Arturo SÁNCHEZ GONZÁLEZ

GEOMETRÍA

LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS EN 1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

TFM 2023

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

La resolución de triángulos en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología

Arturo Sánchez González

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKO

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de triángulos.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la resolución de triángulos, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de Bachiller de Ciencias y Tecnología en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:
La resolución de triángulos en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la resolución de triángulos en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cinco capítulos. Los tres primeros abarcan, respectivamente, un análisis global del currículo vigente, de aquellos aspectos del mismo concernientes exclusivamente a las matemáticas, y de los nuevos sentidos y saberes básicos involucrados en la resolución de triángulos. En el cuarto capítulo se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de Bachiller de Ciencias y Tecnología, así como en dos cursos anteriores y posterior.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
El currículo vigente

Este breve capítulo tiene como objetivo fundamental presentar, de forma clara pero concisa, los principales aspectos curriculares relativos a las enseñanzas preuniversitarias introducidos en la Comunidad Foral de Navarra durante el pasado mes de junio de 2022 y enmarcados en la ley de educación conocida como LOMLOE (Boletín Oficial de Navarra [BON], 2022a; 2022b; 2022c). En este sentido, centraremos nuestra atención en la nueva terminología y su jerarquización, que no en aspectos organizativos (nuevos itinerarios, diversificación, promoción, titulación…), pues es en aquellos que nos apoyaremos para argumentar la presencia y continuidad de la resolución de triángulos en el currículo.

La motivación de este capítulo es doble. Por un lado, consideramos fundamental pactar ya desde un comienzo los significados de la terminología que se empleará en lo venidero; y es que la LOMLOE no solo introduce multitud de definiciones, sino que operativiza de forma sustancialmente distinta algunos términos ya empleados en la LOMCE (BON, 2014; 2015a; 2015b). Por otro lado, y desde una perspectiva mucho más pragmática, la irrupción de la LOMLOE hace apenas seis meses ha provocado que gran parte de literatura didáctica, así como la propia guía de elaboración del Trabajo de Fin de Máster de la presente titulación y especialidad, hayan quedado obsoletas en lo que a estudio longitudinal del currículo se refiere. Ante esta tesitura, ha sido necesario un esfuerzo de indagación sustancial hasta alcanzar la comprensión suficiente del nuevo currículo, profuso en matices, como para lograr adaptar, dentro de las capacidades de uno mismo, el guion de elaboración del TFM al trabajo que aquí se muestra. Pretendemos con este capítulo, por tanto, hacer patente que la desconexión ente LOMCE y LOMLOE es lo suficientemente pronunciada como para justificar dicha alteración de estructura.

Aludiendo ya propiamente al contenido de la LOMLOE, esta preserva el enfoque competencial visto en la LOMCE, vertebrando ahora entorno a la noción de Perfil de salida del alumnado una sutil reformulación de las siete competencias ya incluidas en la derogada ley, a las que se incluye la competencia plurilingüe. Del mismo modo, pese a incluir el calificativo “clave”, la noción subyacente de competencia preserva su significado de “habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizando recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto en particular” (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2005, p. 3); si bien ciertos autores afirman apreciar evolución y dinamismo al estar vinculada ahora a “desempeños” en vez de “capacidades” (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). A priori, pudiera parecer que la LOMLOE es fundamentalmente una continuación de la LOMCE, sin embargo, y como mostramos a continuación, es su explicitación de cómo lograr la consecución de dichas competencias que la dota de un carácter eminentemente disruptivo.

Continuando con la descripción, para cada competencia clave se define una serie de entre tres y cinco descriptores operativos que la desarrollan. Estos, a su vez, sirven como marco referencial a partir del cual vincular dicha competencia clave con desempeños específicos de cada materia o ámbito; las competencias específicas. Y es en este punto donde encontramos una de las principales discrepancias entre LOMCE y LOMLOE, pues la definición de este nuevo grado de concreción competencial y su distribución por materias alivia la generalidad poco práctica de la que adolecía la LOMCE. Además, con el mismo objetivo último de garantizar una educación verdaderamente competencial, es respecto de estas competencias específicas y no de los antiguos bloques de contenidos, ahora inexistentes como tal, que se definen los criterios de evaluación. De este modo, al focalizar la evaluación sobre los desempeños en sí mismos se obstaculiza relegar los aspectos procedimentales y actitudinales en pos de los conceptuales; la praxis en pos del logos. Esta es la segunda gran diferencia apreciable entre ambos currículos.

Finalmente, los antiguos bloques de contenidos de cada materia quedan ahora estructurados en bloques de saberes básicos, desapareciendo todo lo referido a criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. En este sentido, cabe recordar que los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables eran, en última instancia, la exposición detallada de los contenidos, fielmente a la cual se elaboraban los libros de texto. De este modo, frente al desglose alcanzado en materia competencial nos encontramos con un grado de generalidad sin precedente en lo que a contenidos se refiere. Sin embargo, esta aparente contradicción no es tal, pues dicha generalidad tiene precisamente como finalidad dotar a los niveles de centro y aula de la flexibilidad y autonomía suficientes como para elaborar concreciones curriculares que permitan un aprendizaje verdaderamente significativo, verdaderamente competencial. Ahora bien, queda por responder la pregunta de cómo vincular la adquisición de estos saberes básicos con las competencias específicas y su correspondiente evaluación pues, aunque el currículo afirme que su “aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas” (BON, 2022b, p. 4), esto no llega a plasmarse. Y sin explicitar en mayor grado las formas de adquisición y uso de dichos contenidos, es difícil garantizar que el profesorado sea capaz de mejorar sus prácticas y orientarlas hacia el desarrollo de la competencia (Alsina, 2022).

Con esto concluye la sucinta descripción de la nueva legislación educativa vigente, esquematizada a su vez en la figura 1, a la par que las tres grandes disimilitudes entre currículos que querían ensalzarse.

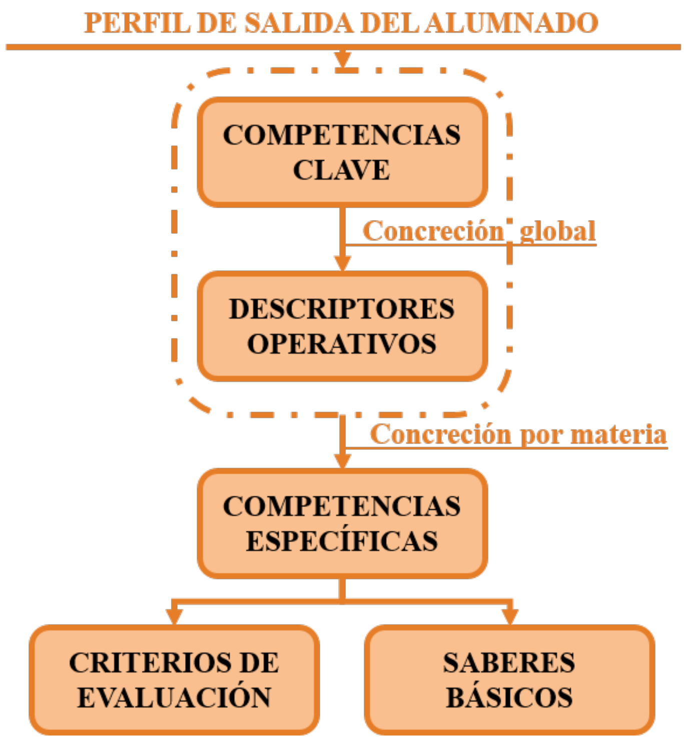


Figura 1. Esquema de términos clave en la LOMLOE.

Capítulo 2
Las matemáticas en el currículo vigente

En este capítulo nos centraremos en la forma en que las matemáticas son presentadas en el currículo vigente, siguiendo la jerarquía de términos previamente descrita.

2.1. Competencia matemática y sus descriptores operativos

La competencia matemática figura como una de las ocho competencias clave comunes a las tres etapas educativas abarcadas, si bien es enunciada conjuntamente con la competencia en ciencia, tecnología e ingeniería. De este modo, se repite la formulación ya recogida en la LOMCE, a excepción del término "ingeniería" que la identifica ahora como competencia STEM.

Centrándonos en la M de STEM, la competencia matemática queda definida internamente como aquella que "permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos" (BON, 2022b, p. 27), muy acorde en forma y concepto a la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra- y extra-matemáticos introducida por Niss (2003). Dicha competencia queda a su vez desarrollada en cada etapa educativa en cinco descriptores operativos, de los cuales únicamente dos aluden explícitamente al quehacer matemático, STEM1 y STEM4, recogidos en sendas tablas 2.1 y 2.2.

Primaria	Utiliza, de manera guiada, algunos métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea algunas estrategias para resolver problemas reflexionando sobre las soluciones obtenidas.
Secundaria	Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
Bachiller	Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones propias de la modalidad elegida y emplea estrategias variadas para la resolución de problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.

Tabla 2.1. Descriptor operativo STEM1 en las etapas de Primaria, Secundaria y Bachiller.

Como puede observarse, STEM1 alude en todos los casos al razonamiento matemático para la resolución de problemas, sin matización relevante entre formulaciones.

Primaria	Interpreta y transmite los elementos más relevantes de algunos métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y veraz, utilizando la terminología científica apropiada, en diferentes formatos (dibujos, diagramas, gráficos, símbolos...) y aprovechando de forma crítica, ética y responsable la cultura digital para compartir y construir nuevos conocimientos.

Secundaria	Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
Bachiller	Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos) y aprovechando la cultura digital con ética y responsabilidad y valorando de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida para compartir y construir nuevos conocimientos.

Tabla 2.2. Descriptor operativo STEM4 en las etapas de Primaria, Secundaria y Bachiller.

De forma análoga, STEM4 centra su atención en la interpretación y comunicación, de las matemáticas entre otros ámbitos. En este caso sí que parece existir una evolución entre etapas, con una tendencia hacia la rigurosidad matemática, que guarda cierto parecido con la transición entre niveles propuesta por Van Hiele y la importancia que en ella cobra el lenguaje (Burger y Shaughnessy, 1986), salvando la distancia de ser esta una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Esta conclusión se desprende fundamentalmente de la transición de una transmisión “veraz” de “algunos métodos y resultados” en Primaria, a “precisa” para “razonamientos” y “demostraciones”, dotada además de un “lenguaje matemático-formal” en Secundaria. Sin embargo, si tal era la intención, esta se desdibuja en el descriptor de Bachiller, desapareciendo toda mención explícita a las matemáticas.

Desde una perspectiva longitudinal, puede observarse una clara coherencia y continuidad entre etapas tanto en lo que a competencia como descriptores operativos matemáticos se refiere, aunque esta quede en ocasiones obscurecida por reformulaciones innecesarias (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). Lejos de tratarse de un caso aislado, constituye un problema endémico que se extiende a competencias específicas y criterios de evaluación.

2.2. Competencias específicas de matemáticas

En las tres etapas educativas abarcadas, las competencias específicas de matemáticas quedan agrupadas en torno a cinco ejes fundamentales o bloques. Los cuatro primeros se corresponden con una ligera reorganización de los estándares de procesos definidos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000): resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, representación y comunicación. El quinto, por su parte, hace alusión a las destrezas socioafectivas, dimensión no contemplada explícitamente en ninguna de las dos obras de referencia en las cuales se fundamenta el currículo de matemáticas (Comité Español de Matemáticas [CEMAT], 2021; NTCM, 2000), pero crítica en su proceso de enseñanza y aprendizaje (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020).

Aludiendo en primer lugar al eje de resolución de problemas, cabe mencionar que, lejos de una visión exclusivamente instrumental, el currículo concibe los problemas matemáticos y su resolución como un fin en sí mismo, como “catalizadores de nuevo conocimiento, ya que las reflexiones que se realizan durante su resolución ayudan a la construcción de conceptos y al establecimiento de conexiones entre ellos” (BON, 2022b). Esto queda perfectamente alineado con la reivindicación que venía trayendo la Comisión Española de Matemática acerca de que “los nuevos currículos tienen que favorecer la resolución de problemas no solo como objetivo del aprendizaje de las matemáticas sino como metodología fundamental para el aprendizaje de las matemáticas" (2021). Dicho eje queda plasmado en todas las etapas e itinerarios mediante dos competencias específicas, las cuales quedan recogidas en las tablas 2.3 y 2.4.

Primaria	Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias, para analizar la información más relevante.
Secundaria	Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
Bachiller	Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.

Tabla 2.3. Competencia específica matemática 1 en Primaria, Secundaria y Bachiller.

Primaria	Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.
Secundaria	Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.
Bachiller	Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.

Tabla 2.4. Competencia específica matemática 2 en Primaria, Secundaria y Bachiller.

Como puede observarse, ambas hacen referencia en todos los casos a las fases o pasos de resolución de problemas clásicamente planteados por Polya y Guzmán entre otros, reservando fundamentalmente la segunda competencia para la revisión del proceso, salvo en el caso de Primaria que la repartición de pasos está más equilibrada. Finalmente, y aunque no suponga mayor impedimento, vuelven a apreciarse ciertas reformulaciones carentes de sentido, ¿o es que acaso es posible modelizar y resolver un problema en Bachiller sin antes interpretarlo?

Procediendo con el eje de razonamiento y prueba, este vuelve a subdividirse en dos competencias específicas. La primera de ellas, recogida en la tabla 2.5, incide en la creatividad matemática, en la capacidad de apreciar de manera autónoma su presencia en nuestro entorno. Respecto de la misma, es digno de mención que la nueva asignatura de Matemáticas Generales vinculada al itinerario de Bachiller General relaja las exigencias para con esta competencia específica. Es el único caso, tanto en Secundaria como Bachiller, de adaptación de una competencia específica a la modalidad de asignatura considerada. La segunda competencia, común a las tres etapas y recogida en la tabla 2.6, supone la primera introducción en el currículo de matemáticas del pensamiento computacional.

Primaria	Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.
Secundaria	Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.
Bachiller	Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
Bachiller General	Generar preguntas de tipo matemático aplicando saberes y estrategias conocidas para dar respuesta a situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Tabla 2.5. Competencia específica matemática 3 en Primaria, Secundaria y Bachiller.

Primaria	Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana.
Secundaria	Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
Bachiller	Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia.

Tabla 2.6. Competencia específica matemática 4 en Primaria, Secundaria y Bachiller.

En lo que respecta al eje de conexiones, este engloba el establecimiento tanto de aquellas intra-matemáticas como de las interdisciplinares, que quedan recogidas, a excepción de la etapa de Primaria, en sendas competencias específicas (Tablas 2.7 y 2.8). Apreciamos aquí una notoria falta de coherencia y continuidad entre etapas al subdividir, a partir de Primaria, una misma competencia específica sin introducir ningún aspecto adicional.

Primaria	Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos.
Secundaria	Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
Bachiller	Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

Tabla 2.7. Competencia específica matemática 5 en Primaria, Secundaria y Bachiller.

Secundaria	Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.
Bachiller	Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

Tabla 2.8. Competencia específica matemática 6 en las etapas de Secundaria y Bachiller.

En la línea del eje previo, en el eje común de comunicación y representación vuelve a apreciarse una escisión competencial de Primaria a Secundaria, pasando de integrar la comunicación y representación una única competencia específica a dos. A este respecto, cabe mencionar que cada término es tratado como un estándar de proceso diferenciado por la NTCM (2000), confiriéndoles gran relevancia individual, por lo que puede que la opción más correcta en este caso fuera extender la división a Primaria.

Primaria	Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.
Secundaria	Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.
Bachiller	Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

Tabla 2.9. Competencia específica matemática 6 en la etapa de Primaria, y 7 en las de Secundaria y Bachiller.

Secundaria	Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.
Bachiller	Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

Tabla 2.10. Competencia específica matemática 9 en las etapas de Secundaria y Bachiller.

Concluyendo con el eje socioafectivo, este sigue la misma estructura presente en el eje de conexiones, distinguiendo ahora entre las destrezas intrapersonales, o simplemente personales (Tabla 2.11), e interpersonales o sociales (Tabla 2.12). Bachiller constituye la excepción al unificar toda destreza socioafectiva en una única competencia específica.

Primaria	Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, aceptando el error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose a las situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia y disfrutar en el aprendizaje de las matemáticas.
Secundaria	Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
Bachiller	Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de las demás personas y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 2.11. Competencia específica matemática 7 en Primaria, y 9 en las de Secundaria y Bachiller.

Primaria	Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de las demás personas y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.
Secundaria	Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de las demás personas, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.

Tabla 2.12. Competencia específica matemática 8 en la etapa de Primaria, y 10 en Secundaria.

Como ha podido observarse, y salvo en los casos puntualizados, la continuidad entre etapas en lo que a competencias específicas se refiere está ampliamente garantizada. A este respecto, no solo se articulan todas ellas entorno a los mismos ejes, sino que comparten la mayor parte de sus enunciados; e incluso cuando no es así, no siempre puede garantizarse que las matizaciones introducidas no resulten superfluas.

Respecto de sus significados, se hace ahora patente que su objetivo fundamental es el de orientar sobre los procesos y principios metodológicos que deben dirigir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, independientemente del saber matemático concreto planteado. Así, y sin un esfuerzo excesivo de exégesis, es fácil convencerse de que los problemas geométricos trasladables al aula existen (competencias específicas 1 y 2); que la identificación de patrones geométricos en la vida cotidiana es un caso evidente de matematización del entorno (competencia específica 3); que la resolución de triángulos por descomposición sucesiva en triángulos rectángulos puede entenderse como una forma de pensamiento computacional (competencia específica 4); que la geometría está íntimamente ligada al álgebra y cálculo por medio de la trigonometría (competencia específica 5); que la resolución de un tiro parabólico sería inconcebible sin la trigonometría (competencia específica 6); y que la representación, comunicación, gestión de las emociones y adquisición de destrezas sociales pueden desarrollarse bajo cualquier pretexto (competencias específicas 7 a 10). Es por ello que, hasta el momento, no se ha hecho mención específica al contenido que nos ocupa, la resolución de triángulos, pues este se encuentra involucrado de incontables formas en la adquisición de todas las competencias específicas de matemáticas recogidas en la legislación vigente.

2.3. Criterios de evaluación de las competencias específicas de matemáticas

En todas las etapas se definen entre dos y tres criterios de evaluación por cada competencia específica, asignatura y curso, exceptuando Primaria en que se definen por ciclos, sumando todo ello más de 150 criterios de evaluación. En consecuencia, y tratando de mantener la concisión en el estudio, no quedarán aquí enunciados, sino que nos limitaremos a plasmar sus rasgos más reseñables.

El primer aspecto a destacar es que, pese a estar ahora vinculados a las competencias específicas y no a los contenidos o saberes matemáticos, estos criterios de evaluación aparecían ya parcialmente en la derogada ley, si bien no tan detallados ni persiguiendo una graduación entre cursos y etapas. Nos estamos refiriendo a los criterios de evaluación del antiguo bloque transversal dedicado a procesos, métodos y actitudes matemáticas. Así, por ejemplo, comparando en la tabla 2.13 los criterios de evaluación de 1º de ESO en la LOMLOE (BON, 2022b, pp. 186-192) y en el primer bloque de la LOMCE (BON, 2014, Anexo I p. 44), observamos inmediatamente dicha correspondencia.

<table>
<tr><th>LOMLOE</th><th>LOMCE (Bloque 1)</th></tr>
<tr><td>1.1. Organizar los datos de un problema matemático, buscando información sobre aquellas partes que no entiende.</td><td rowspan="3">1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.</td></tr>
<tr><td>1.2. Utilizar herramientas y estrategias dadas que contribuyan a la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>1.3. Calcular las soluciones de un problema utilizando las fórmulas y aplicaciones dadas.</td></tr>
</table>

2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.	
2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado interpretando su alcance y repercusión de forma guiada desde una perspectiva (de género o de sostenibilidad o consumo responsable, etc...).	**1.7.** Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.
3.1. Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada.	**1.6.** Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
3.2. Realizar de forma guiada variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna.	**1.4.** Profundizar en problemas resueltos o procedentes de la historia de las matemáticas a través de la búsqueda de documentación o planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
3.3. Emplear de forma guiada herramientas tecnológicas dadas en la comprobación de problemas.	**1.11.** Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
4.1. Observar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional de forma guiada.	**1.3.** Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
4.2. Observar situaciones que se pueden modelizar, y resolver problemas de forma eficaz utilizando los algoritmos propuestos.	
5.1. Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas de forma guiada.	
5.2. Reconocer de forma guiada las conexiones entre diferentes procesos matemáticos sencillos o cotidianos.	

6.1. Reconocer de forma guiada situaciones formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, con conexiones con el mundo real.	
6.2. Identificar de forma guiada conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas sencillos y cotidianos.	
6.3. Reconocer de forma guiada la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad.	
7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando herramientas digitales y no digitales, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. **7.2.** Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	**1.5.** Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. **1.11.** Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
8.1. Comunicar información utilizando un lenguaje matemático sencillo, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	**1.1.** Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso de resolución de un problema.
8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	
9.1. Reconocer las emociones propias y generar expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	**1.8.** Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	**1.9.** Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. **1.10.** Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando	

diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa.	
10.2. Aceptar el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al grupo.	

Tabla 2.13. Correspondencia entre los criterios de evaluación de la LOMLOE Y LOMCE para 1º de ESO.

La ausencia de una vinculación entre LOMCE y LOMLOE para ciertos criterios de evaluación puede ser igualmente explicada. Así, los nuevos criterios 10.1 y 10.2 corresponden a la competencia específica social, plano no contemplado en la LOMCE, que adolecía de una visión exclusivamente intrapersonal en lo afectivo. Por su parte, el criterio 4.2 alude al pensamiento computacional, noción de muy reciente introducción y todavía en construcción en lo que a didáctica de las matemáticas se refiere (Weintrop et al., 2016), por lo que su ausencia en la LOMCE es más que razonable. Resta únicamente reflexionar acerca de la ausencia de criterios de evaluación relativos al eje de conexiones en la LOMCE (al uso del 5.1 a 6.3), lo cual no resulta baladí. En este sentido, la mejor justificación que ha podido encontrarse se fundamenta en la comparación que elabora Alsina (2019, p. 25) acerca de cuáles son consideradas como competencias matemáticas primordiales por distintos organismos de referencia. A partir de dicho estudio, uno concluye que las conexiones intra- e inter-matemáticas, pese a ser tan antiguas como la ciencia misma, no son generalmente erguidas como competencias matemáticas. La única salvedad se haya en la NTCM, aunque esta no llegue a emplear propiamente el término de competencia. De hecho, la principal fuente restante del currículo la deja también al margen (CEMAT, 2021). Es por ello de esperar que ahora que las directrices de la NTCM han tenido una influencia sustancial en el currículo se hayan explicitado las competencias en conexiones matemáticas.

Teniendo en cuenta las similitudes encontradas, podría cuestionarse la motivación de desvincularlas de los aspectos conceptuales como era costumbre; ante ello, recordar que una de las principales críticas al bloque transversal en la LOMCE era que este solía “verse mermado a causa de la preponderancia de los bloques de contenidos clásicos (geometría, álgebra, cálculo, estadística)” (CEMAT, 2021, p. 4).

Finalmente, en lo que a continuidad a lo largo de la etapa y entre etapas se refiere, cabe decir que los más de 150 criterios de evaluación no son realmente tales pues, aunque se desglosen por cursos, sus enunciados no varían de manera significativa en la práctica totalidad de los casos. Esto favorece el análisis longitudinal, pero, como venimos ilustrando en secciones previas, obscurece la comprensión del currículo. En este sentido, recomendamos la lectura de Beltrán-Pellicer y Alsina, los cuales analizan en profundidad lo innecesario de esta reformulación continua, ciclo a ciclo, argumentando en uno de los ejemplos expuestos que “Lo que diferencia unos ciclos de otros no es la capacidad de comprender, es el saber involucrado. Son los saberes que se articulan en las situaciones de aprendizaje los que han de concretar la movilización de las competencias” (2022, p. 49).

Capítulo 3
La resolución de triángulos en el currículo vigente

En este capítulo abordaremos la forma en que se estructuran los contenidos matemáticos en el nuevo currículo, globalmente en un principio para poder centrarnos a continuación en el análisis específico de la resolución de triángulos.

3.1. Sentidos en el currículo vigente

Como ha sido descrito en el primer capítulo, la LOMLOE (BON, 2022a; 2022b; 2022c) define como saberes básicos los antiguos contenido de las diversas materias. En el caso concreto de las matemáticas, estos se estructuran en bloques que reciben el nombre de sentidos, noción no definida entre sus páginas pero que ha sido extraída de la guía para la elaboración curricular sobre la cual se asienta (CEMAT, 2021, p. 13): "Entendemos el sentido matemático como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades". Como puede apreciarse, hablamos, ahora sí, de contenidos matemáticos al uso.

Dichos sentidos son cinco, coincidentes prácticamente con los cinco estándares de contenido definidos por la CNMT (2002), aunque con ciertas matizaciones respecto a su significado. En orden de aparición en el currículo, estos son el sentido numérico, de la medida, espacial, algebraico y estocástico. A ellos se añade un sexto sentido, el socioafectivo, del cual no volveremos a hacer mención en lo que sigue por un motivo fundamental: no es sino la reiteración de las competencias específicas socioafectivas ya analizadas en profundidad, ahora bajo la catalogación de saber básico. Nos encontramos así ante una de las principales incoherencias de la nueva legislación, pues si hasta este instante se había enfatizado en que las competencias matemáticas específicas eran aspectos "que señalan que en matemáticas no sólo es importante abordar un contenido, sino que existen formas de razonamiento y habilidades que son comunes a todos ellos y que determinan la forma en que las matemáticas se hacen y se aprenden" (CEMAT, 2021, p. 4), ¿cómo puede ser que algo sea simultáneamente competencia y contenido? Entendemos, en cualquier caso, que la finalidad última es enfatizar en la importancia de la dimensión socioafectiva en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pese a que hacer hincapié por medio de la duplicidad y redundancia sea una estrategia cuestionable.

Respecto de los sentidos matemáticos restantes, merece la pena exponer brevemente qué características principales los definen, así como en qué grandes ideas matemáticas se descomponen a su vez los contenidos últimos enunciados en el currículo (BON, 2022a; CEMAT, 2021):

- El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones. Con ello, las grandes ideas que lo definen son las de conteo, cantidad, sentido de las operaciones, relaciones, y razonamiento proporcional. A estas se añade la educación financiera, ausente en cualquiera de los dos textos de referencia principales (CEMAT, 2021; CNMT, 2002).

- El sentido de la medida se caracteriza por la capacidad de estimar y contabilizar magnitudes, entendiendo y escogiendo las unidades adecuadas. Con ello, las grandes ideas que lo definen son las de magnitud, medición, estimación y relaciones, y cambio. Este sentido matemático, y en particular en lo referente a esta última gran idea, es en el que mayor disonancia se aprecia entre CEMAT (2021) y CNMT (2002). Así, mientras aquel sostiene que el cambio de una magnitud corresponde al sentido de la medida, y en consecuencia ha de hacerlo también la noción de derivación que del mismo se desprende, este último concibe como sentido de la medida exclusivamente aquello que se circunscriba a la realización de una medida, y no nociones derivadas. Sobre la validez de una y otra corriente de pensamiento, excede los conocimientos y capacidades de uno mismo en materia de didáctica de las matemáticas.
- El sentido espacial o geométrico se caracteriza por la capacidad para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Con ello, las grandes ideas que lo definen son las figuras geométricas de dos y tres dimensiones, la localización y sistemas de representación, los movimientos y transformaciones, y la visualización, razonamiento y modelización geométrica. Este sentido bebe tanto en currículo como en guía del CEMAT (2021) de las directrices marcadas por CNMT (2002), siendo aquel de los cinco que más unívocamente queda definido.
- El sentido algebraico se caracteriza por ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas. Con ello, las grandes ideas que lo definen son las de patrones, modelo matemático, variable, igualdad y desigualdad, relaciones y funciones, y pensamiento computacional. Esta última es añadida, distanciándose de la guía del CEMAT (2021), de manera improvisada y sin justificación alguna más allá de “razones organizativas” (BON, 2022b, p. 185). Pese a ello, y salvando que nos encontramos de nuevo ante una leve duplicidad de competencias específicas y saberes, se trata del sentido más apropiado en que enmarcarlo (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022)
- El sentido estocástico se caracteriza por la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones. Con ello, las grandes ideas que lo definen son las de organización y análisis de datos, incertidumbre, inferencia, además de distribución en la etapa de Bachiller.

Descrita someramente la estructuración y tipología de contenidos matemáticos, retomamos ahora sí la guía de elaboración del TFM para presentar a continuación los saberes básicos concretos de los currículos vigentes (BON, 2022a; 2022b; 2022c) y concernientes a la resolución de triángulos. Con el objetivo último de poder analizar su evolución y continuidad por curso y etapa, se han propuesto una serie de descriptores de saberes básicos (SB) a partir de las grandes ideas con mayor presencia en la matemática escogida:

SB1. Geometría en el plano	**SB3.** Localización y sistemas de representación	**SB5.** Medida	**SB7.** Razonamiento proporcional
SB2. Geometría en el espacio	**SB4.** Trigonometría	**SB6.** TICs	

Como puede observarse, la mayor parte de descriptores definidos, SB1 a SB4, provienen de las grandes ideas del sentido espacial, si bien ha decidido dividirse la gran idea sobre figuras geométricas en dos con la finalidad de poder identificar los momentos de construcción de la geometría en el espacio a partir de la del plano. Por su parte, las grandes ideas concernientes a semejanza, simetría, patrones y proporcionalidad quedan englobadas en un único descriptor, SB7, del mismo modo que el sentido de la medida queda integrado en un único descriptor homónimo (SB5). Finalmente, y dada la importancia que concede el nuevo currículo de matemáticas a las herramientas digitales, se ha incluido un descriptor específico para ello, SB6.

A continuación se muestra, mediante tablas, la relación identificada entre descriptores y saberes básicos en Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachiller. Nótese que, cuando un saber básico quede contemplado en varios descriptores, únicamente se enunciará en la primera aparición, figurando su identificador en los casos restantes.

3.2. Saberes básicos en Educación Primaria

Comenzando por Educación Primaria, nos limitaremos a analizar el último ciclo previo a la Educación Secundaria Obligatoria.

SB	Tercer ciclo de Educación Primaria
1	**C1.1** Figuras geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos. **C1.2** Técnicas de construcción de figuras geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas. **C1.3** Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de figuras geométricas. **C1.4** Propiedades de figuras geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.). **C4.1** Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana. **C4.2** Representaciones, con material manipulativo y/o gráficos de modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos. **C4.4** Las ideas y las relaciones geométricas en el arte, las ciencias y la vida cotidiana.
2	
3	**C2.1** Localización y desplazamientos en planos y mapas a partir de puntos de referencia (incluidos los puntos cardinales), direcciones y cálculo de distancias (escalas): descripción e interpretación con el vocabulario adecuado en soportes físicos y virtuales. **C2.2** Descripción de posiciones y movimientos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano. **C3.1** Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.

4	
5	**C4.3** Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas, utilizando instrumentos de dibujo (compás y transportador de ángulos) y programas de geometría dinámica. **B1.2** Unidades convencionales del Sistema Métrico Decimal (longitud, masa, capacidad, volumen y superficie), de tiempo y grado (ángulos) contextos de la vida cotidiana: selección y uso de las unidades adecuadas. **B2.1** Instrumentos (analógicos o digitales) y unidades adecuadas para medir longitudes, objetos, ángulos y tiempos: selección y uso. **B3.1** Estrategias de comparación y ordenación de medidas de la misma magnitud, aplicando las equivalencias entre unidades (sistema métrico decimal) en problemas de la vida cotidiana. **B3.2** Relación entre el sistema métrico decimal y el sistema de numeración decimal. **B3.3** Estimación de medidas de ángulos y superficies por comparación. **B3.4** Evaluación de resultados de mediciones y estimaciones o cálculos de medidas, razonando si son o no posibles.
6	**C1.2**, **C4.3**
7	**C3.2** Semejanza en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras semejantes, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado. **D1.1** Estrategias de identificación, representación (verbal o mediante tablas, gráficos y notaciones inventadas) y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. **D1.2** Creación de patrones recurrentes a partir de regularidades o de otros patrones utilizando números, figuras o imágenes. **A6.1** Situaciones proporcionales y no proporcionales en problemas de la vida cotidiana: identificación como comparación multiplicativa entre magnitudes. **A6.2** Resolución de problemas de proporcionalidad, porcentajes y escalas de la vida cotidiana, mediante la igualdad entre razones, la reducción a la unidad o el uso de coeficientes de proporcionalidad.

Tabla 3.1. Descriptores y saberes básicos en tercer ciclo de Educación Primaria.

Como puede observarse, el ciclo se centra en la geometría plana (SB1), primando lo contextualizado, lo presente en la vida cotidiana, a lo que hay que aproximarse desde un enfoque fundamentalmente enactivo, aunque con menciones a lo icónico. Esta misma conclusión se desprende de la abundancia de saberes básicos referidos a la medición (SB5). Destaca además la introducción del sistema de coordenadas cartesiano, y la escasez de menciones a las herramientas tecnológicas (SB6). Como era de esperar, la trigonometría, que requiere de niveles de algebrización muy alejados de la etapa, no es mencionada.

3.3. Saberes básicos en ESO

Por cuestiones de espacio, dividiremos el estudio de ESO en dos tablas, agrupando por un lado los tres primeros cursos, comunes independientemente del itinerario escogido, y las dos asignaturas de 4º entre las que escoger por otro.

SB	**Educación Secundaria Obligatoria**		
	1º	**2º**	**3º**
1	**C1.1** Formas geométricas planas: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características.	**C1.1** Formas geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. **C1.3** Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...).	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">C1.3 Construcción de figuras geométricas planas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...).
C1.4 Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano. Paralelismo y perpendicularidad.</td><td colspan="2">B2.2 Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas.</td></tr>
<tr><td>B2.3 Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">C1.1 , C1.3, B2.2</td></tr>
<tr><td>C1.4 Elementos básicos de la geometría del espacio. Relaciones y propiedades de figuras en el espacio.
B2.3</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">C2.1 Relaciones espaciales en el plano: localización y descripción mediante coordenadas geométricas.</td><td>C2.1 Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
C3.2 Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td colspan="3">B3.1 Formulación guiada de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B1.1 Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos.
B1.2 Utilización de las unidades y operaciones dadas en problemas que impliquen medida.
B2.1 Longitudes y áreas en figuras planas: aplicación.
B2.3 Representaciones de objetos geométricos bidimensionales con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.</td><td colspan="2">B1.1 Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos.
B1.2 Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.</td></tr>
<tr><td>B2.1 Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: interpretación y aplicación.
B3.2 Toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.</td><td>B2.1 Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.
B3.1 Formulación de conjeturas sobre medidas.
B3.2 Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>B3.2 Diferentes grados de precisión en situaciones de medida.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>C1.3</td><td>C1.3</td><td>C1.3, C3.2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td rowspan="2">C3.1 Simetrías en figuras planas.
C4.1 Modelización geométrica para representar relaciones numéricas en la resolución de problemas.</td><td>C1.2 Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas: identificación y aplicación.
C4.1 Modelización geométrica para representar y explicar relaciones numéricas en la resolución de problemas.</td><td>C1.2 Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales: identificación y aplicación.
C4.1 Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">C4.2 Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).
D5.1 Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">D5.3 Deducción de la información relevante de una función mediante su representación gráfica.
A5.1 Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.</td><td>D5.3 Deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.</td></tr>
</table>

Tabla 3.2. Descriptores y saberes básicos en 1º, 2º y 3º de ESO.

<table>
<tr><th rowspan="2">SB</th><th colspan="2">Educación Secundaria Obligatoria</th></tr>
<tr><th>4º A</th><th>4º B</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>3</td><td>B1.1 La pendiente y su relación con un ángulo en situaciones sencillas: deducción y aplicación.</td><td>C2.1 Figuras y objetos geométricos de dos dimensiones: representación y análisis de sus propiedades utilizando la geometría analítica.
C2.2 Expresiones algebraicas de una recta: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>B1.1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo y sus relaciones: aplicación a la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">C1.1 Propiedades geométricas de objetos matemáticos y de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica.
C3.1 Transformaciones elementales en la vida cotidiana: investigación con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada...</td></tr>
</table>

	C4.2 Modelización de elementos geométricos con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada... **C4.3** Elaboración y comprobación de conjeturas sobre propiedades geométricas mediante programas de geometría dinámica u otras herramientas.	
7	**C4.1** Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas. **A5.1** Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas.	
	B1.1	**C2.1, C2.2, B1.1**

Tabla 3.3. Descriptores y saberes básicos en 4º A y 4º B de ESO.

Como se desprende de la Tabla 3.2, la continuidad entre los cursos de 1º y 3º de ESO ha sido una máxima en la elaboración del currículo, compartiendo todos ellos un gran número de saberes. Por su parte, cuando el enunciado no se repite literalmente, podemos apreciar matizaciones orientadas fundamentalmente entorno a dos ejes: construir la geometría en el espacio a partir de aquella en el plano y desarrollar un enfoque cada vez más simbólico a partir de lo icónico. Muestras del primero son la aparición de SB2 a partir de 2º, y el enfoque espacial tridimensional de SB3 y SB7. Ejemplos del segundo pueden apreciarse en SB7 con la evolución de C4.1 y D5.3. Ambas evoluciones son así claras pero graduales, curso a curso, de modo que el aprendizaje se produzca de forma progresiva conforme se revisiten los saberes, conforme se recorra la espiral curricular (Bruner, 2001).

