

## Trayectorias de máxima rigidez de un robot redundante actuando como soporte en el mecanizado de paredes delgadas

Jokin Aginaga<sup>a,b,\*</sup>, Iván García–Cuesta<sup>b</sup>, Xabier Iriarte<sup>a,b</sup>, Aitor Plaza<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Smart Cities Institute, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia s/n, 31006 Pamplona, España.

<sup>b</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia s/n, 31006 Pamplona, España.

**To cite this article:** Aginaga, J., García–Cuesta, I., Iriarte, X., Plaza, A. 2023. Maximum stiffness trajectories of a redundant robot acting as a support in thin-walled machining. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 00, 1-5. <https://doi.org/10.4995/riai.2023.18977>

### Resumen

La precisión de un robot está ligada a su rigidez. En comparación con la máquina herramienta tradicional, los robots industriales tienen un gran espacio de trabajo como ventaja, pero una rigidez reducida como desventaja. Además, la rigidez tiene una gran dependencia y variabilidad con la postura o configuración del robot. De ahí que resulte necesario un análisis de rigidez de los robots, que se evalúa mediante la matriz de rigidez. En este trabajo se presenta un análisis de rigidez de un robot serie. Ante la diversidad de índices representativos extraídos a partir de la matriz de rigidez, se ha propuesto el uso de un índice que tenga en cuenta la dirección de las cargas que soporta el robot y la dirección en que se desea que el robot aporte rigidez en la aplicación específica. Asimismo, se ha utilizado el índice de rigidez para mover el robot a configuraciones que mejoren la rigidez, hecho que resulta posible en aplicaciones en las que el robot tiene al menos un grado de libertad (GDL) redundante. La metodología se ha aplicado a un robot de 7 GDL utilizado como robot de soporte en el mecanizado de paredes delgadas. Dado que para definir la trayectoria únicamente son necesarios 5 GDL, se utilizan 2 GDL redundantes para mejorar la rigidez.

*Palabras clave:* Robótica Industrial, Grado de libertad redundante, Rigidez, Optimización de postura, Índice de comportamiento

### Maximum stiffness trajectories of a redundant robot acting as a support in thin-wall machining

#### Abstract

The precision of a robot is linked to its stiffness. Compared with traditional machine tools, industrial robots have large workspace as an advantage, but low stiffness as a disadvantage. Furthermore, stiffness has a high dependence and variability on the robot's posture or configuration. Hence, a stiffness analysis of robots is necessary, which is evaluated by means of the stiffness matrix. In this paper, a stiffness analysis of a serial robot is presented. Given the diversity of representative indices extracted from the stiffness matrix, it is proposed the use of an index that takes into account the direction of the loads supported by the robot and the direction in which it is desired that the robot provides stiffness in the specific application. Then, the stiffness index has been used to move the robot to configurations that improve stiffness, which is possible in applications where the robot has at least one redundant degree-of-freedom (DOF). The methodology has been applied to a 7-DOF robot used as a support robot in thin-wall machining. Since only 5 GDLs are needed to define the trajectory, 2 redundant GDLs are used to improve the stiffness.

*Keywords:* Industrial robotics, Redundant degree of freedom, Stiffness, Pose optimization, Performance index

### 1. Introducción

En la actualidad la robótica industrial tiene un uso creciente en una gran variedad de aplicaciones, existiendo soluciones

que realizan tareas cada vez más precisas (Díaz-Cano et al., 2022). Así, los robots industriales son cada vez más utilizados para tareas de mecanizado, tales como el fresado, el taladrado,

\*Autor para correspondencia: [jokin.aginaga@unavarra.es](mailto:jokin.aginaga@unavarra.es)

el recantado o el rectificad. Frente a la máquina herramienta tradicional, los robots industriales tienen entre sus ventajas unos costes de instalación menores y una mayor flexibilidad para adaptarse a distintas tareas (Guo et al., 2015). Como contrapartida, la rigidez de los robots industriales es menor que la de la máquina herramienta. En operaciones de mecanizado, debido a la magnitud de las fuerzas de contacto, esta menor rigidez conlleva, en cierta medida, una pérdida de la precisión deseada (Cvitanic et al., 2020). Asimismo, desde un punto de vista dinámico, la aparición de vibraciones inestables, conocidas como *chatter*, es más frecuente en el caso de los robots industriales que en la máquina herramienta (Mohammadi and Ahmadi, 2022).

Existen abundantes referencias relativas a la rigidez de robots, pudiendo diferenciar entre rigidez estática y dinámica. El término estático hace referencia a modelos que no tienen en cuenta términos inerciales ni de amortiguamiento (Cvitanic et al., 2020). La rigidez estática suele modelarse como una matriz  $6 \times 6$  que relaciona los desplazamientos y rotaciones del elemento terminal con el tórsor que los produce. Las propiedades mecánicas y geométricas de los elementos constructivos, los actuadores y otros elementos de transmisión determinan la rigidez de un robot, pero es sabido que la rigidez es distinta en función de la configuración en que se encuentre. No es de extrañar por tanto que se hayan utilizado índices de rigidez para mejorar la configuración del robot (Léger and Angeles, 2016; Guo et al., 2015; Bu et al., 2017; Zhao et al., 2021).

Operaciones como el mecanizado, taladrado, fresado, etc. requieren 5 grados de libertad (GDL), con lo que si se utiliza un robot serie de 6 GDL se tiene un grado de libertad redundante (Lin et al., 2022). Lo mismo sucede si se utiliza un robot redundante de 7 GDL, en el que independientemente de la configuración existe al menos un GDL redundante. Teniendo en cuenta que la rigidez de un robot depende de su configuración, en operaciones en las que exista un GDL redundante este puede ser utilizado para llevar al robot a una configuración óptima desde el punto de vista de la rigidez. Este hecho ha sido aprovechado en la literatura en aplicaciones industriales con robots de tipo serie (Lin et al., 2022; Guo et al., 2015; Cvitanic et al., 2020), en robots de tipo paralelo (Aginaga et al., 2012; Azulay et al., 2014) y en robots de 6 GDL sobre una plataforma móvil que le otorga un GDL adicional (Lin et al., 2022).

Este trabajo se enmarca en el mecanizado de paredes delgadas, que suele ser habitual en el sector aeronáutico. Desde un punto de vista mecánico, el mecanizado de paredes delgadas presenta varias dificultades tanto por cuestiones estáticas como dinámicas; su baja rigidez hace que las piezas de paredes delgadas sufran deformaciones durante el proceso de mecanizado, mientras que la herramienta de mecanizado introduce vibraciones mecánicas en el proceso (Herranz et al., 2005). La máquina herramienta, la herramienta de corte y la pieza de trabajo de pared delgada forman un sistema dinámico y las vibraciones pueden conducir a un problema de maquinabilidad en muchas condiciones operativas, especialmente en estos sistemas de baja rigidez compuestos por paredes delgadas.

Para aumentar la rigidez del sistema en el proceso de mecanizado, puede utilizarse un robot a modo de soporte móvil por la cara opuesta al mecanizado que realice una fuerza de empuje aportando rigidez a la placa o elemento a mecanizar (Ozturk

et al., 2018; Torres et al., 2020). Para el caso de un mecanizado por las dos caras de una placa delgada, en (Zhao et al., 2020) se utilizan dos robots simultáneamente, obteniendo como resultado un mejor acabado cuando los robots realizan el mecanizado de manera asimétrica.

