Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS, SOCIALES Y DE LA EDUCACIÓN

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria

Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para introducir las funciones elementales y sus inversas en 4°ESO

Estudiante: Paula Lucía Herrero Lanzas

Tutores: Raquel G. Catalán y Cibrán Santos

Especialidad: Matemáticas

Junio, 2023

Resumen

Este TFM (Trabajo Fin de Máster) plantea una propuesta didáctica para introducir las funciones elementales y sus inversas a nivel de 4º de la ESO, así como las funciones definidas a trozos. Se empieza motivando el tema y metodología seleccionados para la situación de aprendizaje, apoyada a su vez en un marco teórico centrado en el entendimiento relacional e instrumental del autor Richard R. Skemp y en la concepción del aprendizaje y la docencia con una perspectiva genérica y desde el punto de vista de un modelo cooperativo como es la técnica de puzle. Se presenta así el desarrollo de las sesiones tanto en la práctica como en lo planteado *a priori*, además del contraste entre lo previsto y lo realizado en el aula. Analizaremos igualmente tanto las diferencias encontradas en dicho contraste como los propios resultados de aprendizaje del alumnado, para acabar con una serie de conclusiones sobre las fortalezas y debilidades de la puesta en marcha en el centro educativo, además de sobre el sistema educativo en relación con las matemáticas.

Palabras clave: entendimiento relacional; entendimiento instrumental; modelo cooperativo; técnica de puzle; funciones elementales.

Abstract

This TFM (Final Master's Work) presents a didactic proposal to introduce elementary functions and their inverses at the 4th ESO level, as well as piecewise functions. It begins by motivating the topic and methodology selected for the learning situation, supported in turn, by a theoretical framework focused on the relational and instrumental understanding of the author Richard R. Skemp. As well as the conception of learning and teaching with a generic perspective and from the point of view of a cooperative model such as the jigsaw classroom. In this way, the development of the sessions is presented both in practice and in what was proposed beforehand, in addition to the contrast between what was planned and what was done in the classroom. We will also analyze both the differences found in such contrast and the students' own learning results, to end with a series of conclusions on the strengths and weaknesses of the implementation in the educational center, as well as on the Educational System in relation to Maths.

Keywords: relational understanding; instrumental understanding; cooperative model, jigsaw classroom; elementary functions.

ÍNDICE

ANÁLISIS DE UN PROCESO DE ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES EN SECUNDARIA

INTRODUCCIÓN

Este TFM (Trabajo Fin de Máster) se ha desarrollado siguiendo la normativa reguladora de los procesos de evaluación en la Universidad Pública de Navarra (UPNA) actualizada por Acuerdo de Consejo de Gobierno de 27 de octubre de 2020 así como las disposiciones de desarrollo de las normas reguladoras de los trabajos fin de estudios de la UPNA en la Facultad de Ciencias Humanas, Sociales y de la Educación (FCHSE). La normativa completa puede consultarse en las Webs 2, 3 y 5, así como la plantilla seguida para el formato, en la Web 4.

Motivado por el deseo de proponer un cambio en el modelo de enseñanza tradicional, este trabajo persigue dar un giro a una experiencia personal con la técnica de puzle.

Hace un par de años, experimenté (como alumna) esta técnica en una asignatura de 3º de carrera, con la que se buscaba que aprendiésemos una nueva parte del temario, subdividida a su vez en tres temas independientes. Para ello, se separó a la clase en tres grupos (de en torno a 5-6 personas) y se asignó uno de estos temas a cada uno. En estos grupos, trabajamos tanto individual como grupalmente la información que nos correspondía según el tema estipulado. Pasadas un par de sesiones, se nos pidió que formáramos nuevos grupos (de entre 3-4 personas) en los cuales, dentro de cada uno, habría, al menos, un integrante que proviniera de un grupo (de los formados anteriormente) distinto. Así, en nuestro nuevo grupo debíamos explicar a los otros dos integrantes lo aprendido sobre el tema que nos correspondía, al igual que ellos explicarían los suyos.

Finalmente, se elegiría al azar una persona de cada uno de los entonces denominados “grupos grandes” que trabajaba un tema distinto para salir a exponer uno de los otros dos temas que no se le había asignado desde un primer momento, pero que debía haber entendido y asimilado de igual forma gracias a la explicación de sus compañeros del “grupo pequeño”.

En su momento yo desconocía esta técnica y me pareció que no fue para nada eficaz, pues sentí que habíamos perdido el tiempo y que podría haberse visto el temario mucho más rápido simplemente proporcionándonos la teoría o impartiéndola de forma expositiva en clase (como estábamos acostumbrados a hacerlo hasta el momento). En definitiva, quedé bastante insatisfecha con la dinámica empleada (o quizá más bien con el cómo se aplicó al tema y a nuestra clase en su momento).

Posteriormente, se me explicó esta misma técnica en el máster de educación secundaria que he cursado este año, en la asignatura de *Propuestas de intervención educativa en matemáticas*. Al descubrir sus "entresijos", ventajas, desventajas y verdadero funcionamiento (al igual que lo he ido haciendo durante la redacción de este TFM), quise probar que mi descontento con la técnica se debía a una mala experiencia o puesta en práctica y no a la técnica en sí. Por ello, propuse aplicarla al aula del centro donde he hecho las prácticas como docente durante este curso.

Una vez elegida la metodología, llegaba el turno de seleccionar el tema y curso en el que se iba a aplicar. Las opciones se reducían a conceptos correspondientes a 1º o 4º de la ESO, por ser los niveles educativos en los que impartía clases mi tutor del centro de prácticas. Optamos por 4º de la ESO ya que se trata de un curso en el que los estudiantes presentan mayor capacidad de abstracción y razonamiento, lo que permite plantear una situación de aprendizaje de mayor complejidad matemática.

En cuanto al tema, por motivos de organización del temario y temporalización asignada a cada unidad, mi intervención abarcaba el periodo que correspondía al tema de funciones, más concretamente, al de funciones elementales. Así, el profesor titular comenzó introduciendo tanto el concepto de función como sus características, de modo que la situación de aprendizaje que se plantea en este trabajo continúa el desarrollo de este tema empezando por la introducción de las funciones definidas a trozos (siendo estos trozos segmentos de rectas), y siguiendo con las funciones elementales y sus inversas.

Así, el presente escrito comenzará sustentando la propuesta de intervención educativa en un centro de educación secundaria navarro en un marco teórico fundamentado por un lado en el entendimiento relacional e instrumental de Richard Skemp y, por otro, en el modelo de aprendizaje cooperativo, más concretamente, en la técnica de puzle o *jigsaw classroom*, ambos temas precedidos por un breve preámbulo más genérico sobre aprendizaje y docencia.

A continuación, se comentará la situación de aprendizaje planteada en sí: en primera instancia de forma práctica, esto es, cómo se llevó a cabo realmente en el aula, y seguidamente de forma teórica (el cómo se planteó de forma previa a la intervención en el aula). Además, se proporcionarán los resultados de aprendizaje individualizados para cada alumno (véanse la sección de anexos), y se hará un análisis global de éstos.

El trabajo finaliza con una serie de conclusiones que incluyen una breve reflexión final a cerca de mi estancia en el centro y de la profesión del docente, seguida de las referencias bibliográficas y anexos donde se puede consultar toda la información con mayor detalle.

<u>Descripción del aula:</u>
El centro educativo donde se realizaron las prácticas es el Instituto de Educación Secundaria Navarro Villoslada, localizado en Pamplona (Navarra), entre los barrios de San Juan, Ermitagaña y Mendebaldea. Las prácticas curriculares externas que se han realizado responden al formato extensivo del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad Pública de Navarra (UPNA). Esto permitió hacer una primera aproximación tanto al funcionamiento integrado como al nivel de organización y de docencia de un centro educativo, sus características socioculturales y de qué manera estas condiciones se reflejan en el aula y el aprendizaje del alumnado, así como diferentes ámbitos de actuación específica como es el tratamiento a la diversidad.

Concretamente, en el ámbito didáctico, que es el que principalmente nos concierne en este trabajo, se hará un análisis de la mencionada propuesta educativa en la asignatura de matemáticas a nivel de 4º de la ESO. La práctica docente se ha llevado a cabo en el aula de desdoble de 4º B/C, y por ello los resultados, análisis y conclusiones expuestas serán fruto de lo observado en la muestra de los 17 estudiantes que conforman esa clase. Cabe mencionar que, al referirnos a alguno de estos alumnos a lo largo del trabajo se hará uso de la instrucción de la RAE sobre el género neutro, usando dicha neutralidad cuando el género de los estudiantes sea irrelevante.

Se trata de un aula con alumnos provenientes de dos clases distintas, pero mezclados con el propósito de impartir matemáticas de forma integradora a todo el alumnado de 4º que tiene intención de hacer el bachiller de la rama científica. La propuesta de intervención concreta está destinada a introducir y explicar las funciones elementales así como las funciones definidas a trozos.

Esta clase destaca por ser el aula de 4º de la ESO con mejores resultados dentro del centro, por lo que parece ser la más prometedora. No obstante, también se trata de un aula con alumnado de integración tardía (un alumno latinoamericano llegado este año al centro con nivel en matemáticas de en torno a 1º de la ESO), un alumno con TDAH, e incluso un par de estudiantes que, al tomar la decisión de no acabar la ESO por la vía ordinaria y seguir sus estudios en un Ciclo de Grado Básico de FP (Formación Profesional), se ha permitido, a nivel de centro, que su falta de participación en las clases de matemáticas no sea tenida en cuenta negativamente, y se le siga evaluando igualmente.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. SKEMP. Entendimiento relacional e instrumental

En este apartado se resumirá un capítulo del libro "the psychology of learning mathematics" de Richard R. Skemp (1919-1995), pionero en la educación matemática que integró las disciplinas de las matemáticas, educación y psicología como una sola. Este capítulo trata sobre el entendimiento relacional e instrumental, su significado, sus diferencias y las posibles ventajas o inconvenientes que ambos suponen.

Comenzamos hablando del término *Faux Amis*, quizá más conocido en inglés como *False Friend*. Se refiere a palabras que, siendo iguales o muy parecidas en dos idiomas, sus significados son muy diferentes en cada uno de ellos. No necesariamente deben ser dos idiomas distintos, si no que, incluso dentro de una propia lengua, en dos dialectos distintos, se pueden encontrar palabras de este tipo.

Más aún, dentro de un mismo idioma, podemos encontrar palabras que, según el contexto, o incluso la interpretación que se les dé, pueden significar una cosa u otra. Puede incluso cambiar el significado simplemente cambiando el receptor que escucha la palabra. Esto se complica aún más cuando la propia persona que está manejando la palabra ni siquiera es consciente de estar hablando de un *Faux Amis*, por lo que el significado de la palabra, para él, es único, y no hay lugar a equivocación.

El autor defiende que es precisamente esta confusión y desconocimiento del otro significado donde radican muchos de los problemas que hay en la educación matemática en ese momento, y probablemente hoy en día. A raíz de ello, se centra en dos términos cuyo significado cree que puede tener distintas interpretaciones: *comprensión* y *matemáticas*.

Hablaremos, en primer lugar, de la palabra "entender" o "comprender". No todos tenemos una misma idea de lo que significa, porque, ¿qué significa realmente entender algo? El propio Skemp, en el artículo original de 1976, admite creer haber estado seguro de lo que comprender suponía. Sin embargo, asegura haber estado equivocado, puesto que plantea una distinción entre la comprensión relacional y la instrumental.

Con la primera se refiere a lo que "comprender" había significado hasta ese momento para él; es decir, saber tanto qué estás haciendo como porqué lo estás haciendo. Sin embargo, el entendimiento instrumental es algo que no había interpretado como comprensión como tal, sino como un medio para resolver problemas matemáticos a través de reglas memorizadas sin razones aparentes.

No obstante, le resulta irónico que para muchos alumnos, e incluso profesores, sea precisamente esta segunda definición de comprensión la que atribuyan realmente a entender. Aun así, esto no significa que ninguno de los dos pensamientos sea incorrecto. El autor muestra, a través de diversos ejemplos, cómo ambos significados de compresión conviven, siendo compatibles y complementarios entre ellos.

Se puede creer que el entendimiento relacional es el más válido o adecuado a la hora de entender un concepto, pero estaríamos dejando de lado la practicidad que aporta el entendimiento instrumental, así como la recompensa personal que supone el saber hacer un ejercicio y llegar a la solución correcta. Tampoco hay que olvidar que para evaluar al alumno se le debe calificar. Así, los resultados que obtenga también aportarán y condicionarán su futura forma de comprensión. Y lo harán en dos direcciones.

Un alumno satisfecho con sus resultados está más motivado hacia la asignatura, pero hay un problema: si el estudiante se acostumbra a obtener buenas calificaciones porque es capaz de resolver correctamente todos los ejercicios, quizá nunca vaya a buscar nada más allá. La curiosidad que genera el entendimiento relacional no se fomentaría, pues las necesidades académicas del alumno estarían cubiertas por sobresalientes.

Es por ello por lo que es muy importante trabajar la frustración y la autonomía del alumno desde el primer momento, y abordar el tema con naturalidad. Es comprensible que la recompensa personal que genera la comprensión instrumental sea muy grata, y que es necesaria, pero no es comparable con la que genera la comprensión relacional. El entender un concepto y saber relacionarlo con otros, así como el saber plantearse cosas más allá una vez entendido, puede ser tan gratificante o más que lograr resolver un problema matemático. El problema es que muchos estudiantes no buscan esa última sensación, si no que se quedan en la primera.

Esto es, si se evalúa a un estudiante con ejercicios del mismo tipo que se han realizado en clase y ha aprendido a través de la comprensión instrumental cómo resolverlos correctamente, obtendrá una buena calificación, independientemente de si realmente ha habido una comprensión relacional detrás o no.

De todos modos, no nos confundamos: ninguno de los dos “medios” de comprensión es prescindible o menos importante. Como ya se ha mencionado, ambos deben complementarse en su justa medida. Es tan importante usar metáforas como “llevarse una” en las restas o “pasar al otro lado con el signo opuesto” como conocer el fundamento matemático que hay detrás. Al fin y al cabo, a la hora de hacer un problema se aplica lo aprendido, y esto es gracias a la comprensión instrumental. Sin embargo, para poder aplicarlo, se debe haber tenido una comprensión relacional previa.

Skemp, a lo largo del artículo, insta al lector a también descubrir por sí mismo los 3 principales beneficios de conocer tanto la comprensión relacional como la instrumental. En primer lugar, para la mayoría de los lectores, que creen que el único y verdadero entendimiento es el relacional, les ayudará a conocer lo extendido que está el enfoque instrumental, así como su utilidad. En segundo lugar, ayudará a entender realmente los dos enfoques opuestos. Por último, es un buen ejercicio hacer una comparación de los dos tipos de entendimiento para saber en qué caso es mejor hacer uso de uno o del otro.

El autor también trata el tema de la idea preconcebida extendida en muchos estudiantes y alumnos de que la comprensión relacional es la mejor. De hecho, Skemp trata de explicar que no hay que elegir entre una u otra, que no debemos calificar un tipo como mejor que el otro, si no que debemos aceptar que ambos hablan de cosas distintas y ambos son necesarios, ambos deben convivir y desarrollarse. Alguien con una perspectiva amplia, será capaz de entender ambos enfoques y explicar y transmitir los conceptos desde ambos puntos de vista. Esto es lo que, en nuestra humilde opinión, sería un buen docente.

Un enfrentamiento entre posturas contrarias puede llevar a problemas en el aula, generalmente de dos tipos:

1. Profesores que quieren transmitir a los alumnos el conocimiento por la vía relacional, y despertar en ellos esa curiosidad, con estudiantes que sólo buscan un enfoque instrumental para superar la asignatura con éxito.

En este caso, la frustración aparecerá en el docente, quien no siente que su labor explicativa haya cubierto todos los aspectos que él quería. Sin embargo, para el alumno no hay problema, al menos a corto plazo, puesto que obtiene las explicaciones que requiere, y buenas calificaciones, ya que es capaz de resolver los problemas con éxito, a no ser que el examen se base en preguntas distintas de los tipos de ejercicios hechos en clase, en cuyo caso resultará obvio que el alumno no obtendrá buena calificación.

En ocasiones, es mucho más práctico comprender un concepto relacionalmente, que memorizar muchas reglas desde un enfoque instrumental. El punto de vista relacional cuesta más y requiere mayor esfuerzo, pero es mucho más útil a largo plazo, puesto que presenta una aplicación más general. Sin embargo, el instrumental ofrece aplicaciones para casos concretos, o de cierto tipo.

2. Alumnos con motivación y ganas de aprender relacionalmente, con profesores que se limitan a explicar desde un punto de vista puramente instrumental.

Este caso puede ser el más perjudicial, pues se puede perder la motivación y ganas de un alumno con grandes aptitudes matemáticas por culpa de un mal docente que no es capaz de satisfacer esas necesidades. Aunque el alumno obtenga buenos resultados, no se le está haciendo ningún favor.

Un caso menos común es cuando existe una disyuntiva entre el enfoque que le da el docente y el enfoque del material didáctico (por ejemplo, un libro) en el que se basa la instrucción, y que se subsana si el docente modifica el enfoque, o mejor, lo amplia.

Como ya mencionamos, en este trabajo, Skemp habla de dos términos en los que, según el contexto y significado que se les dé, se refieren a una u otra cosa. El primero era el significado de “comprender”. El segundo de ellos es la palabra *matemáticas*, lo cual no implica que vayamos a tratar distintos métodos de enseñanza de esta. Como bien indica el propio Skemp:

> *“Solía pensar que todos profesores de matemáticas estaban enseñando la misma asignatura, solo que algunos lo hacían mejor que otros. Ahora sé que se enseñan dos asignaturas diferentes bajo el mismo nombre, ‘matemáticas’.”*

El autor relaciona una de estas asignaturas con las matemáticas enseñadas a través de la comprensión instrumental y la otra, con las enseñadas a través de la comprensión relacional. Para Skemp si sólo se practica uno de los dos entendimientos, la materia parece completamente distinta. Y en su apuesta por una combinación de ambas para proporcionar al estudiante la mejor ayuda posible, trabaja el tema dicotómicamente, bajo la perspectiva de aceptar solo una de las dos aproximaciones.

Así Skemp expone las numerosas ventajas que aporta el entendimiento instrumental. Entre ellas destaca la mayor facilidad que plantean las matemáticas instrumentales: busca memorizar y aplicar reglas o fórmulas, y por tanto no requiere gran esfuerzo reflexivo, sino de memoria. Además, tiene un alto porcentaje de logro si limitamos los ejercicios matemáticos que resolvemos a los que son del tipo que la regla aprendida puede resolver. Por este mismo motivo, la recompensa personal es mucho más inmediata que a través de la comprensión relacional.

Pero el autor también plantea la otra cara de la moneda: las ventajas del pensamiento relacional. Entre ellas recalca que es un enfoque mucho más moldeable o adaptable a nuevos conceptos. No se limita a cierto tipo de condiciones o ejercicios, como lo hacen las reglas del pensamiento instrumental. Es por ello por lo que resulta mucho más útil para generalidades, casos distintos a los trabajados en clase, etc.

Normalmente, tratar de extrapolar las reglas instrumentales a casos que se salen de las condiciones preestablecidas no lleva a buenos resultados o deducciones.

Por otro lado, el pensamiento relacional no requiere tanto trabajo de memoria, sino que es mucho más deductivo y lógico, a diferencia del instrumental. Más aún, el pensamiento relacional es mucho más duradero que el instrumental. Una fórmula puede olvidarse, mientras que un proceso deductivo de un concepto realizado por el alumno pervive en el conocimiento.

Ante esta dicotomía, nosotros apostamos por la convivencia de ambos enfoques. Es cierto que el pensamiento instrumental debe estar presente en cierta manera y que puede resultar más atractivo al principio, pero llega un punto en que empieza a convertirse en un lastre para la memoria. Las fórmulas se multiplican, y todas parecen diferentes. Demasiados casos para saber qué aplicar y ninguna flexibilidad para adaptar lo conocido.

El uso único del entendimiento instrumental hace que la materia matemática, antes o después, se convierta en inabarcable, difícil, estresante e insuperable. Al final, cuando experimentamos lo que significa el entendimiento relacional y lo aplicamos en nuestro proceso de aprendizaje, aunque al principio nos resistamos al esfuerzo que supone entender de esta manera, sentimos que es mucho más práctico comprender un concepto relacionalmente, que memorizar muchas reglas desde un enfoque instrumental. El punto de vista relacional aparentemente cuesta más y requiere mayor esfuerzo al principio, pero es mucho más útil a largo plazo, puesto que presenta una aplicación más general.

A pesar de todas las ventajas que el enfoque relacional ofrece, se sigue enseñando a través del instrumental. ¿Por qué? Alguno de los motivos que plantea el autor son que el entendimiento relacional, en primera instancia, es más difícil de lograr para un aspecto concreto que el instrumental, que se alcanza de manera más lenta o que por motivos de temario y organización no haya el tiempo necesario para explicar el concepto relacionalmente. Este último motivo se refiere a la limitación del tiempo que hay en los centros educativos, ya que un curso escolar tiene las horas lectivas contadas.

Por otro lado, hay otros factores que influyen en la demanda del enfoque instrumental. Para empezar, no podemos olvidar que los estudiantes están siendo evaluados, por lo que no se les puede culpar de que su principal propósito sea obtener buenos resultados, aunque eso conlleve seguir la vía instrumental. Además, volviendo a la limitación del tiempo, los planes de estudio sobrecargados cada vez son más frecuentes en los centros escolares.

En tercer lugar, un enfoque relacional dificultaría en gran medida la forma de evaluación de los alumnos. Mientras los ejercicios que siguen reglas y fórmulas son fáciles de corregir y evaluar, resulta mucho más complicado conocer, a través de un examen, si el alumno ha entendido o no relacionalmente. Aunque la mejor forma de descubrirlo sería haciéndole preguntas orales, esto es inviable para clases de 30 alumnos. Por último, el entendimiento relacional supone una reestructuración de los esquemas y apuntes del docente que es consciente del cambio que debe plantear y quiere hacerlo, pero necesita mucho tiempo para ello.

Son algunos de los motivos expuestos los que provocan en contables casos un rechazo hacia las matemáticas por parte de los alumnos. Lo más fácil es culpar al sistema educativo, pero empieza a complicarse el asumir parte de la responsabilidad, e incluso más aún el sugerir remedios. No obstante, el ser conscientes y asumir la existencia del problema es estar un paso más cerca de la solución.

Otro problema que plantea el autor es el de la formulación teórica a nivel del profesorado. Cada docente va construyendo su idea mental de cómo explicar cada concepto matemático en el cual se apoyan a la hora de explicarlo. Sin embargo, esta idea no está al alcance de cualquiera, puesto que es personal y difícil de comunicar. Por tanto, la mayoría de los profesores deben aprender de sus propios errores. Skemp expone así la necesidad de una formulación teórica común de manera que se pueda consultar en cualquier momento. Ésta debe aglutinarse de manera sencilla, lo cual no implica facilidad.

Esta formulación teórica cuenta con las siguientes ventajas según el autor: Para empezar, los medios se vuelven independientes de los fines particulares. Se deja de lado la asociación de “tipo de ejercicio” con “tipo de resolución” y se empieza a pensar (relacionalmente) en distintas vías posibles para alcanzar el objetivo. Además, la propia elaboración del esquema o formulación teórica es un logro de por sí, puesto que el estudiante no parte de una idea preconcebida, sino que la desarrolla por sí mismo. Más aún, cuanto más completo se vuelve el esquema, mayor se vuelve la confianza y desenvoltura del alumno en esa área.

Por último, esta formulación teórica ofrece la posibilidad de seguir evolucionando y aprendiendo constantemente. El esquema nunca está completo, siempre podrá enlazarse con un nuevo concepto o se podrá profundizar más en algún aspecto.

1.2. APRENDIZAJE Y DOCENCIA

Existe una eterna discusión sobre qué es mejor: alguien que no explica bien, pero domina la materia, o alguien que se explica muy bien y no controla la materia. La respuesta es que lo menos malo es siempre la primera opción, pero un docente debe dominar mucho más que la asignatura. Y no basta con ser un experto en el tema a enseñar y además tener vocación. Hay que saber comunicar, atraer, estimular, ilusionar, animar, controlar... "enseñar es un arte", dijo Pòlya. Algunos nacen con un don innato y otros aprenden a fingirlo, pero todos deben mejorar cada día.

Siguiendo esta línea, un buen profesor ha de estar bien formado tanto en cómo tratar con el alumnado, como en cómo tratar el tema que le corresponda según su materia. Cuando el docente ve que flaquea en alguno de esos puntos, se preocupa y tiende a focalizarse en uno solo para tratar de potenciarlo: véase un profesor no formado en la dinámica de grupos, que siempre estará frustrado en el campo del trato con los estudiantes. Al fin y al cabo, el profesor debe atacar tres actuaciones o dimensiones enunciadas a continuación.

PRIMERA DIMENSIÓN. La confianza en uno mismo.
Esta dimensión se centra en la confianza referida a la que debe tener un maestro tanto con respecto a la materia (dominar el contenido, saber explicarlo de distintas formas, estar preparado para responder cualquier tipo de dudas, etc.) como con respecto a la gestión del aula (saber trabajar los conflictos del grupo, mantener el silencio cuando sea necesario, animar a la participación, motivar al alumnado, etc.). En este sentido, cabe destacar el denominado "síndrome del impostor", que algunos docentes manifiestan a través de pensamientos como "Yo qué sé de esto" ó "¿Cómo voy a saber explicarlo?"; esto es, me preocupa el qué dirán de mí los alumnos, el colocarme delante suya, etc.

Algunos docentes logran vencer estos miedos, tratando de mejorar día a día: buscan ejemplos que ilustren bien el contenido, hacen apuntes más gráficos, saben cómo hacer responder y trabajar al alumnado, etc.

Mientras tanto, otros nunca superan esta angustia (en uno de los dos aspectos o en ambos) independientemente de los años de experiencia que lleven, lo que impide tener un control total sobre uno mismo y, por tanto, sobre la clase. Es por ello por lo que resulta de vital importancia dominar esta dimensión.

SEGUNDA DIMENSIÓN. El temario
Este otro punto de ataque para los docente abarca los temas relacionados con la preocupación por el contenido de las clases en lo que se refiere a completar el temario a tiempo (aunque no se trabaje bien), el llegar a impartir todos los puntos que requiere el currículo. En este sentido, las presiones externas destacan principalmente en el último curso de la educación secundaria (2º de bachillerato) con la llegada de la EVAU, haciendo que el interés por que el alumno adquiera bien los conocimientos se obvie.

TERCERA DIMENSIÓN. Mis alumnos
Resulta complicado separar la primera y tercera dimensión, pues un maestro con confianza en sí mismo en cuanto al temario y al manejo del aula suele venir ligado a una preocupación nata por sus estudiantes.

No obstante, igualmente existen docentes que son grandes oradores y muy capaces de explicar de diversas maneras el contenido, cubriéndolo a tiempo y que, sin embargo, no lo son de hacérselo llegar a los estudiantes, por lo que no demuestran verdadera preocupación por el alumnado. Esto es, cuanto menos, preocupante, puesto que debe existir una retroalimentación profesor-alumno para que se dé el aprendizaje.

En definitiva, lo ideal sería un docente que se sienta cómodo en todas las dimensiones: que plantee un buen temario, que se preocupe por sus alumnos, que haga por que la evaluación les ayude, etc.

Una vez adentrados en dimensiones, podemos empezar a plantearnos otras cuestiones, como el ser capaz, como docente, de proyectar expectativas elevadas en el alumnado, acción denominada el efecto Pigmalión.

Por ejemplo, si el primer día de clase presagio y anuncio que van a aprobar la mitad porque se trata de una asignatura muy difícil, estoy proyectando en los alumnos unas expectativas muy bajas que ellos interiorizan. Sin embargo, si verbalizo que espero mucho de ellos, es más probable que respondan de manera más asertiva, e incluso con mejores calificaciones de forma inconsciente.

Estas expectativas van relacionadas con la actitud del docente, la respuesta que da antes los baches y éxitos o el cómo administra los retos. Para ello, se ha de trabajar la respuesta que se da al resultado (sea cual sea) de las actividades que se propongan, bien sea animando a seguir trabajando o comentando que no hay malos resultados parciales si me ayudan a aprender más y mejorar, que aunque van despacio van bien, que aunque ha habido puntos difíciles han sabido superarlos, etc.

Para poder seguir hablando sobre el aprendizaje y la docencia citaré una breve historia del *Tratado de Filosofía Zoom* de José Antonio Marina (Marina, 2016):

Se dice que el primer día de clase un profesor de pedagogía dijo a sus alumnos: "He dedicado este verano a enseñar a hablar a mi perro. Está ahí fuera y si quieren lo paso para que les haga una demostración". Ante el entusiasmo generado trajo al perro, que se tumbó delante de la mesa. Pasaba el tiempo y el perro no decía ni una palabra. Cansado de la espera, un alumno se levantó y dijo: "Señor profesor, su perro no habla". El profesor respondió: "Su observación es acertada, y muy importante para su futura profesión de docente. Yo he dicho que había enseñado a hablar a mi perro, no que mi perro hubiera aprendido. No olviden que su profesión no es enseñar. Su profesión es conseguir que aprendan".

Este microrrelato nos permite visualizar la enseñanza como un tren donde, el vagón inicial o locomotora (el docente) arrastra a todos los demás (los alumnos) a lo largo de un camino. El viaje tiene una serie de paradas, y cada una simbolizaría los distintos temas del temario. Puede descolgarse algún vagón, e incluso todos, pero el tren no detiene su marcha hasta llegar a su destino. Los viajes, paradas y horarios son estrictos, como lo es una programación didáctica sin flexibilidad (no hay tiempo de dar una verdadera retroalimentación).

Sin embargo, una metodología basada en el aprendizaje se vería reflejada en una regata, cuyo timonel sería el profesor, siendo el resto de los remadores los alumnos. Es cierto que el docente actúa como guía hacia el destino final, pero si los estudiantes no reman, el barco no avanza. Además, si es solo una parte quienes no lo hacen, el resto deberán aplicarse en mayor medida o, de lo contrario, irán a menor velocidad, evidenciando el hecho de que todos deben involucrarse para ver buenos resultados. En esta metodología sí que existe una verdadera retroalimentación a tiempo y no se espera que haya "vagones descolgados", pues la participación es más activa. De esta manera, de una programación focalizada en el aprendizaje se espera, entre otras cosas, que:

- Se elabore una secuencia de actividades que requieran de trabajo tanto dentro como fuera del aula, valorando la existencia del resto de asignaturas con las que los alumnos conviven.
- Se incluyan actividades de distinta índole: trabajo individual, grupal, clases magistrales, etc.
- Se estudien los criterios de evaluación a conciencia: Es conocida la frase "no tengáis miedo a equivocaros", pero si planteo la evaluación como algo punitivo, la afirmación anterior resulta algo contradictoria. Es bueno evaluar siempre, pero esa evaluación debe asociarse a aprender: aprender qué no se sabe, aprender que se debe reaccionar, aprender qué hacer para cambiar.

  Todo depende del valor que se le dé a la evaluación. Una calificación no debería ser más que un termómetro: Si este indica que hace frío, se busca un abrigo y una manta, y no se sigue pasando frío. Cuando el termómetro marque que la temperatura es adecuada, no se busca nada adicional, y no se recuerda el hecho de que antes hizo frío, pues ya se le puso remedio. De la misma manera, un suspenso en un examen indica que hay cosas que no van bien, y se dicen cuáles son. Igualmente se busca poner remedio a esos errores. Si luego los conocimientos se superan, olvidamos el pasado.

  Si, a pesar de ello, un estudiante pierde el interés por poner remedio a su calificación, el docente puede tratar de volver a motivarlo, pero debe ser el alumno quien, en primer lugar, quiera resolver sus carencias.
- Todos aquellos estudiantes que lleguen al final aprueben: Aquel que haya remado durante todo el trayecto, es porque ha estado preparado para hacerlo. De lo contrario, deberemos modificar las dificultades planteadas a lo largo del camino para que no existan estudiantes que, sin adquirir los conocimientos, puedan llegar a la meta.

En cuanto a este último aspecto, otra de las ventajas que proporciona una metodología basada en el aprendizaje es la facilidad y objetividad a la hora de evaluar, puesto que el objetivo final del aprendizaje es algo claro y no interpretable.

Además, como es de esperar, cada etapa de un aprendizaje tiene su temporalización asignada. Quizás se tarde más o menos en realizar una actividad en función de las capacidades del alumnado, pero se han de respetar los plazos de entrega. De lo contrario, no se llegará a tiempo a la entrega final.

Dentro de las teorías de aprendizaje encontramos dos grandes grupos: constructivistas y sociales.

En las teorías de aprendizaje por construcción o constructivismo se habla de la estructura cognitiva de un alumno como una serie de nodos de disciplinas diversas con ideas claras unidos por líneas de interrelación entre ellos. Así, al impartir en clase un nuevo concepto (correspondiente a un nuevo nodo o “bola”) éste impacta con la estructura cognitiva del alumno y puede suceder lo siguiente:

- Que este nuevo nodo atraviese la red de anteriores conocimientos (no se produce aprendizaje).
- Que el alumno retenga la “bola” el tiempo necesario (por ejemplo, lo suficiente para hacer un examen) y luego se suelte (tampoco hay aprendizaje).
- Que este nuevo nodo sí que se mantenga alterando la estructura en primer lugar y, en segundo lugar, adaptándose a ella. El nuevo conocimiento es integrado, para lo cual la antigua estructura puede alterarse (crisis) para luego adaptarse.

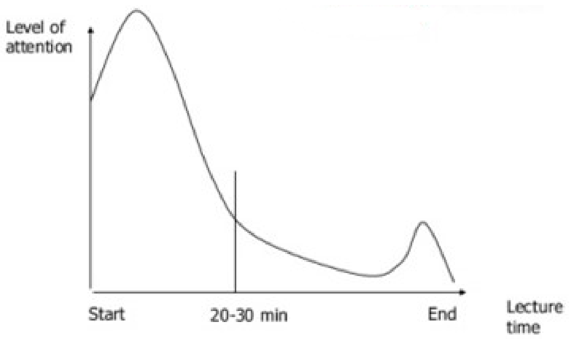
Aquí el aprendizaje depende fundamentalmente de la capacidad intelectual de la persona. Una persona inteligente es capaz de asimilar en su red de conocimiento los conocimientos nuevos que se encuentra, y una persona menos inteligente no lo podrá hacer y su conocimiento se verá limitado. Desde el principio, y genéticamente, tenemos determinado el conocimiento máximo al que seremos capaces de llegar.

En contraposición a la teoría determinista constructivista, tenemos la teoría de aprendizaje social (Vygotsky, 1979): el conocimiento se va expandiendo, y en esa expansión (hasta dónde puedes llegar) interviene lo que uno es capaz de aprender por sí mismo (capacidad innata), pero también es muy importante lo que uno aprende por interacción con la sociedad en la que vive. Es decir, lo que somos capaces de aprender, hasta dónde podemos llegar, no depende sólo de nuestra inteligencia o capacidad intelectual, sino de las personas y acontecimientos que interactúan con nosotros y nos estimulan a lo largo del proceso de aprendizaje. Así, en cada momento de nuestra vida, todos tenemos una zona de conocimiento actual (que se habrá ido modificando con el tiempo). La forma de modificarla es por expansión: siempre hay una zona de conocimiento próximo (aquello a lo que podríamos llegar por nuestra mano) y una zona de conocimiento más lejano, a la que podremos llegar por la acción de personas que nos enseñen a través de sucesivas ampliaciones de nuestra zona de conocimiento actual. Unas relaciones estimulantes pueden hacer que la expansión sea mayor y más rápida de la que podríamos conseguir por nuestros propios medios. Con esta teoría, nuestra capacidad intelectual nos puede limitar pero ciertas barreras pueden ser eliminadas con la ayuda de otros, hasta lugares que no sospechábamos a priori.

Si damos por válida esta segunda teoría, tenemos que aprendemos más por interacción positiva con los otros miembros de nuestra sociedad, y por tanto podemos encontrar interesante el trabajo en grupo, sin estar aislados. En este sentido aparecen muchos modelos que se basan en el trabajo grupal (véase por ejemplo Poole et al. 2004 , Heron 1993 , o Reiter et al, 2017). Uno de estos modelos de trabajo es el modelo cooperativo.

MODELO COOPERATIVO: Técnica de puzle - *The jigsaw classroom*

Tradicionalmente, la docencia en los diferentes niveles educativos ha repetido la siguiente secuencia: Clases expositivas o magistrales – Estudio individual – Examen final. Con ello se fomenta un aprendizaje tanto individualista como competitivo, lo que, a priori, no tiene por qué ser algo negativo. Sin embargo, peligra el hecho de que no se potencien otras formas de aprendizaje que ayudan al desarrollo de competencias distintas, entre ellas, el aprendizaje cooperativo.



Un estudio realizado en los años 70 (Bligh, 1971) basado en muestras experimentales demostró que el pico de atención de una audiencia a lo largo de una sesión expositiva se da a los 15 minutos, momento a partir del cual su interés comienza a decrecer de forma significativa (ver gráfica). Es probable que dicha caída se dé con mayor o menor antelación dependiendo del oyente, pero lo cierto es que va a darse antes o después. Además, se evidenció que la llegada de esta bajada es, en principio, independiente del orador que esté hablando y/o tema que se esté tratando. También se comprobó que la atención volvía a incrementarse según se acercaba el final de la sesión, a la hora de exponer conclusiones, criterios de evaluación, tareas, etc.

Poniendo pues esta realidad sobre la mesa, se plantea una forma de trabajo alternativa que trata de menguar la acentuación del descenso de la curva de atención: El modelo cooperativo, diseñado para generar equipos de trabajo que potencien las habilidades individuales.

David y Roger Johnson (Johnson, D.W.&Johnson, R., 1989) (Universidad de Minnesota) plantean este modelo en 1989 a partir de un trabajo de Slavin en 1980 (Slavin, 1980), y después lo desarrollan en distintos trabajos (1994 (Johnson, D.W.&Johnson, R., 1994), 2005 (Johnson, D.W.&Johnson, R., 2005), 2009 (Johnson, D.W.&Johnson, R., 2009), 2013 (Johnson, D.W.&Johnson, R., 2013) y 2017 (Johnson, D.W.&Johnson, R., 2017)). Lo definen como *"el uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación*". Uno de sus primeros precursores fue el pedagogo estadounidense John Dewey (Dewey, 1899), quien ya en 1899 promovió la relevancia de cimentar conocimientos a partir de la interacción y ayuda entre partes de forma sistemática en el aula, de manera que cada grupo alcanza los objetivos de aprendizaje si y sólo si cada miembro consigue los suyos propios.

El aprendizaje cooperativo es una técnica educativa que se utiliza en las aulas para alentar a los estudiantes a trabajar juntos en grupos de diferentes niveles de habilidad. Los alumnos trabajan juntos para completar las tareas utilizando las fortalezas y debilidades individuales de cada uno. A diferencia del aprendizaje individual, que puede ser bastante competitivo, con esta técnica los niños cooperarán buscando información, aportarán ideas juntos y se hará un seguimiento del trabajo del equipo. El docente actuará como facilitador, animando a los estudiantes a que se ayuden mutuamente.

Los estudiantes que trabajan en entornos de aprendizaje cooperativo consiguen razonar mejor, tener una mayor autoestima, disfrutar de aprender y tener un sistema de apoyo social más fuerte.

Existen diferentes modelos de referencia a la hora de diseñar tareas cooperativas en distintos contextos, incluyendo la técnica del puzzle o rompecabezas (*Jigsaw*), el aprendizaje por equipos de estudiantes

(*Student team learning*), la técnica de aprender juntos (*Learning together*), y la investigación en grupo (*Group investigation*).

Independientemente de cuál sea utilizado, el aprendizaje cooperativo resulta beneficioso para los estudiantes por varias razones, siendo mucho más que un simple trabajo en grupo, ya que da al alumnado tanto la oportunidad de asumir responsabilidades como de aprender de los demás. Algunos beneficios del aprendizaje cooperativo pueden ser los siguientes:

- Interdependencia positiva: el grupo comparte un objetivo común por el que todos los estudiantes están trabajando. Cumplir o no con este objetivo también dependerá de que los demás hagan su trabajo, así que tendrán que confiar los unos en los otros para tener éxito. Esto fomenta la responsabilidad como individuo y como grupo.

- Los estudiantes se animarán y apoyarán mutuamente, y también tendrán discusiones que deberán aprender a gestionar.

- Como cada uno tendrá unas habilidades diferentes, deberán prender a potenciarlas. Se darán cuenta de que pueden aprender cosas nuevas que quizá no habrían alcanzado de haber trabajado solos.

- Los estudiantes aprenderán a comunicarse con el grupo: deben ser abiertos y comunicativos con sus ideas, pero también deberán ser respetuosos y estar abiertos a las ideas diferentes de otros. Deberán además discutir (justificar o rebatir) unas u otras.

- Aprenderán demás que no todas las tareas se pueden completar de forma independiente, sino que a veces es necesario combinar las habilidades de un grupo para tener éxito.

Con todo ello se busca promover una mayor implicación activa por parte del alumnado, el desarrollo del razonamiento y pensamiento crítico, la comunicación oral, reduce la tasa de abandono y prepara de una forma más contextualizada y realista a los estudiantes para el mundo laboral.