Si incluimos ahora los resultados de la Tabla 3.3, el primer rasgo perceptible es que en este curso no se introducen nuevos saberes vinculados a los descriptores SB1 y SB2, sino que centra su atención en trasladarlos a herramientas digitales (SB6), descriptor hasta el momento apenas contemplado. Así, la espiralidad curricular se enfoca ahora en el desarrollo de lo procedimental y no exclusivamente en lo conceptual como ocurría en la LOMCE, mucho más fiel al significado del término. Ahora bien, del mismo modo que irrumpen las herramientas digitales, puede apreciarse la desaparición de la medida con el progresivo proceso de algebrización y abstracción.

Centrándonos exclusivamente en la opción B, el otro gran hito del curso es la introducción de la trigonometría (SB4) y profundización en la geometría analítica (SB3), aspecto que venía cobrando un peso cada vez mayor en los cursos previos.

3.4. Saberes básicos en Bachiller

Contemplando la última etapa, vincularemos descriptores y saberes básicos correspondientes a Bachiller. A este respecto, pese a existir actualmente tres modalidades con sus correspondientes itinerarios, únicamente el Bachiller en Ciencias y Tecnología contempla aspectos métricos y geométricos vinculados a la resolución de triángulos, por lo que se limitara el estudio al mismo. Dado que ambos cursos comparten redacción en gran número de saberes básicos, con la salvedad de que 1º se limita a la geometría plana y 2º la extiende al espacio, estos se enunciarán una única vez, omitiendo la alusión concreta a plano o espacio (pero entendiendo que esta existe en el currículo). Del mismo modo, el descriptor SBi se corresponderá con SB1 en caso de 1º y SB2 en caso de 2º.

<table>
<tr><th rowspan="2">SB</th><th colspan="2">Bachiller de Ciencias y Tecnología</th></tr>
<tr><th>1º</th><th>2º</th></tr>
<tr><td>i</td><td colspan="2">C1.1 Objetos geométricos: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
C2.2 Expresiones algebraicas de objetos geométricos: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.
C3.3 Conjeturas geométricas: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">C1.2 Resolución de problemas relativos a objetos geométricos representados con coordenadas cartesianas.
C3.4 Modelización de la posición y el movimiento de un objeto mediante vectores.
B1.1 Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>B1.1 Cálculo de longitudes y medidas angulares: uso de la trigonometría.</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">C2.1 Relaciones de objetos geométricos: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales.
C3.1 Representación de objetos geométricos mediante herramientas digitales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td colspan="2">C3.2 Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos...) en la resolución de problemas. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.</td></tr>
<tr><td>D4.1 Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómicas, exponenciales, irracionales, racionales sencillas, logarítmicas, trigonométricas y a trozos: comprensión y comparación.
A1.1 Adición y producto escalar de vectores: propiedades y representaciones</td><td>D4.2 Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
A.1.1 Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.</td></tr>
</table>

Tabla 3.4. Descriptores y saberes básicos en 1º y 2º de Bachiller de Ciencias y Tecnología.

El principal rasgo reseñable de la Tabla 3.4 ya ha sido introducido al argumentar su elaboración: 1º de Bachiller se circunscribe a la geometría plana mientras que 2º centra su atención en la geometría en el espacio.

Para ambos cursos, se hace patente que la aproximación a la geometría persigue alcanzar las máximas cotas tanto de algebrización como de niveles de Van Hiele. Así, por ejemplo, el saber A1.1 del descriptor SB7 hace referencia a las propiedades de operaciones con vectores y matrices, lo cual, unido al saber básico A2.1 no incluido relativo a la estructura de conjuntos de estos elementos, no es sino la forma más usual de precipitar la noción de espacio vectorial (sexto nivel de algebrización). Del mismo modo, el saber C3.3 del descriptor SBi alude a demostración de teoremas, propia del tercer nivel, o nivel de deducción formal, de Van Hiele.

En continuidad con el caso de 4º de ESO, vuelve a comprobarse la desaparición del sentido de la medida, en los términos en que es concebido por la CNMT (2002), mientras el uso de herramientas digitales sigue teniendo gran peso.

Finalmente, y aunque no tenga mayor relevancia en lo que a resolución de triángulos se refiere, resulta llamativo que el saber básico A2.1 más arriba mencionado quede enmarcado en el currículo dentro del sentido numérico y no del algebraico.

Capítulo 4

La resolución de triángulos en los libros de texto y su relación con el currículo vigente

En el trabajo diario de muchos docentes, el libro de texto continúa ejerciendo un control considerable en el diseño y desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, independientemente del currículo vigente (Alsina, 2010). Dado que la resolución de triángulos no queda exenta de dicha práctica, consideramos apropiado dedicar este capítulo al estudio de los libros de texto. Este será llevado a cabo por medio del análisis y clasificación de las actividades relativas a la resolución de triángulos presentes en los libros de texto empleados en el centro de realización del Practicum II. Los cursos contemplados serán los de 3º y 4º de ESO, y 1º y 2º de Bachiller de Ciencias, y las categorías de actividades establecidas vienen definidas a continuación:

- Ejercicio: resulta inmediatamente accesible para el sujeto y su resolución requiere de la aplicación de una secuencia de pasos o algoritmo ya conocido.
- Problema: requiere de la búsqueda consciente de una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata (Polya, 1962).
- Cuestión: no persigue la obtención de un resultado puntual y concreto, sino el análisis crítico empleando y desde una perspectiva matemática.
- Situación: permite introducir o dotar de un nuevo sentido a un conocimiento matemático sin ser este explicitado durante la exposición de la actividad. En cambio, el conocimiento será alcanzado por el alumno como la estrategia óptima a partir de una estrategia base, condicionada por la gestión que el docente haga de las variables didácticas de la actividad.

Además de la clasificación, cada tipología de actividad ejemplarizada será vinculada a los descriptores definidos en el estudio longitudinal del currículo a los que contribuya.

4.1. Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 3º de ESO

De los dos libros de texto disponibles correspondientes a 3º de ESO, únicamente el de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas contempla cuerpos geométricos, por lo que será en el que centraremos nuestra atención. Ello se debe a que, aunque ninguna de las dos asignaturas tiene ya vigencia en el currículo, las formas geométricas tridimensionales tienen un peso sustancial entre los saberes básicos del curso, no siendo representativo tomar como referencia un libro de texto que las omita. Esta consideración será de especial relevancia cuando analicemos la coherencia entre currículo y libros de texto en el capítulo 5.

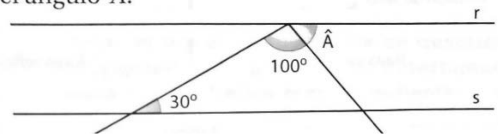
El libro de texto empleado (Pla et al., 2015) trata la resolución de triángulos de manera directa o indirecta en las unidades didácticas relativas a las rectas y ángulos (UD9), figuras planas (UD10), movimientos en el plano (UD11), y cuerpos geométricos (UD12).

En orden de mención, UD9 se caracteriza por no hacer mención alguna a los triángulos en su exposición de conceptos, destacando el caso de ángulos y de teorema de Tales. En este último caso, por ejemplo, se enuncia y representa gráficamente el teorema, con ilustraciones que involucran triángulos, pero sin introducir ni hacer mención a que estos se encuentren en posición de Tales, a que sean semejantes entre sí, o a que sean triángulos siquiera. Por el contrario, la mayor parte de sus actividades se enmarcan en la resolución de triángulos, no solo como ejemplificación de lo expuesto, sino tratando de precipitar contenidos que serán explicitados en los temas siguientes o requiriendo teoremas de cursos previos.

Frente a esta presencia parcial restringida a las actividades, UD10 expone la mayor parte de contenidos del curso referidos a triángulos, tratando el polígono como tal y sus propiedades fundamentales, rectas y puntos notables, descomposición poligonal en triángulos, triangulación poligonal y semejanza de triángulos. Destaca en este sentido que no se enuncie ni haga mención al teorema de Pitágoras, y que teorema de Tales y semejanza de triángulos no queden explícitamente conectados.

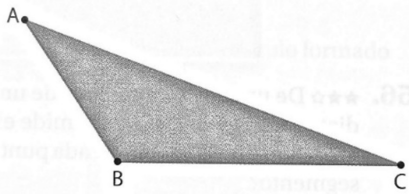
En la unidad didáctica 11, el triángulo es el polígono por excelencia empleado en la introducción y construcción de traslaciones, giros y simetrías, figurando en la misma medida en las actividades. Sin embargo, no constituye objeto central de estudio en ninguno de los casos, y su frecuente aparición se justifica fundamentalmente por tratarse del polígono con menor número de vértices, en general de transformación más sencilla.

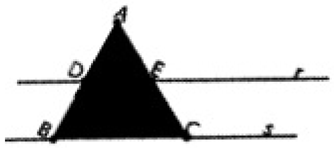
Finalmente, UD12 recurre auxiliarmente a las propiedades de los triángulos en el cálculo de áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución.

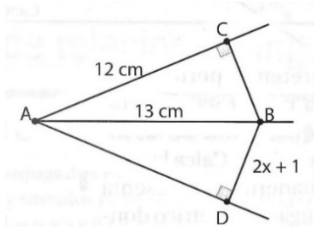
Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Ejercicios enmarcados en el teorema de Tales que requieren de las propiedades angulares de los triángulos (SB1).			
Ejemplo	★★☆ Las rectas *r* y *s* son paralelas. Calcula la amplitud del ángulo $\hat{A}$. 			

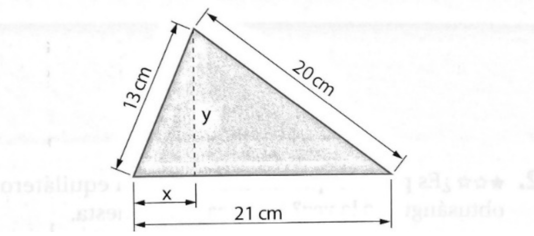
Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Experiencias de enfoque enactivo para el afianzamiento de conceptos ligados a triángulos (SB1, SB5 y SB7).			
Ejemplo	Dibuja dos triángulos isósceles que tengan un ángulo igual. Recórtalos y comprueba que pueden situarse en posición de Tales.			

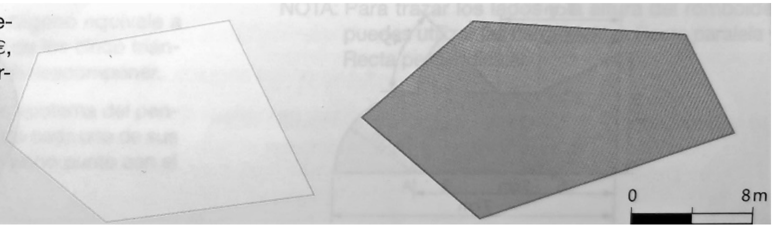
Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Ejercicios relativos a los descriptores SB1 y SB7 que enfatizan en el uso de herramientas digitales y de geometría dinámica (SB6).			
Ejemplo	Utiliza el programa GeoGebra para resolver las siguientes actividades: Construye un pentágono de 5 cm de lado y determina gráficamente su área. — Comprueba que el área del pentágono equivale a cinco veces el área de cada uno de los cinco triángulos equiláteros en que se puede descomponer. Para determinar el centro y la apotema del pentágono, traza el punto medio de cada uno de sus lados y el segmento que une dicho punto con el vértice opuesto.			

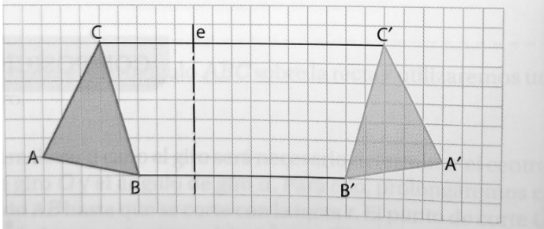
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas que introducen los puntos notables de triángulos a partir de sus rectas notables y requieren reflexionar acerca de la circunferencia como lugar geométrico (SB1, SB7).			
Ejemplo	Representa el punto en que se cortan las bisectrices del triángulo y, a continuación, representa el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dicho punto y que es tangente a sus lados. 			

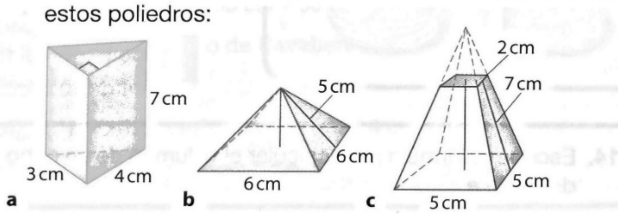
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Reflexiones que precipitan la semejanza de triángulos (no tratada en el tema en cuestión) a través del teorema de Tales, desarrollando los descriptores SB1 y SB7.			
Ejemplo	★★✩ El triángulo *ABC* es equilátero y las rectas *r* y *s* son paralelas. Clasifica el triángulo *ADE* según sus ángulos. 			

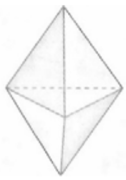
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas que requieren del teorema de Pitágoras para la resolución de triángulos pese a no contemplarse en el libro de texto (SB1 y SB7).			
Ejemplo	La semirrecta que pasa por *A* y *B* es la bisectriz del ángulo formado por los segmentos *AC* y *AD*. Determina el valor de *x*. 			

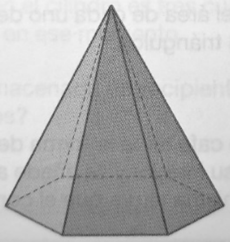
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas que requieren de la aplicación de teoremas (de Pitágoras, Tales, cateto y altura), con o sin planteamiento de sistemas de ecuaciones (SB1 y SB7).			
Ejemplo	Halla los valores de *x* e *y* en el siguiente triángulo: 			

Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas de triangulación de polígonos para el cálculo de áreas mediante medición y escalas (SB1, SB5 y SB7)			
Ejemplo	Si, por cada metro cuadrado de terreno de una urbanización, pago 498 €, ¿cuánto costará cada una de las parcelas de la derecha? 			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Reflexiones acerca de la validez de transformaciones por medio de la medición (SB1, SB3 y SB5).			
Ejemplo	★★☆ Razona por qué los triángulos *ABC* y *A'B'C'* no son simétricos respecto al eje *e*.  — ¿Dónde debería situarse el eje de simetría para que fueran simétricos?			

Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Ejercicios de cálculo de áreas y/o volúmenes de poliedros (SB1 y SB2).			
Ejemplo	Calcula el área lateral y el área total de cada uno de estos poliedros: 			

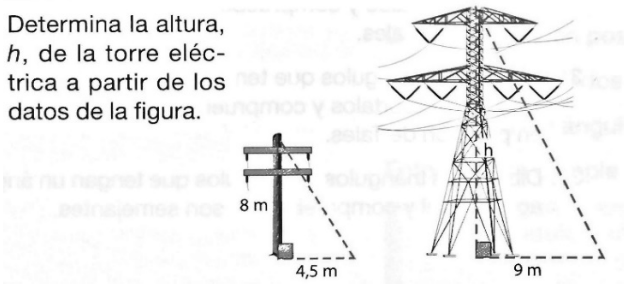
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Reflexiones acerca de las propiedades que definen sólidos platónicos (SB2 y SB7).			
Ejemplo	¿Es regular este poliedro? Justifica tu respuesta. Observa que está limitado por triángulos equiláteros e iguales entre sí. 			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☒ **Problema**	☐ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Problemas contextualizado que establecen conexiones interdisciplinares entre la física y geometría (SB2 y SB7).			
Ejemplo	★★★ Una impresora 3D imprime una pirámide hexagonal recta a una velocidad de 46 cm^3/h. La pirámide mide 8 cm de arista de la base y 15 cm de altura.  Calcula el tiempo necesario para imprimir la pirámide.			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☒ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Actividades cooperativas para el desarrollo socioafectivo enmarcadas en el estudio de polígonos y poliedros regulares, involucrando los descriptores SB1, SB2 y SB7.			
Ejemplo	★★☆ Estableced grupos de cinco y analizad cada uno un sólido platónico. Indicad sus ejes y sus planos de simetría aplicando la **técnica cooperativa** *Rompecabezas*. — Cada miembro del equipo prepara su parte del análisis del sólido platónico. — A continuación, intercambia información con los integrantes de otros equipos que han analizado el mismo sólido platónico. — Finalmente, explica a los otros miembros de su grupo la parte que ha preparado.			

A las actividades previas que podríamos considerar canónicas, añadimos a continuación un problema del libro de texto que destacamos por lo desacertado de su presencia, recalcando que se trata de un caso puramente anecdótico.

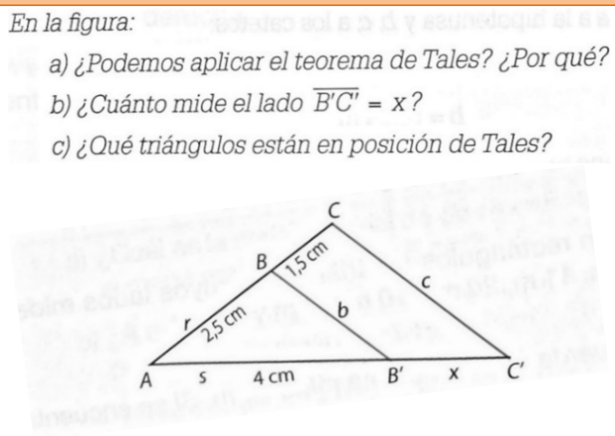
Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☒ **Problema**	☐ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Problema contextualizado concerniente a la semejanza de triángulos para aplicación directa del teorema de Tales (SB1 y SB7).			
Relevancia	El problema invita a su resolución por medio del teorema de Tales tanto por la sección de la unidad didáctica en que se encuentra como por la ilustración que la acompaña. Sin embargo, este procedimiento no es aplicable tal y como está planteado el enunciado, pues en ningún momento se afirma que las visuales desde el suelo coincidan. De hecho, la medición de los ángulos concluye que estos ni siquiera coinciden gráficamente. Se trata por tanto de un obstáculo didáctico considerable, asociado al desprecio de lo icónico, que puede llevar al estudiante a concebir erróneamente triángulos semejantes como aquellos que se parezcan lo suficiente. La única esperanza al respecto sería que los estudiantes se enfrentaran desde un enfoque concreto en vez de abstracto y midieran ambos ángulos, lo cual es plausible teniendo en cuenta el curso en que se enmarca el problema.			

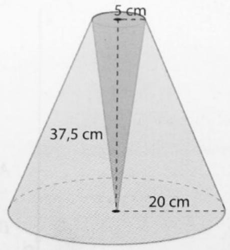
Ejemplo	 Determina la altura, h, de la torre eléctrica a partir de los datos de la figura.

4.2. Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 4º de ESO y su relación con el currículo vigente

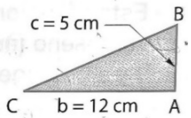
Acorde a la elección de libro de texto realizada en 3º de ESO, seguiremos centrando el estudio en la antigua asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Por un lado, porque el libro de texto orientado a las enseñanzas aplicadas introduce por primera vez los cuerpos geométricos, lo cual resulta incoherente con el currículo, según el cual deben haber sido contemplados en 3º y trasladados ahora en 4º sobre programas de geometría dinámica. Por otro lado, porque la única distinción existente entre los saberes básicos de las dos nuevas asignaturas es que una introduce la trigonometría y la restante la vinculación entre ángulo y pendiente de una recta, ambas cuales figuran exclusivamente en el libro de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

La presencia de la resolución de triángulos se reduce ahora a tres unidades didácticas (Fábregas et al., 2016): semejanza en el plano y en el espacio (UD8), trigonometría (UD9) y geometría analítica en el plano (UD10). En este caso, la matemática estudiada figura apreciablemente en todas ellas, tanto en las exposiciones teóricas como en las actividades planteadas, con profusión de ejercicios y problemas. Cabe mencionar que el teorema de Pitágoras es ahora enunciado, lo cual sucede también en el libro de texto de 2º de ESO (Fábregas et al., 2021), pero no en el de 3º, como hemos visto anteriormente.

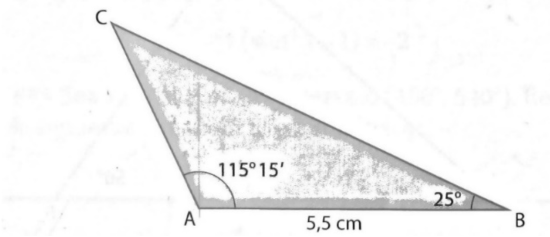
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Cuestiones para la vinculación del teorema de Tales y semejanza de triángulos (SB1 y SB7).			
Ejemplo	 *En la figura:* *a) ¿Podemos aplicar el teorema de Tales? ¿Por qué?* *b) ¿Cuánto mide el lado $\overline{B'C'} = x$?* *c) ¿Qué triángulos están en posición de Tales?* 			

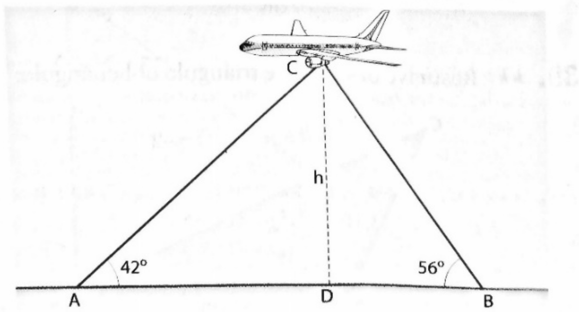
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas de obtención de áreas y volúmenes mediante semejanza de triángulos (SB1, SB2 y SB7).			
Ejemplo	★★☆ Un jarrón tiene la forma que se aprecia en la figura, en la que hay un agujero de un cono invertido:  Calcula el volumen del jarrón. Expresa el resultado sin decimales.			

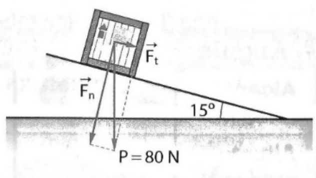
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Reflexiones cooperativas con el objetivo de desarrollar destrezas vinculadas al uso de herramientas de geometría dinámica (énfasis en SB6).			
Ejemplo	★★☆ En grupos de tres, elaborad, con ordenador y utilizando el programa GeoGebra para mostrar los ejemplos, un resumen de los conceptos tratados en la unidad. Aplicad la **técnica cooperativa** *Rompecabezas:* — Previamente, determinad en clase el reparto de la tarea en tres partes. — Cada miembro del equipo se encargará de preparar una parte de la tarea. — A continuación, agrupaos los miembros de cada grupo encargados de la misma tarea y consensuadla. — Por último, cada miembro regresa a su grupo y se desarrolla una puesta en común para conseguir tener todos los conceptos de la unidad con ejemplos de GeoGebra.			

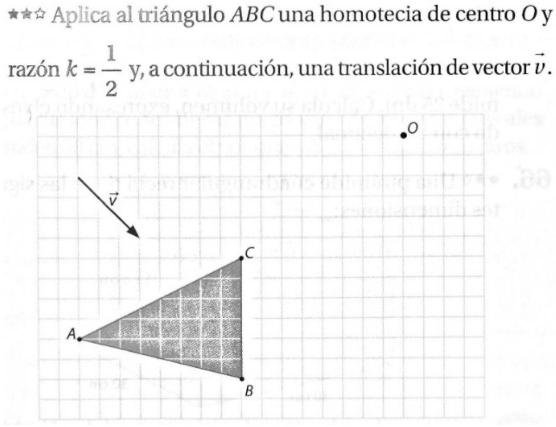
Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Ejercicios de resolución de triángulos rectángulos mediante teoremas de Pitágoras y razones trigonométricas (SB1 y SB4).			
Ejemplo	*Resuelve el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm.* COMPRENSIÓN Contamos con los datos $b = 12$ cm y $c = 5$ cm. Debemos calcular a, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ 			

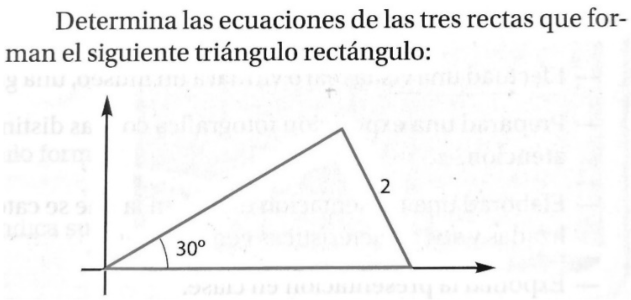
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas de resolución de triángulos rectángulos mediante razones trigonométricas (SB1, SB4 y SB7)			
Ejemplo	Una persona situada en la ribera de un río observa un árbol en la ribera contraria bajo un ángulo de 56°. Si se aleja 15 m, lo observa bajo un ángulo de 17°. ¿Cuánto mide el árbol?			

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>☒ Ejercicio</th><th>☐ Problema</th><th>☐ Cuestión</th><th>☐ Situación</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Ejercicios de resolución de triángulos cualesquiera mediante descomposición en triángulos rectángulos y aplicación de razones trigonométricas y teoremas (SB1, SB4 y SB7).</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">★★☆ Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo:

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>☐ Ejercicio</th><th>☒ Problema</th><th>☐ Cuestión</th><th>☐ Situación</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Problemas de resolución de triángulos cualesquiera mediante descomposición en triángulos rectángulos y aplicación de razones trigonométricas y teoremas (SB1, SB4 y SB7).</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">★★☆ Dos radares que distan entre ellos 15 km detectan un avión que se encuentra en el mismo plano vertical bajo ángulos de 42° y 56°. Calcula la altura a la que vuela el avión y la distancia del avión a cada uno de los radares.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>☐ Ejercicio</th><th>☒ Problema</th><th>☐ Cuestión</th><th>☐ Situación</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Problemas que establecen conexiones interdisciplinares entre matemáticas y física a través de la aplicación de la trigonometría a la resolución de triángulos y descomposición de fuerzas (SB1, SB4 y SB7). El ejemplo mostrado denomina erróneamente como fuerza normal su opuesta.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">★★★ Sabiendo que el peso del cuerpo que reposa sobre la rampa o plano inclinado representado en la figura es de 80 N, calcula el valor de la fuerza que se ejerce perpendicularmente al plano o normal (F_n), y la fuerza paralela al plano o tangencial (F_t).

</td></tr>
</table>

Tipo de actividad	☒ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Ejercicios de geometría analítica con aplicación de isometrías y de la homotecia como transformación novedosa a triángulos (SB1, SB3 y SB7).			
Ejemplo	 ★★☆ Aplica al triángulo ABC una homotecia de centro O y razón $k = \frac{1}{2}$ y, a continuación, una traslación de vector $\vec{v}$.			

Tipo de actividad	☐ Ejercicio	☒ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Problemas de funciones lineales y afines que inciden en la relación de pendiente y ángulo (SB1, SB3, SB4 y SB7).			
Ejemplo	 Determina las ecuaciones de las tres rectas que forman el siguiente triángulo rectángulo:			

4.3. Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 1º de Bachiller

Prosiguiendo con la adecuación a los libros de texto disponibles, y salvando su vinculación a la derogada ley de educación, consideramos aquí el libro de texto de la antigua modalidad de Ciencias (Fábregas, 2022). La justificación en este caso se reduce a tratarse de la única modalidad en que eran contempladas la trigonometría, geometría analítica, y resolución de triángulos en general. Ahora, las unidades didácticas vinculadas notablemente con la resolución de triángulos son aquellas referidas a la trigonometría (UD7), resolución de triángulos (UD8), y elementos en el plano (UD11). A estas podrían añadirse las unidades didácticas relativas a vectores (UD10) y cónicas (UD12), en las que la resolución de triángulos es empleada de manera puntual en alguna exposición o demostración, pero sin que ello trascienda ni tenga presencia en sus actividades.

En el caso concreto de UD7, esta se construye casi completamente sobre la matemática en cuestión, al uso de 4º de la ESO: definición de razones trigonométricas de ángulos agudos a partir de triángulos, argumentar la independencia de las razones trigonométricas de un ángulo con las dimensiones del triángulo mediante semejanza, presentación de la circunferencia goniométrica, demostración geométrica mediante triángulos de la razón trigonométrica de la suma de ángulos, etc. Pese a ello, las actividades tienen un enfoque eminentemente algebraico hacia la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas, pudiendo encontrar únicamente dos ejercicios introductorios, de un total de 76, relativos a triángulos. Esta constituye la principal diferencia entre UD7 y su homónima en 4º.

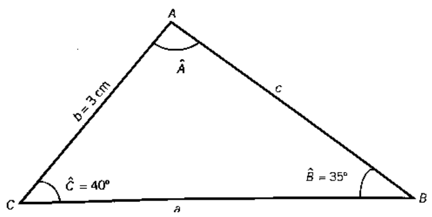
La octava unidad didáctica, como su nombre indica, está enfocada en su totalidad a la resolución de triángulos, siendo estudiada en detalle en el capítulo 6. Dado que tanto los desarrollos teóricos expuestos como actividades planteadas se enmarcan en la temática, es el capítulo del que mayor número de aportaciones hemos incluido.

Finalmente, UD11 contempla la resolución de triángulos en las actividades finales del capítulo principalmente con la finalidad de incrementar la dificultad de los problemas, destacando la obtención algebraica de rectas y puntos notables de triángulos.

Con todo ello, las actividades más representativas del curso en lo que a resolución de triángulos se refiere son las mostradas a continuación.

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☒ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Reflexiones relativa a los descriptores SB1, SB4 y SB7 que resaltan propiedades fundamentales de las razones trigonométricas.			
Ejemplo	Al estar en posición de Tales, los lados de los triángulos de la imagen verifican: $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{O'P'}} = \text{sen}\ \alpha$ Y, por lo tanto, el seno no depende de las longitudes de los lados. — Demuestra que ocurre lo mismo con el coseno y la tangente.			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☒ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Reflexiones relativas a los descriptores SB4 y SB5 que resaltan los errores de redondeo cometidos al emplear la calculadora.			
Ejemplo	Resuelve el ejemplo 2 utilizando otra razón trigonométrica que no sea la tangente. — ¿Has obtenido exactamente el mismo resultado? Si no es así, ¿a qué crees que es debido? — ¿Qué criterio deberías seguir para asegurar que el resultado es el más exacto posible?			

Tipo de actividad	☒ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☐ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Ejercicios relativos a los descriptores SB1 y SB4 para la resolución de triángulos rectángulos y cualesquiera.			
Ejemplo	●○○ Resuelve el siguiente triángulo: 			

Tipo de actividad	**☒ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Ejercicios relativos a los descriptores SB1 y SB4 para la resolución de triángulos rectángulos y cualesquiera que enfatizan en el desarrollo del descriptor SB6.			
Ejemplo	●●● Utiliza un programa de geometría dinámica para resolver un triángulo oblicuángulo cuya base mide 5,6 cm y sus dos ángulos adyacentes, 20° y 110°.			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas relativos a los descriptores SB1, SB4 y SB5 de aplicación de razones trigonométricas sobre triángulos rectángulos para el cálculo de distancias.			
Ejemplo	Para conocer la altura de la torre más alta de un castillo, se ha medido el ángulo que desde la horizontal forma la visual con el punto más alto. Su valor es de 36°. Si nos acercamos 20 m, dicho ángulo es ahora de 60°. ¿Qué altura tiene la torre?			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas de establecen conexiones interdisciplinares entre física y trigonometría (SB4).			
Ejemplo	Dos barcos parten de un puerto con rumbos que forman entre sí un ángulo de 130°. El primero sale a las 9 h de la mañana con una velocidad de 16 nudos y el segundo sale dos horas más tarde con una velocidad de 28 nudos. Si el alcance de cada uno de sus radios es de 200 km, ¿podrán contactar entre ellos a las 16 h? (1 nudo = 1852 m/hora)			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas geométricos que requieren de la descomposición en triángulos y aplicación del razonamiento proporcional y trigonometría (SB1, SB4 y SB7)			
Ejemplo	**B RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS** En un cuadrado *ABCD* de lado la unidad se unen los vértices *A* y *B* con un punto *N* situado sobre el lado $\overline{CD}$, de modo que la razón entre los segmentos $\overline{ND}$ y $\overline{NC}$ sea 4. Halla el ángulo que forman los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$.			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☒ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Reflexiones que establecen conexiones intra-matemáticas entre geometría y álgebra por medio de la trigonometría (SB1, SB4 y SB7)			
Ejemplo	Demuestra que del teorema del seno se deduce la existencia de una constante de proporcionalidad: $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$ donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.			

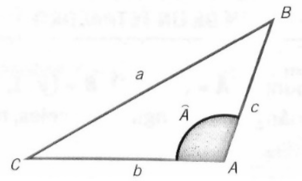
Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☐ **Problema**	☒ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Reflexiones cooperativas para el desarrollo socioafectivo en el marco de la trigonometría y herramientas tecnológicas (SB1, SB4, SB6 y SB6)			
Ejemplo	En grupos de cuatro, buscad información sobre el teorema de Napoleón y explicad con vuestras palabras en qué consiste. A continuación, elaborad una presentación que explique este teorema y que demuestre que se verifica para el triángulo de vértices $A = (8, 0)$, $B = (0, 6)$ y $C = (3, 11)$.			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☒ **Problema**	☐ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Problemas de geometría analítica que involucran figuras planas (SB1, SB3 y SB7).			
Ejemplo	**A POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS** Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo, conocido uno de sus vértices $C = (3, 2)$ y las ecuaciones de la altura $r: 3x - 2y = -14$ y de la mediana $s: -3x + 4y = 16$, trazadas desde un mismo vértice.			

Tipo de actividad	☐ **Ejercicio**	☒ **Problema**	☐ **Cuestión**	☐ **Situación**
Descripción	Problemas de geometría analítica (SB3) que involucran la obtención de rectas y puntos notables de triángulos (SB1 y SB7).			
Ejemplo	La recta de Euler de un triángulo es la que une el ortocentro, el circuncentro y el baricentro del triángulo. Halla estos puntos en el triángulo de vértices $A = (7, 1)$, $B = (-1, -1)$ y $C = (-2, 3)$. Comprueba que están alineados y escribe la ecuación de la recta de Euler.			

4.4. Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 2º de Bachiller

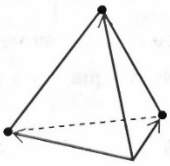
Concluyendo con el libro de texto de 2º de Bachiller de Ciencias (Fábregas y Jiménez, 2016), en continuación con la elección de 1º, apreciamos que la resolución de triángulos pasa a ocupar ahora una posición auxiliar. Pese a ello, todavía podemos encontrarla indirectamente en las unidades didácticas de vectores en el espacio (UD4 y UD5) y geometría métrica (UD7), bien en la exposición y demostración de conceptos más elevados, bien en los problemas y cuestiones del final del capítulo, que no ejercicios. Cabe destacar que las actividades de demostración de teoremas geométricos se contemplan todas ellas como cooperativas, independientemente de la UD en cuestión.

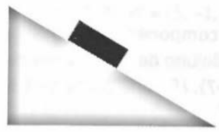
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Demostraciones cooperativas de teoremas geométricos (SB1, SB4 y SB7).			
Ejemplo	**20.** ★★★ En grupos de tres, demostrad el teorema del coseno utilizando el producto escalar. 			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☐ Problema**	**☒ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Construcción de demostraciones geométricas mediante herramientas de geometría dinámica (SB1, SB4, SB6 y SB7).			
Ejemplo	★★★ En grupos de tres y con ayuda del programa GeoGebra, preparad tres presentaciones que expliquen paso a paso como habéis obtenido las demostraciones de los enunciados propuestos en los ejercicios 16, 17 y 20.			

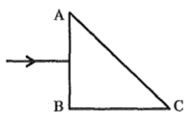
Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas para la obtención de las coordenadas de puntos en el espacio, que involucran triángulos (SB2, SB3, SB7).			
Ejemplo	★★☆ Halla las coordenadas del baricentro del tetraedro que tiene por vértices $A = (4, 6, 2)$, $B = (2, 7, 3)$, $C = (3, 0, 2)$ y $D = (-1, -1, 1)$.			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas de resolución de triángulos en el espacio que involucran el producto escalar como medida de áreas (SB2 y SB3).			
Ejemplo	Sean $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 5, 1)$ y $C = (3t, 2t, t)$ tres vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de C, sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{209}}{2}\,u^2$.			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas para la obtención de volúmenes de cuerpos geométricos que involucran triángulos mediante producto vectorial (SB2 y SB3).			
Ejemplo	★★☆ Halla el volumen del paralelepípedo y el volumen del tetraedro construido sobre los vectores $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 4)$ y $\vec{w} = (-2, 5, -1)$.  — Utiliza el programa GeoGebra para representar los vectores y el tetraedro, y comprobar las soluciones obtenidas.			

