}{n+1} \sim \frac{n^{-\rho}}{n} < 1 \Leftrightarrow -\rho < 1 \Leftrightarrow \rho > -1.$$

Luego la serie es convergente para  $-1 < \rho \leq 0$ . El caso particular en el que  $\rho = -1$  no es necesario estudiarlo, pues como hemos visto en (2) es una función sencilla que depende de  $\Gamma(x)$ .

## Experimentos numéricos

Comparamos la aproximación dada por la serie (22) con la integral (1) calculada numéricamente, al tratarse de una integral sin primitiva. Para ello usamos el comando NIntegrate del software Mathematica

- Fijamos  $\rho = -4$   $v = -7$ .

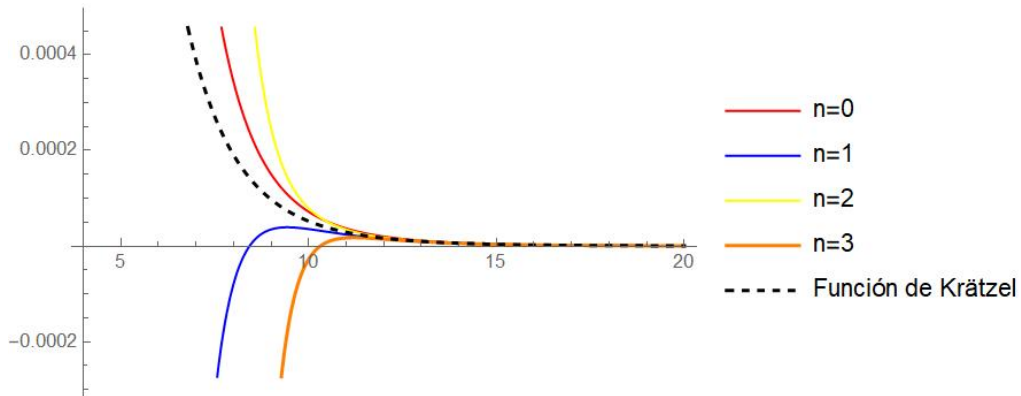


Figura 10: Función de Krätzel vs serie asintótica (22),  $x$  grande  $\rho = -4$ ,  $v = -7$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	3.79e-1	3.15e-1	5.18e-1	1.52e1
20	3.03e-2	2.13e-3	2.99e-4	7.34e-5
50	8.05e-4	1.54e-6	6.03e-9	4.21e-11
70	2.09e-4	1.04e-7	1.1e-10	3.73e-12
100	5.03e-5	6.05e-9	1.12e-12	3.54e-13

Figura 11: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (22),  $x$  grande,  $\rho = -4$ ,  $v = -7$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Conforme al crecimiento del número de términos  $n$  de la serie aparece el fenómeno de divergencia, como se puede observar en la gráfica y en la primera fila de la tabla de errores.

- Fijamos  $\rho = -0.5$   $v = -7$

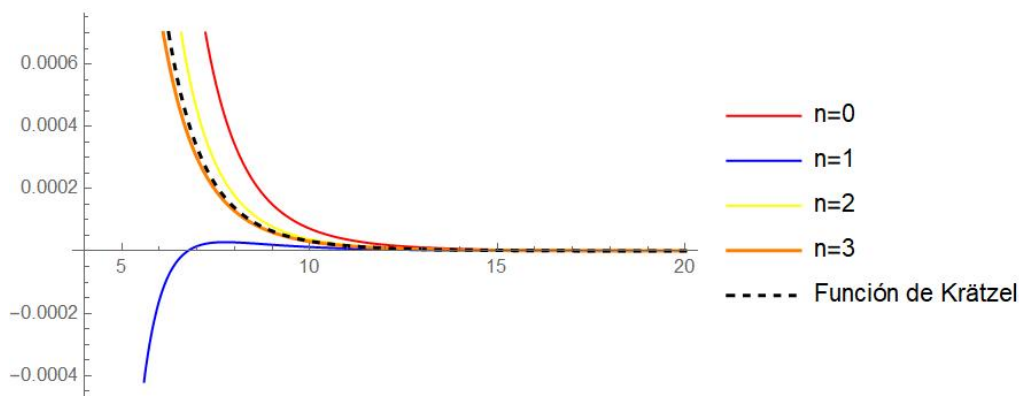


Figura 12: Función de Krätzel vs serie asintótica  $x$  grande  $\rho = -0,5$ ,  $v = -7$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	1.24	5.99e-1	1.86e-1	4.4e-2
20	7.77e-1	2.55e-1	5.54e-2	9.13e-3
50	4.4e-1	8.88e-2	1.19e-2	1.123e-3
100	2.95e-1	4.14e-2	3.92e-3	2.85e-4
500	1.22e-1	7.54e-3	3.16e-4	1.02e-5
1000	8.55e-2	3.69e-3	1.08e-4	2.48e-6

Figura 13: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica ,  $x$  grande,  $\rho = -0,5$ ,  $v = -7$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. A partir de  $x = 1$  la serie es convergente y así lo refleja la gráfica y la tabla.



## 4. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores pequeños de $x$

### 4.1. $x \rightarrow 0$ con $\rho > 0$

Vamos a realizar una serie de cambios de variable en la representación integral (1) para poder aplicar el Teorema 2. Aplicamos el cambio de variable  $t = xu^{1/\rho}$  y tomamos  $y = x^\rho$

$$\begin{aligned} Z(x, y, \rho) &= \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt = \int_0^\infty \frac{x}{\rho} u^{(1-\rho)/\rho} x^{v-1} u^{(v-1)/\rho} e^{-u^{-1/\rho}} e^{-x^\rho u} du = \\ &= \frac{x^v}{\rho} \int_0^\infty u^{(v-\rho)/\rho} e^{-u^{-1/\rho}} e^{-y u} du \end{aligned} \quad (26)$$

Vamos a aplicar el método de continuación analítica (Teorema 2). En nuestro caso la variable es  $y$  y las funciones

$$\begin{aligned} h(u) &= e^{-u}, \\ f(u) &= u^{(v-\rho)/\rho} e^{-u^{-1/\rho}}. \end{aligned}$$

El desarrollo de  $h(u)$  es

$$\sum_n \frac{(-1)^n u^n}{n!}.$$

Por tanto, en la notación del método de continuación analítica,  $\beta_j = j$  y  $b_j = \frac{(-1)^j}{j!}$ . El desarrollo de  $f(u)$  es

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} u^{-(\frac{n-v}{\rho}+1)}.$$

Por tanto, siguiendo la notación del Teorema 2, se tienen los coeficientes  $\alpha_k = \frac{k-v}{\rho} + 1$  y  $a_k = (-1)^k/k!$ . Veamos la transformada de Mellin de  $h$ .

$$M[h, z] = \int_0^\infty t^{z-1} h(t) dt = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(z).$$

Ahora el turno de la transformada de Mellin de  $f$ . Con el cambio de variable  $t = u^{-\rho}$

$$\begin{aligned} M[f, z] &= \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt = \int_0^\infty t^{z-1} t^{(v-\rho)/\rho} e^{-t^{-1/\rho}} dt = \\ &= \int_0^\infty t^{z-1+(v-\rho)/\rho} e^{-t^{-1/\rho}} dt = \int_0^\infty -\rho u^{-\rho-1} u^{(-\rho z + \rho - (v-\rho))} e^{-u} du = \\ &= -\rho \Gamma[\rho - v - \rho z]. \end{aligned}$$

Así, podemos aplicar el método de continuación analítica, el Teorema 2.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(yt) f(t) dt &\approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k M[h; 1 - \alpha_k] y^{\alpha_k - 1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j M[f; \beta_j + 1] y^{\beta_j} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-k}{\rho}\right) y^{\frac{k-v}{\rho}} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1} \rho}{j!} \Gamma(-v - \rho j) y^j. \end{aligned}$$

Finalmente, remontándonos a (26)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt &= \frac{x^v}{\rho} \int_0^\infty u^{(v-\rho)/\rho} e^{u^{-1/\rho}} e^{-x^\rho u} du = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\rho} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-k}{\rho}\right) x^k + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \Gamma(-v - \rho j) x^{\rho j + v}. \end{aligned} \quad (27)$$

Si  $\alpha_k - \beta_j = 1 \Leftrightarrow \frac{k-v}{\rho} - j = 0$ , se sustituye la suma

$$\frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-k}{\rho}\right) y^{\frac{k-v}{\rho}} + \frac{(-1)^{j+1} \rho}{j!} \Gamma(-v - \rho j) y^j,$$

por el término

$$\begin{aligned} x^{\beta_j} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} [a_k M[h; z + 1 - \alpha_k] + b_j M[f; z + \beta_j + 1] - a_k b_j \log x] \right\} &= \\ = x^{\beta_j} \left[ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-kz}{\rho} + z\right) + \frac{(-1)^{j+1} \rho}{j!} \Gamma(-v - \rho j - \rho z) \right] - a_k b_j \log x &= \\ = \frac{(-1)^{j+k+1}}{k! j!} x^{\rho j + v} \log x, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por anularse los dos términos de  $\Gamma(z)$  al tender a un punto de ramificación en signo contrario.