Este trabajo presenta un análisis del uso de los grados de libertad redundantes de un robot de tipo serie para lograr una rigidez mayor. El robot utilizado para aplicar la metodología desarrollada es el KUKA LBR iiwa 7, un robot colaborativo de 7 GDL. Por su parte, la trayectoria a realizar queda definida por 5 GDL, con lo que se tienen 2 GDL redundantes que son utilizados para mejorar la rigidez del robot. Para cuantificar la mayor rigidez, se utiliza como índice el elemento de la matriz de rigidez correspondiente a la dirección específica en la que se desea una mayor rigidez. En primer lugar, se parametriza la redundancia inherente al robot en la resolución de la cinemática inversa y, posteriormente, se comprueba que la rigidez es distinta para las distintas configuraciones del robot y se analiza efecto de los 2 GDL redundantes. Finalmente, se diseña una trayectoria óptima desde el punto de vista de la rigidez para la trayectoria deseada del robot iiwa utilizado como robot de soporte durante el mecanizado de una pared delgada.

## 2. Cinemática del robot iiwa

El robot KUKA LBR iiwa es un robot colaborativo de cadena cinemática abierta y con 7 GDL mediante pares articulados. Se trata de un robot cuyo movimiento puede ser controlado mediante las coordenadas de salida o mediante las coordenadas articulares, lo cual resulta imprescindible para la aplicación que se le pretende dar. La Figura 1 muestra una imagen del robot.



Figura 1: Robot colaborativo KUKA LBR iiwa.

### 2.1. Cinemática directa

La Figura 2 muestra una imagen esquemática de la cinemática del robot, junto con las coordenadas articulares  $\theta_i$  de cada par cinemático y los sistemas de referencia de la base fija y el elemento terminal.

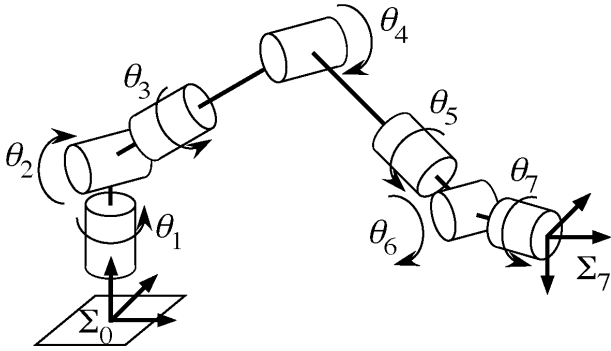


Figura 2: Modelo cinemático del robot (Shimizu et al., 2008).

La cinemática directa consiste en calcular la posición y orientación del elemento terminal a partir de los valores  $\theta_i$  de las coordenadas articulares.

Para la resolución de la cinemática directa habitualmente en robótica se utilizan las coordenadas de Denavit-Hartenberg (Denavit and Hartenberg, 1955), que mediante el uso de 4 parámetros por articulación establecen un sistema de referencia en cada uno de los eslabones. De esta manera, para cada elemento  $i$  se tiene un sistema de referencia cuyo origen está en el eje de la articulación  $i + 1$ , cuyo eje  $z$  coincide con el eje de giro de la articulación  $i$  y cuyo eje  $x$  está alineado con la normal común entre las articulaciones  $i$  e  $i + 1$ . Para el caso del robot iiwa, se han utilizado los parámetros D-H mostrados en la Tabla 1. Nótese que pueden existir parametrizaciones alternativas, puesto que la notación D-H no es única.

Tabla 1: Parámetros D-H del robot iiwa

$i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$a_i$
1	$\theta_1$	$-\pi/2$	$d_{bs}$	0
2	$\theta_2$	$\pi/2$	0	0
3	$\theta_3$	$-\pi/2$	$d_{se}$	0
4	$\theta_4$	$\pi/2$	0	0
5	$\theta_5$	$-\pi/2$	$d_{cw}$	0
6	$\theta_6$	$\pi/2$	0	0
7	$\theta_7$	0	$d_{wt}$	0

Las distancias  $d_{bs}$ ,  $d_{se}$ ,  $d_{cw}$  y  $d_{wt}$  mostradas en la Tabla 1 se corresponden con las distancias entre la base y hombro, el hombro y el codo, el codo y la muñeca y la muñeca y el elemento terminal, respectivamente, siendo sus valores  $d_{bs} = 0,34 \text{ m}$ ,  $d_{se} = 0,4 \text{ m}$ ,  $d_{cw} = 0,4 \text{ m}$  y  $d_{wt} = 0,106 \text{ m}$ .

A partir de esta acotación, pueden establecerse matrices de transformación homogéneas para cada una de las articulaciones y, simplemente multiplicándolas subsecuentemente, se logra calcular la posición y orientación del elemento terminal a partir de los valores de las coordenadas articulares.

## 2.2. Cinemática inversa

La cinemática inversa consiste en calcular el valor de las coordenadas articulares  $\theta_i$  para una posición y orientación determinada del elemento terminal. Dado que el robot iiwa es un robot redundante, la resolución de la cinemática inversa da lugar a infinitas soluciones. En la literatura se han establecido diversas formas de afrontar la redundancia para resolver la cinemática inversa del robot iiwa, bien sea numéricamente (Song

et al., 2021), mediante el uso del álgebra geométrica (Zaplana et al., 2022) o analíticamente mediante la parametrización de la redundancia (Shimizu et al., 2008; Zaplana et al., 2018). En este trabajo se ha utilizado la metodología analítica propuesta en (Shimizu et al., 2008). En ella, se parametriza la redundancia mediante un ángulo  $\Psi$ , de manera que los infinitos posibles valores de dicho ángulo dan lugar a las infinitas soluciones posibles de la cinemática inversa.

La definición del ángulo  $\Psi$  se realiza teniendo en cuenta que los elementos que van desde el hombro hasta la muñeca van a estar siempre en un mismo plano. De esta manera, ese plano puede girar respecto a una dirección que va desde el hombro ( $P_s$ ) hasta la muñeca ( $P_w$ ) según el ángulo  $\Psi$ , tal como muestra la Figura 3. Además, de la Figura 2 se observa que los ejes de las articulaciones 5, 6 y 7 intersectan en un punto, hecho que va a permitir desacoplar los problemas de posición y de orientación una vez fijada la redundancia.

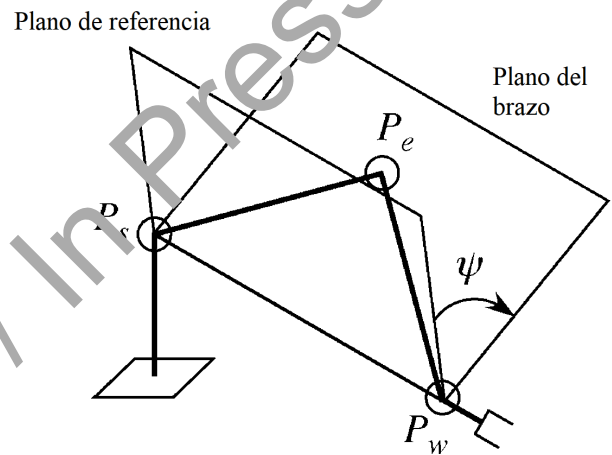


Figura 3: Parametrización de la redundancia mediante el ángulo  $\Psi$  (Shimizu et al., 2008).

Dando un valor al ángulo  $\Psi$ , es posible plantear la resolución de la cinemática inversa analíticamente resolviendo en primer lugar el valor de la coordenada  $\theta_4$ , y sucesivamente los valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  del brazo, así como los valores  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  y  $\theta_7$  de la muñeca. Los detalles de dicha resolución pueden consultarse en (Shimizu et al., 2008).

Tal como sucede en todos los robots, la cinemática inversa da lugar a diferentes configuraciones o modos de ensamblaje. Siendo un robot de 7 GDL, existen 4 factores que determinan las distintas configuraciones del robot:

1. Hombro: formado por los elementos 1 y 2 del robot. Las dos configuraciones posibles se denominan “Hombro derecha” y “Hombro izquierda”, Figura 4(a).
2. Orientación del Codo: formado por los elementos 3 y 4 del robot, puede tomar configuraciones de “Codo derecha” y “Codo izquierda”, Figura 4(b).
3. Posición del Codo: formado por la parejas de elementos 2 y 3 y la pareja 4 y 5, puede tomar las configuraciones “Codo arriba” y “Codo abajo”, Figura 4(c).
4. Muñeca: formada por los elementos 5 y 6, da lugar a las configuraciones “Muñeca arriba” y “Muñeca abajo”, Figura 4(d).

