

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

TESIS DOCTORAL

---

**Disposición óptima de sensores para la estimación de cargas mecánicas mediante medidas de deformación. Aplicación a aerogeneradores**

---

*Autor:*  
D. Julen BACAICOA Díaz

*Director:*  
Dr. Xabier IRIARTE Goñi

*Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos  
para obtener el grado de Doctor en Filosofía*

*en el*

Grupo de Investigación Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional  
Departamento de Ingeniería

Pamplona, Octubre de 2023

<https://doi.org/10.48035/Tesis/2454/46909>



UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

## *Tribunal Calificador*

Departamento de Ingeniería

**Disposición óptima de sensores para la estimación de cargas mecánicas mediante medidas de deformación. Aplicación a aerogeneradores**

por Julen BACAICOA Díaz

---

**Dr. Vicente Mata**

Catedrático, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
Universidad Politécnica de Valencia  
*Presidente*

---

**Dr. Mauro Malvè**

Titular, Departamento de Ingeniería  
Universidad Pública de Navarra  
*Secretario*

---

**Dr. José Luis Escalona**

Catedrático, Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Universidad de Sevilla  
*Vocal*

Los miembros del tribunal tras la evaluación de la tesis presentada otorgan la siguiente calificación:

---



## Declaración de Autoría

Yo, Julen BACAICOA Díaz, declaro que esta tesis titulada, «Disposición óptima de sensores para la estimación de cargas mecánicas mediante medidas de deformación. Aplicación a aerogeneradores» y el trabajo presentado en ella son de mi propiedad. Confirmando que:

- Este trabajo se ha realizado en su totalidad mientras el autor era candidato al título de doctor en la Universidad Pública de Navarra y Escuela de Doctorado de Navarra.
- En caso de que alguna parte de esta tesis haya sido presentada anteriormente para la obtención de un título o cualquier otra cualificación en esta Universidad o en cualquier otra institución, se ha indicado claramente.
- En los casos en que se ha consultado el trabajo publicado por otros autores, siempre se atribuye claramente.
- En los casos en que se ha citado el trabajo de otros, siempre se indica la fuente. A excepción de dichas citas, esta tesis es enteramente obra del autor.
- En la tesis quedan reconocidas todas las principales fuentes de ayuda y financiación.

En Pamplona a Octubre de 2023,

---

**D. Julen Bacaicoa**

Universidad Pública de Navarra

*Aspirante a título de Doctor*



*«Dime y lo olvido,  
enséñame y lo recuerdo,  
involúcrame y lo aprendo.»*

**BENJAMIN FRANKLIN**





## Agradecimientos

La Tesis Doctoral es como un viaje en un laberinto fascinante, donde cada esquina esconde nuevos desafíos y descubrimientos. Durante esta travesía, he tenido el privilegio de contar con la compañía y el apoyo de seres queridos y mentores excepcionales que han sido mi brújula en los momentos de incertidumbre.

En primer lugar, quisiera dar las gracias a mi director de tesis Xabier Iriarte. Recuerdo el día en el que toqué a la puerta de tu despacho en busca de alguien que me dirigiese el trabajo fin de grado. Ese fue, sin yo saberlo, el día que comenzó mi carrera universitaria. Ese primer contacto, llevó a que siguiera con mis estudios en la universidad y mira ahora, aquí me encuentro, con una tesis doctoral entre manos. Esta tesis no hubiera sido posible sin las numerosas reuniones, debates y cafés que hemos compartido. Los últimos cuatro años han sido una travesía enriquecedora, y el volumen de conocimientos y experiencias que he adquirido durante este tiempo supera cualquier expectativa que pudiera haber tenido al inicio de este viaje académico. *Mila esker Xabi.*

Igualmente me gustaría expresar mi profundo agradecimiento a mis compañeros del grupo de investigación IMAC. Especialmente a Jokin, Aitor y Javier, que desde el primer minuto que empezó este viaje han estado ahí para echarme una mano en todo lo que hiciese falta y han sido capaces de engancharme a este *mundillo* de la investigación y docencia en la universidad. También a aquellos que se cruzaron más tarde en mi camino, Gorka, Iker, Mauro, y profesores de las áreas de mecánica y mecánica de los medios continuos, gracias por allanarme el camino hasta donde hoy me encuentro. *Eskerrik asko guztioi.*

De la misma manera, a toda la juventud con la que he compartido momentos en la Sala IMAC, desde el primero hasta el último, Javier Lerga, Álvaro, José, Javi, Mikel<sup>2</sup>, Esti, Oier e Iñigo. Gracias, por todo lo que me habéis enseñado estos últimos años, por los buenos ratos que hemos pasado y sobre todo por lo que nos queda por delante.

A los compañeros de estancia en Sevilla que tanto me enseñaron y tan bien me recibieron. Pedro, José Luis, Xin-Xin, Pablo y José. Os garantizo que la experiencia no se me olvidará nunca, gracias.

A mis amigos, sí, a todos y cada uno de ellos. A mis amigos de la *Kuadrilla* por ser mi refugio, apoyo y alegría en cada paso de este viaje, al grupo *Euskal Industriales* por compartir conmigo cada desafío y victoria en nuestra travesía universitaria, a mis compañeros de hobby en La Vuelta, y a todos aquellos que alguna vez me habéis preguntado *¿Oye, cómo va la tesis?.* *Besterik gabe, eskerrik asko.*

Finalmente, no podría cerrar estos agradecimientos sin mencionar a mi pilar fundamental: mi familia. A mi padre, cuyo apoyo inquebrantable y sabios consejos han sido la brújula en este largo viaje; a mi hermana, por ser mi confidente y aliento en los momentos más desafiantes. Y, sobre todo, a mi madre, cuya ausencia se siente profundamente, pero cuyo amor ha sido la guía silente detrás de cada página de esta tesis. Aunque no haya podido estar aquí físicamente para presenciar este logro, su influencia y enseñanzas permanecen impresas en cada palabra y cada descubrimiento. A toda mi familia, mi más sincero agradecimiento por ser la base desde la que he podido alzar el vuelo a la carrera universitaria.



UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

## *Resumen*

Departamento de Ingeniería

Doctor en Filosofía

### **Disposición óptima de sensores para la estimación de cargas mecánicas mediante medidas de deformación. Aplicación a aerogeneradores**

por Julen BACAICOA Díaz

**L**A monitorización de la salud estructural (SHM) en aerogeneradores representa un desafío crítico en la eficiencia operacional y mantenimiento de estas complejas estructuras. La investigación desarrollada en esta tesis doctoral aborda la disposición óptima de sensores y la aplicación de técnicas de medición de deformación mediante galgas extensiométricas para la estimación precisa de las cargas mecánicas en secciones circulares. A través de métodos innovadores y un enfoque práctico, se plantean unas técnicas para la estimación robusta y precisa de fuerzas y momentos que se aplican en los diferentes componentes de los aerogeneradores.

En primer lugar, se calcula la deformación de una galga situada arbitrariamente, considerando que está colocada en el perímetro de una sección transversal circular. A continuación, se expone cómo puede estimarse el torsor externo completo a partir de las medidas de deformación de un conjunto de galgas, y se presenta una colección de configuraciones óptimas de galgas obtenida a partir de diferentes criterios de optimización y restricciones impuestas.

Después, se presenta una metodología para obtener nuevas configuraciones óptimas de galgas extensiométricas que permitan estimar determinadas componentes del torsor externo sin la influencia de otras componentes no deseadas. Se desarrolla un algoritmo de optimización y se obtienen configuraciones óptimas para la estimación de diferentes cargas y compensación de la deformación térmica, además de presentar una colección de novedosas configuraciones óptimas para la estimación de determinadas componentes del torsor simultáneamente.

A continuación, se realiza un análisis de sensibilidad, para estudiar la propagación de incertidumbre desde las medidas de deformación de las galgas hasta la estimación de las cargas. Se definen las posiciones y orientaciones nominales de las galgas extensiométricas en los puentes típicos de Wheatstone y determinadas configuraciones novedosas, así como las matrices de relación inversa para la estimación de las cargas a partir de las medidas de deformación. Posteriormente, se presenta el procedimiento llevado a cabo para el análisis de sensibilidad, y se presentan los resultados obtenidos desde cuatro perspectivas diferentes tras el análisis de sensibilidad aplicado a un aerogenerador.

Seguidamente, se realiza la calibración estática de una nueva configuración óptima de galgas obtenida para la estimación de todas las componentes del torsor externo simultáneamente. Se fabrica un eje hueco a escala para la instalación de la configuración de galgas y se llevan a cabo un total de 6 experimentos de calibración aplicando diferentes cargas en cada uno de ellos. Una vez establecida la relación lineal entre las deformaciones de las galgas y las diferentes componentes del torsor, se obtiene la matriz de observación experimental. Además, se realiza la validación del procedimiento de calibración por medio de un experimento adicional, concluyendo que la configuración de galgas es capaz de estimar el torsor completo con una fiabilidad y precisión razonable.

Finalmente, se exponen las conclusiones alcanzadas en esta tesis doctoral, así como una serie de propuestas para futuras investigaciones y líneas de trabajo. Esta sección brinda un cierre a la investigación realizada, resumiendo los hallazgos clave y destacando las implicaciones y perspectivas que surgen a partir de los resultados obtenidos. Además, se plantean posibles direcciones para ampliar el conocimiento y profundizar en áreas relacionadas con el tema abordado en esta tesis doctoral.

---

## Índice General

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Índice General</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>XVII</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XXI</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>XXIII</b>
<b>Operadores</b>	<b>XXVII</b>
<b>Funciones</b>	<b>XXIX</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>XXXI</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	4
1.2.1. Estimación óptima del torsor completo . . . . .	5
1.2.2. Parámetros omitidos . . . . .	9
1.2.3. Incertidumbre en configuraciones de galgas . . . . .	10
1.2.4. Calibración de sensores . . . . .	12
1.3. Objetivos . . . . .	14
1.4. Organización de la Tesis Doctoral . . . . .	14
<b>2. ESTIMACIÓN ÓPTIMA DEL TORSOR COMPLETO EN EJES MEDIAN- TE GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS</b>	<b>17</b>
2.1. Planteamiento de medición: puentes completos frente a cuartos de puente . . . . .	17
2.1.1. Cuarto de puente de Wheatstone . . . . .	21

2.2.	Determinación de la deformación de una galga situada arbitrariamente en un eje de sección cilíndrica . . . . .	25
2.2.1.	Acotación de una galga extensiométrica arbitraria . . . . .	25
2.2.2.	Tensor de tensiones para un torsor arbitrario . . . . .	26
2.2.3.	Deformación de una galga para un torsor arbitrario . . . . .	30
2.3.	Estimación óptima del torsor externo . . . . .	31
2.3.1.	Estimación del torsor externo en términos de la deformación de varias galgas . . . . .	31
2.3.2.	Estimación óptima del torsor . . . . .	33
2.3.3.	Estimación óptima del torsor con compensación de efectos térmicos . . . . .	35
2.4.	Características de la resolución numérica de los problemas de optimización . . . . .	36
2.5.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio D-Optimality . . . . .	38
2.5.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	38
2.5.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	44
2.6.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio D-Optimality, situadas en distintas secciones del eje . . . . .	46
2.6.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	46
2.6.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	49
2.7.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio NC . . . . .	51
2.7.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	51
2.7.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	53
2.8.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio NC, situadas en distintas secciones del eje . . . . .	54
2.8.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	54
2.8.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	56
2.9.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio E-Optimality . . . . .	56
2.9.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	56
2.9.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	58
2.10.	C.O.G. obtenidas mediante el criterio E-Optimality, situadas en distintas secciones del eje . . . . .	59
2.10.1.	E.O.T. mediante 6G . . . . .	59
2.10.2.	E.O.T. mediante 8G . . . . .	59
2.11.	Sumario de configuraciones óptimas de galgas . . . . .	60
2.12.	Resumen del Capítulo 2 . . . . .	61
<b>3.</b>	<b>PARÁMETROS OMITIDOS</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1.	Diseño óptimo habitual para la estimación de determinadas componentes del torsor . . . . .	64
3.2.	Planteamiento alternativo para el diseño de configuraciones con parámetros omitidos . . . . .	67
3.2.1.	Determinación del estimador máximo verosímil . . . . .	67
3.2.2.	Optimización de configuraciones . . . . .	69
3.2.3.	Determinación de la varianza . . . . .	71
3.3.	Configuraciones óptimas . . . . .	75
3.3.1.	Configuraciones típicas . . . . .	75
3.3.2.	Configuraciones novedosas . . . . .	78
3.4.	Sumario de configuraciones óptimas de galgas . . . . .	88

3.5. Resumen del Capítulo 3 . . . . .	89
<b>4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE CONFIGURACIONES DE GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS</b>	<b>91</b>
4.1. Expresiones analíticas para las configuraciones de galgas . . . . .	91
4.1.1. Relación inversa para la estimación de cargas mecánicas en puentes típicos de Wheatstone . . . . .	93
4.1.2. Relación inversa para la estimación de las cargas mecánicas en configuraciones novedosas . . . . .	94
4.2. Cálculo de la sensibilidad . . . . .	95
4.2.1. Aproximación . . . . .	95
4.2.2. Cálculo de la incertidumbre de las cargas mecánicas . . . . .	96
4.3. Caso de aplicación: Aerogenerador . . . . .	98
4.3.1. Incertidumbre de los parámetros geométricos y del material . . . . .	99
4.3.2. Efectos individuales de las cargas secundarias . . . . .	100
4.3.3. Efectos combinados en una simulación de un aerogenerador . . . . .	103
4.3.4. Simulación de Montecarlo para valores de posicionamiento de las galgas . . . . .	105
4.4. Resumen del Capítulo 4 . . . . .	108
<b>5. CALIBRACIÓN ESTÁTICA DE UNA CONFIGURACIÓN DE 8 GALGAS</b>	<b>109</b>
5.1. Características del banco de ensayos . . . . .	109
5.1.1. Parámetros geométricos y estructurales de los ejes . . . . .	112
5.1.2. Instalación de las galgas y sistema de adquisición . . . . .	112
5.2. Experimentos de calibración . . . . .	114
5.2.1. Experimentos 1-2. Fuerza cortante y momento flector . . . . .	114
5.2.2. Experimentos 3-4. Fuerza cortante y momento flector con la extensión del eje . . . . .	115
5.2.3. Experimento 5. Momento torsor . . . . .	116
5.2.4. Experimento 6. Fuerza axial . . . . .	116
5.2.5. Resultados de los experimentos de calibración . . . . .	117
5.3. Cálculo de la matriz de observación experimental . . . . .	118
5.4. Validación . . . . .	120
5.5. Resumen del Capítulo 5 . . . . .	122
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>125</b>
6.1. Estimación óptima del torsor completo . . . . .	125
6.2. Parámetros omitidos . . . . .	127
6.3. Análisis de sensibilidad . . . . .	128
6.4. Calibración estática de una configuración de 8 galgas . . . . .	130
6.5. Producción científica . . . . .	131
6.5.1. Artículos de revista . . . . .	131
6.5.2. Congresos . . . . .	131
6.5.3. Estancia de investigación . . . . .	132
<b>7. LÍNEAS FUTURAS</b>	<b>133</b>
<b>A. ALGORITMOS</b>	<b>137</b>
A.1. Resolución de los problemas de optimización . . . . .	137
A.2. Resolución de los problemas de optimización con parámetros omitidos	138

A.3. Análisis de sensibilidad de configuraciones de galgas. . . . .	139
<b>B. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD</b>	<b>141</b>
B.1. Matrices <b>W</b> de las configuraciones típicas de galgas . . . . .	141
B.2. Matrices Jacobianas y Hessianas de las aproximaciones de Taylor . . .	141
<b>Bibliografía</b>	<b>145</b>



---

## Índice de Figuras

---

2.1. Configuraciones típicas para la medición de cargas específicas. . . . .	18
2.2. Configuraciones de galgas para la estimación de momentos flectores. . . . .	19
2.3. Configuraciones típicas para la medición del momento de torsión y fuerza cortante. . . . .	20
2.4. Circuito eléctrico de un cuarto de puente de Wheatstone. . . . .	21
2.5. Circuito de puente de Wheatstone genérico. . . . .	22
2.6. Relación lineal y no lineal entre la tensión eléctrica de salida y entrada de un cuarto de puente de Wheatstone para distintos valores de $k_R$ . . . . .	23
2.7. Sensibilidad normalizada de un cuarto de puente de Wheatstone para distintos valores de $k_R$ . . . . .	24
2.8. Acotación de una galga extensiométrica en un eje de sección transversal circular. . . . .	25
2.9. Sólido diferencial en el punto $\mathbf{P}$ . . . . .	27
2.10. Tolerancia de la función y de paso de los problemas de minimización. . . . .	38
2.11. Valor de la función de coste del criterio de optimización D-Optimality en términos de $\alpha$ para $\nu = 1/3$ . . . . .	39
2.12. Logaritmo de la varianza de las componentes del torsor en términos de $\alpha$ para $\nu = 1/3$ , y $A, E, \kappa, I_p, \omega$ y $R$ unitarios. . . . .	41
2.13. Parámetros $\gamma$ y $\beta$ para la definición de la orientación de las rosetas. . . . .	42
2.14. Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio D-Optimality. . . . .	43
2.15. Configuraciones de 8 galgas con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio D-Optimality. . . . .	46
2.16. Varianza de la estimación de los momentos flectores en función de la posición longitudinal de las galgas, para valores de los parámetros geométricos y del material del eje lento de un aerogenerador. . . . .	48
2.17. Configuraciones de 8 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio D-Optimality. . . . .	50
2.18. Configuración de 8 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones sólo para $\mathbf{x}$ para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenida mediante el criterio D-Optimality. . . . .	51

2.19. Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio NC. . . . .	52
2.20. Configuración de 6 galgas sin restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenida mediante el criterio NC. . . . .	53
2.21. Configuraciones de 6 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio NC. . . . .	55
2.22. Configuración de 6 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones sólo para $\mathbf{x}$ para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenida mediante el criterio NC. . . . .	55
2.23. Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio E-Optimality. . . . .	57
2.24. Configuración de 6 galgas sin restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenida mediante el criterio E-Optimality. . . . .	58
2.25. Configuraciones de 8 galgas con restricciones para la estimación de $\mathbf{t}$ obtenidas mediante el criterio E-Optimality. . . . .	58
3.1. Diagrama de flujo del algoritmo alternativo. . . . .	70
3.2. Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_1$ obtenida a partir de la formulación de parámetros omitidos. . . . .	76
3.3. Configuración de 3 galgas para la estimación de $M_2$ y $M_3$ , e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	79
3.4. Configuración de 6 galgas para la estimación de $M_2$ y $M_3$ , e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	80
3.5. Configuración de 3 galgas para la estimación de $F_1$ , $M_2$ y $M_3$ obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	82
3.6. Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_1$ , $M_2$ y $M_3$ , e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	83
3.7. Configuración de 5 galgas para la estimación de $M_1$ , $M_2$ y $M_3$ , e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	84
3.8. Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_2$ y $F_3$ obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	85
3.9. Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_2$ y $F_3$ obtenida a partir del algoritmo alternativo. . . . .	86
3.10. Configuración de 4 galgas para la estimación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ obtenida a partir de la formulación de parámetros omitidos. . . . .	88
4.1. Configuraciones típicas de puente completo de Wheatstone para la estimación de las componentes individuales del torsor. . . . .	92
4.2. Configuraciones óptimas de 6 y 8 galgas obtenidas mediante el criterio D-Optimality. . . . .	93
4.3. Bases de proyección: El global $(xyz)$ , el asociado a las cargas de la torre $(1_t 2_t 3_t)$ y el asociado a las cargas del eje $(1_a 2_a 3_a)$ . . . . .	100
4.4. LSS: Efectos de las cargas secundarias en la medición de cargas primarias con puentes completos de Wheatstone en presencia de errores de posicionamiento en las galgas. (a) $F_1$ , (b) $F_2$ , (c) $F_3$ , (d) $M_1$ , (e) $M_2$ , (f) $M_3$ . . . . .	101

4.5. Torre: Efectos de las cargas secundarias en la medición de cargas primarias con puentes completos de Wheatstone en presencia de errores de posicionamiento en las galgas. (a) $F_1$ , (b) $F_2$ , (c) $F_3$ , (d) $M_1$ , (e) $M_2$ , (f) $M_3$ . . . . .	102
4.6. Datos de las series temporales de las componentes de carga del torsor. (a) LSS y (b) base de la torre. . . . .	103
4.7. Valores numéricos del Jacobiano $\left( \left[ \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}} \right]_0 \right)$ de la Ecuación 4.12. Los valores de (a) y (b) se calculan para el LSS y los valores de (c) y (d) para la torre, ambos con una velocidad de viento de 12 m/s. . . . .	104
4.8. Desviación estándar relativa calculada a partir de los resultados de la simulación de Montecarlo. . . . .	105
4.9. LSS: Histogramas normalizados de los valores de las componentes del torsor y de los errores de estimación de las componentes del torsor obtenidos mediante la simulación de Montecarlo. . . . .	106
4.10. Torre: Histogramas normalizados de los valores de las componentes del torsor y de los errores de estimación de las componentes del torsor obtenidos mediante la simulación de Montecarlo. . . . .	107
5.1. Esquema del eje principal. . . . .	110
5.2. Configuración óptima de 8 galgas instalada en el eje a escala. . . . .	111
5.3. Esquema de la extensión del eje. . . . .	111
5.4. Componentes principales del banco de ensayos. (a) Eje principal. (b) Extensión del eje. . . . .	111
5.5. Proceso de instalación de las rosetas de galgas en el eje. (a) Preparación de la superficie y marcado de posiciones. (b) Marcado de la orientación. (c) Pegado de las rosetas. (d) Conexión. . . . .	113
5.6. Sistema de adquisición para la obtención de las medidas de deformación. . . . .	114
5.7. Experimento de calibración con aplicación de fuerza cortante en la dirección negativa del eje 2 y momento flector en la dirección positiva del eje 3. . . . .	115
5.8. Experimento de calibración con aplicación de fuerza cortante en la dirección negativa del eje 2 y momento flector en la dirección positiva del eje 3, y extensión del eje. . . . .	115
5.9. Experimento de calibración con aplicación de momento torsor en la dirección negativa del eje 1. . . . .	116
5.10. Experimento de calibración con aplicación de fuerza axial en la dirección negativa del eje 1. La Figura está rotada $90^\circ$ en sentido antihorario. . . . .	116
5.11. Experimentos de calibración (a) Fuerza cortante y momento flector. (b) Fuerza cortante y momento flector con extensión del eje. (c) Momento torsor. (d) Fuerza axial. . . . .	117
5.12. Valor medio de la deformación medida por cada galga en los experimentos de calibración. (a) Experimento 1. (b) Experimento 2. (c) Experimento 5. (d) Experimento 3. (e) Experimento 4. (f) Experimento 6. . . . .	118
5.13. Experimento de validación. . . . .	121



---

## Índice de Tablas

---

2.1. Configuraciones óptimas de galgas extensiométricas indicando el número de ecuación. . . . .	60
3.1. Posición y orientación de las galgas, y estimador de las configuraciones típicas obtenidas mediante la formulación de parámetros omitidos.	78
3.2. Configuraciones óptimas de galgas extensiométricas obtenidas mediante el algoritmo alternativo indicando el número de ecuación. . . .	89
4.1. Posición y orientación nominal de las galgas extensiométricas en los puentes completos tradicionales de Wheatstone para la medición de cada una de las 6 componentes individuales del torsor. . . . .	92
4.2. Posición y orientación nominal de las galgas extensiométricas en las configuraciones de 6 y 8 galgas para la estimación simultánea de las 6 componentes del torsor. . . . .	93
4.3. Matrices $\mathbf{H}_{\hat{t}_k}$ para la estimación de las componentes del torsor. . . . .	94
4.4. Producto de matrices $\mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top$ para la estimación de la varianza de la carga $\hat{t}_k$ . . . . .	97
4.5. Jacobianos $\left( \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0 \right)$ de las aproximaciones de Taylor para las 6 componentes individuales del torsor. . . . .	100
4.6. Valores RMS con signo de las componentes del torsor obtenidas en la simulación con OpenFAST 3.0. . . . .	104
5.1. Relación entre la pendiente de la regresiones lineales y las componentes de la matriz $\mathbf{W}$ . . . . .	119



---

## Nomenclatura

---

$a_{ij}$	Pendiente de la regresión lineal de la $i$ -ésima galga en el $j$ -ésimo experimento
$A$	Área transversal de la sección
$A_{LR}$	Matriz con la regresión lineal de las deformaciones de las galgas
$b_{ij}$	Offset de la regresión lineal de la $i$ -ésima galga en el $j$ -ésimo experimento
$\mathbf{B}$	Matriz que relaciona las pendientes $a_{ij}$ y componentes de $\mathbf{W}$
$\mathbf{c}$	Vector de restricciones no-lineales
$d$	Distancia para aplicación de momento flector
$D$	Distancia para aplicación de momento flector con extensión del eje
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva
$\mathbf{e}$	Vector incertidumbre de medición de la deformación
$E$	Módulo de Young
$\mathcal{F}_C$	Función de coste del criterio del Número de Condición
$\mathcal{F}_D$	Función de coste del criterio D-Optimality
$\mathcal{F}_E$	Función de coste del criterio E-Optimality
$\mathcal{F}_Q$	Función de coste para el diseño óptimo habitual
$G_i$	Galga extensiométrica $i$ -ésima
$\mathbf{H}_{\hat{k}}$	Matriz estimador de la $k$ -ésima componente del torsor
$I_p$	Momento de inercia polar
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidad de tamaño $n$
$\mathcal{I}$	Matriz de Información de Fisher
$k_G$	Factor de galga
$k_R$	Razón característica de las resistencias
$l$	Logaritmo de la expresión de verosimilitud

$L$	Posición longitudinal límite en el eje
$L_i$	Longitud $i$ -ésima del eje
$L_e$	Longitud de la extensión del eje
$L_T$	Distancia para aplicación de momento torsor
$\mathcal{L}$	Función de Verosimilitud
$m$	Ratio entre radio interior y radio exterior
$n$	Número de galgas extensiométricas
$N$	Número de medidas de deformación
$\mathcal{N}$	Distribución normal
$p$	Número de componentes del torsor externo
$\mathbf{p}$	Vector con los valores nominales de posición y orientación de las galgas
$\mathbf{P}$	Matriz ortogonal a $\mathbf{W}$
$q$	Número de parámetros omitidos
$\mathbf{q}$	Vector con los valores nominales de los parámetros geométricos y del material
$\mathbf{Q}$	Matriz ortogonal a $\mathbf{W}_2$
$r$	Radio interior
$r_e$	Radio interior extensión del eje
$\mathbf{r}$	Vector con los elementos de la matriz $\mathbf{R}$
$R$	Radio exterior
$R_e$	Radio exterior extensión del eje
$R_0$	Resistencia nominal de la galga
$R_i$	Resistencia constante $i$ -ésima del puente de Wheatstone
$\mathbf{R}$	Matriz ortonormal y ortogonal a $\mathbf{W}_2$
$s$	Número de dimensiones disponibles para la estimación de la varianza
$\mathbf{s}_m$	Proyección de $\varepsilon_m$ sobre el espacio ortogonal a la imagen de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$
$S$	Sensibilidad del cuarto de puente de Wheatstone
$\mathbf{S}$	Matriz diagonal de la Descomposición en Valores Singulares
$t_k$	Componente $k$ -ésima del torsor externo
$\mathbf{t}$	Vector torsor externo
$\mathbf{t}_e$	Vector torsor externo extendido
$\mathbf{t}_{eo}$	Vector teórico torsor externo
$\mathbf{t}_O$	Vector torsor externo aplicado en punto $\mathbf{O}$
$\mathbf{t}_1$	Componentes de interés del torsor externo
$\mathbf{t}_2$	Parámetros omitidos
$\mathcal{T}$	Temperatura



$\mathcal{T}_0$	Temperatura de referencia
$\mathbf{U}$	Matriz ortonormal de la Descomposición en Valores Singulares
$V_{in}$	Tensión de entrada al puente de Wheatstone
$V_{out}$	Tensión de salida al puente de Wheatstone
$\mathbf{V}$	Matriz ortonormal de la Descomposición en Valores Singulares
$\mathbf{w}$	Vector de Observación
$\mathbf{W}$	Matriz de Observación
$\mathbf{W}_e$	Matriz de Observación extendida
$\mathbf{W}_{exp}$	Matriz de Observación experimental
$\mathbf{W}_{unc}$	Matriz de Observación con incertidumbre
$\mathbf{W}_1$	Matriz de observación asociada a los componentes de interés del torsor
$\mathbf{W}_2$	Matriz de observación asociada a los parámetros omitidos
$x_i$	Posición longitudinal de la $i$ -ésima galga
$\mathbf{x}$	Vector de posiciones longitudinales de las galgas
$\mathbf{x}^{opt}$	Vector de posiciones longitudinales óptimas de las galgas
$\mathbf{y}_m$	Proyección de $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ sobre el espacio ortogonal a la imagen de $\mathbf{W}_2$
$\mathbf{z}_m$	Proyección de $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ sobre el espacio ortogonal a la imagen de $\mathbf{W}_2$
$\alpha$	Orientación de la galga
$\alpha^{opt}$	Orientación óptima de la galga
$\alpha_{\mathcal{T}}$	Coefficiente de dilatación térmica
$\beta$	Ángulo para definición de la orientación de roseta
$\gamma$	Ángulo para definición de la orientación de roseta
$\delta_0$	Ratio entre la variación de resistencia y resistencia nominal de la galga
$\delta_i$	Orientación de la $i$ -ésima galga
$\boldsymbol{\delta}$	Vector de orientaciones de las galgas
$\boldsymbol{\delta}^{opt}$	Vector de orientaciones óptimas de las galgas
$\Delta R$	Variación de resistencia de la galga
$\Delta T$	Variación de temperatura
$\Delta \mathbf{p}$	Vector de incertidumbres de los parámetros $\mathbf{p}$
$\Delta \mathbf{q}$	Vector de incertidumbres de los parámetros $\mathbf{q}$
$\varepsilon_i$	Deformación longitudinal real de la $i$ -ésima galga
$\varepsilon_{\mathcal{T}}$	Deformación térmica
$\boldsymbol{\varepsilon}_m$	Vector deformación medida

$\varepsilon_T$	Vector deformación térmica
$\varepsilon_0$	Vector deformación en ausencia de cargas
$\bar{\varepsilon}, \varepsilon$	Vector de deformaciones
$\bar{\bar{\varepsilon}}$	Tensor de deformaciones
$\theta$	Rotación del eje
$\vartheta$	Vector de posiciones y orientaciones de las galgas
$\vartheta^{opt}$	Vector de posiciones y orientaciones óptimas de las galgas
$\Theta$	Vector con elementos de la matriz $\mathbf{R}$ y posiciones de las galgas
$\Theta^{opt}$	Vector con elementos de la matriz $\mathbf{R}$ y posiciones óptimas de las galgas
$\kappa$	Coefficiente de cortante
$\lambda_{min}$	Mínimo valor singular
$\lambda$	Vector de valores singulares
$\nu$	Módulo de Poisson
$\rho$	Factor de sobredimensionamiento de resistencias
$\sigma_{ii}$	Tensión normal en la dirección $i$
$\bar{\sigma}$	Vector de tensiones
$\bar{\bar{\sigma}}$	Tensor de tensiones
$\sigma^2$	Varianza
$\Sigma$	Matriz de covarianzas
$\tau_{ij}$	Tensión tangencial en la dirección $j$ sobre la dirección de la superficie normal $i$
$\varphi_i$	Posición azimutal de la $i$ -ésima galga
$\tilde{\varphi}, \check{\varphi}$	Desfases arbitrarios en las posiciones azimutales de las galgas
$\varphi$	Vector de posiciones azimutales de las galgas
$\varphi^{opt}$	Vector de posiciones azimutales óptimas de las galgas
$\omega$	Módulo resistente de la sección a flexión

---

## Operadores

---

$\mathbf{v}^\top$	Transpuesta del vector $\mathbf{v}$
$\hat{\mathbf{v}}$	Estimación del vector $\mathbf{v}$
$\{\mathbf{v}\}_B$	Componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base $B$
$\mathbf{v}_k$	Elemento $k$ -ésimo del vector $\mathbf{v}$
$[\mathbf{R}]_{xyz}^{123}$	Matriz de cambio de base de 123 a $xyz$
$\mathbf{M}^\top$	Transpuesta de la matriz $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^{-1}$	Inversa de la matriz $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^+$	Inversa generalizada de Penrose-Moore de la matriz $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}_{ij}$	Elemento $(i,j)$ de la matriz $\mathbf{M}$
$\{\mathbf{M}\}_B$	Componentes del tensor $\mathbf{M}$ en la base $B$
$\overline{PQ}$	Vector posición desde $P$ hasta $Q$
$\partial\mathbf{v}/\partial t$	Derivada parcial del vector $\mathbf{v}$ respecto de $t$



---

## Funciones

---

$\arg(f)$	Argumento de la función $f$
$\text{cond}(\mathbf{M})$	Número de condición de la matriz $\mathbf{M}$
$\det(\mathbf{M})$	Determinante de la matriz $\mathbf{M}$
$\dim(\mathbf{W})$	Dimensión de la matriz $\mathbf{M}$
$E[\mathbf{v}]$	Esperanza matemática del vector $\mathbf{v}$
$\text{mín}(f)$	Mínimo de la función $f$
$\text{null}(\mathbf{M})$	Espacio nulo de la matriz $\mathbf{M}$
$\text{rango}(\mathbf{M})$	Rango de la matriz $\mathbf{M}$
$\text{tr}(\mathbf{M})$	Traza de la matriz $\mathbf{M}$
$\text{var}(\mathbf{v})$	Varianza del vector $\mathbf{v}$



---

## Acrónimos

---

<b>COG</b>	<b>Configuraciones Óptimas de Galgas</b>
<b>EOT</b>	<b>Estimación Óptima del Torsor</b>
<b>FBG</b>	<b>Fiber Bragg Grating</b>
<b>GDL</b>	<b>Grado De Libertad</b>
<b>LSS</b>	<b>Low Speed Shaft</b>
<b>MLE</b>	<b>Maximum Likelihood Estimator</b>
<b>NC</b>	<b>Número de Condición</b>
<b>NREL</b>	<b>National Renewable Energy Laboratory</b>
<b>RMS</b>	<b>Root Mean Square</b>
<b>RSD</b>	<b>Relative Standard Deviation</b>
<b>SHM</b>	<b>Structural Health Monitoring</b>
<b>SVD</b>	<b>Singular Value Decomposition</b>





*A mi padre, madre y hermana...*



# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1. Motivación

**E**N un mundo en constante evolución, donde el equilibrio entre el crecimiento económico y la sostenibilidad ambiental se ha convertido en una prioridad global, la búsqueda de fuentes de energía renovable se ha vuelto más apremiante que nunca. En este contexto, la energía eólica ha emergido como una de las soluciones más prometedoras para satisfacer la creciente demanda de electricidad sin comprometer el medio ambiente.

Los parques eólicos, con sus aerogeneradores que se alzan sobre el horizonte, simbolizan el progreso hacia un futuro más sostenible y limpio. Estas estructuras imponentes aprovechan el poder del viento para convertirlo en energía eléctrica, reduciendo las emisiones de gases de efecto invernadero y disminuyendo nuestra dependencia de los combustibles fósiles. A medida que la conciencia sobre la importancia de la transición hacia fuentes de energía más renovables se ha ido fortaleciendo, la industria eólica ha experimentado un crecimiento exponencial en todo el mundo.

No obstante, a medida que la industria eólica se expande y madura, han surgido desafíos que deben ser superados para aprovechar al máximo este recurso natural. Uno de estos desafíos radica en comprender y optimizar el rendimiento de los aerogeneradores en funcionamiento, así como prolongar su vida útil de manera rentable. Es en este contexto que la presente investigación cobra relevancia, ya que se enfoca en un aspecto fundamental para alcanzar estos objetivos: la estimación precisa de las cargas mecánicas que actúan sobre los componentes mecánicos de los aerogeneradores.

La comprensión de las cargas mecánicas se convierte en un factor clave para el diseño, la operación y el mantenimiento eficientes de los aerogeneradores. Estas estructuras están sujetas a fuerzas variables y complejas debido a la interacción con el viento y otros factores ambientales. Por lo tanto, entender cómo estas cargas mecánicas afectan a la integridad de los aerogeneradores es fundamental para garantizar su funcionamiento óptimo y seguro a lo largo del tiempo.

En este contexto, surge la necesidad clara de evaluar y monitorizar la integridad estructural de los aerogeneradores existentes. Muchos de estos sistemas se encuentran más allá de su vida útil de diseño, y entender su estado actual es esencial para tomar decisiones informadas en términos de mantenimiento, reparación y gestión de activos. La falta de información precisa sobre las cargas mecánicas que actúan sobre los aerogeneradores puede llevar a costosos daños o interrupciones en la generación de energía, lo que hace imperativo desarrollar métodos de estimación confiables y eficientes.

Además, a medida que los aerogeneradores se instalan en ubicaciones cada vez más remotas y difíciles de acceder, se enfrenta el desafío de instalar sistemas de monitorización que proporcionen información suficiente y de calidad sobre las cargas mecánicas. Esta investigación se ha centrado en abordar esta necesidad, desarrollando estrategias para una disposición óptima de sensores que permitan capturar de manera precisa y confiable las deformaciones y por tanto, realizar estimaciones de las cargas a las que están expuestos los aerogeneradores.

La estimación precisa de las cargas mecánicas y la disposición óptima de los sensores desempeñan roles fundamentales en el mantenimiento predictivo de aerogeneradores. Estas estructuras, expuestas a condiciones variables y dinámicas generadas por el viento, requieren una monitorización continua para detectar posibles anomalías y desviaciones antes de que se conviertan en fallos costosos. La estimación de las cargas mecánicas permite evaluar el impacto del viento y otros factores ambientales en la estructura de los aerogeneradores, proporcionando información crucial para su mantenimiento eficiente.

En la actualidad, la estimación de cargas en aerogeneradores se lleva a cabo utilizando puentes completos de Wheatstone, que permiten medir la deformación en la zona de colocación de las galgas extensiométricas. Éstos son ampliamente utilizados y han demostrado ser eficaces para estimar las cargas en los diferentes componentes del aerogenerador. Sin embargo, las configuraciones de galgas extensiométricas utilizadas actualmente están diseñadas para estimar cada componente de carga de forma individual, y en ocasiones puede resultar un inconveniente, por ejemplo, por el reducido espacio disponible para su instalación en determinados componentes mecánicos del aerogenerador. En este sentido, surge la necesidad de investigar y desarrollar nuevas configuraciones óptimas de galgas extensiométricas que sean capaces de estimar varias cargas –o todas– de forma simultánea.

Al lograr esta capacidad de estimar varias cargas simultáneamente, se obtendrían ventajas significativas en la monitorización y control de los aerogeneradores. Por un lado, se simplificaría el proceso de instalación y calibración, ya que se requerirían menos galgas extensiométricas en comparación con las configuraciones actuales que estiman cada componente de carga individualmente. Además, se reducirían los posibles errores asociados a la colocación inadecuada de las galgas o a la falta

---

de precisión en el conocimiento de las propiedades materiales y geométricas de los componentes mecánicos a los que adherir las configuraciones de galgas.

En otro orden de cosas, la falta de precisión o incertidumbre en el proceso de pegado de las galgas extensiométricas al espécimen puede tener un impacto significativo en la estimación de las cargas. Si las galgas se pegan ligeramente desplazadas o giradas con respecto a las posiciones nominales, las deformaciones registradas estarán influenciadas por la respuesta del espécimen en esas áreas cercanas, lo que puede llevar a estimaciones sesgadas de las cargas, que difieren de las reales ejercidas sobre los diferentes componentes del aerogenerador. Además, las galgas extensiométricas tienen una dirección de sensibilidad específica, lo que significa que son más sensibles a las deformaciones en determinadas direcciones. Si se adhieren con una orientación inexacta, la sensibilidad de las medidas puede verse afectada, lo que produciría unas medidas de deformación ligeramente diferentes y por tanto una estimación de las cargas errónea.

De manera similar, las características geométricas del espécimen, como las dimensiones, la forma o la ubicación de los puntos de medición, también influyen en los valores de deformación de las mediciones y en consecuencia en la estimación de las cargas.

Para abordar estos desafíos, podría ser interesante realizar un análisis de sensibilidad para determinar los efectos del posicionamiento erróneo de las galgas extensiométricas en la estimación de las cargas, así como de qué manera afecta la incertidumbre del conocimiento de las propiedades del material y las características geométricas de los componentes del aerogenerador a la hora de realizar las estimaciones de las cargas.

Finalmente, para abordar otro aspecto, hasta la actualidad se han desarrollado sensores especializados destinados a la estimación de las tres fuerzas y los tres momentos que actúan conjuntamente sobre determinados componentes mecánicos. Estos sensores, *ad-hoc*, se instalan de manera personalizada en el componente a monitorizar, adaptándose a su geometría y requerimientos específicos. Sin embargo, nos encontramos con el desafío de que, en el caso particular de los aerogeneradores, la geometría de sus componentes ya está preestablecida y no es modificable para adecuarse a los sensores diseñados a medida.

Ante esta coyuntura, también podría ser interesante emplear una novedosa configuración óptima capaz de estimar las 3 fuerzas y 3 momentos simultáneamente. Esta configuración de galgas extensiométricas será concebida de manera que se pueda adaptar a la geometría circular preexistente en algunos componentes de un aerogenerador. Por ello, sería interesante tratar de implementar una de estas configuraciones de galgas en uno de los componentes a escala del aerogenerador y realizar un minucioso proceso de calibración con el objetivo de evidenciar la aplicabilidad, funcionalidad y capacidad de estimar simultáneamente el torsor completo, es decir, las tres fuerzas y los tres momentos.

## 1.2. Estado del Arte

La monitorización de la salud estructural de aerogeneradores, también conocida como Structural Health Monitoring (SHM), ha experimentado avances significativos en las últimas décadas. Estos avances han sido impulsados por la necesidad de maximizar la vida útil de los aerogeneradores, mejorar su rendimiento y reducir los costos asociados con el mantenimiento y reparación [1, 2].

A medida que la industria eólica ha crecido, la necesidad de desarrollar técnicas efectivas de SHM se ha vuelto cada vez más evidente. En la década de 1990, se realizaron investigaciones pioneras en SHM para aerogeneradores. Michaels *et al.* [3] presentaron una estrategia de monitorización de la salud estructural de aerogeneradores utilizando sensores y técnicas de vibración. Su estudio sentó las bases para la aplicación del SHM en aerogeneradores y estableció los fundamentos para la monitorización continua de la salud estructural de las turbinas eólicas.

Durante la década del 2000, se produjo un creciente interés en la implementación práctica de técnicas de SHM en la industria eólica. Investigadores como Van Damme *et al.* [4] desarrollaron una red de sensores inalámbricos descentralizados para la monitorización de palas de aerogeneradores. Su propuesta permitió la recolección de datos en tiempo real y proporcionó información valiosa sobre la respuesta estructural de las palas bajo diferentes condiciones de carga. Además, Zhu *et al.* [5] investigaron el uso de sensores de rejilla de fibra óptica de Bragg para la monitorización de la salud estructural de palas de aerogeneradores, demostrando su efectividad en la medición de deformaciones y detección de daños.

En la última década, el uso de técnicas avanzadas de monitorización y análisis de datos ha revolucionado el campo de la monitorización de la salud estructural de aerogeneradores. En 2015 Wang *et al.* [6] propusieron un marco basado en datos para la detección y localización de daños en aerogeneradores utilizando técnicas de *Machine Learning* y análisis de vibraciones. Esta metodología aprovechaba la abundancia de datos disponibles a través de los sensores para mejorar la detección temprana de anomalías y la identificación precisa de las ubicaciones donde se producen los daños. Asimismo, Park *et al.* [7] realizaron una revisión exhaustiva de las técnicas basadas en vibraciones para la monitorización de palas de aerogeneradores, destacando la importancia de las mediciones precisas y el análisis avanzado de datos para la detección de daño y la evaluación de la salud estructural.

Continuando con el avance en el campo de la SHM de aerogeneradores, es fundamental considerar la selección adecuada de sensores para la obtención de información precisa a partir de los mismos. Por ello, el tipo de sensores que deben utilizarse, su ubicación y la información que puede obtenerse mediante ellos han sido temas de investigación en las últimas décadas en diversos campos de la ingeniería. Debido a su precisión y bajo coste unitario, las galgas extensiométricas son uno de los sensores más utilizados. Éstos se adhieren al componente de interés en los lugares donde se desea conocer la deformación mecánica. Las galgas suelen montarse en puentes de Wheatstone que producen una medida de tensión eléctrica proporcional a la deformación que sufren las galgas [8, 9, 10].

Las medidas de la deformación se utilizan para determinar indirectamente otras propiedades como cargas o deflexiones, que pueden no ser directamente medibles

con un sensor. Por ejemplo, Zhang *et al.* [11] emplearon galgas extensiométricas para estimar las cargas en rodamientos de maquinaria rotativa mediante el método de las tres secciones, considerando la deflexión por flexión con galgas situadas en la parte superior e inferior de un modelo plano del eje. Las galgas extensiométricas también se han utilizado en el diseño de sensores de fuerza en uno o varios ejes. Templeman *et al.* [12] en una reciente investigación presentan una revisión del estado del arte de los sensores de fuerza multi-eje basados en diferentes tecnologías de detección de deformación, siendo las galgas extensiométricas una de ellas. Estos sensores de fuerza suelen utilizar la deformación debida a las cargas de flexión para medir las cargas. Un ejemplo puede ser el dinamómetro presentado en [13], que utiliza la deformación por flexión para determinar la fuerza de corte en un proceso de mecanizado.

También, en el ámbito de la ingeniería civil, las galgas extensiométricas han demostrado ser valiosas para la monitorización de estructuras como puentes y edificios. Por ejemplo, Žnidarič *et al.* [14] utilizaron galgas extensiométricas para medir la deformación en un puente colgante y evaluar su comportamiento estructural. Asimismo, Zhao *et al.* [15] emplearon galgas extensiométricas en un estudio de evaluación de la salud estructural de un edificio utilizando datos de deformación. Estos estudios resaltan la utilidad de las galgas extensiométricas para la obtención de información precisa sobre la respuesta estructural en tiempo real.

Además de su aplicación en ingeniería civil, las galgas extensiométricas también han sido utilizadas en otros campos. En la industria automotriz, por ejemplo, se han empleado para medir la deformación en componentes críticos como chasis y carrocería, lo que permite evaluar su resistencia y seguridad. Un estudio realizado por Hildebrand *et al.* [16] presenta una metodología para la medición de deformaciones en componentes automotrices utilizando galgas extensiométricas.

En definitiva, el SHM en aerogeneradores, al igual que en el resto de ámbitos de la ingeniería, es de gran importancia para garantizar un funcionamiento óptimo y seguro de estas estructuras clave en la generación de energía renovable. El uso de técnicas avanzadas de monitorización, como el análisis de datos y técnicas de *Machine Learning*, han revolucionado el campo de la monitorización de aerogeneradores en la última década. En los sucesivos Apartados, se va a explorar el estado del arte de los principales capítulos de estas tesis, examinando con detenimiento las investigaciones innovadoras más recientes.

### 1.2.1. Estimación óptima del torsor completo

La estimación de cargas mecánicas es una línea de investigación de gran importancia en una variedad de aplicaciones industriales y científicas, y es particularmente relevante en el campo de la energía eólica. Los aerogeneradores, que convierten la energía cinética del viento en electricidad, están sujetos a una variedad de cargas mecánicas, incluyendo fuerzas de viento, gravedad, y tensiones internas en la estructura. Estas cargas pueden variar ampliamente en magnitud y dirección, dependiendo de factores como la velocidad y dirección del viento, la orientación de la turbina, y la operación del sistema de control de la turbina. Por lo tanto, la capacidad de estimar con precisión estas cargas es crucial para garantizar la operación eficiente y segura de los aerogeneradores.

La estimación de las cargas mecánicas normalmente se lleva a cabo mediante el uso de sensores que se adhieren a la superficie del componente a monitorizar y miden determinadas magnitudes físicas, como por ejemplo, la deformación o el desplazamiento. Estos sensores, se basan en la premisa de que hay una relación lineal entre la magnitud física que se mide y aquella (o aquellas) que se desea estimar. En el contexto de sensores de deformación, como puede ser una galga extensiométrica, esta relación se puede representar como:

$$\varepsilon = \mathbf{w}\mathbf{t} \quad (1.1)$$

donde  $\varepsilon$  es la deformación medida por la galga,  $\mathbf{t}$  es el conjunto de cargas mecánicas que se desean estimar y  $\mathbf{w}$  es el vector de observación que contiene toda la información del sistema mecánico. A partir de medidas de deformación de varios sensores en diferentes instantes de tiempo y el conocimiento del vector de observación  $\mathbf{w}$ , se podría resolver un sistema lineal de ecuaciones para obtener una estimación de las cargas mecánicas que están actuando sobre el componente del aerogenerador donde se han instalado las galgas.

A lo largo de las últimas décadas, se han realizado numerosos avances en la estimación de cargas mecánicas. Una de las aplicaciones más comunes implica el uso de sensores para estimar directamente las fuerzas y momentos que actúan sobre la estructura de la turbina. Sin embargo, la ubicación y orientación de estos sensores puede tener un impacto significativo en la precisión de las estimaciones de las cargas. Así pues, los investigadores a lo largo del último siglo han desarrollado varios criterios de optimización para determinar el posicionamiento óptimo de los sensores. Estos criterios buscan maximizar la precisión de las estimaciones de carga, minimizar el error de medición, y garantizar que los sensores estén ubicados en áreas de alta sensibilidad a las cargas de interés.

Uno de los primeros trabajos sobre estimación de cargas fue realizado en el contexto de la robótica por Uchiyama *et al.* [17] en 1991. Éstos propusieron un procedimiento sistemático para el diseño estructural de sensores de fuerza/momento de un robot a partir de medidas de deformación de galgas. Emplearon un índice basado en el número de condición de la matriz de observación y demostraron a partir del análisis por elementos finitos cómo la minimización de este índice conducía a un diseño óptimo del sensor con un menor error de medición. Finalmente, a partir de 8 galgas extensiométricas diseñaron el sensor y realizaron una minuciosa calibración hasta concluir el correcto rendimiento del mismo.

Un año más tarde, en 1992, Bicchi [18] desarrolló una novedosa técnica para el diseño óptimo de sensores de fuerza/momento multi-eje mediante galgas extensiométricas. Ésta se fundamentaba en la minimización de una función objetivo matemática que correspondía con la optimización de la precisión del sensor. La función objetivo, se basaba en el cálculo del número de condición de la matriz de observación del modelo con el objetivo de optimizar el número y posición de los sensores. Bicchi además, apuntó que el número óptimo de sensores es aquel que minimiza el número de condición del criterio, y remarcó que la adición de sensores redundantes puede afectar negativamente al número de condición, dando lugar a sensores menos precisos. Bicchi logró, como resultado de su trabajo, determinar las posiciones óptimas de los sensores de deformación en una configuración compuesta



por 6 galgas, la cual permitía la estimación simultánea del torsor completo en ejes de sección transversal circular.

En esta misma línea, Mignolet y Choi [19] en 2002 desarrollaron una estrategia automática para seleccionar las posiciones y orientaciones óptimas de los sensores de deformación para capturar de la mejor manera la respuesta modal de una pala de aerogenerador. Utilizaron un algoritmo genético para optimizar la relación señal-ruido de las medidas de deformación, teniendo en cuenta el ruido inherente del sistema y el posicionamiento incorrecto de los sensores. Concluyeron que la metodología propuesta se puede utilizar para seleccionar las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas extensiométricas en las palas a fin de capturar la respuesta modal de la pala, incluso en presencia de errores de posicionamiento aleatorios de los sensores.

Además del índice de observabilidad basado en el número de condición de la matriz de observación del sistema, en 2008, Sun y Hollerbach [20] llevaron a cabo un estudio sobre la selección de los índices de observabilidad para la calibración de robots. Analizaron varios índices de observabilidad, entre los que se incluyen el D-Optimality y el E-Optimality. Llegaron a la conclusión de que D-Optimality es el mejor índice para minimizar la varianza de los parámetros. Sin embargo, para minimizar la incertidumbre en los pares aplicados en las articulaciones del robot, concluyeron que el criterio E-Optimality es el mejor índice de observabilidad<sup>1</sup>.

El criterio D-Optimality se ha empleado en diversas referencias como [21, 22, 23] en el contexto de *Posicionamiento Óptimo de Sensores (Optimal Sensor Placement)*. Estas referencias describen procedimientos de optimización basados en la *matriz de información de Fisher* [24] para la optimización de la posición de diferentes sensores. Uno de los primeros trabajos en este contexto es el de Udwadia [25], en la que se presenta una metodología de identificación de parámetros para la optimización de la posición de los sensores para diferentes números de ellos. En [26] se presenta una metodología para la colocación óptima de sensores basada en la *matriz de información de Fisher* y se investiga el efecto que tiene el daño en la estructura en el rendimiento de los sensores.

En 2012, Li *et al.* [27] desarrollaron una metodología de posicionamiento de sensores dependiente de la carga para la monitorización de la salud estructural de sistemas, considerando tanto las características dinámicas estructurales como las condiciones de carga reales. El objetivo del método propuesto era lograr una estimación insesgada de las coordenadas modales, y en consecuencia, la mejor identificación modal y de daño. Seleccionaron las posiciones óptimas de los sensores mediante la aproximación de las respuestas estructurales reales con las formas modales de interés y realizaron los experimentos en una cercha de seis pisos para validar la metodología.

Asimismo Sarangi *et al.* [28] en 2013 llevaron a cabo una investigación para verificar experimentalmente la ubicación óptima de los sensores de deformación y su importancia en la determinación precisa de los factores de intensidad de esfuerzo del modo I o de tracción. Utilizando la técnica de una sola galga de Dally y Sanford, demostraron que se pueden determinar valores altamente precisos de los factores de

<sup>1</sup>En el modelo lineal de la Ecuación 1.1 que relaciona la deformación de una galga y el torsor, los parámetros resultarían ser las componentes del torsor externo  $\mathbf{t}$ , mientras que el par aplicado en la articulación del robot sería análoga a la deformación  $\varepsilon$  de la galga.

intensidad de esfuerzo si los sensores de deformación se colocan en las ubicaciones óptimas.

En el contexto de la industria ferroviaria, Bagheri *et al.* [29] en 2017 propusieron una metodología para la estimación de las fuerzas de contacto rueda-raíl y el posicionamiento óptimo de galgas extensiométricas en un conjunto de ruedas de tren. La investigación se basa en la eliminación de armónicos indeseados mediante una nueva disposición de los sensores en el puente de Wheatstone y en el velo de la rueda. La metodología que emplearon proporcionaba la mejor ubicación radial de las galgas en la rueda para atenuar el efecto del ruido en el sistema de medición.

En 2021, Ahmad *et al.* [30] avanzaron en la estimación del torsor completo y el posicionamiento óptimo de sensores al diseñar un sensor de fuerza/momento de seis ejes con una disposición revolucionaria de 32 galgas extensiométricas. Utilizaron el método SQP (*Sequential Quadratic Programming*) para optimizar el diseño estructural y validaron sus resultados mediante un modelo de elementos finitos, logrando reducir significativamente el error de medición a 1.15 %, la mejor publicada hasta ese momento.

Uno de los últimos trabajos realizados en el contexto de posicionamiento de sensores fue llevado a cabo por Mehrjoo *et al.* [31] en 2022. Desarrollaron un procedimiento basado en un método bayesiano para el posicionamiento óptimo de galgas. Mediante esta técnica lograron estimar los parámetros, monitorizar las condiciones y detectar virtualmente las tensiones de una turbina eólica *off-shore* atendiendo a los costes de instalación de los sensores.

Además del posicionamiento óptimo de los sensores, también se han realizado avances significativos en el desarrollo de sensores para la estimación de las componentes del torsor conjuntamente. Estos sensores, que a menudo se basan en tecnologías como las galgas extensiométricas o la fibra óptica, son capaces de estimar simultáneamente todas las componentes del torsor, proporcionando una imagen completa de las cargas que actúan sobre la estructura. Los avances en este área han incluido mejoras en la precisión y fiabilidad de los sensores, así como minimizar el error de medición.

Uno de los trabajos que ha tenido gran impacto fue aquel realizado por Liu y Tzo [32] en 2002. Los autores propusieron un novedoso sensor de fuerza/momento de seis ejes, empleando galgas, que estaba formado por cuatro barras en  $\Gamma$  idénticas. A través de un análisis mediante elementos finitos en conjunto con una optimización del diseño para obtener altas sensibilidades de medición, lograron un sensor formado por 20 galgas con una buena isotropía y sensibilidad de medición.

Unos años más tarde, en 2011 Mastinu *et al.* [33] también desarrollaron un sensor de fuerza/momento de seis ejes, cuyo elemento sensor era una estructura formada por tres radios con galgas. Esta estructura, unida al marco de la celda de carga mediante articulaciones especiales diseñadas para evitar la fricción, permitió una medición precisa de las tres componentes de una fuerza y uno de los momentos que actúan sobre el propio sensor.

En 2013 en la Universidad Politécnica de Milán, Ballo *et al.* [34] realizaron avances significativos en el diseño y construcción de una célula de carga de seis ejes. El

elemento estructural de detección de la célula de carga estaba formado por una estructura de tres radios con 8 galgas extensiométricas cada una. Tras una cuidadosa calibración pudieron demostrar la alta precisión y linealidad del mismo.

Otro trabajo interesante fue realizado por Yuan *et al.* [35] donde presentaron en 2015 un sensor de fuerza/momento de seis ejes con un diseño muy compacto para el pie de un robot humanoide. El sensor tenía un grosor de 12 mm, es decir, más delgado que la mayoría de los sensores multi-eje que existen en la actualidad. Emplearon materiales de bajo costo y un total de 16 galgas extensiométricas para que el sensor fuera más asequible que otros sensores comerciales. Los resultados de los ensayos de validación indicaron que el sensor tenía una buena sensibilidad y un error de linealidad inferior al 0.62 %.

Finalmente, uno de los últimos trabajos fue realizado por Huang *et al.* [36] en 2018. Los investigadores lograron diseñar un novedoso sensor de fuerza/momento de seis ejes basado en la tecnología de fibra óptica para aplicaciones robóticas. Este sensor utilizaba un elemento de detección elástico compuesto por 4 vigas flexibles y 4 vigas cruzadas elásticas para convertir las fuerzas y momentos en tensión en las superficies de las vigas cruzadas elásticas, que a su vez eran detectada por 16 rejillas de *Fibra de Bragg* (FBG). La tensión la obtuvieron mediante el análisis teórico utilizando la teoría de la viga de Timoshenko y fue validado mediante un análisis de elementos finitos.

### 1.2.2. Parámetros omitidos

La modelización estadística, y en particular la estimación de parámetros en modelos lineales, es una herramienta crucial para comprender y predecir fenómenos en una amplia gama de disciplinas científicas. A menudo, el modelo ideal es aquel que puede explicar completamente un fenómeno observado utilizando un conjunto claro y conciso de parámetros. Sin embargo, la realidad es que los fenómenos naturales son complejos y a menudo intervienen múltiples factores. Esto lleva a la necesidad de considerar diferentes conjuntos de parámetros.