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Descripción	Problemas para el desarrollo de conexiones interdisciplinares entre física y geometría, involucrando las propiedades de los triángulos (SB1, SB3, SB4 y SB7)			
Ejemplo	★★★ Consideremos $R = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, un sistema de referencia donde $O = (0, 0, 0)$, $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 0)$, $\vec{z} = (0, 0, 1)$. Por un plano inclinado como el de la figura, se desliza un cuerpo atraído por la fuerza de la gravedad.  a) Dibuja el plano inclinado y el cuerpo sobre el sistema de referencia, y proporciona las coordenadas de los vértices. b) Dibuja el vector que representa la fuerza que ejerce la gravedad sobre el cuerpo. ¿Cómo se llama dicha fuerza?			

Finalmente y por completitud, cabe destacar que la presencia longitudinal de la resolución de triángulos se extiende inclusive a la evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad (EBAU), tanto explícitamente en los exámenes de la antigua asignatura de Matemáticas II (Universidad Pública de Navarra [UPNA], 2019), como implícitamente en Física (UPNA, 2015). Dos ejemplos de ello son mostrados a continuación.

Tipo de actividad	**☐ Ejercicio**	**☒ Problema**	**☐ Cuestión**	**☐ Situación**
Asignatura	Matemáticas II		Física	
Ejemplo	**A2)** Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\,u^2$.		b) Disponemos de un prisma óptico de índice de refracción 1,5 inmerso en aire. La sección del prisma, mostrada en la figura, es un triángulo rectángulo isósceles. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre la cara AB del prisma. Dibujar la trayectoria del rayo a través del prisma hasta volver a salir al aire. ¿Con que velocidad se propaga la luz en el interior de prisma? Razonar las respuestas. ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s)  *(1,25 puntos)*	

Capítulo 5
Resultados

En el último capítulo de esta primera parte del trabajo analizaremos la adecuación y coherencia de los libros de texto expuestos en el capítulo anterior con el currículo vigente, todo ello circunscrito a la matemática contemplada; la resolución de triángulos. Para ello comenzaremos examinando longitudinalmente el propio currículo, destacando presencias y ausencias características del mismo, bajo las cuales analizaremos a continuación los libros de texto. Todo ello quedará sintetizado finalmente en una sección en que recordaremos el papel que, según la teoría en didáctica de las matemáticas, debe desempeñar el libro de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

5.1. Presencias y ausencias en el currículo

Retomando el estudio realizado en el tercer capítulo, merece la pena destacar que la nueva jerarquización curricular de los contenidos matemáticos (añadiendo un subnivel de grandes ideas al nivel de sentidos), unido a que tanto grandes ideas como sentidos se respeten en los tres currículos, ayuda sobremanera a garantizar la continuidad y coherencia entre etapas. De hecho, esto queda todavía más reforzado por la continuidad de los propios saberes básicos, bastando con observar la forma en que el enunciado del saber básico C1.1 evoluciona gradualmente.

Aunque no llega a alcanzar el nivel de concreción de seguimiento individualizado de cada saber básico presente en el currículo, la tabla 3.5 ilustra un análisis longitudinal de los mismos por medio de los descriptores ya definidos, donde queda además representado el nivel de presencia o énfasis en cada uno por curso y etapa.

SB	Educación Primaria	ESO					Bachiller de Ciencias y Tecnología	
	3er ciclo	1º	2º	3º	4º		1º	2º
					A	B		
1	★★★	★★★	★★	★			★★	
2			★★	★★★				★★
3	★	★	★	★★	★	★★	★★★	★★★
4						★★	★	
5	★★★	★★★	★★	★★				
6	★	★	★	★	★★★	★★★	★★	★★
7	★★	★★	★★	★★	★★	★★	★★★	★★★

Tabla 5.1. Estudio longitudinal de los saberes básicos del currículo por medio de descriptores.

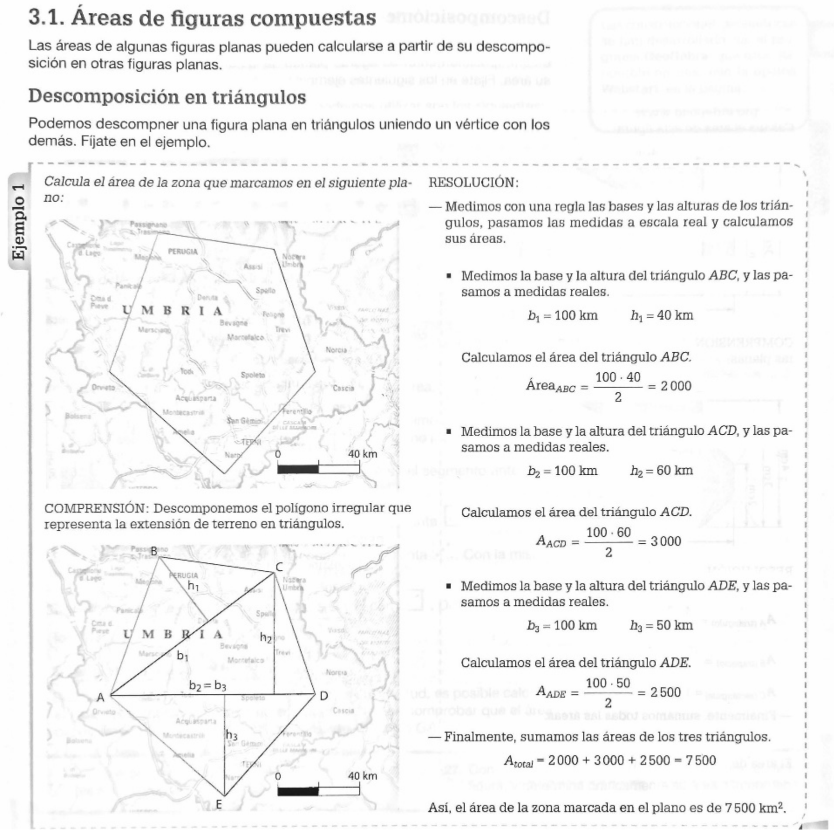
Como puede observarse, todos los descriptores definidos tienen una presencia sustancial en el currículo vigente, abarcándose múltiples en un mismo curso. Teniendo en cuenta que dichos descriptores no son sino una reformulación sintética de las grandes ideas matemáticas, luego de los sentidos en sí mismos, puede afirmarse de igual modo que no existen ausencias curriculares destacables en lo que a matemáticas se refiere. De entre los siete definidos, destaca la importancia que el currículo concede curso a curso al razonamiento proporcional, en consonancia con las teorías actuales en didáctica de las matemáticas según las cuales esta ocupa un "lugar central en las matemáticas que se enseñan en la escuela, en tanto pone en relación ámbitos conceptuales necesarios para la comprensión y modelación de múltiples situaciones de las matemáticas, las ciencias naturales y sociales y de la vida diaria” (Obando, 2012).

Por otro lado, una vez los descriptores surgen por primera vez en un curso concreto, su continuidad en los venideros es significativa. En este sentido, destacan fundamentalmente dos excepciones que afectan a SB1 y SB2: su alternancia en Bachiller, y su ausencia en 4º de ESO. En el caso de la alternancia en la última etapa preuniversitaria, esta puede deberse a que, como hemos analizado en la sección 3.4, la geometría se enfoca ahora bajo el prisma de la abstracción, cambio sustancial para las capacidades del alumnado que requiere volver a construir la geometría espacial a partir de la plana. En lo que a 4º de ESO se refiere, incidimos de nuevo en que los descriptores SB1 y SB2 no figuran como tal porque no se introducen nuevos saberes vinculados a los mismos. En cambio, su atención se centra en trasladarlos a la adquisición de destrezas procedimentales a través de recursos tecnológicos y digitales, enfatizando en programas de geometría dinámica. De este modo, en ambos casos se enfoca ahora el diseño curricular en espiral como una verdadera construcción de nuevos conocimientos sobre aquellos previos estrechamente vinculados, mucho más fiel a la concepción original del término, y no como un mero revisitar conceptos matemáticos con pequeños añadidos.

Podemos concluir por tanto que la LOMLOE goza de una coherencia y continuidad curricular destacables en lo que a resolución de triángulos se refiere, sin ausencias reseñables. Sin embargo, hemos obviado intencionadamente y hasta el momento un aspecto que obscurece notablemente esta conclusión: la LOMLOE tiene vigencia parcial. A este respecto, y durante el curso 2022-2023 en que se desarrolla el trabajo, los cursos pares han de enmarcarse en la derogada ley educativa, con la única salvedad de que los estándares de aprendizaje evaluables “tendrán carácter meramente orientativo” (BON, 2022a, p. 14; 2022b, p. 21; 2022c, p. 16). La medida persigue facilitar la transición entre currículos mediante una implantación gradual y escalonada, pero inherentemente a la misma surge la ruptura de la coherencia curricular. En este sentido, cabe mencionar que los criterios de evaluación en cursos pares, vinculados exclusivamente a aspectos conceptuales, no comparten ese carácter meramente orientativo de los estándares de aprendizaje evaluables, por lo que existe ahora una dualidad contradictoria respecto de qué ha de entenderse por criterio de evaluación.

5.2. Presencias y ausencias en los libros de texto

Incluso cuando los libros de texto analizados se enmarcan en la LOMCE, todos ellos tratan secuencialmente y con completitud los saberes básicos asignados curricularmente a cada curso, como se desprende de la correspondencia entre la tabla 5.1 y el análisis recogido en el capítulo previo. De hecho, esta coherencia con el currículo queda plasmada no sólo en los conceptos matemáticos introducidos, sino también en el cómo se presentan. Así, en 3º de ESO sigue muy presente el enfoque enactivo en la presentación de contenidos, ilustrado en la sección 4.1 con el ejercicio referido a dibujar, recortar y manipular triángulos para explorar su semejanza. Del mismo modo, el sentido de la medida no ha sido relegado todavía a un segundo plano, y como tal el libro de texto lo aborda con frecuencia en sus explicaciones, tal como puede observarse en la figura 5.1. Si aludimos a 4º de ESO, acabamos de destacar en la sección previa su orientación hacia programas de geometría dinámica, quedando ello integrado en todas las unidades didácticas concernientes a resolución de triángulos del libro de texto, ejemplos de lo cual se muestran en la figura 5.2. Finalmente, los saberes básicos curriculares de Bachiller contemplan ya la elaboración de demostraciones formales, trasladado por medio de cuestiones individuales y cooperativas en ambos libros de la etapa, tal y como ha quedado ilustrado en las secciones 4.3 y 4.4. Además, todos ellos contemplan multitud de actividades cooperativas, enmarcadas en distintas metodologías, pero enfocadas todas ellas al desarrollo de la competencia específica social en el marco de la resolución de triángulos.



3.1. Áreas de figuras compuestas

Las áreas de algunas figuras planas pueden calcularse a partir de su descomposición en otras figuras planas.

Descomposición en triángulos

Podemos descompner una figura plana en triángulos uniendo un vértice con los demás. Fíjate en el ejemplo.

Ejemplo 1

Calcula el área de la zona que marcamos en el siguiente plano:

COMPRENSIÓN: Descomponemos el polígono irregular que representa la extensión de terreno en triángulos.

RESOLUCIÓN:

— Medimos con una regla las bases y las alturas de los triángulos, pasamos las medidas a escala real y calculamos sus áreas.

- Medimos la base y la altura del triángulo *ABC*, y las pasamos a medidas reales.

$b_1 = 100$ km $\quad h_1 = 40$ km

Calculamos el área del triángulo *ABC*.

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{100 \cdot 40}{2} = 2000$$

- Medimos la base y la altura del triángulo *ACD*, y las pasamos a medidas reales.

$b_2 = 100$ km $\quad h_2 = 60$ km

Calculamos el área del triángulo *ACD*.

$$A_{ACD} = \frac{100 \cdot 60}{2} = 3000$$

- Medimos la base y la altura del triángulo *ADE*, y las pasamos a medidas reales.

$b_3 = 100$ km $\quad h_3 = 50$ km

Calculamos el área del triángulo *ADE*.

$$A_{ADE} = \frac{100 \cdot 50}{2} = 2500$$

— Finalmente, sumamos las áreas de los tres triángulos.

$$A_{total} = 2000 + 3000 + 2500 = 7500$$

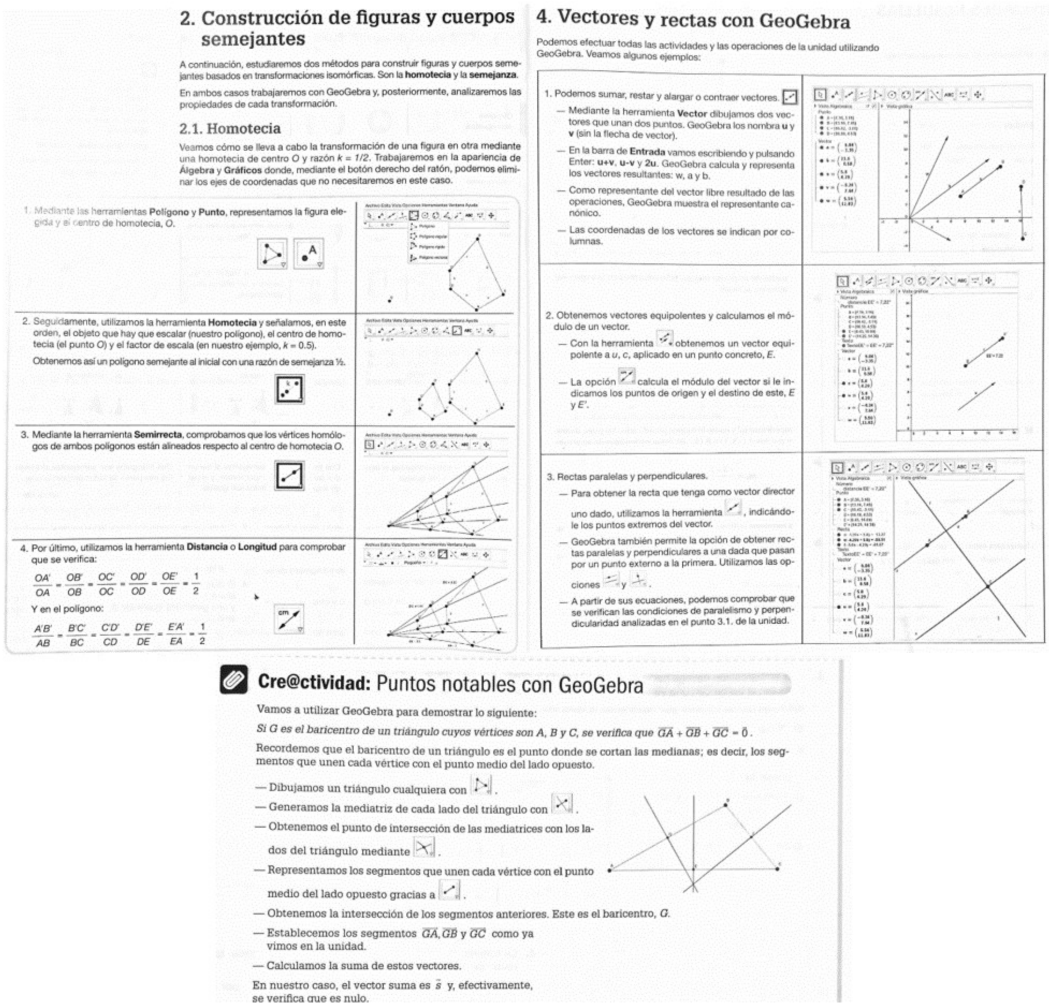
Así, el área de la zona marcada en el plano es de 7500 km^2.

Figura 5.1. Ejemplo de la medición como recurso en la introducción de conceptos matemáticos en 3º de ESO.

Sin embargo, y pese a lo acertado de los libros de texto, en todos los casos previos pueden encontrarse carencias que los alejan del enfoque curricular. En relación con los aspectos ahora destacados, el libro de 3º de ESO sigue teniendo muy presente la manipulación y medida, siempre y cuando no se trate de ángulos. Por su parte, en el libro de 4º de ESO proliferan las ejemplificaciones sobre Geogebra, pero al uso de textos instruccionales, sin requerir de razonamiento o indagación alguna por parte del estudiante. Finalmente, ambos libros de Bachillerato adolecen de concebir la demostración únicamente vinculada a los grandes teoremas geométricos vistos hasta el momento (teorema de Tales, Pitágoras, seno, y coseno), y no como el recurso por excelencia para la validación de cualquier hipótesis. De hecho, el libro de 2º de Bachillerato ni siquiera propone la demostración como un ejercicio de reflexión y razonamiento individual; ha de ser en todos los casos cooperativo. A estas deficiencias particulares de cada curso, destacaríamos tres carencias globales:

- La problematización del entorno se reduce con demasiada frecuencia a ejercicios contextualizados por medio del estampado de la noción física de velocidad en ellos. De este modo las conexiones interdisciplinares quedan reducidas a una única casuística, lo cual dificulta promover un enriquecimiento mutuo, además de ocupar el espacio de problemas mucho más significativos.

- Las conexiones intramatemáticas explícitas, como es el caso de la tercera actividad de tipo cuestión descrita en la sección 4.3 en la cual se enfatiza en la vinculación entre geometría y trigonometría, no son excesivamente frecuentes.
- Los elementos de la vida cotidiana enfocados desde una perspectiva matemática son escasos, abundando en su lugar instrumentos de medida arcaicos, obras de ingeniería civil y arquitectónicas singulares, desarrollos tecnológicos punteros, el espacio, etc. En cualquier caso, existe cierta ambigüedad en el término, pues el currículo no concreta en ningún momento qué ha de entenderse por vida cotidiana, además de ser esta una noción inherentemente subjetiva que varía de individuo a individuo.



2. Construcción de figuras y cuerpos semejantes

A continuación, estudiaremos dos métodos para construir figuras y cuerpos semejantes basados en transformaciones isomórficas. Son la **homotecia** y la **semejanza**.

En ambos casos trabajaremos con GeoGebra y, posteriormente, analizaremos las propiedades de cada transformación.

2.1. Homotecia

Veamos cómo se lleva a cabo la transformación de una figura en otra mediante una homotecia de centro O y razón $k = 1/2$. Trabajaremos en la apariencia de Álgebra y Gráficos donde, mediante el botón derecho del ratón, podemos eliminar los ejes de coordenadas que no necesitaremos en este caso.

1. Mediante las herramientas **Polígono** y **Punto**, representamos la figura elegida y el centro de homotecia, O.

2. Seguidamente, utilizamos la herramienta **Homotecia** y señalamos, en este orden, el objeto que hay que escalar (nuestro polígono), el centro de homotecia (el punto O) y el factor de escala (en nuestro ejemplo, $k = 0.5$).

Obtenemos así un polígono semejante al inicial con una razón de semejanza ½.

3. Mediante la herramienta **Semirrecta**, comprobamos que los vértices homólogos de ambos polígonos están alineados respecto al centro de homotecia O.

4. Por último, utilizamos la herramienta **Distancia** o **Longitud** para comprobar que se verifica:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OE'}{OE} = \frac{1}{2}$$

Y en el polígono:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$$

4. Vectores y rectas con GeoGebra

Podemos efectuar todas las actividades y las operaciones de la unidad utilizando GeoGebra. Veamos algunos ejemplos:

1. Podemos sumar, restar y alargar o contraer vectores.
— Mediante la herramienta **Vector** dibujamos dos vectores que unan dos puntos. GeoGebra los nombra **u** y **v** (sin la flecha de vector).
— En la barra de **Entrada** vamos escribiendo y pulsando Enter: **u+v**, **u-v** y **2u**. GeoGebra calcula y representa los vectores resultantes: w, a y b.
— Como representante del vector libre resultado de las operaciones, GeoGebra muestra el representante canónico.
— Las coordenadas de los vectores se indican por columnas.

2. Obtenemos vectores equipolentes y calculamos el módulo de un vector.
— Con la herramienta obtenemos un vector equipolente a *u*, *c*, aplicado en un punto concreto, *E*.
— La opción calcula el módulo del vector si le indicamos los puntos de origen y el destino de este, *E* y *E'*.

3. Rectas paralelas y perpendiculares.
— Para obtener la recta que tenga como vector director uno dado, utilizamos la herramienta , indicándole los puntos extremos del vector.
— GeoGebra también permite la opción de obtener rectas paralelas y perpendiculares a una dada que pasan por un punto externo a la primera. Utilizamos las opciones y .
— A partir de sus ecuaciones, podemos comprobar que se verifican las condiciones de paralelismo y perpendicularidad analizadas en el punto 3.1. de la unidad.

Cre@ctividad: Puntos notables con GeoGebra

Vamos a utilizar GeoGebra para demostrar lo siguiente:

Si G es el baricentro de un triángulo cuyos vértices son A, B y C, se verifica que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Recordemos que el baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan las medianas; es decir, los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

— Dibujamos un triángulo cualquiera con .
— Generamos la mediatriz de cada lado del triángulo con .
— Obtenemos el punto de intersección de las mediatrices con los lados del triángulo mediante .
— Representamos los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto gracias a .
— Obtenemos la intersección de los segmentos anteriores. Este es el baricentro, *G*.
— Establecemos los segmentos $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ y $\overrightarrow{GC}$ como ya vimos en la unidad.
— Calculamos la suma de estos vectores.

En nuestro caso, el vector suma es $\vec{s}$ y, efectivamente, se verifica que es nulo.

Figura 5.2. Ejemplos de la orientación hacia el desarrollo de destrezas vinculadas al uso de programas de geometría dinámica en 4º ESO.

5.3. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Podemos concluir, por tanto, que los libros de texto analizados siguen minuciosamente los contenidos matemáticos curriculares involucrados en la temática. En este sentido, hay que matizar que, con la desaparición de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, estos contenidos son ahora mucho más amplios en su redacción, no pudiendo ser trivialmente trasladados a los libros de texto. Así, por ejemplo, ningún saber básico alude explícitamente al teorema de Tales, a las razones trigonométricas inversas, o a la expresión de la suma de ángulos; pero estos figuran en los libros de texto, y no por ello consideramos que se alejen del currículo, sino que llevan a cabo una labor coherente y necesaria de interpretación y concreción. De hecho, hemos observado que esta coherencia entre marco y recurso se extiende en gran medida a la propia forma en que se presentan los saberes, específica de cada curso y etapa. Finalmente, hemos destacado ciertos rasgos que los alejan de ser una representación fiel del currículo; pero es que esta no ha de ser nunca su finalidad, pues el currículo debe regir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en su conjunto, del cual el libro de texto es únicamente un recurso más, y en ningún caso el principal. En este sentido, deben ser las situaciones problemáticas de la vida cotidiana, la matematización del entorno y las vivencias con el propio cuerpo (por lo menos en la etapa de Educación Primaria) las que asienten las bases del proceso, de la pirámide de la educación matemática, en la cual los libros de texto constituyen una cúspide que debe emplearse solo ocasionalmente (Alsina, 2010).

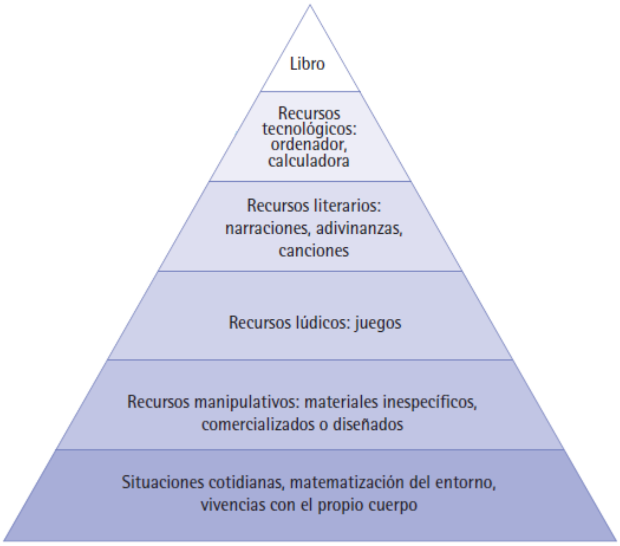


Figura 5.3. Pirámide de la educación matemática (Alsina, 2010).

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la resolución de triángulos en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio sobre la resolución de triángulos en 1º de Bachiller de Ciencias y Tecnología.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primero se estudian los contenidos referidos a la resolución de triángulos en el libro de texto de 1º de Bachiller de Ciencias y Tecnología empleado en el centro de realización del Practicum. En el segundo, se ahonda en las dificultades y errores previsibles durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en cuestión, así como en sus posibles orígenes. En el tercero, se detalla la opción de enseñanza planificada para el periodo de docencia autónoma durante el Practicum, incluyendo temporalización, consideraciones mediacionales y actividades autónomas planificadas para los estudiantes. Finalmente, se analiza en el cuarto capítulo el desempeño llevado a cabo por los estudiantes ante un cuestionario, tanto desde una perspectiva evaluadora y de calificación como de conclusiones didácticas extraíbles.

Capítulo 6
La resolución de triángulos en el libro de texto de referencia

En este capítulo aplicaremos algunas nociones básicas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática al análisis de la unidad didáctica del libro de texto de referencia empleado en el centro, y con ello auxiliarmente por uno mismo durante los momentos de docencia autónoma del Practicum II.

Como sostienen Godino, Font y Wilhelmi (2006), el análisis ontosemiótico de una lección que persiga valorar su idoneidad debe abordarse, primero, desde una perspectiva global que identifique su objetivo y estructura en configuraciones didácticas, para pasar después a un estudio detallado de cada una de ellas. Esta idoneidad didáctica global se debe valorar teniendo en cuenta los seis criterios sintetizados a continuación (Godino, 2013):

- Idoneidad epistémica: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (saber enseñado) respecto de los de referencia (saber sabio).
- Idoneidad cognitiva: medida en que los significados institucionales implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vigotsky, 1934) del alumnado.
- Idoneidad semiótica/interaccional: grado en que son resolubles las discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos en interacción comunicativa.
- Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios.
- Idoneidad afectiva: grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio
- Idoneidad ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Pese a que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso, debiendo ser todas ellas integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, limitaremos nuestro estudio en un primer apartado a la idoneidad epistémica, y más concretamente a la identificación de los objetos matemáticos involucrados en un proceso de estudio de la matemática en cuestión; y en un segundo apartado al análisis global de la lección en el libro de texto, sin proseguir con el consiguiente estudio detallado de las configuraciones didácticas asociadas.

6.1. Objetos matemáticos involucrados

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto, es necesario establecer en primer lugar el significado de referencia que sirva de comparación (Godino et al., 2006). Facilitando esta labor, los principales elementos del significado de referencia serán agrupados en seis tipos de entidades cuyo conglomerado recibe el nombre de configuración: lenguaje (verbal, gráfico y simbólico), situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos. A este respecto, y teniendo en cuenta el caso concreto que nos ocupa, determinar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado para 1º de Bachiller, todavía consideramos más útil emplear una configuración que considere que las matemáticas pueden ser enseñadas como generalizaciones y formalizaciones de la experiencia, que una fundamentada en el método axiomático; una configuración empírica frente a formal. Así, la configuración epistémica empírica de la resolución de triángulos elaborada queda recogida en la tabla 6.1.

LENGUAJE
Verbal
Ángulo, interior, exterior, adyacente, comprendido, grado sexagesimal, minuto, segundo, radián, recto, agudo, obtuso, segmento, lado, homólogo, opuesto, contiguo, longitud, área, vértice, triángulo, rectángulo, cateto, hipotenusa, obtusángulo, acutángulo, equilátero, isósceles, escaleno, semejante, congruente, base, altura, proyección, lugar geométrico, recta notable, mediana, mediatriz, bisectriz, punto notable, baricentro, circuncentro, circunscrito, incentro, inscrito, polígono, regular, (nombres de polígonos), diagonal, apotema, circunferencia, circunferencia goniométrica, radio, diámetro, arco, cuerda, razón, razón trigonométrica, seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, teorema, distancia, visual, equidistancia.
Gráfico
Representación gráfica de ángulos, ángulos rectos, figuras planas, proceso de construcción gráfica de triángulos a partir de datos, lugares geométricos en figuras planas, descomposición en triángulos de un polígono, dibujos en que se presentan situaciones contextualizadas que pueden identificarse mediante triángulos (sujetos que observan ciertos objetos a distancia y bajo visuales),
Simbólico
$\{A, B, C\}$ (vértices), $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ (ángulos), $\{a, b, c\}$ (lados opuestos respectivamente a ángulos), $\{h_a, h_b, h_c\}$ (alturas), $\{sen, cos, tg\}$ (razones trigonométricas), $\{arcsen, arccos, arctg\}$ (razones trigonométricas inversas), º, +, -, ·, /, =.

SITUACIONES
Actividades descontextualizadas
▪ Ejercicios en los que hay que calcular lados y ángulos de triángulos a partir de datos o de su representación gráfica mediante el uso de razones trigonométricas y teoremas asociados. ▪ Problemas en que se requiere siempre el uso de razones trigonométricas además de la semejanza, de las propiedades de polígonos y polígonos regulares, de la descomposición de polígonos en triángulos, de las propiedades de ángulos centrales e inscritos, de las propiedades de rectas y puntos notables de triángulos, y de las implicaciones de la tangencia y perpendicularidad, para obtener ángulos, longitudes y áreas. ▪ Cuestiones en que se requiere demostrar o reflexionar acerca de teoremas geométricos, propiedades de figuras planas, y algoritmos.
Actividades contextualizados

PROCEDIMIENTOS
Descontextualización del enunciado en problemas contextualizados. Descontextualización de ilustraciones contextualizada mediante su reducción a polígonos. Representación gráfica de triángulos y demás figuras planas a partir de datos. Identificación del número de soluciones posibles en función de la información proporcionada (ninguno, uno o dos triángulos). Identificación del algoritmo aplicable en función de la información proporcionada (qué y cuántos lados y ángulos del triángulo). Elección del ángulo correcto a partir de su razón trigonométrica teniendo en cuenta el tamaño relativo del lado opuesto del triángulo. Cálculo mental de razones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º y 150º.

▪ Ejercicios equivalentes a aquellos descontextualizados en lo que el triángulo es ahora una baldosa, una rampa, una parcela, una escuadra, un cartabón. ▪ Problemas en que se requiere siempre el uso de razones trigonométricas para obtener distancias, visuales y alturas.	Cálculo de razones trigonométricas y razones trigonométricas inversas mediante calculadora. Comprobación de los resultados mediante las propiedades geométricas básicas de triángulos.

CONCEPTOS	**PROPIEDADES**
Previos Sistemas de medida de ángulos y su transformación. Figuras planas y su clasificación (enfatizando en el triángulo). Lugares geométricos del triángulo. Paralelismo, perpendicularidad y tangencia. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Teorema de Tales y semejanza. Teorema de Pitágoras. Razones trigonométricas de ángulos agudos. **Emergentes** Teorema del seno y coseno: enunciado, demostración y aplicación.	Suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor o igual que la longitud del tercer lado. Oposición de mayor ángulo a mayor lado en un triángulo. Valor de la suma de ángulos interiores de polígonos de n lados ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180(n-2)$). Valor de los ángulos de polígonos regulares de n lados ($\alpha_i = \frac{180(n-2)}{n}\ \forall i = 1, \dots, n$). Ángulo central mide el doble que aquel inscrito siempre y cuando abarquen el mismo arco. Razones trigonométricas de un ángulo no dependen de las dimensiones del triángulo. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo, su complementario y suplementario ($sen\alpha = sen(180-\alpha) = \cos(90-\alpha)$, $cos\alpha = -cos(180-\alpha) = \sin(90-\alpha)$).

ARGUMENTOS
Demostración algebraica de los teoremas de seno y coseno mediante la trigonometría. Comprobación algebraica de propiedades geométricas de figuras planas mediante la trigonometría. Construcción de los algoritmos aplicables a la resolución de triángulos en función de los datos proporcionados. Justificación de las ventajas e inconvenientes de los distintos algoritmos aplicables a la resolución de un mismo triángulo.

Tabla 6.1. Configuración epistémica empírica de la resolución de triángulos en 1º de Bachiller.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

En contraposición con libros de texto de otras editoriales (Alcaide et al., 2015; Vizmanos et al., 2011), grupo edebé dedica una breve unidad didáctica al completo al tratamiento de la resolución de triángulos (Fábregas, 2022, pp. 193-208), la homónima UD8. Esta, recogida en el anexo A, comienza con una portada en la que figura el título del capítulo, un escueto índice con dos elementos (resolución de triángulos rectángulos, y teorema del seno y del coseno), y una amplia imagen fotográfica de un satélite. Junto a la misma figuran tres actividades introductorias bajo el epígrafe *nos situamos* que invitan a organizarse en pequeño grupo, indagar mediante recursos digitales y reflexionar acerca de la triangulación en la antigüedad, elementos geométricos de la ilustración tecnológicoespacial, y relación existente entre recta de Euler y triángulos sagrados egipcios. Como puede observarse, nos encontramos ante la necesidad de cierta opalescencia en la matematización del entorno descrita en la sección 5.3. Destaca en este sentido la mención a la recta de Euler, que no volverá a surgir en lo que resta de capítulo.

En las siguientes páginas encontramos ya el desarrollo de la unidad didáctica como tal, organizada bajo el siguiente índice:

A los contenidos matemáticos previos siguen dos páginas con sendos problemas resueltos, y tras ellos la colección de 74 *Ejercicios y problemas* de final de capítulo. La unidad didáctica concluye con un detallado mapa conceptual a modo de síntesis, y una última hoja de *Evaluación* con 12 ejercicios, problemas y cuestiones aparentemente sencillas para verificar uno mismo la adquisición de los contenidos mínimos.

Procedemos a continuación a analizar individualmente las secciones recogidas en el índice previo.

1. Resolución de triángulos rectángulos

Entrando ya en materia, la sección de resolución de triángulos rectángulos comienza pactando la definición de qué entendemos por resolver un triángulo: hallar los valores de sus ángulos y lados. Esta definición es enmarcada y resaltada en rosa pastel, tras lo cual se procede directamente a la subsección 1.1. Encontramos aquí la que será notación para vértices, ángulos y lados en triángulos durante el resto de capítulo, y que puede observarse en la figura 6.1. Alabar en este sentido la coherencia del capítulo en lo que a notación se refiere, no solo en el uso de mayúsculas, minúsculas o circunflejo, sino también en el sentido siempre antihorario de asignación.

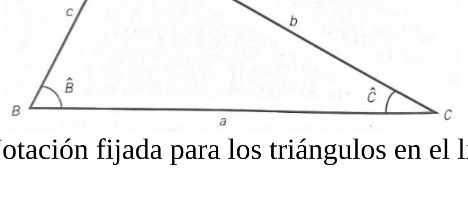
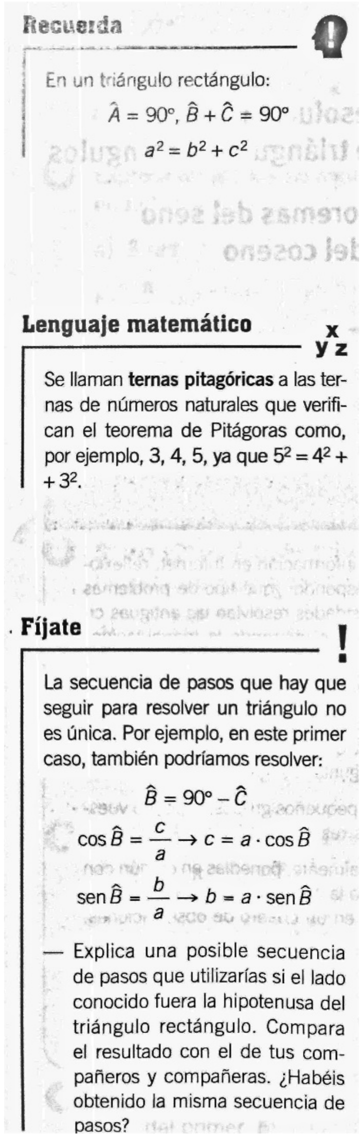


Figura 6.1. Notación fijada para los triángulos en el libro de texto.

Volviendo al contenido de la subsección 1.1, esta presenta inicialmente y de forma muy sintética un proceso o algoritmo de resolución general de triángulos rectángulos para los cuales es conocido un ángulo agudo y un lado, y a continuación lo ejemplifica con un caso concreto. Dicho ejemplo queda tanto resuelto como comprobado, si bien es cierto que la comprobación hace uso de los mismos recursos empleados en su resolución (suma de ángulos internos y teorema de Pitágoras), por lo que se trata más bien de una repetición de la resolución. En cualquier caso, el contenido queda claramente explicado, ilustrado y puesto en práctica.

Destaca, en la forma en que presenta los contenidos el libro de texto, que los márgenes de las páginas suelen contener anotaciones de diversa índole, tal como muestra la figura 6.2. A este respecto, notar cómo la primera de ellas es simplemente una reiteración de conceptos básicos de cursos previos, redundante además al figurar ya en el propio cuerpo de esta misma página; la segunda es una curiosidad que no trascenderá de este punto; pero la tercera expone e insta a reflexionar al estudiante acerca de una consideración fundamental como es la existencia de múltiples procedimientos para resolver un mismo triángulo. Así, consideraciones de muy diverso grado de significancia comparten un mismo espacio y formato, el cual es además un espacio auxiliar y que suele pasar frecuentemente desapercibido. En este sentido, la conclusión que extraemos es que su organización debiera ser otra para las anotaciones de tipo *Fíjate*, pues su relevancia las aleja de poder ser consideradas anotaciones al margen.