Veamos cuando esta serie es convergente. Primero estudiamos la serie

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{v-n}{\rho}\right) x^{\frac{n-v}{\rho}}.$$

Denotamos  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ . Usamos el criterio del cociente y la fórmula de Stirling

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\sigma}{(n+1)} \frac{\Gamma(\sigma v - \sigma n - \sigma)}{\Gamma(\sigma v - \sigma n)} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(ex)^\sigma}{(n+1)} \frac{\sqrt{(v-n-1)} (\sigma v - \sigma n - \sigma)^{\sigma v - \sigma n - \sigma}}{\sqrt{(v-n)} (\sigma v - \sigma n)^{\sigma v - \sigma n}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Para el cálculo del límite usamos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v-n-1}{v-n}\right)^{\sigma(v-n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-v}\right)^{\sigma(v-n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\sigma}{v-n}\right)^{\sigma(v-n)} = e^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(v-n-1)}}{\sqrt{(v-n)}} = 1. \quad (30)$$

Usando (29) y (30) en (28) obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} x^\sigma \frac{n^{-\sigma}}{n+1} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\sigma}}{n} < 1 \Leftrightarrow -\sigma < 1 \Leftrightarrow \rho < -1.$$

Por tanto no es convergente para ningun valor de  $\rho > 0$ . Estudiemos la convergencia de la serie

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} \rho}{n!} \Gamma(-v - \rho n) x^n.$$

Para ello, estudiamos la convergencia con la fórmula de Stirling y el criterio del cociente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} \frac{\Gamma(-v - \rho n - \rho)}{\Gamma(-v - \rho n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x e^\rho}{n+1} \frac{\sqrt{-v - \rho n - \rho} (-v - \rho n - \rho)^{-v - \rho n - \rho}}{\sqrt{-v - \rho n} (-v - \rho n)^{-v - \rho n}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Para calcular el límite hacemos uso de los siguientes límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-v - \rho n - \rho}}{\sqrt{-v - \rho n}} = 1. \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-v - \rho n - \rho}{-v - \rho n} \right)^{-v - \rho n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-\rho}{-v - \rho n} \right)^{-v - \rho n} = e^{-\rho}. \quad (33)$$

Usando (32) y (33) en (31)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} (-v - \rho n - \rho)^{-v - \rho n - \rho} \sim \frac{n^{-\rho}}{n} < 1 \Leftrightarrow -\rho < 1 \Leftrightarrow \rho > -1.$$

Por tanto podemos concluir que la serie asintótica obtenida por el método de Mellin no es convergente para ningun valor de  $\rho$  ni para ningún valor de  $x$ .

**Observación 3.** Las aproximaciones de Krätzel (3) y (4) son los primeros términos del desarrollo dado.

## Experimentos numéricos

Comparamos la aproximación dada por (27) con la integral (1) calculada numéricamente, usando el comando NIntegrate del software Mathematica.

- Fijamos  $\rho = 5$ ,  $v = 3.2$  y tomamos  $n = m$ .

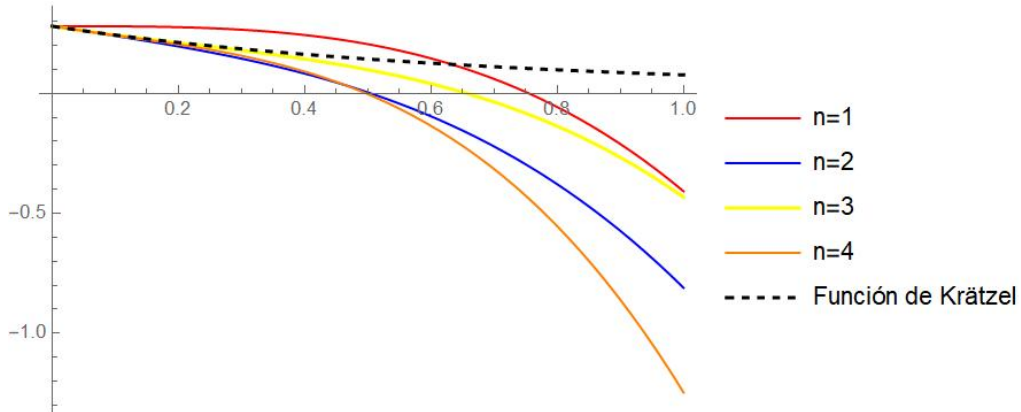


Figura 14: Función de Krätzel vs serie asintótica (27),  $x$  pequeña  $\rho = 5$ ,  $v = 3.2$ .

$x \setminus n$	1	2	3	4
$10^{-1}$	1.49e-1	1.57e-2	1.98e-3	3.54e-3
$10^{-2}$	1.44e-2	1.35e-4	9.67e-7	1.97e-6
$10^{-3}$	1.43e-3	1.34e-6	1.53e-9	1.37e-9
$10^{-4}$	1.43e-4	1.34e-8	6.09e-12	3.19e-12

Figura 15: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (27),  $x$  pequeña,  $\rho = 5$ ,  $v = 3.2$ .

El error disminuye con el decrecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. En  $x$  grandes se refleja el comportamiento divergente de la serie.

#### 4.2. $x \rightarrow 0$ con $\rho < 0$ y $\Re(v) < 0$

Partimos de la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  y realizamos una serie de cambios de variable. En este caso no utilizamos ningún método explicado anteriormente, simplemente desarrollaremos en serie un término de la integral e intercambiaremos suma por integral. Aplicamos el cambio de variable  $t = 1/u$  en (1)

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt = \int_0^\infty u^{-v-1} e^{-u^{-\rho} - xu} du. \quad (34)$$

La función  $e^{-xu}$  tiene por desarrollo en serie

$$e^{-xu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} u^n. \quad (35)$$

Sustituimos la expresión (35) en (34) e intercambiamos suma por integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{-v-1} e^{-u^{-\rho} - xu} du &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty u^{n-v-1} e^{-u^{-\rho}} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\rho n!} \int_0^\infty u^{\frac{v-n}{\rho}-1} e^{-u} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\rho n!} \Gamma\left(\frac{v-n}{\rho}\right), \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable  $u = u^{-\rho}$  en la segunda igualdad. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\rho n!} \Gamma\left(\frac{v-n}{\rho}\right), \quad (36)$$

es un desarrollo asintótico cuando  $x \rightarrow 0$ . Veamos cuando esta expresión es una serie convergente. Sea  $\sigma = 1/\rho$ . Usando el criterio del cociente y la fórmula de Stirling, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x}{j+1} \frac{\Gamma(-\sigma(j+1) + \sigma v)}{\Gamma(-\sigma j + \sigma v)} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x e^\sigma}{j+1} \frac{\sqrt{-\sigma(j+1) + \sigma v}}{\sqrt{-\sigma j + \sigma v}} \frac{(-\sigma(j+1) + \sigma v)^{-\sigma(j+1) + \sigma v}}{(-\sigma j + \sigma v)^{-\sigma j + \sigma v}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Para el cálculo del límite usamos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-\sigma(j+1) + \sigma v}}{\sqrt{-\sigma j + \sigma v}} = 1, \quad (38)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(-\sigma j + \sigma v - \sigma)^{-\sigma j + \sigma v}}{(-\sigma j + \sigma v)^{-\sigma j + \sigma v}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\sigma}{-\sigma j + \sigma v}\right)^{-\sigma j + \sigma v} = e^{-\sigma}. \quad (39)$$

Usando (38) y (39) en (37) obtenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \sim x \sigma^{(-\sigma)} \frac{j^{-\sigma}}{j+1} \sim \frac{j^{-\sigma}}{j} < 1 \Leftrightarrow -\sigma - 1 < 0 \Leftrightarrow \rho < -1.$$

No es necesario estudiar el caso en el que  $\rho = -1$ , puesto que la función de Krätzel adopta una forma más sencilla, como vimos en (2)

- Fijamos  $\rho = -1.5$ ,  $v = -3$ .

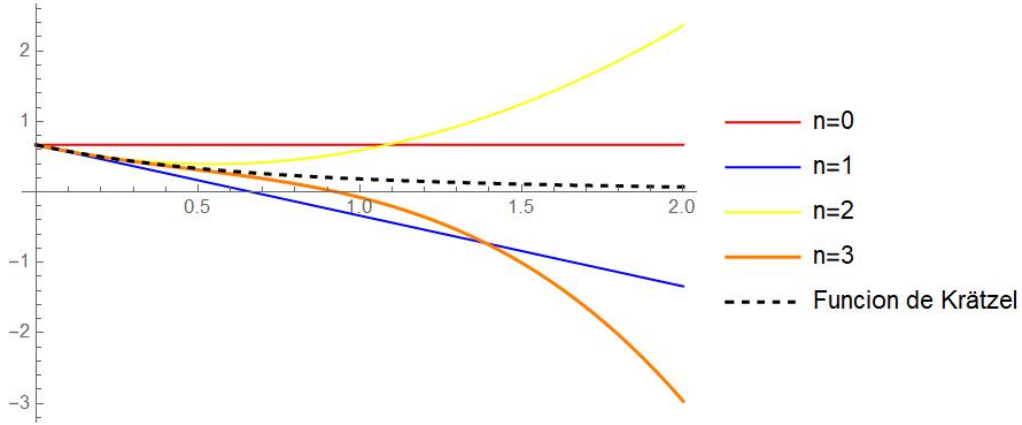


Figura 16: Función de Krätzel vs serie asintótica (36),  $x$  pequeña  $\rho = -1.5$ ,  $v = -3$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
$10^{-1}$	1.59e-1	1.50e-2	1.09e-3	6.73e-5
$10^{-2}$	1.51e-2	1.4e-4	1e-6	6.188e-9
$10^{-3}$	1.5e-3	1.39e-6	1e-9	3.19e-13
$10^{-4}$	1.50e-4	1.38e-8	1.29e-12	2.99e-13

Figura 17: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (36),  $x$  pequeña,  $\rho = -1.5$ ,  $v = -3$ .

El error disminuye con el decrecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Con el número de términos  $n$  también disminuye el error. Se trata del caso convergente, y se refleja con el hecho de que con el crecimiento de  $n$ , la curva de aproximación se acerca a la Función de Krätzel.

- Fijamos  $\rho = -0.5$ ,  $v = -3$ .