El primer grupo, que podríamos llamar *parámetros de interés*, incluye aquellas variables que el investigador busca comprender y cuantificar activamente. Estos parámetros son vitales para las inferencias y conclusiones que se desean extraer del modelo. Por otro lado, existen *parámetros omitidos* que son aquellos que no tienen interés pero que pueden afectar las estimaciones de otros parámetros que sí son de interés. Aunque estos tienen el potencial de influir en el resultado, pero no son el foco principal del estudio. Podrían estar presentes debido a la estructura inherente del sistema que se está estudiando o simplemente para controlar la variabilidad no explicada por los parámetros de interés. La presencia de estos parámetros puede complicar la interpretación del modelo, ya que su influencia debe ser considerada, pero no son el objetivo principal de la investigación.

Esta dualidad en el abordaje de la modelización refleja una tensión inherente en la estadística: la necesidad de equilibrar la precisión con la simplicidad. Aunque la inclusión de múltiples conjuntos de parámetros puede proporcionar una descripción más completa y precisa de un fenómeno, también puede complicar la interpretación y aplicación práctica del modelo. Por lo tanto, es fundamental ser conscientes de esta

distinción y considerar cuidadosamente qué parámetros incluir y cómo priorizarlos en su análisis.

Una de las primeras investigaciones realizada con los parámetros omitidos fue llevada a cabo por Fellman [37] en 1976. En ella analizó el efecto de la presencia de parámetros omitidos en modelos lineales y presentó un método para la estimación de los mismos basada en la generalización del teorema de Markoff propuesta por Rao [38]. Fellman también analizó la precisión de las estimaciones y cómo la presencia de parámetros omitidos puede afectar a la estimación de los parámetros estimables. Asimismo, Cox y Reid [39] estudiaron diversos modelos lineales con parámetros omitidos y concluyeron que los parámetros omitidos deben ser ortogonales a los parámetros de interés. Kubáček [40] estudió más a fondo los modelos lineales mixtos con parámetros omitidos y proporcionó una prueba de la existencia del *Locally Minimum Variance Quadratic Unbiased Invariant Estimator*. En 1991 Godambe [41] propuso una técnica de ortogonalización de parámetros para abordar el problema de los parámetros omitidos dentro de modelos totalmente paramétricos y semiparamétricos.

Una década más tarde, Kunderová [42] estudió los modelos lineales con parámetros omitidos y su aplicación en la medición de deformación, y probó que cuando se trata de investigar deformaciones únicamente es posible despreciar los parámetros omitidos. También logró presentar una transformación del modelo lineal que eliminaba los parámetros omitidos sin pérdida de información sobre los parámetros de interés [43].

En 2012, Aravkin y Leeuwen [44] propusieron un método para estimar de manera eficiente los parámetros omitidos en problemas inversos. La investigación se basaba en proyectar un subconjunto de variables a una amplia variedad de problemas de máxima verosimilitud y máxima verosimilitud *a posteriori*<sup>2</sup> con parámetros omitidos, como la varianza. Como resultado, fueron capaces de incorporar la estimación de parámetros omitidos en problemas a gran escala, con y sin restricciones.

Uno de los trabajos más recientes fue realizado por Suzuki *et. al* en 2020 [45] en el que se enfocaron en la estimación del estado cuántico en presencia de parámetros omitidos. En él, abordaron diferentes escenarios y métodos para estimar los parámetros de interés del modelo, sin la influencia de los parámetros omitidos. Asimismo, en 2022 Lok [46] proporcionó una metodología general para el cálculo de la varianza de los parámetros de interés cuando los parámetros omitidos se estiman en un primer paso. Concluyeron que la estimación de los parámetros omitidos puede reducir significativamente la varianza de los parámetros de interés.

### 1.2.3. Incertidumbre en configuraciones de galgas

La estimación precisa de fuerzas y momentos en materiales sólidos es una tarea crítica en muchos campos de la ingeniería. Las galgas extensiométricas han sido ampliamente utilizadas en este contexto, permitiendo mediciones fiables y precisas. Sin

---

<sup>2</sup>Al igual que la estimación por máxima verosimilitud, busca maximizar la probabilidad de obtener datos observables, pero lo hace teniendo en cuenta el conocimiento previo que se tiene sobre los parámetros.

embargo, la implementación y uso de estos sensores implican diversos desafíos y consideraciones que pueden afectar la precisión de las estimaciones.

Estas imprecisiones tienen como origen diversas fuentes de incertidumbre, las cuales se propagan hasta el cálculo final de las estimaciones de las fuerzas y momentos. Esta propagación de incertidumbre no solo depende de los factores técnicos asociados con las galgas extensiométricas, sino también de las propiedades mecánicas y geométricas del espécimen a monitorizar, condiciones ambientales del entorno, etc. La interacción de estas fuentes de incertidumbre puede llevar a una considerable variabilidad en las estimaciones, y requiere de un análisis cuidadoso para entender y mitigar su impacto.

En la incertidumbre de la medición de las galgas extensiométricas influyen muchos factores. Entre ellos se encuentran la sensibilidad transversal, las variaciones de temperatura, las no linealidades del puente de Wheatstone, la resistencia intrínseca de los cables y los parámetros de las galgas extensiométricas [47, 48]. Una de las posibles incertidumbres que no ha recibido mucha atención es aquella relacionada con la precisión de instalación (posición y orientación) con la que se adhieren las galgas sobre la superficie del sólido a monitorizar. Es decir, evaluar la incertidumbre en la estimación de cargas debida a la incertidumbre en el posicionamiento de las galgas, especialmente si existen otras cargas adicionales además de aquella carga a estimar. Estas cargas adicionales se denominan *cargas secundarias* y se sabe que su presencia puede afectar drásticamente a la estimación de la carga de interés debido al denominado efecto de *cross-talk*. Además, en la mayoría de las referencias de la bibliografía tampoco se menciona cómo las tensiones mecánicas se transforman en fuerzas y momentos a través de la geometría del sólido sobre el que se fijan las galgas. Por lo tanto, esta incertidumbre también depende de los parámetros geométricos y de material del sólido (áreas y momentos de la sección transversal, módulos de Young y de Poisson, etc.).

Dos de las primeras referencias en las que se menciona la incertidumbre asociada a las imprecisiones en el posicionamiento de las galgas datan de los años 40 y 50 [49, 50]. En estas referencias y en la mayoría de las posteriores [48, 51], la incertidumbre se propaga de las deformaciones a las tensiones (no a las cargas) y suponen que la tensión es uniaxial o que la tensión es biaxial con direcciones principales conocidas.

Una primera aproximación a la sensibilidad cruzada en términos de cargas para un eje cilíndrico fue investigada por James en 1988 [52]. Éste evaluó la incertidumbre introducida en un puente de Wheatstone, destinado a estimar el momento torsor, debido al posicionamiento erróneo de las galgas y en presencia también de la carga axial. Más recientemente, se realizó un análisis de sensibilidad cruzada debida al posicionamiento erróneo de las galgas extensiométricas [53]. Este análisis se realizó para un transductor de anillo extendido específicamente diseñado para estimar cargas, y concluyeron que debe prestarse especial atención en el posicionamiento de las galgas extensiométricas para minimizar las sensibilidades cruzadas.

El efecto de posicionamiento de las galgas depende principalmente de tres factores [48]: (a) la relación entre la deformación algebraica máxima y mínima en los dos ejes principales, (b) el ángulo entre el eje de la deformación principal máxima y el eje de la deformación que se pretende medir, y (c) el error angular de instalación entre el eje de la galga y el eje de la deformación que se pretende medir. Aunque estas

condiciones se mencionan en varias referencias, en ningún caso se tiene en cuenta que los dos primeros factores pueden variar con el tiempo en un sistema en el que las tensiones son de tipo biaxial. En el problema que se investiga en esta tesis, las deformaciones que se producen en cada punto del perímetro de un componente dependen del torsor completo (fuerzas y momentos) ejercido en cada instante de tiempo. Por lo tanto, las condiciones (a) y (b) varían constantemente con el tiempo y hacen que la incertidumbre de estimación de la carga sea muy diferente de un instante a otro.

El efecto de *cross-talk* ya se ha investigado en estudios relacionados con el análisis del momento torsor en el eje lento (Low Speed Shaft–LSS) de aerogeneradores. Pedersen *et al.* [54] observaron que, en maniobras de Idling<sup>3</sup> en las que el momento torsor estimado debería ser próximo a cero, la estimación del momento torsor variaba en  $\pm 1$  kN debido a pequeñas imprecisiones en el posicionamiento de las galgas extensiométricas instaladas en el LSS. Asimismo, Zhang *et al.* [55] también observaron el efecto de *cross-talk* entre los esfuerzos cortante y torsión, y diseñaron un método de medición multicanal con tres puentes de Wheatstone para suprimir su efecto. Esta metodología demostró una manera eficaz para reducir la perturbación relacionada con el efecto de *cross-talk*.

Es relevante señalar que, aunque los sistemas de galgas extensiométricas pueden calibrarse incluso en estructuras tan grandes como los aerogeneradores [56, 57, 58, 59], la calibración no puede manejar las incertidumbres relacionadas con el efecto de *cross-talk* causadas por los desalineamientos de las galgas extensiométricas sin un cálculo completo de la matriz de calibración como hacen, por ejemplo, Chavez *et al.* [60] para dispositivos pequeños.

#### 1.2.4. Calibración de sensores

La calibración de sensores destinados a la estimación de cargas es un proceso vital en numerosas aplicaciones industriales, científicas y tecnológicas. A partir de este procedimiento se asegura que los sensores encargados de medir una magnitud física –ya sean eléctricas, mecánicas, térmicas u otras– operen con precisión y proporcionen una medida fiable de la magnitud a medir. Existen diversas técnicas para calibrar sensores en función de su tipo, la naturaleza de la magnitud física que se está midiendo, y los requisitos específicos de la aplicación en cuestión. Algunas de estas técnicas pueden ser relativamente sencillas, basadas en comparaciones con patrones de calibración conocidos. Otras pueden ser altamente complejas, incorporando modelos matemáticos avanzados y simulaciones para ajustar los sensores con precisión. La elección de la técnica de calibración adecuada puede depender de varios factores, como la precisión requerida, el entorno operativo, y el costo. No importa cuán avanzado sea un sensor, si no está calibrado correctamente, puede dar lugar a grandes errores de medición.

Por lo general, la calibración de sensores se puede dividir en dos tipologías diferentes: estática y dinámica. La calibración estática consiste en medir las magnitudes

---

<sup>3</sup>La maniobra de Idling en un aerogenerador se refiere al proceso de reducir o detener la producción de energía, generalmente al disminuir la velocidad de rotación de las palas o desconectar la turbina del generador, manteniendo así la operación en un estado de baja actividad o ralenti sin apagar completamente el sistema.

físicas en condiciones estables y controladas, sin cambios durante el período de medición. Este método es altamente preciso, ya que elimina las variaciones temporales que podrían afectar la lectura. La calibración estática es especialmente útil cuando se necesita una alta precisión y se tiene control sobre las condiciones de medición, como en laboratorios o entornos industriales controlados.

Por otro lado, la calibración dinámica se aplica cuando las magnitudes físicas varían con el tiempo. Esta técnica tiene en cuenta las fluctuaciones y permite que los sensores respondan de manera efectiva a cambios rápidos en la magnitud física a medir. Si bien es vital en situaciones donde las condiciones son inherentemente cambiantes, la calibración dinámica puede ser más compleja y desafiante de implementar correctamente.

En cuanto a los sensores de deformación se refiere, como las galgas extensiométricas que nos ocupan, la técnica de calibración más común para su correcta operación resulta ser la calibración estática. Ésta implica la aplicación de cargas conocidas al espécimen sensorizado y la medición de la deformación en las posiciones de los sensores. La relación entre la carga aplicada y la deformación medida se utiliza para establecer una curva de calibración, que *a posteriori* en el proceso de monitorización se emplea para transformar las medidas de deformación en estimaciones de carga.

En 2014 el Instituto Tecnológico de Harbin de la mano de los investigadores Sun *et. al* [61] diseñaron y calibraron un sensor de fuerza/momento de seis ejes para su posterior instalación en un manipulador serie de 7 GDL para aplicaciones espaciales. El sensor estaba compuesto por 6 galgas extensiométricas y se centraron en mejorar la precisión del proceso de calibración del sensor mediante el estudio de las diferentes fuentes de incertidumbre del sistema de calibración.

A su vez, Freddi *et. al* [62] diseñaron un sensor de fuerza/momento de seis ejes compuesto por 16 galgas extensiométricas. Realizaron una calibración estática experimental del sensor, aplicando cargas crecientes y decrecientes de manera escalonada, hasta alcanzar el valor del fondo de escala. Una vez registrados los valores de deformación de las galgas, interpolaron linealmente los datos hasta obtener la relación empírica entre las cargas y la deformación de las galgas. Así pues, realizaron un ensayo de validación y lograron un buen desacoplamiento entre las diferentes cargas y un error de estimación menor al 11 % para uno de los momentos flectores, un error del 100 % para la fuerza axial y un error inferior al 3 % en la estimación del resto de cargas. Concluyeron que los errores de estimación obtenidos eran grandes, y en particular, para la fuerza axial y los momentos flectores.

Ese mismo año 2015, Gil *et. al* [63] realizaron un estudio centrado en la calibración de un sensor situado en el eje lento de un aerogenerador de accionamiento directo de 750 kW (KBP-750D). Emplearon un sistema de adquisición con 40 canales de entrada y 12 galgas extensiométricas (dispuestas en tres puentes completos de Wheatstone) para la estimación de los momentos de flexión y torsión. A continuación llevaron a cabo un minuciosa calibración mediante la aplicación de cargas externas conocidas en los extremos de las palas del aerogenerador. Los autores destacaron que la calibración *in situ* no fue una tarea fácil debido a la frecuente rotura de los puentes de galgas extensiométricas causada por el frío intenso.

Pocos años más tarde, Liang *et. al* [64] propusieron un método de calibración e investigaron sobre el desacoplamiento de un sensor genérico de fuerza/momento

multi-eje aplicado a robótica. Éste estaba compuesto por varios puentes completos de Wheatstone y su aplicación principal era la adquisición de información háptica en cirugía virtual y en la medición de la fuerza interactiva entre herramientas quirúrgicas y tejidos blandos. La calibración del sensor la realizaron empleando técnicas con *Redes Neuronales de Retropropagación* y *Machine Learning*, logrando unos errores de acoplamiento en las cargas del 0.1 %.

Finalmente, una de las investigaciones más novedosas fue realizada por Al-Mai [65] también en 2018. En ella diseñaron un ligero sensor óptico de fuerza/momento de seis ejes, formado por multitud de elementos (espejos reflectantes, fibra óptica, LEDs y LTVs, etc.), que a partir de variaciones en la intensidad de la luz era capaz de estimar las fuerzas y momentos de contacto entre el pie humano y el suelo durante la marcha. La calibración del sensor se llevó a cabo utilizando un nuevo procedimiento basado en el modelo de estimación *Least Squares Decision Trees* (LSDT), y logró reducir los errores de estimación a un 0.53 % y aumentar en un 55.17 % la velocidad de estimación.

### 1.3. Objetivos

El propósito central de esta tesis doctoral radica en ampliar el conocimiento sobre la estimación óptima de cargas mecánicas en secciones circulares y su potencial aplicación en el contexto de los aerogeneradores. Más concretamente, se pretende estimar el torsor de cargas aplicadas en los componentes de sección circular mediante sensores de deformación que puedan colocarse en el aerogenerador una vez que éste está construido y en funcionamiento, y que el sensor pueda implementarse independientemente de cuál sea el diseño del aerogenerador. En consecuencia, se han establecido una serie de objetivos específicos, los cuales comprenden:

- Modelado de las deformaciones en un punto de la superficie de un eje cilíndrico sometido a un torsor de esfuerzos genérico.
- Optimización de configuraciones de un número indefinido de galgas extensiométricas en base a un modelo analítico de eje para la estimación del torsor completo o algunas componentes del mismo simultáneamente.
- Estudio de propagación de la incertidumbre en presencia de errores en el posicionamiento de las galgas extensiométricas y desconocimiento con precisión de los parámetros de material y geométricos del componente del aerogenerador.
- Determinación de una metodología de calibración del sistema de medida en base a mediciones de galgas en prototipo a escala.

### 1.4. Organización de la Tesis Doctoral

La estructura de esta tesis doctoral sigue una organización dividida por Capítulos. A través de esta estructura, se abordan de manera sistemática y secuencial los distintos aspectos relacionados con la temática de investigación. Cada capítulo



---

se centra en un aspecto específico del estudio, proporcionando una estructura clara y lógica para el desarrollo de la investigación y la presentación de los resultados obtenidos.

En el Capítulo 2 se calcula la deformación de una galga situada arbitrariamente, considerando que está colocada en el perímetro de la sección transversal circular. Se obtiene una expresión explícita de la deformación de la galga en función de las componentes de fuerza y momento del torsor externo en la sección específica del eje. Más adelante se muestra cómo puede estimarse el torsor externo completo a partir de las medidas de deformación de un conjunto de galgas. La posición y orientación de las galgas en la periferia del eje se optimizan para estimar los componentes del torsor según diferentes criterios de optimización. Dado que las medidas de deformación de las galgas también pueden verse afectadas por los cambios de temperatura, también se presenta un procedimiento para compensar la deformación térmica. Finalmente se presenta una colección de configuraciones óptimas de galgas obtenida a partir de los diferentes criterios de optimización y restricciones impuestas.

El Capítulo 3 presenta una metodología para obtener nuevas configuraciones óptimas de galgas extensiométricas que permitan estimar determinadas componentes del torsor externo sin la influencia de otras componentes. A continuación, se desarrolla un algoritmo de optimización y se obtienen configuraciones óptimas para la estimación de diferentes cargas compensando la deformación térmica. Además, se propone un método para el cálculo de la varianza de estimación de los parámetros de interés. Finalmente, se presenta una colección de novedosas configuraciones óptimas para la estimación de determinadas componentes del torsor simultáneamente.

En el Capítulo 4 se definen las posiciones y orientaciones nominales de las galgas extensiométricas en los puentes típicos de Wheatstone y determinadas configuraciones novedosas, así como las matrices de relación inversa para la estimación de las cargas a partir de las medidas de deformación. Posteriormente, se presenta el procedimiento llevado a cabo para el análisis de sensibilidad y se calcula una expresión analítica mediante las series de Taylor para obtener una estimación de la incertidumbre de las cargas estimadas. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos desde cuatro perspectivas diferentes tras el análisis de sensibilidad aplicado a un aerogenerador.

A continuación, en el Capítulo 5 se realiza la calibración estática de una de novedosa configuración óptima obtenida en el Capítulo 2 para la estimación de todas las componentes del torsor externo simultáneamente. Se fabrica un eje hueco a escala para la instalación de la configuración de galgas y se realizan un total de 6 experimentos de calibración aplicando diferentes cargas en cada uno de ellos. Una vez establecida la relación lineal entre las deformaciones de las galgas y las diferentes componentes del torsor, se obtiene la matriz de observación experimental. Finalmente, se realiza la validación del procedimiento de calibración por medio de un experimento adicional, concluyendo que la configuración de galgas proporciona una buena precisión y fiabilidad en la estimación del torsor externo.

Finalmente, en los Capítulos 6 y 7, se exponen las conclusiones alcanzadas en esta tesis doctoral, así como una serie de propuestas para futuras investigaciones y líneas de trabajo. Estos Capítulos brindan un cierre a la investigación realizada, resumiendo los hallazgos clave y destacando las implicaciones y perspectivas que surgen a

partir de los resultados obtenidos. Además, se plantean posibles direcciones para ampliar el conocimiento y profundizar en áreas relacionadas con el tema abordado en esta tesis doctoral.

## CAPÍTULO 2

---

## ESTIMACIÓN ÓPTIMA DEL TORSOR COMPLETO EN EJES MEDIANTE GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS

---

**E**STE segundo Capítulo describe el procedimiento para la obtención de nuevas configuraciones de galgas extensiométricas para la estimación de cargas mecánicas en ejes cilíndricos basado en cuartos de puente de Wheatstone. Para ello, en primer lugar a partir de un conjunto de bases, parámetros y coordenadas se determina la expresión explícita de la deformación de una galga arbitraria en función de las componentes del torsor externo aplicado al eje. A continuación, a partir de tres criterios de optimización diferentes, se obtiene una colección de configuraciones de galgas novedosas. Finalmente, se discuten sus ventajas/desventajas.

### 2.1. Planteamiento de medición: puentes completos frente a cuartos de puente

Existen configuraciones de galgas comúnmente aceptadas utilizadas para medir cargas de flexión, torsión o axiales [47]. La Figura 2.1 ilustra la forma en la que habitualmente se sitúan las galgas, junto con su correspondiente puente de Wheatstone. Éstas son útiles ya que miden cargas específicas a la vez que compensan el resto de cargas y las deformaciones térmicas. En otras palabras, esto significa que la salida de un puente de Wheatstone proporciona una tensión proporcional a una única carga, independientemente del valor de las demás cargas y deformaciones térmicas. Por ejemplo, la configuración de la Figura 2.1a puede medir cargas axiales compensando las cargas de flexión y torsión. A su vez, la configuración de la Figura 2.1b se utiliza para medir las cargas de flexión compensando las cargas axiales y de torsión. Por último, la configuración de la Figura 2.1c se utiliza para medir la torsión compensando las cargas axiales y de flexión. Las tres configuraciones de la Figura 2.1, cuando se conectan en la forma que describe la Figura 2.1d, también compensan la

deformación térmica. Esta es una propiedad muy importante asociada a la configuración de las galgas y a la forma en la que las galgas están conectadas en el puente completo.

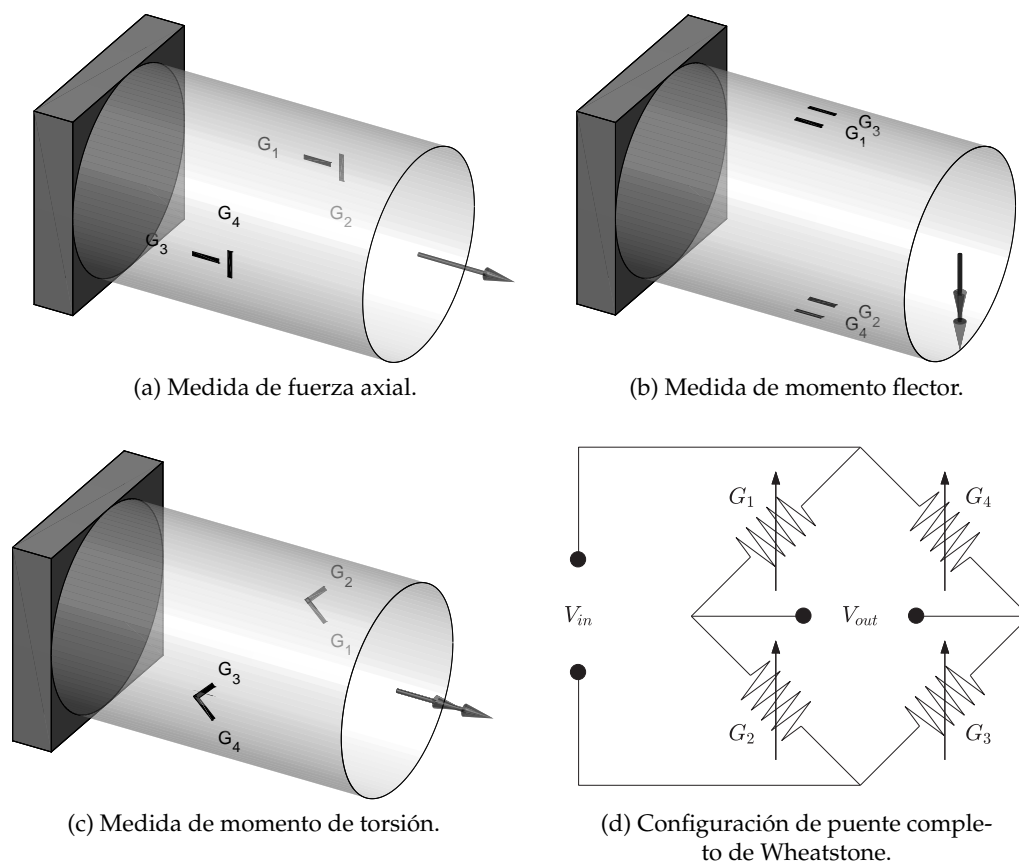


FIGURA 2.1: Configuraciones típicas para la medición de cargas específicas.

A pesar de que el uso de las configuraciones de galgas de la Figura 2.1 está muy extendido, tienen el inconveniente de necesitar 4 galgas extensiométricas y la limitación para medir una sola carga. Se podría pensar que para medir una sola carga podría ser suficiente una sola galga, pero normalmente se necesitan más de una para compensar otras cargas y deformaciones térmicas. Por ejemplo, para medir cargas de flexión se necesita una sola galga, como en la Figura 2.2b, si la deformación de la galga sólo se produce por un momento de flexión. Si también hay una carga axial, la deformación de la galga es una combinación de cargas axiales y de flexión. Por lo tanto, en presencia de cargas axiales y de flexión, se necesitan al menos 2 galgas para medir la carga de flexión y compensar la carga axial. Sin embargo, es más habitual utilizar la configuración de la Figura 2.1a con 4 galgas porque mejora la sensibilidad de la estimación compensando los efectos térmicos.

En resumen, una galga extensiométrica situada arbitrariamente en una viga se ve afectada por cada una de las seis componentes del torsor (las tres fuerzas y los tres momentos). Con las configuraciones habituales, se utiliza un conjunto de galgas para estimar una sola componente del torsor, independientemente de las deformaciones que generen el resto de cargas y compensando las deformaciones térmicas.

Por esta razón una de las novedades que se propone en esta tesis es, en lugar de dedicar un conjunto de galgas para la estimación de cada componente del torsor, dedicar un conjunto mayor de galgas para estimar todas las componentes del torsor conjuntamente.

En las configuraciones típicas, las galgas extensiométricas se montan en una configuración conectada a un circuito de puente completo o de medio puente en el que se mide una sola tensión eléctrica, lo que permite estimar una determinada carga.

El uso de puentes completos de Wheatstone tiene algunas ventajas sobre el uso de medios puentes o cuartos de puente. Por ejemplo, como todas las galgas extensiométricas están adheridas al mismo espécimen, es común que estén expuestas a la misma temperatura. Dado que el circuito del puente de Wheatstone suma eléctricamente la resistencia de dos de las galgas y resta la resistencia de las otras dos, cualquier efecto de la temperatura se compensa automáticamente y las variaciones de temperatura no tienen influencia en la medición de las cargas.

Otra ventaja de utilizar puentes completos de Wheatstone está relacionada con la sensibilidad. Por ejemplo, la sensibilidad de la configuración de puente completo de la Figura 2.1b para medir el momento flector es dos veces mayor que la configuración de medio puente de la Figura 2.2b, ya que hay el doble de galgas en la primera. Por lo tanto, dos medios puentes serían equivalentes a un puente completo en términos de sensibilidad.

Utilizando cuartos de puente es posible llegar al mismo resultado. Si cada una de las 4 galgas extensiométricas de un puente completo de Wheatstone se conectase en un circuito de cuarto de puente diferente, sumando y restando la contribución de cada una de ellas matemáticamente (y no eléctricamente como en el circuito de Wheatstone) se obtendrían los mismos resultados de carga mecánica de un puente completo. Este punto de vista tiene una ventaja interesante: la medición de la caída de tensión de una galga en un cuarto de puente puede utilizarse para estimar varias componentes del torsor. Eso conduce a un resultado de gran potencial: para un conjunto de galgas, cada uno de ellos en un cuarto de puente, se pueden estimar varias cargas como diferentes combinaciones lineales de las caídas de tensión a la salida de los cuartos de puente.

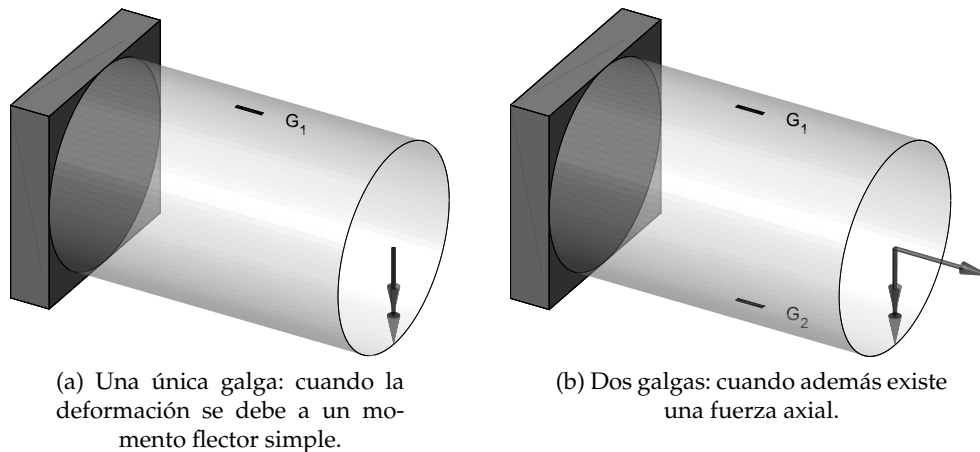


FIGURA 2.2: Configuraciones de galgas para la estimación de momentos flectores.

Para ilustrar esto, veamos dos formas de medir el momento de torsión y la fuerza cortante:

- Las Figuras 2.3a y 2.3b muestran las configuraciones típicas en las que las galgas extensiométricas están adheridas a un eje para medir el momento de torsión y la fuerza cortante, respectivamente. Las Figuras 2.3c y 2.3d representan sus correspondientes puentes completos de Wheatstone. Para estas configuraciones el momento de torsión ( $M_1$ ) y la fuerza cortante ( $F_3$ ) son proporcionales a las correspondientes tensiones de salida del puente completo de Wheatstone,  $V_{out}^{Tor}$  y  $V_{out}^{She}$ , respectivamente. Asimismo, estas tensiones de salida son proporcionales a las combinaciones lineales de las deformaciones de las galgas:

$$\begin{aligned} M_1 &\propto V_{out}^{Tor} \propto (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\ F_3 &\propto V_{out}^{She} \propto (\varepsilon_5 - \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $\varepsilon_i$  es la deformación de la  $i$ -ésima galga. Si se desean estimar tanto la fuerza cortante como el momento de torsión, se deben montar 2 puentes completos con 8 galgas extensiométricas y 2 canales de medición.

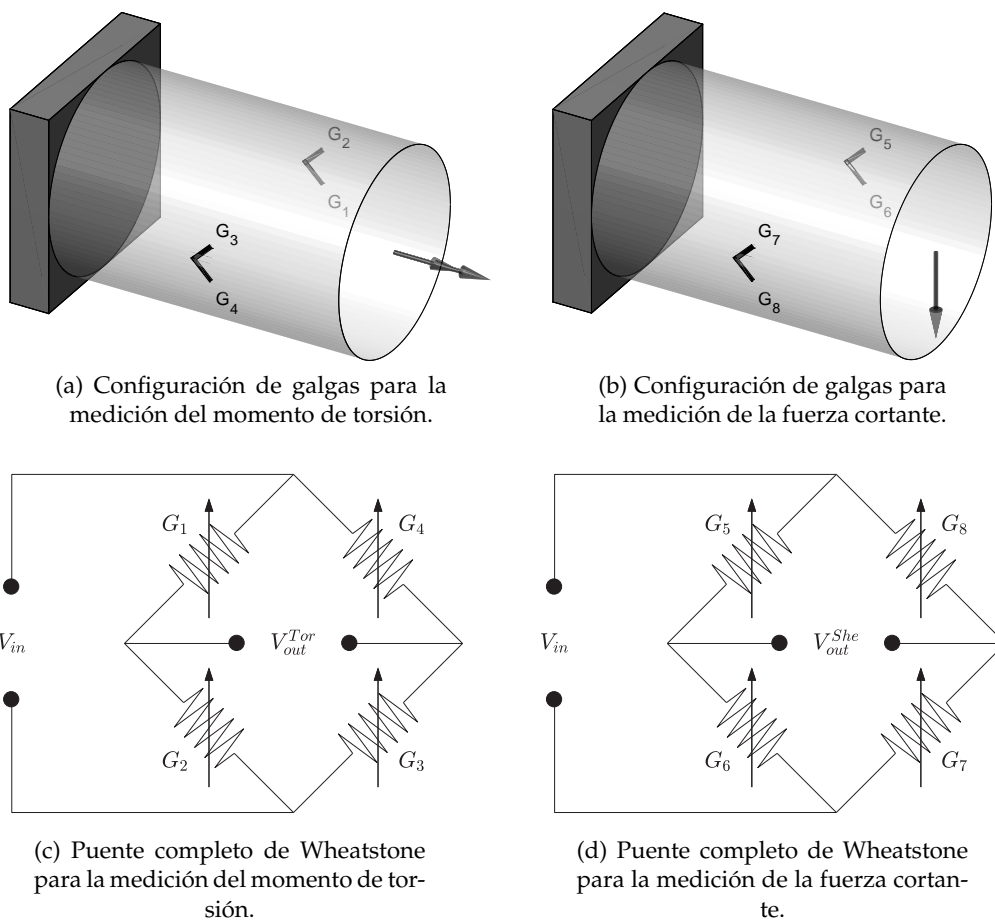


FIGURA 2.3: Configuraciones típicas para la medición del momento de torsión y fuerza cortante.

2. Por otro lado, con las 4 galgas de la Figura 2.3a, es posible medir tanto la torsión como la fuerza cortante si las galgas se montan en cuartos de puente, es decir, un puente de Wheatstone para cada galga extensiométrica con tres resistencias constantes como se muestra en la Figura 2.4. Teniendo en cuenta que la tensión de salida puede aproximarse como proporcional a la deformación de la única galga del cuarto de puente, con cada una de las galgas de la Figura 2.3a conectada a un cuarto de puente individual, la torsión ( $M_1$ ) y la fuerza cortante ( $F_3$ ) serían proporcionales a las combinaciones lineales de las deformaciones medidas, tal y como se muestra en la Ecuación 2.2:

$$\begin{aligned} M_1 &\propto (V_{out}^1 - V_{out}^2 + V_{out}^3 - V_{out}^4) \propto (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\ F_3 &\propto (V_{out}^1 - V_{out}^2 - V_{out}^3 + V_{out}^4) \propto (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Con este enfoque, sólo se necesitarían 4 galgas para medir la torsión y la fuerza cortante, cada uno de ellos con su correspondiente circuito de cuarto de puente.

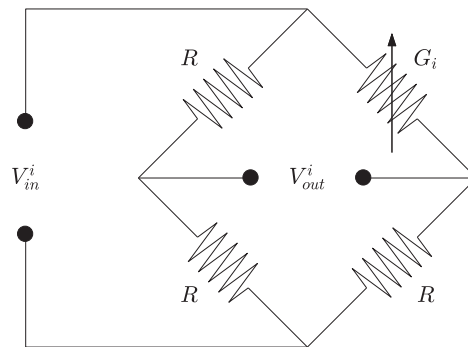


FIGURA 2.4: Circuito eléctrico de un cuarto de puente de Wheatstone.

En esta tesis se seguirá el segundo planteamiento, es decir, la caída de tensión que se produce en cada una de las galgas extensiométricas se medirá mediante un circuito de cuarto de puente. En consecuencia, cada componente del torsor se calculará como una combinación lineal diferente de las mediciones de los cuartos de puente. Ya que van a emplearse cuartos de puente de Wheatstone, a continuación en la próxima sección, se van a ilustrar algunas de sus características más significativas con el fin de obtener una visión más detallada.

### 2.1.1. Cuarto de puente de Wheatstone

Una de las formas más común para acondicionamiento de señales analógicas es mediante puentes de Wheatstone. Es un circuito eléctrico que se utiliza para medir resistencias desconocidas mediante el equilibrio de los brazos del mismo. Éste está constituido por dos divisores de tensión formados por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , y  $R_4$ , tal y como se muestra en la Figura 2.5. Se alimenta con una tensión continua de entrada  $V_{in}$  y a la salida se obtiene una tensión flotante ( $V_{out}$ ), es decir, no referenciada a masa. Puesto que el puente de Wheatstone está formado a partir de dos

divisores de tensión, el cálculo de la tensión de salida  $V_{out}$  del puente se puede determinar como la resta de tensiones individuales  $V_{out}$  de los dos divisores de tensión. De esta forma, se obtiene la siguiente relación entre tensión de salida y de entrada para un puente de Wheatstone genérico:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4} \quad (2.3)$$

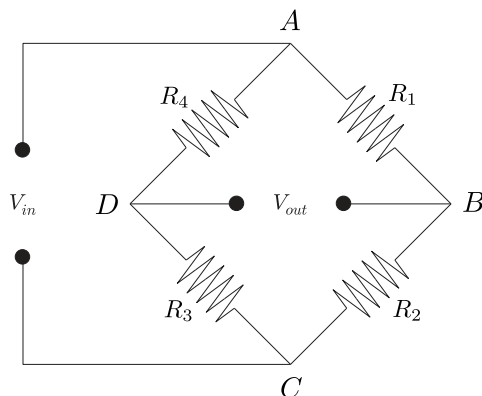


FIGURA 2.5: Circuito de puente de Wheatstone genérico.

Una de las características que los puentes deben cumplir es garantizar la condición de equilibrio del puente, lo que permite la medición de variaciones de resistencia en alguno de sus brazos. La condición de equilibrio entre resistencias del puente se define mediante la razón característica de las resistencias ( $k_R$ ) y resulta ser la siguiente:

$$k_R = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (2.4)$$

A continuación, se verán algunas de las características del cuarto de puente de Wheatstone más detalladamente. Las galgas extensiométricas son sensores que modifican su resistencia interna en función de la deformación a la que se ven sometidas. Principalmente se basa en el efecto piezoresistivo, siendo una propiedad que tienen ciertos materiales a cambiar el valor nominal de su resistencia eléctrica cuando se les somete a determinadas deformaciones mecánicas. Partiendo del puente de Wheatstone de la Figura 2.5 si se sustituye la resistencia  $R_1$  por una galga con resistencia nominal  $R_0$ , se puede expresar su valor de resistencia como la suma entre su resistencia nominal y la variación de resistencia debida a su deformación ( $\Delta R$ ). Así, el valor de la resistencia de la galga en términos de su resistencia nominal y variación de resistencia es  $R_0 + \Delta R = R_0(1 + \Delta R/R_0)$ . Para satisfacer la condición de equilibrio de la Ecuación 2.4, además, las resistencias de los brazos restantes deberán tener un valor nominal  $R_2 = R_3 = k_R R_0$  y  $R_4 = R_0$ . Si se sustituyen estos valores de resistencia en la Ecuación 2.3 y se define  $\delta_0 = \Delta R/R_0$  como el ratio entre la variación de la resistencia y resistencia nominal de la galga, se obtiene la relación entre la tensión de entrada y salida para el cuarto de puente en equilibrio:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{k_R \delta_0}{(k_R + 1)(k_R + 1 + \delta_0)} \quad (2.5)$$



Obsérvese que ésta relación es *no lineal* en  $\delta_0$ .

De la Ecuación anterior fácilmente se puede deducir que en ausencia de deformaciones debidas a cargas mecánicas y variaciones de temperatura, la galga no sufre variaciones en su resistencia ( $\delta_0 = \Delta R/R_0 = 0$ ) y por tanto, la relación entre la tensión de salida y entrada es nula. Pese a que el objetivo de un puente de Wheatstone es obtener una tensión de salida linealmente proporcional a la magnitud a medir, como se puede observar, en los cuartos de puente esto no es del todo así. Por ello, en multitud de ocasiones la Ecuación 2.5 se suele aproximar, si  $(k_R + 1) \gg \delta_0$ , a la siguiente expresión *lineal* en  $\delta_0$ :

$$\frac{V_{out}^L}{V_{in}} = \frac{k_R \delta_0}{(k_R + 1)^2} \tag{2.6}$$

Esta aproximación es aceptable siempre y cuando las variaciones de resistencia ( $\Delta R$ ) sean pequeñas frente al valor de la resistencia nominal ( $R_0$ ). A medida que la relación  $\delta_0 = \Delta R/R_0$  aumenta, el error de linealidad también lo hace. Definiendo el error en la linealidad como:

$$\frac{V_{out} - V_{out}^L}{V_{out}} = -\frac{\delta_0}{k_R + 1} \tag{2.7}$$

se puede ver que para deformaciones muy pequeñas ( $\delta_0$  muy pequeños) la aproximación lineal presenta un error pequeño frente a la expresión lineal. En la Figura 2.6 se ha representado gráficamente, para distintos valores de  $k_R$ , la relación entre la tensión de salida y entrada para un cuarto de puente y su aproximación lineal.

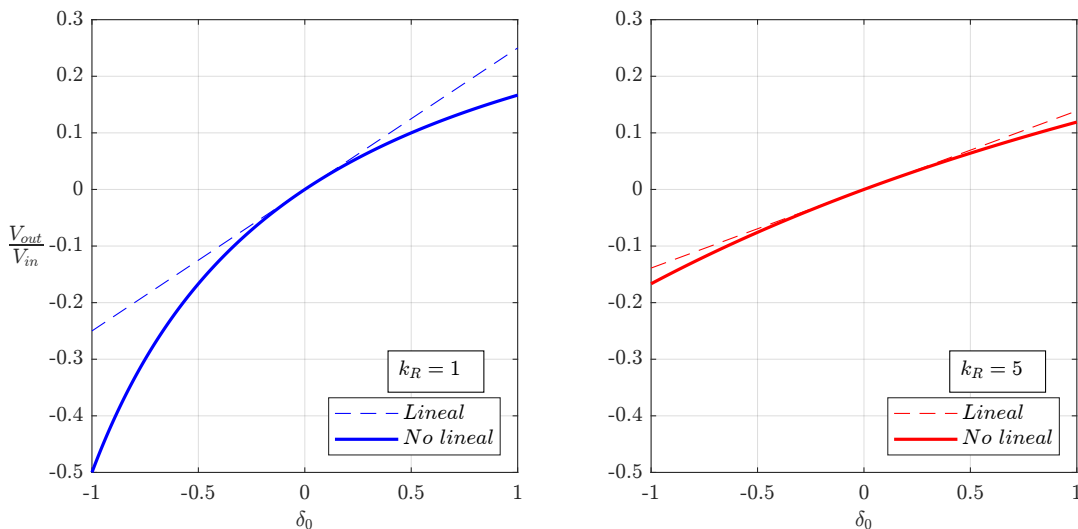


FIGURA 2.6: Relación lineal y no lineal entre la tensión eléctrica de salida y entrada de un cuarto de puente de Wheatstone para distintos valores de  $k_R$ .

Analizando detalladamente la Figura anterior, se ve que con mayores valores de  $k_R$  la relación entre la tensión de salida y entrada real se acerca notablemente a la aproximación lineal del cuarto de puente. Sin embargo, a pesar de esta mejoría en la linealidad, la sensibilidad en la medida empeora bruscamente. La sensibilidad del

cuarto de puente puede obtenerse como:

$$S = \frac{\partial V_{out}}{\partial R_0} = \frac{k_R}{(k_R + 1)(k_R + 1 + \delta_0)} \frac{V_{in}}{R_0} \quad (2.8)$$

En la Figura 2.7 se ha representado la sensibilidad normalizada ( $S R_0 / V_{in}$ ) de un cuarto de puente, y puede observarse que a medida que aumenta el valor de la razón característica de las resistencias,  $k_R$ , la sensibilidad del puente disminuye cuadráticamente. Sin embargo, la sensibilidad es independiente de los cambios de resistencia de la galga. La sensibilidad normalizada es máxima para  $k_R = 1$  e igual a 0.25, pero para  $k_R = 1$  en el puente realmente se produce un importante error de linealidad por lo que habrá que buscar un compromiso entre linealidad y sensibilidad.

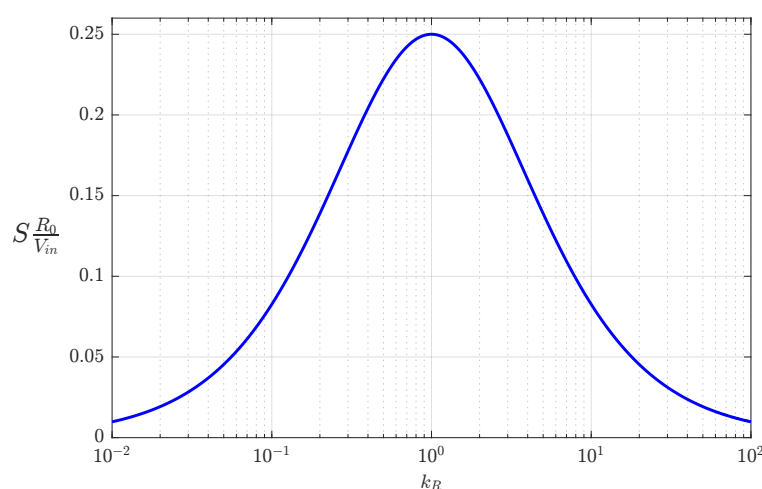


FIGURA 2.7: Sensibilidad normalizada de un cuarto de puente de Wheatstone para distintos valores de  $k_R$ .

Esto hace pensar que cuando se está amplificando una señal analógica mediante cuartos de puente debe encontrarse un compromiso entre la linealidad y la sensibilidad del mismo. Existen diversas formas de solventar esta problemática. Por un lado, se podrían emplear puentes de Wheatstone más complejos, como el medio puente y puente completo, lo que imposibilitaría la estimación de todas las componentes del torsor mediante una única configuración de galgas. Por otro lado, se podrían sobredimensionar algunas de las resistencias que forman el cuarto de puente hasta cierto punto. De esta manera se obtendría una relación entre tensión de salida y entrada más lineal, y la sensibilidad del puente no se vería fuertemente comprometida. Por ejemplo, si en el puente de Wheatstone de la Figura 2.5 se instalase la siguiente combinación de resistencias:  $R_1 = R_0(1 + \delta_0)$ ,  $R_2 = R_3 = \rho R_0$  y  $R_4 = R_0$ , donde  $\rho$  es el factor de sobredimensionamiento, quedaría garantizada la condición de equilibrio de la Ecuación 2.4, y se podría obtener una relación entre la tensión de salida y entrada más lineal y a su vez, una peor sensibilidad.

## 2.2. Determinación de la deformación de una galga situada arbitrariamente en un eje de sección cilíndrica

En esta Sección se describe el procedimiento para la determinación de la deformación de una galga individual colocada en el perímetro de un eje cilíndrico bajo la acción de un torsor externo. Empleando un conjunto de bases y coordenadas, en primer lugar se calcula el tensor de tensiones en la localización de la galga y posteriormente se obtiene una expresión explícita de la deformación de la galga en función de las componentes de torsor externo.

### 2.2.1. Acotación de una galga extensiométrica arbitraria

El objetivo es acotar la posición de las galgas extensiométricas en un eje de sección transversal circular, así como definir las bases empleadas para la determinación de las componentes del torsor. Por motivos simplificativos, el torsor va a ser calculado en el punto  $O$  y las galgas van a estar posicionadas en la periferia del eje. Para acotar la posición de la galga nos ayudaremos del punto  $Q$ . Como se desea una posición óptima de las galgas, sus posiciones son desconocidas *a priori* y estarán definidas por dos ángulos constantes que determinarán la posición periférica y la orientación de cada galga, y una coordenada que determinará su posición longitudinal en el eje.

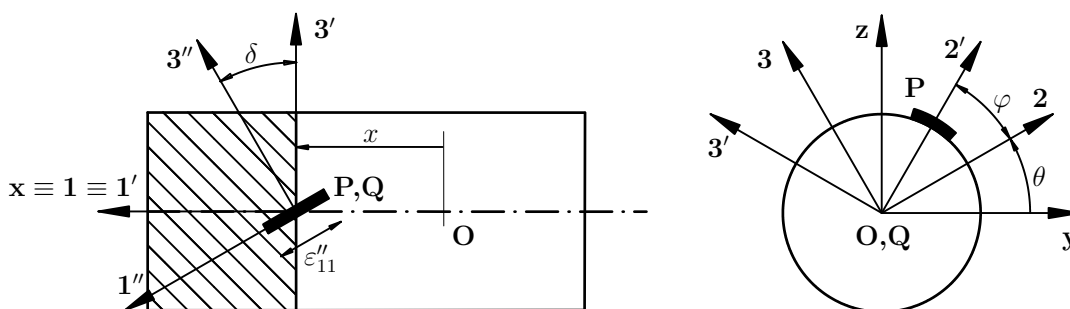


FIGURA 2.8: Acotación de una galga extensiométrica en un eje de sección transversal circular.

Se ha considerado que la sección transversal del eje es constante en la proximidad de la sección considerada y que está sujeta a 3 fuerzas y 3 momentos que constituyen el torsor con respecto al punto  $O$ . El material de la sección se ha supuesto que es lineal e isótropo y se supone también que se cumple el *principio de Saint Venant* con las galgas posicionadas suficientemente lejos de las cargas.

Para determinar la posición y orientación de cada galga, se han empleado cuatro bases de orientación, tres coordenadas angulares y una coordenada longitudinal como se muestran en la Figura 2.8. La base  $xyz$  es una orientación fija al suelo y la dirección positiva del eje  $x$  es coincidente con la velocidad angular del eje. La coordenada angular  $\theta$  determina la rotación del eje respecto del suelo y la coordenada angular  $\varphi$  determina la posición de la galga en el punto  $P$  y la orientación de la base  $1'2'3'$ . El ángulo  $\delta$  determina la orientación de la galga extensiométrica y la coordenada  $x$  establece la posición longitudinal de la galga en el eje. Como la galga es solidaria al eje, las bases  $123$ ,  $1'2'3'$  y  $1''2''3''$  también son solidarias al eje. Las bases

$1'2'3'$  y  $1''2''3''$  son diferentes para cada galga puesto que cada una de ellas depende de sus propias coordenadas  $\varphi$  y  $\delta$ . Por el contrario, las bases  $xyz$  y  $123$  son comunes para todas las galgas.

Como es probable que cualquier vector o tensor se quiera expresar en cualquiera de las bases definidas, se definirán las matrices de cambio de base adecuadas. Si se conocen las coordenadas de un vector  $\mathbf{v}$  en la base  $123$ , es decir,  $\{\mathbf{v}\}_{123}$ , y se desean sus coordenadas en la base  $xyz$ ,  $\{\mathbf{v}\}_{xyz}$ , la matriz de cambio de base  $[\mathbf{R}]_{xyz}^{123}$  se puede emplear de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{v}\}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}_{xyz}^{123} \{\mathbf{v}\}_{123} = [\mathbf{R}]_{xyz}^{123} \{\mathbf{v}\}_{123} \quad (2.9)$$

Análogamente, las siguientes dos matrices de cambio de base se definen como:

$$\{\mathbf{v}\}_{123} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_{123}^{1'2'3'} \{\mathbf{v}\}_{1'2'3'} = [\mathbf{R}]_{123}^{1'2'3'} \{\mathbf{v}\}_{1'2'3'} \quad (2.10)$$

$$\{\mathbf{v}\}_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix}_{1'2'3'}^{1''2''3''} \{\mathbf{v}\}_{1''2''3''} = [\mathbf{R}]_{1'2'3'}^{1''2''3''} \{\mathbf{v}\}_{1''2''3''} \quad (2.11)$$

Estas matrices de cambio de base se emplearán en apartados posteriores puesto que la deformación de cada galga se mide en su propia base  $1''2''3''$  mientras que las componentes del torsor se desean en las bases  $xyz$  y  $123$ .

## 2.2.2. Tensor de tensiones para un torsor arbitrario

El torsor que se pretende estimar es aquél que ejerce la mitad derecha del eje de la Figura 2.8 a la mitad izquierda. Las componentes de fuerza y momento del torsor en las bases  $123$  y  $1'2'3'$  están relacionadas entre sí como:

$$\begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_{1'2'3'}^{123} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_{123} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi \\ -F_2 \sin \varphi + F_3 \cos \varphi \end{Bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_{1'2'3'}^{123} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{123} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \cos \varphi + M_3 \sin \varphi \\ -M_2 \sin \varphi + M_3 \cos \varphi \end{Bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.13)$$

donde  $F_1$  representa la fuerza axial,  $F_2$  y  $F_3$  representan las fuerzas cortantes,  $M_1$  representa el momento de torsión, y  $M_2$  y  $M_3$  representan los momentos flectores con respecto al punto  $\mathbf{O}$ . A pesar de que se desea calcular las componentes del torsor en la base  $123$ , para el cálculo de las componentes del tensor de tensiones éstas se van a definir en la base  $1'2'3'$ .

Sea  $\mathbf{P}$  el punto donde se encuentra posicionada la galga extensiométrica, definida según la Figura 2.8 y sea  $\mathbf{t}_{\mathbf{O}} = (F'_1, F'_2, F'_3, M'_1, M'_2, M'_3)^\top$  el torsor externo en el centro

del eje (punto  $\mathbf{O}$ ) expresado en la base  $1'2'3'$ . Para calcular el tensor de tensiones  $\overline{\sigma}_{\mathbf{P}}$  en el punto  $\mathbf{P}$  producido por el torsor externo  $\mathbf{t}'_{\mathbf{O}}$ , primero se determina el tensor de tensiones relacionado con las componentes individuales del torsor. El tensor de tensiones compuesto se calculará por superposición de los tensores de tensiones individuales. Para el sólido diferencial representado en la Figura 2.9, el torsor definido es aquél que está aplicado en la cara sombreada.

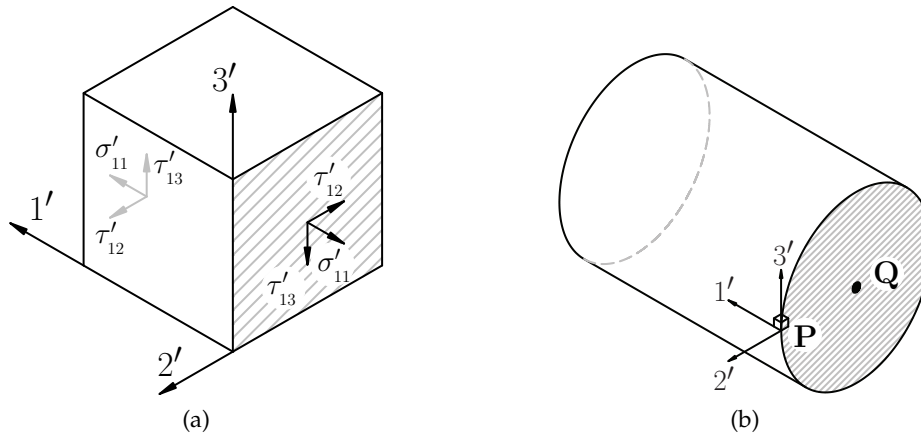


FIGURA 2.9: Sólido diferencial en el punto  $\mathbf{P}$ .

Como ya se ha mencionado el torsor externo está caracterizado en el punto  $\mathbf{O}$ , sin embargo, se desea conocer éste en el punto en el que se cruzan el eje con el plano donde se encuentran posicionadas las galgas extensiométricas, es decir, en el punto  $\mathbf{Q}$ . Estos dos puntos están relacionados con la coordenada longitudinal  $x$ , y por tanto sería suficiente con trasladar el torsor del punto  $\mathbf{O}$  al punto  $\mathbf{Q}$ . Tan sólo las componentes de fuerza del torsor provocarán unos momentos adicionales tras la traslación del torsor, y resultan ser los siguientes:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{M}'_{\mathbf{Q}} \right\}_{1'2'3'} &= \left\{ \mathbf{M}'_{\mathbf{O}} + \overline{\mathbf{QO}} \times \overline{\mathbf{F}}' \right\}_{1'2'3'} \\ &= \begin{Bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} + \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} \times \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} = \begin{Bmatrix} M'_1 \\ M'_2 - xF'_3 \\ M'_3 + xF'_2 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} \end{aligned} \quad (2.14)$$

De este modo, agrupando las componentes de fuerza y momento, el vector del torsor  $\mathbf{t}'_{\mathbf{Q}}$  expresado en la base  $1'2'3'$  que ha sido trasladado al punto  $\mathbf{Q}$  resulta ser:

$$\left\{ \mathbf{t}'_{\mathbf{Q}} \right\}_{1'2'3'} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ M'_1 \\ M'_2 - xF'_3 \\ M'_3 + xF'_2 \end{Bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.15)$$

Las componentes del tensor de tensiones se establecen definiendo las tres superficies mutuamente ortogonales en el punto  $\mathbf{P}$ . Las normales de cada superficie establecerán, en este caso, los ejes cartesianos  $1'$ ,  $2'$  y  $3'$ . En general, cada superficie tendrá

una tensión normal y dos tensiones cortantes. La tensión normal se designa por  $\sigma_{ii}$  y las tensiones cortantes actuantes en la superficie por  $\tau_{ij}$ . En la notación de doble subíndice, el primer subíndice indica la dirección de la superficie normal mientras que el segundo subíndice resulta ser la dirección de la tensión. Por convenio, los esfuerzos cortantes en las *caras positivas*<sup>1</sup> del cubo diferencial serán positivos cuando apunten en la dirección positiva del eje de la base. Como el tensor de tensiones es simétrico<sup>2</sup> se cumplirá que,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}, \forall i \neq j$ .

Las componentes del tensor de tensiones provocadas por cada esfuerzo se calculará a continuación:

- Efecto de la fuerza axial: una fuerza axial  $F'_1$  ejercida en la dirección positiva del eje 1' causa una tensión de compresión en toda la sección. Por lo tanto, el tensor de tensiones en el punto **P** asociado a la fuerza axial resulta ser:

$$\left[ \overline{\overline{\sigma}}_{F'_1} \right]_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} -\frac{F'_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.16)$$

donde  $A$  es el área transversal de la sección.

- Efecto del momento flector: un momento flector  $M'_3$  ejercido en la dirección positiva del eje 3' causa una tensión de tracción en el punto **P**. De esta forma, el tensor de tensiones asociado a este momento flector resulta ser:

$$\left[ \overline{\overline{\sigma}}_{M'_3} \right]_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} \frac{M'_3 + xF'_2}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.17)$$

donde  $\omega$  es el módulo resistente de la sección a flexión.

- Efecto de la fuerza cortante: según la Teoría de Viga de Timoshenko [66], una fuerza cortante  $F'_3$  ejercida en la dirección positiva del eje 3' causa una tensión cortante negativa en el punto **P**, igual a:

$$\tau'_{13} = -\frac{F'_3}{\kappa A} \quad (2.18)$$

donde  $\kappa$  es el coeficiente de cortante que representa el ratio de tensión cortante media en la sección con respecto a la tensión cortante en su centroide. Para una sección circular hueca,  $\kappa$  toma la siguiente expresión [67]:

$$\kappa = \frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2} \quad (2.19)$$

donde  $\nu$  es el *módulo de Poisson*,  $m = r/R$ , y  $r$  y  $R$  son los radios interior y exterior del eje de sección de corona circular, respectivamente. Esta expresión también es válida para secciones circulares completas, imponiendo que  $r = 0$ ,

<sup>1</sup>Las caras positivas del cubo son aquellas en las que el vector perpendicular hacia fuera coincide en dirección con la dirección positiva de un eje de la base.

