Ainhoa AZPÍROZ AZCONA

PROBABILIDAD

ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD EN 4º DE ESO

TFM 2022

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Análisis del aprendizaje de la probabilidad en 4º de ESO

Ainhoa Azpíroz Azcona

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

	Página
Introducción general	**7**
Parte I: La probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto	**9**
1. La probabilidad en el currículo vigente	**13**
1.1. Contenidos en Educación Primaria …………………………......	13
1.2. Contenidos en ESO…..……………………………………...	14
1.3. Contenidos en Bachillerato ……………………………..……...	15
1.4. Análisis de la evolución de contenidos………………………	17
2. Los criterios de evaluación de la probabilidad en el currículo vigente	**19**
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria…………………	19
2.2. Criterios de evaluación en ESO…...……………………………	20
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato………………………..	21
2.4. Análisis de la evolución de los criterios de evaluación………	22
3. Estándares de aprendizaje evaluables de la probabilidad en el currículo vigente	**23**
3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria……	23
3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO…...…………………	24
3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato……………	26
3.4. Análisis de la evolución de los estándares de aprendizaje evaluables	27
4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la probabilidad en el currículo vigente	**29**
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO………………	29
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO………………	32
4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Académicas…	35
4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato de Sociales…………………………………………………………	37
4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato de Sociales…………………………………………………………	39
5. Resultados	**41**
5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto….....	41
5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo….....	41

Página

Parte II: Análisis de un proceso de estudio de la probabilidad en 4º de ESO **43**

6. La probabilidad en el libro de texto de referencia **47**

6.1. Objetos matemáticos involucrados ………………………..……..... 47
6.2. Análisis global de la unidad didáctica…….. 50

7. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica **59**

7.1. Dificultades…………………………………………………………… 59
7.2. Errores y su posible origen…………………………………………… 60

8. El proceso de estudio **61**

8.1. Distribución del tiempo de la clase …………………………………… 61
8.2. Actividades adicionales planificadas …………………………………. 64
8. 3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista ………………….. 65

9. Experimentación **67**

9.1. Muestra y diseño de la experimentación …..………………………….. 67
9.2. El cuestionario ……………………………………………………... 67
9.3. Cuestiones y comportamientos esperados ……………………………. 70
9.4. Resultados …………………………………………………….......... 72
9.5. Discusión de los resultados …………………………………………… 80

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas **81**

Referencias **83**

Anexos **85**

A. Unidad didáctica del libro de texto …………………………………… 87
B. Tablas de resultados de las tareas 107

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar el análisis del aprendizaje de la probabilidad en 4º de ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la probabilidad, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cinco capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la probabilidad en cada uno de los grados. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

La probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se realiza un análisis de los contenidos presentes en el currículo vigente relacionados con la probabilidad en el tercer ciclo de Primaria, ESO y Bachillerato.

Lo currículos tomados como referencia para cada una de las etapas son los siguientes:

- DECRETO FORAL 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.
- DECRETO FORAL 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.
- DECRETO FORAL 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.

Para poder llevar a cabo este análisis de contenidos, se han establecido los siguientes descriptores:

C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.

C2. Espacio muestral y sucesos.

C3. Probabilidad simple.

C4. Probabilidad compuesta.

C5. Probabilidad condicionada.

C6. Teorema de la Probabilidad Total.

C7. Teorema de Bayes.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Tabla 1.1.1. Contenidos relacionados con la probabilidad en 5º y 6º.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>5º de Primaria</th><th>6º de Primaria</th></tr>
<tr><td>C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>Carácter aleatorio de algunas experiencias.</td><td>Carácter aleatorio de algunas experiencias.</td></tr>
<tr><td>C2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td><td rowspan="2">Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</td></tr>
<tr><td>C3. Probabilidad simple.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

1.2. Contenidos en ESO

Tabla 1.2.1. Contenidos relacionados con la probabilidad en 1º y 2º.

Descriptor	1º de ESO	2º de ESO
C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	—	Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
C2. Espacio muestral y sucesos.	—	Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
C3. Probabilidad simple.	—	Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos
C4. Probabilidad compuesta.	—	—
C5. Probabilidad condicionada.	—	—
C6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
C7. Tª de Bayes.	—	—

Tabla 1.2.2. Contenidos relacionados con la probabilidad en 3º.

	3º de ESO	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	Experiencias aleatorias.	—
C2. Espacio muestral y sucesos.	Sucesos y espacio muestral.	—
C3. Probabilidad simple.	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	—
C4. Probabilidad compuesta.	—	—
C5. Probabilidad condicionada.	—	—
C6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
C7. Tª de Bayes.	—	—

Tabla 1.2.3. Contenidos relacionados con la probabilidad en 4º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">4º de ESO</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td rowspan="3">Azar y probabilidad.
Frecuencia de un suceso aleatorio.
Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.
Probabilidad simple.</td></tr>
<tr><td>C2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C3. Probabilidad simple.</td><td>Probabilidad simple.
Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.</td></tr>
<tr><td>C4. Probabilidad compuesta.</td><td>Probabilidad compuesta.
Sucesos dependientes e independientes.
Experiencias aleatorias compuestas.
Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.</td><td>Probabilidad compuesta.
Sucesos dependientes e independientes.
Diagrama en árbol.</td></tr>
<tr><td>C5. Probabilidad condicionada.</td><td>Probabilidad condicionada.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

1.3. Contenidos en Bachillerato

Tabla 1.3.1a. Contenidos relacionados con la probabilidad en 1º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">1º de Bachillerato</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td><td>Sucesos.</td></tr>
<tr><td>C3. Probabilidad simple.</td><td>—</td><td>Experimentos simples.
Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
Axiomática de Kolmogorov.
Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</td></tr>
</table>

Tabla 1.3.1b. Contenidos relacionados con la probabilidad en 1º.

C4. Probabilidad compuesta.	—	Experimentos compuestos. Dependencia e independencia de sucesos.
C5. Probabilidad condicionada.	—	Probabilidad condicionada.
C6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
C7. Tª de Bayes.	—	—

Tabla 1.3.2. Contenidos relacionados con la probabilidad en 2º.

	2º de Bachillerato	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
C1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	—	—
C2. Espacio muestral y sucesos.	Sucesos.	—
C3. Probabilidad simple.	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples.	Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Experimentos simples.
C4. Probabilidad compuesta.	Experimentos compuestos. Dependencia e independencia de sucesos.	Experimentos compuestos. Dependencia e independencia de sucesos
C5. Probabilidad condicionada.	Probabilidad condicionada.	Probabilidad condicionada.
C6. Tª de la Probabilidad Total.	Teorema de la Probabilidad Total.	Teorema de la Probabilidad Total.
C7. Tª de Bayes.	Teorema de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.	Teorema de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso

1.4. Análisis de la evolución de contenidos

En el tercer ciclo de Educación Primaria surgen las primeras ideas de probabilidad. Aparece el concepto de aleatoriedad (C1) y se inicia de forma muy intuitiva en el cálculo de probabilidades simples (C2 y C3).

En 1º de ESO desaparece la probabilidad del currículo, dando paso a la estadística.

En 2º de ESO se deja a un lado la estadística y se vuelve a retomar la probabilidad. Se diferencian los fenómenos deterministas de los aleatorios (C1), se trabaja el espacio muestral y los sucesos en experimentos sencillos (C2) y se aproxima la probabilidad mediante la frecuencia relativa y se calcula a través de la regla de Laplace (C3).

En 3º de ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se vuelve a trabajar sobre estos tres primeros descriptores, mientras que, en matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de este mismo curso, no se trabaja la unidad de probabilidad.

En 4º de ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se prescinde de los descriptores C1 y C2 en el currículo, para dejar paso a nuevos contenidos como son la probabilidad compuesta (C4) y la probabilidad condicionada (C5). En cambio, en 4º de ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas se vuelve a trabajar sobre los descriptores C1, C2 y C3 (dado que en el curso anterior no se trabaja la probabilidad) y se introduce la noción de probabilidad compuesta (C4).

En 1º de Bachillerato de matemáticas de Ciencias desaparece la probabilidad del currículo, mientras que en matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se siguen trabajando los contenidos vistos en cursos anteriores (C2, C3 y C4) y se introduce la probabilidad condicionada (C5).

En 2º de Bachillerato de ambas ramas se trabajan los mismos contenidos. Por un lado, se vuelven a trabajar sobre los descriptores (C3, C4 y C5) y además se añaden dos nuevos teoremas, el Teorema de la Probabilidad Total (C6) y el Teorema de Bayes (C7).

En definitiva, se trata de un currículo en espiral en el que los contenidos van surgiendo de forma progresiva y se van repasando curso a curso para alcanzar así niveles más elevados de conocimiento.

En la figura 1.4.1 aparece representado el desarrollo longitudinal-expansivo de los contenidos de probabilidad desde 5º de Educación Primaria hasta 2º de Bachillerato.

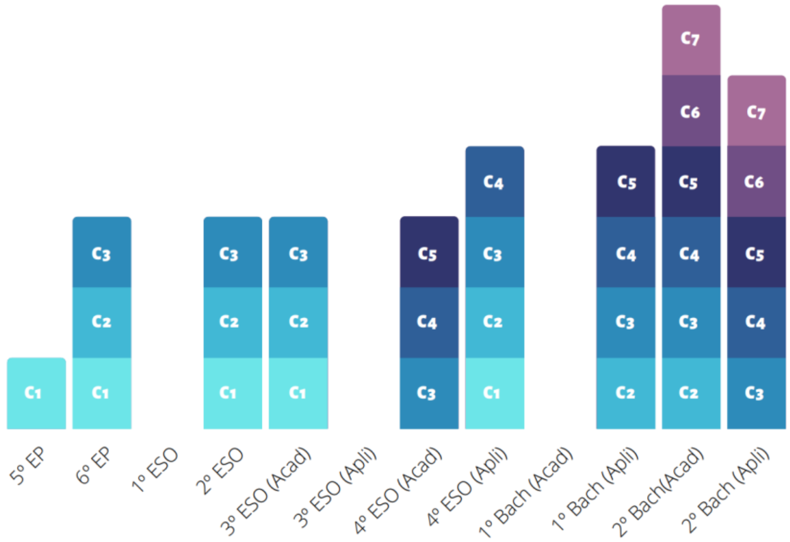


Figura 1.4.1. Desarrollo longitudinal-expansivo de los contenidos.

Capítulo 2
Los criterios de evaluación de la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se realiza un análisis de los criterios de evaluación presentes en el currículo vigente relacionados con la probabilidad en el tercer ciclo de Educación Primaria, ESO y Bachillerato.

Lo currículos tomados como referencia para cada una de las etapas son los mismos que en el Capítulo 1.

Para poder llevar a cabo este análisis, se han establecido los siguientes descriptores:

CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.

CE2. Espacio muestral y sucesos.

CE3. Probabilidad simple.

CE4. Probabilidad compuesta.

CE5. Probabilidad condicionada.

CE6. Teorema de la Probabilidad Total.

CE7. Teorema de Bayes.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Tabla 2.1.1. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 5º y 6º.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>5º de Primaria</th><th>6º de Primaria</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td><td rowspan="3">3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.
4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Tabla 2.2.1. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 1º y 2º.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>1º de ESO</th><th>2º de ESO</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td rowspan="2">1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td><td>2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Tabla 2.2.2. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 3º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">3º de ESO</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td rowspan="3">4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Tabla 2.2.3. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 4º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">4º de ESO</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td rowspan="5">3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE3. Probabilidad simple.</td><td rowspan="3">1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.
2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad compuesta.</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad condicionada.</td></tr>
<tr><td>CE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Tabla 2.3.1. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 1º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">1º de Bachillerato</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td><td rowspan="4">3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</td></tr>
<tr><td>CE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>CE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Tabla 2.3.2. Criterios de evaluación relacionados con la probabilidad en 2º.

	2º de Bachillerato	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
CE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	—	—
CE2. Espacio muestral y sucesos.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.	—
CE3. Probabilidad simple.		1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.
CE4. Probabilidad compuesta.		
CE5. Probabilidad condicionada.		
CE6. Tª de la Probabilidad Total.		
CE7. Tª de Bayes.		

2.4. Análisis de la evolución de los criterios de evaluación

Se observa como los criterios de evaluación son muy amplios y engloban a varios descriptores al mismo tiempo.

El análisis se realiza en el próximo capítulo ya que los estándares de aprendizaje evaluables no son más que un desglose de los criterios de evaluación y por lo tanto, resulta más interesante trabajar sobre criterios más concretos.

Capítulo 3

Los estándares de aprendizaje evaluables de la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se realiza un análisis de los estándares de aprendizaje evaluables presentes en el currículo vigente relacionados con la probabilidad en el tercer ciclo de Educación Primaria, ESO y Bachillerato.

Lo currículos tomados como referencia para cada una de las etapas son los mismos que en el Capítulo 1.

Para poder llevar a cabo este análisis de los estándares de aprendizaje evaluables, se han establecido los siguientes descriptores:

EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.

EAE2. Espacio muestral y sucesos.

EAE3. Probabilidad simple.

EAE4. Probabilidad compuesta.

EAE5. Probabilidad condicionada.

EAE6. Teorema de la Probabilidad Total.

EAE7. Teorema de Bayes.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Tabla 3.1.1a. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 5º y 6º.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>5º de Primaria</th><th>6º de Primaria</th></tr>
<tr><td>EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>3.1. Identifica situaciones de carácter aleatorio.
3.2. Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad.</td><td rowspan="2">3.1. Determina todos los posibles sucesos que pueden darse en fenómenos aleatorios.</td></tr>
<tr><td>EAE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td><td>3.2. Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos.
3.3. Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos.
3.4. Resuelve problemas sencillos de azar y probabilidad.</td></tr>
<tr><td>EAE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Tabla 3.1.1b. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 5º y 6º.

EAE5. Probabilidad condicionada.	—	—
EAE6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
EAE7. Tª de Bayes.	—	—

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

Tabla 3.2.1. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 1º y 2º.

Descriptor	1º de ESO	2º de ESO
EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	—	1.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
EAE2. Espacio muestral y sucesos.	—	2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. 2.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
EAE3. Probabilidad simple.	—	1.2. Calcula la frecuencia relativa de un su1ceso mediante la experimentación. 1.3. Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio. 2.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. 2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. 2.5. Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar.
EAE4. Probabilidad compuesta.	—	—
EAE5. Probabilidad condicionada.	—	—
EAE6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
EAE7. Tª de Bayes.	—	—

Tabla 3.2.2. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 3º.

	3º de ESO	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.	—
EAE2. Espacio muestral y sucesos.	4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar	—
EAE3. Probabilidad simple.	4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. 4.4. Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.	—
EAE4. Probabilidad compuesta.	—	—
EAE5. Probabilidad condicionada.	—	—
EAE6. Tª de la Probabilidad Total.	—	—
EAE7. Tª de Bayes.	—	—

Tabla 3.2.3a. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 4º.

	4º de ESO	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.	3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.
EAE2. Espacio muestral y sucesos.	1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.	
EAE3. Probabilidad simple.	1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.	

Tabla 3.2.3b. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 4º.

<table>
<tr><td>EAE4. Probabilidad compuesta.</td><td>2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.
2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.</td><td rowspan="2">3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.</td></tr>
<tr><td>EAE5. Probabilidad condicionada.</td><td>2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.</td></tr>
<tr><td>EAE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

Tabla 3.3.1. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 1º.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">1º de Bachillerato</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Académicas</th><th>Aplicadas</th></tr>
<tr><td>EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE2. Espacio muestral y sucesos.</td><td>—</td><td rowspan="4">3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.</td></tr>
<tr><td>EAE3. Probabilidad simple.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE4. Probabilidad compuesta.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE5. Probabilidad condicionada.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE6. Tª de la Probabilidad Total.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>EAE7. Tª de Bayes.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Tabla 3.3.2. Estándares de aprendizaje relacionados con la probabilidad en 2º.

	2º de Bachillerato	
Descriptor	**Académicas**	**Aplicadas**
EAE1. Fenómenos deterministas y aleatorios.	—	—
EAE2. Espacio muestral y sucesos.	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.	—
EAE3. Probabilidad simple.		1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.
EAE4. Probabilidad compuesta.		
EAE5. Probabilidad condicionada.		
EAE6. Tª de la Probabilidad Total.	1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.	1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.
EAE7. Tª de Bayes.	1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes	1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

3.4. Análisis de la evolución de los estándares de aprendizaje evaluables

En el tercer ciclo de Educación Primaria, más concretamente en 5º, se observa como el criterio de evaluación 3: ”Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas”, se desglosa en dos estándares de aprendizaje evaluables:

- “3.1. Identifica situaciones de carácter aleatorio”
- “3.2. Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad”.

Con este desglose se consigue una evaluación más concreta y específica.

Esto se puede observar a lo largo de todos los cursos.

Además, a medida que pasan los cursos, ciertos estándares de aprendizaje evaluables desaparecen para dar paso a otros nuevos con el fin de evaluar de forma progresiva contenido más complejos.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se realiza un análisis de los ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo presentes en los libros de texto desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato.

Los libros utilizados para la elaboración de este capítulo son los mismos que utiliza el centro donde se ha realizado el Practicum II. Tanto en la ESO como en Bachillerato se utilizan los libros de la editorial SM Savia.

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En esta cuestión se trabaja el descriptor “C1- Fenómenos deterministas y aleatorios”.
Se trata de una cuestión base para aprender a diferenciar entre experimento aleatorio y determinista.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">1. De los siguientes experimentos, señala los que son aleatorios.
a) Medir la distancia de la Tierra a la Luna.
b) El resultado de un partido de tenis.
c) Sacar una bola del bombo en el sorteo de la lotería.
d) El tiempo que tarda un semáforo en cambiar.
e) Hacer girar una ruleta y que caiga la flecha en un número impar.
Figura 4.1.1. Actividad 1 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 283).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■</td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio está asociado a los descriptores “C1” y “C2- Espacio muestral y sucesos”.
Se trabaja el espacio muestral y sucesos en experimentos sencillos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">3. Lanzamos dos dados de distinto color y anotamos el producto de los resultados.
a) Escribe el espacio muestral.
b) ¿Son equiprobables los sucesos elementales?
c) Escribe los resultados del suceso “salir 12”.
d) Escribe los resultados del suceso “salir menos de 10”.
e) Escribe los resultados del suceso “salir par”.
Figura 4.1.2. Actividad 3 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 283).</td></tr>
</table>

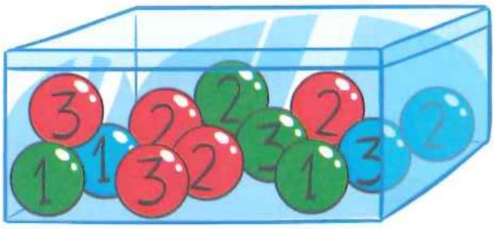
<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta situación corresponde a los descriptores “C1”, “C2” y “C3-Probabilidad simple”.

Se plantea una dinámica distinta en la que el estudiante debe poner en práctica todo lo aprendido siguiendo una serie de fases como son: la elección del tema, elaboración de la encuesta, recogida de datos, cálculo de frecuencias relativas y de determinadas probabilidades..</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">42. EMPRENDE
Elegid, entre toda la clase, un tema de interés común:
• Serie de televisión favorita.
• Red social favorita.
• Etc...
Diseñad, por grupos, una encuesta entorno al tema elegido para realizarla entre los alumnos del instituto.
a) Hallad las frecuencias relativas.
b) Comparad los resultados obtenidos entre los grupos. Si se elige un alumno del instituto al azar, ¿que probabilidad hay de que pertenezca a cada una de las opciones? ¿Se diferencia mucho el resultado en cada grupo?

Figura 4.1.3. Actividad 42 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 279).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En esta cuestión se trabajan los descriptores “C1”, “C2” y “C3”.

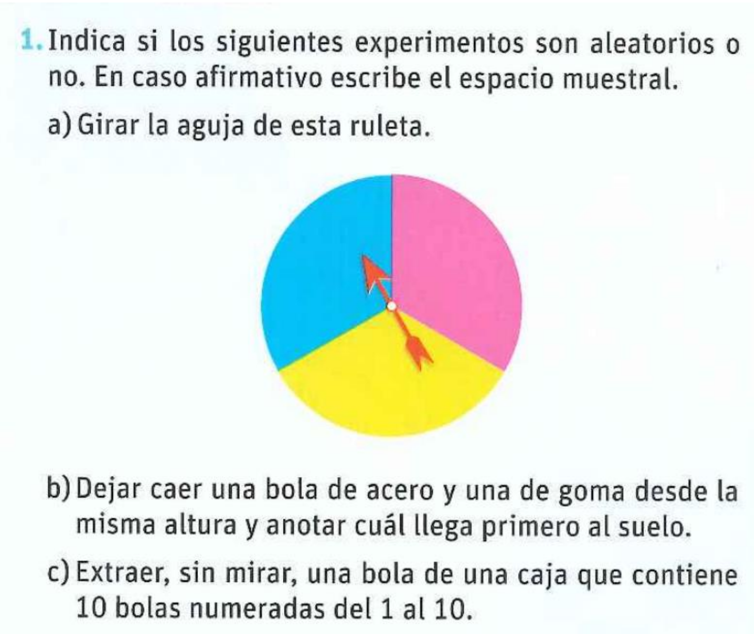
Se plantean una serie de afirmaciones en las que estudiante debe reflexionar si son o no ciertas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">54. Razona si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes sobre la lotería.
a) Como en mi ciudad casi nunca toca tengo más probabilidad de que me toque si la compro fuera.
b) Prefiero el número 23568 al 00027 porque los números menores que 100 nunca salen.
c) Prefiero comprar el billete los primeros días, así es seguro que aún no han vendido el gordo.
d) En los últimos sorteos que han tenido lugar, ha salido el 5 más veces que el resto de los números, así que ahora no saldrá.

Figura 4.1.4. Actividad 54 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 280).</td></tr>
</table>

Actividad tipo	■	**Ejercicio**		**Problema**		**Cuestión**		**Situación**
Descripción	Este ejercicio está asociado a los descriptores “C1”, “C2” y “C3”. Se trabaja el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.							
Ejemplo	**24.** Se extrae una bola de la siguiente urna.  Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: a) La bola es verde. b) La bola no es roja. c) La bola es verde o azul. d) La bola no tiene el número 2. e) La bola es roja y tiene el número 1. Figura 4.1.5. Actividad 24 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 275).							
Actividad tipo		**Ejercicio**	■	**Problema**		**Cuestión**		**Situación**
Descripción	Este problema corresponde a los descriptores “C1”, “C2” y “C3”. Es un problema algo más complejo por lo que se pide realizar un diagrama de árbol en el que apoyarse a la hora de calcular las probabilidades pedidas.							
Ejemplo	**53.** Dos jugadores disponen de 3 fichas, una de ellas con una cara verde y la otra roja, otra, con una cara verde y otra azul, y la tercera, con una cara roja y la otra azul. Se tiran las 3 fichas a la vez. Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas cualesquiera, gana el jugador 2 si los tres colores son diferentes. Haz un diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que gane cada jugador. Figura 4.1.6. Actividad 53 - Tema 13 (Nieto et al., 2016, p. 280).							

4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■</td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio corresponde a los descriptores “C1” y “C2”.
Se pide diferenciar entre fenómeno determinista y aleatorio; y en caso de ser el segundo escribir el espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">



1. Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o no. En caso afirmativo escribe el espacio muestral.

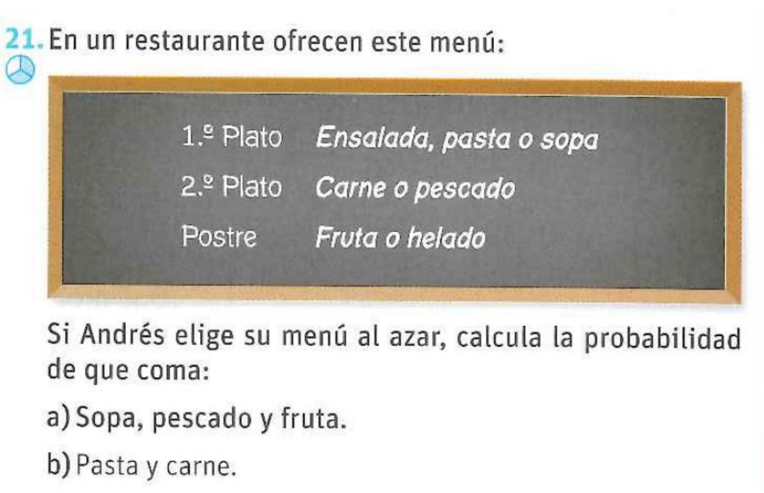
a) Girar la aguja de esta ruleta.

b) Dejar caer una bola de acero y una de goma desde la misma altura y anotar cuál llega primero al suelo.

c) Extraer, sin mirar, una bola de una caja que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.

Figura 4.2.1. Actividad 1 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 296).

</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este problema está asociado a los descriptores “C1”, “C2” y “C3”.
Se trata de un problema de la vida cotidiana en la que el estudiante debe calcular determinadas probabilidades.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">



21. En un restaurante ofrecen este menú:

1.º Plato Ensalada, pasta o sopa

2.º Plato Carne o pescado

Postre Fruta o helado

Si Andrés elige su menú al azar, calcula la probabilidad de que coma:

a) Sopa, pescado y fruta.

b) Pasta y carne.

Figura 4.2.2. Actividad 21 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 303).