Tipos de grupos y formación de los mismos

En primer lugar, podemos hablar sobre los principales tipos de grupos que se pueden formar al trabajar con el aprendizaje cooperativo y cómo formarlos.

Si el docente tiene información previa de los alumnos (por ejemplo, porque les ha impartido clase en meses anteriores) puede hacerlos él mismo de forma equilibrada y heterogénea, que resulta lo ideal, pero también puede conformar grupos aleatorios o dejar que sean los propios estudiantes los que decidan los grupos.

En cuanto a los tipos de grupos, en primer lugar hablamos de los grupos informales, cuyo objetivo es tratar cuestiones en una sesión de una clase durante un breve período de tiempo (unos minutos). Son grupos esporádicos, especialmente útiles para sesiones de carácter expositivo, y que sirven como herramienta para frenar la caída de la curva de atención de los alumnos en momentos puntuales.

Por otro lado, tendremos los grupos formales, creados para resolver cuestiones o tareas mucho más específicas. No se trata de grupos esporádicos, sino que se reúnen durante dos o más sesiones con el fin de lograr objetivos comunes y maximizar tanto su aprendizaje como el de sus compañeros. Un tipo particular de grupo formal serán los grupos de expertos que describiremos después.

Por último, tendremos los grupos base, encargados de controlar el avance eficaz y progresión de cada componente durante un número considerable de sesiones, e incluso uno o varios trimestres o cursos. Son por tanto los equipos que solemos tener estables en el aula. Cada miembro debe proporcionar apoyo y ánimo al resto para completar las tareas y progresar adecuadamente. Es por ello por lo que existe una interacción mucho más fuerte entre los estudiantes en este tipo de grupos.

Es en estas dos últimas agrupaciones con mayor interacción en las que nos vamos a detener para explicar la propuesta de intervención didáctica de este trabajo: la técnica de puzle (aplicada a la introducción de las funciones elementales).

La técnica de puzle

Esta técnica se desarrolla a raíz de la disgregación social en las escuelas que tienen lugar en los años setenta con el propósito el menguar la conflictividad social existente entre los distintos grupos raciales. La proponen Elliot Aronson y Leon Festinger (Festinger&Aronson, 1971) con el fin de que los estudiantes, en lugar de competir entre sí, cooperasen. Se referían a la clase como un gran puzle, donde cada estudiante era una pieza.

La técnica de puzle combina grupos estables base con grupos funcionales (a los que llamaremos de expertos). Cada alumno pertenece a un grupo base y a un grupo de expertos. Los grupos de expertos (que forman parte de la clasificación de grupo formal) están formados por un miembro de cada equipo base, y trabajarán un apartado concreto de la tarea general planteada. De esta forma cada miembro del equipo base se hace experto en un tema o tarea junto con los expertos del mismo tema de los otros equipos.

Una vez se han hecho expertos en el tema, vuelven a su equipo base y explican al resto de compañeros aquello que han aprendido. Como cada miembro del equipo base es experto en un tema diferente, si hay tantos miembros en el equipo base como temas eran necesarios para abordar la tarea, al comunicarse todos su conocimiento adquirido como expertos, el grupo base puede empezar a organizar la consecución de la tarea. Es en el grupo base donde cada miembro es insustituible e imprescindible para su grupo base (aunque no para los otros grupos), puesto que sólo él dentro de ese grupo se habrá especializado en un tema concreto.

El papel del profesor es ahora el de seleccionar el material que se entrega a cada alumno, el de supervisar un correcto funcionamiento dentro de los grupos, y el de resolver dudas y posibles conflictos.

Una vez expuesta la técnica de puzle, damos paso a la descripción de los distintos puntos a seguir o requisitos para diseñar una actividad con esta metodología. Cabe mencionar que no todos los temas son susceptibles de ser enseñados a través de la técnica de puzzle.

En primer lugar se ha de dividir el tema o unidad didáctica que se quiere trabajar en una serie de partes independientes entre ellas y con extensión y dificultad similares. Así, esta parte del temario ha de ser susceptible de ser divisible adecuadamente.

Quizás este primer requisito sea el más difícil de lograr, ya que no es sencillo que todas las partes tengan la misma complejidad o longitud y que estén bien repartidas y equilibradas para cada grupo~~s~~ de expertos y dentro de cada grupo base.

Se necesitan tantos grupos de expertos como partes independientes tenga el tema. Lo ideal sería que ningún grupo de expertos repitiera tema. Aun así, puesto que cuanto más reducido sea el número de personas (sin llegar a 2) del grupo de expertos, mejor se desarrolla el trabajo, podríamos tener varios grupos de expertos trabajando el mismo tema. Por ejemplo, si hubiese 6 alumnos que trabajan la misma parte del tema, en lugar de hacer un único grupo de expertos con 6 personas, en mejor hacer dos grupos de 3 personas. También es deseable que haya la misma cantidad de expertos de cada tema para que haya una buena conformación de los grupos base.

A continuación, se forman los grupos base que cada miembro tendrá como referencia. Dentro de estos grupos, cada alumno trabajará una parte distinta del tema. Lo ideal, de nuevo, es formar grupos base de 3 integrantes, ya que si el número es mayor pueden no trabajar todos, y si formamos parejas, quizás 2 no puedan hacerse cargo de todo, pero esto exigiría que sólo hubiera 3 partes en el trabajo, es decir, sólo 3 expertitudes. Si la tarea es algo más ambiciosa esta rotura habrá de hacerse en más partes, lo que debe aumentar forzosamente el tamaño de los grupos base, disminuyendo por tanto su efectividad.

Antes de que cada integrante de cada grupo base acuda al grupo de expertos de su parte asignada del tema, debe estudiarla individualmente. Este paso es fundamental que se dé, puesto que el siguiente supone la reunión de los alumnos que han estudiado la misma parte del tema (reunión de grupos de expertos), y un estudiante que no haya trabajado a nivel individual no va a aportar nada al grupo de expertos, sino que se aprovechará de lo que el resto haya aprendido por su cuenta. Durante la reunión de los expertos se debate sobre la parte correspondiente del tema y, una vez comprendida, cada alumno vuelve a su grupo original de referencia (su grupo base) donde explica a sus compañeros la materia sobre la que ha trabajado.

Se muestra una imagen gráfica del funcionamiento de los grupos base y grupos de expertos en la siguiente sección del presente trabajo para mejor comprensión de la dinámica.

Finalmente, se ha de evaluar el aprendizaje adquirido por los miembros del grupo. Es importante valorar tanto el trabajo grupal realizado en los grupos base y en los grupos de expertos, como el trabajo individual realizado y aportado al resto del equipo por cada uno. En este nivel, se asume que todos han aprendido sobre todas las partes del tema, a pesar de ser expertos inicialmente en sólo una de las partes.

De este modo, para la evaluación, el docente debe haber tomado nota de todo lo que los alumnos han ido aportando a cada grupo, así como valorar el grado de comprensión de cada estudiante, de forma que habría intervenido cuando observara que una parte no se había entendido y/o explicado correctamente. De esas observaciones debe salir una valoración de la situación en la que se encuentran los alumnos y una inmediata actuación que corrija errores y carencias.

Los dos factores fundamentales más destacables para que la técnica de puzle funcione adecuadamente, y en los que se basa la propuesta particular desarrollada en el siguiente apartado del presente escrito, son la interdependencia positiva y la exigencia individual. La primera de ellas se basa, como ya explicamos antes, en la idea de que la aportación de cada miembro del grupo debe ser indispensable para completar con éxito la actividad. Si en la propuesta de nuestra técnica es posible que se dé el caso de que un integrante de un grupo (tanto experto como base) no participe y, aun así, el resto complete su parte y sigan adelante sin problemas, debemos replantearnos el diseño de la actividad.

Esta interdependencia debe estar asociada, por un lado, a la carga de trabajo. Por ejemplo, si se otorgan 30 minutos para el estudio personal sabiendo que un estudiante puede acabar en 10 minutos, es posible uno o dos miembros del grupo carguen con todo el trabajo porque les da tiempo a hacer más. Debe existir también interdependencia de material. Esto es, cada alumno en un grupo base es especialista en su materia, por lo que solo él tiene la información (el material) correspondiente a su parte, haciendo de esta información algo valioso que los demás no poseen ni controlan.

La interdependencia también puede ser de roles, en especial, cuando volvemos a los grupos originales a explicar lo aprendido, dónde podemos haber asignado roles, de manera que, por ejemplo, mientras explica el alumno A, el B sea el encargado de tomar notas, y que el C sea el encargado de controlar el tiempo y de anotar preguntas. Se puede hablar también de roles temáticos (que sería lo equivalente a la interdependencia de materia) y roles funcionales (equivalente a la interdependencia de roles).

Por último, la interdependencia también se puede asociar al método de calificación: pongámonos en el caso de que la nota grupal es la media de las notas individuales de cada uno, lo cual puede que beneficie a unos y perjudique a otros. ¿Esto es justo? Si pensamos en el grupo de trabajo como un equipo en una competición de cualquier índole, la victoria o derrota es para el equipo entero, por mucho que haya jugadores muy malos o buenos. Por tanto, podríamos asumir que, al ser un trabajo en equipo, la "nota" (el resultado del partido o prueba) es igual para todos.

Dar la misma calificación a todos los miembros del grupo no aporta nada positivo, sino que fomenta la vagancia del vago; produce odio al que no trabaja, odio al trabajo en grupo por parte del trabajador; da ansiedad a los que ven que por culpa de los demás su esfuerzo no sirve de nada, y que por tanto la siguiente vez decidan no hacer nada tampoco.

Así, para no hacer algo tan radical, sin perder a su vez interdependencia de calificación, se podría plantear el que el docente preste atención a lo que hacen los estudiantes en sus grupos y evalúe tanto sus contribuciones al resto como sus esfuerzos personales.

Si una actividad está bien estructurada desde el punto de vista de la interdependencia positiva, tenemos mucho ganado para conseguir el siguiente ingrediente: la exigencia individual (*individual accountability*). Con ella buscamos que todo estudiante rinda cuentas individualmente. Es decir, la técnica debe estar diseñada de manera que no permita que un alumno pueda centrarse en su parte asignada desentendiéndose de la del resto de sus compañeros.

Si una actividad de aprendizaje cooperativo se va a evaluar a través de una presentación oral y se permite que en cada grupo elijan ellos mismo las partes que exponen, cada uno elegirá aquella en la que es experto, perdiendo así la exigencia individual. Sin embargo, si la selección es al azar, sí que la hay. Igualmente, habrá que seguir teniendo en cuenta la intervención de cada alumno en la presentación para dar calificaciones diferentes a los integrantes del grupo.

Entre los tres ingredientes restantes están la interacción cara a cara, las habilidades interpersonales y la reflexión sobre en trabajo definitivo. Un beneficio de trabajar en grupo viene precisamente de lo que implica tener que estar presencialmente, aunque esto también es aplicable a entornos virtuales. Sin embargo, es mejor fomentar el trabajo presencial, y que sea durante el tiempo de clase. Es importante ver reacciones: sonrisas, asentimientos, dudas... Esto se relaciona con las competencias transversales, comunes a cualquier materia, como el desarrollo de la capacidad crítica, expresión oral, resolución de conflictos, etc. Por último, es importante valorar y reflexionar sobre el trabajo realizado a lo largo de las actividades o tareas realizadas (por tus compañeros y por ti mismo), ver fortalezas, debilidades, etc.

La evaluación en cualquier de aprendizaje debe ser una mezcla entre la sumativa (cuantitativa) y formativa (cualitativa), dando cabida al error, pero dándole la importancia que tiene. Hay que evaluar desde el primer momento, dando espacio al error, pero pidiendo un esfuerzo, de manera que no dejamos hasta el examen final el poder intervenir frente a un mal resultado. En definitiva, una evaluación sumativa es más precisa y fiable, mientras que una evaluación formativa tiene la ventaja de proporcionar una retroalimentación a tiempo.

Para dar fin a este marco teórico, cabe mencionar que no todo son beneficios en el mundo del aprendizaje cuando se emplea un nuevo modelo. De hecho, desde un inicio, ya plantea una serie de obstáculos. El primero y más evidente de ellos son los propios alumnos. Su reticencia a dejar de trabajar como acostumbran a hacerlo (generalmente, a través de clases expositivas) hará que la ilusión y ganas por cambiar la metodología explicativa mengüe en el docente, por lo que este proceso supondrá tanto un conflicto interno para el estudiante como para el profesor. No obstante, aunque es esperable que el alumno pase por las fases de sorpresa, negación, resistencia, abandono, rendición, etc., de igual manera se ansía que llegue a las de aceptación, lucha, exploración, retorno de la confianza, integración y, como no, éxito. Todo ello le da mayor necesidad al rol del profesorado antes mencionado: la importancia del acompañamiento, la cercanía para poder hablar con el alumnado y saber cómo se está sintiendo durante el proceso

Una posible desventaja que conlleva el aprendizaje cooperativo y, más concretamente, la técnica de puzle, es la que presentan los desequilibrios internos en los grupos, tan complicados de compensar. Las posibles formaciones de los grupos (tanto base como de expertos) vienen determinadas por el número de alumnos que haya en la clase y los posibles divisores de éste. Además, se ha de contar con que el alumnado más avanzado, el alumnado "estándar" y el que va más rezagado no suelen estar en igualdad de proporciones, ni de manera que puedan repartirse equitativamente entre los grupos. De esta manera, resulta inevitable que aparezcan subgrupos o el "efecto líder".

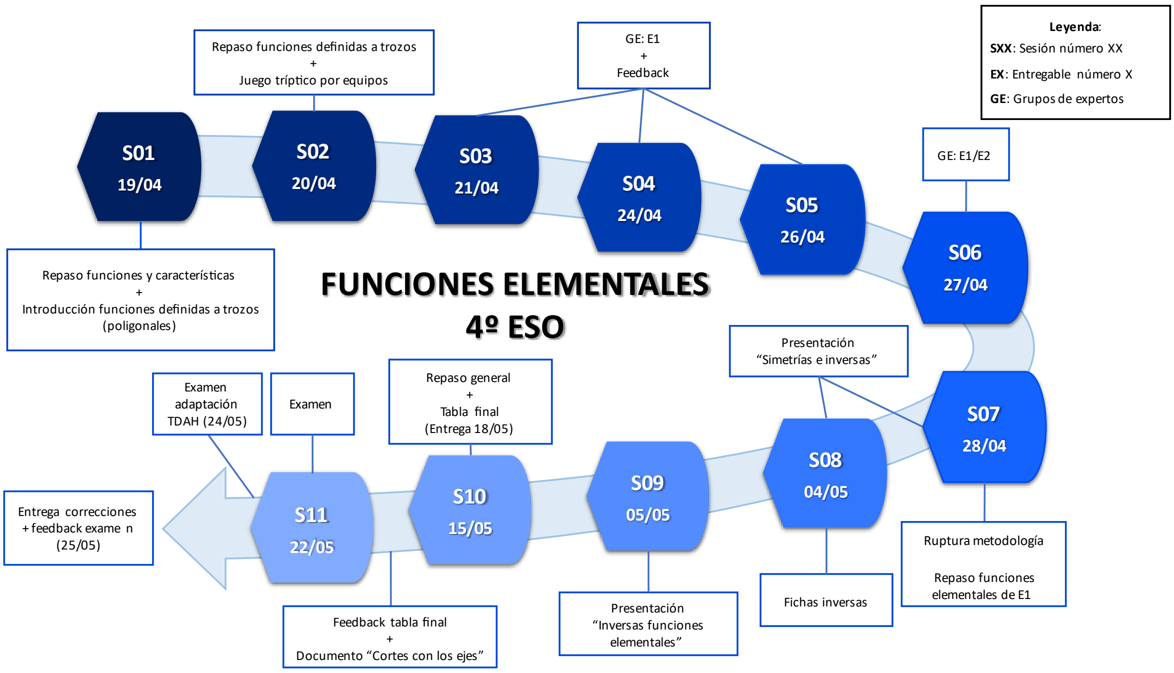
Es igualmente probable que se produzca entre los estudiantes la sensación de "pérdida de tiempo", lo que resulta muy desmotivante y genera una percepción de "no estar aprendiendo nada".

De igual manera, el docente también pasará por distintas fases, quizás no en el mismo orden. Es probable que parta de un estado de escepticismo, donde no crea que sus alumnos están preparados para esta nueva metodología, o que es algo no aplicable a su asignatura. Puede que pase a la fase de motivación o entusiasmo, si comienzan a funcionar las cosas. A continuación puede aparecer una etapa más lúgubre, en la cual perciba el nuevo método como algo ineficaz, con mayor dificultad para el alumnado. Por último, es deseable que surja una mejora continuada en el alumnado que motive nuevamente al docente a seguir confiando en la técnica, aunque si esto no ocurriera, el motivo quizá sea que esta técnica no es aplicable al tema o al aula, en general, o en ese momento particular.

Por ello, resulta igualmente enriquecedora una evaluación de la puesta en práctica por parte del docente: saber qué ha funcionado y qué no puede deberse a la metodología, a la elección de los grupos, al tema en sí, a las actividades... Hay muchas variables y es importante hacer una autocrítica (constructiva, que aporte para que el aprendizaje mejore).

2. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: funciones definidas a trozos y funciones elementales

2.1. ESQUEMA GENERAL REPARTO DE SESIONES – TEMPORALIZACIÓN



Ver ANEXO I para mejor visión y lectura del esquema general.

1) **1ª SESIÓN:** 19/04/2023
- Repaso general de funciones y características
- Introducción a las funciones definidas a trozos: electrocardiograma (ver ANEXO III)
- Resolución ejercicios del libro de texto (p. 190. ejem. 6., ejer. 36, 38.) (Ver ANEXO II)

2) **2ª SESIÓN:** 20/04/2023
- Repaso funciones definidas a trozos + Resolución ejercicios del libro de texto (p. 191 ejer. 39 b y d, ejer 40) (Ver ANEXO II)
- Juego tríptico por equipos (ver ANEXO IV).

3) **3ª SESIÓN:** 21/04/2023
- Resolución de E1 por GE (ver ANEXOS V y VI)

4) **4ª SESIÓN:** 24/04/2023
- Resolución de E1 por GE

5) **5ª SESIÓN:** 26/04/2023
- Resolución de E1 por GE

6) **6ª SESIÓN:** 27/04/2023
- Resolución de E1 ó E2 por GE

7) **7ª SESIÓN:** 28/04/2023
- Repaso funciones elementales vistas hasta el momento + características
- Presentación "Simetrías e inversas" (Ver ANEXOS VII Y VIII)

8) **8ª SESIÓN:** 04/05/2023
- Presentación "Simetrías e inversas"
- Fichas inversas (Ver ANEXO IX)

9) **9ª SESIÓN:** 05/05/2023
- Presentación "Inversas funciones elementales" (ver ANEXO XI)

10) **10 ª SESIÓN:** 15/05/2023
- Repaso general (ver ANEXO XIV)
- Entrega tabla final (ver ANEXOS XII, XIII, XV y XVI)

11) **11ª SESIÓN:** 22/05/2023
- Examen (ver ANEXOS XVII-XXII)

Así como las líneas anteriores muestran la programación seguida durante el desarrollo de la situación de aprendizaje, la temporalización planteada que se esperaba seguir en un principio era la siguiente:

1) **1ª SESIÓN**
   - Repaso general sobre funciones + introducción a las funciones definidas a trozos (se esperaba acabar en una sesión con este nuevo tema)
2) **2ª SESIÓN**
   - Resolución de E1 por GE.
3) **3ª SESIÓN**
   - Explicación E1 en GB.
   - Resolución de E2 por GE.
4) **4ª SESIÓN**
   - Resolución E2 por GE.
5) **5ª SESIÓN**
   - Resolución E2 por GE.
   - Explicación E2 en GB.
   - Institucionalización E2 (ver ANEXO XXIII)
6) **6ª SESIÓN**
   - Presentación “Simetrías e inversas”
7) **7ª SESIÓN**
   - Presentación “Simetrías e inversas” + Resolución E3 por GE
8) **8ª SESIÓN**
   - Resolución E3 por GE (ver ANEXO X)
   - Explicación E3 en GB.
9) **9ª SESIÓN**
   - Resolución E4 por GE (ver ANEXO X)
10) **10ª SESIÓN**
    - Vuelta a los GB y explicación a los compañeros de lo aprendido.
11) **11ª SESIÓN**
    - Continuación de la explicación con los GB.
12) **12ª SESIÓN**
    - Resolución del problema final: encontrar la expresión analítica de una función definida a trozos de funciones elementales con ayuda de GeoGebra y de movimientos en el plano de las funciones elementales estudiadas.
13) **13ª SESIÓN**
    - Resolución y entrega del problema final + autoevaluación y coevaluación por GB y GE

Se muestran ambas a modo de comparativa para reflejar, por un lado, el trabajo que no pudo realizarse por falta de tiempo o por cambio de la metodología y, por otro, para exponer aquello que se añadió y/o modificó debido al ritmo y dinámica de aprendizaje que requería el alumnado.

La realidad experimentada con el tiempo precisado por los estudiantes para acabar E1 fue el detonante para cambiar la dinámica de las clases de cooperativas a expositivas.

Además, como se puede observar, la planificación inicial no contemplaba un examen final, mientras que la puesta en práctica acabó requiriendo de uno por la necesidad del profesor titular de contar con una prueba escrita que justificara la nota de cada estudiante en este tema.

2.2. REPARTO DE LOS TEMAS

CURSO: 4º de la ESO

MATEMÁTICAS A

Tema sobre funciones elementales seccionado en los temas A, B y C, independientes entre ellos y repartidos en cuanto a carga de trabajo según lo siguiente:

a. **TEMA A**
   i. Rectas (función constante, proporcionalidad directa, etc.), parábolas y polinomios de grado 3.
   ii. Irracionales (raíces de grado 2 y 3)

Ventajas: tema más trabajado en clase y más sencillo de entender.
Dificultades: tema más amplio. Algunas funciones no son inyectivas.

b. **TEMA B**
   i. Proporcionalidad inversa
   ii. Exponencial
   iii. Logarítmica

Ventajas: funciones inyectivas.
Dificultades: tema no visto en clase. Más difícil de comprender conceptualmente. Aparecen asíntotas.

c. **TEMA C**
   i. Seno
   ii. Coseno
   iii. Arcoseno
   iv. Arcocoseno

Ventajas: más fácil de comprender conceptualmente a través de vídeos de la goniométrica.
Dificultades: funciones no inyectivas.

Saberes básicos del currículo correspondientes:

- Sentido numérico: A.3.3. ("Algunos números irracionales en situaciones de la vida cotidiana.": El número e), A.4.2. ("Orden en la recta numérica. Intervalos.": Expresión analítica de las funciones definidas a trozos), A.5.1. ("Situaciones de proporcionalidad directa e inversa": Función lineal que pasa por el origen y función de proporcionalidad inversa).

- Sentido de la medida: B.2.1. ("Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones").

- Sentido algebraico: D1.1. ("Observación, generalización y término general en casos sencillos": Líneas de tendencia), D.2.1. ("Modelización de problemas a través de funciones."), D.3.2. ("Relaciones lineales y cuadráticas."), D.4.1. ("Relaciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa en situaciones de la vida cotidiana"), D.5.1. ("Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan"), D.5.2. ("Relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas."), D.5.3. ("Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana”).

- Sentido estocástico: E.1.5. (“Regresión lineal.”)

- Sentido socioafectivo: F.1.1. (“Gestión emocional: […] autoconciencia y autorregulación. Superación de bloqueos […]”, F.1.2. (“Estrategias de fomento de la curiosidad, iniciativa, perseverancia y resiliencia”), F.1.3. (“Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.”), F.2.1. (“Asunción de responsabilidades y participación activa, optimizando el trabajo en equipo. Estrategias de gestión de conflictos.”), F.2.2. (“Métodos para la gestión y toma de decisiones en el trabajo en equipo”).

2.3. OBJETIVOS FORMATIVOS

2.3.1. *Objetivo 1.* Introducir las funciones definidas a trozos y conocer la relación entre sus expresiones analíticas y gráficas.

2.3.2. *Objetivo 2.* Introducir las características de las funciones elementales y sus inversas, así como el manejo de movimiento en el plano de todas ellas.

Objetivos alcanzados: objetivo 1 y parte de objetivo 2.

Objetivos por cumplir: no fue posible desarrollar los movimientos en el plano de las funciones ni acabar comprender las características de las funciones arcoseno y arcocoseno.

Competencias específicas del currículo abordadas:

- CE 3: “Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.”

- CE 5: “Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.”

- CE 7: “Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.”

- CE 8: “Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.”

- CE 9: “Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.”

2.4. TAMAÑO Y COMPOSICIÓN DE GRUPOS

Número de estudiantes: 17

Aspectos tenidos en cuenta a la hora de formar los grupos: 1 estudiante falta con mucha frecuencia, 1 alumno tiene TDAH, 1 alumna de incorporación tardía, 2 alumnos que han “abandonado” la materia.

Conformación de los grupos:

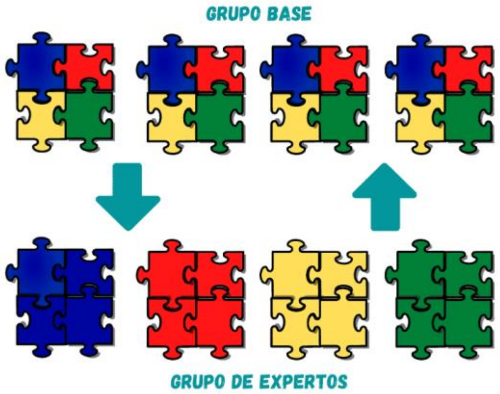


Figura 1. Distribución de los grupos base y grupos de expertos en la teoría de la técnica de puzle

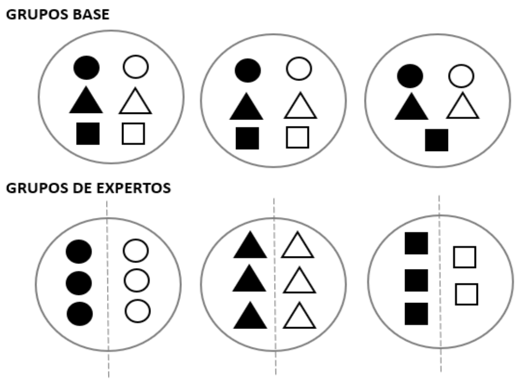


Figura 2. Distribución de los grupos base y grupos de expertos en el aula

Grupos formados por el tutor teniendo en cuenta los aspectos mencionados y mi propuesta de conformación (ver figura 2): 3 grupos base (2 de 6 integrantes y 1 de 5 integrantes) y 6 grupos de expertos (5 de 3 integrantes y 1 de 2 integrantes).

La distribución se asignó de esa manera ya que permitía, por un lado, que en los grupos de expertos (donde se trabaja un mismo tema común) hubiera un mínimo de 2 personas (idealmente 3), haciendo más fácil la distribución de trabajo y gestión de conflictos. Pero no solo eso, sino que, del mismo modo, se hacía posible que en los grupos base existiesen (por lo general) 2 personas (o al menos una) que trabajasen un mismo tema, pero que provinieran de grupos de expertos distintos, enriqueciéndose así entre ellos y al resto del grupo base. De esta manera, si algún alumno faltara, en los grupos base sería más difícil que no hubiera nadie que trabajara alguno de los temas a la vez que permitía al grupo de expertos seguir avanzando.

A pesar de lo previsto, la realidad en el aula fue muy distinta, ya que a pesar de que el tutor intentó distribuirlos para que, según los que solían faltar, si faltaban, los grupos siguieran compensados, sí que se descompensaron.

2.5. MATERIALES

Materiales físicos:

- Proyector y pizarra (con tizas de colores)
- Trípticos (juego funciones definidas a trozos)
- Reglas y auriculares
- Plantilla diapositiva 8 presentación "Simetrías e inversas"
- Entregables en formato físico: fichas funciones inversas (E3)
- Tabla final impresa
- Exámenes impresos

Materiales digitales:

- Libro de texto de referencia del centro (*Matemáticas. Enseñanzas académicas. SERIE RESUELVE. Proyecto SABER HACER. Santillana. 4 ESO*)
- Imagen electrocardiograma
- Classroom compartidos con el alumnado y docentes.
- Entregables en formato digital: E1, E2, E3 y E4 (de los cuales, realizados E1 completo, y E2 y E3 parcialmente).
- Materiales de repaso: documento sobre cortes con los ejes, circunferencia goniométrica, definición de logaritmo, gráfica de la función seno y coseno, ejercicio y solución de una función definida a trozos…
- Presentaciones digitales "Simetrías e inversas" e "Inversas funciones elementales"
- Soluciones tabla final y examen

En el ANEXO X se puede visualizar todo el material no empleado (pero desarrollado para la situación de aprendizaje de forma previa a su puesta en marcha) debido a los cambios que se fueron efectuando a lo largo de su evolución.

2.6. Roles

No se llevó a cabo ningún tipo de rol, pues ya suponía suficiente dificultad el hecho de que trabajasen por grupos y siguiendo la dinámica propuesta. Se mostraban muy reticentes, y muchos trabajaban de forma individual dentro de los grupos de expertos por falta de aportación e incluso de presencialidad del resto de los integrantes.

2.7. DESARROLLO DE LAS SESIONES

En este subapartado se combinará el plan teórico del desarrollo de cada sesión pensado de forma previa a la intervención en el aula junto con comentarios de la realidad de cada día durante las clases, los distintos imprevistos, ajustes y cambios que hubo que realizar para amoldarse a las necesidades del alumnado. Todas las imágenes gráficas que se muestran en el desarrollo de las sesiones se pueden consultar con mayor detalle en los anexos correspondientes.

2.7.1. **Sesión 01:** 19/04 1ª HORA: 8:30 – 9:25 h

Esta sesión es de carácter interactivo entre el docente y el alumnado. Su objetivo es evaluar los conocimientos previos, a la vez que repasarlos y asentarlos. A su vez, la clase también es parcialmente expositiva, pues se comienza con la introducción a las funciones definidas a trozos.

La clase da comienzo con retraso, lo que dificulta el seguir los tiempos planeados: primer choque con la realidad (no todo sale como uno espera, y menos la primera clase).

Al comenzar los nervios son evidentes, lo que evoca la primera dimensión del docente: la confianza en uno mismo. No obstante, según avanza la sesión se gana soltura y comodidad.

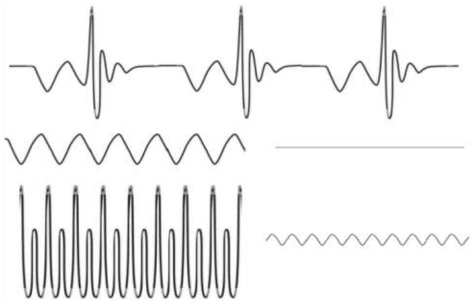
Se empieza hablando de la necesidad de modelizar procesos de la naturaleza o del día a día como motivación de la aparición de las funciones. Se esperaba que fuera necesario explicar qué significa modelizar y, de hecho, lo fue. A continuación, a modo de evaluación diagnóstica se repasó:

  - Qué es y qué no es una función.
  - Idea de aplicación, relación entre variables, etc.
  - Tipos de representación:
    - Gráfica: ejes de coordenadas
    - Tablas de valores
    - Expresiones analíticas (fórmulas)
- Repaso características de las funciones:
  - Continuidad (tipos de discontinuidades)
  - Dominio y recorrido
  - Puntos de corte OX y OY
  - Monotonía: crecimiento y decrecimiento
  - Máximos y mínimos (absolutos y relativos)
  - Simetrías: paridad
  - Periodicidad

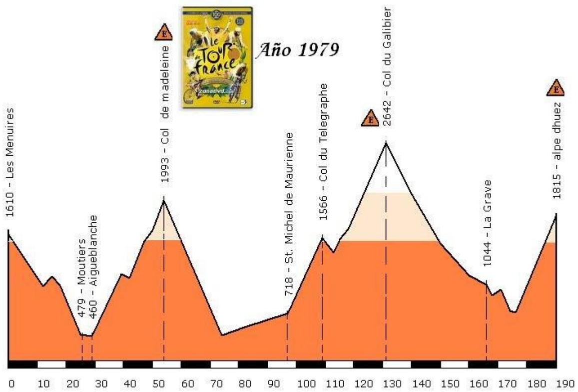
La evaluación previa parece ir bien, puesto que los estudiantes contestan adecuadamente de forma teórica a cada cuestión. Sin embargo, al ponerles ejemplos de funciones y preguntarles por sus características, demuestran no dominar los conceptos, por lo que se seguirá incidiendo en ello. Tras esto, se dedicó el resto de la sesión a comenzar con la actividad inicial de la situación de aprendizaje que pretende introducir las funciones definidas a trozos.

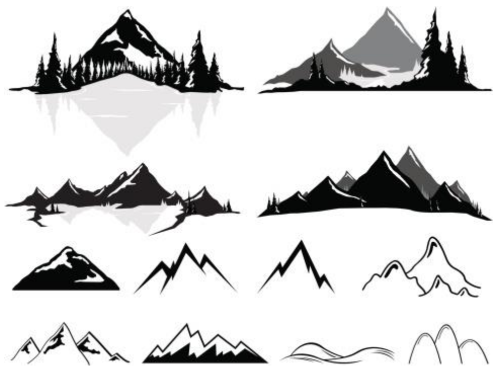
Se comienza poniendo gráficas de algunas funciones elementales continuas derivables en todos los reales y otras definidas a trozos sin saltos de continuidad y puede que sin problemas de derivabilidad, pero claramente diferentes en zonas. A continuación, se les pregunta qué sienten al ver unas y otras.

"Vamos a ver algunos ejemplos de gráficas de funciones. ¿Qué observáis en ellas? ¿Qué características creéis que son llamativas?"



El docente sigue así: "Efectivamente una de ellas está hecha con trozos de las otras cuatro. La mayoría de las funciones que vemos en la vida real son así: están hechas de trozos de otras ideales. Aquí tenéis la gráfica de un electrocardiograma, que además es una función que se va repitiendo una y otra vez (periódica), pero también siguen este patrón otras gráficas de funciones no periódicas". Se mostrarán entonces ejemplos de ello, como perfiles de etapas ciclistas, de paisajes, de montañas rusas, etc.





El profesor sigue: "Estudiar todas estas funciones "irregulares" por separado es imposible, porque pueden hacerse infinitas combinaciones de trozos. Por ello, las matemáticas vienen a ayudar: mejor estudiamos los trozos por separado, que si siguen un patrón un solo estudio nos ayuda a entender todas las funciones de la familia, y luego las unimos."

"¿Daríais ahora una definición de función definida a trozos?" Debe surgir ahora la idea de que es una función que sigue el patrón de una función elemental en zonas consecutivas.

"Aunque ya veis que se pueden unir cualesquiera funciones, las funciones definidas a trozos más sencillas son las poligonales, que unen segmentos. Vamos a familiarizarnos con ellas." Para ello, se pondrán algunos ejemplos sencillos en la pizarra con segmentos de rectas, sobre todo para manejar la notación de la expresión analítica de una función a trozos. Resulta interesante el extender cada segmento de la poligonal con punteado, para que los estudiantes vean que realmente se toma un trozo de la recta. También cabe destacar que, al dibujar poligonales como ejemplo, no hay que olvidar incluir tanto algunas que sean continuas como otras que no lo sean, para que no asocien la idea de continuidad con la de función definida a trozos.

Con todo ello, se buscará que sepan deducir la gráfica dada la expresión analítica, y viceversa, para lo cual, se toman algunos ejemplos del propio libro de texto que siguen los estudiantes de referencia. Concretamente, se explicó el ejemplo 6 de la página 190 y, a continuación, se resolvieron los ejercicios 36 y 38 de esa misma página con la participación de dos estudiantes (uno para cada ejercicio) que salieron voluntarios a la pizarra a realizarlos. De esta manera, el aprendizaje fue mucho más significativo para ellos, pues en lugar de copiar de la pizarra, eran ellos mismos quienes interpretaban y escribían las respuestas. Además, ambos ejercicios resultaban enriquecedores por el hecho de que uno implicaba graficar una función definida a trozos dada su expresión analítica y, el otro, mostraba la gráfica a partir de la cual se debía deducir su expresión algebraica.

Para finalizar esta sesión estaba planeado acabar con las funciones definidas a trozos con el juego del tríptico; sin embargo, los tiempos no fueron según lo previsto en la temporalización, por lo que se dejó el juego para la siguiente sesión.

No obstante, antes de acabar la sesión se explicó al alumnado la metodología a seguir en las siguientes sesiones (el docente comentará que, a partir de aquí se plantea el aprendizaje a través de un trabajo por grupos cooperativos). Se proyectaron y subieron al Classroom compartido tanto los grupos de expertos como los grupos base acordados. Se informó a cada alumno del tema asignado (A, B o C) y se explicó el funcionamiento de los grupos, así como la temporalización que se esperaba seguir: los entregables 1, 2, 3 y 4 (E1, E2, E3, y E4) se realizarían por grupos de expertos y, de forma intercalada, se iría explicando lo aprendido al resto de compañeros en los grupos base.

El objetivo inicial del trabajo era que, en cada grupo base, dada la gráfica de una función definida a trozos con distintas funciones elementales incluidas en ella, con la ayuda de GeoGebra y de movimientos en el plano, tratar de ajustar lo mejor posible las funciones elementales en el intervalo donde cada una está definida y proporcionar su expresión analítica. Sin embargo, la realidad fue que esto no pudo llevarse a cabo por falta de tiempo.

2.7.2. **Sesión 02:** 20/04 2ª HORA: 9:25 – 10:20 h

Esta sesión se dedica tanto al repaso de funciones definidas a trozos como a la realización del juego del tríptico por equipos.

Comenzamos con más ejercicios del libro de texto de referencia. En este caso, hacemos los ejercicios 39 (apartados b y d) y 40, ambos de la página 191. Sale a hacer cada ejercicio un nuevo voluntario, todos ellos distintos a los de la sesión anterior (cabe destacar que, por lo general, todos aquellos que iban participando y/o saliendo voluntarios fueron aquellos que mejores resultados obtuvieron dentro de las notas que hubo en el examen final). Para la resolución de los ejercicios se pide, en primera instancia, que indiquen los intervalos para los que se define cada segmento de la función. En segundo lugar, se hace hincapié en las posibles discontinuidades, su tipo, y como ello influye en los intervalos asignados. Por último, se les enseña a hallar la expresión analítica de cada segmento tomando dos puntos cualesquiera de cada segmento (o recta a la que pertenece) y resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones.

La propia resolución del sistema parece resultar un problema por no involucrar a las variables que están acostumbrados a ver (x e y), sino a la pendiente (m) y a la ordenada en el origen (n), lo cual evidencia que no tienen un claro concepto de “variable”. También mostraban problemas con los distintos métodos de resolución (tanto con el de reducción, como con los de sustitución e igualación) puesto que, a pesar de haberlas estudiado en el tema anterior, no entendían como incluirlas en este nuevo contexto.

Por otro lado, también muestran dudas acerca del porqué se pueden tomar puntos de la recta que contiene al segmento que está definido en la función si estos puntos no forman parte de la función. De igual modo, no entienden por qué se pueden tomar dos puntos cualesquiera del segmento o recta. Además, cuando el ejercicio se trata de dibujar la gráfica a partir de la expresión algebraica, manifiestan no entender por qué se puede tomar cualquier valor de x y calcular el de y, lo cual evidencia la falta de consistencia no sólo en el concepto de dominio, en este caso, de una recta, sino del significado de función y de variable.

En cuanto al juego del tríptico, la clase se dividió en dos grupos de en torno a 7 personas cada uno. Los grupos se hicieron al azar, partiendo la clase por la mitad, y coincidió que aquellos que habían prestado en general más atención quedaron en un grupo y, el resto, en otro, lo que descompensó significativamente la dedicación y conocimientos entre un equipo y el contrario.

Antes de empezar la partida, se anunció que el equipo ganador obtendría 0.25 puntos más en el examen final de la asignatura (algo acordado con el profesor titular de forma previa) para que sirviera como aliciente al alumnado. Pareció funcionar con el equipo más prometedor, pero no con el otro (o al menos no con todos sus integrantes).

Se trata de un juego muy enriquecedor pues permite aprender verdaderamente de los errores, ya que si un equipo entrega al otro algo incoherente (por ejemplo, solapamiento de intervalos entre los distintos segmentos) resultará una gráfica que no es función. O, si por ejemplo, se le entrega a un grupo una expresión analítica con segmentos de distinta pendiente y/o ordenada en el origen que los originales, ocasionará la pérdida de continuidad en la poligonal, y quedará reflejado como una función totalmente distinta a la de partida. De este modo, la fase de validación de la resolución del juego queda en manos del alumno, y no del docente, pues se aprecia claramente cuando consigues la misma gráfica o una distinta.

El problema fue que, al ser equipos descompensados, uno de ellos avanzaba mucho más rápido que el otro, impidiendo la continuidad del juego en el momento del intercambio de expresiones analíticas. Ante ello, se optó por ayudar al equipo que estaba tardando más, no sin antes dar la nueva expresión analítica correspondiente al equipo avanzado para que pudiera seguir.