<sup>2</sup>El tensor de tensiones es simétrico, si se cumple el Lema de Cauchy. Este implica que el material considerado sea lineal, elástico e isótropo.

y para secciones de tubo de pared delgada imponiendo  $r = R$ . Por tanto, el tensor de tensiones asociado al esfuerzo cortante puede expresarse como:

$$\left[ \overline{\overline{\sigma}}_{F'_3} \right]_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{F'_3}{\kappa A} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.20)$$

- Efecto del momento de torsión: un momento de torsión  $M'_1$  aplicado en la dirección positiva del eje  $1'$  causa una tensión cortante negativa en el punto  $\mathbf{P}$ . En consecuencia, el tensor de tensiones asociado al momento de torsión es:

$$\left[ \overline{\overline{\sigma}}_{M'_1} \right]_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M'_1 R}{I_p} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.21)$$

donde  $I_p$  es el momento de inercia polar de la sección.

- Las componentes  $F'_2$  y  $M'_2$  del torsor no causan ninguna tensión en el punto  $\mathbf{P}$ .

La superposición de los 6 tensores de tensión individuales proporciona el tensor de tensiones  $\left[ \overline{\overline{\sigma}}_{\mathbf{P}}(\mathbf{t}'_{\mathbf{Q}}) \right]_{1'2'3'}$  expresado en la base  $1'2'3'$ . El tensor de tensiones resulta ser simétrico y resulta ser el siguiente:

$$\begin{aligned} \left[ \overline{\overline{\sigma}}_{\mathbf{P}}(\mathbf{t}'_{\mathbf{Q}}) \right]_{1'2'3'} &= \begin{bmatrix} -\frac{F'_1}{A} + \frac{M'_3 + xF'_2}{\omega} & 0 & -\frac{F'_3}{\kappa A} - \frac{M'_1 R}{I_p} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \tau'_{12} & \tau'_{13} \\ & \sigma'_{22} & \tau'_{23} \\ & & \sigma'_{33} \end{bmatrix}_{1'2'3'} \end{aligned} \quad (2.22)$$

El resultado obtenido en la Ecuación 2.22 representa el tensor de tensiones compuesto caracterizado en el punto  $\mathbf{P}$ , a causa de un torsor externo caracterizado en el punto  $\mathbf{Q}$  en el que sus componentes se encuentran caracterizadas en el punto  $\mathbf{O}$ . Cabe remarcar que el punto  $\mathbf{P}$  representa la posición en la periferia del eje,  $\varphi$ , y posición longitudinal en el eje,  $x$ , de una galga concreta, exclusivamente. De ahora en adelante por razones simplificadoras de notación se designará el tensor de tensiones  $\overline{\overline{\sigma}}_{\mathbf{P}}(\mathbf{t}'_{\mathbf{Q}})$  como  $\overline{\overline{\sigma}}$ .

Además, es importante destacar que en el plano 1 – 3 del sólido diferencial del punto  $\mathbf{P}$ , las componentes de tensión  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$  y  $\tau_{32}$  (así como,  $\tau_{21}$  y  $\tau_{23}$ ) son nulas tal y como se puede observar en el tensor de tensiones de la Ecuación 2.22. Esto se debe a que se trata de una *superficie libre* en la cual no aplican esfuerzos en esas direcciones específicas.

### 2.2.3. Deformación de una galga para un torsor arbitrario

Con el objetivo de calcular el torsor de deformaciones  $\bar{\bar{\epsilon}}$  en términos del tensor de tensiones  $\bar{\sigma}$ , sus componentes se pueden expresar en forma de vector columna:

$$\bar{\sigma} = (\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}, \tau'_{12}, \tau'_{23}, \tau'_{13})^T \quad (2.23)$$

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon'_{11}, \epsilon'_{22}, \epsilon'_{33}, \epsilon'_{12}, \epsilon'_{23}, \epsilon'_{13})^T \quad (2.24)$$

donde las componentes del tensor de deformaciones simétrico resulta ser:

$$[\bar{\bar{\epsilon}}]_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & \epsilon'_{13} \\ & \epsilon'_{22} & \epsilon'_{23} \\ & & \epsilon'_{33} \end{bmatrix}_{1'2'3'} \quad (2.25)$$

En forma vectorial, se mantiene la siguiente relación entre tensión y deformación:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}\bar{\epsilon} \quad (2.26)$$

y si el material es lineal, elástico e isótropo, la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  puede expresarse de la siguiente manera, donde  $E$  y  $\nu$  resultan ser los *módulos de Young* y *Poisson*, respectivamente.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1-2\nu & 0 & 0 \\ & & & & 1-2\nu & 0 \\ & & & & & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Como la galga extensiométrica está alineada con el eje  $1''$ , el tensor de deformaciones se expresará en la base  $1''2''3''$  de la siguiente forma:

$$[\bar{\bar{\epsilon}}]_{1''2''3''} = [\mathbf{R}]_{1''2''3''}^{1'2'3'} [\bar{\bar{\epsilon}}]_{1'2'3'} [\mathbf{R}]_{1'2'3'}^{1''2''3''} \quad (2.28)$$

Tomando la componente (1,1), se obtiene la deformación de la galga,  $\epsilon$ .

$$\epsilon = \epsilon''_{11} \quad (2.29)$$

Definiendo el vector torsor externo  $\mathbf{t}_O = (F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3)^T$  en términos de las componentes del torsor en la base 123, y como  $\epsilon$  es lineal en  $\mathbf{t}_O$ , la expresión explícita de la deformación de la galga puede expresarse de la forma  $\epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{t}_O} \mathbf{t}_O = \mathbf{w} \mathbf{t}_O$  donde



la expresión explícita del vector fila  $\mathbf{w}$  resulta ser:

$$\mathbf{w}(\varphi, \delta, x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1+\nu) \sin^2 \delta - 1}{EA} \\ - \frac{(1+\nu) \sin 2\delta \sin \varphi}{\kappa EA} - \frac{x \cdot (\nu \sin^2 \delta - \cos^2 \delta) \cos \varphi}{E\omega} \\ \frac{(1+\nu) \sin 2\delta \cos \varphi}{\kappa EA} - \frac{x \cdot (\nu \sin^2 \delta - \cos^2 \delta) \sin \varphi}{E\omega} \\ \frac{R(1+\nu) \sin 2\delta}{EI_p} \\ \frac{((1+\nu) \sin^2 \delta - 1) \sin \varphi}{E\omega} \\ - \frac{((1+\nu) \sin^2 \delta - 1) \cos \varphi}{E\omega} \end{array} \right\}^T \quad (2.30)$$

Para una galga posicionada en un punto arbitrario definido por  $\varphi$ ,  $\delta$  y  $x$ , la Ecuación  $\varepsilon = \mathbf{w}\mathbf{t}_O$  proporciona la deformación de la galga para un torsor arbitrario  $\mathbf{t}_O$ . En los sucesivos apartados nos referiremos a este torsor externo simplemente como  $\mathbf{t}$ .

Imponiendo que la galga quede longitudinalmente posicionada en el plano que contiene el punto  $O$ , es decir,  $x = 0$ , la expresión explícita del vector fila  $\mathbf{w}$  resulta ser:

$$\mathbf{w}(\varphi, \delta) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1+\nu) \sin^2 \delta - 1}{EA} \\ - \frac{(1+\nu) \sin 2\delta \sin \varphi}{\kappa EA} \\ \frac{(1+\nu) \sin 2\delta \cos \varphi}{\kappa EA} \\ \frac{R(1+\nu) \sin 2\delta}{EI_p} \\ \frac{((1+\nu) \sin^2 \delta - 1) \sin \varphi}{E\omega} \\ - \frac{((1+\nu) \sin^2 \delta - 1) \cos \varphi}{E\omega} \end{array} \right\}^T \quad (2.31)$$

Ésto supone que la estimación del torsor externo  $\mathbf{t}$  se realiza en la sección transversal del eje donde se instala la propia galga extensiométrica.

## 2.3. Estimación óptima del torsor externo

Hasta el momento se ha obtenido una expresión explícita que relaciona el torsor externo al que se ve sometido un eje y la deformación de una galga pegada sobre este. En la presente Sección se va a exponer la manera en la que se van a calcular las nuevas configuraciones de galgas que permitirán la estimación óptima del torsor externo.

### 2.3.1. Estimación del torsor externo en términos de la deformación de varias galgas

Supongamos que debe estimarse el torsor  $\mathbf{t}$  a partir de las medidas de deformación. Como el torsor tiene  $p = 6$  componentes, es necesario emplear, al menos,  $p$  galgas extensiométricas para estimar cada una de las componentes individuales. Sean  $n \geq p$  el número de galgas dispuestas a lo largo de la periferia de una cierta sección del eje. Denotando por  $\varepsilon_i$  la deformación de la  $i$ -ésima galga y siendo  $\varphi_i$ ,  $\delta_i$  y  $x_i$  los ángulos que determinan la posición en la periferia, orientación y posición longitudinal en el eje de la  $i$ -ésima galga ( $i = 1, \dots, n$ ) según lo definido en la Figura

2.8, se puede definir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}(\varphi_i, \delta_i, x_i)$ . Agrupando las  $n$  deformaciones mecánicas en el vector  $\varepsilon$  y los  $n$  vectores fila  $\mathbf{w}_i$  en  $\mathbf{W}$ , la Ecuación 2.32 se puede reescribir como:

$$\varepsilon = \mathbf{W}\mathbf{t} \quad (2.33)$$

Definiendo  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ,  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ , la matriz  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})$  representa la matriz de observación de dimensiones  $n \times p$  que contiene toda la información de la posición de las galgas. Midiendo la deformación de las galgas para cada instante y evaluando  $\mathbf{W}$  para una determinada configuración de galgas, uno puede resolver el sistema lineal de la Ecuación 2.33 para calcular  $\mathbf{t}$  en términos de  $\varepsilon$ , siempre y cuando la matriz  $\mathbf{W}$  tenga rango máximo.

Sin embargo, en un marco experimental, el vector  $\varepsilon$  se medirá con incertidumbre y será apropiado usar la Teoría de Regresión Lineal [68] para *estimar*  $\mathbf{t}$  y la varianza de  $\mathbf{t}$ . Nos referiremos al estimador de  $\mathbf{t}$  como  $\hat{\mathbf{t}}$  y a su varianza como  $\text{var}(\hat{\mathbf{t}})$ , respectivamente.

Un modelo lineal estadístico típico en el que el vector de deformación medido,  $\varepsilon_m$ , se escribe como la suma de la deformación mecánica *verdadera*,  $\varepsilon$ , y la incertidumbre de medición,  $\mathbf{e}$ .

$$\varepsilon_m = \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{e} \quad (2.34)$$

donde tanto  $\varepsilon_m$  como  $\mathbf{e}$  resultan ser variables aleatorias [69, 70] y  $\mathbf{W}$  es determinista, es decir, es conocida sin incertidumbre. Por simplicidad en la argumentación, se va a asumir que la esperanza de la medida del error va a ser nula. Denotando el operador esperanza como  $E[\cdot]$ , esta asunción se puede expresar como:  $E[\mathbf{e}] = \mathbf{0}$ . Generalmente, esta asunción requiere de la calibración de los puentes de galga [56].

En esta situación, el *Estimador por Mínimos Cuadrados Ponderados* de varianza mínima para  $\mathbf{t}$  coincide con el *Estimador de Máxima Verosimilitud* [71, 68, 70, 72]:

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \varepsilon_m \quad (2.35)$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma} = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^\top]$  es la matriz de covarianzas de  $\mathbf{e}$ . Puesto que  $\varepsilon_m$  es una variable aleatoria, la estimación de  $\mathbf{t}$ ,  $\hat{\mathbf{t}}$ , también será una variable aleatoria. El estimador de la Ecuación 2.35 es conocido como *Estimador de Markov* o *Mejor Estimador Lineal Insegado* (*Best Linear Unbiased Estimate*) [24, 70].

De las Ecuaciones 2.34 y 2.35 la expresión  $(\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t})$  se puede reescribir como:

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t} = (\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e} \quad (2.36)$$

y el estimador será insegado ( $E[\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}] = \mathbf{0}$ ) sí  $E[\mathbf{e}] = \mathbf{0}$ .

Asimismo, la varianza de  $\hat{\mathbf{t}}$  se puede expresar como:

$$\text{var}(\hat{\mathbf{t}}) = E \left[ (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t})(\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t})^\top \right] = (\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \quad (2.37)$$

Si todas las galgas extensiométricas resultan ser del mismo tipo y características, se puede suponer que la varianza de su incertidumbre de medición es la misma. Por la tanto:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{var}(\mathbf{e}) = \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_m) = \text{var}(\varepsilon_m) \mathbf{I}_n \quad (2.38)$$

donde  $\text{var}(\varepsilon_m)$  es la varianza individual de cada galga e  $\mathbf{I}_n$  es una matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . Por tanto el estimador de  $\mathbf{t}$  de la Ecuación 2.35, asumiendo que se cumple la Ecuación 2.38 da como resultado:

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.39)$$

Debido a que las galgas están adheridas al eje, la matriz  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})$  es constante. Por lo tanto, si la expresión  $(\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top$  se computa *offline*, la estimación en tiempo real del torsor sólo requiere de una multiplicación entre matriz y vector, lo que hace que la estimación del torsor sea muy eficiente.

Asumiendo que la Ecuación 2.38 se cumple, la varianza de la estimación del torsor resulta ser:

$$\text{var}(\hat{\mathbf{t}}) = \text{var}(\varepsilon_m) (\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \quad (2.40)$$

y sólo tendrá que calcularse una vez.

Si  $n > p$ , la varianza de las deformaciones medidas se puede estimar como [70]:

$$\widehat{\text{var}}(\boldsymbol{\varepsilon}_m) = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{W}\hat{\mathbf{t}})^\top (\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{W}\hat{\mathbf{t}})}{n - p} \quad (2.41)$$

Haciendo uso de  $N$  diferentes medidas del vector deformación, una estimación más precisa de la varianza puede calcularse según:

$$\widehat{\text{var}}(\boldsymbol{\varepsilon}_m) = \frac{\sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\varepsilon}_m^k - \mathbf{W}\hat{\mathbf{t}}^k)^\top (\boldsymbol{\varepsilon}_m^k - \mathbf{W}\hat{\mathbf{t}}^k)}{N(n - p)} \quad (2.42)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^k$  y  $\hat{\mathbf{t}}^k$  son las  $k$ -ésima deformación medida y estimación del torsor, respectivamente.

### 2.3.2. Estimación óptima del torsor

El principal propósito de este apartado es determinar la posición y orientación de las galgas extensiométricas para una estimación óptima del torsor. Por lo tanto, se debe establecer algún criterio de optimización para determinar que una configuración de galgas es mejor que otra. Debido a que las deformaciones mecánicas se calculan como combinaciones lineales de las componentes del torsor, tal y como se muestra en la Ecuación 2.33, la información sobre la posición y orientación de las galgas está contenida en  $\mathbf{W}$ , es decir,  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})$ . Por tanto, no es necesario conocer

$\mathbf{t}$  para calcular la configuración óptima. Es más, a partir de la Ecuación 2.40 es posible calcular la varianza de  $\mathbf{t}$  sin hacer experimentos si se conoce la varianza de las mediciones de deformación.

Existen multitud de criterios de optimización en la literatura, pero tal y como demostraron Sun y Hollerbach [20], el criterio D-Optimality teóricamente es el mejor índice de observabilidad para maximizar la observabilidad del torsor. En otras palabras, sería el mejor índice de observabilidad para minimizar la varianza del torsor externo. Más aún, este criterio es *invariante en escala*, de modo que es insensible a las diferentes dimensiones de las componentes del torsor (fuerzas y momentos).

Asumiendo que la Ecuación 2.38 se cumple, y omitiendo el factor de escala  $\text{var}(\varepsilon_m)$ , la función de coste  $\mathcal{F}_D$  del criterio D-Optimality puede escribirse como [70, 72]:

$$\mathcal{F}_D(\mathbf{W}) = -\log(\det(\mathbf{W}^\top \mathbf{W})) \quad (2.43)$$

La obtención de la Ecuación 2.43 se explica en detalle en [72], donde Swevers *et al.* resuelven el problema de la optimización de trayectorias para la estimación de parámetros dinámicos en robótica. La determinación de los *parámetros de la trayectoria* es análoga a la determinación de la *posición de las galgas* en la presente tesis.

En la década de los 90, Driels *et al.* y Gautier *et al.* [73, 74], propusieron otro criterio de optimización, en el contexto de *optimización de trayectorias* de robots. Este está directamente relacionado con la minimización del número de condición de la matriz de observabilidad  $\mathbf{W}$ , lo que permite maximizar el índice de observabilidad de las deformaciones. De ahora en adelante nos referiremos a él como criterio del Número de Condición (NC), donde su función de coste  $\mathcal{F}_C$  resulta ser:

$$\mathcal{F}_C(\mathbf{W}) = \text{cond}(\mathbf{W}) \quad (2.44)$$

Sun y Hollerbach [20], a su vez, también demostraron que el criterio de optimización E-Optimality es el mejor índice de observabilidad para minimizar la incertidumbre de estimación de las deformaciones,  $\hat{\varepsilon}$ . Es decir, una vez se ha estimado el torsor,  $\hat{\mathbf{t}}$ , se pueden estimar las deformaciones según  $\hat{\varepsilon} = \mathbf{W}\hat{\mathbf{t}}$ , y ya que existe incertidumbre en la estimación del torsor, las deformaciones también se estiman con incertidumbre. Así pues, la función de coste  $\mathcal{F}_E$  del criterio de E-Optimality puede escribirse como:

$$\mathcal{F}_E(\mathbf{W}) = \frac{1}{\lambda_{\min}} \quad (2.45)$$

donde  $\lambda_{\min}$ , es el mínimo valor singular del producto de matrices  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W}$ .

Una vez establecido el criterio de optimización, para la determinación de la posición y orientación de las galgas extensiométricas,  $\boldsymbol{\vartheta}^{opt}$ , bastaría con resolver el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}^{opt} &= \arg_{\boldsymbol{\vartheta}} \min \{ \mathcal{F}(\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})) \} \\ \text{sujeto a: } &\mathbf{c}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0}$  son restricciones opcionales no-lineales. Por ejemplo, estas restricciones podrían emplearse para obligar a que dos galgas estén posicionadas con el

mismo ángulo  $\varphi$  y misma posición longitudinal  $x$ , y que sus ángulos  $\delta$  estén desfasados  $90^\circ$ . Esto llevaría a utilizar *Rosetas X* [47] en lugar de galgas individuales.

### 2.3.3. Estimación óptima del torsor con compensación de efectos térmicos

Si se realiza una medición cuando la temperatura ( $\mathcal{T}$ ) difiere de la presente durante la calibración, se produce una deformación inducida por la variación de temperatura. Esta respuesta a la temperatura es reversible y los efectos desaparecen cuando las galgas están a la temperatura de calibración. En la literatura, esta respuesta de la temperatura se denomina habitualmente como *deformación aparente* [47].

Hay muchos factores que afectan a la respuesta de las galgas a la temperatura [8, 47, 9]. Tanto el material de la rejilla de medición de las galgas extensiométricas como el material de la pieza donde se adhiere la galga, tienen su propio *coeficiente de dilatación térmica*. Por lo tanto, cuando se produce un cambio de temperatura ambos materiales se dilatan/contraen y provocan una deformación no relacionada con las cargas mecánicas. Además, los *coeficientes de resistencia eléctrica* de los materiales de las galgas y los cables también dependen de la temperatura, lo que resulta en una contribución adicional a la *deformación aparente*.

Para minimizar estos efectos térmicos, se pueden utilizar *galgas extensiométricas con compensación de temperatura* [9]. Este tipo de galgas extensiométricas están diseñadas con un coeficiente térmico que compensa, en la medida de lo posible, estos efectos térmicos. Estas galgas sólo son útiles si se adhieren a materiales con un coeficiente de dilatación térmica específico. Sin embargo, la compensación completa no es posible con estas galgas para un rango continuo de temperaturas porque los coeficientes de expansión térmica de los materiales y el coeficiente de temperatura de la resistencia eléctrica del material de la galga dependen ambos de la temperatura.

Una forma eficaz de compensar los efectos de la temperatura consiste en utilizar varias galgas extensiométricas. Eligiendo una configuración adecuada, se pueden estimar las cargas mecánicas haciendo que las respuestas a la temperatura de las diferentes galgas se compensen entre sí.

En esta situación, supongamos que las galgas perciben una cierta deformación relacionada con las variaciones de temperatura,  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ . Esta deformación será indistinguible de la deformación relacionada con las cargas mecánicas,  $\varepsilon$ . El modelo más sencillo para esta deformación térmica viene definido por  $\varepsilon_{\mathcal{T}} = \alpha_{\mathcal{T}} \Delta \mathcal{T}$ , donde  $\alpha_{\mathcal{T}}$  es el coeficiente de dilatación térmica del material y  $\Delta \mathcal{T}$  es la variación de temperatura. En esta ocasión, en el estudio que nos incumbe no va resultar necesario, puesto que podemos trabajar directamente con  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ . Por tanto, para tener en cuenta las variaciones de temperatura, las deformaciones medidas,  $\varepsilon_m$ , deben escribirse como:

$$\varepsilon_m = \varepsilon + \varepsilon_{\mathcal{T}} + \mathbf{e} \quad (2.47)$$

Asumiendo que cualquier posible efecto térmico afecta a la medida de todas las galgas extensiométricas de la misma manera, la deformación por temperatura puede escribirse como  $\varepsilon_{\mathcal{T}} = \mathbf{1}\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , donde  $\mathbf{1}$  es un vector  $n \times 1$  de unos y  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$  es un escalar

desconocido. Sustituyendo  $\varepsilon = \mathbf{W}\mathbf{t}$  y  $\varepsilon_{\mathcal{T}} = \mathbf{1}\varepsilon_{\mathcal{T}}$  en la Ecuación 2.47 se obtiene:

$$\varepsilon_m = [\mathbf{W} \quad \mathbf{1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \varepsilon_{\mathcal{T}} \end{Bmatrix} + \mathbf{e}. \quad (2.48)$$

Podríamos referirnos a la Ecuación 2.48 como el *sistema de ecuaciones extendido* en el que se ha tenido en cuenta la deformación a causa de los efectos térmicos. Este sistema lineal es análogo al de la Ecuación 2.33 donde la matriz  $\mathbf{W}$  y el vector  $\mathbf{t}$  han sido extendidos con una columna y una fila, respectivamente. Por lo tanto, los procedimientos de estimación y optimización presentados anteriormente también pueden aplicarse al sistema extendido.

El procedimiento descrito puede generalizarse a una situación más compleja en la que todas las galgas extensiométricas no se vean sometidas a los mismos efectos de la temperatura. Por ejemplo, en una aplicación al aire libre, si 6 galgas estuvieran adheridas a una estructura cilíndrica en 3 parejas, y algunas parejas permanecieran a la sombra y otras expuestas al sol, se podría construir el siguiente modelo:

$$\varepsilon = \left[ \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \varepsilon_{\mathcal{T},12} \\ \varepsilon_{\mathcal{T},34} \\ \varepsilon_{\mathcal{T},56} \end{Bmatrix} = \mathbf{W}_e \mathbf{t}_e \quad (2.49)$$

donde  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{0}$  son vectores columna de unos y ceros de tamaño  $2 \times 1$ , respectivamente,  $\varepsilon_{\mathcal{T},ij}$  es la deformación relacionada con las variaciones de temperatura en las galgas  $i$  y  $j$ , y el tamaño del vector  $\mathbf{t}$  extendido,  $\mathbf{t}_e$ , y el número de columnas de la matriz  $\mathbf{W}$  extendida,  $\mathbf{W}_e$ , sería  $p = 9$ .

## 2.4. Características de la resolución numérica de los problemas de optimización

La obtención de nuevas configuraciones de galgas requiere de la resolución numérica del problema de minimización de la Ecuación 2.46 para cualquiera de los criterios propuestos. Dada la gran cantidad de veces que hay que resolver los problemas y la no-linealidad de las ecuaciones a resolver, la resolución de estos problemas se realiza mediante programas de cálculo numérico, como puede ser *Matlab* o la versión libre *GNU Octave*.

En el caso que nos concierne, deben resolverse problemas de minimización multivariable en los que el número de variables a optimizar puede variar en función de las hipótesis o restricciones de partida. Si se considera que todas las galgas han de situarse en una misma sección, por ejemplo, cuando el espacio para su instalación es reducido, tan sólo se deben calcular los valores  $\varphi^{opt}$  y  $\delta^{opt}$  para cada una de las galgas y se tienen un total de  $2n$  parámetros. Sin embargo, si las galgas pueden situarse en cualquier posición longitudinal del eje, adicionalmente ha de calcularse el valor de  $x^{opt}$  para cada galga, lo que aumenta a un total de  $3n$  el número de parámetros.

En función de las características que se deseen para la configuración de galgas, la resolución del problema de minimización en algunas ocasiones requiere de restricciones para los parámetros y otras ocasiones los parámetros óptimos pueden tomar cualquier valor. En este caso el software de cálculo empleado es *Matlab* y por tanto, para la resolución de los problemas con restricciones se ha empleado la función *fmincon*, mientras que para los problemas sin restricciones la función *fminunc*.

Si se analizan uno a uno, en el problema restringido se han definido únicamente las siguientes restricciones de igualdad, que principalmente vienen definidas por la imposición de emplear rosetas de galgas:

- Al emplearse rosetas de galgas, estas siempre han de posicionarse azimutalmente y longitudinalmente por parejas. Es decir, cada pareja de galgas deberá estar en la misma posición del eje.
- El desfase entre la orientación de las galgas que forman la pareja debe ser un ángulo determinado, una vez más, para la implementación de rosetas.
- Cuando se sabe que la posición azimutal del conjunto completo puede tomar cualquier valor, la orientación de una pareja de galgas se fija a  $0^\circ$ , para poder tomarla como referencia para el resto de parejas de galgas.
- Se establece un dominio para todos los parámetros que intervienen en la optimización. Por ejemplo, las coordenadas angulares  $\varphi$  y  $\delta$  pueden tomar cualquier valor, lo que permite tener continuidad en la resolución del problema. Sin embargo, con el fin de que la coordenada  $x$  no tome valores infinitos, y por tanto el problema de optimización no diverja, se ha restringido a un intervalo finito.

Por el contrario la resolución del problema sin restricciones, lógicamente no requiere de restricciones y por tanto, los problemas de minimización en los que se permita que las galgas se sitúen en secciones distintas no se van a poder resolver. La razón principal es que los valores que pueda tomar la coordenada  $x$  durante la optimización deben estar acotados a un intervalo, y mediante la función *fminunc* esto no es posible.

Como cualquier problema numérico de minimización, su resolución requiere dar unos valores iniciales a los parámetros que se desean calcular para posteriormente evaluar la función de coste del criterio. Es común que estos valores iniciales sean aleatorios, lo que puede conllevar a que algunos de ellos estén fuera del dominio definido y por tanto la solución inicial al problema de minimización sea no factible. Por esta razón, ya que no siempre se obtendrán soluciones factibles en una primera iteración es conveniente repetir la resolución del problema de minimización y quedarse con la *mejor* solución. Al respecto, los problemas de minimización se han resuelto un total de 500 veces.

Cada uno de los criterios de la Sección 2.3.2 tienen una finalidad distinta, y por tanto, el significado y magnitud de la función de coste de cada uno de ellos también. Establecer un criterio para la convergencia de los problemas de minimización puede llevar a definir diferentes tolerancias para cada uno de los criterios de optimización. En este caso, se han fijado unos valores de tolerancia para la convergencia comunes para los tres criterios de optimización, es decir, un número máximo de evaluaciones de la función y un número máximo de iteraciones de  $10^4$ , y unas tolerancias de la

función y paso de  $10^{-12}$  (véase la Figura 2.10). Los valores escogidos son aquellos que permiten obtener unos resultados fiables tras la optimización y además, no suponen un gran coste computacional. Asimismo, se han comprobado los códigos de parada (*exitflag*) del proceso de minimización y se ha podido ver que todas las optimizaciones llevadas a cabo han sido factibles y que el motivo de la parada en todas ellas es debida a que la variación de los parámetros a calcular entre dos iteraciones consecutivas resulta ser menor que la tolerancia de paso.

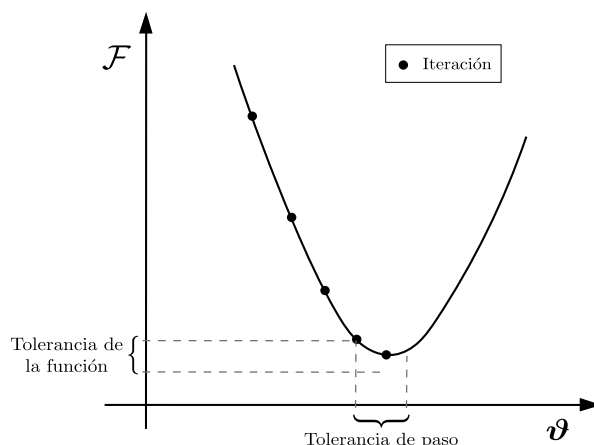


FIGURA 2.10: Tolerancia de la función y de paso de los problemas de minimización.

## 2.5. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio D-Optimality

Una vez definidos los criterios de optimización, las posibles restricciones de los problemas de minimización y los criterios para su convergencia, llega el momento de evaluar las configuraciones óptimas obtenidas. Precisamente en esta Sección se van a analizar aquellas configuraciones obtenidas a partir del criterio de optimización D-Optimality y restringiendo todas las galgas a situarse en la misma sección del eje ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ). Esto se corresponde con imponer que la coordenada  $x$  de la Figura 2.8 tome el valor cero para todas las galgas, de forma que el torsor se estime en la misma sección en la que se colocan las galgas.

### 2.5.1. Estimación óptima del torsor externo mediante 6 galgas extensiométricas

Si no se desea compensar la deformación a causa de los efectos térmicos, basta con utilizar 6 galgas extensiométricas para estimar las 6 componentes de  $\mathbf{t}$ . El procedimiento de optimización de la Sección 2.3 se ha aplicado para valores diferentes de los parámetros geométricos ( $A, \omega, I_p, R, \kappa$ ) y del material ( $E, \nu$ ). Un análisis de los resultados revela que la estructura de las soluciones tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (2.50a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\} \quad (2.50b)$$



Por un lado, se observa que el valor óptimo de  $\alpha$  es distinto para diferentes valores de los parámetros geométricos y del material. Por otro lado, puesto que la disposición óptima de las galgas en el eje es simétrica axialmente, esta solución es óptima para cualquier valor de  $\tilde{\varphi}$  y  $\check{\varphi}$ , y se obtiene una configuración particularmente interesante para  $\tilde{\varphi} = \check{\varphi} = 0$ . En esta situación podemos considerar la configuración óptima como tres parejas de galgas posicionadas a lo largo del perímetro con el mismo  $\varphi$  mientras que el desfase entre parejas es de  $120^\circ$ . Además, las orientaciones de las galgas de cada pareja vienen dadas por  $+\alpha$  y  $-\alpha$ .

Evaluando la matriz  $\mathbf{W}$  para esta configuración para un valor genérico de  $\alpha$  y valores simbólicos de los parámetros geométricos y del material, se obtiene la expresión de la función de coste del criterio de optimización de la Ecuación 2.43:

$$\mathcal{F}_D(\mathbf{W}) = -\log\left(4(\nu+1)^6 \sin^6 2\alpha (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)\right) - \log\left(\frac{3^6 R^4}{\kappa^4 A^6 E^{12} I_p^2 \omega^4}\right) \quad (2.51)$$

De esta expresión es evidente que el óptimo valor de  $\alpha$  depende sólo de  $\nu$  ya que  $\alpha$  no aparece en el segundo término de la Ecuación 2.51 y el primer término sólo depende de  $\alpha$  y  $\nu$ .

Analizando la dependencia de  $\alpha^{opt}$  (el óptimo  $\alpha$ ) con respecto a  $\nu$  se concluye que para valores típicos del *módulo de Poisson* de metales comunes, es decir, entre 0.25 y 0.40, el valor de  $\alpha^{opt}$  varía entre  $28^\circ$  y  $26^\circ$ , lo que puede considerarse una variación pequeña.

La Figura 2.11 representa el criterio de optimización D-Optimality en términos de  $\alpha$  para  $\nu = 1/3$ , donde la orientación óptima de la galga es  $\alpha^{opt} = 26.8^\circ$ .

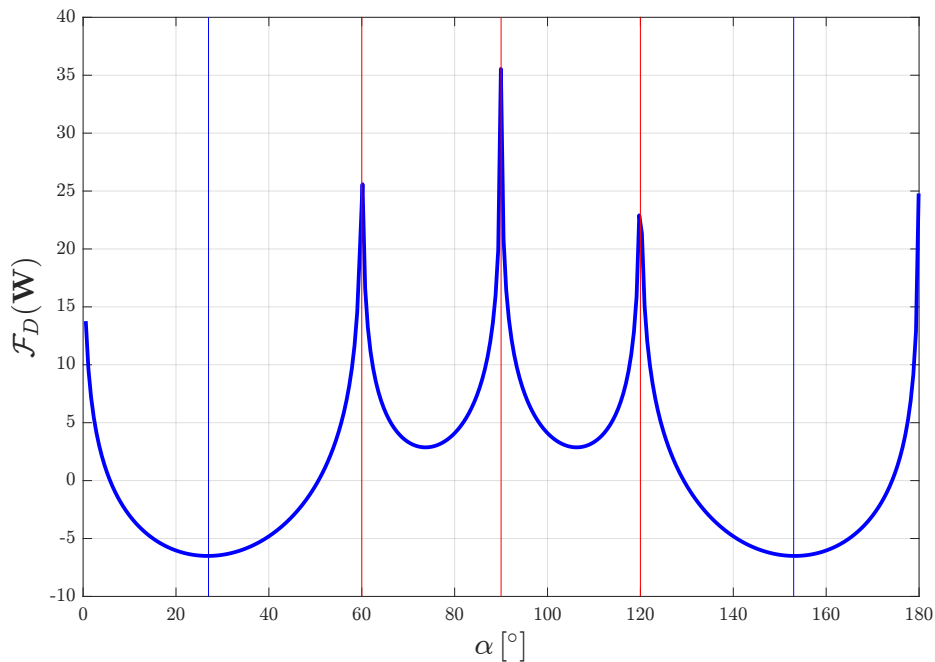


FIGURA 2.11: Valor de la función de coste del criterio de optimización D-Optimality en términos de  $\alpha$  para  $\nu = 1/3$ .

Evaluando la matriz  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{W}^{-1}$  con los valores de  $\varphi^{opt}$  y  $\delta^{opt}$  de la Ecuación 2.50, para  $\tilde{\varphi} = \check{\varphi} = 0$ , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & 0 & \frac{g(\alpha, \nu)}{\kappa AE} & \frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & 0 & \frac{f(\alpha, \nu)}{Ew} \\ \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & 0 & -\frac{g(\alpha, \nu)}{\kappa AE} & -\frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & 0 & \frac{f(\alpha, \nu)}{Ew} \\ \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & -\frac{\sqrt{3}g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & -\frac{g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & \frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & -\frac{\sqrt{3}f(\alpha, \nu)}{2Ew} & -\frac{f(\alpha, \nu)}{2Ew} \\ \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & \frac{\sqrt{3}g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & \frac{g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & -\frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & -\frac{\sqrt{3}f(\alpha, \nu)}{2Ew} & -\frac{f(\alpha, \nu)}{2Ew} \\ \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & \frac{\sqrt{3}g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & -\frac{g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & \frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & \frac{\sqrt{3}f(\alpha, \nu)}{2Ew} & -\frac{f(\alpha, \nu)}{2Ew} \\ \frac{-f(\alpha, \nu)}{AE} & -\frac{\sqrt{3}g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & \frac{g(\alpha, \nu)}{2\kappa AE} & -\frac{Rg(\alpha, \nu)}{EI_p} & \frac{\sqrt{3}f(\alpha, \nu)}{2Ew} & -\frac{f(\alpha, \nu)}{2Ew} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-AE}{6f(\alpha, \nu)} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & \frac{\sqrt{3}\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & \frac{\sqrt{3}\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & -\frac{\sqrt{3}\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} \\ \frac{\kappa AE}{3g(\alpha, \nu)} & -\frac{\kappa AE}{3g(\alpha, \nu)} & -\frac{\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & \frac{\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & -\frac{\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} & \frac{\kappa AE}{6g(\alpha, \nu)} \\ \frac{6Rg(\alpha, \nu)}{6Rg(\alpha, \nu)} & -\frac{6Rg(\alpha, \nu)}{6Rg(\alpha, \nu)} & \frac{6Rg(\alpha, \nu)}{6Rg(\alpha, \nu)} & -\frac{6Rg(\alpha, \nu)}{6Rg(\alpha, \nu)} & \frac{6R(\alpha, \nu)}{6R(\alpha, \nu)} & -\frac{6Rg(\alpha, \nu)}{6Rg(\alpha, \nu)} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}Ew}{6f(\alpha, \nu)} & -\frac{\sqrt{3}Ew}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{\sqrt{3}Ew}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{\sqrt{3}Ew}{6f(\alpha, \nu)} \\ \frac{Ew}{3f(\alpha, \nu)} & \frac{Ew}{3f(\alpha, \nu)} & \frac{-Ew}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-Ew}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-Ew}{6f(\alpha, \nu)} & \frac{-Ew}{6f(\alpha, \nu)} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

donde  $f(\alpha, \nu)$  y  $g(\alpha, \nu)$  vienen definidos por:

$$f(\alpha, \nu) = \cos^2\alpha - \nu\sin^2\alpha \quad (2.54)$$

$$g(\alpha, \nu) = \sin 2\alpha(\nu + 1) \quad (2.55)$$

Nótese que los valores de  $\alpha$  para los que el criterio de optimización D-Optimality tiende a infinito en la Figura 2.11 son precisamente los que hacen que algunas columnas de  $\mathbf{W}$  sean iguales a cero, es decir, los valores de  $\alpha$  que resuelven  $f(\alpha, \nu) = 0$  o  $g(\alpha, \nu) = 0$ .

También es interesante observar que, aunque no se ha requerido en la optimización, para la configuración de la Ecuación 2.50 y para cualquier valor de  $\alpha$ , los efectos térmicos se compensan para todas las componentes del torsor excepto para la fuerza axial. Esta afirmación se puede comprobar sumando todos los elementos de cada fila de la matriz  $\mathbf{W}^{-1}$  y observando que esta suma sólo es distinta de cero para la primera fila. Por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{W}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \varepsilon_T \mathbf{1}) = \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \varepsilon_T \frac{-EA}{f(\alpha, \nu)} (1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top \quad (2.56)$$

Por lo tanto, se demuestra que para esta configuración, sólo la estimación de la primera componente de  $\mathbf{t}$  (la fuerza axial) está corrompida por una variación homogénea de la temperatura.

Con el objetivo de analizar la observabilidad del torsor para diferentes valores de  $\alpha$ , se estima la matriz de covarianzas del torsor utilizando la Ecuación 2.40. Para representar la varianza de cada componente del torsor, en la Ecuación 2.57 se muestran los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas divididos por la varianza

de la medición:

$$\frac{\text{var}(F_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{A^2 E^2}{6(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)^2} \quad (2.57a)$$

$$\frac{\text{var}(F_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(F_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{A^2 E^2 \kappa^2}{3 \sin^2 2\alpha (\nu + 1)^2} \quad (2.57b)$$

$$\frac{\text{var}(M_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{E^2 I_p^2}{6 R^2 \sin^2 2\alpha (\nu + 1)^2} \quad (2.57c)$$

$$\frac{\text{var}(M_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(M_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{E^2 \omega^2}{3(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)^2} \quad (2.57d)$$

La Figura 2.12 representa el logaritmo de la varianza de las componentes del torsor en términos de  $\alpha$  para la configuración definida por la Ecuación 2.50 y para valores unitarios de los parámetros  $A$ ,  $E$ ,  $\kappa$ ,  $I_p$ ,  $\omega$  y  $\nu = 1/3$ . Se han trazado líneas verticales para valores de  $\alpha$  iguales a  $0^\circ$ ,  $26.8^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$  con el fin de destacar la varianza de cada componente para esos ángulos. La figura muestra claramente que la mejor orientación para la estimación de la fuerza axial y los momentos flectores ocurre para  $\alpha = 0^\circ$ , mientras que la mejor orientación para la estimación del momento de torsión y las fuerzas cortantes ocurre para  $\alpha = 45^\circ$ . Sin embargo, el valor óptimo para medir el torsor completo resulta ser  $\alpha^{opt} = 26.8^\circ$  que se encuentra entre estos ángulos. Para los valores de  $\alpha$  iguales a  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ , y  $90^\circ$ , el criterio de optimización D-Optimality tiende a infinito, junto con la varianza de algunas componentes del torsor.

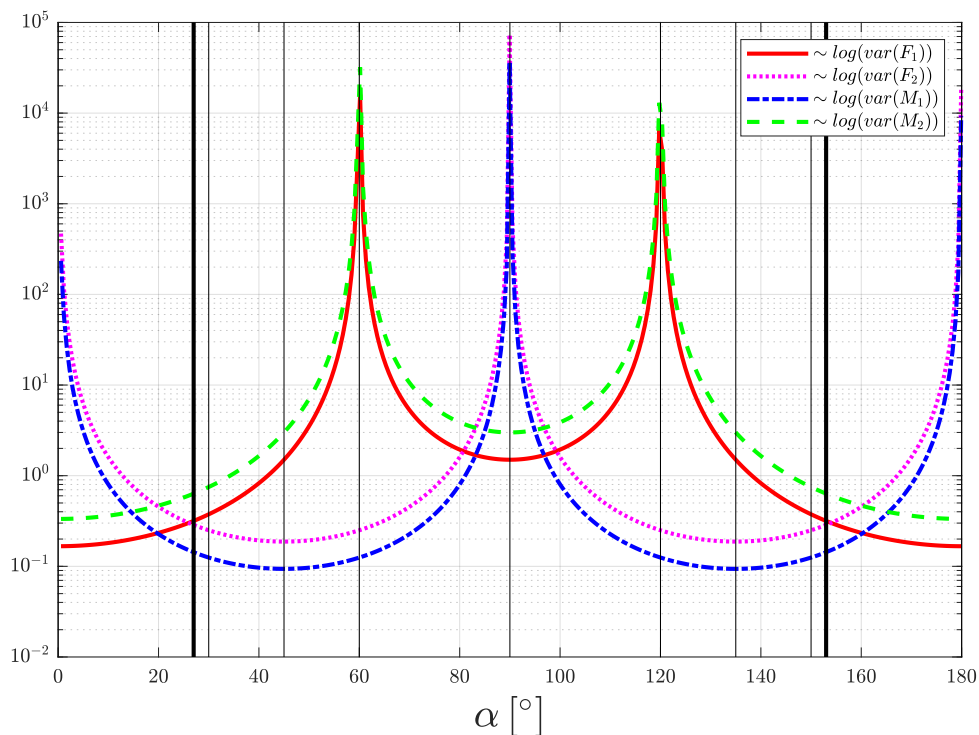


FIGURA 2.12: Logaritmo de la varianza de las componentes del torsor en términos de  $\alpha$  para  $\nu = 1/3$ , y  $A$ ,  $E$ ,  $\kappa$ ,  $I_p$ ,  $\omega$  y  $R$  unitarios.

Las soluciones obtenidas para el valor óptimo de  $\alpha$  no son en general fracciones enteras de  $180^\circ$  y puede ser difícil colocar las galgas en el eje con precisión para estas orientaciones. Por otra parte, las galgas suelen estar unidas por rosetas [47] en las que los pares de galgas están desplazados  $60^\circ$  o  $90^\circ$  por lo que utilizar estas rosetas puede ser una solución práctica que permita una instalación de las galgas más fácil y precisa, aunque las configuraciones no sean óptimas.

Con el objetivo de emplear rosetas, el problema de optimización de la Ecuación 2.46 puede resolverse con las siguientes restricciones:

- Tres parejas de galgas, cada pareja en una roseta y con el mismo valor de  $\varphi$ . Matemáticamente, las restricciones pueden escribirse como:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_6 - \varphi_5 = 0 \quad (2.58)$$

- Las orientaciones (ángulos  $\delta_i$  y  $\delta_j$ ) de las galgas de cada pareja deben estar desfasadas un determinado ángulo  $2\beta$  (cuyo valor se fijará en  $60^\circ$  o  $90^\circ$ ). Matemáticamente las restricciones se pueden escribir como:

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta_4 - \delta_3 = \delta_6 - \delta_5 = 2\beta \quad (2.59)$$

Con el objetivo de proporcionar una visión de la simetría de las configuraciones óptimas, se define un ángulo  $\gamma$  que establece la orientación de la roseta mediante el ángulo medio de la pareja de galgas, como en la Figura 2.13. De esta forma, la orientación de las galgas de la pareja  $(i, j)$  puede escribirse como  $\delta_{(i,j)} = \gamma \pm \beta$ .

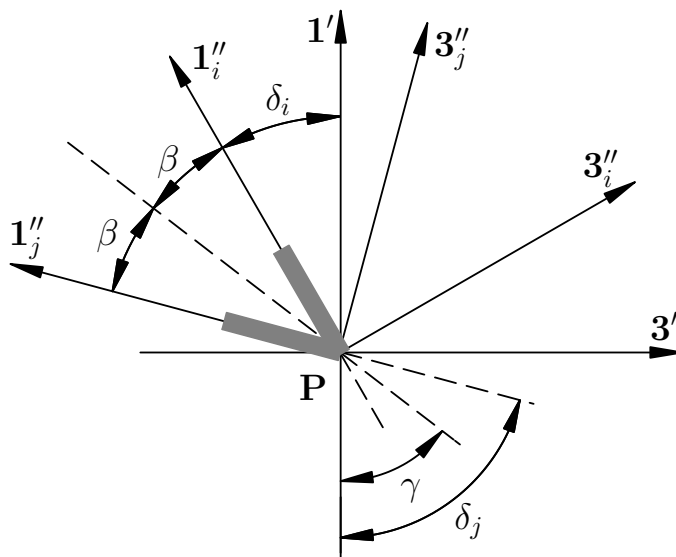


FIGURA 2.13: Parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  para la definición de la orientación de las rosetas.

Empleando restricciones para la optimización se obtienen dos resultados interesantes, concretamente imponiendo  $2\beta = 60^\circ$  y  $2\beta = 90^\circ$ . Imponiendo el uso de rosetas con un desfase entre galgas de  $2\beta = 60^\circ$  la configuración óptima de 6 galgas

resultante es la siguiente:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.60a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ\} \quad (2.60b)$$

Esta configuración es la misma que la descrita en la Ecuación 2.50 para  $\alpha = 30^\circ$  y  $\tilde{\varphi} = \check{\varphi} = 0$ , y además coincide con la acotación de una roseta según la Figura 2.13 para los valores de  $\beta = 30^\circ$  y  $\gamma = 0$ .

Sin embargo, la configuración óptima de 6 rosetas imponiendo la restricción  $2\beta = 90^\circ$ , coincide con la configuración de la Ecuación 2.50 para  $\alpha = 30^\circ$  y  $\tilde{\varphi} = \check{\varphi} = 0$ , y también con la acotación de una roseta según la Figura 2.13 para los valores de  $\beta = 45^\circ$  y  $\gamma = 0$ . Así pues, la configuración óptima encontrada resulta ser la siguiente:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.61a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\} \quad (2.61b)$$

A la vista de los dos resultados anteriores, es preferible elegir la configuración con  $\alpha = 30^\circ$  frente a  $\alpha = 45^\circ$  puesto que la primera solución está mucho más cerca del óptimo ( $\alpha^{opt} = 26.8^\circ$ ) para  $\nu = 1/3$ .

Gráficamente las galgas, para las configuraciones con  $2\beta = 60^\circ$  y  $2\beta = 90^\circ$ , se posicionarían en el eje tal y como se muestra en la Figura 2.14.

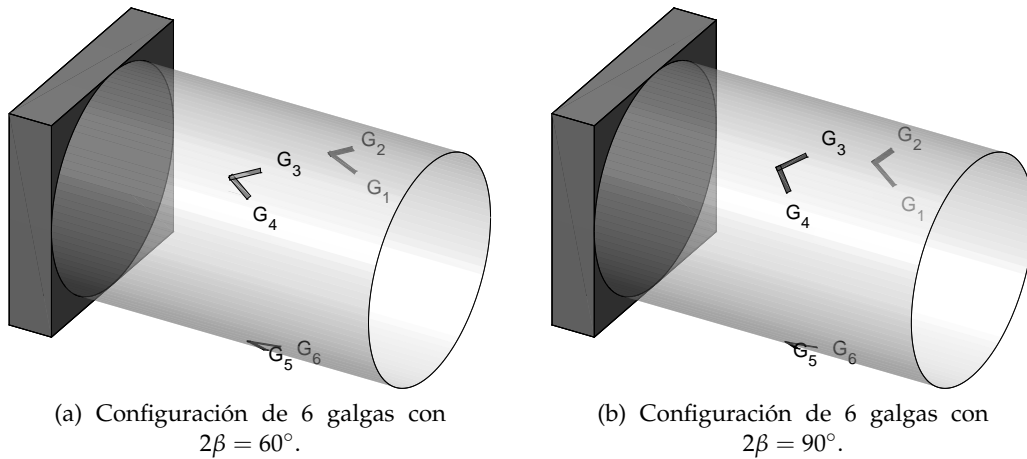


FIGURA 2.14: Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de  $\mathbf{t}$  obtenidas mediante el criterio D-Optimality.

La diferencia entre las configuraciones óptimas y no óptimas puede calcularse mediante la varianza de la estimación de las componentes del tensor. Evaluando la

Ecuación 2.57 para  $\alpha = 30^\circ$ , la varianza de las componentes de  $\mathbf{t}$  resulta ser:

$$\frac{\text{var}(F_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{8A^2E^2}{3(\nu - 3)^2} \quad (2.62a)$$

$$\frac{\text{var}(F_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(F_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{4A^2E^2\kappa^2}{9(\nu + 1)^2} \quad (2.62b)$$

$$\frac{\text{var}(M_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{2E^2I_p^2}{9R^2(\nu + 1)^2} \quad (2.62c)$$

$$\frac{\text{var}(M_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(M_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{16E^2\omega^2}{3(\nu - 3)^2} \quad (2.62d)$$

Para  $\alpha = 45^\circ$ , la varianza de las componentes de  $\mathbf{t}$  resultan ser:

$$\frac{\text{var}(F_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{2A^2E^2}{3(\nu - 1)^2} \quad (2.63a)$$

$$\frac{\text{var}(F_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(F_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{A^2E^2\kappa^2}{3(\nu + 1)^2} \quad (2.63b)$$

$$\frac{\text{var}(M_1)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{E^2I_p^2}{6R^2(\nu + 1)^2} \quad (2.63c)$$

$$\frac{\text{var}(M_2)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{\text{var}(M_3)}{\text{var}(\varepsilon)} = \frac{4E^2\omega^2}{3(\nu - 1)^2} \quad (2.63d)$$

Comparando los valores de las Ecuaciones 2.62 y 2.63, las varianzas para estimar los esfuerzos axiales y de flexión ( $F_1, M_2, M_3$ ) son menores para  $\alpha = 30^\circ$ , mientras que las varianzas para los esfuerzos de torsión y cortantes ( $M_1, F_2, F_3$ ) son menores para  $\alpha = 45^\circ$ . En cualquier caso, el valor de la función del criterio de optimización D-Optimality definido en Ecuación 2.43 es menor para la primera configuración.

Por último, recordar que al resolver el problema de optimización para la determinación de estas soluciones óptimas, no se ha exigido la compensación de los efectos térmicos. En el próximo apartado se utilizan más galgas extensiométricas para encontrar configuraciones óptimas capaces de estimar  $\mathbf{t}$  compensando las deformaciones a causa de los efectos térmicos.

## 2.5.2. Estimación óptima del torsor externo mediante 8 galgas extensiométricas

Con el fin de obtener una configuración simétrica que compense los efectos térmicos, se han añadido 2 galgas extensiométricas a la configuración anterior. Con 8 galgas, se ha buscado una configuración óptima en la que las galgas se posicionan por parejas, al igual que en el apartado anterior, para que estén posicionadas con el mismo valor de  $\varphi$  y que tengan un desfase de  $2\beta$  entre sus orientaciones  $\delta$ . Estas

restricciones se pueden escribir matemáticamente como:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_6 - \varphi_5 = \varphi_8 - \varphi_7 = 0 \quad (2.64)$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta_4 - \delta_3 = \delta_6 - \delta_5 = \delta_8 - \delta_7 = 2\beta \quad (2.65)$$

Con dichas restricciones, se ha empleado el procedimiento propuesto en la Sección 2.3.3 para obtener las configuraciones óptimas que compensen los efectos térmicos para  $2\beta = 60^\circ$  y  $2\beta = 90^\circ$ .

Tras resolver el problema de optimización para  $2\beta = 60^\circ$ , se observa que las configuraciones óptimas dependen de  $\nu$  pero todas las soluciones comparten una estructura común que puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \quad (2.66a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{\gamma + \beta, \gamma - \beta, -\gamma + \beta, -\gamma - \beta, \gamma + \beta, \gamma - \beta, -\gamma + \beta, -\gamma - \beta\} \quad (2.66b)$$

donde  $\gamma = \gamma(\nu)$ . Para un valor de referencia de  $\nu = 1/3$ , se obtiene la siguiente configuración:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \quad (2.67a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{-9.9^\circ, 50.1^\circ, 9.9^\circ, -50.1^\circ, -9.9^\circ, 50.1^\circ, 9.9^\circ, -50.1^\circ\} \quad (2.67b)$$

mientras que para diferentes valores de  $\nu$ , se obtienen valores de  $\gamma$  ligeramente diferentes para valores fijos de  $\boldsymbol{\varphi}^{opt}$ . Esta configuración coincide con la estructura de la Ecuación 2.66 para  $2\beta = 60^\circ$  y  $\gamma = 20.1^\circ$ .

Tras resolver el problema de optimización para  $2\beta = 90^\circ$ , la configuración óptima resulta ser:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \quad (2.68a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ\} \quad (2.68b)$$

independientemente de los valores numéricos de los parámetros geométricos y del material. Además, esta configuración coincide con la estructura de la Ecuación 2.66 para  $2\beta = 90^\circ$  y  $\gamma = 15^\circ$ .

Las configuraciones óptimas definidas en las Ecuaciones 2.67 y 2.68 se representan en Figura 2.15. Ambas son configuraciones de galgas extensiométricas destacables ya que tienen las siguientes propiedades:

- Se pueden emplear rosetas, asegurando un ángulo preciso entre las parejas de galgas.
- Las rosetas están desfasadas  $90^\circ$  (en dirección azimutal) lo que facilita *pegar* las rosetas con precisión.
- Las configuraciones compensan los efectos térmicos sin necesidad de ninguna galga o dispositivo adicional.
- Las configuraciones son las óptimas (impuestas las restricciones) que maximizan la sensibilidad de la medición.
- Las configuraciones son simétricas, lo que proporciona expresiones simétricas para la estimación de los dos momentos flectores y los dos esfuerzos cortantes.

- Las varianzas de los momentos flectores son iguales entre sí, al igual que las varianzas de los esfuerzos cortantes entre sí.

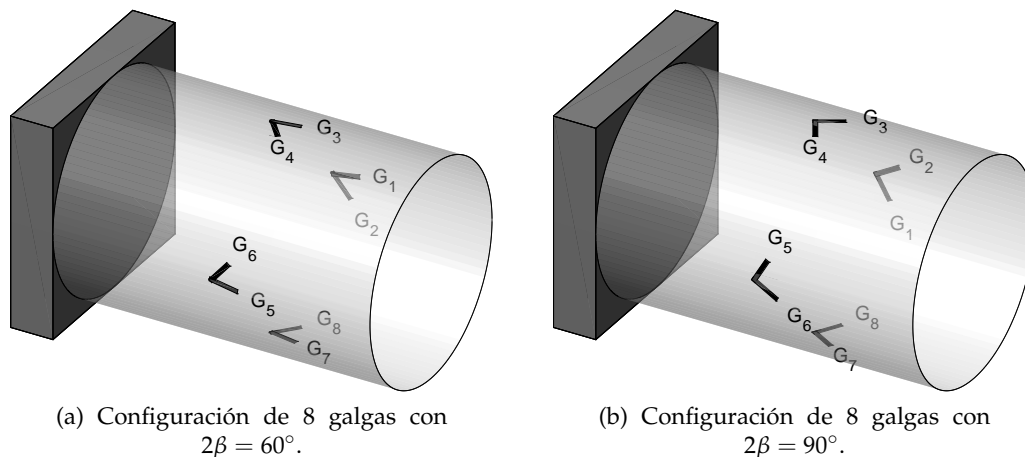


FIGURA 2.15: Configuraciones de 8 galgas con restricciones para la estimación de  $\mathbf{t}$  obtenidas mediante el criterio D-Optimality.

Además, estas configuraciones tienen una propiedad adicional muy interesante en cuanto a la robustez en una aplicación práctica. Si una sola galga extensiométrica o una roseta de dos galgas se dañara por accidente, las configuraciones de 8 galgas extensiométricas seguirían proporcionando suficiente información para continuar estimando todas las componentes del torsor, ya que el rango de la matriz  $\mathbf{W}$  seguiría siendo 6. Sin embargo, la estimación mediante 6 galgas extensiométricas no compensaría las deformaciones térmicas. En esta situación, habría que conocer qué galgas se han dañado para poder realizar el cálculo de  $\hat{\mathbf{t}}$  a partir de las filas de  $\mathbf{W}$  relativas a las galgas extensiométricas funcionales.

## 2.6. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio D-Optimality, situadas en distintas secciones del eje

En las configuraciones de la Sección anterior todas las parejas de galgas se disponen en una misma sección del eje ya que se han restringido sus posiciones longitudinales en la optimización. Sin embargo, en esta Sección las posiciones longitudinales de las galgas,  $x$ , van dejarse *libres* en la optimización, de manera que puedan tomar cualquier valor finito.

### 2.6.1. Estimación óptima del torsor mediante 6 galgas extensiométricas

En la Sección 2.3.3 se ha visto que si se desea compensar la deformación causada por los efectos de la temperatura, además de estimar el torsor completo, al menos han de emplearse  $n = p + 1 = 7$  galgas extensiométricas. Dado que en este apartado las configuraciones óptimas obtenidas están formadas por 6 galgas, es imposible (al



menos en principio) compensar la deformación debida a los efectos térmicos, y tan sólo se podrán estimar todas las componentes del torsor externo.

Resolviendo el problema de minimización de la Ecuación 2.46, se ha encontrado la configuración óptima de la Ecuación 2.69. En esta ocasión se han impuesto una serie de restricciones: que las galgas se disponga en parejas azimutalmente y longitudinalmente, y que estén desfasadas entre sí  $2\beta = 60^\circ$ . Así, se podrían emplear rosetas para la configuración con la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.69a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ\} \quad (2.69b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.69c)$$

Asimismo, imponiendo que el desfase entre las galgas que forman la roseta sea de  $2\beta = 90^\circ$ , se ha obtenido la configuración óptima de la Ecuación 2.70.