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En este ejercicio se trabajan los descriptores “C1” y “C2”.
Se ejercita la escritura de distintos sucesos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">35. Si se escriben en seis papeles las letras de la palabra BASKET, se doblan y se meten en una bolsa.
B A S K E T
Al sacar un papel al azar.
a) Escribe los sucesos elementales.
b) Describe el suceso “sacar vocal”.
c) Describe un suceso imposible.
Figura 4.2.3. Actividad 35 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 310).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este problema se corresponde con los descriptores “C1”, “C2” y “C3”.
Se plantea un problema en el que el estudiante debe leer bien el enunciado y armar una estrategia para calcular finalmente la probabilidad pedida.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">55. Dos familias alquilan dos habitaciones en un mismo hotel para pasar unos días de vacaciones. El hotel tiene 60 habitaciones repartidas en 4 pisos. Las habitaciones se asignan al azar.

Calcula la probabilidad de que las dos habitaciones estén en el mismo piso.
Figura 4.2.4. Actividad 55 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 311).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta situación está asociada a los descriptores “C1”, “C2” y “C3”.

En libro de 2º de ESO aparece esta misma situación pero se plantea como un ejercicio. Ahora se podría considerar más como una situación ya que no solo deben razonar y calcular las probabilidades pertinentes, sino que además se propone que pongan el juego en práctica y vean si su estrategia era buena o no.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">56. EMPRENDE
En un juego para dos jugadores, cada uno dispone de 3 fichas: una de ellas con una cara verde y la otra roja, otra, con una cara verde y otra azul, y la tercera, con una cara roja y la otra azul. Se tiran las 3 fichas a la vez. Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas cualesquiera, el jugador 2 si los tres colores son diferentes.
a) ¿Qué jugador eliges ser, el 1 o el 2?
b) Juega con un compañero y comprueba tu estrategia.

Figura 4.2.5. Actividad 56 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 311).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En esta cuestión se trabajan los descriptores “C2” y “C3”.

Se presentan dos probabilidades y a continuación una pregunta sobre compatibilidad de sucesos para reflexionar.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">66. En un experimento aleatorio sabemos que $P(A) = 0,64$ y $P(B) = 0,52$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
A. A y B son incompatibles.
B. A y B son compatibles.
C. $A \cup B = E$

Figura 4.2.6. Actividad 66 - Tema 14 (Alcaide et al., 2015, p. 312).</td></tr>
</table>

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Académicas

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■</td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio está asociado a los descriptores “C1” y “C2”.
Se trabajan los sucesos y sus operaciones.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">3. En el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 naipes, describe los elementos de los sucesos:
a) $A =$ “sacar un oro”. c) $C =$ ”sacar una figura”.
b) $B =$ “sacar un rey”. d) $A \cup B$ y $B \cup C$
Figura 4.3.1. Actividad 3 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 273).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta cuestión se corresponde con el descriptor “C2”.
Se trabaja el concepto de suceso compatible e incompatible.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">8. Si A y B son dos sucesos de un mismo experimento y sabemos que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? Calcula la probabilidad de $A \cap B$.
Figura 4.3.2. Actividad 8 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 275).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En este problema se traba el descriptor “C3”.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">12. Un alumno ha estudiado 10 de los 15 temas de un examen. El profesor preselecciona dos temas y deja que el alumno escoja uno de los dos. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir uno de los temas estudiados.
Figura 4.3.3. Actividad 12 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 277).</td></tr>
</table>

Actividad tipo		**Ejercicio**	■	**Problema**		**Cuestión**		**Situación**
Descripción	Este problema está asociado a los descriptores “C3”, “C4-Probabilidad compuesta” y “C5- Probabilidad condicionada”. Se trabajan los diagramas de árbol o tablas de contingencia para resumir los datos y el cálculo de probabilidades condicionadas.							
Ejemplo	**13.** En una ciudad el 25 % de las mujeres y el 40 % de los hombres usan gafas. Halla la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, sea una mujer y use gafas. Figura 4.3.4. Actividad 13 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 277).							
Actividad tipo		**Ejercicio**	■	**Problema**		**Cuestión**		**Situación**
Descripción	Este problema está asociado a los descriptores “C3”, “C4” y “C5”. Se trabajan las tablas de contingencia para agrupar los datos y el cálculo de probabilidades compuestas.							
Ejemplo	**47.** En un congreso de médicos hay 200 congresistas. De ellos, 130 son morenos y 80 tienen los ojos castaños, de los cuales 50 son morenos. Se selecciona al azar a un asistente. Haz una tabla de contingencia y calcula la probabilidad de que: a) Sea moreno y con los ojos castaños. b) No tenga los ojos castaños y no sea moreno. Figura 4.3.5. Actividad 47 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 285).							
Actividad tipo	■	**Ejercicio**		**Problema**		**Cuestión**		**Situación**
Descripción	En este ejercicio se trabaja el descriptor “C2”. Se plantean una serie de sucesos y el objetivo es escribir el suceso contrario. Con esto se busca mejorar la comprensión y manipulación de sucesos.							
Ejemplo	**53.** Indica el suceso contrario en los siguientes casos. a) En una clase se eligen al azar dos estudiantes. A = “los dos son chicos” b) En un restaurante Luis pide dos platos: B = “sopa y pescado” c) En una rifa Juan lleva tres números distintos: C = “al menos uno está premiado” Figura 4.3.6. Actividad 53 - Tema 13 (Alcaide et al., 2016, p. 286).							

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato de Sociales

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En este ejercicio se trabaja el descriptor “C2”.
A través de un juego cotidiano como el dominó se trabajan tanto el espacio muestral como los sucesos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">3. El dominó es un juego formado por 28 fichas, que combina los puntos 0 (blanca), 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de todas las formas posibles (28), con dobles incluidos. Se elige una ficha al azar y se consideran los sucesos $A =$ “obtener ficha doble”, $B =$ “obtener ficha que sume par” y $C =$ “los dos números de la ficha son primos”.
Describe el espacio muestral y los sucesos A, B y C y sus contrarios.

Figura 4.4.1. Actividad 3 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 283).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio está asociado al descriptor “C3”, más concretamente a la axiomática de Kolmogorov.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">13. Si P es una probabilidad definida sobre $E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con $P(w_2) = 0{,}1$, $P(w_4) = 3P(w_3)$ y $P(w_3) = 2P(w_2)$, halla $P(w_1)$.

Figura 4.4.2. Actividad 13 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 287).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio corresponde al descriptor “C3”.
Aquí se trabaja la asignación de probabilidades a partir de frecuencias relativas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">11. Usando un ordenador se ha simulado el lanzamiento de dos monedas. La tabla muestra las frecuencias absolutas del suceso $A =$ “obtener cara en una moneda y cruz en la otra”.
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>25</td><td>50</td><td>100</td><td>250</td><td>500</td><td>750</td><td>1 000</td></tr>
<tr><td>$f(A)$</td><td>3</td><td>11</td><td>26</td><td>55</td><td>128</td><td>252</td><td>373</td><td>502</td></tr>
</table>
Completa la tabla con las frecuencias relativas y asigna un valor aproximado a la probabilidad de A.

Figura 4.4.3. Actividad 11 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 287).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este problema está asociado a los descriptores “C4” y “C5”.
Es un problema que no da la información completa de la población.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">30. El 30 % de los habitantes de una ciudad consume habitualmente café y el 40 % de los consumidores de café no toma postre en las comidas. Elegido al azar un habitante, calcula la probabilidad de que sea consumidor de café y tome postre.

Figura 4.4.4. Actividad 30 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 295).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este problema corresponde al descriptor “C3”.
Se trata de una aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">23 ¿Cuántas palabras, tengan o no sentido, de 3 letras distintas pueden formarse con las 5 vocales?
Calcula la probabilidad de que:
a) La palabra formada acabe en u.
b) La palabra formada empiece por a y acabe en u.

Figura 4.4.5. Actividad 23 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 291).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta cuestión corresponde al descriptor “C2”.
Se trabaja con los sucesos gráficamente, utilizando los diagramas de Venn, para demostrar una serie de afirmaciones.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">8. Prueba, mediante un diagrama de Venn, que si A está contenido en B, entonces $\bar{A}$ contiene a $\bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ está contenido en $\overline{A \cap B}$.

Figura 4.4.6. Actividad 8 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 285).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta cuestión está asociada al descriptor “C2”.
Se busca la comprensión de los operadores unión, intersección y complementario. Para ello, hay que expresar con palabras lo que indican los sucesos pedidos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">7. Un estudiante está dudando si cursar estudios de grado (A), hacer un ciclo formativo (B) o trabajar (C). Expresa con palabras $A \cup B$, $\bar{A} \cap (B \cup C)$, $A \cap \bar{C}$ y $A \cup (B \cap C)$.

Figura 4.4.7. Actividad 7 - Tema 12 (Serrano et al., 2015, p. 285).</td></tr>
</table>

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato de Sociales

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este problema corresponde a los descriptores “C3”, “C4”, “C5”, “C6- Teorema de la Probabilidad Total” y “C7- Teorema de Bayes”.

Se trata de un problema clásico en el que se trabaja la probabilidad condicionada, Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">20. Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: para vivienda, para industria y personales. El 30 % de los créditos que concede son para vivienda, el 50 %, para industria y el 20 % restante son personales. Han resultado impagados el 5 % de los créditos concedidos para vivienda, el 7 % de los créditos para industria y el 12 % de los créditos para consumo. Se pide:
a) Seleccionado un crédito al azar, calcula la probabilidad de que no resulte impagado.
b) Se sabe que un determinado crédito ha resultado impagado. Calcula la probabilidad de que sea un crédito de vivienda.

Figura 4.5.1. Actividad 20 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 259).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■</td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Este ejercicio está asociado a los descriptores “C3”, “C4” y “C5”.

Se trabaja la independencia de sucesos y la probabilidad condicionada.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">16 Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A)=0,84$; $P(B)=0,5$ y $P(\overline{A}|\overline{B})=0,58$. Entonces:
a) ¿Son independientes los sucesos A y B?
b) Calcula la probabilidad de que se ocurran A y $\overline{B}$.

Figura 4.5.2. Actividad 16 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 257).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta cuestión corresponde al descriptor “C3”.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">5. Deduce, a partir de la probabilidad de la unión de tres sucesos, la probabilidad de la unión de cuatro sucesos.

Figura 4.5.3. Actividad 5 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 253).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En este problema se trabaja el descriptor “C3”.
Se trata de una aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">12. Se elige al azar un número de 5 cifras distintas escrito con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8.
a) Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 87000.
b) Calcula la probabilidad de que sea menor que 32000.
c) Calcula la probabilidad de que el número esté entre 30000 y 60000.

Figura 4.5.4. Actividad 12 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 255).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td></td><td>Problema</td><td>■</td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">Esta cuestión está asociada al descriptor “C3”.
Se busca la comprensión de la axiomática de Kolmogorov.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">9. En un experimento con 7 posibles resultados, las probabilidades de cada resultado son:
$P(w_1)=0{,}12;\ P(w_2)=0{,}21;\ P(w_3)=0{,}14$
$P(w_4)=0{,}14;\ P(w_5)=0{,}1;\ P(w_6)=a;\ P(w_7)=b$
Razona si a y b pueden tomar los siguientes valores.
a) $a=0{,}3\quad b=-0{,}05$ c) $a=0{,}2\quad b=0{,}05$
b) $a=0{,}15\quad b=0{,}14$ d) $a=0{,}2\quad b=0{,}35$

Figura 4.5.5. Actividad 9 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 255).</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo</td><td></td><td>Ejercicio</td><td>■</td><td>Problema</td><td></td><td>Cuestión</td><td></td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="8">En este problema se trabajan los descriptores “C3”, “C4”, “C5” y “C6”.
Se trata del típico problema de urnas en el que se trabajan los diagramas de árbol, la dependencia de sucesos, probabilidad condicionada y Teorema de la Probabilidad Total.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="8">51. Se tiene una urna con cuatro bolas blancas y cuatro negras. Se saca una bola al azar y se introduce en otra urna que contiene dos bolas blancas y tres negras. De esta urna se extrae una segunda bola. Calcula:
a) La probabilidad de que la primera bola sea negra y la segunda blanca.
b) La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.
c) La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.
d) La probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

Figura 4.5.6. Actividad 51 - Tema 10 (Serrano et al., 2016, p. 267).</td></tr>
</table>

Capítulo 5

Resultados en relación con el estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto

En este capítulo se realiza un análisis de la adecuación entre el currículo vigente y los libros de texto utilizados en el anterior capítulo en relación con la probabilidad.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Como ya se ha comentado anteriormente, tanto el currículo como los libros de texto siguen una estructura en espiral, esto es, cada curso se repasa lo visto en el año anterior y se aumenta o profundiza en nuevos contenidos. Además, a medida que avanzan los cursos el nivel de rigor matemático también aumenta.

El contenido del libro de 2º de ESO sigue el mismo orden que el del currículo. Comienza definiendo de forma muy sencilla los conceptos de experimento aleatorio y determinista (C1), el espacio muestral y los sucesos (C2) y la probabilidad de un suceso y la regla de Laplace (C3). El libro se ajusta a la perfección a los contenidos del currículo, ya que ni se deja contenidos ni se excede en ellos.

El libro de 3º de ESO también sigue el mismo orden que el currículo. Vuelve a repetir los contenidos del curso anterior y añade la probabilidad de la unión y la probabilidad del suceso contrario (C3). Además, el libro introduce la probabilidad de experimentos compuestos (C4) aunque en el currículo no aparezca. En este caso, el libro amplía contenidos respecto al currículo.

Al igual que antes, el libro de 4º de ESO para enseñanzas académicas sigue el orden establecido en el currículo y vuelven a aparecer los contenidos de los cursos anteriores. El libro de texto añade la diferencia de sucesos (C2) y la probabilidad condicionada (C5). También añade el Teorema de la Probabilidad Total (C6) y el Teorema de Bayes (C7), ampliando así contenidos respecto al currículo ya que estos dos descriptores no aparecen hasta de 2º de Bachillerato.

En los libros de 1º y 2º de Bachillerato aplicados a las Ciencias Sociales el contenido se mantiene, lo único que cambia es el rigor matemático. Se aprecia un gran cambio entre los libros de la ESO y los de Bachillerato. Los libros de Bachillerato son más sobrios, van desapareciendo los dibujos para dejar lugar a textos formales con abundante notación matemática.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Tras analizar los libros de texto se aprecia como estos se ajustan bastante bien a los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo. Por norma general, los libros disponen de contenido adicional que en el currículo están definidos para cursos posteriores. Por ejemplo, en el libro de 4º de ESO aparece el Teorema de la Probabilidad Total (C6) y el Teorema de Bayes (C7), que no se ve hasta 2º de Bachillerato. Por lo tanto, queda claro que, el currículo especifica los contenidos mínimos que se deben trabajar en cada curso y el libro de texto adelanta contenidos para que el docente que vaya a hacer uso del mismo pueda aumentar o no materia en función de la clase en particular.

Se puede apreciar también como existe una coherencia en la organización del libro de texto y el currículo, ya que el libro presenta los contenidos en el mismo orden en el que aparecen en el currículo.

Además, se observa como cada libro se adapta al curso en concreto. En cursos inferiores, el libro está lleno de imágenes y diagramas. Con esto se busca llamar la atención del estudiante, que la lectura resulte más atractiva y facilitar la comprensión de ciertos contenidos. En cambio, en cursos superiores se prescinde de las imágenes y se le da mayor relevancia al contenido matemático riguroso, ya que una de las actitudes matemáticas que debe adquirir el estudiante a lo largo de los cursos, según el currículo, es "la destreza en el uso del lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos en diferentes contextos".

Asimismo, el libro presenta numerosas referencias al libro digital que pueden servir como apoyo para una mejor comprensión del tema en cuestión y para la adquisición de otra de las actitudes matemáticas que debe conseguir el estudiante, según el currículo, como es "el uso de determinadas herramientas tecnológicas que contribuyan al aprendizaje de las matemáticas".

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la probabilidad en 4º de ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio llevado a cabo con un grupo de 4º de ESO sobre la probabilidad.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo, se analiza el contenido de probabilidad en el libro de texto de 4º de ESO. En el segundo capítulo, se estudian las dificultades y errores previstos que pueden surgir a los estudiantes en este tema. En el tercer capítulo, se presenta el proceso de estudio llevado a cabo, desde la distribución de tiempo de la clase, las actividades adicionales planificadas y la actividad autónoma del alumnado prevista. En el último capítulo, se analiza la experimentación realizada mediante la elaboración de un cuestionario y el análisis de los resultados obtenidos.

Capítulo 6
La probabilidad en el libro de texto de referencia

En este capítulo se realiza un análisis del Tema 13 del libro de texto de la editorial SM Savia para 4º de ESO (Alcaide et al., 2016). Es el libro que se utiliza en el centro donde se ha realizado la experimentación y que sirve como base a la hora de diseñar la docencia autónoma.

Para la elaboración de este capítulo se usa como texto de referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* (Godino et al., 2006).

6.1. Objetos matemáticos involucrados

En este artículo se utilizan algunas herramientas del "enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática" para valorar la idoneidad de un texto matemático escolar. Para ello se deben tener en cuenta los siguientes criterios:

- *Idoneidad epistémica*. Representatividad de los significados institucionales implementados respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva.* Proximidad de los significados implementados respecto de aquellos que son personales iniciales de los estudiantes.
- *Idoneidad semiótica.* Negociación de significados entre los que se enseñan y los que acaban siendo comunes para el alumnado.
- *Idoneidad mediacional.* Disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional.* Implicación del alumnado en el proceso de estudio.

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto, es necesario establecer un "significado de referencia" que sirva de comparación. Los principales elementos del significado de referencia se pueden agrupar en seis tipos de entidades:

- *Lenguaje* (verbal, gráfico y simbólico)
- *Situaciones* (problemas descontextualizados y contextualizados)
- *Conceptos* (previos y emergentes)
- *Procedimientos*
- *Propiedades*
- *Argumentos*

En la Tabla 6.1.1 se muestran los principales elementos de la configuración epistémica "empírica" de la probabilidad.

Tabla 6.1.1a. Lenguaje.

LENGUAJE
Verbal Azar, experimento aleatorio, experimento determinista, espacio muestral, suceso, espacio de sucesos, suceso elemental, suceso compuesto, suceso imposible, suceso seguro, suceso contrario o complementario, unión de sucesos, intersección de sucesos, diferencia de sucesos, compatibilidad de sucesos, diagrama de Venn, probabilidad, frecuencia relativa, sucesos equiprobables, Regla de Laplace, casos favorables, casos posibles, probabilidad de la unión de sucesos, probabilidad del suceso contrario, experimentos compuestos, dependencia de sucesos, diagrama de árbol, tabla de contingencia, probabilidad condicionada, Teorema de la Probabilidad Total, Teorema de Bayes. *Gráfico* Espacio muestral, diagrama de Venn, diagrama de árbol, tabla de contingencia, ilustraciones (monedas, dados, cartas, urnas…). *Simbólico* E , A , S , {} , $\neq$, $=$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$, % , $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $\Longrightarrow$, $P(A)$, $P(A\|B)$

Tabla 6.1.1b. Situaciones y conceptos.

SITUACIONES	CONCEPTOS
Problemas descontextualizados Cálculo del espacio muestral y de sucesos, operaciones con sucesos, cálculo de probabilidades, cálculo de probabilidad condicionada. *Problemas contextualizados* Los mismos problemas pero en situaciones concretas: “Se lanza una moneda tres veces. Escribe el espacio muestral…” “Se elige un número al azar entre 1 y 50. Calcular la probabilidad de que…” “En una clase hay 12 chicas y 16 chicos. Si se eligen 2 alumnos al azar, calcular la probabilidad de que…”	*Previos* Experimentos aleatorios y deterministas, espacio muestral y sucesos, cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y mediante su frecuencia relativa, diagramas de árbol sencillos. *Emergentes* Diferencia de sucesos, probabilidad compuesta, dependencia de sucesos, tablas de contingencia, probabilidad condicionada, Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Tabla 6.1.1c. Procedimientos y propiedades.

PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
Descontextualización del enunciado del problema Contextualización de enunciados descontextualizados Elaboración de diagramas de Venn para comprobar resultados. Uso de la combinatoria para el cálculo de casos posibles en la Regla de Laplace. Elaboración de diagramas de árbol y tablas de contingencia para organizar los datos.	Operaciones con sucesos: unión, intersección, contrario o complementario y diferencia. Sucesos compatibles si: $A \cap B \neq \emptyset$ Propiedades de probabilidad: $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\emptyset) = 0$ $P(E) = 1$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Sucesos independientes si: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ Probabilidad condicionada: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Tabla 6.1.1d. Argumentos.

ARGUMENTOS
Comprobación de que los sucesos contrarios verifican: $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = E$
Comprobación de que la diferencia de sucesos verifica: $A - B = A \cap \bar{B}$
Comprobación de que la suma de las probabilidades de sucesos equiprobables es 1.
Particularización de la fórmula de la probabilidad de la unión para sucesos incompatibles, es decir, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

En esta sección se realiza un análisis global de la unidad didáctica del libro de 4º de ESO (Alcaide et al., 2016), que corresponde al tema 13 (Probabilidad).

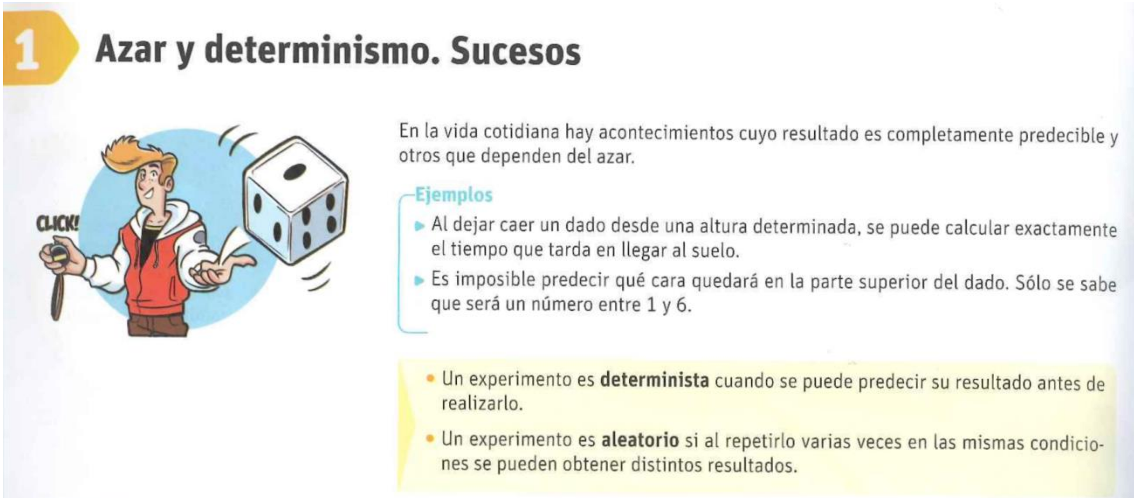
El tema comienza con una portada (Figura 6.2.1), en cuyo centro se encuentra una pequeña lectura relacionada con el tema a tratar. La lectura se inicia con la siguiente pregunta: *¿Qué es más ventajoso, apostar a sacar un seis en cuatro tiradas de un dado, o sacar dos seises al lanzar dos dados 24 veces?* Con esta pregunta se busca generar un interés en el estudiante que lo incite a leer dicha lectura inicial y por ende conseguir una mayor predisposición al estudio de la unidad. Además, en la portada aparecen una serie de cuestiones previas sobre las que reflexionar que se irán resolviendo durante el transcurso del tema.

Figura 6.2.1. Portada de la unidad (Alcaide et al., 2016, p. 270 y 271).

En las páginas siguientes se encuentra el desarrollo del tema con los distintos apartados en que se divide, que son:

1. Azar y determinismo. Sucesos.
2. Probabilidad de un suceso.
3. Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad de experimentos compuestos.
4. Probabilidad condicionada.
5. Probabilidad total.
6. Análisis del azar.

Todos los apartados tienen una estructura similar. Comienzan con un título que hace referencia al contenido que se va a abordar en esa sección. A continuación, una breve introducción acompañada de alguna imagen y un ejemplo resuelto para facilitar la comprensión. Además, en un recuadro amarillo aparece sintetizado el contenido más relevante de esa sección, que por norma general suelen ser definiciones o fórmulas matemáticas (Figura 6.2.2).


1 **Azar y determinismo. Sucesos**

CLICK!

En la vida cotidiana hay acontecimientos cuyo resultado es completamente predecible y otros que dependen del azar.

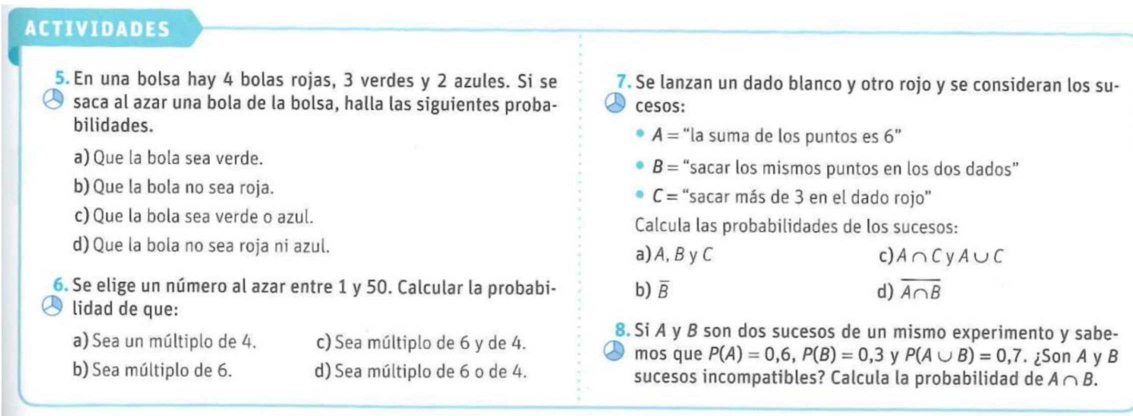
Ejemplos

- Al dejar caer un dado desde una altura determinada, se puede calcular exactamente el tiempo que tarda en llegar al suelo.
- Es imposible predecir qué cara quedará en la parte superior del dado. Sólo se sabe que será un número entre 1 y 6.