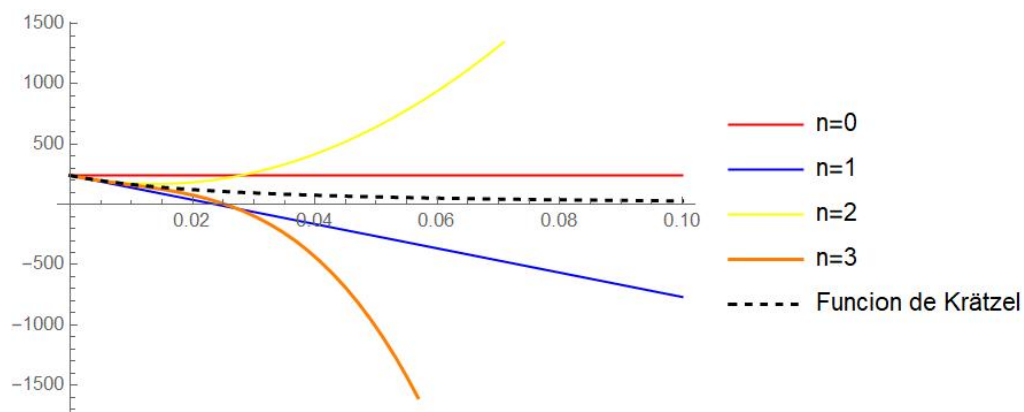


Figura 18: Función de Krätzel vs serie asintótica (36),  $x$  pequeña  $\rho = -0.5$ ,  $v = -3$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
$10^{-1}$	7.37	2.78e1	98.79	3.65e2
$10^{-2}$	4.46e-1	1.6e-1	5.8e-2	2.21e-2
$10^{-3}$	4.22e-2	1.52e-3	5.56e-5	2.16e-6
$10^{-4}$	4.2e-3	1.51e-5	5.54e-8	2.16e-10

Figura 19: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (36),  $x$  pequeña,  $\rho = -0.5$ ,  $v = -3$ .

El error disminuye con el decrecimiento de  $x$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Con  $x$  grandes aparece un comportamiento de divergencia a medida que se aumenta  $n$ .

## 5. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para valores grandes de $v$

### 5.1. $v \rightarrow +\infty$

Realizamos una serie de cambios de variable para que la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  se ajuste a las hipótesis del Teorema 3.

Aplicamos el cambio  $t = u(v-1)^{(1/\rho)} = u(V)^{(1/\rho)}$  en (1), con  $V = v-1 > 0$

$$\begin{aligned} Z(x, v, \rho) &= \int_0^\infty V^{(V+1)/\rho} u^V e^{-u^\rho V - xV^{-1/\rho}/u} du = \\ &= V^{(V+1)/\rho} \int_0^\infty e^{-V(u^\rho - \log(u))} e^{\frac{-xV^{-1/\rho}}{u}} du. \end{aligned} \quad (40)$$

Observamos que la integral no se ajusta tanto como querríamos a las hipótesis del Teorema 3, puesto que la función que hace el papel de  $g(u)$ , en este caso  $e^{\frac{-xV^{-1/\rho}}{u}}$ , depende de  $V$ , el parámetro asintótico grande. Sin embargo, hacemos uso de la metodología del Teorema 3 y comprobaremos al final si lo que obtenemos se trata de una serie asintótica.

La función de fase  $f(u) = u^\rho - \log(u)$  tiene mínimo en  $u_0 = \sqrt[\rho]{1/\rho}$  y por tanto  $s = 0$ . Su derivada  $n$ -ésima en  $u_0$  es

$$f^{(n)}(u_0) = \left( \left[ \prod_{k=0}^{n-1} (\rho - k) \right] \rho^{\frac{n-\rho}{\rho}} + \frac{(-1)^n (n-1)!}{\rho^{\frac{-n}{\rho}}} \right).$$

Estudiamos en concreto la derivada segunda

$$f^{(2)}(u_0) = (\rho)(\rho-1)\rho^{\frac{2-\rho}{\rho}} + \rho^{\frac{2}{\rho}} = \rho^{1+\frac{2}{\rho}} > 0.$$

La derivada segunda nunca se anula por tanto  $m = 2$ . Estudiamos ahora la derivada tercera.

$$f^{(3)}(u_0) = (\rho)(\rho-1)(\rho-2)\rho^{\frac{3-\rho}{\rho}} - 2\rho^{\frac{3}{\rho}} = \rho^{\frac{3}{\rho}} ((\rho)(\rho-3)).$$

Cuando  $\rho = 3$  se anula. Por tanto  $p = 3$  cuando  $\rho \neq 3$  y  $p = 4$  cuando  $\rho = 3$ . La función  $g(u) = e^{\frac{-xV^{-1/\rho}}{u}}$  tiene, por la Proposición 3, derivada  $n$ -ésima de la forma

$$g^{(n)}(u) = u^{-n} e^{\frac{-xV^{-1/\rho}}{u}} n! (-1)^n L_n^{-1} \left( \frac{xV^{-1/\rho}}{u} \right).$$

Así, el desarrollo de  $g(u)$  en  $u_0$  tiene los coeficientes

$$B_n(V) = u_0^{-n} e^{\frac{-xV^{-1/\rho}}{u_0}} (-1)^n L_n^{-1} \left( \frac{xV^{-1/\rho}}{u_0} \right).$$

Es el turno de calcular los coeficientes  $A_n(V)$ . Para ello primeros estudiamos la función  $G(u) = e^{-Vu^\rho}$ . Para hallar la serie de Taylor  $G(u)$  hacemos uso de la Proposición 3.

$$G^{(n)}(u) = u^{-n} e^{-Vu^\rho} P_{\rho, n}(Vu^\rho).$$

Por tanto, su serie centrada en  $u_0$  es

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^\rho} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho).$$

Así, el desarrollo en serie de la función  $e^{-V(u^\rho - \log(u))} = G(u)u^V$  es

$$\begin{aligned} e^{-V(u^\rho - \log(u))} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^\rho} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho) (u - u_0)^n u^V = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^\rho} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho) (u - u_0)^n (u - u_0 + u_0)^V = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_0^{V-n} e^{-Vu_0^\rho} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho) (u - u_0)^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes  $A_n(V)$  son

$$A_n(V) = u_0^{V-n} e^{-Vu_0^\rho} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho).$$

Tenemos los coeficientes de los desarrollos de Taylor necesarios para aplicar el Teorema 3. Definimos  $a_n(V)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  como

$$a_n(V) = e^{Vf(u_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \left( \frac{V^k}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(u_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(V) B_{n-mk-j}(V) \right).$$

Definimos  $\Phi_n(V)$  según el método de Laplace modificado

$$\Phi_n(V) = \frac{\alpha + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(u_0)V} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma\left(\frac{n+s+1}{m}\right).$$

En nuestro caso, como  $u_0 \notin \{0, \infty\}$ , entonces  $\alpha, \beta = 1$ . Tenemos la serie

$$F(V) = e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V).$$

Remontándonos a (40) y aplicando el Teorema 3 se tiene la aproximación asintótica para  $v \rightarrow \infty$

$$Z(x, v, \rho) \sim V^{\frac{v+1}{\rho}} \cdot F(x^{\frac{\rho}{\rho+1}}) = V^{\frac{v+1}{\rho}} e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V). \quad (41)$$

Desarrollando la serie  $e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V)$  se sigue en (41)

$$Z(x, v, \rho) \sim V^{\frac{v+1}{\rho}} \sum_{n=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{k=0}^n D_k \right] \frac{1 + (-1)^n}{2} \left| \frac{2!}{f^{(2)}(u_0)V} \right|^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad (42)$$



con

$$D_k = \frac{V^k}{k!} \left( \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-2k} A_j(V) B_{n-2k-j}(V).$$

Sustituyendo en

$$u_0 = \sqrt[\nu]{1/\rho},$$

$$f''(u_0) = \rho^{1+\frac{2}{\rho}},$$

$$A_n(V) = u_0^{V-n} e^{-Vu_0^\rho} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{\rho,n}(Vu_0^\rho),$$

$$B_n(V) = u_0^{-n} e^{-\frac{xV^{-1/\rho}}{u_0}} (-1)^n L_n^{-1} \left( \frac{xV^{-1/\rho}}{u_0} \right),$$

y haciendo uso de la Proposición 2, obtenemos la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim e^{-x\left(\frac{\rho}{v-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}} e^{-\frac{v-1}{\rho}} \left( \frac{v-1}{\rho} \right)^{\frac{v}{\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(v-1)\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)_n \phi_n(v), \quad (43)$$

con

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (v-1)^{-k}}{(n-k)! \rho^k} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{v-1}{j-r} \frac{(-1)^j}{r!} P_{\rho,r} \left( \frac{v-1}{\rho} \right) L_{2k-j}^{-1} \left( x \left( \frac{\rho}{v-1} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right). \quad (44)$$

Hay que comprobar que la serie es asintótica, puesto que en el teorema de Laplace modificado no viene reflejado el hecho que los coeficientes  $B_n$  dependan de  $V$ , sino que  $B_n = \mathcal{O}(1)$ . Sin embargo, en este caso

$$B_n(V) = u_0^{-n} e^{-\frac{xV^{-1/\rho}}{u_0}} P_{-1,n} \left( \frac{xV^{-1/\rho}}{u_0} \right) \frac{1}{n!} = \mathcal{O}(V^{-n/\rho}).$$

Como  $V$  crece y es positiva, y  $\rho$  es positiva,  $V^{-n/\rho}$  decrece y no hay problemas de asintoticidad, pues decrece más rápido que  $\mathcal{O}(1)$ , es decir, podemos suponer que  $B_n = \mathcal{O}(1)$ .