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.70a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\} \quad (2.70b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.70c)$$

Comparando las dos configuraciones anteriores con las obtenidas en las Ecuaciones 2.60 y 2.61, respectivamente, se observa cómo las posiciones angulares  $\boldsymbol{\varphi}^{opt}$  y  $\boldsymbol{\delta}^{opt}$  son exactamente iguales. En las configuraciones óptimas de las Ecuaciones 2.69 y 2.70 existe un GDL libre adicional por cada galga, como es la coordenada longitudinal  $\mathbf{x}$ , que puede tomar cualquier valor finito ( $\mathbf{x} \in [-L, L]$ ) durante la optimización. Sin embargo, a pesar de esta libertad, la posición longitudinal óptima para todas las galgas coincide con la de las configuraciones obtenidas en las Ecuaciones 2.60 y 2.61, donde todas las galgas se sitúan en la misma sección transversal. Esto puede traducirse en que si el objetivo es estimar el torsor completo sin atender a las deformaciones causadas por los efectos térmicos, empleando rosetas de  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , las dos configuraciones anteriores resultan ser las óptimas.

Si no se aplican restricciones que impongan que el desfase entre parejas de galgas sea un determinado ángulo, se ha obtenido la configuración de la Ecuación 2.71. Si nos fijamos bien es exactamente la configuración óptima de la Ecuación 2.50, para  $\alpha = 26.8^\circ$  y todas las galgas dispuestas en la misma sección. Las galgas se distribuyen en la periferia del eje en dos tríos de galgas, se pueden posicionar en cualquier posición azimutal  $\tilde{\varphi}$  y  $\check{\varphi}$ , respectivamente, y las galgas de los tríos están desfasadas  $120^\circ$  entre sí. A pesar de utilizarse la misma nomenclatura  $\tilde{\varphi}$  y  $\check{\varphi}$  que en la configuración de la Ecuación 2.50 sus valores necesariamente no tienen porqué ser los mismos. De ahora en adelante, en las posteriores configuraciones se emplearán estos acentos para designar los desfases en la posición azimutal de las galgas en el eje. En esta ocasión, analizando la expresión simbólica de la función de coste del criterio

de optimización, se observa cómo también es dependiente del valor que tome  $\nu$ .

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (2.71a)$$

$$\delta^{opt} = \{26.8^\circ, -26.8^\circ, 26.8^\circ, -26.8^\circ, 26.8^\circ, -26.8^\circ\} \quad (2.71b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.71c)$$

Analizando la varianza de la estimación de las cargas, se observa que son exactamente iguales que las de la configuración de la Ecuación 2.50. El cálculo de las varianzas permite obtener las expresiones de la Ecuación 2.72, en este caso en función de la coordenada  $x$ . La única afectada por la posición longitudinal de las galgas es la varianza de la estimación de los momentos flectores.

$$\frac{var(F_1)}{var(\varepsilon)} = \frac{A^2 E^2}{6(\nu \sin^2 \delta^{opt} - \cos^2 \delta^{opt})^2} \quad (2.72a)$$

$$\frac{var(F_2)}{var(\varepsilon)} = \frac{var(F_3)}{var(\varepsilon)} = -\frac{A^2 E^2 \kappa^2}{3 \sin^2 2\delta^{opt} (\nu + 1)^2} \quad (2.72b)$$

$$\frac{var(M_1)}{var(\varepsilon)} = \frac{E^2 I_p^2}{6R^2 \sin^2 2\delta^{opt} (\nu + 1)^2} \quad (2.72c)$$

$$\frac{var(M_2)}{var(\varepsilon)} = \frac{var(M_3)}{var(\varepsilon)} = h(x^2) \quad (2.72d)$$

donde  $h(x^2)$  es una función cuadrática dependiente de la coordenada  $x$  y el escalar  $\delta^{opt}$  tomaría el valor de  $26.8^\circ$ .

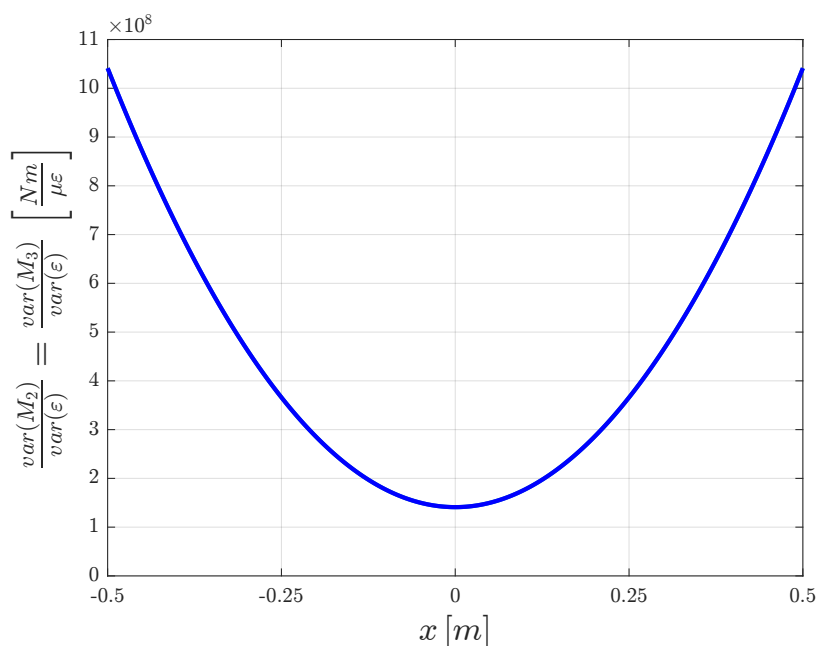


FIGURA 2.16: Varianza de la estimación de los momentos flectores en función de la posición longitudinal de las galgas, para valores de los parámetros geométricos y del material del eje lento de un aerogenerador.

Evaluando numéricamente la varianza de la estimación de los momentos flectores para distintos valores de  $x$  se obtiene la Figura 2.16. Se puede ver que la varianza de la estimación toma el mínimo valor cuando todas las galgas se sitúan en la sección donde se aplica el torsor externo, es decir, cuando  $x = 0$ . Sin embargo, a medida que las galgas se van alejando de esta sección la varianza de la estimación aumenta cuadráticamente.

Como se ha podido observar en las configuraciones óptimas formadas por 6 galgas (3 parejas), la posición longitudinal óptima es la misma, es decir, todas las galgas se sitúan en la sección donde se aplica el torsor ( $x = 0$ ). De este modo, se mantiene la simetría longitudinal en el posicionamiento de las galgas, evitando que dos parejas se sitúen en una sección y la pareja restante en otra sección distinta. Sin embargo, en las configuraciones óptimas de 8 galgas de secciones posteriores veremos como también se mantiene la simetría en su posicionamiento longitudinal, pero en este caso dos parejas de galgas se situarán en una sección y las otras dos parejas en una sección diferente.

### 2.6.2. Estimación óptima del torsor mediante 8 galgas extensiométricas

El hecho de emplear configuraciones de 8 galgas permite la estimación del torsor completo y compensar la deformación térmica. En esta Sección, todas las configuraciones están compuestas por 8 galgas y además sus posiciones longitudinales pueden tomar cualquier valor en la optimización, como veremos a continuación.

Aplicando una vez más el criterio de optimización D-Optimality, e imponiendo que se empleen rosetas con galgas desfasadas  $2\beta = 60^\circ$ , se ha obtenido la configuración óptima de la Ecuación 2.73 y representada en la Figura 2.17a. En esta ocasión también la configuración óptima depende de  $\nu$ . Los valores de  $\varphi^{opt}$  van desfasados cada  $120^\circ$  y  $60^\circ$  y viceversa, mientras que los valores de  $\delta^{opt}$  mantienen la misma estructura que en la Ecuación 2.66. Además, la configuración es óptima para cualquier ángulo  $\tilde{\varphi}$ . Para un valor típico de  $\nu = 1/3$  e imponiendo  $2\beta = 60^\circ$ , se ha obtenido la siguiente configuración, siendo el valor  $\gamma = 24.3^\circ$ :

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 300^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (2.73a)$$

$$\delta^{opt} = \{5.7^\circ, -54.3^\circ, 54.3^\circ, -5.7^\circ, 5.7^\circ, -54.3^\circ, 54.3^\circ, -5.7^\circ\} \quad (2.73b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{L, L, L, L, -L, -L, -L, -L\} \quad (2.73c)$$

En comparación con la configuración de la Ecuación 2.67 donde todas las galgas se sitúan en la misma sección del eje, en la configuración anterior las parejas de galgas se sitúan en dos secciones diferentes y distintas de aquella en la que se estima el torsor. Por esta razón, el valor de la función de coste del criterio D-Optimality  $\mathcal{F}_D$  es menor para la configuración de la Ecuación 2.73 frente al valor de la función de coste de la configuración de la Ecuación 2.67. Además, si se compara la varianza de la estimación de las componentes del torsor, la configuración de la Ecuación 2.73 permite estimar las componentes del torsor con una menor varianza, y notablemente menor para los momentos flectores, que a partir de la configuración de la Ecuación 2.67.

Resolviendo la optimización para  $2\beta = 90^\circ$  se ha encontrado la configuración de la Ecuación 2.74 y representada en la Figura 2.17b. Esta configuración es independiente de los valores de los parámetros geométricos y del material, y por tanto, es robusta ante la posible incertidumbre en el conocimiento de las propiedades del material y geometría del eje.

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 104^\circ, 104^\circ, 166^\circ, 166^\circ, 298^\circ, 298^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (2.74a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\} \quad (2.74b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{-L, -L, -L, -L, L, L, L, L\} \quad (2.74c)$$

A diferencia de la configuración de la Ecuación 2.73, que los valores  $\delta^{opt}$  sean enteros facilita en gran medida su instalación en la superficie a medir. No obstante, la varianza de las estimaciones resulta ser algo mayor, ya que como se verá a continuación, se encuentra más lejos de la configuración óptima con un número menor de restricciones. Así mismo, las valores numéricos de las posiciones azimutales ( $\boldsymbol{\varphi}^{opt}$ ) de las galgas podrían dificultar su instalación.

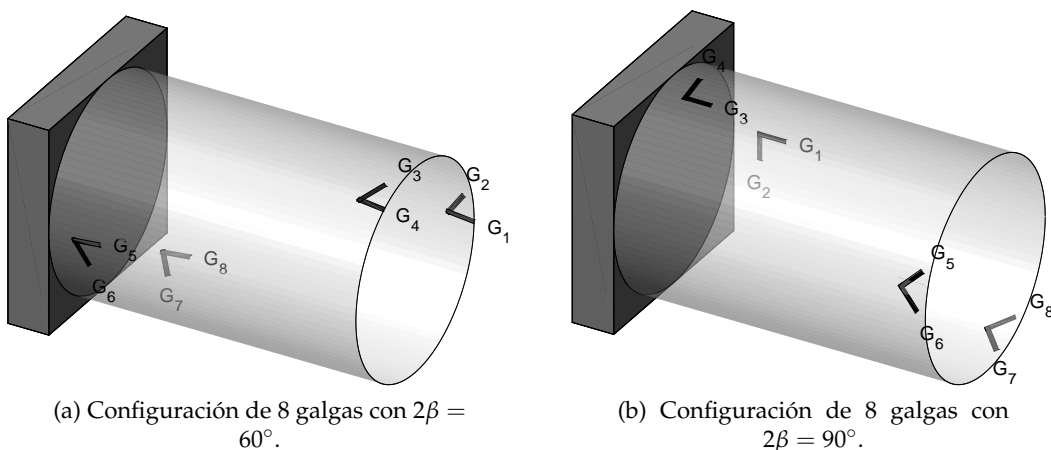


FIGURA 2.17: Configuraciones de 8 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones para la estimación de  $\mathbf{t}$  obtenidas mediante el criterio D-Optimality.

Precisamente en la configuración óptima de la Ecuación 2.75 y representada en la Figura 2.18, la única restricción empleada ha sido delimitar el valor que puede tomar la coordenada  $x$ . La menor varianza de estimación del torsor se obtiene para valores muy grandes (o muy pequeños) de  $x$ , es decir, para secciones alejadas del punto de aplicación del torsor externo. Para un valor de  $\nu = 1/3$  los valores de  $\boldsymbol{\varphi}^{opt}$  siguen la misma estructura de la Ecuación 2.66, dando como resultado los valores  $2\beta = -124.6^\circ$  y  $\gamma = 65.6^\circ$ .

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 300^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (2.75a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{3.3^\circ, -52.1^\circ, 52.1^\circ, -3.3^\circ, 3.3^\circ, -52.1^\circ, 52.1^\circ, -3.3^\circ\} \quad (2.75b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{L, L, L, L, -L, -L, -L, -L\} \quad (2.75c)$$

Una vez más al estar tratando con configuraciones formadas por 8 galgas extensiométricas, dos parejas se ubican en una sección y las otras 2 en otra sección diferente, permitiendo así obtener una configuración simétrica con respecto a la sección donde se aplica el torsor.

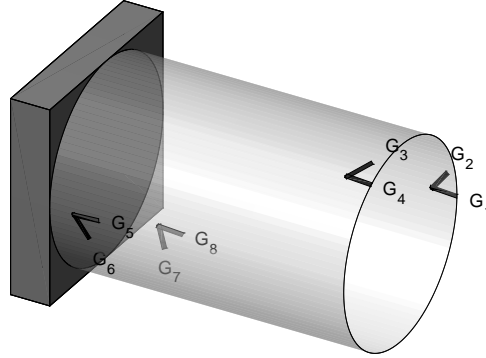


FIGURA 2.18: Configuración de 8 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones sólo para  $x$  para la estimación de  $t$  obtenida mediante el criterio D-Optimality.

## 2.7. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio NC

El segundo de los criterios de optimización utilizado para la determinación de configuraciones óptimas tiene relación con el número de condición (NC) de la matriz de observación  $W$ . En esta Sección se van a analizar las configuraciones óptimas que se han obtenido mediante el criterio NC, tanto con 6 como 8 galgas, para diferentes restricciones en los problemas de minimización.

### 2.7.1. Estimación óptima del torsor mediante 6 galgas extensiométricas

Siempre y cuando no exista la necesidad de compensar las deformaciones térmicas causadas por variaciones de temperatura, es suficiente emplear 6 galgas extensiométricas para estimar todas las componentes del torsor. Minimizando la función de coste  $\mathcal{F}_C$  y restringiendo la solución para poder instalar rosetas con  $2\beta = 60^\circ$ , se ha obtenido la configuración representada en la Figura 2.19a con los siguientes valores óptimos:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.76a)$$

$$\delta^{opt} = \{58^\circ, -2^\circ, 58^\circ, -2^\circ, 58^\circ, -2^\circ\} \quad (2.76b)$$

Si comparamos los valores óptimos podemos ver fácilmente que son muy similares a los de la Ecuación 2.60, siendo ésta la solución del mismo problema de minimización (con las mismas restricciones) pero empleando un criterio de optimización distinto. Analizando las varianzas de la estimación de las componentes del torsor de la configuración anterior es sencillo comprobar que son mayores que las de la

configuración de la Ecuación 2.60, salvo para la fuerza axial. Esto es así, dado que el criterio D-Optimality empleado para la obtención de la configuración de la Ecuación 2.60 precisamente sirve para minimizar la varianza de la estimación.

Restringiendo las orientaciones de las galgas a rosetas con  $2\beta = 90^\circ$ , la configuración óptima resultante es aquella representada en la Figura 2.19b donde las galgas toman los siguientes valores óptimos:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.77a)$$

$$\delta^{opt} = \{22^\circ, -68^\circ, 22^\circ, -68^\circ, 22^\circ, -68^\circ\} \quad (2.77b)$$

Las restricciones impuestas para la obtención de la configuración anterior son las mismas que las de la configuración de la Ecuación 2.61 obtenida con el criterio D-Optimality. Una vez más, la única diferencia ha sido el criterio de optimización empleado. Equiparando las varianzas de la estimación entre ellas, son notablemente menores para la configuración de la Ecuación 2.61. En cambio, la varianza de la estimación de  $F_1$  es exactamente la misma en ambas configuraciones.

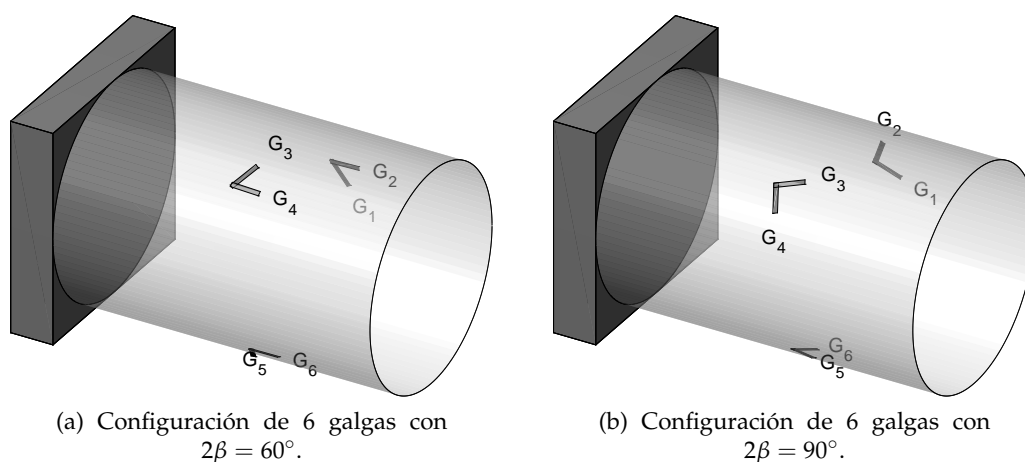


FIGURA 2.19: Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de  $t$  obtenidas mediante el criterio NC.

En las dos configuraciones anteriores, dadas las restricciones impuestas para emplear rosetas de galgas el resultado obtenido es óptimo. Sin embargo, se sabe que existe una configuración óptima también con un menor valor de la función de coste ( $\mathcal{F}_D$ ) que las configuraciones de las Ecuaciones 2.76 y 2.77. Ésta se corresponde con el resultado óptimo del problema de minimización sin restricciones, y es aquella representada en la Figura 2.20 donde las posiciones y orientaciones de las galgas resultan ser:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} + \{\bar{\varphi}, \check{\varphi}, \bar{\varphi}, \check{\varphi}, \bar{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (2.78a)$$

$$\delta^{opt} = \{52^\circ, -5^\circ, 52^\circ, -5^\circ, 52^\circ, -5^\circ\} \quad (2.78b)$$

Revisando la configuración se puede ver que en ausencia de restricciones las galgas se distribuyen en dos tríos, siendo el desfase de  $120^\circ$  entre las galgas que forman el trío. Además cada trío puede instalarse en cualquier posición azimutal, añadiendo  $\tilde{\varphi}$  y  $\check{\varphi}$  a cada trío respectivamente. Si se establece que  $\tilde{\varphi} = \check{\varphi}$  las galgas se posicionan por parejas, y se obtiene una configuración similar a la de la Ecuación 2.76. Por consiguiente, dada esta similitud podría implementarse la configuración de la Ecuación 2.76 ya que al emplear rosetas con las galgas desfasadas  $2\beta = 60^\circ$ , facilitaría la instalación de las mismas en el eje.

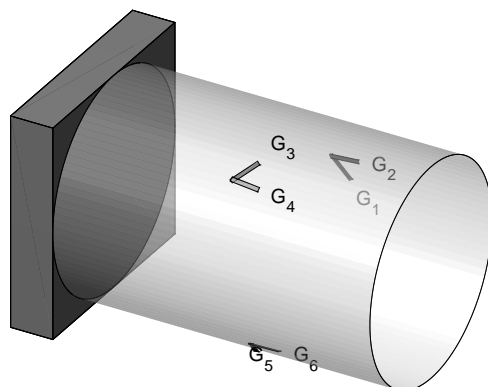


FIGURA 2.20: Configuración de 6 galgas sin restricciones para la estimación de  $\mathbf{t}$  obtenida mediante el criterio NC.

### 2.7.2. Estimación óptima del torsor mediante 8 galgas extensiométricas

Como hemos visto en la Sección 2.3.3, si se desean compensar las deformaciones a causa de las variaciones de temperatura, debe emplearse una galga adicional para ello. Con la única finalidad de obtener configuraciones simétricas se han obtenido configuraciones de 8 galgas, que además de estimar las 6 componentes del torsor también compensen la deformación térmica. Esto requiere de la extensión del sistema de ecuaciones ( $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{e}$ ) hasta obtener el sistema de la Ecuación 2.48 donde la matriz  $\mathbf{W}$  se extiende con una columna de unos a su derecha.

Sin embargo, en todas las configuraciones óptimas encontradas, el hecho de extender la matriz  $\mathbf{W}$  hace que el valor que toma la función de coste del criterio NC sea muy elevado, es decir, el número de condición de la matriz de observación extendida sea muy elevado. Las configuraciones de 8 galgas obtenidas resultan ser óptimas pero distan mucho del valor de la función de coste comparándola con el resto de configuraciones óptimas. Si analizamos las varianzas de la estimación de las componentes del torsor de las configuraciones obtenidas, se puede ver que son mayores que las mismas varianzas de las configuraciones obtenidas mediante el criterio D-Optimality. Por esta razón todas las configuraciones óptimas formadas por 8 galgas obtenidas mediante el criterio del Número de Condición que compensen la deformación térmica no se van a analizar en las próximas secciones.

## 2.8. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio NC, situadas en distintas secciones del eje

Continuando con el análisis de las configuraciones óptimas resultado de aplicar el criterio del Número de Condición, en la presente Sección se van a analizar varias nuevas configuraciones en la que las galgas se pueden situar en cualquier sección transversal del eje.

### 2.8.1. Estimación óptima del torsor mediante 6 galgas extensiométricas

Una vez más, analizando las configuraciones obtenidas cuando las galgas pueden posicionarse longitudinalmente en cualquier localización, se puede ver que los valores óptimos son exactamente iguales a aquellas en las que se fuerza a que todas las galgas se sitúen en la misma sección. Empleando rosetas con un desfase entre la pareja de galgas de  $2\beta = 60^\circ$ , se ha obtenido la configuración de la Ecuación siguiente y representada en la Figura 2.21a:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.79a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{58^\circ, -2^\circ, 58^\circ, -2^\circ, 58^\circ, -2^\circ\} \quad (2.79b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.79c)$$

Para un desfase entre cada pareja de galgas de  $2\beta = 90^\circ$ , se ha encontrado la configuración óptima representada en la Figura 2.21b y toma los siguientes valores para sus parámetros:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.80a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{22^\circ, -68^\circ, 22^\circ, -68^\circ, 22^\circ, -68^\circ\} \quad (2.80b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.80c)$$

En las dos configuraciones previas, a pesar de dejar libre la coordenada  $x$ , ésta toma el valor de cero como resultado de la optimización y por tanto todas las galgas se sitúan en una única sección. Nótese que las configuraciones coinciden con las de la Sección 2.7.1, de tal manera que las restricciones adicionales impuestas no han alterado las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas.

Sin embargo, eliminando la restricción que impone el desfase entre parejas de galgas se ha encontrado una configuración de galgas que mantiene la estructura de la Ecuación 2.50 en los valores de las posiciones azimutales y orientaciones de las galgas siendo  $\alpha = 80^\circ$ . Esto es, las galgas se sitúan en 3 parejas desfasadas  $120^\circ$  entre sí y todas ellas en una misma sección, de manera que se mantiene la simetría en la disposición de las mismas. Esta configuración es la representada en la Figura 2.22 y toma los siguientes valores para sus parámetros:



$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.81a)$$

$$\delta^{opt} = \{80^\circ, -80^\circ, 80^\circ, -80^\circ, 80^\circ, -80^\circ\} \quad (2.81b)$$

$$\mathbf{x}^{opt} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (2.81c)$$

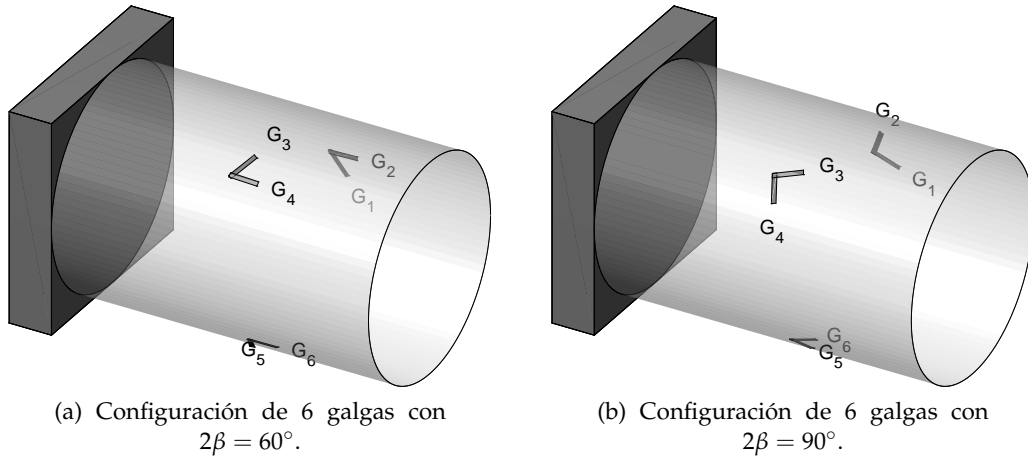


FIGURA 2.21: Configuraciones de 6 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones para la estimación de  $t$  obtenidas mediante el criterio NC.

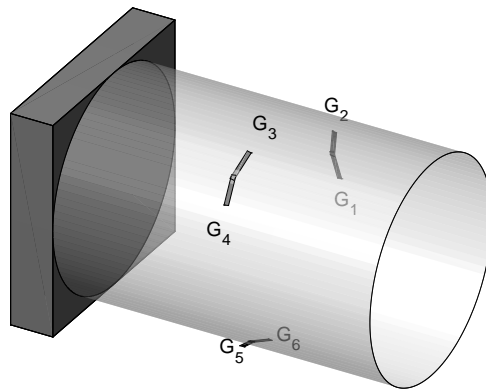


FIGURA 2.22: Configuración de 6 galgas situadas en secciones diferentes con restricciones sólo para  $x$  para la estimación de  $t$  obtenida mediante el criterio NC.

Se ha podido deducir que en este caso a medida que se introducen más restricciones al problema de minimización, el valor de la función de coste ( $\mathcal{F}_C = \text{cond}(\mathbf{W})$ ) aumenta. Esto es debido a que al introducir restricciones adicionales algunos de los mínimos locales de la función de coste desaparecen y por tanto su valor numérico se ve incrementado. Por esta razón, comparando la configuración de la Ecuación 2.81 sin apenas restricciones, con las configuraciones de las Ecuaciones 2.79 y 2.80 que imponen el uso de rosetas de galgas, es la que estima el torsor para un  $\text{cond}(\mathbf{W})$  mínimo.

### 2.8.2. Estimación óptima del torsor mediante 8 galgas extensiométricas

Al igual que en la Sección 2.7.2, al imponer que se compensen las deformaciones térmicas, la matriz  $\mathbf{W}$  extendida aumenta considerablemente su número de condición. Por este motivo las configuraciones de 8 galgas que pueden disponerse en secciones diferentes obtenidas a partir del criterio Número de Condición, también carecen de sentido y por tanto no se va a realizar un análisis de las mismas.

## 2.9. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio E-Optimality

Finalmente, en la presente Sección se van a estudiar las configuraciones óptimas obtenidas utilizando el criterio de optimización E-Optimality. Para ello, como siempre, se van a analizar las configuraciones donde todas las galgas se fuerzan a situarse longitudinalmente en la misma sección y aquellas que pueden situarse en cualquier otra, así como, configuraciones de 6 galgas y 8 galgas que compensen la deformación térmica.

### 2.9.1. Estimación óptima del torsor mediante 6 galgas extensiométricas

Primeramente, se analizan las configuraciones de 6 galgas donde sus posiciones longitudinales se restringen a una misma sección, y además, se impone el uso de parejas de galgas para la implementación de rosetas. Aplicando la restricción que obliga a que el desfase entre las galgas que forman la roseta sea de  $2\beta = 60^\circ$ , se ha obtenido la configuración de la Figura 2.23a y toma los siguientes valores para sus parámetros:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.82a)$$

$$\delta^{opt} = \{2^\circ, -58^\circ, 2^\circ, -58^\circ, 2^\circ, -58^\circ\} \quad (2.82b)$$

A simple vista se puede apreciar que es muy similar a las configuraciones de las Ecuaciones 2.76 y 2.79 obtenidas mediante el criterio del Número de Condición. El módulo del valor de las orientaciones óptimas de las galgas es exactamente el mismo, en cambio, el signo es el contrario. Es interesante precisar que si se comparan las varianzas de la estimación entre sí, se observa que es justamente la misma, lo que nos hace pensar que a efectos prácticos para la estimación del torsor son equivalentes.

De igual manera, empleando rosetas con  $2\beta = 90^\circ$  se ha obtenido la configuración de la Figura 2.23b y con las siguientes localizaciones óptimas para las galgas:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (2.83a)$$

$$\delta^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\} \quad (2.83b)$$

Es patente que la configuración anterior es exactamente la misma que la obtenida a partir del criterio D-Optimality en las Ecuaciones 2.61 y 2.70. Así pues, ya que es una configuración óptima resultado de emplear el criterio D-Optimality y E-Optimality también, es una configuración capaz de estimar el torsor externo con la mínima varianza posible y además permite estimar las deformaciones medidas con la mínima incertidumbre. Así pues, ya que es una configuración óptima según los criterios D-Optimality y E-Optimality, podrá estimarse el torsor con la mínima varianza posible y también podrían estimarse las deformaciones con la mínima incertidumbre posible.

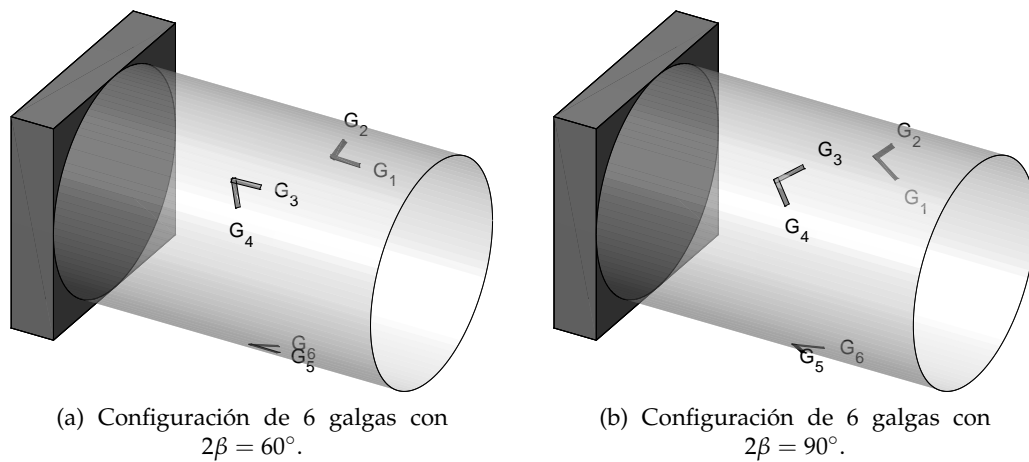


FIGURA 2.23: Configuraciones de 6 galgas con restricciones para la estimación de  $t$  obtenidas mediante el criterio E-Optimality.

Una vez analizadas las configuraciones con alguna restricción, llega el momento de ver qué ocurre cuando se no se impone ningún tipo de restricción al problema de minimización. La configuración de 6 galgas obtenida es aquella representada en la Figura 2.24 donde las posiciones y orientaciones de las galgas resultan ser:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (2.84a)$$

$$\delta^{opt} = \{23.1^\circ, -23.1^\circ, 23.1^\circ, -23.1^\circ, 23.1^\circ, -23.1^\circ\} \quad (2.84b)$$

Las posiciones azimutales y orientaciones de las galgas siguen la estructura ya conocida de la Ecuación 2.50. Esto es, las 6 galgas se posicionan en el perímetro del eje en dos grupos de tríos en los que sus galgas están desfasadas  $120^\circ$  entre ellas. El primero de los tríos se puede situar en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$  del perímetro del eje, mientras que el segundo trío en cualquier posición  $\check{\varphi}$ . Esta configuración es muy cercana a la representada en la Ecuación 2.50 para  $\alpha^{opt} = 26.8^\circ$ , pero al no ser exactamente iguales y haberse empleado otro criterio de optimización distinto, la varianza de la estimación de las componentes del torsor en esta ocasión resulta ser algo mayor.

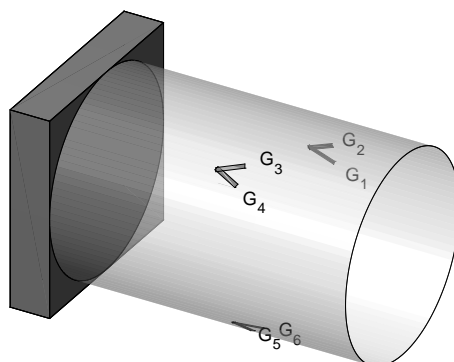


FIGURA 2.24: Configuración de 6 galgas sin restricciones para la estimación de  $t$  obtenida mediante el criterio E-Optimality.

### 2.9.2. Estimación óptima del torsor mediante 8 galgas extensiométricas

Dejando de lado las configuraciones de 6 galgas y retomando aquellas con 8 galgas, se han obtenido un par de configuraciones de interés. La primera de ellas es aquella en la que el desfase entre las galgas de las parejas es  $2\beta = 60^\circ$  para utilizar rosetas. La configuración obtenida, representada en la Figura 2.25a, resulta ser:

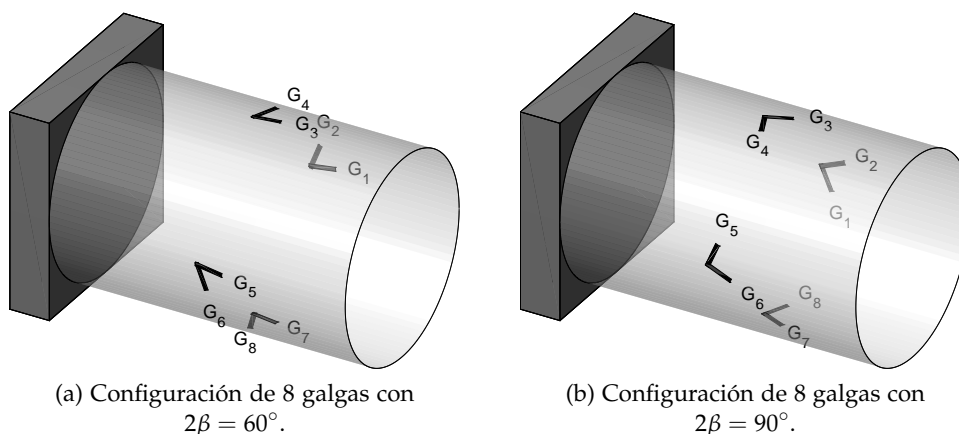
$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \quad (2.85a)$$

$$\delta^{opt} = \{-8.6^\circ, -68.6^\circ, 8.6^\circ, 68.6^\circ, -8.6^\circ, -68.6^\circ, 8.6^\circ, 68.6^\circ\} \quad (2.85b)$$

No obstante, cuando  $2\beta = 90^\circ$  la configuración obtenida es aquella representada en la Figura 2.25b y resulta ser:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \quad (2.86a)$$

$$\delta^{opt} = \{66.9^\circ, -23.1^\circ, 23.1^\circ, -66.9^\circ, 66.9^\circ, -23.1^\circ, 23.1^\circ, -66.9^\circ\} \quad (2.86b)$$



(a) Configuración de 8 galgas con  $2\beta = 60^\circ$ .

(b) Configuración de 8 galgas con  $2\beta = 90^\circ$ .

FIGURA 2.25: Configuraciones de 8 galgas con restricciones para la estimación de  $t$  obtenidas mediante el criterio E-Optimality.

En ambas configuraciones se puede ver que las parejas de galgas se distribuyen uniformemente cada  $90^\circ$  a lo largo del perímetro del eje manteniendo la simetría. En cuanto a las orientaciones de las galgas, se ve que tienen cierta similitud con las configuraciones de las Ecuaciones 2.67 y 2.68 pero son ligeramente distintas. La principal diferencia es que mediante las configuraciones de este apartado se obtiene una menor incertidumbre en la estimación de las deformaciones, a costa de obtener una varianza mayor en la estimación del torsor.

## 2.10. Configuraciones óptimas de galgas obtenidas mediante el criterio E-Optimality, situadas en distintas secciones del eje

Para concluir, en la presente Sección se van a analizar las configuraciones óptimas obtenidas a partir del criterio E-Optimality en las que las galgas pueden posicionarse en cualquier sección transversal del eje.

### 2.10.1. Estimación óptima del torsor mediante 6 galgas extensiométricas

Resolviendo el problema de minimización una vez más, donde las galgas pueden situarse en cualquier posición longitudinal, se han obtenido dos configuraciones para  $2\beta = 60^\circ$  y  $2\beta = 90^\circ$ . En ambas configuraciones los valores óptimos  $\varphi^{opt}$  y  $\delta^{opt}$  son idénticos a los de las Ecuaciones 2.82 y 2.83, donde todas las galgas estaban obligadas a situarse en la misma sección. Por otro lado, la posición longitudinal  $x^{opt}$  de todas las galgas también coincide, y todas ellas se sitúan en la misma sección. En consecuencia, son las mismas configuraciones.

### 2.10.2. Estimación óptima del torsor mediante 8 galgas extensiométricas

Para finalizar, se han obtenido tres configuraciones formadas por 8 galgas. En las dos primeras se ha impuesto el uso de rosetas a partir de las restricciones  $2\beta = 60^\circ$  y  $2\beta = 90^\circ$ , y la tercera corresponde con la resolución del problema de minimización sin restricciones, salvo la coordenada  $x$ , cuyos valores están acotados a un intervalo. Las tres configuraciones tienen una estructura desordenada, lejos de la estructura repetitiva y sistemática que se ha obtenido en las configuraciones anteriores, dificultando su instalación en el eje.

Además, en todas las configuraciones de 8 galgas que pueden situarse en secciones distintas del eje de apartados anteriores, dos parejas de galgas se sitúan en una sección transversal y las otras dos parejas se sitúan en otra sección diferente, manteniendo así la simetría. En esta ocasión todas las galgas se sitúan en la misma sección, lo que rompe completamente la regla que se cumplía hasta el momento.

Por todos estos motivos, las tres configuraciones obtenidas no se exponen en la presente Sección.

## 2.11. Sumario de configuraciones óptimas de galgas

A continuación, se muestra la Tabla 2.1 que recoge todas las configuraciones óptimas que se han obtenido a partir de los tres criterios de optimización a lo largo de este Capítulo. En ella, las diferentes columnas hacen referencia a las diferentes restricciones empleadas en los problemas de optimización, el número de galgas empleadas, la imposición de compensar la deformación térmica, así como el criterio de optimización empleado.

		Restricción longitudinal			
		$x = 0$		$x \in [-L, L]$	
		Núm. galgas		Núm. galgas	
Restricción roseta	Criterio	Compensa $\varepsilon_T$			
		no	sí	no	sí
$2\beta = 60^\circ$	D-opt.	<b>Ec. 2.60</b>	<b>Ec. 2.67</b>	<b>Ec. 2.69</b>	<b>Ec. 2.73</b>
	NC	Ec. 2.76	○	Ec. 2.79	○
	E-Opt.	Ec. 2.82	Ec. 2.85	Ec. 2.82	△
$2\beta = 90^\circ$	D-Opt.	Ec. 2.61	<b>Ec. 2.68</b>	Ec. 2.70	Ec. 2.74
	NC	Ec. 2.77	○	Ec. 2.80	○
	E-Opt.	Ec. 2.83	Ec. 2.86	△	△
$2\beta$ libre	D-Opt.	Ec. 2.50	△	Ec. 2.71	Ec. 2.75
	NC	Ec. 2.78	○	Ec. 2.81	○
	E-Opt.	Ec. 2.84	△	Ec. 2.83	△

TABLA 2.1: Configuraciones óptimas de galgas extensiométricas indicando el número de ecuación.

### Leyenda

- ○: Configuraciones en las que se impone la compensación  $\varepsilon_T$ , se calculan con el criterio NC y tiene un elevado número de condición para  $\mathbf{W} = [\mathbf{W} \mid \mathbf{1}]$ .
- △: Configuraciones difíciles de implementar dado sus valores  $\theta^{opt}$ .
- **Negrita**: Configuraciones de gran interés.

## 2.12. Resumen del Capítulo 2

En el Capítulo 2 se ha desarrollado una metodología para la obtención de nuevas configuraciones de galgas extensiométricas para la estimación del torsor externo completo en ejes de sección transversal circular.

En primer lugar, se ha obtenido una expresión para la deformación de una galga situada arbitrariamente en términos de las cargas mecánicas ejercidas sobre el eje. Esta expresión es útil por sí misma, ya que permite comprender la relación entre la deformación de una galga, su posición y orientación, y las cargas mecánicas ejercidas sobre el eje.

Aunque lo más habitual es estimar las cargas mecánicas mediante puentes completos o medios puentes de Wheatstone, se ha demostrado que la medición de la deformación de galgas individuales mediante cuartos de puente ofrece la oportunidad de utilizar la medida de deformación de una sola galga en la estimación de varias componentes del torsor externo. La característica más innovadora del método es que todas las galgas extensiométricas contribuyen a la estimación de cada componente. En consecuencia, cada componente del torsor se estima como una combinación lineal diferente de las medidas de deformación de las galgas individuales.

Utilizando la relación funcional entre la deformación de una galga y las cargas aplicadas sobre el eje, se ha desarrollado un procedimiento para determinar la posición y orientación óptima de un conjunto de galgas para estimar las seis componentes del torsor.

Dado que la deformación a causa de variaciones de temperatura es un inconveniente habitual en la estimación de cargas mecánicas mediante galgas extensiométricas, esta deformación se ha implementado en el algoritmo para la obtención de configuraciones óptimas de galgas, para tener en cuenta este efecto y proporcionar configuraciones robustas e insensibles a las variaciones de temperatura.

Se han empleado 3 criterios diferentes para la resolución de los problemas de optimización. El primero de ellos, el criterio D-Optimality es el mejor índice de observabilidad para maximizar la observabilidad del torsor, es decir, es el mejor índice de observabilidad para minimizar la varianza del torsor externo. El segundo es el criterio del Número de Condición que está directamente relacionado con la minimización del número de condición de la matriz de observabilidad, lo que permite maximizar el índice de observabilidad de las deformaciones. Finalmente, el tercero de los criterios, E-Optimality, es el mejor índice de observabilidad para minimizar la incertidumbre de la estimación de las deformaciones  $\hat{\epsilon}$ . Así pues, de los tres criterios de optimización empleados en este Capítulo el que mayor sentido tiene es el criterio D-Optimality, puesto que el principal objetivo es estimar el torsor externo con la mínima varianza posible.

Por otra parte, como puede llegar a ser difícil orientar con precisión las galgas en el proceso de pegado, en el algoritmo de optimización se ha implementado la opción de obtener configuraciones en las que puedan emplearse rosetas de galgas. De esta forma se mejora sustancialmente la precisión del ángulo relativo entre parejas de galgas y se reduce a la mitad el número de operaciones de pegado. Concretamente, se ha impuesto el uso de rosetas con un desfase entre galgas de  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , y con el

objetivo de proporcionar una visión de la simetría de las configuraciones óptimas se han establecido dos coordenadas adicionales ( $\beta$  y  $\gamma$ ).

Empleando los tres criterios e imponiendo diferentes restricciones en las optimizaciones, se han obtenido un total 36 nuevas configuraciones óptimas para la estimación del torsor completo. Los resultados muestran que es posible estimar las 6 componentes del torsor utilizando sólo 6 galgas extensiométricas, mientras que en la actualidad se utilizan 24 galgas (4 para cada componente del torsor). Se trata de una notable reducción del número de galgas que puede reducir sustancialmente el coste de las aplicaciones que requieren medir las 6 componentes del torsor. Sin embargo, el número de canales de medida se puede ver aumentado si se desea compensar la deformación a causa de efectos térmicos.

Si además de estimar las 6 componentes del torsor, se desea compensar la deformación térmica debida a posibles variaciones de temperatura, se deben emplear al menos 7 galgas. Puesto que se desean emplear parejas de galgas por medio de rosetas, todas las configuraciones óptimas que se han encontrado que permiten compensar la deformación térmica están formadas por 4 rosetas, es decir, 8 galgas extensiométricas.

En resumen, ninguna de las configuraciones calculadas mediante el criterio del Número de Condición y E-Optimality estima las componentes del torsor con una varianza de estimación menor que las configuraciones resultado de emplear el criterio D-Optimality. Por esta razón, en el Capítulo 5 se prevé emplear la configuración de 8 galgas obtenida mediante el criterio D-Optimality, que permite estimar el torsor completo y compensar la deformación térmica, para su calibración estática.



## CAPÍTULO 3

---

**PARÁMETROS OMITIDOS**

---

**E**N el anterior Capítulo se ha mostrado cómo se pueden obtener configuraciones óptimas para la estimación de todo el torsor y compensar la deformación térmica en términos de las medidas de deformación. Sin embargo, lo que se necesita en la mayoría de las aplicaciones de extensimetría es la estimación de una (o varias) componentes del torsor, sin ninguna influencia de las otras componentes. Las cargas que se quieren estimar se denominan cargas primarias, mientras que las cargas cuya influencia se quiere evitar se denominan cargas secundarias. En la jerga estadística, cuando se trabaja con un modelo paramétrico en el que algunos parámetros son de interés y otros no lo son (aunque relevantes en el modelo), estos últimos se denominan *Parámetros Omitidos*<sup>1</sup>. Además cuando se tiene una configuración de galgas extensiométricas que sirve para estimar una carga primaria del torsor sin que el valor de una carga secundaria influya en el resultado, se dice que la configuración compensa la carga secundaria. Del mismo modo, si las deformaciones de las galgas debidas a las variaciones de temperatura no influyen en el valor de la carga estimada, también se dice que la configuración compensa los efectos térmicos.

En el presente Capítulo, a partir de la idea que brinda el concepto de parámetros omitidos, se va a desarrollar una metodología alternativa para la obtención de nuevas configuraciones en las que tan sólo se estimen las cargas primarias y se compensen las cargas secundarias y efectos térmicos si se requiriese.

---

<sup>1</sup>En la literatura los *Parámetros Omitidos* se conocen como *Nuisance Parameters*. Son parámetros adicionales del modelo estadístico que no están directamente relacionadas con el objetivo principal del estudio, pero que pueden influir en la estimación de los parámetros de interés.

### 3.1. Diseño óptimo habitual para la estimación de determinadas componentes del tursor

Revisando el modelo lineal de galgas extensiométricas de la Ecuación 2.34, si se quieren estimar algunas componentes de  $\mathbf{t}$  sin la influencia de las demás, se puede reescribir el modelo como la suma de las deformaciones debidas a los parámetros de interés y las deformaciones a causa de los parámetros omitidos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e} = \mathbf{W}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{W}_2 \mathbf{t}_2 + \mathbf{e} \quad (3.1)$$

donde el vector  $\mathbf{t}_1$  de dimensión  $p \times 1$  corresponde con las cargas o parámetros de interés, el vector  $\mathbf{t}_2$  de dimensión  $q \times 1$  hace referencia a los parámetros omitidos y el vector  $\mathbf{e}$  es la incertidumbre de medición.

Para obtener un modelo sin los parámetros omitidos, es habitual premultiplicar la Ecuación 3.1 por una matriz ortogonal a  $\mathbf{W}_2$  [75]. Una expresión sistemática para dicha matriz se puede determinar como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_2 \left( \mathbf{W}_2^\top \mathbf{W}_2 \right)^{-1} \mathbf{W}_2^\top, \quad \text{si } \text{rango}(\mathbf{W}_2) = q \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_2 \left( \mathbf{W}_2^\top \mathbf{W}_2 \right)^+ \mathbf{W}_2^\top, \quad \text{si } \text{rango}(\mathbf{W}_2) < q \quad (3.2b)$$

donde  $(\cdot)^+$  denota el operador *inverso generalizado de Penrose-Moore* y la matriz  $\mathbf{Q}$  adopta la forma de un proyector sobre el espacio que es ortogonal a la imagen de  $\mathbf{W}_2$ . La premultiplicación del modelo por la matriz  $\mathbf{Q}$  conduce a:

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{Q} \mathbf{W}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{y}_m = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_m$  es la proyección de las medidas  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  sobre el espacio ortogonal a la imagen de  $\mathbf{W}_2$ . Por tanto, si el  $\text{rango}(\mathbf{W}_2) = q$ , las medidas proyectadas  $\mathbf{y}_m$  se encontrarán en un espacio de dimensión  $n - q$ .

Como  $\mathbf{Q}$  es idempotente, la matriz de información para la estimación de  $\mathbf{t}_1$  con el modelo de la Ecuación 3.3 es [76, 77]:

$$\mathcal{I}(\mathbf{t}_1) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{Q} \mathbf{W}_1 \quad (3.4)$$

Al igual que en el Capítulo 2, para encontrar una configuración de galgas extensiométricas óptima para el modelo de la Ecuación 3.3, bastaría con resolver el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}^{opt} &= \arg_{\boldsymbol{\vartheta}} \text{mín}(\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}))) \\ &\text{sujeto a: } \mathbf{c}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde en este caso la función de coste  $\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$  del criterio de optimización toma la forma:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{Q}} = -\log(\det(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{Q} \mathbf{W}_1)) \quad (3.6)$$

A partir de ahora, esta técnica será referida como *diseño óptimo habitual* [75] y para ilustrar su aplicabilidad a continuación se verá un ejemplo.

Supóngase que se emplean 8 galgas extensiométricas para estimar las fuerzas y momentos ( $\mathbf{t}_1 = (F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3)^\top$ ) del torsor que actúan sobre un eje sin la influencia de la deformación térmica ( $\mathbf{t}_2 = \varepsilon_T$ ). Así pues,  $n = 8$ ,  $p = 6$  y  $q = 1$ . Dividiendo la matriz  $\mathbf{W}$  según:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1 \mid \mathbf{W}_2] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} & W_{16} & W_{17} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} & W_{25} & W_{26} & W_{27} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} & W_{36} & W_{37} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} & W_{45} & W_{46} & W_{47} \\ W_{51} & W_{52} & W_{53} & W_{54} & W_{55} & W_{56} & W_{57} \\ W_{61} & W_{62} & W_{63} & W_{64} & W_{65} & W_{66} & W_{67} \\ W_{71} & W_{72} & W_{73} & W_{74} & W_{75} & W_{76} & W_{77} \\ W_{81} & W_{82} & W_{83} & W_{84} & W_{85} & W_{86} & W_{87} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

puesto que  $\mathbf{W}_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$ , es obvio que el rango( $\mathbf{W}_2$ ) =  $q = 1$ . Como  $\mathbf{Q}$  es un proyector sobre el espacio que es ortogonal a la imagen de  $\mathbf{W}_2$ , las columnas de  $\mathbf{Q}$  abarcan un subespacio cuya dimensión es  $n - \dim(\mathbf{W}_2) = 8 - 1 = 7$ . En este caso particular, la matriz  $\mathbf{Q}$  será constante en la optimización descrita por la Ecuación 3.5, sin embargo la propiedad más importante, atendiendo al propósito del presente capítulo, es que su rango es mayor (o igual) que el número de elementos de  $\mathbf{t}_1$  (que nos interesa), es decir: rango( $\mathbf{Q}$ ) =  $n - \text{rango}(\mathbf{W}_2) = n - q \geq p = \dim(\mathbf{t}_1) = 6$ , y por tanto las medidas proyectadas  $\mathbf{y}_m$  pueden tener suficiente información para estimar todo el vector  $\mathbf{t}_1$ .

Sin embargo, esto no siempre es cierto y deben cumplirse una serie de condiciones de partida. Por ello, a partir de ahora se va a emplear un ejemplo vehicular como herramienta para demostrar que el diseño óptimo habitual no siempre es válido para la obtención de cualquier configuración de galgas, y por tanto será necesario emplear una formulación alternativa.

### Ejemplo vehicular: Diseño óptimo habitual

Utilícese 4 galgas extensiométricas para estimar la fuerza axial  $\mathbf{t}_1 = F_1$  sin la influencia del resto de componentes del torsor ( $\mathbf{t}_2 = (F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, \varepsilon_T)^\top$ ). Así pues, para este caso  $n = 4$ ,  $p = 1$ ,  $q = 6$  y  $\mathbf{W}$  se puede dividir como:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1(\boldsymbol{\vartheta}) \mid \mathbf{W}_2(\boldsymbol{\vartheta})] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} & W_{16} & W_{17} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} & W_{25} & W_{26} & W_{27} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} & W_{36} & W_{37} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} & W_{45} & W_{46} & W_{47} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Obsérvese que  $\mathbf{W}_2$  es una matriz de tamaño  $4 \times 6$  y su rango máximo es 4. Para un vector  $\boldsymbol{\vartheta}$  aleatorio y rango( $\mathbf{W}_2$ ) = 4, las columnas de la matriz  $\mathbf{W}_2$  abarcarán  $\mathbb{R}^4$ . Por lo tanto, la única matriz ortogonal posible a  $\mathbf{W}_2$  será  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ .

Cuando se empieza a ejecutar el algoritmo de optimización descrito por la Ecuación 3.5, se dan valores aleatorios a los elementos de  $\boldsymbol{\vartheta}$  y el primer valor obtenido para la matriz de información de la Ecuación 3.4 es la matriz nula. El

algoritmo de optimización no va más allá del primer paso y se detiene sin proporcionar un valor óptimo de  $\boldsymbol{\vartheta}$ .

Además, premultiplicar el modelo original por  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  borraría el modelo, haciendo inútil el modelo proyectado.

Se puede demostrar que para  $n \leq q$  el algoritmo de diseño óptimo habitual no proporciona ninguna solución. Si  $n = q$ , para un valor inicial aleatorio del vector  $\boldsymbol{\vartheta}$  y  $\text{rango}(\mathbf{W}_2) = n$ , la única  $\mathbf{Q}$  ortogonal a  $\mathbb{R}^n$  será  $\mathbf{0}_n$ . Además, si  $n < q$  entonces se debe utilizar la Ecuación 3.2b para determinar  $\mathbf{Q}$ . Escribiendo  $\mathbf{W}_2$  en términos de su Descomposición de Valores Singulares (SVD) se obtiene  $\mathbf{W}_2 = \mathbf{USV}^\top$ . Como  $\mathbf{W}_2$  es una matriz de tamaño  $n \times q$ , la matriz  $\mathbf{S}$  también lo es. El rango máximo de  $\mathbf{S}$  es  $n$  y la matriz de valores singulares es  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_a \mid \mathbf{0}]$ . En estas condiciones, se puede demostrar que  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}_n$  como:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{USV}^\top = \mathbf{U}[\mathbf{S}_a \mid \mathbf{0}][\mathbf{V}_a \mid \mathbf{V}_b]^\top = \mathbf{US}_a\mathbf{V}_a^\top \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{W}_2^\top\mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_a\mathbf{S}_a\mathbf{U}^\top\mathbf{US}_a\mathbf{V}_a^\top = \mathbf{V}_a\mathbf{S}_a^2\mathbf{V}_a^\top \quad (3.9b)$$

$$(\mathbf{W}_2^\top\mathbf{W}_2)^\dagger = \mathbf{V}_a\mathbf{S}_a^{-2}\mathbf{V}_a^\top \quad (3.9c)$$

$$\mathbf{W}_2(\mathbf{W}_2^\top\mathbf{W}_2)^\dagger\mathbf{W}_2^\top = \mathbf{US}_a\mathbf{V}_a^\top(\mathbf{V}_a\mathbf{S}_a^{-2}\mathbf{V}_a^\top)\mathbf{V}_a\mathbf{S}_a\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}_n \quad (3.9d)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_2(\mathbf{W}_2^\top\mathbf{W}_2)^\dagger\mathbf{W}_2^\top = \mathbf{0}_n \quad (3.9e)$$

Sin embargo, a pesar de haber demostrado que el algoritmo no proporciona ninguna solución, por los conocimientos de ingeniería mecánica, se sabe que existe una configuración óptima que es una solución para el problema planteado anteriormente [47, 78, 9]. Los valores de  $\boldsymbol{\vartheta}^{opt} = (\boldsymbol{\varphi}^{opt}, \boldsymbol{\delta}^{opt})$  de las 4 galgas extensiométricas en la configuración son:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\} \quad (3.10a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ\} \quad (3.10b)$$

Para esta configuración, sustituyendo los valores  $\boldsymbol{\varphi}^{opt}$  y  $\boldsymbol{\delta}^{opt}$  de las galgas en la Ecuación 2.31 las filas de la matriz  $\mathbf{W}$  toman la siguiente forma:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1(\boldsymbol{\vartheta}^{opt}) \mid \mathbf{W}_2(\boldsymbol{\vartheta}^{opt})] = \left[ \begin{array}{c|cccccc} -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} & 1 \\ \frac{\nu}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{E\omega} & 1 \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} & 1 \\ \frac{\nu}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{E\omega} & 1 \end{array} \right] \quad (3.11)$$

Además el estimador de  $F_1$  es,  $\hat{F}_1 = \mathbf{H}_{\hat{F}_1} \boldsymbol{\varepsilon}_m$ , donde la matriz  $\mathbf{H}_{\hat{F}_1}$  resulta ser:

$$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} = \frac{EA}{2(1+\nu)}[-1, 1, -1, 1] \quad (3.12)$$

Como  $\mathbf{H}_{\hat{F}_1} \perp \mathbf{W}_2$ , el estimador es insesgado si  $E[\mathbf{e}] = \mathbf{0}$  tal y como se muestra a continuación:

$$\hat{F}_1 = \mathbf{H}_{\hat{F}_1} \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{H}_{\hat{F}_1}(\mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{e}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\mathbf{t} + \mathbf{H}_{\hat{F}_1}\mathbf{e} = F_1 + \mathbf{H}_{\hat{F}_1}\mathbf{e} \quad (3.13)$$

En este problema se produce una coincidencia interesante. Existe una configuración  $\boldsymbol{\theta}^{opt}$  para la que 4 columnas de la matriz  $\mathbf{W}_2$  desaparecen haciendo que los parámetros que multiplican esas columnas desaparezcan del modelo. El modelo evaluado en la configuración solución tendrá sólo 3 parámetros, lo que permite encontrar  $n - \dim(\mathbf{W}_2) = 4 - 2 = 2$  vectores ortogonales a las columnas de  $\mathbf{W}_2$  (sin ser ortogonales a  $\mathbf{W}_1$ ) y permitiendo premultiplicar el modelo por una matriz para eliminar los demás parámetros omitidos. En tal configuración hay más mediciones que el número real de parámetros (3 en la configuración de la solución) y se puede obtener un estimador para  $F_1$ . Sin embargo, el problema es que en la primera iteración del problema de optimización de la Ecuación 3.5 el número de parámetros es 7 y no es posible obtener una Matriz de Información diferente de la matriz nula. Por lo tanto, se necesita un algoritmo alternativo para obtener soluciones para problemas donde  $n \leq q$ .

### 3.2. Planteamiento alternativo para el diseño de configuraciones con parámetros omitidos

Con el objetivo de ser capaces de obtener configuraciones óptimas, en las que el número de galgas empleadas puede ser menor que el número de parámetros omitidos ( $n \leq q$ ), en esta Sección se va a proponer un planteamiento alternativo para el diseño óptimo de configuraciones de galgas.