Recuerda

En un triángulo rectángulo:

$$\hat{A} = 90^\circ,\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Lenguaje matemático

Se llaman **ternas pitagóricas** a las ternas de números naturales que verifican el teorema de Pitágoras como, por ejemplo, 3, 4, 5, ya que $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Fíjate

La secuencia de pasos que hay que seguir para resolver un triángulo no es única. Por ejemplo, en este primer caso, también podríamos resolver:

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \cos \hat{B}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

— Explica una posible secuencia de pasos que utilizarías si el lado conocido fuera la hipotenusa del triángulo rectángulo. Compara el resultado con el de tus compañeros y compañeras. ¿Habéis obtenido la misma secuencia de pasos?

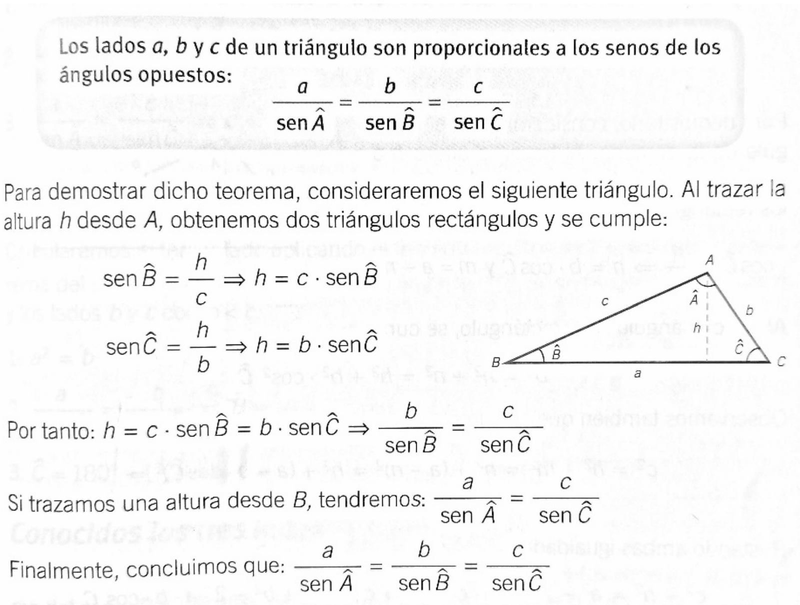
Figura 6.2. Anotaciones al margen en el libro de texto.

La página contigua comienza ya con la subsección 1.2, repitiendo el esquema de la previa: exposición de la secuencia de pasos para resolución de un triángulo rectángulo del cual son conocidos dos lados, y su ejemplificación con resolución y comprobación incluida. En este caso se recogen dos ejemplos, el segundo de los cuales es especialmente interesante porque proporciona como datos las medidas de los tres lados del triángulo, de modo que su resolución comienza por verificar que este sea rectángulo. Esta es una consideración muy acertada tanto de esta sección como de la relativa a triángulos cualesquiera; la matización de que los datos proporcionados pueden ser incompatibles con el tipo de triángulo supuesto o con la propia construcción de un triángulo. De nuevo, figuran como anotaciones al margen tres reflexiones sumamente interesantes: una primera que alude a que la calculadora proporciona un único ángulo ante una razón trigonométrica inversa, pero que ello no implica que este sea el único ángulo posible; una segunda que compendia las distintas parejas de datos a partir de las cuales pueden pedirnos resolver un triángulo rectángulo; y una tercera en que vuelve a enfatizarse en existir más de un procedimiento para la resolución de un mismo triángulo, y en cuidar los errores de redondeo al emplear calculadora. En relación con la segunda reflexión, consideramos una deficiencia notable no aludir a que los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo (por la sección en que se enmarca) no definen un triángulo, pues existen infinitos triángulos semejantes que presentan dichos ángulos.

La sección concluye con el apartado 1.3 de resolución de triángulos por descomposición en triángulos rectángulos. Esta subsección comienza con cierta ambigüedad al mencionar que “En ocasiones, y según los datos que conozcamos, podremos resolver un triángulo cualquiera descomponiéndolo previamente en dos triángulos rectángulos”, sin desarrollar en ningún momento futuro cuáles son esas ocasiones. En su lugar, se procede directamente a presentar un ejemplo concreto en que dicha resolución es posible, que es consecuentemente desarrollado y comprobado. Además de este, otra casuística resoluble es presentada al margen, aunque no ejemplificada. A esta anotación acompañan otras dos en que figuran las expresiones algebraicas de los teoremas de Pitágoras, altura y cateto, y la introducción del concepto de proyección. La sensación que transmite esta última subsección es de transición de un triángulo rectángulo a un triángulo cualquiera, sin querer detenerse excesivamente en ello para no propiciar que los estudiantes traten de limitarse a emplear el método de resolución por descomposición.

2. Teoremas del seno y coseno

En la línea con la conclusión ahora extraída, la sección comienza alabando ambos teoremas como relaciones que permiten prescindir de la resolución por descomposición en triángulos rectángulos. Tras ello, el apartado 2.1 dedicado al teorema del seno comienza. Así, el teorema es enunciado, enmarcado y resaltado en rosa pastel, tras lo cual se procede a su demostración. La demostración empleada, mostrada en la figura 6.3, es aquella convencional por la cual un triángulo acutángulo es descompuesto en dos triángulos rectángulos a través de la altura de un lado horizontal, y las expresiones de dicha altura en términos de los lados restantes son igualadas. Repitiendo el proceso con otro lado y altura, y aplicando transitividad, el teorema es finalmente demostrado.


Los lados *a*, *b* y *c* de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Para demostrar dicho teorema, consideraremos el siguiente triángulo. Al trazar la altura *h* desde *A*, obtenemos dos triángulos rectángulos y se cumple:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

Por tanto: $h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Si trazamos una altura desde *B*, tendremos: $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Finalmente, concluimos que: $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Figura 6.3. Demostración del teorema del seno en el libro de texto.

Siguiendo el esquema de la sección previa, la página concluye con un ejemplo de aplicación del teorema para la resolución de un triángulo. En este caso, sin embargo, la comprobación del ejemplo sí alude a una propiedad geométrica de los triángulos no involucrada durante su resolución: la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera debe ser siempre mayor que la longitud del lado restante. Es el primer punto en que vemos un esfuerzo por explicitar la conexión existente entre geometría y trigonometría, lo cual queda afianzado por la cuestión recogida al margen y relativa a la relación existente entre la constante de proporcionalidad del teorema y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo sobre el que se aplica (3ª actividad de tipo cuestión de la sección 4.3).

La exposición se repite fielmente en el apartado 2.2 vinculado al teorema del coseno, siendo este enunciado, demostrado (figura 6.4), y ejemplificado en la resolución de un triángulo. En este caso el ejemplo empleado se fundamenta en un ejercicio contextualizado (pieza de madera de un carpintero con ciertas dimensiones) en vez de uno descontextualizado, pero las diferencias no trascienden de este aspecto. Al margen de la página encontramos una nueva reflexión sumamente interesante acerca de cómo el teorema del coseno se reduce al teorema de Pitágoras al ser aplicado sobre un triángulo rectángulo, por lo que puede concebirse como una generalización del mismo a triángulos cualesquiera.

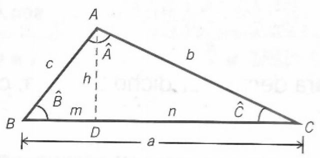
El cuadrado del lado de un triángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que estos comprenden.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Para demostrarlo, consideraremos el triángulo de la derecha. Al trazar la altura h a partir del vértice A, obtenemos dos triángulos rectángulos y se cumple:



$$\cos \hat{C} = \frac{n}{b} \Rightarrow n = b \cdot \cos \hat{C} \text{ y } m = a - n$$

Al ser el triángulo ACD rectángulo, se cumple:

$$b^2 = h^2 + n^2 = h^2 + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$$

Observamos también que se cumple:

$$c^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (a-n)^2 = h^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2 =$$
$$= h^2 + a^2 + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Restando ambas igualdades:

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Si procedemos de la misma forma con las alturas trazadas desde los vértices B y C del triángulo inicial, se pueden demostrar las otras dos igualdades del teorema.

Figura 6.4. Demostración del teorema del coseno en el libro de texto.

Nos encontramos finalmente con las dos hojas de la subsección 2.3, dedicada íntegramente a la resolución de triángulos mediante los teoremas de seno y coseno. Esta se estructura en epígrafes en función de los datos del triángulo proporcionados, recorriendo sistemáticamente los casos en que se conocen dos ángulos y un lado, dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, los tres lados, y dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Para cada caso, un posible procedimiento general de resolución es explicado, y en el último se dedica un pequeño párrafo a argumentar la existencia de hasta dos posibles soluciones para el mismo conjunto de tres datos. Este, conceptualmente más complejo, va además acompañado de una imagen que parece pretender ilustrar el proceso de construcción geométrica de ambos triángulos solución (figura 6.5), aunque sin demasiado éxito dado que ello no está relatado en el texto.

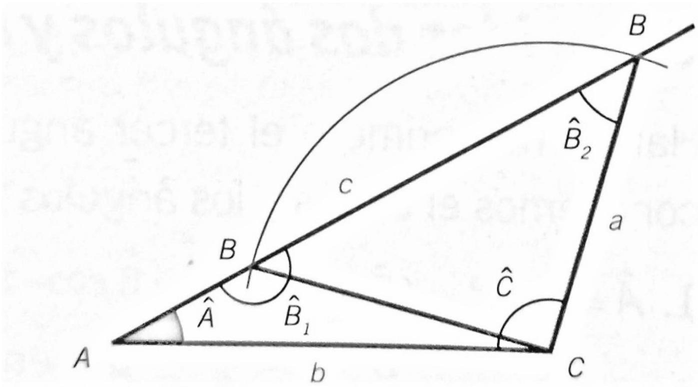
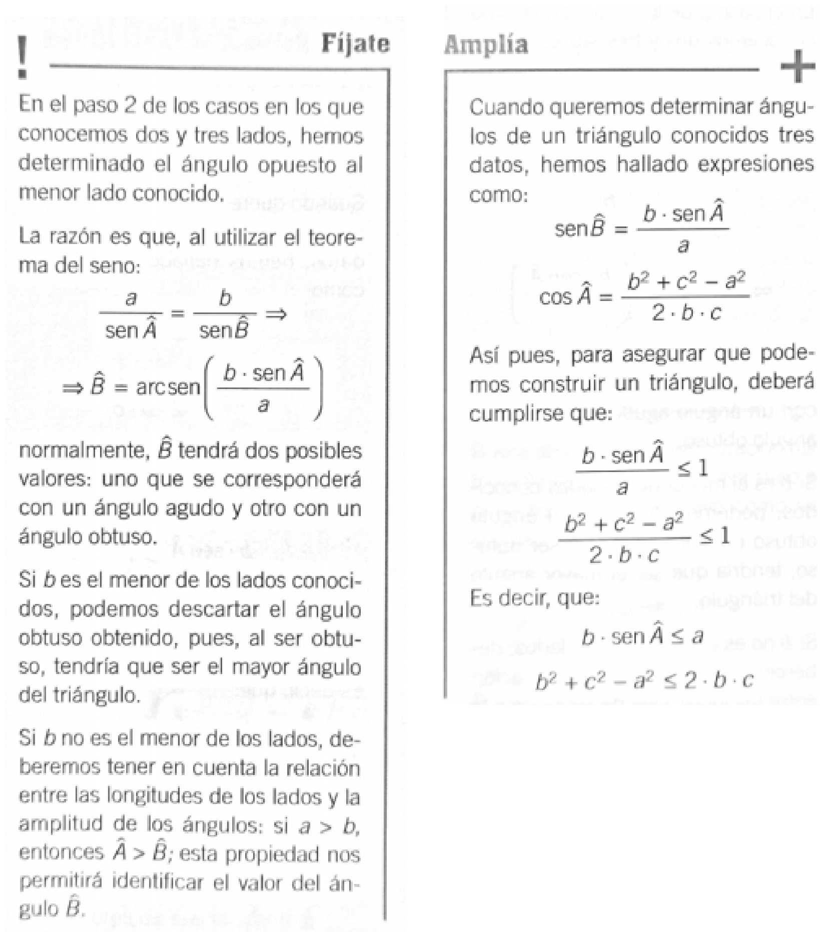


Figura 6.5. Ilustración para la resolución de triángulos conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Las dos últimas grandes reflexiones pueden encontrarse a los márgenes de estas páginas, y en la figura 6.6 del presente trabajo. La primera justifica, por medio de propiedades geométricas de los triángulos, la elección correcta entre un ángulo y su suplementario en la aplicación del teorema del seno. La segunda explora las condiciones que han de cumplirse sobre los datos proporcionados para poder construir triángulos.



! Fíjate

En el paso 2 de los casos en los que conocemos dos y tres lados, hemos determinado el ángulo opuesto al menor lado conocido.

La razón es que, al utilizar el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \text{arcsen}\left(\frac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a}\right)$$

normalmente, $\hat{B}$ tendrá dos posibles valores: uno que se corresponderá con un ángulo agudo y otro con un ángulo obtuso.

Si b es el menor de los lados conocidos, podemos descartar el ángulo obtuso obtenido, pues, al ser obtuso, tendría que ser el mayor ángulo del triángulo.

Si b no es el menor de los lados, deberemos tener en cuenta la relación entre las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos: si $a > b$, entonces $\hat{A} > \hat{B}$; esta propiedad nos permitirá identificar el valor del ángulo $\hat{B}$.

Amplía +

Cuando queremos determinar ángulos de un triángulo conocidos tres datos, hemos hallado expresiones como:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Así pues, para asegurar que podemos construir un triángulo, deberá cumplirse que:

$$\frac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a} \leq 1$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \leq 1$$

Es decir, que:

$$b \cdot \text{sen}\,\hat{A} \leq a$$

$$b^2 + c^2 - a^2 \leq 2 \cdot b \cdot c$$

Figura 6.6. Anotaciones al margen en la sección 2.3 del libro de texto.

Volvemos a echar en falta en este punto la alusión a que tres ángulos no definen un triángulo, pues existen infinitos triángulos semejantes que presentan dichos ángulos, por lo que no es suficiente con que se nos proporcionen tres datos y que estos sean compatibles con las propiedades geométricas básicas de los triángulos; sino que además dichos datos no pueden ser todos ellos ángulos. Otro rasgo del que adolece la presente sección, y que no ocurría en la relativa a la resolución de triángulos, es que ahora no se menciona la existencia de múltiples algoritmos para la resolución de un mismo triángulo. Y no es una consideración superflua, pues proponer la aplicación del teorema del coseno frente al seno en ciertas casuísticas trivializa la anotación *Fíjate* de la figura 6.6 a costa de incrementar el grado de la ecuación a resolver. Se precipita así una reflexión acerca de los pros y contras de unos y otros algoritmos, estimulando el debate y la elección individualizada en función de las propias preferencias. En cualquier caso, y salvando estas consideraciones, las casuísticas presentadas quedan exhaustivamente estudiadas, ilustradas y ejemplificadas, en la línea del resto de la unidad didáctica.

En último lugar, aludiendo a las actividades recogidas en las páginas finales del capítulo y tal como muestra la figura 6.7, podemos concluir que estas están escogidas primando la riqueza de tipologías y dificultades.

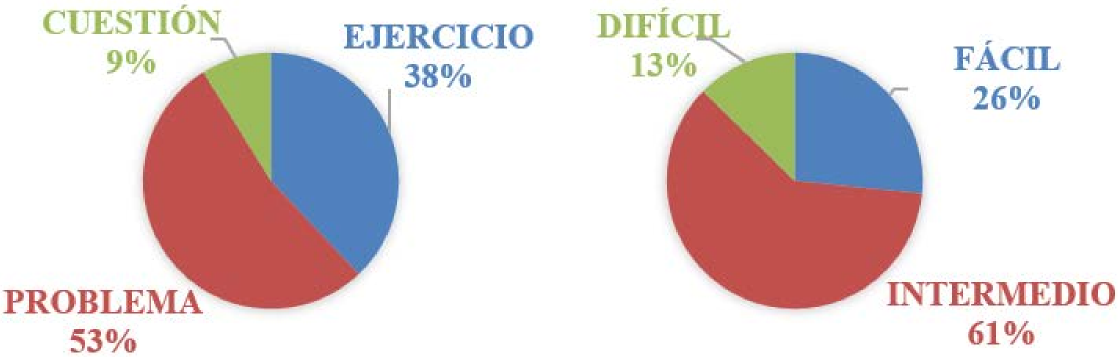


Figura 6.7. Tipologías de actividades (izqda.) y su dificultad (drcha.) en el libro de texto.

Con todo ello, podemos concluir el capítulo afirmando que la unidad didáctica diseñada por el libro de texto cumple satisfactoriamente con su objetivo, logrando en gran medida la idoneidad epistémica perseguida, y en la que los principales aspectos susceptibles de mejora conciernen, exclusivamente, a la maquetación llevada a cabo (que no por ello aspecto desdeñable). A este respecto, comparando con la configuración recogida en la tabla 6.1, destacamos la ausencia de actividades vinculadas a la circunferencia, de modo que ciertas entidades del lenguaje y de propiedades quedan desatendidas en el libro de texto.

Como último apunte merece la pena destacar que, desde la perspectiva de la idoneidad mediacional hasta ahora no abordada, una unidad didáctica relativa a la resolución de triángulos debiera caracterizarse por el despliegue de recursos tecnológicos y digitales, especialmente en lo que a programas de geometría dinámica se refiere; y sin embargo en el libro de texto estos se reducen exclusivamente a dos ejercicios elementales de entre los hallados al final del capítulo

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Prosiguiendo con el análisis de la lección, en este capítulo nos centraremos en identificar las dificultades y errores que pueden surgir durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad didáctica en cuestión. El motivo para ello es que, con el surgimiento de las tendencias constructivistas, y afianzado con la teoría de situaciones didácticas en matemáticas, el error ha dejado de ser considerado como un elemento tabú, inadmisible y sancionable; destinado a ser inmediatamente erradicado en el mejor de los casos. En cambio, este ocupa ahora un lugar privilegiado en la construcción del conocimiento, pues se concibe que su presencia, siempre que no sea puramente anecdótica o debida simplemente a la ignorancia, es reveladora de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o localmente inadaptado a la actividad en curso (Brousseau, 1997). Surge así una oportunidad para que el docente, con una meticulosa planificación de la situación didáctica, confronte al estudiante con su error, haciéndole tomar conciencia del mismo, y precipitando el nuevo conocimiento verdadero en este proceso cognitivo. Pero para ello este no solo debe ser capaz de identificarlos, sino de examinar su significado y origen, pues la recurrencia, reproducibilidad y persistencia de muchos de ellos ha propiciado investigaciones didácticas que aportan posibles maneras de afrontarlos; de orientar en el diseño de actividades que permitan una enseñanza más eficaz e integral.

Antes de proseguir, y ante la perspectiva catastrofista del modelo de aprendizaje dogmático y skinneriano que hemos dado, cabe decir que generalmente la dificultad que tiene el docente para trabajar con el error de sus alumnos transformándolo en una situación de aprendizaje tiene más que ver con el compromiso pedagógico que posee con la enseñanza de una ciencia que con el desprecio al error en sí mismo. En este compromiso de enseñar correctamente, el error nunca debería aparecer y cuando esto ocurre, debe ser corregido inmediatamente para dejar claro lo que es correcto y lo que está errado (Pessoa, 1997).

7.1. Dificultades previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Dado que los errores cometidos por los alumnos no son sino la evidencia de dificultades manifiestas, comenzaremos por analizar estas últimas. A este respecto, tomaremos la definición realizada por Godino, Batanero y Font (2003), según los cuales una dificultad es simplemente un indicador del grado de éxito de los estudiantes ante una actividad, tal que a mayor dificultad menor será el porcentaje de respuestas correctas, y viceversa. Para poder operar con el término, los autores realizan una catalogación en seis tipologías de dificultades, las cuales quedan recogidas a continuación junto con su posible presencia en la unidad didáctica considerada:

- Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos: La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis del contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza. Este análisis se desarrolla a continuación acorde a su presentación en el libro de texto:

- Dificultad para identificar las razones trigonométricas de ángulos en triángulos.
- Dificultad para distinguir catetos e hipotenusa.
- Dificultad para identificar el lado opuesto a un ángulo
- Dificultad para aplicar las relaciones entre razones trigonométricas en triángulos.
- Dificultad en el tratamiento algebraico de las razones trigonométricas, relaciones y fórmulas (superar modelos implícitos).
- Dificultad en la descomposición de triángulos cualesquiera en triángulos rectángulos.
- Dificultad en el seguimiento de las demostraciones formales de los teoremas de seno y coseno.
- Dificultad para comprender la globalidad de ambas demostraciones como generalización de la descomposición en triángulos rectángulos.
- Dificultad para comprender la inclusión de triángulos rectángulos en triángulos cualesquiera, y con ello la posibilidad de aplicar los teoremas del seno y coseno a los mismos.
- Dificultad para concebir el teorema del coseno como una generalización del teorema de Pitágoras.
- Dificultad para discernir qué teorema es aplicable a partir de la información proporcionada.
- Dificultad para encadenar un proceso completo de resolución de triángulos.
- Dificultad para concebir la existencia de múltiples procedimientos de resolución para un mismo triángulo, así como identificar las ventajas e inconvenientes de unos y otros.
- Dificultad en la obtención de razones trigonométricas de ángulos obtusos por medio de sus suplementarios.
- Dificultad en la obtención de ángulos obtusos a partir de razones trigonométricas y el uso de calculadora.
- Dificultad para comprender la posible inexistencia o existencia de múltiples triángulos solución en función de la información proporcionada
- Dificultad en el seguimiento de la construcción gráfica de los dos triángulos solución para el caso en que se conocen dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos (y este presenta dos soluciones).
- Dificultad para interpretar gráficamente contradicciones algebraicas que implican la inexistencia de soluciones.
- Dificultad para reconocer, comprender y emplear el lenguaje propio de la geometría.
- Dificultad para mantener una coherencia entre la notación empleada en la traducción gráfica de un enunciado y su resolución algebraica.
- Dificultad para traducir enunciados en representaciones gráficas de figuras planas.
- Dificultad para traducir ilustraciones en representaciones gráficas de figuras planas.
- Dificultad para descomponer figuras planas en triángulos.
- Dificultad para comprender e interpretar los enunciados de problemas.

- Dificultad para en la conversión entre grados en forma compleja e incompleja, y entre grados y radianes.

- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas: centran su atención en la significancia de la propuesta realizada por el docente, distinguiendo tres dimensiones:

  - Estructuración de contenidos: destacamos en este sentido la decisión de escindir la unidad didáctica de resolución de triángulos de la de trigonometría, pudiendo dar a entender que son dos entidades inconexas, cuando de hecho todos los desarrollos de aquella se cimientan sobre esta.
  - Selección de materiales didáctico: en un principio nos limitamos a emplear el libro de texto, con un uso auxiliar muy puntual de herramientas de geometría dinámica pese a su idoneidad mediacional.
  - Exposición de contenidos: una vez subsanada la decisión previa respecto a recursos materiales y trasladada la docencia sobre Geogebra por medio de la pizarra digital, la aparición y desaparición reiterada de figuras planas y expresiones algebraicas puede resultar caótica y dificultar su seguimiento.

- Dificultades que se originan en la organización del centro:

  - La proporción de 30 estudiantes por docente puede dificultar un seguimiento individualizado.
  - Una sesión semanal tiene lugar en la última hora del viernes, momento en el cual la predisposición y concentración de los estudiantes puede encontrarse mermada, así como aflorar conductas disruptivas.
  - Los estudiantes de bachiller no disponen de Chromebook, por lo que no pueden interactuar simultáneamente al profesor con los recursos digitales elaborados sobre Geogebra.

- Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado:

  - La unidad didáctica será impartida por el docente en prácticas, individuo desconocido con el cual no comparten de partida vinculación emocional alguna, pudiendo mermar su confianza e interés en la matemática presentada.
  - Muchos estudiantes conciben la etapa de Bachiller desde una perspectiva terminal en vez de propedéutica, persiguiendo exclusivamente obtener la titulación necesaria para presentarse a ciertas oposiciones o una posición privilegiada en el acceso a ciclos formativos de grado superior. En ambos casos, sin embargo, no contemplan que los conocimientos ahora adquiridos vayan a ser de utilidad ninguna en sus planes.
  - El 80% de los estudiantes no han superado el examen parcial previo, único examen hasta la fecha, por lo que su historial académico puede situarles en una posición pesimista para con el devenir de la unidad didáctica y asignatura en sí misma.

- Dificultades relacionadas con la falta de dominio de contenidos anteriores: en este punto, es de suma relevancia mencionar que el 50% de estudiantes realizaron la etapa educativa previa en otros centros, por lo que no se dispone de un registro tan exhaustivo de los mismos como cabría desear, o como sí ocurre con los estudiantes del propio centro. Además, y al no existir otra modalidad de Bachiller en el centro que la de Ciencias, confluyen en el aula estudiantes tanto de la asignatura de 4º de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como aplicadas (recordar la vigencia de la LOMCE hasta el presente curso). Partimos de estas premisas al enunciar las posibles dificultades mostradas a continuación:

- Desconocimiento de cualquier noción relativa a la trigonometría: definición y relación entre razones trigonométricas, identidades trigonométricas, cálculo de razones trigonométricas mediante calculadora, etc.
- Dificultad en la conversión entre grados en forma compleja e incompleja, y entre grados y radianes.
- Dificultad en el reconocimiento de figuras congruentes, semejantes, lados y ángulos homólogos, su razón de semejanza y aplicación del teorema de Tales.
- Dificultad para reconocer lugares geométricos en el plano en general, y rectas y puntos notables de triángulos en particular.
- Dificultad en la aplicación y manipulación algebraica para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que involucren razones.
- Dificultad para emplear el lenguaje matemático

7.2. Errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Aunque se han desarrollado multitud de estudios en la identificación y catalogación de tipologías de error en las últimas décadas, la mayoría ha centrado su atención en el conocimiento matemático desde una perspectiva global, como es el caso de Brousseau (2001). Entre aquellos pocos que tratan de dotar de una mayor concreción temática a sus estudios, destacamos aquí el trabajo llevado a cabo por Franchi y Hernández de Rincón (2004a; 2004b) en su búsqueda de una transposición de catalogaciones clásicas y generalistas al ámbito de la geometría plana. Teniendo en cuenta que nuestra unidad didáctica se enmarca precisamente en la temática, emplearemos a continuación una adaptación de la clasificación propuesta por los autores. En ella, se ha obviado la categoría relativa a errores azarosos o anecdóticos, pues no es reveladora de hipótesis alguna por parte del estudiante, y se han unificado las de razonamiento y tecnología, pues el contenido matemático expuesto no es lo suficientemente amplio como para apreciar la matización que distingue ambas categorías. Con ello, podemos identificar seis categorías:

- Errores de pre-requisitos: se corresponden con la materialización de la falta de dominio de contenidos anteriores ya caracterizada en la sección inmediatamente previa. Incidimos únicamente en que el énfasis recae ahora sobre el álgebra elemental y aritmética (errores al despejar una variable en una ecuación dada, al aplicar las propiedades de las raíces, al obtener el factor común entre dos términos de una expresión algebraica, al simplificar fracciones de fracciones, etc.).

- Errores propios del lenguaje geométrico: aquellos relacionados con el uso inadecuado de notación y terminología. Algunos ejemplos de terminología serían el uso del término “rectángulo” para aludir a un “triángulo rectángulo”, “lado del ángulo” en lugar de “lado opuesto al ángulo”, “la (recta notable) del triángulo” en vez de “una (recta notable) del triángulo”, denominar como rombo a un cuadrado con diagonales según la vertical y horizontal, como paralelogramo a un rombo con lados paralelos a la horizontal o vertical, etc. Notar, por tanto, que consideramos también como error la imprecisión en el uso del lenguaje, cuando esta pueda vincularse a propiedades incluidas en el esquema conceptual que nada tengan que ver con la definición del concepto. Volveremos sobre este aspecto al aludir a los posibles orígenes de los errores aquí descritos. En cuanto a notación, destacamos su alteración entre la representación gráfica de un triángulo problema y su resolución algebraica.

- Errores gráficos: asociados a la falta de habilidad para imaginar, trazar e interpretar figuras geométricas. Se entenderá que el estudiante incurre en este tipo de errores cuando dibuja figuras geométricas que no se corresponden con la actividad, no guardan proporción con las dimensiones planteadas, hace un uso parcial de la información proporcionada, o inclusive cuando opta por no dibujar una figura geométrica a propósito de un enunciado.

- Errores de razonamiento: aquellos derivados de un mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, conllevando un manejo errado de axiomas, teoremas, corolarios y definiciones. Es, con diferencia, la tipología de error más amplia y compleja de prever, por lo que nos limitaremos por ahora a incluir los casos en que se identifiquen como triángulos rectángulos aquellos oblicuángulos, y en consecuencia se aplique sobre los mismos el teorema de Pitágoras o directamente razones trigonométricas directamente; se use el recíproco de una implicación como verdadera, concluyendo que un triángulo es oblicuángulo porque sobre él se haya podido aplicar el teorema del coseno; se confundan trapecios con paralelogramos, realizando una incorrecta descomposición en triángulos; se aplique el teorema de Tales a figuras planas de las que no puede concluirse, a priori, su semejanza, pero se "parezcan lo suficiente"…

- Errores de transferencia: aluden a los evidenciados durante la matematización del entorno, cuando el estudiante transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico. Estos son específicos del problema en cuestión, por lo que carece de sentido prever casos concretos.

- Errores de técnica: coincidentes con la concepción de Brousseau (2001), hacen referencia a la aplicación deficiente de una elección oportuna. Esto es, errores en la puesta en práctica de un algoritmo adecuadamente escogido. Hablamos así, por ejemplo, de la incapacidad para aplicar los teoremas oportunos ante un triángulo oblicuángulo para el cual se ha planteado correctamente el orden de pasos necesario para obtener todas sus magnitudes, a dar una única solución en problemas que tienen dos, a no percatarse de las contradicciones alcanzadas en problemas de triángulos sin solución, a no realizar la sustitución numérica en actividades que así lo requieran, etc.

Como puede observarse, las tipologías de errores observables en geometría son muy diversas, a las cuales habría que añadir aquellas específicas del álgebra, dada la relevancia de la trigonometría en la resolución de triángulos en Bachiller. Sin embargo, y de acuerdo con la catalogación realizada por Socas (1997), esta rama de las matemáticas ya ha sido implícitamente considerada a través de los errores de pre-requisitos y de técnica, a los cuales únicamente quedarían por incluir los errores propios del lenguaje algebraico, al uso de la categoría definida para el lenguaje geométrico.

Del mismo modo, y siguiendo el trabajo ahora mencionado (Socas, 1997), la dimensión socioafectiva debe ser estar siempre presente, y como tal vincular una categoría de errores a la misma. Sin embargo, no ahondaremos en ello, pues para poder determinar este tipo de errores es necesario realizar estudios mucho más específicos y prolongados en el tiempo de lo que un Practicum II permite atestiguar, de manera que puedan aflorar los motivos implícitos que subyacen a los errores que realmente evidencian.

7.3. Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la unidad didáctica

Analizados los distintos errores previsibles en el proceso de aprendizaje de la lección, debe a continuación examinarse su causa. A este respecto, parece razonable pensar que, si una familia de errores relativos a un saber se manifiesta de forma reiterada, reproducible y persistente, su origen dista de circunscribirse al propio estudiante. Estamos hablando así de obstáculos (Godino et al., 2003), los cuales, según su origen, pueden ser ontogenéticos si están ligados al desarrollo neurofisiológico del individuo, epistemológicos si se deben al saber en sí mismo, y didácticos si están provocados por la opción de enseñanza (D'Amore y Fandiño, 2002).

Dado que poco desarrollo neurofisiológico queda a los 16 años que pueda ligarse coherentemente a la matemática, y la formación de uno mismo en didáctica de la matemática no permite evaluar cómo la construcción de conocimientos chocha y se apoya sobre los obstáculos epistemológicos en etapas educativas tan avanzadas, centraremos nuestra atención en los obstáculos de origen didáctico. El motivo es que, durante el estudio pormenorizado de los libros de texto en los tres capítulos previos, y de manera totalmente colateral, se ha detectado una profusión de distractores en todos ellos. Sirvan de ejemplo todas las actividades presentadas en el capítulo 4 en las que figure una ilustración y no se enmarquen en la geometría analítica.

Para comprender la importancia de los distractores, partimos de la premisa comúnmente aceptada de que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría preuniversitaria, las representaciones gráficas presentadas al alumnado son de gran relevancia. Sin embargo, para cada noción introducida, estas suelen reducirse a un número muy limitado de casuísticas, lo cual propicia que el estudiante construya sus propios esquemas conceptuales generalmente erróneos, alejados de la verdadera definición del concepto. Destacamos aquí dos detonantes de esta disonancia entre esquema y concepto (Barrantes et al., 2014):

- Distractores de orientación: representaciones estereotipadas en las que se repiten ciertas propiedades visuales superfluas, provocando que se incluyan indebidamente en el esquema. Estas propiedades hacen alusión en la mayoría de los casos a la búsqueda del paralelismo con la hoja del libro de texto. Distinguimos así los casos ilustrados en la figura 7.1 en que los ángulos se representan partiendo de un segmento horizontal, todo conjunto de rectas paralelas y perpendiculares siguen la horizontal o vertical, los triángulos rectángulos se muestran siempre apoyados sobre un lado horizontal que coincide con un cateto, todo trapecio ha de mostrarse apoyado sobre uno de sus lados paralelos, y todo polígono ha de apoyar sobre un lado horizontal, a excepción de los rombos que han de apoyar sobre un vértice.

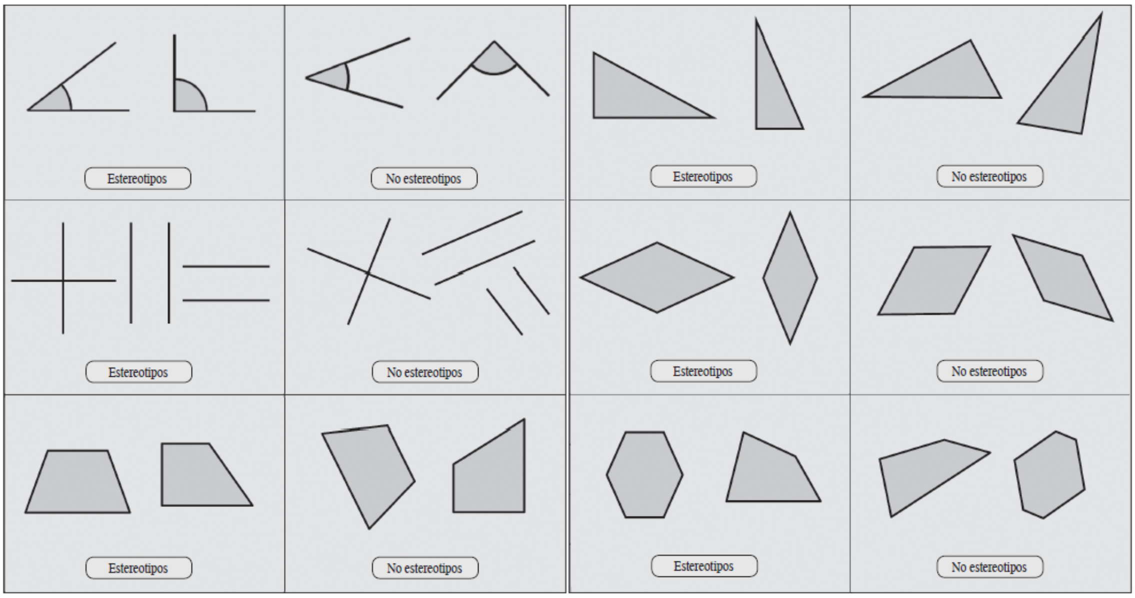


Figura 7.1. Algunos distractores de orientación en la geometría plana. Adaptado de Barrantes, López y Leno (2014).

- Distractores de estructuración: representaciones débiles de un concepto, en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio, sin intencionalidad, provocando que se omitan del esquema. Incluimos en esta categoría la presentación de los triángulos isósceles con el lado desigual siempre menor que los restantes, sobre el cual además apoya. De igual modo, aludimos aquí a la representación de ortocentros y circuncentros siempre interiores, a dibujar una única altura que será además vertical y paralela a los márgenes izquierdo y derecho del libro de texto, a evitar ilustrar alturas exteriores, y a omitir figuras planas convexas. Ejemplos de ello pueden observarse en la figura 7.2.