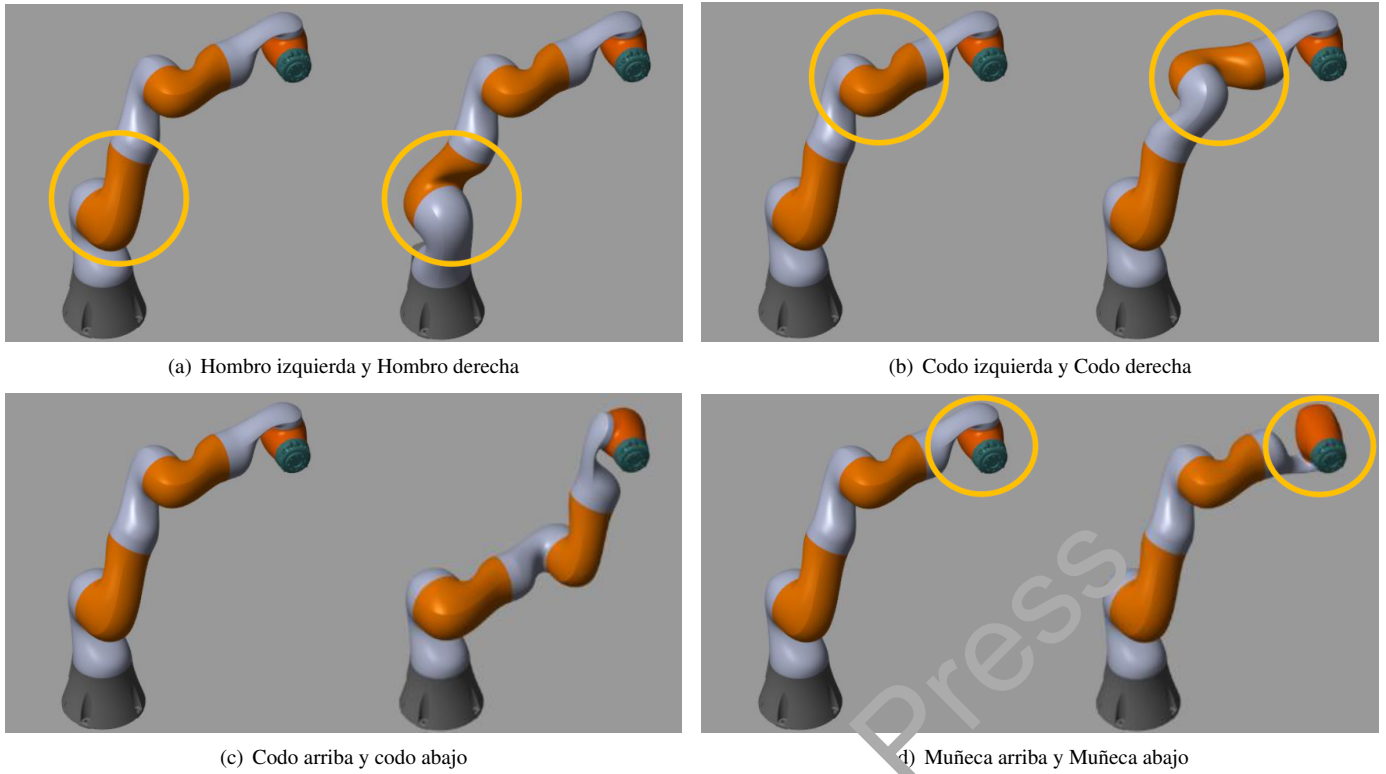


Figura 4: Distintas configuraciones del robot iIwa.

Dado que cada factor puede tomar dos valores, se tiene un total de  $2^4 = 16$  combinaciones posibles para un único valor de  $\Psi$ , dando lugar a 16 configuraciones diferentes del robot para una misma pose (posición y orientación) de su elemento terminal. La Figura 4 muestra las variantes de los 4 factores individualmente para una misma pose del elemento terminal.

### 3. Cálculo de la rigidez de cada configuración

La rigidez de un robot se evalúa mediante su matriz de rigidez, que relaciona el torsor  $\mathbf{W}$  aplicado en su elemento terminal con los desplazamientos cartesianos y angulares  $\Delta\mathbf{S}$  que produce:

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} \Delta\mathbf{S} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{W} = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T$  es el torsor actuante y  $\Delta\mathbf{S} = (\Delta x_P, \Delta y_P, \Delta z_P, \Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)^T$  son los desplazamientos que produce, siendo  $\theta_x, \theta_y$  y  $\theta_z$  los ángulos de Euler que definen la orientación del elemento terminal. Nótese que si los vectores  $\mathbf{W}$  y  $\Delta\mathbf{S}$  están referidos a una base  $x-y-z$ , la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  estará referida a esa misma base  $x-y-z$ .

La matriz de rigidez es función de la configuración del robot a través de su matriz Jacobiana. La matriz Jacobiana relaciona el vector  $\dot{\mathbf{x}}$  de velocidades lineales y angulares del elemento terminal con el vector  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  de velocidades en las articulaciones.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

En este caso, la matriz  $\mathbf{J}$  es una matriz de dimensiones  $6 \times 7$  en la que cada columna tiene la forma:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{O}_n - \mathbf{O}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{z}_{i-1}$  es el eje de giro de la articulación  $(i-1)$ -ésima y  $\mathbf{O}_n$  y  $\mathbf{O}_{i-1}$  son, respectivamente, los vectores de posición de las referencias del elemento terminal y del elemento  $(i-1)$ -ésimo, ambos tomando la base fija como referencia (Tsai, 1999).

La matriz de rigidez se calcula a partir de la matriz Jacobiana y una matriz diagonal  $\chi$  con la rigidez de cada articulación.

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}^{-T} \chi \mathbf{J} \quad (4)$$

donde  $\chi = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ , siendo  $k_i$  la rigidez de cada articulación.

Las rigideces  $k_i$  de cada articulación vienen dadas por la rigidez constructiva de sus componentes. Concretamente, estos valores hacen referencia a la constante de proporcionalidad entre un par  $T_i$  aplicado en cada articulación y la desviación angular  $\Delta\theta_i$  que produce en la misma. Dado que dichos valores  $k_i$  no están en las especificaciones del fabricante, las rigideces  $k_i$  se van a considerar proporcionales al par máximo que puede aportar cada articulación. Así, se considera  $k_i$  unitario para las articulaciones 1 y 2, cuyo par máximo para el LBR iiwa 7 R800 es de  $176 \text{ Nm}$ , y valores inferiores para el resto de articulaciones tal como se indica en la Tabla 2. Pese a no tratarse de valores de rigidez realistas, este hecho no afecta a los resultados presentados ya que el análisis compara la rigidez de un mismo robot en distintas configuraciones.



Tabla 2: Rigidez de las articulaciones.  $T_{max}$  en Nm y  $k_i$  en Nm/rad.

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
$T_{max}$	176	176	110	110	110	40	40
$k_i$	1	1	0,625	0,625	0,625	0,227	0,227

De la Ecuación (4) se obtiene una matriz 6×6 que describe la rigidez del robot en cualquier dirección en una determinada configuración. Dado que la matriz tiene 36 componentes, establecer un índice escalar que defina la rigidez no es una tarea sencilla, más aún teniendo en cuenta que la matriz de rigidez no es homogénea dimensionalmente (Angeles, 2010). En la literatura se han utilizado índices globales, que hacen referencia a todo el espacio de trabajo o una porción del mismo (Rao et al., 2005; Zhang et al., 2018; Liao et al., 2022), e índices locales referidos a la rigidez en una configuración determinada (Xue et al., 2022). Respecto al modo de obtener un índice escalar a partir de los 36 elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , se utilizan valores relacionados con el determinante o el determinante de la primera submatriz 3×3, que es dimensionalmente homogéneo y hace referencia a los desplazamientos (Guo et al., 2015). Este tipo de índices dan información de la rigidez en general, pero una configuración del robot puede aportar valores de rigidez muy elevados en una dirección y una rigidez reducida en otras direcciones. Más aún, es posible que en una aplicación específica sea interesante obtener una elevada rigidez en determinada dirección, resultando irrelevante el valor de la rigidez en otras direcciones. Es así que en los últimos años se están utilizando índices de rigidez asociados a la tarea a realizar (Chen et al., 2019; Quintao et al., 2019).