#### 3.2.1. Determinación del estimador máximo verosímil

Retomamos el modelo de la Ecuación 3.1, en el que el vector  $\mathbf{t}$  se divide en los parámetros de interés ( $\mathbf{t}_1$ ) y los parámetros omitidos ( $\mathbf{t}_2$ ). Supóngase ahora que el vector incertidumbre  $\mathbf{e}$  sigue una distribución normal de media  $\mathbf{0}$  y varianza  $\sigma^2 \mathbf{I}_n$ , es decir,  $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ , donde  $\sigma^2 = \text{var}(\varepsilon_m)$  es la varianza individual de cada galga. Para eliminar los parámetros omitidos, en lugar de premultiplicar el modelo por la matriz  $\mathbf{Q}$  se va a utilizar ahora una matriz  $\mathbf{R}$  de tamaño  $p \times n$  que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$\mathbf{R}\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}_{p \times q} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_p \quad (3.14b)$$

Suponiendo que esta matriz existe y premultiplicando el modelo por  $\mathbf{R}$ , es posible determinar la Matriz de Información y construir el estimador Máximo Verosímil de  $\mathbf{t}_1$ . El modelo de la Ecuación 3.1 premultiplicado por  $\mathbf{R}$  nos da como resultado:

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{R}\mathbf{W}_2\mathbf{t}_2 + \mathbf{R}\mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{R}\mathbf{e} \quad (3.15)$$

Calculando la matriz de covarianzas de  $\mathbf{z}_m$ :

$$\text{var}(\mathbf{z}_m) = E \left[ (\mathbf{z}_m - E[\mathbf{z}_m])(\mathbf{z}_m - E[\mathbf{z}_m])^\top \right] = \sigma^2 \mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \sigma^2 \mathbf{I}_p \quad (3.16)$$

se puede ver que como las filas de  $\mathbf{R}$  son ortonormales entre sí, el escalar  $\sigma^2$  que premultiplica la matriz identidad  $\mathbf{I}_p$  de la varianza de  $\mathbf{z}_m$  resulta ser el mismo que el que premultiplica la matriz identidad  $\mathbf{I}_n$  de la varianza de  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  del modelo inicial. Introduciéndolo en la expresión de la verosimilitud de  $\mathbf{t}_1$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{t}_1, \sigma^2) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\sigma^2 \mathbf{I}_p|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)^\top (\sigma^2 \mathbf{I}_p)^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)\right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)\right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Entonces, el logaritmo de la función de verosimilitud y su derivada con respecto al vector de parámetros  $\mathbf{t}_1$  puede calcularse como:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{t}_1, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \sigma^{2n} - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1) \quad (3.18a)$$

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\mathbf{t}_1} = \frac{dl}{d\mathbf{t}_1} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1) = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1) \quad (3.18b)$$

Utilizando este resultado, la matriz de información para estimar  $\mathbf{t}_1$  puede escribirse como [77]:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathbf{t}_1) &= E \left[ \left( \frac{dl}{d\mathbf{t}_1} \right) \left( \frac{dl}{d\mathbf{t}_1} \right)^\top \right] \\ &= E[\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1) (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1)^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1] \frac{1}{\sigma^4} \\ &= E[\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon})^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1] \frac{1}{\sigma^4} \\ &= \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^\top] \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \frac{1}{\sigma^4} \\ &= \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} (\sigma^2 \mathbf{I}_p) \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \frac{1}{\sigma^4} = \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R}\mathbf{R}^\top) \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \frac{1}{\sigma^2} \\ &= \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \frac{1}{\sigma^2}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Finalmente, igualando a cero la derivada de  $l$  respecto a  $\mathbf{t}_1$ ,

$$\frac{dl}{d\mathbf{t}_1} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

y resolviendo para  $\mathbf{t}_1$ , se obtiene el Estimador de Máxima Verosimilitud:

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = \left[ (\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{H}$  la denominaremos como la matriz del estimador, es decir, aquella que premultiplica las medidas de deformación para obtener una estimación de los parámetros de interés.

### 3.2.2. Optimización de configuraciones

Una vez conocida la expresión de la matriz de información del modelo original premultiplicada por  $\mathbf{R}$ , se puede definir un algoritmo D-Optimality para obtener un diseño óptimo para la estimación de  $\mathbf{t}_1$  sin ninguna influencia de los parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$ . Organicemos los elementos de la matriz  $\mathbf{R}$  en un vector columna como:

$$\mathbf{r} = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}, \dots, r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{pn})^\top \quad (3.22)$$

donde  $\Theta = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  es el vector con todos los parámetros de optimización. El diseño D-óptimo del experimento con parámetros omitidos puede resolverse como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \Theta^{opt} = \arg_{\Theta} \min \{ & -\log(\det(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1)) \} \\ \text{sujeto a: } & \mathbf{R} \mathbf{W}_2 = \mathbf{0}_{p \times q}, \quad \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_p \end{aligned} \quad (3.23)$$

Resolviendo este problema de optimización, se obtiene una configuración óptima de galgas extensiométricas ( $\boldsymbol{\theta}^{opt}$ ) junto con la matriz ( $\mathbf{R}^{opt}$ ) que determina la forma del Estimador de Máxima Verosimilitud para el número deseado de galgas extensiométricas y cargas primarias. Adhiriendo al sólido las galgas según la configuración óptima y tomando medidas de su deformación, se pueden estimar las cargas primarias deseadas, sin influencia de las cargas secundarias o parámetros omitidos, utilizando el estimador obtenido en la Ecuación 3.21. Un diagrama de flujo explicativo del algoritmo alternativo puede encontrarse en la Figura 3.1. Asimismo, en el Apéndice A se explica en el Algoritmo 3 mediante un *pseudo-código* el algoritmo alternativo para la obtención de configuraciones óptimas.

Resolviendo el problema de minimización de la Ecuación 3.23 con un programa numérico, el algoritmo podrá realizar las primeras iteraciones en las que la matriz  $\mathbf{R}$  no sea ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ , y luego llegar a una solución en la que se cumpla la restricción. Mientras tanto, el algoritmo del diseño óptimo habitual fija la matriz  $\mathbf{Q}$  basándose en  $\mathbf{W}_2$ , y por lo tanto no puede evolucionar a través del espacio de valores de parámetros que no satisfacen las restricciones ( $\mathbf{Q} \perp \mathbf{W}_2$ ). De hecho, lo que hace el algoritmo alternativo es escribir  $\mathbf{Q}$  en términos de los parámetros (matriz  $\mathbf{R}$ ) e imponer que  $\mathbf{R}$  cumpla las características de  $\mathbf{Q}$  (unitaria y ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ ). La diferencia es que  $\mathbf{R}$  no tiene que ser ortogonal a  $\mathbf{W}_2$  en las iteraciones intermedias del proceso de optimización mientras que  $\mathbf{Q}$  se calcula en función de  $\mathbf{W}_2$  para todas las iteraciones del proceso de optimización.

Además, el problema de la Ecuación 3.23 no siempre tendrá solución para cualquier combinación de  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  y  $n$ . En ocasiones, habrá que aumentar el número de galgas hasta obtener una solución óptima. Por ejemplo, si los requisitos son  $\mathbf{t}_1 = F_1$ ,  $\mathbf{t}_2 = \varepsilon_T$  y  $n = 1$ , el algoritmo no proporciona una configuración óptima capaz de estimar la fuerza axial y compensar la deformación térmica con una única galga.

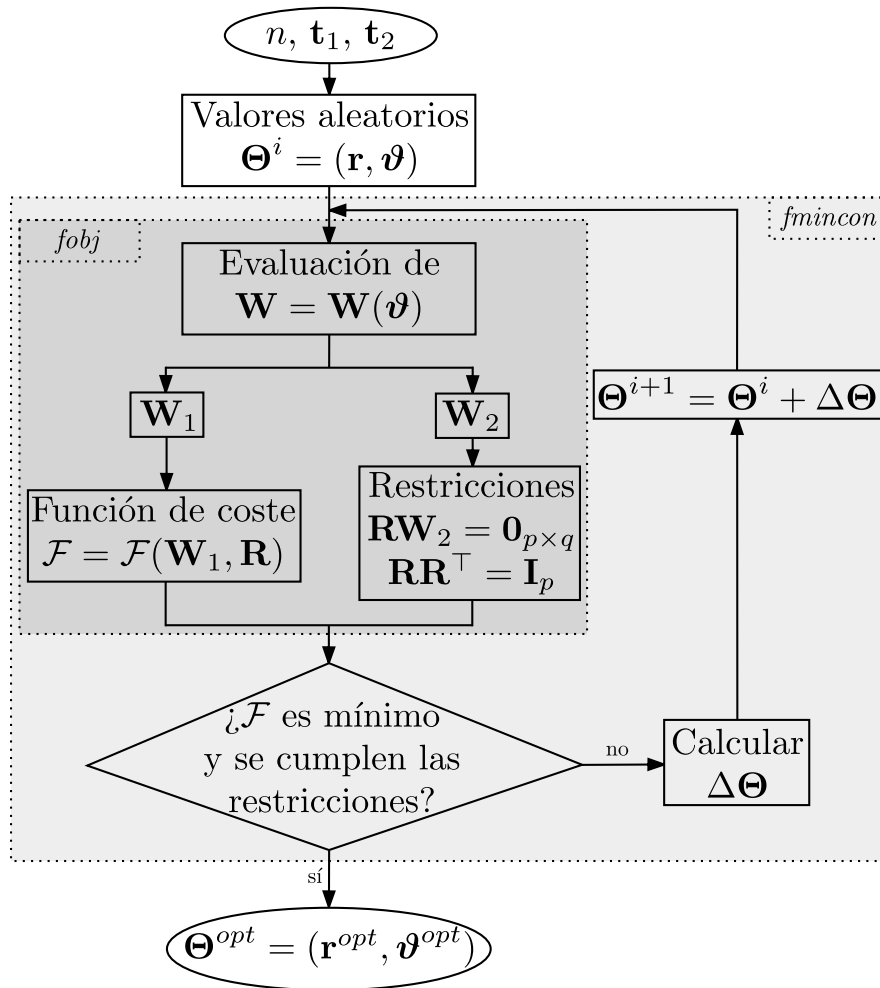


FIGURA 3.1: Diagrama de flujo del algoritmo alternativo.

Otra diferencia entre los algoritmos presentados es que el tamaño de  $\mathbf{R}$  no es el mismo que el de  $\mathbf{Q}$ . Esto se debe a que, en el algoritmo alternativo, entre todas las posibles direcciones ortogonales a  $\mathbf{W}_2$ , busca aquella (o aquellas) que maximicen la observabilidad de  $\mathbf{t}_1$ .

### Ejemplo vehicular: Diseño óptimo alternativo

Retomando el ejemplo vehicular se puede demostrar que para el diseño óptimo de  $\vartheta^{opt}$ , los valores de  $\mathbf{R}$  que proporciona el algoritmo son en realidad los óptimos.

Como ya se ha mencionado, por los conocimientos de ingeniería mecánica, se sabe que existe una configuración  $\vartheta^{opt}$  que es una solución para el problema planteado anteriormente [47]. Los valores de  $\varphi$  y  $\delta$  de las 4 galgas extensiométricas de la configuración son los recogidos en la Ecuación 3.10 así como la matriz  $\mathbf{W}$  se corresponde con la Ecuación 3.11.

Buscando ahora la matriz óptima  $\mathbf{R}$  que satisfaga las mencionadas restricciones:  $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_p$  y  $\mathbf{R}\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}_{p \times n}$ . Como el objetivo es estimar 1 parámetro y se toman 4 medidas, la matriz  $\mathbf{R}$  será de tamaño  $1 \times 4$ . Con esta configuración, el modelo sólo depende de 3 parámetros, siendo 2 de ellas parámetros omitidos.



Como el rango( $\mathbf{W}_2$ ) = 2 y  $n = 4$ , existe un subespacio de dimensión 2 que es ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ . Por tanto, toda matriz  $\mathbf{R}$  puede escribirse como una combinación lineal de 2 vectores cualesquiera que forman una base  $\text{null}(\mathbf{W}_2)$ . Por ejemplo:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2(v^2+1)}}{2(v^2+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ v & 1 & -v & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^\top \\ \mathbf{n}_2^\top \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

que también se puede escribir como:

$$\mathbf{R}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Como  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  son unitarios y ortogonales entre sí, para mantener  $\mathbf{R}$  también unitario, por ejemplo  $c_1$  y  $c_2$  podrían escribirse como seno y coseno de un mismo ángulo para poder expresar  $\mathbf{R}$  como:

$$\mathbf{R}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \eta \\ \sin \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{n}_1 \cos \eta + \mathbf{n}_2 \sin \eta \quad (3.26)$$

Ahora se puede escribir la Matriz de Información como:

$$\mathcal{I}(F_1) = \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{n}_1 \right) \cos \eta + \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{n}_2 \right) \sin \eta \right)^2 \quad (3.27)$$

Para esta elección de  $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$  ocurre que  $\mathbf{W}_1^\top \mathbf{n}_2 = 0$  y la Matriz de Información (que en este caso es un escalar) se simplifica a:

$$\mathcal{I}(F_1) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{n}_1 \right) \cos \eta \right)^2 \quad (3.28)$$

Por tanto, para este ejemplo en particular la máxima información se obtiene para  $\eta = 0$  (o  $\eta = \pi$ ) y el óptimo  $\mathbf{R}$  es  $\mathbf{n}_1^\top$ .

### 3.2.3. Determinación de la varianza

Veamos en esta Sección si somos capaces de obtener una expresión para la varianza de estimación de los parámetros de interés  $\mathbf{t}_1$ . Por definición, ésta se puede calcular según:

$$\text{var}(\hat{\mathbf{t}}_1) = E \left[ \left( \hat{\mathbf{t}}_1 - E[\hat{\mathbf{t}}_1] \right) \left( \hat{\mathbf{t}}_1 - E[\hat{\mathbf{t}}_1] \right)^\top \right] \quad (3.29)$$

donde desarrollando el término  $\hat{\mathbf{t}}_1 - E[\hat{\mathbf{t}}_1]$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}_1 - E[\hat{\mathbf{t}}_1] &= \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{t}_1 \\ &= \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} (\mathbf{W}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{W}_2 \mathbf{t}_2 + \mathbf{e}) - \mathbf{t}_1 \\ &= \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituyendo en la Ecuación 3.29 se obtiene una expresión para la varianza de estimación de  $\mathbf{t}_1$ :

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{t}_1) &= E \left[ \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right) \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \right] \\ &= \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} E \left[ \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \right] \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right) \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \\ &= \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \sigma^2 \mathbf{I}_n \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right) \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \\ &= \sigma^2 \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si nos fijamos bien, la estimación de la varianza de los parámetros de interés  $\mathbf{t}_1$  de la Ecuación 3.31, se corresponde con la inversa de la matriz de información  $((\mathcal{I}(\mathbf{t}_1))^{-1})$  de la Ecuación 3.19.

Una vez obtenida una expresión para el cálculo de  $\text{var}(\mathbf{t}_1)$ , veamos ahora como podríamos obtener una estimación del término  $\sigma^2$ . Como  $\mathbf{R}$  es la matriz óptima para transformar el modelo original y deshacerse de los parámetros omitidos, tómesese la variable  $\mathbf{z}_m = \mathbf{R}\varepsilon_m$  para intentar determinar una estimación de la varianza de la incertidumbre de medida,  $\hat{\sigma}^2$ . Como  $\mathbf{R}$  es ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ , se tiene que:

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{R}\varepsilon_m = \mathbf{R}(\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{W}_2\mathbf{t}_2 + \mathbf{e}) = \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{R}\mathbf{e} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{z}_m - E[\mathbf{z}_m] = \mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{R}\mathbf{e} - E[\mathbf{R}\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{R}\mathbf{e}] = \mathbf{R}\mathbf{e} \quad (3.33)$$

La matriz de covarianzas de  $\mathbf{z}_m$ , por tanto, puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{z}_m) &= E \left[ (\mathbf{z}_m - E[\mathbf{z}_m])(\mathbf{z}_m - E[\mathbf{z}_m])^\top \right] \\ &= \mathbf{R} E[\mathbf{e} \mathbf{e}^\top] \mathbf{R}^\top = \mathbf{R} \sigma^2 \mathbf{I}_n \mathbf{R}^\top = \sigma^2 \mathbf{R} \mathbf{I}_n \mathbf{R}^\top = \sigma^2 \mathbf{I}_p \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como tanto en la varianza de  $\varepsilon_m$  como en la varianza de  $\mathbf{z}_m$  aparece el término  $\sigma^2$ , se podría utilizar  $\mathbf{z}_m$  para obtener una estimación de  $\sigma^2$ . Veamos a ver si la siguiente expresión nos podría servir para calcular una estimación de  $\sigma^2$ :

$$(\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\hat{\mathbf{t}}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\hat{\mathbf{t}}_1) \quad (3.35)$$

Obsérvese que esta expresión es como la de la varianza pero con las transpuestas al contrario, por lo que el resultado es un escalar.

Primeramente, calculando el error de estimación del modelo de la Ecuación 3.32 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1\hat{\mathbf{t}}_1 &= \mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{z}_m \\ &= \left( \mathbf{I}_p - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \right) \mathbf{z}_m = \mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde la matriz  $\mathbf{J} = \mathbf{I}_p - \mathbf{R}\mathbf{W}_1(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top$ . Obsérvese que esta matriz es idempotente (por lo que  $\mathbf{J}^\top \mathbf{J} = \mathbf{J}$ ). Veamos cuánto daría la esperanza de la expresión de la Ecuación 3.35:

$$\begin{aligned}
 E \left[ (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1) \right] &= E \left[ \mathbf{e}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{e} \right] = E \left[ \mathbf{e}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{e} \right] \\
 &\stackrel{1}{=} E \left[ \text{tr} \left( \mathbf{e}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{e} \right) \right] \\
 &\stackrel{2}{=} E \left[ \text{tr} \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \right) \right] \\
 &\stackrel{3}{=} \text{tr} \left( E \left[ \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \right] \right) \\
 &\stackrel{4}{=} \text{tr} \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} E \left[ \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \right] \right) \\
 &\stackrel{5}{=} \text{tr} \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \sigma^2 \mathbf{I}_n \right) = \sigma^2 \text{tr} \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{J} \mathbf{R} \right) \\
 &= \sigma^2 \text{tr} \left( \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{R}^\top \right) = \sigma^2 \text{tr} \left( \mathbf{J} \mathbf{I}_p \right) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{J})
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde  $\text{tr}(\mathbf{J})$  es la traza de la matriz  $\mathbf{J}$ .

Por su parte, se puede desarrollar  $\text{tr}(\mathbf{J})$  como:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\mathbf{J}) &= \text{tr} \left( \mathbf{I}_p - \mathbf{R}\mathbf{W}_1(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \right) \\
 &\stackrel{6}{=} \text{tr}(\mathbf{I}_p) - \text{tr} \left( \mathbf{R}\mathbf{W}_1(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \right) \\
 &\stackrel{2}{=} \text{tr}(\mathbf{I}_p) - \text{tr} \left( \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{W}_1)^{-1} \right) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{I}_p) - \text{tr}(\mathbf{I}_p) = 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Despejando  $\sigma^2$  de la Ecuación 3.37, se podría intentar obtener una expresión de  $\hat{\sigma}^2$  para  $N$  mediciones de  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  como:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N \left( (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1) \right)}{N \text{tr}(\mathbf{J})} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^N \left( (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1)^\top (\mathbf{z}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}_1 \hat{\mathbf{t}}_1) \right)}{N(0)}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Este resultado no es sorprendente ya que  $\text{tr}(\mathbf{J}) = 0$ , es decir, la totalidad de medidas de deformación se emplea para la estimación de los  $p$  parámetros de interés y por tanto, no hay datos adicionales para estimar  $\sigma^2$ .

- 1: El producto de vectores y matrices da como resultado un escalar, su valor es igual a su traza.
- 2: La traza de un producto de matrices es invariante ante permutaciones cíclicas:  $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$ .
- 3: La traza es un operador lineal, por lo que es conmutativa con la esperanza:  $E[\text{tr}(\mathbf{A})] = \text{tr}(E[\mathbf{A}])$ .
- 4: Como la matriz  $\mathbf{J}$  es determinista (no es una variable aleatoria) se puede extraer del operador esperanza.
- 5: Como se ha supuesto que  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^\top] = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ .
- 6: La traza es un operador lineal, por lo que  $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$ .

Veamos cómo podríamos realizar un cálculo alternativo de la varianza de las mediciones.

Sea  $\mathbf{P}$  una matriz que estará constituida por los vectores del subespacio nulo de la matriz  $\mathbf{W}$ . Estos vectores forman una base ortonormal de  $\text{null}(\mathbf{W})$ . Haciendo uso de esta matriz, podemos crear un vector  $\mathbf{s}_m = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_m$  que utilizaremos como proyección de las mediciones sobre el subespacio nulo de  $\mathbf{W}$ . Resulta que las filas de la matriz  $\mathbf{P}$  (que son ortogonales tanto a  $\mathbf{W}_2$  como a  $\mathbf{W}_1$ ) podrían ser útiles para estimar la varianza de las medidas, como se verá a continuación.

Como las filas de  $\mathbf{P}$  son ortogonales tanto a  $\mathbf{W}_1$  como a  $\mathbf{W}_2$  se tiene:

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{P}(\mathbf{W}_1\mathbf{t}_1 + \mathbf{W}_2\mathbf{t}_2 + \mathbf{e}) = \mathbf{P}\mathbf{e} \quad (3.40)$$

$$E[\mathbf{s}_m] = E[\mathbf{P}\mathbf{e}] = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

Por lo tanto, la matriz de covarianzas de  $\mathbf{s}_m$  se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{s}_m) &= E[(\mathbf{s}_m - E[\mathbf{s}_m])(\mathbf{s}_m - E[\mathbf{s}_m])^\top] = E[\mathbf{s}_m\mathbf{s}_m^\top] \\ &= \mathbf{P}E[\mathbf{e}\mathbf{e}^\top]\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}\sigma^2\mathbf{I}_n\mathbf{P}^\top = \sigma^2\mathbf{P}\mathbf{I}_n\mathbf{P}^\top = \sigma^2\mathbf{P}\mathbf{P}^\top = \sigma^2\mathbf{I}_s \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde  $\mathbf{I}_s$  es la matriz identidad de tamaño  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W})$ . Además, nótese que la matriz  $\mathbf{P}$  tiene tamaño  $s \times n$ .

Una vez más, si se desea hacer una estimación de  $\sigma^2$  podemos intentar construir un estimador utilizando la expresión:

$$\mathbf{s}_m^\top \mathbf{s}_m \quad (3.43)$$

Veamos cuánto sería la esperanza de esta expresión:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{s}_m^\top \mathbf{s}_m] &= E[\mathbf{e}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{e}] \stackrel{1}{=} E[\text{tr}(\mathbf{e}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{e})] \stackrel{2}{=} E[\text{tr}(\mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{e}^\top)] \\ &\stackrel{3}{=} \text{tr}(E[\mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{e}^\top]) \stackrel{4}{=} \text{tr}(\mathbf{P}^\top \mathbf{P} E[\mathbf{e} \mathbf{e}^\top]) \stackrel{5}{=} \text{tr}(\mathbf{P}^\top \mathbf{P} \sigma^2 \mathbf{I}_n) \\ &= \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{P}^\top \mathbf{P}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^\top) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{I}_s) = \sigma^2 s \end{aligned} \quad (3.44)$$

Despejando  $\sigma^2$  de la Ecuación 3.44, se puede obtener una expresión de  $\hat{\sigma}^2$  que evaluada para  $N$  instantes diferentes de medida de  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  nos da:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_m^i \mathbf{s}_m^i \mathbf{s}_m^i}{Ns} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_m^i)^\top (\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_m^i)}{Ns} \quad (3.45)$$

Por lo tanto, se ha utilizado el espacio nulo de  $\mathbf{W}$  para estimar la varianza  $\sigma^2$ . Nótese que para poder calcular la varianza de estimación debe cumplirse la siguiente condición  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) \geq 1$ .

**Ejemplo vehicular: Varianza de la estimación**

Regresando con el ejemplo vehicular, puesto que  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 4 - 3 = 1 \geq 1$ , se puede obtener una expresión para la varianza de estimación del parámetro de interés ( $\mathbf{t}_1 = F_1$ ). Calculando  $\mathbf{P}$  como  $\text{null}(\mathbf{W})$  se obtiene:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \nu & 1 & -\nu & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2(1+\nu^2)}}{2(1+\nu^2)} \quad (3.46)$$

Substituyendo el vector  $\mathbf{P}$  y las medidas de deformación en cada instante  $\varepsilon_m^i$  en la expresión de la Ecuación 3.45, y evaluando el sumatorio para  $N$  instantes diferentes de medida da como resultado el coeficiente  $\hat{\sigma}^2$  de la varianza:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{P}\varepsilon_m)^T (\mathbf{P}\varepsilon_m)}{Ns} = \frac{\sum_{i=1}^N (\nu\varepsilon_1^i + \varepsilon_2^i - \nu\varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2}{2N(\nu^2 + 1)} \quad (3.47)$$

En este caso concreto, la deformación de las 4 galgas en cada instante de medición y el módulo de Poisson del material serían suficientes para obtener una estimación del coeficiente  $\hat{\sigma}^2$ .

Así pues, substituyendo en la Ecuación 3.31 se obtiene una estimación de la varianza de estimación de la fuerza axil  $F_1$ :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{F}_1) &= \hat{\sigma}^2 (\mathbf{W}_1^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{W}_1)^{-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N (\nu\varepsilon_1^i + \varepsilon_2^i - \nu\varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2}{2N(\nu^2 + 1)} \frac{E^2 A^2}{(\nu + 1)^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.3. Configuraciones óptimas

Una vez desarrollado el algoritmo alternativo para el cálculo de nuevas configuraciones que permitan estimar los parámetros de interés sin la influencia de los parámetros omitidos, se presenta un conjunto de configuraciones óptimas. Las primeras de ellas se corresponden con las configuraciones típicas que ya se conocen en la literatura para la estimación individual de las componentes del torsor, y a continuación, se presenta una selección de novedosas configuraciones óptimas de galgas.

#### 3.3.1. Configuraciones típicas

El primer grupo de resultados tiene relación con las configuraciones típicas de galgas. Éstas se emplean en la actualidad para la estimación individual de cualquiera de las componentes del torsor externo sin la influencia del resto de componentes y la deformación térmica. La obtención de configuraciones de galgas mediante el nuevo algoritmo es sencilla, tan sólo ha de establecerse el número de galgas a emplear ( $n$ ) y definir cuáles son los parámetros de interés  $\mathbf{t}_1$  y los parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$ .

**Ejemplo vehicular: Resultado de la optimización**

Resolviendo el problema de minimización propuesto en la Sección 3.2.2 para el ejemplo vehicular, la configuración óptima resultante es la mostrada en la Figura 3.2. En ésta, las 4 galgas se posicionan y orientan de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (3.49a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ\} \quad (3.49b)$$

donde el conjunto de galgas puede situarse en cualquier posición azimutal  $\tilde{\varphi}$  en el eje. Esta configuración permite estimar la fuerza axial  $F_1$  sin la influencia del resto de componentes del torsor ( $F_2, F_3, M_1, M_2, M_3$ ) y deformación térmica ( $\varepsilon_T$ ).

Si nos fijamos bien la configuración resultante es exactamente la misma que se propone en la literatura y se utiliza en la actualidad para la estimación de la fuerza axial. Por lo tanto, se puede decir que a partir de este algoritmo alternativo, en presencia de parámetros omitidos en el modelo original, se ha llegado al mismo resultado que ya se conocía desde hace décadas.

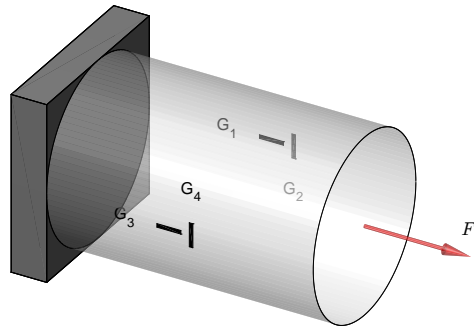


FIGURA 3.2: Configuración de 4 galgas para la estimación de  $F_1$  obtenida a partir de la formulación de parámetros omitidos.

Asimismo, el algoritmo también permite el cálculo de la expresión del estimador de la configuración de galgas. Así pues, evaluando la matriz  $\mathbf{W}$  en la posición y orientación óptima de las galgas se puede obtener la matriz  $\mathbf{W}_1$ :

$$\mathbf{W}_1 = \left[ -\frac{1}{AE} \quad \frac{\nu}{AE} \quad -\frac{1}{AE} \quad \frac{\nu}{AE} \right]^\top \quad (3.50)$$

Y la matriz  $\mathbf{R}$  resultado de la optimización resulta ser:

$$\mathbf{R} = \left[ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right] \quad (3.51)$$

que sustituyéndose en la expresión de la Ecuación 3.21 da lugar al estimador para la fuerza axial:

$$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} = (\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \frac{EA}{2(1+\nu)} [1, -1, 1, -1] \quad (3.52)$$

También se ha desarrollado un método alternativo para el cálculo de la matriz simbólica  $\mathbf{H}$  del estimador. El primero de los pasos consiste en observar los valores

numéricos de las componentes de la matriz  $\mathbf{H}$  que proporciona el algoritmo alternativo tras la optimización, y sustituirlos por variables simbólicas. Para el ejemplo que se tiene entre manos las componentes de la matriz  $\mathbf{H}$  son los mismos valores numéricos pero con el signo alternado. Substituyendo este valor numérico por la variable simbólica  $h_1$  la matriz  $\mathbf{H}$  resulta ser:

$$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} = h_1[-1, 1, -1, 1] \quad (3.53)$$

Puesto que la estimación de la fuerza axial se obtiene según  $\hat{F}_1 = \mathbf{H}\varepsilon_m = \mathbf{HWt}$  se tiene una relación que permite determinar el valor de  $h_1$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 = \mathbf{HW}(\vartheta)\mathbf{t} &= h_1[-1, 1, -1, 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} & 1 \\ \frac{\nu}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{E\omega} & 1 \\ -\frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} & 1 \\ \frac{\nu}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{E\omega} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{t} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2h_1(\nu+1)}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{t} \\ &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Resolver la Ecuación  $-\frac{2h_1(\nu+1)}{EA} = 1$ , permite obtener el valor de  $h_1 = -\frac{EA}{2(\nu+1)}$ . Finalmente, sustituyendo la expresión simbólica de  $h_1$  en la Ecuación 3.53 se obtiene la matriz  $\mathbf{H}_{\hat{F}_1}$  del estimador de la Ecuación 3.52.

Sin embargo, este método para la determinación de la matriz  $\mathbf{H}$  simbólica tiene una limitación. El número de componentes simbólicas de la matriz  $\mathbf{H}$  a determinar nunca puede exceder al número de ecuaciones que puedan establecerse al calcularse  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{HW}(\vartheta)\mathbf{t}$ . De lo contrario se obtendría un sistema de ecuaciones indeterminado, de modo que las ecuaciones no proporcionarían suficientes restricciones para determinar de manera única los valores simbólicos de la matriz  $\mathbf{H}$ .

Además, si no se dispusiera de la expresión simbólica de la matriz  $\mathbf{H}$  para una configuración en concreto, la matriz  $\mathbf{H}$  numérica también sería válida para obtener una estimación de las componentes del torsor.

Análogamente, puede emplearse el mismo procedimiento para el cálculo del resto de configuraciones típicas existentes. Así pues en la Tabla 3.1 se recogen todas las configuraciones óptimas típicas obtenidas mediante el algoritmo alternativo.

Las diferentes columnas de la tabla representan lo siguiente: en primer lugar el número de galgas empleadas, la segunda columna indica las cargas o parámetros de interés que se desean estimar. A continuación, la tercera columna indica los efectos de qué parámetros se compensan para la estimación de  $\mathbf{t}_1$ , y finalmente las dos últimas columnas se corresponden con la posición y orientación óptima de las galgas y el correspondiente estimador de cada configuración. Nótese que todas las configuraciones óptimas obtenidas coinciden con las empleadas en la actualidad para la estimación de cada una de las componentes del torsor individualmente.

Núm. galgas	$t_1$	$t_2$	$\vartheta^{opt} = (\varphi^{opt}, \delta^{opt})$	Matriz $\mathbf{H}$ del estimador
4	$F_1$ - -	$F_2, F_3$ $M_1, M_2, M_3$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} = \frac{EA}{2(1+\nu)} [-1, 1, -1, 1]$
4	$F_2$ - -	$F_1, F_3$ $M_1, M_2, M_3$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_2} = \frac{EA\kappa}{4(1+\nu)} [-1, 1, 1, -1]$
4	$F_3$ - -	$F_1, F_2$ $M_1, M_2, M_3$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_3} = \frac{EA\kappa}{4(1+\nu)} [1, -1, -1, 1]$
4	- $M_1$ -	$F_1, F_2, F_3$ $M_2, M_3$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_1} = \frac{EI_p}{4R(1+\nu)} [1, -1, 1, -1]$
4	- $M_2$ -	$F_1, F_2, F_3$ $M_1, M_3$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_2} = \frac{E\omega}{4} [-1, -1, 1, 1]$
4	- $M_3$ -	$F_1, F_2, F_3$ $M_1, M_2$ $\varepsilon_{\mathcal{T}}$	$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_3} = \frac{E\omega}{4} [1, 1, -1, -1]$

TABLA 3.1: Posición y orientación de las galgas, y estimador de las configuraciones típicas obtenidas mediante la formulación de parámetros omitidos.

### 3.3.2. Configuraciones novedosas

Hasta el momento todas las configuraciones óptimas que se han obtenido tan sólo estiman una determinada componente del torsor, y el resto de componentes (además de la deformación térmica) no afectan en su estimación. Todas estas configuraciones ya se conocían en el contexto de estimación de cargas mediante extensimetría, y por tanto no se ha aportando ninguna novedad relevante al respecto. Sin embargo, a continuación se van a presentar algunas de las configuraciones novedosas que se han obtenido a partir de este algoritmo alternativo.

#### Configuración de 6 galgas para la estimación del torsor completo

Un resultado interesante se obtiene cuando se emplean 6 galgas para estimar todas las componentes del torsor simultáneamente y no se impone la compensación de la deformación térmica. La configuración óptima resulta ser la siguiente:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} \quad (3.55a)$$

$$\delta^{opt} = \{26.8^\circ, -26.8^\circ, 26.8^\circ, -26.8^\circ, 26.8^\circ, -26.8^\circ\} \quad (3.55b)$$

El resultado óptimo coincide con la configuración de la Ecuación 2.50 cuando se emplea el criterio D-Optimality para los valores  $\alpha = 26.8^\circ$  y  $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$ . Por tanto, una vez más se manifiesta que la configuración anterior es la óptima para estimar el torsor completo con la mínima varianza posible y sin compensar la deformación térmica.



La estimación de las 6 componentes del torsor a partir de las medidas de deformación de las galgas se puede calcular a partir de la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_m$ . En esta ocasión, la matriz del estimador es la inversa de la matriz de observación  $\mathbf{W}$  evaluada en las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas. Una expresión de ésta se encuentra en la Ecuación 2.53 para  $\alpha = 26.8^\circ$ .

En otro orden de cosas, puesto que  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 6 - 6 = 0 \neq 1$ , no es posible obtener una estimación de la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Dicho de otro modo, al emplearse 6 galgas para la estimación de las 6 componentes del torsor no hay datos adicionales para obtener una estimación de la varianza de estimación.

### Configuración de 3 galgas para la estimación de $M_2$ y $M_3$ e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$

Por lo general, los momentos del torsor siempre causan un mayor nivel de deformación en comparación con las fuerzas del torsor externo, debido a su capacidad para inducir deformaciones a lo largo de una mayor extensión en las estructuras. Por esta razón, podría ser interesante diseñar configuraciones óptimas que permitan estimar varios momentos simultáneamente. Si por ejemplo, se desearan estimar los momentos  $M_2$  y  $M_3$  y además compensar la deformación térmica, a partir del algoritmo alternativo se podría resolver el problema de optimización para calcular una configuración novedosa. Así, se ha encontrado la configuración óptima representada en la Figura 3.3, donde sus galgas se posicionan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (3.56a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\} \quad (3.56b)$$

y donde el conjunto de galgas puede posicionarse azimutalmente en cualquier valor  $\tilde{\varphi}$  sobre el eje.

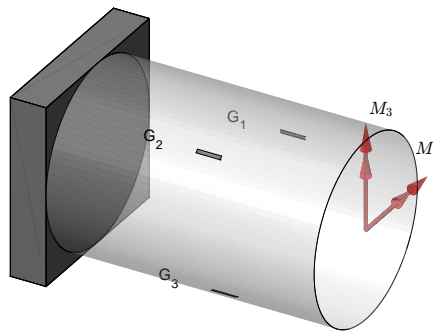


FIGURA 3.3: Configuración de 3 galgas para la estimación de  $M_2$  y  $M_3$ , e imponiendo la compensación de  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo.

La estimación de los momentos  $M_2$  y  $M_3$  requiere del conocimiento de la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador. Por ello, aplicando la misma metodología que la empleada en la Sección 3.3.1 se ha podido obtener una expresión para la matriz  $\mathbf{H}$  simbólica, siendo

el resultado obtenido el siguiente:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{3} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{3} \\ \frac{2E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

De la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador es fácil deducir que la estimación de los momentos  $M_2$  y  $M_3$  no se ve afectada por el valor de la deformación térmica ( $\varepsilon_T$ ). Veamos por qué ésto es así.

Dado que la deformación que miden las galgas se puede expresar como la suma entre la deformación mecánica y la deformación térmica ( $\varepsilon_m = \varepsilon + \varepsilon_T \mathbf{1}$ ), al premultiplicar por la matriz  $\mathbf{H}$  se obtienen las estimaciones para  $M_2$  y  $M_3$ , las cuales no dependen de  $\varepsilon_T$  y por tanto, se compensa la deformación térmica. Como regla general, la estimación de una determinada carga no se verá afectada por la deformación térmica siempre que la suma de las componentes de la correspondiente fila de la matriz  $\mathbf{H}$  sea nula.

Asimismo, a partir de esta configuración óptima no es posible calcular una estimación para la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Ya que  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 3 - 3 = 0 \not\geq 1$ , no existen dimensiones adicionales para este cálculo.

### Configuración de 6 galgas para la estimación de $M_2$ y $M_3$ e imponiendo la compensación de $\varepsilon_T$

Ahora véase qué ocurre si se emplea un número mayor de galgas para la estimación de las cargas  $M_2$  y  $M_3$ , y se impone una vez más la compensación de la deformación térmica. Imponiendo que el número de galgas sea 6, la configuración óptima obtenida es aquella representada en la Figura 3.4 donde sus galgas se posicionan de la siguiente forma:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (3.58a)$$

$$\delta^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\} \quad (3.58b)$$

y donde tres parejas de galgas se sitúan a lo largo del perímetro del eje con el mismo valor  $\varphi$ , siendo el desfase entre las parejas de  $120^\circ$ . Además, de las 6 galgas de la configuración, 3 de ellas se pueden posicionar en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$  del perímetro, mientras que las otras tres se pueden posicionar en cualquier valor  $\check{\varphi}$ .

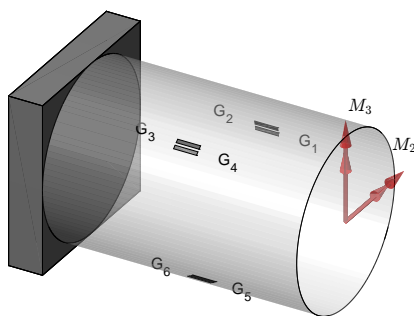


FIGURA 3.4: Configuración de 6 galgas para la estimación de  $M_2$  y  $M_3$ , e imponiendo la compensación de  $\varepsilon_T$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo.

Realizando el cálculo de la matriz  $\mathbf{H}$  correspondiente al estimador, se aprecia que la deformación térmica no afecta en la estimación de  $M_2$  y  $M_3$ , dado que la suma de los elementos en cada fila de la matriz  $\mathbf{H}$  es igual a cero. Además, debido a la posición óptima de las galgas  $G_1$  y  $G_2$  en el perímetro del eje, éstas no intervienen en la estimación del momento flector  $M_2$ , ya que son insensibles a sus efectos.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{6} & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{6} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{6} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{6} \\ \frac{E\omega}{3} & \frac{E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{6} & -\frac{E\omega}{6} & -\frac{E\omega}{6} & -\frac{E\omega}{6} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Asimismo, a partir de esta configuración óptima se puede calcular la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ , puesto que  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 6 - 3 = 3 \geq 1$ . Por lo tanto, evaluando la matriz  $\mathbf{W}$  en las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas, se puede calcular la matriz  $\mathbf{P} = \text{null}(\mathbf{W})$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.60)$$

que sustituyendo en la Ecuación 3.45 permite obtener una expresión del coeficiente  $\hat{\sigma}^2$  que multiplica la varianza de estimación, para mediciones de  $\varepsilon_m$  en  $N$  instantes diferentes:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_1^i - \varepsilon_2^i)^2 + (\varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2 + (\varepsilon_5^i - \varepsilon_6^i)^2}{6N} \quad (3.61)$$

Como se puede observar, tan sólo con los valores de deformación de las 6 galgas en los diferentes  $N$  instantes de medida es suficiente para calcular  $\hat{\sigma}^2$ .

Por tanto, empleando la expresión de la Ecuación 3.31 se podría obtener una estimación de la varianza de estimación de  $\mathbf{t}_1$  como:

$$\text{var}(\mathbf{t}_1) = \frac{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_1^i - \varepsilon_2^i)^2 + (\varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2 + (\varepsilon_5^i - \varepsilon_6^i)^2}{6N} (\mathbf{W}_1^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{W}_1)^{-1} \quad (3.62)$$

### Configuración de 3 galgas para la estimación de $F_1$ , $M_2$ y $M_3$

Podría plantearse una configuración de galgas que permitiese estimar la fuerza axial además de los dos momentos flectores simultáneamente a partir de 3 galgas extensiométricas. Resolviendo el problema de optimización alternativo propuesto en este Capítulo se ha encontrado una configuración óptima fácil de instalar en el eje. Esta configuración es aquella representada en la Figura 3.5 donde sus galgas se posicionan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (3.63a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\} \quad (3.63b)$$

y donde el conjunto de galgas puede situarse en el perímetro del eje en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$ .

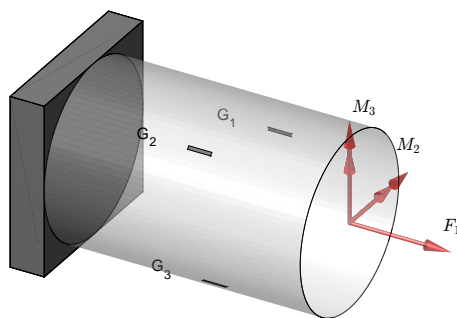


FIGURA 3.5: Configuración de 3 galgas para la estimación de  $F_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  obtenida a partir del algoritmo alternativo.

A priori, al no haberse impuesto la compensación de la deformación térmica la configuración óptima resultado de la optimización no tendría por qué compensar dicha deformación. Sin embargo, analizando las componentes de la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador, expuesta en la Ecuación 3.64, se puede observar que la estimación de los momentos  $M_2$  y  $M_3$  no se ve afectada por la deformación térmica, puesto que la suma de las componentes de la segunda y tercera fila individualmente es nula.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{3} & -\frac{EA}{3} & -\frac{EA}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{3} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{3} \\ \frac{2E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

No obstante, realizando el mismo análisis para la estimación de la fuerza axial  $F_1$ , se observa que ésta sí se ve afectada por la deformación térmica, ya que la suma de las componentes de la primera fila de la matriz  $\mathbf{H}$  es distinta de cero. Es más, calculando analíticamente la estimación de las componentes del torsor  $F_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  a partir de esta configuración se obtiene la expresión de la Ecuación 3.65 donde se manifiesta que la estimación de la fuerza axial se ve afectada por  $\varepsilon_T$ .

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{H}(\varepsilon_m + \varepsilon_T \mathbf{1}) = \mathbf{H}\varepsilon_m + \varepsilon_T(-EA)(1, 0, 0)^T \quad (3.65)$$

Asimismo, a partir de esta configuración óptima no es posible calcular una estimación para la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Calculando  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 3 - 3 = 0 \neq 1$ , se concluye que no existen dimensiones adicionales para el cálculo de la varianza de la estimación.

### Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_1$ , $M_2$ y $M_3$ e imponiendo la compensación de $\varepsilon_T$

Podría plantearse el cálculo de una configuración que permita estimar las mismas componentes del torsor  $F_1$ ,  $M_2$ , y  $M_3$  que en el apartado anterior, pero esta vez imponiendo que se compense la deformación térmica. Empleando 4 galgas (una más que en el caso anterior) y resolviendo el problema de optimización, se ha obtenido la configuración de la Figura 3.6 donde sus galgas se sitúan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\} + \{\check{\varphi}, \check{\varphi}, \check{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (3.66a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\} \quad (3.66b)$$

y donde el conjunto de galgas puede situarse en cualquier posición  $\check{\varphi}$  del perímetro del eje, salvo aquella orientada con  $\delta = 90^\circ$  que puede posicionarse en cualquier posición  $\check{\varphi}$ . Se puede observar que la configuración anterior es la misma que la de la Ecuación 3.63, pero con una galga adicional posicionada y orientada de una determinada manera para que la estimación de  $F_1$  no se vea afectada por el valor de la deformación térmica.

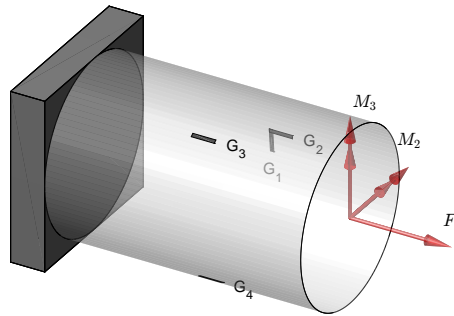


FIGURA 3.6: Configuración de 4 galgas para la estimación de  $F_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , e imponiendo la compensación de  $\varepsilon_T$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo.

Como se ha establecido previamente, otra forma de comprobar si la deformación térmica se compensa para la estimación de las componentes de interés del torsor es a partir de matriz simbólica  $\mathbf{H}$  del estimador. Para la configuración anterior, la matriz simbólica del estimador resulta ser:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\nu+1} & \frac{EA(2\nu-1)}{3(\nu+1)} & -\frac{EA}{3} & -\frac{EA}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{3} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{3} \\ 0 & \frac{2E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

A primera vista se puede ver que la submatriz compuesta por las filas dos y tres, y columnas dos, tres y cuatro de la matriz  $\mathbf{H}$  es exactamente la misma que la calculada en la Ecuación 3.64. En definitiva, esa submatriz representa la manera en la que se realizan las combinaciones lineales de las medidas de deformación de las galgas para la estimación de los dos momentos flectores compensando la deformación térmica. Asimismo, dado que la suma de las componentes de la primera fila de  $\mathbf{H}$  de la Ecuación 3.67 es nula, ahora sí se compensa la deformación térmica para la estimación de la fuerza axial, a diferencia de la configuración de la Ecuación 3.63.

De igual modo, a partir de esta configuración óptima no es posible obtener una estimación para la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Calculando  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 4 - 4 = 0 \not\geq 1$ , se concluye que no existen dimensiones adicionales para el cálculo de la varianza de la estimación.

### Configuración de 5 galgas para la estimación de $M_1$ , $M_2$ y $M_3$ e imponiendo la compensación de $\varepsilon_{\mathcal{T}}$

Otra configuración interesante podría ser aquella que permita estimar el momento de torsión y los dos momentos de flexión simultáneamente, y que además compense la deformación térmica para las tres cargas. Uno podría pensar que con 4 galgas serán suficientes, pero resulta que empleando tan sólo 4 galgas las restricciones de la Ecuación 3.14 del algoritmo no se cumplen y por tanto, no existe una configuración óptima que permita estimar  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  compensando  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ . Sin embargo, empleando un total de 5 galgas se ha encontrado la configuración óptima representada en la Figura 3.7 donde las posiciones de sus galgas resultan ser:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \check{\varphi}, \check{\varphi}, \check{\varphi}\} \quad (3.68a)$$

$$\delta^{opt} = \{45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\} \quad (3.68b)$$

donde la pareja de galgas desfasada  $180^\circ$  y el trío de galgas desfasados  $120^\circ$  azimutalmente entre sí, pueden situarse en cualquier posición del perímetro del eje  $\tilde{\varphi}$  y  $\check{\varphi}$ , respectivamente.

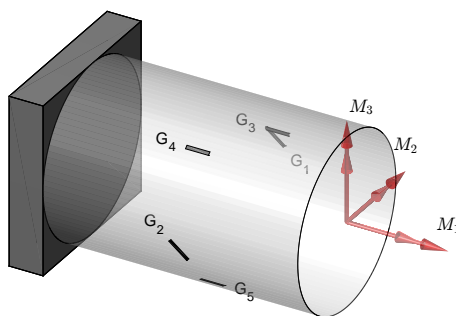


FIGURA 3.7: Configuración de 5 galgas para la estimación de  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , e imponiendo la compensación de  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , obtenida a partir del algoritmo alternativo.

En vista de las posiciones y orientaciones de las galgas en la configuración, parece razonable pensar que las dos primeras galgas van a participar en la estimación del momento torsor, mientras que las tres últimas lo van a hacer en la estimación de los dos momentos flectores. La comprobación de esta suposición se puede realizar a partir de la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador que permite identificar qué galgas participan en la estimación de cada componente de torsor y además, proporciona una visión clara de qué cargas se ven afectadas por la deformación térmica. Calculando la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador simbólicamente, se obtiene:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{EI_p}{2R(v+1)} & -\frac{EI_p}{2R(v+1)} & -\frac{EI_p(v-1)}{3R(v+1)} & \frac{EI_p(v-1)}{6R(v+1)} & \frac{EI_p(v-1)}{6R(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}E\omega}{3} & \frac{\sqrt{3}E\omega}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} & -\frac{E\omega}{3} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Una vez más, se puede observar que la submatriz compuesta por las filas dos y tres, y columnas tres, cuatro y cinco de la matriz  $\mathbf{H}$  es exactamente la misma que la calculada en la Ecuación 3.64. Es decir, las galgas  $G_3$ ,  $G_4$  y  $G_5$  son las que permiten

la estimación de los dos momentos flectores. Sin embargo, las cinco galgas participan en la estimación del momento de torsión. Además, puesto que la suma de las componentes de la primera, segunda y tercera fila individualmente de la matriz  $\mathbf{H}$  es nula se llega a la conclusión de que la estimación de los tres momentos no se ve afectada por la deformación térmica.

De igual modo, mediante esta configuración óptima no es posible calcular una estimación para la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Calculando  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 5 - 5 = 0 \neq 1$ , se concluye que no existen dimensiones adicionales para el cálculo de la varianza de la estimación.

### Configuración de 4 galgas para la estimación de $F_2$ y $F_3$

De igual forma, se ha encontrado una configuración óptima que, sin imponer la compensación de la deformación térmica, permita estimar las dos fuerzas cortantes a partir de 4 galgas extensiométricas. Resolviendo el problema de optimización reiteradas veces, se ha podido comprobar que existe más de una configuración óptima para la estimación de  $F_2$  y  $F_3$  compensando  $\varepsilon_T$ . Además, se ha podido comprobar que la orientación óptima  $\delta^{opt}$  de las galgas depende del valor que tome  $\nu$ . Por ejemplo, empleando el valor de  $\nu = 1/3$ , en todas las configuraciones calculadas la orientación individual de cada una de las 4 galgas puede tomar el valor  $\delta = 60^\circ$  o  $\delta = -60^\circ$ , y son igualmente óptimas. Una de las configuraciones óptimas obtenidas se encuentra representada en la Figura 3.8 donde todas las galgas están orientadas con el valor  $\delta = 60^\circ$ :

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (3.70a)$$

$$\delta^{opt} = \{60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ\} \quad (3.70b)$$

y donde el conjunto de galgas se puede situar en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$  del perímetro del eje.

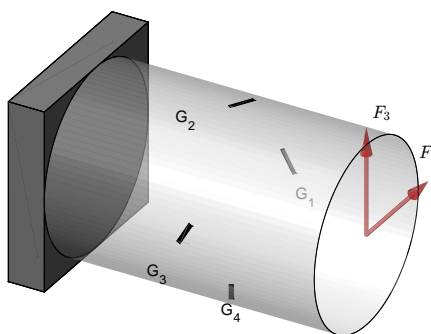


FIGURA 3.8: Configuración de 4 galgas para la estimación de  $F_2$  y  $F_3$  obtenida a partir del algoritmo alternativo.

Calculando la matriz simbólica  $\mathbf{H}$  del estimador para la configuración de la Ecuación 3.70 se obtiene:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} \\ \frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Nuevamente, a pesar de no haberse impuesto la compensación de la deformación térmica, se puede observar que la estimación tanto de  $F_2$  como de  $F_3$  no se ve afectada por  $\varepsilon_T$ . Nótese que la estimación de  $F_2$  se realiza a partir de las medidas de deformación de las galgas  $G_2$  y  $G_4$  únicamente. Mientras que para la fuerza cortante  $F_3$  se realiza a partir de las medidas de deformación de las galgas  $G_1$  y  $G_3$ .

Manteniendo el mismo valor de  $\nu = 1/3$ , por ejemplo en otra de las configuraciones óptimas, dos de las galgas se orientan con  $\delta = 60^\circ$  mientras que las otras dos con  $\delta = -60^\circ$ . Precisamente esta configuración se ha representado en la Figura 3.9 donde la posición y orientación óptima de las galgas resultan ser:

$$\varphi^{opt} = \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} \quad (3.72a)$$

$$\delta^{opt} = \{60^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -60^\circ\} \quad (3.72b)$$

y donde el conjunto de galgas se puede situar en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$  del perímetro del eje.

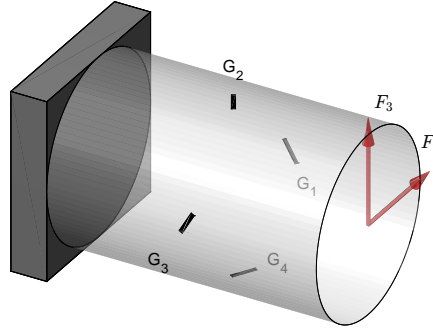


FIGURA 3.9: Configuración de 4 galgas para la estimación de  $F_2$  y  $F_3$  obtenida a partir del algoritmo alternativo.

Para esta configuración la matriz  $\mathbf{H}$  que premultiplica a las medidas de deformación para la estimación de las fuerzas cortantes resulta ser:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} \\ \frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}EA\kappa}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Se observa que el módulo de las componentes de la matriz es el mismo que el de la matriz  $\mathbf{H}$  de la Ecuación 3.71, pero las columnas segunda y cuarta que multiplican a las medidas de deformación de las galgas  $G_2$  y  $G_4$  tienen el signo contrario. Esto se debe a que las galgas  $G_2$  y  $G_4$  están orientadas igual que en la configuración de la Ecuación 3.71 pero con el signo contrario ( $\delta = -60^\circ$ ), y por tanto el alargamiento que antes sufrían las galgas por una tracción por ejemplo, ahora es una contracción. Al igual que la configuración de la Ecuación 3.70, se puede observar que la configuración de la Ecuación 3.72 también compensa la deformación térmica pese a no haberse impuesto en la optimización.

En otro orden de cosas, a partir de la configuración óptima de la Ecuación 3.72 no se puede obtener una expresión para la varianza de la estimación  $\hat{\sigma}^2$ , puesto que calculando  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 4 - 4 = 0 \not\geq 1$ . Sin embargo, por medio de la



configuración óptima de la Ecuación 3.70 sí se puede obtener una expresión para la estimación de  $\hat{\sigma}^2$ , puesto que  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 4 - 3 = 1 \geq 1$ .

Evaluando la matriz  $\mathbf{W}$  en las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas de la configuración de la Ecuación 3.70, se puede calcular la matriz  $\mathbf{P}$  como  $\text{null}(\mathbf{W})$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \quad (3.74)$$

que sustituyendo en la Ecuación 3.45 da lugar a una estimación del coeficiente  $\hat{\sigma}^2$  que multiplica la varianza de estimación de las fuerzas cortantes, que para  $N$  instantes diferentes de medida de  $\varepsilon_m$  resulta ser:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_1^i - \varepsilon_2^i + \varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2}{2N} \quad (3.75)$$

Como se puede observar, tan sólo con los valores de deformación de las 4 galgas en los diferentes  $N$  instantes de medida es suficiente para calcular  $\hat{\sigma}^2$ .

Por tanto, empleando la expresión de la Ecuación 3.31 se podría obtener una estimación de la varianza de estimación de  $\mathbf{t}_1$  como:

$$\text{var}(\mathbf{t}_1) = \frac{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_1^i - \varepsilon_2^i + \varepsilon_3^i - \varepsilon_4^i)^2}{2N} \left( \mathbf{W}_1^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \right)^{-1} \quad (3.76)$$

### Configuración de 4 galgas para la estimación de $\mathcal{T}$

Finalmente, se ha tratado de buscar una configuración óptima que permita estimar la deformación térmica  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ , compensando la deformación mecánica que puedan generar el resto de componentes del tensor. Imponiendo el uso de 4 galgas en la optimización, se ha podido comprobar que existe más de una configuración óptima, pero en todas ellas los valores de orientación de las galgas ( $\delta$ ) dependen del valor de  $\nu$  del material. Para un valor típico de  $\nu = 1/3$ , una de las varias configuraciones óptimas encontradas resulta ser aquella representada en la Figura 3.10 donde sus galgas se posicionan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi}^{opt} = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\} + \{0, \tilde{\varphi}, 0, \tilde{\varphi}\} \quad (3.77a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \{60^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -60^\circ\} \quad (3.77b)$$

donde las galgas  $G_2$  y  $G_4$  orientadas con  $\delta = -60^\circ$  se pueden situar en cualquier posición  $\tilde{\varphi}$  del perímetro del eje. Asimismo se ha podido comprobar que todas las configuraciones óptimas calculadas siguen el mismo patrón en cuanto a las posiciones y orientaciones de las galgas se refiere. Las dos galgas situadas en la misma posición  $\varphi$  sobre el eje, se orientan con el mismo módulo de  $\delta$  pero de signo contrario. Por ejemplo, las galgas  $G_1$  y  $G_2$  se posicionan con  $\varphi = 0^\circ$  y sus orientaciones resultan ser  $\delta = 60^\circ$  y  $\delta = -60^\circ$ , respectivamente.

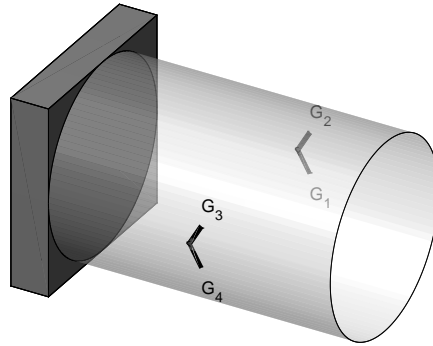


FIGURA 3.10: Configuración de 4 galgas para la estimación de  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$  obtenida a partir de la formulación de parámetros omitidos.

Para esta configuración en concreto, al no estimarse ninguna de las componentes del torsor externo, sino únicamente la deformación térmica, los parámetros del material del eje y geométricos no tienen influencia en la estimación. Calculando la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador se puede ver que sus componentes son números sin dimensiones:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Como ya se sabe, la estimación de la deformación térmica debe realizarse según  $\varepsilon_{\mathcal{T}} = \mathbf{H}\varepsilon_m$ , para posteriormente calcular la temperatura  $\mathcal{T}$  a la que se encuentra el eje. Una expresión para calcular la temperatura del eje podría obtenerse como:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \frac{\varepsilon_{\mathcal{T}}}{\alpha_{\mathcal{T}}} \quad (3.79)$$

donde  $\alpha_{\mathcal{T}}$  es el coeficiente de dilatación térmica del material del eje y  $\mathcal{T}_0$  es la temperatura de referencia del eje. Por ejemplo, si se está monitorizando la temperatura del eje mediante la configuración de la Ecuación 3.77,  $\mathcal{T}_0$  sería la temperatura del eje justo antes de empezar a realizar mediciones de deformación con las galgas.