**Observación 4.** Para el caso particular de  $n = 0$  en (43), se tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$Z(x, v, \rho) \sim e^{-x\left(\frac{\rho}{v-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}} e^{-\frac{v-1}{\rho}} \left( \frac{v-1}{\rho} \right)^{\frac{v}{\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(v-1)\rho}} \quad \text{cuando } v \rightarrow \infty.$$

## Experimentos numéricos

Para estudiar la precisión de la aproximación hemos de comparar nuestra aproximación (43) con la integral (1) calculada numéricamente usando el comando NIntegrate del software Mathematica 12.2

- Fijamos  $\rho = 4$   $x = 2$ .

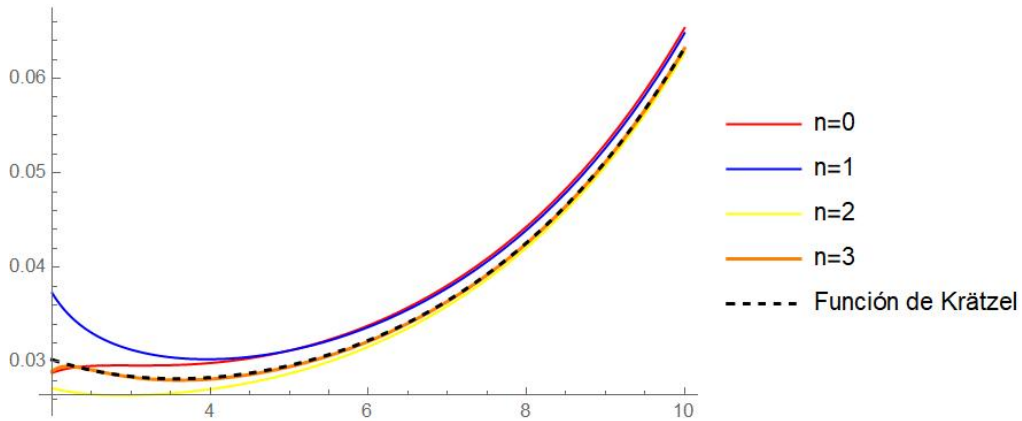


Figura 20: Función de Krätzel vs serie asintótica (43),  $v$  grande y positiva  $\rho = 4$ ,  $x = 2$ .

$v \setminus n$	0	1	2	3
10	3.32e-2	2.46e-2	8.40e-3	7.91e-4
20	1.66e-2	1.08e-2	3.09e-3	5.18e-5
50	6.13e-3	3.58e-3	1.08e-3	1.04e-5
100	2.81e-3	1.55e-3	5.25e-4	4.57e-6
500	4.44e-4	2.33e-4	1.04e-4	2.74e-7
1000	1.99e-4	1.04e-4	5.20e-5	7.36e-8

Figura 21: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (43),  $v$  grande positivo,  $\rho = 4$ ,  $x = 2$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $v$  reflejando el carácter asintótico de la serie.

- Fijamos  $\rho = 3$   $x = 2$ .

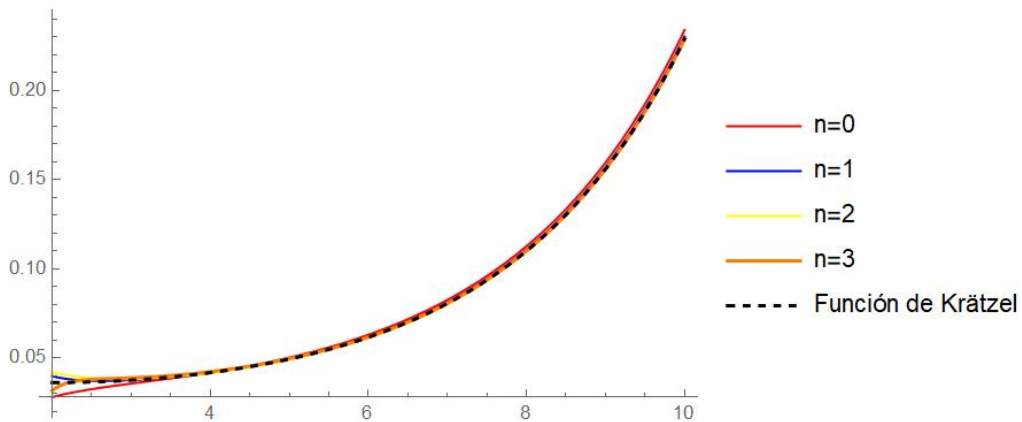


Figura 22: Función de Krätzel vs serie asintótica (43),  $v$  grande y positiva  $\rho = 3$ ,  $x = 2$ .

$v \setminus n$	0	1	2	3
10	2.21e-2	6.05e-3	2.07e-3	3.07e-4
20	1.27e-2	3.93e-3	4.12e-4	1.21e-4
50	4.94e-3	1.67e-3	4.45e-5	1.83e-5
100	2.28e-3	8.40e-4	8.05e-6	4.34e-6
500	3.66e-4	1.67e-4	1.2e-7	1.64e-7
1000	1.65e-4	8.34e-5	1.44e-8	4.07e-8

Figura 23: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (43) ,  $v$  grande y positiva,  $\rho = 3$ ,  $x = 2$ .

El error disminuye con el crecimiento de  $v$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Con el número de términos  $n$  también disminuye el error para  $v$  grandes. Notese que el error decrece más rápido que con  $\rho = 4$ . Este comportamiento se explica con el orden de  $a_n = \mathcal{O}(x^{[n/p]})$ , por lo que se tiene menos orden en este caso.

## 5.2. $v \rightarrow -\infty$ con $\rho > 0$ .

Ajustamos la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  para obtener las hipótesis del Teorema 3 Aplicamos el cambio de variable  $t = 1/s$  en (1)

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty s^{-v-1} e^{-s^{-\rho} - xs} ds. \quad (45)$$

Tomamos  $V = -v - 1 > 0$  y hacemos el cambio de variable  $s = \frac{uV}{x}$ .

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty s^{-v-1} e^{-s^{-\rho} - xs} ds = \left(\frac{V}{x}\right)^{V+1} \int_0^\infty e^{-V(u-\log(u))} e^{-\left(\frac{x}{uV}\right)^\rho} du. \quad (46)$$

Observamos que la integral no se ajusta tanto como queríamos a la forma estándar del Teorema 3, puesto que la función que hace el papel de  $g(u)$ , en este caso  $e^{-\left(\frac{x}{uV}\right)^\rho}$ , depende de  $V$ , el parámetro asintótico. Sin embargo, hacemos uso de la metodología del Teorema 3 y comprobaremos al final si se trata de una serie asintótica.

La función de fase es  $f(u) = u - \log(u)$  que tiene mínimo en  $u_0 = 1$ , luego  $s = 0$ . Estudiemos las sucesivas derivadas de la función de fase.

$$f^{(n)}(u) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{u} & \text{si } n = 1 \\ (-1)^n \frac{(n-1)!}{u^n} & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

tanto  $f''(u_0)$  como  $f'''(u_0)$  son distintas de 0. Por tanto,  $m = 2$  y  $p = 3$ .

Para el cálculo de los coeficientes  $A_n(V)$  necesitamos la derivada n-ésima

$$\begin{aligned} e^{-V(u-\log(u))} &= e^{-Vu} u^V = u^V \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-Vu_0} V^n}{n!} (u - u_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{V}{n-k} \frac{e^{-Vu_0} V^k}{k!} (u - u_0)^n. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A_n(V) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{V}{n-k} \frac{e^{-Vu_0} V^k}{k!} u_0^{V+k-n}.$$

Para el cálculo de los coeficientes  $B_n$  necesitamos la derivada n-ésima de la función  $g(u) = e^{-\left(\frac{x}{uV}\right)^\rho}$ . Para ello, hacemos uso de la Proposición 3

$$g^{(n)}(u) = u^{-n} e^{-\left(\frac{x}{uV}\right)^\rho} P_{-\rho, n} \left( \left( \frac{x}{uV} \right)^\rho \right).$$

Así, los coeficientes  $B_n(V)$  son

$$B_n(V) = \frac{u_0^{-n} e^{-\left(\frac{x}{u_0V}\right)^\rho}}{n!} P_{-\rho, n} \left( \left( \frac{x}{u_0V} \right)^\rho \right).$$

Tenemos los coeficientes de los desarrollos de Taylor necesarios para aplicar el Teorema 3. Definimos  $a_n(V)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  como

$$a_n(V) = e^{Vf(u_0)} \sum_{k=0}^{[n/m]} \left( \frac{V^k}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(u_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(V) B_{n-mk-j}(V) \right).$$

Definimos  $\Phi_n(V)$  según el método de Laplace modificado

$$\Phi_n(V) = \frac{\alpha + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(u_0)V} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma \left( \frac{n+s+1}{m} \right).$$

En nuestro caso, como  $u_0 \notin \{0, \infty\}$ , entonces  $\alpha, \beta = 1$ . Se tiene la serie

$$F(V) = e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V). \quad (47)$$

Remontándonos a (46) y aplicando el Teorema 3 se tiene la serie para  $v \rightarrow -\infty$  y  $\rho > 0$

$$Z(x, v, \rho) \sim \left( \frac{V}{x} \right)^{V+1} F(V) = \left( \frac{V}{x} \right)^{V+1} e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V). \quad (48)$$

Desarrollando la serie  $e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V)$  se tiene en (48)

$$Z(x, v, \rho) \sim \left( \frac{V}{x} \right)^{V+1} \sum_{n=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{k=0}^{[n/2]} D_k \right] \frac{1 + (-1)^n}{2} \left| \frac{2!}{f^{(2)}(u_0)V} \right|^{(n+1)/2} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right), \quad (49)$$

con

$$D_k = \frac{V^k}{k!} \left( \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-2k} A_j(V) B_{n-2k-j}(V)$$