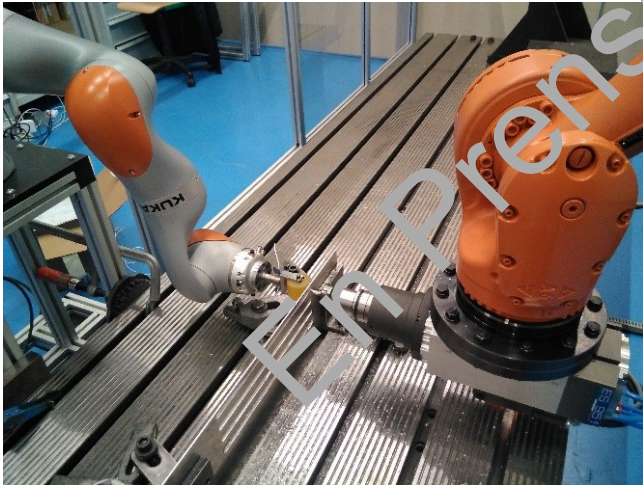


Figura 5: Robot de mecanizado a la derecha y robot de apoyo móvil con rodillo a la izquierda (Torres et al., 2020).

En la aplicación analizada en el presente trabajo, la aplicación de un robot como soporte móvil en el mecanizado de paredes delgadas, se desea que el robot sea lo más rígido posible en la dirección en la que empuja la chapa. La Figura 5 muestra los dos robots y la chapa a mecanizar: El robot de la derecha es un robot industrial que realiza una ranura sobre la chapa de pared delgada, mientras que el robot de la izquierda es el robot iiwa analizado en este artículo cuya función es seguir la trayectoria de mecanizado desde la cara opuesta de la chapa empujando y por tanto aportando rigidez a la chapa a mecanizar. En adelante,

el robot que mecaniza será denominado *robot de mecanizado* y el robot iiwa que realiza la labor de soporte móvil será referido como *robot de soporte* o simplemente robot.

En esta aplicación, es evidente que el robot de soporte debe aportar rigidez en la dirección perpendicular a la chapa. Así, si se ubica un sistema de referencia fijo con su eje  $x$  en la dirección perpendicular a la chapa, el índice utilizado para representar la rigidez del robot será el elemento  $K_{xx}$ . Considerar este elemento como índice de rigidez en la dirección  $x$ , es equivalente al índice de rigidez direccional descrito en (Guo et al., 2015), que se calcula premultiplicando y postmultiplicando la primera submatriz 3×3 de  $\mathbf{K}$  por un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección deseada:

$$k_{uu} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{3 \times 3} \mathbf{u} \quad (5)$$

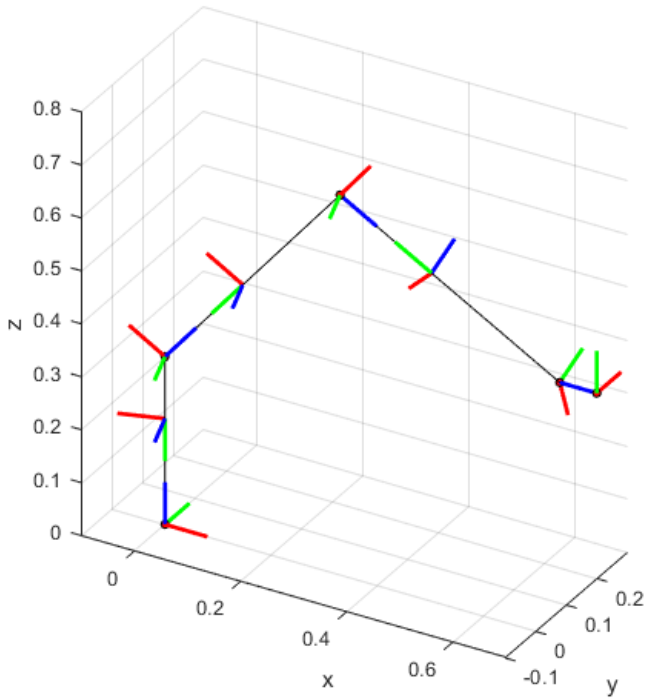
Así, en caso de que el robot de soporte tuviese que aportar rigidez en otra dirección, bastaría con definir un vector  $\mathbf{u}$  en la dirección deseada y utilizar (5) para obtener el índice de rigidez. A modo de ejemplo, si el robot tuviera que ejercer de soporte móvil en el mecanizado de una placa curva, podría utilizarse el índice  $k_{uu}$  asociado a una dirección  $\mathbf{u}$  perpendicular a la chapa en cada punto.

#### 4. Resultados

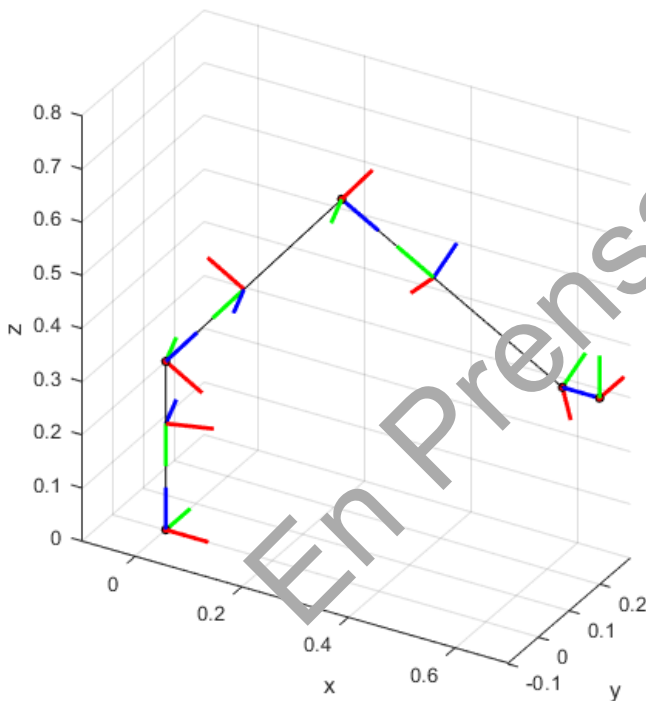
La aplicación del cálculo de la rigidez se ha realizado sobre la trayectoria del robot de soporte como robot de apoyo en la operación de mecanizado. En primer lugar, debe comprobarse que, en efecto, distintos valores del ángulo  $\Psi$  dan lugar a distintos valores de rigidez para una misma pose del elemento terminal. Adicionalmente, debe realizarse un análisis de las distintas configuraciones en función de los 4 factores citados previamente (Figura 4).

Dada la simetría del robot, se ha comprobado que los factores “Hombro”, “Orientación del Codo” y “Muñeca” no afectan a la matriz de rigidez. Esto es debido a la geometría de robot y a la disposición de sus elementos constructivos. Tal como se ilustra en la Figura 6, para las dos configuraciones “Hombro derecha” y “Hombro izquierda”, la disposición de los elementos constructivos que aportan rigidez al robot es la misma, con la salvedad de que las bases 1 y 2 están giradas 180° en un caso respecto al otro. Esto mismo sucede para las distintas configuraciones obtenidas según los factores “Orientación del Codo” y “Muñeca”.