Por concluir, mediante esta configuración no es posible calcular una estimación de la varianza de estimación  $\hat{\sigma}^2$ . Calculando  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) = 4 - 4 = 0 \not\geq 1$ , se concluye que no existen dimensiones adicionales para el cálculo de la varianza de la estimación de  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ .

### 3.4. Sumario de configuraciones óptimas de galgas

En la Tabla 3.2 se muestra todas las configuraciones óptimas novedosas que se han obtenido a partir del algoritmo alternativo a lo largo de este Capítulo. La primera de las columnas indica el número de galgas necesarias para formar la configuración, a continuación la segunda y tercera columna establecen cuáles son los parámetros de interés y omitidos, respectivamente. Finalmente, la tercera columna indica el número de ecuación donde pueden encontrarse las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas.

Núm. galgas	Parámetros de interés ( $t_1$ )	Parámetros omitidos ( $t_2$ )	Configuración óptima
6	$F_1, F_2, F_3$ $M_1, M_2, M_3$ -	- - -	Ec. 3.55
3	- $M_2, M_3$ -	$F_1, F_2, F_3$ $M_1$ $\varepsilon_T$	Ec. 3.56
6	- $M_2, M_3$ -	$F_1, F_2, F_3$ $M_1$ $\varepsilon_T$	Ec. 3.58
3	$F_1$ $M_2, M_3$ -	$F_2, F_3$ $M_1$ -*1	Ec. 3.63
4	$F_1$ $M_2, M_3$ -	$F_2, F_3$ $M_1$ $\varepsilon_T$	Ec. 3.66
5	- $M_1, M_2, M_3$ -	$F_1, F_2, F_3$ - $\varepsilon_T$	Ec. 3.68
4	$F_2, F_3$ - -	$F_1$ $M_1, M_2, M_3$ -*2	Ecs. 3.70 y 3.72
4	- - $\varepsilon_T$	$F_1, F_2, F_3$ $M_1, M_2, M_3$ -	Ec. 3.77

\*1 Compensa  $\varepsilon_T$  para los esfuerzos  $M_2$  y  $M_3$ .

\*2 Compensa  $\varepsilon_T$  para los esfuerzos  $F_2$  y  $F_3$ .

TABLA 3.2: Configuraciones óptimas de galgas extensiométricas obtenidas mediante el algoritmo alternativo indicando el número de ecuación.

### 3.5. Resumen del Capítulo 3

En el Capítulo 3 se ha desarrollado una metodología para la obtención de nuevas configuraciones óptimas de galgas, que permitan estimar determinados parámetros de interés (componentes del torsor y deformación térmica) y compensar el efecto del resto de parámetros, los denominados parámetros omitidos.

Primeramente, se ha demostrado que el diseño óptimo habitual no siempre es válido para el cálculo óptimo de nuevas configuraciones de galgas. Esto es, si  $n \leq q$  el algoritmo de diseño habitual no proporciona ninguna solución y si  $n = q$  la única matriz  $\mathbf{Q}$  óptima que premultiplica al modelo original es nula.

Por esta razón, con el objetivo de ser capaces de obtener configuraciones óptimas en las que el número de galgas empleadas sea menor que el número de parámetros omitidos ( $n \leq q$ ), se ha desarrollado una formulación alternativa. En primer lugar, en el nuevo algoritmo, en vez de premultiplicar el modelo original por la matriz  $\mathbf{Q}$ ,

se ha premultiplicado por una matriz  $\mathbf{R}$ , que cumple las restricciones  $\mathbf{R}\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}_{p \times q}$  y  $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_p$ . Otra diferencia entre los dos algoritmos es que el tamaño de  $\mathbf{R}$  no es el mismo que el de  $\mathbf{Q}$ . Esto se debe a que, el algoritmo alternativo, entre todas las posibles direcciones ortogonales a  $\mathbf{W}_2$ , busca aquella (o aquellas) que maximicen la observabilidad de los parámetros de interés.

Posteriormente, a partir de la matriz de información se ha obtenido una expresión para el estimador de Máxima Verosimilitud de los parámetros de interés. Este estimador máximo verosímil es el resultado de premultiplicar las medidas de deformación por la matriz del estimador  $\mathbf{H}$ .

Una vez conocida la matriz de información del modelo original, se ha definido un algoritmo D-Optimality para la obtención de las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas y las componentes de la matriz  $\mathbf{R}$  para la estimación de  $\mathbf{t}_1$  sin la influencia de los parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$ . Este algoritmo tan sólo requiere de los siguientes datos de entrada: número de galgas de la configuración, parámetros de interés  $\mathbf{t}_1$  que se deseen estimar y parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$  cuyos efectos se deseen compensar.

Adicionalmente, en un primer intento de obtener una estimación de la varianza de estimación de los parámetros de interés, se ha visto que transformando el modelo original premultiplicándolo por la matriz óptima  $\mathbf{R}$  que es ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ , no es posible obtener una expresión para la varianza de estimación. Esto es debido a que la totalidad de medidas de deformación se emplea para la estimación de los  $p$  parámetros de interés y por tanto, no hay información adicional para la estimación de  $\sigma^2$ .

Sin embargo, se ha definido una matriz  $\mathbf{P} = \text{null}(\mathbf{W})$  tal que premultiplicando el modelo original por dicha matriz, permite obtener una estimación de la varianza de estimación de los parámetros de interés. Una manera rápida para determinar si se puede obtener una estimación de  $\sigma^2$  consiste en comprobar si se cumple la siguiente inecuación  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) \geq 1$ .

En definitiva, se ha desarrollado una metodología para obtener nuevas configuraciones óptimas de galgas y capaces de estimar ciertos parámetros de interés, sin la influencia de los parámetros omitidos. Se ha podido ver que el diseño óptimo tradicional no siempre es válido, llevando así a la formulación de un algoritmo alternativo que maximice la observabilidad de los parámetros de interés.

---

## ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE CONFIGURACIONES DE GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS

---

**E**N los Capítulos 2 y 3 se han desarrollado dos metodologías para el cálculo de configuraciones óptimas de galgas para la estimación de las componentes del torsor externo. En todas ellas, la única fuente que podría ocasionar desviaciones en la estimación de las cargas provenía de la incertidumbre de medición de la deformación de las galgas. En todo momento se ha supuesto que las galgas se instalan en el eje en sus posiciones y orientaciones nominales, pero ¿qué ocurre si alguna de éstas se desvía de su valor nominal y se posiciona incorrectamente? Es más, ¿cómo se ve afectada la estimación de las cargas si los parámetros geométricos y del material del eje se conocen con poca precisión? Por ello, con la finalidad de analizar la influencia que tienen todos estos parámetros en la estimación de las diferentes componentes del torsor, en el presente Capítulo se realiza un análisis de sensibilidad de los parámetros cuando alguno de ellos se desvía de su valor nominal.

### 4.1. Expresiones analíticas para las configuraciones de galgas

Las configuraciones de galgas extensiométricas típicas para estimar las componentes del torsor están formadas por 2 o 4 galgas, montadas en un medio puente o puente completo de Wheatstone, respectivamente. En esta Sección se van a presentar las configuraciones de 4 galgas tradicionales que forman un puente completo, y las configuraciones novedosas de 6 y 8 galgas extensiométricas, en las que cada una de las galgas está montada en un cuarto de puente de Wheatstone. En particular para las configuraciones de 4 galgas, se analizará la sensibilidad de las seis configuraciones para estimar individualmente la fuerza axial, las fuerzas cortantes, el momento de torsión y los momentos flectores. Sin embargo, para las configuraciones de 6 y 8 galgas sólo se va plantear cómo se podría realizar el análisis de sensibilidad de las seis componentes del torsor.

La posición y orientación nominal de las galgas extensiométricas en los puentes completos de Wheatstone tradicionales según la acotación de la Figura 2.8 se muestran en la Figura 4.1 y en la Tabla 4.1.

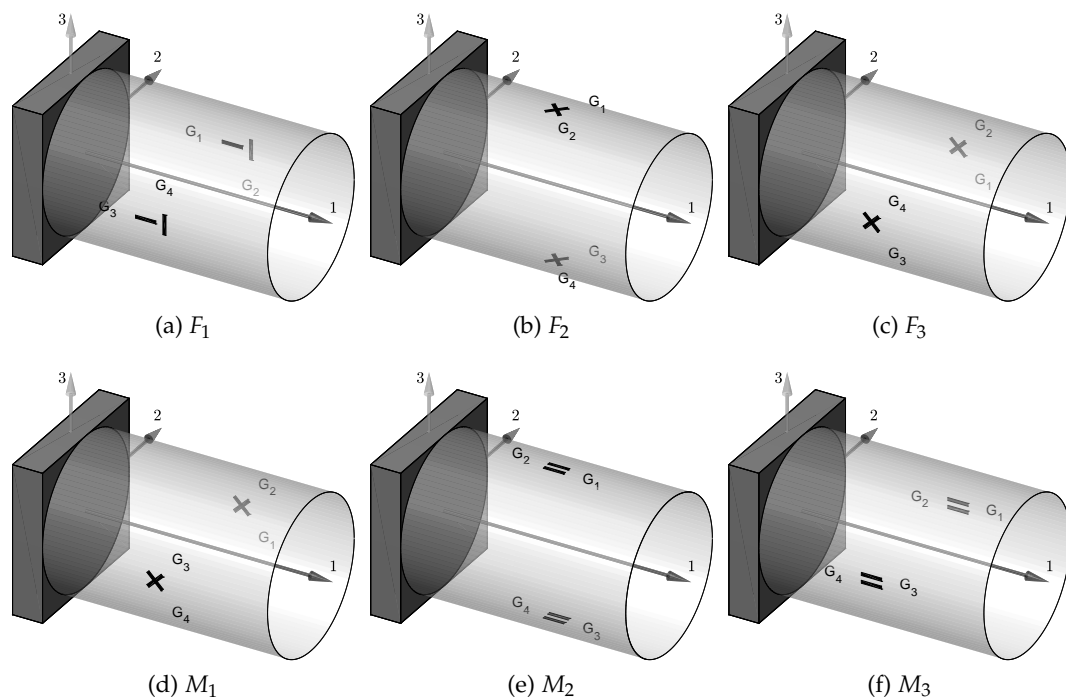


FIGURA 4.1: Configuraciones típicas de puente completo de Wheatstone para la estimación de las componentes individuales del torsor.

Debido a la simetría cilíndrica de la sección transversal del eje, para la medición de la fuerza axial y el momento de torsión, el conjunto de configuraciones de galgas extensiométricas puede desfasarse en la dirección azimutal cualquier ángulo  $\tilde{\varphi}$  para la fuerza axial y cualquier ángulo  $\tilde{\varphi}$  para el momento de torsión. Por motivos simplificados, a partir de ahora se eligen las configuraciones para  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} = 0$ .

Carga	$\varphi, \delta$	Carga	$\varphi, \delta$
$F_1$	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\}$ $\delta = \{0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ\}$	$M_1$	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\} + \{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\}$ $\delta = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ\}$
$F_2$	$\varphi = \{90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}$ $\delta = \{45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ\}$	$M_2$	$\varphi = \{90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}$ $\delta = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$
$F_3$	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta = \{45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ\}$	$M_3$	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 180^\circ\}$ $\delta = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$

TABLA 4.1: Posición y orientación nominal de las galgas extensiométricas en los puentes completos tradicionales de Wheatstone para la medición de cada una de las 6 componentes individuales del torsor.

En lo que respecta a las configuraciones de 6 y 8 galgas obtenidas mediante el criterio D-Optimality, las posiciones y orientaciones nominales de las galgas son aquellas recogidas en el Sección 2.5, respectivamente. De igual modo, un breve resumen

de éstas se puede encontrar en la Tabla 4.2 y las configuraciones se representan en la Figura 4.2.

Núm. galgas	$\varphi, \delta$
6 ( $2\beta = 60^\circ$ )	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 240^\circ\}$ $\delta = \{30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -30^\circ\}$
8 ( $2\beta = 90^\circ$ )	$\varphi = \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}$ $\delta = \{60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ\}$

TABLA 4.2: Posición y orientación nominal de las galgas extensiométricas en las configuraciones de 6 y 8 galgas para la estimación simultánea de las 6 componentes del torsor.

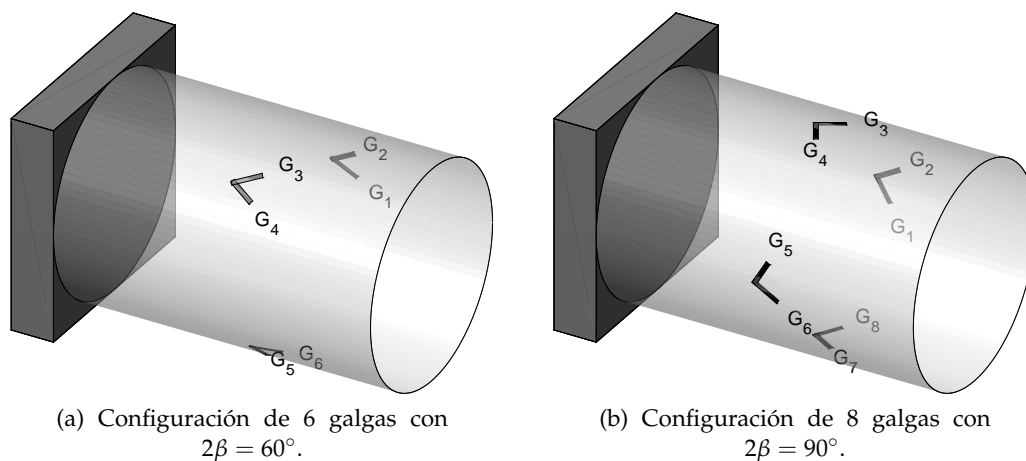


FIGURA 4.2: Configuraciones óptimas de 6 y 8 galgas obtenidas mediante el criterio D-Optimality.

#### 4.1.1. Relación inversa para la estimación de cargas mecánicas en puentes típicos de Wheatstone

En la Sección 2.3.1, se ha definido la deformación de un conjunto de  $n$  galgas en términos del torsor externo ejercido sobre el eje. Tomando estas deformaciones como las que se van a medir, al igual que en el Capítulo 3, es el momento de escribir las relaciones inversas que proporcionarán una medida de los componentes individuales del torsor en términos de las deformaciones en las galgas. Las configuraciones típicas de galgas emplean puentes completos de Wheatstone para estimar las componentes del torsor, en los cuales la relación existente entre las tensiones en el puente y las deformaciones de las galgas puede escribirse como [47]:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{k_G}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \quad (4.1)$$

donde  $k_G$  es el factor de galga.

Utilizando, por ejemplo, el puente completo representado en la Figura 4.1a y la Ecuación 4.1 dedicada a estimar los esfuerzos axiales, es bien sabido que la relación

[47] entre  $\hat{F}_1$  y  $V_{out}/V_{in}$  es:

$$\hat{F}_1 = \frac{2EA}{k_G(1+\nu)} \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (4.2)$$

Por lo tanto,  $\hat{F}_1$  puede escribirse en términos de  $\varepsilon$  como:

$$\hat{F}_1 = \frac{2EA}{k_G(1+\nu)} \frac{k_G}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = \left( \frac{EA}{2(1+\nu)} [1, -1, 1, -1] \right) \varepsilon = \mathbf{H}_{\hat{F}_1} \varepsilon \quad (4.3)$$

La expresión  $\mathbf{H}_{\hat{F}_1} \varepsilon$  puede utilizarse como un estimador de  $F_1$ , y es fácil demostrar que es insesgada, si la esperanza del error de las mediciones de deformación es nula.

De forma análoga, puede demostrarse que los estimadores de la Tabla 4.3 para las seis cargas mecánicas también son insesgados.

Carga	Matriz H del estimador	Carga	Matriz H del estimador
$F_1$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} = \frac{EA}{2(1+\nu)} [1, -1, 1, -1]$	$M_1$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_1} = \frac{EI_p}{4R(1+\nu)} [1, -1, 1, -1]$
$F_2$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_2} = -\frac{EA\kappa}{4(1+\nu)} [1, -1, 1, -1]$	$M_2$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_2} = -\frac{E\omega}{4} [1, -1, 1, -1]$
$F_3$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_3} = \frac{EA\kappa}{4(1+\nu)} [1, -1, 1, -1]$	$M_3$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_3} = -\frac{E\omega}{4} [1, -1, 1, -1]$

TABLA 4.3: Matrices  $\mathbf{H}_{\hat{F}_k}$  para la estimación de las componentes del torsor.

#### 4.1.2. Relación inversa para la estimación de las cargas mecánicas en configuraciones novedosas

Procediendo de la misma manera puede obtenerse la relación inversa para las configuraciones de 6 y 8 galgas extensiométricas. En este sentido, la matriz  $\mathbf{H}$  debe mantener la siguiente relación entre el torsor completo y las medidas de deformación de las galgas:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{t}}} \varepsilon = \mathbf{W}^+ \varepsilon \quad (4.4)$$

En lo que respecta a la configuración de 6 galgas extensiométricas, la matriz  $\mathbf{H}_{\hat{\mathbf{t}}}$  puede obtenerse evaluando la matriz  $\mathbf{W}^{-1}$  de la Ecuación 2.53 para los diferentes valores de  $\alpha = \delta^{opt}$  de las galgas. De esta forma, la matriz  $\mathbf{H}_{\hat{\mathbf{t}}}^{6G}$  del estimador para la configuración de 6 galgas resulta ser la siguiente:

$$\mathbf{H}_{\hat{\mathbf{t}}}^{6G} = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{3(v-3)} & \frac{2AE}{3(v-3)} & \frac{2AE}{3(v-3)} & \frac{2AE}{3(v-3)} & \frac{2AE}{3(v-3)} & \frac{2AE}{3(v-3)} \\ 0 & 0 & -\frac{AE\kappa}{3(v+1)} & \frac{AE\kappa}{3(v+1)} & \frac{AE\kappa}{3(v+1)} & -\frac{AE\kappa}{3(v+1)} \\ \frac{2\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} & -\frac{2\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} & -\frac{\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} & \frac{\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} & -\frac{\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} & \frac{\sqrt{3}AE\kappa}{9(v+1)} \\ \frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} & -\frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} & \frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} & -\frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} & \frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} & -\frac{\sqrt{3}EI_p}{9R(v+1)} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}E\omega}{3(v-3)} & \frac{2\sqrt{3}E\omega}{3(v-3)} & -\frac{2\sqrt{3}E\omega}{3(v-3)} & -\frac{2\sqrt{3}E\omega}{3(v-3)} \\ -\frac{4E\omega}{3(v-3)} & -\frac{4E\omega}{3(v-3)} & \frac{2E\omega}{3(v-3)} & \frac{2E\omega}{3(v-3)} & \frac{2E\omega}{3(v-3)} & \frac{2E\omega}{3(v-3)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$



En cambio, el cálculo de la relación inversa para la configuración de 8 galgas,  $\mathbf{H}_i^{8G}$ , no se ha podido obtener ya que requiere de la resolución simbólica de la pseudoinversa de la matriz  $\mathbf{W}$ . Siendo esta matriz de tamaño  $8 \times 6$  los programas de cálculo simbólico utilizados no son capaces de proporcionar un resultado.

## 4.2. Cálculo de la sensibilidad

Una vez obtenida una expresión explícita de la estimación de la carga de forma simbólica, veamos como afecta a la estimación de las componentes del torsor el hecho de que algún parámetro se desvíe de su valor nominal.

### 4.2.1. Aproximación

La gran mayoría de las configuraciones de galgas extensiométricas calculadas en esta tesis se pueden implementar haciendo uso de rosetas. Así, se supone que la posición de las galgas que forman una roseta es igual y su orientación está desfasada un determinado ángulo:  $90^\circ$  para las *Rosetas T* y de *Torsión/Cortante*, y  $0^\circ$  para las *Rosetas Lineales Dobles*. Por ejemplo, para una configuración de galgas montada en un puente completo de Wheatstone, los parámetros de posicionamiento de las galgas 2 y 4 dependen de los parámetros de las galgas 1 y 3, así como de su incertidumbre. Esta misma propiedad se da para las configuración de 6 y 8 galgas que emplean rosetas de  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , respectivamente. De este modo, para el análisis de sensibilidad se van a tomar como referencia las galgas identificadas por números impares, pues las galgas identificadas por número pares son dependientes de las mismas.

Generalicemos la idea para configuraciones de  $n$  galgas (4, 6 u 8) y definamos por  $\mathbf{p}$  los valores *nominales* de los parámetros de posición y orientación de las galgas extensiométricas, y por  $\mathbf{q}$  los valores *nominales* de los parámetros geométricos y del material:

$$\mathbf{p} = (\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-3}, \varphi_{n-1}, \delta_1, \delta_3, \dots, \delta_{n-3}, \delta_{n-1})^\top \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{q} = (A, \kappa, \omega, R, I_p, E, \nu)^\top \quad (4.6b)$$

Además, definamos un par de vectores para considerar la incertidumbre de ambos conjuntos de parámetros,

$$\Delta\mathbf{p} = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_3, \dots, \Delta\varphi_{n-3}, \Delta\varphi_{n-1}, \Delta\delta_1, \Delta\delta_3, \dots, \Delta\delta_{n-3}, \Delta\delta_{n-1})^\top \quad (4.7a)$$

$$\Delta\mathbf{q} = (\Delta A, \Delta\kappa, \Delta\omega, \Delta R, \Delta I_p, \Delta E, \Delta\nu)^\top \quad (4.7b)$$

que representan la diferencia entre los valores nominales y reales de los parámetros. Así, los valores reales de los parámetros pueden escribirse como  $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$ .

Las deformaciones reales medidas por las galgas dependen de los parámetros reales (con incertidumbre) del eje y de la posición y orientación reales (con incertidumbre) de las galgas. Por lo tanto, la matriz  $\mathbf{W}$  es susceptible a tener incertidumbre debido a las anteriores fuentes de incertidumbre. Estos errores se reflejarán en la matriz  $\mathbf{W}$ , lo que significa que las componentes de esta matriz se verán afectadas en

función de dichas incertidumbres. Así pues, al evaluar la matriz  $\mathbf{W}$ , los parámetros deben evaluarse con incertidumbre:

$$\mathbf{W}_{unc} = \mathbf{W}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}, \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) \quad (4.8)$$

Por otro lado, la matriz  $\mathbf{H}$  se utiliza para calcular las cargas a partir de las mediciones de deformación. Como  $\mathbf{H}$  se utiliza para estimar las cargas con errores de posicionamiento desconocidos  $\Delta\mathbf{p}$ , es una matriz determinista y se evalúa en los valores *nominales* de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ . Al fin y al cabo,  $\mathbf{H}$  representa la matriz del estimador y para cada configuración de galgas siempre es la misma. A diferencia de la matriz  $\mathbf{W}$ , la matriz  $\mathbf{H}$  no está sujeta a incertidumbre, ya que se basa en la relación teórica subyacente entre las medidas de deformación y el torsor externo:

$$\mathbf{H}_{nom} = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (4.9)$$

En lo que respecta a las configuraciones típicas, como el objetivo es calcular las sensibilidades de las estimaciones de las componentes del torsor, es necesario escribir expresiones analíticas para la  $k$ -ésima componente del torsor ( $\hat{t}_k$ ) en términos del torsor real ( $\mathbf{t}$ ) y de los parámetros con incertidumbre ( $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ ):

$$\hat{t}_k = \mathbf{H}_{nom, \hat{t}_k} \mathbf{W}_{unc, \hat{t}_k}(\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{q})\mathbf{t} \quad (4.10)$$

donde las matrices  $\mathbf{H}_{nom, \hat{t}_k}$  y  $\mathbf{W}_{unc, \hat{t}_k}$  para la estimación de cada componente del torsor ( $\hat{t}_k$ ) son diferentes.

Análogamente, puede obtenerse una expresión analítica para la estimación del torsor externo  $\hat{\mathbf{t}}$  para las configuraciones de galgas que estimen todas las componentes del torsor conjuntamente:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{H}_{nom, \hat{\mathbf{t}}} \mathbf{W}_{unc, \hat{\mathbf{t}}}(\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{q})\mathbf{t} \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{H}_{nom, \hat{\mathbf{t}}}$  y  $\mathbf{W}_{unc, \hat{\mathbf{t}}}$  son la matriz del estimador y la matriz de observación para la estimación del torsor completo  $\hat{\mathbf{t}}$ , respectivamente. La expresión de la Ecuación 4.11 también serviría para estimar un subconjunto  $\hat{\mathbf{t}}_1$  del torsor completo, es decir, los parámetros de interés. En ese caso, las matrices serían otras distintas, esto es, aquellas para obtener una estimación de los parámetros de interés  $\hat{\mathbf{t}}_1$ .

#### 4.2.2. Cálculo de la incertidumbre de las cargas mecánicas

La expresión analítica de las estimaciones de las cargas depende de forma no lineal de la incertidumbre de los parámetros. Para estimar la incertidumbre de las cargas, se pueden utilizar diferentes métodos como *unscented filters* y *simulaciones de Montecarlo* [79, 80]. Una aproximación más sencilla para la estimación de la incertidumbre en sistemas estocásticos no lineales es utilizar series de Taylor [81, 82]. Esta aproximación requiere conocer las expresiones analíticas de  $\hat{t}_k$  (o  $\hat{\mathbf{t}}$ , en su caso), como afortunadamente es el caso.

Definiendo  $\hat{t}_k^0$  como la estimación de la carga para los valores nominales de los parámetros, la estimación de la carga puede escribirse como una aproximación de

Taylor de segundo orden como:

$$\begin{aligned} \hat{t}_k \approx & \hat{t}_k^0 + \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}} \right]_0 \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^\top \left[ \frac{\partial^2 \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} \right]_0 \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^\top \left[ \frac{\partial^2 \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p} \partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0 \Delta \mathbf{q} \\ & + \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0 \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}^\top \left[ \frac{\partial^2 \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} \right]_0 \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^\top \left[ \frac{\partial^2 \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p} \partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0 \Delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde los *Jacobianos* y *Hessianos* de  $\hat{t}_k$  se evalúan en  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$  y  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

Para la aproximación de primer orden, la incertidumbre de la  $k$ -ésima carga puede escribirse como:

$$\sigma_{\hat{t}_k}^2 \approx \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}} \right]_0 \Sigma_{\Delta \mathbf{p}} \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}} \right]_0^\top + \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0 \Sigma_{\Delta \mathbf{q}} \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}} \right]_0^\top \quad (4.13)$$

donde  $\Sigma_{\Delta \mathbf{p}} = \text{var}(\Delta \mathbf{p})$  y  $\Sigma_{\Delta \mathbf{q}} = \text{var}(\Delta \mathbf{q})$  son las matrices de covarianzas de los vectores de los parámetros y se ha supuesto que la covarianza de  $\Delta \mathbf{p}$  y  $\Delta \mathbf{q}$  es cero. Para las aproximaciones de segundo orden y de orden superior, se remite al lector a [79].

Además, basándose en la Ecuación 4.3, se podría calcular la varianza del estimador de la carga  $\hat{t}_k$  debido a la incertidumbre de medición como:

$$\sigma_{\hat{t}_k, \varepsilon}^2 = \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \varepsilon} \right]_0 \Sigma_\varepsilon \left[ \frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \varepsilon} \right]_0^\top = \mathbf{H}_{\hat{t}_k} \Sigma_\varepsilon \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top \quad (4.14)$$

siendo  $\Sigma_\varepsilon$  la matriz de covarianzas de las medidas de deformación. Suponiendo que todas las galgas extensiométricas son iguales, su varianza puede escribirse como una matriz diagonal  $\Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n$ , y  $\sigma_{\hat{t}_k, \varepsilon}^2$  puede obtenerse como:

$$\sigma_{\hat{t}_k, \varepsilon}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top \quad (4.15)$$

donde los productos de matrices  $\mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top$  para una carga particular  $\hat{t}_k$  se muestran en la Tabla 4.4.

Carga	Producto $\mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top$	Carga	Producto $\mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top$
$F_1$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_1} \mathbf{H}_{\hat{F}_1}^\top = \frac{A^2 E^2}{(1+\nu)^2}$	$M_1$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_1} \mathbf{H}_{\hat{M}_1}^\top = \frac{E^2 I_p^2}{4 R^2 (1+\nu)^2}$
$F_2$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_2} \mathbf{H}_{\hat{F}_2}^\top = \frac{A^2 E^2 \kappa^2}{4(\nu+1)^2}$	$M_2$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_2} \mathbf{H}_{\hat{M}_2}^\top = \frac{E^2 \omega^2}{4}$
$F_3$	$\mathbf{H}_{\hat{F}_3} \mathbf{H}_{\hat{F}_3}^\top = \frac{A^2 E^2 \kappa^2}{4(\nu+1)^2}$	$M_3$	$\mathbf{H}_{\hat{M}_3} \mathbf{H}_{\hat{M}_3}^\top = \frac{E^2 \omega^2}{4}$

TABLA 4.4: Producto de matrices  $\mathbf{H}_{\hat{t}_k} \mathbf{H}_{\hat{t}_k}^\top$  para la estimación de la varianza de la carga  $\hat{t}_k$ .

Es interesante observar que la compensación de la temperatura no se ve afectada por la mala colocación de las galgas extensiométricas ni por la incertidumbre de ningún parámetro geométrico o del material. Esto es así porque la deformación térmica es un efecto isotrópico y afecta a las galgas independientemente de la posición y

orientación en la que estén adheridas. Como expresan los elementos de la Tabla 4.3, la suma de los coeficientes de las matrices  $\mathbf{H}_{i_k}$  es siempre cero independientemente de los valores reales de los parámetros del material. Que esta suma sea igual a cero es, de hecho, la prueba matemática de que los puentes completos de Wheatstone realizan la compensación de temperatura.

### 4.3. Caso de aplicación: Aerogenerador

Los desarrollos teóricos y los resultados analíticos obtenidos en las dos Secciones anteriores pueden ser útiles para el cálculo de las sensibilidades de cualquier eje de sección circular. Sin embargo, se ha optado por realizar un análisis de sensibilidad en un aerogenerador debido a que las cargas aerodinámicas del viento se transmiten a través de toda su estructura provocando la aplicación de las seis componentes del torsor simultáneamente en los diferentes componentes mecánicos del mismo. Estimar con precisión las cargas ejercidas por el viento a un aerogenerador resulta de gran interés, ya que este escenario representa un ejemplo clave en el que intervienen las tres fuerzas y los tres momentos simultáneamente, y permite analizar la influencia de cargas secundarias en la estimación de las cargas de interés. Por tanto, resulta esencial comprender el impacto que los errores en la instalación de las galgas extensiométricas, así como las imprecisiones en las propiedades del material o las características geométricas de los componentes mecánicos, pueden tener en la estimación de las cargas. Dichas incertidumbres podrían generar divergencias significativas entre las cargas estimadas y las cargas reales ejercidas por el viento, y por tanto, se va a realizar un análisis de sensibilidad para cuantificar esa propagación de incertidumbres.

Además, conviene subrayar la necesidad de un caso de aplicación que permita conocer valores determinados de los parámetros geométricos y de material, con el fin de evaluar la magnitud de las incertidumbres. A pesar de que la obtención de expresiones simbólicas anteriores constituye un procedimiento valioso, resulta imposible deducir de dicha información simbólica si las sensibilidades son de gran o pequeña envergadura. En consecuencia, el caso de estudio de un aerogenerador, particularmente en sus componentes LSS y torre, así como las simulaciones, son esenciales. Así pues, en esta Sección se presentan los resultados de la incertidumbre numérica desde cuatro perspectivas diferentes.

En primer lugar, se calcula la incertidumbre relacionada con los parámetros geométricos y del material del eje, a continuación se analiza el efecto de desalineamiento de las galgas en presencia de cargas secundarias, posteriormente se discuten los efectos tras la combinación de cargas en una simulación OpenFAST [83] de un aerogenerador NREL de 5-MW y, por último, se realiza una simulación Montecarlo para los valores de desalineamiento de las galgas extensiométricas, tanto para la LSS como para la torre de un aerogenerador.

El aerogenerador terrestre NREL de 5-MW simulado en este trabajo consiste en un rotor eólico de 3 palas y 126 m de diámetro sobre una torre de 87.6 m de altura. Este modelo de aerogenerador ha sido desarrollado por el NREL y se ha utilizado ampliamente en multitud de trabajos de investigación. Para conocer las propiedades más destacadas de la turbina, se remite al lector a [84].

Al tratarse de una aplicación en el contexto de la energía eólica, el presente estudio se ha realizado utilizando el software OpenFAST. Se trata de un software libre y abierto desarrollado por el NREL (National Renewable Energy Laboratory) que está certificado para el diseño de aerogeneradores *on-shore* y *off-shore*. Este software es un estándar para el diseño de componentes y simulaciones aerodinámicas, aeroelásticas, estructurales y de sistemas de control. Permite realizar simulaciones muy realistas en distintas condiciones de funcionamiento de los aerogeneradores. Es capaz de determinar la posición, velocidad y aceleración de varios puntos de la máquina, así como las cargas estructurales aplicadas a sus componentes.

OpenFAST modela un aerogenerador con 24 grados de libertad (GDL): 6 GDL para el movimiento de la base/cimentación, otros 4 GDL para describir la flexibilidad de la torre (2 laterales y 2 longitudinales), 1 GDL que representa la guiñada (*yaw*) de la góndola, 1 GDL para la rotación del generador y 1 más para la flexibilidad del tren motriz. A su vez, cada pala se modela mediante 3 GDL, 2 de modo *flapwise* y 1 de modo *edgewise*. Los 2 últimos GDL consideran el movimiento del rotor y de la aleta de cola. El modelo permite especificar las propiedades estructurales (rigidez, amortiguación, inercias) de la torre, el tren motriz y las palas, así como las propiedades geométricas y aerodinámicas de la torre y las palas. Además, permite la colocación de sensores virtuales (acelerómetros, IMU-s y sensores de deformación) en ubicaciones arbitrarias de la torre, el tren motriz y las palas. Esto permite obtener información de estas variables en la simulación para su post-procesado *off-line*. En cambio, OpenFAST considera el LSS como un cuerpo rígido.

Como resultado de la simulación, OpenFAST proporciona las componentes del torsor completo aplicadas sobre el LSS en cualquier punto que pertenezca cinemáticamente a él. Así, la deformación de una galga (colocada en una sección específica del eje) ha sido post-procesada mediante la expresión  $\varepsilon_m = \mathbf{w}\mathbf{t}$ , evaluada con los valores del torsor (salida de la simulación OpenFAST) y los valores de  $\varphi$  y  $\delta$  de la galga. Mediante estos cálculos, se dispone de un sensor virtual para cualquier simulación posterior basada en la deformación de las galgas mal posicionadas.

#### 4.3.1. Incertidumbre de los parámetros geométricos y del material

Los primeros resultados de sensibilidad obtenidos son respecto a los parámetros geométricos y de material ( $\Delta\mathbf{q}$ ). En el análisis se ha considerado que los parámetros son independientes entre sí. Se han calculado simbólicamente las matrices Jacobianas de la Ecuación 4.12 para las 6 configuraciones típicas de galgas y se recogen en la Tabla 4.5. Evaluando numéricamente las matrices Hessianas de la aproximación de Taylor recogidas en el Apéndice B, se ha concluido que su contribución al error de estimación de las componentes del torsor es insignificante con respecto a otras fuentes de incertidumbre.

Nótese que, para una aproximación de primer orden, las sensibilidades de la estimación de una carga no dependen de las otras cargas y son simplemente proporcionales a la carga primaria y a la incertidumbre de los parámetros. Por ejemplo, si tenemos en cuenta sólo la contribución de los jacobianos de las aproximaciones de Taylor, la estimación de la fuerza axial  $\hat{F}_1$  sólo puede verse afectada por los parámetros con incertidumbre  $A$ ,  $E$  y  $\nu$ .

$\left[\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E} & \frac{1}{\nu+1} \end{bmatrix} F_1$	$\left[\frac{\partial \hat{M}_1}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & -\frac{1}{I_p} & -\frac{1}{E} & \frac{1}{\nu+1} \end{bmatrix} M_1$
$\left[\frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & -\frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E} & \frac{1}{\nu+1} \end{bmatrix} F_2$	$\left[\frac{\partial \hat{M}_2}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\omega} & 0 & 0 & -\frac{1}{E} & 0 \end{bmatrix} M_2$
$\left[\frac{\partial \hat{f}_3}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & -\frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E} & \frac{1}{\nu+1} \end{bmatrix} F_3$	$\left[\frac{\partial \hat{M}_3}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\omega} & 0 & 0 & -\frac{1}{E} & 0 \end{bmatrix} M_3$

TABLA 4.5: Jacobianos  $\left(\left[\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial \Delta \mathbf{q}}\right]_0\right)$  de las aproximaciones de Taylor para las 6 componentes individuales del torsor.

### 4.3.2. Efectos individuales de las cargas secundarias

Supóngase que se instalan los seis puentes completos de la Figura 4.1 en la misma sección del eje, midiendo cada uno de ellos una componente del torsor externo  $\mathbf{t}$ . Se sabe que un error de posicionamiento al pegar una galga –o una roseta– produce una subestimación de la medida, cuando la carga primaria  $t_k$  a medir es la única que se ejerce sobre el eje [47]. Si, simultáneamente, se aplica una carga secundaria sobre el eje, la medición de  $t_k$  no se ve afectada si no hay errores de posicionamiento de las galgas, debido a la compensación de los parámetros omitidos que realizan los puentes completos de Wheatstone. Sin embargo, en presencia de errores de posicionamiento, la medición de  $t_k$  puede verse afectada por la presencia de una carga secundaria. En esta Sección se analiza cómo la medición de cada componente del torsor  $\mathbf{t}$  se ve afectada por la presencia de otras componentes secundarias del torsor. Este análisis se aplica tanto al LSS como a la torre del conocido aerogenerador de referencia NREL de 5-MW [84]. La Figura 4.3 muestra las bases en las que se expresa el torsor medido  $\mathbf{t}$ . En ambas bases,  $1_t 2_t 3_t$  y  $1_a 2_a 3_a$ ,  $F_1$  es la carga axial,  $F_2$  y  $F_3$  son los esfuerzos cortantes,  $M_1$  es el momento de torsión, y  $M_2$  y  $M_3$  son los momentos flectores.

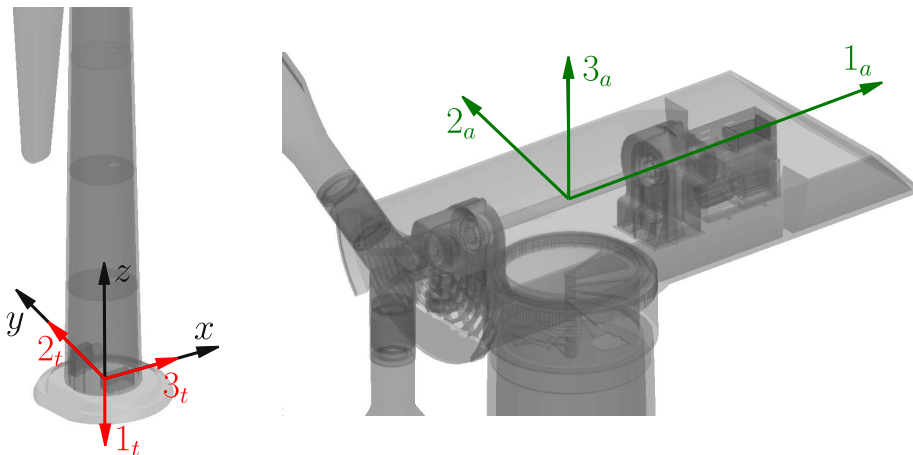


FIGURA 4.3: Bases de proyección: El global ( $xyz$ ), el asociado a las cargas de la torre ( $1_t 2_t 3_t$ ) y el asociado a las cargas del eje ( $1_a 2_a 3_a$ ).

Las galgas extensiométricas virtuales se han colocado en el LSS y en la torre. El LSS está fabricado en acero ( $E = 210$  GPa y  $\nu = 0.3$ ) con diámetros exterior e interior de 1.2 m y 0.12 m [85], respectivamente. El torsor externo  $\mathbf{t}$  se estima mediante un conjunto de galgas extensiométricas virtuales colocadas a 2.8 m a favor del viento

desde el vértice del cono de rotación. A su vez, el diámetro exterior de la base de la torre, donde están adheridas las galgas es de 6 m y el espesor de su pared es de 3.5 cm [85] y está fabricado en acero con las mismas propiedades mecánicas.

Para el análisis de los efectos individuales de las cargas, se introducen por separado los errores de posicionamiento de las galgas ( $\Delta\mathbf{p}$ ) y las cargas secundarias para detectar los casos más problemáticos. Se ha considerado que tanto las cargas primarias como las secundarias sean unitarias (fuerzas de 1 kN y momentos de 1 kN m) y un error de posicionamiento de las galgas de  $2^\circ$  (es decir,  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_3 = \Delta\delta_1 = \Delta\delta_3 = 2^\circ$ ). En las Figuras 4.4a a 4.4f se representa el efecto de cada carga secundaria en presencia de cada error de posicionamiento de las galgas al medir cada componente del torsor para el LSS, mientras que las Figuras 4.5a a 4.5f representan los mismos efectos para la torre.

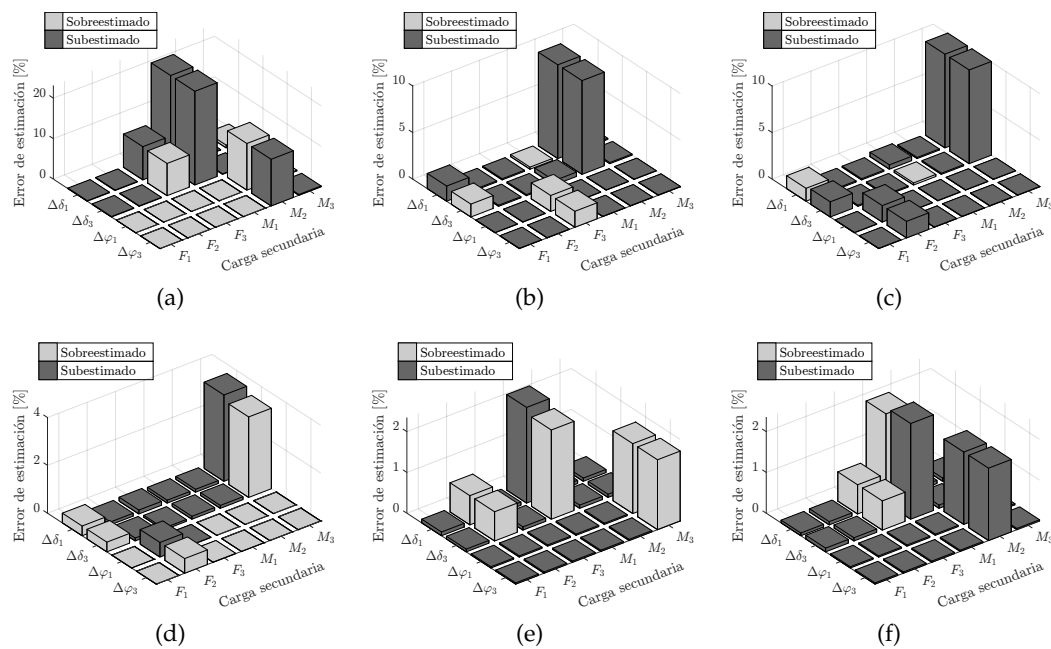


FIGURA 4.4: LSS: Efectos de las cargas secundarias en la medición de cargas primarias con puentes completos de Wheatstone en presencia de errores de posicionamiento en las galgas. (a)  $F_1$ , (b)  $F_2$ , (c)  $F_3$ , (d)  $M_1$ , (e)  $M_2$ , (f)  $M_3$ .

Los resultados de las Figuras 4.4 y 4.5 señalan los casos en los que la presencia de cargas secundarias es más perjudicial para la medición precisa de la carga primaria y se utilizan para cuantificar su efecto individual con cargas unitarias y errores de posicionamiento de  $2^\circ$ .

Comparando la Figura 4.4 con la Figura 4.5, se observa que la geometría de la sección transversal determina la altura de las barras de sensibilidad de los efectos individuales. De hecho, aunque ambas son secciones circulares, en el caso de la torre es una sección hueca de pared muy fina, mientras que en la sección del LSS el diámetro interior es muy pequeño y se comporta casi como una sección sólida.

Esta diferencia en la geometría de la sección puede observarse significativamente en la medición de la carga axial  $F_1$ . Como se muestra en la Figura 4.4a, en presencia

del momento de torsión ( $M_1$ ), en el LSS se subestima fuertemente si existen errores positivos en  $\Delta\delta_i$ . En cambio, cuando se mide la carga axial soportada por la torre, la influencia del momento de torsión  $M_1$  es significativamente menor. Esta diferencia se debe a las propiedades geométricas de las secciones: mientras que en la sección casi maciza del LSS la carga axial unitaria no produce valores de deformación elevados, en la sección de pared fina de la torre la misma carga axial unitaria produce valores de deformación más elevados que no se ven afectados por la deformación producida por el momento de torsión  $M_1$ . Entonces, para la medición de la carga axial de la torre la presencia de una fuerza cortante  $F_3$  es la que más afecta.

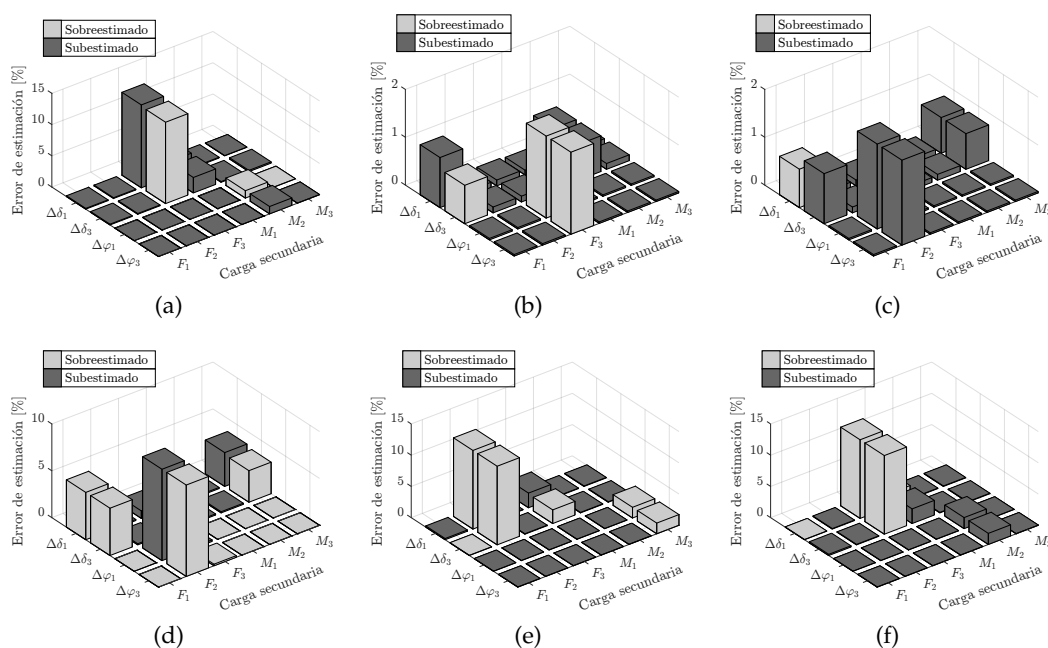


FIGURA 4.5: Torre: Efectos de las cargas secundarias en la medición de cargas primarias con puentes completos de Wheatstone en presencia de errores de posicionamiento en las galgas. (a)  $F_1$ , (b)  $F_2$ , (c)  $F_3$ , (d)  $M_1$ , (e)  $M_2$ , (f)  $M_3$ .

En cuanto a la estimación de las fuerzas cortante, en el LSS las cargas  $M_2$  y  $M_3$  son las cargas secundarias que más perturban la medición de  $F_2$  y  $F_3$ , respectivamente, produciendo errores de alrededor del 10 % cuando existen errores en  $\Delta\delta_i$ . Este efecto perturbador no se produce en la torre, donde la presencia de cualquier carga secundaria produce un error inferior al 2 % para cualquier error de posicionamiento.

La estimación de momentos en presencia de cargas secundarias con errores de posicionamiento es, en general, más perjudicial para la sección de la torre que para la sección de la LSS. En el caso de la torre, la presencia de esfuerzos cortantes perturba las mediciones de momentos flectores, con errores de hasta el 10 % en  $M_2$  y  $M_3$  en presencia de  $F_2$  y  $F_3$ , respectivamente, cuando existen errores de posicionamiento en  $\Delta\delta_i$ . A su vez, la medición del momento torsor se ve especialmente afectada por la presencia de la fuerza cortante  $F_2$  si existen errores en  $\Delta\varphi_i$ . Por otro lado, la estimación de momentos en el LSS es robusta a los errores de posicionamiento en el pegado de las rosetas, como se muestra en las Figuras 4.4d, 4.4e, y 4.4f, donde



los errores máximos no superan el 4 % con cualquier error de posicionamiento y en presencia de cualquier carga secundaria.

Las Figuras 4.4 y 4.5 también pueden ser útiles para detectar qué tipo de cargas producen mayores perturbaciones en la estimación de las cargas en cada sección del aerogenerador. En el caso del LSS, los mayores errores se producen por la presencia de momentos en todos los casos desde la Figura 4.4a hasta la Figura 4.4f. Por el contrario, los esfuerzos cortantes  $F_2$  y  $F_3$  son las cargas que más perturban la estimación de las cargas en la torre como se muestra en las Figuras 4.5a-4.5f.

### 4.3.3. Efectos combinados en una simulación de un aerogenerador

En el caso real de un aerogenerador, todas las posibles cargas secundarias aparecen al mismo tiempo. Para completar el análisis, se han tomado valores realistas de las cargas a partir de una simulación con la herramienta de código abierto OpenFAST 3.0. del mencionado aerogenerador de eje horizontal NREL de 5-MW.

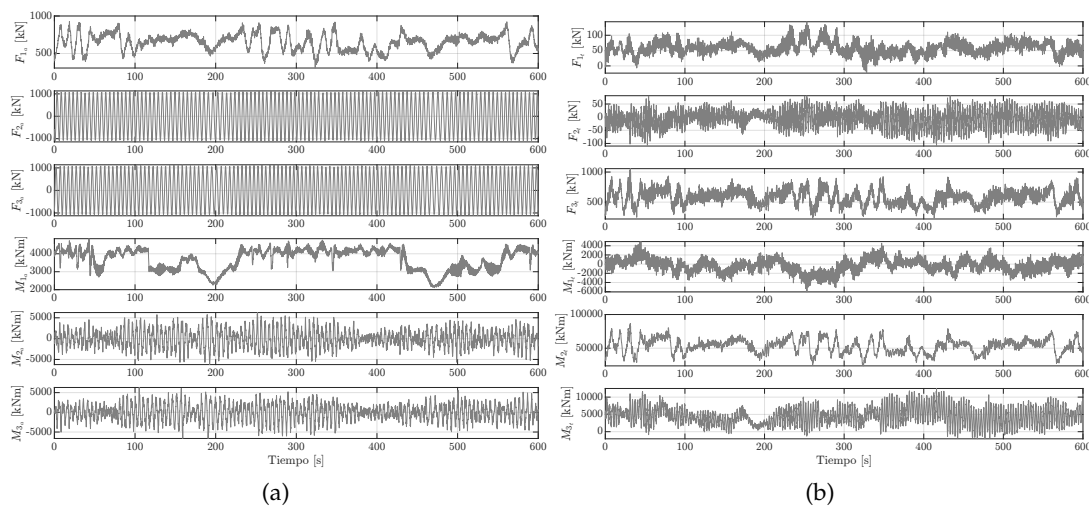


FIGURA 4.6: Datos de las series temporales de las componentes de carga del torsor. (a) LSS y (b) base de la torre.

Se ha realizado una simulación con una velocidad de viento de 12 m/s con categoría de turbulencia B [86]. La máquina funciona a la velocidad nominal del viento girando cerca de la velocidad angular nominal. En este caso, el control de par y el control de *pitch* se alternan en función del valor de la velocidad del viento. Las Figuras 4.6a y 4.6b muestran los datos de las series temporales de las componentes del torsor obtenidas a partir de simulación para el LSS y la base de la torre, respectivamente. Para reproducir que las configuraciones de galgas extensiométricas en la base de la torre han sido adheridas una vez instalado el aerogenerador en un parque eólico, a las series temporales de las componentes del torsor, mostradas en la Figura 4.6b, se les ha sustraído el valor de las componentes del torsor obtenidas en la simulación de OpenFAST a una velocidad de viento de 0 m/s.

Carga						
Sección	$F_1$ [kN]	$F_2$ [kN]	$F_3$ [kN]	$M_1$ [kN m]	$M_2$ [kN m]	$M_3$ [kN m]
LSS	661	761	760	3741	-2102	-2095
Torre	62	-31	588	-1447	54382	5223

TABLA 4.6: Valores RMS con signo de las componentes del torsor obtenidas en la simulación con OpenFAST 3.0.

Los valores RMS de las componentes del torsor se muestran en la Tabla 4.6 para dicho escenario de velocidad de viento y las secciones del LSS y la torre. Aunque el signo de un valor RMS es siempre positivo, en los casos con un valor medio negativo el valor RMS se ha cambiado a negativo. En dichas condiciones de operación, los valores numéricos de los coeficientes de primer orden de la aproximación de Taylor de la Ecuación 4.12 se representan en la Figura 4.7.

Además, la Figura 4.7 ayuda a comprender qué errores de posicionamiento son críticos para cada estimación de carga, tanto en el LSS como en la torre. Se observa que, para el LSS, los errores en  $\Delta\delta_i$  son más perjudiciales que los errores en  $\Delta\varphi_i$ . En cambio, en la torre los valores más altos de los coeficientes aparecen con errores en  $\Delta\varphi_i$ . Como se concluyó en el análisis anterior de la Figura 4.4, en el LSS la medida de  $F_1$  parece ser la más sensible a los errores en  $\Delta\delta_i$ . Este hecho también puede explicarse observando los valores de carga de la Tabla 4.6, donde la carga más alta es el momento torsor  $M_1$ . Además, este momento torsor aumentará fuertemente para velocidades de viento más altas, lo que aumentará los valores de estos coeficientes.

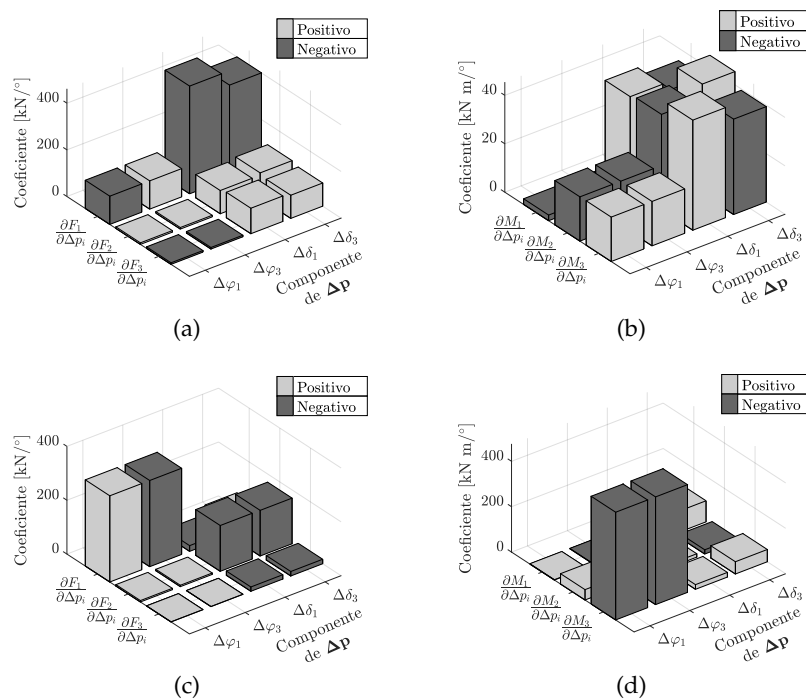


FIGURA 4.7: Valores numéricos del Jacobiano  $\left(\left[\frac{\partial \hat{t}_k}{\partial \Delta \mathbf{p}}\right]_0\right)$  de la Ecuación 4.12. Los valores de (a) y (b) se calculan para el LSS y los valores de (c) y (d) para la torre, ambos con una velocidad de viento de 12 m/s.

Respecto a la torre, de la Figura 4.5 se había concluido que los esfuerzos cortantes  $F_2$  y  $F_3$  eran los más perturbadores al considerar las cargas unitarias, pero la Tabla 4.6 muestra que estos esfuerzos son bajos y su efecto es despreciable al aplicar cargas con valores realistas. Cabe destacar que en las Figuras 4.4 y 4.5 se refiere a cargas unitarias, pero para el caso de aplicación de un aerogenerador, las cargas no son unitarias y algunas de ellas son mucho más grandes que el resto. Por lo tanto, para los valores de las cargas que se tienen, se tiene más incertidumbre por otros efectos que por los observados en las Figuras 4.4 y 4.5.

En cambio, el valor del momento flector  $M_2$  es un orden de magnitud mayor que los otros momentos y es la carga más alta del torsor. En consecuencia, las barras más altas de las Figuras 4.7c y 4.7d se producen por el alto valor de  $M_2$ . Este hecho se puede comprobar en el Apéndice B, que muestra las expresiones analíticas de los coeficientes de la Ecuación 4.12.

#### 4.3.4. Simulación de Montecarlo para valores de posicionamiento de las galgas

El siguiente progreso en el análisis de los resultados numéricos se ha realizado mediante una simulación de Montecarlo. Los errores de posicionamiento ( $\Delta p$ ) se toman aleatoriamente y se estiman las cargas en presencia de las condiciones de velocidad de viento mencionadas. Se han realizado un total de 300 simulaciones de 1000 muestras cada una, suponiendo que los errores de posicionamiento de las galgas siguen una distribución normal de media cero y desviación estándar de  $1^\circ$ . El valor analizado para la medición de la incertidumbre es el cociente de la desviación estándar de cada carga dividido por el valor RMS de la propia carga, lo que se conoce como *desviación estándar relativa* ( $RSD = \frac{\sigma_{i_k}}{|\hat{t}_k^{RMS}|} \cdot 100$ ). En la Figura 4.8 se han representado los resultados de la simulación de Montecarlo tanto para el LSS como para la torre.

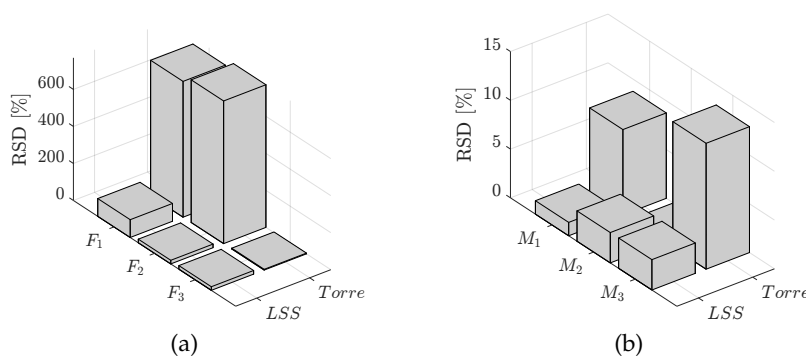


FIGURA 4.8: Desviación estándar relativa calculada a partir de los resultados de la simulación de Montecarlo.