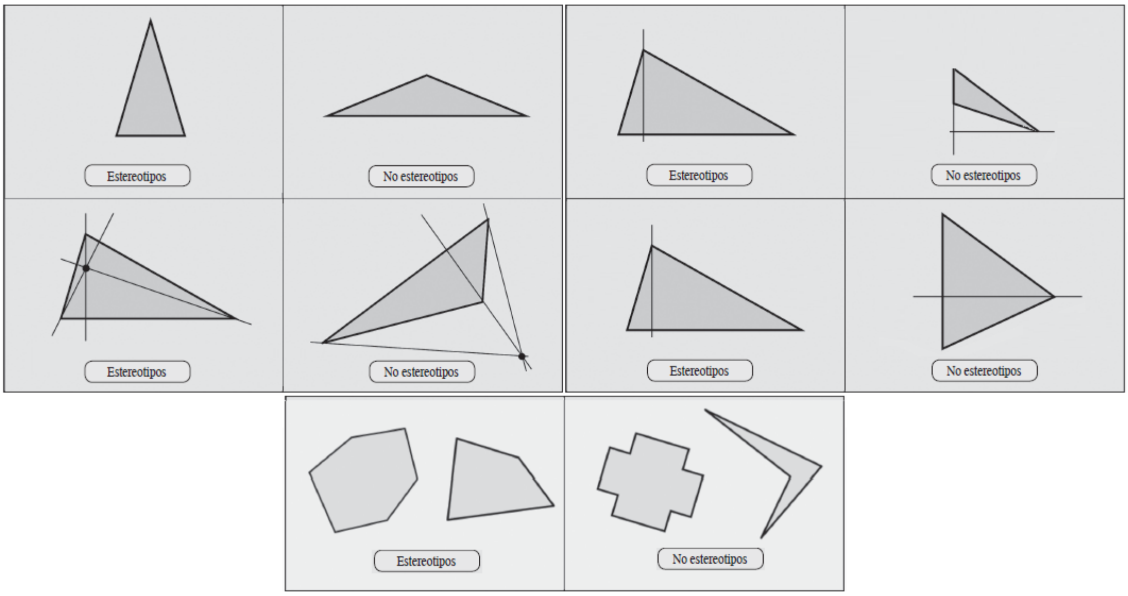


Figura 7.2. Algunos distractores de estructuración en la geometría plana. Adaptado de Barrantes, López y Leno (2014).

Capítulo 8
El proceso de estudio

En este capítulo y restantes abordaremos la fase de docencia autónoma desarrollada durante el transcurso del Practicum II. Como puede desprenderse de la matemática analizada hasta el momento, esta fase consistió en impartir la unidad didáctica relativa a la resolución de triángulos al grupo de 1º de Bachiller de la nueva modalidad de Ciencias y Tecnología. En cualquier caso, y como venimos ilustrando a lo largo de la memoria, Matemáticas (como asignatura de 1º de Bachiller) no ha sufrido variaciones significativas ni en contenidos ni en asignación de sesiones, que siguen siendo semanalmente 4 con una duración de 55 minutos cada una.

El grupo en cuestión consta de 30 estudiantes, sumamente numeroso para una primera experiencia docente. Dada su magnitud, la metodología empleada será fundamentalmente de clase magistral en la introducción de conceptos, cuya asimilación se analizará por medio de momentos dialógicos durante la propia exposición y tras la resolución de actividades de manera autónoma. Será a través de estos momentos, así como de las producciones generadas diariamente, que se producirá la mayor parte de retroalimentación. Cabe destacar, en este sentido, la flexibilidad que confiere Google Classroom al permitir que los estudiantes entreguen digitalmente y de manera sumamente intuitiva sus producciones en horario no lectivo, de modo que el docente pueda adaptar su planificación sesión a sesión en función de las conclusiones obtenidas del estudio de las mismas. En definitiva, se ha optado por una opción de enseñanza eminentemente clásica, justificada fundamentalmente por el tamaño del grupo, pero también por la madurez esperada en sus integrantes dada su edad y tratarse de una etapa postobligatoria.

Todavía desde un enfoque mediacional, a priori se contempló circunscribirse, a excepción de varios vídeos introductorios, a la unidad didáctica del libro de texto analizada en el capítulo 6, por coherencia con la práctica habitual del centro y del docente titular. Sin embargo, de la reflexión que siguió a la primera sesión impartida, con carácter introductorio a la par que diagnóstico, se optó por trasladar la parte expositiva de la lección a Geogebra, tal como será analizado posteriormente en el presente capítulo. Por otro lado, las actividades presentes en el libro de texto fueron complementadas con una selección de entre las recogidas en la obra de Gelfand y Saul (2001).

8.1. Distribución del tiempo de clase

Dado el volumen de contenidos que caracterizaban hasta la fecha los currículos de matemática a nivel nacional, y el proceso todavía de transición en que nos encontramos, la resolución de triángulos se sigue contemplando como una unidad sumamente breve en la programación didáctica anual de la asignatura, destinando 6 sesiones a la misma. Recordar en este punto que, pese a su brevedad, esta extensión sigue superando la destinada por otras editoriales, que suelen acotarla en 2 sesiones (Alcaide et al., 2015; Vizmanos et al., 2011).

Acorde al calendario y horario del centro, la temporalización seguida queda recogida en la tabla 8.1, donde se incluyen sucintamente los contenidos matemáticos tratados.

Sesión 1 (03/11/22)	Sesión 2 (04/11/22)	Sesión 3 (07/11/22)	Sesión 4 (09/11/22)
Toma de contacto	Resolución de triángulos rectángulos	Resolución de triángulos por descomposición en triángulos rectángulos	Teoremas del seno y coseno: enunciado y demostración
Sesión 5 (10/11/22)	**Sesión 6 (11/11/22)**	**Sesiones 7 y 8 (14/11/22, 16/11/22)**	**Sesión 9 (17/11/22)**
Resolución de triángulos mediante aplicación de teoremas de seno y coseno: Casos con solución única	Resolución de triángulos mediante aplicación de teoremas de seno y coseno: Caso con solución doble	Repaso de los contenidos del primer trimestre	Examen global del primer trimestre

Tabla 8.1. Temporalización de la unidad didáctica de resolución de triángulos.

Entrando en detalle, el planteamiento de cada sesión queda recogido en la tabla 8.2, donde se pormenoriza cada acción llevada a cabo, el tiempo requerido, el responsable del proceso y metodología empleada.

Sesión	Tipo de actividad	Tiempo	Responsable	Docencia
1 Toma de contacto	**Presentación del tema y de uno mismo** Significado de resolver un triángulo y su relevancia en la óptica (vídeos)	10 min	Docente	Magistral
	Introducción Fijación de lenguaje verbal, notación y simbología	20 min	Docente	Magistral
	Evaluación diagnóstica oral Influencia de los distractores y de la clasificación por particiones	25 min	Compartida	Dialógica
2 Triángulos rectángulos	Explicación de casos posibles y teoremas y razones trigonométricas aplicables	15 min	Docente	Magistral
	Resolución de dos casos: ejemplo y generalización	10 min	Docente	Magistral
	Resolución de los cuatro casos restantes: ejemplo y generalización	15 min	Estudiante	Autónoma
	Puesta en común para comparar procedimientos	15 min	Compartida	Dialógica
3 Descomposición en triángulos rectángulos	Resolución de dudas sobre clase previa y tarea	10 min	Compartida	Dialógica
	Explicación y fijación de notación para proyección	5 min	Docente	Magistral
	Resolución de caso en que se conoce un lado y ángulos adyacentes con altura interior y exterior: ejemplo y generalización	15 min	Docente	Magistral
	Resolución de caso en que se conocen dos lados y ángulo comprendido con altura interior y exterior: ejemplo y generalización.	15 min	Estudiante	Autónoma
	Puesta en común para comparar procedimientos	10 min	Compartida	Dialógica

4[1] Teoremas del seno y coseno	Resolución de dudas sobre clase previa y tarea	15 min	Compartida	Dialógica
	Teorema del seno: enunciado y demostración con altura interior y exterior	15 min	Docente	Magistral
	Teorema del coseno: enunciado y ubicación de recurso para demostración	5 min	Docente	Magistral
5 Aplicación del teorema del seno y coseno	Exposición de casos posibles con solución única y forma general de resolución	45 min	Docente	Magistral
	Reflexión acerca de la aplicación del teorema del seno o coseno, ventajas e inconvenientes	10 min	Compartida	Dialógica
6 Aplicación del teorema del seno y coseno	Resolución de dudas sobre clase previa y tarea	20	Compartida	Dialógica
	Exposición del caso en que son conocidos dos lados y un ángulo no comprendido: Construcción geométrica de las soluciones y resolución algebraica.	20	Docente	Magistral
	Resolución del caso sobre ejemplos que resultan en ninguna, una y dos soluciones.	15	Estudiante	Autónoma
7 y 8 Repaso global	Realización autónoma de ejercicios y problemas de los contenidos del primer trimestre mientras los docentes resuelven dudas individualmente.	55 min	Estudiante	Autónoma
9 Examen	Examen global del primer trimestre	55 min	Estudiante	Autónoma

Tabla 8.2. Temporalización de la unidad didáctica de resolución de triángulos.

8.2. Actividades adicionales planificadas

Como se ha mencionado en la sección previa, por continuidad y coherencia con la práctica del centro y docente titular, la unidad didáctica fue inicialmente concebida empleando el libro de texto como principal recurso didáctico. Sin embargo, ya en la planificación y estudio de la lección previos a la fase de impartición de docencia pudo apreciarse la profusión de distractores analizados en el capítulo 7, así como una predilección por las clasificaciones por particiones en vez de jerárquicas. Dado que ambos aspectos son endémicos de la editorial (así como de la práctica totalidad de editoriales, como ilustran Barrantes, López y Leno (2014)), se creyó conveniente analizar, aunque solo fuera someramente, la influencia que hubieran podido tener hasta la fecha sobre sus esquemas

[1] La duración de la sesión es inferior a la debida pues el tiempo restante fue cedido a la tutora del grupo para tratar cuestiones ajenas a la asignatura.

conceptuales. La motivación, más allá de subsanar preconcepciones erróneas, radica fundamentalmente en dos objetivos planteados para con la instrucción.

En primer lugar, las demostraciones de los teoremas del seno y coseno han de presentarse completamente detalladas, para lo cual los estudiantes han de saber trazar alturas exteriores. Enunciamos esta aparente obviedad porque, en las demostraciones recogidas en los libros de texto, muy convenientemente se parte siempre de la altura interior de un triángulo obtusángulo y, extraída la expresión deseada, se completa la demostración "procediendo de igual modo con las alturas restantes". Sin embargo, nunca se incluye como tal dicho desarrollo, nunca se trazan las alturas restantes, dando a entender que resulta trivial e innecesario. Concebimos que esto es un error muy significativo. Por un lado, porque las deducciones y demostraciones lógicas y formales son todavía experiencias matemáticas prácticamente desconocidas para los estudiantes, que solo ahora comienzan a estar capacitados para confrontar, motivo precisamente por el cual el currículo hace especial énfasis en este aspecto (tabla 3.4). Bajo esta premisa, no parece adecuado omitir desde un inicio pasos, restando rigurosidad al proceso. Por otro lado, pues la demostración sobre alturas exteriores requiere de la identificación y aplicación de las propiedades trigonométricas de ángulos suplementarios, conocimientos de muy reciente adquisición por parte de los estudiantes y todavía no trasladados a actividades contextualizadas.

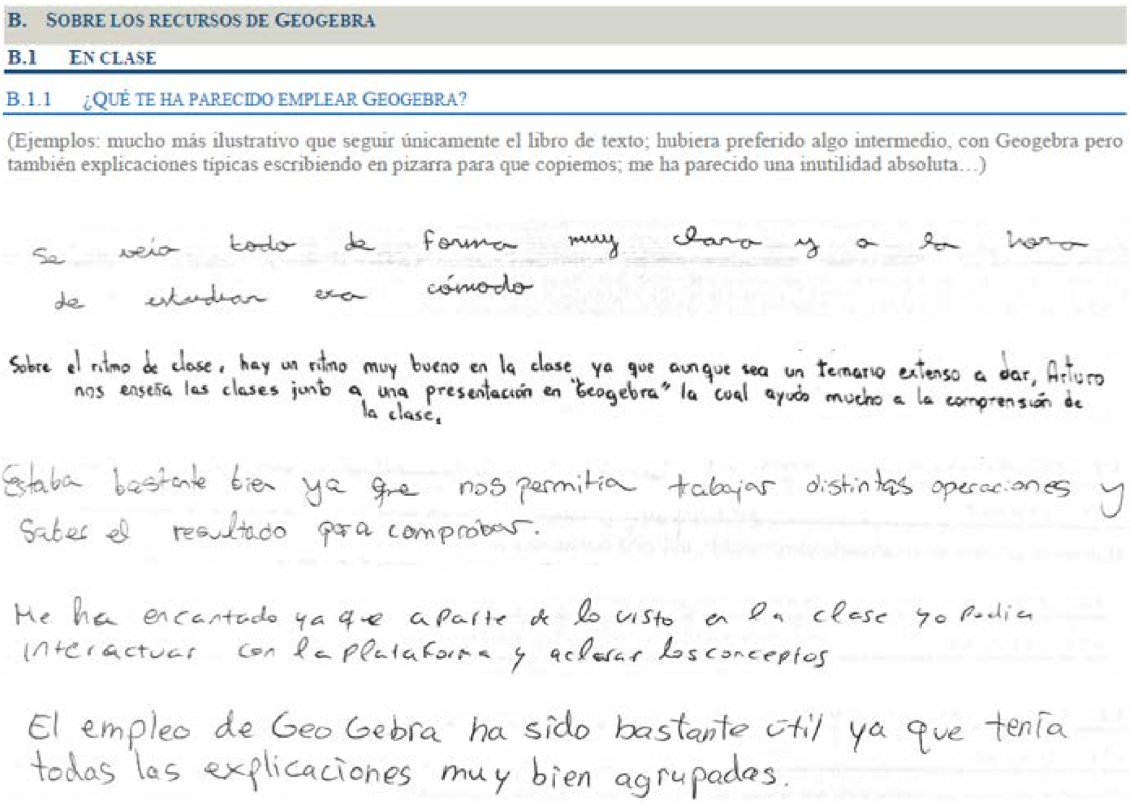
En segundo lugar, comprender que los teoremas del seno y coseno son aplicables a los triángulos rectángulos, de modo que sobre estos se reducen a razones trigonométricas y teorema de Pitágoras respectivamente, resulta fundamental de cara a conferirles ese carácter globalizador. Sin embargo, lograr este tipo de conexiones puede ser difícil si los estudiantes admiten solamente ordenaciones geométricas por partición, mostrando grandes recelos sobre ordenaciones por inclusión que conciban los triángulos rectángulos como una categoría más de triángulos, los triángulos equiláteros como un tipo particular de triángulo isósceles, los cuadrados como un tipo de rombo y, a su vez, de rectángulo, etc.

Así, durante la sesión de toma de contacto y, en particular, al pactar el lenguaje empleado durante la introducción, se llevó a cabo una breve evaluación diagnóstica oral de nociones geométricas sobre representaciones gráficas en Geogebra. Para ello, se mostró en la pizarra digital un triángulo acutángulo en posición prototípica y se fueron recorriendo sus vértices, ángulos y lados, y trazando sus rectas y puntos notables. Tras ello, se ocultaron estos últimos trazados, el triángulo fue rotado y modificado hasta ser claramente obtusángulo, y se pidió a los estudiantes que guiaran al docente en la repetición del proceso previo. El resultado fue que la gran mayoría tenía dificultades para trazar alturas de lados oblicuos, trazar alturas exteriores, y no reconocían el punto de intersección de alturas como ortocentro ni el de mediatrices como circuncentro al ser ambos exteriores.

Vistos los resultados, y lo desacertado del libro de texto en este sentido, decidió reestructurarse la opción de enseñanza, contemplando un enfoque mediacional distinto según el cual todas las exposiciones se trasladarían sobre Geogebra. Para ello se elaboró sobre dicha plataforma de geometría dinámica un libro digital (https://www.geogebra.org/m/ncfgpfa6), con un recurso por sesión, de modo que este fuera proyectado en la pizarra digital del aula, desde la que podía interactuarse a través de botones, casillas de control y deslizadores sin requerir de un ordenador. Así, previo a cada explicación se pactaba in situ con los estudiantes qué dimensiones y orientación tendría el triángulo problema (generalmente llevadas al extremo de las dimensiones de la pizarra o con algún ángulo minúsculo), lo cual solventaba la escasez de representaciones propia de los libros de texto a la par que involucraba al alumnado en el proceso, haciéndoles más partícipes de la sesión en tanto en cuanto era su triángulo. Además, todos los recursos fueron creados tal que al margen derecho quedaran tabuladas las dimensiones del triángulo ya resuelto, de modo que, una vez concedido a los estudiantes acceso al recurso tras cada sesión, este les sirviera como generador de infinidad de ejercicios.

Por petición de los estudiantes, el libro digital fue ampliado con un capítulo adicional en el cual quedaron compendiados recursos disponibles en la plataforma y considerados útiles para el repaso de la trigonometría, cuya autoría no corresponde por tanto a uno mismo.

La actividad adicional planificada pareció ser gratamente recibida, como se desprende de las 219 visitas al libro digital a fecha de depósito de la presente memoria (no se trata de un recurso público sino compartido por enlace), y de los comentarios recogidos durante la encuesta de satisfacción con la actividad docente realizada durante la última sesión del Practicum (anexo B). Algunas de estas apreciaciones favorables pueden leerse a continuación en las figuras 8.1 y 8.2. Además, en la figura 8.3 se muestra la única observación negativa que, aunque anecdótica en el conjunto del aula, es reveladora de la dificultad ya prevista en el capítulo anterior según la cual la aparición y desaparición reiterada de figuras planas y expresiones algebraicas en Geogebra puede resultar caótica y dificultar su seguimiento.


B. SOBRE LOS RECURSOS DE GEOGEBRA

B.1 EN CLASE

B.1.1 ¿QUÉ TE HA PARECIDO EMPLEAR GEOGEBRA?

(Ejemplos: mucho más ilustrativo que seguir únicamente el libro de texto; hubiera preferido algo intermedio, con Geogebra pero también explicaciones típicas escribiendo en pizarra para que copiemos; me ha parecido una inutilidad absoluta…)

Se veía todo de forma muy claro y a la hora de estudiar era cómodo

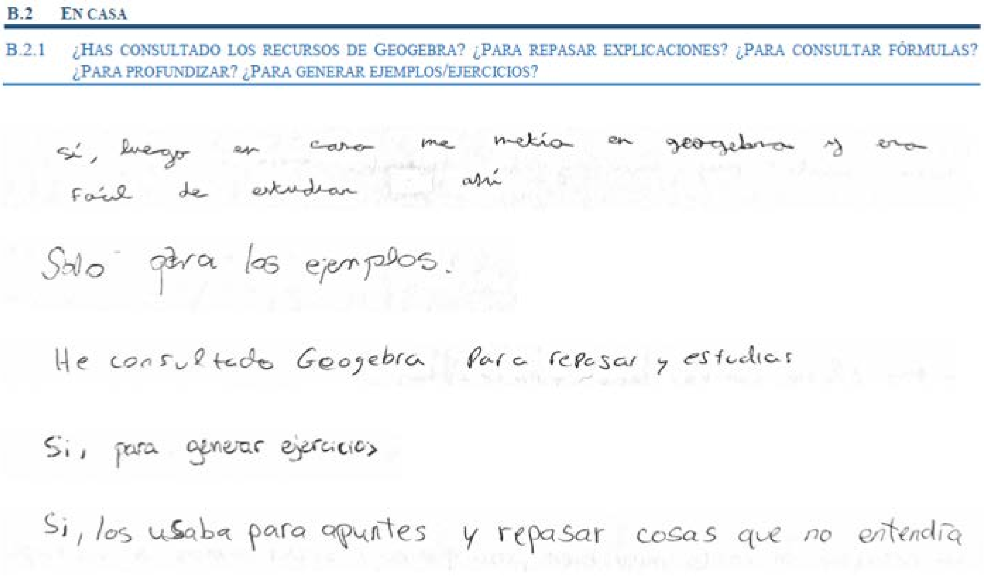
Sobre el ritmo de clase, hay un ritmo muy bueno en la clase ya que aunque sea un temario extenso a dar, Arturo nos enseña las clases junto a una presentación en "Geogebra" la cual ayudó mucho a la comprensión de la clase.

Estaba bastante bien ya que nos permitía trabajar distintas operaciones y saber el resultado para comprobar.

Me ha encantado ya que aparte de lo visto en la clase yo podía interactuar con la plataforma y aclarar los conceptos

El empleo de GeoGebra ha sido bastante útil ya que tenía todas las explicaciones muy bien agrupadas.

Figura 8.1. Opinión de estudiantes acerca del uso de Geogebra en aula.


B.2 EN CASA

B.2.1 ¿HAS CONSULTADO LOS RECURSOS DE GEOGEBRA? ¿PARA REPASAR EXPLICACIONES? ¿PARA CONSULTAR FÓRMULAS? ¿PARA PROFUNDIZAR? ¿PARA GENERAR EJEMPLOS/EJERCICIOS?

sí, luego en casa me metía en geogebra y era fácil de estudiar así

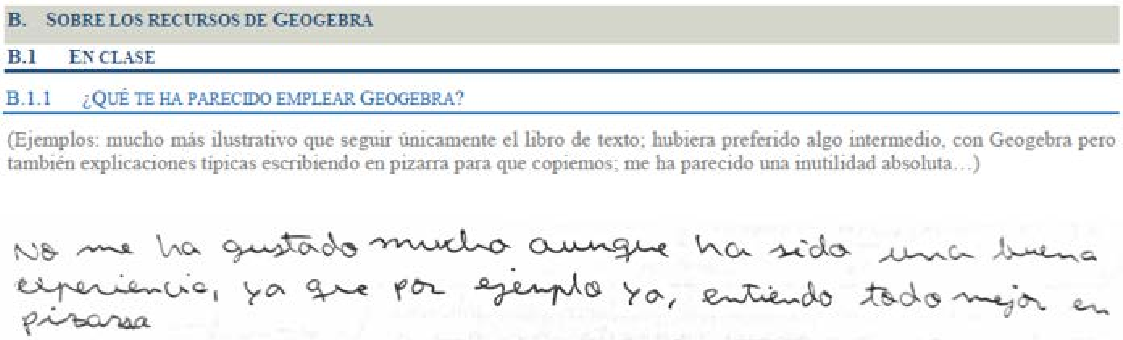
Sólo para los ejemplos.

He consultado Geogebra para repasar y estudiar

Si, para generar ejercicios

Si, los usaba para apuntes y repasar cosas que no entendía

Figura 8.2. Uso dado por los estudiantes a los recursos de Geogebra fuera del aula.


B. SOBRE LOS RECURSOS DE GEOGEBRA

B.1 EN CLASE

B.1.1 ¿QUÉ TE HA PARECIDO EMPLEAR GEOGEBRA?

(Ejemplos: mucho más ilustrativo que seguir únicamente el libro de texto; hubiera preferido algo intermedio, con Geogebra pero también explicaciones típicas escribiendo en pizarra para que copiemos; me ha parecido una inutilidad absoluta…)

No me ha gustado mucho aunque ha sido una buena experiencia, ya que por ejemplo yo, entiendo todo mejor en pizarra

Figura 8.3. Dificultad experimentada por un estudiante por el uso de Geogebra en aula.

8.3. Tarea: actividad autónoma prevista por los estudiantes

Por norma general, todas las sesiones planificadas concluyen con ciertas actividades que deben realizarse y entregarse previo a la siguiente sesión, dimensionadas tal que requieran entre una hora y hora y media. Respecto de su tipología, escogemos fundamentalmente ejercicios de refuerzo relativos a la resolución descontextualizada de triángulos, y algunos problemas contextualizados para la obtención de distancias, alturas y visuales a objetos. Estos últimos tienen como objetivo mostrar la aplicación de los contenidos tratados, así como preparar al estudiante para el examen final de evaluación, pactado entre docentes desde el comienzo de la unidad didáctica y en el cual figurarán problemas de esta naturaleza.

A las actividades autónomas diarias previas, se añade desde la sesión 4 una recopilación de ejercicios y problemas de las características ya descritas, así como cuestiones extraídas de la obra Trigonometry (Gelfand y Saul, 2001). Estas últimas pretenden servir como ampliación, ahondando en el saber básico C3.3 de validación de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas, principal incorporación respecto de la etapa previa. Dicha recopilación debe ser realizada y entregada al término de la lección, y aunque no ahondaremos en ella, en el anexo C puede encontrarse la sección de la misma relativa a cuestiones.

Capítulo 9
Experimentación

En este capítulo presentamos la experimentación llevada a cabo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula, en la cual se contempla como objeto de estudio las respuestas aportadas por los estudiantes a las preguntas concernientes a la resolución de triángulos del examen global.

9.1. Población, muestra y diseño de la experimentación

En capítulos anteriores hemos comentado ya que el grupo en cuestión consta de 30 estudiantes, los cuales han realizado la etapa educativa previa en el propio centro y otros de la comarca a partes iguales. En consecuencia, es de esperar que existan discrepancias significativas entre unos y otros en lo que a competencia matemática se refiere, teniendo en cuenta el papel fundamental que sobre esta juega la opción de enseñanza concertada por cada centro. Frente a la heterogeneidad de desempeños, nos encontramos con una marcada homogeneidad en lo que a inquietudes académicas se refiere. Así, la gran mayoría concibe Bachillerato como una etapa terminal, persiguiendo titular con el único objetivo de poder opositar o conseguir un puesto privilegiado en las listas de acceso a ciclos formativos de grado superior. En definitiva, no conciben el aprendizaje de las matemáticas como un fin en sí mismo, útil y enriquecedor, sino como un medio molesto desvinculado totalmente del fin pretendido. Como es de esperar, esta falta de motivación se plasma en los resultados obtenidos, habiendo hasta la fecha 24 estudiantes que han de examinarse de toda la evaluación en el examen global.

Es importante matizar que con falta de motivación no nos estamos refiriendo en ningún caso a desidia, pues todos los estudiantes acuden regularmente al aula y realizan las producciones solicitadas en fecha, sino a una relación insatisfactoria con la disciplina, que les lleva al cortoplacismo, huyendo del razonamiento en pos de la memorización de fórmulas y algoritmos. Ahora bien, ni que decir tiene que las descripciones tienden inevitablemente a la generalización, existiendo varios estudiantes que derrochan verdadera fascinación por la disciplina.

Como decimos, gracias a su constancia la práctica totalidad del grupo constituye muestra de nuestro estudio, habiéndose recuperado los exámenes de 26 de ellos, los cuales detallamos a continuación.

9.2. El cuestionario

El examen global abarca cinco unidades didácticas, reservando cuatro actividades a la resolución de triángulos. Dichas actividades son pactadas por ambos docentes al comienzo de la unidad didáctica, de modo que se preserve la coherencia con la tipología de examen planteada en años anteriores.

Teniendo en cuenta su carácter de síntesis, el objetivo último del cuestionario será evaluar la capacidad de los estudiantes para demostrar su interiorización de los contenidos matemáticos mínimos esperados en la lección, en un contexto en que no disponen de ayuda externa, el tiempo es limitado, y generalmente les resulta estresante.

En concreto, las cuatro actividades quedan agrupadas en dos bloques, cada uno de las cuales consta de un ejercicio y un problema, tal como muestra la tabla 9.1. El primer bloque alude a la resolución de triángulos rectángulos o cualesquiera por descomposición trivial, mientras que el segundo contempla la resolución de triángulos cualesquiera mediante la aplicación de los teoremas del seno y coseno. Los 24 estudiantes que han de examinarse de toda la evaluación deben escoger una actividad de entre las de cada bloque, de modo que trataremos de homogeneizar su dificultad, partiendo del inconveniente de ser un problema inherentemente más complejo que un ejercicio. Los 6 estudiantes restantes del grupo deben realizar las cuatro actividades, a cambio de aquellas vinculadas a las unidades didácticas ya superadas. Teniendo en cuenta la extensión de cualquiera de las dos modalidades de examen, cada actividad ha de resolverse en 5-7 minutos, por lo que deben ser escuetas y concisas.

Respecto a su vinculación con el currículo, las cuatro actividades enfatizan en la adquisición del saber básico asociado al cálculo de longitudes y medidas angulares por medio de la trigonometría (B1.1) y, en menor medida, al análisis de las propiedades y atributos de objetos geométricos (C1.1). En consecuencia y como cabía esperar, las cuatro actividades se enmarcan fundamentalmente en los descriptores curriculares de geometría en el plano (SB1) y trigonometría (SB4).

Bloque 1	**Ejercicio**	Resuelve el triángulo rectángulo en C del que se conoce el ángulo $\widehat{\mathrm{B}} = 10°$ y el lado $\mathrm{b} = 9$.
	Problema	Dos personas observan una torre de forma que las tres ubicaciones están alineadas. Sabiendo que la torre está situada entre las dos personas, que sus visuales a la parte superior de la torre son de 25º y 50º, y que la primera de ellas dista 80 m de la base de la torre, halla la distancia entre las dos personas.
Bloque 2	**Ejercicio**	Resuelve el triángulo del que se conoce su ángulo $\widehat{\mathrm{A}} = 31°$, y los lados $\mathrm{a} = 3$ cm y $\mathrm{b} = 4$ cm.
	Problema	Dos barcos salen del mismo puerto y a la misma hora, pero con rumbos distintos que forman un ángulo de 115º entre sí. Teniendo en cuenta que un barco navega a 25 km/h y el otro a 37.5 km/h, calcula a qué distancia estarán uno del otro al cabo de cuatro horas de navegación.

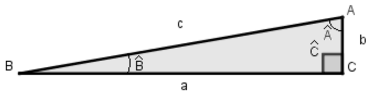
Tabla 9.1. Actividades relativas a la resolución de triángulos presentes en el examen global.

9.3 Comportamientos perseguidos y esperados

Procedemos a continuación a analizar de manera individualizada el comportamiento tanto deseado como previsible de los estudiantes al enfrentarse a las actividades previas. A partir de las hipótesis extraídas de este análisis a priori definiremos un conjunto de variables dicotómicas de interés para cada actividad, cuya presencia o ausencia será posteriormente estudiada en la sección de resultados.

B1.E) *Resuelve el triángulo rectángulo en C del que se conoce el ángulo $\widehat{B} = 10°$ y el lado $b = 9$.*

Se trata de un ejercicio básico de aplicación directa las razones trigonométricas, suma de ángulos internos de un triángulo, y teorema de Pitágoras. Existen distintas formas de resolverlo, proponiendo aquí la que sigue como ejemplo de comportamiento perseguido:



$\hat{C} = 90°, \hat{B} = 10° \rightarrow \hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 80°$

$b = 9, \hat{B} = 10° \rightarrow c = b/\mathrm{sen}(\hat{B}) = 51{,}83$

$b = 9, \hat{B} = 10° \rightarrow a = b/\mathrm{tg}(\hat{B}) = 51{,}04$

$\boxed{\{\hat{A} = 80°, \hat{B} = 10°, \hat{C} = 90°, a = 51{,}04\,, b = 9, c = 51{,}83\}}$

Respecto de los comportamientos previsibles, y siguiendo un cierto orden de relevancia por la significancia del error asociado, destacamos los siguientes:

- Dibujar un triángulo alejado de las dimensiones proporcionadas. De hacerlo, y sobredimensionar $\hat{B}$, es fácil dudar de los resultados obtenidos para a y c, tanto por su parecido como por su tamaño respecto de b. Así, el desprecio lo icónico frente a lo simbólico será la principal fuente de dificultades.
- Emplear alguna secuencia de pasos en la resolución en que encadenen resultados intermedios decimales, arrastrando errores de redondeo.
- Emplear los teoremas del seno y coseno en vez de razones trigonométricas y teorema de Pitágoras.
- Desconocer el significado de “ser rectángulo en” un vértice.
- Confundir las razones trigonométricas entre sí o su definición misma.
- Plasmar incoherencias entre la notación empleada en la ilustración y resolución algebraica.
- Emplear erróneamente la calculadora en la obtención de las razones trigonométricas.

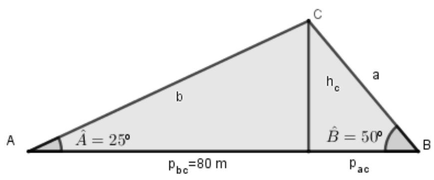
Con ello, definimos las variables dicotómicas de interés recogidas en la tabla 9.2, algunas de las cuales emplearemos en el proceso de evaluación y como tal asignamos un porcentaje sobre la calificación (columna “%” en tabla).

	%	Variable
V1	12	La ilustración es coherente con los datos proporcionados
V2	12	La notación es coherente con los datos proporcionados
V3	8	Algoritmo emplea teoremas y propiedades específicas de triángulos rectángulos
V4	24	Razones trigonométricas correctamente definidas y empleadas
V5	12	Algoritmo evita magnitudes intermedias aproximadas
V6	16	Sustitución numérica correcta
V7	8	Coherencia entre notación en ilustración y resolución algebraica
V8	8	Enunciado explícito del resultado agrupando las seis magnitudes
V9	0	Reflexión acerca de la corrección de los resultados

Tabla 9.2. Variables dicotómicas de interés del ejercicio correspondiente al bloque 1.

B1.P) *Dos personas observan una torre de forma que las tres ubicaciones están alineadas. Sabiendo que la torre está situada entre las dos personas, que sus visuales a la parte superior de la torre son de 25º y 50º, y que la primera de ellas dista 80 m de la base de la torre, halla la distancia entre las dos personas.*

Se trata de un problema de resolución de triángulos por descomposición en triángulos rectángulos. De nuevo, existen distintas formas de resolverlo, siendo la más sencilla e intuitiva la presentada a continuación como ejemplo de comportamiento perseguido:



$$\hat{A} = 25°, p_{bc} = 80\ \text{m} \to h_c = p_{bc} \cdot \text{tg}(\hat{A})$$

$$\hat{B} = 50°, h_c = p_{bc} \cdot \text{tg}(\hat{A}) \to p_{ac} = p_{bc} \cdot \frac{\text{tg}(\hat{A})}{\text{tg}(\hat{B})}$$

$$p_{bc} + p_{ac} = p_{bc}\left(1 + \frac{\text{tg}(\hat{A})}{\text{tg}(\hat{B})}\right) = 111{,}30\ \text{m}$$

$$\boxed{\textit{La distancia entre ambas personas es de } 111{,}30\ \text{m}}$$

Respecto de los comportamientos previsibles destacamos los siguientes:

- Interpretar erróneamente la disposición de personas y torre, de modo que la torre quede en un extremo.
- Interpretar el triángulo como rectángulo en C.
- Dibujar un triángulo alejado de las dimensiones proporcionadas.
- Resolución aplicando teoremas del seno y coseno.
- Suponer linealidad en la función tangente, de modo que, a doble ángulo, doble tangente, luego mitad de proyección, y la distancia entre ambas personas es simplemente vez y media la de la primera persona a la torre.
- Realizar sustituciones numéricas tempranas de modo que se arrastren errores de redondeo.
- Obviar las unidades de medida.
- Confundir las razones trigonométricas entre sí o su definición misma.
- Plasmar incoherencias entre la notación empleada en la ilustración y resolución algebraica.
- Emplear erróneamente la calculadora en la obtención de las razones trigonométricas.
- No enunciar explícitamente la respuesta al problema.

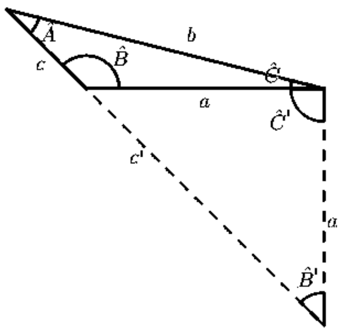
Con ello, definimos las variables dicotómicas de interés recogidas en la tabla 9.3, algunas de las cuales emplearemos en el proceso de evaluación y como tal asignamos un porcentaje sobre la calificación (columna “%” en tabla).

	%	**Variable**
V1	8	Interpretación correcta de la disposición de elementos
V2	12	La ilustración es coherente con los datos proporcionados
V3	32	Algoritmo de resolución correcto
V4	8	Algoritmo emplea teoremas y propiedades específicas de triángulos rectángulos
V5	8	Sustitución numérica en último lugar
V6	8	Figuran unidades de medida
V7	8	Coherencia entre notación en ilustración y resolución algebraica
V8	8	Enunciado explícito del resultado
V9	8	El resultado se limita a la distancia solicitada (no resuelve el triángulo)

Tabla 9.3. Variables dicotómicas de interés del problema correspondiente al bloque 1.

B2.E) *Resuelve el triángulo del que se conoce su ángulo* $\hat{A} = 31°$, *y los lados* $a = 3\ cm$ *y* $b = 4\ cm$.