El alumno con TDAH había faltado a la anterior clase, por lo que estaba muy perdido con el tema de funciones definidas a trozos, y así lo hizo saber. Durante el desarrollo del juego, se le trató de explicar resumidamente lo que habíamos visto para ponerle al día. Esta práctica de atención a la diversidad fue posible porque el resto de los estudiantes estaban trabajando en otra cosa a la vez, lo que permitió prestar atención individualizada a un alumno que, de manera puntual, la necesitaba.

Durante la partida, se evidenció el siguiente error: el equipo avanzado confundió los cortes con el eje x de los segmentos con los límites de los intervalos donde se definía cada trozo de la poligonal. Aunque hubiera sido de lo más enriquecedor que hubiera sido el otro equipo quien se percatara de ello y lo anunciara a los jugadores, no fue posible puesto que aún seguían con su gráfica; de modo que se les tuvo que hacer ver el error y corregirlo.

Durante el desarrollo del juego se apuntaron los nombres de aquellos que, independientemente del equipo al que pertenecían, se consideraba que habían aportado en su grupo y habían tratado de sacarlo adelante, para no premiar solo a los integrantes del equipo ganador independientemente de lo que hubieran hecho. Esta información sería posteriormente proporcionada al docente titular para su interpretación y actuación a su libre juicio en la evaluación final.

Finalmente, no dio tiempo a que ninguno de los equipos acabara ambas partes, pero se proclamó como ganador al equipo más avanzado por haber resuelto prácticamente bien la primera gráfica, y haber empezado de manera muy bien encaminada la segunda. Tanto el procedimiento de actuación como la resolución del juego del tríptico y las respuestas que dio cada equipo a sus trípticos pueden verse en el ANEXO IV.

En esta sesión se esperaba haber iniciado el entregable 1 (E1) tras acabar con el repaso de funciones definidas a trozos y el juego, pero no fue posible, por lo que se retrasó su inicio a la siguiente sesión. Para el inicio de E1 se había pedido en la sesión anterior que trajeran reglas y auriculares. Se volvió a recordar.

2.7.3. **Sesión 03:** 21/04 5ª HORA: 12:40 – 13:35 h

En esta sesión se esperaba empezar y terminar E1. Sin embargo, casi la mitad de la clase faltó (7/17), por lo que los grupos de expertos quedaron con tres, dos y hasta uno o ningún integrante. Hubo grupos en los que, a pesar de haber más de un alumno, alguno de ellos acabó trabajando individualmente debido a la falta de aportaciones del resto de sus compañeros. Por otro lado, apenas un par de alumnos trajeron auriculares, para lo cual estábamos preparados (se trajeron auriculares de sobra). Sin embargo, no llegaron a usarlos en muchos de los grupos.

E1 se subió al Classroom compartido con la siguiente consigna:

Cada grupos de expertos tiene asignado un tema. En función de ello, deberán completar el documento llamado.

- *E1A para los que trabajen el TEMA A*
- *E1B para los que trabajen el TEMA B*
- *E1C para los que trabajen el TEMA C*

Basta con entregar un documento por grupo. Puede ser a mano (escaneado, por ejemplo), a ordenador (rellenando el documento) o una mezcla de ambos.
En el documento que entreguéis poned SOLO LOS NOMBRES DE LOS INTEGRANTES QUE HAYAN ESTADO EN CLASE.

Cabe resaltar que si más del 50 % de los estudiantes hubieran faltado con causa justificada, la clase no podría haberse impartido o, al menos, no incluyendo nueva materia, sino únicamente repasando, tal y como se me indicó desde la normativa del centro. Y no solo eso, sino que la justificación de las faltas podía darse hasta el mismo día a última hora, por lo que la falta no justificada de un alumno a primera hora, podía acabar siéndolo después del recreo. Así, con que ese día un alumno más no hubiera acudido al centro, no se podría haber seguido avanzando materia.

De hecho, en general, la realidad de la programación fue que tuvo que estar ajustándose prácticamente día a día, y no solo debido al ritmo de aprendizaje de la clase, que resultó ser más lento del esperado; sino a otros imprevistos como excursiones o salidas no avisadas con antelación al tutor, charlas a las que el alumnado debía atender, etc. De nuevo, la realidad del aula para la que ninguna buena práctica docente teórica nos prepara.

Al comenzar la sesión, la clase ya estaba dispuesta en grupos de expertos. Se anunció que aquellos a los que se les había asignado el TEMA C podían empezar con su documento correspondiente. Para el resto, hubo una breve explicación previa sobre:

- Cómo introducir datos en Excel (recalcando la diferencia entre poner coma o punto para los números decimales)
- Cómo crear un gráfico de dispersión y qué significa.
- Cómo agregar una línea de tendencia y qué significa.
- Cómo agregar la ecuación del gráfico y qué significa.
- Cómo agregar el R^2 y qué significa (de forma intuitiva)

No importaría que sólo trabajen estas nociones del sentido estocástico del currículo solo aquellos que trabajan el TEMA A o B, porque igualmente, los del TEMA C también ven cosas que el resto no ven. Lo importante es que se expliquen la idea general entre ellos.

Una vez cada grupo de expertos ha ajustado su datos a las distintas líneas de tendencia, el docente planteará (si es que no lo hace ningún estudiante) cómo sabemos, dados dos puntos, cómo unirlos (F.F.: Fase de Formulación): si con una recta, una curva más o menos pronunciada, etc.

Entonces, se hablará (F.I.: Fase de institucionalización) de la idea de que la naturaleza tienden a formar figuras suaves, para minimizar energías, fuerzas, etc. Para poder imitar estas tendencias aparecen las funciones. Como nosotros, con las matemáticas, intentamos modelizar (imitar) esto, nuestras funciones son suaves.

En cuanto a la resolución del entregable, a pesar de haber anunciado que se entrega podía ser tanto a mano como ordenador, toda la clase optó por hacerlo digitalmente y, aunque se esperaba que el manejo del Chromebook no resultara un problema por estar acostumbrados a trabajar con él, se tradujo en un verdadero obstáculo didáctico que no se había contemplado como tal hasta el momento.

De haber sido conscientes de esta realidad con antelación, se hubieran impreso o proyectado los entregables y solo se hubiera permitido el uso del Chromebook para la realización de las líneas de tendencia.

Desde problemas para escribir la notación de forma correcta por falta de simbología en los documentos Google, pasando por el problema de manejar las hojas de cálculo de Google y la representación de gráficas en ellas, hasta la dificultad de escribir expresiones matemáticas que supone el hacerlo en una pantalla. En esta sesión se puso en valor el uso del papel y boli, y la importancia que tiene en los procesos cognitivos del alumnado. Por ello, desde el momento en el que nos dimos cuenta en adelante, todo aquello que podía hacerse a mano, se solicitaba así y con cálculos intermedios justificados. Sin embargo, la realidad fue que, al haber empezado la tarea de forma digital y haber permitido entregarla de esta manera, se hizo así, aunque con alguna imagen escaneada de cálculos y/o dibujos y gráficos.

En cuanto a problemas observados, en E1, quedó evidenciado lo siguiente:

- Que el concepto de R^2 y de recta de regresión no acabó de interiorizarse, sino que se tradujo como una mera unión de puntos dados a través de una línea más o menos curva o recta.

- Que ningún grupo se paró realmente a analizar la relación existente entre las parejas de datos y su vinculación con la fórmula analítica obtenida en la hoja de cálculo.

- Que cuando la variable a despejar era la x, se cometían más errores de cálculo que cuando era la y, pues esta última ya está despejada en una ecuación de una función.

- Que la hoja de cálculo de Google, con respecto a Excel, no es tan intuitiva/manejable, así como tampoco lo es el Chromebook en sí.

2.7.4. **Sesión 04:** 24/04 4ª HORA: 11:45 – 12:40 H

Esta sesión vuelve a destinarse a seguir con E1, por lo que la clase sigue dispuesta en grupos de expertos. No obstante, no da tiempo a terminar el entregable a ninguno de los grupos ya que la mayoría del alumnado o bien no trabaja o lleva un ritmo extremadamente lento.

Para esta sesión debían haber entregado lo realizado en la última clase, tal y como se exponía en la consigna de la tarea. Sin embargo, la realidad fue que solo dos estudiantes (de dos grupos distintos, pero que habían trabajado uno de forma individual y otro con otros dos integrantes de su grupo) enviaron sus avances para poder hacer las correspondientes correcciones. Por ello, al inicio de la clase se puso en conocimiento del alumnado esta realidad para que no volviera a ocurrir.

En general, los problemas observados en los documentos que pudieron corregirse fueron:

- Confusión de la palabra “parabólica” con la palabra “polinómica”
- Algún estudiante demostraba no saber qué significa la periodicidad, a pesar de haberla visto y repasado en clase, puesto que afirman que una recta de pendiente distinta a cero lo es periódica.
- Hay problemas de comprensión lectora a la hora de leer lo que se pide, por lo que muchos no saben contestar o a qué deben contestar, e incluso omiten partes del enunciado.
- Muchos, en lugar de preguntar dudas, si no saben cómo seguir, paran de trabajar, se dedican a otra cosa o incluso se ponen a dibujar.
- Demuestran no haber entendido bien el concepto de línea de tendencia, pues piensan que ha de pasar por los puntos dados obligatoriamente (aunque también es cierto que en los datos aportados se cumple esta idea, pero se explicó la utilidad y funcionamiento en la realidad).

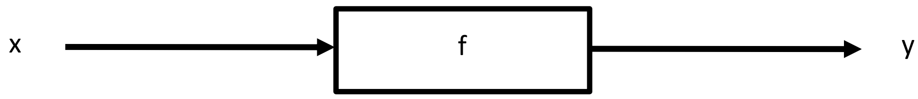
En cuanto a problemas detectados en el aula:

- Muchos (del TEMA C) manifestaban reticencia a tener que dibujar tantos triángulos.
- Se ha tenido que repetir muchas veces lo mismo de forma individual porque en la explicación grupal no se atiende o no se enteran.

Nuevamente, al final de la sesión se revisan los fallos cometidos de la tarea entregada con lo realizado hasta el momento y se vuelve a dar una respuesta con aspectos de mejora para la siguiente clase. Se pide igualmente que sigan avanzando fuera del aula para poder pasar al siguiente entregable, pues la limitación de tiempo nos impide seguir a este ritmo.

2.7.5. **Sesión 05:** 26/04 1ª HORA: 8:30 – 9:25 h

De nuevo se sigue con E1 en esta sesión. Se comienza comentando los fallos más comunes que ha habido entre los grupos y aclarando dudas generales en alto. Se habla de una función como una "caja" donde entran unos valores y salen otros, porque en la caja hay algo que los modifica. Además, se explica que, en función de lo que haga la caja, podremos meter unos valores determinados (concepto de dominio), al igual que podrán salir otros (concepto de recorrido o imagen). Para ello, se hacen uso de dibujos del siguiente estilo:



Se explica entonces que lo que buscamos con este entregable es encontrar qué hace nuestra caja y qué forma siguen los puntos que van apareciendo para poder ponerle un nombre a nuestra función. Además, una vez descubierto qué hace nuestra caja con los valores que le metemos, se explica que también queremos descubrir qué valores podemos meter (dominio) y cuáles pueden salir (recorrido o imagen).

Se va entonces comentando en la pizarra en alto los distintos tipos de "cajas" (funciones) que tiene cada grupo: rectas, parábolas, exponenciales… en función del nombre que le asigna a la línea de tendencia que mejor se ajusta la hoja de cálculo. Igualmente, se explica en alto en la pizarra el dominio y recorrido de estas funciones.

Por ejemplo, para trabajar el dominio de la recta $y = x + 5$ el docente comenta: "¿A qué valores se les puede sumar 5?" Muchos contestan "a infinitos", pero se les hace ver que la respuesta correcta es "a cualquiera" pues, por ejemplo, hay infinitos números decimales entre el 0 y el 1, y no por ello estamos cogiendo todos los valores de la recta real. El docente continúa: "¿Y qué valores me pueden salir de sumar 5 a cualquier número?" Esta vez, el alumnado contesta correctamente: "Los que sean." Refiriéndose con ello a que puede resultar cualquier número de la recta real.

De igual manera, para explicar el dominio de la parábola unidad $(y = x^2)$, el docente pregunta "¿Qué valores se pueden elevar al cuadrado?". Esta vez contestan: "Cualquiera". "¿Y qué valores pueden salir de la caja?" sigue el docente. "Los positivos" responde el alumnado. El docente entonces recalca que se ha de incluir al 0 también, puesto que no es un número positivo ni negativo (pues muchos lo dan por número positivo), sino que es el "juez" que decide en qué grupo (positivo o negativo) está un número.

Siguiendo con el ejemplo de la parábola, se incide también en la idea de que para dos valores distintos de x (por ejemplo, el -2 y el 2) que entran en la caja, sale el mismo valor de y (el 4), dejando caer esta idea de función biyectiva que explicaremos más adelante. Sin embargo, se recalca que esto no podría ocurrir a la inversa (dos valores distintos de y no pueden provenir del mismo valor de x que entra en la caja), puesto que entonces no se trataría de una función. A pesar de que se explica en numerosas ocasiones y en sesiones venideras, muchos alumnos siguen confundiendo cuál de ambos casos sí se puede dar y cuál no.

Se sigue con el mismo ejemplo de la caja tanto para la exponencial (usando el símil de una población de bacterias replicándose sin limitación de espacio ni tiempo partiendo de una sola bacteria) como con las funciones trigonométricas (seno y coseno) haciendo uso de la circunferencia goniométrica.

Aunque demuestran comprender los ejemplos, a la hora de la verdad les cuesta entender el concepto del dominio y recorrido de forma analítica (ya que de forma gráfica sí que lo ven mejor).

Con esta explicación en la pizarra se produce un comienzo de ruptura con la metodología, puesto que este explicación habría correspondido a la vuelta a los grupos base donde cada experto explicara al resto el tema sobre el que había aprendido.

Se recalca también que es importante visualizar los vídeos incluidos en los entregables, pues explican muchas de las dudas que se están preguntando y que evidencian el hecho de que muchos no los han visto.

Se explica también que en cada tema que trabaja cada grupo de expertos se ha tratado de poner un caso real modelizado por la función que están trabajando en cuestión:

- Función inversa $\left(N = \frac{24}{t}\right)$: Número de trabajadores (N) y tiempo (t) que tardan en construir algo
- Parábola ($A = l^2$): Área (A) de un cuadrado según el lado (l)
- Polinomio de grado 3 ($V = l^3$): Volumen (V) de un cubo según el lado (l)
- Exponencial ($F = 2^t$): Número de flores (F) en un jardín según el tiempo (t) si cada día se duplica su número y hay una al principio.

Sin embargo, se destaca el hecho de que hay que saber diferenciar entre la función a nivel matemático/teórico (es cierto que en la caja de la función parábola puedo meter valores negativos) y a nivel contextualizado (no es cierto que puedo tener un cuadrado con un lado de valor negativo).

Por otro lado, durante la sesión hay un grupo que asegura haber terminado con E1, por lo que comienza con E2. Sin embargo, se comprueba que aún les quedan cuestiones por completar y/o corregir, así que este grupo también continua con E1. El resto de los grupos están aún lejos de completar el entregable, por lo que se da un ultimátum y se anuncia que la siguiente será la última sesión para acabarlo.

Es en este punto donde nos hacemos realmente conscientes de que quien dirige los tiempos de la clase es el docente, no el alumnado. Podemos ser más o menos flexibles a lo hora de respetar sus procesos de aprendizaje, pero nunca dejar que estos nos guíen totalmente a nosotros.

No obstante, aunque es cierto que llevamos muchas sesiones de retraso con respecto a lo planeado, se opta por acabar con E1, aunque ello implique una sesión más (la siguiente), para, al menos, afianzar los conocimientos de este entregable, aunque ello haga imposible el poder completarlos todos, o el si quiera seguir con la dinámica de grupos propuesta.

2.7.6. **Sesión 06:** 27/04 2ª HORA: 9:25 – 10:20 h

Este es el último día que se deja para seguir con E1. Hay un par de grupos que lo acaban a lo largo de la sesión, así que comienzan con E2, pero apenas les da tiempo de empezarlo pues les cuesta mucho manejarse con GeoGebra.

A lo largo de esta sesión y de la anterior se hace notorio que las instrucciones y explicaciones dadas al inicio de las sesiones en grupo no han sido las suficientes, pues no había una comprensión verdadera del qué estábamos haciendo con los valores en la hoja de cálculo con las gráficas en E1 y por qué. Por tanto, se vuelve a recalcar.

En general se observan las siguientes dificultades:

- No entienden el significado de la línea de tendencia ni la diferencia entre su dominio y recorrido con el de la función.
- No tienen una idea sólida de lo que es una función.
- No tienen una base sólida de lo que es el dominio y el recorrido.
- Tienen problemas a la hora de sustituir valores en ecuaciones.
- No se manejan bien ni con las igualdades ni con el lenguaje matemático.

En cuanto a las dificultades observadas en el TEMA B:

- Nadie se para a buscar la relación entre los datos, por lo que no les choca o impacta que salga el número e.

Y en cuanto al TEMA C:

- Confunden el concepto de semejanza con equivalencia, por lo que se les explica particularmente.
- No hacen un buen uso del signo "=" al despejar valores o poner cadenas de igualdades.
- Hablan del "seno de un triángulo".

2.7.7. **Sesión 07:** 28/04 5ª HORA: 12:40 – 13:35 h

Esta sesión se destina al repaso de todas las funciones vistas en todos los grupos de expertos, así como al inicio de la presentación "Simetrías e inversas" que introduce las inversas de las funciones elementales vistas en el repaso.

Nuevamente, la primera parte de la sesión corresponde a lo que se debería haber hecho en los grupos base (explicación de lo aprendido en E1), pero ha quedado evidenciado que el uso de la técnica de puzle en este aula, en este momento y con este tema no está siendo de ayuda para el alumnado: los grupos no están funcionando como tal (alumnos trabajando por separado dentro de un mismo grupo e incluso solos), el aprendizaje no está siendo significativo (responden a las preguntas pero sin entender qué están haciendo), no se gestiona bien el tiempo (el ritmo de trabajo es muy lento)…

Por todo ello, se rompe del todo con la metodología y se anuncia que las siguientes clases serán más de carácter expositivo, aunque con participación del alumnado, y teniendo aún como referentes a sus compañeros de los grupos de expertos. Del mismo modo se comunica que la evaluación entonces se hará a través de un examen que aúne los conocimientos adquiridos durante todas estas sesiones sobre funciones (algo previamente acordado con el profesor titular). Se indica también la fecha de dicho examen, y se continúa con la sesión.

Así, en esta clase se habla de todas las características que deberían (en principio) haber descubierto durante estos días de sus funciones. Se trabajan una por una todas ellas: dominio, recorrido, paridad, periodicidad y cortes con los ejes.

En cuanto a la paridad, se les recuerda que una función par es aquella que se solapa al plegarla por el eje y (o que el eje de ordenadas hace el papel de espejo), y una impar es aquella que, al girarla sobre el plano 180º con respecto al origen, queda igual. Para el caso de las funciones impares se toma como ejemplo la función coseno: se observa la simetría par con un espejo. Para el caso de las funciones impares se toma como ejemplo la función seno: para observarla se copia la imagen de la gráfica dos veces en un documento Word, y se gira una de ellas 180º, para comprobar que efectivamente la función queda igual con respecto al origen de coordenadas.

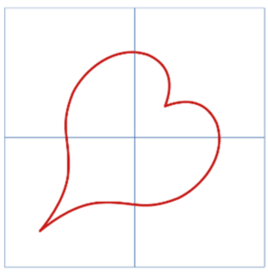
En cuanto a la periodicidad, se les recuerda que una función periódica es aquella que repite indefinidamente un patrón. Para generarla podemos coger "la parte representativa que queremos replicar" y repetirla infinitas veces a izquierda y derecha de manera que obtenemos la función periódica. Un ejemplo de ello es la función que da la cantidad de horas de luz que tienen los días. Cuando se da la gráfica a lo largo de varios años se observa que cualquier parte de longitud 365 días sirve como patrón que se repite.

En cuanto a los cortes con los ejes, se repite que la característica que tienen todos los cortes con el eje x es que su coordenada y es 0, y que la de los cortes con el eje y es que su coordenada x es 0, por lo que, independientemente de lo que haga nuestra caja (de cómo sea nuestra función), habrá que ver qué pasa cuando la x valga 0 (corte con el eje y) y cuando la y valga 0 (corte con el eje x). En definitiva, qué pasa cuando meto en la caja un 0, o qué tengo que haber metido en la caja para que salga un 0.

Una vez repasadas todas estas características, se explica que vamos a continuar con el temario (nos saltamos E2) para poder seguir con E3 (aunque de forma parcial y sin recurrir a los grupos de expertos). Para dar comienzo al tercer entregable, se empieza trabajando en clase la presentación de "Simetrías e inversas". La dinámica de la clase es totalmente distinta: hay mucha menos reticencia, más ritmo de avance, más participación, más interés, más ánimo general y, sobre todo, más aprendizaje.

Durante la presentación el docente sigue, en líneas generales, estas cuestiones (da tiempo de hacer solo la primera parte de la presentación):

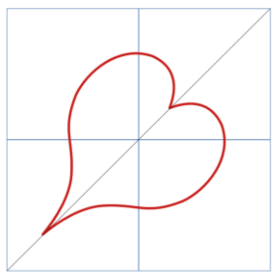
Parte 1. Simetrías respecto eje diagonal



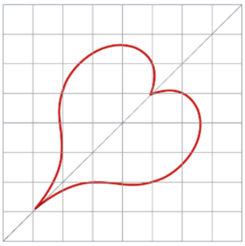
¿Qué observas en esta figura? (ver imagen de la izquierda)

Quizá alguien, aparte de decir que es un corazón, diga que está inclinado o girado. Es esperable que nadie observe que es una figura simétrica respecto un eje.

¿Y ahora? (ver imagen de la derecha)



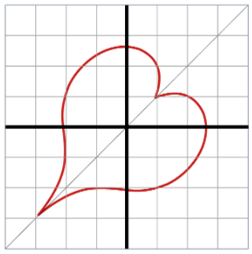
Ahora que aparece el eje de simetría, es más probable que alguien hable de esta propiedad. Si no sale la palabra, preguntaremos si vemos algo diferente inclinando nosotros la cabeza o imaginando que estuviera recto.



¿Y ahora? (ver imagen de la izquierda)

Esperamos que ya haya salido el término “simétrico respecto de un eje”. La cuestión siguiente es ¿respecto a qué eje? Y debemos hacer ver que el eje pasa por todas las esquinas de la cuadrícula, lo que nos da un ángulo claro de 45º, y por tanto estamos en la bisectriz del cuadrante o al menos en la diagonal de la cuadrícula.

Avanzamos en las especificaciones del dibujo (ver imagen de la derecha):



¿Cuál es el simétrico del punto (2,1)? ¿Y del (-2,1)?

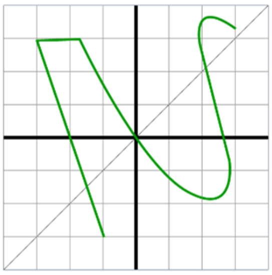
La respuesta está en identificar el punto en el dibujo y ver cuál es el punto simétrico (usando las perpendiculares al eje) y ver las coordenadas del mismo. Así llegamos a que el simétrico de (2,1) es (1,2) y el simétrico de (-2,1) es (1,-2).

¿Hay alguna regla?¿Podríamos saber cuáles son las coordenadas del simétrico de (2,-1,5) sin el dibujo?

Esa regla dice que el simétrico respecto la diagonal $y = x$ de un punto (a, b) es (b, a).

¿Cómo podemos llamar al simétrico respecto del eje y=x?¿Alguna sugerencia de nombre corto para esta transformación $(a, b) \to (b, a)$? Aceptaremos el nombre que se obtenga por consenso mayoritario. (Supongamos que lo llaman transpuesto, aunque los nombres propuestos fueron “espejo”, “simétrico”, “paralelo” y “opuesto”).

Sabiendo esto, ¿podríamos dibujar la gráfica simétrica de esta haciendo el transpuesto de cada punto? (ver imagen inferior).



Véanse las respuestas del alumnado en el ANEXO VIII.

2.7.8. **Sesión 08:** 04/05 2ª HORA: 9:25 – 10:20 h

En esta sesión continuamos con las partes restantes de la presentación “Simetrías e inversas” con lo siguiente como hilo conductor del discurso:

Parte 2. Inversa de una función:
¿Siempre podemos volver atrás en una transformación? Es decir, partimos de un número, le hacemos alguna operación y obtenemos un segundo número, ¿hay alguna operación que le podamos hacer al segundo número para obtener otra vez el primero? (¿Podemos volver atrás en la caja? ¿Podemos meter lo que ha salido y sacar lo que ha entrado?)

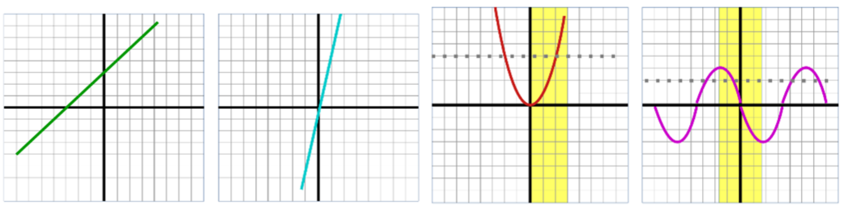
Si no obtenemos respuesta podemos poner ejemplos: si le hemos sumado 8, ¿qué podemos hacer para volver atrás? Saldrá restar 8: deducimos que “restar 8” es lo que vuelve atrás “sumar 8”. ¿Y si la operación es “multiplicar por 5”? Saldrá que “dividir por 5” vuelve atrás “multiplicar por 5”. Cuando esto ocurre diremos que la primera operación f tiene inversa, o que es inversible, y que la inversa es esa segunda operación f^{-1}que al aplicarla al resultado de la primera nos da el origen de la primera, es decir, si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$, o lo que es lo mismo $f^{-1}(f(a)) = a$.

¿Todas las transformaciones tienen inversa? ¿elevar al cuadrado tiene inversa? Esperamos que digan sacar la raíz cuadrada: veamos, por ejemplo, empiezo con el 3, elevo al cuadrado, obtengo 9, saco la raíz cuadrada, tengo 3. Parece que sí, a ver si funciona siempre: empiezo con el 5, elevo al cuadrado, obtengo 25, saco la raíz cuadrada, tengo 5: también perfecto; ¿funciona siempre?

Si nadie cae en la cuenta se pone el último ejemplo: empiezo con el -4, elevo al cuadrado, obtengo 16, saco la raíz cuadrada, tengo 4. ¿He llegado al -4? No, osea que la raíz cuadrada no es la inversa de elevar al cuadrado, o al menos no lo es siempre. Pero mientras empezábamos con números positivos sí funcionaba… igual es que elevar al cuadrado tiene inversa si se la aplico a reales positivos, pero no tiene inversa si se la aplico a reales en general.

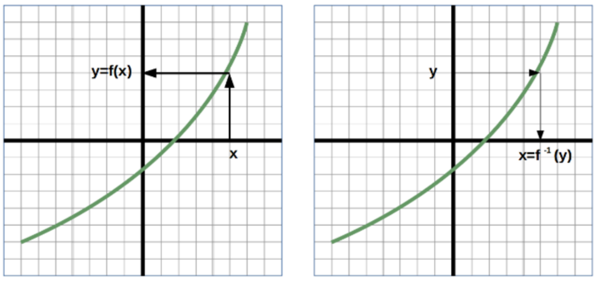
En este sentido, hubo un problema a la hora de pensar en si, por ejemplo, al meter el 9, puedo obtener el -3 con la raíz cuadrada: un alumno comentó que la raíz cuadrada de un número positivo (como es el 9) es ± el resultado (±3 en este caso). Hubo que explicar entonces que no se ha de confundir las soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ con la función raíz cuadrada, que, de tener más de un valor de x (±3) para uno solo de y (9), ya no sería función.

Lo que ocurre es que algunas funciones siempre son invertibles, como “sumar 8” (f(x)=x+8 (su inversa es g(y)= y-8 porque g(x+8) = (x+8)-8 = x) o “multiplicar por 5” (f(x) = 5x (su inversa es g(y) = y/5 porque g(5x) = (5x)/5 =x) y otras no son invertibles siempre, solo en algunos trozos, como “elevar al cuadrado”, que sólo es invertible si se aplica a los reales positivos o sólo a los negativos, pero no si se aplica a todos los reales. Las zonas donde una función en invertible se llaman zonas de inyectividad, y lo que exigen es que en esa zona la función no puede valer lo mismo en dos puntos distintos. Por ejemplo:



De izquierda a derecha: f(x)=x+3; f(x)=5x; f(x)=x²; f(x)= 3 sen(-x). Las dos primeras se observa que son inyectivas siempre, para las dos últimas se marca en amarillo una zona en la que son inyectivas (x>0 para la parábola, - π/2 < x < π/2 para la última).

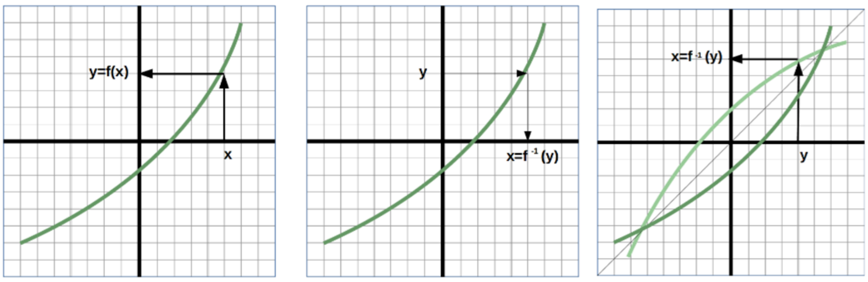
Para cualquier función f, los puntos de su gráfica serán de la forma (x, y), donde x estará en el dominio de f (puntos a los que se puede aplicar la regla f) y además $y = f(x)$, es decir, la ordenada es el punto en el que se transforma x aplicándole f. Si tenemos una función que es inyectiva, tenemos que no puede haber dos puntos distintos en los que la imagen sea igual, luego si tenemos la imagen, podemos calcular el punto del que provenía:



Tenemos pues que si una función es inyectiva en una zona, podemos calcular el proceso inverso de su transformación (función inversa), de manera que el dominio de la inversa (dónde se puede aplicar) son los puntos que son imagen por f de alguien (recorrido de la original) y viceversa: los puntos que son imagen de alguien por la inversa (recorrido de la inversa) son aquellos a los que podíamos aplicar la f original (dominio de la original).

Parte 3. Gráfica de la Inversa de una función

En el último dibujo tienes el proceso de aplicar una función f y luego el proceso de aplicar la inversa. Pero y si queremos dibujar la gráfica de la función inversa como de costumbre: eje de abscisas para la variable y las ordenadas para las imágenes, ¿qué creéis que sale? Ayuda: en la función original tenemos que los puntos de la gráfica son de la forma $(x, f(x))$, ahora en el dominio está $y = f(x)$ y su imagen es $f^{-1}(f(x)) = x$. ¿Os suena a algo? Estamos pasando de (x, y) a (y, x), osea…



Parte 4. Ahora os toca a vosotros

Para seguir, se les dará la siguiente consigna a realizar por grupos de expertos: "Teniendo dibujado el punto original (7,-3) y únicamente moviendo el folio, debéis conseguir mostrar el punto invertido".

Después, se les pedirá que, por grupos, dibujen ambos puntos (el original y el invertido), y que comenten entre ellos qué observan. Para dibujar los puntos, se les pedirá que dibujen las líneas guía paralelas a cada eje que marcan las coordenadas x e y. Tras un breve debate, se preguntará por grupos lo observado, y se comentará en alto para todos (F.A.: Fase de acción y F.F.).

Se espera que hagan gestos indicando cómo ha "girado" (hacia fuera del plano) el punto haciendo referencia a un eje de rotación imaginario.

Se pedirá entonces que sombreen el área rectangular que bordean las líneas guía de cada punto y los ejes correspondientes como muestra la siguiente imagen (F.A. y F.F.) tal y como se muestra en la figura 3 para después volver a preguntar qué observan.

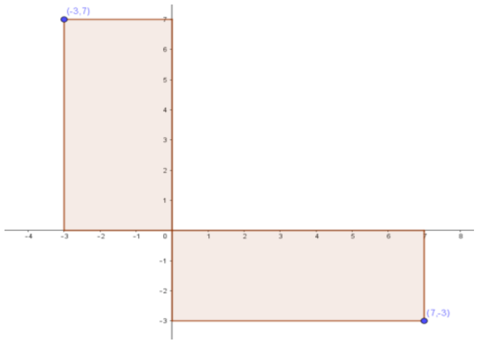


Figura 3. *Ejemplo para mostrar el significado de invertir un punto*

Nota: en todo momento se ha de tener en cuenta que, a pesar de que existe el inverso del producto, los estudiantes no deben confundirse con el inverso que estamos trabajando.

Lo primero que se espera que prueben es girar la hoja sobre la mesa, pero solo con ese giro no se logra el punto invertido. Es esperable igualmente que pregunten si se puede doblar o cortar la hoja. Ante esto, responderemos que sólo se puede moverla, pero que se puede hacer de la forma que quieran. No hay restricción de movimiento. Puesto que es difícil que vean cómo proceder, se darán más ejemplos de puntos en distintos cuadrantes y se pedirá que escriban y dibujen cuáles serán sus puntos inversos.

Ahora, observando estos resultados, se les preguntará (F.F.) :

- Al invertir el punto con coordenadas (3,-2)

    a. El 3 estaba en la parte positiva del eje x. ¿Dónde se tiene que mover para invertirlo? *A la parte positiva del eje y.*
    b. El -2 estaba en la parte negativa del eje y. ¿Dónde se tendrá que mover para invertirlo? *A la parte negativa del eje x.*

- Al invertir el punto con coordenadas (-5,1)

    c. El -5 estaba en la parte negativa del eje x. ¿Dónde se tiene que mover para invertirlo? *A la parte negativa del eje y.*
    d. El 1 estaba en la parte positiva del eje y. ¿Dónde se tiene que mover para invertirlo? *A la parte positiva del eje x.*

Se muestran en cursiva las respuestas esperadas por los estudiantes.

El docente, de alguna manera, deberá inducir en el alumnado la idea de que queremos cambiar el semieje positivo del eje x por el del eje y, y hacer lo propio con los semiejes negativos.

Seguidamente, se les pedirá que pinten de un color distinto cada semieje (positivo y negativo) de cada eje, tal que deben conseguir la idea anterior (F.A.). Se muestra a continuación un ejemplo:

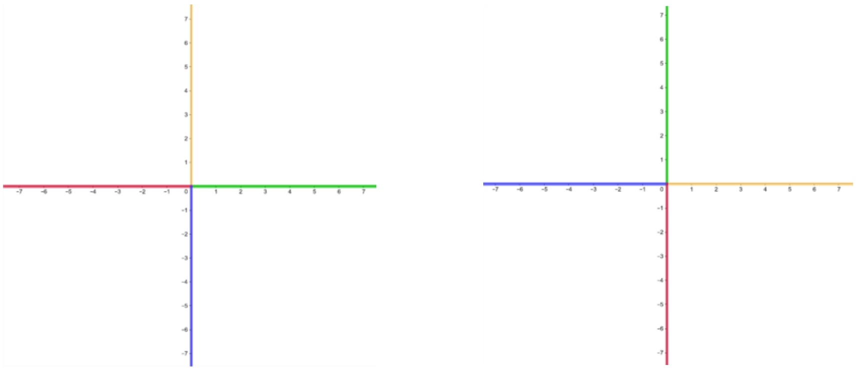


Figura 4. *Ejemplo para mostrar cómo invertir los ejes*

Tras dejarles manipular la hoja por grupos, y repetir las veces que sean necesarias que se puede mover la hoja como quieran, recalcando el "como quieran", se espera que piensen, además de en girar la hoja, en darle la vuelta. Entonces, surgirá el problema de que "no se puede ver a través de la hoja", para lo cual les pediremos que se ayuden de ver a trasluz por la ventana.

Finalmente deben entender que hay que girar 90º hacia la izquierda o derecha, y luego dar la vuelta al papel correspondientemente para lo que era la parte positiva del eje x quede en el eje y, y lo que era la parte positiva del eje y queden en el eje x. Las partes negativas deben quedar también igualmente alternadas. Tras girar y dar la vuelta a la hoja como es conveniente, lograrán el punto invertido, validando así (F.V.: Fase de Validación) la acción realizada.

Una vez hecho esto, el docente dirá: "Hemos logrado encontrar el inverso de un punto sólo moviendo los ejes. ¿Podríamos entonces encontrar el inverso de 2, 3, 4 o los puntos que quisiéramos?" La respuesta esperada será que sí.

El docente seguirá: "¿Podríamos encontrar el inverso de infinitos puntos, como, por ejemplo, de una función?" La respuesta esperada seguirá siendo que sí, pero también se espera que vean inviable tomar los infinitos puntos de una función uno a uno para ver la función inversa (ruptura de contrato).

Puede ser que alguna estudiante sugiera coger puntos aleatorios de la función y dibujar sus punto inversos para ver la tendencia que debe salir.

Sin embargo, el docente dirá entonces: "Si sabemos cómo dibujar nuestra función, nos bastará con mover la hoja girando y dando la vuelta como hemos hecho antes para conocer cuál será la función inversa." Se puede añadir que se trata de un proceso mucho más eficaz que ir punto por punto, además de más preciso, puesto que los puntos solo marcan la tendencia, y no la curva total resultante.

Para acabar con su intervención, el docente entregará las fichas (ver ANEXO IX: "Inversas TEMA A", "Inversas TEMA B" e "Inversas TEMA C") correspondientes al tema que trabaja cada grupo de expertos y dará la siguiente consigna a realizar por grupos de expertos: "Dado el tema que os ha tocado a cada uno, debéis encontrar las funciones inversas a las dadas. Para ello, debéis dibujar en cada eje vacío una función inversa y, luego, calcarlo en el eje donde estaba la función original."

La idea de que toda función que sea simétrica con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante (y=x) tiene una inversa igual a sí misma es una conclusión que obtendrán principalmente los estudiantes del grupo de expertos que trabaje el TEMA A, por lo que, al volver cada uno a sus respectivos grupos base, deberán comunicárselo al resto, haciendo de esta información una información valiosa que sólo ellos saben, y sin la que no se completa todo lo que deben saber sobre funciones inversas (interdependencia positiva).

Se institucionalizará también la idea de que: “Lo que era el dominio para cada función elemental, será el recorrido para la función inversa, y lo que era el recorrido, será el dominio.” Sin embargo, habrá excepciones, porque las funciones que al girarlas se conviertan en algo que no es función (más de un valor de y para un solo valor de x) tendrán que restringir su dominio / recorrido de alguna manera. ¿Cómo cambia el dominio y el recorrido entonces? ¿Por qué? Esto hay que verlo en cada caso.”

Al entregarles las fichas, tienen muchos problemas con entender la consigna. Por ejemplo, muchos, en lugar de dibujar la función simétrica con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, dibujan la simétrica con respecto a alguno de los ejes, por lo que se repite varias veces el cómo proceder a la hora de calcar. Una vez entienden el procedimiento, comienzan a trabajar.

Aquellos que tienen funciones biyectivas no caen en la cuenta de que la curva resultante al girar y calcar no es una función, pero se les permite que sigan procediendo porque esto se explicará en la siguiente sesión. Finalmente, una vez conseguida la función inversa, hay que ver qué función se ha obtenido y cómo se llama esa función (que lo dejamos para la próxima clase).

2.7.9. **Sesión 09:** 05/05 5ª HORA: 12:40 – 13:35 h

Esta sesión se dedica a “poner nombre” a las funciones descubiertas en la anterior sesión, a explicar el problema de que “aparecen curvas que no son funciones” y a analizar, al igual que hemos hecho con las funciones vistas hasta ahora (dominio, recorrido, paridad, periodicidad y cortes con los ejes) , las nuevas funciones que nos han ido apareciendo. Para ello, se hace uso de la presentación “Vuestras inversas”.

Se repasa también la definición de logaritmo, así como algunas propiedades de las potencias.

Aunque la sesión avanza a buen ritmo y sin problemas, no da tiempo de trabajar en profundidad ni la función arcoseno y la función arcocoseno, por lo que se opta por no preguntarlas de cara al examen.

2.7.10. **Sesión 10:** 15/05 4ª HORA: 11:45 – 12.40 h

Esta sesión es la previa al examen, por lo que se emplea a modo de repaso. También se les da la tabla final sobre las principales características de las funciones vistas para que la rellenen y entreguen al tutor.

En cuanto al repaso, se hace hincapié en los siguientes aspectos:

- Repasar la goniométrica y su relación con la gráfica de la función seno y coseno
- Dibujar la gráfica de la función coseno (ya que la función seno es la que se pregunta en el examen)
- Calcular los puntos de cortes con los ejes de la función coseno apoyándonos en la goniométrica.

  En este sentido, al estar acostumbrados a trabajar con grados, el pasar a radianes les resulta complicado, a pesar de que se trata de una proporcionalidad directa. Por ello, confunden el valor del seno de un ángulo (en grados) con el valor del ángulo (en radianes).
- Repasar cómo ver gráficamente si una función es par, impar y periódica.

Para finalizar, se dejan los últimos 10 minutos para trabajar la tabla, que se entregará ese mismo jueves (18/05) al docente titular para su posterior corrección y entrega de sus soluciones antes del examen. Dicha tabla reúne la información más general sobre todas las funciones vistas en clase y sus principales características.