De la Figura 4.8a se puede observar que el RSD al estimar  $F_1$  y  $F_2$  en la torre es terriblemente desalentador mostrando un error superior a 700%. Comprobando los coeficientes del Apéndice B, las estimaciones tanto de  $F_1$  como de  $F_2$  dependen de  $M_2$  y, en consecuencia, se ven afectadas por su alto valor respecto a los pequeños valores

de  $F_1$  y  $F_2$  (Tabla 4.6). El momento flector  $M_3$  de la torre también se ve afectado por  $M_2$ , pero el valor RMS es menor (aproximadamente 13%) ya que la magnitud de  $M_3$  es relativamente mayor que las de  $F_1$  y  $F_2$ . Por otro lado, la fuerza de  $F_3$  y el momento  $M_1$  soportado por la torre, que no dependen de  $M_2$ , muestran valores de RSD inferiores al 9%.

En cuanto al LSS, la medición de  $F_1$  muestra un valor de RSD de aproximadamente 100%, causado por la presencia del momento  $M_1$ . La estimación de las fuerzas de cortadura muestran una RSD de aproximadamente 20% y la medición de los momentos es menos sensible a los errores de posicionamiento de las galgas, ya que la RSD no supera los 4%.

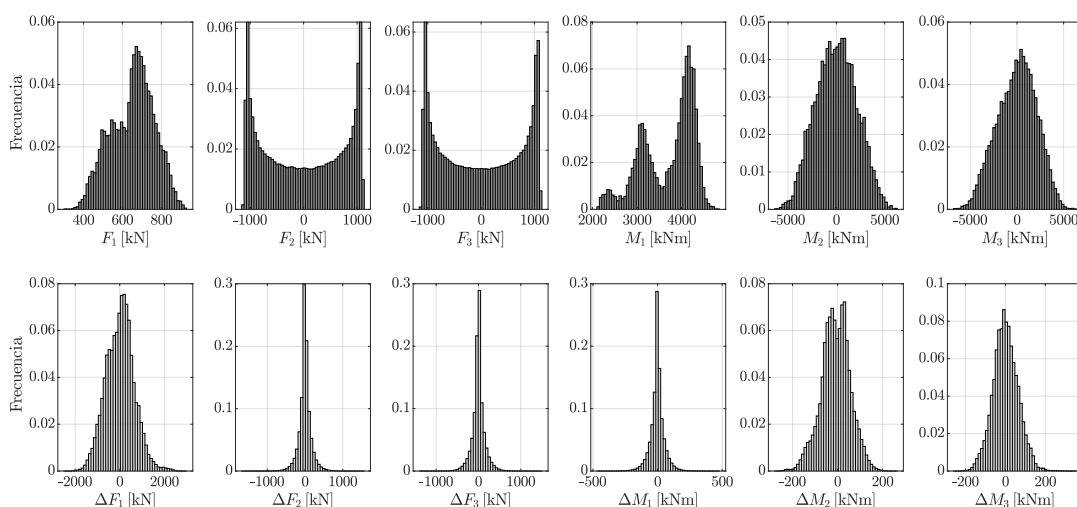


FIGURA 4.9: LSS: Histogramas normalizados de los valores de las componentes del torsor y de los errores de estimación de las componentes del torsor obtenidos mediante la simulación de Montecarlo.

Hasta ahora, los resultados numéricos se han calculado utilizando únicamente los valores RMS de las cargas obtenidas de la simulación de OpenFAST. Ahora se va a ampliar el análisis teniendo en cuenta los valores de las cargas en cualquier instante de tiempo durante la simulación. Así, los resultados adicionales de la simulación de Montecarlo para la LSS y la torre se representan en las Figuras 4.9 y 4.10, respectivamente. En la primera fila se representan los histogramas normalizados de los datos de las series temporales de las componentes del torsor, y en la segunda fila los histogramas normalizados de los errores de estimación de las componentes del torsor ( $\Delta \hat{\mathbf{t}} = (\Delta \hat{F}_1, \Delta \hat{F}_2, \Delta \hat{F}_3, \Delta \hat{M}_1, \Delta \hat{M}_2, \Delta \hat{M}_3)$ ) obtenidos a partir de la simulación de Montecarlo. El valor analizado para la medición de la incertidumbre es el cociente entre la desviación estándar del error en la estimación de las componentes del torsor y la desviación estándar de los datos de la serie temporal de las componentes del torsor obtenida mediante las simulaciones de OpenFAST ( $\sigma_{ratio} = \frac{\sigma_{\Delta \hat{t}_k}}{\sigma_{t_k}} \cdot 100$ ).

Observando los resultados obtenidos para la LSS representados en la Figura 4.9, es notable concluir que los errores de estimación en los 3 momentos ( $\Delta \hat{M}_1, \Delta \hat{M}_2, \Delta \hat{M}_3$ ) son mucho menores que en las 3 fuerzas ( $\Delta \hat{F}_1, \Delta \hat{F}_2, \Delta \hat{F}_3$ ). Destaca sobre todo el error cometido en la estimación de la fuerza axial  $F_1$ , donde el valor del  $\sigma_{ratio}$  asciende al 590%, mientras que para la estimación de los momentos es inferior al 8%. La

distribución de los datos de las series temporales de las fuerzas  $F_2$  y  $F_3$  obtienen esta forma porque son señales sinusoidales y hay muchas mediciones cerca de los picos máximos y mínimos. Para esas fuerzas  $F_2$  y  $F_3$ , el  $\sigma_{ratio}$  es de aproximadamente 19%.

En cuanto a los histogramas obtenidos para la torre representados en la Figura 4.10, como se ha comentado anteriormente, a las series temporales de los valores de las componentes del torsor se les han sustraído los valores de las componentes del torsor obtenidos en la simulación de Montecarlo con una velocidad de viento de 0 m/s. Así, los histogramas representados en la primera fila de la Figura 4.10 muestran las variaciones de las componentes del torsor en la torre. Al igual que en LSS, en la torre, el error en la estimación de la fuerza axial  $F_1$  es el mayor de todos en presencia de errores de posicionamiento, con un  $\sigma_{ratio}$  superior al 2200%. En cuanto al error en la estimación de la fuerza cortante  $F_2$ , su estimación depende del alto valor de  $M_2$  (como la fuerza axial  $F_1$ ), por lo que el  $\sigma_{ratio}$  asciende al 810%. Sin embargo, el error en la estimación de  $F_3$  y  $M_3$  también es elevado, aunque mucho menor que las cargas anteriores, siendo su  $\sigma_{ratio}$  de alrededor del 19% y 26%, respectivamente. Finalmente, cuando existen errores de posicionamiento en la instalación de las galgas, los menores errores en la estimación se producen para las componentes del torsor  $M_1$  y  $M_2$ , con valores de RSD inferiores al 9%. Esto es debido a que sus estimaciones no dependen del momento flector  $M_2$  y no se ven afectadas en gran medida.

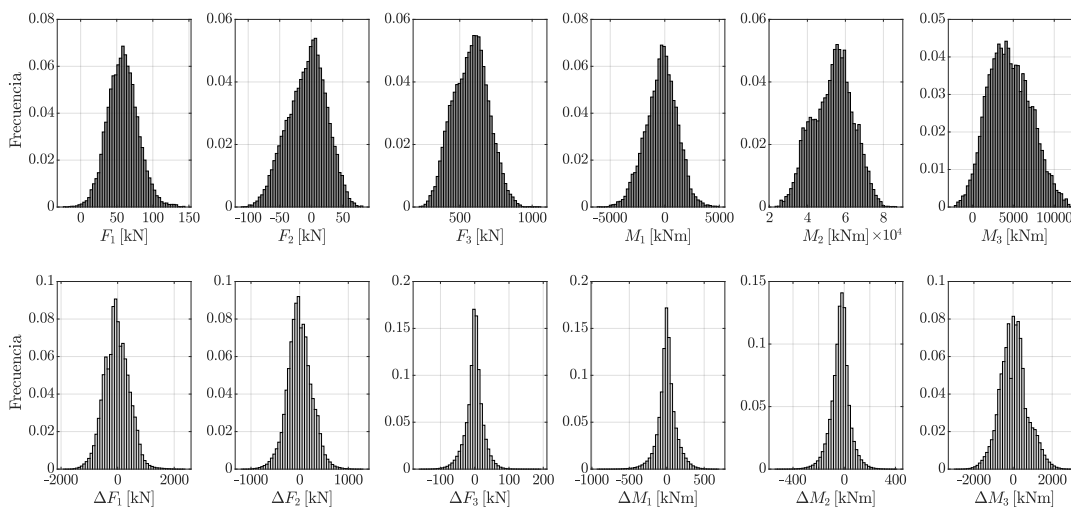


FIGURA 4.10: Torre: Histogramas normalizados de los valores de las componentes del torsor y de los errores de estimación de las componentes del torsor obtenidos mediante la simulación de Montecarlo.

En resumen, desde el punto de vista de la sensibilidad, los conocidos puentes completos de Wheatstone son útiles para medir algunas de las cargas del LSS y de la torre de un aerogenerador, pero no para estimar el torsor completo debido al efecto de interacción entre cargas, comúnmente referido como *cross-talk*. Este efecto se refiere a la interacción de las cargas secundarias en la estimación de las cargas primarias, lo cual puede llevar a imprecisiones en la estimación. En concreto, los momentos ejercidos en el LSS y las componentes  $F_3$ ,  $M_1$  y  $M_2$  de la torre pueden estimarse con una precisión aceptable. En cambio, la estimación de algunas otras cargas, especialmente las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  de la torre, son inaceptables si existen errores en el posicionamiento de las galgas extensiométricas.

## 4.4. Resumen del Capítulo 4

En el Capítulo 4 se ha realizado un análisis de sensibilidad para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección transversal circular. En primer lugar, se ha determinado la relación inversa para la estimación de las cargas mecánicas de las seis configuraciones típicas, la configuración de 6 galgas para estimar  $\mathbf{t}$  y finalmente la configuración de 8 galgas para estimar  $\mathbf{t}$  y compensar  $\varepsilon_T$ . A pesar de que el análisis de sensibilidad desarrollado puede aplicarse a cualquier configuración de galgas, tan sólo se ha aplicado a las configuraciones típicas que se emplean en la actualidad, pues se considera que pueden obtenerse unas conclusiones con mayor alcance.

Seguidamente, a partir de la expresión de la deformación de una galga situada arbitrariamente en términos del tensor externo obtenida en el Capítulo 2, se ha obtenido una expresión analítica de la estimación de las cargas en términos de los parámetros con incertidumbre por medio de desarrollos de Taylor de segundo orden. Para este análisis se han considerado dos fuentes de incertidumbre posibles: los parámetros geométricos y de material del eje ( $\mathbf{q}$ ), y los parámetros de posicionamiento de las galgas extensiométricas ( $\mathbf{p}$ ). A su vez, se ha obtenido una expresión para la varianza del estimador de la carga  $\hat{t}_k$  debido al ruido de medición de las deformaciones. Se ha podido comprobar que la compensación de la deformación térmica no se ve afectada por el erróneo posicionamiento de las galgas, ni por la incertidumbre de ningún parámetro geométrico o del material. Esto se debe a que la deformación térmica es un efecto isotrópico y afecta a las galgas independientemente de la posición y orientación en la que se adhieran al eje.

En resumen, se ha realizado un análisis de sensibilidad para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección transversal circular utilizando distintas configuraciones de galgas. A través de desarrollos analíticos, se han considerado incertidumbres de parámetros geométricos, de material y de posicionamiento de las galgas, destacando que la deformación térmica no es afectada por estas incertidumbres. Además, se ha profundizado en la propagación de incertidumbre aplicando análisis en un aerogenerador real, específicamente el NREL 5-MW, abarcando desde parámetros geométricos hasta simulaciones de Montecarlo en distintas secciones como el LSS y la base de la torre.

## CAPÍTULO 5

---

## CALIBRACIÓN ESTÁTICA DE UNA CONFIGURACIÓN DE 8 GALGAS

---

**L**A estimación de cargas mediante el uso de galgas extensiométricas es uno de los métodos más comunes en la actualidad para la monitorización de componentes mecánicos, especialmente en secciones cilíndricas, dada la facilidad de adherirlas a superficies curvas. Las configuraciones de galgas típicas emplean dos o cuatro sensores que conectados en forma de puente de Wheatstone permiten estimar las cargas que se deseen. Estas configuraciones son más que conocidas en la literatura y permiten estimar cargas individualmente, sin la influencia del resto de cargas presentes. Por lo general, la calibración de estas configuraciones es prácticamente inexistente, ya que los softwares para la adquisición de datos ya tienen integrada la calibración, y tan sólo requieren de un experimento en vacío. Sin embargo, otro tipo de configuraciones, como las novedosas configuraciones obtenidas en el Capítulo 2 de esta tesis, requieren de una minuciosa calibración para su correcto y preciso funcionamiento.

Por ello, en el presente Capítulo, se aborda la calibración estática de una configuración óptima formada por 8 galgas extensiométricas para la estimación del torsor completo y compensación de la deformación térmica. Este método va a permitir una comprensión más profunda del procedimiento de calibración para esta configuración novedosa, estableciendo un marco sólido que podrá ser aplicable a otros sistemas en los que se utilicen múltiples sensores.

### 5.1. Características del banco de ensayos

La calibración de galgas extensiométricas es una tarea clave para la obtención precisa de medidas, especialmente en aplicaciones que requieren una monitorización continua y fiable. Sin embargo, la implementación de un sensor y su posterior

calibración en un entorno real, como puede ser un aerogenerador, presenta ciertos desafíos y limitaciones. Ante esto, basada en varias consideraciones prácticas y económicas, se ha optado por instalar la configuración de galgas en un eje circular a escala.

Primero, la instalación de las galgas en un aerogenerador real no es complicada debido a riesgos inherentes, sino más bien por la dificultad de obtener el permiso de la empresa propietaria del aerogenerador para acceder e instalar el equipamiento. Y segundo, los costos podrían ser elevados ya que habría que detener el aerogenerador para instalar las galgas y posteriormente mediante una maniobra de Idling, por ejemplo, realizar la calibración. En contraste, el uso de un eje a escala proporciona un entorno más controlable y manejable, permitiendo una experimentación más flexible y económica. Así, el uso del eje a escala puede facilitar la investigación y permitir también la exploración de las técnicas de calibración, manteniendo al mismo tiempo una relevancia escalable a los aerogeneradores reales.

En cuanto a las características, el banco de ensayos está formado por un eje circular hueco empotrado en uno de sus extremos en un pilar fijo. Las galgas extensiométricas están situadas en la parte central del eje. La configuración de 8 galgas se ha instalado en la sección **A** representada en la Figura 5.1. En el extremo libre del eje se ha instalado un acoplamiento para la aplicación de las diferentes cargas mecánicas durante los ensayos de calibración.

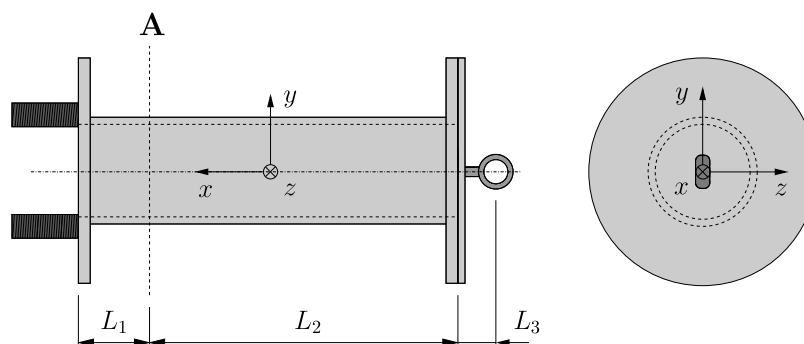


FIGURA 5.1: Esquema del eje principal.

La configuración óptima de 8 galgas instalada es aquella obtenida en el Capítulo 2 que permite estimar el torsor completo simultáneamente con la mínima varianza de estimación posible. Las posiciones y orientaciones de las galgas son aquellas recogidas en la Ecuación 2.68 y representadas en la Figura 5.2.

El banco de ensayos no permite la aplicación de momentos flectores individualmente. La única forma de aplicar un momento flector es a partir de la aplicación de una fuerza cortante. Esto significa que entre los dos esfuerzos existe una relación lineal y por tanto, variarán proporcionalmente con la distancia de aplicación del esfuerzo cortante. Como se verá en Secciones posteriores para poder definir la contribución de cada galga en la estimación del esfuerzo cortante y momento flector, respectivamente, se necesitan realizar al menos dos experimentos de calibración en los que la relación cortante/flector sea distinta. Es aquí cuando nace la necesidad de prolongar el eje, mediante una extensión del mismo, para poder ejercer una relación cortante/flector diferente al eje.



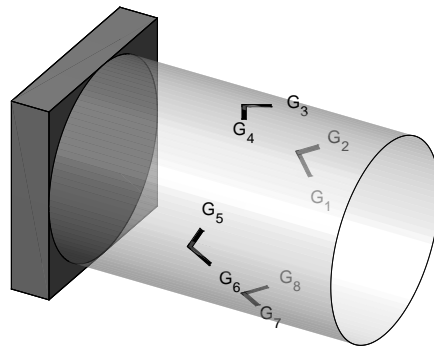


FIGURA 5.2: Configuración óptima de 8 galgas instalada en el eje a escala.

Esta extensión del eje consiste en un eje circular hueco y dos discos soldados en sus extremos, de modo que pueda unirse al eje principal y al acoplamiento para la aplicación de las cargas mecánicas. Un esquema de la extensión del eje se representa en la Figura 5.3.

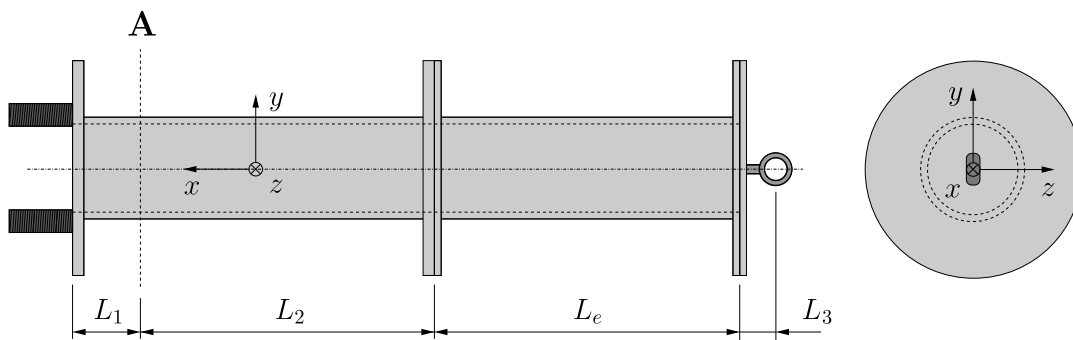


FIGURA 5.3: Esquema de la extensión del eje.

Asimismo, el eje principal y la extensión del mismo se representan en las Figuras 5.4a y 5.4b, respectivamente. En ellas, se pueden observar el sistema empleado para realizar el empotramiento del eje principal, así como el cáncamo que servirá para la aplicación de las cargas en los diferentes experimentos

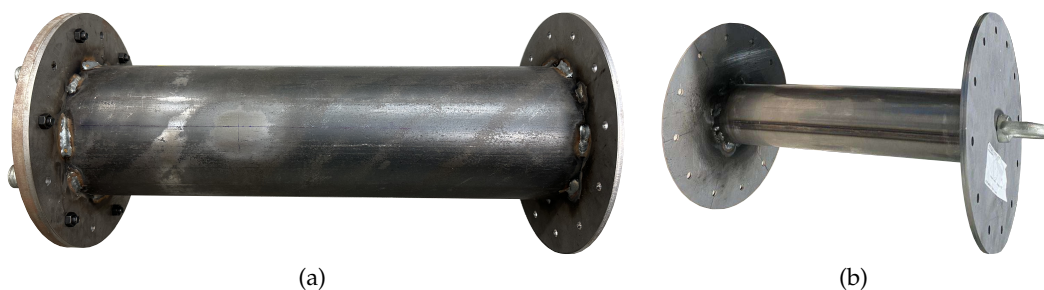


FIGURA 5.4: Componentes principales del banco de ensayos. (a) Eje principal.  
(b) Extensión del eje.

### 5.1.1. Parámetros geométricos y estructurales de los ejes

Las longitudes del eje principal son  $L_1 = 173$  mm,  $L_2 = 327$  mm y  $L_3 = 33$  mm. Ambos ejes huecos han sido fabricados mediante extrusión para evitar posibles tensiones residuales por el cordón de soldadura. El eje principal tiene un radio exterior de  $R = 69.85$  mm y  $r = 65.85$  mm, mientras que la extensión del eje tiene un radio exterior de  $R_e = 40$  mm y un radio interior de  $r_e = 38$  mm. En cambio, la longitud  $L_e$  de la extensión del eje puede ser cualquiera, en esta ocasión se ha escogido la longitud exacta para que, en los experimentos de calibración con y sin extensión, la proporcionalidad entre ellos sea el doble. Esto conlleva a que  $L_e$  tome el valor:

$$L_e = L_2 + L_3 = 360 \text{ mm} \quad (5.1)$$

En cuanto al material de fabricación se refiere, ambos ejes son de acero al carbono (EN10216) con  $E = 210$  GPa y  $\nu = 0.3$ , y los parámetros estructurales que definen la geometría del eje principal resultan ser los siguientes:

$$A = \pi (R^2 - r^2) = 1.7053 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2 \quad (5.2a)$$

$$\omega = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4R} = 2.7441 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^3 \quad (5.2b)$$

$$I_p = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2} = 7.8572 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4 \quad (5.2c)$$

$$m = \frac{r}{R} = 0.9427 \quad (5.2d)$$

$$\kappa(m, \nu) = 0.5314 \quad (5.2e)$$

### 5.1.2. Instalación de las galgas y sistema de adquisición

Las galgas extensiométricas empleadas en este estudio son rosetas en Y, fabricadas por HBM, una de las marcas líderes en este campo. Cada roseta está compuesta por tres rejillas de medición dispuestas en ángulos de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ . Sin embargo, para la aplicación que nos ocupa, la galga central orientada con un ángulo de  $45^\circ$  queda anulada y no se emplea, centrándose así la medición en las otras dos galgas. Con una resistencia nominal de  $350 \Omega$  y factor de galga  $k_G = 2.1$ , estas galgas están diseñadas para aplicaciones que requieren una alta precisión en la medición de deformaciones. En total, se han empleado 8 galgas para formar la configuración óptima, lo que equivale a 4 rosetas en Y.

El proceso de instalación de las galgas extensiométricas juega un papel importante, ya que la precisión en su posicionamiento y orientación afecta directamente a las medidas de deformación y por consiguiente a la estimación de las componentes del tensor. Por tanto, minimizar al máximo los errores en el posicionamiento de las galgas es esencial para reducir la incertidumbre en las estimaciones de carga. El proceso de instalación de las galgas en el eje se compone de las etapas representadas en la Figura 5.5 y resultan ser:

- a) Preparación de la superficie del eje a través del lijado y pulido, seguido del marcado de la posición de las rosetas en la periferia del eje.
- b) Determinación y marcado de la orientación de las rosetas en el eje.
- c) Pegado de las rosetas sobre eje, asegurando una adhesión correcta.
- d) Conexión de los dos terminales de cada galga al sistema de adquisición.



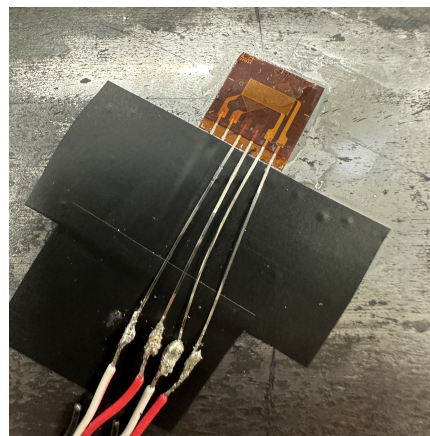
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 5.5: Proceso de instalación de las rosetas de galgas en el eje. (a) Preparación de la superficie y marcado de posiciones. (b) Marcado de la orientación. (c) Pegado de las rosetas. (d) Conexión.

Para la adquisición de las señales de las 8 galgas, se han utilizado dos módulos NI-9219, conectados al sistema de adquisición cDAQ-9185 de National Instruments. Cada módulo NI-9219 ofrece cuatro canales analógicos de entrada, que proporcionan una tasa máxima de muestreo de 100 Hz por canal y una resolución de 24 bits. El sistema cDAQ-9185, por su parte, sirve como la plataforma central que coordina la adquisición de datos de los dos módulos NI-9219 con el almacenamiento en el PC. Éste además presenta una característica muy práctica, ya que, a diferencia de los sistemas de adquisición más económicos que requieren formar el puente de Wheatstone externamente (empleando resistencias y una fuente de alimentación externa),

éste permite formar el cuarto de puente de Wheatstone para cada galga internamente, lo que permite la medición directa de los valores de deformación de las galgas.

Adicionalmente, se ha diseñado un programa a través del software LabView para gestionar la adquisición de datos de todas las galgas extensiométricas. Dicho programa ha sido configurado con una frecuencia de muestreo de 100 Hz. Para atenuar el ruido electrónico que podría afectar la calidad de las mediciones, se ha aplicado un filtro paso bajo a las señales de deformación de las galgas, con una frecuencia de corte de 40 Hz.



(a) NI-9219



(b) cDAQ-9185

FIGURA 5.6: Sistema de adquisición para la obtención de las medidas de deformación.

## 5.2. Experimentos de calibración

El objetivo principal de este Capítulo es la calibración de la configuración que incluye 8 galgas extensiométricas. Para lograrlo, se deben excitar las seis componentes del torsor  $t$ , lo que permitirá determinar cómo contribuye cada galga a la estimación de las distintas componentes del torsor externo. A continuación, se describen las características de los 4 experimentos de calibración que se van a llevar a cabo. Remarcar que todos ellos son experimentos estáticos y por tanto, las diferentes cargas serán aplicadas mediante la colocación de masas suspendidas en diferentes posiciones del eje.

### 5.2.1. Experimentos 1-2. Fuerza cortante y momento flector

En primer lugar, en los experimentos de fuerza cortante y momento flector, el eje se ha empotrado horizontalmente en un pilar fijo. En el eje, orientado según la base 123 (o  $xyz$ , ya que  $\theta = 0$ ), se ha aplicado una fuerza cortante  $F_2$ , tal y como muestra la Figura 5.7, en la dirección negativa del eje 2, lo que provoca un momento flector en la dirección positiva del eje 3.

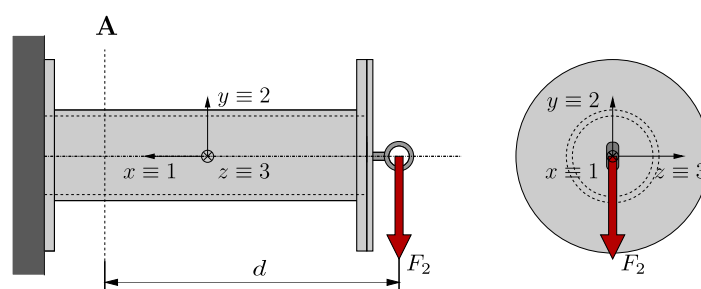


FIGURA 5.7: Experimento de calibración con aplicación de fuerza cortante en la dirección negativa del eje 2 y momento flector en la dirección positiva del eje 3.

Además de este experimento, se ha realizado otro adicional con otra orientación del eje, esto es, rotando  $180^\circ$  en la dirección del eje 1. Así, la fuerza cortante se ha aplicado en la dirección negativa del eje 3 que por tanto provoca un momento flector en la dirección negativa del eje 2. Se han realizado un total de 10 experimentos (5 por cada orientación de la fuerza cortante diferente), con masas desde 0 kg hasta 100 kg, cada 25 kg.

### 5.2.2. Experimentos 3-4. Fuerza cortante y momento flector con la extensión del eje

Como se ha mencionado anteriormente, la fuerza cortante y el momento flector aplicados al eje están acoplados. Es decir, la aplicación de un momento flector requiere de la aplicación de una fuerza cortante. Por esta razón, es necesario realizar un experimento adicional en el que la relación entre la fuerza cortante y el momento flector sea distinta. Para ello, se ha añadido la extensión del eje tal y como se muestra en la Figura 5.8. En el eje, orientado según la base 123, se aplica una fuerza cortante  $F_2$  en la dirección negativa del eje 2, lo que provoca un momento flector en la dirección positiva del eje 3.

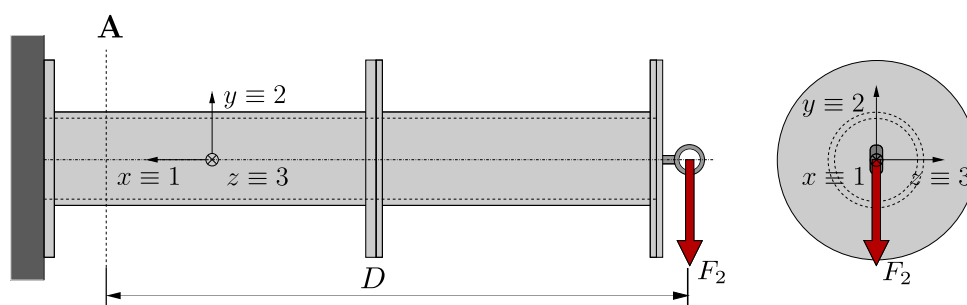


FIGURA 5.8: Experimento de calibración con aplicación de fuerza cortante en la dirección negativa del eje 2 y momento flector en la dirección positiva del eje 3, y extensión del eje.

Una vez más, se ha realizado un experimento adicional girando  $180^\circ$  en la dirección del eje 1. Se han realizado un total de 10 experimentos (5 por cada orientación de la fuerza cortante diferente), con masas desde 0 kg hasta 100 kg, cada 25 kg.

### 5.2.3. Experimento 5. Momento torsor

En el tercero de los experimentos consiste en aplicar un momento torsor al eje. Para ello, el eje se ha empotrado horizontalmente en un pilar fijo y por medio de una viga de perfil cuadrado se ha aplicado una fuerza excéntrica al eje. En el eje, orientado según la base 123, se ha ejercido una fuerza cortante  $F_2$  en la dirección negativa del eje 2, tal y como se muestra en la Figura 5.9. La fuerza cortante se aplica a una distancia  $L_T = 345\text{mm}$  del centro del eje, lo que provoca un momento torsor en la dirección negativa del eje 1 según  $M_1 = F_2 L_T$ . Nótese que además del momento torsor también se aplica un momento flector  $M_3$  en la dirección positiva del eje 3. Se han realizado un total de 5 experimentos, con masas desde 0 Kg hasta 100 Kg, cada 25 Kg.

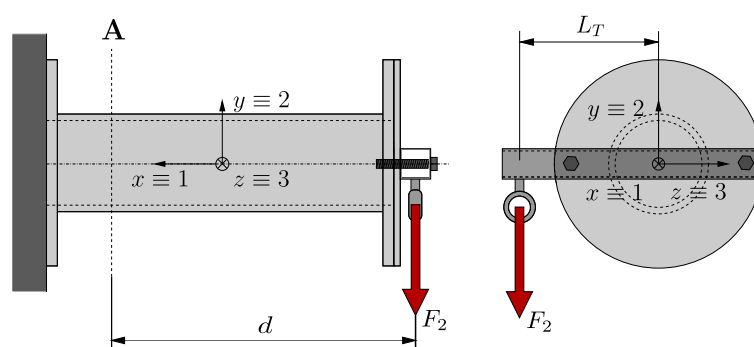


FIGURA 5.9: Experimento de calibración con aplicación de momento torsor en la dirección negativa del eje 1.

### 5.2.4. Experimento 6. Fuerza axial

Finalmente, en los experimentos en los que se aplica una fuerza axial, el eje se ha empotrado verticalmente en una viga fija. Al eje, orientado según la base 123, se le aplica una fuerza axial  $F_1$  en la dirección negativa del eje 1 tal y como se representa en la Figura 5.10. Se han realizado un total de 5 experimentos, con masas desde 0 kg hasta 100 kg, cada 25 kg.

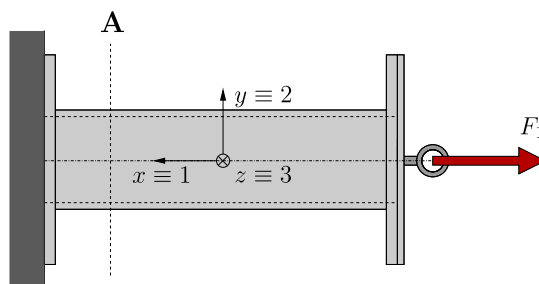


FIGURA 5.10: Experimento de calibración con aplicación de fuerza axial en la dirección negativa del eje 1. La Figura está rotada 90° en sentido antihorario.

### 5.2.5. Resultados de los experimentos de calibración

Cada experimento de calibración, representados todos ellos en la Figura 5.11, ha tenido una duración de 30 segundos con una frecuencia de muestreo de 100 Hz, resultando una serie temporal de 3000 medidas de deformación por galga para las diferentes cargas aplicadas. En primer lugar, para cada experimento y masa suspendida diferente, se ha calculado el valor medio de cada serie temporal de deformación de cada galga. A continuación, se ha realizado una regresión lineal de los valores medios de deformación de cada galga para las masas suspendidas diferentes, obteniendo así la ecuación de la recta que mejor se ajusta (siendo  $a_{ij}^0$  y  $b_{ij}^0$  la pendiente y offset de la recta de la galga  $i$ -ésima en el experimento de tipo  $j$ -ésimo, respectivamente).

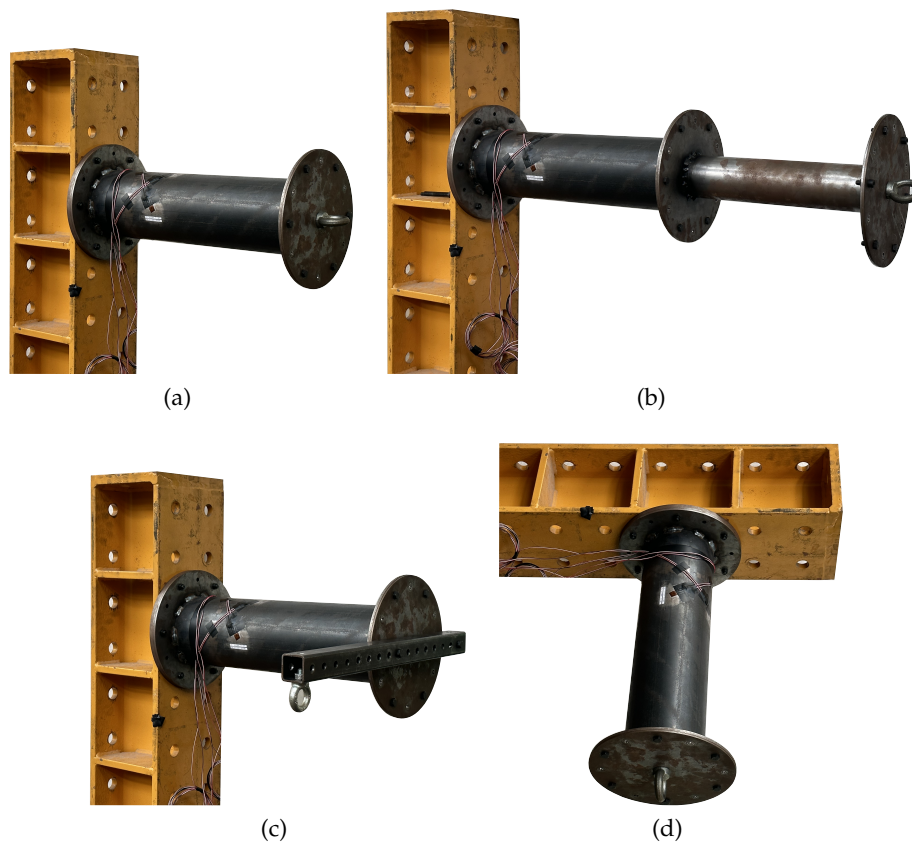


FIGURA 5.11: Experimentos de calibración (a) Fuerza cortante y momento flector. (b) Fuerza cortante y momento flector con extensión del eje. (c) Momento torsor. (d) Fuerza axial.

En una fase posterior, se ha restado el offset ( $b_{ij}^0$ ) a todos los valores medios de deformación de cada galga. Finalmente, se ha realizado de nuevo la regresión lineal de los valores medios de deformación de cada galga (sin el offset) para obtener la ecuación final de la recta (siendo  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  la pendiente y offset de la recta de la galga  $i$ -ésima en el experimento de tipo  $j$ -ésimo, respectivamente). Los valores medios de deformación de las galgas en cada experimento diferente y las rectas que mejor se ajustan a éstos son aquellos representados en la Figura 5.12.

En la próxima Sección se verá la relación que hay entre las pendientes de las regresiones lineales y las componentes de la matriz de observación ( $\mathbf{W}$ ), estableciendo una conexión entre las mediciones experimentales y el modelo matemático.

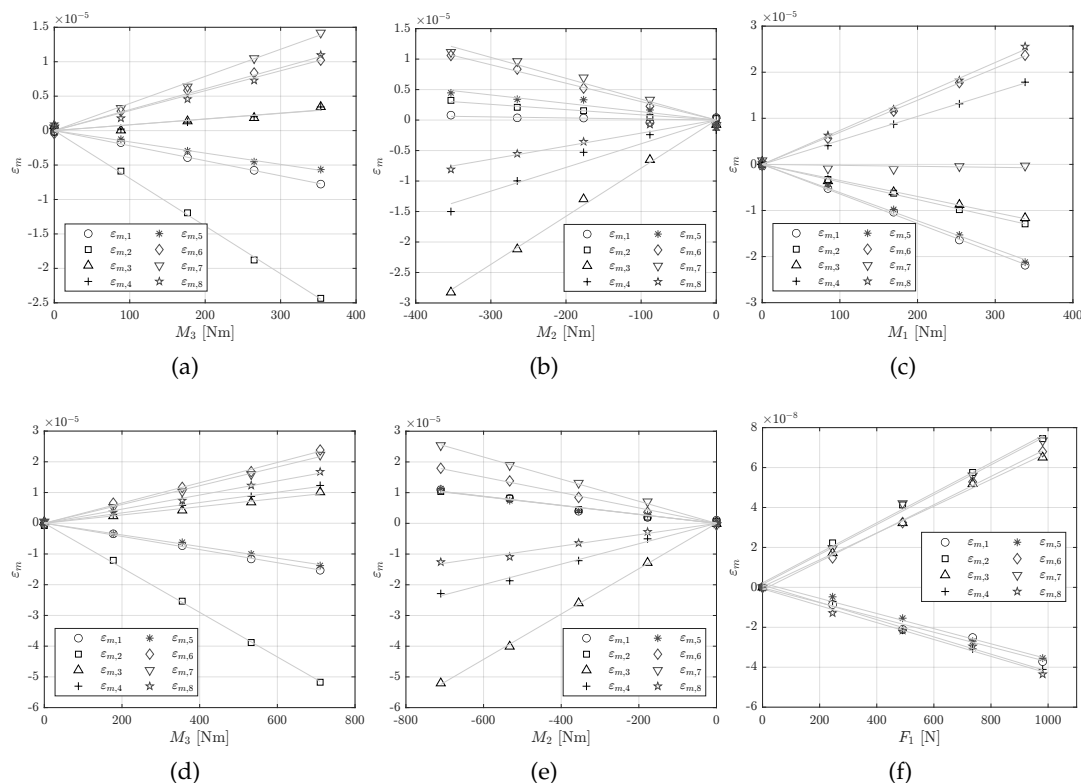


FIGURA 5.12: Valor medio de la deformación medida por cada galga en los experimentos de calibración. (a) Experimento 1. (b) Experimento 2. (c) Experimento 5. (d) Experimento 3. (e) Experimento 4. (f) Experimento 6.

### 5.3. Cálculo de la matriz de observación experimental

El proceso de obtención de la matriz de observación experimental involucra la tarea de relacionar las pendientes obtenidas de las galgas en los distintos experimentos con las componentes correspondientes de la matriz de observación analítica  $\mathbf{W}$ , tal como se describe en la Ecuación 2.33.

Agrupando en la matriz  $\mathbf{A}_{RL}$  las pendientes de las rectas de todas las galgas en los diferentes experimentos se tiene:

$$\mathbf{A}_{RL} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$



donde las dos primeras filas corresponden a los experimentos 1 y 2, las filas tercera y cuarta a los experimentos 3 y 4, la quinta fila al experimento 5, y la última fila al experimento 6.

De la Figura 5.12 es sencillo obtener la relación experimental entre la deformación medida por cada galga y los diferentes esfuerzos para cada uno de los experimentos de calibración. Por ejemplo, en el experimento 1 representado en la Figura 5.12a la relación lineal para la  $i$ -ésima galga resulta ser:

$$\varepsilon_{m,i} = a_{1i}M_3 = a_{1i}F_2d \quad (5.4)$$

donde  $d = L_2 + L_3$  es la distancia entre la sección del eje donde están posicionadas las galgas y el acoplamiento donde se aplica la carga.

En cambio, según el modelo analítico de la Ecuación 2.33, la deformación de la  $i$ -ésima galga debida a la fuerza cortante  $F_2$  y momento flector  $M_3$  resulta ser:

$$\varepsilon_i = -w_{i2}F_2 + w_{i6}M_3 = -w_{i2}F_2 + w_{i6}F_2d \quad (5.5)$$

Como se desea relacionar las deformaciones del modelo analítico con las deformaciones experimentales, igualando las Ecuaciones 5.4 y 5.5 se obtiene para la  $i$ -ésima galga:

$$a_{1i} = -\frac{w_{i2}}{d} + w_{i6} \quad (5.6)$$

Análogamente se puede realizar el mismo análisis para obtener la relación entre las pendientes de las galgas y las componentes de la matriz de observación ( $w_{ij}$ ) para el resto de experimentos, obteniendo así las relaciones de la Tabla 5.1.

Núm. Experimento	Cargas aplicadas	Pendiente de las $i$ -ésima galga
1	$-F_2, M_3$	$a_{1i} = -\frac{w_{i2}}{d} + w_{i6}$
2	$-F_3, -M_2$	$a_{2i} = -\frac{w_{i3}}{d} - w_{i5}$
3	$-F_2, M_3$	$a_{3i} = -\frac{w_{i2}}{D} + w_{i6}$
4	$-F_3, -M_2$	$a_{4i} = -\frac{w_{i3}}{D} - w_{i5}$
5	$-F_2, M_3, -M_1$	$a_{5i} = -\frac{w_{i2}}{L_T} - w_{i4} + \frac{w_{i6}d}{L_T}$
6	$F_1$	$a_{6i} = w_{i1}$

TABLA 5.1: Relación entre la pendiente de la regresiones lineales y las componentes de la matriz  $\mathbf{W}$ .

donde  $D = 2d = 2(L_2 + L_3)$  es la distancia entre la sección del eje donde están posicionadas las galgas y el acoplamiento donde se aplica la carga cuando se añade la extensión del eje.

Una vez establecida la relación lineal entre las pendientes de las galgas y las componentes de la matriz  $\mathbf{W}$ , ésta puede expresarse de forma matricial como:

$$\mathbf{A}_{RL} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{d} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{D} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_T} & 0 & -1 & 0 & \frac{d}{L_T} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} & w_{41} & w_{51} & w_{61} & w_{71} & w_{81} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} & w_{42} & w_{52} & w_{62} & w_{72} & w_{82} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} & w_{43} & w_{53} & w_{63} & w_{73} & w_{83} \\ w_{14} & w_{24} & w_{34} & w_{44} & w_{54} & w_{64} & w_{74} & w_{84} \\ w_{15} & w_{25} & w_{35} & w_{45} & w_{55} & w_{65} & w_{75} & w_{85} \\ w_{16} & w_{26} & w_{36} & w_{46} & w_{56} & w_{66} & w_{76} & w_{86} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

que expresada de forma compacta resulta ser:

$$\mathbf{A}_{RL} = \mathbf{B}\mathbf{W}_{exp}^T \quad (5.8)$$

donde  $\mathbf{W}_{exp}$  resulta ser la matriz de observación experimental y  $\mathbf{B}$  es la matriz que relaciona las pendientes  $a_{ij}$  de las galgas en los diferentes experimentos con las componentes de la matriz de observación experimental.

Así pues, resolviendo la Ecuación anterior se obtiene la matriz de observación experimental como:

$$\mathbf{W}_{exp} = \left[ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{RL} \right]^T \quad (5.9)$$

Evaluando la expresión de la Ecuación 5.9 se obtiene la siguiente matriz  $\mathbf{W}_{exp}$  numérica que a partir de las señales de deformación de las galgas servirá para obtener una estimación del torsor externo completo.

$$\mathbf{W}_{exp} = \begin{bmatrix} -0.42 & 3.33 & -92.29 & 412.64 & 273.83 & -209.48 \\ 0.74 & -23.14 & -42.12 & -341.35 & 202.95 & -757.01 \\ 0.78 & 36.72 & -36.41 & 435.42 & -688.01 & 185.51 \\ -0.43 & 59.96 & -40.44 & -432.59 & -276.19 & 251.39 \\ -0.44 & -18.86 & -6.99 & 440.85 & 156.84 & -215.75 \\ 0.73 & 18.30 & 36.71 & -378.72 & 200.45 & 354.89 \\ 0.72 & -63.36 & -12.43 & 432.01 & 377.22 & 217.76 \\ -0.44 & -43.14 & -20.66 & -434.66 & -156.70 & 169.88 \end{bmatrix} \cdot 10^{-10} \quad (5.10)$$

## 5.4. Validación

La validación de la matriz de observación experimental  $\mathbf{W}_{exp}$  representa una fase importante en la calibración de las galgas extensiométricas. Tras la calibración y la obtención de la matriz experimental, es esencial asegurar que esta matriz refleje con fidelidad el comportamiento real del sistema, y que sea robusta y precisa en condiciones variadas. Esta Sección está dedicada a la validación de  $\mathbf{W}_{exp}$ , en él se va a realizar un experimento de validación para evaluar si las cargas estimadas realmente se asemejan a las teóricamente aplicadas.

En el experimento de validación, el eje se ha rotado  $\theta = 30^\circ$  en la dirección positiva del eje  $x \equiv 1$ . Se ha aplicado una fuerza cortante  $F_y$ , en la dirección negativa del eje  $y$ , a una distancia  $L_{T, val} = 255$  mm del centro del eje, utilizando una viga de sección cuadrada como se muestra en la Figura 5.13. Esta fuerza se ha aplicado suspendiendo una masa de 80 kg. Como resultado de la fuerza cortante, adicionalmente se ha aplicado un momento flector  $M_z$  en la dirección positiva del eje  $z$ , y un momento torsor  $M_x$  en la dirección negativa del eje  $x$ .

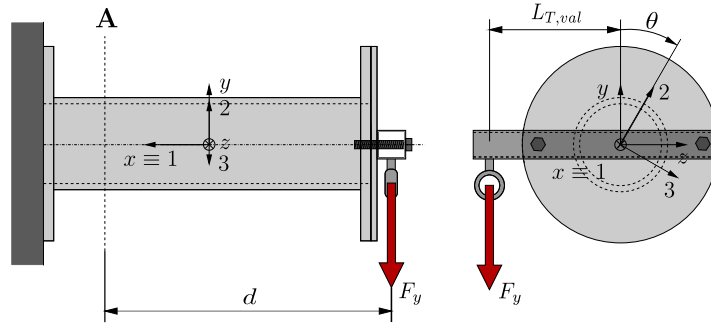


FIGURA 5.13: Experimento de validación.

Así pues, el torsor teórico aplicado sobre el eje en la base  $xyz$  resulta ser:

$$\{\mathbf{t}_{teo}\}_{xyz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -80g \\ 0 \\ -80gL_{T, val} \\ 0 \\ 80gd \end{Bmatrix}_{xyz} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ N} \\ -784.80 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -200.12 \text{ Nm} \\ 0 \text{ Nm} \\ 282.52 \text{ Nm} \end{Bmatrix}_{xyz} \quad (5.11)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria.

En cambio, la estimación del torsor externo,  $\hat{\mathbf{t}}$ , a partir de la matriz de observación experimental ( $\mathbf{W}_{exp}$ ) se calcula según la Ecuación 5.12:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{W}_{exp}^+(\boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (5.12)$$

donde  $\mathbf{W}_{exp}^+$  es la pseudoinversa de la matriz de calibración experimental,  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  son el vector de deformaciones de las 8 galgas, cuando se aplican cargas y en vacío, respectivamente. Así, el torsor externo estimado en la base 123 obtenido es:

$$\{\hat{\mathbf{t}}\}_{123} = \begin{Bmatrix} 16.60 \text{ N} \\ -701.41 \text{ N} \\ 404.96 \text{ N} \\ -205.53 \text{ Nm} \\ 143.52 \text{ Nm} \\ 248.59 \text{ Nm} \end{Bmatrix}_{123} \quad (5.13)$$

que a su vez, expresado en la base  $xyz$  resulta ser:

$$\{\hat{\mathbf{t}}\}_{xyz} = [\mathbf{R}]_{xyz}^{123} \{\hat{\mathbf{t}}\}_{123} = \begin{pmatrix} 16.60 \text{ N} \\ -809.91 \text{ N} \\ 7.46 \text{ N} \\ -205.53 \text{ Nm} \\ -2.71 \text{ Nm} \\ 287.59 \text{ Nm} \end{pmatrix}_{xyz} \quad (5.14)$$

Analizando el resultado obtenido, y calculando el error absoluto entre el torsor estimado  $\hat{\mathbf{t}}$  y el torsor teórico  $\mathbf{t}_{teo}$  en la base  $xyz$ , se puede observar como la estimación de los tres momentos es notablemente mejor que las tres fuerzas. Concretamente, el error absoluto cometido en la estimación de  $M_x$  es de 5.40 Nm, de 2.71 Nm en la estimación de  $M_y$  y de 4.52 Nm en la estimación de  $M_z$ . En cambio, el error cometido en la estimación de la fuerza axial  $F_x$  es de 16.60 N, y en las fuerzas cortantes  $F_y$  y  $F_z$  de 25.11 N y 7.46 N, respectivamente. Asimismo, calculando el error relativo entre la carga teórica y la estimada se tiene: un error de estimación del 3.1 % para la fuerza cortante  $F_y$ , un 2.6 % para el momento torsor  $M_x$  y un 1.7 % para el momento flector  $M_z$ .

Esto se debe principalmente a que el nivel de deformación causado por las 3 fuerzas resulta mucho menor que el causado por los 3 momentos, y por consiguiente resulta más difícil caracterizar la relación lineal entre carga y las medidas de deformación. Asimismo, otra de las razones por las que la estimación de las componentes del torsor no es del todo precisa se debe a pequeños e inevitables errores en el posicionamiento de las galgas extensiométricas. Como se ha podido concluir en el Capítulo 4 pequeñas incertidumbres en el posicionamiento de las galgas pueden repercutir gravemente en la estimación de las componentes del torsor.

## 5.5. Resumen del Capítulo 5

En el Capítulo 5 se ha presentado una metodología de calibración estática de una novedosa configuración de 8 galgas para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección circular. En una primera etapa, se ha fabricado un banco de ensayos formado por un eje de sección circular hueca para la calibración de la configuración de 8 galgas extensiométricas. Se han realizado un total de 6 experimentos de calibración diferente, donde en cada uno de ellos se han aplicado diferentes componentes del torsor. Concretamente, se realizaron dos experimentos con fuerza cortante y momento flector, dos experimentos con fuerza cortante y momento flector con el eje extendido, un experimento con momento torsor y un experimento con fuerza axial.

El rango de cargas aplicadas muestra en los resultados de los experimentos la linealidad entre la deformación medida y las cargas aplicadas, por lo que mediante una regresión lineal se han calculado las pendientes de las deformaciones de 8 galgas en los diferentes experimentos. La relación entre las pendientes de la configuración de 8 galgas y la matriz de calibración experimental se ha calculado atendiendo a las disposiciones geométricas de los experimentos realizados.

Una vez calculada la matriz de calibración experimental, se ha llevado a cabo un experimento para validar la metodología de calibración. Para ello, a partir de un nuevo experimento con momento torsor, fuerza cortante y momento flector, se han medido las deformaciones de las 8 galgas y a partir de la matriz de calibración experimental se han estimado las componentes del torsor.

En definitiva, en el Capítulo 5 se ha expuesto una metodología para la calibración de una nueva configuración de 8 galgas en ejes circulares, empleando un banco de ensayos y realizando varios experimentos. A partir de regresiones lineales, se ha establecido la relación entre deformaciones y cargas aplicadas, culminando en una matriz de calibración experimental. Finalmente, se ha realizado un experimento para la validación de la metodología de calibración y de la configuración de 8 galgas extensiométricas.



## CAPÍTULO 6

---

### CONCLUSIONES

---

**S**ON varias las conclusiones que se han obtenido del trabajo realizado en esta tesis doctoral. Éstas, pueden clasificarse en relación a cada uno de los Capítulos centrales de la tesis.

#### 6.1. Estimación óptima del torsor completo

En el Capítulo 2 se ha desarrollado una metodología para la obtención de nuevas configuraciones de galgas extensiométricas para la estimación del torsor externo completo en ejes de sección transversal circular.

En primer lugar, se ha desarrollado un modelo analítico que relaciona la deformación de una galga, su posición y orientación y las cargas mecánicas que se aplican al eje. Utilizando esta relación funcional entre la deformación de una galga y las cargas aplicadas sobre el eje, se ha desarrollado un procedimiento para determinar la posición y orientación óptima de un conjunto de galgas para estimar las seis componentes del torsor simultáneamente.

Para ello, se han empleado 3 criterios diferentes para la resolución de los problemas de optimización. El primero de ellos, el criterio D-Optimality es el mejor índice de observabilidad para maximizar la observabilidad del torsor, es decir, es el mejor índice de observabilidad para minimizar la varianza del torsor externo. El segundo es el criterio del Número de Condición que está directamente relacionado con la minimización del número de condición de la matriz de observabilidad, lo que permite maximizar el índice de observabilidad de las deformaciones. Finalmente, el tercero de los criterios, E-Optimality, es el mejor índice de observabilidad para minimizar la incertidumbre de la estimación de las deformaciones  $\hat{\varepsilon}$ . Así pues, de los tres criterios

de optimización empleados en este Capítulo el que mayor sentido tiene es el criterio D-Optimality, puesto que el principal objetivo es estimar el torsor externo con la mínima varianza posible.

Empleando los tres criterios e imponiendo diferentes restricciones en las optimizaciones, se han obtenido un total 36 nuevas configuraciones óptimas para la estimación del torsor completo. Los resultados muestran que es posible estimar las 6 componentes del torsor utilizando sólo 6 galgas extensiométricas, mientras que en la actualidad se utilizan 24 galgas (4 para cada componente del torsor). Se trata de una notable reducción del número de galgas que puede reducir sustancialmente el coste de las aplicaciones que requieren medir las 6 componentes del torsor. Sin embargo, el número de canales de medida se puede ver aumentado si se desea compensar la deformación a causa de efectos térmicos.

Si además de estimar las 6 componentes del torsor, se desea compensar la deformación térmica debida a posibles variaciones de temperatura, se deben emplear al menos 7 galgas. Puesto que se desean emplear parejas de galgas por medio de rosetas, todas las configuraciones óptimas que se han encontrado que permiten compensar la deformación térmica están formadas por 4 rosetas, es decir, 8 galgas extensiométricas.

En cuanto a las configuraciones obtenidas empleando el criterio D-Optimality se ha podido observar que si se emplean 6 galgas, siempre se posicionan tres parejas desfasadas  $120^\circ$  en el perímetro del eje. Sin embargo si se emplean 8 galgas, en la gran mayoría de casos se posicionan como cuatro parejas desfasadas cada  $90^\circ$ . Además, en ciertas configuraciones algunas de las galgas pueden desfasarse su posición azimutal sobre el eje un valor arbitrario. Con el objetivo de analizar la influencia que puede tener la posición longitudinal de las galgas en el eje, también se han resuelto problemas de optimización en los que las coordenadas  $x$  de las galgas puede tomar cualquier valor finito. Los resultados obtenidos reflejan que si se emplean 6 galgas, la posición longitudinal óptima es aquella en la que se sitúan en la misma sección del eje. No obstante, empleando 8 galgas se sitúan en dos secciones diferentes del eje, es decir, 4 de ellas en una sección y las otras 4 en otra sección diferente. Todo parece indicar que las configuraciones óptimas también mantienen una simetría en su posicionamiento en el eje. Asimismo, se ha podido ver que en algunas configuraciones las orientaciones óptimas de las galgas dependen del valor del módulo de Poisson  $\nu$ .

Una de las mejores formas de determinar el nivel de optimalidad de las configuraciones óptimas consiste en comparar la varianza de estimación de las componentes del torsor entre diferentes configuraciones óptimas. Por ello, a lo largo del Capítulo se ha establecido qué configuraciones permiten estimar el torsor con la mínima varianza posible.

Por otro lado, en lo que respecta a las configuraciones óptimas obtenidas mediante el criterio del Número de Condición se han empleado las mismas restricciones para los problemas de optimización. Es decir, el número de galgas a emplear puede ser 6 u 8, se impone el uso de rosetas de galgas desfasadas  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , y las galgas pueden posicionarse en cualquier sección o se impone que se sitúen en una misma sección del eje. Los resultados reflejan que pueden obtenerse una serie de configuraciones óptimas que permitan estimar el torsor maximizando el índice de observabilidad de



las deformaciones. A diferencia de las configuraciones obtenidas con el criterio D-Optimality, las orientaciones óptimas de las galgas según el criterio NC no facilitan su instalación en el eje, pues son números no múltiplos de  $15^\circ$ . Asimismo, se ha podido comprobar que en aquellas configuraciones en las que se emplean 8 galgas y se impone la compensación de la deformación térmica, el número de condición de la matriz de observación extendida es muy elevado. Así las configuraciones no se consideran óptimas y por ello no se han analizado.

Finalmente, en lo que se refiere a los resultados obtenidos mediante el último de los criterios, E-Optimality, se han obtenido unas configuraciones óptimas que minimizan la incertidumbre de la estimación de las deformaciones. Aparentemente estas configuraciones no son las mejores para la estimación del torsor, pues no estiman el torsor con la mínima varianza posible (que es el objetivo principal de esta tesis). Una vez más se han empleado las mismas restricciones que para los dos criterios de optimización anteriores. Se ha observado que gran parte de las configuraciones obtenidas resultan *difíciles* de implementar principalmente por los valores de orientación óptimos de las galgas.

## 6.2. Parámetros omitidos

En el Capítulo 3 se ha desarrollado una metodología para la obtención de nuevas configuraciones óptimas de galgas, que permitan estimar determinados parámetros de interés (componentes del torsor y deformación térmica) y compensar el efecto del resto de parámetros, los denominados parámetros omitidos.