Se trata de un ejercicio de resolución de triángulos mediante aplicación de los teoremas del seno y coseno con solución doble. En este caso no queda demasiado margen a la imaginación respecto de su resolución, si bien puede emplearse el teorema del coseno en último lugar:



$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\hat{B})} \to \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b \cdot \operatorname{sen}(\hat{A})}{a}\right) \to \begin{cases} \hat{B}' = 43{,}37° \\ \hat{B} = 180° - \hat{B}' = 136{,}63° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{C}' = 180° - \hat{A} - \hat{B}' = 105{,}63° \\ \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 12{,}37° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \dfrac{c'}{\operatorname{sen}(\hat{C}')} \to c' = a \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\hat{C}')}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = 5{,}61 \text{ cm} \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})} \to c = a \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\hat{C})}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = 1{,}25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Los triángulos solución son:} \\ \{\hat{A} = 31°, \hat{B} = 136{,}63°, \hat{C} = 12{,}37°, a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c = 1{,}25 \text{ cm}\} \\ \{\hat{A} = 31°, \hat{B}' = 43{,}37°, \hat{C}' = 105{,}63°, a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c' = 5{,}61\text{cm}\} \end{array}}$$

Respecto de los comportamientos previsibles destacamos los siguientes:

- Dibujar un triángulo alejado de las dimensiones proporcionadas.
- Tratar de resolver el triángulo por descomposición en triángulos rectángulos.
- Plantear un algoritmo de resolución infructuoso.

- Encontrar únicamente un triángulo solución, obviando las propiedades trigonométricas de ángulos suplementarios.
- Obviar las unidades de medida.
- Encontrar ambas soluciones, pero confundir la correspondencia de lados y ángulos de cada caso.
- No representar ambos triángulos solución una vez obtenidas sus magnitudes
- Plasmar incoherencias entre la notación empleada en la ilustración y resolución algebraica.
- Plasmar incoherencias en la notación empleada para cada triángulo solución.
- Emplear erróneamente la calculadora en la obtención de las razones trigonométricas.
- No enunciar explícitamente ambos triángulos solución, agrupando sus seis magnitudes

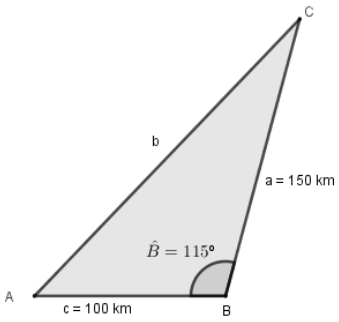
Con ello, definimos las variables dicotómicas de interés recogidas en la tabla 9.4, algunas de las cuales emplearemos en el proceso de evaluación y como tal asignamos un porcentaje sobre la calificación (columna "%" en tabla).

	%	**Variable**
V1	12	La ilustración es coherente con los datos proporcionados
V2	16	Se emplean los teoremas del seno (y puede que coseno) en el proceso de resolución
V3	4	Se explicita la relación trigonométrica para el seno de ángulos suplementarios
V4	36	Obtención de ambos triángulos solución
V5	8	Figuran unidades de medida
V6	8	Una vez obtenido el resultado, se representan gráficamente ambos triángulos solución
V7	8	Coherencia entre notación en ilustración y resolución algebraica
V8	8	Enunciado explícito del resultado, agrupando las seis magnitudes de cada solución

Tabla 9.4. Variables dicotómicas de interés del ejercicio correspondiente al bloque 2.

B2.E) *Dos barcos salen del mismo puerto y a la misma hora, pero con rumbos distintos que forman un ángulo de 115º entre sí. Teniendo en cuenta que un barco navega a 25 km/h y el otro a 37.5 km/h, calcula a qué distancia estarán uno del otro al cabo de cuatro horas de navegación.*

Se enmarca en la tipología clásica de problemas contextualizados que establecen conexiones interdisciplinares entre física y geometría. Su resolución es inmediata mediante la aplicación del teorema del coseno una vez se han obtenido las distancias recorridas por sendos barcos, teniendo en cuenta que estos describen movimientos rectilíneos uniformes:



$$a = v_a t = 150 \text{ km}, c = v_c t = 100 \text{ km}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B})} = 212{,}55 \text{ km}$$

$$\boxed{Ambos\ barcos\ distarán\ entre\ sí\ 212{,}55 \text{ km}\ tras\ cuatro\ horas\ navegando}$$

Respecto de los comportamientos previsibles destacamos los siguientes:

- Dibujar un triángulo alejado de las dimensiones proporcionadas.
- Tratar de resolver el triángulo por descomposición en triángulos rectángulos.
- Olvidar la expresión de la velocidad.
- Resolver el problema para el supuesto de una hora.
- Obviar o errar las unidades de medida (dar km/h como distancia).
- Encontrar ambas soluciones, pero confundir la correspondencia de lados y
- Plasmar incoherencias entre la notación empleada en la ilustración y resolución algebraica.
- Emplear erróneamente la calculadora en la obtención de las razones trigonométricas.
- No enunciar explícitamente la solución

Con ello, definimos las variables dicotómicas de interés recogidas en la tabla 9.5, algunas de las cuales emplearemos en el proceso de evaluación y como tal asignamos un porcentaje sobre la calificación (columna "%" en tabla).

	%	**Variable**
V1	12	La ilustración es coherente con los datos proporcionados
V2	24	Figura la fórmula de la velocidad y la aplica correctamente
V3	8	Figuran unidades de medida
V4	32	Uso correcto del teorema del coseno en su resolución
V5	8	Coherencia entre notación en ilustración y resolución algebraica
V6	8	Enunciado explícito del resultado
V7	8	El resultado se limita a la distancia solicitada (no resuelve el triángulo)

Tabla 9.5. Variables dicotómicas de interés del problema correspondiente al bloque 2.

Resulta ahora evidente el esfuerzo de homogeneización de la dificultad llevado a cabo en este segundo bloque, dando a elegir entre un problema de resolución inmediata mediante la aplicación directa del teorema del coseno y un ejercicio con solución doble que requiere una secuencia de pasos significativamente más extensa. El caso del primer bloque es más complejo, y la equiparación se ha perseguido planteando el triángulo del ejercicio con un ángulo lo suficientemente pequeño como para que los estudiantes cuestionaran lo atípico de sus resultados.

9.4 Resultados

B1.E) *Resuelve el triángulo rectángulo en C del que se conoce el ángulo $\hat{B} = 10°$ y el lado $b = 9$.*

Si procedemos a continuación a analizar la medida en que las variables dicotómicas previas surgen en las producciones de los estudiantes, y comenzando por el ejercicio correspondiente al bloque 1, encontramos los resultados mostrados en la tabla 9.6. Notar que únicamente se muestra el alumnado que escogió la actividad (por ello la ausencia de E10), y la ordenación es tal que E01 a E06 son los estudiantes que debían realizar todas las actividades, figurando a partir de E07 aquellos que tenían libertad de elección.

	Variable									Calificación
Sujeto	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**	**V8**	**V9**	
E01		+	+	+	+	+	+	+	+	8.8
E02		+	+	+		+	+	+	+	7.6
E03	+	+		+	+	+	+	+	+	9.2
E04			+	+	+	+	+	+	+	7.6
E05	+	+	+	+		+	+	+	+	8.8
E06	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10
E07		+	+				+	+		3.6
E08				+		+	+			4.8
E09				+	+	+	+	+	+	6.8
E11	+	+		+	+	+	+	+	+	9.2
E12			+	+		+	+		+	5.6
E13			+	+		+	+		+	5.6
E14		+		+	+	+	+	+	+	8
E15			+	+		+	+			5.6
E16			+	+	+	+	+	+	+	7.6
E17	+		+	+	+	+	+			8
E18			+	+		+	+	+		6.4
E19		+		+	+	+	+	+	+	8
E20	+	+		+	+	+	+	+	+	9.2
E21			+	+	+	+	+	+	+	7.6
E22	+			+	+	+	+	+	+	8
E23		+	+	+	+	+	+	+	+	8.8
E24		+		+	+	+	+	+	+	8
E25	+		+	+	+	+	+	+	+	8.8
E26			+				+	+		2.4
Total	8	12	16	23	16	23	25	20	19	**Media** 7.4

Tabla 9.6. Presencia de variables y calificaciones del ejercicio del bloque 1.

Como puede observarse, la práctica totalidad de estudiantes ha preferido realizar el ejercicio en lugar del problema, habiendo un único caso (E10) que se opone a la tendencia. La elección parece haber sido acertada como se desprende de las calificaciones obtenidas.

Centrándonos en el estudio de variables, observamos en primer lugar que, aunque todos los estudiantes hacen uso auxiliar de una representación gráfica, hay que mostrarse escéptico respecto del valor que realmente confieren a lo icónico. Así, únicamente un tercio del alumnado trata de presentar una figura que sea representativa y guarde cierta semejanza con los datos proporcionados (V1). El resto tiende a evidenciar, de nuevo, el arraigo de distractores en sus esquemas conceptuales, trazando todos ellos un triángulo rectángulo isósceles en posición prototípica. De hecho, este arraigo se extiende incluso a la notación empleada para más de la mitad de ellos (V2), concibiendo, en contra del enunciado, que de haber un ángulo recto este debe corresponder al vértice A. Ambas conclusiones quedan ilustradas en los ejemplos recogidos en la figura 9.1, y son el motivo por el cual ha decidido no evaluarse positivamente la mera presencia de una ilustración, sino su idoneidad.

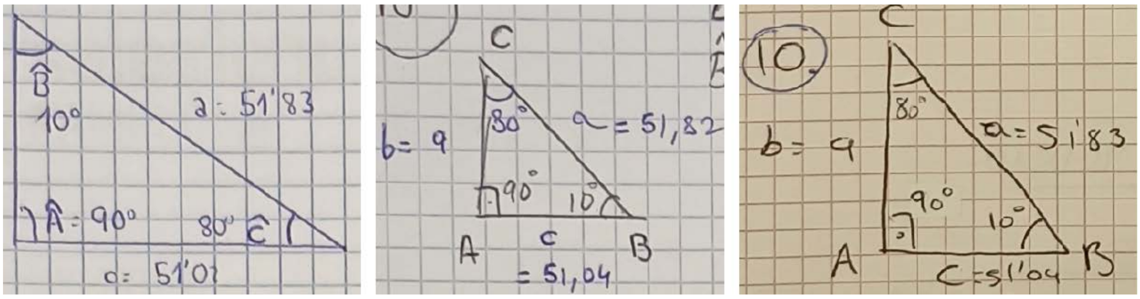


Figura 9.1. Ejemplo del efecto de distractores de orientación en las producciones, y su extensión a la simbología.

Antes de proseguir, y como estudio de caso anecdótico, es digno de mención cómo E18 corrige su representación al percatarse de que esta no resulta coherente con la información proporcionada (figura 9.2), conducta nada desdeñable en el marco de la tendencia al desprecio de lo icónico ya mencionado.

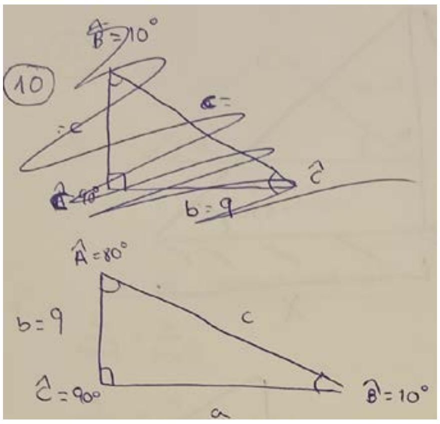


Figura 9.2. Corrección de la representación ante incoherencia con el enunciado.

Aludiendo a la variable V3, puede apreciarse cómo un tercio de los estudiantes no se circunscribe a las herramientas algebraicas específicas de triángulos rectángulos, sino que tiende a mostrar una marcada predilección por el teorema del seno. Una posible explicación a este respecto es que el teorema del seno permite un grado de abstracción mayor respecto del uso de las razones trigonométricas, en las cuales ha de tenerse claro en todo momento la disposición particular de lados y ángulos. Es además muy ilustrativo cómo aquellos estudiantes que optan por este teorema no sienten la necesidad de realizar sustituciones intermedias (V5) al uso de lo ocurrido con muchos de los que sí se circunscriben a razones trigonométricas y teorema de Pitágoras. Esta reticencia hacia las razones trigonométricas no es, en cualquier caso, indicativo de su desconocimiento, como puede concluirse gratamente de la variable V4.

Respecto de las variables restantes, V6, V7 y V8 son apreciables en la práctica totalidad del alumnado, denotando esmero y meticulosidad en sus producciones.

Finalmente, la variable V9 requiere cierta explicación respecto de la forma en que ha sido contrastada. Como hemos mencionado en secciones previas del capítulo, trató de dotarse al ejercicio de un cierto grado adicional de complejidad empleando en el triángulo magnitudes atípicas a ojos de los estudiantes. El objetivo fundamental era precipitar en los mismos una reflexión acerca de la proximidad entre las razones trigonométricas de seno y tangente para ángulos reducidos. Esta reflexión, aunque no en los términos descritos de parecido entre razones trigonométricas, quedó patente durante la realización del examen cuando multitud de estudiantes preguntaron al docente en prácticas por la viabilidad del triángulo que habían obtenido. No fueron los únicos en plantearse esta cuestión, como se desprende de los dos ejemplos, que no por ello únicos, ilustrados en la Figura 9.3. En ellos puede observarse cómo una vez realizado el ejercicio, bien lo descartan bien concluyen que “este triángulo no existe”. Nos encontramos de nuevo ante preconcepciones vinculadas a la geometría ajenas a la verdadera naturaleza del concepto, como es el suponer que las longitudes de los lados de un triángulo no pueden parecerse tanto entre sí.

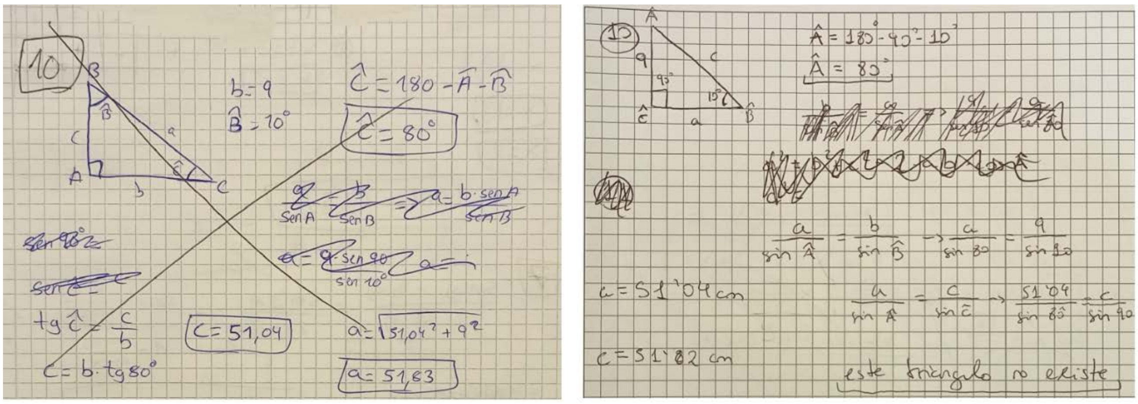


Figura 9.3. Corrección de la representación ante incoherencia con el enunciado.

No desmerecer en ningún caso la implicación que tiene sobre la autorregulación del proceso de aprendizaje la frecuencia con que el alumnado ha sido capaz de evaluar sus propias producciones, máxime cuando se ha producido durante una situación de estrés y tiempo limitado como es un examen global de evaluación.

B1.P) *Dos personas observan una torre de forma que las tres ubicaciones están alineadas. Sabiendo que la torre está situada entre las dos personas, que sus visuales a la parte superior de la torre son de 25º y 50º, y que la primera de ellas dista 80 m de la base de la torre, halla la distancia entre las dos personas.*

Repitiendo el análisis con el problema correspondiente al bloque 1, encontramos los resultados mostrados en la tabla 9.7.

	Variable									Calificación
Sujeto	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**	**V8**	**V9**	
E01	+		+	+		+		+	+	7.2
E02	+		+	+		+		+		6.4
E03	+	+	+	+		+	+	+	+	9.2
E04	+		+	+		+	+	+		7.2
E05	+		+	+		+	+	+		7.2
E06	+	+	+			+	+	+	+	8.4
E10	+	+	+	+			+			7.6
E26	+		+	+						4.8
Total	8	3	8	7	0	6	5	6	3	**Media** 7.3

Tabla 9.7. Presencia de variables y calificaciones del problema del bloque 1.

Como era de esperar del éxito causado por el ejercicio del bloque, el problema ha quedado prácticamente desierto. Además de los estudiantes obligados a realizar las cuatro actividades, solo E10 ha optado por el mismo. A estos se añade E26, que no debió quedar muy conforme con su desempeño en el ejercicio previo y decidió probar suerte aquí, con el doble de éxito nada menos.

Respecto de las calificaciones obtenidas, coinciden en término medio con el caso previo, apoyando la hipótesis de haber logrado homogeneizar la dificultad de las actividades. De nuevo, todos los estudiantes realizan una ilustración, pero únicamente un tercio de ellos persigue su representatividad (V2). La dificultad prevista de confundir la disposición de elementos por una deficiente comprensión lectora no ha sido tal (V1), y todos ellos han sabido plantear correctamente la resolución del problema (V3), aunque no han primado su exactitud (V5) pese a haber enfatizado en ello durante la instrucción.

Ahora casi todos los estudiantes priman circunscribirse a las propiedades de los triángulos rectángulos (V4), lo cual puede parecer contradictorio hasta que comparamos individualmente su comportamiento en esta y anterior actividad. Tal coherencia no se preserva, sin embargo, en la correspondencia entre notación en ilustración y resolución algebraica (V7), impecable entonces y deficiente ahora. La explicación más plausible a este respecto es que, mientras en el ejercicio la simbología venía definida en el enunciado, ahora quedaba en manos de los estudiantes.

La máxima de que no existe magnitud física sin unidad de medida parece estar sumamente arraigada (V6), siendo las únicas excepciones aquellos estudiantes que no alcanzaron un resultado numérico, luego no había unidad de medida que asociar. Del mismo modo, el resultado queda en todos los casos enunciado (V8), aunque se observa que ciertos estudiantes conciben una respuesta más correcta cuanto más completa y no cuanto más concisa (V9). Esto no es en ningún caso de extrañar pues, teniendo en cuenta que la mitad del grupo procede de otros centros y que no existe consenso entre docentes a este respecto, es muy posible que el contrato didáctico de cada estudiante difiera en este sentido.

B2.E) *Resuelve el triángulo del que se conoce su ángulo* $\hat{A} = 31°$, *y los lados* $a = 3\ cm$ *y* $b = 4\ cm$.

Prosiguiendo con el ejercicio correspondiente al bloque 2, encontramos los resultados mostrados en la tabla 9.8.

	Variable								Calificación	
Sujeto	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8		
E01	+	+	+	+	+		+	+	9.2	
E02		+		+					5.2	
E03	+	+			+		+	+	5.2	
E04		+			+		+	+	4	
E05	+	+					+		3.6	
E06	+	+	+	+	+		+	+	9.2	
E07		+			+		+	+	4	
E09		+			+		+	+	4	
E10		+			+			+	4	
E11		+			+		+	+	4	
E12		+			+		+	+	4	
E13	+	+			+		+		4.4	
E14	+	+	+	+	+		+		8.4	
E15	+	+			+		+		4.4	
E17	+	+			+		+		4.4	
E18	+	+			+		+	+	5.2	
E19		+			+		+	+	4.0	
E20	+	+			+		+		4.4	
E21	+	+			+		+	+	5.2	
E22	+	+	+	+	+		+		8.4	
E23	+	+	+	+	+		+	+	9.2	
E26		+			+		+		3.2	
Total	13	25	5	6	23	0	23	13	Media	5.3

Tabla 9.8. Presencia de variables y calificaciones del ejercicio del bloque 2.

En suma, el resultado ha sido bastante decepcionante, habiendo superado el ejercicio únicamente 9 estudiantes. El origen a nivel calificativo procede de no haber alcanzado ambos triángulos solución (V4). El origen a nivel didáctico recae, sin duda que quepa, sobre uno mismo; no debí ser capaz de trasladar los contenidos pertinentes o con la significancia requerida, pues en caso contrario no nos encontraríamos ante un 75% de estudiantes desconocedores de la posible existencia de dos soluciones. Fundamentalmente consecuencia de este error didáctico, las variables dicotómicas definidas carecen en su práctica totalidad de interés estadístico, figurando en todos o en ningún estudiante. Respecto de las que no figuran en casi ningún estudiante, quedan vinculadas todas ellas a la doble solución del triángulo, por lo que su presencia era inviable. Por otro lado, el interés didáctico de aquellas presentes de forma sistemática ha sido ya analizado en las actividades previas.

Centrándonos en las dos variables restantes (V1 y V8), destaca en primer lugar que únicamente la mitad de los estudiantes matizaron el resultado, cuando había sido hasta ahora costumbre. Una posible explicación surge del orden en que realizaron el examen, siendo esta la última actividad para la mayor parte de ellos, momento cercano al tiempo límite de realización. Finalmente, apreciamos cómo el número de estudiantes que persiguen una ilustración coherente con el enunciado prácticamente se duplica respecto de casos previos, lo cual está vinculado a la mayor complejidad con que conciben estos nuevos triángulos. Sin embargo, esta representación es, a su vez, fuente de su fracaso, pues es de esperar que persigan alcanzar tantos triángulos como tracen, no habiendo contemplado ninguno trazar dos (V6).

B2.E) *Dos barcos salen del mismo puerto y a la misma hora, pero con rumbos distintos que forman un ángulo de 115º entre sí. Teniendo en cuenta que un barco navega a 25 km/h y el otro a 37.5 km/h, calcula a qué distancia estarán uno del otro al cabo de cuatro horas de navegación.*

Finalmente, en lo que respecta al problema correspondiente al bloque 2, encontramos los resultados mostrados en la tabla 9.9.

	Variable							Calificación	
Sujeto	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**		
E01		+	+	+	+	+	+	8.8	
E03	+	+	+	+	+	+	+	8.8	
E04	+	+	+	+	+	+	+	10	
E05	+	+	+		+	+	+	6.8	
E06	+	+	+	+	+	+	+	10	
Total	4	5	5	4	5	5	5	**Media**	8.9

Tabla 9.9. Presencia de variables y calificaciones del problema del bloque 2.

Como puede observarse, únicamente encontramos a aquellos estudiantes obligados a realizar el problema. Se trata de otra muestra de que los estudiantes desconocían siquiera la existencia de triángulos con dos posibles soluciones, y no exclusivamente no saber alcanzarlos, pues en caso contrario hubiéramos encontrado algún estudiante que decide probar fortuna en el problema al bloquearse en el ejercicio (al uso de E26 en el bloque previo). Nos alejamos así de identificar un mero error para adentrarnos en el terreno del fracaso, pues no parece que el estudiante disponga de los medios para aproximarse al resultado correcto en un nuevo intento.

De las calificaciones y variables de interés definidas queda claro que no les supuso reto alguno, a excepción únicamente de un estudiante (E05), para el que no tenemos claro si tuvo un error anecdótico en la resolución o desconoce la expresión del teorema del coseno.

Concluir finalmente la sección destacando cómo cuando la contextualización del problema involucra cierta matematización del entorno, cierta interconexión con la física, los estudiantes confieren valor a sus representaciones, como si al disminuir el grado de abstracción vinculado a una disciplina la exactitud ganara en relevancia.

9.5 Síntesis de resultados

Finalizamos el capítulo presentando en la figura 9.19 los resultados globales obtenidos, y de donde se extrae que la nota media del grupo ha sido de un 6.1, con más del 70% de los estudiantes habiendo superado la evaluación vinculada a la resolución de triángulos. Como ya hemos adelantado, y pese a nuestros esfuerzos, el estigma que pesa sobre los problemas matemáticos los ha dejado desiertos, por mucho que las calificaciones medias obtenidas en los mismos hayan sido iguales o superiores a los ejercicios asociados.

Incluso entonces, y pese a lo que pueda parecer del porcentaje de aprobados mencionado, su desempeño dista mucho de ser el esperado, no digamos ya deseado. Esta opinión se fundamenta en que las cuatro actividades, con pequeñas variaciones, habían sido resueltas en multitud de ocasiones a lo largo de la unidad didáctica, tanto dialógicamente durante las sesiones en aula como de manera autónoma a través de las producciones exigidas.

Las dos explicaciones más verosímiles a este respecto son una deficiente opción de enseñanza, bajo la cual el docente en prácticas no ha sido capaz de trasladar las nociones debidas, un estudio deficiente de la matemática en cuestión, consecuencia del carácter de síntesis globalizadora del examen, o la simultaneidad de ambas. Concluimos, en cualquier caso, y con gran pesar, afirmando que los estudiantes no han aprendido a resolver triángulos no rectángulos.

	Calificación				
Sujeto	**B1.E**	**B1.P**	**B2.E**	**B2.P**	**Media**
E01	8.8	7.2	9.2	8.8	8.5
E02	7.6	6.4	5.2		4.8
E03	9.2	9.2	5.2	8.8	8.1
E04	7.6	7.2	4	10	7.2
E05	8.8	7.2	3.6	6.8	6.6
E06	10	8.4	9.2	10	9.4
E07	3.6		4		3.8
E08	4.8				2.4
E09	6.8		4		5.4
E10		7.6	4		5.8
E11	9.2		4		6.6
E12	5.6		4		4.8
E13	5.6		4.4		5
E14	8		8.4		8.2
E15	5.6		4.4		5
E16	7.6				3.8
E17	8		4.4		6.2
E18	6.4		5.2		5.8
E19	8		4		6
E20	9.2		4.4		6.8
E21	7.6		5.2		6.4
E22	8		8.4		8.2
E23	8.8		9.2		9
E24	8				4
E25	8.8				4.4
E26	2.4	4.8	3.2		5.2

Tabla 9.10. Calificaciones parciales de cada actividad y media sobre el total.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Concluimos la memoria compendiando, de forma muy concisa, los principales aspectos contemplados a lo largo de la misma, las conclusiones generales que de ellos pueden extraerse, y ciertas cuestiones que se desprenden de conclusiones parcialmente alcanzadas y en las que sería conveniente ahondar en futuros trabajos.

Breve síntesis

A lo largo de este trabajo de fin de máster se han analizado los contenidos involucradas en la resolución de triángulos, así como su proceso de estudio en 1º de Bachiller de Ciencias y Tecnología.

Para ello ha comenzado enmarcándose la matemática en cuestión en el currículo vigente, lo cual ha requerido de un estudio pormenorizado de la legislación educativa en sí misma como consecuencia de su irrupción hace apenas seis meses. Identificada su presencia y alcance, el estudio se ha trasladado a los libros de texto empleados en el centro de realización del Practicum en los cursos colindantes a aquel en el que se ha enmarcado nuestro proceso de estudio; esto es, 3º de ESO, 4º de ESO, 1º de Bachiller, 2º de Bachiller, y varios apuntes relacionados con EBAU. La longitudinalidad y coherencia entre marco y recurso han sido esclarecidas, con lo cual se ha concluido esta primera parte del trabajo.

La segunda parte ha quedado vinculada al proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado durante la realización del Practicum. Este proceso ha comenzado con un primer acercamiento al análisis ontosemiótico de la lección en el libro de texto empleado, tras lo cual se han desentrañado las dificultades y errores previsibles durante su estudio. A continuación, se ha procedido propiamente a detallar el desempeño llevado a cabo durante la fase de docencia autónoma, mostrando la planificación, temporalización y actividades diseñadas, así como otros aspectos mediacionales contemplados. Finalmente, se ha expuesto y analizado el cuestionario realizado por los estudiantes como evaluación de la unidad didáctica impartida.

Conclusiones generales del trabajo

Siguiendo el orden en que estas surgen del texto, la primera conclusión alcanzada atañe al énfasis con que el currículo vigente aborda el enfoque competencial. A este respecto, su innovación no radica tanto en promulgar reiteradamente que un desarrollo competencial ha de ser el objetivo último de la enseñanza, lo cual ya observábamos en la LOMCE, sino a cómo articula la noción de competencia en el quehacer diario del docente por medio de concreciones competenciales y de evaluación específicas de cada asignatura. Así, es al introducir y operativizar nuevas nociones didácticas que se logra abordar una de las principales deficiencias identificadas en el currículo derogado: la desvinculación existente entre las grandes competencias clave de la etapa y las disciplinas específicas a enseñar.

Por otro lado, hemos podido constatar cómo, pese a la reforma educativa, los libros de texto vinculados a las antiguas modalidades y etapas siguen presentando una gran coherencia con lo establecido en el marco legislativo. Esto se debe, fundamentalmente, a dos motivos. Por un lado, a no suponer la LOMLOE un cambio verdaderamente disruptivo. Por otro, a la intencionada omisión de una concreción conceptual curricular al uso de los antiguos estándares de aprendizaje evaluables. De este modo, aunque puede concluirse que los libros de texto no han quedado obsoletos, sí han quedado relegados en relevancia y practicidad, al uso de lo expuesto en la pirámide de la educación matemática, pues sin un marco de referencia minuciosamente detallado la concreción curricular recae ahora íntegramente en cada centro y docente.

Aludiendo ya a la segunda parte del trabajo, destacamos fundamentalmente cómo el libro de texto de referencia, si bien con una idoneidad epistémica notoria, adolece de una profusión de distractores tanto de orientación como estructuración. Esta cuestión no resulta baladí, pues consecuencia de ello constatamos, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje llevado a cabo en el centro, errores muy significativos en los esquemas conceptuales de los estudiantes. Estas preconcepciones, profundamente enraizadas, trataron de subsanarse adoptando un enfoque mediacional centrado en el uso de recursos de geometría dinámica.

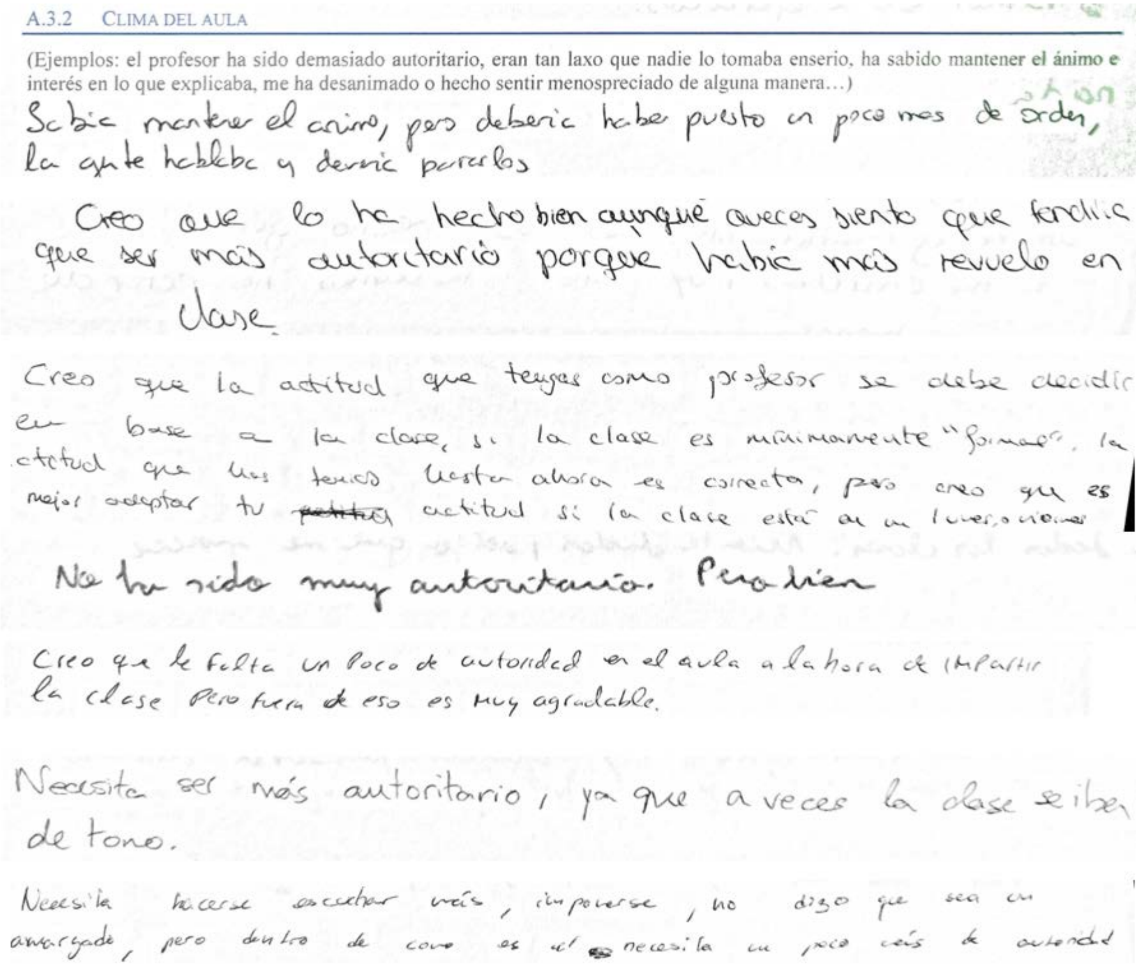
No podemos concluir, sin embargo, que las medidas planteadas tuvieran el impacto deseado, pues de los resultados del cuestionario realizado se sigue desprendiendo el desprecio de lo icónico frente a lo simbólico, el reduccionismo a lo prototípico, y, en definitiva, una vinculación deficiente e infructuosa entre geometría y álgebra.

Cuestiones abiertas

A lo largo del texto han quedado fundamentalmente dos cuestiones sin resolver. Por un lado, y como acabamos de concluir, gran parte de la innovación curricular ha de leerse de sus ausencias en lugar de presencias. Así, interpretamos que su ambigüedad conceptual persigue flexibilizar el proceso de enseñanza, dotando a cada centro y docente de la autonomía suficiente como para poder elaborar concreciones curriculares adaptadas a la realidad educativa de cada estudiante, permitiendo un aprendizaje de contenidos matemáticos verdaderamente significativo, verdaderamente competencial. Sin embargo, no podemos sino mostrar cierto escepticismo ante esta aproximación, pues sin explicitar en mayor grado dichos contenidos ni sus formas de adquisición, pero sin dotar tampoco a los docentes de la formación y medios necesarios para que lo lleven a cabo por ellos mismos, es difícil garantizar que el profesorado sea capaz de realizar el esfuerzo de exégesis requerido y orientar con ello sus prácticas hacia el desarrollo de la competencia. En suma, se trata de una cuestión preocupante, que esperamos sea subsanada paulatinamente a partir de los datos que emerjan de su puesta en práctica, así como de las futuras investigaciones en educación matemática que aborden la temática. Estas últimas son, como cabría esperar dado lo reciente de la reforma educativa, todavía escasas.

Por otro lado, ha quedado evidenciado a través del cuestionario realizado que el aprendizaje de los contenidos impartidos durante la fase de docencia autónoma ha distado de ser significativo. El desencadenante de esta deficiencia, más allá de vincularla a la propia práctica docente y opción de enseñanza, ha quedado sin identificar. En este sentido, hemos podido descartar, dentro de las limitaciones de uno mismo, que sea debido a una falta de idoneidad epistémica, como se desprende del análisis realizado sobre la unidad didáctica en el libro de texto, o a una falta de idoneidad mediacional, dada la amplia disponibilidad temporal y un uso pronunciado de la herramienta didáctica por excelencia para la enseñanza de la geometría. Puede que un análisis más prolongado en el tiempo y sobre una mayor gama de producciones hubiera permitido ahondar en la cuestión y esclarecer las fuentes del fracaso, quedando pendiente para futuros trabajos.

Por no concluir sin hipótesis alguna, aventuramos en este punto que el problema subyacente puede estar vinculado con la idoneidad socioafectiva o, más bien, con una gestión deficiente del clima del aula. Esta hipótesis se yergue, fundamentalmente, sobre las respuestas aportadas por los estudiantes en el cuestionario relativo a la calidad de la actividad docente, algunas de las cuales quedan recogidas en la figura 10.



A.3.2 CLIMA DEL AULA

(Ejemplos: el profesor ha sido demasiado autoritario, eran tan laxo que nadie lo tomaba enserio, ha sabido mantener el ánimo e interés en lo que explicaba, me ha desanimado o hecho sentir menospreciado de alguna manera…)

Sabía mantener el ánimo, pero debería haber puesto un poco más de orden, la gente hablaba y debería pararlos

Creo que lo ha hecho bien aunque aveces siento que tendría que ser más autoritario porque había más revuelo en clase.

Creo que la actitud que tengas como profesor se debe decidir en base a la clase, si la clase es mínimamente "formal", la actitud que has tenido hasta ahora es correcta, pero creo que es mejor adaptar tu ~~postura~~ actitud si la clase está en un [illegible]

No ha sido muy autoritario. Pero bien

Creo que le falta un poco de autoridad en el aula a la hora de impartir la clase pero fuera de eso es muy agradable.

Necesita ser más autoritario, ya que a veces la clase se iba de tono.

Necesita hacerse escuchar más, imponerse, no digo que sea un amargado, pero dentro de como es él necesita un poco más de autoridad

Figura 10. Comentarios de estudiantes acerca de su percepción del clima del aula.