- Un experimento es **determinista** cuando se puede predecir su resultado antes de realizarlo.
- Un experimento es **aleatorio** si al repetirlo varias veces en las mismas condiciones se pueden obtener distintos resultados.

Figura 6.2.2. Título, introducción, imagen, ejemplo y recuadro amarillo (Alcaide et al., 2016, p. 272).

Posteriormente, aparecen una serie de actividades de distintos niveles de dificultad para poner en práctica el contenido que se acaba de explicar (Figura 6.2.3). El nivel de dificultad se señaliza mediante un diagrama de sectores, formado por tres sectores de igual amplitud, de tal manera que el nivel de dificultad se asocia al número de sectores coloreados.

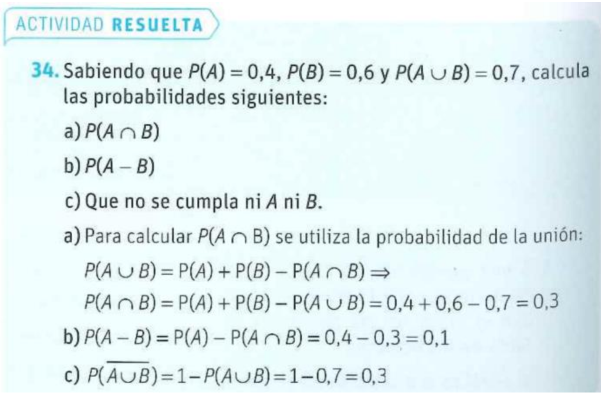

ACTIVIDADES

5. En una bolsa hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si se saca al azar una bola de la bolsa, halla las siguientes probabilidades.
   a) Que la bola sea verde.
   b) Que la bola no sea roja.
   c) Que la bola sea verde o azul.
   d) Que la bola no sea roja ni azul.
6. Se elige un número al azar entre 1 y 50. Calcular la probabilidad de que:
   a) Sea un múltiplo de 4.
   b) Sea múltiplo de 6.
   c) Sea múltiplo de 6 y de 4.
   d) Sea múltiplo de 6 o de 4.
7. Se lanzan un dado blanco y otro rojo y se consideran los sucesos:
   - A = "la suma de los puntos es 6"
   - B = "sacar los mismos puntos en los dos dados"
   - C = "sacar más de 3 en el dado rojo"

   Calcula las probabilidades de los sucesos:
   a) A, B y C
   b) $\overline{B}$
   c) $A \cap C$ y $A \cup C$
   d) $\overline{A \cap B}$
8. Si A y B son dos sucesos de un mismo experimento y sabemos que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? Calcula la probabilidad de $A \cap B$.

Figura 6.2.3. Actividades de cada sección (Alcaide et al., 2016, p. 275).

En ocasiones, ciertas actividades del libro se encuentran resueltas para servir como referencia al estudiante a la hora de resolver ejercicios similares (Figura 6.2.4).



ACTIVIDAD **RESUELTA**

34. Sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$, calcula las probabilidades siguientes:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A - B)$

c) Que no se cumpla ni A ni B.

a) Para calcular $P(A \cap B)$ se utiliza la probabilidad de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}3$

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Figura 6.2.4. Actividad resuelta (Alcaide et al., 2016, p. 284).

En los márgenes aparecen curiosidades (Figura 6.2.5a), referencias a recursos digitales (Figura 6.2.5b) y determinadas ideas a tener en cuenta (Figura 6.2.5c).

(a) Sabías que… (b) MAT-TIC. (c) Ten en cuenta.

Figura 6.2.5. Curiosidades, recursos digitales y "ten en cuenta" (Alcaide et al., 2016, p. 278).

Tras la última sección, *6. Análisis del azar*, se encuentra un resumen de una hoja con los conceptos más relevantes de la unidad (Figura 6.2.6).

A continuación, una serie de actividades clave resueltas (Figura 6.2.7). Dichas actividades tienen un grado de dificultad superior a las vistas en la Figura 6.2.4.

Posteriormente, más ejercicios para practicar organizados por contenidos y con distintos niveles de dificultad (Figura 6.2.8). De esta forma, el estudiante dispone de un amplio repertorio de ejercicios con los que practicar los distintos contenidos del tema.

Por último, una serie de cuestiones y problemas de carácter más reflexivo para ponerse a prueba (Figura 6.2.9) y una autoevaluación con actividades de repaso de toda la unidad (Figura 6.2.10).

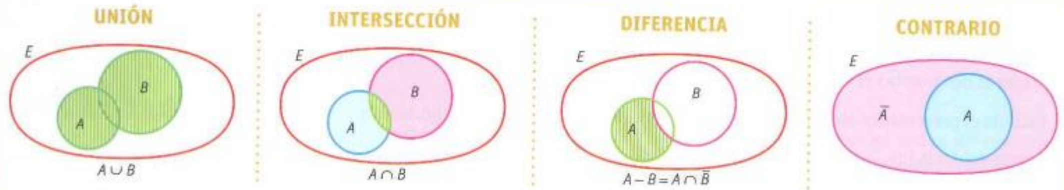
Organiza tus ideas

AZAR Y DETERMINISMO

Un experimento es **aleatorio** si al repetirlo varias veces en las mismas condiciones se pueden obtener distintos resultados.

- El **espacio muestral**, E, es el conjunto formado por todos los resultados posibles.
- Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Los tipos de sucesos son:
  - **Elemental**: si es uno de los resultados posibles.
  - **Compuesto**: si está formado por varios sucesos elementales.
  - **Imposible**: si no ocurre nunca, $\varnothing$.
  - **Seguro**: si ocurre siempre. Coincide con el espacio muestral, E.
  - **Contrario** o **complementario**, $\overline{B}$.
- El **espacio de sucesos**, S, es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

SUCESOS. OPERACIONES



- Dos sucesos A y B son **compatibles** si $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

La **probabilidad** $P(A)$, de un suceso A, es el valor de la frecuencia relativa de A, al repetir el experimento infinitas veces.

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad P(E) = 1$$

Regla de Laplace

Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{n.° casos favorables}}{\text{n.° casos posibles}}$$

Probabilidad de la unión

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad del complementario

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

PROBABILIDAD DE EXPERIMENTOS COMPUESTOS. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Un **experimento compuesto** es el formado por dos o más experimentos simples.

Regla del producto

La probabilidad de un resultado de un experimento compuesto es el **producto de las probabilidades de las ramas** que forman el resultado.

Dependencia de sucesos

- **Sucesos dependientes**: la realización de uno depende de la realización del otro. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$
- **Sucesos independientes**: la realización de uno no depende de la realización del otro. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TEOREMA DE BAYES

La probabilidad de A condicionado por B es $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

- **Teorema de la probabilidad total**: $P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$
- **Teorema de Bayes**: $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$

Figura 6.2.6. Resumen de la unidad (Alcaide et al., 2016, p. 282).

Actividades clave

1. En un estudio de uso de redes sociales en una población, el 35 % de los encuestados usa la red A, y el 25 %, la red B, mientras que un 5 % dice usar ambas redes.

Si se elige una persona al azar, calcula las siguientes probabilidades.

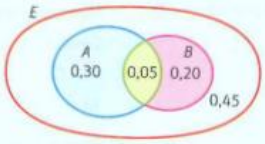
a) Que use alguna red social.

b) Que solo use la red A.

c) Que use solo una red.

d) Que no use ninguna red.

Se designan los sucesos A = "usar la red A" y B = "usar la red B" y se utilizan diagramas de Venn para asignar probabilidades:



- Un 5 % usa ambas redes:
  $P(A \cap B) = 0,05$
- Los que solo usan la red A:
  $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = 0,35 - 0,05 = 0,30$
- Los que solo usan B:
  $P(B - A) = P(B \cap \overline{A}) = 0,25 - 0,05 = 0,20$
- Los que no usan ninguna red:
  $P(\overline{A \cup B}) = 0,45$

a) El suceso "usar alguna red" se puede expresar como $A \cup B$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,25 - 0,05 = 0,55$

b) El suceso "usar solo la red A" se puede expresar como $A - B$:
$P(A - B) = 0,30$

c) El suceso "usar solo una red" se describe como $(A - B) \cup (B - A)$:
$P[(A - B) \cup (B - A)] = 0,30 + 0,20 = 0,50$

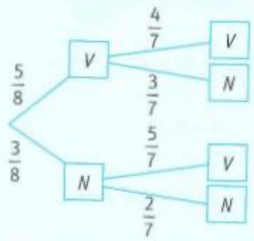
d) El suceso "no usar ninguna red" se expresa como $(\overline{A \cup B})$.
$P(\overline{A \cup B}) = 0,45$

2. Una bolsa tiene 5 bolas verdes y 3 negras. Se sacan sucesivamente dos bolas, sin devolver la primera.

Raúl apuesta que las dos bolas serán del mismo color y Estela que serán de distinto color.

¿Quién tiene mayor probabilidad de acertar?

Se utiliza un diagrama de árbol para representar la situación:



- Raúl acierta si se sacan dos verdes o dos negras:
  $P(\text{Raúl}) = P(VV) + P(NN) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{20+6}{56} = \frac{13}{28} = 0,46$
- Y Estela acierta si se sacan dos bolas de distinto color:
  $P(\text{Estela}) = 1 - P(\text{Raúl}) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28} = 0,54$.

Tiene más probabilidades de acertar Estela.

3. A una prueba se han presentado 80 mujeres y 70 hombres. Aprueban el 60 % de las mujeres y el 50 % de los hombres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

b) Se elige al azar una persona aprobada, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?

Se designan los sucesos así:

- A = "aprobado"
- $\overline{A}$ = "suspenso"
- M = "mujer"
- H = "hombre"

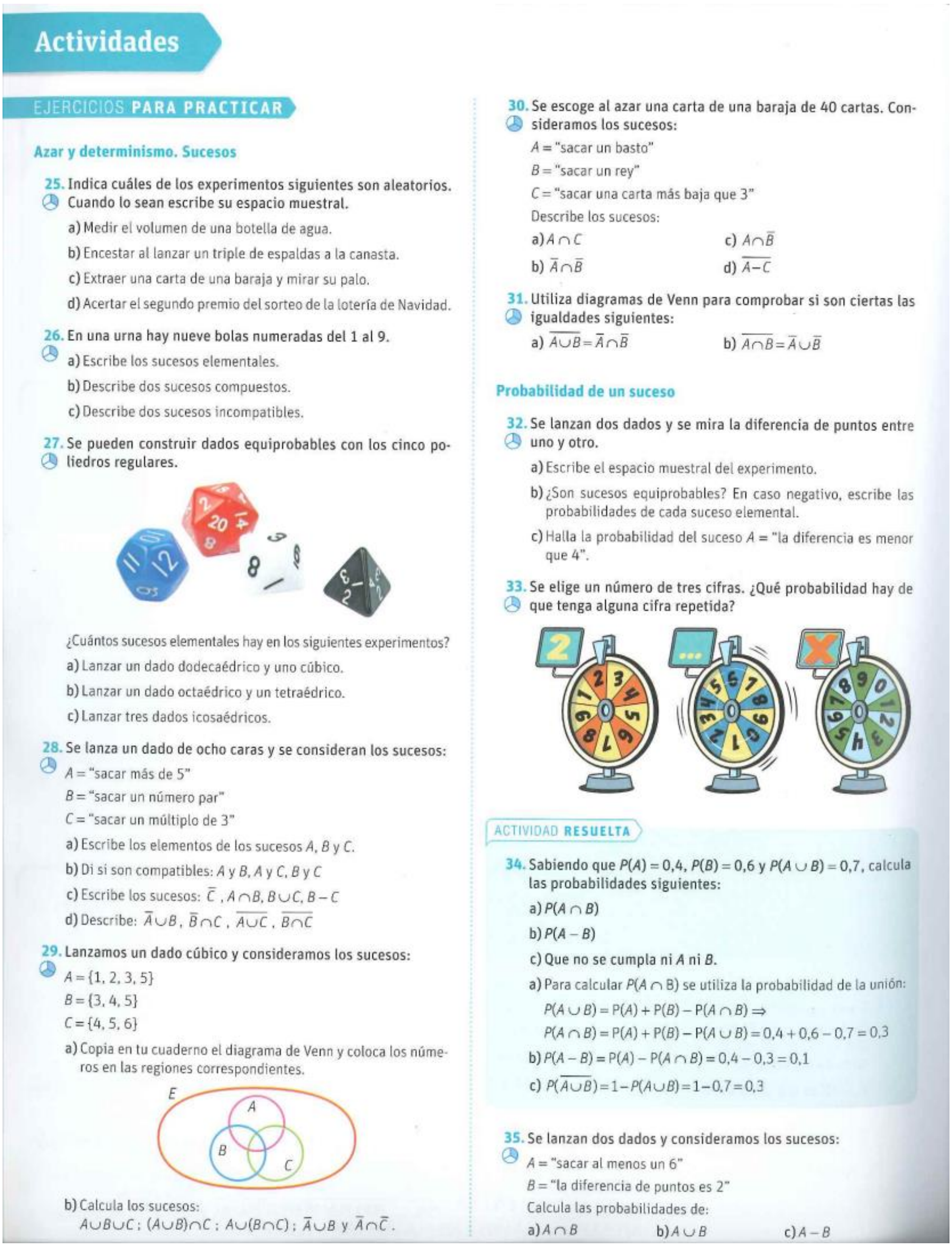
a) Para calcular la probabilidad de aprobar, se aplica el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(M)\cdot P(A/M) + P(H)P(A/H) = \frac{80}{150}\cdot 0,6 + \frac{70}{150}\cdot 0,50 = 0,553$$

b) La probabilidad de elegir a una mujer al azar, sabiendo que está aprobada es $P(M/A)$. Para hallarla se aplica el teorema de Bayes:

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M)P(A|M)}{P(M)\cdot P(A/M) + P(H)\cdot P(A/H)} = \frac{0,32}{0,553} = 0,729$$

Figura 6.2.7. Actividades clave resueltas (Alcaide et al., 2016, p. 283).



Actividades

EJERCICIOS **PARA PRACTICAR**

Azar y determinismo. Sucesos

25. **Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios. Cuando lo sean escribe su espacio muestral.**

a) Medir el volumen de una botella de agua.

b) Encestar al lanzar un triple de espaldas a la canasta.

c) Extraer una carta de una baraja y mirar su palo.

d) Acertar el segundo premio del sorteo de la lotería de Navidad.

26. **En una urna hay nueve bolas numeradas del 1 al 9.**

a) Escribe los sucesos elementales.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) Describe dos sucesos incompatibles.

27. **Se pueden construir dados equiprobables con los cinco poliedros regulares.**

¿Cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos?

a) Lanzar un dado dodecaédrico y uno cúbico.

b) Lanzar un dado octaédrico y un tetraédrico.

c) Lanzar tres dados icosaédricos.

28. **Se lanza un dado de ocho caras y se consideran los sucesos:**

A = "sacar más de 5"

B = "sacar un número par"

C = "sacar un múltiplo de 3"

a) Escribe los elementos de los sucesos A, B y C.

b) Di si son compatibles: A y B, A y C, B y C

c) Escribe los sucesos: $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B - C$

d) Describe: $\overline{A} \cup B$, $\overline{B} \cap C$, $\overline{A \cup C}$, $\overline{B \cap C}$

29. **Lanzamos un dado cúbico y consideramos los sucesos:**

$A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$C = \{4, 5, 6\}$

a) Copia en tu cuaderno el diagrama de Venn y coloca los números en las regiones correspondientes.

b) Calcula los sucesos:

$A \cup B \cup C$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cup B$ y $\overline{A} \cap \overline{C}$.

30. **Se escoge al azar una carta de una baraja de 40 cartas. Consideramos los sucesos:**

A = "sacar un basto"

B = "sacar un rey"

C = "sacar una carta más baja que 3"

Describe los sucesos:

a) $A \cap C$ c) $A \cap \overline{B}$

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$ d) $\overline{A - C}$

31. **Utiliza diagramas de Venn para comprobar si son ciertas las igualdades siguientes:**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad de un suceso

32. **Se lanzan dos dados y se mira la diferencia de puntos entre uno y otro.**

a) Escribe el espacio muestral del experimento.

b) ¿Son sucesos equiprobables? En caso negativo, escribe las probabilidades de cada suceso elemental.

c) Halla la probabilidad del suceso A = "la diferencia es menor que 4".

33. **Se elige un número de tres cifras. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna cifra repetida?**

ACTIVIDAD **RESUELTA**

34. **Sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$, calcula las probabilidades siguientes:**

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A - B)$

c) Que no se cumpla ni A ni B.

a) Para calcular $P(A \cap B)$ se utiliza la probabilidad de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}3$

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

35. **Se lanzan dos dados y consideramos los sucesos:**

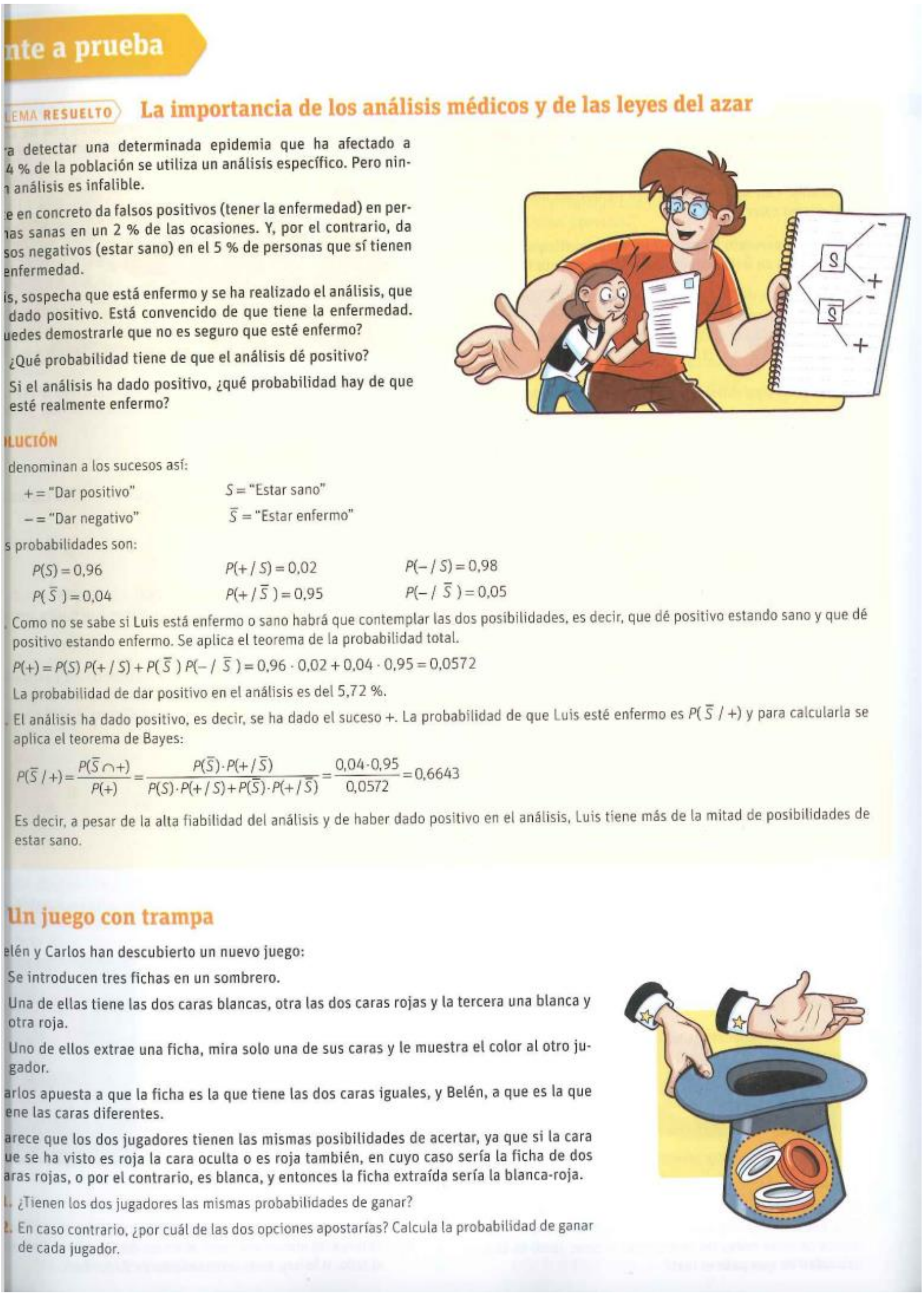
A = "sacar al menos un 6"

B = "la diferencia de puntos es 2"

Calcula las probabilidades de:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A - B$

Figura 6.2.8. Ejercicios para practicar (Alcaide et al., 2016, p. 284).



nte a prueba

LEMA RESUELTO **La importancia de los análisis médicos y de las leyes del azar**

'a detectar una determinada epidemia que ha afectado a 4 % de la población se utiliza un análisis específico. Pero nin- n análisis es infalible.

e en concreto da falsos positivos (tener la enfermedad) en per- nas sanas en un 2 % de las ocasiones. Y, por el contrario, da sos negativos (estar sano) en el 5 % de personas que sí tienen enfermedad.

is, sospecha que está enfermo y se ha realizado el análisis, que dado positivo. Está convencido de que tiene la enfermedad. uedes demostrarle que no es seguro que esté enfermo?

¿Qué probabilidad tiene de que el análisis dé positivo?

Si el análisis ha dado positivo, ¿qué probabilidad hay de que esté realmente enfermo?

LUCIÓN

denominan a los sucesos así:

$+$ = "Dar positivo" S = "Estar sano"

$-$ = "Dar negativo" $\overline{S}$ = "Estar enfermo"

s probabilidades son:

$P(S) = 0{,}96$ $P(+/S) = 0{,}02$ $P(-/S) = 0{,}98$

$P(\overline{S}) = 0{,}04$ $P(+/\overline{S}) = 0{,}95$ $P(-/\overline{S}) = 0{,}05$

Como no se sabe si Luis está enfermo o sano habrá que contemplar las dos posibilidades, es decir, que dé positivo estando sano y que dé positivo estando enfermo. Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$P(+) = P(S)\,P(+/S) + P(\overline{S})\,P(-/\overline{S}) = 0{,}96 \cdot 0{,}02 + 0{,}04 \cdot 0{,}95 = 0{,}0572$

La probabilidad de dar positivo en el análisis es del 5,72 %.

El análisis ha dado positivo, es decir, se ha dado el suceso +. La probabilidad de que Luis esté enfermo es $P(\overline{S}/+)$ y para calcularla se aplica el teorema de Bayes:

$$P(\overline{S}/+) = \frac{P(\overline{S}\cap +)}{P(+)} = \frac{P(\overline{S})\cdot P(+/\overline{S})}{P(S)\cdot P(+/S) + P(\overline{S})\cdot P(+/\overline{S})} = \frac{0{,}04\cdot 0{,}95}{0{,}0572} = 0{,}6643$$

Es decir, a pesar de la alta fiabilidad del análisis y de haber dado positivo en el análisis, Luis tiene más de la mitad de posibilidades de estar sano.

Un juego con trampa

elén y Carlos han descubierto un nuevo juego:

Se introducen tres fichas en un sombrero.

Una de ellas tiene las dos caras blancas, otra las dos caras rojas y la tercera una blanca y otra roja.

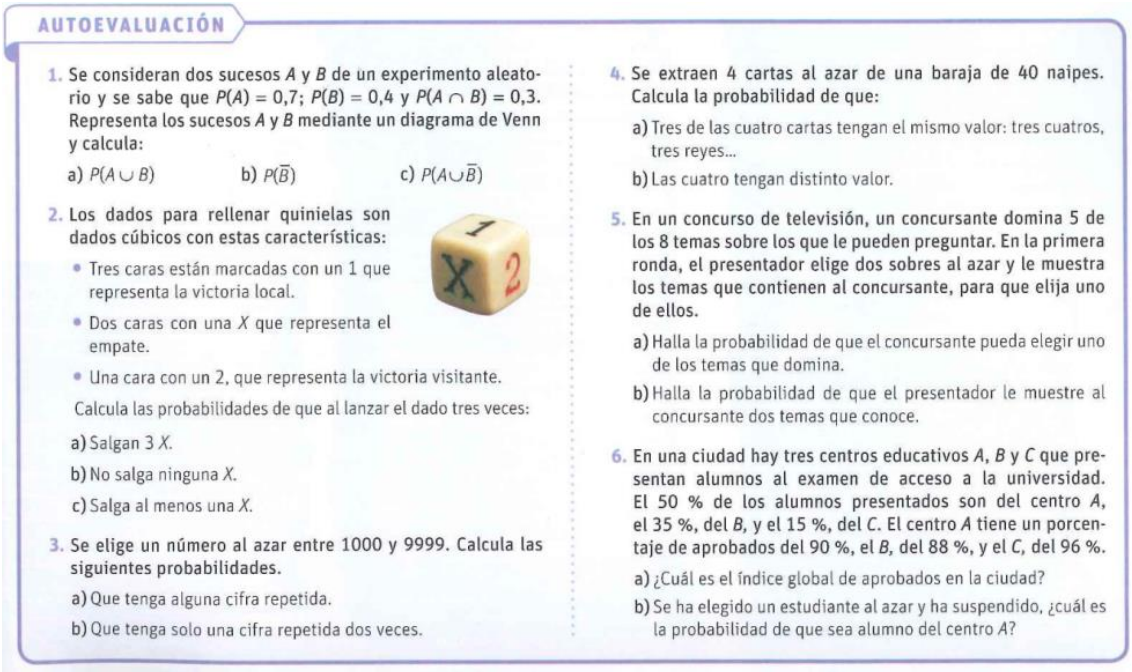
Uno de ellos extrae una ficha, mira solo una de sus caras y le muestra el color al otro jugador.

arlos apuesta a que la ficha es la que tiene las dos caras iguales, y Belén, a que es la que ene las caras diferentes.

arece que los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de acertar, ya que si la cara ue se ha visto es roja la cara oculta o es roja también, en cuyo caso sería la ficha de dos aras rojas, o por el contrario, es blanca, y entonces la ficha extraída sería la blanca-roja.