Sustituyendo en (49) con

$$V = -v - 1$$

$$u_0 = 1$$

$$f''(u_0) = 1$$

$$A_n(V) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{V}{n-k} \frac{e^{-V u_0} V^k}{k!},$$

$$B_n(V) = \frac{u_0^{-n} e^{-\left(\frac{x}{u_0 V}\right)^\rho}}{n!} P_{-\rho, n} \left( \left( \frac{x}{u_0 V} \right)^\rho \right).$$

y haciendo uso de la Proposición 2, obtenemos la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim \left( \frac{-v-1}{x} \right)^{-v} e^{-\left(\frac{x}{-v-1}\right)^\rho} e^{v+1} \sqrt{\frac{2\pi}{-v-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)_n \phi_n(v), \quad (50)$$

con

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (-v-1)^{-k}}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-v-1}{j-r} \frac{(-1)^r (-v-1)^r}{(2k-j)! r!} P_{-\rho, 2k-j} \left( \left( \frac{x}{-v-1} \right)^\rho \right).$$

Tenemos que probar el carácter asintótico, puesto que los coeficientes  $B_n(V)$  dependen de  $V$  y en el Teorema 3 no viene reflejado este comportamiento. En este caso

$$B_n(V) = \frac{u_0^{-n} e^{-\left(\frac{x}{u_0 V}\right)^\rho}}{n!} P_{-\rho, n} \left( \left( \frac{x}{u_0 V} \right)^\rho \right) = e^{-\left(\frac{x}{u_0 V}\right)^\rho} \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{V} \right)^{n\rho} \right).$$

Como  $p > 0$  y  $V$  tiende a infinito, éste es un mejor comportamiento asintótico que  $\mathcal{O}(1)$ , luego podemos aplicar el Teorema 3 suponiendo que  $B_n(V) = \mathcal{O}(1)$ .

**Observación 5.** Para el caso particular  $n = 0$  de la serie asintótica (50), se tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$Z(x, v, \rho) \sim \left( \frac{-v-1}{x} \right)^{-v} e^{-\left(\frac{x}{-v-1}\right)^\rho} e^{v+1} \sqrt{\frac{2\pi}{-v-1}}, \quad \text{cuando } v \rightarrow -\infty, \rho > 0.$$

## Experimentos numéricos

Comparamos la aproximación (50) con la integral (1) calculada numéricamente con el comando NIntegrate del software Mathematica 12.2.

- Fijamos  $\rho = 5$  x=10

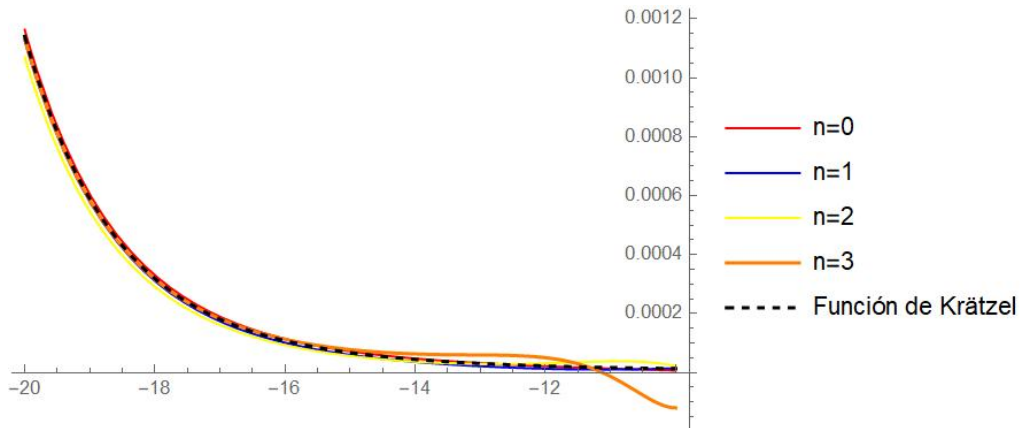


Figura 24: Función de Krätzel vs serie asintótica (50),  $v$  grande y negativa  $\rho = 5$ ,  $x = 10$

$v \setminus n$	0	1	2	3
-10	4.97e-1	8.61e-2	6.94e-1	10.12
-20	1.97e-2	1.16e-2	6.11e-2	8.45e-3
-50	1.61e-3	1.72e-3	1.7e-2	1.03e-3
-100	8.4e-4	8.41e-4	8.41e-3	2.55e-4
-200	4.18e-4	4.18e-4	4.18e-3	6.31e-5

Figura 25: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (50) ,  $v$  grande y negativo,  $\rho = 5$  ,  $x = 10$

El error disminuye con el decrecimiento de  $v$  reflejando el carácter asintótico de la serie. Conforme aumenta  $n$  aparece el fenómeno de divergencia de la serie asintótica, que se puede observar en la curva de  $n = 3$  para  $v$  cercanos a 0.

### 5.3. $v \rightarrow -\infty$ con $\rho < 0$ .

Ajustamos la representación integral (1) de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  para aplicar el Teorema 3. Empezamos aplicando cambio de variable  $t = 1/s$  en (1),

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t^\rho - x/t} dt = \int_0^\infty s^{-v-1} e^{-s^{-\rho} - xs} ds.$$

Aplicamos el cambio de variable  $s = u(-v-1)^{-(1/\rho)} = u(V)^{(-1/\rho)}$  con  $V = -v-1 > 0$ ,

$$\begin{aligned} Z(x, v, \rho) &= \int_0^\infty s^{-v-1} e^{-s^{-\rho} - xs} ds = V^{(-V-1)/\rho} \int_0^\infty u^V e^{-u^{-\rho} V - xV^{-1/\rho} u} du = \\ &= V^{(-V-1)/\rho} \int_0^\infty e^{-V(u^{-\rho} - \log(u))} e^{-xV^{-1/\rho} u} du. \end{aligned} \quad (51)$$

Observamos que la integral no se ajusta tanto como queríamos, puesto que la función que hace el papel de  $g(u)$ , en este caso  $e^{-xV^{-1/\rho} u}$ , depende de  $V$ . Sin embargo, hacemos uso de la metodología del Teorema 3 y comprobaremos al final si se trata de una serie asintótica.

La función de fase  $f(u) = u^\rho - \log(u)$  tiene el mínimo en  $u_0 = \sqrt[\rho]{-1/\rho}$  y por tanto  $s = 0$ . Su derivada  $n$ -ésima en  $u_0$  es

$$f^{(n)}(u_0) = \left( \left[ \prod_{k=0}^{n-1} (-\rho - k) \right] (-\rho)^{\frac{n+\rho}{-\rho}} + \frac{(-1)^n (n-1)!}{(-\rho)^{\frac{-n}{-\rho}}} \right).$$

Estudiamos en concreto la derivada segunda

$$f^{(2)}(u_0) = (-\rho)(-\rho-1)(-\rho)^{\frac{2-\rho}{-\rho}} + (-\rho)^{\frac{2}{-\rho}} = (-\rho)^{1+\frac{2}{-\rho}} > 0.$$

La derivada segunda nunca se anula por tanto  $m = 2$ . Estudiamos ahora la derivada tercera.

$$f^{(3)}(u_0) = (-\rho)(-\rho-1)(-\rho-2)(-\rho)^{\frac{3+\rho}{-\rho}} - 2(-\rho)^{\frac{3}{-\rho}} = (-\rho)^{\frac{-3}{\rho}} (\rho(\rho+3)),$$

que se anula cuando  $\rho = -3$  se anula. Por tanto  $p = 3$  cuando  $\rho \neq -3$  y  $p = 4$  cuando  $\rho = -3$ .

Vamos a calcular los coeficientes  $A_n(V)$ . Para ello primeros estudiamos la función  $G(u) = e^{-V(u^{-\rho})}$ . Para hallar su serie de Taylor de hacemos uso de la Proposición 3.

$$G^{(n)}(u) = u^{-n} e^{-Vu^{-\rho}} P_{-\rho,n}(Vu^{-\rho}).$$

Por tanto, su serie centrada en  $u_0$  es

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^{-\rho}} P_{-\rho,n}(Vu_0^{-\rho})(u - u_0)^n$$

Así, el desarrollo en serie de la función  $e^{-V(u^{-\rho} - \log(u))} = e^{-Vu^{-\rho}} u^V$  es

$$\begin{aligned} e^{-Vu^{-\rho}} u^V &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^{-\rho}} P_{-\rho,n}(Vu_0^{-\rho})(u - u_0)^n u^V = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{-n}}{n!} e^{-Vu_0^{-\rho}} P_{-\rho,n}(Vu_0^{-\rho})(u - u_0)^n (u - u_0 + u_0)^V = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_0^{V-n} e^{-Vu_0^{-\rho}} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{-\rho,n}(Vu_0^{-\rho}) \right] (u - u_0)^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes  $A_n$  son

$$A_n(V) = u_0^{V-n} e^{-Vu_0^{-\rho}} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{-\rho,n}(Vu_0^{-\rho}).$$

Es el turno de los coeficientes  $B_n$ . La derivada n-ésima de  $g(u) = e^{-xV^{-1/\rho}u}$  es

$$\frac{dg}{du^n} = (-xV^{-1/\rho})^n e^{-xV^{-1/\rho}u}.$$

Por tanto, coeficientes  $B_n(V)$  dependen de V y son

$$B_n(V) = \frac{(-xV^{-1/\rho})^n e^{-xV^{-1/\rho}u_0}}{n!}.$$

Definimos  $a_n(V)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  como

$$a_n(V) = e^{Vf(u_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \left( \frac{(V^k)}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(u_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(V) B_{n-mk-j}(V) \right).$$

Definimos  $\Phi_n(V)$  según el método de Laplace

$$\Phi_n(V) = \frac{\alpha + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(u_0)V} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma \left( \frac{n+s+1}{m} \right).$$