Primeramente, se ha demostrado que el diseño óptimo habitual no siempre es válido para el cálculo óptimo de nuevas configuraciones de galgas. Esto es, si  $n \leq q$  el algoritmo de diseño habitual no proporciona ninguna solución y si  $n = q$  la única matriz  $\mathbf{Q}$  óptima que premultiplica al modelo original es nula.

Por esta razón, con el objetivo de ser capaces de obtener configuraciones óptimas en las que el número de galgas empleadas sea menor que el número de parámetros omitidos ( $n \leq q$ ), se ha desarrollado una formulación alternativa. En primer lugar, en el nuevo algoritmo, en vez de premultiplicar el modelo original por la matriz  $\mathbf{Q}$ , se ha premultiplicado por una matriz  $\mathbf{R}$ , que cumple las restricciones  $\mathbf{R}\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}_{p \times q}$  y  $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_p$ . Otra diferencia entre los dos algoritmos es que el tamaño de  $\mathbf{R}$  no es el mismo que el de  $\mathbf{Q}$ . Esto se debe a que, el algoritmo alternativo, entre todas las posibles direcciones ortogonales a  $\mathbf{W}_2$ , busca aquella (o aquellas) que maximicen la observabilidad de los parámetros de interés.

Posteriormente, a partir de la matriz de información se ha obtenido una expresión para el estimador de Máxima Verosimilitud de los parámetros de interés. Este estimador máximo verosímil es el resultado de premultiplicar las medidas de deformación por la matriz del estimador  $\mathbf{H}$ .

Una vez conocida la matriz de información del modelo original, se ha definido un algoritmo D-Optimality para la obtención de las posiciones y orientaciones óptimas de las galgas y las componentes de la matriz  $\mathbf{R}$  para la estimación de  $\mathbf{t}_1$  sin la influencia de los parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$ . Este algoritmo tan sólo requiere de los siguientes datos de entrada: número de galgas de la configuración, parámetros de

interés  $\mathbf{t}_1$  que se deseen estimar y parámetros omitidos  $\mathbf{t}_2$  cuyos efectos se deseen compensar.

Adicionalmente, en un primer intento de obtener una estimación de la varianza de estimación  $\sigma^2$  de los parámetros de interés, se ha visto que transformando el modelo original premultiplicándolo por la matriz óptima  $\mathbf{R}$  que es ortogonal a  $\mathbf{W}_2$ , no es posible obtener una expresión para la varianza de estimación. Esto es debido a que la totalidad de medidas de deformación se emplea para la estimación de los  $p$  parámetros de interés y por tanto, no hay información adicional para la estimación de  $\sigma^2$ .

Sin embargo, se ha definido una matriz  $\mathbf{P} = \text{null}(\mathbf{W})^\top$  tal que premultiplicando el modelo original por dicha matriz, permite obtener una estimación de la varianza de estimación de los parámetros de interés. Una manera rápida para determinar si se puede obtener una estimación de  $\sigma^2$  consiste en comprobar si se cumple la siguiente inecuación  $s = n - \text{rango}(\mathbf{W}) \geq 1$ .

En cuanto a los resultados obtenidos, en primera instancia se han obtenido las seis configuraciones típicas para la estimación de cada una de las componentes del torsor individualmente compensando el resto de cargas y la deformación térmica. Se ha podido comprobar, efectivamente, que las configuraciones que se emplean en la actualidad son las óptimas para la estimación de las diferentes cargas del torsor. Además, también se ha calculado la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador de las diferentes configuraciones, comprobando así también la validez del algoritmo.

Finalmente, se ha obtenido una colección de configuraciones de galgas nuevas. Imponiendo el uso de 6 galgas en el cálculo del estimador de todas las componentes del torsor y sin imponer la compensación de la deformación térmica, se ha obtenido la misma configuración óptima que en el Capítulo 2. Para un valor de  $\nu = 1/3$  las galgas se posicionan por parejas desfasadas cada  $120^\circ$  en el perímetro del eje y se orientan con  $\delta = \pm 26.8^\circ$ .

De igual forma, también se han obtenido unas configuración óptimas que permiten estimar diferentes combinaciones de los parámetros de interés, como por ejemplo, los tres momentos del torsor y compensando deformación térmica, los dos momentos flectores y compensando deformación térmica, así como una configuración de galgas que permite la estimación de la temperatura  $\mathcal{T}$  a la que se encuentra el eje o la deformación por efectos térmicos. En todas las configuraciones se ha podido determinar la expresión simbólica de la matriz  $\mathbf{H}$  del estimador, para posteriormente premultiplicar a las medidas de deformación y obtener una estimación de los parámetros de interés. Asimismo, para cada una de las configuraciones se ha determinado si es posible obtener una estimación de  $\sigma^2$ , y en caso afirmativo, se ha obtenido una expresión para la misma.

### 6.3. Análisis de sensibilidad

En el Capítulo 4 se ha realizado un análisis de sensibilidad para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección transversal circular. En primer lugar, se ha determinado la relación inversa para la estimación de las cargas mecánicas de las seis configuraciones típicas, la configuración de 6 galgas para estimar  $\mathbf{t}$  y finalmente

la configuración de 8 galgas para estimar  $\mathbf{t}$  y compensar  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ . A pesar de que el análisis de sensibilidad desarrollado puede aplicarse a cualquier configuración de galgas, tan sólo se ha aplicado a las configuraciones típicas que se emplean en la actualidad, pues se considera que pueden obtenerse unas conclusiones con mayor alcance.

Seguidamente, a partir de la expresión de la deformación de una galga situada arbitrariamente en términos del torsor externo obtenida en el Capítulo 2, se ha obtenido una expresión analítica de la estimación de las cargas en términos de los parámetros con incertidumbre por medio de desarrollos de Taylor de segundo orden. Para este análisis se han considerado dos fuentes de incertidumbre posibles: los parámetros geométricos y de material del eje ( $\mathbf{q}$ ), y los parámetros de posicionamiento de las galgas extensiométricas ( $\mathbf{p}$ ). A su vez, se ha obtenido una expresión para la varianza del estimador de la carga  $\hat{t}_k$  debido al ruido de medición de las deformaciones. Se ha podido comprobar que la compensación de la deformación térmica no se ve afectada por el error de posicionamiento de las galgas, ni por la incertidumbre de ningún parámetro geométrico o del material. Esto se debe a que la deformación térmica es un efecto isotrópico y afecta a las galgas independientemente de la posición y orientación en la que se adhieran al eje.

En cuanto a los resultados obtenidos, se ha analizado la propagación de incertidumbre de los parámetros a la estimación de las cargas desde cuatro puntos de vista diferentes. El primero de ellos, guarda relación con la incertidumbre relacionada con los parámetros geométricos y del material. A continuación, se han analizado los efectos individuales de las cargas secundarias en presencia de parámetros con incertidumbre. Posteriormente, se han estudiado los efectos resultantes de la aplicación de varias cargas simultáneamente. Para ello, se ha considerado una situación más realista, y se ha simulado el aerogenerador NREL 5-MW en OpenFAST y se han analizado dos secciones distintas: el eje de baja velocidad (LSS) y la base de la torre del aerogenerador. Finalmente, se ha realizado una simulación de Montecarlo para los valores de posicionamiento de las galgas extensiométricas, tanto en el LSS como para la torre.

Para las configuraciones típicas de galgas, en lo que se refiere al análisis de sensibilidad con respecto a los parámetros geométricos y del material del eje ( $\mathbf{q}$ ), los resultados muestran que la estimación de una carga primaria no depende de las cargas secundarias, y que su incertidumbre depende únicamente de la incertidumbre de los parámetros, siendo sólo proporcional a la carga primaria.

Sin embargo, en cuanto a los resultados de sensibilidad con respecto a los parámetros  $\mathbf{p}$ , se ha podido observar que aparece el efecto de *cross-talk*. Es decir, en presencia de incertidumbre en el posicionamiento de las galgas, las cargas secundarias influyen en la estimación de las cargas primarias.

En relación con los efectos de propagación de la incertidumbre causados por la aplicación de las 6 componentes del torsor simultáneamente, se ha calculado la desviación típica relativa, concluyendo que la incertidumbre en el posicionamiento de las galgas puede afectar negativamente en la estimación de los momentos y tener efectos desalentadores a la hora de estimar las fuerzas en aerogeneradores. Por último, se han presentado los histogramas de las series temporales de las componentes del torsor obtenidas mediante la simulación de OpenFAST y el error en su estimación obtenidos por la simulación de Montecarlo.

Como conclusión final, desde el punto de vista de la sensibilidad, las configuraciones típicas que emplean puentes Wheatstone son útiles para estimar ciertas cargas sobre el LSS y la torre de un aerogenerador, pero no para estimar el torsor completo. En concreto, los momentos del LSS y la fuerza cortante ( $F_3$ ), el momento de torsión y el momento de flexión ( $M_2$ ) de la torre pueden estimarse con una precisión aceptable. Sin embargo, si hay errores en el posicionamiento de las galgas extensométricas, los errores en la estimación de la fuerza axial tanto de la LSS como de la torre, así como la fuerza cortante ( $F_2$ ) de la torre, son inaceptables.

#### 6.4. Calibración estática de una configuración de 8 galgas

En el Capítulo 5 se ha presentado una metodología de calibración estática de una novedosa configuración de 8 galgas para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección circular. En una primera etapa, se ha fabricado un banco de ensayos formado por un eje de sección circular hueca para la calibración de la configuración de 8 galgas extensométricas. Se han realizado un total de 6 experimentos de calibración diferente, donde en cada uno de ellos se han aplicado diferentes componentes del torsor. Concretamente, se realizaron dos experimentos con fuerza cortante y momento flector, dos experimentos con fuerza cortante y momento flector con el eje extendido, un experimento con momento torsor y un experimento con fuerza axial.

El rango de cargas aplicadas muestra en los resultados de los experimentos la linealidad entre la deformación medida y las cargas aplicadas, por lo que mediante una regresión lineal se han calculado las pendientes de las deformaciones de 8 galgas en los diferentes experimentos. La relación entre las pendientes de la configuración de 8 galgas y la matriz de calibración experimental se ha calculado atendiendo a las disposiciones geométricas de los experimentos realizados.

Una vez calculada la matriz de calibración experimental, se ha llevado a cabo un experimento para validar la metodología de calibración. Para ello, a partir de un nuevo experimento con momento torsor, fuerza cortante y momento flector, se han medido las deformaciones de las 8 galgas y a partir de la matriz de calibración experimental se han estimado las componentes del torsor.

Los resultados específicos tras el experimento de validación demuestran que la estimación de los momentos es notablemente más precisa que la de las fuerzas. En detalle, los momentos torsor  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  tienen errores absolutos de 5.40 Nm, 2.71 Nm y 4.52 Nm, respectivamente. Por otro lado, los errores en la estimación de las fuerzas son más significativos:  $F_x$  presenta un error de 16.60 N, mientras que las fuerzas cortantes  $F_y$  y  $F_z$  tienen errores de 25.11 N y 7.46 N, respectivamente. Al evaluar los errores relativos, destaca un error de 3.1 % en la estimación de la fuerza cortante  $F_y$ , un 2.6 % en  $M_x$  y un 1.7 % en  $M_z$ . Esto refuerza la idea de que las fuerzas, especialmente  $F_x$ , son las cargas que más desafíos presentan en su estimación, mientras que los momentos, particularmente  $M_y$  y  $M_z$ , se estiman con mayor precisión. La razón de que así sea reside principalmente en que las deformaciones causadas por los momentos resultan ser mucho mayores que las causadas por las fuerzas, dando lugar a mayores errores en la estimación de estas últimas.

A modo de conclusión final, se puede decir que la metodología de calibración ha quedado validada y que la configuración de 8 galgas extensiométricas es capaz de estimar todas las componentes del tórsor simultáneamente con una precisión razonable.

## 6.5. Producción científica

El candidato ha enriquecido esta tesis doctoral mediante su aporte en diversos artículos de revista, ponencias presentadas en congresos y participación en estancias de investigación.

### 6.5.1. Artículos de revista

- Xabier Iriarte, Jokin Aginaga, Gorka Gainza, Javier Ros y Julen Bacaicoa. *Optimal strain-gauge placement for mechanical load estimation in circular cross-section shafts*. *Measurements* 2021. 174:108938.
- Julen Bacaicoa, Xabier Iriarte, Jokin Aginaga y Aitor Plaza. *Measurement of mechanical loads in wind turbines: a sensitivity analysis of strain gauge configurations*. *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics* 2023. (Enviado).

### 6.5.2. Congresos

- Xabier Iriarte, Jokin Aginaga, Javier Lerga, Gorka Gainza, Javier Ros y Julen Bacaicoa. *Optimal strain gauge configurations for the estimation of mechanical loads in the main shaft of HAWT*. *Journal of Physics: Conference Series* 2020. 1618:022034. TORQUE 2020.
- Julen Bacaicoa, Xabier Iriarte, Javier Lerga y Javier Ros. *Disposición óptima de galgas extensiométricas para la estimación de cargas en ejes de sección transversal circular*. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica 2020.
- Javier Lerga, Xabier Iriarte, Julen Bacaicoa y Jokin Aginaga. *Calibración de un sistema de galgas extensiométricas para la estimación de cargas en el eje lento de un aerogenerador*. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica 2020.
- Julen Bacaicoa, Xabier Iriarte, Jokin Aginaga y Aitor Plaza. *Mechanical sensitivity analysis of strain gauge configurations in the main shaft of wind turbines*. *Journal of Physics: Conference Series* 2022. 2265:032087. TORQUE 2022.
- Julen Bacaicoa, Xabier Iriarte, Jokin Aginaga y Oier Saldaña. *Calibración estática de una configuración de 8 galgas extensiométricas para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección transversal circular*. Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica 2022.
- Xabier Iriarte, Julen Bacaicoa, Jokin Aginaga y Aitor Plaza. *Determinación de configuraciones óptimas de sensores de deformación para la estimación de cargas individuales en ejes de sección circular*. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica 2023.

- Jokin Aginaga, Julen Bacaicoa, Xabier Iriarte, Aitor Plaza y Iker Agirre. *Análisis del error de posicionamiento de distintas configuraciones de galgas para la medición de cargas en aerogeneradores*. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica 2023.

### 6.5.3. Estancia de investigación

- E.T.S.I. de la Universidad de Sevilla (Sevilla, España). Fechas: 12/09/2022–27/11/2022 y 09/01/2023–22/01/2023 (3 meses). Investigación sobre dinámica experimental de ferrocarriles titulado "*Estimación de magnitud y posición de fuerzas de contacto rueda/carril mediante extensometría en un prototipo de tren a escala*".

## CAPÍTULO 7

## LÍNEAS FUTURAS

**E**N el presente Capítulo se exploran las posibles direcciones que podrían tomar las investigaciones subsiguientes, con el propósito de profundizar en el conocimiento y ampliar los horizontes de la disciplina. Se plantean perspectivas prometedoras para abordar cuestiones aún no resueltas, desafíos emergentes y áreas de interés pendientes de exploración. Éstas, pueden organizarse según las siguientes ideas principales que guiarán las futuras direcciones de la investigación:

- **Modelo que relacione el torsor externo con las deformaciones de las galgas en geometrías diferentes**

Desarrollar un modelo analítico lineal que relacione el torsor externo aplicado y las deformaciones de las galgas instaladas en componentes con geometrías diferentes a la circular (secciones rectangulares, perfiles normalizados, etc...). Este modelo permitiría una comprensión más profunda de cómo las fuerzas y momentos afectan distintas estructuras, lo cual es crucial para la monitorización y la seguridad en diversos campos de la ingeniería. La adaptación de la teoría existente a estas geometrías no convencionales requeriría una consideración cuidadosa de las propiedades del material, los métodos de aplicación de las cargas y las condiciones de contorno, lo que podría abrir nuevas vías de investigación y aplicación en la industria.

- **Estudio sobre el posicionamiento óptimo de galgas extensiométricas mediante técnicas de FEM**

El estudio sobre el posicionamiento óptimo de galgas extensiométricas mediante técnicas de FEM (Método de Elementos Finitos) se presenta como una prometedora línea futura para la tesis. Esta investigación implicaría la utilización de simulaciones avanzadas para determinar las ubicaciones óptimas para las galgas extensiométricas, mejorando así la medición y el análisis de tensiones y deformaciones en diversos componentes y estructuras. La incorporación de técnicas FEM podría ofrecer una metodología más refinada y adaptable para optimizar la colocación de las

galgas, abriendo nuevas posibilidades en el campo de la metrología y la ingeniería mecánica.

- **Empleo de técnicas de equilibrado de la matriz de observación del sistema**

El empleo de técnicas para el equilibrado de la matriz de observación del sistema puede llevar a una mejora significativa del número de condición de la misma, dando lugar a configuraciones óptimas *mejores* que las obtenidas en esta tesis doctoral.

- **Emplear el algoritmo en modelos con parámetros omitidos para el posicionamiento óptimo de otra tipología de sensores**

El empleo del algoritmo en modelos con parámetros omitidos para el posicionamiento óptimo de otra tipología de sensores, como acelerómetros, plantea una interesante extensión del trabajo actual. De esta forma, se podría estimar una o varias componentes de la aceleración (o velocidad angular) del componente a monitorizar, dando lugar a una nueva alternativa para la estimación de la aceleración en componentes mecánicos rotativos.

- **En el contexto de la robótica emplear el algoritmo en modelos con parámetros omitidos para la obtención de trayectorias óptimas**

En el contexto de la robótica emplear el algoritmo en modelos con parámetros omitidos para la obtención de trayectorias óptimas, con el objetivo de estimar ciertos parámetros del robot sin la influencia del resto. Ésto podría ofrecer una mejora significativa en la identificación de robots y podría abrir nuevas vías en la optimización del diseño robótico y en la realización de tareas de alta precisión.

- **Análisis de sensibilidad de nuevas configuraciones óptimas de galgas**

El análisis de sensibilidad de nuevas configuraciones óptimas de galgas empleando las mismas técnicas que en este trabajo. El objetivo sería analizar qué configuraciones podrían ser más robustas frente a las diversas fuentes de incertidumbre, permitiendo una mayor precisión y fiabilidad en las mediciones.

- **Instalación de nuevas configuraciones óptimas de galgas en aerogenerador real**

La instalación de nuevas configuraciones óptimas de galgas en un aerogenerador real se presenta como una oportunidad para la colaboración con la industria. Una empresa podría proporcionar las mediciones de las galgas, lo que permitiría trabajar posteriormente en la calibración de los sensores. Ésto no solo ofrecería una validación práctica del trabajo de esta tesis, sino que también podría conducir a mejoras en los sistemas de monitorización en los aerogeneradores.

- **Empleo de sensores de fibra óptica y su calibración**

La utilización de nuevas configuraciones óptimas formadas por sensores de fibra óptica y la realización de calibración de las mismas. La exploración y validación de estas configuraciones óptimas podrían permitir una medición más precisa y robusta que las galgas extensiométricas, con potencial para ser empleada en campos críticos como la ingeniería aeroespacial, la medicina, y las energías renovables.



■ **Calibración y validación de galgas instaladas en llanta dinamométrica**

Calibración y validación de las galgas extensiométricas instaladas en una llanta dinamométrica en un tren a escala. Este trabajo formó parte de la estancia de investigación en la Universidad de Sevilla, y podría ser un gran avance en la estimación de las fuerzas de contacto rueda/raíl.



# APÉNDICE A

## ALGORITMOS

### A.1. Resolución de los problemas de optimización

---

#### Algoritmo 1 | Cálculo de configuraciones óptimas con restricciones

---

```

1:  $n_{iter}$  ▷ Set iterations number
2:  $\zeta = (n, x_{in}, \mathcal{T}_{in}, gap_{in}, \mathcal{F}_{in})$ ; ▷ Set strain gauge configuration features
3: if  $x_{in} == 1$  then
4:    $\vartheta_0 := \text{rand}(n, 3)$ ; ▷ Random initial value for parameters
5: else
6:    $\vartheta_0 := \text{rand}(n, 2)$ ; ▷ Random initial value for parameters
7: end if
8:  $\mathbf{c}(\vartheta_0) = \mathbf{0}$ ; ▷ Constraints perform
9: if  $\mathcal{T}_{in} == 0$  then ▷ Evaluation of W
10:   $\mathbf{W} := \mathbf{W}(\vartheta_0)$ ;
11: else
12:   $\mathbf{W} := [\mathbf{W}(\vartheta_0) \mid \mathbf{1}_{n \times 1}]$ ;
13: end if
14:  $fval_{min} := \infty$ ;
15: for  $i := 1$  to  $n_{iter}$  do
16:   $\vartheta := \vartheta_0$ ;
17:   $\mathcal{F} := \text{eval\_f\_crit}(\mathcal{F}_{in}, \mathbf{W})$ ; ▷ Set criterion cost function
18:   $[\vartheta_i, fval_i] := \arg_{\vartheta} \text{mín}(\mathcal{F}(\mathbf{W}(\vartheta)))$ ; subjected to  $\mathbf{c}(\vartheta) = \mathbf{0}$  ▷ Miminization
19:  if  $fval_i < fval_{min}$  then
20:     $\vartheta^{opt} := \vartheta_i$ ;
21:     $fval_{min} := fval_i$ ;
22:  end if
23: end for

```

---

**Algoritmo 2** Evaluación de la función del criterio de optimización

---

```

1: function  $\mathcal{F} = eval\_f\_crit(\mathcal{F}_{in}, \mathbf{W});$  ▷ Evaluate criterion cost function
2: if  $\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}_D$  then
3:    $\mathcal{F} := -\log(\det(\mathbf{W}^\top \mathbf{W}));$  ▷ D-Optimality
4: else if  $\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}_{NC}$  then
5:    $\mathcal{F} := \text{cond}(\mathbf{W});$  ▷ Condition Number
6: else if  $\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}_E$  then
7:    $\mathcal{F} := \frac{1}{\lambda_{min}(\mathbf{W})};$  ▷ E-Optimality
8: end if

```

---

**A.2. Resolución de los problemas de optimización con parámetros omitidos****Algoritmo 3** | Cálculo de configuraciones óptimas mediante algoritmo alternativo

---

```

1:  $n;$  ▷ Set strain gauge number
2:  $\mathbf{v};$  ▷ Set indexes of parameters of interest
3:  $p := \text{numel}(\mathbf{v});$ 
4:  $\mathcal{T}_{in};$  ▷ Set temperature compensation
5:  $n_{iter};$  ▷ Set iterations number
6:  $fval_{min} := \infty;$ 
7: for  $i := 1$  to  $n_{iter}$  do
8:    $\boldsymbol{\vartheta}_0 := \text{rand}(n, 2);$  ▷ Random initial value for parameters
9:    $\mathbf{R} := \text{rand}(p, n);$  ▷ Random initial value for  $\mathbf{R}$  matrix
10:   $\mathbf{W} := \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}_0);$  ▷ Evaluation of  $\mathbf{W}$ 
11:  if  $\mathcal{T}_{in} == \text{true}$  then ▷ If temperature compensation is required
12:     $\mathbf{W} := [\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}_0) \mid \mathbf{1}_{n \times 1}];$ 
13:  end if
14:   $\mathbf{W}_1 :=$  empty matrix of size  $n \times p$ 
15:   $\mathbf{W}_2 :=$  empty matrix of size  $n \times (m - p)$ 
16:  for  $i := 1$  to  $p$  do ▷ Calculate  $\mathbf{W}_1$ 
17:     $j := \mathbf{v}(i)$  ▷ Get the column index of  $\mathbf{W}$ 
18:     $\mathbf{W}_1(:, i) := \mathbf{W}(:, j)$  ▷ Extract column  $j$  from  $\mathbf{W}$  and add it to  $\mathbf{W}_1$ 
19:  end for
20:  return  $\mathbf{W}_1$ 
21:   $\mathbf{v}_{aux} := \text{setdiff}(1:m, \mathbf{v});$  ▷ Get the unused columns in  $\mathbf{v}$ 
22:  for  $i := 1$  to  $m - p$  do ▷ Calculate  $\mathbf{W}_2$ 
23:     $j := \mathbf{v}_{aux}(i)$  ▷ Obtain the auxiliary column index of the matrix  $\mathbf{W}$ 
24:     $\mathbf{W}_2(:, i) := \mathbf{W}(:, j)$  ▷ Extract column  $j$  from  $\mathbf{W}$  and add it to  $\mathbf{W}_2$ 
25:  end for
26:  return  $\mathbf{W}_2$ 
27:   $\Theta_0 := [\mathbf{R}(:, :); \boldsymbol{\vartheta}_0];$  ▷ Initial values
28:   $[\Theta_i, fval_i] := \arg_{\Theta} \min(-\log(\det(\mathbf{W}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{W}_1)));$  ▷ Miminization problem
29:  if  $fval_i < fval_{min}$  then
30:     $\Theta^{opt} := \Theta_i;$ 
31:     $fval_{min} := fval_i;$ 
32:  end if

```

---

---

```

31: end for
32:  $\mathbf{r}^{opt}(:) := \Theta^{opt}(1 : n \cdot p, 1);$ 
33:  $\mathbf{R}^{opt} := \text{reshape}(\mathbf{r}^{opt}, p, n)$  ▷ Reshape R matrix components
34:  $\boldsymbol{\vartheta}^{opt} := \Theta^{opt}(\text{end} - 2n + 1 : \text{end}, 1);$  ▷ Extract  $\boldsymbol{\vartheta}$  optimum values
35:  $\boldsymbol{\phi}^{opt} := \boldsymbol{\vartheta}^{opt}(1 : 2 : \text{end}, 1);$ 
36:  $\boldsymbol{\delta}^{opt} := \boldsymbol{\vartheta}^{opt}(2 : 2 : \text{end}, 1);$ 

```

---

### A.3. Análisis de sensibilidad de configuraciones de galgas.

---

#### Algoritmo 4 | Cálculo de los coeficientes de la aproximación de Taylor

---

```

1:  $\mathbf{p};$  ▷ Set odd strain gauges  $\varphi$  and  $\delta$ 
2:  $\Delta\mathbf{p};$  ▷ Set configuration misplacement parameters
3:  $[\mathbf{q}_{LSS}, \mathbf{q}_{TRW}] := \text{constants}();$  ▷ Load material and geometrical nominal parameters
4:  $[\mathbf{t}_{LSS}, \mathbf{t}_{TRW}] := \text{loads}();$  ▷ Load LSS and Tower OpenFAST simulation RMS loads
5:  $\text{case} := \text{LSS} \mid \text{TRW};$  ▷ Set the wind turbine section to be analyzed
6: if case==LSS then
7:    $\mathbf{t} := \mathbf{t}_{LSS};$ 
8:    $\mathbf{q} := \mathbf{q}_{LSS};$ 
9: else if case==TWR then
10:   $\mathbf{t} := \mathbf{t}_{TRW};$ 
11:   $\mathbf{q} := \mathbf{q}_{TRW};$ 
12: end if
13:  $\mathbf{H}_{nom} := \text{eval}_H(\mathbf{p}, \mathbf{q});$  ▷ Evaluate H on nominal parameters
14:  $\mathbf{W}_{unc} := \text{eval}_W(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}, \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q});$  ▷ Evaluate W on uncertain parameters
15:  $\mathbf{t}_{nom} := [F_1; F_2; F_3; M_1; M_2; M_3];$  ▷ Symbolic nominal wrench
16:  $t_k := \mathbf{H}_{nom} \mathbf{W}_{unc} \mathbf{t}_{nom};$ 
17: for  $i := 1$  to  $\text{length}(\mathbf{p})$  do ▷ Sensitivity respect to  $\mathbf{p}$ 
18:    $\mathbf{J}_p(i) := \text{jacobian}(t_k, \Delta\mathbf{p});$  ▷ First order approximation
19:    $\mathbf{JJ}_p(i) := \text{jacobian}(\mathbf{J}_p, \Delta\mathbf{p});$  ▷ Second order approximation
20: end for
21: for  $i := 1$  to  $\text{length}(\mathbf{q})$  do ▷ Sensitivity respect to  $\mathbf{q}$ 
22:    $\mathbf{J}_q(i) := \text{jacobian}(t_k, \Delta\mathbf{q});$  ▷ First order approximation
23:    $\mathbf{JJ}_q(i) := \text{jacobian}(\mathbf{J}_q, \Delta\mathbf{q});$  ▷ Second order approximation
24: end for
25:  $[\mathbf{C}_p, \mathbf{CC}_p] := [\mathbf{J}_p(\mathbf{t}, \mathbf{p}), \mathbf{JJ}_p(\mathbf{t}, \mathbf{p})] \cdot \frac{\pi}{180};$  ▷ Evaluation of misplacement coefficients on degree units
26:  $[\mathbf{C}_q, \mathbf{CC}_q] := [\mathbf{J}_q(\mathbf{t}, \mathbf{q}), \mathbf{JJ}_q(\mathbf{t}, \mathbf{q})];$  ▷ Evaluation of material and geometrical coefficients

```

---



# APÉNDICE B

## RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

### B.1. Matrices W de las configuraciones típicas de galgas

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{\hat{f}_1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} \\ \frac{\nu}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{E\omega} \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} \\ \frac{\nu}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{\hat{f}_2} = \begin{bmatrix} \frac{\nu-1}{2AE} & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & 0 & \frac{R(v+1)}{EI_p} & \frac{\nu-1}{2E\omega} & 0 \\ \frac{\nu-1}{2AE} & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & 0 & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & \frac{\nu-1}{2E\omega} & 0 \\ \frac{\nu-1}{2AE} & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & 0 & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & -\frac{\nu-1}{2E\omega} & 0 \\ \frac{\nu-1}{2AE} & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & 0 & \frac{R(v+1)}{EI_p} & -\frac{\nu-1}{2E\omega} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{W}_{\hat{f}_3} &= \begin{bmatrix} \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & \frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & -\frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & -\frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & \frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & \frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & \frac{\nu-1}{2E\omega} \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{\hat{M}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & \frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & -\frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & -\frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & \frac{\nu+1}{AE\kappa} & \frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & \frac{\nu-1}{2E\omega} \\ \frac{\nu-1}{2AE} & 0 & -\frac{\nu+1}{AE\kappa} & -\frac{R(v+1)}{EI_p} & 0 & \frac{\nu-1}{2E\omega} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{W}_{\hat{M}_2} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} & 0 \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} & 0 \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} & 0 \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{\hat{M}_3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E\omega} \\ -\frac{1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E\omega} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### B.2. Matrices Jacobianas y Hessianas de las aproximaciones de Taylor

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{f}_1}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} &= \begin{bmatrix} \frac{2F_1}{A^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_1}{AE} & -\frac{F_1}{A(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_1}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2F_1}{E^2} & -\frac{F_1}{E(v+1)} \\ -\frac{F_1}{A(v+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_1}{E(v+1)} & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \hat{M}_1}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M_1}{IpR} & -\frac{M_1}{ER} & \frac{M_1}{R(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_1}{IpR} & \frac{2M_1}{Ip^2} & \frac{M_1}{ETp} & -\frac{M_1}{Ip(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_1}{ER} & \frac{M_1}{ETp} & \frac{2M_1}{E^2} & -\frac{M_1}{E(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M_1}{R(v+1)} & -\frac{M_1}{Ip(v+1)} & -\frac{M_1}{E(v+1)} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_2}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{2F_2}{A^2} & \frac{F_2}{A\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_2}{AE} & -\frac{F_2}{A(v+1)} \\ \frac{F_2}{A\kappa} & \frac{2F_2}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_2}{E\kappa} & -\frac{F_2}{\kappa(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_2}{AE} & \frac{F_2}{E\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{2F_2}{E^2} & -\frac{F_2}{E(v+1)} \\ -\frac{F_2}{A(v+1)} & -\frac{F_2}{\kappa(v+1)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_2}{E(v+1)} & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \hat{M}_2}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2M_2}{\omega^2} & 0 & 0 & \frac{M_2}{E\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_2}{E\omega} & 0 & 0 & \frac{2M_2}{E^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_3}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{2F_3}{A^2} & \frac{F_3}{A\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_3}{AE} & -\frac{F_3}{A(v+1)} \\ \frac{F_3}{A\kappa} & \frac{2F_3}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_3}{E\kappa} & -\frac{F_3}{\kappa(v+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_3}{AE} & \frac{F_3}{E\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{2F_3}{E^2} & -\frac{F_3}{E(v+1)} \\ -\frac{F_3}{A(v+1)} & -\frac{F_3}{\kappa(v+1)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_3}{E(v+1)} & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \hat{M}_3}{\partial \Delta \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2M_3}{\omega^2} & 0 & 0 & \frac{M_3}{E\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_3}{E\omega} & 0 & 0 & \frac{2M_3}{E^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{AM_2}{2\omega} \\ -\frac{2F_3}{\kappa} - \frac{2AM_1R}{Ip} \end{bmatrix}^T, \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{F_3}{2} \\ \frac{F_1\kappa}{2} - \frac{AM_2\kappa}{2\omega} \end{bmatrix}^T, \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\frac{F_2}{2} \\ \frac{F_1\kappa}{2} - \frac{AM_3\kappa}{2\omega} \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial \hat{M}_1}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\frac{F_2Ip}{2A\kappa} \\ \frac{F_2Ip}{2A\kappa} \\ Ip(F_1\omega - AM_3) \\ \frac{2AR\omega}{Ip(F_1\omega + AM_3)} \end{bmatrix}^T, \frac{\partial \hat{M}_2}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{M_2}{2} \\ \frac{M_3}{2} \\ \frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} - \frac{M_1R\omega(v+1)}{Ip} \\ \frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} + \frac{M_1R\omega(v+1)}{Ip} \end{bmatrix}^T, \frac{\partial \hat{M}_3}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\frac{M_2}{2} \\ -\frac{M_2}{2} \\ \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} + \frac{M_1R\omega(v+1)}{Ip} \\ \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} - \frac{M_1R\omega(v+1)}{Ip} \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_1}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} \frac{AM_3}{2\omega} & 0 & \frac{2F_2}{\kappa} & 0 \\ 0 & -\frac{AM_3}{2\omega} & 0 & -\frac{2F_2}{\kappa} \\ \frac{2F_2}{\kappa} & 0 & \frac{2AM_3}{\omega} - 2F_1 & 0 \\ 0 & -\frac{2F_2}{\kappa} & 0 & -2F_1 - \frac{2AM_3}{\omega} \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \hat{f}_2}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} -\frac{F_2}{2} & 0 & -\frac{AM_2\kappa}{2\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{F_2}{2} & 0 & -\frac{AM_3\kappa}{2\omega} \\ -\frac{AM_2\kappa}{2\omega} & 0 & \frac{2AM_1R\kappa}{Ip} - 2F_2 & 0 \\ 0 & -\frac{AM_3\kappa}{2\omega} & 0 & -2F_2 - \frac{2AM_1R\kappa}{Ip} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_3}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} -\frac{F_3}{2} & 0 & \frac{AM_2\kappa}{2\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{F_3}{2} & 0 & \frac{AM_2\kappa}{2\omega} \\ \frac{AM_2\kappa}{2\omega} & 0 & -2F_3 - \frac{2AM_1R\kappa}{Ip} & 0 \\ 0 & \frac{AM_2\kappa}{2\omega} & 0 & \frac{2AM_1R\kappa}{Ip} - 2F_3 \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 \hat{M}_1}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} -\frac{F_2Ip}{2A\kappa} & 0 & \frac{IpM_2}{2R\omega} & 0 \\ 0 & \frac{F_3Ip}{2A\kappa} & 0 & -\frac{IpM_2}{2R\omega} \\ \frac{IpM_2}{2R\omega} & 0 & -2M_1 - \frac{2F_3Ip}{A\kappa} & 0 \\ 0 & -\frac{IpM_2}{2R\omega} & 0 & \frac{2F_3Ip}{A\kappa} - 2M_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_2}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} -\frac{M_2}{2} & 0 & \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 \\ 0 & -\frac{M_2}{2} & 0 & \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} \\ \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 & -\frac{(F_1\omega + AM_2)(v+1)}{A} & 0 \\ 0 & \frac{F_3\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 & \frac{(F_1\omega - AM_2)(v+1)}{A} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_3}{\partial \Delta \mathbf{p}^2} = \begin{bmatrix} -\frac{M_3}{2} & 0 & -\frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 \\ 0 & -\frac{M_3}{2} & 0 & -\frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} \\ -\frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 & \frac{(F_1\omega - AM_3)(v+1)}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{F_2\omega(v+1)}{A\kappa} & 0 & -\frac{(F_1\omega + AM_3)(v+1)}{A} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_1}{\partial \Delta \mathbf{p} \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{AM_2}{2\omega^2} & 0 & 0 & -\frac{AM_2}{2E\omega} & \frac{AM_2}{2\omega(v+1)} \\ 0 & 0 & \frac{AM_2}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{AM_2}{2E\omega} & -\frac{AM_2}{2\omega(v+1)} \\ \frac{2F_3}{A\kappa} & \frac{2F_3}{\kappa^2} & 0 & -\frac{2AM_1}{Ip} & \frac{2AM_1R}{Ip^2} & \frac{2F_3}{E\kappa} + \frac{2AM_1R}{EIp} & -\frac{2F_3}{\kappa(v+1)} - \frac{2AM_1R}{Ip(v+1)} \\ -\frac{2F_3}{A\kappa} & -\frac{2F_3}{\kappa^2} & 0 & -\frac{2AM_1}{Ip} & \frac{2AM_1R}{Ip^2} & \frac{2AM_1R}{EIp} - \frac{2F_3}{E\kappa} & \frac{2F_3}{\kappa(v+1)} - \frac{2AM_1R}{Ip(v+1)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_2}{\partial \Delta \mathbf{p} \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\frac{F_3}{2A} & -\frac{F_3}{2\kappa} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_3}{2E} & \frac{F_3}{2(v+1)} \\ -\frac{F_3}{2A} & -\frac{F_3}{2\kappa} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_3}{2E} & \frac{F_3}{2(v+1)} \\ \frac{F_1\kappa}{2A} & 0 & \frac{AM_2\kappa}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{F_1\kappa}{2E} + \frac{AM_2\kappa}{2E\omega} & -\frac{F_1\kappa}{2(v+1)} - \frac{AM_2\kappa}{2\omega(v+1)} \\ -\frac{F_1\kappa}{2A} & 0 & \frac{AM_2\kappa}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{AM_2\kappa}{2E\omega} - \frac{F_1\kappa}{2E} & \frac{F_1\kappa}{2(v+1)} - \frac{AM_2\kappa}{2\omega(v+1)} \end{bmatrix}$$



$$\frac{\partial^2 \hat{f}_3}{\partial \Delta p \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{2A} & \frac{F_2}{2k} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_2}{2E} & -\frac{F_2}{2(v+1)} \\ \frac{F_2}{2A} & \frac{F_2}{2k} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_2}{2E} & -\frac{F_2}{2(v+1)} \\ -\frac{F_1 k}{2A} & 0 & \frac{A M_3 k}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{A M_3 k}{2E\omega} - \frac{F_1 k}{2E} & \frac{F_1 k}{2(v+1)} - \frac{A M_3 k}{2\omega(v+1)} \\ \frac{F_1 k}{2A} & 0 & \frac{A M_3 k}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{F_1 k}{2E} + \frac{A M_3 k}{2E\omega} & -\frac{F_1 k}{2(v+1)} - \frac{A M_3 k}{2\omega(v+1)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_1}{\partial \Delta p \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{F_2 I_p}{2A^2 R k} & \frac{F_2 I_p}{2A R k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_2 I_p}{2A E R k} & -\frac{F_2 I_p}{2A R k(v+1)} \\ -\frac{F_2 I_p}{2A^2 R k} & -\frac{F_2 I_p}{2A R k^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_2 I_p}{2A E R k} & \frac{F_2 I_p}{2A R k(v+1)} \\ -\frac{F_1 I_p}{2A^2 R} & 0 & \frac{I_p M_3}{2R\omega^2} & 0 & 0 & \frac{I_p M_3}{2E R \omega} - \frac{F_1 I_p}{2A E R} & \frac{F_1 I_p}{2A R(v+1)} - \frac{I_p M_3}{2R\omega(v+1)} \\ -\frac{F_1 I_p}{2A^2 R} & 0 & -\frac{I_p M_3}{2R\omega^2} & 0 & 0 & -\frac{I_p M_3}{2E R \omega} - \frac{F_1 I_p}{2A E R} & \frac{F_1 I_p}{2A R(v+1)} + \frac{I_p M_3}{2R\omega(v+1)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_2}{\partial \Delta p \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_3}{2\omega^2} & 0 & 0 & -\frac{M_3}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_3}{2\omega^2} & 0 & 0 & -\frac{M_3}{2E} & 0 \\ -\frac{F_2 \omega(v+1)}{A^2 k} & -\frac{F_2 \omega(v+1)}{A k^2} & 0 & -\frac{M_1 \omega(v+1)}{I_p} & \frac{M_1 R \omega(v+1)}{I_p^2} & \frac{M_1 R \omega(v+1)}{E I_p} - \frac{F_2 \omega(v+1)}{A E k} & \frac{F_2 \omega}{A k} - \frac{M_1 R \omega}{I_p} \\ -\frac{F_2 \omega(v+1)}{A^2 k} & -\frac{F_2 \omega(v+1)}{A k^2} & 0 & \frac{M_1 \omega(v+1)}{I_p} & -\frac{M_1 R \omega(v+1)}{I_p^2} & -\frac{M_1 R \omega(v+1)}{E I_p} - \frac{F_2 \omega(v+1)}{A E k} & \frac{M_1 R \omega}{I_p} + \frac{F_2 \omega}{A k} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_3}{\partial \Delta p \partial \Delta \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M_2}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{M_2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_2}{2\omega^2} & 0 & 0 & \frac{M_2}{2E} & 0 \\ -\frac{F_3 \omega(v+1)}{A^2 k} & -\frac{F_3 \omega(v+1)}{A k^2} & 0 & \frac{M_1 \omega(v+1)}{I_p} & -\frac{M_1 R \omega(v+1)}{I_p^2} & -\frac{M_1 R \omega(v+1)}{E I_p} - \frac{F_3 \omega(v+1)}{A E k} & \frac{M_1 R \omega}{I_p} + \frac{F_3 \omega}{A k} \\ -\frac{F_3 \omega(v+1)}{A^2 k} & -\frac{F_3 \omega(v+1)}{A k^2} & 0 & -\frac{M_1 \omega(v+1)}{I_p} & \frac{M_1 R \omega(v+1)}{I_p^2} & \frac{M_1 R \omega(v+1)}{E I_p} - \frac{F_3 \omega(v+1)}{A E k} & \frac{F_3 \omega}{A k} - \frac{M_1 R \omega}{I_p} \end{bmatrix}$$



---

## Bibliografía

---

- [1] G.D. Zhou, T.H. Yi, H. Zhang y H.N. Li. «Energy-aware wireless sensor placement in structural health monitoring using hybrid discrete firefly algorithm». En: *Structural Control and Health Monitoring* 22.4 (2015), págs. 648-666.
- [2] G.D. Zhou, T.H. Yi y B. Chen. «Innovative Design of a Health Monitoring System and Its Implementation in a Complicated Long-Span Arch Bridge». En: *Journal of Aerospace Engineering* 30.2 (2017), B4016006.
- [3] J. E. Michaels, S. W. Doebling y C. R. Farrar. «Structural health monitoring of a wind turbine». En: *Journal of Sound and Vibration* 249.5 (2001), págs. 833-846.
- [4] D. Van Damme, J. DeBille, W. Desmet y D. Botteldooren. «Structural health monitoring of wind turbine blades using an autonomous decentralized wireless sensor network». En: *Structural Control and Health Monitoring* 15.2 (2008), págs. 294-309.
- [5] S. Zhu, S. J. Delepine-Lesoille, C. Jauregui Correa y G. M. Odegard. «Structural health monitoring of wind turbine blades using fiber Bragg grating sensors: A review». En: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 42.5 (2011), págs. 477-491.
- [6] M. Wang, F. Xu y H. Li. «Structural health monitoring of wind turbines: A data-driven framework for damage detection and localization». En: *Journal of Sound and Vibration* 342 (2015), págs. 165-183.
- [7] A. Ghoshal, M. Sundaresan, M. Schulz y P. Pai. «Structural health monitoring techniques for wind turbine blades». En: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 85 (abr. de 2000), págs. 309-324.
- [8] J.W., Dally and W.F., Riley and K.G., McConnell. *Instrumentation for Engineering Measurements*. Wiley, 1993. ISBN: 9780471551928.
- [9] D.C. Ramsay. *Principles of Engineering Instrumentation*. Butterworth-Heinemann, 1996.
- [10] J. Turner y M. Hill. *Instrumentation for Engineers and Scientists*. Oxford Science Publications, 1999. ISBN: 0-19-856517-8.
- [11] S. Zhang, J. Yang, Y. Li y J. Li. «Identification of bearing load by three section strain gauge method: Theoretical and experimental research». En: *Measurement* 46.10 (2013), págs. 3968-3975. ISSN: 0263-2241.

- [12] J.O. Templeman, B.B. Sheil y T. Sun. «Multi-axis force sensors: A state-of-the-art review». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 304 (2020), pág. 111772. ISSN: 0924-4247.
- [13] M. Rizal, J.A. Ghani, M.Z. Nuawi y C.H.C. Haron. «Development and testing of an integrated rotating dynamometer on tool holder for milling process». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), págs. 559-576. ISSN: 0888-3270.
- [14] A. Žnidarič. «Structural health monitoring of the arched Stonecutter's bridge during construction». En: *Journal of bridge engineering* 10.5 (2005), págs. 592-599.
- [15] X. Zhao, T. Guo, Y. Xia y J. Ou. «Structural health monitoring of building structures using strain measurements: A review». En: *Smart Materials and Structures* 26.6 (2017), pág. 063001.
- [16] H. Hildebrand, A. Kammel y J. Fey. «Strain measurement on vehicle components». En: *Sensor Review* 32.1 (2012), págs. 61-67.
- [17] M. Uchiyama, E. Bayo y E. Palma-Villalon. «A Systematic Design Procedure to Minimize a Performance Index for Robot Force Sensors». En: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113.3 (sep. de 1991), págs. 388-394. ISSN: 0022-0434.
- [18] A. Bicchi. «A criterion for optimal design of multi-axis force sensors». En: *Robotics and Autonomous Systems* 10.4 (1992), págs. 269-286. ISSN: 0921-8890.
- [19] M. Mignolet y B.K. Choi. «Robust optimal positioning of strain gauges on blades». English (US). En: *American Society of Mechanical Engineers, International Gas Turbine Institute, Turbo Expo (Publication) IGTI*. Vol. 4 B. Proceedings of the ASME TURBO EXPO 2002: Ceramics Industrial and Cogeneration Structures and Dynamics ; Conference date: 03-06-2002 Through 06-06-2002. 2002, págs. 1065-1075.
- [20] Y. Sun y J.M. Hollerbach. «Observability index selection for robot calibration». En: *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2008, págs. 831-836.
- [21] R.K. Kincaid y S.L. Padula. «D-optimal designs for sensor and actuator locations». En: *Computers & Operations Research* 29.6 (2002). Location Analysis, págs. 701-713. ISSN: 0305-0548.
- [22] X. Liu, R.X. Yue y K. Chatterjee. «Geometric characterization of D-optimal designs for random coefficient regression models». En: *Statistics & Probability Letters* 159 (2020), pág. 108696. ISSN: 0167-7152.
- [23] C. Stephan. «Sensor placement for modal identification». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 27 (2012), págs. 461-470. ISSN: 0888-3270.
- [24] S.M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993. ISBN: 0-13-345711-7.
- [25] F.E. Udawadia. «Methodology for Optimum Sensor Locations for Parameter Identification in Dynamic Systems». En: *Journal of Engineering Mechanics* 120.2 (1994), págs. 368-390.
- [26] T.H. Loutas y A. Bourikas. «Strain sensors optimal placement for vibration-based structural health monitoring. The effect of damage on the initially optimal configuration». En: *Journal of Sound and Vibration* 410 (2017), págs. 217-230. ISSN: 0022-460X.

- [27] D.S. Li, H.N. Li y C.P. Fritzen. «Load dependent sensor placement method: Theory and experimental validation». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 31 (2012), págs. 217-227. ISSN: 0888-3270.
- [28] H. Sarangi, K.S.R.K. Murthy y D. Chakraborty. «Experimental verification of optimal strain gage locations for the accurate determination of mode I stress intensity factors». En: *Engineering Fracture Mechanics* 110 (2013), págs. 189-200. ISSN: 0013-7944.
- [29] V. Bagheri, P. Hpsseini Tehrani y D. Younesian. «Optimal strain gauge placement in instrumented wheelset for measuring wheel-rail contact forces». En: *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 18 (nov. de 2017), págs. 1519-1527.
- [30] A. R. Ahmad, T. Wynn y C.Y. Lin. «A Comprehensive Design of Six-Axis Force/Moment Sensor». En: *Sensors* 21.13 (2021).
- [31] A. Mehrjoo, M. Song, B. Moaveni, C. Papadimitriou y E. Hines. «Optimal sensor placement for parameter estimation and virtual sensing of strains on an offshore wind turbine considering sensor installation cost». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 169 (2022), pág. 108787. ISSN: 0888-3270.
- [32] S. A. Liu y H. L. Tzo. «A novel six-component force sensor of good measurement isotropy and sensitivities». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 100.2 (2002), págs. 223-230. ISSN: 0924-4247.
- [33] G. Mastinu, M. Gobbi y G. Previati. «A New Six-axis Load Cell. Part I: Design». En: *Experimental Mechanics* 51 (mar. de 2011), págs. 373-388.
- [34] F. Ballo, M. Gobbi, G. Mastinu y G. Previati. «Advances in Force and Moments Measurements by an Innovative Six-axis Load Cell». En: *Experimental Mechanics* 54 (dic. de 2013).
- [35] C. Yuan, L.P. Luo, Q. Yuan, J.W., R.J. Yan, H. Kim, K.S. Shin y C.S. Han. «Development and evaluation of a compact 6-axis force/moment sensor with a serial structure for the humanoid robot foot». En: *Measurement* 70 (2015), págs. 110-122. ISSN: 0263-2241.
- [36] J. Huang, C.Y. Wong, D.T. Pham, Y. Wang, C. Ji, S. Su, W. Xu, Q. Liu y Z. Zhou. «Design of a Novel Six-Axis Force/Torque Sensor based on Optical Fibre Sensing for Robotic Applications». En: *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2018.
- [37] J. Fellman. «On the Effect of Nuisance Parameters in Linear Models». En: *The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)* 38.2 (1976), págs. 197-200. ISSN: 0581572X.
- [38] C.R. Rao. «Generalisation of Markoff's Theorem and Tests of Linear Hypotheses». En: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics (1933-1960)* 7.1 (1945), págs. 9-16. ISSN: 00364452.
- [39] D.R. Cox y N. Reid. «Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference». En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 49.1 (1987), págs. 1-39. ISSN: 00359246.
- [40] L. Kubáček. «Special structures of mixed linear models with nuisance parameters». En: *Mathematica Slovaca* 2 (1990), págs. 191-207.
- [41] V.P. Godambe. «Orthogonality of Estimating Functions and Nuisance Parameters». En: *Biometrika* 78.1 (1991), págs. 143-151. ISSN: 00063444.
- [42] P. Kunderová. «Linear models with nuisance parameters and deformation measurement». En: *Mathematica* 39.1 (2000), págs. 95-105.

- [43] P. Kunderová. «Eliminating transformations for nuisance parameters in linear model». En: *Mathematica* 42.1 (2003), págs. 59-86.
- [44] A.Y. Aravkin y T. van Leeuwen. «Estimating nuisance parameters in inverse problems». En: *Inverse Problems* 28.11 (2012), pág. 115016.
- [45] J. Suzuki, Y. Yang y M. Hayashi. «Quantum state estimation with nuisance parameters». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 53.45 (2020), pág. 453001.
- [46] J.J. Lok. *How estimating nuisance parameters can reduce the variance (with consistent variance estimation)*. 2022.
- [47] K. Hoffmann. *An Introduction to Stress Analysis and Transducer Design Using Strain Gauges*. HBM, 2012.
- [48] W. Montero, R. Farag, V. Díaz, M. Ramirez y B. L. Boada. «Uncertainties Associated with Strain-Measuring Systems Using Resistance Strain Gauges». En: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 46.1 (2011), págs. 1-13.
- [49] S.S. Manson y W.C. Morgan. *Effect of Misalignment of Strain-gage Components of Strain Rosettes*. Inf. téc. NACA-TN-1133. National Advisory Committee for Aeronautics, 1946.
- [50] M.I. Hetényi. *Handbook of Experimental Stress Analysis*. New York, Wiley, 1950.
- [51] Measurements Group, Inc. «Errors Due to Misalignment of Strain Gages». En: *Experimental Techniques* 6.3 (1982), págs. 16-19.
- [52] R.W. James. «Strain-gage misalignment errors – A special case of interest». En: *Experimental Techniques* 12.6 (1988), págs. 28-29.
- [53] N.B. McLaughlin e Y. Chen. «Effect of strain gage misalignment on cross sensitivity of extended ring (ER) transducers». En: *Canadian Biosystem Engineering Journal* 54 (2012), págs. 223-231.
- [54] K.O.H. Pedersen, K.S. Hansen, S.P. Uwe y P.E. Sørensen. «Wind Turbine Measurement Technique Open Laboratory for Educational Purposes». English. En: *Wind Energy* 11 (2008), págs. 281-295. ISSN: 1095-4244.
- [55] H. Zhang, R. Luna, M. Pilas y J. Wenske. «A study of mechanical torque measurement on the wind turbine drive train—ways and feasibilities». En: *Wind Energy* 21 (sep. de 2018).
- [56] M. Bezziccheri, P. Castellini, P. Evangelisti, C. Santolini y N. Paone. «Measurement of mechanical loads in large wind turbines: Problems on calibration of strain gage bridges and analysis of uncertainty». En: *Wind Energy* 20.12 (2017), págs. 1997-2010.
- [57] M. Nabiyani, F. Khoshnoudian, H. Ebrahimian y B. Moaveni. «Mechanics-based model updating for identification and virtual sensing of an offshore wind turbine using sparse measurements». En: *Structural Control and Health Monitoring* 28 (nov. de 2020).
- [58] T.R. Camp, M.J. Morris, R. Van Rooij, J. Van der Tempel, M.B. Zaaijer, A. Henderson, K. Argyriadis, S. Schwartz, H. Just, W. Grainger y D. Pearce. *Design methods for offshore wind turbines at exposed sites. Final report of the OWTES project*. 2003.
- [59] C. Koukoura, C. Brown, A. Natarajan y A. Vesth. «Cross-wind fatigue analysis of a full scale offshore wind turbine in the case of wind-wave misalignment». En: *Engineering structures* 120 (2016), págs. 147-157.
- [60] F.J.A. Chavez, G. Nava, S. Traversaro, F. Nori y D. Pucci. «Model based in situ calibration with temperature compensation of 6 axis force torque sensors».

- En: *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE. 2019, págs. 5397-5403.
- [61] Y. Sun, Y. Liu y H. Liu. «Analysis Calibration System Error of Six-Dimension Force/Torque Sensor for space robot». En: *Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* (2014), págs. 347-352.
- [62] A. Freddi, Giorgio Olmi y Luca Cristofolini. *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures*. Vol. 4. Ene. de 2015. ISBN: 978-3-319-06085-9.
- [63] K. Gil, C. Chung y J.S. Bang. «Mechanical calibration for the load measurement of a 750kW direct-drive wind turbine generator system (KBP-750D)». En: *Renewable Energy* 79 (2015). Selected Papers on Renewable Energy: AFORE 2013, págs. 177-186. ISSN: 0960-1481.
- [64] Q. Liang, W. Wu, G. Coppola, D. Zhang, W. Sun, Y. Ge e Y. Wang. «Calibration and decoupling of multi-axis robotic Force/Moment sensors». En: *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 49 (2018), págs. 301-308. ISSN: 0736-5845.
- [65] O. Al-Mai, M. Ahmadi y J. Albert. «Design, Development and Calibration of a Lightweight, Compliant Six-Axis Optical Force/Torque Sensor». En: *IEEE Sensors Journal* 18.17 (2018), págs. 7005-7014.
- [66] J. R. Hutchinson. «The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory». En: *Journal of Applied Mechanics* 68.1 (2000), págs. 87-92.
- [67] G. R. Cowper. «The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory». En: *Journal of Applied Mechanics* 33.2 (1966), págs. 335-340.
- [68] N. R. Draper y H. Smith. *Applied Regression Analysis*. Wiley, New York, 1998.
- [69] V. Klein y E.A. Morelli. *Aircraft system identification: theory and practice*. AIAA Education Series, 2006.
- [70] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User (2nd Edition)*. Prentice Hall PTR, 1998. ISBN: 0136566952.
- [71] R.C. Aster, B. Borchers y C.H. Thurber. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. 2013.
- [72] J. Swevers, C. Ganseman, D. B. Tükel, J. De Schutter y H. Van Brussel. «Optimal robot excitation and identification». En: *Transactions on Robotics and Automation* 13 (1997), págs. 730-740.
- [73] M. Driels y U.S. Pathre. «Significance of observation strategy on the design of robot calibration experiments». En: *J. Field Robotics* 7 (1990), págs. 197-223.
- [74] M. Gautier y W. Khalil. «Excitation trajectories for the identification of base inertial parameters of robots». En: *International Journal of Robotics Research* 11.4 (1992), págs. 362-375.
- [75] J.K. Baxsarly. «A study of the equivalence between a gauss-markoff model and its augmentation by nuisance parameters». En: *Series Statistics* 15.1 (1984), págs. 3-35.
- [76] J. Kunert. «Optimal Design and Refinement of the Linera Model with Applications to Repeated Measurements Designs». En: *The Annals of Statistics* 11.1 (1983), págs. 247-257.
- [77] A. Markiewicz. «On dependence structures preserving optimality». En: *Statistics & Probability Letters* 53.4 (2001), págs. 415-419. ISSN: 0167-7152.
- [78] K. Hoffmann. *Applying the wheatstone bridge circuit*. HBM Darmstadt, 1974.
- [79] S.J. Julier y J.K. Uhlmann. «Unscented filtering and nonlinear estimation». En: *Proceedings of the IEEE* 92.3 (2004), págs. 401-422.

- 
- [80] G. Hendeby y F. Gustafsson. «On nonlinear transformations of stochastic variables and its application to nonlinear filtering». En: *Tech. Rep. LiTH-ISY-R-2828, Dept. Electr. Eng, Linköpings universitet*. 2007.
- [81] Joint Committee for Guides in Metrology. *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*. 2008.
- [82] H.H. Ku. «Notes on the Use of Propagation of Error Formulas». En: *Journal of Research of the National Bureau of Standards 70C.4* (1966), págs. 263-273.
- [83] *OpenFAST v3.0.0*. URL: <https://github.com/OpenFAST/openfast>.
- [84] J. Jonkman, S. Butterfield, W. Musial y Scott G. *Definition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development*. Inf. téc. National Renewable Energy Laboratory, 2009.
- [85] Y. Guo, T. Parsons, R. King, K. Dykes y P. Veers. *Analytical Formulation for Sizing and Estimating the Dimensions and Weight of Wind Turbine Hub and Drive-train Components*. Inf. téc. National Renewable Energy Lab.(NREL), Golden, CO (United States), 2015.
- [86] *IEC 61400-1:2029. Wind energy generation systems - Part 1: Design requirements*. Standard. Geneva, CH: International Electrotechnical Commission, feb. de 2019.