1. ¿Tienen los dos jugadores las mismas probabilidades de ganar?
2. En caso contrario, ¿por cuál de las dos opciones apostarías? Calcula la probabilidad de ganar de cada jugador.

Figura 6.2.9. Problemas para ponerse a prueba (Alcaide et al., 2016, p. 288).



AUTOEVALUACIÓN

1. **Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio y se sabe que $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,3$. Representa los sucesos A y B mediante un diagrama de Venn y calcula:**

   a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A \cup \overline{B})$

2. **Los dados para rellenar quinielas son dados cúbicos con estas características:**
   - Tres caras están marcadas con un 1 que representa la victoria local.
   - Dos caras con una X que representa el empate.
   - Una cara con un 2, que representa la victoria visitante.

   Calcula las probabilidades de que al lanzar el dado tres veces:

   a) Salgan 3 X.

   b) No salga ninguna X.

   c) Salga al menos una X.

3. **Se elige un número al azar entre 1000 y 9999. Calcula las siguientes probabilidades.**

   a) Que tenga alguna cifra repetida.

   b) Que tenga solo una cifra repetida dos veces.

4. **Se extraen 4 cartas al azar de una baraja de 40 naipes. Calcula la probabilidad de que:**

   a) Tres de las cuatro cartas tengan el mismo valor: tres cuatros, tres reyes...

   b) Las cuatro tengan distinto valor.

5. **En un concurso de televisión, un concursante domina 5 de los 8 temas sobre los que le pueden preguntar. En la primera ronda, el presentador elige dos sobres al azar y le muestra los temas que contienen al concursante, para que elija uno de ellos.**

   a) Halla la probabilidad de que el concursante pueda elegir uno de los temas que domina.

   b) Halla la probabilidad de que el presentador le muestre al concursante dos temas que conoce.

6. **En una ciudad hay tres centros educativos A, B y C que presentan alumnos al examen de acceso a la universidad. El 50 % de los alumnos presentados son del centro A, el 35 %, del B, y el 15 %, del C. El centro A tiene un porcentaje de aprobados del 90 %, el B, del 88 %, y el C, del 96 %.**

   a) ¿Cuál es el índice global de aprobados en la ciudad?

   b) Se ha elegido un estudiante al azar y ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno del centro A?

Figura 6.2.10. Autoevaluación (Alcaide et al., 2016, p. 289).

En resumen, se observa como el libro se adapta al curso en concreto, ofreciendo imágenes y diagramas para facilitar la comprensión a la hora de resolver ejercicios, sin dejar de lado el rigor matemático correspondiente al curso. Además, la cantidad de ejercicios de la que dispone es muy amplia y la estructuración de los contenidos es clara y sigue el mismo orden que el currículo.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se estudian las dificultades y los errores previsibles en el aprendizaje de la unidad de probabilidad en 4º de ESO. Resulta interesante llevar a cabo este tipo de análisis ya que permite anticiparse a determinadas situaciones y estar preparado para superar o minimizar los obstáculos que puedan ir surgiendo.

7.1. Dificultades

En esta sección se plantean las posibles dificultades que los estudiantes puedan tener a lo largo de este tema. En función de su origen, las dificultades pueden ser de dimensión epistemológica, cognitiva o didáctica. Las dificultades de dimensión epistemológica están asociadas al contenido matemático, las dificultades de dimensión cognitiva están ligadas a las características del estudiante y las dificultades de dimensión didáctica están relacionadas con el método de enseñanza.

Dificultades de dimensión epistemológica:

- *Dificultad a la hora de diferenciar si se está pidiendo la unión (ocurre A o B) o la intersección (ocurre A y B) en enunciados contextualizados.* Por ejemplo, sea A el suceso "salir par" y B el suceso "salir primo". Si se pide calcular el suceso "salir par o primo", es posible que muchos estudiantes hagan la intersección de los sucesos A y B.
- *Dificultad para comprender que:* $A - B = A \cap \bar{B}$

  $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$
- *Dificultad a la hora de dibujar diagramas de árbol.* Está muy relacionado con la comprensión de enunciados. Se espera que muchos estudiantes no sean capaces de extraer bien todos los datos del problema y por tanto, no realicen de forma adecuada el correspondiente diagrama de árbol.
- *Dificultad para diferenciar en un enunciado si se trata de un experimento simple o compuesto.*
- *Dificultad para diferenciar en un enunciado si se trata de sucesos dependientes o independientes.* Por ejemplo, en el caso de urnas o barajas de cartas, que el estudiante no sea capaz de diferenciar entre "extracción con reemplazamiento" y "extracción sin reemplazamiento".
- *Dificultad a la hora de diferenciar si se está pidiendo la probabilidad de la intersección (que ocurra A y B) o la probabilidad condicionada (que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B).*

Dificultades de dimensión cognitiva:

- *Dificultad en la comprensión de enunciados*. Es una de las grandes dificultades de este tema. Se espera que muchos estudiantes no sepan deducir del enunciado lo que se les está pidiendo o que no sepan extraer de él los datos o que simplemente lo interpreten mal.

- *Dificultad a la hora de abordar un problema*. El tema de probabilidad tiene una dificultad añadida, ya que a diferencia de otros temas, los ejercicios no son ni tan mecánicos ni el procedimiento está tan pautado. Esto puede suponer un gran problema para aquellos estudiantes indecisos que no tienen muy claro como atacar un problema.

Dificultades de dimensión didáctica:

- *Dificultad en la comprensión de la notación matemática.* Es posible que muchos estudiantes presenten dificultades a la hora de entender la notación de conjuntos y de determinadas probabilidades.

7.2. Errores y su posible origen

En esta sección se plantean los posibles errores (manifestaciones de las dificultades) que los estudiantes puedan cometer a lo largo del tema.

Por ejemplo, como se ha comentado anteriormente, es posible que los estudiantes tengan dificultades a la hora de comprender determinados enunciados. Esto puede suponer que cometan errores a la hora de extraer datos del enunciado y que realicen mal los diagramas de árbol.

Otra de las dificultades que pueden presentar los estudiantes es la dificultad para comprender la notación matemática. Esto puede suponer que tengan errores de notación.

Es posible que tengan dificultades con algunos sucesos, por lo que es muy probable que cometan errores a la hora de escribir los elementos de determinados sucesos (unión, intersección, complementario, diferencia).

Dado que la probabilidad condicionada es un contenido nuevo en este curso, es bastante probable que cometan errores a la hora de calcularla.

A pesar de que llevan años trabajando con fracciones, se espera que determinados alumnos cometan errores operando con probabilidades en forma de fracción.

Capítulo 8

El proceso de estudio

En este capítulo se presenta el proceso de estudio con un grupo de alumnos de 4º de ESO. Esta clase cuenta con un total de 30 estudiantes. Parte de ellos el año que viene harán Bachillerato de Ciencias, otra parte harán Bachillerato de Sociales y otra parte abandonará el centro, por lo que las Matemáticas que se imparten en esta clase son una mezcla entre las Académicas y las Aplicadas.

Como material de referencia, se utiliza principalmente el libro de texto empleado en el centro (Alcaide et al., 2016). Además, para la elaboración de las tareas entregables se han buscado ejercicios en internet que han sido modificados para adecuarse mejor a los contenidos que interesa evaluar.

8.1. Distribución del tiempo de la clase

El número de sesiones que se han empleado para el desarrollo de esta unidad son 7. Al tratarse de una asignatura instrumental, se imparten 4 sesiones semanales de una duración de 55 minutos cada una.

En la Figura 8.1.1 aparece recogida la planificación por sesiones de la unidad de probabilidad.

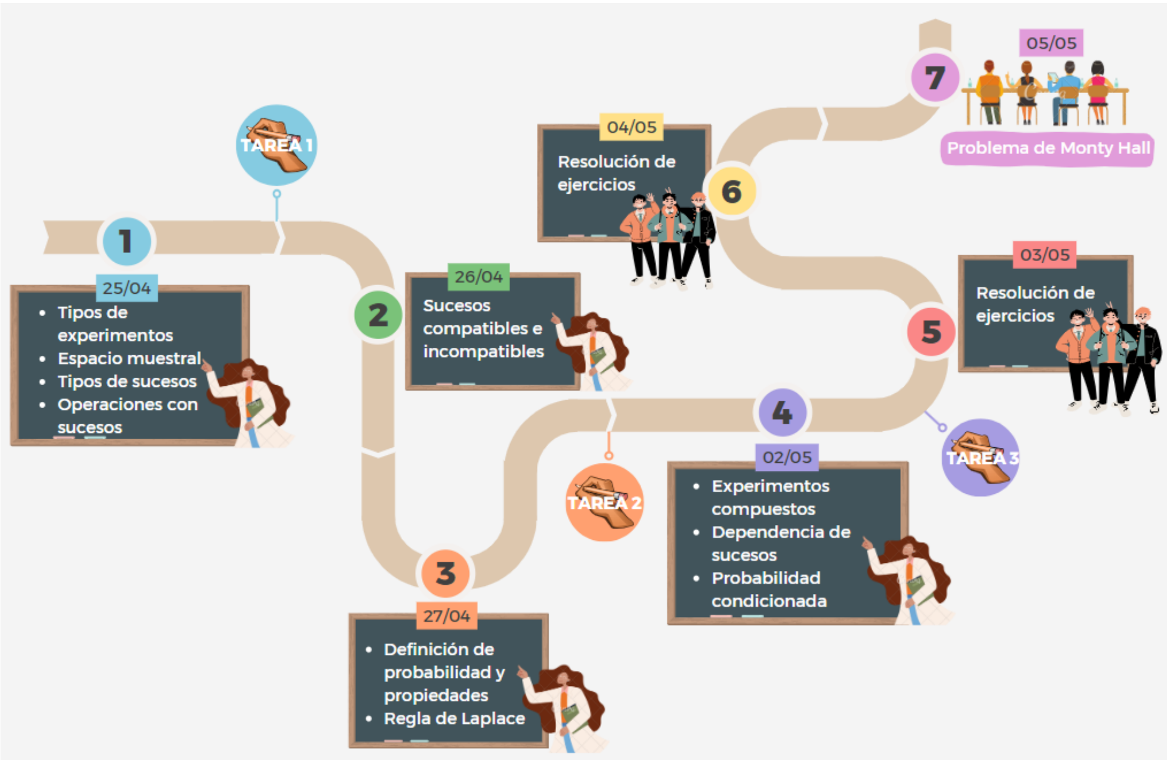


Figura 8.1.1. Cronograma de la unidad de probabilidad.

En la Tabla 8.1.2 se detalla la distribución del tiempo de cada una de las sesiones.

Tabla 8.1.2. Distribución temporal de las sesiones.

Sesión 1 – 25/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Lluvia de ideas sobre conocimientos previos.	5 min	Compartida	Dialógica
Explicación de los siguientes contenidos en la pizarra: ▪ *Experimentos deterministas y aleatorios* ▪ *Espacio muestral* ▪ *Sucesos y operaciones con sucesos*	30 min	Profesor	Magistral / Dialógica
Ejercicios por parejas de *espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos.*	15 min	Alumnado	Dialógica
Entrega y explicación de la Tarea 1 para la próxima sesión.	5 min	Profesor	Mayéutica
Sesión 2 – 26/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Recogida de la Tarea 1.	5min	Profesor	Dialógica
Resolución de dudas de la Tarea 1 por estudiantes en la pizarra.	15 min	Compartida	Constructivista
Explicación de *sucesos compatibles e incompatibles* en la pizarra.	15 min	Profesor	Magistral / Dialógica
Ejercicios por parejas de *espacio muestral, sucesos, operaciones con sucesos y compatibilidad de sucesos.*	20 min	Alumnado	Dialógica
Sesión 3 – 27/04			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Entrega de Tarea 1 corregida.	5 min	Profesor	Dialógica
Explicación de los siguientes contenidos en la pizarra: ▪ *Probabilidad de un suceso* ▪ *Propiedades de la probabilidad* ▪ *Regla de Laplace*	30 min	Profesor	Magistral / Dialógica
Ejercicios por parejas de *probabilidad.*	15 min	Alumnado	Dialógica
Entrega y explicación de la Tarea 2 para la próxima sesión.	5 min	Profesor	Mayéutica

Sesión 4 – 02/05			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Recogida de la Tarea 2.	5min	Profesor	Dialógica
Resolución de dudas de la Tarea 2 por estudiantes en la pizarra.	15 min	Compartida	Constructivista
Explicación de los siguientes contenidos en la pizarra: ▪ *Experimentos compuestos* ▪ *Dependencia de sucesos* ▪ *Diagramas de árbol* ▪ *Probabilidad compuesta* ▪ *Probabilidad condicionada*	30 min	Profesor	Magistral / Dialógica
Entrega y explicación de la Tarea 3 para la próxima sesión.	5 min	Profesor	Mayéutica
Sesión 5 – 03/05			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Entrega de Tarea 2 corregida. Recogida de Tarea 3.	5min	Profesor	Dialógica
Resolución de dudas de la Tarea 3 por estudiantes en la pizarra.	15 min	Compartida	Constructivista
Exposición de los errores más frecuentes observados en las Tareas 1 y 2.	10 min	Profesor	Mayéutica
Resolución de ejercicios por estudiantes en la pizarra.	25 min	Compartida	Constructivista
Sesión 6 – 04/05			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Entrega de Tarea 3 corregida.	5 min	Profesor	Dialógica
Exposición de los errores más frecuentes observados en las Tareas 3.	10 min	Profesor	Mayéutica
Resolución de ejercicios por estudiantes en la pizarra.	40 min	Compartida	Constructivista
Sesión 7 – 05/05			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Elaboración de grupos para la actividad.	5 min	Profesor	Dialógica
Introducción de la actividad con vídeo.	5 min	Profesor	Mayéutica
Actividad por grupos sobre el *Problema de Monty Hall*.	45 min	Compartida	Constructivista

8.2. Actividades adicionales planificadas

En la última sesión, a modo de cierre de la unidad, se realiza una actividad cooperativa relacionada con la probabilidad condicionada. Para ello, se divide a la clase en grupos de entre tres y cuatro personas, y se les plantea un problema muy famoso en probabilidad, *el Problema de Monty Hall.* Los grupos cooperativos están formados por un *portavoz*, un *secretario*, un *presentador* y un *concursante*. Cada uno de ellos será fundamental para el buen transcurso de la actividad. El *portavoz* es el encargado de explicar al resto de la clase las conclusiones a las que han llegado en su equipo, el *secretario* se encarga de anotar en la ficha dada todos los razonamientos y por último el *presentador* y el *concursante* tendrán su momento protagónico en la fase de experimentación que se explica más adelante.

Para introducir *el Problema de Monty Hall* de forma más atractiva para el alumnado, se muestra un fragmento en vídeo (https://www.youtube.com/watch?v=BzAhrFrnpGM) de la película “21 Black Jack” (Luketic, 2008) que dice lo siguiente: “Imagina que vas a concursar y se te ofrece elegir entre tres puertas distintas. Tras una de estas puertas hay un coche nuevo, tras las otras dos cabras. El presentador te hace elegir una puerta y a continuación él, que sabe lo que hay detrás de todas las puertas, decide abrir otra puerta en la que hay una cabra. Y ahora el presentador va y te dice, ¿sigues con la puerta inicial o cambias de puerta?”

A partir de ahí la sesión se divide en tres fases: una primera fase intuitiva, una segunda fase de experimentación y una tercera fase de resolución.

En la primera fase se les pregunta qué harían, si quedarse con la puerta inicial, cambiar de puerta o es indiferente (Figura 8.2.1). Para esta primera fase intuitiva, disponen de cinco minutos en los que deben debatir entre los miembros del grupo y llegar a una conclusión. Una vez transcurridos esos cinco minutos, se recogen los resultados anotados en la ficha y se realiza una puesta en común de las conclusiones llegadas en cada uno de los equipos.

¿Vosotros qué haríais? a) Quedaros con la puerta inicial. b) Cambiar de puerta. c) Es irrelevante cambiar o no cambiar.	¿Por qué?

Figura 8.2.1. Entregable de la primera fase intuitiva.

En la segunda fase se les da unas cartas por equipos en las que aparecen un coche y dos cabras (Figura 8.2.2). Ahora, los estudiantes con el rol de *presentador* y *concursante*, deben simular el experimento 20 veces, 10 cambiando de puerta y 10 sin cambiar de puerta, y anotar en una tabla si ganan o pierden (Figura 8.2.3). Una vez realizadas todas las simulaciones, se realiza una puesta en común de toda la clase.

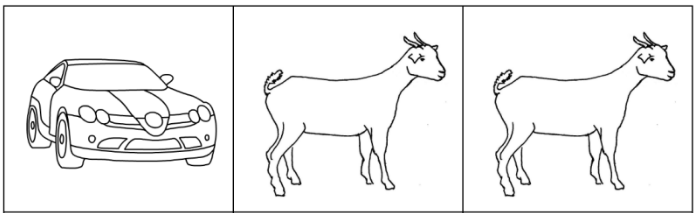


Figura 8.2.2. Cartas de la fase de experimentación.

No cambiar de puerta:		**Si cambiar** de puerta:	
Gana	Pierde	Gana	Pierde
10 veces		10 veces	

Figura 8.2.3. Tabla de la fase de experimentación.

En la tercera fase deben analizar los resultados observados en las simulaciones y resolver el problema (Figura 8.2.4). Para ello pueden hacer uso de algún dibujo o diagrama que les ayude a explicar las conclusiones a las que han llegado. Finalmente, se realiza una última puesta en común y se resuelve *el Problema de Monty Hall*.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si **no cambia de puerta**?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar **si cambia de puerta**?

Ayúdate de un esquema o un dibujo para resolverlo.

Figura 8.2.4. Entregable de la tercera fase.

8. 3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

A lo largo de toda la unidad se han mandado tres tareas individuales entregables. La primera tarea (Figura 8.3.1) se entrega en la primera sesión.

TAREA 1 - PROBABILIDAD

Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores. Sean los sucesos: A ={ ser par } y B ={ ser mayor que 7 }.

Calcular:

(a) Espacio muestral

(b) A

(c) B

(d) $A \cup B$

(e) $A \cap B$

(f) A - B

(g) B - A

(h) $\overline{A}$

(i) $\overline{B}$

(j) $\overline{A \cup B}$

(k) $\overline{A \cap B}$

(l) No ser par y ser mayor que 7

(m) Ser par y no ser mayor que 7

(n) No ser par o ser mayor que 7

(o) Dibujar el diagrama de Venn

Figura 8.3.1. Tarea 1 entregable.

En ella se trabaja el espacio muestral, los sucesos, operaciones con sucesos y el diagrama de Venn.

La segunda tarea (Figura 8.3.2) se entrega en la tercera sesión. En ella se trabaja la probabilidad simple y la regla de Laplace.

Tarea 2 - Probabilidad

Se hace girar la siguiente ruleta.

Llamamos:

A="salir azul" , B="salir amarillo"
C="salir morado" , D="salir naranja".

Calcular:

(a) La probabilidad de salir azul.

(b) La probabilidad de salir amarillo.

(c) La probabilidad de salir morado.

(d) La probabilidad de salir naranja.

(e) La probabilidad de salir azul y morado.

(f) La probabilidad de salir azul o amarillo.

(g) La probabilidad de salir azul y no morado.

(h) La probabilidad de no salir amarillo.

(i) La probabilidad de no salir naranja ni amarillo.

Figura 8.3.2. Tarea 2 entregable.

La tercera tarea (Figura 8.3.3) se entrega en la cuarta sesión. En ella se trabaja la probabilidad compuesta, la probabilidad condicionada y los diagramas de árbol.

Tarea 3 - Probabilidad

En una clase el 40 % son chicas. Entre las chicas una de cada tres lleva gafas, mientras que entre los chicos las llevan uno de cada cuatro. Se elige al azar a un alumno de la clase.

Realiza un diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que el alumno elegido:

(a) Sea chico y no lleve gafas.

(b) Sea chica y lleve gafas.

(c) Lleve gafas.

(d) No lleve gafas sabiendo que es chico.

(e) No lleve gafas sabiendo que es chica.

Figura 8.3.3. Tarea 3 entregable.

Capítulo 9
Experimentación

En este capítulo se describe la experimentación realizada con un grupo de estudiantes de 4º de ESO en la unidad de probabilidad.

El capítulo se divide en cinco partes. En la primera parte se indica el perfil de los estudiantes y el proceso de elaboración del cuestionario (en nuestro caso unas tareas entregables). En la segunda parte se muestra el cuestionario planteado a los estudiantes. En la tercera parte se realiza un análisis del cuestionario y se exponen las posibles dificultades o errores a los que se pueden enfrentar. En la cuarta parte se muestran los resultados obtenidos en la experimentación y finalmente, en la quinta parte, se analizan dichos resultados.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación

La experimentación se realiza en un centro concertado de nivel socio-económico medio. En él se imparten todos los cursos comprendidos desde 1º de Educación Infantil hasta 2º de Bachillerato. Como ya se ha comentado previamente, la experimentación se ha realizado en una clase de 4º de ESO con 30 estudiantes. En esta clase se juntan tanto estudiantes que el año que viene tienen intención de cursar Bachillerato de Ciencias o Bachillerato de Sociales como aquellos que finalmente quieren abandonar el centro. Así, el grupo es heterogéneo en interés y ritmos de aprendizaje.

Dado que no iba a ser posible en tan pocas sesiones realizar un control o examen, se plantea la idea de realizar unas tareas entregables a medida que se va exponiendo el contenido en las sesiones. Se proponen un total de tres tareas organizadas por contenidos. La primera de ellas relacionada con el manejo de sucesos, la segunda tarea relacionada con la probabilidad simple y la última relacionada con la probabilidad compuesta y probabilidad condicionada. Las tareas se presentan como un trabajo individual con el fin de ver el nivel de comprensión de cada estudiante. Pero a la hora de corregir los ejercicios se puede ver cómo, en muchos casos, se han copiado unos a otros.

9.2. El cuestionario

Las tres tareas mandadas tienen formato de ejercicio/problema con una serie de apartados correspondientes a la unidad de probabilidad. El objetivo de estas tareas es llevar un seguimiento preciso e individualizado de los conocimientos adquiridos por los estudiantes y su evolución. Las tareas se entregan en la misma sesión en la que se imparte el contenido correspondiente y se recogen en la siguiente sesión.

Para la elaboración de las tareas, se ha buscado en páginas web de internet (https://calculo.cc/index.html) ejercicios que pudiesen ajustarse al contenido correspondiente a la sesión y que no coincidiesen con ningún ejercicio del libro. En muchas ocasiones los ejercicios encontrados eran excesivamente escuetos por lo que han sido modificados en base a los criterios que interesa evaluar.

En la primera tarea (Figura 9.2.1) se evalúa el estándar de aprendizaje evaluable “1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos”, que está asociado al descriptor “C2. Espacio muestral y sucesos”. Con esta tarea se busca que dominen la notación de conjuntos, trabajar el espacio muestral, los sucesos, operaciones con sucesos, el diagrama de Venn y la comprensión de enunciados.

En la segunda tarea (Figura 9.2.2) se evalúan los estándares de aprendizaje evaluables “1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana“ y “2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias”, que están asociados al descriptor “C3. Probabilidad simple”. Con esta tarea se busca que dominen la probabilidad simple, el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y la comprensión de enunciados, que en muchas ocasiones suele ser el mayor problema.

En la tercera y última tarea (Figura 9.2.3) se evalúan los estándares de aprendizaje “2.1”, “2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia” y “2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada” ”, que están asociados a los descriptores “C3”, “C4. Probabilidad compuesta” y “C5. Probabilidad condicionada”. El objetivo de esta tarea consiste en comprender muy bien el enunciado del problema, extraer los datos y realizar el diagrama de árbol correctamente. Una vez realizado todo este proceso, se busca trabajar la probabilidad compuesta y probabilidad condicionada.

TAREA 1 - PROBABILIDAD

Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores. Sean los sucesos: A $=\{$ ser par $\}$ y B $=\{$ ser mayor que 7 $\}$.

Calcular:

(a) Espacio muestral

(b) A

(c) B

(d) A $\cup$ B

(e) A $\cap$ B

(f) A - B

(g) B - A

(h) $\overline{A}$

(i) $\overline{B}$

(j) $\overline{A \cup B}$

(k) $\overline{A \cap B}$

(l) No ser par y ser mayor que 7

(m) Ser par y no ser mayor que 7

(n) No ser par o ser mayor que 7

(o) Dibujar el diagrama de Venn

Figura 9.2.1. Tarea 1.

TAREA 2 - PROBABILIDAD

Se hace girar la siguiente ruleta.

Llamamos:

A="salir azul" , B="salir amarillo"
C="salir morado" , D="salir naranja".