En nuestro caso, como  $u_0 \notin \{0, \infty\}$ , entonces  $\alpha, \beta = 1$ . Tenemos la serie

$$F(V) = e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V).$$

Remontándonos a (51) y aplicando el Teorema 3 se tiene la serie asintótica para  $v \rightarrow -\infty$  y  $\rho < 0$

$$Z(x, v, \rho) \sim V^{(-V-1)/\rho} F(V) = V^{(-V-1)/\rho} e^{-Vf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V). \quad (52)$$

Desarrollando la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(V) \Phi_n(V)$  se sigue en (52)

$$Z(x, v, \rho) \sim V^{\frac{(-V-1)}{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{[n/2]} D_k \right] \frac{1 + (-1)^n}{2} \left| \frac{2!}{f^{(2)}(u_0)V} \right|^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \quad (53)$$

con

$$D_k = \frac{V^k}{k!} \left( \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-2k} A_j(V) B_{n-2k-j}(V)$$

Sustituyendo en (53)

$$\begin{aligned} V &= -v - 1, \\ u_0 &= \sqrt[-\rho]{-1/\rho}, \\ f''(u_0) &= (-\rho)^{1-\frac{2}{\rho}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(V) &= u_0^{V-n} e^{-Vu_0^{-\rho}} \sum_{k=0}^n \binom{V}{n-k} \frac{1}{k!} P_{-\rho, n}(Vu_0^{-\rho}), \\ B_n(V) &= \frac{(-xV^{-1/\rho})^n e^{-xV^{-1/\rho}u_0}}{n!}, \end{aligned}$$

y haciendo uso de la Proposición 2, obtenemos la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim c_1(x, v, \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(v), \quad (54)$$

con

$$c_1(x, v, \rho) = (-v-1)^{\frac{-v-1}{\rho}} \left(\frac{-1}{\rho}\right)^{(v+1)/\rho} e^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{-x(-\frac{-v-1}{\rho})^{-1/\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(-v-1)(-\rho)^{2/\rho-1}}}$$

y

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n d_k(v, \rho) \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-v-1}{j-r} \frac{\rho^{-j/p} (-x(-v-1)^{-1/\rho})^{2k-j}}{(2k-j)!r!} P_{-\rho, r}\left(\frac{v+1}{\rho}\right),$$

con

$$d_k(v, \rho) = \frac{2^k (-v - 1)^{-k}}{(-\rho)^{k-2k/\rho} (n-k)!}$$

Hay que probar la asintoticidad, puesto que los coeficientes  $B_n$  dependen de  $V$ . Por la Observación 1 podemos escribir  $a_n(V)$  como sigue

$$a_n(V) = \sum_{k=0}^n c_k(V) B_{n-k}(V),$$

con  $c_0 = 1$ ,  $c_k = 0$  si  $0 < k < p$  y  $c_k = \mathcal{O}(V^{[k/p]})$ . Los coeficientes tienen un orden

$$B_n(V) = \frac{(-xV^{-1/\rho})^n e^{-xV^{-1/\rho}u_0}}{n!} = e^{-xV^{-1/\rho}u_0} \mathcal{O}(V^{(-n/\rho)}).$$

Supongamos  $\rho \neq -3$ , por lo que  $p=3$ . Así,  $a_n$  tiene un orden de

$$a_n(V) = \sum_{k=0}^n c_k(V) B_{n-k}(V) = \mathcal{O}(V^{(-n/\rho)}) + \sum_{k=3}^n \mathcal{O}(V^{[k/3]-(n-k)/\rho}).$$

Tengamos en cuenta el primer y último término del sumando. El término de  $k = 3$  es  $\mathcal{O}(V^{-n+3+\rho}/\rho)$  y el de  $k = n$  es  $\mathcal{O}(V^{[n/3]})$ .

- Si  $\rho < -3$ , el términos  $\mathcal{O}(V^{(-n+3+\rho)/\rho})$  y  $\mathcal{O}(V^{[n/3]})$  dominan a  $\mathcal{O}(V^{(-n/\rho)})$ .
- Si  $\rho \geq -3$ , el término que domina es  $\mathcal{O}(V^{-n/\rho})$ .

Veamos el orden de  $a_n(V)\Phi_n(V)$  en cada caso

- Si  $a_n(V)\Phi_n(V) = \mathcal{O}(V^{[-n/3]-(n+1)/2})$  tiene un exponente negativo y decreciente en  $n$ , por lo que es asintótica.
- Si  $a_n(V)\Phi_n(V) = \mathcal{O}(V^{(-n+3+\rho)/\rho-(n+1)/2})$ , tiene un exponente decreciente en  $n$  para  $\rho > -2$ .
- Si  $a_n(V)\Phi_n(V) = \mathcal{O}(V^{-n/p-(n+1)/2})$ , tiene un exponente decreciente en  $n$  para  $\rho > -2$

Si el intervalo de integración está contenido en el dominio de convergencia de las series de Taylor, la serie es convergente y por tanto asintótica. Si no es así, podemos proceder como [7], dividiendo dicho intervalo en 2:  $D_{in}, D_{out} \subseteq (a, b)$ , donde  $D_{in}$  es la parte del intervalo de integración dentro del dominio de convergencia de la serie y  $D_{out}$  es la parte del intervalo que está fuera. Se demuestra como en [7] que la integral sobre  $D_{out}$  es exponencialmente menor que la integral sobre  $D_{in}$ , con lo que el desarrollo obtenido es asintótico para  $\rho < -2$ .

**Observación 6.** Para  $n = 0$  en (54), se teine el comportamiento asintótico siguiente.

$$Z(x, v, \rho) \sim V^{-\frac{v-1}{\rho}} \left(-\frac{1}{\rho}\right)^{-V/\rho} e^{\frac{V}{\rho}} e^{-x\left(-\frac{V}{\rho}\right)^{-1/\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{V(-\rho)^{2/\rho-1}}} \quad \text{cuando } v \rightarrow -\infty, \rho < 0.$$

## Experimentos numéricos

De nuevo, vamos a comparar la aproximación que hemos obtenido (54) con la integral (1) calculada numéricamente, puesto que la integral carece de primitiva. Para ello usamos el comando NIntegrate del software Mathematica 12.2

- Fijamos  $\rho = -4$   $x = 2$

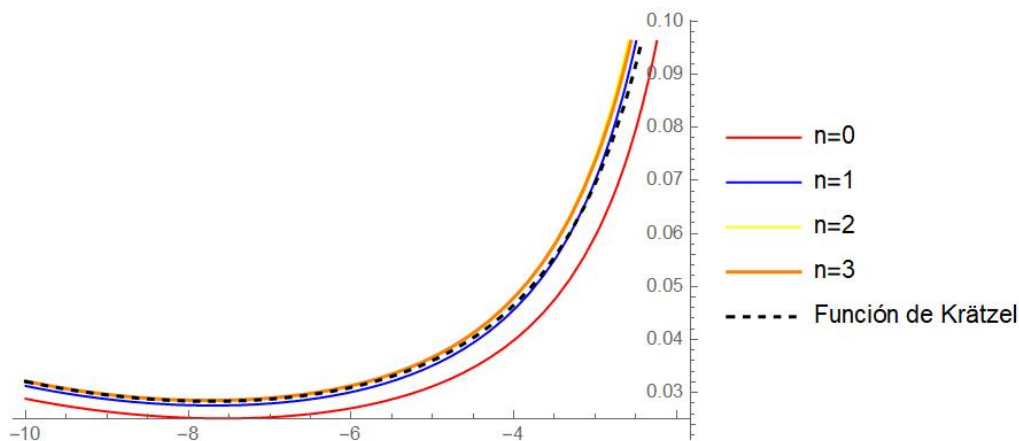


Figura 26: Función de Krätzel vs serie asintótica (54)  $v$  grande y negativa  $\rho = -4$ ,  $x = 2$

$v \setminus n$	0	1	2	3
-10	1e-1	2.58e-2	1.45e-3	2.46e-3
-20	7.06e-2	1.73e-2	2.3e-3	2.21e-4
-50	4.32e-2	9.12e-3	1.21e-3	5.68e-5
-100	2.98e-2	5.49e-3	6.39e-4	3.75e-5

Figura 27: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (54),  $v$  grande y negativa,  $\rho = -4$ ,  $x = 2$ .

El error disminuye con el decrecimiento de la variable  $v$  reflejando el carácter asintótico de la serie.

- Fijamos  $\rho = -1$   $x = 2$ .

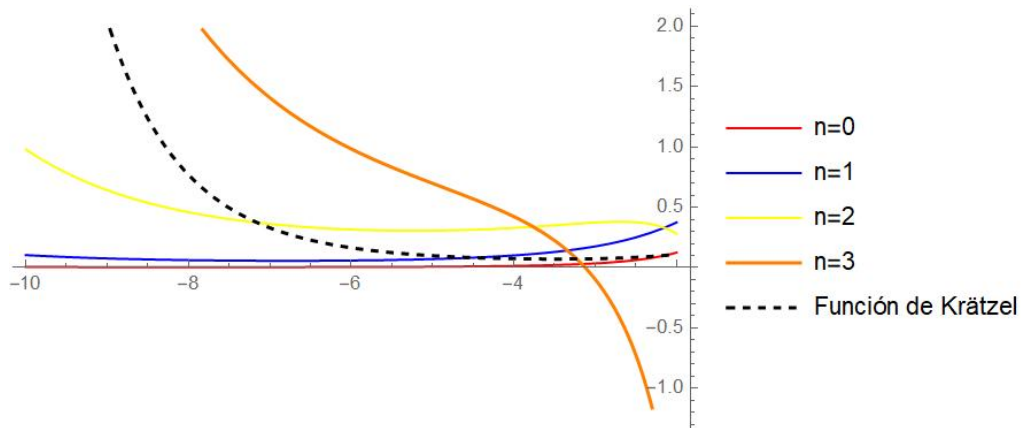


Figura 28: Función de Krätzel vs serie asintótica  $v$  grande y negativa  $\rho = -1, x = 2$

$v \setminus n$	0	1	2	3
-10	9.99e-1	9.83e-1	8,4e-1	3.51e-2
-20	1	0.99e-1	9.99e-1	9.98e-1
-50	1	1	1	1
-100	1	1	1	1

Figura 29: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica ,  $v$  grande y negativa,  $\rho = -1, x = 2$ .