Al empezar completando la tabla surgen dudas acerca de qué recta dibujar para la función lineal. Se comenta que se han de tener en cuenta las características de la recta dibujada para luego hablar de su simetrías, periodicidad, etc. Además, se ponen ejemplos de rectas que son pares, que son impares, que son periódicas, e incluso el ejemplo de aquella función lineal que es par, impar y periódica al mismo tiempo (la recta $y = 0$). Se pregunta esto mismo en un ejercicio del examen y, a pesar de ello, muchos contestan erróneamente.

El día de la entrega, entregan la tabla final todos los estudiantes excepto 3. Se hacen las correcciones necesarias y, en función de los errores percibidos, se suben a classroom una serie de documentos que los explican (por ejemplo, cómo hallar los cortes con los ejes de cada una de las funciones), así como el solucionario general.

2.7.11. **Sesión 11:** 22/05 3ª HORA: 11:45 -12:40 h

Esta sesión se emplea para la realización del examen, excepto para el alumno con TDAH, quien lo hará en la siguiente sesión por recomendación del centro y del equipo de orientación, dado que ese mismo día tienen examen de otra asignatura.

Se realizaron dos modelos de examen: uno general, y otro con adaptación para el alumno con TDAH.

El examen general se dividía en dos bloques. El primero de ellos, el más extenso, con un total de 5 ejercicios, contaba con un ejercicio inicial sobre cálculo analítico de dominios que se incluyó a petición del tutor, por ser temario que él había impartido sobre el tema de funciones, pero que no había podido evaluar. El resto de ejercicio de este bloque abarcaban una serie de conocimientos considerados fundamentales o básicos, que se esperaba que todos hubieran obtenido. En cuanto al segundo bloque, estaba constituido por un solo ejercicio cuya resolución implicaba el uso de conocimientos considerados “de expertos” que quizás, no todos habían adquirido. De hecho, este bloque sería el relacionado con el tema de movimientos en el plano (no visto en clase apenas). Es por ello por lo que este último bloque, en cuanto puntuación, sería mucho menos importante que el otro.

La propuesta de adaptación para el examen del alumno con TDAH al tutor fue la siguiente:
Ej 1: solo apartado a
Ej 3: solo 1, 2 y 5
Ej 4: solo 2, 3, 4 y 6
Ej 5: solo 3 y 4
Ej 6: eliminar la segunda parte

Sin embargo, se nos recomendó retirar un ejercicio (se optó por el último) en lugar de retirar partes de todos los ejercicios por ser conceptos básicos y querer evaluarlos todos. De hecho, se eligió como prescindible el último apartado dado que correspondía a conocimientos de expertos. Además, al examen de este alumno también se le recalcan palabras en negrita de los enunciados, así como se añaden cuadros a rellenar en el ejercicio 5 para que escriba la función seleccionada para cada eje, de modo que le resulte más cómoda y fácil la lectura e interpretación de los enunciados.

El examen tiene lugar a 4ª hora, por lo que el tiempo que le corresponde al alumnado es de 11:45 h a 12:40 h (55 minutos) pero, por recomendación del tutor, se les permite acudir 15 minutos antes de manera opcional por ser la clase posterior al recreo. (Se avisó de esto al alumnado con una antelación de una semana y se recordó a lo largo de los días previos al examen.) Todos los estudiantes, a excepción de 3 (los mismos que no habían hecho entrega de la tabla final), llegan con anterioridad.

Se hace entrega de los exámenes y se explica brevemente lo que se pide en cada ejercicio, recalcando la necesidad de responder a lo que se pregunta. El tutor comenta que se les permite compartir material durante el examen.

Además, durante la sesión, se hace un seguimiento personalizado de cada alumno animándole a repasar y contestar con coherencia a todos los apartados antes de entregar. En caso de observar algún error anecdótico, se comenta en voz alta para no beneficiar únicamente al que lo ha cometido, sino hacer consciente a todo el grupo. Por ejemplo, un alumno confunde la casilla del corte con el eje X y la del corte con el eje Y en el ejercicio 4 al leer "OX" y "OY" y entender "0=x" y "0=y".

Tras acabar el tiempo se recogen los exámenes y el alumnado abandona el aula.

El jueves de esa misma semana (25/05) se acude de nuevo al centro tanto para explicar los fallos generales más cometidos y para repartir los exámenes como para hacer la despedida de los que han sido los primeros alumnos, aunque haya sido durante un breve periodo de tiempo.

Durante las correcciones se encuentran los siguientes fallos generales que se comentan en clase:

- Algún alumno volvió a cometer el mismo error en el ejercicio del examen correspondiente a funciones definidas a trozos (confundir los cortes con los ejes de las rectas con los límites de los intervalos donde están definidos los distintos segmentos de rectas), lo que evidencia que, realmente no aprendieron del error (o al menos no todos).

- La mayoría confunden el término simetría/paridad con el ser simétrica/par con respecto al eje x=0.

- Muchos no entienden el término paridad (por estar acostumbrados a denominarlo simetría e interpretarlos como significados distintos) y lo confunden con el indicar qué tipo de función es (polinómica, lineal, parábola, etc.).

- La mayoría no hacen uso de la escala del ejercicio 5, sino que se limitan a dibujar la tendencia de la función.

- Muchos no leen bien el enunciado del ejercicio 5, y tratan de dibujar las funciones en las gráficas en el orden que se enumeran en el enunciado, obviando la escala.

- El ejercicio 1 tiene una tasa de éxito muy baja por haber sido impartido con anterioridad y no haber sido repasado.

- Además, queda evidenciado en general que no ha quedado del todo claro el concepto de dominio (ni de función).

  En concreto, en el propio examen, un alumno explicaba que no era capaz de dibujar una función cualquiera (por ejemplo, x^2) ya que no se le indicaban cuáles eran los valores de x ni de y (o al menos alguno de los dos para poder calcular el otro), de manera que "le faltaban datos". En otras palabras, trataba de decir que no se le indicaban cuáles eran los puntos por los que pasaba la función para poder unirlos.

- Algunos se aprendieron de memoria los dominios, recorridos, puntos de corte, etc. de las funciones de la tabla para el examen y simplemente lo transcribieron.
- Otros ponían bien las características de la función raíz cuadrada, pero luego dichas características no cuadraban con la gráfica que dibujaban, o viceversa. No se evidenciaba un verdadero conocimiento entre la relación de la expresión gráfica y la analítica de una función.
- Algunos, al decir las coordenadas de los puntos para resolver el ejercicio 2, colocan la coordenada x como si fuera la y, y viceversa, algo considerado un fallo anecdótico.

2.8. Sistema de evaluación

La propuesta didáctica que se ha presentado abarca la materia correspondiente las unidades 9, 10 y 11 del libro de texto de referencia (UD 9. Funciones, UD 10. Funciones polinómicas y racionales, UD 11. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), a pesar de que la primera de ellas fue introducida por el tutor de la clase y finalizada con la intervención descrita sobre funciones definidas a trozos. Es por ello por lo que, tras finalizar la situación de aprendizaje planteada, se debían evaluar estos tres temas, de manera que la nota individual que obtuviera cada alumno correspondería a 3/14 del porcentaje de la calificación destinado a parciales (puesto que se han trabajado las 14 unidades del libro).

De esta fracción, representada en su totalidad por la nota de cada alumno obtenida en el examen, se decidió dejar al juicio del profesor titular la modificación de la misma en función de sus observaciones pertinentes durante las clases trabajadas en grupo, durante el aprendizaje con el modelo cooperativo. Resultaba importante no sólo premiar a aquél que demostraba manejar los conceptos el día de la prueba final, sino también a aquél que hubiera dedicado su tiempo y esfuerzo durante toda la situación de aprendizaje a sacar la tarea adelante y a ayudar a su equipo a hacerlo igualmente.

En cuanto a las puntuaciones asignadas a cada ejercicio del examen, se eligieron en función de la relevancia de cada uno de ellos, así como de los distintos subapartados que contenía cada uno.

<u>Criterios de evaluación del currículo correspondientes:</u>

- 3.3.: "Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas."

- 7.2.: "Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica) valorando su utilidad para compartir información."

- 8.1.: "Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada."

- 8.2.: "Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana y en diversos contextos comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor."

- 9.1.: "Identificar y gestionar las emociones propias y desarrollar el autoconcepto matemático generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos."

- 9.2.: "Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas aceptando la crítica razonada."

3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Se muestra a continuación un estudio estadístico acerca de los resultados del examen final realizado por los 17 alumnos del aula. Se ha tenido en cuenta que el ejercicio final del examen se retiró para el alumno con TDAH (*) de cara al cálculo de los porcentajes.

	CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES					CONOCIMIENTOS DE EXPERTOS	
ALUMNOS	**Ejercicio 1**	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**Ejercicio 4**	**Ejercicio 5**	**Ejercicio 6**	**NOTAS**
1	0,40	0,15	1,10	0,36	0,60	0,10	**2,71**
2	0,00	0,30	1,20	1,68	0,60	0,35	**4,13**
3	0,20	0,15	0,50	1,68	0,10	0,10	**2,73**
4	0,00	0,10	0,70	1,05	0,00	0,00	**1,85**
5	0,10	0,10	0,40	0,00	0,00	0,00	**0,60**
6	0,75	0,60	0,85	2,52	0,30	1,20	**6,22**
*7**	0,00	0,40	1,00	1,08	0,50	1,50	**4,48**
8	0,50	0,30	0,63	0,24	0,00	-	**1,67**
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,00**
10	0,10	0,00	0,45	1,89	0,60	0,30	**3,34**
11	0,10	0,30	1,00	2,52	0,30	0,10	**4,32**
12	0,00	0,00	0,80	0,36	0,00	0,00	**1,16**
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,00**
14	0,50	0,35	0,35	0,72	0,10	1,30	**3,32**
15	0,75	0,35	1,10	1,80	0,30	0,90	**5,20**
16	0,50	0,10	0,00	1,29	0,00	0,10	**1,99**
17	0,10	0,00	0,20	0,48	0,70	0,60	**2,08**
MEDIA	0,24	0,19	0,60	1,04	0,24	0,41	
PUNTUACIÓN	1	1,1	1,3	3,3	1,5	1,8	
TASA DE ÉXITO	24%	17%	47%	31%	16%	23%	

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	
Media	2,69
Error típico	0,43
Mediana	2,71
Moda	0,00
Desviación estándar	1,79
Varianza de la muestra	3,21
Curtosis	-0,58
Coeficiente de asimetría	0,23
Rango	6,22
Mínimo	0,00
Máximo	6,22
Suma	45,80
Cuenta	17

Como podemos observar, los resultados del examen no fueron los idóneos. Solo dos personas lograron aprobar y el resto de los resultados se encuentran por debajo del 4.5 (nota a partir de la cual se considera como aprobado por criterio del centro). La nota máxima es un 6.22, mientras que la mínima es un 0, siendo este mismo resultado el adquirido por dos estudiantes. La desviación estándar, con valor 1.79, nos indica cuánto se alejan por lo general los resultados de la media (2.69) o, en otras palabras, lo agrupados que están los datos.

El rango (2.69-1.79, 2.69+1.79); esto es (0.9,4.48) incluye las notas de 12 de los 17 alumnos, es decir, en torno a un 71% de éstos. Dado que la distancia a una sigma de la media ubica dentro a más del 68 % de los resultados, podemos considerar que la distribución de notas está agrupada en torno a la media. En otras palabras, la media no es resultado de notas extremas, muy buenas o malas, por encima o por debajo de la media. Además, el valor de la mediana (2.71) es muy próximo al de la media, por lo que podemos hablar de cierta simetría en la distribución, reflejado en el coeficiente de asimetría (0.23) que nos indica que hay una ligera asimetría: hay un alumno más por encima de la media que por debajo.

CUARTILES	
Q_0 (0%)	0
Q_1 (25%)	1,67
Q_2 (50%)	2,71
Q_3 (75%)	4,13
Q_4 (100%)	6,22

El cálculo de los cuartiles de las notas (mostrado en la tabla superior) indica que el 25% de los estudiantes tienen una nota por debajo del 1.67. De igual manera, la mitad de ellos tienen menos de 2.71, así como el 75% está no supera el 4.13 en el examen. Esto es, ni siquiera con la nota del tercer cuartil hay un aprobado. Estos resultados, en general, resultan, cuanto menos, preocupantes.

Centrándonos ahora en los resultados según los ejercicios, observamos a simple vista que aquel con mayor tasa de éxito ha sido el ejercicio 3 con diferencia, con un porcentaje de éxito de casi la mitad del ejercicio (47%) correctamente realizado de media entre los estudiantes. En el otro extremo se sitúan los ejercicios 2 y 5, los cuales se sitúan con las peores tasas de éxito (17 y 16 %) con respecto al resto. No obstante, se observa a simple vista que ninguno de los apartados del examen resultó sencillo para el alumnado, pues no hay ningún que supere si quiera el 50% bien resuelto en promedio.

Por otro lado, tanto el ejercicio 1 como el 6 resultaron de complejidad similar para los alumnos, por haber obtenido porcentajes de resolución correcta del 23 y 24% de promedio respectivamente. Así, el orden de dificultad reflejado en los resultados correspondería al siguiente: 5 > 2 > 6 > 1 > 4 > 3 (siendo el ejercicio 5 el más difícil, y el 3 el más fácil).

De igual manera, se han analizado los resultados correspondientes a cada ejercicio de forma aislada, para analizar la tasa de éxito de manera más exhaustiva. Se divide así al alumnado (en cada ejercicio) entre:

- aquel que supera con éxito más del 75 % del ejercicio según la puntuación del ejercicio (muy bien)
- el que lo hace de forma correcta obteniendo entre un 50 y un 75 % de la ésta (bien)
- quien consigue entre un 25 y un 50 % de la misma (mal)
- aquel que no llegan a resolver bien el 25 % del ejercicio (muy mal)

Pueden observarse los gráficos que ilustran esta información en el ANEXO XXIV.

Como análisis general, cabe destacar es el último de los casos (menos del 25% del ejercicio logrado) el valor que prima en todos los ejercicios a excepción del tercero, al que habíamos catalogado como el más simple. Además, hay dos ejercicios que destacan por no presentar ningún alumno que haya superado más del 75% del mismo de forma correcta. Se tratan del ejercicio 2 y 5, catalogados como los más difíciles. Más aún, el número 5 tampoco cuenta con ningún estudiante que haya realizado el ejercicio bien.

En cuanto a la distribución de los porcentajes según los rangos, el ejercicio 1 cuenta con más de dos tercios del alumnado que realizan el ejercicio mal, mientras que sólo un 12% lo hace muy bien. Este primer ejercicio (sobre cálculo analítico de dominios) tuvo baja tasa de éxito probablemente debido a que no se repasó de cara al examen, y era temario impartido de forma previa a la situación de aprendizaje que se plantea en este escrito.

Más de la mitad del alumnado hace muy mal el ejercicio 2, dejando solo al 6% categorizados como “bien”. Este ejercicio pedía indicar la expresión analítica de una función definida a trozos de segmentos. A pesar de que se dejó un espacio en blanco para cálculos, apenas dos alumnos lo usaron como tal. El resto se limitó a indicar (mejor o peor) lo intervalos donde estaba definido cada segmento y a escribir expresiones analíticas para cada segmentos (la mayoría de forma errónea) sin justificación numérica alguna.

El ejercicio 3 es en el que los porcentajes se distribuyen de manera más equitativa, pues entorno a un cuarto del alumnado lo hace muy bien, otro cuarto lo hace muy mal, y los alumnos restantes se reparten entre la categoría “bien” y “mal” de forma igualada. En este ejercicio se pedía indicar la paridad (par con respecto al eje x=0 o impar con respecto al origen) así como de la periodicidad de distintas gráficas de funciones. La mayoría de errores se debieron a malas interpretaciones del enunciado.

El ejercicio 4 deja a cerca del 47% por debajo del 25% del ejercicio bien, y solo el 12% lo hace muy bien. En este ejercicio, se pedía indicar el dominio, recorrido y cortes con los ejes de una serie de funciones, así como indicar las inversas de un par de ellas. En cuanto a la segunda cuestión, apenas una persona contestó bien, lo cual lleva a pensar que todo el proceso de explicación del significado de función inversa realmente no caló en los estudiantes. En cuanto a la primera cuestión, muchas respuestas parecían fruto de memorización por parte del alumnado, ya que luego no se correspondían con las gráficas de estas mismas funciones que se pedían dibujar en el siguiente ejercicio.

Así, en cuanto al ejercicio 5, casi tres cuartos de los estudiantes lo hacen muy mal, mientras que los restantes lo hacen mal. Muchos se limitan a dibujar la tendencia de la función, omitiendo el uso de la escala.

Por último, el ejercicio 6 muestra un 65% de fracaso entre el alumnado, así como solo un 6% de éxito. Se esperaba que fuese el ejercicio con menos éxito en el sentido de saber interpretar qué ocurría al hacer f(x+1), f(x)+1 y 2f(x), pero desde luego no se esperaba que los estudiantes no fueran capaces de dibujar las funciones de forma adecuada sabiendo que:

1. Se trataban de parábolas (muchos dibujaban otro tipo de curvas, e incluso rectas, siendo la parábola la función elemental más trabajada en clase).
2. El dominio son todos los reales, por lo que simplemente se trata de coger cualquier valor y

calcular cuánto vale ese número al cuadrado.

En general queda evidenciado que el aprendizaje que se trató de que se produjera no se volvió una realidad, pues los resultados no reflejan un buen manejo de los conocimientos estudiados. Cabe mencionar además que los ejercicios del examen fueron seleccionados, en su mayoría, a partir de ejercicios ya resueltos en clase o explicados de una forma u otra pero, aunque esto no hubiera sido así, no sería una justificación para estas calificaciones.

CONCLUSIONES

A continuación se enumeran las conclusiones principales que se han podido extraer de la puesta en práctica de la situación de aprendizaje planteada, así como del marco teórico en la que ésta se encuadra.

En primer lugar, cabe resaltar que aunque nos hayamos apoyado en un marco teórico basado en el uso de una técnica de aprendizaje cooperativo, se ha comprobado que en este aula en concreto no ha sido posible llevarlo a cabo, lo cual no implica que estas bases dejen de estar justificadas, sino que no han sido aplicables a nuestro caso particular de tema a impartir, con estos alumnos en el aula, en este momento del curso. Por supuesto somos conscientes de que no es igual la repuesta que el alumnado ha dado tras sólo un mes de trabajo de sesiones ubicadas a mitad de curso, que la que podría haber dado si se hubiera empezado el curso con esta dinámica, si se hubiera trabajado durante todo el curso o si simplemente los estudiantes estuvieran acostumbrados a ella.

Es por ello por lo que a lo largo de la situación de aprendizaje se han ido modificando aspectos en función de la respuesta que daban los estudiantes aunque, a pesar de ello, esta flexibilidad no ha resultado ser suficiente. Por tanto, de cara a próximas intervenciones, se cree que la preparación del momento en el que introducir esta dinámica en el aula será mejor y se tendrán más herramientas para aplicar la metodología para este mismo tema o quizá para otros usos más puntuales.

Por otro lado, este trabajo nos ha permitido ver la evaluación como un método de aprendizaje en lugar de como algo punitivo. La realidad del aula en la que se ha trabajado seguía un funcionamiento que alentaba la evaluación como un premio-castigo: clases expositivas, ejercicios relacionados y el esperado examen final. Es importante darse cuenta de que por mucho que tratemos de aplicar un nuevo modelo, o incluso mantener el mismo, si la primera vez que el docente se hace consciente de lo que sabe un alumno es cuando éste le devuelve un examen final, todo el aprendizaje intermedio ha sido en vano, pues no ha existido una retroalimentación. No obstante, también se ha de resaltar el hecho de que cuando se entra en una dinámica preestablecida, tratar de cambiarla en un periodo de tiempo tan limitado resulta casi imposible.

A lo largo de la redacción de este TFM, así como del proceso previo que viene implícito en ella, la parte que ha supuesto un mayor reto para mí ha sido la redacción del marco teórico. El ser aséptica al explicar un modelo o metodología que aspiras a implantar en una situación de aprendizaje no me ha resultado fácil. Además, puede ser peligroso el basarse en bibliografía que no hable del modelo de forma imparcial, puesto que al fin y al cabo es solo eso, un modelo.

Por otro lado, lo más difícil que he tenido que superar en la parte práctica ha sido el "flexibilizarme" como docente. Como ya se ha comentado, por mucho que se quiera aplicar un modelo, el deseo de innovar nunca puede estar por encima de las necesidades y ritmos de aprendizaje del alumnado. Personalmente, el amoldarme a ello ha supuesto un reto, ya que implicaba descartar propuestas didácticas que realmente deseaba llevar a cabo. Sin embargo, el saber ajustarse al aula también conlleva un valioso aprendizaje como maestro, pues ayuda a poner en valor otras propuestas y a saber reaccionar ante diversas situaciones en el campo de la gestión del aula.

Además, enfrentarme por primera vez a una clase de instituto también ha supuesto todo un desafío. La adolescencia es una etapa cuanto menos variopinta tanto para aquel que la experimenta como para el que le acompaña en el proceso. El alumnado de un instituto es algo para lo que ningún libro sobre didáctica ni pedagogía te prepara, pues cada clase, más aún, cada alumno, es un mundo. El saber lidiar con estudiantes con edades de entre 14 y 15 años es algo que desde un primer momento impacta, pero el descubrir cómo conectar con ellos, tanto a nivel educativo como personal, también ha resultado muy gratificante y enriquecedor.

En cuanto a nivel más académico, lo que más me ha costado gestionar quizá haya sido la temporalización de las sesiones, puesto que, en ocasiones, no he marcado bien los ritmos de trabajo, produciendo demoras en la planificación de las actividades planteadas, lo que se traducía en menos tiempo para las siguientes.

Por último, lo más he disfrutado de todo este proceso ha sido el descubrirme a mi misma pasando por todas las dimensiones del docente mencionadas en el marco teórico y el verme empezando a superarlas (o al menos tratándolo): desde el primer día donde sentí que la confianza en mí misma flaqueaba, que mi temario no estaba bien ajustado a los tiempos y que el alumnado se mostraba reticente a mi propuesta, hasta el último donde me sentí como una verdadera profesora titular, con la sensación de haber sabido reconducir la dinámica de la clase cuando había sido necesario, y con un gran sentimiento de devoción hacia la enseñanza de mis alumnos.

Para continuar, se expondrá una breve opinión sobre la forma en la que se conciben las matemáticas desde el punto de vista de los estudiantes y docentes.

La asignatura de matemáticas se ha convertido en algo meramente algorítmico para muchos alumnos. Tratándose de una materia troncal, el problema no está en la falta de importancia que se le da a nivel académico o de evaluación, sino en la ausencia de practicidad y contextualización de la misma, a pesar de los esfuerzos que cada docente, a nivel individual, decide hacer. Quizá la raíz del problema resida en que el alumnado no suele generar esa necesidad de relacionar las “matemáticas de clase” con “las de la vida”.

Esto se traduce en una grave falta de “responsabilidad matemática” entre los estudiantes, quienes se limitan a resolver problemas o ejercicios matemáticos de forma mecánica, aplicando fórmulas o procesos previamente enseñados para llegar a la solución del tipo que se espera que obtengan. En general, no se demuestra un interés o curiosidad por saber el origen de estos procesos, sino que se asumen y aceptan como válidos porque es el docente, experto en el tema, quien los está transmitiendo. No obstante, queda esperanza en una pequeña pero importante parte del alumnado que, lejos de simplemente aceptar estos conocimientos, buscan mucho más allá. Como futura docente, creo que es principalmente por ello por lo que hay que seguir luchando, sin dejar, a su vez, de tratar de encauzar al resto hacia ese mismo camino.

Otro claro problema que se ha detectado o, más bien, confirmado, es la grave desvinculación entre las distintas áreas de las matemáticas que existe en la forma de impartir el temario de secundaria. Durante la etapa de infantil y primaria se procura utilizar material manipulativo en el aula, representar pictóricamente las situaciones y, de alguna manera, hacer más tangibles o visuales las matemáticas de estas etapas educativas. Sin embargo, la llegada a la ESO refleja un claro salto de lo concreto a lo abstracto: se espera que, con unos cuantos ejemplos, los estudiantes comiencen a tener un pensamiento más teórico, ignorando la vital importancia que tiene el seguir usando esas demostraciones gráficas o tangibles (lógicamente, de mayor complejidad) y esos dibujos (donde entra en juego el valor y alcance de la geometría) de primaria, que sirvieran para poder darle un sentido a todas esas operaciones algebraicas sin significado aparente y que tanto demanda el pensamiento relacional de Skemp.

Por todo ello, considero que se debería apostar cada día más por un verdadero aprendizaje significativo donde entren en juego todos esos factores: relación entre las áreas matemáticas, contextualización y, sobre todo, demostraciones. Y no hablamos de pruebas rigurosas, sino de mostrar el origen, razón y sentido de lo que se hace; hablamos de hacer “ver” las matemáticas.

Algunos docentes buscan justificarse en la falta de costumbre que tienen los escolares a la hora de trabajar de esta manera, y es totalmente lógico y esperable que exista cierta e incluso mucha reticencia a cambiar esta rutina. No obstante, esto no lo convierte en motivo suficiente para ignorar el problema, sino que hace aún más visible la necesidad de solventarlo, puesto que solo vuelve a reafirmar la idea de que los estudiantes creen estar aprendiendo matemáticas “de verdad” cuando lo que estudian son las matemáticas “del colegio”.

Finalmente, me gustaría añadir que la realización de este trabajo, junto con la experiencia de las prácticas en un centro que lo ha acompañado, me han ayudado, si cabe, a poner más en valor la labor docente. La realidad de un aula es muy distinta a su estudio teórico, lo que me ha hecho reflexionar sobre la importancia de la educación de calidad y la dificultad de hacer de ella algo real. Pueden existir muchas prácticas estudiadas e incluso probadas como las más eficientes en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, pero la realidad es que cada clase y, es más, cada estudiante, es distinto del anterior y del siguiente, incluso de sí mismo si cambia el contexto, el ambiente, e incluso la estación del año. Así pues, el tutor debe ser una figura flexible en ese sentido, capaz de amoldarse a la situación sin dejar de lado su principal objetivo: enseñar a aprender tanto la utilidad como la belleza de las matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría terminar este TFM agradeciendo en primer lugar a mis tutores Raquel y Cibrán, por guiarme y enseñarme tanto durante el proceso de redacción del TFM como en la preparación de las clases en el centro, por involucrarse tanto de forma profesional como personal en mí y en el trabajo, y por ayudarme a apostar por un cambio en la educación.

Agradecer también a los que han creído en mí como futura docente, a mi familia y amigos (tanto los que estaban como los que han llegado por el camino), por haber estado ahí.

Gracias al centro de prácticas, IES Navarro Villoslada, que me ha brindado la oportunidad de dar mis primeros pasos enseñando. Gracias en especial a mi tutor en el centro, Alejandro Vaquero Rivero, cuya experiencia y dedicación me ha aportado mucho, y gracias a los que han sido mis primeros alumnos y alumnas en una clase de instituto, por enseñarme tanto o más de lo que he querido enseñarles yo a ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFÍA

Bligh, D. (1971). *What's the use of lectures (1ª ed.)*. Exeter: Intellect.

Dewey, J. (1899) The School and Society Chicago, University of Chicago Press,

FESTINGER, Leon; ARONSON, Elliot. Eveil et réduction de la dissonance dans les contextes sociaux. FAUCHEUX CL., MOSCOVICI, S., Psychologie sociale théorique et expériementale, 1971, p. 107-126.

HERON, John. Group Facilitation: Theories and Models for Practice. Nichols Publishing, PO Box 331, East Brunswick, NJ 08816., 1993.

Johnson, D. W., & Johnson, F. (2017). Joining together: Group theory and group skills (4th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Johnson, D. W., & Johnson, R. (1989). Cooperation and competition: Theory and research. Edina, MN: Interaction Book Company.

Johnson, D. W., & Johnson, R. (1994). Leading the cooperative school (2nd Ed.) Edina, MN: Interaction Book Company.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2005a). New developments in social interdependence theory. Genetic, Social, and General Psychology Monographs, 131(4), 285–358.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009a). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. Educational Researcher, 38(5), 365–379.

Johnson, D. W., Johnson, R., & Holubec, E. (2013). Cooperation in the classroom (9th ed.). Edina, MN: Interaction Book Company.

Marina, J.A. (2016) *Tratado de filosofía zoom*. Barcelona: Ariel.

POOLE, Marshall Scott; HOLLINGSHEAD, Andrea B. (ed.). Theories of small groups: Interdisciplinary perspectives. Sage Publications, 2004.

REITER-PALMON, Roni, et al. Theories and models of teams and groups. Small Group Research, 2017, vol. 48, no 5, p. 544-567.

Slavin, R. (1980). Using cooperative team learning. Baltimore: Johns Hopkins University, Center for Social Organization of Schools.

VYGOTSKY, Lev S. The development of higher forms of attention in childhood. Soviet Psychology, 1979, vol. 18, no 1, p. 67-115.

WEBGRAFÍA

- **Web 1:** *Aprendizaje Cooperativo: Ventajas y desventajas* (2017) *Competencias personales y profesionales para el Siglo XXI*. Available at:
https://competenciasdelsiglo21.com/aprendizaje-cooperativo-ventajas-desventajas/

- **Web 2:** *DISPOSICIONES DE DESARROLLO DE LAS NORMAS REGULADORAS DE LOS TRABAJOS FIN DE ESTUDIOS DE LA UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS, SOCIALES Y DE LA EDUCACIÓN*
https://www2.unavarra.es/gesadj/CyD4/grados/TFG/NORMATIVA/disposiciones_desarrollo_normativa_facultad.pdf

- **Web 3:** *Orientación, estructura y formato TFM*
https://www2.unavarra.es/gesadj/CyD4/masteres/TFM/orientacion_estructura_formato_tfm.pdf

- **Web 4:** *Plantilla TFM FCHSyE*
https://www2.unavarra.es/gesadj/CyD4/masteres/TFM/plantilla_master_cast.pdf

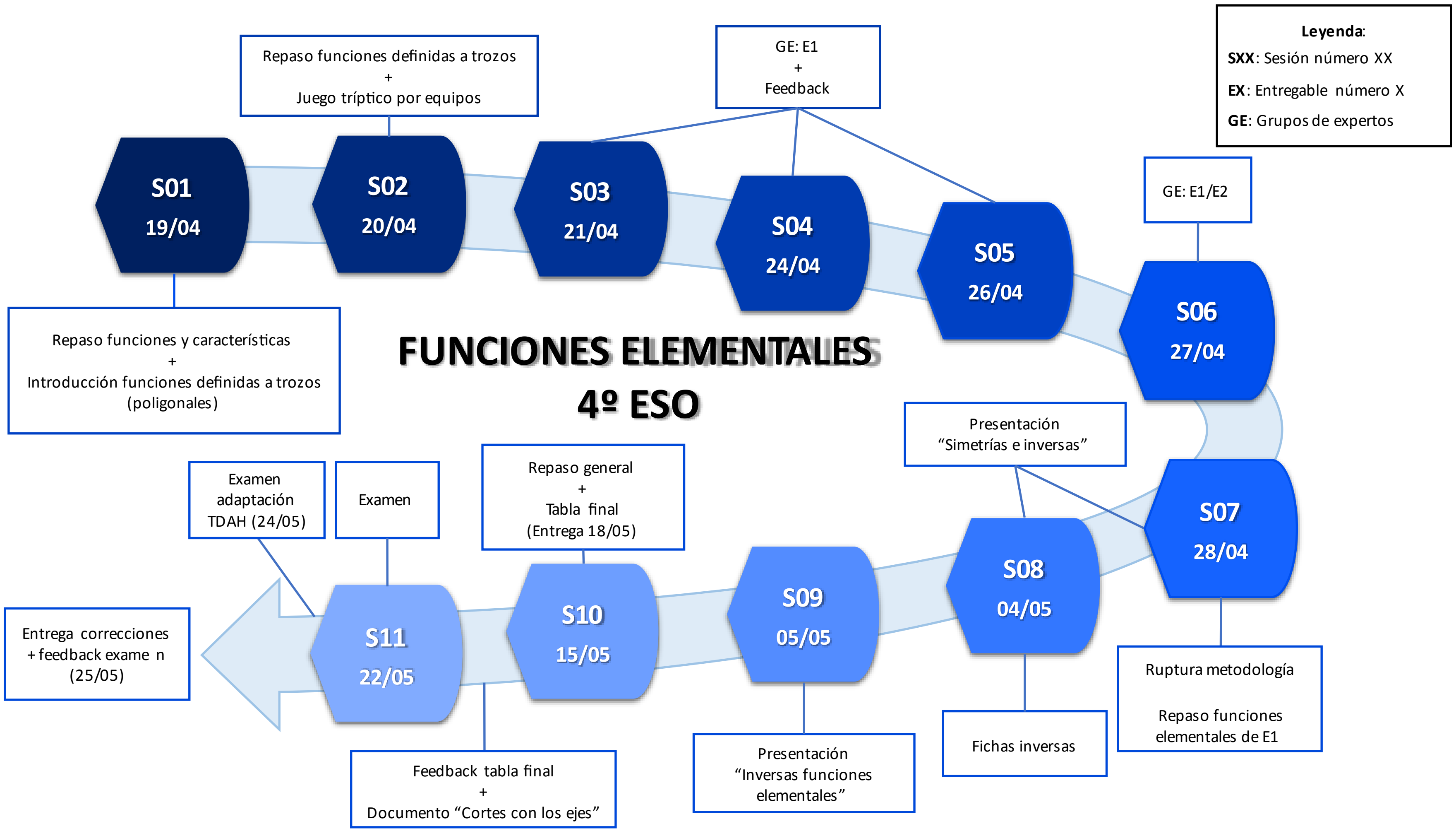
- **Web 5:** *NORMATIVA REGULADORA DE LOS PROCESOS DE EVALUACIÓN EN LA UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA*
https://www2.unavarra.es/gesadj/seccionNormativa/texto_consolidado_normativa_evaluacion.pdf

- **Web 6:** Transformaciones de funciones en el plano *Transformations*. Available at:
http://wmueller.com/precalculus/newfunc/1.html

ANEXOS

Debido a la extensión de determinados documentos anexados, se adjuntan a modo de link de Google Drive para su consulta.

I. ANEXO I Esquema general reparto de sesiones



II. ANEXO II Páginas del libro de texto con los ejercicios realizados en el aula

Página 190:

6 Funciones definidas a trozos

Existen funciones que se definen con distintas expresiones algebraicas para diferentes intervalos. Estas funciones se llaman **funciones definidas a trozos**.

EJEMPLOS

6. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \le 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

Representamos la función teniendo en cuenta los intervalos donde se define:

$f(x) = x - 3$ si $x \le 0$

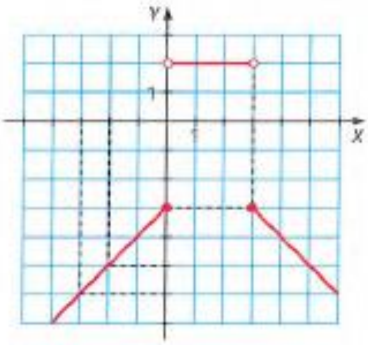
x	-2	-1	0
$f(x)$	-5	-4	-3

$f(x) = 2$ si $0 < x < 3$

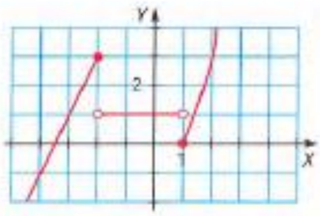
x	1	2	$2{,}5$
$f(x)$	2	2	2

$f(x) = -x$ si $3 \le x$

x	4	5	6
$f(x)$	-4	-5	-6



7. Observa la gráfica de la función definida a trozos y determina su expresión algebraica.



- $y = 2x + 7$ está definido entre $-\infty$ y -2. El punto $x = -2$ pertenece a esta gráfica.
- $y = 1$ está definido entre -2 y 1. Los puntos $x = -2$ y $x = 1$ no pertenecen a esta gráfica.
- $y = x^2 - 1$ está definido entre 1 y $+\infty$. El punto $x = 1$ pertenece a esta gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{si } x \le -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

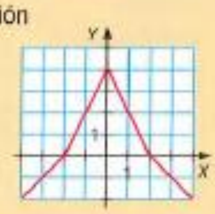
ACTIVIDADES

36 PRACTICA. Representa esta función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

37 APLICA. La función $f(x) = |x|$ se puede representar como una función definida a trozos. Halla su expresión algebraica.

38 REFLEXIONA. Halla la expresión algebraica de la siguiente función.



<u>Página 191:</u>

ACTIVIDADES

39 Representa las siguientes funciones definidas a trozos.

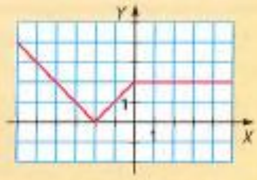
a) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - \frac{1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40 Halla la expresión algebraica de esta función definida a trozos.