Calcular:

(a) La probabilidad de salir azul.

(b) La probabilidad de salir amarillo.

(c) La probabilidad de salir morado.

(d) La probabilidad de salir naranja.

(e) La probabilidad de salir azul y morado.

(f) La probabilidad de salir azul o amarillo.

(g) La probabilidad de salir azul y no morado.

(h) La probabilidad de no salir amarillo.

(i) La probabilidad de no salir naranja ni amarillo.

Figura 9.2.2. Tarea 2.

TAREA 3 - PROBABILIDAD

En una clase el 40 % son chicas. Entre las chicas una de cada tres lleva gafas, mientras que entre los chicos las llevan uno de cada cuatro. Se elige al azar a un alumno de la clase.

Realiza un diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que el alumno elegido:

(a) Sea chico y no lleve gafas.

(b) Sea chica y lleve gafas.

(c) Lleve gafas.

(d) No lleve gafas sabiendo que es chico.

(e) No lleve gafas sabiendo que es chica.

Figura 9.2.3. Tarea 3.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

En esta sección se analizan los resultados esperados en las tres tareas. Primero se presenta una posible forma de resolver la tarea y después se exponen las posibles dificultades y errores a los que se pueden enfrentar los estudiantes durante la resolución de la misma.

Tarea 1

Solución:

Experimento: "lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas"

(a) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(b) $A = \text{"ser par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(c) $B = \text{"ser mayor que 7"} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$

(d) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(e) $A \cap B = \{8, 10, 12\}$

(f) $A - B = \{2, 4, 6\}$

(g) $B - A = \{9, 11\}$

(h) $\bar{A} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

(i) $\bar{B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(j) $\overline{A \cup B} = \{3, 5, 7\}$

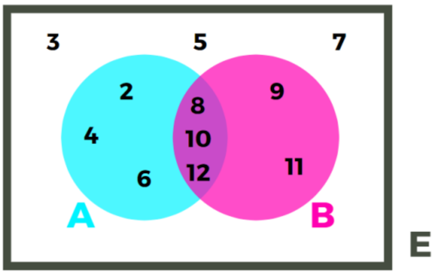
(k) $\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$

(l) $\text{"No ser par y ser mayor que 7"} = \bar{A} \cap B = \{9, 11\}$

(m) $\text{"Ser par y no ser mayor que 7"} = A \cap \bar{B} = \{2, 4, 6\}$

(n) $\text{"No ser par o ser mayor que 7"} = \bar{A} \cup B = \{3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(o) Diagrama de Venn:



Esta primera tarea es el típico ejercicio de operaciones con sucesos. Las posibles dificultades y errores que pueden cometer son las siguientes:

- Que cometan errores de notación de conjuntos o que no sepan cómo escribir determinados sucesos.

- A la hora de calcular el espacio muestral, que cometan el error de añadir el elemento 1 al conjunto E (el 1 no entra dentro del espacio muestral ya que el menor valor de la suma es 2=1+1).
- Que tengan dificultades a la hora de operar sucesos (unión, intersección, diferencia y complementario).
- En los apartados (l), (m) y (n) la operación de conjuntos no es explícita sino que tienen que deducirla del enunciado. En este caso, pueden presentar ciertas dificultades a la hora de escribir el suceso que se pide. Además, existe la posibilidad de que confunda la conjunción "y" con la unión y la "o" con la intersección.
- Finalmente, a la hora de realizar el diagrama de Venn pueden dejarse elementos sin meter, meter de más o incluso escribir más conjuntos además de A y B.

Tarea 2

Solución:

$A =$ "salir azul" , $B =$ "salir amarillo"

$C =$ "salir morado" , $D =$ "salir naranja"

(a) $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

(b) $P(B) = \frac{5}{12}$

(c) $P(C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(d) $P(D) = \frac{1}{12}$

(e) $P(A \cap C) = 0$

(f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

(g) $P(A \cap \bar{C}) = P(A) = \frac{1}{3}$

(h) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

(i) $P(\bar{D} \cap \bar{B}) = P(\overline{D \cup B}) = 1 - P(D \cup B) = 1 - P(D) - P(B) =$

$= 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Esta segunda tarea no entraña gran dificultad a nivel operacional, ya que se trata del cálculo de probabilidades simples. Sin embargo, los enunciados de los apartados si pueden resultar un poco confusos y los estudiantes pueden tener dificultades a la hora de entender que se está pidiendo. Por eso, en esta tarea se busca una buena comprensión del enunciado. Por ejemplo, en el apartado (e) en el que se pide "calcular la probabilidad de que salga azul y morado", el estudiante debe entender el mecanismo de la ruleta y darse cuenta que eso no es posible, que o bien saldrá azul o bien morado, pero nunca ambos al mismo tiempo. En esta tarea también se prevén errores de notación y que a determinados estudiantes les salgan probabilidades superiores a 1 o negativas.

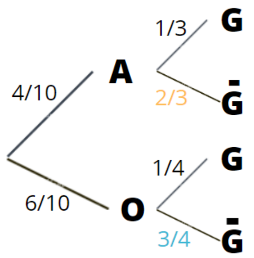
Tarea 3

Solución:

$A =$ "ser chica" , $O =$ "ser chico"

$G =$ "llevar gafas" , $\bar{G} =$ "no llevar gafas"

Diagrama de árbol:



(a) $P(O \cap \bar{G}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

(b) $P(A \cap G) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

(c) $P(G) = P(A \cap G) + P(0 \cap G) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{60}$

(d) $P(\bar{G}|O) = \frac{3}{4}$ (mirando en el diagrama de árbol)

(e) $P(\bar{G}|A) = \frac{2}{3}$ (mirando en el diagrama de árbol)

Esta última tarea es el típico problema de probabilidad compuesta y condicionada. Las posibles dificultades y errores que pueden cometer son las siguientes:

- Que tengan dificultades a la hora de extraer del enunciado bien los datos y por tanto, realicen mal el diagrama de árbol.
- Que no sepan escribir en notación de conjuntos la probabilidad que se pide.
- Que presenten dificultades a la hora de calcular la probabilidad de la intersección y en vez de realizar el producto de las probabilidades simples, que las sumen.
- Que no perciban del enunciado que se trata de una probabilidad condicionada o que la calculen mal.

9.4. Resultados

En esta sección se analizan los resultados obtenidos en las tres tareas.

Las tareas están compuestas por varios apartados cortos y claros, por lo que a la hora de evaluar se ha denotado con 1 aquel apartado resuelto correctamente y con 0 aquel apartado resuelto incorrectamente. El valor de cada apartado es el mismo.

Al tratarse de tareas entregables, en algunas ocasiones, determinados estudiantes no las han entregado por falta de asistencia o por que no las han hecho. En estos casos en los que el estudiante no haya entregado la tarea se denotará con un espacio en blanco.

Tarea 1

En la Tabla 9.4.1 del Anexo B, se muestran los resultados de cada estudiante en cada uno de los apartados de la tarea 1.

En la Figura 9.4.2 se representa, a modo resumen, los resultados obtenidos por apartados en esta primera tarea realizada por 22 estudiantes. Se observa como los primeros apartados, del (a) al (g), la tasa de éxito es superior a la de fracaso, en cambio en los apartados restantes sucede justo lo contrario. Esto es debido al aumento progresivo de dificultad a medida que avanzan los apartados. Además, el último apartado, el de dibujar el diagrama de Venn, ha sido el que peor resultado ha tenido, tan solo dos estudiantes han realizado correctamente el diagrama.

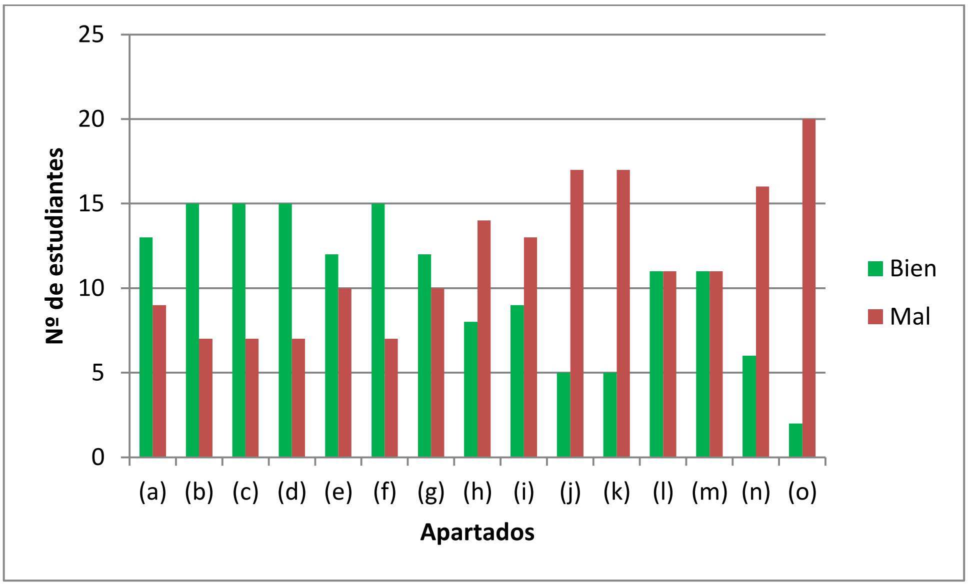


Figura 9.4.2. Resumen de resultados de la tarea 1 por apartados.

En la Figura 9.4.3 se muestra mediante un diagrama de sectores las calificaciones obtenidas por los estudiantes que han entregado esta primera tarea. El 55% de los estudiantes que entregan la tarea la aprueban, siendo el 32% notables y sobresalientes.

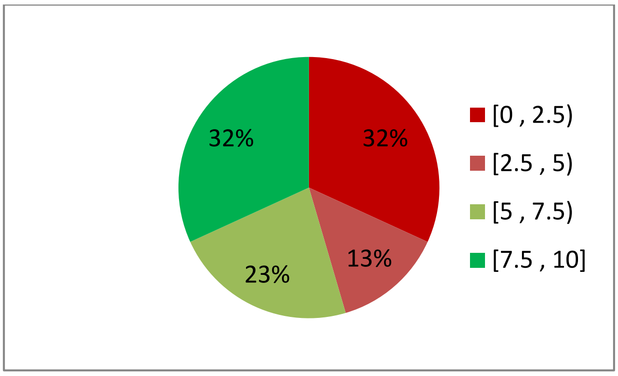


Figura 9.4.3. Calificaciones de la tarea 1.

A continuación, se muestran los errores más repetidos por los estudiantes en esta primera tarea.

Muchos estudiantes comprenden mal el enunciado y a la hora de calcular el espacio muestral, en vez de tomar como elementos del conjunto el valor obtenido al sumar dos dados, anotan todos los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar dos dados. Este error en la interpretación del enunciado influye negativamente en el resto de apartados (Figura 9.4.4).

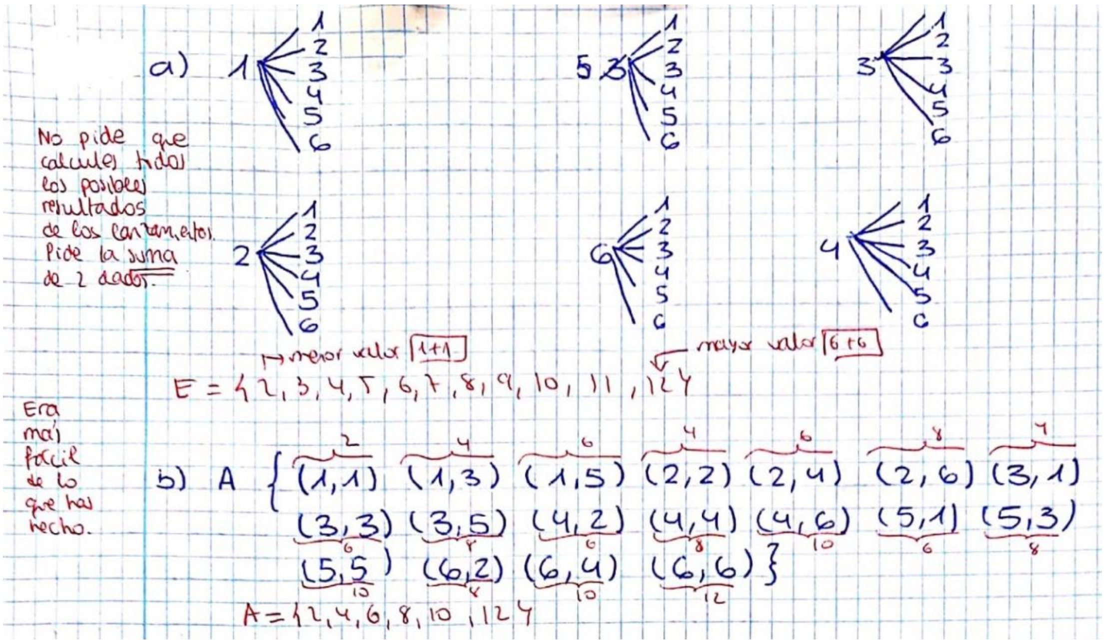


Figura 9.4.4. Error en la comprensión del enunciado.

Otro de los errores más comunes observados es la confusión entre $\overline{A \cup B}$ y $\bar{A} \cup \bar{B}$, y $\overline{A \cap B}$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$. En este curso no se dan las Leyes de Morgan por lo que se podía esperar este error. Además, en los apartados en los que no se dan explícitamente los conjuntos, como por ejemplo cuando pide calcular el suceso "no ser par y ser mayor que 7", son muchos los estudiantes que denotan a ese suceso con una nueva letra (C, D, E) sin darse cuenta que tienen que utilizar los sucesos iniciales A y B (Figura 9.4.5).

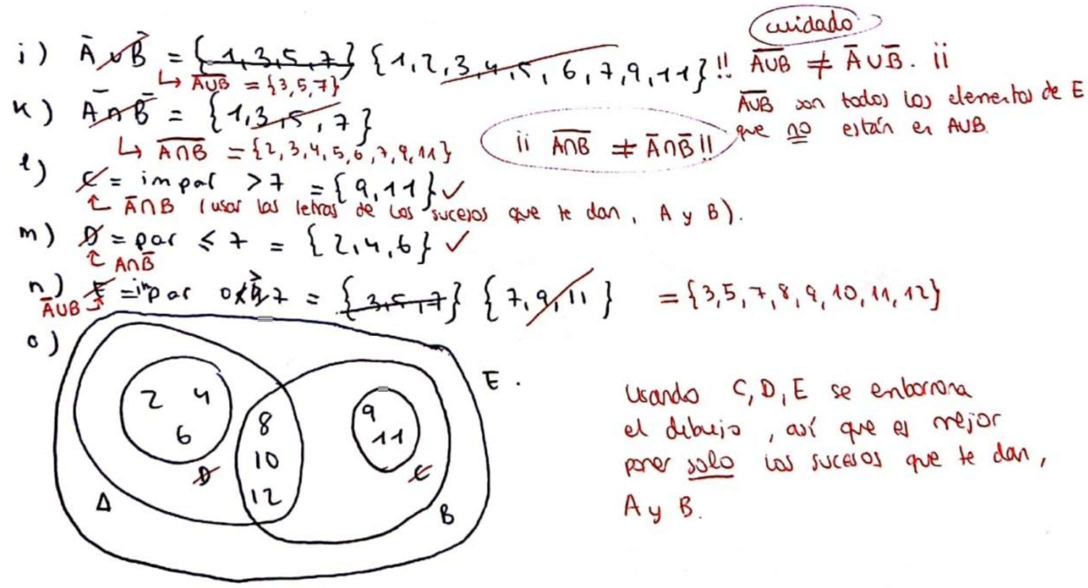


Figura 9.4.5. Varios errores.

También se observa como en el último apartado, cuando tienen que dibujar el diagrama de Venn, la mayoría de estudiantes se dejan los elementos que no están en la unión (Figura 9.4.6). Tan solo dos estudiantes realizan correctamente el diagrama.

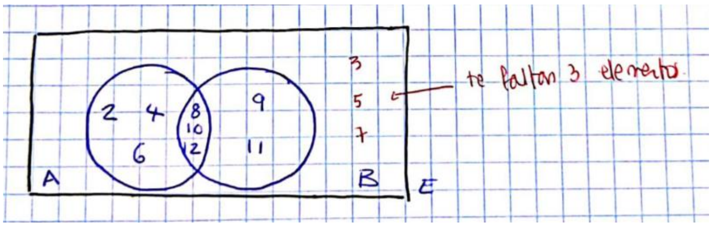


Figura 9.4.6. Error anecdótico en el diagrama de Venn.

En la Figura 9.4.7 se observa como un estudiante comprueba los resultados obtenidos a través de varios diagramas.

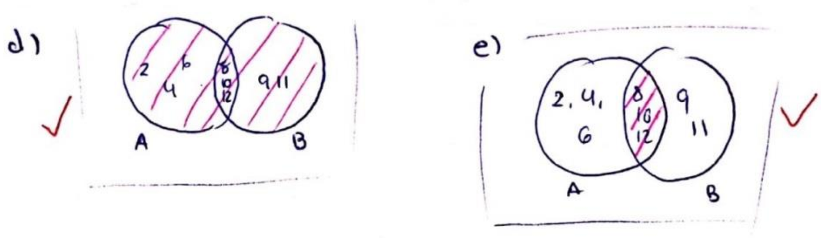


Figura 9.4.7. Comprobación de resultados.

Tarea 2

En la Tabla 9.4.8 del Anexo B, se muestran los resultados de cada estudiante en cada uno de los apartados de la tarea 2.

En la Figura 9.4.9 se representa, a modo resumen, los resultados obtenidos por apartados en esta segunda tarea realizada por 24 estudiantes. Se observa como la tasa de éxito de la mayoría de los apartados es superior a la de fracaso. Tan solo en dos apartados, (e) y (g), la tasa de fracaso supera a la de éxito.

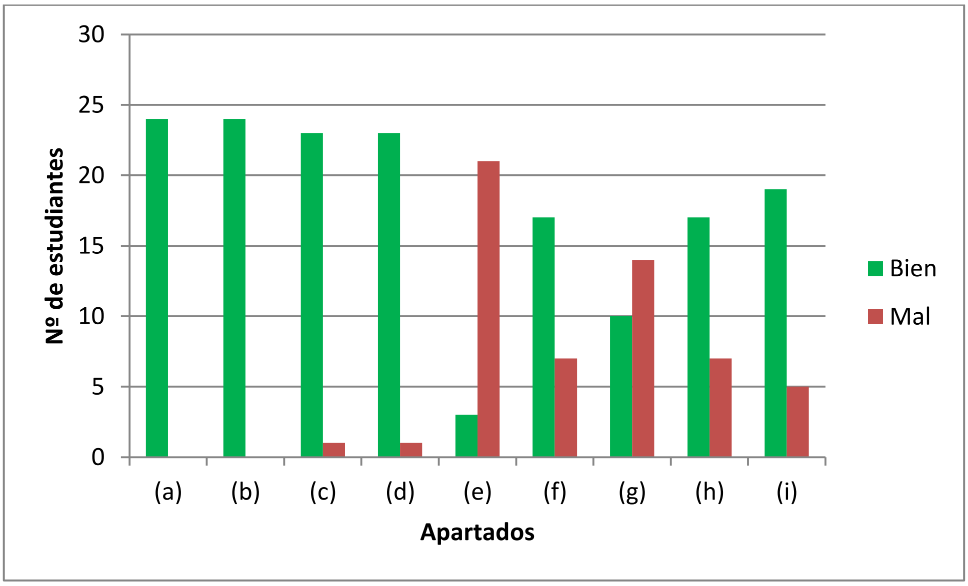


Figura 9.4.9. Resumen de resultados de la tarea 2 por apartados.

En la Figura 9.4.10 se muestra mediante un diagrama de sectores las calificaciones obtenidas por los estudiantes que han entregado esta segunda tarea. El 92% de los estudiantes que entregan la tarea la aprueban, siendo el 58% notables y sobresalientes. Se observa gran evolución y mejora respecto a la tarea 1.

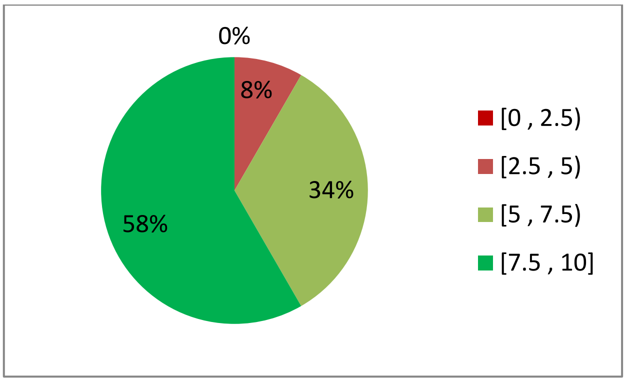


Figura 9.4.10. Calificaciones de la tarea 2.

A continuación, se muestran los errores más repetidos por los estudiantes en esta segunda tarea.

Se observa en muchos estudiantes que no indican lo qué están calculando en cada apartado, solo ponen el resultado. Además, en bastantes ocasiones, no simplifican el resultado final (Figura 9.4.11).

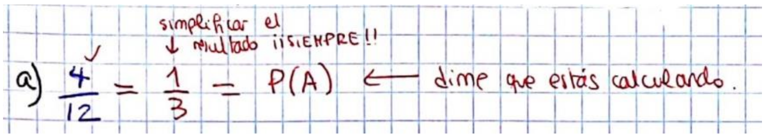


Figura 9.4.11. No simplifica el resultado ni indica que hace.

A un par de estudiantes les sale en determinadas ocasiones una probabilidad negativa o mayor que uno (Figura 9.4.12).

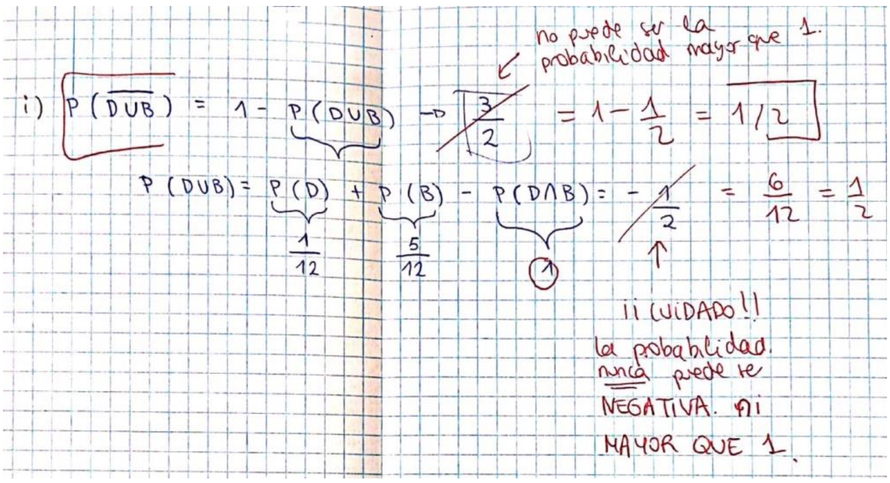


Figura 9.4.12. Probabilidad negativa o mayor que 1.

Son varios los estudiantes que confunden la conjunción “y” con la unión y la conjunción “o” con la intersección (Figura 9.4.13).

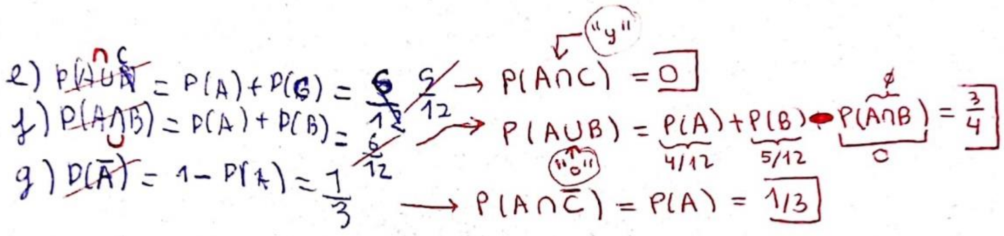


Figura 9.4.13. Confusión entre unión e intersección.

Uno de los errores más repetidos por los estudiantes en la tarea es decir que la probabilidad de un suceso es ∅ (Figura 9.4.14). De hecho, tan solo tres estudiantes han realizado bien este apartado (e).

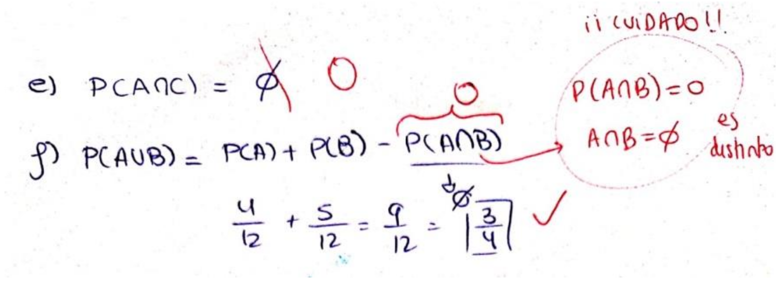


Figura 9.4.14. Confusión entre 0 y ∅.

Otro de los errores más cometidos es darle un valor distinto de 0 a la probabilidad de un suceso imposible, por ejemplo en el apartado (e) cuando piden calcular la “probabilidad de salir azul y morado”. Además, varios estudiantes a la hora de calcular $P(A - C)$ se inventan y dicen que $P(A - C) = P(A) - P(C)$ (Figura 9.4.15).