Tal y como habíamos visto, no podemos afirmar que la serie es asintótica para  $\rho > -2$ .

## 6. Desarrollo asintótico de la función de Krätzel para $x$ grande y $v$ grande y negativo

Consideramos ahora que  $x$  y  $v$  tienen el mismo orden, es decir  $v - 1 = -\sigma x$  con  $\sigma > 0$ .

Partimos de la función de Krätzel  $Z(x, v, \rho)$  y realizamos una serie de cambios para ajustarla al Teorema. 3

$$Z(x, v, \rho) = \int_0^\infty u^{-\sigma x} e^{-u^\rho - x/u} du = \int_0^\infty e^{-x(\sigma \log(u) + \frac{1}{u})} e^{-u^\rho} du. \quad (55)$$

Podemos aplicar Laplace modificado. La función de fase es  $f(u) = (\frac{1}{u} + \sigma \log(u))$  que tiene mínimo en  $u_0 = 1/\sigma \in (0, \infty)$ , y por tanto  $s = 0$ . Estudiemos las sucesivas derivadas de la función de fase.

$$f^{(n)}(u) = \frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} \sigma (n-1)!}{u^n}$$

Estudiemos  $f''(u_0)$  y  $f'''(u_0)$

$$f''(u_0) = 2\sigma^3 - \sigma^3 = \sigma^3 > 0.$$

$$f'''(u_0) = -6\sigma^4 + 2\sigma^4 = -4\sigma^4 < 0.$$

Por tanto,  $m = 2$  y  $p = 3$ .

Primero hallamos los coeficientes  $A_n(x)$ , para ello expresamos  $e^{-x(1/u + \sigma \log(u))}$  en forma de serie, aplicando la Proposición 3

$$e^{-x(1/u + \sigma \log(u))} = (e^{-x/u} u^{-x\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+\sigma x} e^{-\sigma x} \sum_{k=0}^n \binom{-\sigma x}{n-k} (-1)^k L_k^{-1}(\sigma x) (u - u_0)^n$$

Por tanto, los coeficientes  $A_n(x)$  son

$$A_n = \sigma^{n+\sigma x} e^{-\sigma x} \sum_{k=0}^n \binom{-\sigma x}{n-k} (-1)^k L_k^{-1}(\sigma x)$$

Es el turno de los coeficientes  $B_n$  para ello tenemos que sacar la derivada  $n$ -ésima de la función  $g(u) = e^{-u^\rho}$ . Aplicamos la Proposición 3

$$g(u)^{(n)} = u^{-n} e^{-u^\rho} P_{\rho, n}(u^\rho).$$

Así, los coeficientes  $B_n$  son

$$B_n = \frac{u_0^{-n} e^{-u_0^\rho}}{n!} P_{\rho, n}(u_0^\rho).$$

Tenemos todos los desarrollos en serie que necesitamos para aplicar el Teorema 3. Definimos  $a_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  como

$$a_n(x) = e^{xf(u_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \left( \frac{x^k}{k!} \left( \frac{f^{(m)}(u_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(x) B_{n-mk-j} \right).$$

Definimos  $\Phi_n(x)$  según el método de Laplace modificado

$$\Phi_n(x) = \frac{\alpha + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(u_0)x} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma \left( \frac{n+s+1}{m} \right).$$

En nuestro caso, como  $u_0 \notin \{0, \infty\}$ , entonces  $\alpha, \beta = 1$ . Tenemos la serie

$$F(x) = e^{-xf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \Phi_n(x).$$

Remontándonos a (55) y aplicando el Teorema 3 se tiene la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim e^{-xf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \Phi_n(x)$$

Desarrollando  $e^{-xf(u_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \Phi_n(x)$  en se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim \sum_{n=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} D_k \right] \frac{1 + (-1)^n}{2} \left| \frac{2!}{f^{(2)}(u_0)x} \right|^{(n+1)/2} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \quad (56)$$

con

$$D_k = \frac{x^k}{k!} \left( \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-2k} A_j(x) B_{n-2k-j}$$

Sustituyendo en (56)

$$u_0 = \frac{1}{\sigma},$$

$$f''(u_0) = \sigma^3,$$

$$A_n = \sigma^{n+\sigma x} e^{-\sigma x} \sum_{k=0}^n \binom{-\sigma x}{n-k} (-1)^k L_k^{-1}(\sigma x)$$

$$B_n = \frac{u_0^{-n} e^{-u_0^\rho}}{n!} P_{\rho, n}(u_0^\rho).$$

y haciendo uso de la Proposición 2, obtenemos la serie

$$Z(x, v, \rho) \sim \sigma^{\sigma x - 1} e^{-\sigma x} e^{-(\sigma)^{-\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{1-v}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)_n \phi_n(x), \quad (57)$$

con

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{(n-k)! (\sigma x)^k} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-\sigma x}{j-r} \frac{(-1)^r}{(2k-j)!} P_{\rho, 2k-j}(\sigma^{-\rho}) L_r^{-1}(\sigma x). \quad (58)$$

**Observación 7.** En el caso particular de  $n = 0$  para la serie (57), se tiene el comportamiento asintótico

$$Z(x, v, \rho) \sim \sigma^{\sigma x - 1} e^{-\sigma x} e^{-(\sigma)^{-\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{1-v}}.$$

## Experimentos numéricos

Usamos el software Mathematica 12.2 para estudiar la precisión de la aproximación, comparando la integral (1) calculada numéricamente y la aproximación dada por (57)

- Fijamos  $\rho = 2$  y  $\sigma = 2$ . Por tanto si para un  $x$  dado se toma  $v = -2x + 1$ .

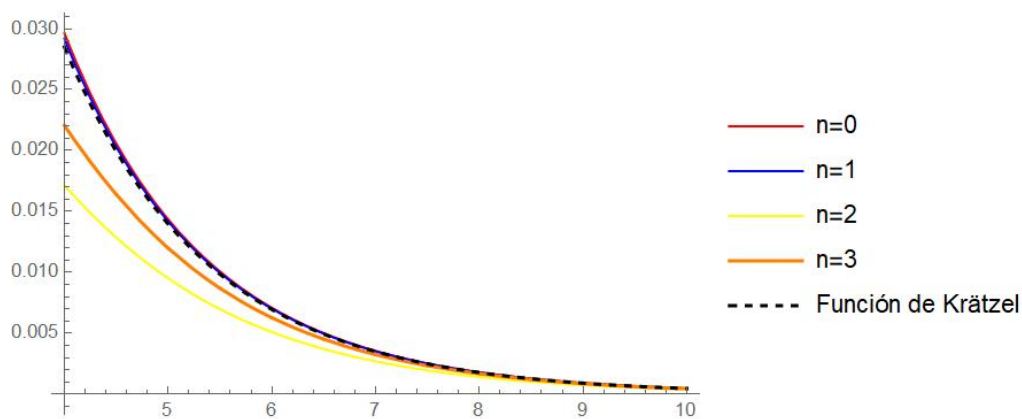


Figura 30: Función de Krätzel vs serie asintótica (57)  $-2x = v - 1$ ,  $\rho = 2$ .

$x \setminus n$	0	1	2	3
10	8.23e-3	1.93e-3	1.61e-1	3.43e-2
20	2.59e-3	5.41e-4	8.19e-2	8.5e-3
50	6.63e-4	5,86e-4	3.31e-2	1.35e-3
100	2.69e-4	3.55e-4	1.66e-2	3.39e-4

Figura 31: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (57) ,  $x$  grande,  $v$  grande y negativo,  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 2$ .

El error relativo disminuye conforme la variable  $x$  aumenta, lo que refleja el carácter asintótico de la serie.

- Fijamos  $\rho = -2$  y  $\sigma = 2$ . Por tanto si para un  $x$  dado se toma  $v = -2x - 1$ .

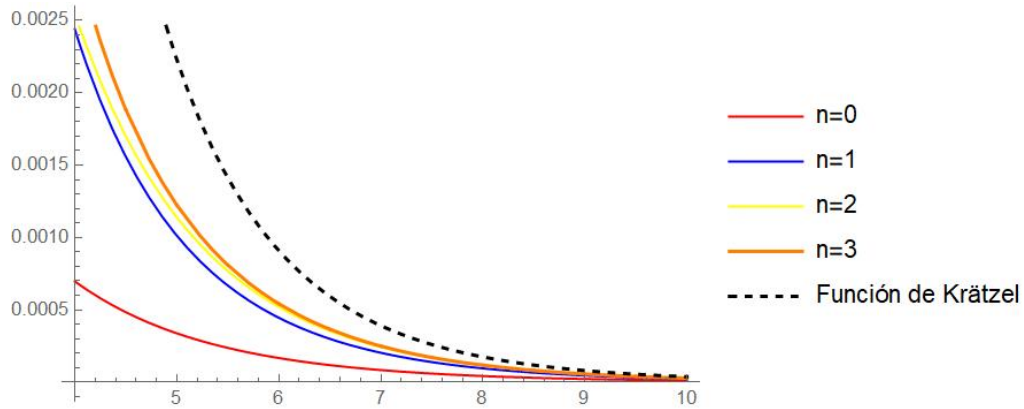


Figura 32: Función de Krätzel vs serie asintótica (57)  $-2x = v + 1$ ,  $\rho = -2$ .