Surge por tanto la duda, no tanto de si una mejor gestión hubiera propiciado mejores resultados, pues resulta evidente, sino de si podía haberse dotado al docente en prácticas de los medios necesarios para lograr tal gestión. Y es que, pese a lo completo y revelador que ha resultado ser el itinerario escogido en el master, cursar alguna asignatura enfocada a la formación socioafectiva hubiera sido de gran utilidad en este punto.

Al margen, y como síntesis globalizadora de la experiencia docente, mi paso por el centro Salesiano Pamplona ha resultado ser una vivencia enriquecedora en grado sumo. Me ha permitido identificar fortalezas que desconocía, como la capacidad para adaptar in situ la opción de enseñanza en función de las dificultades observadas; a la par que ha evidenciado carencias propias significativas, como la deficiente gestión ya tratada. Nada de esto hubiera sido posible sin la infinita comprensión y paciencia mostradas por estudiantes, docentes conformantes del departamento, y, cómo no, por el profesor titular que ha tenido a bien acogerme y guiarme tanto en la realización del Practicum como del TFM. Han sido todos ellos de una ayuda inconmensurable, y como tal tienen mi más profundo agradecimiento.

Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., y Sanz, L. (2015). *Matemáticas I para 1º de Bachillerato*. SM.

Alsina, À. (2010). La “pirámide de la educación matemática”: una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. © *Aula de innovación educativa, 2010, 189*, 12-16.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Editorial Graó.

Alsina, Á. (2022). Transformando el currículo español de Educación Infantil: la presencia de la competencia matemática y los procesos matemáticos. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *111,* 33-48.

Beltrán-Pellicer, P., y Alsina, Ángel. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes Revista De Educación De La Universidad De Málaga*, 3(2), 31-58.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1-20.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Editado y traducido por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. Y Warfield, V. Gran Bretaña. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x*, *57*, 5-30.

Bruner, J. S. (2001). *El Proceso mental en el aprendizaje.* Madrid: Narcea.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31–48.

CEMAT (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas.

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 174, de 5 de septiembre).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015a). *Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 127, de 2 de julio).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015b). *Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las* *enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 127, de 2 de julio).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2022a). *Decreto Foral 67/2022, de 22 de junio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 130, de 1 de julio).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2022b). *Decreto Foral 71/2022, de 29 de junio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 155, de 4 de agosto).

Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra (BON) (2022c). *Decreto Foral 72/2022, de 29 de junio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de la etapa de Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.* (BON 170, de 26 de agosto).

D'Amore, B., y Fandiño, M. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica". *Educación matemática*, *14*(1), 48-61.

Gelfand, I. M. y Saul, M. (2001). *Trigonometry.* Boston, EE. UU: Springer Science+Business Media, LLC

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros.

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 131-156.

Fábregas, P. B. (2022). *Matemáticas 1*. Grupo edebé.

Fábregas, P. B., Herrero, J. E., y Doménech, M. M. (Eds.) (2021). *Matemáticas 2º ESO.* Grupo edebé.

Fábregas, P. B., y Jiménez, V. G. (Eds.). (2016). *Matemáticas 2*. Grupo edebé.

Fábregas, P. B., Pla, N. L., y Romero, S. C. (Eds.). (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO* (Vol. 2). Grupo edebé.

Franchi, L., y Hernández de Rincón, A. I. (2004a). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8*(24), 63-71.

Franchi, L., y Hernández de Rincón, A. I. (2004b). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, *8*(25), 196-204.

López, M. B., López, M. L., y Leno, M. A. F. (2014). Las representaciones geométricas en los libros de textos utilizados en la Comunidad Autónoma de Extremadura. *Campo abierto: Revista de educación*, *33*(1), 97-116.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Niss, M. A. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. En B. L. Madison, & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 215-220). National Council on Education and the Disciplines.

Obando, G., Vasco, C. E., y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(1), 59-81.

OECD (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo*. OECD.

Pessoa, A. (1997). Cambios didácticos como consecuencia de las innovaciones curriculares. En UNESCO (Ed.), *Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe* (pp. 7-15). Santiago.

Pla, N. L., Fábregas, P. B., y Romero, S. C. (Eds.). (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO* (Vol. 2). Grupo edebé.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

UPNA (2015). *Pruebas de Acceso a la Universidad. Examen de Física.* Biblioteca, Universidad Pública de Navarra.

UPNA (2019). *Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad. Asignatura: Matemáticas II*. Biblioteca, Universidad Pública de Navarra.

Vizmanos, J. R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., y Serrano, E. (2011). *Matemáticas 1.* SM.

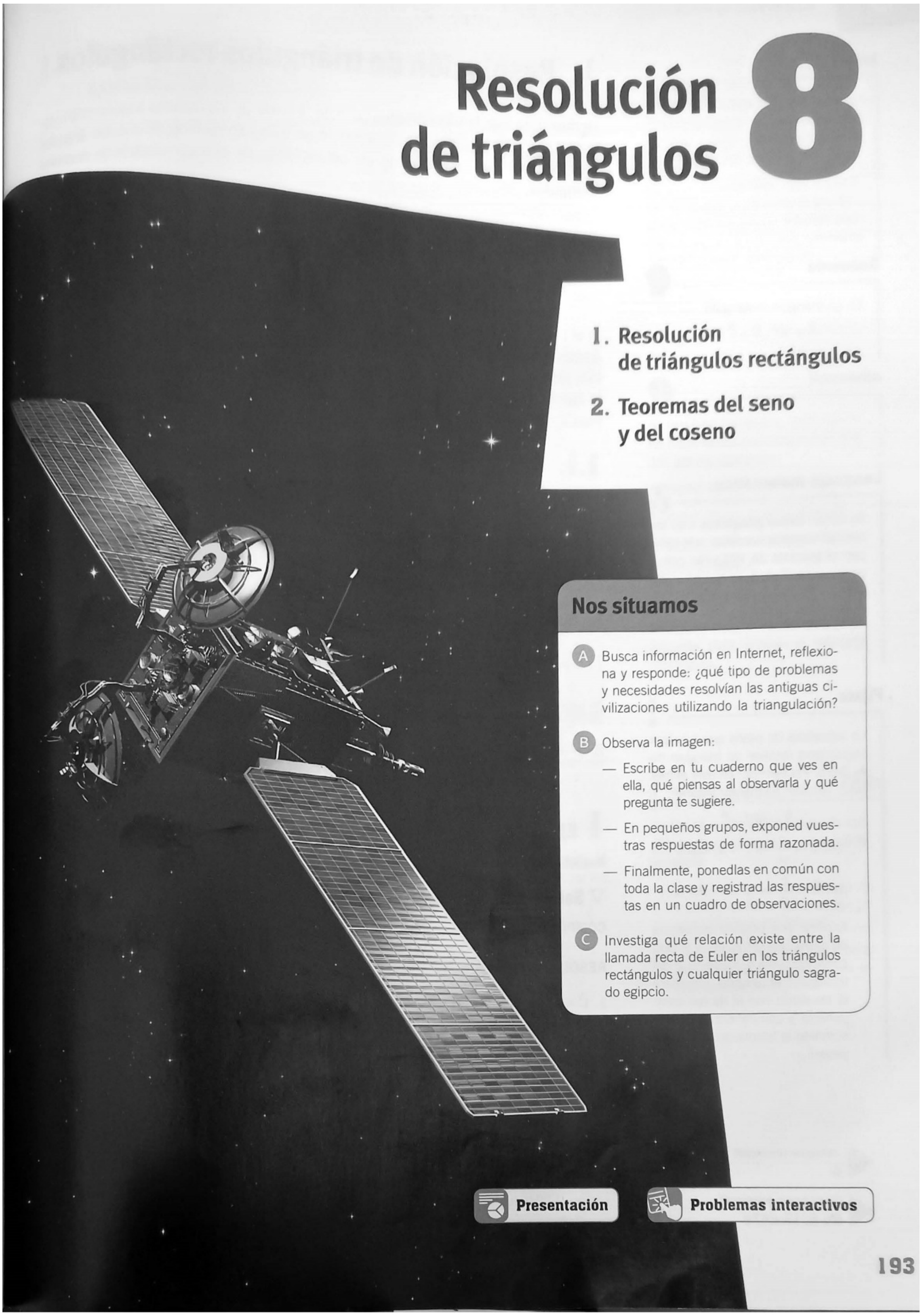
Vygotski, L. S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L. y Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127-147.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Cuestionario de evaluación de la calidad docente
C. Compendio de cuestiones de ampliación

A. Unidad didáctica del libro de texto



Resolución de triángulos 8

1. Resolución de triángulos rectángulos
2. Teoremas del seno y del coseno

Nos situamos

A Busca información en Internet, reflexiona y responde: ¿qué tipo de problemas y necesidades resolvían las antiguas civilizaciones utilizando la triangulación?

B Observa la imagen:

— Escribe en tu cuaderno que ves en ella, qué piensas al observarla y qué pregunta te sugiere.

— En pequeños grupos, exponed vuestras respuestas de forma razonada.

— Finalmente, ponedlas en común con toda la clase y registrad las respuestas en un cuadro de observaciones.

C Investiga qué relación existe entre la llamada recta de Euler en los triángulos rectángulos y cualquier triángulo sagrado egipcio.

Presentación

Problemas interactivos

193

1. Resolución de triángulos rectángulos

Hemos visto que la trigonometría permite, a partir de las razones trigonométricas, relacionar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos que lo conforman. Así, una de las aplicaciones de la trigonometría es **resolver triángulos.**

Resolver un triángulo consiste en hallar los valores de sus ángulos y sus lados.

Si el triángulo es rectángulo, disponemos ya de un dato: sabemos que uno de los ángulos es **recto (90°).** Así, las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras nos permitirán resolver el triángulo rectángulo siempre que conozcamos un ángulo agudo y un lado, o dos lados.

Recuerda

En un triángulo rectángulo:

$$\hat{A} = 90°,\ \hat{B} + \hat{C} = 90°$$

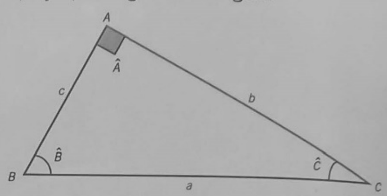
$$a^2 = b^2 + c^2$$

1.1. Resolución de un triángulo rectángulo conocidos un ángulo agudo y un lado

En este caso, podemos determinar el ángulo agudo que falta, pues será el complementario del ángulo dado, y, a continuación, los otros dos lados usando las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Así pues, si conocemos, por ejemplo, a y $\hat{C}$, del siguiente triángulo:

1. $\hat{B} = 90° - \hat{C}$
2. $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
3. $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$



Lenguaje matemático

Se llaman **ternas pitagóricas** a las ternas de números naturales que verifican el teorema de Pitágoras como, por ejemplo, 3, 4, 5, ya que $5^2 = 4^2 + 3^2$.

1 EJEMPLO

Resuelve un triángulo rectángulo con hipotenusa $a = 12$ cm y $\hat{C} = 40°$.

▽ Solución

COMPRENSIÓN. Hallaremos el otro ángulo agudo y calcularemos los catetos del triángulo.

RESOLUCIÓN

1. $\hat{C} = 40°$ y $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 90° - 40° = 50°$
2. $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a}$ 1 $\operatorname{sen} 40° = \dfrac{c}{12}$ 1 $c = 12 \cdot \operatorname{sen} 40° \simeq 12 \cdot 0{,}642 = 7{,}704$ cm
3. Aplicamos el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{12^2 - 7{,}704^2} = 9{,}2$ cm

COMPROBACIÓN. Si sumamos los ángulos, comprobamos que efectivamente suman 180° y que los lados obtenidos cumplen el teorema de Pitágoras:

Ángulos: $40° + 90° + 50° = 180°$

Lados: $7{,}704^2 + 9{,}2^2 = 143{,}99 \simeq 12^2$

Fíjate

La secuencia de pasos que hay que seguir para resolver un triángulo no es única. Por ejemplo, en este primer caso, también podríamos resolver:

$$\hat{B} = 90° - \hat{C}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \cos\hat{B}$$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

— Explica una posible secuencia de pasos que utilizarías si el lado conocido fuera la hipotenusa del triángulo rectángulo. Compara el resultado con el de tus compañeros y compañeras. ¿Habéis obtenido la misma secuencia de pasos?

Ejercicios y problemas
5 a 8, 12 a 17

Fíjate

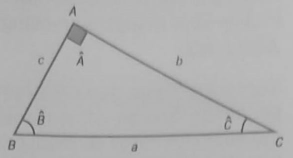
1.2. Resolución de un triángulo rectángulo conocidos dos lados

En este caso, utilizaremos el teorema de Pitágoras para determinar el lado que falta y, a continuación, calcularemos uno de los ángulos agudos utilizando las relaciones trigonométricas.

El segundo ángulo agudo quedará determinado por ser complementario del calculado.

Así, si conocemos los catetos b y c:

1. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$
2. $\operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow B = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{c}$
3. $\hat{C} = 90° - \hat{B}$



2 EJEMPLO

Resuelve un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $b = 10$ cm y $c = 12$ cm.

▽ **Solución**

COMPRENSIÓN. Calculamos la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras. Para calcular los ángulos, utilizamos la arcotangente.

RESOLUCIÓN

1. $a = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{144 + 100} = \sqrt{244} \approx 15{,}62\,\text{cm}$
2. $\operatorname{tg} \hat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{12}{10} = 1{,}2 \Rightarrow \hat{C} = \operatorname{arctg} 1{,}2 \approx 50° 12'$
3. $\hat{B} = 90° - \hat{C} = 90° - 50° 12' = 39° 48'$

COMPROBACIÓN. Los ángulos suman 180° y los lados cumplen el teorema de Pitágoras.

3 EJEMPLO

Los lados de un triángulo miden 6 m, 8 m y 10 m. Resuélvelo.

▽ **Solución**

COMPRENSIÓN. Comprobaremos que el triángulo es rectángulo y, en caso afirmativo, lo resolveremos teniendo en cuenta que el primer paso no será necesario al conocer ya los tres lados.

RESOLUCIÓN

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$$

Por tanto, es un triángulo rectángulo con hipotenusa $a = 10$ y catetos $b = 6$ y $c = 8$.

Calculamos el ángulo $\hat{B}$ a partir de la razón $\cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \Rightarrow \hat{B} = \arccos 0{,}8 \approx 36° \ 52'$$

Por último, calculamos el ángulo $\hat{C}$, sabiendo que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$:

$$\hat{C} = 90° - \hat{B} = 90° - 36° \ 52' = 53° \ 08'. \text{ Es decir: } \hat{A} = 90°;\ \hat{B} = 36° \ 52';\ \hat{C} = 53° \ 08'$$

COMPROBACIÓN. Comprueba que los tres ángulos suman 180° y que las razones trigonométricas de los ángulos se corresponden con los lados, por ejemplo, que $\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{6}{10}$...

! De nuevo, el procedimiento de resolución no es único, de modo que deberás decidir objetivamente cuál es el más exacto y menos complejo.

Ten en cuenta también que, al calcular un ángulo a partir de la arcotangente, hay más de una solución posible, pero que en este caso solamente nos interesa el ángulo agudo.

Recuerda

Al resolver triángulos rectángulos, los datos de los que dispondrás pueden ser los siguientes:

- Ángulo agudo e hipotenusa.
- Ángulo agudo y cateto opuesto.
- Ángulo agudo y cateto contiguo.
- Los dos catetos.
- Un cateto y la hipotenusa.

Indica en cada situación qué pasos seguirás para resolver el triángulo rectángulo.

Fíjate

! Resuelve el ejemplo 2 utilizando otra razón trigonométrica que no sea la tangente.

— ¿Has obtenido exactamente el mismo resultado? Si no es así, ¿a qué crees que es debido?

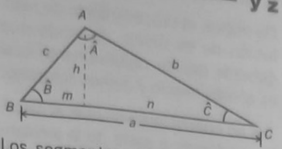
— ¿Qué criterio deberías seguir para asegurar que el resultado es el más exacto posible?

Problemas resueltos A

Ejercicios y problemas 9, 18 a 26 y 36

195

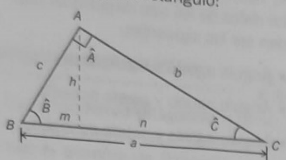
Lenguaje matemático



Los segmentos m y n reciben los nombres, respectivamente, de **«proyección de c sobre a»** y **«proyección de b sobre a»**.

Fíjate

En un triángulo rectángulo:



Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

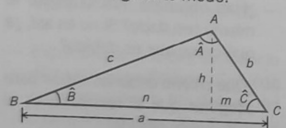
Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$

Teorema del cateto:

$$b^2 = a \cdot n, \ c^2 = a \cdot m$$

Fíjate

Si del triángulo que hay que resolver conocemos un lado (a) y sus dos ángulos adyacentes $\hat{B}$ y $\hat{C}$, podemos proceder del siguiente modo:



$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{h}{n}; \ \operatorname{tg}\hat{C} = \frac{h}{m}$$

y, a continuación, resolver el sistema de ecuaciones.

Ejercicios y problemas
10, 11 y 27 a 35

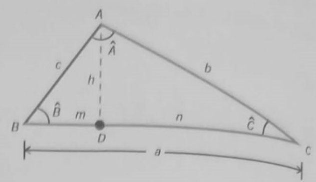
1.3. Resolución de triángulos por descomposición en triángulos rectángulos

En ocasiones, y según los datos que conozcamos, podremos resolver un triángulo cualquiera descomponiéndolo previamente en dos triángulos rectángulos.

Observa el triángulo obtusángulo de la derecha.

Si trazamos la altura h del triángulo ABC de la figura sobre la base a, se forman dos triángulos rectángulos, ABD y ACD.

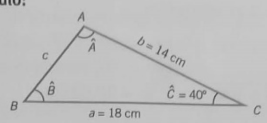
Según los datos que conozcamos, podremos resolver estos triángulos, aplicando los casos de resolución de triángulos rectángulos ya estudiados.



Para ello, deberemos tener en cuenta que: $m + n = a$ y que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

4 EJEMPLO

Resuelve el siguiente triángulo:

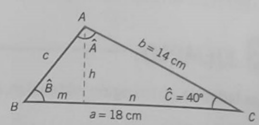


▽ Solución

COMPRENSIÓN. Descompondremos este triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos. Si trazamos la altura h del vértice superior del triángulo sobre la base, obtendremos las correspondientes proyecciones m y n.

Con las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$, obtendremos los valores h y n e, inmediatamente, el valor m.

Con estos datos ya conocidos, podremos resolver el triángulo ABC.



RESOLUCIÓN

$$h\text{: } \operatorname{sen} 40° = \frac{h}{14} \Rightarrow h = 14 \cdot \operatorname{sen} 40° = 14 \cdot 0{,}643 = 9 \text{ cm}$$

$$n\text{: } \cos 40° = \frac{n}{14} \Rightarrow n = 14 \cdot \cos 40° = 14 \cdot 0{,}766 = 10{,}72 \text{ cm}$$

$$m = 18 - 10{,}72 = 7{,}28 \text{ cm}; \ c = \sqrt{h^2 + m^2} \Rightarrow c = \sqrt{9^2 + 7{,}28^2} = 11{,}58 \text{ cm}$$

$$\hat{B}\text{: } \operatorname{tg}\hat{B} = \frac{h}{m} = \frac{9}{7{,}28} = 1{,}236 \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arctg} 1{,}236 = 51° \ 2'$$

Por último: $\hat{A} = 180° - 40° - 51° \ 2' = 88° \ 58'$

Finalmente, en ABC: $\hat{A} = 88° \ 58'$; $\hat{B} = 51° \ 2'$; $c = 11{,}58$ cm

COMPROBACIÓN. Podemos verificar la corrección del resultado si calculamos, por ejemplo, la altura h por otro procedimiento:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{h}{m} \Rightarrow h = m \cdot \operatorname{tg}\hat{B} \rightarrow h = 7{,}28 \cdot \operatorname{tg} 51° \ 2' = 7{,}28 \cdot 1{,}236 = 9 \text{ cm}$$

196

2. Teoremas del seno y del coseno

Los teoremas del seno y del coseno establecen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estas relaciones permitirán resolver triángulos cualesquiera, sin la necesidad de descomponerlos en triángulos rectángulos.

2.1. Teorema del seno

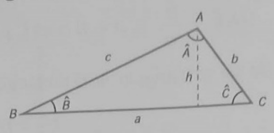
Este teorema relaciona los ángulos de un triángulo cualquiera con sus lados opuestos.

Los lados *a*, *b* y *c* de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Para demostrar dicho teorema, consideraremos el siguiente triángulo. Al trazar la altura *h* desde *A*, obtenemos dos triángulos rectángulos y se cumple:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$



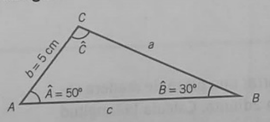
Por tanto: $h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Si trazamos una altura desde *B*, tendremos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Finalmente, concluimos que: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

5 EJEMPLO

Halla los lados *a* y *c* de este triángulo.



▽ **Solución**

COMPRENSIÓN. Al ser un triángulo obtusángulo y conocer el lado *b* y los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$, podremos aplicar el teorema del seno.

RESOLUCIÓN. Del teorema del seno: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Por lo tanto: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}50°} = \dfrac{5}{\operatorname{sen}30°} \Rightarrow a = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen}50°}{\operatorname{sen}30°} = \dfrac{5 \cdot 0{,}766}{0{,}5} = 7{,}66\text{ cm}$

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 100°;\ \dfrac{5}{\operatorname{sen}30°} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}100°} \Rightarrow c = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen}100°}{\operatorname{sen}30°} = 9{,}85\text{ cm}$

COMPROBACIÓN. Los resultados son coherentes, pues la suma de los dos lados menores es mayor que la longitud del lado mayor.

Curiosidades

Abul Wafa y Nasir al-Din al-Tusi

El **teorema del seno** es una generalización del teorema de Pitágoras y existen dos posibles autores de la demostración, ya que no fueron contemporáneos entre sí: **Abul Wafa** (940-998) y **Nasir al-Din al-Tusi** (1201-1274). Ambos fueron matemáticos y astrónomos de la antigua Persia.

Internet

Busca en Internet la demostración del teorema del seno y observa paso a paso de forma interactiva cómo se realiza.

197

Curiosidades

Ghiyath al-Kashi

El **teorema del coseno** también es una generalización del teorema de Pitágoras y tuvo un claro precursor: **Euclides** (325 a. C. – 265 a. C.). No obstante, quien definitivamente lo enunció y lo demostró fue otro matemático persa: **Ghiyath al-Kashi** (1380-1429).

Internet

Busca en Internet la demostración del teorema del coseno y observa paso a paso de forma interactiva cómo se realiza.

Fíjate

Si aplicamos el teorema del coseno referido al ángulo recto de un triángulo rectángulo, tendremos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° =$$
$$= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0 = b^2 + c^2$$

Observa que, en este caso, se reproduce literalmente el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Ejercicios y problemas
37, 48 a 50 y 66

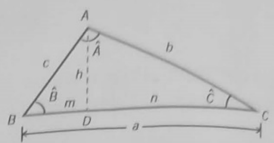
2.2. Teorema del coseno

El teorema del coseno permite relacionar los tres lados de un triángulo con el coseno de uno de sus ángulos.

El cuadrado del lado de un triángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que estos comprenden.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Para demostrarlo, consideraremos el triángulo de la derecha. Al trazar la altura h a partir del vértice A, obtenemos dos triángulos rectángulos y se cumple:



$$\cos \hat{C} = \frac{n}{b} \Rightarrow n = b \cdot \cos \hat{C} \text{ y } m = a - n$$

Al ser el triángulo ACD rectángulo, se cumple:

$$b^2 = h^2 + n^2 = h^2 + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$$

Observamos también que se cumple:

$$c^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (a - n)^2 = h^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2 =$$
$$= h^2 + a^2 + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

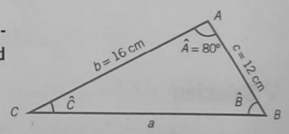
Restando ambas igualdades:

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Si procedemos de la misma forma con las alturas trazadas desde los vértices B y C del triángulo inicial, se pueden demostrar las otras dos igualdades del teorema.

6 EJEMPLO

Un carpintero tiene que recortar una pieza de madera según las medidas de la figura adjunta. Calcula la longitud resultante del tercer lado.



▽ **Solución**

COMPRENSIÓN. Con los datos del triángulo, podemos calcular el lado a mediante el teorema del coseno.

RESOLUCIÓN. Si aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos 80° = 400 - 384 \cdot 0{,}173 = 333{,}568 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{333{,}568} = 18{,}26 \text{ cm}$$

COMPROBACIÓN. Trata de construir el triángulo. Dibuja primero los dos lados de 12 cm y 16 cm de modo que formen un ángulo de 80°. Finalmente, comprueba que, en efecto, el tercer lado mide 18,26 cm.

198

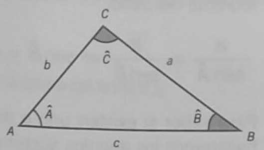
2.3. Resolución de triángulos mediante los teoremas del seno y del coseno

Veamos cómo se aplican los teoremas del seno y del coseno para resolver cualquier tipo de triángulo.

Conocidos dos ángulos y un lado

Hallaremos primero el tercer ángulo y aplicaremos el teorema del seno. Así, si conocemos el lado a y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$:

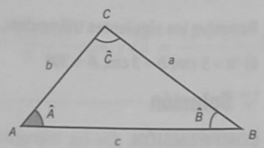
1. $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$
2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$
3. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$



Conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Calcularemos el tercer lado aplicando el teorema del coseno y aplicaremos el teorema del seno para hallar el resto de los ángulos. Por ejemplo, dados el ángulo $\hat{A}$ y los lados b y c con $b < c$:

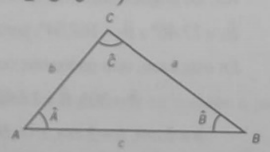
1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$
2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}\right)$
3. $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$



Conocidos los tres lados

Calcularemos un ángulo aplicando el teorema del coseno, y los otros con el teorema del seno. Por ejemplo, dados los lados a, b y c, donde $b < a$ y $b < c$:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$
2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}\right)$
3. $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$



Fíjate

En el paso 2 de los casos en los que conocemos dos y tres lados, hemos determinado el ángulo opuesto al menor lado conocido.

La razón es que, al utilizar el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}\right)$$

normalmente, $\hat{B}$ tendrá dos posibles valores: uno que se corresponderá con un ángulo agudo y otro con un ángulo obtuso.

Si b es el menor de los lados conocidos, podemos descartar el ángulo obtuso obtenido, pues, al ser obtuso, tendría que ser el mayor ángulo del triángulo.

Si b no es el menor de los lados, deberemos tener en cuenta la relación entre las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos: si $a > b$, entonces $\hat{A} > \hat{B}$; esta propiedad nos permitirá identificar el valor del ángulo $\hat{B}$.

7 EJEMPLO

Resuelve el triángulo del que conocemos dos lados $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, y el ángulo comprendido entre ellos $\hat{C} = 30°$.

▽ **Solución**

RESOLUCIÓN. Conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

$$c^2 = 10^2 + 8^2 - 160 \cdot \cos 30° = 25{,}44 \Rightarrow c = 5{,}043 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{5{,}043}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{8 \cdot \operatorname{sen} 30°}{5{,}043}\right) = 0{,}7931 \Rightarrow \hat{B} = 52{,}47° \text{ o } 127{,}53°$$

Como $b < a$, también debe ocurrir que $\hat{B} < \hat{A}$ y, por lo tanto, $\hat{B}$ no puede ser un ángulo de 127,53°, pues, al ser obtuso, debería ser el mayor ángulo del triángulo.

Por lo tanto, $\hat{B} = 52{,}47°$ y $\hat{A} = 180° - (30° + 52{,}47°) = 97{,}53°$.

Internet

Existen distintas opciones en línea con las que se puede resolver cualquier tipo de triángulo. Busca alguna de ellas.

Amplía

Cuando queremos determinar ángulos de un triángulo conocidos tres datos, hemos hallado expresiones como:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Así pues, para asegurar que podemos construir un triángulo, deberá cumplirse que:

$$\frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a} \leq 1$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \leq 1$$

Es decir, que:

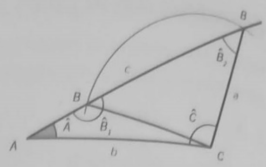
$$b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \leq a$$

$$b^2 + c^2 - a^2 \leq 2 \cdot b \cdot c$$

Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hasta ahora, tres datos permitían construir un único triangulo.

Sin embargo, dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, podemos obtener hasta dos triángulos tal y como muestra la figura. Deberemos, por lo tanto, tener en cuenta este hecho, antes de resolver el triángulo.



Dados los lados a y b y el ángulo $\hat{A}$, determinaremos el ángulo $\hat{B}$ a partir del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}$$

Para saber si existen uno o dos triángulos que cumplen con los datos iniciales, hallaremos los ángulos suplementarios $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ que tienen el mismo seno, y comprobaremos si el ángulo obtuso obtenido puede ser o no una solución. Si es solución, podrán construirse dos triángulos que cumplan las condiciones iniciales, y si no lo es, únicamente habrá un triángulo que las cumpla.

8 EJEMPLO

Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\hat{A} = 30°$ **b)** $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $\hat{A} = 30°$

▽ Solución

COMPRENSIÓN. De los triángulos conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Deberemos aplicar el teorema del seno e identificar si, con estos datos, podemos construir un único triángulo o dos triángulos.

RESOLUCIÓN

a) $\dfrac{5}{\operatorname{sen}30°} = \dfrac{3}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{3 \cdot \operatorname{sen}30°}{5} = 0{,}3$

Así, los ángulos suplementarios que cumplen esta relación son:

$\hat{B}_1 = 17{,}46°$ y $\hat{B}_2 = 162{,}54°$; pero $\hat{B}_2$ no puede ser solución, pues $\hat{B}_2 + \hat{A} = 192{,}54° > 180°$.

En este caso, solo podremos construir un único triángulo cuyas medidas son:

$$\hat{A} = 30°;\ \hat{B} = 17{,}46°,\ \hat{C} = 180° - (30° + 17{,}46°) = 132{,}54°$$

$$a = 5 \text{ cm},\ b = 3 \text{ cm},\ c^2 = 5^2 + 3^2 - 30 \cos 132{,}54° = 54{,}28 \rightarrow c = 7{,}37 \text{ cm}$$

b) $\dfrac{3}{\operatorname{sen}30°} = \dfrac{5}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen}30°}{3} = 0{,}833$. En este caso, los ángulos suplementarios son:

$\hat{B}_1 = 56{,}44°$ y $\hat{B}_2 = 123{,}56°$. Como $\hat{B}_2 + \hat{A} = 153{,}56° < 180°$, podremos construir dos triángulos distintos con estas medidas.

Triángulo 1: $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 56{,}44° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (30° + 56{,}44°) = 93{,}56°$

$a = 3$ cm, $b = 5$ cm y $c^2 = 3^2 + 5^2 - 30 \cdot \cos 93{,}56° = 35{,}86 \Rightarrow c = 5{,}99$ cm

Triángulo 2: $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 123{,}56° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (30° + 123{,}56°) = 26{,}44°$

$a = 3$ cm, $b = 5$ cm y $c^2 = 3^2 + 5^2 - 30 \cdot \cos 26{,}44° = 7{,}14 \Rightarrow c = 2{,}67$ cm

COMPROBACIÓN. Podemos dibujar los triángulos y comprobar que los resultados obtenidos son correctos.

Problemas resueltos
B

Ejercicios y problemas
38 a 47, 51 a 65 y 67 a 70

Síntesis
71 a 74

Problemas resueltos

A RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

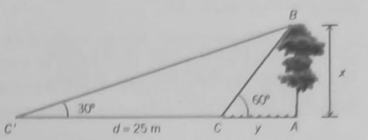
Una persona que está situada en la orilla de un río ve un árbol en la otra orilla bajo una visual de 60°. Si se aleja 25 m, la visual es de 30°. Determina la altura del árbol y la anchura del río suponiendo que el terreno es horizontal.

▽ Solución

COMPRENSIÓN. Es importante imaginar visualmente la situación del problema y constatar que los triángulos serán triángulos rectángulos. Un dibujo nos permitirá entender el problema y obtener los datos necesarios para resolverlo.

DATOS

$d = 25$ m; $\hat{C} = 60°$, $\hat{C}' = 30°$, $\hat{A} = 90°$. Llamaremos x a la altura del árbol e y, a la anchura del río.



RESOLUCIÓN

Con la visual de 60°: $\text{tg}\,60° = \dfrac{x}{y} = \sqrt{3}$

Con la visual de 30°: $\text{tg}\,30° = \dfrac{x}{y+25} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Despejamos la variable x en ambas ecuaciones e igualamos sus valores:

$$x = y\sqrt{3} = \frac{(y+25)\cdot\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y\sqrt{3} = \frac{(y+25)\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Es decir: $3y\sqrt{3} = (y+25)\cdot\sqrt{3} \Rightarrow 3y = y + 25$

Por tanto: $2y = 25 \Rightarrow y = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$ m

Para hallar el valor de x, bastará con sustituir y en una de las igualdades; por ejemplo, en la primera:

$$x = y\sqrt{3} \Rightarrow x = 12{,}5\cdot\sqrt{3} \approx 21{,}65 \text{ m}$$

Así, podemos concluir que:

— La altura del árbol es de 21,65 m.

— La anchura del río es de 12,5 m.

COMPROBACIÓN

Sustituimos los valores x e y para comprobar los valores de los ángulos de las visuales a partir de los valores de sus tangentes:

Visual de 60°: $\text{tg}\,60° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{21{,}65}{12{,}5} = 1{,}732 \simeq \sqrt{3}$

Visual de 30°: $\text{tg}\,30° = \dfrac{x}{y+25} = \dfrac{21{,}65}{12{,}5+25} = \dfrac{21{,}65}{37{,}5} = 0{,}577\overset{\frown}{3} \simeq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1. ●●○ Una persona observa el punto más alto de la estatua de Colón en Barcelona, que se encuentra a 60 m, y lo hace desde una visual de 40° respecto de la horizontal. Si retrocede 20 m, calcula:

a) El ángulo de la visual desde este nuevo punto.

b) La distancia que originalmente había entre la persona y la estatua.

Sol.: a) 33° 15' 16"; b) 71,5 m

2. ●●○ Teniendo en cuenta las características de un cartabón, halla:

a) El valor de su cateto más largo (y) y el de su hipotenusa (z) en función de su cateto más corto (x).

b) El valor de su cateto más corto (x) y el de su hipotenusa (z) en función de su cateto más largo (y).

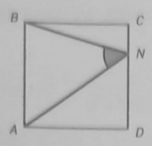
Sol.: a) $y = x\sqrt{3}$; $z = 2x$; b) $x = \dfrac{y\sqrt{3}}{3}$; $z = \dfrac{2y\sqrt{3}}{3}$

B RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

En un cuadrado *ABCD* de lado la unidad se unen los vértices *A* y *B* con un punto *N* situado sobre el lado $\overline{CD}$, de modo que la razón entre los segmentos $\overline{ND}$ y $\overline{NC}$ sea 4. Halla el ángulo que forman los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$.

▽ Solución

COMPRENSIÓN. Resulta de gran ayuda trazar, en un primer momento, un dibujo de la situación espacial del problema.



Observa que los triángulos *BCN* y *ADN* son rectángulos, mientras que el triángulo *BNA* no es rectángulo.

DATOS. $\hat{C} = \hat{D} = 90°$,

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1,\ \frac{\overline{ND}}{\overline{NC}} = 4,\ \overline{ND} + \overline{NC} = \overline{CD} = 1$$

RESOLUCIÓN. Intenta resolver el problema individualmente. Para ello, oculta la respuesta y sigue estos pasos:

Pasos

1. Determina las longitudes de los segmentos $\overline{ND}$ y $\overline{NC}$.
2. Halla el valor de $\overline{NB}$ dentro del triángulo *BCN* mediante el teorema de Pitágoras.
3. Halla el valor de $\overline{NA}$ dentro del triángulo *AND* mediante el teorema de Pitágoras.
4. Aplica el teorema del coseno en el triángulo *BNA* y resuelve la ecuación planteada.

Respuesta

1. $\overline{ND} = 4\overline{NC}$

$$\overline{ND} + \overline{NC} = 1 \Rightarrow 5\overline{NC} = 1 \Rightarrow \overline{NC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overline{ND} = \frac{4}{5}$$

2. $\overline{NB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{NC}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

3. $\overline{NA} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{ND}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

4. $\overline{AB}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{NA}^2 - 2 \cdot \overline{NB} \cdot \overline{NA} \cos\hat{N}$

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{5}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{26}}{5}\frac{\sqrt{41}}{5}\cos\hat{N}$$

$$1 = \frac{67}{25} - 2\frac{\sqrt{1066}}{25}\cos\hat{N} = \frac{67}{25} - \frac{65,30}{25}\cos\hat{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = 67 - 65,30\cos\hat{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\hat{N} = \frac{42}{65,30} = 0,6432 \Rightarrow \hat{N} = 49°\,58'\,11''$$

COMPROBACIÓN. Podemos hallar los valores del ángulo $\hat{N}$ en los triángulos *BCN* y *ADN*, y comprobar que la suma de dichos ángulos junto al hallado en el problema suman 180°.