Por su parte, el factor “Posición del Codo” sí afecta a la rigidez ya que, en este caso, la distribución de los elementos del robot será distinta para las configuraciones “Codo arriba” y “Codo abajo”. No obstante, variando el valor del parámetro  $\Psi$  se pueden alcanzar las citadas variantes “Codo arriba” y “Codo abajo” de la Figura 4(c), ya que entre ambas existe un desfase de  $\Psi = 180^\circ$ . Por tanto, para realizar este análisis basta con variar el ángulo  $\Psi$  para obtener todas las posibles configuraciones del robot.



(a) "Hombro derecha"



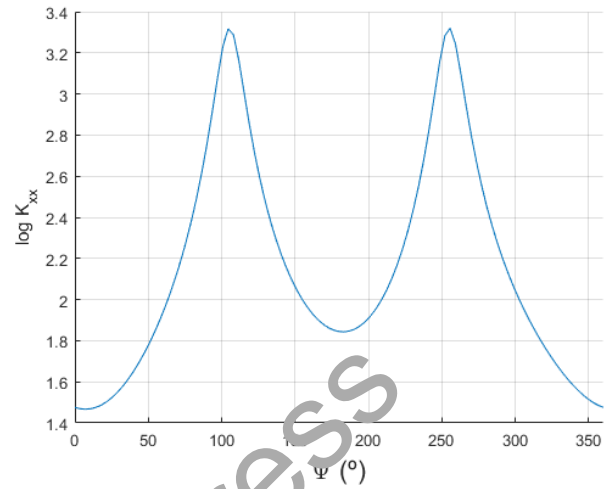
(b) "Hombro izquierda"

Figura 6: Distintos valores del factor "Hombro".

#### 4.1. Rigidez para distintas configuraciones en la misma pose

Como paso previo del análisis, se ha evaluado la rigidez del robot en una determinada pose del elemento terminal para distintas soluciones de la cinemática inversa, es decir, para distintos valores del ángulo  $\Psi$ . Se ha tomado como pose de referencia la definida por las coordenadas  $x_P = 0,5 \text{ m}$ ,  $y_P = 0,5 \text{ m}$ ,  $z_P = 0,8 \text{ m}$ , con los ángulos de Euler iguales a cero. La Figura 7 muestra una representación de la rigidez del robot de soporte tomando como índice su elemento  $K_{xx}$ , en función del ángulo

$\Psi$  para la pose mencionada. Dado que la diferencia entre los valores de  $K_{xx}$  para distintos valores de  $\Psi$  es elevada, la representación está en escala logarítmica.

Figura 7.  $K_{xx}$  en función de  $\Psi$  para una pose dada.

La Figura 7 confirma que la variabilidad de la rigidez es muy alta y que, por tanto, las diferentes configuraciones alcanzables mediante el GDL redundante, parametrizadas mediante el ángulo  $\Psi$ , dan lugar a distintos valores de rigidez. Así, seleccionando el índice de rigidez adecuado, el GDL redundante puede utilizarse para lograr configuraciones más rígidas de acuerdo a la aplicación que se le dé al robot.

#### 4.2. Trayectoria como robot de soporte

Tal como se ha comentado en la Sección 3, se pretende utilizar el robot iiwa como robot de soporte que rigidice una chapa de pared delgada, mientras por la otra cara el robot de mecanizado realiza una operación de mecanizado, tal como se ha mostrado en la Figura 5.

La Figura 8 muestra una representación esquemática de la trayectoria del robot de soporte. El centro de la chapa está situado a una distancia de la base del robot dada por las coordenadas  $x$  y  $z$ , mientras que la longitud de la trayectoria es  $L_r$ . Además del GDL redundante, de la Figura 8 se observa que el rodillo colocado en el elemento terminal puede girar respecto a su eje sin alterar su función como robot de soporte. Así, se tiene una segunda redundancia en la trayectoria cuyo efecto también se debe analizar. Esta redundancia se parametriza mediante un ángulo  $\delta$ , que representa la orientación del último elemento del robot de soporte respecto a la dirección perpendicular al plano de la chapa (Figura 8).

Adicionalmente, la ubicación relativa entre el robot y la chapa también tiene una influencia considerable en la configuración en la que el robot realiza su tarea de soporte móvil, con lo que el presente trabajo también tendrá en cuenta la ubicación de la pieza respecto al robot.

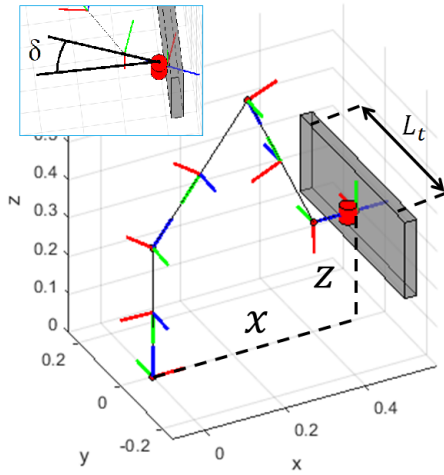


Figura 8: Trayectoria del robot de soporte.

Como primera prueba, se ha evaluado la rigidez del robot a lo largo de la trayectoria para determinados valores del ángulo  $\Psi$ , cada uno de ellos con 3 valores del ángulo  $\delta$ . A modo de ejemplo, se han tomado los valores  $\Psi = 0^\circ$  y  $\Psi = 90^\circ$  y para cada uno de ellos los valores  $\delta = -15^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$  y  $\delta = 15^\circ$ . Para este primer análisis se han tomado como valores de la Figura 8  $x = 0,5\text{ m}$ ,  $z = 0,55\text{ m}$  y  $L_t = 0,35\text{ m}$ , tomada esta última distancia de manera simétrica respecto a la posición de la base del robot de soporte que establece el recorrido de la coordenada  $y$ .

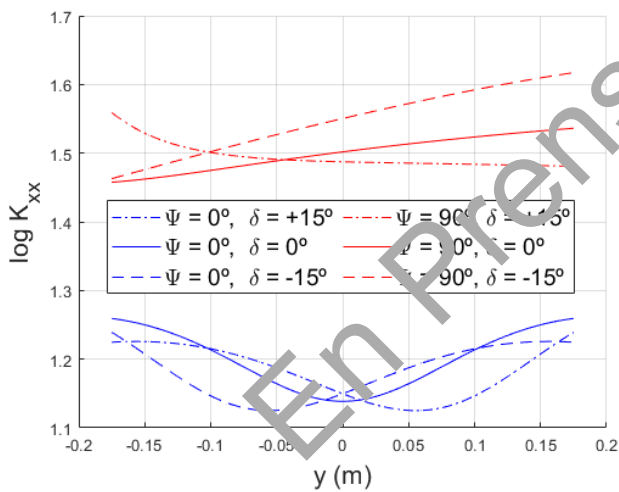
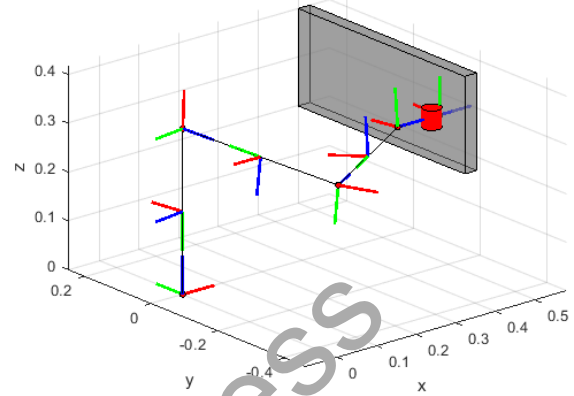


Figura 9: Rigidez para los valores  $\Psi = 0^\circ$  y  $\Psi = 90^\circ$ .