$x \setminus n$	0	1	2	5
10	7.04e-1	4.08e-1	2.78e-1	9.43e-2
20	5.16e-1	2.74e-1	1.38e-1	1.73e-2
50	2.82e-1	1.39e-1	4.8e-2	4.55e-3
100	1.6e-1	7.67e-2	2.11e-2	1.52e-3

Figura 33: Error relativo Función de Krätzel vs serie asintótica (57) ,  $x$  grande,  $v$  grande y negativo,  $\rho = -2$ ,  $\sigma = 2$ .

Se puede observar que el error disminuye con el crecimiento de la variable  $x$ , mostrando el carácter asintótico de la serie.



## 7. Conclusión

Aplicando métodos de carácter asintótico, hemos logrado obtener desarrollos asintóticos completos de la función de Krätzel y por tanto, un comportamiento de la función cuando las variables  $x$  y  $v$  son grandes, además de cuando  $x$  es pequeña. Las series asintóticas obtenidas son

- $x \rightarrow \infty$ ,  $p > 0$ .

$$Z(x, v, \rho) \sim \frac{e^{-(\rho+1)X} X^{\frac{v}{\rho}-1/2} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\rho(\rho+1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(X), \quad X := \frac{(\rho x^\rho)^{\frac{1}{\rho+1}}}{\rho}$$

con

$$\phi_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k X^{-k}}{(n-k)! \rho^k (\rho+1)^k} \sum_{j=0}^{2k} \binom{v-1}{2k-j} \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s}{(j-s)!} L_s^{-1}(\rho X) P_{\rho, j-s}(X).$$

En particular, para  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim \alpha x^{(2v-\rho)/(2\rho+2)} e^{-\beta x^{\rho/p+1}}$$

con

$$\alpha = \left(\frac{2\pi}{\rho+1}\right)^{1/2} \rho^{(-2v+1)/(2\rho+2)} \quad y \quad \beta = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \rho^{1/(\rho+1)}.$$

- $x \rightarrow 0$ ,  $p > 0$ .

$$Z(x, v, \rho) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\rho} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-k}{\rho}\right) x^k + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \Gamma(-v - \rho j) x^{\rho j+v}$$

Si  $\frac{k-v}{\rho} - j = 0$ , se sustituye la suma

$$\frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-k}{\rho}\right) y^{\frac{k-v}{\rho}} + \frac{(-1)^{j+1} \rho}{j!} \Gamma(-v - \rho j) y^j,$$

por el término

$$\begin{aligned} & x^{\beta_j} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} [a_k M[h; z + 1 - \alpha_k] + b_j M[f; z + \beta_j + 1] - a_k b_j \log x] \right\} = \\ & = x^{\beta_j} \left[ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{v-kz}{\rho} + z\right) + \frac{(-1)^{j+1} \rho}{j!} \Gamma(-v - \rho j - \rho z) \right] - a_k b_j \log x = \\ & = \frac{(-1)^{j+k+1}}{k! j!} x^{\rho j+v} \log x, \end{aligned}$$

En particular, para  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim \frac{1}{\rho} \Gamma\left(\frac{v}{\rho}\right), \quad \text{si } v \neq 0$$

$$Z(x, v, \rho) \sim -\log(x), \quad \text{si } v = 0$$

- $v \rightarrow \infty$ .

$$Z(x, v, \rho) \sim e^{-x\left(\frac{\rho}{v-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}} e^{-\frac{v-1}{\rho}} \left(\frac{v-1}{\rho}\right)^{\frac{v}{\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(v-1)\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(v)$$

con

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (v-1)^{-k}}{(n-k)! \rho^k} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{v-1}{j-r} \frac{(-1)^j}{r!} P_{\rho,r} \left(\frac{v-1}{\rho}\right) L_{2k-j}^{-1} \left(x \left(\frac{\rho}{v-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

En particular, con  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim e^{-x\left(\frac{\rho}{v-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}} e^{-\frac{v-1}{\rho}} \left(\frac{v-1}{\rho}\right)^{\frac{v}{\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(v-1)\rho}}$$

- $v \rightarrow -\infty$ ,  $\rho > 0$ .

$$Z(x, v, \rho) \sim \left(\frac{-v-1}{x}\right)^{-v} e^{-\left(\frac{x}{-v-1}\right)^{\rho}} e^{v+1} \sqrt{\frac{2\pi}{-v-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(v)$$

con

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (-v-1)^{-k}}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-v-1}{j-r} \frac{(-1)^r (-v-1)^r}{(2k-j)! r!} P_{-\rho, 2k-j} \left(\left(\frac{x}{-v-1}\right)^{\rho}\right).$$

En particular, si  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim (-v-1)^{\frac{-v-1}{\rho}} \left(\frac{-1}{\rho}\right)^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{-x\left(\frac{v+1}{\rho}\right)^{-1/\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(-v-1)(-\rho)^{2/\rho-1}}}$$

- $v \rightarrow -\infty$ ,  $\rho < -2$ ,  $\Re(v) < 0$ .

$$Z(x, v, \rho) \sim c_1(x, v, \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(v)$$

con

$$c_1(x, v, \rho) = (-v-1)^{\frac{-v-1}{\rho}} \left(\frac{-1}{\rho}\right)^{(v+1)/\rho} e^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{-x\left(\frac{-v-1}{\rho}\right)^{-1/\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(-v-1)(-\rho)^{2/\rho-1}}}$$

y

$$\phi_n(v) = \sum_{k=0}^n d_k(v, \rho) \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-v-1}{j-r} \frac{\rho^{-j/p} (-x(-v-1)^{-1/\rho})^{2k-j}}{(2k-j)! r!} P_{-\rho,r} \left(\frac{v+1}{\rho}\right),$$

con

$$d_k(v, \rho) = \frac{2^k (-v - 1)^{-k}}{(-\rho)^{k-2k/\rho} (n-k)!}$$

En particular, para  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim (-v - 1)^{\frac{-v-1}{\rho}} \left(\frac{-1}{\rho}\right)^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{\frac{-v-1}{\rho}} e^{-x(\frac{v+1}{\rho})^{-1/\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{(-v-1)(-\rho)^{2/\rho-1}}}$$

- $x \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow -\infty$  y  $\sigma x = v - 1$

$$Z(x, v, \rho) \sim \sigma^{\sigma x - 1} e^{-\sigma x} e^{-(\sigma)^{-\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{1-v}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \phi_n(x)$$

con

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{(n-k)! (\sigma x)^k} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{r=0}^j \binom{-\sigma x}{j-r} \frac{(-1)^r}{(2k-j)!} P_{\rho, 2k-j}(\sigma^{-\rho}) L_r^{-1}(\sigma x).$$

En particular, para  $n = 0$  se tiene

$$Z(x, v, \rho) \sim \sigma^{\sigma x - 1} e^{-\sigma x} e^{-(\sigma)^{-\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{1-v}}$$

Estas técnicas han dado lugar en ocasiones a series asintóticas que son, a su vez, series convergentes, por lo que hemos podido obtener una representación de la función en ciertas regiones de su dominio.

$$Z(x, v, \rho) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-\rho n - v) x^{\rho n + v} & \forall x \in (0, \infty), -1 < \rho \leq 0, \Re(v) < 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\rho n!} \Gamma\left(\frac{v-n}{\rho}\right) x^n & \forall x \in (0, \infty), \rho < -1, \Re(v) < 0. \end{cases}$$

Como posible trabajo futuro podemos mencionar:

- Estudio asintótico de la variable  $\rho$ , tanto para valores pequeños como grandes.
- Estudio asintótico de la variable  $v$  cuando es pequeña.
- Estudio de la convergencia de las series obtenidas por el método de Laplace modificado.

## Referencias

- [1] Yury Brychkov. *Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas*. 05 2008.
- [2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi. Higher transcendental functions, vol. ii. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [3] Anatoly Kilbas, Juan Trujillo, and R. K. Saxena. Krätzel function as a function of hypergeometric type. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 9(2):109–131, 2006.
- [4] Anatoly A Kilbas, Luis Rodríguez-Germá, Megumi Saigo, R. K. Saxena, and J. J. Trujillo. The krätzel function and evaluation of integrals. *Comput. Math. Appl.*, 59(5):1790–1800, March 2010.
- [5] E. Krätzel. Integral transformations of bessel type. *Generalized Functions and Operational Calculus*, (Proc. Conf. Varna, 1975), pages 148-155, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia (1979).
- [6] José L. López. Asymptotic expansions of mellin convolution integrals. *SIAM Review*, 50(2):275–293, 2008.
- [7] José L. López, Pedro Pagola, and E. Pérez Sinusía. A simplification of laplace’s method: Applications to the gamma function and gauss hypergeometric function. *Journal of Approximation Theory*, 161(1):280–291, 2009.
- [8] Arak Mathai and Hans Haubold. Review of mathematical techniques applicable in astrophysical reaction rate theory. *Astrophysics and Space Science*, 282:265–280, 01 2002.
- [9] T. Princy. Krätzel function and related statistical distributions. *Communications in Mathematics and Statistics*, 2, 12 2015.
- [10] T. Princy. Mixture models and the krätzel integral transform. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 44(2):390–405, 2015.
- [11] Nico Temme. *Asymptotic Methods for Integrals*. 12 2014.
- [12] Pavel G Todorov. Taylor expansions of analytic functions related to  $(1 + z)^x$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 132(1):264–280, 1988.
- [13] Jacques Touchard. Sur les cycles des substitutions. In *Acta Mathematica*, volume 70, pages 243–297, 1939.
- [14] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. Academic Press, New York, 1989.