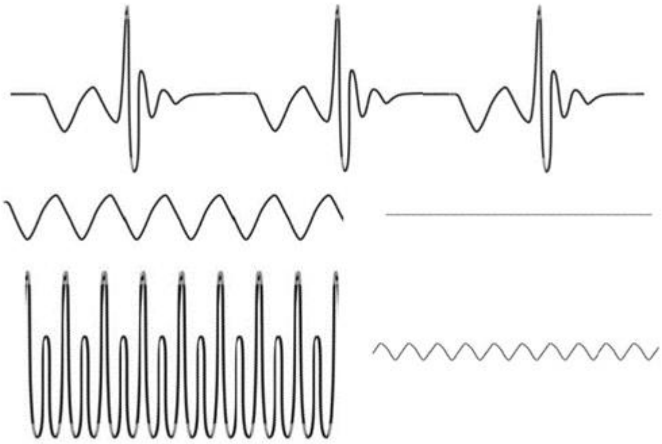


41 Halla la representación gráfica de estas funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

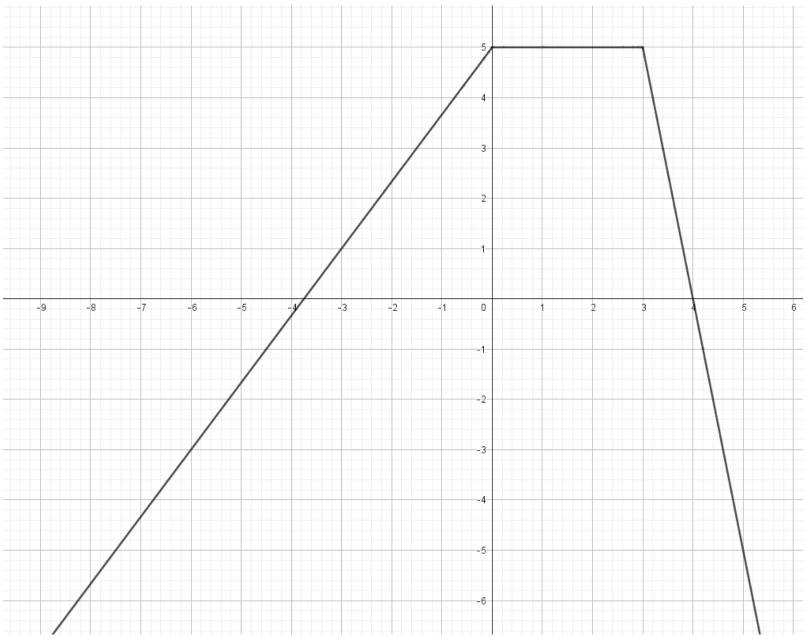
III. ANEXO III Introducción a las funciones definidas a trozos: Electrocardiograma

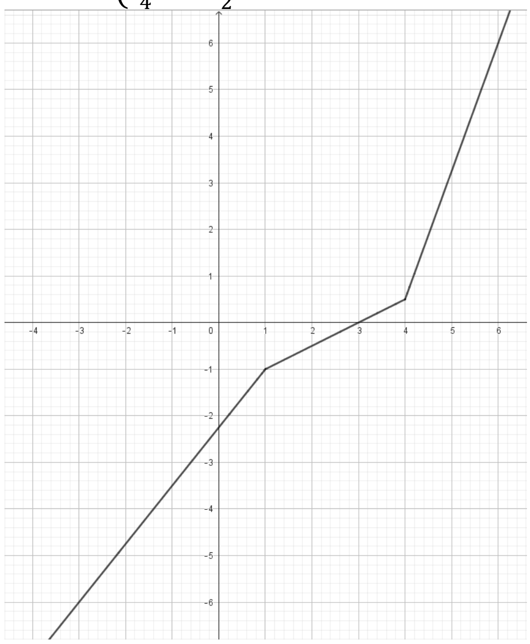


IV. ANEXO IV Juego tríptico por equipos

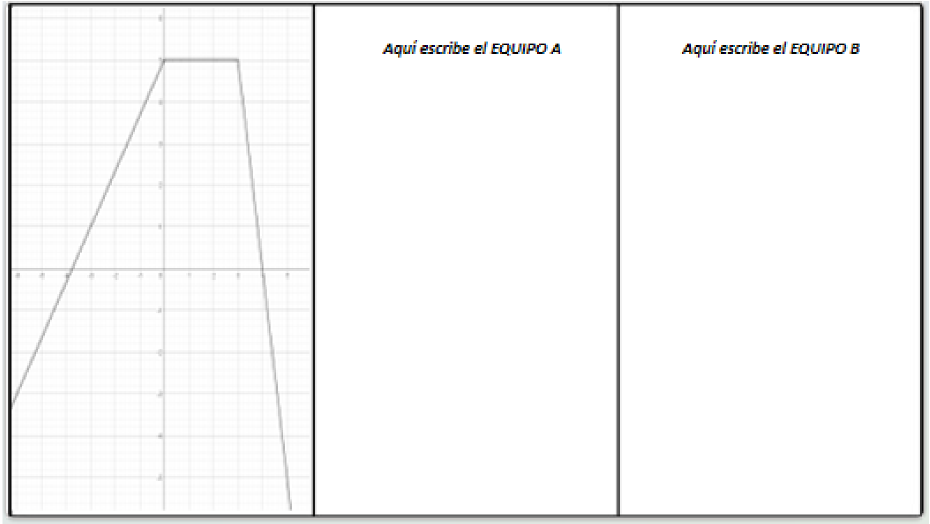
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + 5 & si\ 0 \geq x \\ 5 & si\ 0 < x < 3 \\ -5x + 20 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

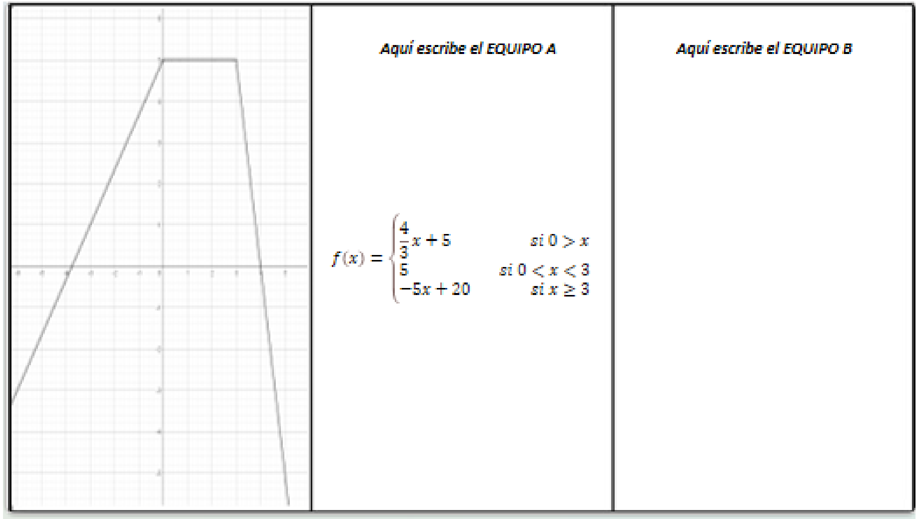
$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}x - \frac{9}{4} & si\ 1 \geq x \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & si\ 1 < x < 4 \\ \frac{11}{4}x - \frac{21}{2} & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

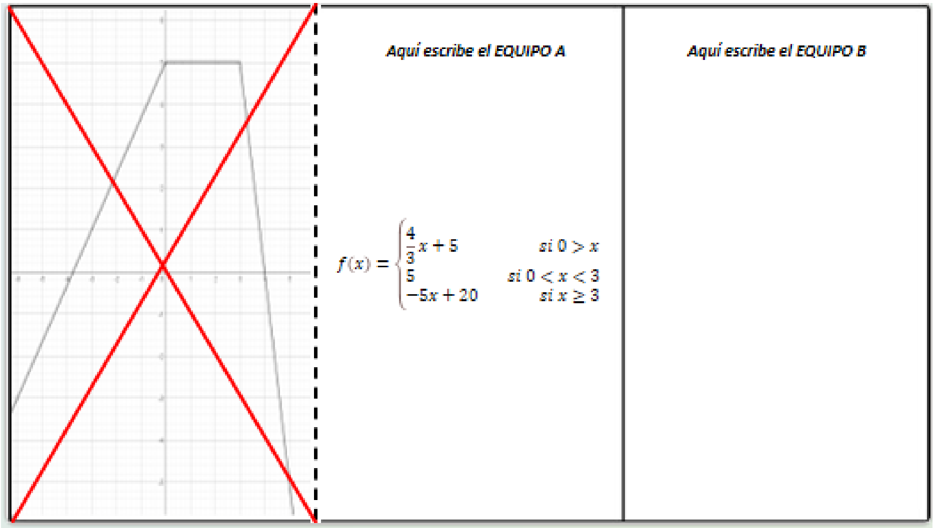


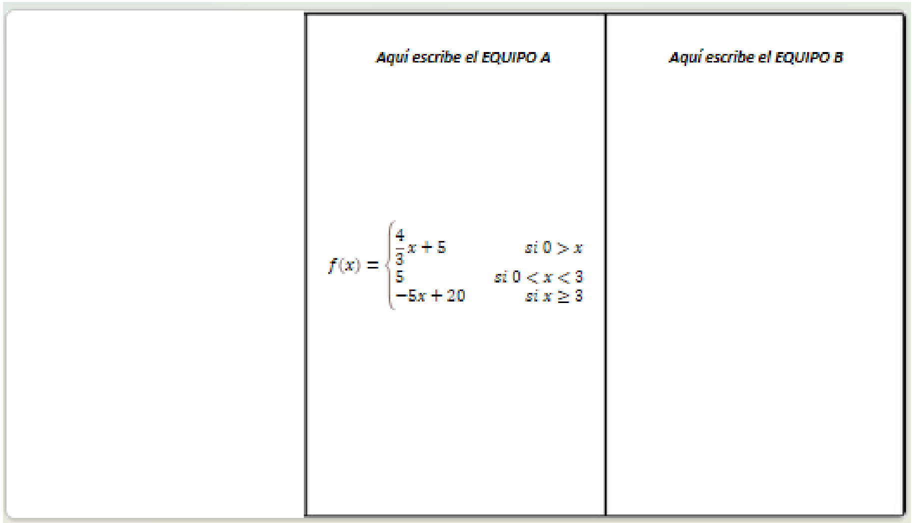


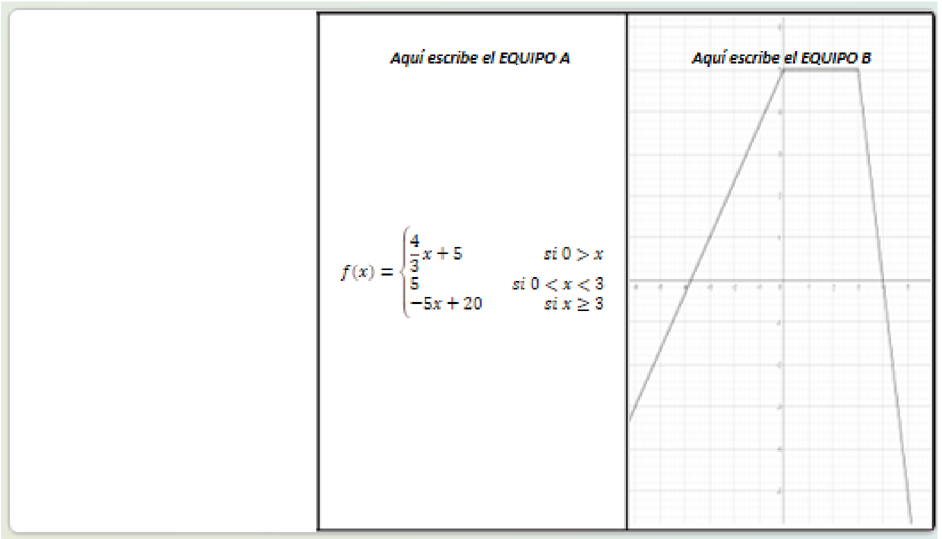
SOLUCIÓN TRÍPTICO 1: Entregado inicialmente al grupo A y, a continuación, al B

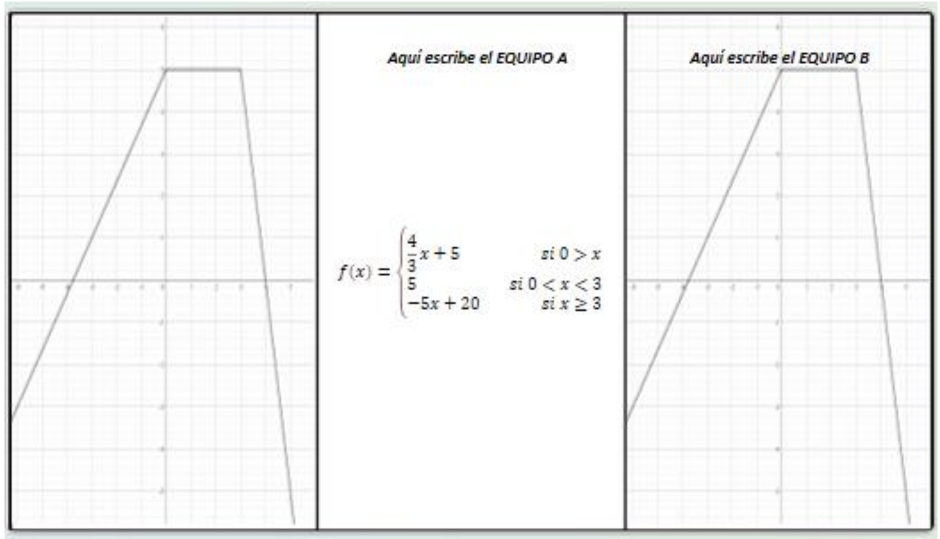




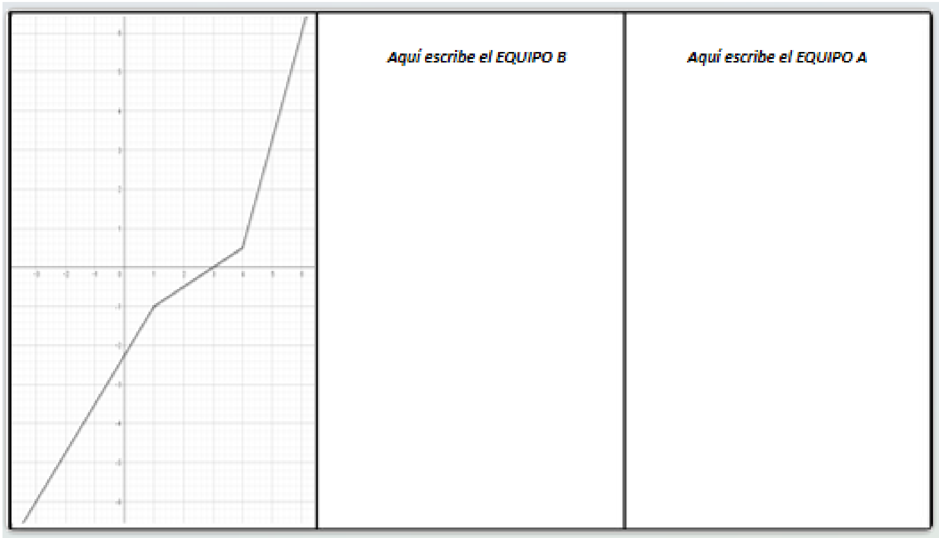


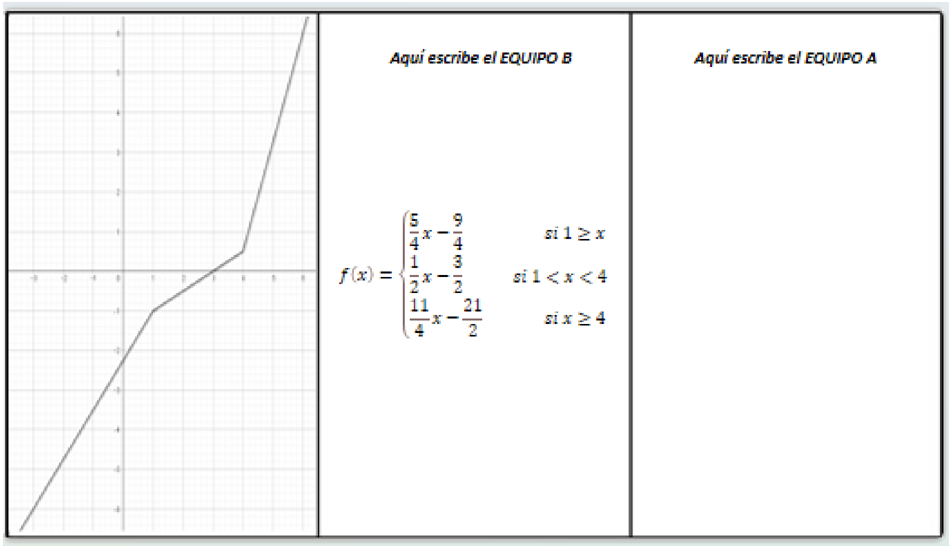


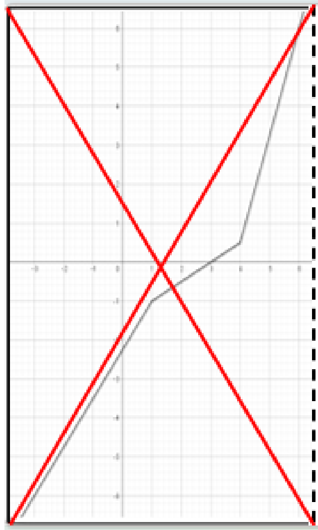




SOLUCIÓN TRÍPTICO 2: Entregado inicialmente al grupo B y, a continuación, al A







Aquí escribe el EQUIPO B

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x-\frac{9}{4} & si\ 1\geq x\\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & si\ 1<x<4\\ \frac{11}{4}x-\frac{21}{2} & si\ x\geq 4\end{cases}$$

Aquí escribe el EQUIPO A

Aquí escribe el EQUIPO B

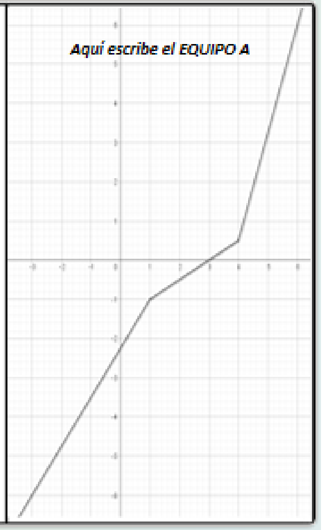
$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x-\frac{9}{4} & si\ 1\geq x\\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & si\ 1<x<4\\ \frac{11}{4}x-\frac{21}{2} & si\ x\geq 4\end{cases}$$

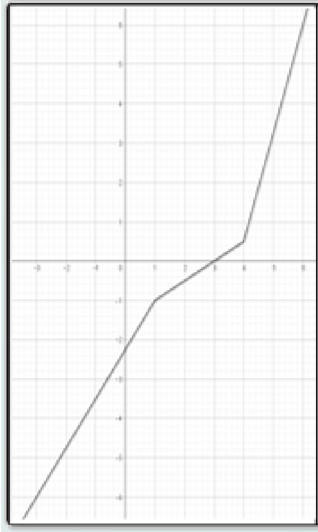
Aquí escribe el EQUIPO A

Aquí escribe el EQUIPO B

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x-\frac{9}{4} & si\ 1\geq x\\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & si\ 1<x<4\\ \frac{11}{4}x-\frac{21}{2} & si\ x\geq 4\end{cases}$$

Aquí escribe el EQUIPO A

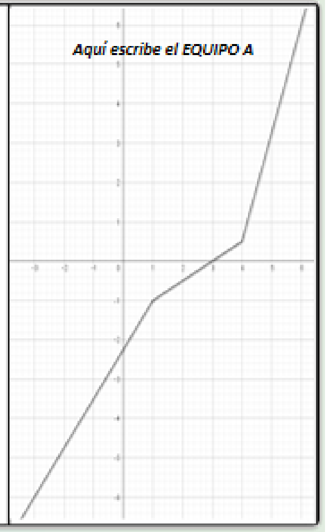




Aquí escribe el EQUIPO B

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x-\frac{9}{4} & si\ 1\geq x\\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & si\ 1<x<4\\ \frac{11}{4}x-\frac{21}{2} & si\ x\geq 4\end{cases}$$

Aquí escribe el EQUIPO A



Resolución juego tríptico alumnado:

EQUIPO A (equipo ganador)

$$f(x)\begin{cases} \frac{4}{3}x+5 & si\ x\leq 0 \\ 5 & si\ 0<x<4 \\ -5x+20 & si\ x\geq 3 \end{cases}$$

1

$y = mx+n$

$(0,5)$, $(-3,1)$

$5 = m0+n$

$5 = n$

$1 = -3m+n$

$1 = -3m+5$

$3m = 4$

$m = \frac{4}{3} = 1'3$

$\frac{4}{3}x+5$

$n =$

3

$(3,5)$

$(5,-5)$

$$\begin{cases} 5 = 3m+n \rightarrow \\ -5 = 5m+n \end{cases}$$

$10 = -2m$

$m = \frac{10}{-2} \rightarrow -5$

$5 = 3\cdot -5+n \rightarrow 5 = -15+n \rightarrow n = 20$

EQUIPO B

$(4, \frac{1}{2})$

$(6,6)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 4m+n \\ -6 = -6m+n \end{cases}$$

$-\frac{11}{2} = -2m \rightarrow m = \frac{-11}{2} : \frac{-2}{1}$

$m = \frac{-11}{4}$

$-6 = -6m - (-\frac{11}{4})$

$6m = \frac{11}{4}+6 \rightarrow$

$6m = \frac{35}{4}$

$m = \frac{35}{4} : \frac{6}{1} = \frac{35}{24}$

V. ANEXO V Entregables realizados

a. E1A

Introduce en Excel los siguientes datos y ajústalos a la función. Para ello, agrega una línea de tendencia del tipo que mejor se ajuste a los puntos y marca tanto la casilla "Presentar ecuación en el gráfico" como la de "Presentar valor de R cuadrado en el gráfico".

Recuerda que el valor de R^2 oscila entre 0 y 1, y que cuanto mayor sea su valor, mejor se habrán ajustado los datos.

DATOS 1:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25

DATOS 2:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

DATOS 3:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125

¿A qué tipo de línea de tendencia se ajustan los datos?

Una vez estimadas las ecuaciones de cada función a través de Excel, comprueba para algunos de los puntos que se cumple dicha ecuación. ¿Qué valor tomará cada una de las funciones cuando $x = \frac{1}{2}$? ¿Y cuando $y = \frac{1}{2}$?

¿Qué características tienen cada una de las funciones obtenidas? Habla en términos de dominio, recorrido, máximos, mínimos, cortes con los ejes, simetría, periodicidad, etc.

¿El dominio y recorrido de la línea de tendencia son los mismos que los de la ecuación de la función? Intenta explicar por qué.

Resuelve las siguiente cuestiones:

1) ¿Cuál es la relación que existe entre el lado de un cuadrado y su área?
2) ¿Y entre su lado y su volumen?
3) ¿Con cuál de las funciones dibujadas relacionas cada una de las preguntas anteriores? ¿Tendrías que modificar de alguna manera las funciones?

b. E1B

Introduce en Excel los siguientes datos y ajústalos a la función. Para ello, agrega una línea de tendencia del tipo que mejor se ajuste a los puntos y marca tanto la casilla "Presentar ecuación en el gráfico" como la de "Presentar valor de R cuadrado en el gráfico". Recuerda que el valor de R^2 oscila entre 0 y 1, y que cuanto mayor sea su valor, mejor se habrán ajustado los datos.

¡OJO! Acuérdate de cambiar los "." por "," para meter los datos en la Hoja de Cálculo.

DATOS 1:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

DATOS 2:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0.0016	0.008	0.04	0.2	1	5	25	125	625

¿A qué tipo de línea de tendencia se ajustan todos estos datos? ¿Cómo se llama esa línea de tendencia?

A la vista de los datos, ¿qué ecuación dirías que sigue cada tabla de datos? Pista: Pon los números decimales en forma de fracción. ¿En qué se diferencian con las ecuaciones que nos da la Hoja de Cálculo? Compara resultados dando valores a ambas ecuaciones.

¿Qué es "e"? ¿Por qué crees que aparece?

Visualiza el siguiente vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

¿El dominio y recorrido de las líneas de tendencia son los mismos que los de las ecuaciones de cada función? Intenta explicar por qué.

Resuelve el siguiente acertijo: En un jardín hay flores. Al principio hay una flor, y cada día, el número de flores se duplica. El jardín tarda en llenarse 48 días. ¿Cuántos días tardará en llenarse a la mitad?

¿Cuál sería la ecuación que relacionaría los días con el número de flores que hay cada día en el jardín?

DATOS 3:

-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
-0.2	-0.25	-0.3…	-0.5	-1	1	0.5	0.3…	0.25	0.2

Pista: Pasa los números decimales a fracciones si te cuesta ver la relación.

¿A qué tipo de línea de tendencia se ajustan todos estos datos? ¿Cómo se llama esa línea de tendencia? ¿Por qué? ¿Por qué crees que no hay valor correspondiente a 0? Si metes ese valor en la relación obtenida, ¿qué ocurre?

Resuelve la siguiente cuestión: Si se contrata a un obrero tarda 24 horas en construir un muro. Si se contratan a dos, tardan 12h. ¿Cuánto tardarán 3 obreros? ¿Y 4? ¿Y 12?

¿Qué relación hay entre el número de obreros y el tiempo que tardan en construir el muro? ¿Cómo llamamos a esta relación? Trata de dibujar esta relación en una gráfica.

c. E1C

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dibuja los siguientes triángulos rectángulos con los siguientes lados (dados en centímetros) en hojas cuadriculadas y en la misma posición. Dibuja los triángulos correspondientes a cada tabla en una hoja distinta.

TABLA 1		
Lado 1	***Lado 2***	***Lado 3***
3	4	5
6	8	10
9	12	15
4.5	6	7.5
18	24	30
0.75	1	1.25
0.6	0.8	1

TABLA 2		
Lado 1	***Lado 2***	***Lado 3***
12	5	13
2.4	1	2.6
18	7.5	19.5
24	10	26
4.8	2	5.2
4.2	1.75	4.55
12/13	5/13	1

TABLA 3		
Lado 1	***Lado 2***	***Lado 3***
7	24	25
7/3	8	25/3
1.4	4.8	5
2.1	3.6	7.5
3.5	12	12.5
1.75	6	6.25
0.28	0.96	1

¿Cómo son los triángulos que hay en cada una de las tablas? ¿Por qué? Pista: ¿Qué tienen distintos? ¿Qué tienen igual?

Pinta de un color el lado de los triángulos correspondiente a la tercera columna de las tablas y de otro color el lado de los triángulos correspondiente a la segunda columna de las tablas. ¿Cómo se llaman los lados de la tercera columna? ¿Y de la segunda? ¿Y de la primera?

Completa ahora las siguientes tablas:

TABLA 1		
Lado 2	***Lado 3***	***L2/L3***
4	5	
8	10	
12	15	
6	7.5	
24	30	
1	1.25	
0.8	1	

TABLA 2		
Lado 2	***Lado 3***	***L2/L3***
5	13	
1	2.6	
7.5	19.5	
10	26	
2	5.2	
1.75	4.55	
5/13	1	

TABLA 3		
Lado 2	***Lado 3***	***L2/L3***
24	25	
8	25/3	
4.8	5	
3.6	7.5	
12	12.5	
6	6.25	
0.96	1	

TABLA 4		
Lado 1	***Lado 3***	***L1/L3***
3	5	
6	10	
9	15	
4.5	7.5	
18	30	
0.75	1.25	
0.6	1	

TABLA 5		
Lado 1	***Lado 3***	***L1/L3***
12	13	
2.4	2.6	
18	19.5	
24	26	
4.8	5.2	
4.2	4.55	
12/13	1	

TABLA 6		
Lado 1	***Lado 3***	***L1/L3***
7	25	
7/3	25/3	
1.4	5	
2.1	7.5	
3.5	12.5	
1.75	6.25	
0.28	1	

¿Qué ocurre si divides, para cada tabla, el lado de cada triángulo de la segunda columna entre el de la tercera? ¿Y si divides el lado de cada triángulo de la primera columna entre el de la tercera?

Elige un ángulo (en la misma posición/el mismo para todos los triángulos) que no sea el ángulo recto y, en función del que hayas elegido, indica qué nombre recibe la cantidad obtenida al dividir L2/L3 y la que recibe la obtenida al dividir L1/L3.

Fíjate ahora en la última fila de cada tabla. ¿Qué tienen en común esos 3 triángulos? ¿A qué te recuerda?

¡Efectivamente! A la circunferencia goniométrica. Dibújala con compás y regla sobre una hoja cuadriculada. Trata de explicar, a partir de ella, cómo encontrar el seno y el coseno de un ángulo, qué valores pueden tomar el seno o el coseno y cómo cambian en función de ángulo.

Visualiza ahora los siguientes vídeos para completar o corregir lo que hayas concluido:

- https://www.youtube.com/watch?v=XH3htlWU9N4
- https://www.youtube.com/watch?v=5Eh6YGbdjFc

Manipula ahora los siguientes links de GeoGebra:

- https://www.geogebra.org/m/dxc88ge7
- https://www.geogebra.org/m/HdnfNmwA
- https://www.geogebra.org/m/j56gw5rh

Responde a las siguientes preguntas sobre la función seno y la función coseno:

- Dibuja ambas funciones a mano alzada de forma superpuesta y cada una de un color distinto. ¿Qué diferencias hay entre ambas funciones en cuanto a su forma?
- ¿Qué características cumplen cada una de ellas? Habla en términos de dominio, recorrido, cortes con el eje X e Y, periodicidad, simetría…

VI. ANEXO VI Soluciones entregables realizados

a. E1A

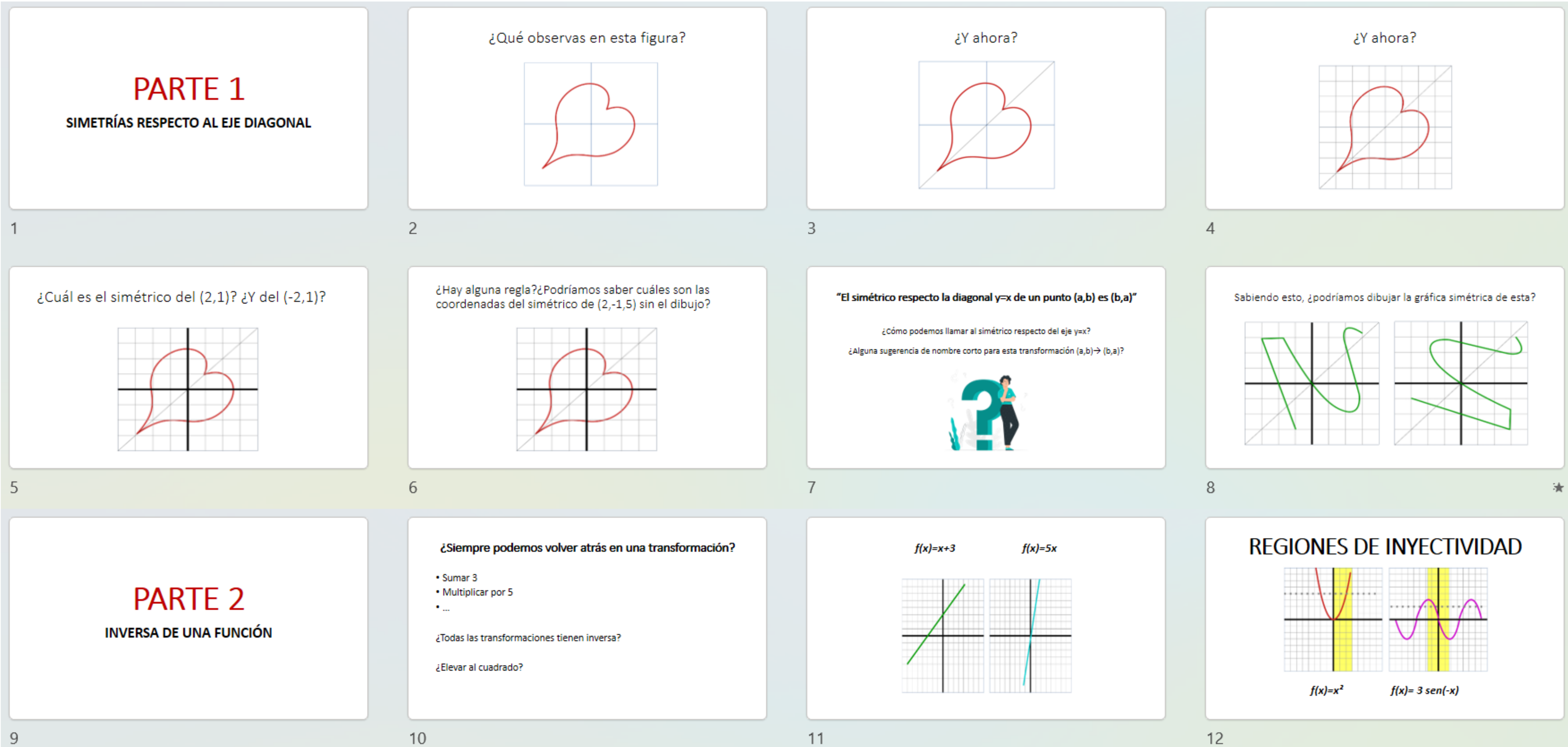
b. E1B

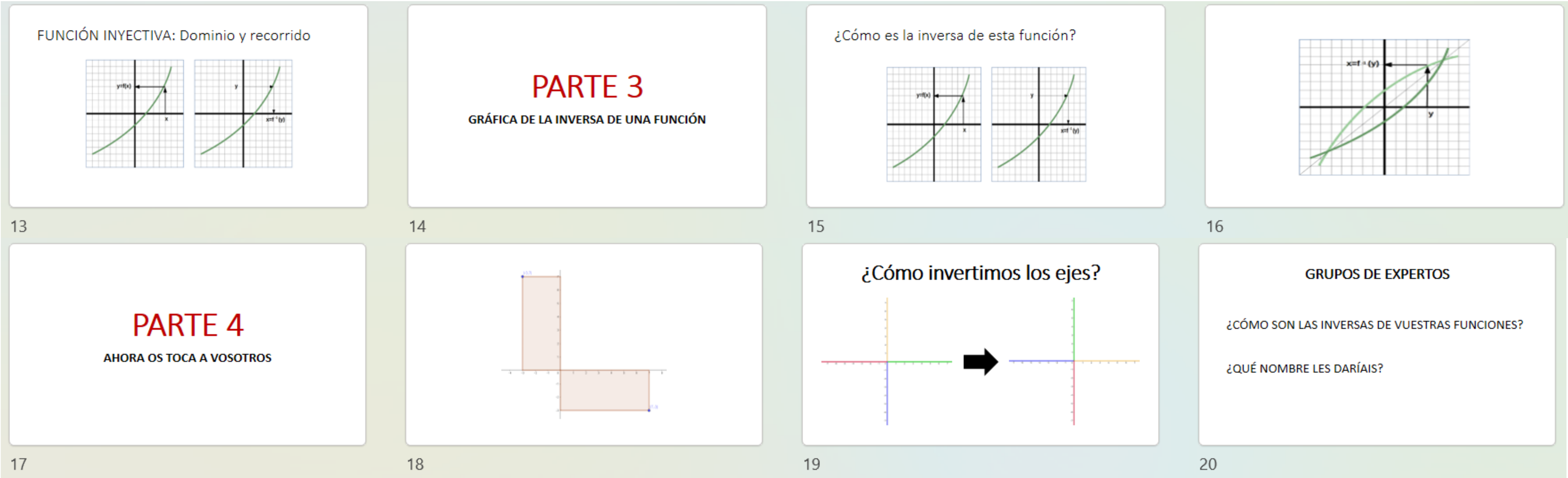
c. E1C

Solicitar acceso para ver el classroom de la clase con todas las versiones de entregas y correcciones de cada alumno.

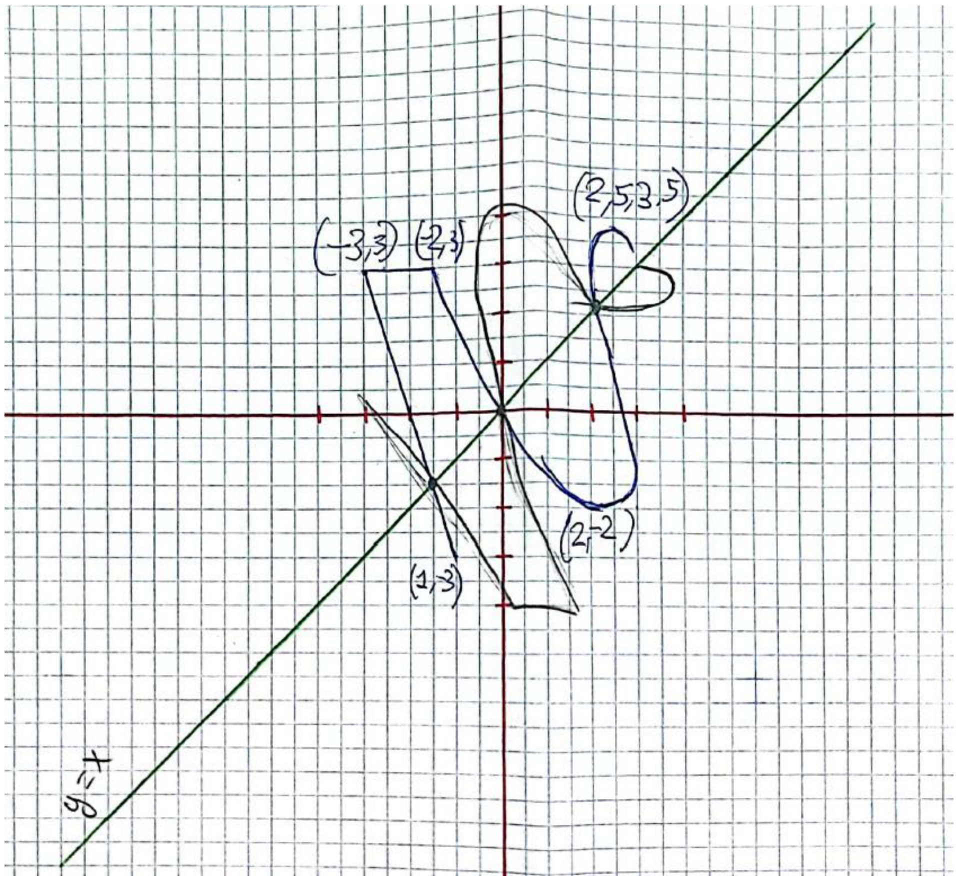
VII. ANEXO VII Presentación “Simetrías e inversas”

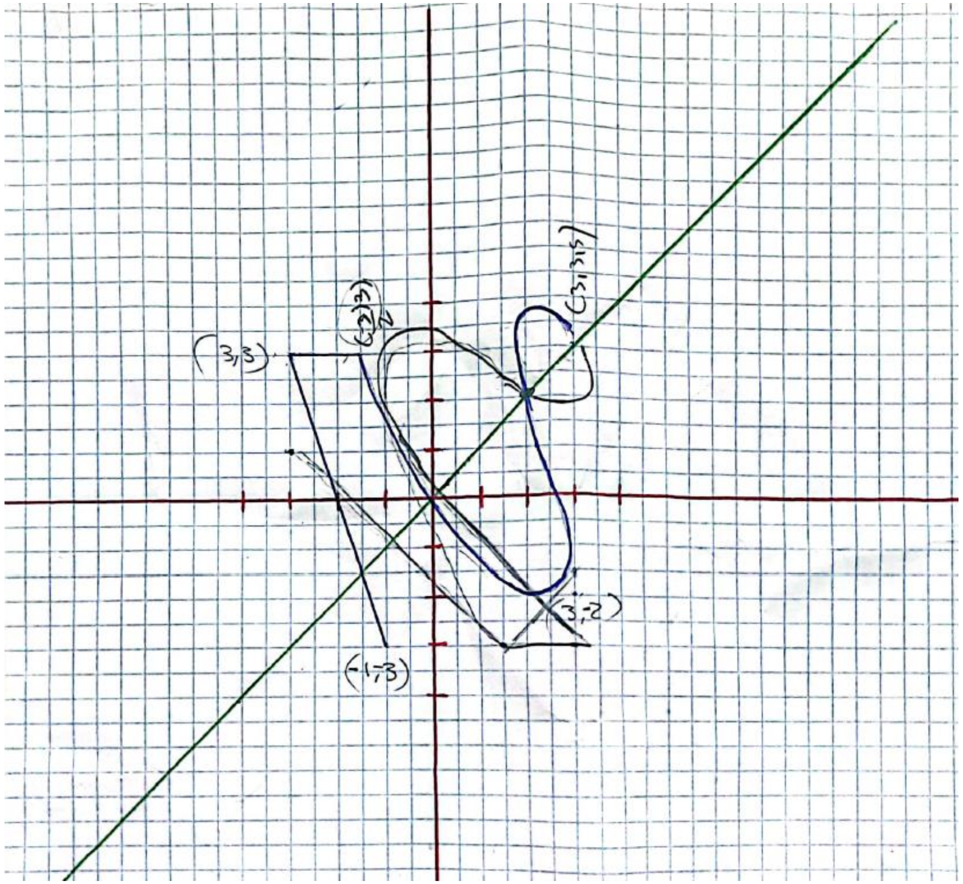
Véase el siguiente link para mayor calidad de imagen:
https://docs.google.com/presentation/d/1c8xMPr7pRbxl4_HcsS6qfOkdPxA0UEGQ/edit?usp=sharing&ouid=111262480512631264751&rtpof=true&sd=true




FUNCIÓN INYECTIVA: Dominio y recorrido
13
PARTE 3
GRÁFICA DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN
14
¿Cómo es la inversa de esta función?
15
16
PARTE 4
AHORA OS TOCA A VOSOTROS
17
18
¿Cómo invertimos los ejes?
19
GRUPOS DE EXPERTOS
¿CÓMO SON LAS INVERSAS DE VUESTRAS FUNCIONES?
¿QUÉ NOMBRE LES DARÍAIS?
20

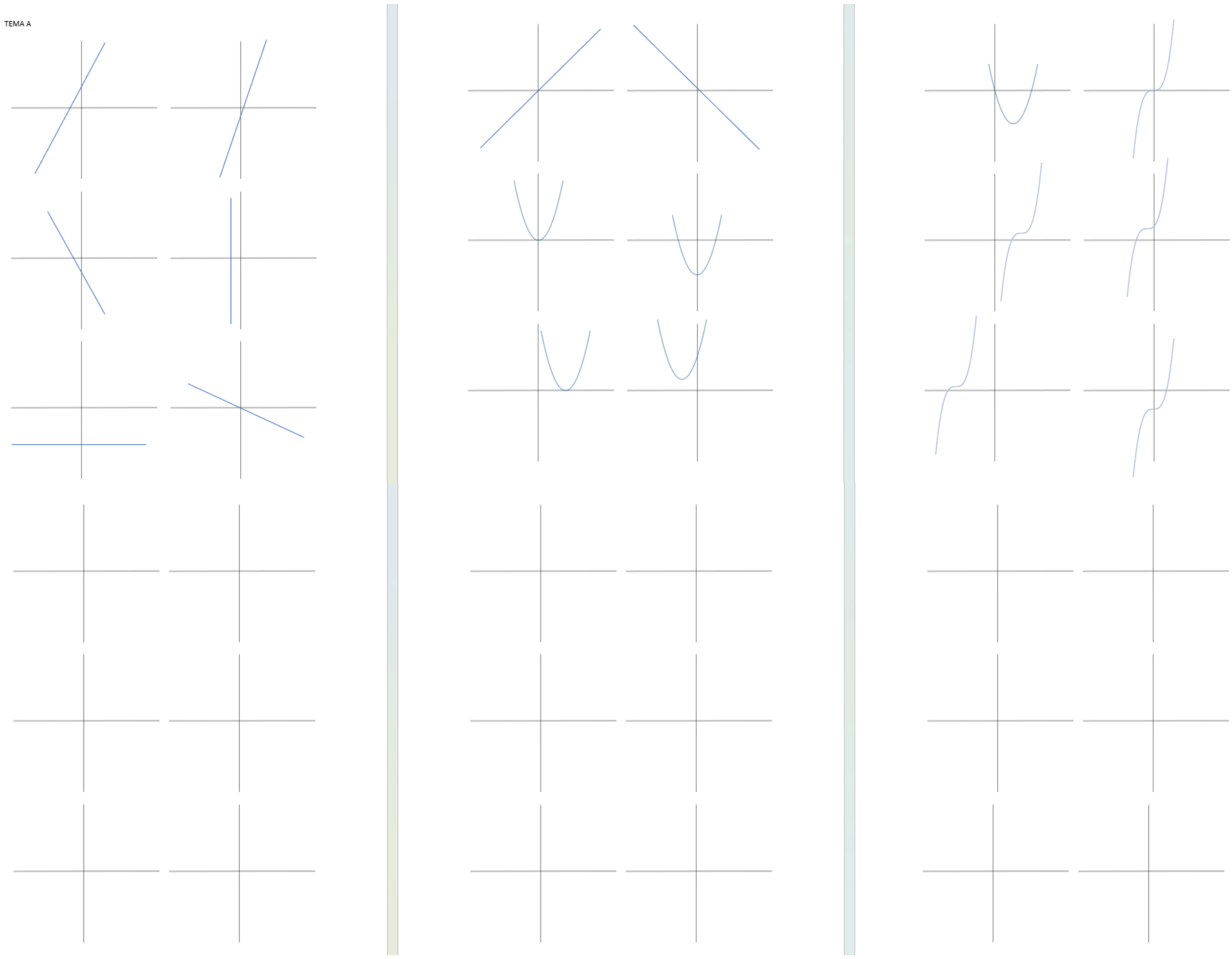
VIII. **ANEXO VIII** Soluciones alumnado transparencia número 8 presentación "Simetría e inversas"