Para *BCN*:

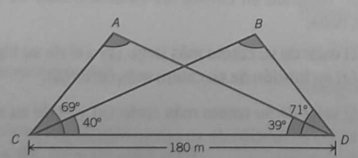
$$\operatorname{tg}\hat{N} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \Rightarrow \hat{N} = 78°\,41'\,24''$$

Para *ADN*:

$$\operatorname{tg}\hat{N} = \frac{\overline{DA}}{\overline{ND}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \hat{N} = 51°\,20'\,25''$$

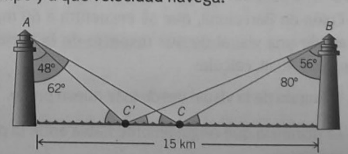
Por tanto: 49° 58' 11" + 78° 41' 24" + 51° 20' 25" = 180°

3. ●●○ Queremos hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles *A* y *B*. Para ello, tomamos dos puntos fijos *C* y *D* en una superficie plana que distan entre sí 180 m. Las visuales de *C* y *D* en dirección a *B* son, respectivamente, de 40° y 71°, mientras que las visuales de *C* y *D* en dirección a *A* son, respectivamente, de 69° y 39°. Calcula la distancia entre *A* y *B*.



Sol.: 97,15 m

4. ●●● En la costa hay dos faros iguales *A* y *B*, los cuales distan entre sí 15 km. Un buque que navega paralelamente a la recta que los une es observado desde cada uno de ellos mediante dos visuales de 62° y 56°, respectivamente. Al cabo de media hora, las respectivas visuales son de 48° y 80°. Calcula la distancia recorrida por el barco en este tiempo y a qué velocidad navega.



Sol.: 7,322 km; 14,644 km/h

202

1. Resolución de triángulos rectángulos

5. ●○○ Comprueba si los triángulos con las siguientes medidas son rectángulos:

a) $a = 10$ cm; $b = 8$ cm; $c = 6$ cm

b) $a = 15$ cm; $b = 10$ cm; $c = 10$ cm

c) $a = 136$ cm; $b = 88$ cm; $c = 105$ cm

d) $\hat{B} = \hat{C} = 45°$

e) $\hat{B} = 33°, \hat{C} = 66°$

6. ●○○ Razona por qué un triángulo cuyos lados miden 20 cm, 30 cm y 40 cm no puede ser rectángulo.

7. ●○○ Resuelve un triángulo rectángulo si sabemos que un cateto mide 20 cm y su ángulo opuesto, 40°.

Sol.: cateto = 23,84 cm, hipotenusa = 31,11 cm, ángulos: 90° y 50°

8. ●○○ Con la ayuda de la calculadora, resuelve un triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus ángulos agudos mide 52° 5' 43" y su cateto contiguo, 3,5 cm.

Sol.: $a = 5{,}7$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 37°\ 54'\ 17''$

9. ●○○ Resuelve el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm.

Sol.: $a = 15$ cm, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 53°\ 8'$, $\hat{C} = 36°\ 52'$

10. ●○○ Resuelve un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 12 cm y cuyo ángulo igual mide 40°.

Sol.: tercer ángulo = 100°, lados iguales = 7,83 cm

11. ●○○ Comprueba si los siguientes triángulos son rectángulos:

a) Altura h sobre la base de 12 cm; proyecciones m y n de los lados inclinados sobre la base de 4 cm y 36 cm, respectivamente.

b) Base a de 27 cm, lado inclinado b de 9 cm, proyección m de dicho lado sobre la base de 3 cm.

c) Base a de 40 cm, lado inclinado c de 20 cm, proyección n de dicho lado sobre la base de 12 cm.

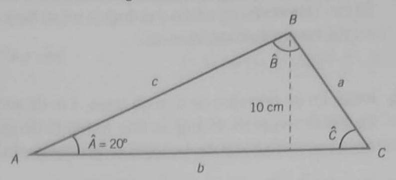
d) Altura h sobre la base de 16 cm; proyecciones m y n de los lados inclinados sobre la base de 14 cm y 10 cm, respectivamente.

12. ●●○ Una antena está sujeta al suelo mediante un cable inclinado que forma 48° con la horizontal.

Si desde la base de la antena hasta la base del cable hay 12 m, resuelve el triángulo rectángulo formado.

Sol.: altura antena = 13,33 m, longitud cable = 17,93 m, ángulos: 90° y 42°

13. ●●○ Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



Sol.: $\hat{C} = 70°$, $\hat{B} = 90°$, $\overline{CB} = 10{,}64$ cm, $\overline{AB} = 29{,}24$ cm, $\overline{AC} = 31{,}12$ cm

14. ●●○ Calcula la altura de una chimenea sabiendo que la visual dirigida al punto más alto por un observador de 1,75 m de altura forma un ángulo de 37° con la horizontal, y que el observador se encuentra a 50 m de la chimenea.

Sol.: 39,43 m

15. ●●○ Busca una aplicación en línea y resuelve un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3,2 cm, siendo 57° uno de sus ángulos adyacentes.

Sol.: 2,6837 cm, 1,7428 cm, 33°

16. ●●○ Utiliza la calculadora para resolver un triángulo rectángulo que tiene un cateto de longitud 6 cm y cuyo ángulo opuesto mide 40°.

Sol.: cateto = 7,15 cm, hipotenusa = 9,33 cm, ángulos: 90° y 50°

17. ●●○ Queremos construir un puente de 3 m de altura sobre un río con una rampa de acceso desde cada uno de sus extremos. Si las rampas deben tener una inclinación de 16°, calcula:

a) La longitud que debe tener cada rampa.

b) ¿A qué distancia de la orilla deben construirse?

Sol.: a) 10,88 m; b) 10,46 m

18. ●●○ Una escalera de 7,5 m se apoya contra una pared de forma que alcanza 6 m de altura.

Calcula el ángulo de inclinación de la escalera respecto del suelo y qué distancia hay entre la base de la escalera y la pared.

Sol.: 53° 8', 4,5 m

19. ●●○ Una cinta inclinada transportadora lleva carbón hasta una central térmica.

Si la cinta mide 360 m y tiene que salvar un desnivel de 40 m, ¿qué ángulo de elevación debe tener la cinta?

Sol.: 6° 22' 46"

20. ●●○ Resuelve el triángulo rectángulo formado por la mitad de un triángulo equilátero cuyo lado mide 16 cm.

Sol.: $c = 13{,}86$ cm, $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 60°$, $\hat{A} = 90°$

21. ●●○ En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 20 m y el área es de 96 m². Resuelve dicho triángulo.

Sol.: $b = 16$ m, $c = 12$ m, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 53°\ 7'\ 48''$, $\hat{C} = 36°\ 52'\ 12''$

22. Las bases de un trapecio isósceles miden 12 cm y 20 cm. Determina su altura y el ángulo en su base para que el lado no paralelo sea de 6 m. Sol.: 4,47 m, 48° 11'

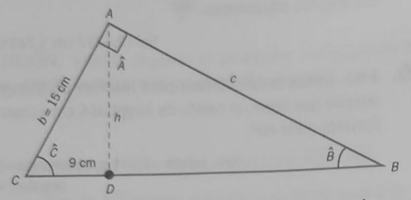
23. En un ortoedro de 4 m de largo, 3 m de ancho y 5 m de altura, ¿cuál es el ángulo que forma la diagonal de la base con la diagonal del poliedro en el mismo vértice?

Sol.: 45°

24. Resuelve el triángulo rectángulo formado por una escalera de mano apoyada contra la pared, sabiendo que la escalera mide cinco veces más que la distancia existente entre su extremo inferior y la base de la pared.

Sol.: distancia a la pared = x, ángulos: 78° 27' 47", 11° 32' 13" y 90°, altura de la pared = $2x\sqrt{6}$

25. Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



Sol.: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 36° 52'$, $\hat{C} = 53° 8'$, $\overline{CB} = 25$ cm, $\overline{AB} = 20$ cm

26. Las dimensiones de un rectángulo son 20 cm de base y 12 cm de altura. Determina los ángulos que las diagonales forman con los lados. Sol.: 30° 58' y 59° 2'

27. Resuelve un triángulo oblicuángulo conociendo dos de sus ángulos, 50° y 56°, y siendo 40 cm la longitud del lado opuesto al ángulo de 50°.

Sol.: lados: 43,29 cm y 50,19 cm, ángulo = 74°

28. Resuelve un triángulo oblicuángulo sabiendo que la base mide 30 cm y que sus dos ángulos adyacentes miden 35° y 85°. Sol.: lados: 19,9 y 34,5 cm, ángulo = 60°

29. Halla la altura y la diagonal mayor de un romboide de lados 40 cm y 20 cm, respectivamente, y ángulo obtuso de 112°. Sol.: 18,54 cm; 51,53 cm

30. Del centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua del que se desea medir a qué altura llega.

Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla hasta la parte más alta del chorro y se obtienen 40°. Si nos alejamos 120 m del lago, el ángulo de elevación obtenido es ahora de 32°.

Calcula la altura del chorro de agua. Sol.: 293,699 m

31. Para conocer la altura de la torre más alta de un castillo, se ha medido el ángulo que desde la horizontal forma la visual con el punto más alto. Su valor es de 36°.

Si nos acercamos 20 m, dicho ángulo es ahora de 60°. ¿Qué altura tiene la torre? Sol.: 25,03 m

32. Dos personas situadas en dos puntos X e Y que están a 100 m una de la otra y en lados contrarios de una torre, ven esta bajo dos visuales de 50° y 65°, respectivamente.

a) ¿A qué distancia está cada persona de la torre?

b) ¿Cuál es la altura de la torre?

Sol.: a) 64,28 m, 35,72 m; b) $h = 76,6$ m

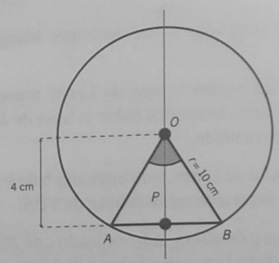
33. Dos personas contemplan un globo desde dos puntos distintos y opuestos. La visual de la primera persona al globo es de 40°, mientras que la de la segunda es de 50°. Si el globo está a 100 m de altura y está alineado con los observadores, ¿qué distancia hay entre las dos personas?

Sol.: 203,08 m

34. Dos personas observan una torre de forma que las tres ubicaciones están alineadas. Sabiendo que la torre está situada entre las dos personas, que sus visuales a la parte superior de la torre son de 30° y 45°, y que la primera de ellas dista 800 m de la parte superior de la torre, halla la altura de la torre y la distancia entre las dos personas.

Sol.: $h = 400$ m; distancia = 1092,82 m

35. En una circunferencia de radio 10 cm se traza una cuerda $\overline{AB}$ a 4 cm del centro. Calcula el ángulo $\widehat{AOB}$.



Sol.: 132° 50'

36. La corriente de un río tiene una velocidad de 6 km/h y lo queremos cruzar con una barca que navega a 12 km/h. Si partimos en dirección perpendicular a la corriente del río, calcula:

a) La velocidad real de la barca.

b) El ángulo que se desviará la trayectoria de la barca respecto de la corriente del río.

Sol.: a) 13,42 km/h; b) 63° 26'

204

2. Teoremas del seno y del coseno

37. ●○○ Aplica el teorema del seno para verificar si en cada caso estos valores corresponden a un mismo triángulo:

a) $a = 3{,}02$ cm; $b = 2$ cm; $\hat{A} = 35°$; $\hat{B} = 30°$

b) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\hat{A} = 36°$; $\hat{B} = 72°\ 23'$

c) $b = 5$ cm; $c = 12$ cm; $\hat{B} = 48°$; $\hat{C} = 89°$

d) $a = 7$ cm; $c = 9$ cm; $\hat{A} = 37°$; $\hat{C} = 50°\ 42'$

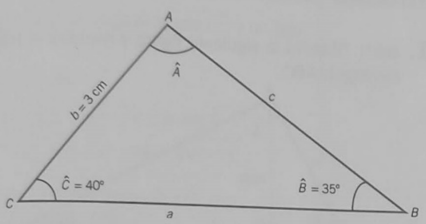
38. ●○○ Resuelve un triángulo del que se conocen los ángulos $\hat{A} = 65°$ y $\hat{B} = 88°$ y su lado a mide 8,5 cm.

Sol.: $b = 9{,}37$ cm, $c = 4{,}26$ cm, $\hat{C} = 27°$

39. ●○○ Resuelve el triángulo cuya base mide 30 cm y sus dos ángulos adyacentes miden 45° y 115°.

Sol.: ángulo = 20°, lados: 62,02 cm y 79,50 cm

40. ●○○ Resuelve el siguiente triángulo:



Sol.: $a = 5{,}05$, $c = 3{,}36$ cm, $\hat{A} = 105°$

41. ●○○ Resuelve un triángulo de lados 8 cm y 10 cm, y ángulo de 100° comprendido entre ellos.

Sol.: ángulos: 34° 41' y 45° 19', lado = 13,85 cm

42. ●○○ Resuelve un triángulo de lados 10 cm y 20 cm, siendo 72° el ángulo comprendido entre ellos.

Sol.: lado = 19,40 cm, ángulos: 78° 39' y 29° 21'

43. ●○○ Resuelve un triángulo del que conocemos dos de sus lados, 10 cm y 20 cm, y el ángulo comprendido entre ellos, 30°.

Sol.: lado = 12,39 cm, ángulos: 23° 48' y 126° 12'

44. ●○○ Resuelve un triángulo cuyos lados miden 5, 6 y 7 cm.

Sol.: 57° 7', 78° 28' y 44° 25'

45. ●○○ Resuelve un triángulo del que se conocen los lados $a = 16$ cm y $b = 12$ cm, y su ángulo $\hat{B}$ mide 33°.

Sol.: $c = 21{,}67$ cm, $\hat{A} = 46{,}57°$, $\hat{C} = 100{,}43°$; $c = 5{,}17$ cm, $\hat{A} = 133{,}43°$, $\hat{C} = 13{,}57°$

46. ●○○ Resuelve un triángulo tal que $b = 54$ cm, $c = 43$ cm y $\hat{C} = 15°$.

Sol.: $a = 92{,}83$ cm, $\hat{A} = 146{,}03°$, $\hat{B} = 18{,}97°$; $a = 11{,}50$ cm, $\hat{A} = 3{,}97°$, $\hat{B} = 161{,}03°$

47. ●○○ Resuelve el triángulo que tiene por lados 20 cm y 22 cm, siendo 60° el ángulo opuesto al primero de los lados.

Sol.: 17,08 cm, 72,29°, 47,71°; 4,92 cm, 107,71°, 12,29°

48. ●●○ Utiliza el teorema del seno para verificar que la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular equivale al número Φ o número áureo (Φ = 1,618033...).

49. ●●○ En un triángulo las longitudes de los lados guardan las siguientes proporciones: $1 : \frac{3}{2} : 2$. Calcula la relación del seno del ángulo mayor ($\hat{A}$) respecto de los senos de los otros dos ángulos.

Sol.: $\frac{4}{3}$; 2

50. ●●○ Mediante el teorema del coseno, justifica que el radio de la circunferencia circunscrita a un hexágono regular equivale al lado de este.

51. ●●○ Un avión (C) sobrevuela dos ciudades (A y B) dentro de un mismo plano vertical. Las ciudades distan entre sí 9 km y desde ellas se ve el avión bajo visuales de 20° y 24°, respectivamente. Calcula la distancia desde cada ciudad hasta el avión y a qué altura vuela este.

Sol.: $\overline{AC} = 5{,}27$ km, $\overline{BC} = 4{,}43$ km, $h = 1{,}802$ km

52. ●●○ Calcula el lado de un polígono regular de 18 lados que está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

Sol.: 3,47 cm

53. ●●○ Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas que forman un triángulo. La distancia de A hasta B es de 15 km y de A hasta C es de 18 km, y el ángulo $\hat{A}$ mide 60°. Calcula la distancia del pueblo B hasta C.

Sol.: 16,7 km

54. ●●○ Halla el lado del eneágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

Sol.: 2,736 cm

55. ●●○ Dos barcos salen de puerto a la misma hora con rumbos distintos formando un ángulo de 110°. Se sabe que el primero navega a 17 nudos y el segundo, a 26 nudos (1 nudo = 1 milla náutica/hora).

Calcula a qué distancia estarán uno del otro al cabo de dos horas de navegación.

Sol.: 71,2 millas náuticas

56. ●●○ Un solar tiene forma de triángulo del que se conocen dos de sus tres lados, 45 m y 56 m, y el ángulo comprendido entre ellos, 60°.

Busca información en Internet sobre la fórmula de Herón y calcula su área.

Sol.: 1091,19 m^2

57. ●●○ Dos carreteras se cortan en un punto A y forman un ángulo de 40°. Sobre una de ellas se señala un punto B, que dista del cruce 350 m, y sobre la otra carretera, el punto C, que está a 400 m del cruce. Halla la distancia existente entre los dos puntos.

Sol.: 260,78 m

58. ●●○ Calcula los ángulos de un rombo si su perímetro es de 800 m y una de sus diagonales mide 90 m.

Sol.: dos ángulos de 26° y dos ángulos de 154°

59. ●●○ La relación entre el lado l de un heptágono regular y el radio r de su circunferencia circunscrita es $l = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Calcula, a partir de dicha equivalencia, el ángulo central correspondiente a este polígono.

Sol.: 51° 25' 43''

60. ●●○ Tres ciudades A, B y C forman un triángulo del que se conoce que $\overline{AB} = 150$ km y $\overline{BC} = 100$ km.

Calcula la distancia entre las ciudades A y C si $\hat{B} = 120°$.

Sol.: 217,94 km

61. ●●○ Resuelve el triángulo del que se conocen los lados $a = 5$ cm, $b = 2$ cm y el ángulo $\hat{A} = 130°$.

Para ello, usa una aplicación en línea.

Sol.: $\hat{B} = 17° 50'$, $\hat{C} = 32° 10'$, $a = 3,47$ cm

62. ●●○ ¿Existe algún triángulo cuyos lados midan 7 cm y 8,5 cm, siendo 92° el ángulo opuesto al primero de los lados facilitados?

63. ●●○ En un triángulo dos de sus lados miden 6,5 cm y 7 cm, siendo 67° el ángulo opuesto al primero de ellos. Calcula el ángulo opuesto al segundo de los lados dados y cuántas soluciones tiene.

Sol.: $\hat{C}_1 = 82° 26' 32''$, $\hat{C}_2 = 97° 33' 28''$

64. ●●○ Busca en Internet información para calcular la relación entre el lado (l) de un heptágono regular y la más corta de sus diagonales (d).

Sol.: $d \sim 1,8\, l$

65. ●●○ Dos vías de tren de 1,5 m de ancho se cruzan y forman un rombo. Si uno de los ángulos de corte es de 44°, calcula cuánto mide la diagonal mayor de dicho rombo.

Sol.: 4 m

66. ●●● Aplica el teorema del coseno para comprobar que la relación entre la diagonal D trazada entre el primer y el cuarto vértices de un octógono regular y su lado l equivale al número de plata.

67. ●●● Utiliza un programa de geometría dinámica para resolver un triángulo oblicuángulo cuya base mide 5,6 cm y sus dos ángulos adyacentes, 20° y 110°.

Sol.: lados: 2,5 y 6,87 cm, ángulo = 50°

68. ●●● Dos barcos parten de un puerto con rumbos que forman entre sí un ángulo de 130°. El primero sale a las 9 h de la mañana con una velocidad de 16 nudos y el segundo sale dos horas más tarde con una velocidad de 28 nudos. Si el alcance de cada uno de sus radios es de 200 km, ¿podrán contactar entre ellos a las 16 h? (1 nudo = 1852 m/hora)

69. ●●● Utiliza un programa de geometría dinámica para resolver un triángulo cuyos lados miden 4 cm, 6 cm y 8 cm.

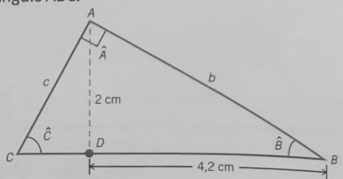
Sol.: 104° 29', 46° 34' y 28° 57'

70. ●●● Resuelve el triángulo del que se conocen sus tres lados, 7,3 cm, 6,2 cm y 5,4 cm.

Sol.: 77° 39' 36'', 56° 4' 3'' y 46° 16' 21''

Síntesis

71. ●●○ Observa la siguiente figura y resuelve el triángulo rectángulo ABC:



Sol.: $a = 5,15$ cm, $b = 4,65$ cm, $c = 2,21$ cm, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 25° 28'$, $\hat{C} = 64° 32'$

72. ●●○ Un avión vuela sobre dos ciudades X, Y que distan 100 km entre sí. También se sabe que la vertical del avión se encuentra entre las dos ciudades y que las visuales de la aeronave a X e Y son de 35° y 27°, respectivamente, sobre la horizontal. Resuelve el triángulo formado por el avión y los puntos X e Y, y especifica a qué altura vuela y su distancia a las dos ciudades.

Sol.: $h = 29,49$ km, $d_x = 51,42$ km, $d_y = 64,96$ km

73. ●●● Desde un punto P exterior a una circunferencia de 20 cm de radio, se trazan las tangentes a esta formando entre sí un ángulo de 50°. Calcula la distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia.

Sol.: 42,9 cm

74. ●●● En un círculo de 20 cm de radio halla el área comprendida entre una de sus cuerdas geométricas de 30 cm y el diámetro paralelo a ella.

Sol.: 487,54 cm^2

206

Síntesis 8

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en hallar los valores de sus ángulos y de sus lados.

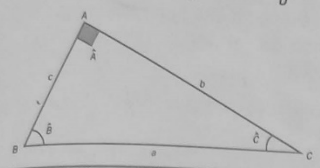
Resolución de triángulos rectángulos

$\hat{A} = 90°,\ \hat{B} + \hat{C} = 90°$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{b}{a} \quad \cos \hat{B} = \dfrac{c}{a} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{b}{c}$

$\operatorname{sen} \hat{C} = \dfrac{c}{a} \quad \cos \hat{C} = \dfrac{b}{a} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \dfrac{c}{b}$

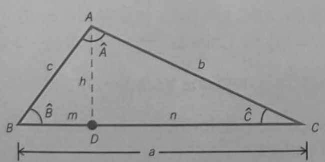


- Conocidos un ángulo agudo ($\hat{C}$) y un lado (a):
  1. $\hat{B} = 90° - \hat{C}$
  2. $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
  3. $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$
- Conocidos dos lados (b y c):
  1. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$
  2. $\operatorname{tg}\hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow \hat{B} = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{c}$
  3. $\hat{C} = 90° - \hat{B}$

Resolución de triángulos por descomposición en triángulos rectángulos

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

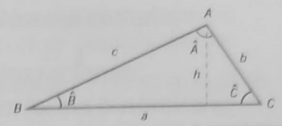
$a = m + n$



Teoremas del seno y del coseno

Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Resolución de triángulos mediante los teoremas del seno y del coseno

- Conocidos dos ángulos ($\hat{B}$ y $\hat{C}$) y un lado (a):
  1. $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$
  2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$
  3. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$
- Conocidos dos lados (b y c) y el ángulo comprendido entre ellos ($\hat{A}$):
  1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$
  2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}\right)$
  3. $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$
- Conocidos los tres lados:
  1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$
  2. $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}\right)$
  3. $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$
- Conocidos dos lados (a y b) y el ángulo opuesto a uno de ellos ($\hat{A}$): puede haber dos triángulos que cumplan las condiciones iniciales.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{a}$$

207

Evaluación

1 Verifica si los siguientes triángulos son rectángulos u oblicuángulos:

a) Lados de 20 cm, 30 cm y 40 cm.

b) Altura $h = 30$ cm sobre la base; proyecciones m y n de los lados inclinados sobre la base de 18 cm y 50 cm, respectivamente.

c) Base a de 50 cm, lado inclinado c de 40 cm, proyección m sobre la base, correspondiente al otro lado inclinado, de 35 cm.

d) Base de 24 cm y ángulos adyacentes de 32° y 58°.

e) Lados de 10 cm y 6 cm, y ángulo opuesto al primer lado de 40°.

Sol.: a) oblicuángulo; b) rectángulo; c) oblicuángulo; d) rectángulo; e) oblicuángulo

2 Resuelve un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 33 cm, y el valor de uno de sus ángulos agudos es 33°.

Sol.: catetos: 27,68 cm y 17,97 cm, ángulos: 90° y 57°

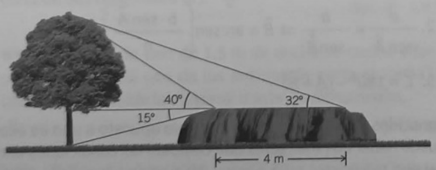
3 Calcula la altura de una catedral sabiendo que a una distancia de 1 km se la observa bajo un ángulo de 9° 5' respecto de la horizontal.

Sol.: 159,88 m

4 Una persona observa una torre a cierta distancia bajo una visual de 40°. Si se acerca 40 m a la torre, la visual es de 60°. Calcula la altura de la torre. Si se acerca 10 m más, ¿cuál será la visual?

Sol.: 65,1 m; 67°

5 Observa la figura y, con los datos facilitados, calcula la altura del árbol. (Orientación: halla por separado la altura de la parte enramada del árbol y la parte vista del tronco).



Sol.: 12,916 m

6 Resuelve un triángulo cuya base mide 14 cm y sus ángulos adyacentes, 35° y 100°.

Sol.: ángulo de 45° y lados de 11,36 cm y 19,50 cm

7 Queremos medir la anchura del río en un tramo donde las orillas son paralelas. Para ello, marcamos en una de ellas dos puntos separados 100 m y, desde dichos puntos, observamos otro punto de la orilla opuesta bajo dos visuales de 54° y 65°. ¿Qué anchura tiene el río?

Sol.: 83,83 m

8 Resuelve un triángulo que tiene por lados 20 cm y 40 cm, siendo 68° el ángulo comprendido entre ellos:

Sol.: lado = 37,42 cm, ángulos: 82° 21' 17" y 29° 38' 43"

9 Los lados de un triángulo miden 10 cm, 15 cm y 20 cm.

a) Resuelve el triángulo.

b) Calcula su área.

Sol.: a) 46° 34' 3", 104° 28' 39", 28° 57' 18"; b) 72,62 cm²

10 Los lados de un romboide miden 20 cm y 30 cm, y forman entre sí un ángulo de 40°. Calcula:

a) La longitud de la diagonal menor.

b) La longitud de la diagonal mayor.

Sol.: a) 19,51 cm; b) 47,11 cm

11 En un triángulo rectángulo de catetos b y c, e hipotenusa a:

a) Justifica que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, aplicando el teorema del coseno para dicho lado.

b) Comprueba que el producto de las tangentes de los ángulos agudos de este triángulo equivale a la unidad.

12 En un triángulo ABC los lados miden: $a = 70$ m, $b = 50$ m y $c = 60$ m. Calcula:

a) La longitud de la mediana trazada sobre el lado a.

b) Los ángulos que determinan la mediana y el lado a al cortarse.

Sol.: a) 42,71 m; b) 79° 24' 7" y 100° 35' 53"

B. Cuestionario de evaluación de la calidad docente

SOBRE EL PROFESOR Y LA FORMA DE DAR CLASE

RITMO DE LA CLASE

(Ejemplos: demasiado temario y no lo he seguido, tan lento que desconectaba de aburrimiento, muy repetitivo…)

CLARIDAD EN LAS EXPLICACIONES

LENGUAJE

(Ejemplos: utilizaba un vocabulario comprensible, utilizaba demasiados tecnicismos…)

NOTACIÓN

(Ejemplos: la notación estaba bien definida, de modo que no me perdía con los símbolos en las explicaciones; demasiadas incógnitas y letras simultáneamente que no me dejaban a veces claro qué hacíamos; me han faltado ejemplos numéricos sin tanta variable…)

ILUSTRACIONES

(Ejemplos: ha habido suficientes dibujos de triángulos y estos me han servido para comprender las explicaciones, los dibujos no eran aclaratorios de nada…)

CASOS CONCRETOS FRENTE A EXPLICACIONES GENERALES

(Ejemplos: demasiadas demostraciones y fórmulas generales sin casos prácticos; demasiados ejemplos particulares sin llegar a explicar la técnica general de resolución o qué tienen en común unos casos y otros…)

COHERENCIA Y COHESIÓN

(Ejemplos: en todo momento tenía claro cuál era el objetivo último de la explicación y con qué información de partida contábamos; no tenía demasiado claro por qué y para qué hacíamos las cosas; la estructura de la clase era siempre parecida, lo cual ayudaba a seguirla; cada clase era un mundo distinto y costaba mucho saber por dónde iban a ir los tiros cada día…)

FUENTES EXTERNAS CONSULTADAS POR CARENCIAS DEL PROFESOR (FUENTE, MOMENTO Y MOTIVO)

(Ejemplos: he necesitado a Susi Profe para saber cómo aplicar el teorema del seno porque no supo hacerse entender…)

GESTIÓN DEL AULA

TIPO DE CLASE IMPARTIDA

(Ejemplos: el profesor soltaba su chapa sin dejar contribuir; hacía demasiadas preguntas al aire en vez de centrarse en explicarlo él; debiera haberme proporcionado los contenidos, pero dejándome estudiarlos en clase por mi cuenta…)

Clima del aula

(Ejemplos: el profesor ha sido demasiado autoritario, eran tan laxo que nadie lo tomaba enserio, ha sabido mantener el ánimo e interés en lo que explicaba, me ha desanimado o hecho sentir menospreciado de alguna manera…)

Sobre los recursos de Geogebra

En clase

¿Qué te ha parecido emplear Geogebra?

(Ejemplos: mucho más ilustrativo que seguir únicamente el libro de texto; hubiera preferido algo intermedio, con Geogebra pero también explicaciones típicas escribiendo en pizarra para que copiemos; me ha parecido una inutilidad absoluta…)

En casa

¿Has consultado los recursos de Geogebra? ¿Para repasar explicaciones? ¿Para consultar fórmulas? ¿Para profundizar? ¿Para generar ejemplos/ejercicios?

Sobre las tareas

Tareas diarias (diaria, NO la de repaso del tema 5)

¿Cuánto te ha costado de media hacer cada tarea diaria?

¿Qué te ha parecido la carga de ejercicios por tarea? (Dificultad y cantidad)

Repaso del Tema 5

¿Cuánto te ha costado de media hacer el repaso del Tema 5?

¿Qué te han parecido los ejercicios del nº7 en adelante? ¿Los has intentado? ¿Has entendido qué te pedían en cada caso? ¿Te has bloqueado en algún momento? ¿En qué momento, y por qué? ¿Has logrado hacerlos? ¿Has buscado ayuda para ello? ¿Qué dirías que tenían de peculiar? ¿Dirías que te han aportado algo?

Examen (Tema 5)

Coherencia con lo visto en clase

(Ejemplos: preguntas muy complejas comparado con lo hecho en clase, preguntas asequibles, preguntas demasiado sencillas…)

Tiempo requerido (Recordad que era 1 parte de 2 para algunos, y 1 parte de 5 para otros)

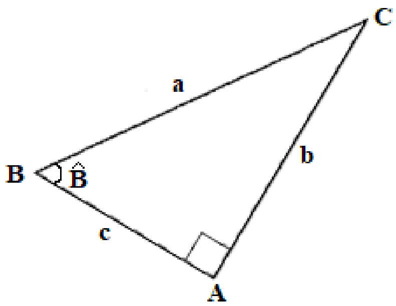
(Ejemplos: Daba tiempo perfectamente, requería demasiado tiempo comparado con las otras partes…)

Aquello que quieras decirme y por lo que no te haya preguntado ¡No te cortes!

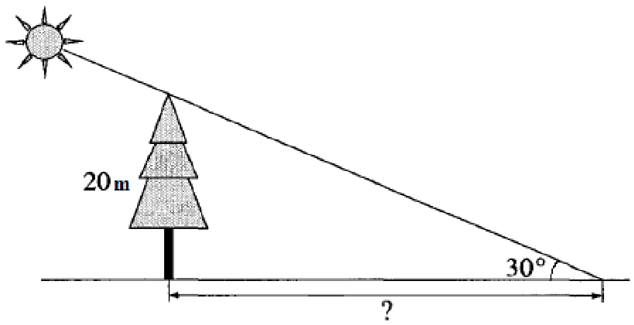
C. Compendio de cuestiones de ampliación

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

A1) **(Sin calculadora)** Le has pedido a un estudiante estadounidense de intercambio que mida sen $\widehat{B}$ del triángulo mostrado más abajo. Con su regla ha medido el cateto b, la hipotenusa a, y te ha dado el resultado de hacer el cociente b/a. A los días se da cuenta de que nosotros no medimos longitudes en pulgadas como ellos, sino centímetros, y por tanto se te acerca, con el corazón en un puño, a explicarte que te ha dado el resultado mal. ¿Qué has de hacer para corregirlo?

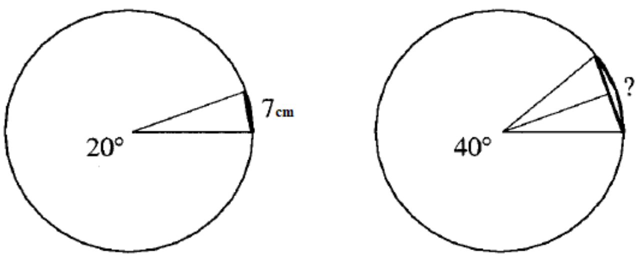


A2) **(Sin calculadora)** Si los rayos provenientes del sol forman un ángulo de 30º con el suelo, ¿cuán larga será la sombra de un árbol de 20 m de altura?



Han pasado un rato, y la longitud de la sombra es ahora de 20 m. ¿Qué nuevo ángulo forman los rayos del sol con el suelo? ¿Está amaneciendo o anocheciendo? ¿Por qué?

A3) En una cierta circunferencia, un ángulo central de 20º define una cuerda de 7 cm de longitud, tal como ilustra la imagen de la izquierda. En esa misma circunferencia, ¿cuál será la longitud de la cuerda definida por un ángulo de 40º? ¿Necesitas calculadora o puedes hallarlo mentalmente?



DESCOMPOSICIÓN Y SUPERFICIE DE TRIÁNGULOS

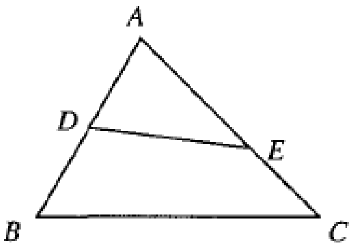
B1) Demuestra que, en un triángulo acutángulo de vértices ABC, $c = a \cdot \cos\widehat{B} + b \cdot \cos\widehat{A}$. ¿Cómo has de adaptar la expresión previa para el caso de un triángulo obtusángulo de vértices ABC?

B2) En un triángulo con dos de sus lados a y b conocidos, ¿cuál es la mayor área que éste puede tener? En dicho caso, ¿qué tipo de triángulo es?

B3) Supón, en el triángulo del problema B1, que el ángulo recto es ahora $\widehat{B}$ en vez de $\widehat{C}$. ¿Cuál es su nueva área? ¿Es mayor o menor a la del triángulo de B1 original?

B4) En un triángulo isósceles de base x y ángulo adyacente α, obtén la expresión de su área.

B5) **(Sin calculadora)** En la figura mostrada, obtén la razón entre la superficie del triángulo de vértices ADE y el de vértices ABC. Para ello, cuentas con las longitudes de los siguientes segmentos: $AD = 4$ m, $AE = 6$ m, $AB = 8$ m, $AC = 10$ m.



B6) Demuestra que el área, S, de un paralelogramo es $S = a \cdot b \cdot \sin\widehat{C}$, donde a y b son dos lados adyacentes y $\widehat{C}$ uno de sus ángulos interiores. ¿Importa cuál de los cuatro ángulos interiores sea $\widehat{C}$? ¿Por qué?

TEOREMAS DEL SENO Y COSENO

D1) En un triángulo de vértices PQR y área $S = 9\ \mathrm{m}^2$, las longitudes de dos de sus lados son $PQ = 5$ m y $PR = 6$ m. Resuelve el triángulo.

D2) Partiendo del teorema del coseno, demuestra que, para un triángulo de vértices ABC y superficie S, $c^2 = a^2 + b^2 - 4 \cdot S \cdot \cot\widehat{C}$.

D3) Demuestra que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

D4) En un triángulo de vértices ABC, si llamamos M_a al punto medio del lado a, entonces el segmento comprendido entre A y M_a es una mediana del triángulo, y la denotamos como m_a. Demuestra que para dicha mediana se cumple que $4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$, y escribe las expresiones que deberán cumplirse para las demás medianas del triángulo.

D5) Demuestra que, en un triángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de sus medianas es ¾ de la suma de los cuadrados de sus lados.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Álvaro Sáenz de Cabezón, Departamento de Matemáticas