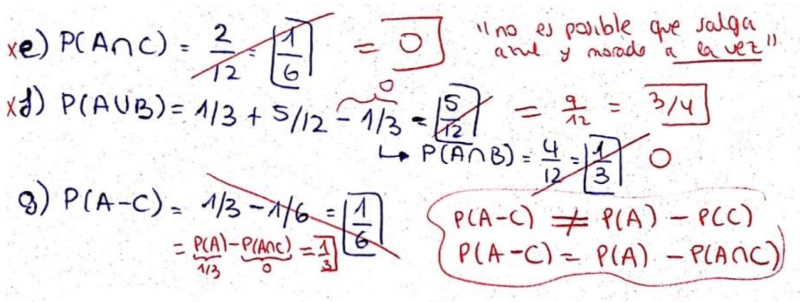


Figura 9.4.15. Varios errores.

Tarea 3

En la Tabla 9.4.16 del Anexo B, se muestran los resultados de cada estudiante en cada uno de los apartados de la tarea 3.

En la Figura 9.4.17 se representa, a modo resumen, los resultados obtenidos por apartados en esta tercera tarea realizada por 18 estudiantes. Se observa como en los tres primeros apartados la tasa de éxito es superior a la de fracaso, en cambio en los apartados restantes sucede justo lo contrario. Además, los dos últimos apartados, los de calcular la probabilidad condicionada, han sido los que peor resultado han tenido, tan solo dos o tres estudiantes han realizado correctamente esos dos apartados.

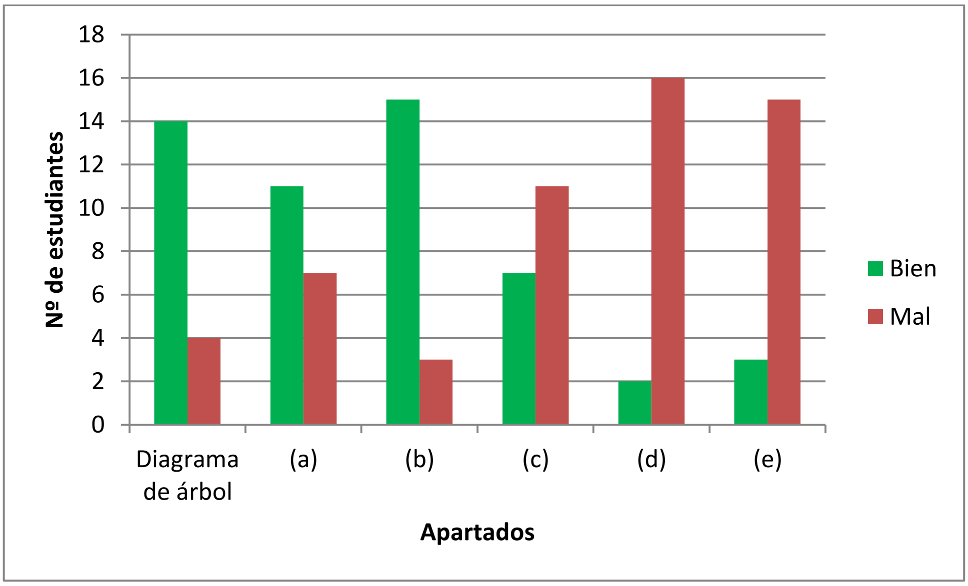


Figura 9.4.17. Resumen de resultados de la tarea 3 por apartados.

En la Figura 9.4.18 se muestra mediante un diagrama de sectores las calificaciones obtenidas por los estudiantes que han entregado esta tercera tarea. El 61% de los estudiantes que entregan la tarea la aprueban, siendo tan solo el 11% notables y sobresalientes.

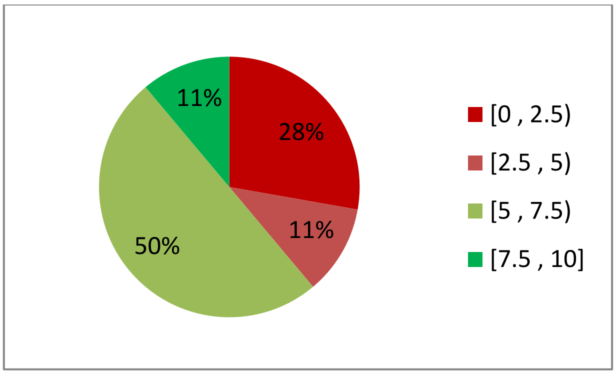


Figura 9.4.18. Calificaciones de la tarea 3.

A continuación, se muestran los errores más repetidos por los estudiantes en esta tercera tarea.

En el enunciado del problema pone que "una de cada tres chicas lleva gafas". Un estudiantes en vez de poner $\frac{1}{3}$ pone $\frac{33}{100}$ (Figura 9.4.19). Esto hace que arrastre un error de exactitud todo el problema, aunque sea mínimo. Además, a la hora de anotar "las chicas que no llevan gafas" pone $\frac{66}{100}$. Por lo que la suma de las chicas que llevan gafas y las que no las llevan, no da 1.

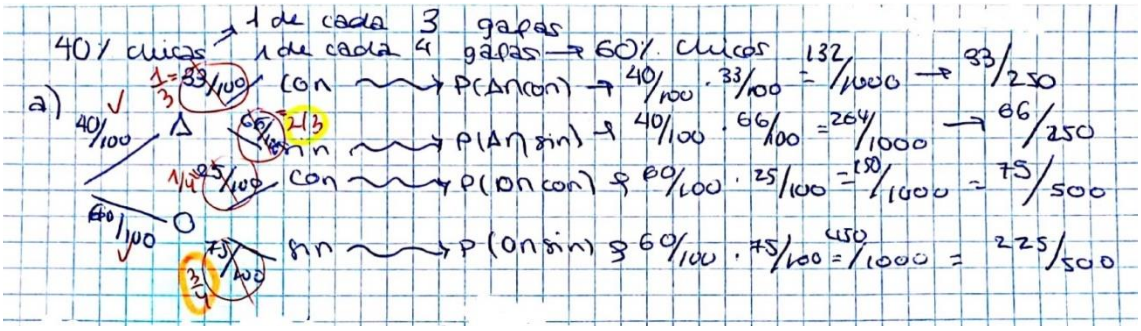


Figura 9.4.19. Escribe $\frac{33}{100}$ en vez de $\frac{1}{3}$.

En otra ocasión, un estudiantes realiza correctamente el diagrama de árbol pero a la hora de calcular las probabilidades en vez de utilizar las letras que ha utilizado en el diagrama, usa unas nuevas. Además, no escribe probabilidades sino sucesos. Esto podría significar que no entienda del todo bien la notación usada en esta unidad (Figura 9.4.20).

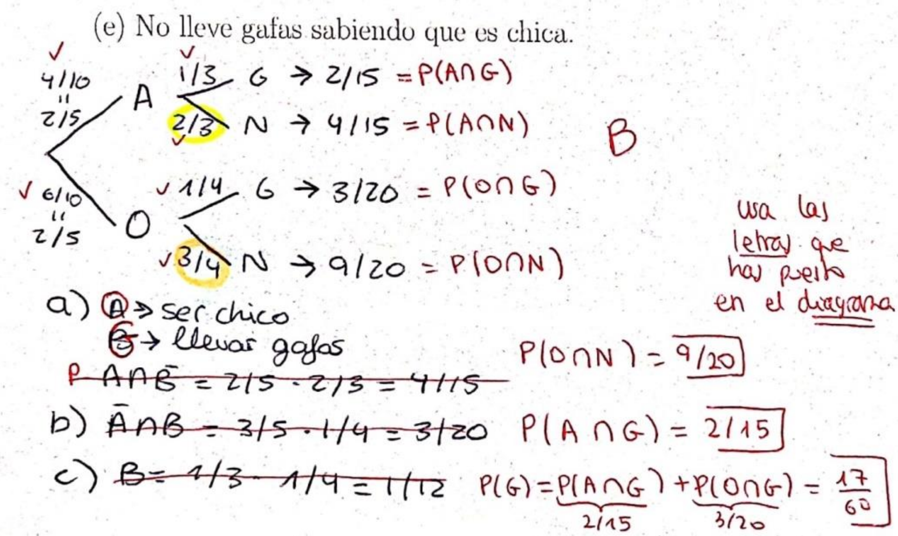


Figura 9.4.20. Errores en notación.

Varios estudiantes optan por utilizar números decimales en vez de fracciones, a pesar de que a lo largo de toda la unidad se ha trabajado con fracciones ya que aportan mayor exactitud y a la hora de operar sin calculadora, los cálculos son más fáciles.

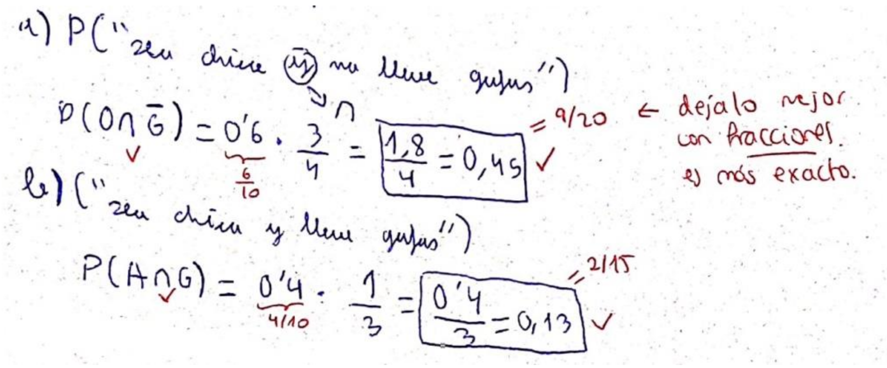


Figura 9.4.21. Opera con decimales en vez de con fracciones.

Un par de estudiantes se despistan a la hora de realizar el diagrama de árbol y en vez de poner que el 60% son chicos, ponen que el 50% son chicos, haciendo que la suma del porcentaje de chicos y chicas no sea del 100% (Figura 9.4.22).

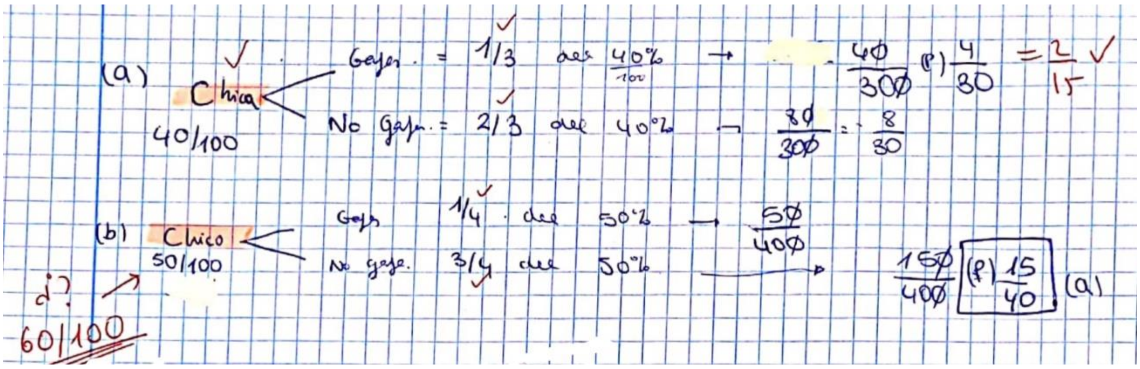


Figura 9.4.22. Error anecdótico a la hora de anotar datos en el diagrama.

9.5. Discusión de los resultados

En esta sección se realiza una comparación entre los resultados obtenidos y los esperados.

En la primera tarea, los resultados obtenidos se ajustan bastante bien a los resultados esperados. Lo único que no se había previsto a la hora de elaborar esta primera tarea es que tantos estudiantes entendieran mal el enunciado y en vez de tomar como elementos del espacio muestral el valor obtenido al sumar dos dados, anotaran todos los posibles resultados que se pueden obtener. Este error en la interpretación del enunciado influye negativamente al resto de apartados, haciendo que las calificaciones de esta primera tarea no sean del todo representativas.

En la segunda tarea, los resultados obtenidos también se ajustan bastante bien a los resultados esperados. En este caso hay dos errores que no se habían previsto. Por un lado, que se inventasen que $P(A-C)=P(A)-P(C)$ y por otro lado la confusión entre suceso y probabilidad de un suceso (bastantes estudiantes ponen que la probabilidad de un suceso es $\emptyset$). Esto lleva a pensar que muchos estudiantes no comprenden bien del todo la diferencia entre un suceso (conjunto) y su probabilidad (un número entre 0 y 1).

La tercera tarea, se caracteriza por los despistes generalizados. Una vez más, se vuelven a ver carencias e incluso incomprensión en la notación utilizada. Como es el caso de un estudiante que denota en el diagrama los sucesos con unas letras y a la hora de calcular la probabilidad utiliza otras. Ahí se ve que no está entendiendo la esencia del tema.

Las tareas se realizan el mismo día que se imparte el contenido y por lo tanto se trata de la primera toma de contacto. A pesar de ello, los resultados obtenidos en las tres tareas son satisfactorios. En la primera tarea, el 55% de los estudiantes que la entregan la aprueban, en la segunda el 92% y en la tercera el 61%.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

En esta sección se realiza una breve síntesis del trabajo de fin de máster, se exponen las conclusiones más generales del mismo y se plantean una serie de cuestiones abiertas sobre las que reflexionar.

Breve síntesis

En esta memoria se ha realizado un análisis del aprendizaje de la probabilidad en un grupo de estudiantes de 4º de ESO.

En la primera parte del trabajo se lleva a cabo un análisis longitudinal de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Educación Primaria, en ESO y en Bachillerato. Para ello, se han elaborado unas tablas con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente en cada uno de los cursos. Además, se han analizado las actividades propuestas en varios libros de texto con el fin de valorar la coherencia de ambas partes.

La segunda parte del trabajo se centra en el proceso de estudio llevado a cabo con un grupo de 4º de ESO sobre la probabilidad. Para ello, se ha analizado el contenido de probabilidad en el libro de texto de 4º de ESO utilizado por el centro. A continuación, se han presentado las posibles las dificultades y errores que pueden surgir a los estudiantes en este tema. Posteriormente, se ha detallado el proceso de estudio desde la distribución de tiempo de la clase hasta las actividades propuestas. Finalmente, se ha analizado la experimentación realizada mediante la elaboración de un cuestionario y el análisis de los resultados obtenidos.

Conclusiones generales del trabajo

En primer lugar, se puede ver como los libros de texto se adaptan bastante bien a los contenidos del currículo vigente. Ambos siguen una estructura en espiral en la que a medida que avanzan los cursos el nivel de rigor matemático también aumenta. Además, es evidente la labor realizada por las editoriales para adaptarse a los nuevos tiempos, ofreciendo la posibilidad de utilizar contenido digital en el aula.

En segundo lugar, a la hora de planificar la distribución del tiempo de las sesiones se ha buscado que no fuese el profesor el absoluto protagonista de la unidad, sino que fuesen los propios estudiantes los que llevasen el peso de la actividad en determinados momentos. A la hora de explicar los contenidos se ha seguido la docencia magistral pero el resto del tiempo se ha buscado la interacción con el estudiante. Los estudiantes han salido a la pizarra a resolver numerosos ejercicios, han trabajado por parejas en la resolución de problemas e incluso, en la última sesión, se deja de lado la docencia clásica para dar paso a una actividad cooperativa que les hiciese reflexionar.

Por otro lado, dado que el tiempo de experimentación iba a ser limitado, 7 sesiones, se planteó la posibilidad de realizar unas tareas entregables que permitiesen evaluar el nivel de comprensión individual de cada estudiante. De esta forma, los estudiantes van recibiendo feedback a tiempo y el docente puede ajustarse mejor a los distintos ritmos de aprendizaje. La elaboración y corrección de las tareas supuso gran tiempo invertido. En este caso, al tratarse de la primera práctica como docente, el resultado ha sido positivo ya que al no tener ninguna experiencia previa, podía servir de guía. En caso de que hubiese sido una docencia normal, lo más probable es que no hubiese sido viable este seguimiento personalizado.

Cuestión abierta

Como ya se ha comentado anteriormente, las tareas se realizaban el mismo día en que se impartía el contenido, siendo por tanto la primera toma de contacto.

¿Hubiesen sido los resultados diferentes si se hubiesen puesto los mismos ejercicios de las tareas al final de la unidad a modo examen? La hipótesis de trabajo que tendría que ser contrastada es que efectivamente se tendría una tasa de éxito mayor en tareas planteadas al final del proceso que en momentos intermedios. Así, esta hipótesis se sustenta en que la visión global de los contenidos tiene más impacto en la actividad matemática que la "distancia" respecto al momento en que fueron introducidos. Con otras palabras, la "significatividad del aprendizaje en matemáticas, en tanto que estructura lógica interrelacionada, tiene mayor peso que la curva del olvido".

Referencias

Bibliografía

Juan D. Godino, V. F. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 133-156.

Calculo.cc. (2012). Obtenido de https://calculo.cc/index.html

Luketic, R. (Dirección). (2008). *21 Blck Jack* [Película].

Libros de Texto

Miguel Nieto, A. P. (2016). *Matemáticas 2 ESO.* SM Savia.

Fernando Alcaide, J. H. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3 ESO* . SM Savia.

Fernando Alcaide, J. H. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4 ESO* . SM Savia.

Serrano Marugán, E., Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Barbero González, J. F., Moreno Warleta, M., León, M. D., y otros. (2015). *Matemáticas aplicadas a ciencias sociales I. 1 bachillerato.* SM Savia.

Serrano Marugán, E., Hernández Gómez, J., Sanz, L., Alcaide Guindo, F., & Moreno Warleta, M. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. 2 Bachillerato.* SM Savia.

Legislación

Departamento de Educación del Gobiern de Navarra (DEGN)(2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.* Boletín Oficial de Navarra, 174, de 5 de septiembre, pp. 47-63.

Departamento de Educación del Gobiern de Navarra (DEGN)(2015a). *Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.* Boletín Oficial de Navarra, 127, de 2 de julio, pp. 44-57.

Departamento de Educación del Gobiern de Navarra (DEGN)(2015b). *Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.* Boletín Oficial de Navarra, 127, de 2 de julio, pp. 81-90.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Tablas de resultados de las tareas

A. Unidad didáctica del libro de texto

Analiza y calcula

¿Crees que merece la pena aplicar razonamientos matemáticos en los juegos de azar o piensas que al final el azar decide por su cuenta?

En la cita, Jakob Bernoulli vincula la probabilidad a la toma de decisiones, ¿por qué?

¿A qué se refiere cuando habla de la sabiduría del filósofo y la prudencia del político?

¿Piensas que el conocimiento de las leyes del azar nos ayuda en nuestra vida cotidiana? Pon algún ejemplo.

Lee y comprende

Las leyes del azar

¿Qué es más ventajoso, apostar a sacar un seis en cuatro tiradas de un dado, o sacar dos seises al lanzar dos dados 24 veces?

Pascal resolvió el problema e inició una interesante correspondencia con otro genio de la época, Pierre de Fermat (1601-1665). Era el verano de 1654 y, sin saberlo, estaban poniendo una de las primeras piedras de una nueva rama de las matemáticas: la teoría de las probabilidades. Un año más tarde Christiaan Huygens conocería la correspondencia entre Pascal y Fermat y puso su empeño en la resolución de estos problemas; el fruto de este trabajo fue la obra titulada *De los razonamientos en los juegos de azar*, publicada en 1657.

Aunque serán tres auténticos genios matemáticos, dos suizos, Jakob Bernoulli (1654-1705) y Leonhard Euler (1701-1783) y un francés, Pierre Simon de Laplace (1749-1827), los que elevarían la teoría de las probabilidades a la categoría de ciencia matemática. El primero, con la obra *Ars conjectandi* publicada en 1713, ocho años después de su muerte, pondrá las bases matemáticas del cálculo de probabilidades. En ella afirma:

"*Ars conjectandi* se define como el arte de medir lo más exacto posible la probabilidad de las cosas, para que en nuestros juicios o acciones podamos siempre elegir lo que será encontrado como lo mejor, más satisfactorio, moderado y razonable. En esta unidad se resume toda la sabiduría del filósofo y la prudencia del político."

Antonio Pérez Sanz
Más por menos. Entiende las matemáticas.
Editorial Espasa. 2011

JACOBI BERNOULLI,
ARS CONJECTANDI,
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

Reflexiona y saca conclusiones

En la pregunta inicial del texto, ¿qué opción elegirías? ¿Por qué?

¿Por qué crees que matemáticos tan notables dedicaban su tiempo y sus esfuerzos en resolver problemas relacionados con juegos de azar?

¿Sabes cómo analizar un juego para elegir la mejor estrategia?

271

1 Azar y determinismo. Sucesos

En la vida cotidiana hay acontecimientos cuyo resultado es completamente predecible y otros que dependen del azar.

Ejemplos

- Al dejar caer un dado desde una altura determinada, se puede calcular exactamente el tiempo que tarda en llegar al suelo.
- Es imposible predecir qué cara quedará en la parte superior del dado. Sólo se sabe que será un número entre 1 y 6.

- Un experimento es **determinista** cuando se puede predecir su resultado antes de realizarlo.
- Un experimento es **aleatorio** si al repetirlo varias veces en las mismas condiciones se pueden obtener distintos resultados.

Ten en cuenta

El espacio muestral es diferente del espacio de sucesos.

Para estudiar los resultados de un experimento aleatorio, es conveniente definir los siguientes conceptos:

- El **espacio muestral, *E***: es el conjunto formado por todos los resultados posibles.
- **Sucesos**: cualquier subconjunto del espacio muestral. Se representan con letras mayúsculas.
- El **espacio de sucesos, *S***: es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

Ejemplo ▸ Escribe el espacio muestral y un suceso del experimento "lanzar un dado cúbico":

- El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Un suceso puede ser A = "sacar un número mayor que 3" $= \{4, 5, 6\}$.

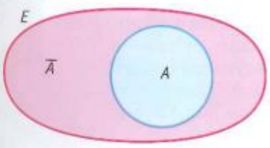
Tipos de sucesos

- Un suceso es **elemental** si es uno de los resultados posibles.
- Un suceso es **compuesto** si está formado por varios sucesos elementales.
- Un suceso es **imposible** si no ocurre nunca. Se representa con el símbolo $\varnothing$.
- Un suceso es **seguro** si ocurre siempre. Coincide con el espacio muestral, ***E***.
- El suceso **contrario** o **complementario** de un suceso ***A***, $\bar{A}$, está formado por todos los sucesos elementales que no son de ***A***.

Ten en cuenta

Los sucesos contrarios verifican:

- $A \cap \bar{A} = \varnothing$
- $A \cup \bar{A} = E$



Ejemplo ▸ En el experimento de lanzar un dado cúbico, escribe los sucesos:

- El suceso A = "sacar un número par", está formado por los elementos $\{2, 4, 6\}$. Es un suceso compuesto porque está formado por los sucesos elementales:
  - B = "sacar un 2" $= \{2\}$
  - C = "sacar un 4" $= \{4\}$
  - D = "sacar un 6" $= \{6\}$
- El suceso F = "sacar un 7" es un suceso imposible porque no puede ocurrir nunca.

$$F = \{\varnothing\}$$

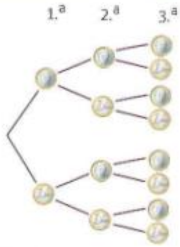
- Si consideramos el suceso H = "sacar menos de 5" $= \{1, 2, 3, 4\}$, el suceso contrario, $\bar{H}$, es $\bar{H} = \{5, 6\}$ = "sacar un 5 o un 6".

Operaciones con sucesos

- La **unión** de dos sucesos A y B, $\boldsymbol{A \cup B}$, está formado por todos los elementos de A y de B. Ocurre cuando sucede A o sucede B o ambos a la vez.
- La **intersección** de dos sucesos A y B, $\boldsymbol{A \cap B}$, está formado por los elementos comunes de A y de B. Ocurre si suceden al mismo tiempo A y B.
- La **diferencia** de sucesos A y B, $\boldsymbol{A - B}$ está compuesto por los elementos de A que no están en B. Ocurre cuando sucede A y no sucede B. Se escribe $\boldsymbol{A - B = A \cap \overline{B}}$

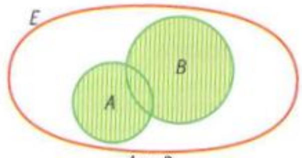
Ejemplo ▸ En el experimento "lanzar tres veces una moneda" se consideran los sucesos A = "sacar más cruces que caras" y B = "sacar un número impar de caras". Escribe los sucesos:

$$A \cup B,\ A \cap B \text{ y } A - B$$

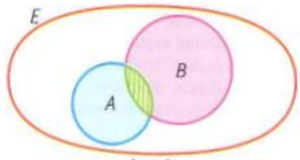


$A = \{XXX, XXC, XCX, CXX\}$ $\quad B = \{XXC, XCX, CXX, CCC\}$

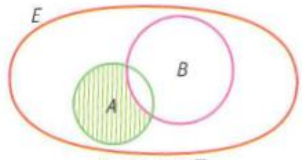
- El suceso $A \cup B$ = "sacar más cruces que caras o sacar un número impar de caras" está formado por los elementos que están en el suceso A o en el suceso B.
$$A \cup B = \{XXX, XXC, XCX, CXX, CCC\}$$
- El suceso $A \cap B$ = "sacar más cruces que caras y sacar un número impar de caras" está formado por los elementos que están simultáneamente en A y en B.
$$A \cap B = \{XXC, XCX, CXX\}$$
- El suceso $A - B$ = "sacar más cruces que caras sin sacar un número impar de caras" estará formado por los elementos de A que no están en B.
$$A - B = A \cap \overline{B} = \{XXX\}$$



$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B = A \cap \overline{B}$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y utiliza diagramas de Venn.