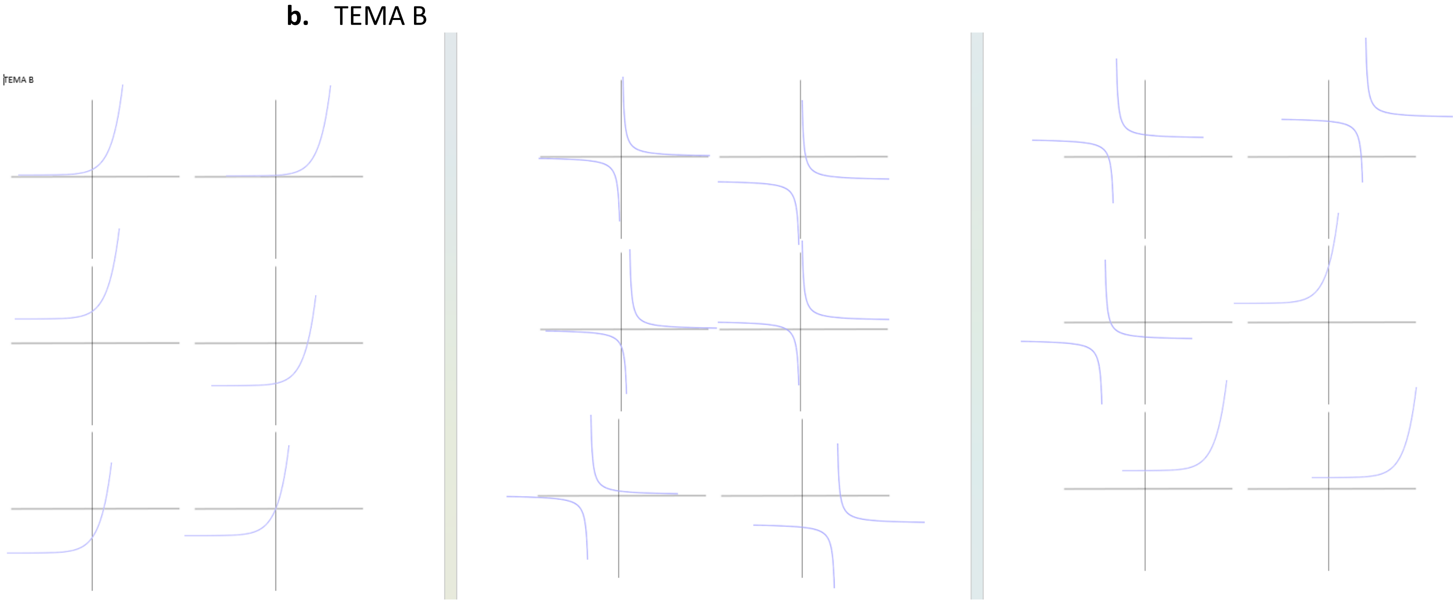


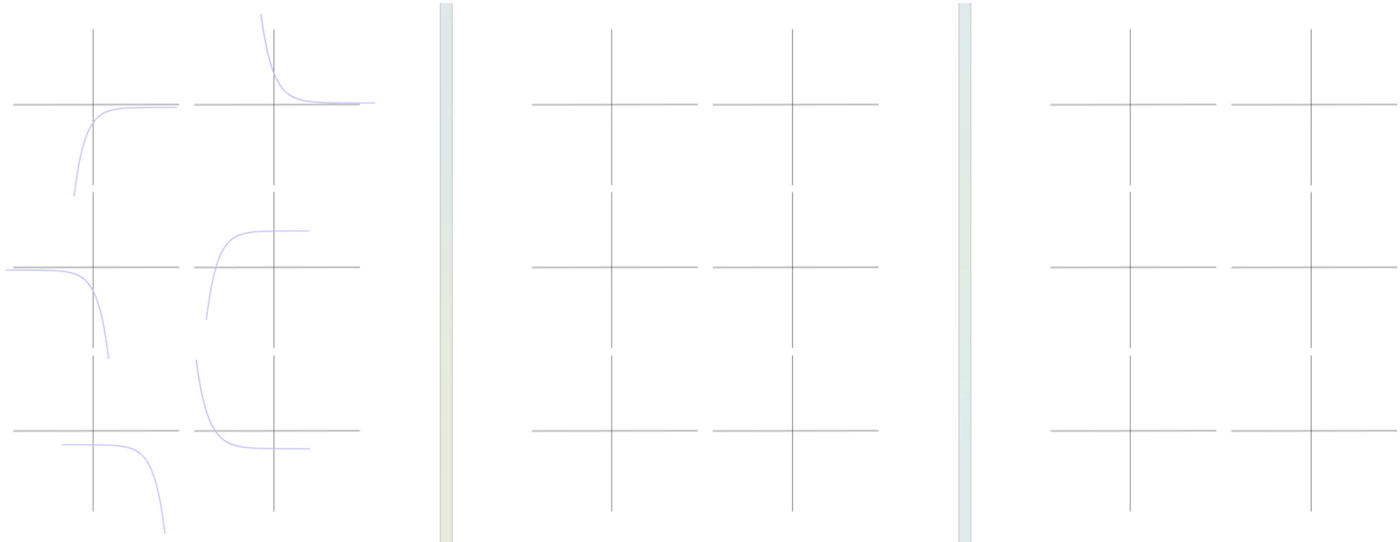
IX. ANEXO IX Fichas inversas

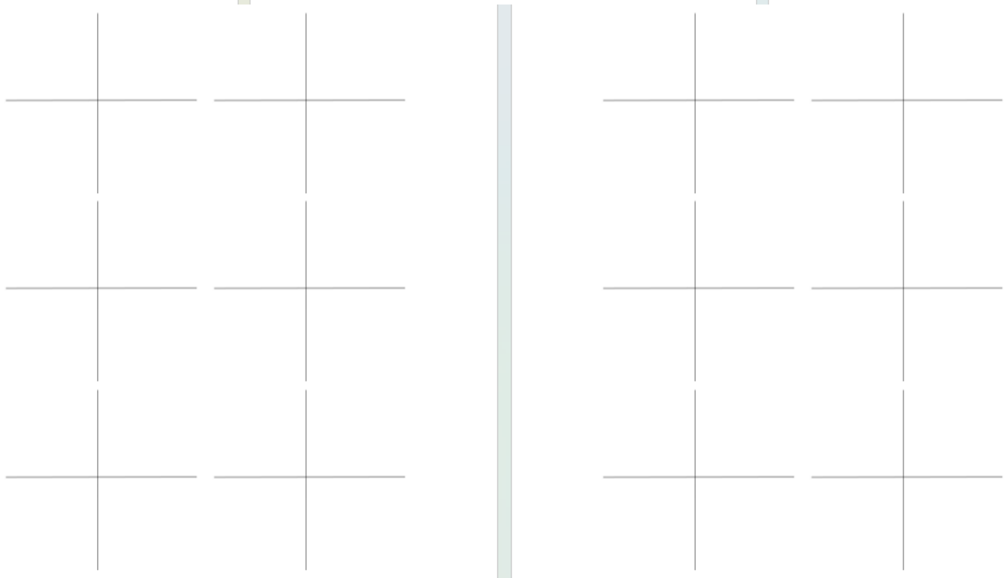
a. TEMA A



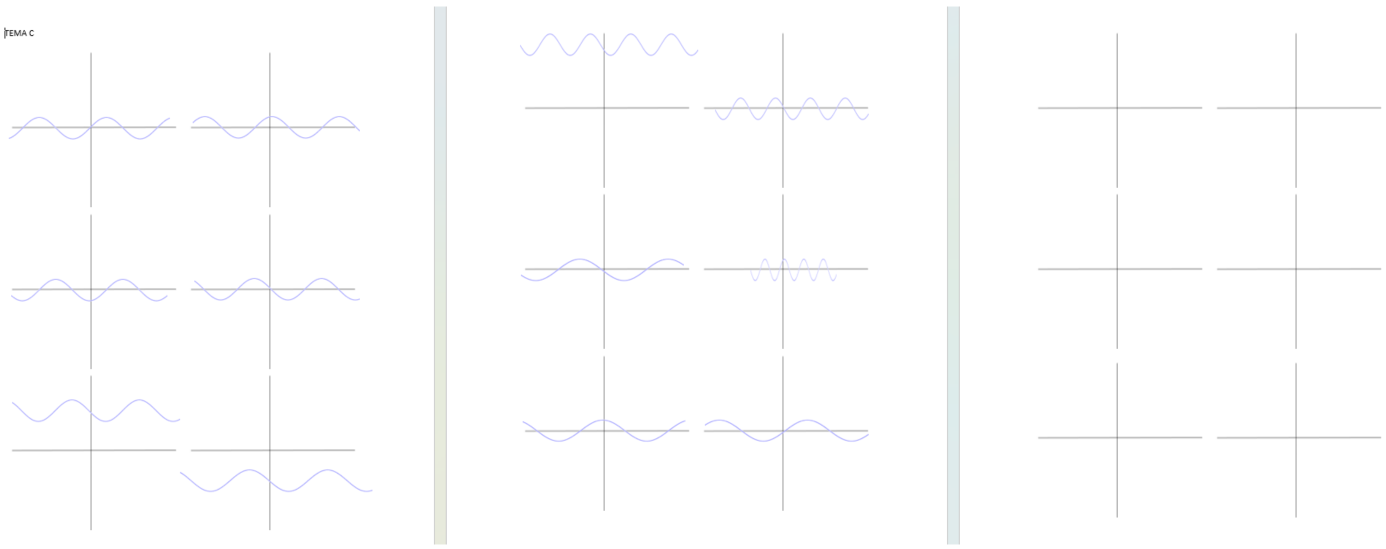
b. TEMA B

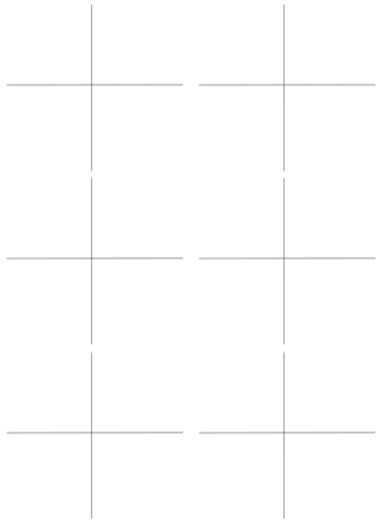






c. TEMA C





Ver el siguiente enlace para mejor calidad del documento:
https://drive.google.com/drive/folders/1gnMMxtQ1kZxpENqkHmkC_Odk19vy_LKa?usp=sharing

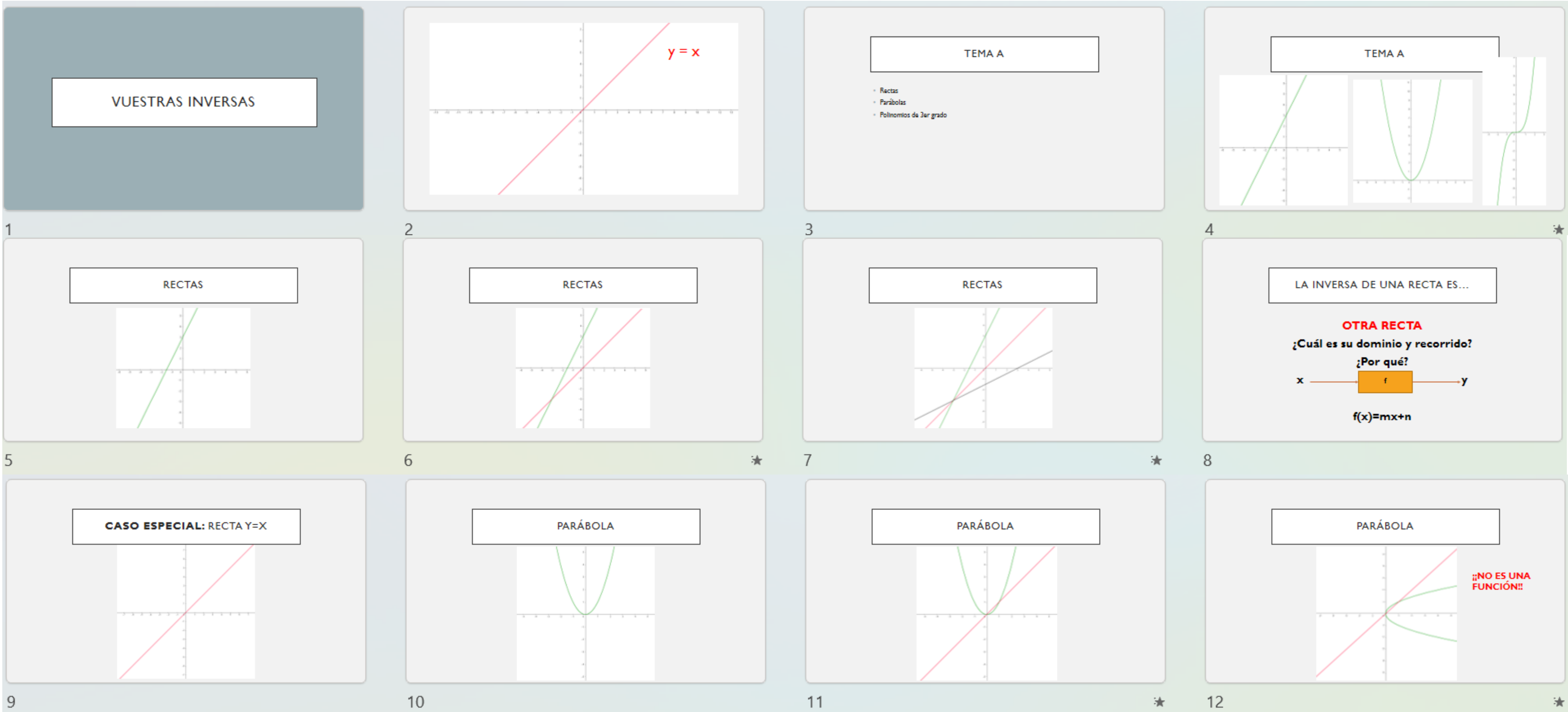
X. **ANEXO X** Entregables no realizados

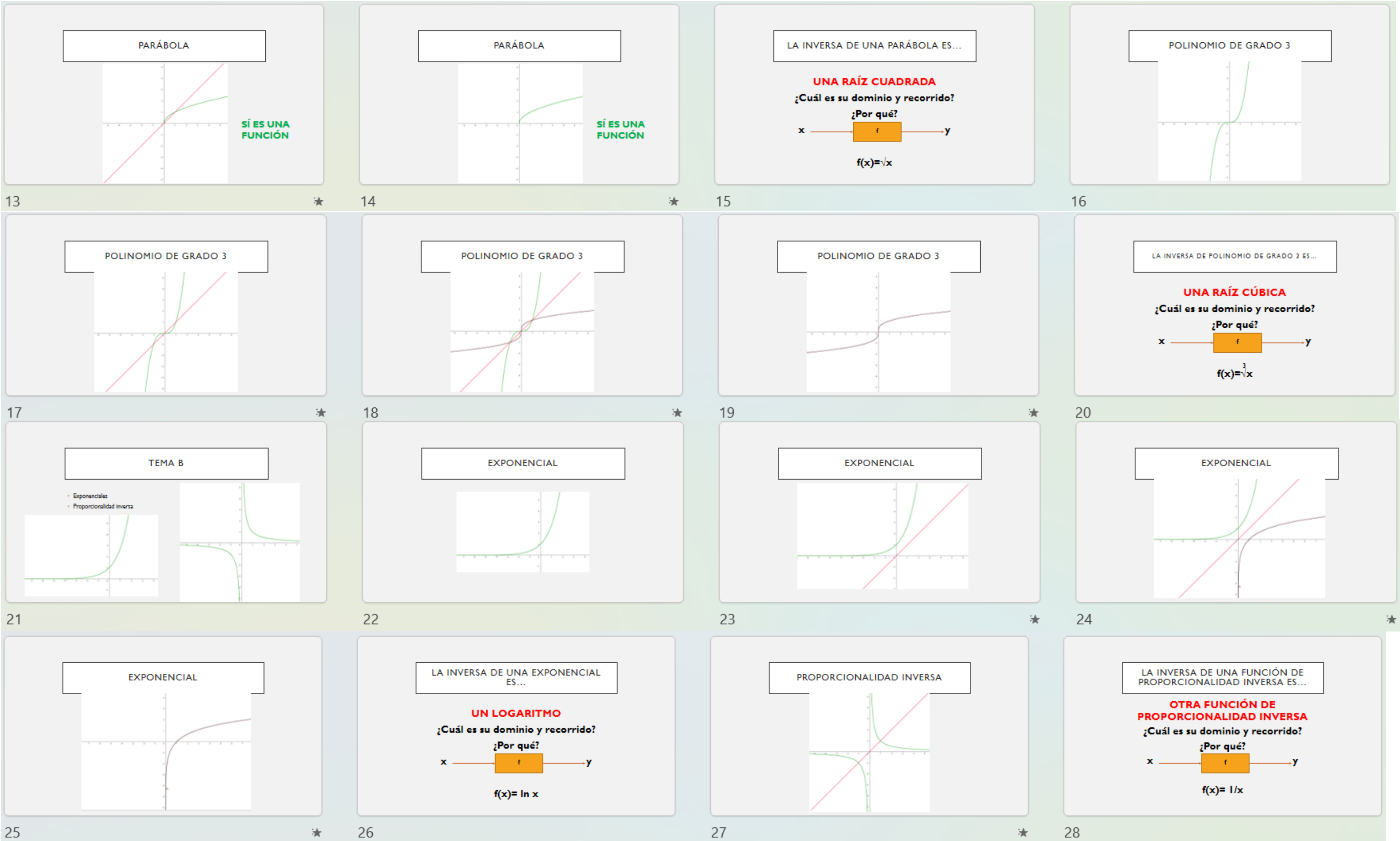
Los archivos a los cuales se puede acceder a través del siguiente link son los entregables que no se pudieron llevar a cabo debido a la ruptura con la metodología a partir de la sesión séptima pero que se planearon como parte de la situación de aprendizaje:

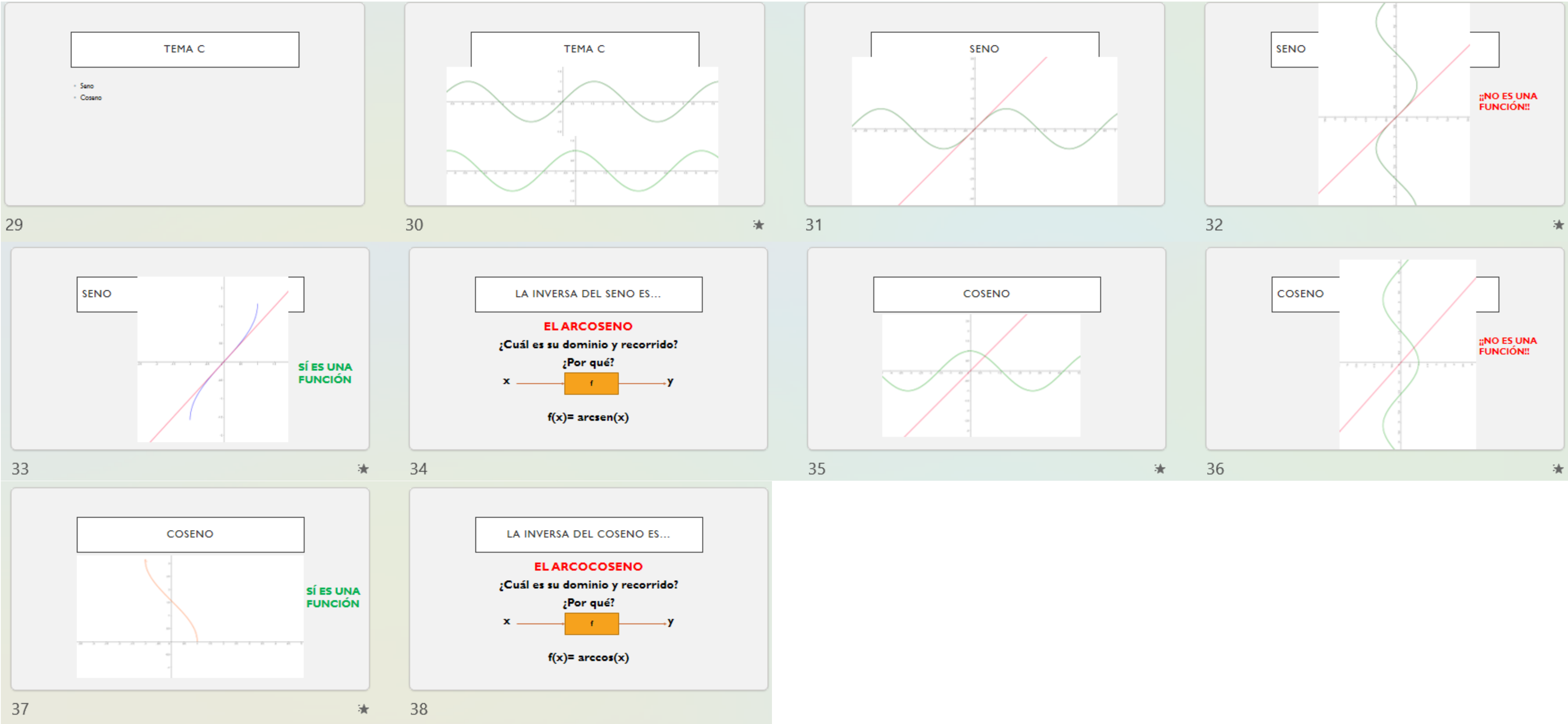
Https://drive.google.com/drive/folders/1YDkdo-ImmIoE5wmNT65ZPhjJLUhtccns?usp=sharing

XI. ANEXO XI Presentación “Inversas funciones elementales”

Véase el siguiente link para mayor calidad de imagen:
https://docs.google.com/presentation/d/1MLWqhoQMlUsSVyrhUo63SINLvR4C0DG4OSxHg_4Aac4/edit?usp=sharing




PARÁBOLA
SÍ ES UNA FUNCIÓN
13
PARÁBOLA
SÍ ES UNA FUNCIÓN
14
LA INVERSA DE UNA PARÁBOLA ES…
UNA RAÍZ CUADRADA
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)=√x
15
POLINOMIO DE GRADO 3
16
POLINOMIO DE GRADO 3
17
POLINOMIO DE GRADO 3
18
POLINOMIO DE GRADO 3
19
LA INVERSA DE POLINOMIO DE GRADO 3 ES…
UNA RAÍZ CÚBICA
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)=∛x
20
TEMA B
Exponenciales
Proporcionalidad inversa
21
EXPONENCIAL
22
EXPONENCIAL
23
EXPONENCIAL
24
EXPONENCIAL
25
LA INVERSA DE UNA EXPONENCIAL ES…
UN LOGARITMO
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)= ln x
26
PROPORCIONALIDAD INVERSA
27
LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA ES…
OTRA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)= 1/x
28


TEMA C
Seno
Coseno
29
TEMA C
30
SENO
31
SENO
¡¡NO ES UNA FUNCIÓN!!
32
SENO
SÍ ES UNA FUNCIÓN
33
LA INVERSA DEL SENO ES…
EL ARCOSENO
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)= arcsen(x)
34
COSENO
35
COSENO
¡¡NO ES UNA FUNCIÓN!!
36
COSENO
SÍ ES UNA FUNCIÓN
37
LA INVERSA DEL COSENO ES…
EL ARCOCOSENO
¿Cuál es su dominio y recorrido?
¿Por qué?
x
f
y
f(x)= arccos(x)
38

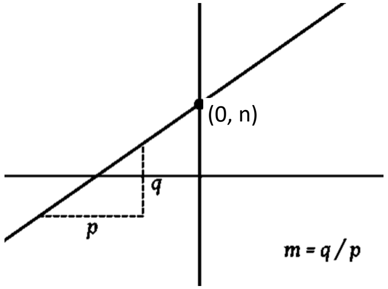
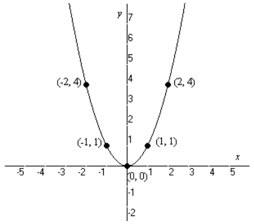
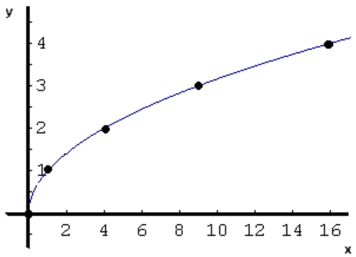
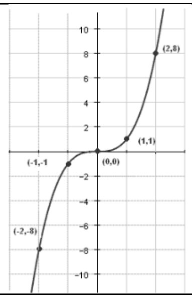
XII. ANEXO XII Tabla final

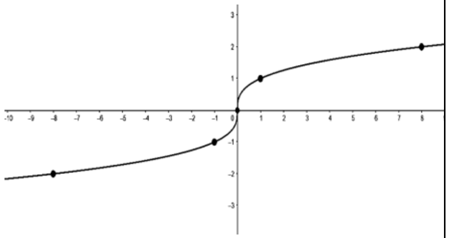
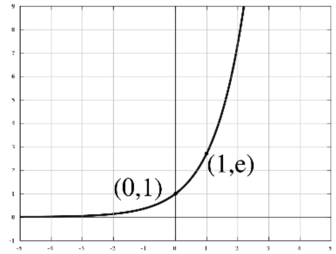
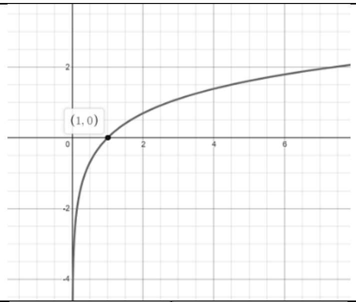
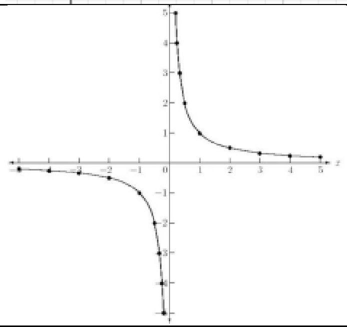
NOMBRE y ECUACIÓN	GRÁFICA	DOMINIO	RECORRIDO	OX $y = 0$	OY $x = 0$	SIMETRÍA	PERIODICIDAD y PERIODO (T)
Recta							
Parábola							
Función raíz cuadrada							
Polinomio grado 3							

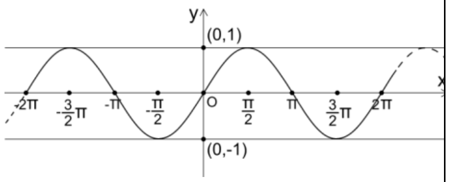
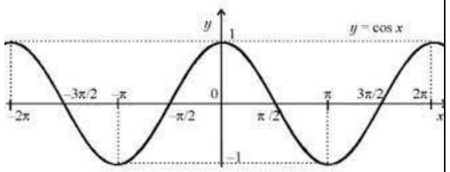
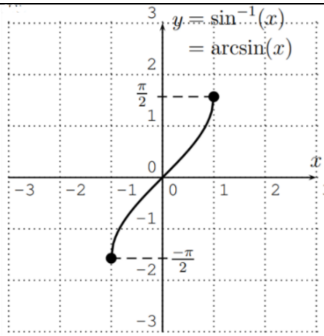
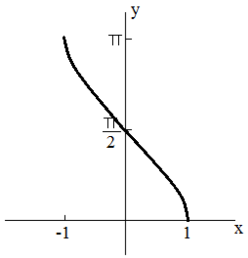
Función raíz cúbica							
Función exponencial							
Función logarítmica							
Función de proporcionalidad inversa							

Función seno							
Función coseno							
Función arcoseno							
Función arcocoseno							

XIII. ANEXO XIII Soluciones tabla final

NOMBRE y ECUACIÓN	GRÁFICA	DOMINIO	RECORRIDO	OX $y = 0$	OY $x = 0$	SIMETRÍA	PERIODICIDAD y PERIODO (T)
Recta $y = mx + n$		$Dom\ (f) = \mathbb{R}$	**Si $m \neq 0$:** $Im\ (f) = \mathbb{R}$ **Si $m = 0$:** $Im\ (f) = n$	$OX = (-\frac{n}{m}, 0)$	$OY = (0, n)$	**Si $n = 0$:** Simetría impar **Si $m = 0$:** Simetría par **Si $m = n = 0$:** Simetría par e impar	**Si $m = 0$:** $T \in (0, \infty)$ **Si $m \neq 0$:** No hay periodicidad
Parábola $y = x^2$		$Dom\ (f) = \mathbb{R}$	$Im\ (f) = [0, \infty)$	$OX = (0,0)$	$OY = (0,0)$	Simetría par	NO
Función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$		$Dom\ (f) = [0, \infty)$	$Im\ (f) = [0, \infty)$	$OX = (0,0)$	$OY = (0,0)$	NO	NO
Polinomio grado 3 $y = x^3$		$Dom\ (f) = \mathbb{R}$	$Im\ (f) = \mathbb{R}$	$OX = (0,0)$	$OY = (0,0)$	Simetría impar	NO

NOMBRE y ECUACIÓN	**GRÁFICA**	**DOMINIO**	**RECORRIDO**	**OX** $\boldsymbol{y=0}$	**OY** $\boldsymbol{x=0}$	**SIMETRÍA**	**PERIODICIDAD y PERIODO (T)**
Función raíz cúbica $y=\sqrt[3]{x}$		$Dom\,(f)=\mathbb{R}$	$Im\,(f)=\mathbb{R}$	$OX=(0{,}0)$	$OY=(0{,}0)$	Simetría impar	NO
Función exponencial $y=e^x$		$Dom\,(f)=\mathbb{R}$	$Im\,(f)=(0,\infty)$	NO	$OY=(0{,}1)$	NO	NO
Función logarítmica $y=\ln x$		$Dom\,(f)=(0,\infty)$	$Im\,(f)=\mathbb{R}$	$OX=(1{,}0)$	NO	NO	NO
Función de proporcionalidad inversa $y=\dfrac{1}{x}$		$Dom\,(f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$Im\,(f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$	NO	NO	Simetría impar	NO

NOMBRE y ECUACIÓN	GRÁFICA	DOMINIO	RECORRIDO	OX $y = 0$	OY $x = 0$	SIMETRÍA	PERIODICIDAD y PERIODO (T)
Función seno $y = \sin x$		$Dom\ (f) = \mathbb{R}$	$Im\ (f) = [-1{,}1]$	$OX = (k\pi, 0)$ $k \in Z$	$OY = (0{,}0)$	Simetría impar	$T = 2\pi$
Función coseno $y = \cos x$		$Dom\ (f) = \mathbb{R}$	$Im\ (f) = [-1{,}1]$	$OX = ((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$ $k \in Z$	$OY = (0{,}1)$	Simetría par	$T = 2\pi$
Función arcoseno $y = \arcsin x$		$Dom\ (f) = [-1{,}1]$	$Im\ (f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$OX = (0{,}0)$	$OY = (0{,}0)$	Simetría impar	NO
Función arcocoseno $y = \arccos x$		$Dom\ (f) = [-1{,}1]$	$Im\ (f) = [0, \pi]$	$OX = (1{,}0)$	$OY = (0, \frac{\pi}{2})$	NO	NO

XIV. ANEXO XIV Documento repaso "Cortes con los ejes"

Las rectas son de la forma $\boxed{y = mx + n}$

Para buscar el punto de $\overbrace{\text{corte con el eje X}}^{OX}$ hacemos que $\boxed{y=0}$

Por lo tanto: $0 = mx + n$

Ahora hay que buscar cuánto vale x, así que la despejamos:

$0 = mx + n \Rightarrow mx = -n \Rightarrow \boxed{x = \frac{-n}{m}}$

Ya sabemos que $\boxed{OX = \left(-\frac{n}{m}, 0\right)}$.

Por ejemplo, si tenemos la recta $y = 3x - 6 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -6 \end{cases}$

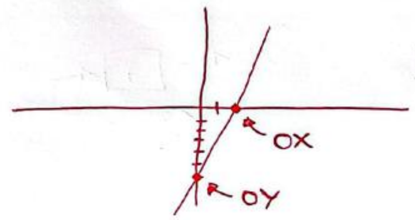
Así que: $\boxed{OX = \left(-\frac{(-6)}{3}, 0\right) = (2, 0)}$

Para buscar el $\underbrace{\text{corte con el eje y}}_{OY}$ hacemos que $\boxed{x=0}$

Por lo tanto: $y = m \cdot \cancel{0} + n \Rightarrow \boxed{y = n}$

Ya sabemos que $\boxed{OY = (0, n)}$

Si seguimos con el ejemplo anterior $(y = 3x - 6) \Rightarrow \boxed{OY = (0, -6)}$



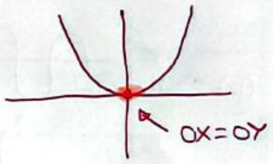
Cortes con los ejes:

$\begin{cases} OX: \text{corte con el eje X, para lo cual se tiene que cumplir que } y=0 \\ OY: \text{corte con el eje Y, para lo cual se tiene que cumplir que } x=0. \end{cases}$

En una parábola: $\boxed{y = x^2}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = x^2 \Rightarrow \sqrt{0} = x \Rightarrow \boxed{0 = x} \Rightarrow \boxed{OX = (0,0)}$

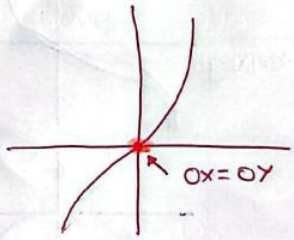
OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = 0^2 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{OY = (0,0)}$



En un polinomio de grado 3: $\boxed{y = x^3}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{0} = x \Rightarrow \boxed{0 = x} \Rightarrow \boxed{OX = (0,0)}$

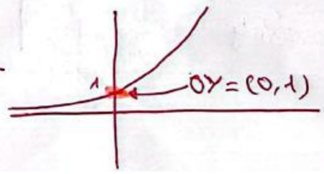
OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = 0^3 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{OY = (0,0)}$



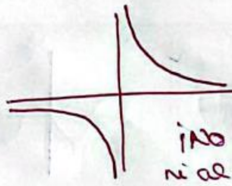
En una exponencial: $\boxed{y = e^x}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = e^x \Rightarrow$ No hay solución $\Rightarrow$ No hay OX.

OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = e^0 \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \boxed{OY = (0,1)}$



En una función de proporcionalidad inversa: $\boxed{y = \frac{1}{x}}$



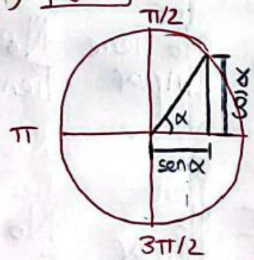
OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = \frac{1}{x} \Rightarrow$ No hay solución $\Rightarrow$ No hay OX.

OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = \frac{1}{0} \Rightarrow$ No hay solución $\Rightarrow$ No hay OY.

¡No corta ni al eje X ni al Y!

En la función seno: $\boxed{y = \text{sen}\, x}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = \text{sen}\, x \Rightarrow$ ¿Qué ángulos hacen que su seno valga 0?



$x = 0$ $\quad x = 2\pi$ $\quad x = 4\pi$

$x = \pi$ $\quad x = 3\pi$ $\quad x = 5\pi$ $\quad \dots$ $\quad \Big\} \boxed{x = k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$

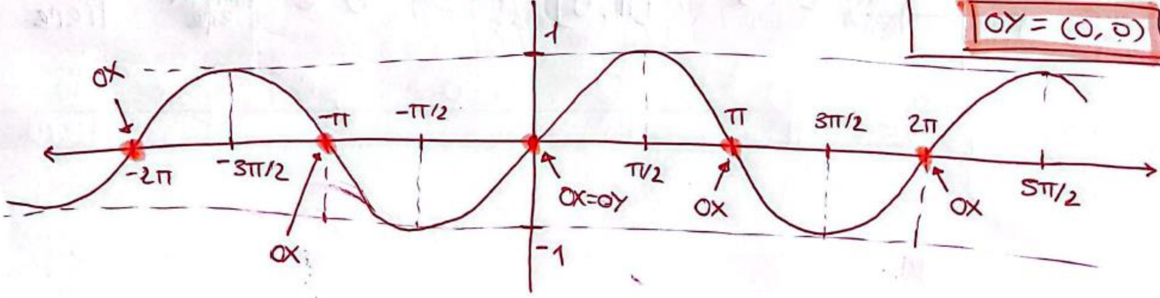
$0 \equiv 2\pi$ $\quad \{ \mathbb{Z}$: números enteros $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots) \}$

$\boxed{OX = (k\pi, 0) \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$

OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = \text{sen}\, 0$

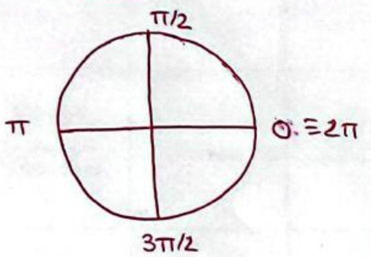
$\Rightarrow \boxed{y = 0}$

$\boxed{OY = (0, 0)}$



En la función coseno: $\boxed{y = \cos x}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = \cos x \Rightarrow$ ¿Qué ángulos hacen que su coseno valga 0?