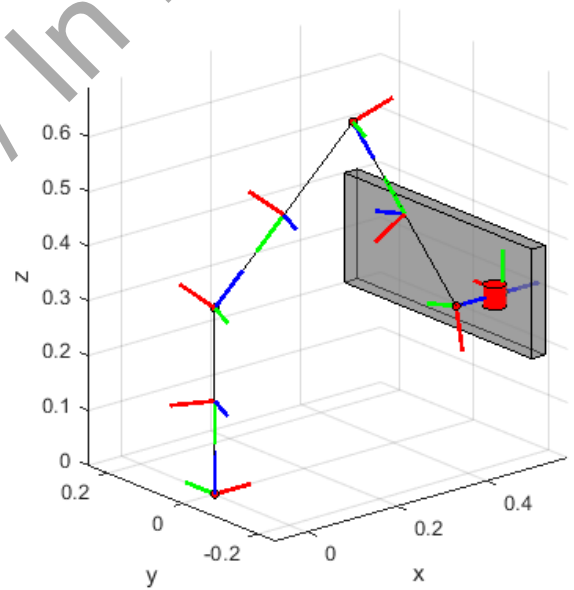
La Figura 9 muestra la rigidez a lo largo de la trayectoria para los citados 6 casos. Se observa cómo la rigidez en la dirección  $x$  es mayor para el caso en el que  $\Psi = 90^\circ$  en cualquier punto de la trayectoria independientemente del valor de  $\delta$ . Asimismo, se observa que el valor de  $\delta$  tiene una influencia en la rigidez menor que el ángulo  $\Psi$ , aunque al tratarse de un solo caso esta observación no se considera concluyente.

A partir de la Figura 9 se deduce que es mejor realizar la trayectoria fijando el ángulo  $\Psi$  a  $90^\circ$  frente a fijarlo a  $0^\circ$ , independientemente del ángulo  $\delta$ . Además, se observa que, mientras con  $\Psi = 0^\circ$  se mantiene la simetría para los valores positivos y negativos de la coordenada  $y$ , en el caso de  $\Psi = 90^\circ$  esa simetría

en  $K_{xx}$  se rompe, ya que la geometría del robot no es simétrica a lo largo del recorrido. La Figura 10 permite visualizar esa ausencia de simetría cuando el valor del ángulo  $\Psi$  es de  $90^\circ$  frente a la simetría cuando el ángulo  $\Psi$  es de  $0^\circ$ , considerando en ambos casos  $\delta = 0$ .



(a)  $\Psi = 90^\circ$



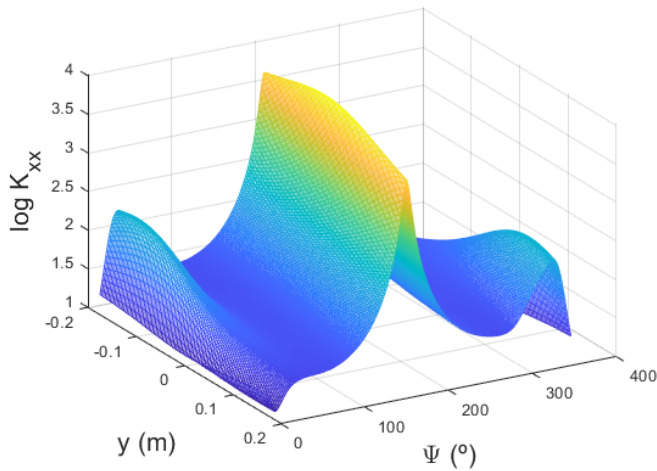
(b)  $\Psi = 0^\circ$

Figura 10: Robot en la trayectoria con distintos valores de  $\Psi$ .

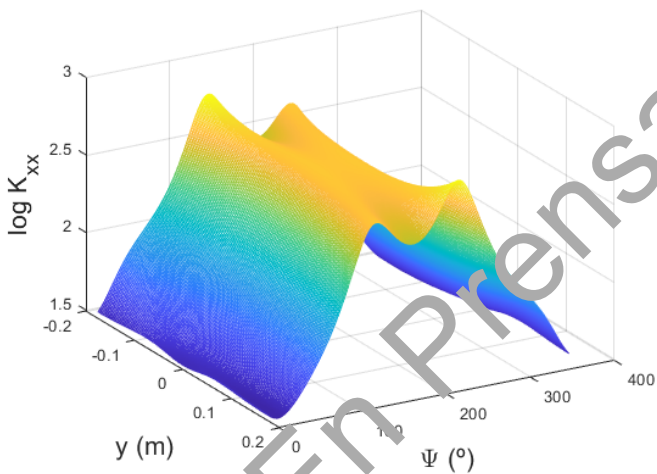
#### 4.3. Trayectoria de máxima rigidez

Una vez constatado que las distintas configuraciones, definidas mediante los ángulos  $\Psi$  y  $\delta$ , dan lugar a distintos valores de la rigidez del robot, el paso final es utilizar los GDL redundantes para optimizar la rigidez del robot a lo largo de la trayectoria. Para ello, se ha discretizado la trayectoria y se ha analizado la rigidez del robot en cada uno de sus puntos en función de los ángulos  $\Psi$  y  $\delta$ . Tal como se ha dicho previamente, la ubicación de la pieza también tiene influencia en la rigidez que aporta el robot ya que, en función de esta ubicación, las configuraciones en las que el robot realiza la trayectoria son

La Figura 11 muestra el valor del índice de rigidez  $K_{xx}$  a lo largo de la trayectoria para distintos valores de  $\Psi$  y su valor óptimo de  $\delta$ , ubicando la pieza en distintas posiciones según las coordenadas  $x$  y  $z$  de la Figura 8. Nuevamente, el índice de rigidez  $K_{xx}$  se ha representado en escala logarítmica debido a las grandes diferencias de  $K_{xx}$  en función de la configuración del robot.



(a)  $x = 0,5 \text{ m}$ ,  $z = 0,55 \text{ m}$



(b)  $x = 0,7 \text{ m}$ ,  $z = 0,7 \text{ m}$

Figura 11: Rigidez para distintos valores de  $\Psi$  y ubicaciones de la pieza según acotación de la Figura 8.

La primera observación de la Figura 11 es que, en efecto, existen variaciones sustanciales del índice de rigidez, con lo que utilizar el GDL redundante resultará útil para llevar al robot a una configuración que aporte mayor rigidez. Asimismo, se observa que para las dos ubicaciones de la pieza la máxima rigidez se da cuando el valor es  $\Psi$  es cercano a los  $180^\circ$ . Se debe aprovechar por tanto esta cresta de valores máximos para obtener la mayor rigidez posible del robot a lo largo de la trayectoria. En lo relativo a la ubicación de la pieza respecto al robot, nótese que los valores numéricos son más elevados en la Figura 11(a) que en la Figura 11(b). Conviene por tanto analizar en mayor profundidad la ubicación de la pieza

Para hallar la ubicación óptima de la pieza, se ha realizado un barrido en las coordenadas  $x$  y  $z$  de la Figura 8. Se han tomado valores para  $x$  entre  $0,45 \text{ m}$  y  $0,75 \text{ m}$  y valores para  $z$  entre  $0,55 \text{ m}$  y  $0,7 \text{ m}$ , teniendo en cuenta que son los valores en los que la trayectoria al completo está dentro del espacio de trabajo del robot de soporte, respetando las limitaciones del rango de movilidad de cada articulación. Ahora bien, tal como se ha visto la rigidez del robot de soporte varía a lo largo de la trayectoria, por lo que para comparar las trayectorias entre sí es necesario un índice o valor de referencia. Se ha elegido para ello el valor mínimo de la rigidez en la trayectoria, de manera que se garantice que cualquier punto de la trayectoria tendrá una rigidez de, como mínimo, el valor elegido. Los resultados de este proceso se muestran en la Figura 12.