Compatibilidad de sucesos

Dos sucesos A y B son **compatibles** si tienen algún elemento en común: $A \cap B \neq \varnothing$.
Dos sucesos A y B son **incompatibles** si no tienen elementos en común: $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo ▸ En el experimento "lanzar tres veces una moneda" se consideran los sucesos A = "sacar más cruces que caras", B = "sacar un número impar de caras" y C = "sacar un número par de caras".

- $A \cap B = \{XXC, XCX, CXX\} \neq \varnothing \Rightarrow A$ y B son sucesos compatibles.
- $B \cap C = \{\varnothing\} \Rightarrow B$ y C son sucesos incompatibles.

ACTIVIDADES

1. Se lanza una moneda tres veces.
a) Escribe el espacio muestral.
b) Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.
c) Escribe el suceso S ="salir una cara" y el suceso contrario $\overline{S}$

2. Se extraen tres bolas de una urna con 5 bolas rojas y 5 bolas blancas.
a) Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.
b) Escribe el suceso contrario de S ="sacar dos bolas blancas y una roja".

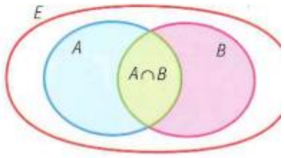
3. En el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 naipes, describe los elementos de los sucesos:
a) A = "sacar un oro".
b) B = "sacar un rey".
c) C = "sacar una figura".
d) $A \cup B$ y $B \cup C$

4. Se extrae una bola de un bombo que contiene 10 bolas numeradas de 0 a 9. Se consideran los sucesos A = "sacar un número par", B = "sacar un múltiplo de tres". Calcula:
a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$

Probabilidad de la unión de sucesos

La **probabilidad de la unión** de dos sucesos A y B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Si A y B son sucesos incompatibles, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(\varnothing) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejemplo ▸ Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se definen los sucesos:

A = "sacar un oro"	B = "sacar una copa"	C = "sacar un as"
$P(A) = \frac{10}{40}$	$P(B) = \frac{10}{40}$	$P(C) = \frac{4}{40}$

Calcula la probabilidad de los sucesos $A \cup B$ y $A \cup C$.

- Suceso $A \cup B$ = "sacar un oro o una copa".
  A y B son sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} - 0 = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$
- Suceso $A \cup C$ = "sacar un oro o un as".
  A y C son compatibles, $A \cap C$ = "as de oros" $\Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{40}$
  $$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

Probabilidad del suceso contrario

La **probabilidad del suceso contrario de A** es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Para probarlo se utiliza que un suceso y su contrario son incompatibles, $A \cap \bar{A} = \varnothing$, y que su unión forma el espacio muestral, $A \cup \bar{A} = E$.

Aplicando la probabilidad de la unión de sucesos, se halla la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

smSaviadigital.com
PRACTICA la probabilidad de un suceso.

ACTIVIDADES

5. En una bolsa hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si se saca al azar una bola de la bolsa, halla las siguientes probabilidades.

a) Que la bola sea verde.
b) Que la bola no sea roja.
c) Que la bola sea verde o azul.
d) Que la bola no sea roja ni azul.

6. Se elige un número al azar entre 1 y 50. Calcular la probabilidad de que:

a) Sea un múltiplo de 4.
b) Sea múltiplo de 6.
c) Sea múltiplo de 6 y de 4.
d) Sea múltiplo de 6 o de 4.

7. Se lanzan un dado blanco y otro rojo y se consideran los sucesos:

- A = "la suma de los puntos es 6"
- B = "sacar los mismos puntos en los dos dados"
- C = "sacar más de 3 en el dado rojo"

Calcula las probabilidades de los sucesos:

a) A, B y C
b) $\bar{B}$
c) $A \cap C$ y $A \cup C$
d) $\overline{A \cap B}$

8. Si A y B son dos sucesos de un mismo experimento y sabemos que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? Calcula la probabilidad de $A \cap B$.

Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad de experimentos compuestos.

Si se realizan dos o más experimentos simples de forma simultánea o uno detrás de otro, se obtiene un **experimento compuesto**. En ocasiones puede ocurrir que el resultado de uno influya en el resultado de los siguientes.

Ejemplo ▸ Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española de 40 naipes. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un as? ¿Y de que lo sea la segunda?

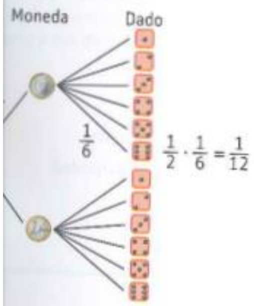
La probabilidad del suceso A_1 = "la 1ª carta extraída es un as", es: $P(A_1)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$

La probabilidad del suceso A_2 = "la 2ª carta extraída es un as" depende de si se devuelve o no la primera carta extraída de la baraja:

- **Si hay devolución** el resultado de la primera extracción no influye, sigue habiendo 4 ases y 40 cartas. Por tanto, $P(A_2)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$.
- **Si no hay devolución** y se supone que en la primera extracción ha salido un as, para la segunda extracción solo quedan 3 ases y 39 cartas. El resultado de la primera extracción condiciona el resultado de la segunda y se representa como A_2/A_1. Por tanto, $P(A_2/A_1)=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}$.

- Dos sucesos son **dependientes** cuando la realización del segundo está condicionada por la realización del primero. Se representa como $\mathbf{A_2/A_1}$.
- Dos sucesos son **independientes** cuando la realización del segundo no está condicionada por la realización del primero.

Probabilidad de experimentos compuestos



Ejemplo ▸ Se lanza una moneda y un dado cúbico. Calcula la probabilidad del suceso A = "sacar cruz y un número par".

Es un experimento compuesto formado por dos experimentos simples:

$E=\{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(X,1),(X,2),(X,3),(X,4),(X,5),(X,6)\}$

- Por tanto, el número total de casos es el producto de los resultados de lanzar la moneda y los del dado: $2\cdot 6=12$ elementos.
- Los casos favorables del suceso A son: $\{(X,2),(X,4),(X,6)\}$.

Utilizando la regla de Laplace: $P(A)=\frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Observa que $P(A)=P(X)\cdot P(\text{par})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto **es el producto de las probabilidades** de los sucesos simples que lo forman.

T-TIC GeoGebra
ctica con diagramas de árbol
smSaviadigital.com.

IVIDADES

. De una baraja de 40 cartas se extraen simultáneamente dos cartas (equivale a no reponer la primera). Halla las probabilidades de que:

a) Las dos sean copas.
b) Al menos una sea copas.

10. Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color si devolvemos la primera bola a la bolsa? ¿Y si no lo hacemos?

AD 13

4 Probabilidad condicionada

Ejemplo ▸ En una urna hay 5 bolas rojas y 4 azules del mismo tamaño numeradas.

- Se saca una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea un 1?

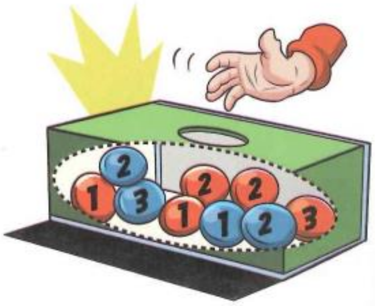
  En la urna hay 3 unos en las 9 bolas, por tanto $P(1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

- Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es ahora la probabilidad de que sea un 1?

  La probabilidad $P(1/R)$ se puede obtener utilizando la regla de Laplace:

$$P(1/R)=\frac{P(1\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}$$

En efecto, hay 2 unos en las bolas rojas.



Si A y B son dos sucesos de un experimento y B no es el suceso imposible, $P(B)>0$, la **probabilidad de A condicionado por B** es:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Ten en cuenta

Si A y B son sucesos independientes:
$P(B/A)=P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

A partir de la expresión de la probabilidad condicionada, se deduce la regla de la multiplicación de las probabilidades condicionadas. Si $P(A)>0$ y $P(B)>0$, se verifica que:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \text{ y } P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Tablas de contingencia

Las tablas de doble entrada asociadas a un experimento se denominan tablas de contingencia y son útiles para asignar probabilidades condicionadas.

Ejemplo ▸ En una bolsa hay 5 bolas grandes y 4 pequeñas. Se sabe que 6 son blancas y 3 negras y que 3 de las bolas grandes son blancas.

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca y pequeña?

  Se organizan los datos en una tabla de contingencia, completando los que faltan:

	Blancas	Negras	Total
Grandes	3	2	5
Pequeñas	3	1	4
Total	6	3	9

  Así, $P(B\cap P)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

- Si ha salido una bola grande, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

  La probabilidad es $P(N/G)=\frac{2}{5}$.

ACTIVIDADES

11. En una clase hay 12 chicas y 16 chicos. Si se eligen 2 alumnos al azar, calcula la probabilidad en cada caso.

a) Que sean los dos chicos.

b) Que sean exactamente un chico y una chica.

c) Que haya al menos una chica.

d) Que no haya ningún chico.

12. Un alumno ha estudiado 10 de los 15 temas de un examen. El profesor preselecciona dos temas y deja que el alumno escoja uno de los dos. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir uno de los temas estudiados.

13. En una ciudad el 25 % de las mujeres y el 40 % de los hombres usan gafas. Halla la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, sea una mujer y use gafas.

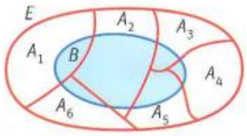
277

5 Probabilidad total

Ten en cuenta

Una **partición** del espacio muestral E, es el conjunto de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que verifican:

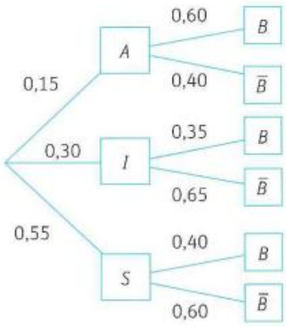
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$



Ejemplo ▸ La población activa de un país está formada por un 15 % de trabajadores dedicados a la agricultura, un 30 %, a la industria, y el 55 %, al sector servicios. El 60 % de los trabajadores agrícolas son mayores de 50 años, el 35 %, en industria, y el 40 %, en el sector servicios. Si se selecciona un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 50 años?

Los sucesos A: "dedicarse a la agricultura", I = "dedicarse a la industria" y S = "dedicarse a los servicios" son incompatibles dos a dos y su unión constituye el espacio muestral que es la población activa.

Si B es el suceso "tener más de 50 años", se representa en un diagrama de árbol los sucesos y las probabilidades.



El suceso B es la unión de los sucesos: $B = (B \cap A) \cup (B \cap I) \cup (B \cap S)$. Como A, I y S son incompatibles $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap I) + P(B \cap S)$.

Aplicando la regla de la multiplicación de la probabilidad condicionada:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(I) \cdot P(B/I) + P(S) \cdot P(B/S) =$$
$$= 0{,}15 \cdot 0{,}60 + 0{,}30 \cdot 0{,}35 + 0{,}55 \cdot 0{,}40 = 0{,}09 + 0{,}105 + 0{,}22 = 0{,}415$$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y trabaja la probabilidad total con diagramas de árbol.

Teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$$

donde B es un suceso cualquiera asociado al experimento y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son un conjunto de sucesos que verifican:

- Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \varnothing$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

ACTIVIDADES

14. **En una academia de inglés se imparten clases de tres niveles: inicial, básico y avanzado.**

- En el nivel inicial están el 50 % de los inscritos, en el básico, el 30 %, y en el avanzado, el 20 %.
- En el nivel inicial hay un 55 % de mujeres, en el nivel básico, un 60 %, y en el avanzado, un 45 %.

a) Se elige al azar una persona inscrita. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre y esté en el nivel básico?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

15. **Una industria fabrica dos tipos de tornillos A y B.**

- Produce al día 600 del tipo A y 800 del tipo B.
- El 4 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo B salen defectuosos.

Si se selecciona un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

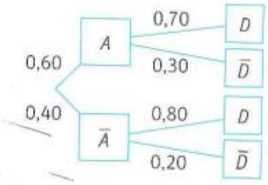
16. **Una urna contiene 4 bolas blancas y negras del mismo tamaño. Se sabe que al menos hay una de cada color. Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?**

Teorema de Bayes

En algunas ocasiones, se conoce el resultado de un experimento y se quiere calcular la probabilidad de un suceso previo.

Ejemplo ▸ El 60 % los alumnos de la clase aprueban matemáticas. El 70 % de ellos practica deporte semanalmente. Entre los que no aprueban matemáticas, también el 80 % practica deporte. Si se elige al azar un alumno y se sabe que practica deporte, ¿qué probabilidad hay de que apruebe matemáticas?

Se llama A al suceso "aprobar matemáticas" y D al suceso "hacer deporte".



La probabilidad que se quiere calcular es la del suceso A/D.

Utilizando la definición de la probabilidad de la intersección de sucesos, se tiene que: $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = P(D) \cdot P(A/D)$, de donde se puede despejar $P(A/D)$:

$$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)}$$

1.º Se calcula $P(D)$ con el teorema de probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(\overline{A}) \cdot P(D/\overline{A}) = 0{,}60 \cdot 0{,}70 + 0{,}40 \cdot 0{,}80 = 0{,}74$$

2.º Se sustituye en la expresión y se calcula la probabilidad de que haya aprobado matemáticas, sabiendo que practica deporte:

$$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}70}{0{,}74} = 0{,}57$$

Teorema de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Donde B es un suceso cualquiera asociado al experimento y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son un conjunto de sucesos que verifican:

- Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

MAT-TIC GeoGebra

En smSaviadigital.com podrás descubrir aplicaciones del teorema de Bayes.

ACTIVIDADES

17. En una ferretería hay tres cajas de bombillas. La primera contiene 20 bombillas, de las cuales 3 están fundidas, en la segunda hay 16 bombillas, con 2 fundidas, y en la tercera caja hay 10 bombillas, ninguna de ellas fundida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bombilla al azar esté fundida?

b) Se saca una bombilla y no está fundida. ¿Qué probabilidad hay de que sea de la tercera caja?

18. En una ciudad el 25 % de la población activa tiene estudios superiores. La tasa de paro entre los titulados superiores es del 8 %, mientras que en el resto de la población activa es del 30 %. Se elige una persona al azar que tiene empleo, ¿qué probabilidad tiene de ser titulado superior?

19. smSaviadigital.com

PRACTICA Aplica los teoremas de la probabilidad.

6 Análisis del azar

El azar está presente en nuestras vidas, desde el sexo de una cría, hasta las decisiones más cotidianas. Aunque no se pueda predecir el resultado concreto de un fenómeno aleatorio, sí se pueden cuantificar las distintas posibilidades.

En general, se intenta construir un modelo teórico que se ajuste al fenómeno estudiado y asignar probabilidades.

Ejemplo ► Luis ha encontrado cuatro huevos de pavo real. Cree que lo más probable es que sean dos machos y dos hembras, ya que la probabilidad de ser macho o hembra es la misma. ¿Es cierto o se equivoca?

La probabilidad del suceso A = "ser macho", es $P(A) = \frac{1}{2}$ y por tanto, el suceso $\overline{A}$ = "ser hembra", también tiene probabilidad $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.

Así, la probabilidad de que los 2 primeros sean machos y los siguientes sean hembras será:

$$P(A, A, \overline{A}, \overline{A}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Pero los dos machos pueden ocupar otras posiciones en el orden de nacimiento. Para contar todas las posibilidades, se forman grupos de 2 elementos entre los 4 posibles, en los que no importa el orden y en los que no se pueden repetir los elementos. Por tanto, el número total de opciones son las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}} = 6$$

La probabilidad de cada una de ellas es la misma que la de $(A, A, \overline{A}, \overline{A})$, por tanto, la probabilidad de que sean dos machos y dos hembras es:

$$P(\text{2 machos y 2 hembras}) = 6\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375 < 0{,}5$$

Lo más probable es no sean dos machos y dos hembras.

Ejemplo ► Una forma de echar a suertes, es tomar tres palitos donde uno es más corto que los otros. Una persona los sujeta en la mano y oculta uno de los extremos, mientras los otros van sacando uno a uno los palos. ¿Quién tiene ventaja, el que saca en primer lugar, en segundo o el último?

Se define el suceso C = "sacar el palo corto" y $\overline{C}$ a su contrario. Las probabilidades de sacar el palo corto de cada persona son:

- 1.ª persona: $P(C_1) = \frac{1}{3}$
- 2.ª persona: Solo lo puede sacar si el primero ha sacado palo largo. Como quedan uno largo y uno corto: $P(C_2) = P(\overline{C}_1)\cdot P(C/\overline{C}_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- 3.ª persona: Solo es posible si el primero y el segundo han sacado palo largo, es decir, $P(C_3) = 1 - P(C_1) - P(C_2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Los tres tienen las mismas probabilidades, se trata, por tanto, de "un juego justo".

UNIDAD 13

Ejemplo ▸ El problema de Monty Hall.

Se conoce así porque se planteó en un programa de televisión de EE. UU., *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato), cuyo presentador se llamaba Monty Hall.

El concursante debe elegir una de las tres puertas cerradas que contienen los premios: un coche y dos calabazas.

Una vez elegida, el presentador, que conoce el contenido de las tres puertas, abre una de las restantes y descubre una de las calabazas. A continuación, ofrece al concursante cambiar su elección. ¿Qué es mejor, cambiar o quedarse con la puerta elegida?

Puede parecer que las dos puertas que quedan tienen las mismas posibilidades, pero eso no es del todo cierto.

- Se supone que en la primera elección el concursante ha elegido la puerta 3. La probabilidad de que esta puerta oculte el coche es $\frac{1}{3}$. La probabilidad de que esté en las otras dos puertas será $\frac{2}{3}$
- Cuando el presentador abre una puerta y se comprueba que no está el coche, la otra puerta acumula los $\frac{2}{3}$ de la probabilidad anterior.

Por tanto, la probabilidad de que el coche esté en ella es el doble de la probabilidad de que esté en la elegida al principio por el concursante. Sin lugar a dudas la mejor opción será: ¡cambiar de puerta!

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y realiza una simulación del problema de Monty Hall.

ACTIVIDADES

20. En un concurso hay dos bolsas. En la bolsa *A* hay 3 bolas verdes y 2 rojas y en la bolsa *B* hay 7 bolas verdes, una blanca y 5 bolas rojas. Tienes que elegir una bolsa y sacar una bola roja para ganar un premio.

a) ¿Qué bolsa elegirías?

b) ¿Qué probabilidad tienes de ganar?

c) Si ha salido una bola roja, ¿que probabilidad hay de que el concursante haya elegido la bolsa *A*?

21. Mi abuelo ha marcado las 6 caras de un dado con cuatro Δ y dos O y dos urnas, una con un Δ y otra con una O.

Me pide tirar el dado y sacar una bola de la urna marcada con esa letra y dice que me dará el equivalente en euros al número de la bola.

a) Calcula la probabilidad de que me dé 45 €.

b) Calcula la probabilidad de que me dé solo 3 €.

22. En un juego se utilizan dos monedas iguales pero una de ellas está trucada y sale cara un 75 % de las veces. Se escoge una moneda al azar y se lanza.

a) Cuál es la probabilidad de sacar cara?

b) En el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la moneda trucada?

23. Calcula la probabilidad de ganar en este juego de cartas:

- Se ponen en un montón las cartas as, 2, 3, 4 y 5 de oros de una baraja española.
- Se barajan las cinco cartas y se sacan una tras otra tres de ellas sin reemplazamiento.
- Se gana si las tres cartas son consecutivas.

24. Se ha realizado un test sobre una nueva vacuna a 12000 personas. En 75 de ellas, entre las que había 30 mujeres embarazadas, se ha producido una reacción secundaria adversa.

a) Si la vacuna se ha administrado a 700 mujeres embarazadas, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer embarazada sufra la reacción?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no embarazada tenga una reacción adversa?

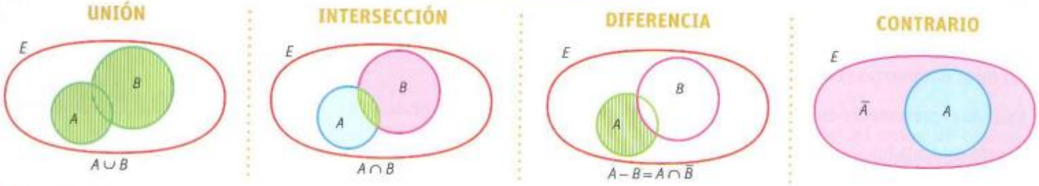
Organiza tus ideas

AZAR Y DETERMINISMO

Un experimento es **aleatorio** si al repetirlo varias veces en las mismas condiciones se pueden obtener distintos resultados.

- El **espacio muestral**, E, es el conjunto formado por todos los resultados posibles.
- Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Los tipos de sucesos son:
  - **Elemental**: si es uno de los resultados posibles.
  - **Compuesto**: si está formado por varios sucesos elementales.
  - **Imposible**: si no ocurre nunca, $\varnothing$.
  - **Seguro**: si ocurre siempre. Coincide con el espacio muestral, E.
  - **Contrario** o **complementario**, $\overline{B}$.
- El **espacio de sucesos**, S, es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

SUCESOS. OPERACIONES



- Dos sucesos A y B son **compatibles** si $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

La **probabilidad** $P(A)$, de un suceso A, es el valor de la frecuencia relativa de A, al repetir el experimento infinitas veces.

$0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad$ $P(\varnothing) = 0$ $\quad$ $P(E) = 1$

Regla de Laplace

Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}}$$

Probabilidad de la unión

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad del complementario

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

PROBABILIDAD DE EXPERIMENTOS COMPUESTOS. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Un **experimento compuesto** es el formado por dos o más experimentos simples.

Regla del producto

La probabilidad de un resultado de un experimento compuesto es el **producto de las probabilidades de las ramas** que forman el resultado.

Dependencia de sucesos

- **Sucesos dependientes**: la realización de uno depende de la realización del otro. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$
- **Sucesos independientes**: la realización de uno no depende de la realización del otro. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TEOREMA DE BAYES

La probabilidad de A condicionado por B es $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

- Teorema de la probabilidad total: $P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$
- Teorema de Bayes: $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$

182 UNIDAD 13

Actividades clave

1. En un estudio de uso de redes sociales en una población, el 35 % de los encuestados usa la red *A*, y el 25 %, la red *B*, mientras que un 5 % dice usar ambas redes.

Si se elige una persona al azar, calcula las siguientes probabilidades.

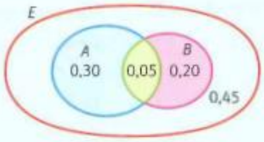
a) Que use alguna red social.

b) Que solo use la red *A*.

c) Que use solo una red.

d) Que no use ninguna red.

Se designan los sucesos A = "usar la red A" y B = "usar la red B" y se utilizan diagramas de Venn para asignar probabilidades:



- Un 5 % usa ambas redes:
  $P(A \cap B) = 0{,}05$
- Los que solo usan la red A:
  $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = 0{,}35 - 0{,}05 = 0{,}30$
- Los que solo usan B:
  $P(B - A) = P(B \cap \overline{A}) = 0{,}25 - 0{,}05 = 0{,}20$
- Los que no usan ninguna red:
  $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}45$

a) El suceso "usar alguna red" se puede expresar como $A \cup B$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}35 + 0{,}25 - 0{,}05 = 0{,}55$

b) El suceso "usar solo la red A" se puede expresar como $A - B$:
$P(A - B) = 0{,}30$

c) El suceso "usar solo una red" se describe como $(A - B) \cup (B - A)$:
$P\,[(A - B) \cup (B - A)] = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$

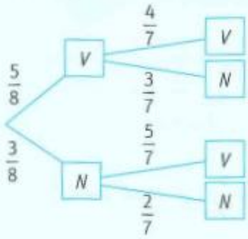
d) El suceso "no usar ninguna red" se expresa como $(\overline{A \cup B})$.
$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}45$

2. Una bolsa tiene 5 bolas verdes y 3 negras. Se sacan sucesivamente dos bolas, sin devolver la primera.

Raúl apuesta que las dos bolas serán del mismo color y Estela que serán de distinto color.

¿Quién tiene mayor probabilidad de acertar?

Se utiliza un diagrama de árbol para representar la situación:



- Raúl acierta si se sacan dos verdes o dos negras:

$$P(\text{Raúl}) = P(VV) + P(NN) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{20+6}{56} = \frac{13}{28} = 0{,}46$$

- Y Estela acierta si se sacan dos bolas de distinto color:

$$P(\text{Estela}) = 1 - P(\text{Raúl}) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28} = 0{,}54\,.$$

Tiene más probabilidades de acertar Estela.

3. A una prueba se han presentado 80 mujeres y 70 hombres. Aprueban el 60 % de las mujeres y el 50 % de los hombres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

b) Se elige al azar una persona aprobada, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?

Se designan los sucesos así:

- A = "aprobado"
- $\overline{A}$ = "suspenso"
- M = "mujer"
- H = "hombre"

a) Para calcular la probabilidad de aprobar, se aplica el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(M)\cdot P(A/M) + P(H)P(A/H) = \frac{80}{150}\cdot 0{,}6 + \frac{70}{150}\cdot 0{,}50 = 0{,}553$$

b) La probabilidad de elegir a una mujer al azar, sabiendo que está aprobada es $P(M/A)$. Para hallarla se aplica el teorema de Bayes:

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M)P(A|M)}{P(M)\cdot P(A/M) + P(H)\cdot P(A/H)} = \frac{0{,}32}{0{,}553} = 0{,}729$$

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Azar y determinismo. Sucesos

25. **Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios. Cuando lo sean escribe su espacio muestral.**

a) Medir el volumen de una botella de agua.

b) Encestar al lanzar un triple de espaldas a la canasta.

c) Extraer una carta de una baraja y mirar su palo.

d) Acertar el segundo premio del sorteo de la lotería de Navidad.