$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = \frac{5\pi}{2}$ $\quad x = \frac{9\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad x = \frac{7\pi}{2}$ $\quad x = \frac{11\pi}{2}$ $\quad \dots$

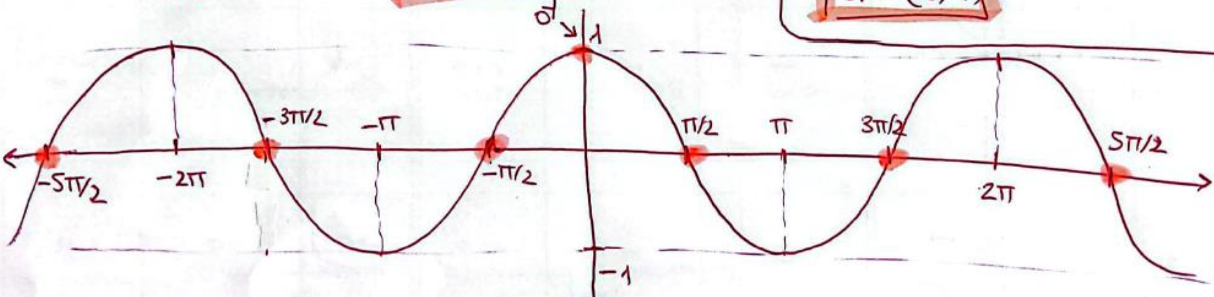
Nºs impares

$\boxed{x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{OX = \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0 \right)}$

OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = \cos 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

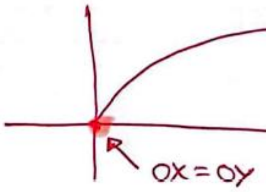
$\boxed{OY = (0, 1)}$

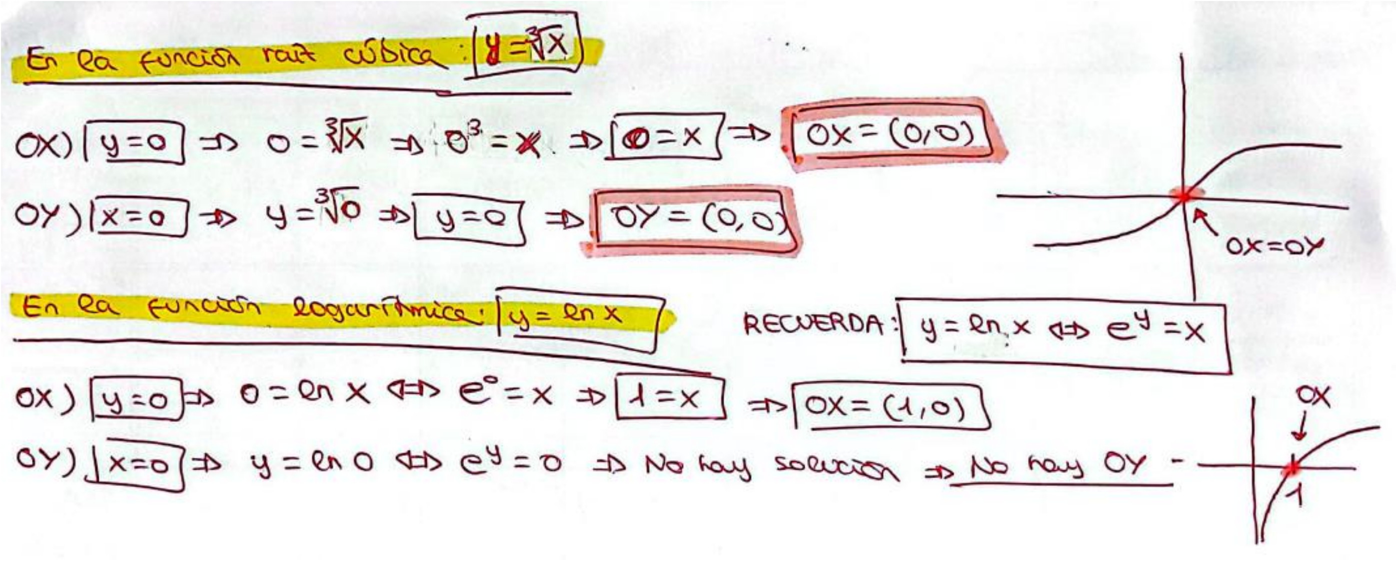


En la función raíz cuadrada $\boxed{y = \sqrt{x}}$

OX) $\boxed{y=0} \Rightarrow 0 = \sqrt{x} \Rightarrow 0^2 = x \Rightarrow \boxed{0 = x} \Rightarrow \boxed{OX = (0,0)}$

OY) $\boxed{x=0} \Rightarrow y = \sqrt{0} \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{OY = (0,0)}$





XV. ANEXO XV Respuestas alumnado tabla final

Véase el siguiente link:
https://drive.google.com/file/d/135Is88yDINlP-YS0XFGwN00oCBGrX-bK/view?usp=share_link

XVI. ANEXO XVI Correcciones alumnado tabla final

Véase el siguiente link:
https://drive.google.com/file/d/1wBv5scCnX9NUSPgzaJyrmk66LOs2gKjY/view?usp=share_link

XVII. ANEXO XVII Respuestas alumnado examen

Véase el siguiente link:
https://drive.google.com/file/d/1s0pSemh_KDBITvFet9ZS6R3s_9DB_2nG/view?usp=sharing

XVIII. ANEXO XVIII Correcciones alumnado examen

Véase el siguiente link:
https://drive.google.com/file/d/1754b0St_UeDCH5zsZ5b9YLu41L1sAEQA/view?usp=sharing

XIX. ANEXO XIX Examen

MATEMÁTICAS	CURSO 2022 - 2023	
IES NAVARRO VILLOSLADA	**NOMBRE Y APELLIDOS:**	
	CURSO Y GRUPO: 4° BC	**FECHA: 22/05/2023**
	UD 7, 8 y 9. - FUNCIONES	**3ª EVALUACIÓN**

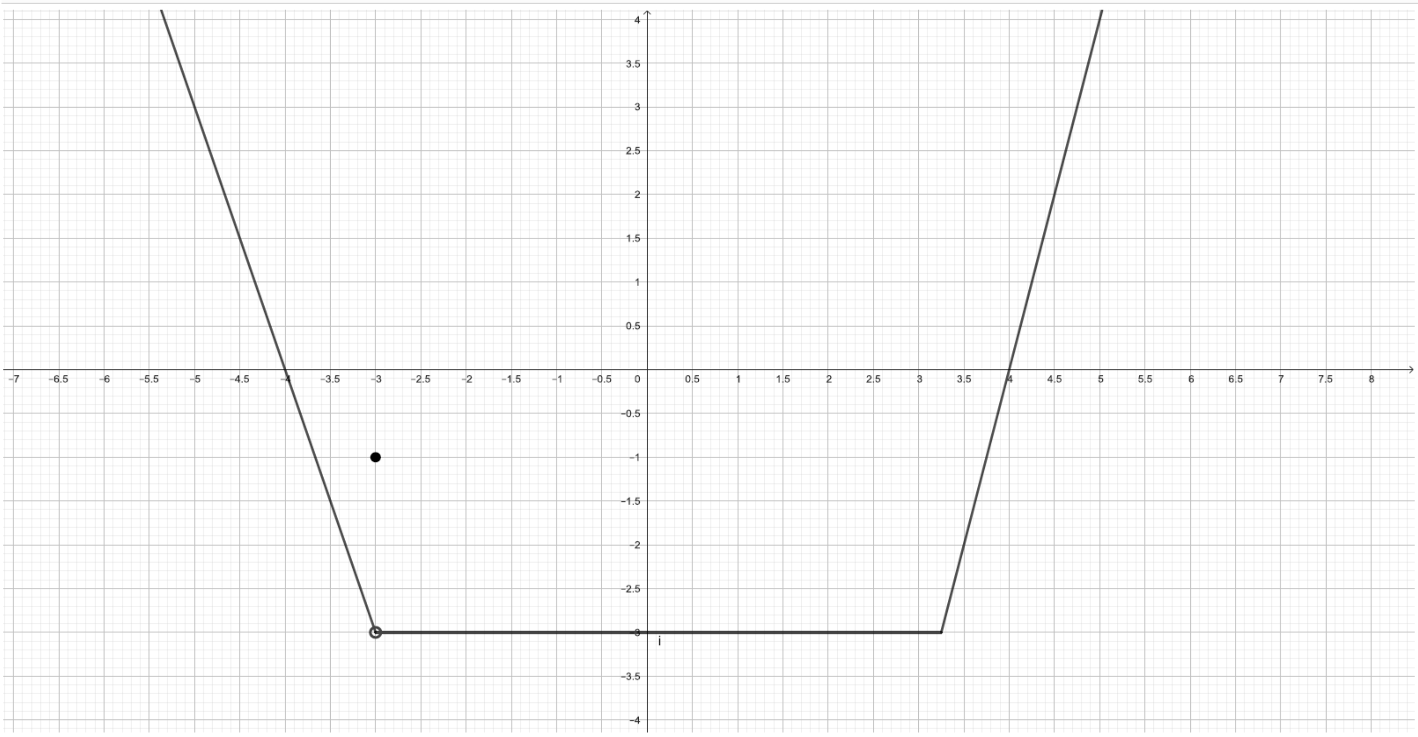
CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES

1. Indica el dominio de las siguientes funciones: **(1 pto.)**

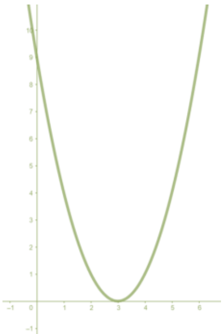
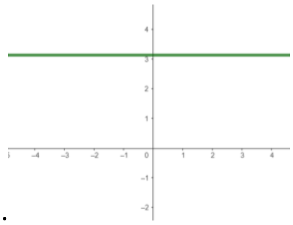
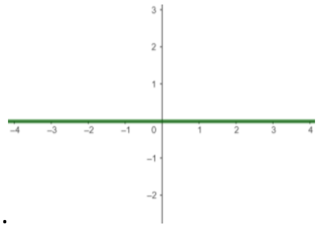
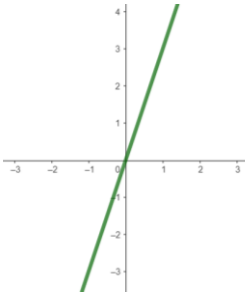
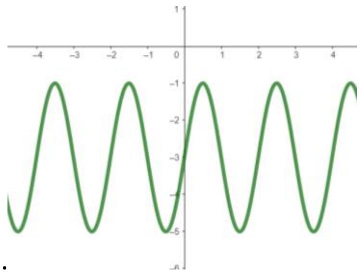
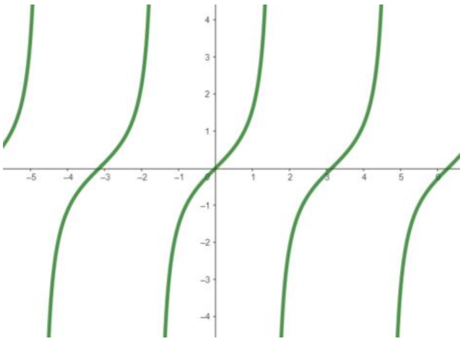
a) $f(x) = \frac{x}{7-x^2}$ (0.5 ptos.)

b) $g(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ (0.5 ptos.)

2. Indica la expresión analítica de la siguiente función definida a trozos. (¡Ojo! Cuidado con la escala en los ejes.) ¿Hay algún tipo de discontinuidad? Si es así, indica de qué tipo.
(1.1 ptos.)



3. RELLENA LA TABLA: Estudia la paridad de las siguientes funciones. Si sí la tienen, indica de qué tipo es. Indica también si son o no periódicas. De serlo, marca su período en el propio dibujo. **(1.3 ptos.)**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

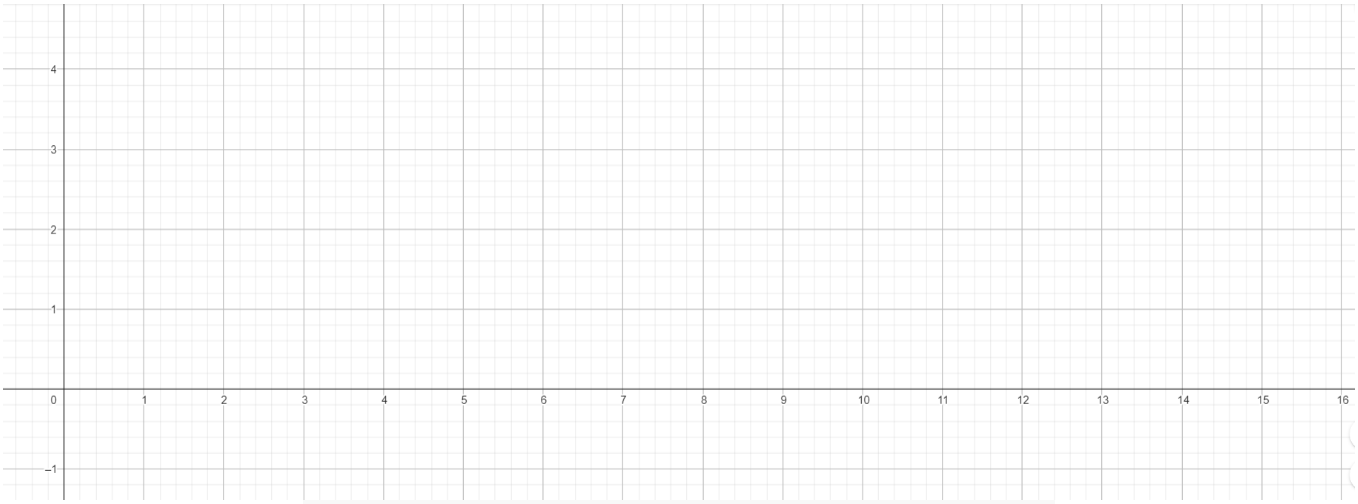
	¿PARIDAD? (TIPO)	¿PERIÓDICA? (MARCA EL PERÍODO)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

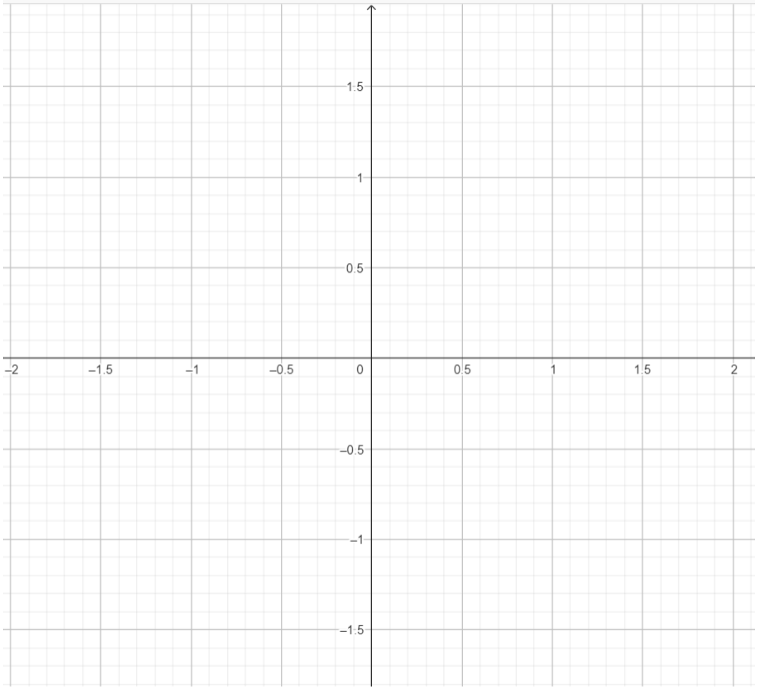
4. RELLENA LA TABLA: Indica el dominio, recorrido y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. **(3.3 ptos.)**

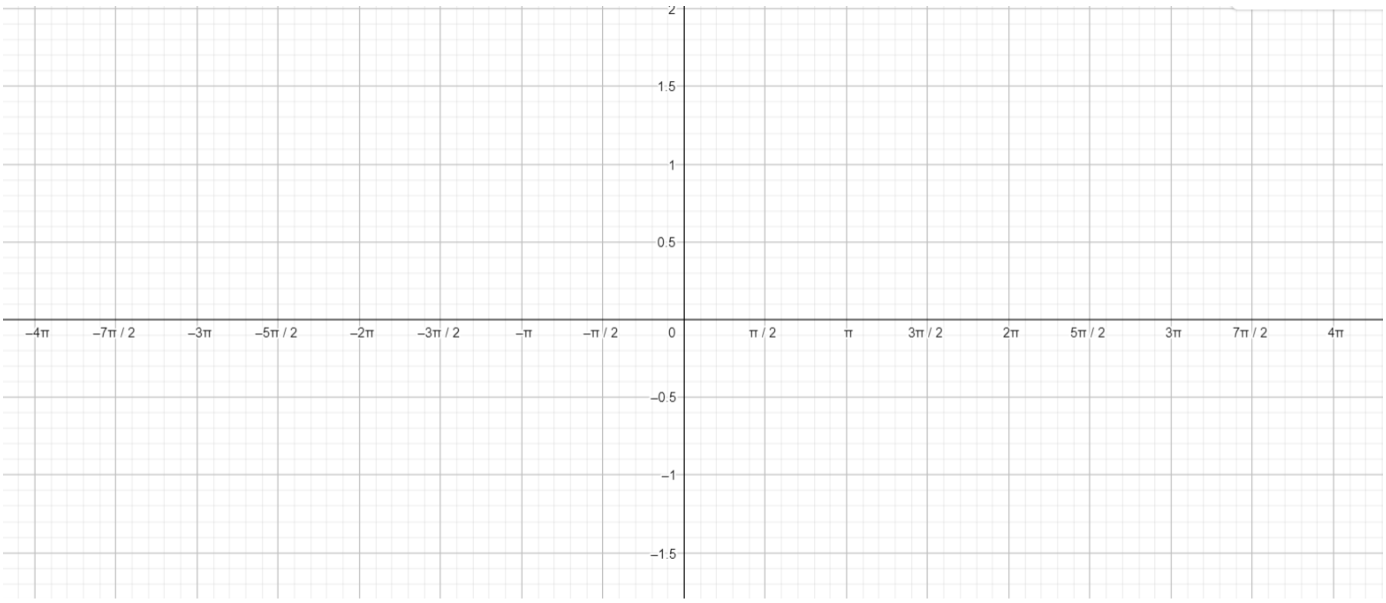
		DOMINIO	RECORRIDO	OX	OY
1	$y = -3x + 2$				
2	$y = 2^x$				
3	$y = \sin x$				
4	$y = \sqrt{x}$				
5	$y = \log_2 x$				
6	$y = \dfrac{1}{x}$				

¿Cuál es la inversa de la función 2? ¿Y de la 6?

5. Dibuja a mano alzada la gráfica de las funciones 3, 4 y 6 del ejercicio anterior. Usa los ejes que más te convengan para cada función. **(1.5 ptos)**



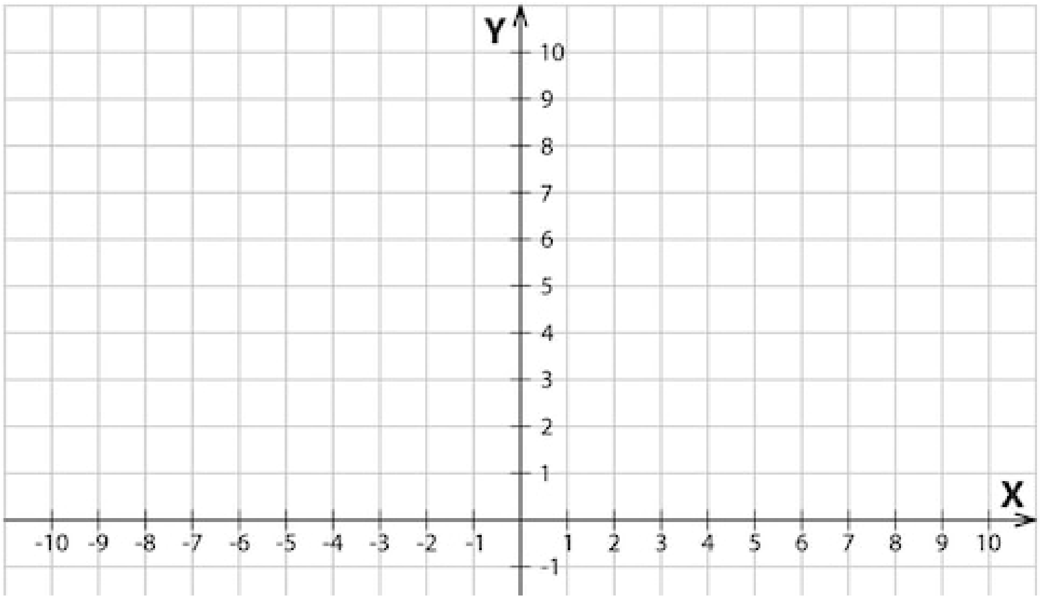




CONOCIMIENTOS DE EXPERTOS

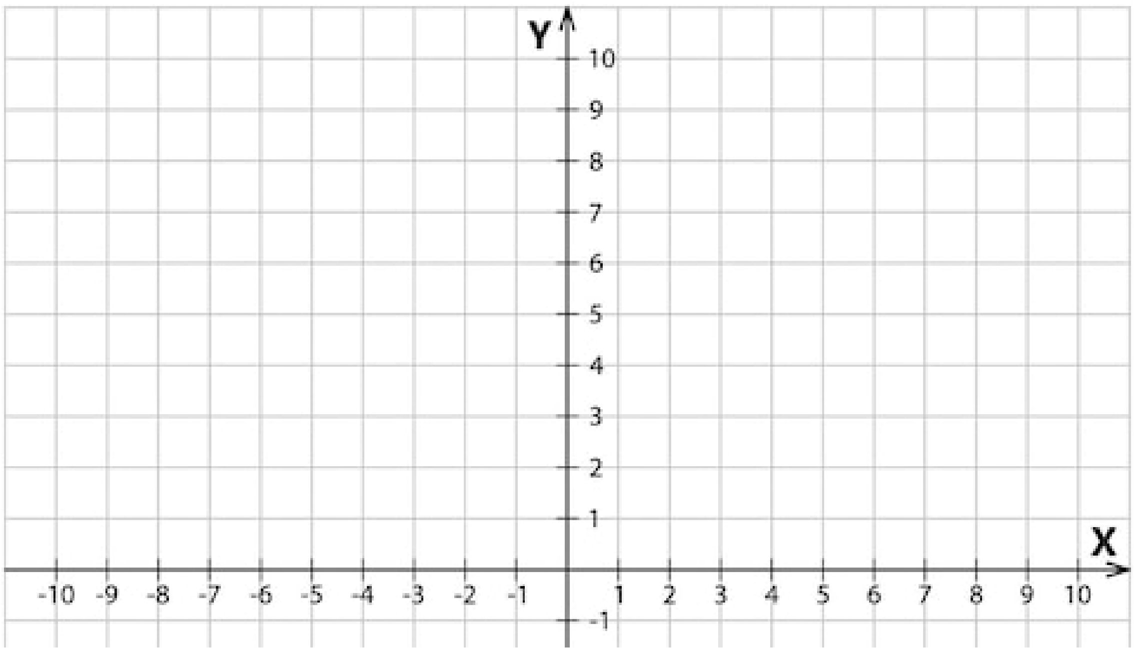
6. Dibuja las siguientes funciones con un color distinto pero usando la misma cuadrícula. Trata de explicar qué está ocurriendo. **(1.8 ptos.)**

$$y = x^2 \qquad y = (x+1)^2 \qquad y = x^2 + 1$$

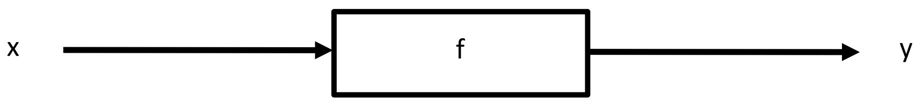


Repite el mismo proceso con las siguientes funciones y explica qué ocurre.

$$y = x^2 \qquad y = 2x^2$$



Pista: Piensa en qué entra en la caja, y qué sale.



XX. ANEXO XX Soluciones y puntuación examen

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES

1. Indica el dominio de las siguientes funciones: **(1 pto.)**

c) $f(x) = \frac{x}{7-x^2}$ (0.5 ptos.)

Conflictos: $7 - x^2 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 = 7$ $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{7}$

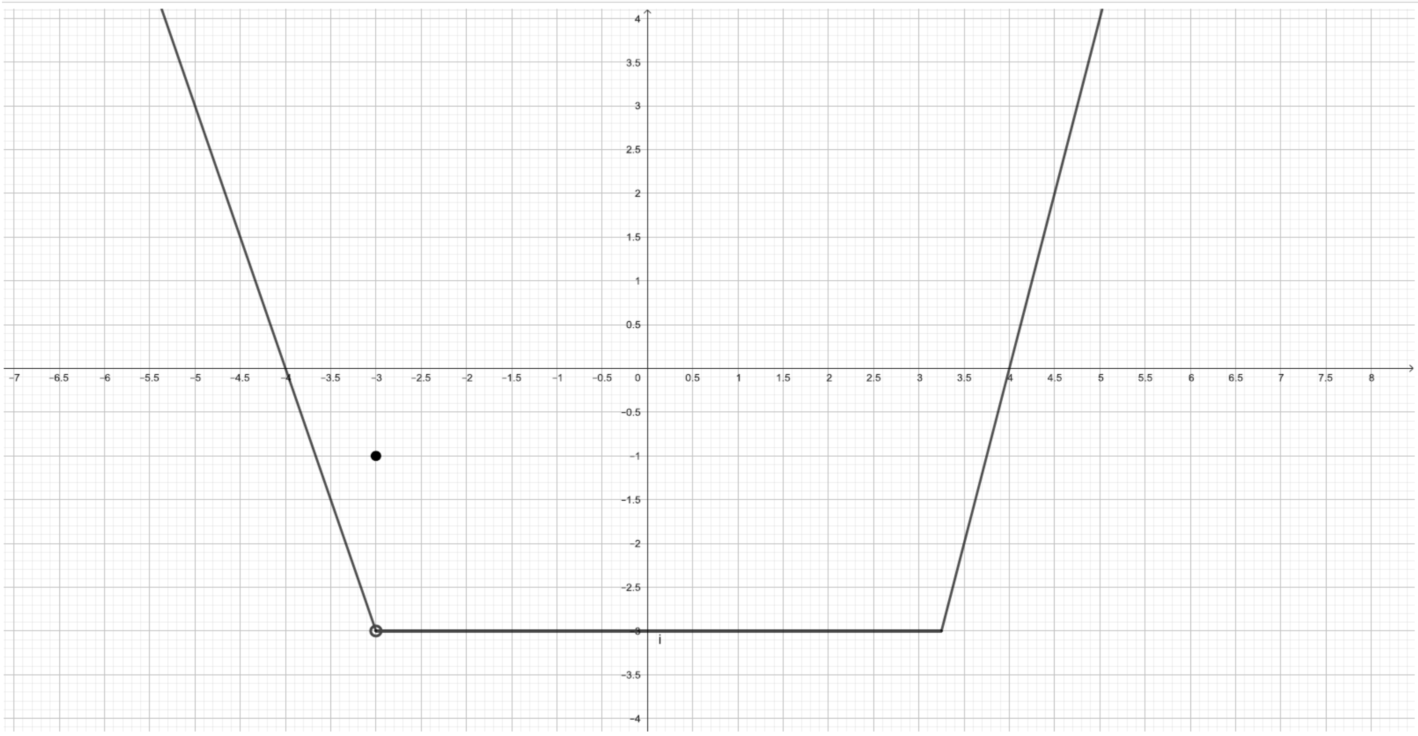
$$Dom\ (f) = \mathbb{R} \backslash \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

d) $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ (0.5 ptos.)

Conflictos: $3 + 2x - x^2 < 0$ $\rightarrow$ $3 + 2x - x^2 = 0$
$\rightarrow$ $x_1 = -1;\ x_2 = 3$

$$Dom\ (g) = [-1, 3]$$

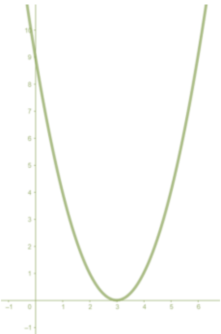
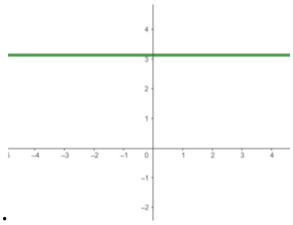
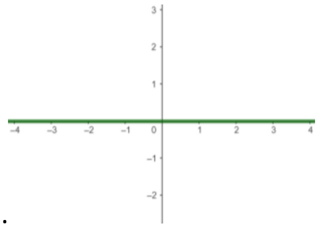
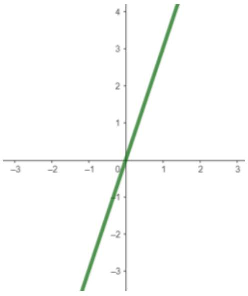
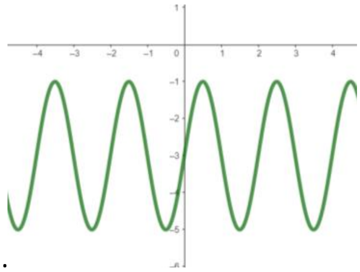
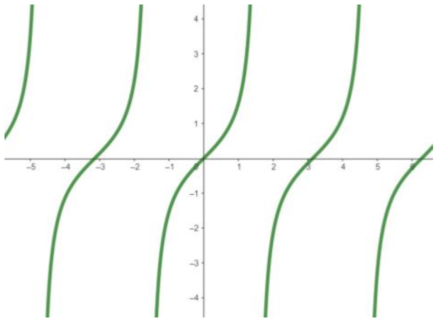
2. Indica la expresión analítica de la siguiente función definida a trozos. (¡Ojo! Cuidado con la escala en los ejes.) ¿Hay algún tipo de discontinuidad? Si es así, indica de qué tipo. **(1.1 ptos.)**



$$f(x) = \begin{cases} -3x - 12 & si\ x < -3 & (0.25\ \text{ptos.}) \\ -1 & si\ x = -3 & (0.25\ \text{ptos.}) \\ -3 & si\ -3 < x < \dfrac{13}{4} & (0.25\ \text{ptos.}) \\ 4x - 16 & si\ x \geq \dfrac{13}{4} & (0.25\ \text{ptos.}) \end{cases}$$

Tipo de discontinuidad: EVITABLE (0.1 ptos.)

3. RELLENA LA TABLA: Estudia la paridad de las siguientes funciones. Si sí la tienen, indica de qué tipo es. Indica también si son o no periódicas. De serlo, marca su período en el propio dibujo. **(1.3 ptos.)**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

	¿PARIDAD? (TIPO)	¿PERIÓDICA? (MARCA EL PERÍODO)
1	NO (0.1 ptos.)	NO (0.1 ptos.)
2	PAR (0.1 ptos.)	SÍ (0.1 ptos.)
3	PAR (0.1 ptos.) IMPAR (0.1 ptos.)	SÍ (0.1 ptos.)
4	IMPAR (0.1 ptos.)	NO (0.1 ptos.)
5	NO (0.1 ptos.)	SÍ (0.1 ptos.)
6	IMPAR (0.1 ptos.)	SÍ (0.1 ptos.)

4. RELLENA LA TABLA: Indica el dominio, recorrido y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. **(3.3 ptos.)**

		DOMINIO	RECORRIDO	OX	OY
1	$y = -3x + 2$	$Dom\,(f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$OX = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 2)$ (0.12 ptos.)
2	$y = 2^x$	$Dom\,(f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = (0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 1)$ (0.12 ptos.)
3	$y = \sin x$	$Dom\,(f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = [-1, 1]$ (0.12 ptos.)	$OX = (k\pi, 0);\ \ k \in Z$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 0)$ (0.12 ptos.)
4	$y = \sqrt{x}$	$Dom\,(f) = [0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = [0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$OX = (0, 0)$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 0)$ (0.12 ptos.)
5	$y = \log_2 x$	$Dom\,(f) = (0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$OY = (1, 0)$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)
6	$y = \frac{1}{x}$	$Dom\,(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (0.12 ptos.)	$Im\,(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)

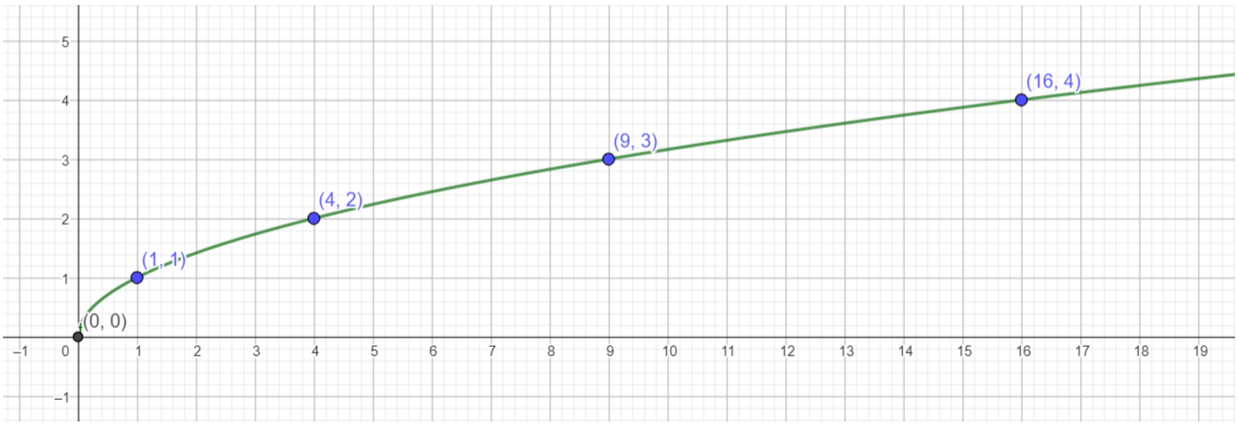
¿Cuál es la inversa de la función 2?

La función 5. (0.21 ptos.)

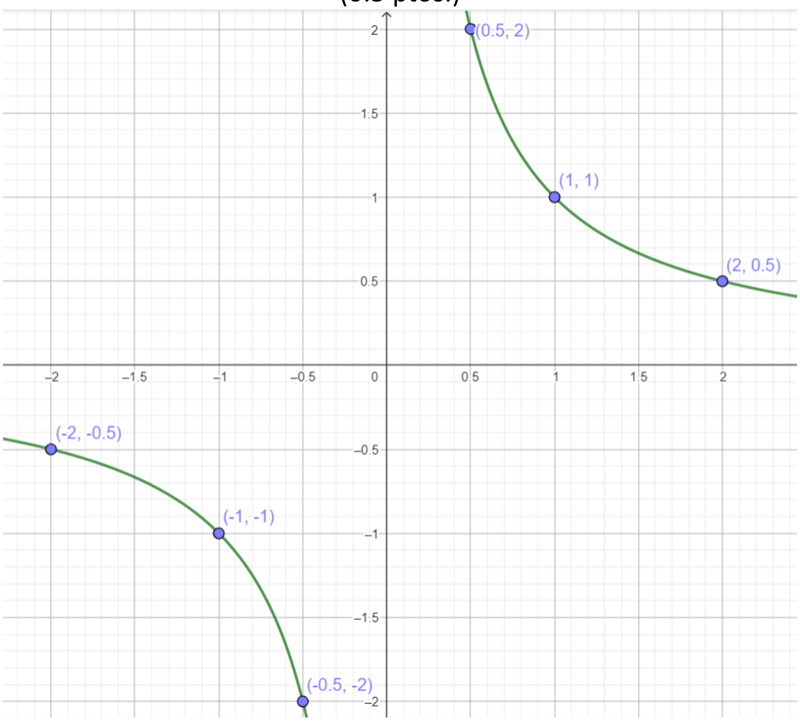
¿Y de la 6?

Ella misma. (0.21 ptos.)

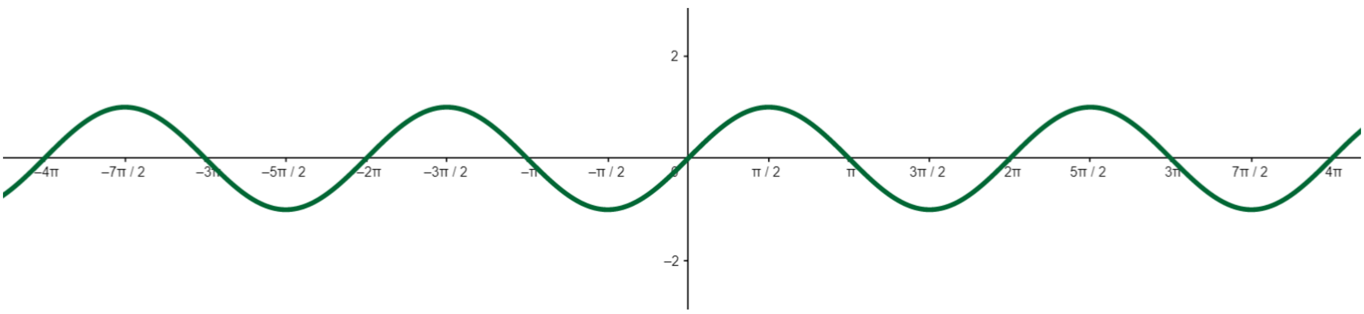
5. **Dibuja a mano alzada la gráfica de las funciones 3, 4 y 6 del ejercicio anterior. Usa los ejes que más te convengan para cada función. (1.5 ptos)**



(0.5 ptos.)



(0.5 ptos.)



(0.5 ptos.)

CONOCIMIENTOS DE EXPERTOS

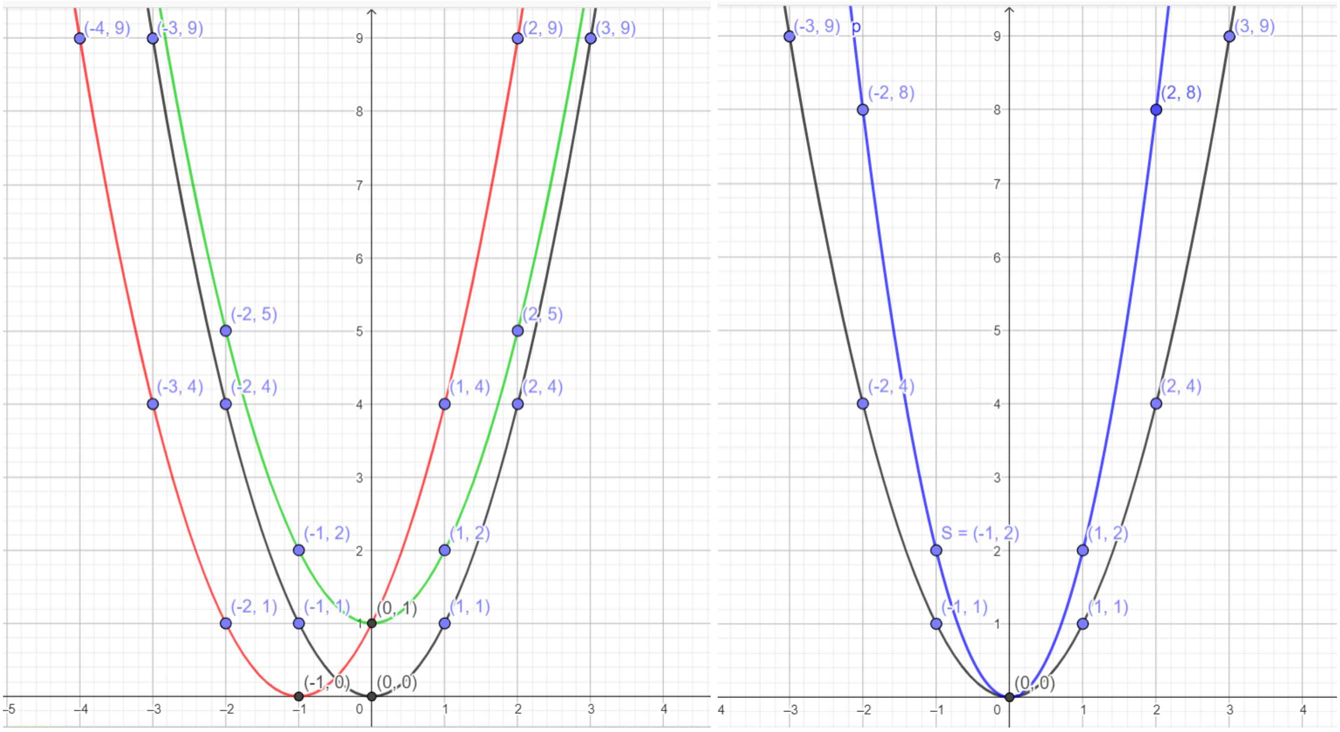
6. Dibuja las siguientes funciones con un color distinto pero usando la misma cuadrícula.

$y = x^2$	$y = (x+1)^2$	$y = x^2 + 1$
(0.3 ptos.)	(0.3 ptos.)	(0.3 ptos.)

Repite el mismo proceso con las siguientes funciones y explica qué ocurre. (1.8 ptos.)

$y = x^2$ $\qquad$ $y = 2x^2$

(0.3 ptos.)

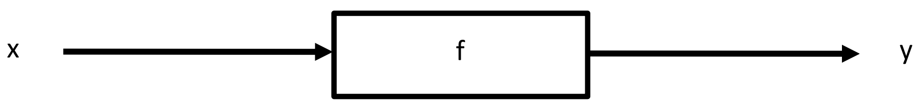


Trata de explicar qué está ocurriendo.

"Parece que la parábola negra se mueve hacia la izquierda una unidad cuando dibujas la función roja, y hacia arriba una unidad cuando dibujas la función verde." (0.3 ptos.)

"Parece que la parábola azul está contraída, encogida, achatada… con respecto a la parábola negra." (0.3 ptos.)

Pista: Piensa en qué entra en la caja, y qué sale.



XXI. ANEXO XXI Examen adaptación TDAH

MATEMÁTICAS	CURSO 2022 - 2023		
IES NAVARRO VILLOSLADA	**NOMBRE Y APELLIDOS:**		
	CURSO Y GRUPO: 4° BC	**FECHA: 22/05/2023**	
	UD 7, 8 y 9. - FUNCIONES	**3ª EVALUACIÓN**	

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES

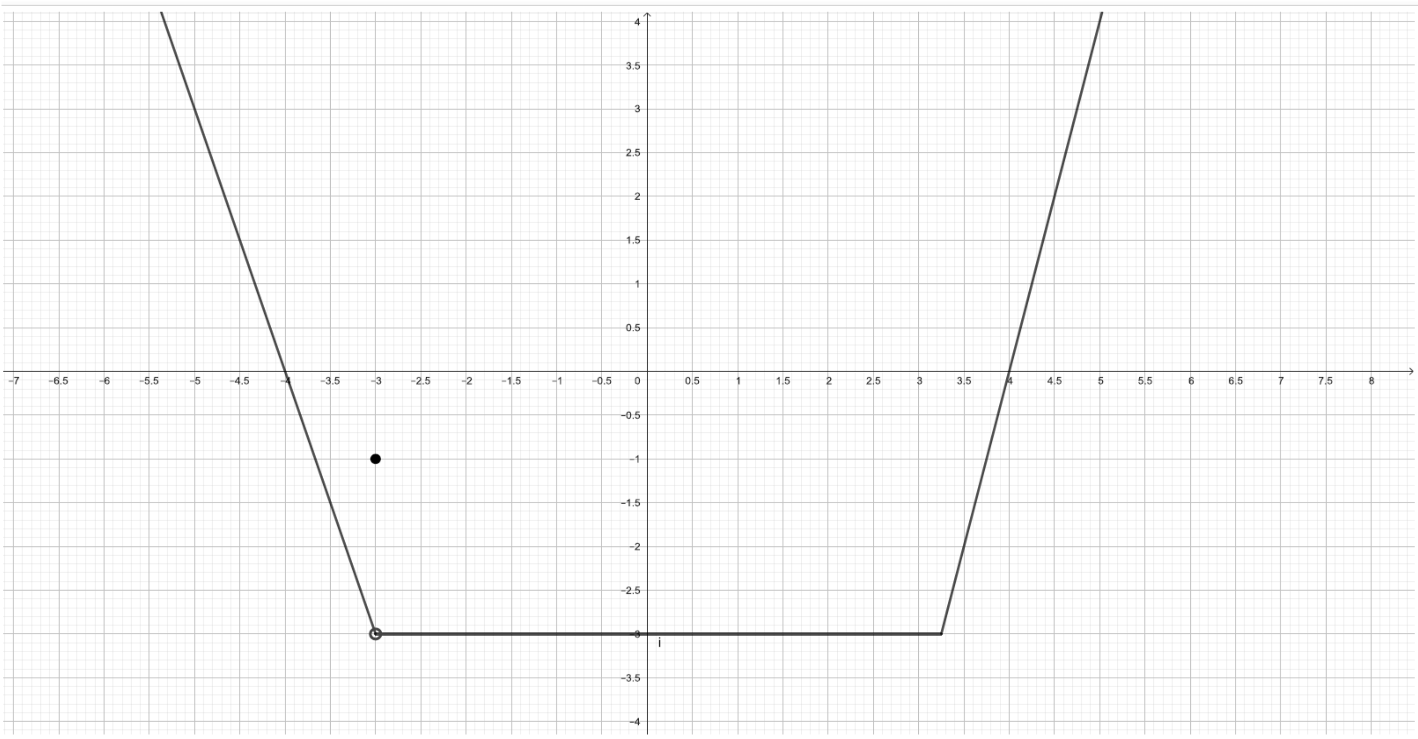
1. Indica el dominio de las siguientes funciones: **(1.2 pto.)**

e) $f(x) = \frac{x}{7-x^2}$ (0.6 ptos.)