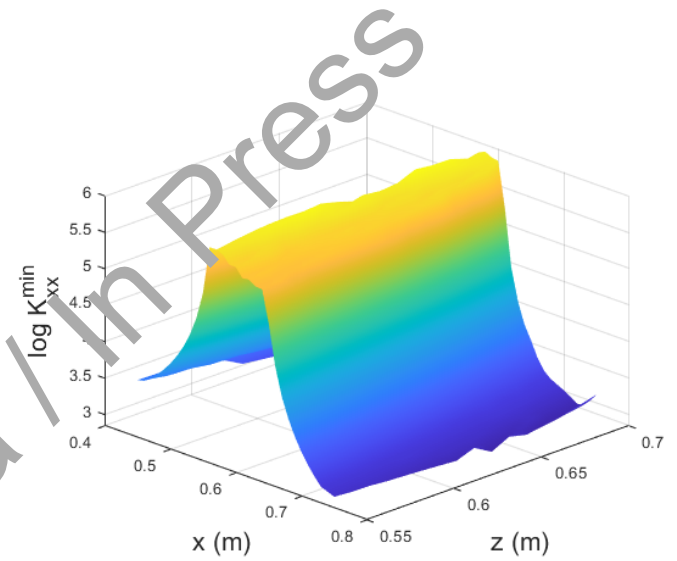


Figura 12: Valor máximo de rigidez mínima a largo de la trayectoria, en función de la ubicación de la pieza.

De la Figura 12 se observa que la coordenada  $z$  tiene una menor influencia en la mejora de la rigidez, mostrando valores casi constantes o con una variación pequeña. Por su parte, la ubicación en  $x$  cobra una mayor importancia, obteniéndose valores más elevados en el tramo entre  $0,55 \text{ m}$  y  $0,6 \text{ m}$ . Concretamente, el valor máximo de rigidez mínima se da para las coordenadas  $x = 0,56 \text{ m}$  y  $z = 0,55 \text{ m}$ .

Una vez se tiene la ubicación óptima de la pieza, pueden extraerse los valores de los ángulos  $\Psi$  y  $\delta$  que maximizan la rigidez del robot y, por ende, la trayectoria óptima para esta tarea como soporte móvil. La optimización ha dado como resultado que el valor de  $\Psi$  es constante e igual a  $180^\circ$  a lo largo de toda la trayectoria de máxima rigidez. Por su parte, la Figura 13 representa el valor de  $\delta$  a lo largo de la trayectoria de máxima rigidez. Obsérvese que el valor de  $\delta$  es un valor que aumenta linealmente desde  $-18^\circ$  hasta  $+18^\circ$ . Con estos valores de  $\delta$ , todos los elementos del robot de soporte permanecen en un plano vertical, evitando flexiones fuera de dicho plano.



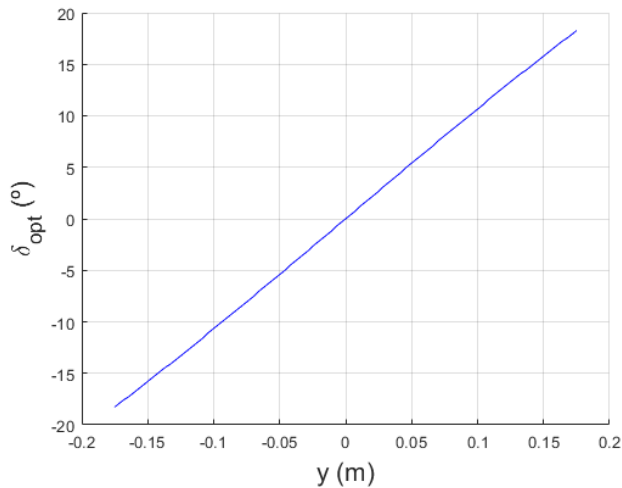


Figura 13: Valor de  $\delta$  óptimo para pieza en  $x = 0,56\text{ m}$  y  $z = 0,55\text{ m}$ .

Adicionalmente, la Figura 14 muestra el valor de las coordenadas articulares a lo largo de la trayectoria de máxima rigidez. Dado que el robot permanece en un plano vertical durante toda la trayectoria, se observa que la mayoría de las coordenadas angulares apenas varían. Así, la coordenada  $\theta_1$  va haciendo girar el plano vertical y el resto de coordenadas sufren leves variaciones para trazar la recta que está en contacto con la chapa.

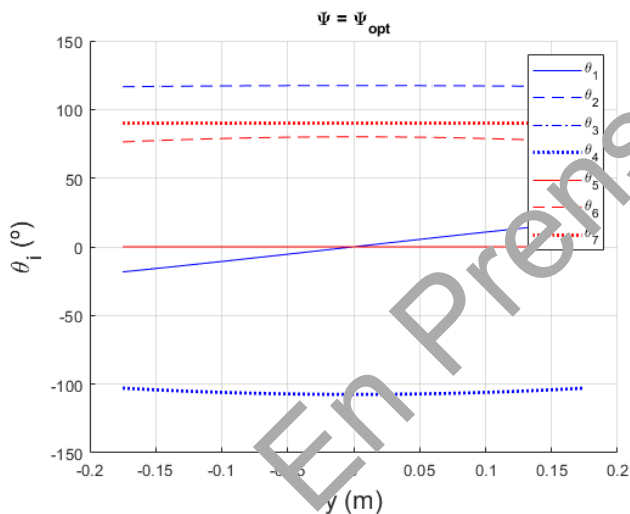


Figura 14: Valor de las coordenadas articulares en la trayectoria de máxima rigidez.

Finalmente, la Figura 15 representa el valor de rigidez obtenido a lo largo de la trayectoria, en la que se ha añadido el valor de la rigidez en las trayectorias iniciales de la Sección 4.2. Tal como se aprecia en la imagen, los valores de rigidez alcanzados son muy elevados con respecto a las trayectorias de referencia con  $[\Psi, \delta] = [0^\circ, 0^\circ]$  y  $[\Psi, \delta] = [90^\circ, 0^\circ]$ , por lo que una vez más se ha representado el valor de la rigidez en escala logarítmica. Nótese que los valores de rigidez obtenidos son aproximadamente tres órdenes de magnitud superiores a los de las trayectorias de referencia, con lo que puede afirmarse que el uso de los GDL redundantes del robot puede mejorar considerablemente la rigidez del robot en este tipo de aplicaciones.

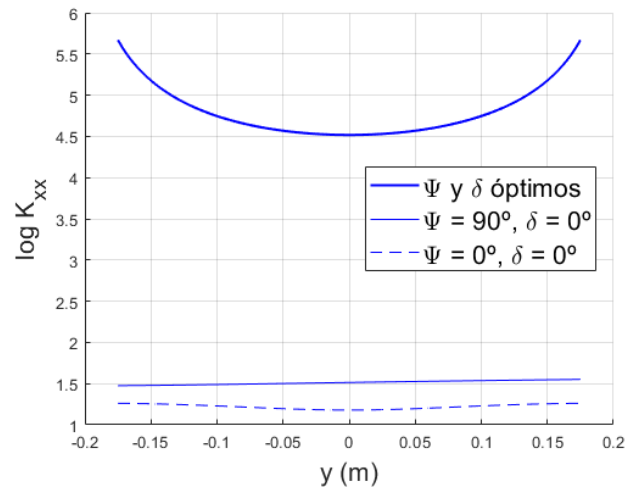


Figura 15: Rigidez en trayectorias parciales en  $x = 0,56\text{ m}$  y  $z = 0,55\text{ m}$ .

## 5. Conclusiones

Se ha llevado a cabo un análisis de rigidez de un robot antropomórfico redundante de 7 GDL. La resolución de la cinemática inversa se ha parametrizado de manera que variando un solo parámetro se alcancen las infinitas soluciones.