26. **En una urna hay nueve bolas numeradas del 1 al 9.**

a) Escribe los sucesos elementales.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) Describe dos sucesos incompatibles.

27. **Se pueden construir dados equiprobables con los cinco poliedros regulares.**

¿Cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos?

a) Lanzar un dado dodecaédrico y uno cúbico.

b) Lanzar un dado octaédrico y un tetraédrico.

c) Lanzar tres dados icosaédricos.

28. **Se lanza un dado de ocho caras y se consideran los sucesos:**

A = "sacar más de 5"

B = "sacar un número par"

C = "sacar un múltiplo de 3"

a) Escribe los elementos de los sucesos A, B y C.

b) Di si son compatibles: A y B, A y C, B y C

c) Escribe los sucesos: $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B - C$

d) Describe: $\overline{A} \cup B$, $\overline{B} \cap C$, $\overline{A \cup C}$, $\overline{B \cap C}$

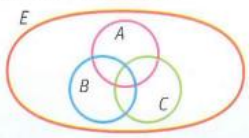
29. **Lanzamos un dado cúbico y consideramos los sucesos:**

$A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$C = \{4, 5, 6\}$

a) Copia en tu cuaderno el diagrama de Venn y coloca los números en las regiones correspondientes.



b) Calcula los sucesos:
$A \cup B \cup C$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cup B$ y $\overline{A} \cap \overline{C}$.

30. **Se escoge al azar una carta de una baraja de 40 cartas. Consideramos los sucesos:**

A = "sacar un basto"

B = "sacar un rey"

C = "sacar una carta más baja que 3"

Describe los sucesos:

a) $A \cap C$

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$

c) $A \cap \overline{B}$

d) $\overline{A - C}$

31. **Utiliza diagramas de Venn para comprobar si son ciertas las igualdades siguientes:**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad de un suceso

32. **Se lanzan dos dados y se mira la diferencia de puntos entre uno y otro.**

a) Escribe el espacio muestral del experimento.

b) ¿Son sucesos equiprobables? En caso negativo, escribe las probabilidades de cada suceso elemental.

c) Halla la probabilidad del suceso A = "la diferencia es menor que 4".

33. **Se elige un número de tres cifras. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna cifra repetida?**

ACTIVIDAD **RESUELTA**

34. **Sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$, calcula las probabilidades siguientes:**

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A - B)$

c) Que no se cumpla ni A ni B.

a) Para calcular $P(A \cap B)$ se utiliza la probabilidad de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}3$

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

35. **Se lanzan dos dados y consideramos los sucesos:**

A = "sacar al menos un 6"

B = "la diferencia de puntos es 2"

Calcula las probabilidades de:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A - B$

36. Se elige al azar un número de seis cifras (no puede empezar por 0). ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos una cifra impar?

37. En una empresa hay 20 trabajadores: 12 hombres y 8 mujeres. Se eligen tres de ellos al azar para formar una comisión. Halla la probabilidad de que:

a) Entre los elegidos haya solo una mujer.

b) Haya al menos una mujer.

c) La comisión no sea mixta, es decir, haya solo hombres o solo mujeres.

38. Colocamos 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules en fila sin mirar su color. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos bolas azules juntas?

Probabilidad de sucesos compuestos

39. ¿Cuál es la probabilidad de tener 4 ases al sacar 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

40. Se lanza una moneda 4 veces. Calcula las probabilidades de:

a) Sacar 4 cruces.

b) Sacar exactamente 3 cruces.

c) Sacar al menos 3 cruces.

d) Sacar al menos una cruz.

41. Observa la bolsa que contiene bolas del mismo tamaño.

Se sacan al azar dos bolas al mismo tiempo. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean del mismo color.

b) Las dos tengan el mismo número.

42. Con la misma bolsa del ejercicio anterior se consideran los sucesos: A = "sacar una bola negra", B = "sacar un número impar". ¿Son sucesos dependientes? Justifica la respuesta.

43. Una paloma mensajera llamada Pronta llega a su destino con el mensaje el 90 % de las veces. Otra paloma menos experta, llamada Tarda, entrega el mensaje el 80 % de las veces. Se envía a las dos palomas a un mismo destino. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Que al menos una de las palomas entregue el mensaje.

b) Que no llegue ninguna de las dos.

Probabilidad condicionada

44. Se extraen sucesivamente tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres cartas sean reyes si:

a) Se vuelven a meter al mazo las cartas extraídas.

b) No se devuelven al mazo las cartas.

45. Las habitaciones de un hotel están numeradas de tal forma que la primera cifra indica la planta y las otras dos el número de la habitación en esa planta. El hotel tiene 3 plantas y en cada planta hay 40 habitaciones. Si se eligen dos habitaciones al azar, calcula la probabilidad de que las habitaciones sean contiguas.

PROBLEMA **RESUELTO**

46. En un centro educativo hay 100 estudiantes de 4.º ESO. De ellos, 40 son chicos y 30 de los 100 usan ortodoncia, de los cuales 12 son chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica y no lleve ortodoncia.

b) Sea chico, sabiendo que lleva ortodoncia.

Se resumen los datos en una tabla de contingencia:

	Con ortodoncia	Sin ortodoncia	Total
Chicos	12	28	40
Chicas	18	42	60
Total	30	70	100

a) $P(\text{ser chica y no llevar ortodoncia}) = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

b) $P(\text{ser chico / lleva ortodoncia}) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

47. En un congreso de médicos hay 200 congresistas. De ellos, 130 son morenos y 80 tienen los ojos castaños, de los cuales 50 son morenos. Se selecciona al azar a un asistente. Haz una tabla de contingencia y calcula la probabilidad de que:

a) Sea moreno y con los ojos castaños.

b) No tenga los ojos castaños y no sea moreno.

48. En una rifa con números del 001 al 500 se sortean tres premios distintos. Luisa ha comprado 10 boletos. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Que al menos un boleto tenga premio.

b) Que tengan premio a lo sumo dos boletos.

49. Un estudio de una tienda de electrodomésticos dice que 6 de cada 10 clientes compra un televisor. La probabilidad de que un cliente compre un lector de DVD si ha comprado un televisor es 0,4, mientras que si no ha comprado el televisor la probabilidad es 0,2. Calcular la probabilidad de que:

a) Compre un televisor y un lector de DVD.

b) Compre un lector de DVD.

Actividades

Probabilidad total. Teorema de Bayes

PROBLEMA **RESUELTO**

50. El 50 % de los alumnos de 4.º ESO cursa Cultura Clásica, el 35 %, Francés, y el 15 %, Música. El porcentaje de aprobados es, respectivamente, 80 %, 70 % y 95 %. Se elige al azar un alumno.

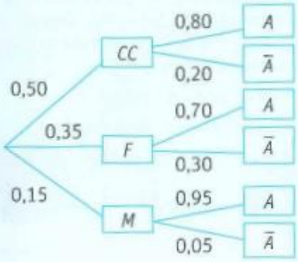
a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe?

b) Si se sabe que ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que curse Francés?

Se identifican las asignaturas con sus iniciales: *CC*, *F* y *M*. Aprobar como *A* y suspender con $\overline{A}$. Se construye un diagrama de árbol con las probabilidades:

$P(CC) = 0{,}50$ $\quad P(F) = 0{,}35$ $\quad P(M) = 0{,}15$

$P(A/CC) = 0{,}80$ $\quad P(A/F) = 0{,}70$ $\quad P(A/M) = 0{,}95$



a) Se halla la probabilidad de aprobar aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(CC)\,P(A/CC) + P(F)\,P(A/F) + P(M)\,P(A/M) = 0{,}50 \cdot 0{,}80 + 0{,}35 \cdot 0{,}70 + 0{,}15 \cdot 0{,}95 = 0{,}7875$$

b) La probabilidad de que curse Francés, sabiendo que ha aprobado se calcula aplicando el teorema de Bayes:

$$P(F/A) = \frac{P(F)\cdot P(A/F)}{P(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}70}{0{,}7875} = 0{,}3\hat{1}$$

51. Se dispone de dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas blancas y una negra, y la urna *B*, una blanca y 2 negras. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna *A* y si no es así se saca de la urna *B*.

a) Calcula la probabilidad de sacar una bola negra.

b) Se saca una bola de una de las urnas y es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido más de 2 en el dado?

52. Existen tres medicamentos genéricos para combatir una enfermedad, excluyentes entre sí.

- El *A* lo toman el 60 % de los enfermos y su índice de curación es del 85 %.
- El *B* lo toman el 25 % de los enfermos y es eficaz en 9 de cada 10 pacientes.
- El *C* lo toma el resto y su nivel de eficacia es del 80 %.

a) Calcula la probabilidad global de curación de un paciente.

b) Se ha seleccionado al azar a un paciente que no ha respondido positivamente al tratamiento. Calcula la probabilidad de que haya tomado el medicamento *B*.

Actividades de síntesis

53. Indica el suceso contrario en los siguientes casos.

a) En una clase se eligen al azar dos estudiantes.
A = "los dos son chicos"

b) En un restaurante Luis pide dos platos:
B = "sopa y pescado"

c) En una rifa Juan lleva tres números distintos:
C = "al menos uno está premiado"

54. Se lanza una moneda tres veces. Consideramos los sucesos A = "solo han salido caras" y B = "ha salido al menos una cara". Calcula las probabilidades de los sucesos:

a) $\overline{A}$ $\quad$ c) $\overline{A}\cap B$

b) $A \cup B$ $\quad$ d) $A\cup\overline{B}$

55. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 negras y 2 blancas. Se sacan 3 bolas sin reemplazarlas. Calcula las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) Que las tres sean del mismo color.

b) Que sean de tres colores distintos.

56. Se tienen 4 cajas numeradas del 1 al 4 y repartimos al azar 10 bolas idénticas entre las 4 cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté vacía?

57. En un experimento la probabilidad de un suceso *A* es $P(A) = 0{,}50$ y la de otro suceso *B* es $P(B) = 0{,}45$. La probabilidad de la unión es $P(A \cup B) = 0{,}90$.

a) ¿Son incompatibles *A* y *B*?

b) ¿Son independientes?

c) Calcula las probabilidades de $A\cap B$, A/B, B/A y $\overline{A}\cap B$.

58. En un concurso de redacción el ganador elige un libro al azar entre 5 novelas y 3 libros de poesía y tras él el segundo clasificado elige otro libro. Calcular la probabilidad de que:

a) Al segundo le toque un libro de poesía.

b) Al ganador le haya tocado una novela si sabemos que al segundo le tocó un libro de poesía.

c) Que a los dos les toque un libro del mismo género.

59. Un pastillero *A1* contiene 4 pastillas blancas y 3 azules, otro *A2* tiene 5 blancas y ninguna azul y un tercero *A3* tiene 2 blancas y 4 azules.

a) Se escoge un pastillero al azar y de él se extrae una pastilla. Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Si ha salido una pastilla blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la pastilla estuviera en el primer pastillero?

c) Se han juntado todas las pastillas y se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que sea del primer pastillero.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

60. **Tres bolsas contienen bolas de colores, la *A* tiene 5 bolas negras y 2 blancas, la *B*, 4 negras y 3 blancas, y la *C*, 4 negras y 4 blancas. Se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas de la misma. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

61. **En un campamento hispano-francés los participantes se han apuntado a un único deporte según la siguiente tabla:**

	Tenis	Natación	Vela
Español	40	24	16
Francés	14	21	35

Indica si los siguientes pares de sucesos son independientes.

a) A = "ser español" y T = "practicar tenis"

b) B = "ser francés" y V = "practicar vela"

62. **En un comercio hay instaladas dos alarmas *A* y *B* contra incendios en zonas distintas. La probabilidad de que se active la alarma *A* es $P(A) = 0{,}90$, la probabilidad de que se active *B* es $P(B) = 0{,}95$ y la probabilidad de que se activen ambas simultáneamente es $P(A \cap B) = 0{,}70$. Si hay un incendio, calcula las siguientes probabilidades:**

a) Que se active alguna alarma.

b) Que no se active ninguna de las dos alarmas.

c) Que se active solo una alarma.

63. **Una bolsa contiene 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5 y 3 bolas azules numeradas del 1 al 3. Se extraen, sin reponerlas, tres bolas al azar. Calcula las probabilidades siguientes:**

a) No sacar 3 bolas rojas.

b) No sacar ninguna bola roja.

c) Sacar al menos una bola roja.

64. **En un plató de televisión hay dos cámaras que enfocan al presentador en todo momento. La cámara *A* falla en un 8 % de los casos, y la *B*, en un 5 %. En un 2 % fallan las dos simultáneamente. Calcula la probabilidad de que:**

a) Fallen las dos cámaras.

b) Falle *B* sabiendo que ha fallado *A*.

c) No falle ninguna cámara.

65. **En una fábrica de envases se ha realizado un test de calidad resultando que el 3 % salen defectuosos. Se han seleccionado 10 piezas al azar. Calcula la probabilidad de que:**

a) Ningún envase sea defectuoso.

b) El primer envase defectuoso salga en la tercera extracción.

c) Que haya exactamente un envase defectuoso.

66. **Un estudiante hace un test de 8 preguntas. En cada una de ellas debe elegir la respuesta correcta entre tres posibles. Para pasar el test hay que acertar al menos 6 respuestas. Si decide rellenar todas las respuestas al azar, ¿cuál es la pro-**

67. **En el claustro de profesores de un centro el 60 % de l miembros son mujeres. Entre las profesoras una de cada lleva gafas, mientras que entre los profesores las llevan u de cada dos.**

Se elige al azar a un miembro del claustro, ¿cuál es la probabil dad de que sea una profesora si sabemos que llevaba gafas?

PARA PENSAR MÁS

68. **La probabilidad de que al seleccionar un número capicúa e tre 1000 y 10000 sea múltiplo de 7 es:**

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{7}$

69. ***A* y *B* son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}40$, $P(B/A) = 0{,}25$ $P(B) = b$. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar *b***

A. 0,40 **B.** 0,36 **C.** 0,70 **D.** 1

70. **Se escoge un punto al azar en el interior de un cuadrado d lado 1 y se mide la distancia del punto al lado más próxim ¿Cuál es la probabilidad de que esa distancia esté compre dida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$?**

A. $\frac{45}{225}$ **B.** $\frac{55}{225}$ **C.** $\frac{56}{225}$ **D.** $\frac{60}{225}$

Detecta el error

71. **Un fallo con historia.**

Si se lanzan al aire dos monedas, ¿cuál es la probabilidad d que salga alguna cara?

El matemático francés Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) dijo que la probabilidad era $\frac{2}{3}$.

Razonó así:

- Si la primera moneda sale cara ya se cumple nuestro suceso.
- Si no es así los resultados pueden ser (X, C) o (X, X). En dos de los casos sale alguna cara y en el tercero no sale ninguna. Luego la probabilidad de salir alguna cara es $\frac{2}{3}$.

¿Estás de acuerdo con d'Alembert? Calcula la probabilidad de obtener "al menos una cara" al lanzar dos monedas. Encuentr

nte a prueba

LEMA RESUELTO La importancia de los análisis médicos y de las leyes del azar

a detectar una determinada epidemia que ha afectado a 4 % de la población se utiliza un análisis específico. Pero nin- n análisis es infalible.

e en concreto da falsos positivos (tener la enfermedad) en per- nas sanas en un 2 % de las ocasiones. Y, por el contrario, da sos negativos (estar sano) en el 5 % de personas que sí tienen enfermedad.

is, sospecha que está enfermo y se ha realizado el análisis, que dado positivo. Está convencido de que tiene la enfermedad. uedes demostrarle que no es seguro que esté enfermo?

¿Qué probabilidad tiene de que el análisis dé positivo?

Si el análisis ha dado positivo, ¿qué probabilidad hay de que esté realmente enfermo?

LUCIÓN

denominan a los sucesos así:

$+ =$ "Dar positivo" $\quad S =$ "Estar sano"

$- =$ "Dar negativo" $\quad \overline{S} =$ "Estar enfermo"

s probabilidades son:

$P(S) = 0{,}96$	$P(+/S) = 0{,}02$	$P(-/S) = 0{,}98$
$P(\overline{S}) = 0{,}04$	$P(+/\overline{S}) = 0{,}95$	$P(-/\overline{S}) = 0{,}05$

. Como no se sabe si Luis está enfermo o sano habrá que contemplar las dos posibilidades, es decir, que dé positivo estando sano y que dé positivo estando enfermo. Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$P(+) = P(S)\,P(+/S) + P(\overline{S})\,P(-/\overline{S}) = 0{,}96 \cdot 0{,}02 + 0{,}04 \cdot 0{,}95 = 0{,}0572$

La probabilidad de dar positivo en el análisis es del 5,72 %.

. El análisis ha dado positivo, es decir, se ha dado el suceso +. La probabilidad de que Luis esté enfermo es $P(\overline{S}/+)$ y para calcularla se aplica el teorema de Bayes:

$$P(\overline{S}/+) = \frac{P(\overline{S}\cap +)}{P(+)} = \frac{P(\overline{S})\cdot P(+/\overline{S})}{P(S)\cdot P(+/S) + P(\overline{S})\cdot P(+/\overline{S})} = \frac{0{,}04\cdot 0{,}95}{0{,}0572} = 0{,}6643$$

Es decir, a pesar de la alta fiabilidad del análisis y de haber dado positivo en el análisis, Luis tiene más de la mitad de posibilidades de estar sano.

Un juego con trampa

elén y Carlos han descubierto un nuevo juego:

Se introducen tres fichas en un sombrero.

Una de ellas tiene las dos caras blancas, otra las dos caras rojas y la tercera una blanca y otra roja.

Uno de ellos extrae una ficha, mira solo una de sus caras y le muestra el color al otro jugador.

arlos apuesta a que la ficha es la que tiene las dos caras iguales, y Belén, a que es la que ene las caras diferentes.

arece que los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de acertar, ya que si la cara ue se ha visto es roja la cara oculta o es roja también, en cuyo caso sería la ficha de dos aras rojas, o por el contrario, es blanca, y entonces la ficha extraída sería la blanca-roja.

1. ¿Tienen los dos jugadores las mismas probabilidades de ganar?
2. En caso contrario, ¿por cuál de las dos opciones apostarías? Calcula la probabilidad de ganar de cada jugador.

Una partida sin terminar. Reparto justo

Blaise Pascal (1623-1662) y **Pierre de Fermat** (1601-1665) son dos de los fundadores de la teoría de la probabilidad.

Se intercambiaron numerosas cartas planteándose problemas relacionados con el azar. Uno de ellos fue cómo habría que repartir las cantidades apostadas por dos jugadores si hubieran de interrumpir el juego antes del final y uno fuera ganando al otro.

En una carta escrita el 29 de julio de 1654 Pascal le remite a Fermat su solución:

29 de julio de 1654

"He aquí como lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan al mejor de tres partidas, y cada uno ha apostado 32 monedas. Supongamos que el primero ha ganado dos y el otro una. Ahora están jugando una partida cuya suerte es que, si gana el primero, gana la apuesta, las 64 monedas. Si gana el otro empatan a dos partidas, y por tanto, si suspenden el juego cada una retiraría su apuesta.

Considerad, señor, que si gana el primero le pertenecen 64 monedas y 32 si pierde. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "estoy seguro de ganar 32 monedas, porque aunque pierda las tengo; pero las otras 32 quizás las tendré yo o quizás las tendréis vos; el azar es igual, repartamos pues estas monedas mitad por mitad, y me daís, además de estas 16 las 32 monedas que me corresponden con seguridad". Tendrá, pues, 48 monedas el primero y el otro 16"

1. ¿Estás de acuerdo con la solución de Pascal?
2. ¿No sería más justo este razonamiento: "si han jugado tres partidas y uno ha ganado dos, y el otro, una, lo lógico es dividir las 64 monedas en tres partes y que el primero se lleve dos partes, y el otro, una. Es decir, al primero le corresponden $\frac{2}{3}\cdot 64 = 42{,}66$ y al otro $\frac{1}{3}\cdot 64 = 21{,}33$?
3. Haz un diagrama de árbol, suponiendo que los dos tiene la misma probabilidad de ganar una partida y saca tus propias conclusiones.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio y se sabe que $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$. Representa los sucesos A y B mediante un diagrama de Venn y calcula:

   a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A \cup \overline{B})$

2. Los dados para rellenar quinielas son dados cúbicos con estas características:

   - Tres caras están marcadas con un 1 que representa la victoria local.
   - Dos caras con una X que representa el empate.
   - Una cara con un 2, que representa la victoria visitante.

   Calcula las probabilidades de que al lanzar el dado tres veces:

   a) Salgan 3 X.

   b) No salga ninguna X.

   c) Salga al menos una X.

3. Se elige un número al azar entre 1000 y 9999. Calcula las siguientes probabilidades.

   a) Que tenga alguna cifra repetida.

   b) Que tenga solo una cifra repetida dos veces.

4. Se extraen 4 cartas al azar de una baraja de 40 naipes. Calcula la probabilidad de que:

   a) Tres de las cuatro cartas tengan el mismo valor: tres cuatros, tres reyes...

   b) Las cuatro tengan distinto valor.

5. En un concurso de televisión, un concursante domina 5 de los 8 temas sobre los que le pueden preguntar. En la primera ronda, el presentador elige dos sobres al azar y le muestra los temas que contienen al concursante, para que elija uno de ellos.

   a) Halla la probabilidad de que el concursante pueda elegir uno de los temas que domina.

   b) Halla la probabilidad de que el presentador le muestre al concursante dos temas que conoce.

6. En una ciudad hay tres centros educativos A, B y C que presentan alumnos al examen de acceso a la universidad. El 50 % de los alumnos presentados son del centro A, el 35 %, del B, y el 15 %, del C. El centro A tiene un porcentaje de aprobados del 90 %, el B, del 88 %, y el C, del 96 %.

   a) ¿Cuál es el índice global de aprobados en la ciudad?

   b) Se ha elegido un estudiante al azar y ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno del centro A?

smSaviadigital.com VALORA LO APRENDIDO > Autoevaluación.

B. Tablas de resultados de las tareas

Tabla 9.4.1. Resultados de cada estudiante en la tarea 1.

TAREA 1																
Estudiante	Nota	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
EST 1	6	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
EST 2	9,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
EST 3	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
EST 4	6	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
EST 5	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
EST 6	5,3	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
EST 7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 8	3,3	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 9	9,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
EST 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 11	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
EST 12	3,3	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 13	7,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
EST 14	9,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
EST 15	3,3	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 20	6	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
EST 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EST 22	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EST 23																
EST 24																
EST 25																
EST 26																
EST 27																
EST 28																
EST 29																
EST 30																

Tabla 9.4.8. Resultados de cada estudiante en la tarea 2.

TAREA 2										
Estudiante	Nota	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
EST 1	8,9	1	1	1	1	0	1	1	1	1
EST 2	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EST 3	7,8	1	1	1	1	0	1	0	1	1
EST 4	6,7	1	1	1	1	0	0	0	1	1
EST 5	8,9	1	1	1	1	0	1	1	1	1
EST 6	6,7	1	1	1	1	0	1	0	1	0
EST 7	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EST 8	8,9	1	1	1	1	1	1	1	0	1
EST 9	6,7	1	1	1	1	0	0	0	1	1
EST 10	4,4	1	1	1	1	0	0	0	0	0
EST 11	7,8	1	1	1	1	0	1	0	1	1
EST 12	6,7	1	1	1	1	0	1	0	1	0
EST 13	6,7	1	1	1	1	0	0	0	1	1
EST 14	7,8	1	1	1	1	0	1	1	0	1
EST 15										
EST 16	6,7	1	1	1	1	0	0	0	1	1
EST 17										
EST 18	8,9	1	1	1	1	0	1	1	1	1
EST 19	2,2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
EST 20	5,6	1	1	1	1	0	1	0	0	0
EST 21										
EST 22	7,8	1	1	1	1	0	1	0	1	1
EST 23	7,8	1	1	1	1	0	1	1	0	1
EST 24	8,9	1	1	1	1	0	1	1	1	1
EST 25	7,8	1	1	1	1	0	1	1	0	1
EST 26	7,8	1	1	1	1	0	1	0	1	1
EST 27	6,7	1	1	1	1	0	0	0	1	1
EST 28										
EST 29										
EST 30										

Tabla 9.4.16. Resultados de cada estudiante en la tarea 3.

TAREA 3							
Estudiante	Nota	Diagrama	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
EST 1	1,7	1	0	0	0	0	0
EST 2							
EST 3							
EST 4	1,7	1	0	0	0	0	0
EST 5	5	1	1	1	0	0	0
EST 6	6,7	1	1	1	1	0	0
EST 7	1,7	0	0	1	0	0	0
EST 8							
EST 9	8,3	1	1	1	0	1	1
EST 10	1,7	0	0	1	0	0	0
EST 11	6,7	1	1	1	1	0	0
EST 12	6,7	1	1	1	1	0	0
EST 13	5	1	1	1	0	0	0
EST 14							
EST 15							
EST 16	5	1	1	1	0	0	0
EST 17	6,7	1	1	1	1	0	0
EST 18	3,3	0	0	1	0	0	1
EST 19	3,3	0	1	1	0	0	0
EST 20							
EST 21	10	1	1	1	1	1	1
EST 22							
EST 23	6,7	1	1	1	1	0	0
EST 24							
EST 25	1,7	1	0	0	0	0	0
EST 26							
EST 27	5	1	0	1	1	0	0
EST 28							
EST 29							
EST 30							

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Miguel R. Wilhelmi, Departamento de Matemáticas