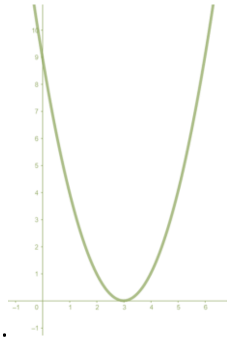
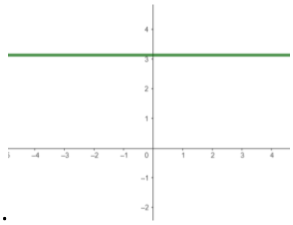
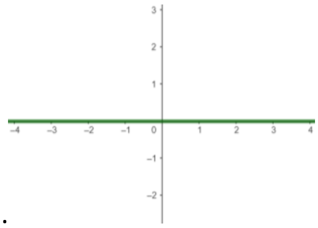
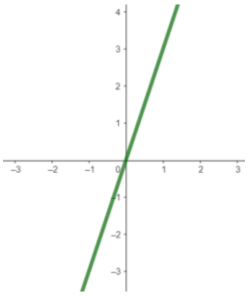
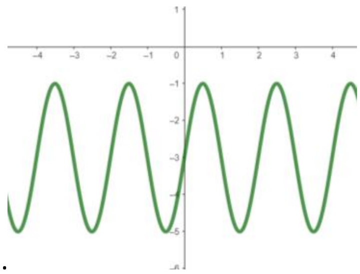
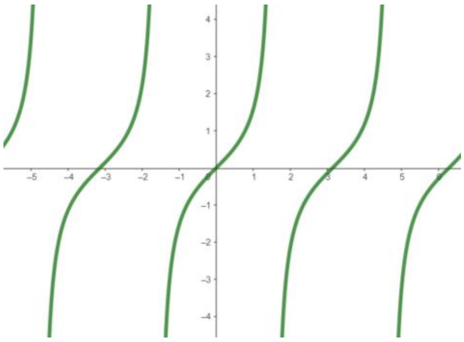
f) $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ (0.6 ptos.)

2. Indica la expresión analítica de la siguiente función definida a trozos. (¡Ojo! Cuidado con la escala en los ejes.) ¿Hay algún tipo de discontinuidad? Si es así, indica de qué tipo.

(1.6 ptos.)



3. RELLENA LA TABLA: Estudia la paridad de las siguientes funciones. Si sí la tienen, indica de qué tipo es. Indica también si son o no periódicas. De serlo, **marca su período en el propio dibujo.** **(1.9 ptos.)**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

	¿PARIDAD? (TIPO)	¿PERIÓDICA? (MARCA EL PERÍODO)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

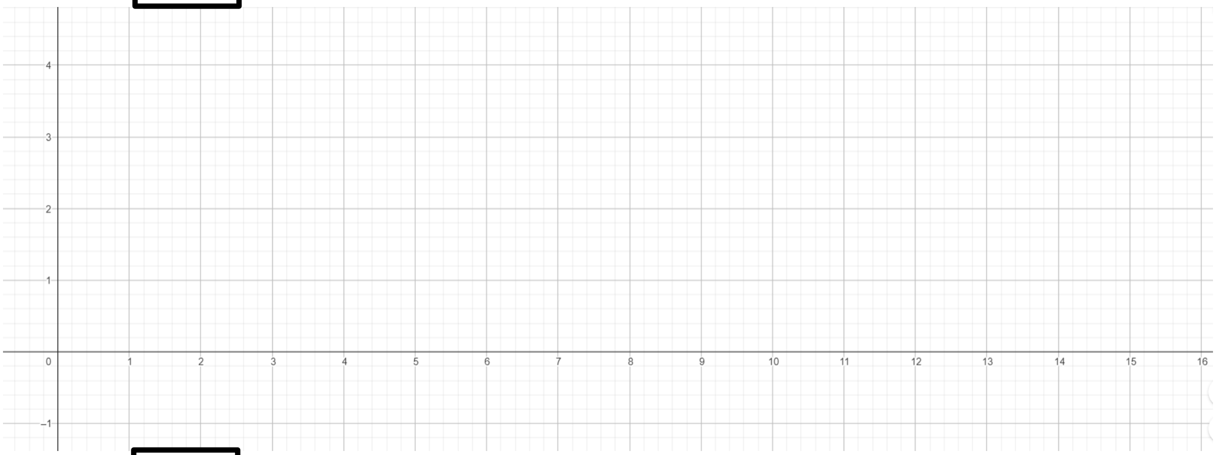
4. RELLENA LA TABLA: Indica el dominio, recorrido y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. **(3.5 ptos.)**

		DOMINIO	RECORRIDO	OX	OY
1	$y = -3x + 2$				
2	$y = 2^x$				
3	$y = \sin x$				
4	$y = \sqrt{x}$				
5	$y = \log_2 x$				
6	$y = \frac{1}{x}$				

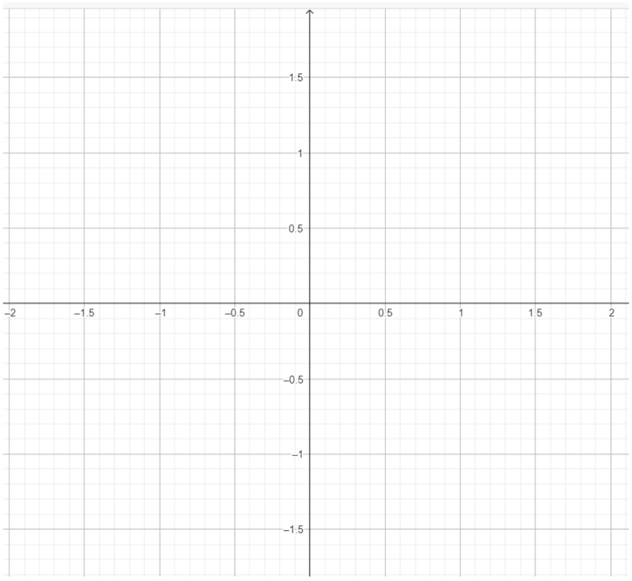
¿Cuál es la inversa de la función 2? ¿Y de la 6?

5. Dibuja a mano alzada la gráfica de las funciones 3, 4 y 6 del ejercicio anterior. **Usa los ejes que más te convengan para cada función.** **(1.8 ptos)**

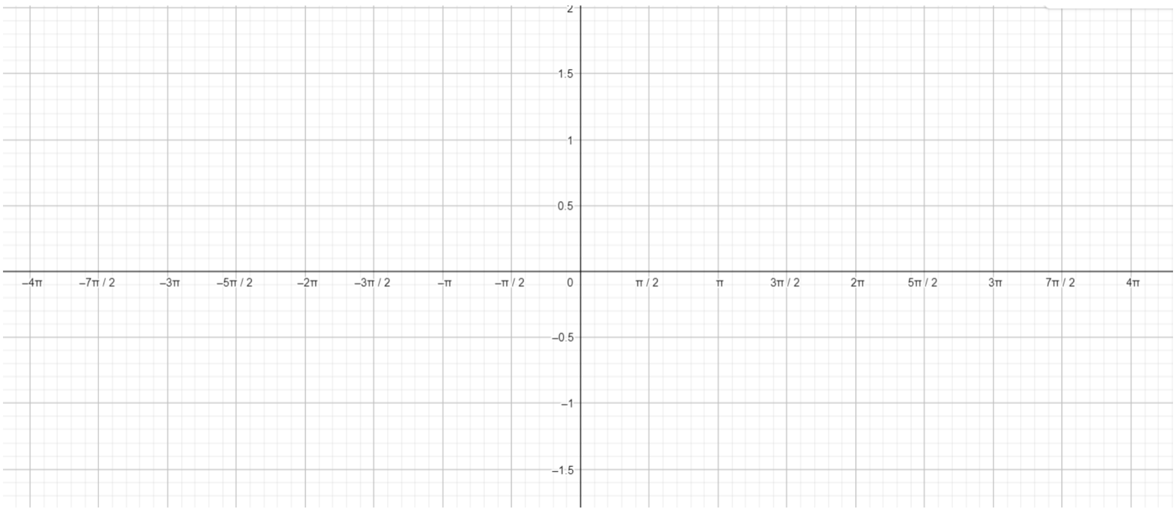
Función Nº



Función Nº



Función Nº



XXII. ANEXO XXII Soluciones y puntuación examen adaptación

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES

1. **Indica el dominio de las siguientes funciones:** **(1.2 ptos.)**

g) $f(x) = \frac{x}{7-x^2}$ (0.6 ptos.)

Conflictos: $7 - x^2 = 0$ → $x^2 = 7$ → $x = \pm\sqrt{7}$

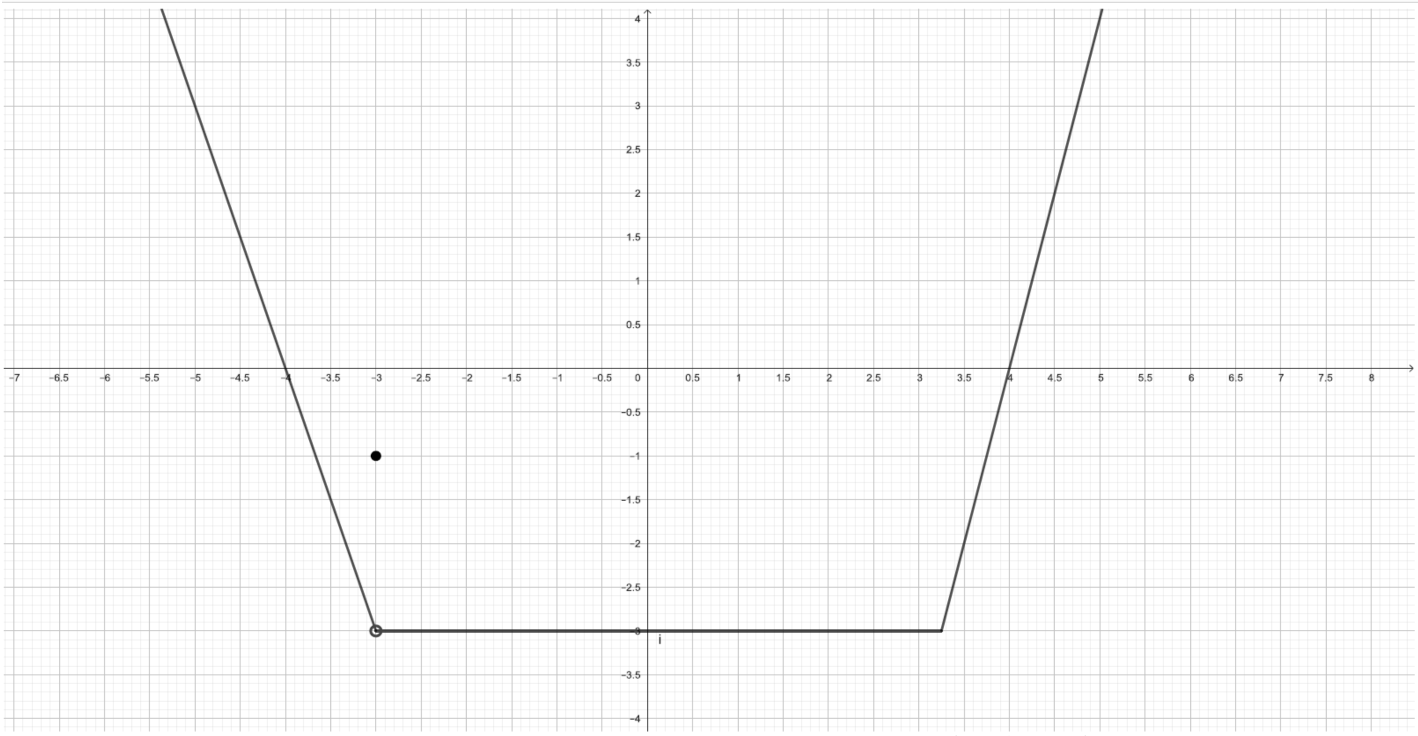
$$Dom\ (f) = \mathbb{R} \backslash \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

h) $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ (0.6 ptos.)

Conflictos: $3 + 2x - x^2 < 0$ → $3 + 2x - x^2 = 0$
→ $x_1 = -1;\ x_2 = 3$

$$Dom\ (g) = [-1, 3]$$

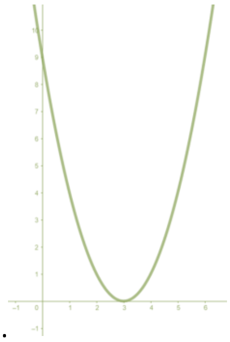
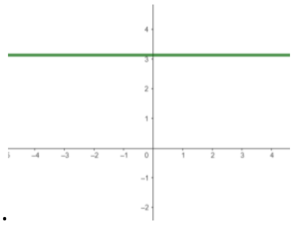
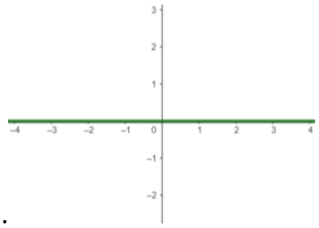
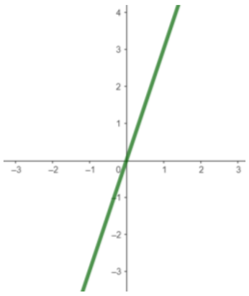
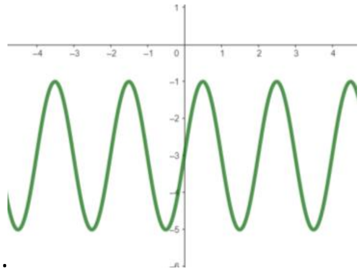
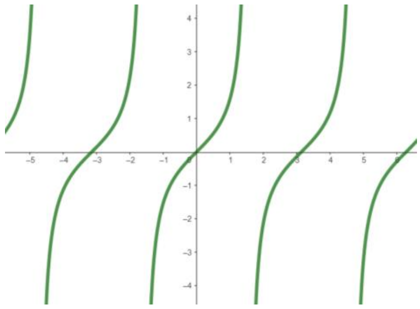
2. **Indica la expresión analítica de la siguiente función definida a trozos. (¡Ojo! Cuidado con la escala en los ejes.) ¿Hay algún tipo de discontinuidad? Si es así, indica de qué tipo.** **(1.6 ptos.)**



$$f(x) = \begin{cases} -3x - 12 & si\ x < -3 \quad (0.35\text{ ptos.}) \\ -1 & si\ x = -3 \quad (0.35\text{ ptos.}) \\ -3 & si\ -3 < x < \frac{13}{4} \quad (0.35\text{ ptos.}) \\ 4x - 16 & si\ x \geq \frac{13}{4} \quad (0.35\text{ ptos.}) \end{cases}$$

Tipo de discontinuidad: EVITABLE (0.2 ptos.)

3. RELLENA LA TABLA: Estudia la paridad de las siguientes funciones. Si sí la tienen, indica de qué tipo es. Indica también si son o no periódicas. De serlo, marca su período en el propio dibujo. **(1.9 ptos.)**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

	¿PARIDAD? (TIPO)	¿PERIÓDICA? (MARCA EL PERÍODO)
1	NO (0.15 ptos.)	NO (0.15 ptos.)
2	PAR (0.15 ptos.)	SÍ (0.15 ptos.)
3	PAR (0.15 ptos.) IMPAR (0.1 ptos.)	SÍ (0.15 ptos.)
4	IMPAR (0.15 ptos.)	NO (0.15 ptos.)
5	NO (0.15 ptos.)	SÍ (0.15 ptos.)
6	IMPAR (0.15 ptos.)	SÍ (0.15 ptos.)

4. RELLENA LA TABLA: Indica el dominio, recorrido y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. **(3.3 ptos.)**

		DOMINIO	RECORRIDO	OX	OY
1	$y = -3x + 2$	$Dom\ (f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$OX = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 2)$ (0.12 ptos.)
2	$y = 2^x$	$Dom\ (f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = (0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 1)$ (0.12 ptos.)
3	$y = \sin x$	$Dom\ (f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = [-1, 1]$ (0.12 ptos.)	$OX = (k\pi, 0);\ \ k \epsilon Z$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 0)$ (0.12 ptos.)
4	$y = \sqrt{x}$	$Dom\ (f) = [0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = [0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$OX = (0, 0)$ (0.12 ptos.)	$OY = (0, 0)$ (0.12 ptos.)
5	$y = \log_2 x$	$Dom\ (f) = (0, \infty)$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = \mathbb{R}$ (0.12 ptos.)	$OY = (1, 0)$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)
6	$y = \frac{1}{x}$	$Dom\ (f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (0.12 ptos.)	$Im\ (f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)	$\nexists$ (0.12 ptos.)

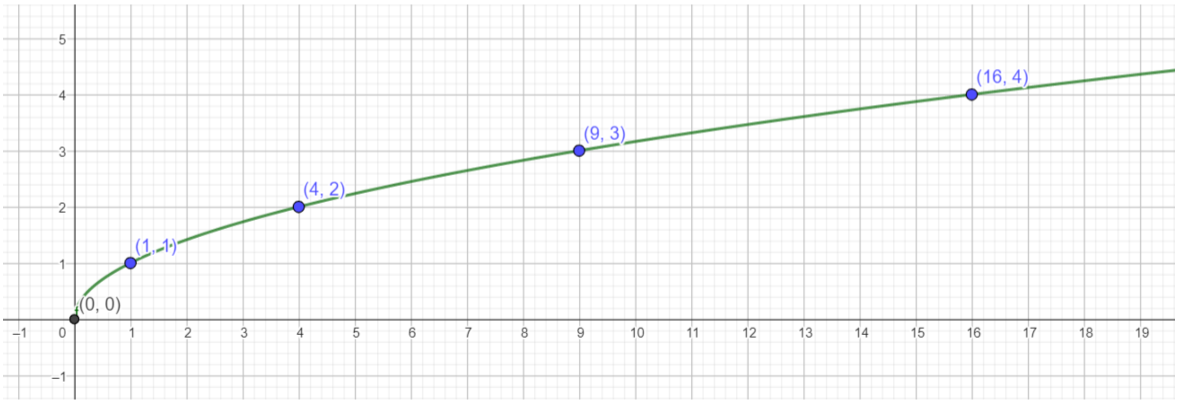
¿Cuál es la inversa de la función 2?

La función 5. (0.31 ptos.)

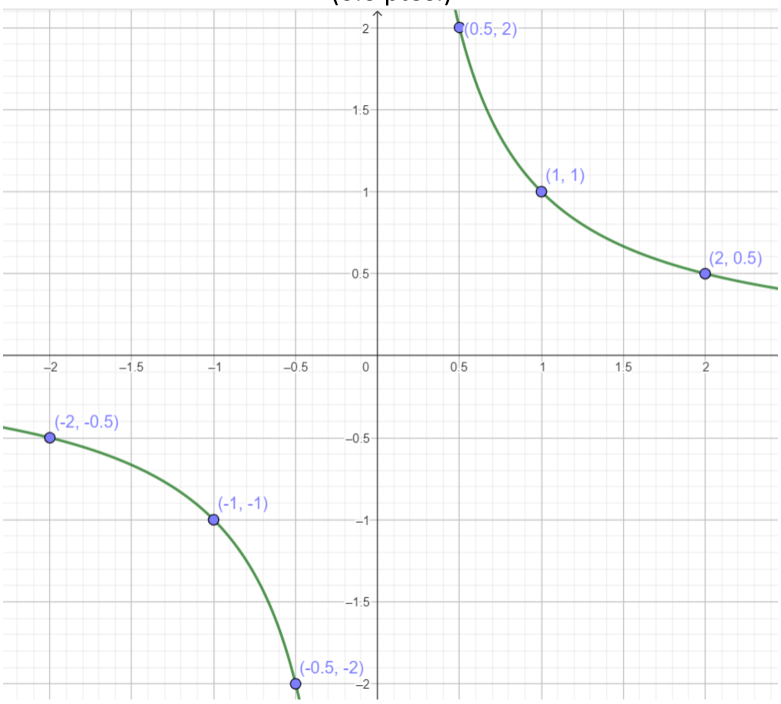
¿Y de la 6?

Ella misma. (0.31 ptos.)

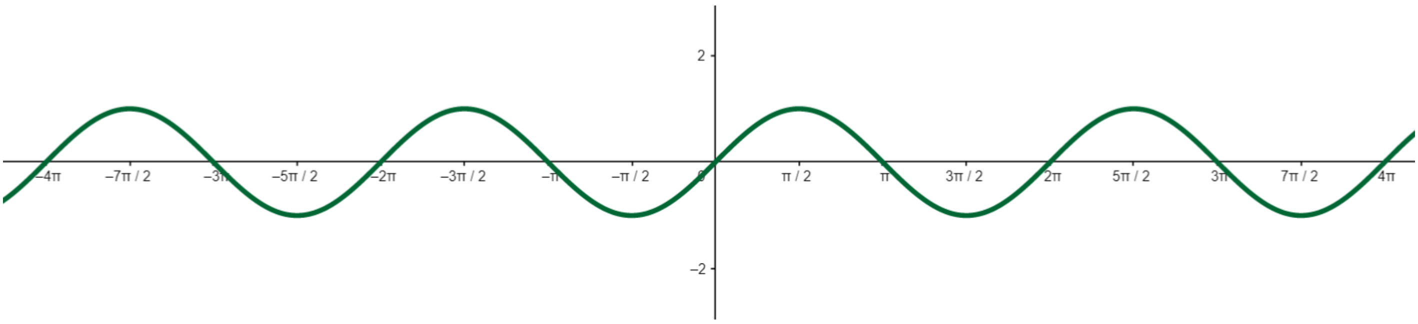
5. **Dibuja a mano alzada la gráfica de las funciones 3, 4 y 6 del ejercicio anterior. Usa los ejes que más te convengan para cada función. (1.8 ptos)**



(0.6 ptos.)



(0.6 ptos.)



(0.6 ptos.)

XXIII. ANEXO XXIII Institucionalización sobre simetrías y movimientos en el plano

Fase de institucionalización: Una vez cada grupo de expertos ha trabajado con las características y movimientos en el plano de sus funciones asignadas, el docente formalizará lo siguiente: "Dada una función cualquiera $f(x)$, podemos:

- Hacer $-f(x)$ para hacer una simetría con respecto al eje X y se le llama función opuesta.
- Hacer $f(-x)$ es hacer una simetría con respecto al eje Y
  - Si al hacer esta simetría la función se queda igual, se trata de una función **par**.
    $$f(-x) = f(x)$$
  - Si al hacer esta simetría queda la función opuesta, se trata de una función **impar**.
    $$f(-x) = -f(x)$$
  - Si al hacer dicha simetría no queda ninguno de los anteriores casos, no se puede hablar de paridad o imparidad de esa función.

Siendo $a > 0$:

- Hacer tanto $a\,f(x)$ como $f(ax)$ producen una nueva función cuyas gráficas tienen la apariencia de dilatar o contraer la gráfica función original $f(x)$:

- $a\,f(x)$ da una apariencia de dilatación/contracción en la dirección del eje y.
- $f(ax)$ da una apariencia de dilatación/contracción en la dirección del eje x.

Cuando:

$a > 1$, la función parecerá encogerse con respecto a la original.

$a < 1$, la función parecerá dilatarse con respecto a la original.

  - En $f(ax)$: Contrae la gráfica en el eje x (en realidad aumenta la velocidad y por tanto llegas antes al sitio, lo que parece que contrae/encoge la gráfica en la dirección horizontal), pero en $a\,f(x)$ dilata/estira la gráfica en el eje y.
  - En $f(ax)$: Dilata la gráfica en el eje x (en realidad disminuye la velocidad y por tanto llegas más arde al sitio, lo que parece que dilata o estira la gráfica en dirección horizontal), pero en $a\,f(x)$ contrae/encoge la gráfica en el eje y.

- Hacer $f(x \pm a)$ da una función cuya gráfica parece que se obtenga de la gráfica de la función original moviéndola a izquierda o derecha, puesto que sitúa el nuevo origen en el antiguo punto a.
  - $f(x - a)$: Hacia la derecha
  - $f(x + a)$: Hacia la izquierda
- Hacer $f(x) \pm a$ da una función cuya gráfica parece que se obtenga de la gráfica de la función original moviéndola hacia arriba o hacia abajo
  - $f(x) + a$: Hacia arriba
  - $f(x) - a$: Hacia abajo

Para ejemplificar, se harán dibujos en la pizarra de funciones con formas "raras" y se explicarán cómo funcionaría cada uno de los casos arriba expuestos aplicados a esta función.

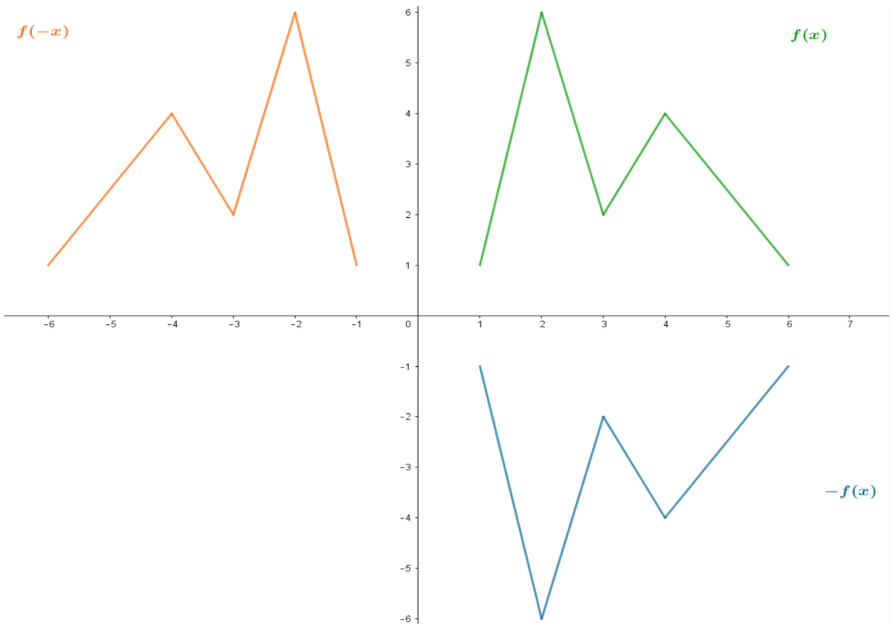


Figura 5. *Ejemplo para mostrar el significado de las simetrías*

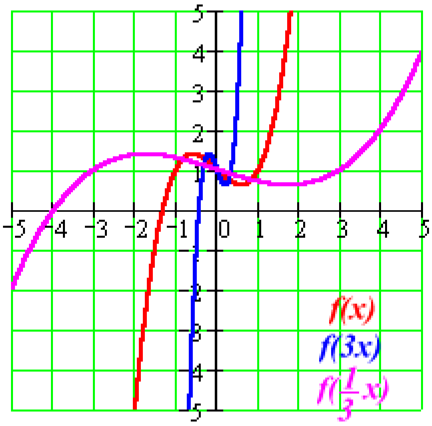


Figura 6. *Ejemplo para mostrar el significado de hacer* $f(ax)$ (véase Web 6)

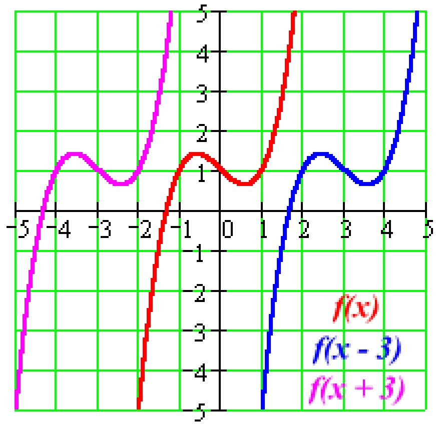


Figura 8. *Ejemplo para mostrar el significado de hacer* $f(x \pm a)$ (véase Web 6)

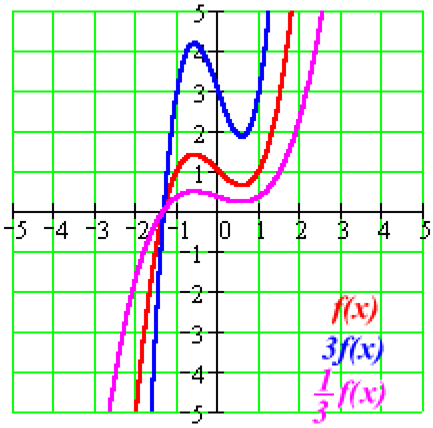


Figura 7. *Ejemplo para mostrar el significado de hacer* $af(x)$ (véase Web 6)

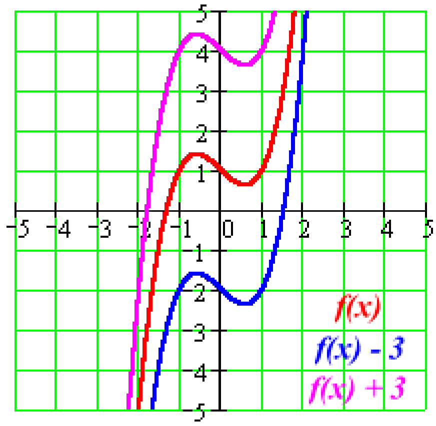
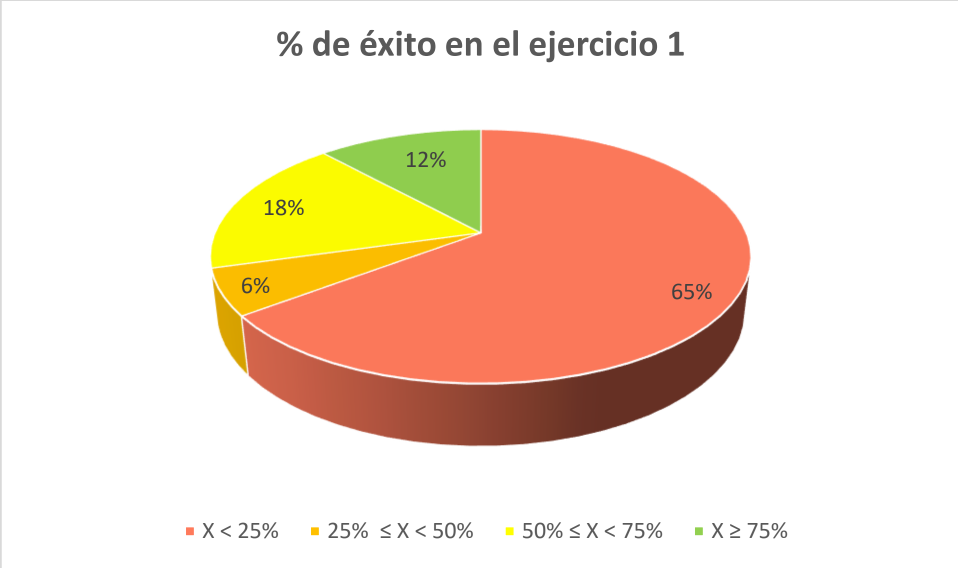
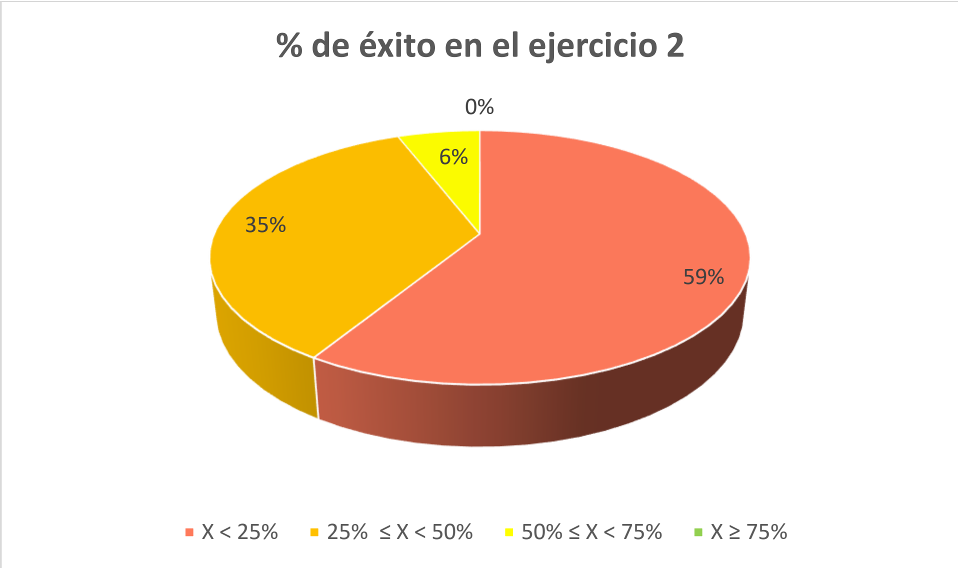
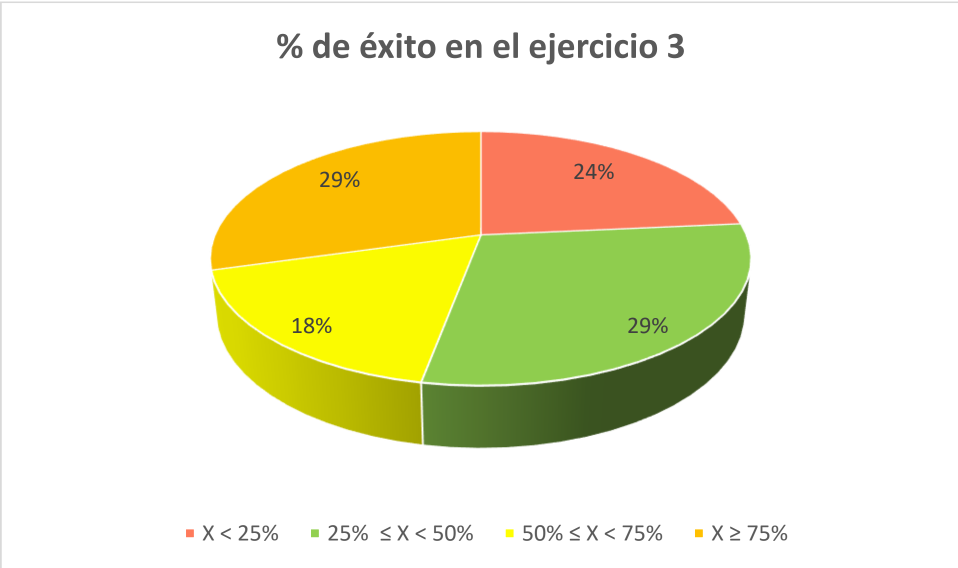


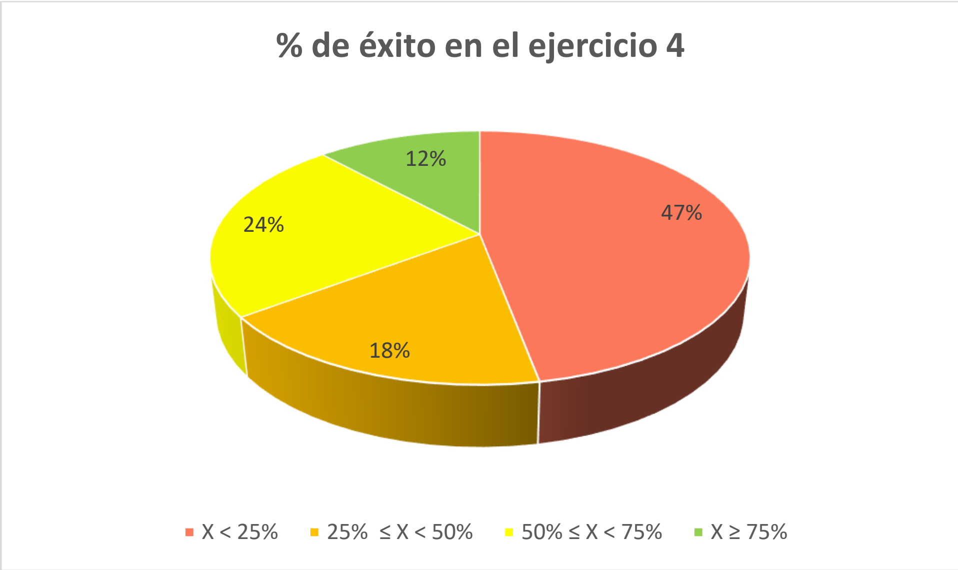
Figura 9. *Ejemplo para mostrar el significado de hacer* $f(x) \pm a$ (véase Web 6)

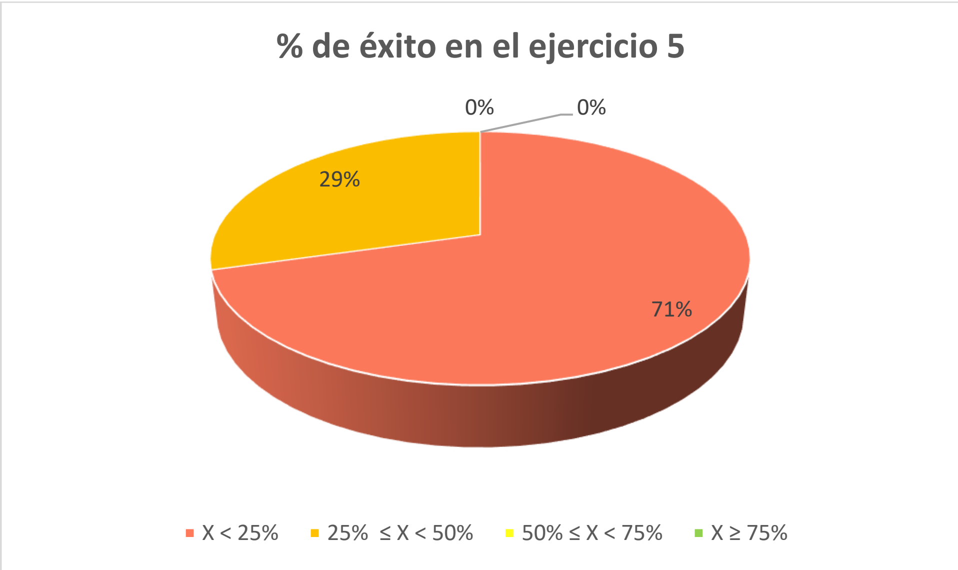
XXIV. ANEXO XXIV Porcentajes de éxito de cada ejercicio del examen final

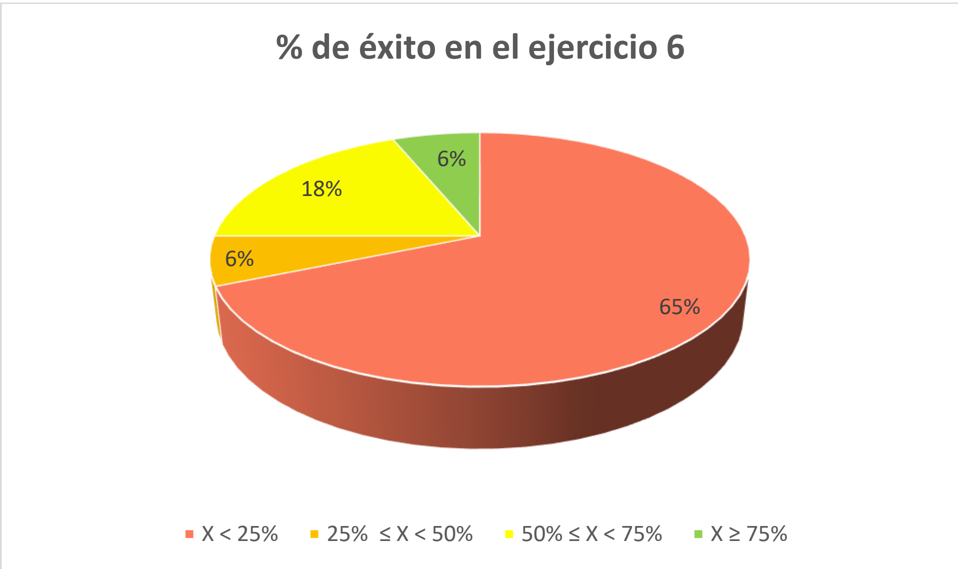












Para más información, ver el siguiente enlace:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1V6jJRsBOO5sBrrQjMYSKrGVd04i41ADC/edit?usp=sharing&ouid=111262480512631264751&rtpof=true&sd=true