Se ha analizado la rigidez del robot a lo largo de una trayectoria en la que el robot trabaja como soporte de una chapa de pared delgada a la que otro robot está realizando una operación de mecanizado por la cara opuesta. Al tratarse de una trayectoria definida mediante 5 GDL, el robot de 7 GDL permite tener una redundancia de 2 GDL. Mediante las distintas soluciones de la cinemática inversa, se ha elegido la trayectoria que aporta mayor rigidez en la dirección deseada en esta aplicación. Los resultados muestran que, efectivamente, la rigidez del robot puede mejorarse sensiblemente utilizando los GDL redundantes. En el mismo proceso, también se han analizado el efecto de la posición relativa entre la chapa y la base del robot, observándose que afecta tanto a los valores de rigidez en sí mismos como a la ubicación de las zonas en las que puede alcanzarse la máxima rigidez.

Pese a que el análisis se ha realizado sobre una trayectoria recta en la que el robot debe aportar rigidez siempre en la misma dirección, la formulación utilizada puede aplicarse al caso de superficies curvas en las que la dirección en la que se desea mejorar la rigidez varíe. Finalmente, el análisis debería completarse mediante experimentación en laboratorio.

## Agradecimientos

Este trabajo ha contado con la financiación de la “Convocatoria de ayudas a proyectos de I+D del Gobierno de Navarra”, bajo el proyecto con Ref. 0011-1365-2021-000080.

## Referencias

- Aginaga, J., Zabalza, I., Altuzarra, O., Nájera, J., 2012. Improving static stiffness of the 6-rus parallel manipulator using inverse singularities. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 28, 458–471. DOI: 10.1016/j.rcim.2012.02.003
- Angeles, J., 2010. On the nature of the cartesian stiffness matrix. *Ingeniería Mecánica* 3 (5), 163–170.

- Azulay, H., Mahmoodi, M., Zhao, R., Mills, J. K., Benhabib, B., 2014. Comparative analysis of a new 3×PPRS parallel kinematic mechanism. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 30 (4), 369–378.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2013.12.003
- Bu, Y., Liao, W., Tian, W., Zhang, J., Zhang, L., 2017. Stiffness analysis and optimization in robotic drilling application. *Precision Engineering* 49, 388–400.  
DOI: 10.1016/j.precisioneng.2017.04.001
- Chen, C., Peng, F., Yan, R., Li, Y., Wei, D., Fan, Z., Tang, X., Zhu, Z., 2019. Stiffness performance index based posture and feed orientation optimization in robotic milling process. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 55, 29–40.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2018.07.003
- Cvitanic, T., Nguyen, V., Melkote, S., 2020. Pose optimization in robotic machining using static and dynamic stiffness models. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 66, 101992.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2020.101992
- Díaz-Cano, I., Quintana, F. M., Galindo, P. L., Morgado-Estevez, A., 2022. Calibración ojo a mano de un brazo robótico industrial con cámaras 3d de luz estructurada. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 19 (2), 154–163.  
DOI: 10.4995/riai.2021.16054
- Denavit, J., Hartenberg, R. S., 1955. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics* 22 (2), 215–221.  
DOI: 10.1115/1.4011045
- Guo, Y., Dong, H., Ke, Y., 2015. Stiffness-oriented posture optimization in robotic machining applications. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 35, 69–76.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2015.02.006
- Herranz, S., Campa, F. J., de Lacalle, L. N. L., Rivero, A., Lamikiz, A., Ukar, E., Sánchez, J. A., Bravo, U., 2005. The milling of airframe components with low rigidity: A general approach to avoid static and dynamic problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture* 219 (11), 789–801.  
DOI: 10.1243/095440505X32742
- Léger, J., Angeles, J., 2016. Off-line programming of six-axis robots for optimum five-dimensional tasks. *Mechanism and Machine Theory* 100, 155–169.  
DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.01.015
- Li, M., Hu, X., Du, L., Bao, S., Yuan, J., 2022. Stiffness modeling of redundant robots with large load capacity and workspace. In: *2022 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics (RCAR)*, pp. 401–412.  
DOI: 10.1109/RCAR54675.2022.9872192
- Liao, Z.-Y., Wang, Q.-H., Xie, H.-L., Li, J.-R., Zhou, X.-F., Pan, T.-H., 2022. Optimization of robot posture and workpiece setup in robotic milling with stiffness threshold. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 27 (1), 582–593.  
DOI: 10.1109/TMECH.2021.3068599
- Lin, J., Ye, C., Yang, J., Zhao, H., Ding, H., Luo, M., 2022. Contour error-based optimization of the end-effector pose of a 6 degree-of-freedom serial robot in milling operation. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 73, 102257.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2021.102257
- Mohammadi, Y., Ahmadi, K., 2022. In-process frequency response function measurement for robotic milling. *Experimental Techniques*, 1747–1567.  
DOI: 10.1007/s40799-022-00590-5
- Ozturk, E., Barrios, A., Sun, C., Rajabi, S., Munoa, J., 2018. Robotic assisted milling for increased productivity. *CIRP Annals* 67 (1), 427–430.  
DOI: 10.1016/j.cirp.2018.04.031
- Qintao, C., Jizhi, Y., Shen, Y., Pengyu, L., 2019. Optimization of comprehensive stiffness performance index for industrial robot in milling process. In: *2019 IEEE 9th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER)*, pp. 609–614.  
DOI: 10.1109/CYBER46603.2019.9066502
- Rao, A. B. K., Saha, S. K., Rao, P. V. M., 2005. Stiffness analysis of hexaslide machine tools. *Advanced Robotics* 19 (6), 671–693.  
DOI: 10.1163/1568553054255673
- Shimizu, M., Kakuya, H., Yoon, W.-K., Kitagaki, K., Kosuge, K., 2008. Analytical inverse kinematic computation for 7-dof redundant manipulators with joint limits and its application to redundancy resolution. *IEEE Transactions on Robotics* 24 (5), 1131–1142.  
DOI: 10.1109/TR0.2008.2003266
- Song, G., Su, S., Li, Y., Zhao, X., Du, H., Han, J., Zhao, Y., 2021. A closed-loop framework for the inverse kinematics of the 7 degrees of freedom manipulator. *Robotica* 39 (4), 572–581.  
DOI: 10.1017/S026357472000582
- Torres, R., González, S., Elguea, I., Agirre, J., Iriarte, X., Agirre, N., Inziarte, I., 2020. Robotic assisted thin-wall machining with a collaborative robot. In: *2020 IEEE 16th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pp. 1505–1508.  
DOI: 10.1109/CASE48305.2020.9216864
- Tsai, L. W., 1999. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley and Sons, New York.
- Xue, X., Zhang, Y., Chen, Q., Xu, X., 2022. The posture optimization method based on deformation index in robotic milling process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 121 (7), 4999–5014.  
DOI: 10.1007/s00170-022-09745-5
- Zaplana, I., Claret, J. A., Basanez, L., 2018. Análisis cinemático de robots manipuladores redundantes: aplicación a los robots Kuka LWR 4+ y ABB Yumi. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 15 (2), 192–202.  
DOI: 10.4995/riai.2017.8822
- Zaplana, I., Hadfield, H., Lasenby, J., 2022. Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra. *Mechanism and Machine Theory* 173, 104835.  
DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104835
- Zhang, H., Cheng, G., Chen, S., Guo, F., Shan, X., 2018. Stiffness modeling and performance evaluation of 2(3hus+s) parallel manipulator. In: *2018 3rd International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM)*, pp. 456–461.  
DOI: 10.1109/ICARM.2018.8610777
- Zhao, J., Duan, Y., Xie, B., Zhang, Z., 2021. Fsw robot system dimensional optimization and trajectory planning based on soft stiffness indices. *Journal of Manufacturing Processes* 63, 88–97, trends in Intelligentizing Robotic Welding Processes.  
DOI: 10.1016/j.jmapro.2020.05.004
- Zhao, X., Tao, B., Qian, L., Yang, Y., Ding, H., 2020. Asymmetrical nonlinear impedance control for dual robotic machining of thin-walled workpieces. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 63, 101889.  
DOI: 10.1016/j.rcim.2019.101889